

Praca doktorska
21/1987
Michał Piwnik

UWZGLĘDNIENIE
WZMOCNIENIA MATERIAŁU
W ROZWIĄZANIACH PLASTYCZNOŚCI
W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

21/1987

P.269



WARSZAWA 1987

ISSN 0208-5658

Praca doktorska

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 13 maja 1987 r.



56835



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 170 egz. Ark.wyd. 5,49 Ark.druk. 7,75
Oddano do drukarni w maju 1987 r.
Nr zamówienia 319/87.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Michał Piwnik
Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych
IPPT PAN w Warszawie

UWZGLĘDNIENIE WZMOCNIENIA MATERIAŁU W ROZWIĄZANIACH PLASTYCZNOŚCI W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

W s t ę p

Jedną z podstawowych własności charakteryzujących materiały plastyczne jest wzmocnienie, przejawiające się wzrostem wytrzymałości materiału podczas deformacji. Pomijanie tej cechy w obliczeniach wytrzymałości elementów konstrukcyjnych może niejednokrotnie prowadzić do dużych błędów. Choć zjawisko to jest łatwe do obserwacji i matematycznego opisu w jednorodnych i jednoosiowych próbach wytrzymałościowych to w złożonych stanach naprężenia pozostaje ono ciągle otwartym problemem naukowym. Istnieją obecnie co najmniej dwa sposoby opisu tego zjawiska w złożonym stanie naprężenia. Pierwszy z nich, wynikający z teorii poślizgów [1, 2, 3] traktuje wzmocnienie jako wynik wzajemnego blokowania się różnie zorientowanych systemów poślizgu, drugi natomiast zakłada, iż zjawisko wzmocnienia związane jest z translacją, zmianą wymiarów, kształtu oraz orientacji początkowej powierzchni plastyczności podczas deformacji plastycznej. Sformułowane w oparciu o tę koncepcję zagadnienie plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem opisane jest układem równań różniczkowo-algebraicznych, w którym równania statyki sprzężone są z równaniami kinematyki. Układ taki w najprostszym nawet przypadku jest typu eliptycznego [8] i jego rozwiązanie wymaga stosowania specjalnych metod podyktowanych na ogół rodzajem zagadnienia brzegowego. Nieznane są obecnie metody bezpośredniego rozwiązania takiego układu równań

/pewne próby w oparciu o rachunek zaburzeń znaleźć można w [12, 13, 14] /. Istniejące zaś efektywne metody podzielić można na doświadczalno-obliczeniowe [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30] /najliczniej reprezentowane w literaturze/ oraz obliczeniowe [4, 5, 6, 7, 8] . Wspólną cechą tych metod jest dążenie do rozprzężenia równań statyki i kinematyki. W przypadku metod doświadczalno-obliczeniowych wyznaczamy jedno z pól na drodze doświadczalnej drugie zaś numerycznie. W przypadku metod obliczeniowych sprowadzamy wyjściowy układ równań do typu hiperbolicznego i rozwiązujemy go metodą charakterystyk. Z uwagi na dużą złożoność obliczeń w rozwiązaniach tych uwzględnia się jedynie dwie najprostsze hipotezy wzmocnienia: hipotezę wzmocnienia izotropowego i kinematycznego, które w świetle badań doświadczalnych [10, 11] traktuje się jako hipotezy określające skrajne zachowanie się materiałów podczas deformacji. Rozwiązania [4] dotyczą zagadnień ze wzmocnieniem kinematycznym, w których kierunki główne naprężeń nie ulegają zmianie w trakcie deformacji. Rozwiązania ze wzmocnieniem kinematycznym opisują własności anizotropowe materiału /pierwotnie izotropowego/ nabyte w trakcie deformacji. Pełny opis tego zjawiska w ogólnym przypadku wymaga uwzględnienia obrotu kierunków głównych naprężeń. Uzyskanie takich rozwiązań /z obrotem kierunków głównych/ może przyczynić się do pełniejszej oceny hipotezy wzmocnienia kinematycznego w świetle innych stosowanych hipotez, głównie izotropowej i złożonej.

W niniejszej pracy:

- a/ przedstawiono nowe rozwiązanie zagadnienia ze wzmocnieniem kinematycznym z uwzględnieniem zmiany kierunków głównych naprężeń w warunkach płaskiego stanu odkształcenia,
- b/ podano równanie ewolucji środka początkowej powierzchni plastyczności z uwzględnieniem jej obrotu w przestrzeni naprężeń,
- c/ przedstawiono przykład liczbowy monotonicznego i cyklicznego zginania elementu osłabionego podwójnym symetrycznym wycięciem kołowym w warunkach płaskiego stanu odkształcenia z uwzględnieniem wzmocnienia izotropowego i kinematycznego

d/ porównano uzyskane wyniki dla hipotezy wzmocnienia izotropowego i kinematycznego,

e/ oceniono wpływ obrotu kierunków głównych naprężeń na rozwiązanie zagadnienia ze wzmocnieniem kinematycznym,

f/ oszacowano wartości resztowych naprężeń i niejednorodności plastycznej podczas cyklicznego zginania.

Ponadto wyprowadzono nowe związki dla naprężeń wzdłuż charakterystyk przyjmując ogólne prawo wzmocnienia uwzględniające zarówno przemieszczenie się jak i zmianę jej wymiarów oraz orientacji podczas odkształcenia.

W rozdziale I tej pracy przedstawiono przegląd metod doświadczalno-obliczeniowych rozwiązywania całego szeregu zagadnień ze wzmocnieniem na podstawie literatury.

W rozdziale II omówiono charakterystyki materiałowe ciał plastycznych oraz hipotezy i prawa wzmocnienia. Przedstawiono również szczegółowe wyprowadzenie równania ewolucji środka powierzchni plastyczności z uwzględnieniem obrotu kierunków głównych naprężeń.

W rozdziale III omówiono metodę obliczeniową rozwiązywania zagadnień ze wzmocnieniem. Przedstawiono nowe rozwiązanie zagadnienia ze wzmocnieniem kinematycznym i mieszanym z uwzględnieniem zmiany kierunków głównych naprężeń podczas deformacji /w warunkach płaskiego stanu odkształcenia/. Rozwiązanie to uzyskano na gruncie metody charakterystyk i podano je w postaci równań charakterystyk oraz związków wzdłuż nich. Przedyskutowano również problem anizotropii materiałów oraz sposoby opisu tego zjawiska w warunkach płaskiego stanu odkształcenia.

W rozdziale IV przedstawiono ogólny i szczegółowy algorytm obliczeń omawianego zagadnienia, dla przyjętych hipotez wzmocnienia, przeanalizowano stosowane metody numeryczne i schematy iteracyjne rozwiązywania równań charakterystyk i związków wzdłuż nich oraz przedstawiono iteracyjną metodę całkowania równania ewolucji powierzchni płynięcia w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Na zakończenie tego rozdziału omówiono program obliczeniowy zagadnienia monotonicz-

nego i cyklicznego zginania elementu osłabionego dwustronnym symetrycznym wycięciem kołowym w warunkach płaskiego stanu odkształcenia dla materiału bez wzmocnienia oraz ze wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym.

W rozdziale V przedstawiono wyniki obliczeń uzyskane na podstawie omówionego programu dla materiału sztywno-idealnie plastycznego, materiału sztywno plastycznego ze wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym z uwzględnieniem obrotu kierunków głównych naprężeń w trakcie deformacji oraz przedstawiono dyskusję tych wyników i wnioski końcowe.

R o z d z i a ł I

METODY DOŚWIADCZALNO-OBLICZENIOWE UWZGLĘDNIAJĄCE WZMOCNIENIE MATERIAŁU

I.1. Metoda oparta na doświadczalnie wyznaczonym polu kinematycznym

Metoda analizy naprężeń i odkształceń oparta na obserwacji początkowo kwadratowej siatki zwana „metodą wizjoplastyczności” opracowana została w połowie lat pięćdziesiątych [15, 16, 17]. Podstawy teoretyczne tej analizy oraz sposób obliczania odkształceń i naprężeń omówiono na przykładzie procesu wyciskania z matrycy w kształcie cylindra [15]. Osiowo symetryczne próbki walcowe / ϕ 109-86 mm/ wykonano z ołowiu z dwóch połówek. Na płaszczyźnie podziału, którą stanowiła płaszczyzna południkowa jednej z połówek naniesiono metodą mechanicznego nacinania, siatkę kwadratową złożoną z linii odległych od siebie o 2,5 mm. Dwie połówki próbki składano w matrycy i obciążano przyrostowo powodując wypływ materiału z matrycy z prędkością około 2,5 mm/min. Po każdym kroku odpowiadającym przemieszczeniu tłoka o wartość w granicach 0,25 do 0,5 mm demontowano matrycę i wykonywano, na specjalnym stanowisku, zdjęcie zdeformowanej siatki. Na podstawie kilku kolejnych zdjęć, łącząc ze sobą punkty odpowiadające położeniom węzłów siatki, określono linie prądu w zdeformowanym materiale. Porównanie kolejnych zdjęć pozwala na określenie zakresu, w którym zachowane są warunki ustalonego płynięcia. Znając wartości prędkości przemieszczeń i ich kierunki obliczano składowe prędkości V_z i V_r odpowiednio w kierunkach z i r . Różniczkując graficznie funkcje rozkładu poszczególnych składowych prędkości wzdłuż promienia lub wysokości obliczano przyrosty odkształceń. Prędkość odkształcenia w kierunku obwodowym $\dot{\epsilon}_\theta$ obliczano z warunku nieściśliwości. Mając składowe obliczano w poszczególnych punktach intensywność przyrostów odkształceń:

$$(1.1) \quad d\epsilon_i = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} (d\epsilon_z - d\epsilon_r)^2 + (d\epsilon_r - d\epsilon_\theta)^2 + (d\epsilon_\theta - d\epsilon_z)^2 + \frac{3}{4} d\lambda_z^2 \right]^{1/2}$$

Na podstawie określonego w ten sposób pola przyrostów odkształceń obliczono stan naprężenia ze związków Lévy-Kisena:

$$(1.2) \quad \frac{d\epsilon_r}{\epsilon_r + \epsilon} = \frac{d\epsilon_z}{\epsilon_z + \epsilon} = \frac{d\epsilon_\theta}{\epsilon_\theta + \epsilon} = \frac{d\gamma_{rz}}{2\epsilon_{rz}} = d\lambda \geq 0$$

gdzie $\epsilon = \frac{1}{3}(\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z)$

oraz równań równowagi:

$$(1.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \end{cases}$$

Wykorzystując wynikające z prawa płynięcia związku typu:

$$(1.4) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_z = \dot{\lambda}(\epsilon_z + \epsilon) \\ \dot{\epsilon}_r = \dot{\lambda}(\epsilon_r + \epsilon) \end{cases}$$

wyrażamy poszczególne składowe naprężenia w postaci:

$$(1.5) \quad \sigma_z = \frac{1}{\dot{\lambda}}(\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r) + \sigma_r \quad \text{itd.}$$

Z różniczkowania (1.5.) względem r otrzymamy

$$(1.6) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r}{\dot{\lambda}} \right)$$

Zastępując pochodną $\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}$ przez wyrażenie wynikające z drugiego równania równowagi (1.3.) i wyrażając występujące tam wielkości w taki sam sposób jak w (1.6.), w funkcji prędkości odkształcenia otrzymamy

$$(1.7) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r}{\dot{\lambda}} \right) - \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta}{\dot{\lambda} r} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma_{rz}}{2\dot{\lambda}} \right)$$

Prawa strona tej zależności wyrażona jest w składowych prędkości odkształcenia i może być całkowana graficznie dla danych warunków brzegowych i znanej wartości σ_z , którą wyznaczamy z badań własności mechanicznych materiału /np. przy jednoosiowym ściskaniu próbki cylindrycznej/. Poszukiwana skalarna wielkość $\dot{\lambda}$ określona jest następującym związkiem:

$$(1.8) \quad \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_i}{\sigma_i}$$

gdzie $\dot{\epsilon}_i$ oznacza intensywność prędkości odkształcenia, a σ_i intensywność naprężenia.

Obliczenia wykonano dla stałej wartości granicy plastyczności wynoszącej 1400 [MPa] niezależnej od odkształceń.

Zależność (1.7.) wyraża się wówczas następująco:

$$(1.9) \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} = \frac{2}{3} \sigma_i \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{\epsilon}_z - \dot{\epsilon}_r}{\dot{\epsilon}_i} \right) - \left(\frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_\theta}{r \dot{\epsilon}_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{\gamma}_{rz}}{\dot{\epsilon}_i} \right) \right]$$

Różniczkując graficznie tę zależność obliczono rozkłady naprężeń σ_z wzdłuż promienia r dla kilku przekrojów na różnych wysokościach z . Przyjęto przy tym, że wypadkowa siła jest taka sama we wszystkich przekrojach i równa zmierzonemu w czasie doświadczenia obciążeniu maszyny wytrzymałościowej. Znając wartości naprężenia σ_z w poszczególnych punktach, możemy wykorzystując związki prawa płynięcia (1.2) obliczyć pozostałe składowe naprężenia.

W przykładzie liczbowym [15] mającym zilustrować efektywność zaproponowanego schematu przeprowadzono obliczenia dla materiału sztywno-plastycznego bez wzmocnienia. Podkreślono tam jednak, że nie zwiększając w istotny sposób pracochłonności obliczeń można uwzględnić zarówno wzmocnienie jak i efekt prędkości odkształcenia. Zachodzi wówczas konieczność wyznaczania intensywności odkształceń poprzez całkowanie przyrostów intensywności odkształcenia wzdłuż linii prądu, które w ustalonych przepływach są aktualną drogą płynięcia cząstki materiału.

Zaproponowana w [15,16,17] metoda analizy stanu odkształcenia i naprężenia w geometrycznie dwuwymiarowych zagadnieniach plastycznego płynięcia nie znalazła w początkowym okresie szerszego zastosowania ze względu na jej pracochłonność. Metoda ta wymaga przeprowadzenia złożonych doświadczeń modelowych na stanowiskach specjalnie zaprojektowanych do rozpatrywanego procesu płynięcia, poza tym opracowanie wyników wymaga różniczkowania składowych prędkości płynięcia i otrzymanych składowych prędkości odkształcenia po współrzędnych r i z oraz całkowania po przekroju.

Stosowane przez autorów metody graficzne dawały wyniki obarczone tak dużym błędem, że otrzymany w rezultacie rozkład naprężeń dawał jedynie jakościowy obraz. Dopiero zastosowanie komputerów pozwoliło uzyskiwać dokładne wyniki i metoda ta znalazła szerokie zastosowanie w rozwiązywaniu szeregu zagadnień brzegowych

Dla ustalonych, osiowo-symetrycznych przepływów plastycznych zastosowano koncepcję funkcji płynięcia Ψ [16]. Składowe prędkości płynięcia V_z i V_r w kierunku osiowym i promieniowym wyrażają się następująco:

$$(1.10) \quad \begin{cases} V_r = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ V_z = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \end{cases}$$

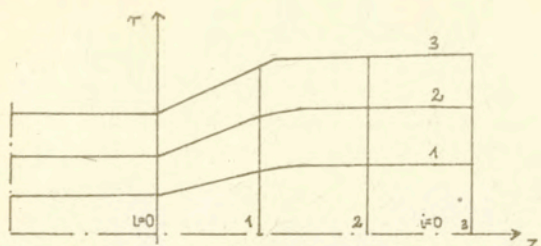
skąd składowe prędkości odkształcenia określa się ze wzorów:

$$(1.11) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \\ \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} \\ \dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \\ \dot{\epsilon}_\theta = \frac{1}{2\pi r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{cases}$$

W osiowo-symetrycznych procesach wyciskania funkcja płynięcia Ψ określana jest [18,19] jako wydatek przepływu, odpowiadający danej linii prądu w niezdeformowanym obszarze. Dla danej linii prądu funkcja płynięcia ma stałą wartość i określona jest jako

$$(1.12) \quad \Psi_i = \pi R_i^2 V_0$$

gdzie i oznacza numer kolejny linii prądu, R - odległość danej linii od osi z w nieodkształconej części, V_0 - prędkość tłoka wywołującego ruch (rys. I.1).



rys.1. Linie prądu

W pracach [19,20] nanoszono kwadratowe siatki o oczkach 0,5 mm w przekroju modelu metodą fotograficznego drukowania. Po zdeformowaniu próbki wyznaczano współrzędne r poszczególnych linii w kilkunastu równo oddalonych przekrojach z na specjalnym mikroskopie elektronowym. Określone w ten sposób wartości wprowadzono jako dane do maszyny cyfrowej. Program obliczeń obejmował:

wygładzanie rozkładu funkcji Ψ wzdłuż r i z ,
 obliczenie rozkładu prędkości V_r i V_z poprzez numeryczne różniczkowanie funkcji (1.10), obliczanie składowych prędkości odkształcenia (1.11) i następnie poprzez jej całkowanie po czasie wzdłuż linii prądu, intensywności odkształcenia, obliczanie składowej naprężenia σ_z poprzez całkowanie zależności (1.7) przy spełnieniu warunku, żeby wypadkowa siła na wyjściu była równa zero.

W pracy tej przyjęto następującą postać funkcji umocnienia:

$$(1.13) \quad \sigma_i = C \epsilon_i^n$$

gdzie C i n są stałymi materiałowymi, skalarną wielkość λ określamy w danym punkcie obszaru plastycznego jako

$$(1.14) \quad \lambda = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_i}{C \epsilon_i^n}$$

W ten sposób uwzględniono wzmocnienie materiału w obliczeniach stanu naprężenia. Pozostałe składowe tensora naprężenia obliczono ze związków wynikających z prawa płynięcia

$$(1.15) \quad \begin{cases} \sigma_r = \sigma_z + \frac{\dot{\epsilon}_r - \dot{\epsilon}_z}{\lambda} \\ \sigma_\theta = \sigma_z + \frac{\dot{\epsilon}_\theta - \dot{\epsilon}_z}{\lambda} \\ \tau_{rz} = \frac{\dot{\gamma}_{rz}}{2\lambda} \end{cases}$$

W przedstawionym w pracy [19] przykładzie obliczeń wyciskania przez stożkową matrycę o kącie rozwarcia z trzykrotną redukcją przekroju poprzecznego, podano rozkład odkształceń i naprężeń w obszarze uplastycznionym oraz przeprowadzono na ich podstawie analizę kształtu matrycy i dobór stopnia redukcji przekroju w ten sposób, żeby ograniczyć strefę naprężeń rozciągających na wyjściu materiału. Kryterium to jest istotne z technologicznego punktu widzenia, bowiem zabezpiecza przed możliwością występowania pęknięć w środku wyciśniętego pręta.

Teoretyczna analiza procesów obróbki plastycznej jest bardzo trudna i możliwa w ogóle po wprowadzeniu szeregu bardzo istotnych dla przebiegu procesu założeń upraszczających. Metoda wizjoplastyczności umożliwia przeprowadzenie analizy stanu naprężenia i odkształcenia w takich procesach, a dzięki wykorzystaniu danych doświadczalnych unikamy wprowadzenia zbyt drastycznych /np. odnośnie tarcia i rozkładu naprężeń na powierzchni matrycy/ założeń. Możliwość właściwego doboru parametrów obróbki i kształtu narzędzia uzasadnia stosowanie tej dość złożonej techniki obliczeniowej.

Interesującym przykładem zastosowania wizjoplastyczności jest praca [21], gdzie analizowano stan odkształcenia i naprężenia w zginanej próbce z karbem jaka używana jest w badaniach materiałowych próby Charpy'ego. Stosowana tam próbka z miękkiej stali składała się z dwóch części połączonych śrubami. Na środkowej powierzchni kontaktu jednej z połówek nacinano kwadratową siatkę o oczkach 0,2 mm. Po złożeniu próbki zginano ją statycznie o kąt 3° i po odciążeniu i rozłożeniu na dwie części fotografowano zdeformowaną siatkę powiększając zdjęcie siedmiokrotnie w stosunku do wymiarów rzeczywistych. Następnie powierzchnie kontaktu dwóch połówek polerowano bardzo starannie i naci-

no nową siatkę, po czym zginano próbkę o dalsze 3° . Procedurę tę powtarzano czterokrotnie i dla każdego etapu obliczano składowe przemieszczenia jako różnice współrzędnych odpowiadających sobie węzłowych punktów po i przed deformacją. Współrzędne te wyznaczano na mikroskopie ekranowym o powiększeniu 20-krotnym. Tak więc całkowite powiększenie przy odczytywaniu przemieszczeń w stosunku do wymiarów rzeczywistych wynosiło 140 razy. Zmierzone współrzędne poszczególnych punktów przed i po odkształceniu wprowadzono jako dane do maszyny cyfrowej. Program obliczeń obejmował liczenie przemieszczeń i ich uśrednianie wygładzające wzdłuż r i z , obliczanie składowych przyrostu odkształcenia, przy czym uwzględniano również kwadratowe człony o ile przyrost odkształceń przekraczał wartość 10%. Następnie wyznaczono intensywność odkształceń, całkując po czasie przyrost intensywności odkształceń wzdłuż chwilowych linii płynięcia. Następnie obliczano składowe naprężenia na podstawie równania równowagi i prawa płynięcia przyjmując trzydecimkową aproksymację krzywej umocnienia materiału. Dla oceny dokładności metody sprawdzono, czy wyznaczone pole naprężeń spełnia drugie równanie równowagi (1.3), które nie było wykorzystywane w obliczeniach. Stwierdzono, że równanie to spełnione jest z błędem nie przekraczającym 10%.

Innym przykładem zastosowań metody wizjoplastyczności jest analiza procesu skrawania metali. Np. w pracy [22] badaną próbkę materiału w kształcie prostopadłościenną kostki umieszczono między płytami szklanymi, których celem było zapewnienie warunków płaskiego stanu odkształcenia. Kwadratowa siatka o oczkach 0,025 mm nacinana była na bocznej powierzchni próbki przy pomocy mikroskopu. Jej deformację wywołaną ruchem noża skrawającego rejestrowano przy pomocy kamery filmowej. Dzięki boczemu oświetleniu, przy którym na taśmę filmową padało tylko światło odbite od ścian rowków stanowiących siatkę można było wykonać dwa zdjęcia odpowiadające kolejnym fazom ruchu na jednej klatce filmowej, co znacznie zwiększyło dokładność określenia składowych przemieszczeń V_x i V_y węzłowych punktów

siatki. Przemieszczenia te są proporcjonalne do prędkości płynięcia i na ich podstawie, po graficznym wygładzeniu ich rozkładu wzdłuż współrzędnych wyznaczono składowe prędkości odkształcenia metodą graficznego różniczkowania.

Stan naprężenia w obszarze uplastycznionym wyznaczono w sposób następujący: Na podstawie znajomości pola prędkości odkształceń wyznaczono kierunki maksymalnych prędkości odkształceń postaciowych skąd zakładając, że kierunki te pokrywają się z kierunkami największych naprężeń ścinających określono siatkę charakterystyk dla naprężeń. Wykorzystując dalej związki wzdłuż charakterystyk dla materiału niejednorodnego obliczono stan naprężenia na drodze numerycznego całkowania odpowiednich zależności startując z linii nie będącej charakterystyką, na której znany jest rozkład naprężeń głównych. Sprawdzeniem dokładności obliczeń było porównanie krzywej umocnienia materiału z próby jednoosiowego ściskania z krzywą określoną na podstawie obliczonego stanu naprężenia i odkształcenia w poszczególnych punktach obszaru plastycznego. Intensywność odkształcenia obliczano na drodze całkowania po czasie intensywności prędkości odkształcenia wzdłuż linii płynięcia materiału. Otrzymałą zgodność z dokładnością do 10% między tymi krzywymi autorzy interpretują jako potwierdzenie poprawności obliczeń.

Podobny sposób opracowania wyników doświadczeń wykorzystano do analizy wyciskania przez zbieżną matrycę w warunkach płaskiego stanu odkształcenia [23]. Przemieszczenia wyznaczono porównując na dwóch kolejnych zdjęciach obraz początkowo kwadratowej siatki naniesionej w środkowym przekroju. Budując następnie wykresy zależności składowych przemieszczeń do funkcji czasu obliczono prędkości przemieszczeń, skąd wyznaczono prędkości odkształceń i kierunki największych prędkości odkształcenia postaciowego. Zakładając izotropowość materiału zbudowano na tej podstawie pole linii poślizgu. Stan naprężenia wyznaczono całkując zależności wzdłuż charakterystyk dla materiału niejednorodnego. Wartość granicy plastyczności w danym punkcie obszaru plastycznego wyznaczono z krzywej umocnienia materiału. Intensywność odkształcenia obliczono całkując intensywność prędkości odkształcenia wzdłuż linii. Spośród innych prac dotyczących tego problemu można wymienić jeszcze [24, 25, 26].

I.2. Metoda oparta na doświadczalnie wyznaczonym rozkładzie twardości

Istotą tej metody jest założenie, że twardość materiału jest funkcją intensywności naprężenia. Mierząc rozkład twardości w odkształconym przekroju możemy, po uprzednim wycechowaniu badanego materiału, określić rozkład intensywności naprężenia, na podstawie którego obliczamy rozkład naprężeń w obszarze plastycznym. Związek między różnymi miarami twardości a granicą plastyczności został zauważony w XIX wieku. Wyznaczając empiryczne zależności między intensywnością naprężenia a twardością dla różnych metali przyjmowano liniową zależność w postaci:

$$(1.16) \quad \sigma_i = A \cdot H \quad \text{dla} \quad \sigma_i \geq \sigma_0$$

gdzie A - współczynnik proporcjonalności

H - twardość

σ_0 - granica plastyczności

Dla różnych materiałów zależność (1.16) ma inną postać, którą określa się na podstawie doświadczeń cechujących przy prostych, jednoosiowych schematach obciążenia.

Zasadniczą sprawą przy wyznaczaniu intensywności naprężenia na podstawie pomiaru twardości i krzywej cechującej jest określenie wpływu złożonego stanu naprężenia na otrzymane rezultaty. W [27] przedstawiono wyniki badań doświadczalnych dla ośmiu różnych materiałów. Próbki rurkowe poddawane były różnym kombinacjom siły osiowej, ciśnienia wewnętrznego i momentu skręcającego. Obciążenia realizowano przyrostami, po których próbkę obciążano i wykonywano 10 pomiarów twardości Vickersa. Z doświadczeń wyznaczono wykresy twardości w funkcji intensywności naprężenia i intensywności odkształcenia. Dla wszystkich badanych materiałów rozrzuty punktów doświadczalnych, dla różnych stanów naprężenia, nie przekraczały 15 % dla wykresu $HV = f(\sigma_i)$ i 20 % dla wykresu $HV = f(\epsilon_i)$ w stosunku do wykresu cechującego otrzymanego przy jednoosiowym stanie naprężenia.

Na postać zależności twardości od intensywności odkształcenia ma wpływ prędkość odkształcenia i temperatura przy jakiej przeprowadzamy obciążenie. Dlatego cechowanie powinno być wykonywane w warunkach odpowiadających badanemu procesowi płynięcia plastycznego. Metoda oceny własności mechanicznych materiału na podstawie pomiaru twardości jest bardzo wygodna i szeroko stosowana jako próba technologiczna. Związki między różnymi miarami twardości a trwałymi odkształceniami czy wywołującym je stanem naprężenia są związkami empirycznymi i ich jednoznaczność jest ciągle sprawą dyskusyjną. Wynika to z innego charakteru pomiarów twardości, pomiarów odkształceń i naprężeń przy jednoosiowym rozciąganiu i ściskaniu. Badając zachowanie się materiału przy jednoosiowym stanie naprężenia uzyskujemy średnie wartości naprężeń i odkształceń, podczas gdy pomiar twardości ma zawsze charakter lokalny.

Niektórzy autorzy [27] uważają, że twardość jest jednoznaczną funkcją intensywności naprężenia wywołującego odkształcenia plastyczne, natomiast związek między twardością a intensywnością odkształceń plastycznych wynika z hipotezy o jednej krzywej umocnienia. Dlatego też wyznaczanie intensywności naprężenia z pomiaru twardości obarczone jest mniejszym błędem niż wyznaczanie intensywności odkształcania.

Innego zdania są autorzy [28], uważają oni, że mikro-twardość Vickersa jest jednoznaczną funkcją intensywności odkształceń plastycznych niezależną od sposobu w jaki te odkształcenia otrzymano. W wykonanym w [28] doświadczeniu osiowo-symetryczna próbka ze stali stopowej wyciskana była przez stożkową matrycę o kącie rozwarcia 90° z dwukrotną redukcją przekroju. W środkowej płaszczyźnie składającej się z dwóch połówek próbki naniesiona była kwadratowa siatka, z deformacji której obliczano intensywność odkształcenia w poszczególnych punktach obszaru uplastycznionego. W punktach węzłowych zmierzono następnie mikro-twardość Vickersa przy nacisku 9.81 [N] . Intensywność odkształcenia zmieniła się w zakresie od 0 do 2,5 %, a liczba twardości od $1300 + 3100 \text{ [MPa]}$. Rozrzuty pomiarów twardości mieściły

się w przedziale 100 [MPa]. Wszystkie punkty doświadczalne odcięte we współrzędnych twardość-intensywność odkształcenia wyznaczały jedną krzywą, której przebieg pokrywał się z krzywą cechującą otrzymaną z doświadczeń przy jednoosiowym ściskaniu próbek cylindrycznych. Zaletą opisanego sposobu weryfikacji zależności między twardością a intensywnością odkształcenia jest możliwość przeprowadzenia badań w dużym zakresie odkształceń na jednej próbce. Mimo tych wszystkich niejasności i niedokładności oceny własności mechanicznych materiału na podstawie próby twardości przyznać trzeba, że metoda ta nie jest pozbawiona zalet. Pomiar twardości jest stosunkowo prosty, a jego wykorzystanie do analizy stanu naprężenia nie jest, tak jak opisana poprzednio metoda siatek, ograniczone tylko do badań modelowych ale może być stosowane do rzeczywistych detali. Po określeniu rozkładu intensywności naprężenia w interesującym nas obszarze plastycznym na podstawie pomiarów twardości i krzywej cechującej dla danego materiału, do obliczenia stanu naprężenia wykorzystujemy równania plastycznej niejednorodności [27]. Rozwiązujemy rozpatrywane zagadnienie brzegowe przyjmując jako znane wartości granicy plastyczności materiału w poszczególnych punktach. W ten sposób możemy uwzględnić rzeczywiste zachowanie się badanego materiału w obliczeniach stanu naprężenia. Jeśli zachodzi również konieczność wyznaczenia stanu odkształcenia, wówczas sytuacja jest trudniejsza. Dla pewnych zagadnień brzegowych możemy, stosując formalizm plastycznej niejednorodności wyznaczyć na podstawie znajomości siatki charakterystyk dla naprężeń hodograf prędkości, stąd obliczamy poszczególne składowe tensora prędkości odkształcenia. W bardziej złożonych zadaniach stan odkształcenia określa się na podstawie doświadczalnie wyznaczonego pola prędkości, posługując się metodą badania deformacji początkowo kwadratowej siatki.

W [27] wymienia się kilkanaście przykładów zastosowań tej metody, ale w większości z nich pomiar twardości był stosowany równolegle z analizą deformacji początkowo kwadratowej siatki. Jedynie w przypadku analizy stanu naprężenia

nia w szyjce rozciąganego pręta [27] obliczenia przeprowadzono tylko w oparciu o doświadczalnie wyznaczony rozkład twardości. Po rozciągnięciu pręta aż do wyraźnego utworzenia się szyjki przecięto próbkę wzdłuż osi symetrii i po mechanicznym wygładzeniu zmierzono rozkład twardości HRB w obszarze zlokalizowanej deformacji. Z krzywej cechowania dla tego materiału, określonej z prób jednoosiowego ściskania cylindrycznych próbek wyznaczono rozkład intensywności naprężenia. Wykorzystując dalej równania plastycznej niejednorodności w warunkach osiowej symetrii, przy założeniu hipotezy Haara-Kármána rozwiązano, poczynając od swobodnego brzegu zagadnienie Couchy'ego i mieszane i obliczono składowe stanu naprężenia w szyjce. W innych pracach pomiar twardości i określony na tej podstawie rozkład intensywności naprężenia w obszarze uplastycznionym traktowano jako uzupełnienie metody wizjoplastyczności. Sposób ten wykorzystano przy analizie osiowo-symetrycznego wyciskania pręta [29]. Składowe prędkości odkształcenia obliczono na podstawie deformacji naniesionej w środkowej płaszczyźnie próbki, kwadratowej siatki. Następnie w 120 punktach odkształconego obszaru zmierzono twardość Vickersa i z krzywej cechowania badanego materiału określono rozkład intensywności naprężenia. W ten sposób wyznaczono wszystkie wielkości występujące po prawej stronie prawa płynięcia:

$$(1.17) \quad S_{ij} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{d\epsilon_i} d\epsilon_{ij}$$

gdzie S_{ij} jest dewiatorem naprężeń, $d\epsilon_{ij}$ - tensorem przyrostu odkształcenia, $d\epsilon_i$ - intensywnością przyrostu odkształcenia, σ_i - intensywnością naprężenia.

Nieznaną wartość ciśnienia hydrostatycznego obliczono całkując równanie równowagi.

W [30] przedstawiono zastosowanie opisanej metody do analizy stanu naprężenia w procesie obróbki plastycznej na gorąco. Rozpatrzono tam przykład osiowo-symetrycznego wyciskania przez stożkowe matryce o różnych kątach rozwarcia. Wyciskana próbka nagrzana była do temperatury 530°C,

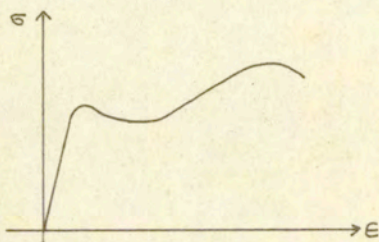
a temperaturę matrycy utrzymywano w granicach 350°C – 380°C . Prędkości odkształcenia i intensywność odkształcenia obliczano tak, jak w metodzie wizjoplastyczności, z obrazu odkształconej siatki naniesionej na środkowej płaszczyźnie składającej się z dwóch części próbki. Na powierzchni drugiej części zmierzono twardość w poszczególnych punktach odkształconego materiału. Poddając następnie cylindryczne próbki o średnicy 10 mm i wysokości 15 mm jednoosiowemu ścisłaniu w różnych temperaturach wyznaczono krzywe cechowania $HV = f(\epsilon_i)$; $HV = f(\epsilon_i)$ dla temperatur 300, 400, 450, 500, 550 °C. Mając więc w poszczególnych punktach wyznaczoną twardość i intensywność odkształcenia można z krzywych cechowania określić rozkład temperatur, a następnie intensywność naprężenia z wykresu $HV = f(\epsilon_i)$ dla danej temperatury. Obliczenie składowych naprężenia przeprowadzono w sposób poprzednio opisany.

R o z d z i a ł II

MODELE MATERIAŁÓW I HIPOTEZY WZMOCNIENIA

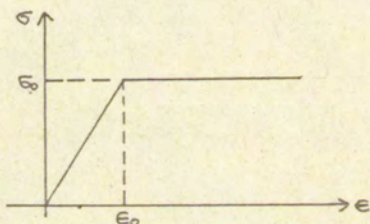
II.1. Modele materiałów ze wzmocnieniem

Własności materiału dla jednoosiowego stanu naprężenia można ocenić na podstawie wykresu rozciągania we współrzędnych σ, ϵ (rys. II.1.).



rys. II.1. Wykres rozciągania dla stali niskowęglowej [31].

Dla materiałów o niewielkim wzmocnieniu plastycznym wykres rozciągania (rys. II.1.) można aproksymować wykresem przedstawionym na (rys. II.2.).



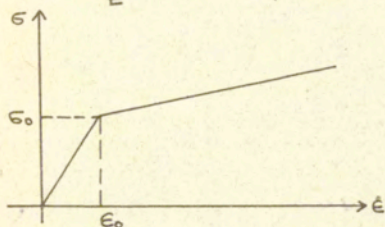
rys. II.2. Modelowy schemat rozciągania materiału sprężysto idealnie plastycznego

Przez σ_0 oznaczamy tu granicę plastyczności przy jednoosiowym rozciąganiu przez E moduł sprężystości.

W przypadku dokładniejszej aproksymacji wykresu rozciągania dla materiałów wykazujących większe wzmocnienie plastyczne wykres rozciągania można aproksymować w pewnym zakresie odkształceń funkcją liniową postaci [31]:

$$(2.1) \quad \sigma = A + E_1 \epsilon$$

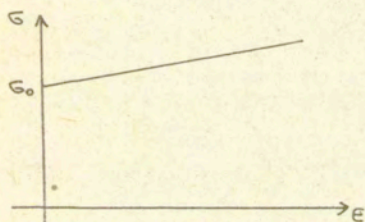
$$(2.2) \quad A = 1 - \frac{E_1}{E} \quad \text{gdzie } E_1 \text{ jest modułem wzmocnienia}$$



rys. II.3. Modelowy schemat rozciągania materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem

W przypadku granicznym gdy $E_1 = 0$ otrzymujemy równanie dla materiału sztywno idealnie plastycznego. W przypadku granicznym, gdy $E \rightarrow \infty$ mówimy o materiale sztywno-plastycznym o charakterystyce:

$$(2.3) \quad \sigma = \sigma_0 + E_1 \epsilon \quad (\text{rys. II.4.})$$

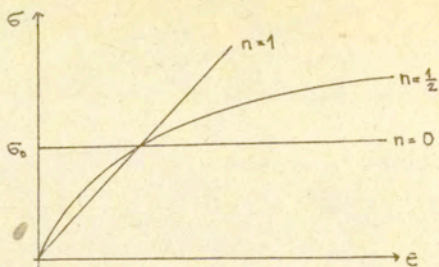


rys. II.4. Modelowy schemat rozciągania materiału sztywno plastycznego ze wzmocnieniem liniowym

Dla materiałów takich jak stopy aluminium lub metale kłobrowe wykres rozciągania aproksymować można następującą funkcją [31]:

$$(2.4) \quad \sigma = K \epsilon^n, \quad \epsilon_0 \leq \epsilon \leq \epsilon^*, \quad 0 \leq n \leq 1, \quad \text{gdzie}$$

K jest stałą materiałową o wymiarze naprężenia a n jest wskaźnikiem wzmocnienia.

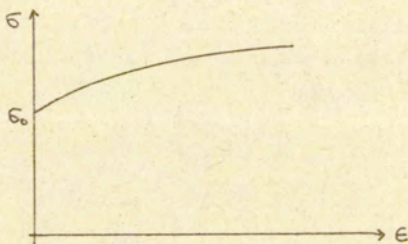


rys. II.5. Modelowy schemat rozciągania materiału sprężysto plastycznego ze wzmocnieniem potęgowym

W przypadku granicznym gdy $n=0$ otrzymujemy opis materiału sztywno-idealnie plastycznego.

Jednym z uogólnień (2.4.) jest a/ równanie P. Ludwika

$$(2.5) \quad \sigma = \sigma_0 + K \epsilon^n \quad 0 \leq n \leq 1$$



rys. II.6. Modelowy schemat rozciągania materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem potęgowym

oraz b/ równanie Ramberga-Osgooda [31]:

$$(2.6) \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^n \quad 0 \leq n \leq 1$$

Przy $m = \frac{1}{n}$, $E \rightarrow \sigma$ równanie to przechodzi w równanie (2.4).

Własności plastyczne materiału w złożonym stanie naprężenia opisujemy na podstawie tzw. hipotezy jednej krzywej /jednolitej krzywej/ sformułowanej w 1926 r. przez M. Rosa i A. Eichingera [32]. Istotą tej hipotezy jest założenie, że dla pewnej klasy procesów odkształcenia zachodzi jednoznaczna zależność między intensywnością naprężeń σ_i

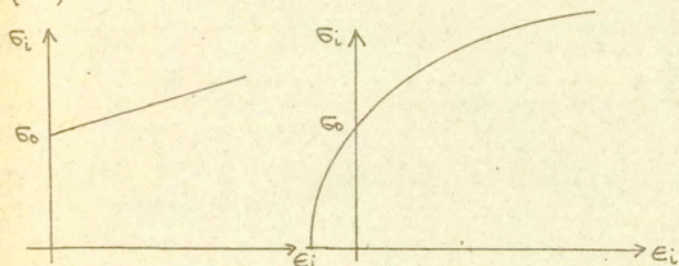
i intensywnością odkształceń w postaci:

$$(2.7) \quad \sigma_i = f(\epsilon_i)$$

przy czym postać funkcji f określa się na podstawie wykresu rozciągania dla jednoosiowego stanu naprężenia. Hipoteza ta została dobrze potwierdzona doświadczalnie dla wielu materiałów w zakresie obciążeń proporcjonalnych [31]. Przechodząc następnie do aproksymacji krzywej rozciągania /patrz równania (2.3) i (2.5)/ możemy przyjąć następujące charakterystyki dla materiału plastycznego ze wzmocnieniem /w złożonym stanie naprężenia/:

$$(2.8) \quad \sigma_i = \sigma_0 + H\epsilon_i \quad \text{lub}$$

$$(2.9) \quad \sigma_i = K\epsilon_i^n \quad 0 < n < 1$$



rys. II.7. Charakterystyki materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem w złożonym stanie naprężenia

W równaniach (2.8) i (2.9) musi być niemalejącą funkcją odkształceń plastycznych. Warunek taki spełnia parametr F. Odqvista zdefiniowany następująco [33]:

$$(2.10) \quad \epsilon_i = \int_0^t (\dot{\epsilon}_i \dot{\epsilon}_i)^{1/2} dt \quad \text{gdzie}$$

$\dot{\epsilon}_i$ jest intensywnością prędkości odkształceń plastycznych. Parametr Odqvista można traktować jako długość drogi danego punktu w dziewięciu wymiarowej przestrzeni odkształceń.

11.2. Hipotezy i prawa wzmocnienia

Dla pewnej klasy materiałów można przyjąć, że na danym etapie deformacji plastycznej związek (2.7) nawiązuje do hipotezy Hubera-Misesa, w myśl której intensywność naprężeń proporcjonalna jest do drugiego niezmiennika dewiatora naprężeń $\epsilon_i = \frac{\tau_2}{\sqrt{3}}$. Zapiszmy warunek Hubera-Misesa w następującej postaci:

$$(2.11) \quad J_2 - k^2(\gamma) = 0 \quad , \quad \text{gdzie}$$

$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$, a funkcje $k(\gamma)$ można traktować jako funkcję parametru Odqvista (2.10) $k(\epsilon_i)$ lub parametru pracy plastycznej $k(\omega)$, gdzie

$$(2.12) \quad \omega = \int \epsilon_{ij} d\epsilon_{ij}$$

Związek (2.11) możemy zapisać następująco:

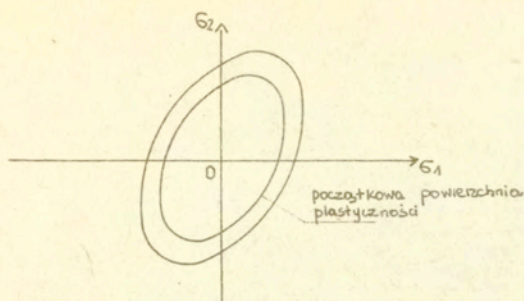
$$(2.13) \quad \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} - k^2(\gamma) = 0$$

D. Bland [34] wykazał, że funkcje $k(\epsilon_i)$ i $k(\omega)$ są sobie równoważne jeśli warunek plastyczności można opisać jednorodną funkcją składowych stanu naprężenia pierwszego lub drugiego stopnia. Jeśli znane jest prawo wzrostu funkcji podczas plastycznej deformacji materiału wówczas równanie (2.13) opisuje wzmocnienie izotropowe materiału (rys. II.8)

Przyjmijmy do dalszych rozważań następującą postać funkcji $k(\epsilon_i)$:

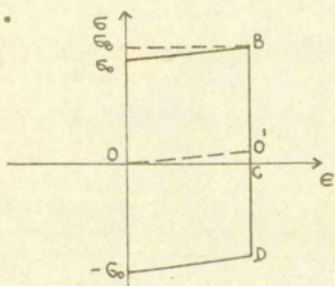
$$(2.14) \quad k(\epsilon_i) = k_0 (1 + H \epsilon_i) \quad \text{gdzie} \quad k_0 = \sigma_0 / \sqrt{3} ,$$

H jest modulem wzmocnienia materiału .



rys. II.8. Izotropowe wzmocnienie plastyczne .

Hipoteza wzmocnienia izotropowego nie opisuje efektu Bauschingera. Materiały rzeczywiste wykazują pewien efekt Bauschingera zwłaszcza w początkowych stadiach odkształceń plastycznych. W przypadku rozpatrywania zagadnień, w których realizowany jest proces obciążania bez pośrednich odciążań efekt ten nie odgrywa istotnej roli, natomiast w obciążeniach z pośrednimi odciążeniami np. w obciążeniach cyklicznych udział tego efektu jest istotny. Istotę efektu Bauschingera ilustruje poniższy wykres rozciągania - ściskania dla materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem liniowym (2.3) [35].



rys. II.9. Schemat ideowy efektu Bauschingera [35]

Po rozciągnięciu próbki /jednoosiowy stan naprężenia/ do stanu plastycznego w punkcie B następuje odciążenie do punktu C i następnie ściskanie. W punkcie D materiał znowu osiąga stan plastyczny. Granica plastyczności w punkcie D jest różna od granicy plastyczności w punkcie B.

Jeśli granica plastyczności w punkcie B

$$(2.15) \quad \sigma_D = \sigma_B - 2\sigma_b$$

mówimy wówczas o idealnym efekcie Bauschingera.

Wartość granicy plastyczności w punkcie B (rys.II.9) może być otrzymana przez przesunięcie wykresu początkowego OA wzdłuż osi σ o odcinek równy odcinkowi CO'. Mając w dalszym ciągu na uwadze związek (2.7) można przyjąć, że włożonym stanie naprężenia powierzchnia plastyczności ulega przesunięciu w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń o odcinek ξ . Jeśli początkowa powierzchnia plastyczności daje się opisać równaniem

$$(2.16) \quad f(\sigma_{ij}) = \text{const}$$

to w wyniku wzmocnienia plastycznego przybiera ona postać:

$$(2.17) \quad f(\sigma_{ij} - \xi_{ij}) = \text{const}$$

Jeśli znane jest prawo, określające składowe tensora podczas deformacji materiału, wówczas równanie (2.17) opisuje wzmocnienie kinematyczne. Ograniczając się do liniowego wzmocnienia E. Melan [36], A. Iszliński [37] oraz P. Prager [38] zaproponowali następującą zależność składowych od odkształceń plastycznych:

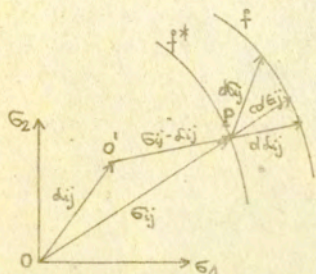
$$(2.18) \quad d\xi_{ij} = C d\epsilon_{ij} \quad \text{gdzie} \quad C = \text{const.}$$

Zgodnie z (2.18) ruch powierzchni płynięcia (2.17) odbywa się w kierunku normalnej do tej powierzchni, zaczepionej w punkcie, reprezentującym dany stan naprężenia (rys.II.10). Pewną wadą koncepcji (2.18) jest niezachowywanie ruchu postępowego powierzchni plastyczności jako bryły sztywnej. Przy przejściu z dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń do podprzestrzeni o mniejszej liczbie wymiarów. Okazuje się iż tylko w przypadku warunku plastyczności Hubera-Misesa wspomniane trudności są nieistotne, natomiast dla innych

warunków np. Treski trudności te występują [37]. W celu usunięcia tych trudności H. Ziegler [39] zaproponował następującą zależność składowych δ_{ij} od odkształcenia plastycznego (rys. II.10).

$$(2.19) \quad d\delta_{ij} = d\mu (\epsilon_{ij} - \delta_{ij}) \quad , \quad \text{gdzie}$$

$$(2.19a) \quad d\mu = \frac{\frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} d\epsilon_{ij}}{(\epsilon_{kl} - \delta_{kl}) \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}}}$$



rys. II.10. Dwa warianty hipotezy wzmocnienia kinematycznego

Wg. prawa (2.19) ruch powierzchni płynięcia f^* odbywa się w kierunku wektora $\epsilon_{ij} - \delta_{ij}$ nie zaś w kierunku normalnej do powierzchni. Prawo to można traktować też inaczej [31]. Można mianowicie pozostawić bez zmiany prawo (2.18), jednakże zastąpić stowarzyszone prawo płynięcia przez prawo

$$(2.20) \quad d\epsilon_{ij} = \frac{1}{C} (\epsilon_{ij} - \delta_{ij}) d\mu$$

stanowiące pewien odpowiednik prawa podobieństwa dematorów typu Levy-Misesa [31]. Wówczas ruch powierzchni plastyczności pozostanie bez zmiany w stosunku do (2.19).

Podejście to pozwala między innymi określić zależność od odkształcenia. Wychodząc mianowicie z równości typu:

$$(2.21) \quad (d\epsilon_{ij} - d\delta_{ij}) \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}} = 0$$

obowiązującego dla obu praw (2.18) i (2.19), możemy uzyskać następujące wyrażenie na $d\mu$:

$$(2.22) \quad d\mu = \frac{c d\epsilon_{ij} \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{ij}}}{(\epsilon_{kl} - \delta_{kl}) \frac{\partial f}{\partial \epsilon_{kl}}}$$

Przejdźmy teraz do wyprowadzenia równania ewolucji środka powierzchni płynięcia. W tym celu zapiszmy prawo (2.19) w postaci:

$$(2.23) \quad \frac{d\mathcal{L}_{ij}}{dt} = \frac{d\mu}{dt} (\epsilon_{ij} - \delta_{ij}) \quad , \quad \text{gdzie}$$

$$(2.24) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial t} + \mathcal{L}_{ij,k} V_k \quad , \quad V_k \text{ jest prędkością płynięcia cząstki}$$

Podstawiając (2.24) do (2.23) otrzymujemy następujące równanie:

$$(2.25) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial t} = \frac{d\mu}{dt} (\epsilon_{ij} - \delta_{ij}) - \mathcal{L}_{ij,k} V_k$$

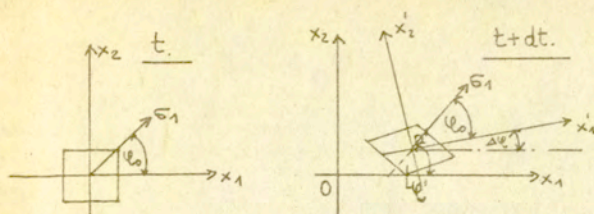
Jest to równanie ewolucji środka powierzchni płynięcia dla prawa Zieglera (2.19).

Analogiczne równanie dla prawa (2.18) ma następującą postać:

$$(2.26) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial t} = c \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} - \mathcal{L}_{ij,k} V_k$$

Równania (2.25) i (2.26) opisują trajektorie środka powierzchni płynięcia dla cząstki, która w trakcie deformacji doznaje tylko przesunięcia. W ogólnym przypadku, gdy ruch cząstki jest złożony tj. oprócz przesunięcia następuje również obrot postać tych równań ulega zmianie. Równania te w postaci ogólnej można wyprowadzić na drodze następujących rozważań [40]:

Rozpatrzmy dwa układy współrzędnych kartezjańskich związanych z cząstką, które w chwili t pokrywają się (rys. II.11a). W trakcie ruchu cząstki układ $\{x'\}$ obraca się razem z cząstką, natomiast układ $\{x\}$ pozostaje nieruchomy. W chwili t w układzie $\{x\}$ i $\{x'\}$ położenie środka powierzchni płynięcia opisane jest tensorem $\mathcal{L}_{ij}(x, t)$



rys. II.11 Ruch cząstki w trakcie deformacji.

W chwili $t+dt$ składowe tensora \mathcal{L}_{ij} w układzie współrzędnych $\{x\}$ mają postać:

$$(2.27) \quad \mathcal{L}_{ij}(x, t) = \mathcal{L}_{ij}(x, t) + \dot{\mathcal{L}}_{ij}(x, t) dt$$

natomiast w układzie $\{x'\}$

$$(2.28) \quad \mathcal{L}'_{ij}(x', t) = \mathcal{L}_{ik} \mathcal{L}_{pj} \mathcal{L}_{kp}(x, t+dt), \text{ gdzie}$$

$$(2.29) \quad \mathcal{L}_{pq} = \frac{1}{2} \epsilon_{pkj} \epsilon_{jkq} V_{k,q}$$

Po podstawieniu (2.27), (2.29) do (2.28) wymnożeniu i zaniedbaniu członów wyższego rzędu względem dt otrzymujemy:

$$(2.30) \quad \mathcal{L}'_{ij}(x', t+dt) = \mathcal{L}_{ij}(x, t) + [\dot{\mathcal{L}}_{ij} - \mathcal{L}_{ik} \mathcal{L}_{jk} - \mathcal{L}_{kj} \mathcal{L}_{ik}] dt$$

lub

$$(2.31) \quad \mathcal{L}'_{ij} = \frac{\mathcal{L}'_{ij}(x', t+dt) - \mathcal{L}_{ij}(x, t)}{dt} = \dot{\mathcal{L}}_{ij} - \mathcal{L}_{ik} \mathcal{L}_{jk} - \mathcal{L}_{kj} \mathcal{L}_{ik}, \text{ gdzie}$$

$$(2.32) \quad \dot{\mathcal{L}}_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial t} + \mathcal{L}_{ij,k} V_k$$

Wyrażenie (2.31) nosi nazwę pochodnej Jaumanna tensora \mathcal{L}_{ij} . Wyraża ona zmianę w czasie składowych tensora \mathcal{L}_{ij} względem układu związanego z cząstką. Podstawiając (2.32) do (2.31) otrzymujemy następujące równanie ewolucji środka powierzchni płynięcia:

$$(2.33) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_{ij}}{\partial t} = \dot{\mathcal{L}}_{ij} + \mathcal{L}_{ik} \mathcal{L}_{jk} + \mathcal{L}_{kj} \mathcal{L}_{ik} - \mathcal{L}_{ij,k} V_k$$

Dla $\Omega_{pq} = 0$ (2.33) przechodzi w (2.25) lub (2.26) w zależności od przyjętego prawa (2.19) lub (2.18). Obrót cząstki związany jest z obrotem kierunków głównych naprężeń o kąt $d\theta$ w czasie dt (rys. II.11b).

Podstawiając do (2.33) w miejsce \hat{L}_{ij} prawo (2.18) w postaci:

$$(2.34) \quad \hat{L}_{ij} = C \dot{E}_{ij}$$

otrzymujemy następującą jego postać:

$$(2.35) \quad \frac{\partial \hat{L}_{ij}}{\partial t} = C \dot{E}_{ij} + \delta_{ik} \Omega_{kj} + \Omega_{ik} \delta_{kj} - \hat{L}_{ij,k} v_k$$

Podstawiając następnie do (2.33) w miejsce \hat{L}_{ij} prawo (2.19) w postaci:

$$(2.36) \quad \hat{L}_{ij} = \mu_i (S_{ij} - \hat{L}_{ij})$$

otrzymujemy

$$(2.37) \quad \frac{\partial \hat{L}_{ij}}{\partial t} = \mu_i (S_{ij} - \hat{L}_{ij}) + \delta_{ik} \Omega_{kj} + \Omega_{ik} \delta_{kj} - \hat{L}_{ij,k} v_k$$

Nieznane są autorowi prace poświęcone zastosowaniu w/w równań do obliczeń konkretnych zagadnień.

Hipoteza wzmocnienia izotropowego nie uwzględnia efektu Bauschingera, natomiast hipoteza wzmocnienia kinematycznego uwzględnia jedynie idealny efekt Bauschingera.

Materiały rzeczywiste wykazują na ogół pewien pośredni typ wzmocnienia. Dokładniejszy opis można zatem uzyskać wprowadzając pośrednią koncepcję wzmocnienia, uwzględniającą go zarówno translacje jak i rozszerzanie się początkowej powierzchni płynięcia. Ograniczając się do warunku plastyczności Hubera-Misesa (2.13) możemy napisać np. następujący warunek plastyczności uwzględniający w/w warunki [31]:

$$(2.38) \quad \frac{1}{2} (S_{ij} - \hat{L}_{ij}) (S_{ij} - \hat{L}_{ij}) = K^2 (\epsilon_i)$$

gdzie \hat{L}_{ij} spełniają prawa (2.18) lub (2.19) a $K(\epsilon_i)$ prawo (2.14).

Ogólniejszy opis zachowania się materiałów podczas wzmocnienia plastycznego można uzyskać dopuszczając poza propor-

cyjnym wzrostem i translacją początkowej powierzchni plastyczności jeszcze zmianę jej kształtu. Koncepcje takie znaleźć można w pracach [41,42]. Inne podejście do wzmocnienia anizotropowego znaleźć można w pracy [43].

Omówione powyżej koncepcje wzmocnienia plastycznego tworzą podstawy teorii typu fenomenologicznego. Koncepcje te nie wnikają głębiej w istotę fizyczną procesu odkształceń plastycznych materiału z uwagi na znaczne trudności w stosowaniu ich przy bardziej złożonych problemach. Stopień trudności wzrasta ze wzrostem złożoności samej koncepcji. Stąd też najczęściej stosowane są w obliczeniach dwie najprostsze hipotezy a mianowicie: hipoteza wzmocnienia izotropowego i kinematycznego, które pozwalają określić skrajne zachowanie się materiałów plastycznych podczas wzmocnienia.

R o z d z i a ł III

METODY OBLICZENIOWE Z UWZGLĘDNIENIEM WZMOCNIENIA MATERIAŁU

III.1. Zagadnienie plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem

Zagadnienie plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem może być opisane układem równań, który stanowią:

a/ równania równowagi /z pominięciem członów inercjalnych/

$$(3.1) \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 ,$$

b/ warunek plastyczności w postaci ogólnej

$$(3.2) \quad f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, \kappa) = 0 \quad , \quad \text{gdzie } \alpha_{ij} \text{ są funkcjami}$$

określającymi składowe tensora translacji środka powierzchni płynięcia, a κ jest funkcją określającą proporcjonalny wzrost tej powierzchni. Funkcje te można określić na podstawie praw (2.14, 2.18, 2.19) lub (2.28).

c/ stowarzyszone prawo płynięcia

$$(3.3) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot \dot{\lambda} \quad ,$$

d/ warunek nieściśliwości materiału

$$(3.4) \quad \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij} = 0 .$$

Układ ten nie jest typu hiperbolicznego; równania opisujące pole naprężeń (3.1), (3.2) są sprzężone z równaniami opisującymi pole prędkości płynięcia (3.3), (3.4).

Istniejące obecnie metody efektywnego rozwiązania tego układu równań w złożonym stanie naprężenia dotyczą materiału sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem. Metody te stanowią treść niniejszego rozdziału.

III.2. Metody rozwiązywania zagadnień osiowo-symetrycznych płaskiego stanu naprężenia

Płaskim stanem naprężenia ośrodka plastycznego nazywamy stan równowagi cienkiej warstwy materiału pod działaniem sił przyłożonych na jej krawędziach i działających w jej płaszczyźnie środkowej. Jeśli przyjmiemy, że osie współrzędnych x, y leżą w płaszczyźnie środkowej, a oś z jest do niej prostopadła to naprężenia $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ są równe zeru. Rozkład naprężeń $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ wzdłuż grubości materiału jest na ogół nierównomierny, ale zmiana ich wartości na grubości jest niewielka. Przyjmuje się więc, że nie zmieniają one swej wartości wzdłuż grubości h . Grubość odcinka h zwykle zmienia się w procesie odkształcania, ale dopóki pochodna $\frac{dh}{ds}$, gdzie s jest odległością dwóch bardzo bliskich punktów powierzchni środkowej jest niewielka, stan naprężenia może być w przybliżeniu uważany za płaski. Ogólna teoria płaskiego stanu naprężenia stanowi podstawę teorii ciągnięcia i obciążania cienkich powłok, natomiast nie znajduje zastosowania w procesach obróbki plastycznej. Duże znaczenie praktyczne i teoretyczne w procesach obróbki plastycznej ma teoria osiowo-symetrycznych zagadnień płaskiego stanu naprężenia, ponieważ pozwala uzyskać rozwiązania, uwzględniające zarówno zmianę grubości jako wynik procesu odkształcania jak i wzmocnienie materiału w ogólnej postaci.

Zagadnienie osiowo-symetrycznego płaskiego stanu naprężenia z uwzględnieniem wzmocnienia opisane jest układem równań różniczkowych (3.1) + (3.4) w układzie współrzędnych biegunowych r, θ . Ze względu na założoną symetrię osiową wszystkie wielkości będą niezależne od θ , a więc będą zależne od r oraz t . Stan naprężenia określają dwie składowe tensora naprężenia σ_r, σ_θ . Naprężenie styczne będzie równe zeru, ponieważ ograniczymy się do takich przypadków, w których kierunki promieniowy i obwodowy są jednocześnie kierunkami głównymi, które nie ulegają zmianie podczas deformacji. Przyjmujemy warunek plastyczności uwzględniający przesunięcie i rozszerzanie się początkowej powierzchni płynięcia

Hubera-Misesa oraz stowarzyszone z nim prawo plastycznego płynięcia. Wówczas układ równań (3.1) + (3.4) przyjmie następującą postać:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dr} (\tau \sigma_r h) - \sigma_\theta h = 0 \\ (\sigma_r - \Delta r)^2 + (\sigma_r - \Delta r) (\sigma_\theta - \Delta \sigma) + (\sigma_\theta - \Delta \sigma)^2 = 3\kappa^2 \\ \frac{dV}{dr} = \frac{V}{r} \frac{2(\sigma_r - \Delta r) - (\sigma_\theta - \Delta \sigma)}{2(\sigma_\theta - \Delta \sigma) - (\sigma_r - \Delta r)} \\ \frac{dV}{dr} - \frac{V}{r} + \frac{V}{h} \frac{dh}{dr} = 0 \end{cases}$$

Układ ten zawiera cztery niewiadome: dwie składowe naprężenia σ_r, σ_θ , grubość pierścienia h oraz składową promieniową prędkości płynięcia V . Pozostałe wielkości $\Delta r, \Delta \sigma$ są funkcjami odkształcenia, opisują one przemieszczanie się powierzchni płynięcia, κ jest funkcją parametru Odqvista, opisującą izotropowe powiększanie wymiarów powierzchni płynięcia, r - współrzędną promieniową rozpatrywanego punktu. Występujące w warunku plastyczności funkcje, opisujące wzmocnienie materiału są zależne od stanu odkształcania materiału. Układ ten nie jest typu hiperbolicznego i jego bezpośrednie rozwiązanie napotyka ciągle jeszcze na duże trudności. Interesujący sposób rozwiązywania tego układu równań podał w 1963 r. W. Szczepiński [4]. Zaproponowana metoda polegała na uzyskaniu rozwiązania metodą kolejnych przybliżeń. W pierwszym etapie deformacji pomijamy efekt umocnienia i rozwiązujemy numerycznie (3.5) (dla $\Delta_{ij} = 0, \kappa = \kappa_0$), skąd wyznaczamy składowe tensora przyrostów odkształcenia w poszczególnych punktach obszaru plastycznego wg. wzorów:

$$(3.6) \quad \begin{cases} d\epsilon_\theta = \frac{dr}{r} \\ d\epsilon_h = \frac{dh}{h} \\ d\epsilon_r = - (d\epsilon_\theta + d\epsilon_h) \end{cases}$$

oraz intensywność przyrostu odkształcenia:

$$(3.7) \quad d\epsilon_i = \frac{1}{2} (d\epsilon_\theta^2 + d\epsilon_h^2 + d\epsilon_r^2)^{1/2}$$

Całkując następnie te zależności wzdłuż trajektorii cząstek od początku ruchu możemy obliczyć składowe odkształcenia i parametry Odqvista oraz wyznaczyć z przyjętego prawa wzmocnienia wartości $\alpha_r, \alpha_\theta, K$ w poszczególnych punktach obszaru uplastycznionego. Przystępujemy teraz do wyznaczenia II przybliżenia rozwiązania, które z formalnego punktu widzenia sprowadza się do rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia brzegowego ze znanym z poprzedniego przybliżenia, rozkładem niejednorodności materiału. Procedurę iteracyjną dla zagadnień stacjonarnych powtarzamy tak długo aż rozwiązania kolejnych przybliżeń będą różniły się nieznacznie. Przy rozwiązywaniu zagadnień niestacjonarnych cały proces deformacji dzielimy na odpowiednią ilość etapów, rozwiązując w każdym z nich cały komplet równań. Metoda ta zostanie omówiona dokładnie w następnym rozdziale.

W pracy [4] podano przykłady zastosowań tej metody dla stacjonarnych i niestacjonarnych zagadnień plastycznego płynięcia. Podano rozwiązania dla obciskania rury i rozciągania płaskiego pierścienia dla modelu kinematycznego i izotropowego wzmocnienia. Przyjęto przy tym liniowe zależności parametrów wzmocnienia od stanu odkształcenia w formie:

$$(3.8) \quad K = K_0 + C\epsilon_i$$

dla wzmocnienia izotropowego oraz

$$(3.9) \quad \begin{cases} \alpha_r = c(2\epsilon_r + \epsilon_\theta) \\ \alpha_\theta = c(2\epsilon_\theta + \epsilon_r) \end{cases}$$

dla wzmocnienia kinematycznego, gdzie K_0, C są stałymi materiałowymi.

Otrzymane wyniki dla obu hipotez porównano z wynikami obliczeń bez uwzględnienia wzmocnienia materiału. Dla wszystkich przykładów zaproponowana metoda jest szybko zbieżna, różnice między drugim i trzecim przybliżeniem nie przekraczały 3 %.

Taki sam sposób obliczeń zastosowano do analizy procesu ciągnięcia wyciączki z krążka mającego centralny otwór [5]

Rozwiązanie dla tego procesu otrzymano zszywając dwa rozwiązania: dla ciągnięcia płaskiego krążka i dla ciągnięcia dna wytłoczki. Rozwiązanie dla obu tych zagadnień brzegowych wykonano dla warunku Hubera-Misesa przy przyjęciu izotropowego modelu wzmocnienia, określonego rzeczywistą zależnością intensywności naprężenia od intensywności odkształcenia, otrzymaną przy jednoosiowym rozciąganiu próbki walcowej z miękkiej stali. W pierwszym etapie odkształcenia, dla jednorodnego materiału rozwiązanie jest takie same jak bez uwzględnienia wzmocnienia. W każdym następnym etapie odkształcenia rozkład parametru Odqvista i z zależności $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_i(\epsilon_i)$ rozkład intensywności naprężenia wyznaczamy z rozwiązania dla poprzedniego etapu odkształcenia. Rozwiązując w ten sposób, krok po kroku wyjściowy układ równań równowagi prześledzono proces deformacji przy ciągnięciu wytłoczki i określono jej kształt końcowy w zależności od stosunku wyjściowych wymiarów pierścienia, średnicy zewnętrznej i otworu, do średnicy stempla.

Analogiczny sposób postępowania jak w obu wymienionych poprzednio pracach wykorzystano do rozwiązania osiowo-symetrycznych zagadnień płaskiego stanu naprężenia z uwzględnieniem efektów dynamicznych i wzmocnienia materiału [6]. Równanie ruchu uzupełnione jest wówczas członami inercyjnymi. W pracy przeanalizowano i przedstawiono przykłady obliczeń dla dwóch przypadków. W pierwszym z nich uwzględniono wpływ członów inercyjnych dla materiału sztywno-idealnie plastycznego, w drugim natomiast przyjęto bardziej złożoną charakterystykę materiału uwzględniającą jego czułość na prędkość odkształcenia oraz wzmocnienia. Skuteczność zastosowanego sposobu iteracji i całkowania metodą Runge-Kutty wyjściowego układu równań różniczkowych przedstawiono na przykładzie rozszerzania średnicy płaskiego krążka z centralnym otworem.

Jako pierwsze przybliżenie wykorzystano rozwiązanie dynamiczne rozpatrywanego problemu przy założeniu warunku plastyczności Treski i stowarzyszonego z nim prawa płynięcia. Obliczone na tej podstawie rozkłady prędkości plastycznego płynięcia materiału i grubości pierścienia są wyko-

rzystane przy rozwiązywaniu kompletu równań z warunkiem Hubera-Misesa i stowarzyszonym z nim prawem płynięcia, skąd otrzymamy drugie przybliżenie poszukiwanych wielkości. Obliczanie na danym etapie deformacji powtarza się tak długo aż uzyska się dostatecznie bliskie rozwiązanie z dwóch kolejnych iteracji. W rozwiązaniu uwzględniającym wzmocnienie materiału przyjęti izotropową jego postać, opisaną liniową zależnością od parametru Odqvista.

III.3. Metody rozwiązywania zagadnienia plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem w warunkach płaskiego stanu odkształcenia

Płaskim stanem odkształcenia nazywamy taki stan, przy którym prędkości płynięcia wszystkich cząstek są równoległe do jednej płaszczyzny, Przyjmujemy ją jako płaszczyznę współrzędnych x, y . Pole prędkości jest określone przez składowe $V_x(x, y), V_y(x, y), V_z = 0$, które nie zależą od współrzędnej z . Składowe tensora naprężeń τ_{xx}, τ_{yy} są w tym przypadku równe zeru. W każdym punkcie ośrodka należy wyznaczyć cztery składowe tensora naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ gdzie $\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$ oraz dwie składowe prędkości płynięcia V_x, V_y odpowiednio w kierunku x, y . Zagadnienie plastycznego płynięcia materiału pierwotnie izotropowego ze wzmocnieniem w warunkach płaskiego stanu odkształcenia opisane jest układem równań różniczkowych (3.1) + (3.4) w układzie współrzędnych kartezjańskich x, y, z . Układ ten stanowią:

- równania równowagi

$$(3.10) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases},$$

- warunek plastyczności w ogólnej postaci

$$(3.11) \quad \frac{1}{4} [(\sigma_x - \sigma_y) - (\sigma_y - \sigma_x)]^2 + (\tau_{xy} - \tau_{xy})^2 = K^2, \quad \text{gdzie } \sigma_x, \sigma_y$$

τ_{xy} i K określone są na podstawie praw (2.30), (2.32), (2.14),

- prawo fizyczne

$$(3.12) \quad \frac{\dot{\epsilon}_y}{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y} = \frac{2(\tau_{xy} - \tau_{xy})}{(\sigma_x - \sigma_x) - (\sigma_y - \sigma_y)} = \tan 2\varphi, \quad \text{gdzie } \varphi$$

jest kątem nachylenia większego z naprężeń głównych do osi x ,

- warunek nieściśliwości

$$(3.13) \quad \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 0$$

Na podstawie równania (3.12) widzimy, że kierunki główne tensora prędkości odkształcenia pokrywają się z kierunkami głównymi tensora naprężeń $\underline{\sigma}$ lecz pokrywają się z kie-

runkami głównymi tensora $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}} - \underline{\underline{d}}$. Jest to możliwe tylko w tym przypadku, gdy składowe tensora $\underline{\underline{d}}$ nie zależą od składowych tensora $\underline{\underline{S}}$, innymi słowy, gdy położenie aktualnej powierzchni płynięcia danej cząstki nie zależy od aktualnego stanu naprężenia. Warunek ten spełniają składowe tensora $\underline{\underline{d}}$ wynikające np. z prawa Zieglera (2.32). Jego postać w płaskim stanie odkształcenia dla poszczególnych składowych można zapisać następująco:

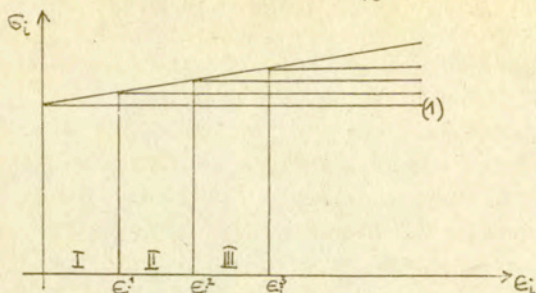
$$(3.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial d_x}{\partial t} = \mu (\epsilon_x^* - d_x) + 2 d_{xy} \dot{\omega} - \left(\frac{\partial d_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial d_x}{\partial y} v_y \right) \\ \frac{\partial d_y}{\partial t} = \mu (\epsilon_y^* - d_y) + 2 d_{xy} \dot{\omega} - \left(\frac{\partial d_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial d_y}{\partial y} v_y \right) \\ \frac{\partial d_{xy}}{\partial t} = \mu (\tau_{xy}^* - d_{xy}) + (d_x - d_y) \dot{\omega} - \left(\frac{\partial d_{xy}}{\partial x} v_x + \frac{\partial d_{xy}}{\partial y} v_y \right), \end{cases} \text{gdzie}$$

$$(3.15) \quad \dot{\omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Składowe $\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \tau_{xy}^*$ określone są w punkcie P, leżącym na początkowej powierzchni płynięcia f^* (rys. II.10), natomiast

$$(3.16) \quad \mu = \frac{c \left(\epsilon_x \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon_x^*} + \epsilon_y \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon_y^*} + \epsilon_{xy} \frac{\partial f^*}{\partial \tau_{xy}^*} \right)}{(\epsilon_x^* - d_x) \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon_x^*} + (\epsilon_y^* - d_y) \frac{\partial f^*}{\partial \epsilon_y^*} + (\tau_{xy}^* - d_{xy}) \frac{\partial f^*}{\partial \tau_{xy}^*}}$$

Składowe prędkości v_x, v_y są składowymi aktualnego pola prędkości wynikającego ze stowarzyszonego prawa płynięcia (3.12) i warunku nieściśliwości (3.13), c jest stałą materiałową. Funkcję κ można określić na podstawie prawa (2.14). Układ równań (3.10) + (3.13) nie jest typu hiperbolicznego. Efektywnego, bezpośredniego sposobu rozwiązania tego układu obecnie nie ma. Pewne próby uzyskania takiego rozwiązania w oparciu o metodę perturbacji znaleźć można w pracach [12, 13, 14]. Efektywną metodę rozwiązania tego układu równań dla wzmocnienia izotropowego podano w [7]. Metoda ta polega na podziale całkowitego procesu deformacji materiału na dużą liczbę etapów, w których materiał traktujemy jako sztywno-idealnie plastyczny o znanej granicy plastyczności. Przeanalizujemy tę metodę szczegółowo. W tym celu wykonujemy następujący rysunek.



rys. III.1 Podział procesu deformacji na szereg etapów

Na rysunku tym przedstawiono podział procesu deformacji na etapy. Podział taki przedstawia pewnego rodzaju aproksymację krzywej wzmocnienia za pomocą ciągu modeli materiału sztywno-idealnie plastycznego. Z aproksymacji tej wynika postać rozwiązania zagadnienia na danym etapie deformacji, które jest rozwiązaniem dla materiału sztywno-idealnie plastycznego o znanej granicy plastyczności. Wartość granicy plastyczności w tym etapie można wyznaczyć metodą rekurencyjną, zakładając zgodnie z propozycją W. Szczepińskiego [4], że w pierwszym etapie materiał nie wykazuje wzmocnienia i ma wszędzie granicę plastyczności równą σ_0 a w etapach następnym jest ona określona związkiem:

$$(3.17) \quad \sigma_i(n) = \sigma_0 + H \epsilon_i(n-1)$$

gdzie n oznacza numer kolejny etapu deformacji, H moduł wzmocnienia a $\epsilon_i(n-1)$ wartość parametru Odqvista (2.10) w $(n-1)$ etapie. Dla wyjaśnienia dodajmy, że wartość parametru Odqvista ϵ_i w etapie wstępnym ($n=0$ w (3.17)) obliczamy na podstawie znanego rozwiązania dla prędkości przy $\sigma_i = \sigma_0$ (wykres 1 na (rys. III.1)). Dokonując dostatecznie gęstego podziału $\sigma_i(\epsilon_i)$ (rys. III.1) możemy uzyskać rozwiązanie danego zagadnienia na żądanym poziomie deformacji.

Metodę tę łatwo przenieść na przypadek wzmocnienia kinematycznego lub złożonego w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Całkując mianowicie związki (2.14), (2.30) lub (2.32) przy wykorzystaniu rozwiązania z etapu poprzedniego ($n-1$) uzyskujemy rozkład funkcji $K(x,y)$ i $\mathcal{L}_{ij}(x,y)$.

w obszarze uplastycznionym w etapie następnym tj. n-tym. Znajomość rozkładu tych funkcji w tym etapie pozwala na rozprzęgnięcie układu równań (3.10) + (3.13) na dwa układy: dla naprężeń i prędkości, które są typu hiperbolicznego i można je rozwiązać metodą charakterystyk. Zatem rozwiązanie sprowadza się do całkowania równań charakterystyk i związków wzdłuż nich dla wybranej hipotezy wzmocnienia. Całkowanie takie można wykonać na gruncie metod numerycznych. Przedstawimy obecnie rozwiązanie układu równań (3.10) + (3.13) na danym etapie deformacji metodą charakterystyk. Funkcje $K, \underline{\sigma}_x, \underline{\sigma}_y, \underline{\tau}_{xy}$ w (3.11) traktujemy jako znane funkcje współrzędnych x, y . Sposób rozwiązania tego układu równań jest następujący:

oznaczając przez p naprężenie średnie, przez φ kąt jaki tworzy większe z naprężeń głównych z osią X możemy składowe tensora naprężeń $\underline{\sigma}_x, \underline{\sigma}_y, \underline{\tau}_{xy}$ zapisać jako funkcje zmiennych p, φ .

$$(3.18) \quad \begin{cases} \underline{\sigma}_x = p + K \cos 2\varphi + \frac{1}{2} (\underline{\sigma}_x - \underline{\sigma}_y) \\ \underline{\sigma}_y = p - K \cos 2\varphi - \frac{1}{2} (\underline{\sigma}_x - \underline{\sigma}_y) \\ \underline{\tau}_{xy} = K \sin 2\varphi - \underline{\tau}_{xy} \end{cases}, \quad \text{gdzie}$$

$$(3.19) \quad \begin{cases} p = \frac{1}{2} (\underline{\sigma}_x + \underline{\sigma}_y) \\ \varphi = \arctan \frac{2(\underline{\tau}_{xy} - \underline{\tau}_{xy})}{(\underline{\sigma}_x - \underline{\sigma}_x) - (\underline{\sigma}_y - \underline{\sigma}_y)} \end{cases}$$

Występujące w (3.18) wielkości są bezwymiarowe.

Przyjęto następujące oznaczenia: $\underline{\sigma}_x = \bar{\sigma}_x / K_0$, $\underline{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y / K_0$, $K = \bar{K} / K_0$, $\underline{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{xy} / K_0$, $\underline{\sigma}_x = \bar{\sigma}_x / K_0$, $\underline{\sigma}_y = \bar{\sigma}_y / K_0$, $\underline{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{xy} / K_0$.

kreskami oznaczono wielkości wymiarowe.

Związki (3.18) spełniają tożsamościowo warunek plastyczności Hubera-Misesa (3.7), a po ich zróżniczkowaniu i podstawieniu do równań równowagi (3.6) otrzymujemy układ równań różniczkowych cząstkowych dla naprężeń:

$$(3.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} - 2K \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2K \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \left(\frac{\partial K}{\partial x} \cos 2\varphi + \frac{\partial K}{\partial y} \sin 2\varphi + \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\tau}_{xy}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} + 2K \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2K \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \left(\frac{\partial K}{\partial x} \sin 2\varphi + \frac{\partial K}{\partial y} \cos 2\varphi + \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial \underline{\tau}_{xy}}{\partial x} \right) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = dp \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi \end{array} \right. , \quad \text{gdzie } A = \frac{1}{2} (\alpha_x - \alpha_y)$$

Układ ten jest typu hiperbolicznego i ma dwie rodziny charakterystyk określonych związkami:

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \tan(\varphi - \pi/4) \\ \frac{dy}{dx} = \tan(\varphi + \pi/4) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- rodzina linii } \alpha \\ \text{- rodzina linii } \beta \end{array}$$

Równania charakterystyk (3.21) nie zależą od funkcji $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}, K$.

Wzdłuż tych charakterystyk spełnione są następujące związki:

$$(3.22) \quad dp - 2Kd\varphi = - \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial x} \right) dy$$

wzdłuż α i

$$dp + 2Kd\varphi = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial y} \right) dx - \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} \right) dy$$

wzdłuż β .

Przyjmując w (3.22) $K = K_0, \alpha_x = \alpha_y = \alpha_{xy} = 0$ otrzymujemy znane równania Hencke'go-Prandtla [33] dla materiału sztywno-idealnie plastycznego:

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} dp - 2K_0 d\varphi = 0 \\ dp + 2K_0 d\varphi = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- wzdłuż linii } \alpha \\ \text{- wzdłuż linii } \beta \end{array}$$

Przyjmując następnie $K = K(x, y), \alpha_x = \alpha_y = \alpha_{xy} = 0$ otrzymujemy równania A. Kuzniecowa [9].

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} dp - 2Kd\varphi = - \frac{\partial K}{\partial y} dx + \frac{\partial K}{\partial x} dy \\ dp + 2Kd\varphi = \frac{\partial K}{\partial y} dx + \frac{\partial K}{\partial x} dy \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{- wzdłuż linii } \alpha \\ \text{- wzdłuż linii } \beta \end{array}$$

Przyjmując zaś $K = K_0, \alpha_x = \alpha_x(x, y), \alpha_y = \alpha_y(x, y), \alpha_{xy} = \alpha_{xy}(x, y)$ otrzymujemy następujące równania dla materiału sztywno plastycznego ze wzmocnieniem kinematycznym:

$$(3.25) \begin{cases} dp - 2k_0 d\varphi = -\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial f_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dy - \text{wzdłuż } \alpha \\ dp + 2k_0 d\varphi = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial y}\right) dx - \left(\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial f_{xy}}{\partial x}\right) dx - \text{wzdłuż } \beta \end{cases}$$

Przejdźmy teraz do układu równań dla prędkości płynięcia.
Układ ten stanowią:

- prawo fizyczne

$$(3.26) \quad \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y} = \frac{2(\tau_{xy} - \tau_{xy})}{(\sigma_x - \sigma_x) - (\sigma_y - \sigma_y)} \quad \text{oraz}$$

- warunek nieściśliwości

$$(3.27) \quad \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 0$$

Podstawiając (3.1B) do (3.23) i (3.24) uzyskujemy następujący układ równań różniczkowych dla prędkości:

$$(3.28) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \cos 2\varphi - 2 \sin 2\varphi \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy = dv_x \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy = dv_y \end{cases}$$

Układ ten jest typu hiperbolicznego. Jak łatwo się przekonać charakterystyki dla prędkości i naprężeń pokrywają się, a wzdłuż nich spełnione są następujące związki dla prędkości płynięcia:

$$(3.29) \quad \begin{cases} dv_x + \tan(\varphi - \pi/4) dv_y = 0 & - \text{wzdłuż } \alpha \\ dv_x + \tan(\varphi + \pi/4) dv_y = 0 & - \text{wzdłuż } \beta \end{cases}$$

gdzie v_x i v_y oznaczają składowe prędkości odpowiednio w kierunkach x i y .

Równania (3.29) noszą nazwę równań Geininger i są one spełnione we wszystkich rozpatrzonych wyżej przypadkach.

Zastosowanie przedstawionego sposobu rozwiązania zagadnienia plastycznego płynięcia materiału w ogólnym przy-

padku, gdy powierzchnia plastyczności doznaje przesunięcia obrotu i izotropowego rozszerzania się sprowadza się do całkowania równań (3.21), (3.22) i (3.29) na danym etapie deformacji. Równania te można całkować numerycznie jeśli znany rozkład funkcji K i składowych tensora $\underline{\epsilon} : \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ w obszarze plastycznym. Uzyskanie rozkładu oraz konieczność istnienia co najmniej pierwszych pochodnych tych funkcji wymaga założenia ciągłości pola prędkości /wynikającego z rozwiązania równań (3.29) / w obszarze plastycznym.

Do zagadnień spełniających ten warunek należą między innymi zagadnienia osiowo-symetryczne płaskiego stanu naprężenia [4,5,6] oraz niektóre zagadnienia w płaskim stanie odkształcenia i osiowej symetrii [7,8]

III.4. Uwagi o rozwiązaniu dla materiału pierwotnie anizotropowego w płaskim stanie odkształcenia

Równania (3.21), (3.25), (3.29) przedstawiają rozwiązanie zagadnienia plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem kinematycznym w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Rozwiązanie to opisuje własności anizotropowe materiału pierwotnie izotropowego, wywołane wzmocnieniem. Inny typ anizotropii przedstawił R. Hill [33] rozpatrując zagadnienie plastycznego płynięcia materiału sztywno-idealnie plastycznego anizotropowego. Zagadnienie to w płaskim stanie odkształcenia można przedstawić układem równań, który stanowią:

a/ równania równowagi:

$$(3.30) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} ,$$

b/ warunek plastyczności Hilla

$$(3.31) \quad f = \frac{1}{4(1-c)} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = T^2 \quad , \quad \text{gdzie}$$

$$c = 1 - \frac{N(F+G)}{2(FG+GH+HF)} \quad (-\infty < c < 1)$$

Wielkości G, H, F i N są parametrami anizotropii.

c/ stowarzyszone prawo płynięcia

$$(3.32) \quad \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{\dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_y} = (1-c) \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} ,$$

d/ warunek nieściśliwości

$$(3.33) \quad \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y = 0$$

Cechą charakterystyczną tego układu równań, wynikającą ze stowarzyszonego prawa płynięcia (3.32) jest niewspółosiowość osi głównych tensora naprężeń i tensora prędkości odkształceń. Jak wykazał R. Hill [33] układ ten jest typu hiperbolicznego i można go rozwiązać metodą charakterystyk. Metoda rozwiązania (3.30) + (3.33) jest analogiczna jak układu (3.10) + (3.13) dla idealnej plastyczności tj. rozwiązujemy niezależnie od siebie układ równań dla naprężeń (3.30)

i (3.31) oraz układ równań dla prędkości (3.32) i (3.33), które są typu hiperbolicznego.

Przedstawmy najpierw rozwiązanie układu równań dla naprężeń. Nawiązując do analogii podstawień Levy-Misesa można w miejscach składowych $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ podstawić następujące wyrażenia:

$$(3.34) \quad \begin{cases} \sigma_x = \sigma + R \cos 2\varphi \\ \sigma_y = \sigma - R \cos 2\varphi \\ \tau_{xy} = R \sin 2\varphi \end{cases}, \text{ gdzie} \\ R = T \left(\frac{1-c}{1-c \sin^2 2\varphi} \right)^{1/2}$$

$$(3.35) \quad \tan 2\varphi = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$(3.36) \quad \sigma = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y)$$

Wyrażenia te spełniają tożsamościowo warunek plastyczności R. Hilla (3.31). Po zróżniczkowaniu (3.34) i podstawieniu do równań równowagi (3.30) otrzymujemy hiperboliczny układ równań, którego rozwiązaniem są następujące równania charakterystyk:

$$(3.37) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = (1-c) \tan 2\varphi + [(1-c)^2 \tan^2 2\varphi + 1]^{1/2} & \text{linie rodziny } \alpha \\ \frac{dy}{dx} = (1-c) \tan 2\varphi - [(1-c)^2 \tan^2 2\varphi + 1]^{1/2} & \text{linie rodziny } \beta \end{cases}$$

oraz związki dla naprężeń wzdłuż nich w postaci całkowej:

$$(3.38) \quad \begin{cases} \frac{p}{2T} + g(\varphi) = \text{const} & \text{wzdłuż linii } \alpha \\ \frac{p}{2T} - g(\varphi) = \text{const} & \text{wzdłuż linii } \beta, \text{ gdzie} \\ g(\varphi) = \int_0^\varphi \left(\frac{1}{4} \frac{d^2 h}{d\varphi^2} + h \right) d\varphi \\ h = (1 - c \sin^2 2\varphi)^{1/2} \end{cases}$$

Podstawiając następnie związki (3.34) do równań dla prędkości płynięcia (3.32) i (3.33) otrzymujemy równania charakterystyk takie same jak dla naprężeń tj. (3.37) oraz następujące związki wzdłuż nich dla prędkości płynięcia:

$$(3.39) \quad \begin{cases} dV_x + [(1-c) \tan 2\varphi + ((1-c)^2 \tan^2 2\varphi + 1)^{1/2}] dV_y & \text{wzdłuż linii } \alpha \\ dV_x + [(1-c) \tan 2\varphi - ((1-c)^2 \tan^2 2\varphi + 1)^{1/2}] dV_y & \text{wzdłuż linii } \beta \end{cases}$$

Równania charakterystyk (3.37) wskazują na to, iż linie rodzin α i β nie są ortogonalne w ogólnym przypadku, natomiast stają się one ortogonalne w przypadku gdy zachodzi współosiowość osi głównych tensora naprężeń i odkształceń. Rozpatrzmy te przypadki szczegółowo. W tym celu zapiszmy stowarzyszone prawo płynięcia (3.33) w następującej postaci:

$$(3.40) \quad \tan 2\varphi' = (1-C) \tan 2\varphi, \quad \text{gdzie}$$

$$\tan 2\varphi' = \frac{E_{xy}}{E_x - E_y}$$

$$\tan 2\varphi = \frac{2T_{xy}}{G_x - G_y}$$

Współosiowość osi głównych tensorów $\underline{\epsilon}$ i \underline{E} zachodzi wtedy, gdy

$$(3.41) \quad \varphi' = \varphi$$

Warunek ten spełniony jest w tych przypadkach, w których

$$(3.42) \quad \varphi = 0, \pi/4, \pi/2 \quad \text{lub wtedy, gdy}$$

$$(3.43) \quad C = 0$$

Warunek (3.43) spełniony może być w dwóch następujących przypadkach:

$$(3.44) \quad N = \frac{1}{3}H = \frac{1}{3}G = \frac{1}{3}F = 3\epsilon^2 \quad \text{oraz}$$

$$(3.45) \quad F = G \quad \text{i} \quad N = F + 2H = G + 2H$$

Przypadek (3.44) odpowiada pełnej izotropii materiału i związki (3.37), (3.38) i (3.39) przechodzą wówczas w równania (3.21), (3.24) i (3.29) dla materiału izotropowego sztywno-idealnie plastycznego, zaś przypadek (3.45) odpowiada anizotropii symetrycznej względem osi z, utożsamionej w tym przypadku z osią główną tensora naprężeń $\underline{\epsilon}_3$. Na uwagę zasługuje tu również fakt, że w przypadku (3.44) i (3.45) wartości naprężenia średniego

$$(3.46) \quad p = \frac{1}{3(F+G)} [(2G+F)\epsilon_x + (2F+G)\epsilon_y]$$

oraz składowej

$$(3.47) \quad \sigma_z = \frac{1}{G+F} (G\epsilon_x + F\epsilon_y)$$

są sobie równe i przyjmują postać:

$$(3.48) \quad p = \sigma_z = \frac{1}{2} (\epsilon_x + \epsilon_y)$$

Okazuje się zatem, że jeśli zachodzi współosiowość kierunków głównych naprężeń i prędkości odkształceń (3.45) otrzymujemy typ anizotropii, której cechą charakterystyczną jest ortogonalność charakterystyk dla prędkości i naprężeń oraz równość naprężenia średniego i σ_3 (3.48). Podobne cechy obserwujemy również w przypadku anizotropii wywołanej odkształceniem dla materiału pierwotnie izotropowego mimo tego iż opis tych zjawisk jest różny w obu omówionych przypadkach. Należy tu dodać, że anizotropia materiału pierwotnie izotropowego w przedstawionym opisie charakteryzuje się pewną niejednorodnością /składowe tensora $\underline{\epsilon}$ zmieniają się od punktu do punktu/ natomiast anizotropia materiału pierwotnie anizotropowego jest jednorodna tj. parametry anizotropii F, G, H i N nie zmieniają się od punktu do punktu obszaru plastycznego.

R o z d z i a ł I V

ALGORYTM OBLICZEŃ I METODY NUMERYCZNE W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA

Rozwiązanie zagadnienia plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem metodą omówioną w poprzednim rozdziale wymaga podziału całkowitego procesu deformacji na szereg etapów (rys. III.1).

1. Przyjmujemy iż w etapie wstępnym materiał nie wykazuje wzmocnienia [4]. Rozwiązanie dla naprężeń wynika z całkowania związków (3.21), (3.23) dla danych warunków brzegowych.

2. Na podstawie rozwiązania dla naprężeń i warunków dla prędkości wyznaczamy rozwiązanie dla prędkości całkując równania H. Geiringer (3.29) w obszarze uplastycznionym a następnie dokonujemy przemieszczenia poszczególnych cząstek w jednostkowym czasie Δt . Zakładamy przy tym, iż prędkości cząstek nie ulegają zmianie podczas deformacji w tym etapie.

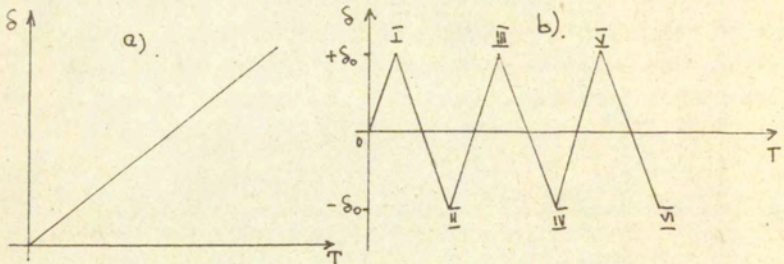
3. Na podstawie rozwiązania dla prędkości wyznaczamy rozkład funkcji $K(\epsilon_i)$ i składowych tensora $\underline{\epsilon}$ w obszarze uplastycznionym, całkując równania (2.14) i (3.14) wzdłuż trajektorii poszczególnych cząstek w trakcie ich ruchu.

4. Na podstawie 1. i 2. wyznaczamy nowe warunki brzegowe w następnym etapie deformacji i całkujemy równania (3.21) i (3.22) dla naprężeń a następnie na podstawie tego rozwiązania rozwiązujemy równania H. Geiringer (3.29) dla określonych zadaniem warunków. Następnie przemieszczamy poszczególne cząstki, wyznaczając równocześnie nowe rozkłady $K(\epsilon_i)$, $\underline{\epsilon}$ w obszarze plastycznym i przechodzimy do obliczeń w kolejnym etapie deformacji.

Procedurę tę powtarzamy wielokrotnie aż do uzyskania rozwiązania z żądanym stopniem deformacji.

W rozdziale tym omówiono szczegółowo ten algorytm dla materiału bez wzmocnienia oraz ze wzmocnieniem izotro-

powym i kinematycznym. Ponadto przedstawiono modelowy przykład: zginanie elementu osłabionego podwójnym symetrycznym wycięciem kołowym w warunkach płaskiego stanu odkształcenia oraz omówiono program obliczeniowy monotonicznego i cyklicznego zginania tego elementu (rys. IV.1, a, b).



rys. IV.1. Schemat monotonicznego - a i cyklicznego - b zginania elementu

T - oznacza liczbę etapów deformacji,
 δ - kąt ugięcia próbki .

IV.1. Zginanie elementu z dwustronnym wycięciem kołowym

W przypadku zginania elementu osłabionego symetrycznie dwoma wycięciami istnieją dwa typy rozwiązania podane przez A. Greena [44]. W rozwiązaniu pierwszego typu obszary plastycznego płynięcia łączą się na osi pręta, a w rozwiązaniu drugiego typu tworzą się izolowane linie poślizgu, obejmujące centralnie położony obszar sztywny, tworzący rodzaj sztywnego czopa. Rozwiązanie pierwszego typu ilustruje rysunek (IV.2a) drugiego typu rysunek (IV.2b).

Schemat układu linii poślizgu w I typie rozwiązania przedstawiono na (rys. IV.2a). Siatka linii poślizgu składa się z dwóch części stykających się w punkcie N. Dolny trójkąt BN₁B₁ jest obszarem dwuosowego ściskania, górny ANA₁ obszarem dwuosowego rozciągania, jeśli założymy kierunek momentów zginających jak na rysunku (IV.2a). Górna i dolna część siatki wynika z rozwiązania zagadnienia brzegowego Couchy'ego z warunkami $\epsilon_1 = \pm \epsilon_0, \epsilon_2 = 0$ na swobodnych konturach A₀A₁, B₀B₁. Położenie punktu N wyznaczamy z warunku, że wypadkowa siła w przekroju O₁N₀2 musi być równa zeru.

$$(4.1) \int_{-h}^h \sigma_y dx = 0$$

Moment graniczny, przypadający na jednostkę grubości, otrzymamy przez całkowanie naprężeń wzdłuż przekroju

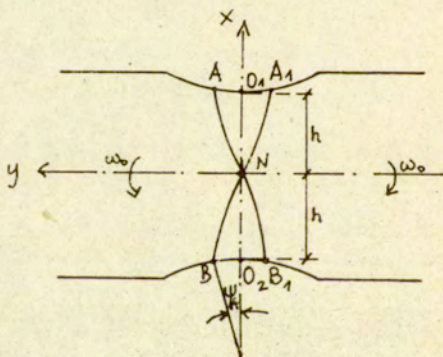
$$(4.2) M = \int_{-h}^h \sigma_y x dx$$

Przejdźmy do wyznaczenia pola prędkości. Obie sztywne części elementu na zewnątrz linii poślizgu A₁NB₁, ANB obracają się wokół punktu N z pewną prędkością kątową ω_0 .

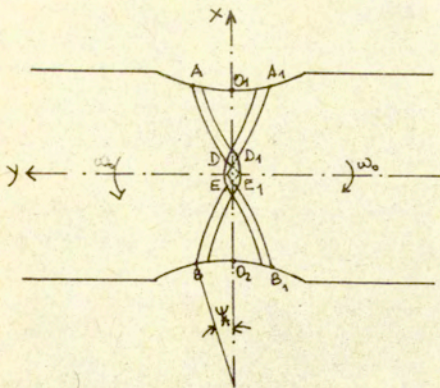
Prędkości punktów leżących na liniach AN, A₁N, BN, B₁N równają się $\vec{V} = \vec{r} \times \vec{\omega}_0$, gdzie \vec{r} jest wektorem łączącym punkt N z odpowiednim punktem na liniach poślizgu. Zatem charakterystyki AN, A₁N, BN, B₁N nie są liniami nieciągłości prędkości. Ten typ rozwiązania jest kinematycznie dopuszczalny dla dowolnej konfiguracji nacięcia, ale dla ostrzejszych kształ-

tów nacięcia daje on większą górną ocenę momentu zginającego niż typ drugi, w którym występują wyizolowane linie poślizgu (rys. IV.2b). Jako parametr charakteryzujący ostrość karou przyjmuje się kąt Ψ_A między osią symetrii a normalną do profilu w krańcowym punkcie obszaru plastycznego B (rys. IV.2a). W drugim typie rozwiązania górny i dolny obszar plastyczny łączą się dwiema wyizolowanymi liniami poślizgu DE i D_1E_1 , pomiędzy którymi powstaje rodzaj sztywnego czopa, wokół którego obracają się obie części elementu. Aby ruch taki był możliwy, linie te muszą być łukami okręgów o promieniu R'_0 . Linie poślizgu DE i D_1E_1 są zatem liniami nieciągłości prędkości. Wzdłuż tych linii prędkość doznaje skosu o wartości $\omega_0 R'_0$.

Z dwóch przedstawionych powyżej rozwiązań ciągłość pola prędkości zapewniona jest w rozwiązaniu I typu, dla $\Psi_A > 57,3^\circ$ (rys. IV.2a) i ten typ rozwiązania przyjęto do obliczeń.



rys. IV.2a. I typ rozwiązania $\Psi_A > 57,3^\circ$



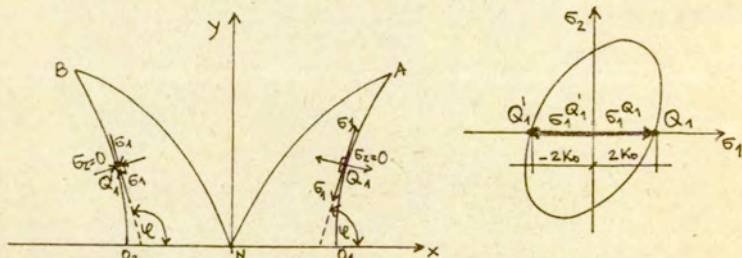
rys. IV.2b. II typ rozwiązania $32^\circ < \psi_A < 57,3^\circ$

IV.2. Algorytm obliczeń monotonicznego zginania dla materiału ze wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym (rys. IV.1a).

Na podstawie rozwiązania równań (3.21) i (3.22) dla materiału sztywno-idealnie plastycznego w etapie wstępnym określamy kształt obszaru plastycznego oraz siatkę charakterystyk w tym obszarze. Uzyskanie rozwiązania w konkretnym przypadku wymaga określenia kształtu brzegu swobodnego, wartości naprężeń głównych oraz kierunku nachylenia większego z nich do osi X . Równanie brzegu swobodnego karbu kołowego w układzie X, Y (rys. IV.3) ma następującą postać:

$$(4.3) \quad y = \sqrt{R_0^2 - (R_0 + h - x)^2} \quad , \quad \text{gdzie}$$

R_0 jest promieniem krzywizny karbu a h jest połową długości największego przekroju próbki (rys. IV.1).



rys. IV.3. Określenie wartości naprężeń głównych wzdłuż brzegu swobodnego w wstępnym etapie deformacji a/ w płaszczyźnie fizycznej, b/ w przestrzeni naprężeń.

Wartości naprężeń głównych, naprężenia średniego i kąta φ wzdłuż brzegu swobodnego O_1A i O_2B w dowolnych punktach Q_1, Q'_1 (rys. IV.3.) określamy następująco:

a/ w punkcie Q_1 /część rozciągana/

$$(4.4) \quad \begin{cases} \sigma_1^{Q_1} = 2K_0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tan \varphi = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_{Q_1}} \\ p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = K_0 \end{cases}$$

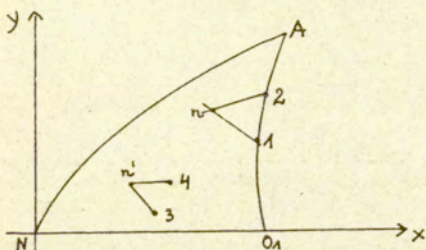
b/ w punkcie Q_1' /część ściskana/

$$(4.4a) \begin{cases} \sigma_1' = -2K_0 \\ \sigma_2 = 0 \\ \tan \varphi = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_{Q_1'}} \\ p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = -K_0 \end{cases}, \quad \text{gdzie:}$$

y jest dane wyrażeniem (4.3),

$K_0 = \sigma_0 / \sqrt{3}$, σ_0 jest stałą materiałową.

Rozważmy sposób wyznaczenia współrzędnych dowolnego punktu (rys. IV.4) oraz stanu naprężenia w tym punkcie w obszarze plastycznym. Weźmy na początek część rozciąganą brzegu swobodnego O_1A



rys. IV.4 Oznaczenia przy obliczaniu położenia punktu węzłowego

Stan naprężenia w punktach n^1 i n^2 $\varphi_1, p_1, \varphi_2, p_2$ określamy na podstawie związków (4.4) lub (4.4a) przyjętych wcześniej współrzędnych x_1, x_2 i wyznaczonych na podstawie (4.3) współrzędnych y_1, y_2 . Zastępując różniczki w (3.21) i (3.27) różnicami skończonymi otrzymujemy następujące 2 układy równań na cztery niewiadome: (x_n, y_n, p_n i φ_n)

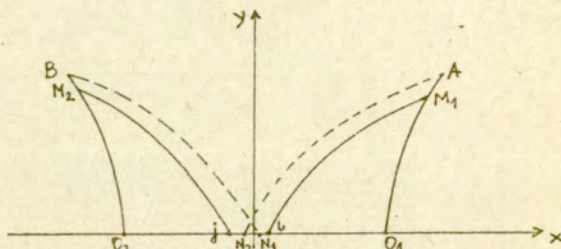
$$(4.5) \begin{cases} x_n = (y_n - y_1 - x_2 \tan(0.5(\varphi_n + \varphi_2) + \pi/4) + x_1 \tan(0.5(\varphi_1 + \varphi_n) - \pi/4)) \\ \quad (\tan(0.5(\varphi_n + \varphi_2) + \pi/4) - \tan(0.5(\varphi_n + \varphi_1) - \pi/4))^{-1} \\ y_n = y_1 + (x_n - x_1) \tan(0.5(\varphi_n + \varphi_1) - \pi/4) \end{cases}$$

$$(4.6) \begin{cases} p_n = p_1 + 2K_0(\varphi_n - \varphi_1) \\ \varphi_n = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{1}{4K_0}(p_2 - p_1) \end{cases}$$

Rozwiązanie (4.5) i (4.6) nie nastęrcza żadnych trudności. Współrzędne kolejnych punktów leżących wewnątrz obszaru plastyczności obliczamy analogicznie jak punktu n , z tą różnicą, że w miejsce punktów „1” i „2” bierzemy znane już punkty np. „3” i „4” (rys. IV.4).

W ogólności procedura postępowania jest następująca:

- 1/ do obliczeń przyjmujemy $\frac{1}{2}$ obszaru plastycznego $O_1 A N O_2 B$ z uwagi na symetrię tego obszaru względem osi X (rys. IV.2a),
- 2/ obliczenia współrzędnych punktów siatki charakterystyk i stanu naprężenia w tych punktach w obu częściach ściskanej i rozciąganej prowadzimy równocześnie aż do momentu w którym nastąpi przecięcie linii BN_1 części ściskanej z linią AN_2 /część rozciągana/ (rys. IV.5).



rys. IV.5 Oznaczenia przy wyznaczaniu położenia osi obojętnej i ostatnich linii oddzielających część sztywną od plastycznej materiału.

Wówczas przerywamy obliczenia i przystępujemy do wyznaczenia położenia osi obojętnej na podstawie warunku (4.1), zastępując całkę w tym wyrażeniu sumą o postaci:

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^j \sigma_y^S(x_{i+1}^S) \cdot [x_{i+1}^S - x_i^S] + \sigma_y^S(x_j^S) [x_N - x_j^S] = \\ = \sum_{i=1}^l \sigma_y^R(x_{i+1}^R) [x_{i+1}^R - x_i^R] + \sigma_y^R(x_l^R) [x_N - x_l^R] \quad , \text{ gdzie}$$

indeksy S i R odnoszą się odpowiednio do części ściskanej i rozciąganej obszaru płynięcia, x_N oznacza współrzędną osi obojętnej. Wartości naprężenia σ_y^R, σ_y^S oraz współrzędnych x_i^R, x_i^S wzdłuż odcinków $O_1 l$ i $O_2 j$ są znane na podstawie rozwiązania (4.5) i (4.6) w części $O_1 M_1 l, O_2 M_2 j$ obszaru plasty-

cznego. Rozwiązując (4.7) względem X_N otrzymujemy następujące wyrażenie:

$$(4.8) \quad X_N = \frac{\sum_{i=1}^j \epsilon_y^s(x_{i+1}^s) [x_{i+1}^s - x_i^s] - \sum_{i=1}^L \epsilon_y^R(x_{i+1}^R) [x_{i+1}^R - x_i^R] + \epsilon_y^R(x_L^R) - \epsilon_y^s(x_j^s)}{\epsilon_y^R(x_L^R) - \epsilon_y^s(x_j^s)}$$

3/ Po wyznaczeniu położenia osi obojętnej przystępujemy do wyznaczenia ostatnich linii AN_2 i BN_1 . Linie te oddzielają obszar uplastyczniony od części sztywnej materiału.

Zasadniczym warunkiem, który muszą spełniać linie AN_2 i BN_1 jest aby przechodziły one przez punkt N o współrzędnej X_N (rys. IV.5). Żądanie to w danym przypadku można zrealizować metodą iteracyjną rozwiązując układ równań (4.5) i (4.6) dla zadanych szeregiem rekurencyjnym wartości p, φ, x, y w punktach A i B. W etapie wstępnym wartość X_N jest dana. Zajmijmy się na początku wyznaczeniem linii AN_2 (rys. IV.5).

Proponowana metoda ma następujący przebieg:

Jako pierwsze przybliżenie położenia punktu A przyjmijmy następujące jego współrzędne (rys. IV.6):

$$(4.9) \quad \begin{cases} x_A^1 = x_{M_1} + \Delta x^1 \\ y_A^1 = y(x_A^1) \end{cases}$$

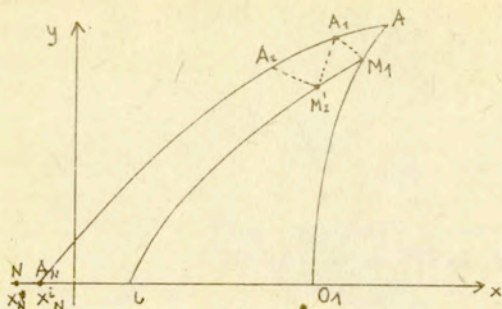
gdzie Δx^1 przyjmujemy na początku obliczeń natomiast y_A^1 wyznaczamy na podstawie (4.3)

Wartość większego z naprężeń głównych w punkcie A o współrzędnych (4.9) wyznaczamy metodą interpolacji liniowej [45], zakładając liniowy rozkład tej wielkości na odcinku M_1A . Natomiast kąt jego nachylenia do osi X obliczamy ze wzoru:

$$(4.9a) \quad \tan \varphi_A^1 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_A^1} \quad \text{gdzie } y \text{ dane jest równaniem (4.3)}$$

Następnie rozwiązujemy układ równań (4.5) i (4.6) /biorąc pod uwagę punkty M_1 i A/ i otrzymujemy punkt A_1 na linii AN (rys. IV.6).

Następny punkt A_2 obliczamy na podstawie rozwiązania (4.5) i (4.6) dla wyznaczonego punktu A_1 i znanego punktu M_2 , leżącego na znanej charakterystyce M_1N (rys. IV.6).



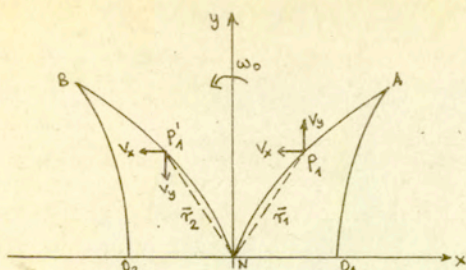
rys. IV.6. Oznaczenia przy wyznaczaniu linii oddzielającej sztywną i plastyczną część materiału

Procedurę tę powtarzamy aż do momentu wyznaczenia współrzędnej x_N^i punktu A_N (rys. IV.6). Porównując wartość tej współrzędnej ze współrzędną x_N^* (rys. IV.6) uzyskaną na podstawie (4.8) oceniamy na podstawie przyjętej wcześniej dokładności d_2 czy punkt N leży na linii $A-A_N$ czy nie (rys. IV.6). Jeśli spełniony jest warunek $|x_N - x_N^*| \leq d_2$, to przyjmujemy, że punkt N leży na wyznaczonej linii i przerywamy obliczenia, jeśli nie, obliczenia powtarzamy od początku, przyjmując jako następne przybliżenie na współrzędne punktu A następujące wyrażenia [45]:

$$(4.10) \quad \begin{aligned} x_A^i &= x_{M_1} + \Delta x^i \\ y_A^i &= g(x_A^i), \quad \text{gdzie} \end{aligned}$$

$$(4.11) \quad \Delta x^i = \frac{x_A^{i-1} - x_{M_1}^i}{1 + x_N - x_N^i}$$

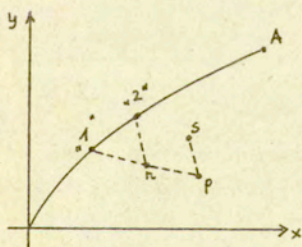
Po wyznaczeniu tych współrzędnych postępujemy analogicznie jak w przypadku przybliżenia pierwszego, z tą różnicą, że w miejsce Δx^1 przyjmujemy kolejne Δx^i ze związku (4.11). Analogicznie postępujemy w przypadku linii BN_1 . Po wyznaczeniu tych linii wyznaczamy wartości prędkości płynięcia wzdłuż tych linii (rys. IV.7) wg. następujących reguł:



rys.IV.7. Oznaczenia przy wyznaczaniu warunków brzegowych dla prędkości płynięcia.

$$(4.12) \quad \begin{cases} V_x(P_1) = -\omega_0 y(P_1) \\ V_y(P_1) = \omega_0 x(P_1) \\ V_x(P_1') = -\omega_0 y(P_1') \\ V_y(P_1') = \omega_0 x(P_1') \end{cases}$$

Należy tu dodać, że składowe prędkości w tych punktach są ciągłe, mimo iż w lewym sąsiedztwie punktu P_1 i prawym sąsiedztwie punktu P_1' mamy obszar sztywny. Rozważmy sposób wyznaczenia składowych V_x i V_y w danym punkcie n leżącym w części rozciąganej obszaru plastycznego na podstawie wartości tych składowych określonych związkami (4.12) wzdłuż linii AN i BN (rys.IV.7). W tym celu wybierzmy dwa dowolne punkty $1'$ i $2''$ na linii AN o danych składowych prędkości $V_x^1, V_y^1, V_x^2, V_y^2$ i kątach α_1, α_2 (rys.IV.8). Dodajmy tu, że współrzędne punktu n jak i kąt α_n dane są na podstawie rozwiązania równań dla naprężeń (4.5) i (4.6). Zastępując różniczki w (3.26) różnicami skończonymi otrzymujemy następujące związki rekurencyjne dla prędkości płynięcia:



rys.IV.8. Oznaczenia przy wyznaczaniu składowych prędkości płynięcia

$$(4.13) \begin{cases} V_y^n = (V_x^1 - V_x^2 + V_y^1 \tan(0.5(\varphi_1 + \varphi_n) - \pi/4) + V_y^2 / \tan(0.5(\varphi_2 + \\ + \varphi_n) + \pi/4)) / (\tan(0.5(\varphi_1 + \varphi_n) - \pi/4) + \tan(0.5(\varphi_2 + \varphi_n) + \pi/4)) \\ V_x^n = V_x^2 + (V_y^n - V_y^2) / \tan(0.5(\varphi_n + \varphi_2) + \pi/4) \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań (4.13) nie nastęrcza żadnych trudności. Określenie składowych prędkości we wszystkich punktach obszaru płynięcia prowadzi do wielokrotnego rozwiązywania (4.13), gdzie rolę punktów „1” i „2” pełnią wyznaczone już nowe punkty np. „n” i „s” dla punktu „p” itd. Takim sposobem wyznaczamy hodograf prędkości w obszarze uplastycznionym zarówno w części ściskanej jak i rozciąganej obszaru plastyczności. Po wyznaczeniu składowych prędkości V_x i V_y w każdym punkcie obszaru plastycznego obliczamy przemieszczenia poszczególnych punktów w czasie Δt wg. wzoru:

$$(4.14) \begin{cases} \Delta x = V_x \Delta t \\ \Delta y = V_y \Delta t \end{cases}$$

Zakładamy przy tym, że prędkości poszczególnych cząstek nie ulegają zmianie w czasie tego przemieszczenia. Założenie to w pewien sposób upraszcza proces deformacji materiału, lecz przy dostatecznie gęstym podziale na etapy założenie to może mieć drugorzędny wpływ na postać rozwiązania. Inny bardziej złożony sposób obliczania tych przemieszczeń, oparty o metodę iteracyjną przedstawiono w pracy [46].

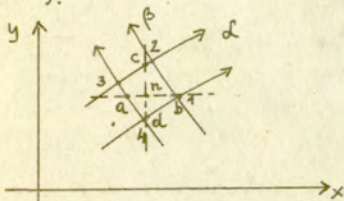
Po przemieszczeniu tych punktów zajmą one nowe położenie o współrzędnych:

$$(4.15) \begin{cases} \bar{x} = x + \Delta x \\ \bar{y} = y + \Delta y \end{cases}$$

tworząc siatkę przemieszczoną w stosunku do aktualnej siatki charakterystyk. Następnie obliczamy składowe tensora prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_i$ oraz składowe tensora spinu cząstki $\dot{\omega}$, różniczkując prędkości płynięcia V_x i V_y wg. następujących wzorów [47]:

$$(4.16) \left\{ \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x &= \frac{V_x^a - V_x^n}{x_a - x_n} + \frac{V_x^b - V_x^n}{x_b - x_n} - \frac{V_x^c - V_x^a}{x_b - x_a} \\ \dot{\epsilon}_y &= \frac{V_y^c - V_y^n}{y_c - y_n} + \frac{V_y^d - V_y^n}{y_d - y_n} - \frac{V_y^c - V_y^d}{y_c - y_d} \\ \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{V_x^c - V_x^n}{y_c - y_n} + \frac{V_x^d - V_x^n}{y_d - y_n} - \frac{V_x^d - V_x^c}{y_d - y_c} + \frac{V_y^a - V_y^n}{x_a - x_n} + \frac{V_y^b - V_y^n}{x_b - x_n} - \frac{V_y^b - V_y^a}{x_b - x_a} \right] \\ \dot{\omega}_x &= \dot{\omega}_y = 0 \\ \dot{\omega}_z &= \frac{1}{2} \left[\frac{V_y^a - V_y^n}{x_a - x_n} + \frac{V_y^b - V_y^n}{x_b - x_n} - \frac{V_y^b - V_y^a}{x_b - x_a} - \frac{V_y^b - V_y^a}{x_b - x_a} - \frac{V_x^d - V_x^n}{y_d - y_n} + \frac{V_x^d - V_x^c}{y_d - y_c} \right] \end{aligned} \right.$$

Wartości składowych prędkości płynięcia V^a, V^b, V^c, V^d w (4.16) wynikają z założenia liniowego rozkładu składowych V_x i V_y danej cząstki wzdłuż odcinków 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 (rys. IV.9).



rys. IV.9. Rozkład składowych prędkości w otoczeniu punktu α .

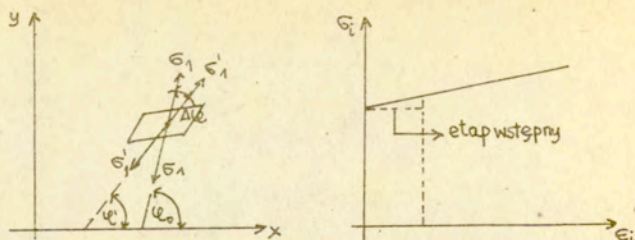
Po wyznaczeniu składowych tensora prędkości odkształceń i spinu (4.16) przechodzimy do całkowania prawa wzmocnienia (2.14) dla wzmocnienia izotropowego i równania ewolucji środka powierzchni płynięcia (3.14) dla wzmocnienia kinematycznego. W tym celu obliczamy parametr Odqvista ϵ_i w poszczególnych punktach węzłowych siatki charakterystyk wg. wzoru:

$$(4.17) \quad \epsilon_i = \int_0^t \dot{\epsilon}_i d\tau = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 - \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + \frac{3}{4} \dot{\epsilon}_{xy}^2)} d\tau$$

oraz wartość kąta obrotu osi głównych naprężeń wg. wzoru:

$$(4.17a) \quad \Delta\varphi = \int_0^t \dot{\omega}_z d\tau, \quad \text{gdzie}$$

$\dot{\omega}_z$ jest wartością zetowej składowej spinu cząstki (rys. IV.10).



rys.IV.10. Kąt obrotu cząstki podczas deformacji w etapie wstępnym.

Wyznaczenie rozkładu niejednorodności plastycznej w obszarze płynięcia sprowadza się do podstawienia (4.17) do (2.14). Zatem w przypadku wzmocnienia izotropowego rozkład ten nie zależy od kierunków głównych naprężeń.

Natomiast rozkład anizotropii plastycznej mierzony wartością składowych tensora $\underline{\mathcal{L}}$ zależy nie tylko od ϵ_i ale też i od $\Delta\varphi$. Składowe tensora $\underline{\mathcal{L}}$ spełniają równanie ewolucji środka początkowej powierzchni plastyczności (3.14).

Całkowanie tego równania na danym etapie można przeprowadzić metodą iteracyjną. W tym celu zapiszemy (3.14)

w postaci:

$$(4.18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \delta x}{\partial t} = \mu_i (\sigma_x^0 - \delta x) + \dot{R}_x \\ \frac{\partial \delta y}{\partial t} = \mu_i (\sigma_y^0 - \delta y) + \dot{R}_y \\ \frac{\partial \delta x_{xy}}{\partial t} = \mu_i (\tau_{xy}^0 - \delta x_{xy}) + \dot{R}_{xy}, \text{ gdzie} \end{cases}$$

$$(4.19) \quad \begin{cases} \dot{R}_x = 2 \delta x_{xy} \dot{\omega}_z - (\delta x, x V_x + \delta x, y V_y) \\ \dot{R}_y = 2 \delta x_{xy} \dot{\omega}_z - (\delta y, x V_x + \delta y, y V_y) \\ \dot{R}_{xy} = (\delta x - \delta y) \dot{\omega}_z - (\delta x_{xy, x} V_x + \delta x_{xy, y} V_y), \\ \dot{\omega}_z = \frac{1}{2} (V_{y, x} - V_{x, y}) \end{cases}$$

R_x, R_y, R_{xy} są członami uwzględniającymi obrót i ruch konwekcyjny powierzchni plastyczności.

Jako I przybliżenie położenia środka powierzchni płynięcia przyjmijmy rozwiązanie (4.18) tylko dla członu konstytutyw-

nego tj. gdy $R_x = R_y = R_{xy} = 0$.

Zastępując różniczki różnicami skończonymi możemy (4.18) w tym przypadku zapisać następująco:

$$(4.20) \quad \begin{cases} \Delta x^I - \Delta x^0 = \mu (\epsilon_x^0 - \Delta x^I) \\ \Delta y^I - \Delta y^0 = \mu (\epsilon_y^0 - \Delta y^I) \\ \Delta x_{xy}^I - \Delta x_{xy}^0 = \mu (\tau_{xy}^0 - \Delta x_{xy}^I), \end{cases}$$

gdzie symbol „0” oznacza wielkości znane przed deformacją, „I” wielkości poszukiwane, μ natomiast dane jest następującym związkem wynikającym z (3.16):

$$(4.20a) \quad \mu = \frac{\sqrt{3} H \epsilon_i [(\epsilon_x^0 - \Delta x^0) - (\epsilon_y^0 - \Delta y^0) + 2 \tan 2\psi_0 (\tau_{xy}^0 - \Delta x_{xy}^0)]}{(1 + \frac{1}{4} \tan^2 2\psi_0) [(\epsilon_x^0 - \Delta x^0) - (\epsilon_y^0 - \Delta y^0)] [(\epsilon_x^0 - \Delta x^0) - (\epsilon_y^0 - \Delta y^0) + 4(\tau_{xy}^0 - \Delta x_{xy}^0)(\tau_{xy}^0 - \Delta x_{xy}^0)]}$$

Podstawiając (4.20a) do (4.20) po przekształceniach otrzymujemy:

$$(4.21) \quad \begin{cases} \Delta x^I = \frac{1}{2} (\epsilon_x^0 - \Delta x^0 - \epsilon_y^0 + \Delta y^0) [\epsilon_x^0 + \Delta x^0 + E \tan 2\psi_0 - A + B - \epsilon_y^0] + (\tau_{xy}^0 - \Delta x_{xy}^0) \cdot \\ \quad \cdot [C - D + \tau_{xy}^0 + E] + [(\epsilon_x^0 - \Delta x^0) - (\epsilon_y^0 - \Delta y^0)] (\epsilon_x^0 + \Delta x^0 + E \tan 2\psi_0 + \epsilon_x^0) + \\ \quad + \frac{1}{2} [(\epsilon_x^0 - \Delta x^0) - (\epsilon_y^0 - \Delta y^0)] (A - B + \epsilon_y^0 - E \epsilon_x^0) + 2(\tau_{xy}^0 - \Delta x_{xy}^0) (C - D + \tau_{xy}^0 + E \epsilon_x^0)^{1/2} \\ \Delta y^I = A \Delta x^I + B \\ \Delta x_{xy}^I = C \Delta x^I + D, \quad \text{gdzie} \\ A = \frac{\epsilon_x^0 - \Delta x^0}{\epsilon_x^0 - \Delta x^0}, \quad B = \frac{\Delta y^0 \epsilon_x^0 - \Delta x^0 \epsilon_y^0}{\epsilon_x^0 - \Delta x^0}, \quad C = \frac{\tau_{xy}^0 - \Delta x_{xy}^0}{\epsilon_x^0 - \Delta x^0} \\ D = \frac{\Delta x_{xy}^0 \epsilon_x^0 - \Delta x^0 \tau_{xy}^0}{\epsilon_x^0 - \Delta x^0}, \quad E = \frac{\sqrt{3} H \epsilon_i}{2(1 + \frac{1}{4} \tan^2 2\psi_0)^{1/2}} \end{cases}$$

Po wyznaczeniu $\Delta x^I, \Delta y^I, \Delta x_{xy}^I$ wyznaczamy wartości członów R_x^I, R_y^I, R_{xy}^I (4.19).

Zastępując różniczki w (4.19) różnicami skończonymi oraz wykorzystując związki (4.14) i (4.17a) możemy napisać:

$$(4.22) \quad \begin{cases} R_x^I = 2 \alpha_{xy}^I \Delta\varphi - (\alpha_{x,x}^I \Delta X + \alpha_{x,y}^I \Delta y) \\ R_y^I = 2 \alpha_{xy}^I \Delta\varphi - (\alpha_{y,x}^I \Delta X + \alpha_{y,y}^I \Delta y) \\ R_{xy}^I = (\alpha_x^I - \alpha_y^I) \Delta\varphi - (\alpha_{xy,x}^I \Delta X + \alpha_{xy,y}^I \Delta y), \end{cases}$$

gdzie

$\Delta\varphi$ dane jest wzorem (4.17a) a ΔX i Δy wzorem (4.14).

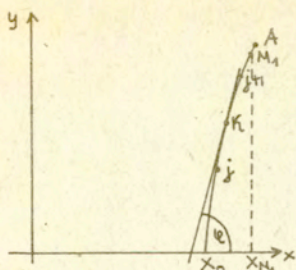
Występujące w (4.22) pochodne cząstkowe wyznaczamy numerycznie /patrz wzory (4.32)/.

Sumując składowe (4.21) i (4.22) otrzymujemy II przybliżenie na wartości tych składowych w postaci:

$$(4.22a) \quad \begin{cases} \alpha_x^{II} = \alpha_x^I + R_x^I \\ \alpha_y^{II} = \alpha_y^I + R_y^I \\ \alpha_{xy}^{II} = \alpha_{xy}^I + R_{xy}^I \end{cases}$$

Podstawiając (4.22a) do (4.22) obliczamy kolejne przybliżenie członów obrotowych i podstawiając je do (4.22) następne przybliżenie składowych tensora $\underline{\alpha}$. Proces ten powtarzamy, aż do uzyskania wyniku z żadaną dokładnością.

Po określeniu przemieszczeń punktów leżących na brzegu swobodnym $B_1 O_2 B$ po stronie ściskanej i $A_1 O_1 A$ po stronie rozciąganej aproksymujemy kształt tych brzegów metodą funkcji spline trzeciego stopnia [45]. Istotą tej metody jest interpolacja funkcji $y(x)$ w przedziale $\langle x_0, x_{N_1} \rangle$ (rys. IV.11) (dyskretny jej rozkład tworzą współrzędne $y_k(x_k)$ przemieszczonych punktów brzegowych) za pomocą funkcji będącej przedziałami wielomianem trzeciego stopnia. Weźmy dla przykładu $\frac{1}{2}$ brzegu swobodnego $O_1 A$ obszaru rozciąganego (rys. IV.11)



rys. IV.11. Oznaczenia przy aproksymacji brzegu swobodnego O_1A obszaru rozciąganego

Przedział $\langle x_0, x_{M_1} \rangle$ dzielimy na $N-1$ podprzedziałów (N - liczba punktów brzegowych na O_1A).

Zadanie to polega na znalezieniu funkcji $g(x)$ określonej w całym przedziale $\langle x_0, x_{M_1} \rangle$ i spełniającej następujące warunki:

1. $g(x)$ jest funkcją co najmniej klasy C^2 ,
2. W każdym z przedziałów $\langle x_j, x_{j+1} \rangle$ ($j=0, 1, 2, \dots, N-2$) funkcja $g(x)$ jest wielomianem trzeciego stopnia postaci:

$$(4.23) \quad g(x) \equiv g_k(x) = \sum_{i=0}^3 \mathcal{L}_i^j (x_j - x)^i$$

3. W dowolnym znanym punkcie o współrzędnych x_j, y_j spełnione są następujące warunki:

$$(4.23a) \quad \begin{aligned} a. & \quad g(x_j) = y_j \\ b. & \quad g'_k(x_j) = g'_{k+1}(x_j) \\ c. & \quad g''_k(x_j) = g''_{k+1}(x_j) \end{aligned}$$

a w punktach brzegowych

$$d. \quad g''(x_0) = g''(x_{M_1}) = 0$$

Warunki a, b, c, d tworzą układ $4(N-1)$ równań na $4(N-1)$ niewiadomych kompletów współczynników \mathcal{L}_i^j ($i=0, 1, 2, 3; j=1, 2, \dots, N-1$). Po wyznaczeniu wartości tych współczynników możemy z łatwością wyznaczyć współrzędne dowolnego punktu brzegowego x_k, y_k oraz wartość kąta φ_k w tym punkcie według wzoru:

$$(4.24) \quad \varphi_k = \arctan \left(\frac{dg}{dx} \right) \Big|_{x=x_k} + \Delta\varphi(x_k, y_k)$$

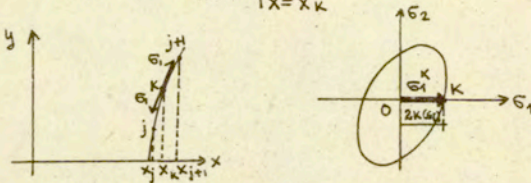
gdzie $\Delta\varphi$ jest kątem wynikającym z obrotu cząstki w trakcie deformacji. Wartość tego kąta w punkcie K (rys. IV.10) wyznaczamy metodą funkcji spline 3-ciego rzędu (4.23), (4.23a) na podstawie rozkładu $\Delta\varphi$ w punktach (x_j, y_j) z etapu poprzedniego.

Po wyznaczeniu współrzędnych nowych punktów brzegowych wyznaczamy w nich wartości naprężeń głównych σ_1, σ_2 , naprężenie średnie p i kąt φ w następujący sposób:

a/ wzmocnienie izotropowe /część rozciągana/

Wykorzystując rozkład $\Delta\varphi$ i $k(\xi_i)$ w punktach przemieszczonych określamy wartość $k(\xi_i)$ w dowolnym punkcie K (rys. IV.12) metodą funkcji spline (4.23) a następnie wartości σ_1 i p (rys. IV.12) wg. następujących wzorów:

$$(4.25) \quad \begin{cases} \sigma_1^k = 2k(\xi_i) \\ \sigma_2 = 0 \\ p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = k(\xi_i) \\ \varphi_k = \arctan \left(\frac{d\varphi_k}{dx} \right) \Big|_{x=x_k} + \Delta\varphi(x_k, y_k) \end{cases}$$

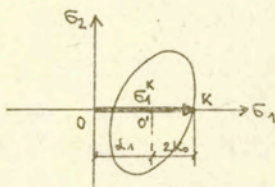


rys. IV.12. Określenie orientacji kierunków głównych tensora naprężeń oraz wartości σ_1 w punkcie K wzdłuż brzegu swobodnego dla hipotezy wzmocnienia izotropowego

b/ wzmocnienie kinematyczne /część rozciągana/

Wykorzystując rozkład $\Delta\varphi$, d_x , d_y , d_{xy} w punktach przemieszczonych określamy wartość d_x , d_y , d_{xy} w dowolnym punkcie K (rys. IV.12a) metodą funkcji spline (4.23), (4.23a) oraz wartości σ_1 i p (rys. IV.13) wg. następujących wzorów:

$$(4.26) \quad \begin{cases} \sigma_1^k = 2k_0 + \delta_1 \\ \sigma_2 = 0 \\ p = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) = k_0 + \frac{1}{2} \delta_1 \\ \varphi_k = \arcc \left. \frac{d g_k(x)}{dx} \right|_{x=x_k} + \Delta \varphi(x_k, y_k) \end{cases}$$

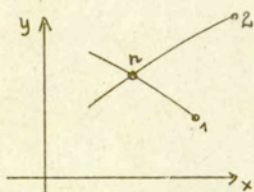


rys. IV.13. Określenie wartości σ_1 w punkcie K wzdłuż brzegu swobodnego dla wzmocnienia kinematycznego w przestrzeni naprężeń głównych.

Wartości naprężeń głównych, naprężenia średniego i kąta wzdłuż brzegu swobodnego dla części ściskanej wyznaczamy analogicznie pamiętając jedynie o zmianie znaków przed naprężeniem σ_1 .

Kolejnym punktem obliczeń jest wyznaczanie rozwiązania w następnym etapie. Najpierw wyznaczamy współrzędne siatki charakterystyk oraz wielkości charakteryzujące stan naprężenia w poszczególnych jej punktach. Sposób postępowania w tym przypadku jest taki sam jak w etapie wstępnym, z tą różnicą, że w miejsce związków (3.21) i (3.23) rozwiązujemy teraz związki (3.21) i (3.24) dla wzmocnienia izotropowego oraz (3.21) i (3.25) dla wzmocnienia kinematycznego.

Rozważmy zatem metodę rozwiązania równań (3.21), (3.24) i (3.25) w dowolnym punkcie obszaru płynięcia np. w punkcie n (rys. IV.14).



rys. IV.14. Oznaczenia przy obliczaniu współrzędnych punktu węzłowego siatki charakterystyk

Znając wartości p_1, ϱ w punktach „1” i „2” nie leżących na jednej charakterystyce możemy obliczyć współrzędne punktu n ; x_n, y_n oraz p_n i ϱ_n , rozwiązując następujące układy równań, wynikające z zastąpienia w (3.24) i (3.25) różniczek różnicami skończonymi.

A/ wzmocnienie izotropowe:

- 1/ układ równań (4.5) na współrzędne x_n, y_n oraz
- 2/ układ równań wynikający z (3.24).

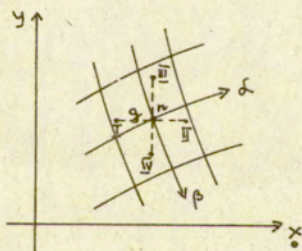
$$(4.27) \quad \begin{aligned} p_n &= p_1 + 2K(\varepsilon_i)(\varrho_n - \varrho_1) + DK_x(y_n - y_1) - DK_y(x_n - x_1) \\ \varrho_n &= \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) - \frac{1}{4K(\varepsilon_i)} [DK_y(2x_n - x_1 - x_2) - DK_x(2y_n - y_1 - y_2) \\ &\quad + (p_2 - p_1)], \end{aligned}$$

gdzie

$$(4.28) \quad \begin{cases} DK_x = \frac{K_{II} - K_I}{2g} \\ DK_y = \frac{K_{IV} - K_{III}}{2g} \end{cases}$$

są pochodnymi funkcji $K(x, y)$ względem x i y .

Pochodne te są obliczane w punkcie n , leżącym między przemieszczonymi punktami siatki etapu poprzedniego I, II, III, IV o współrzędnych (rys. IV.15):



rys. IV.15 Oznaczenia do obliczania pochodnych.

$$(4.29) \quad \begin{aligned} x_I &= x_n - g & x_{II} &= x_n + g \\ y_I &= y_n & y_{II} &= y_n \\ x_{III} &= x_n & x_{IV} &= x_n \\ y_{III} &= y_n - g & y_{IV} &= y_n + g \end{aligned}$$

g jest wartością kroku różniczkowania numerycznego.

Schemat obliczeń wartości funkcji K w punktach I, II, III i IV jest następujący. Po wyznaczeniu współrzędnych punktu n oraz określeniu oczka przemieszczonej siatki charakterystyk poprzedniego etapu deformacji, wewnątrz którego znajduje się punkt n (rys. IV.15) oraz ze znanych wartości K w punktach a, b, c, d obliczamy wartość K w polu ograniczonym odcinkami $a-b, b-c, c-d, d-a$, metodą interpolacji dwuliniowej [47], która polega na rozwiązaniu równania w postaci:

$$(4.30) \quad K(x, y) = \delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 xy$$

ze względu na współczynniki $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$.

Równanie to przedstawia wycinek powierzchni $G(x, y) = K$, rozpiętej nad rozpatrywanym oczkiem siatki. Warunkiem rozwiązania tego równania jest żądanie aby wartości K w punktach a, b, c, d leżały na powierzchni $G(x, y)$. Otrzymamy wówczas układ czterech równań na 4 niewiadome współczynniki $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$. Po wyznaczeniu wartości tych współczynników obliczamy na podstawie (3.35) wartości funkcji $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$ w punktach I, II, III, IV (rys. IV.15).

B/ wzmocnienie kinematyczne

1/ układ równań (4.5) na współrzędne x_n, y_n ,

2/ układ równań wynikający z (3.25)

$$(4.31) \quad \begin{cases} p_n = p_1 + 2K_0(\varrho_n - \varrho_1) - (DA_x + D\alpha_{xy,y})(x_n - x_1) \\ \quad + (DA_y - D\alpha_{xy,x})(y_n - y_1) \\ \varrho_n = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) + \frac{1}{4K_0}[(p_2 - p_1) + (DA_x + D\alpha_{xy,y})(2x_n - x_1 - x_2) \\ \quad - DA_y(y_n - y_1 - y_2) + D\alpha_{xy,x}(y_2 - y_1)], \end{cases}$$

gdzie:

$$A = \frac{1}{2}(\alpha_x - \alpha_y)$$

$$(4.32) \begin{cases} DA_{,x} = \frac{A^{II} - A^I}{2g} \\ DA_{,y} = \frac{A^{III} - A^{II}}{2g} \\ D\alpha_{xy,x} = \frac{\alpha_{xy}^{III} - \alpha_{xy}^I}{2g} \\ D\alpha_{xy,y} = \frac{\alpha_{xy}^{II} - \alpha_{xy}^{IV}}{2g} \end{cases}$$

są średnimi pochodnymi wielkości A oraz α_{xy} po x i y w punkcie n . Sposób wyznaczenia tych pochodnych jest taki sam jak pochodnych DK_x i DK_y w poprzednim przypadku.

Współrzędne punktu n (x_n, y_n) oraz stan naprężenia w tym punkcie (p_n i ϱ_n) dla wymienionych wyżej przypadków można wyznaczyć metodą iteracyjną. Ma ona następujący przebieg:

a/ wzmocnienie izotropowe

- 1/ W pierwszym przybliżeniu przyjmujemy, że wartość kąta w punkcie n , $\varrho_n = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)$ (rys. (IV.14)).
- 2/ Dla tej wartości kąta obliczamy I przybliżenie współrzędnych tego punktu ze wzorów (4.5).
- 3/ Na podstawie rozkładu funkcji $K(x,y)$ w punktach węzłowych przesuniętej w wyniku deformacji siatki charakterystyk poprzedniego etapu wyznaczamy metodą interpolacji dwuliniowej [53] wartość K w punkcie n , czyli $K(x_n, y_n)$.
- 4/ Obliczamy pochodne cząstkowe DK_x, DK_y w tym punkcie wg. schematu (4.28).
- 5/ Na podstawie (4.27a) obliczamy wartość p_n w punkcie n .
- 6/ Na podstawie (4.27b) obliczamy II przybliżenie kąta ϱ_n i całą procedurę powtarzamy od początku.
- 7/ Obliczenia przerywamy, gdy różnica wartości kąta ϱ_n w dwóch kolejnych iteracjach nie przekracza z góry zadanej wartości d_1 .

b/ wzmocnienie kinematyczne

- 1 i 2/ tak jak w punkcie a.
- 3/ Na podstawie rozkładu wartości składowych $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$ w punktach węzłowych przesuniętej w wyniku deformacji siatki charakterystyk poprzedniego etapu wyznaczamy metodą interpolacji dwuliniowej [47] wartości $\alpha_x(x_n, y_n)$, $\alpha_y(x_n, y_n)$ i $\alpha_{xy}(x_n, y_n)$ w punkcie n .

- 4/ Obliczamy pochodne cząstkowe składowych tensora $\underline{\epsilon}$ w punkcie n wg. schematu (4.32).
- 5/ Na podstawie (4.31a) obliczamy wartość naprężenia średniego p_n w punkcie n .
- 6/ Na podstawie (4.31b) obliczamy II przybliżenie kąta φ_n i procedurę obliczeniową powtarzamy od początku.
- 7/ tak jak w punkcie a.

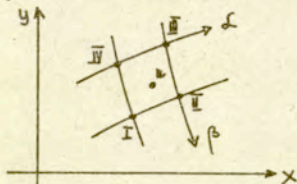
Sposób wyznaczenia siatki charakterystyk w całym obszarze plastycznym w dowolnym etapie jest taki sam jak w etapie wstępnym, tj. obliczenia prowadzimy równocześnie w obu częściach obszaru plastycznego aż do momentu przecięcia się ostatnich linii AN_2 i BN_1 (rys. IV.5). W tym momencie przerywamy obliczenia i wyznaczamy położenie osi obojętnej wg. (4.6). Po wyznaczeniu położenia osi obojętnej wyznaczamy linie AN_2 i BN_1 za pomocą przedstawionego wcześniej schematu, z tą różnicą że współrzędna y_A^i w (4.10) oraz kąt φ_A^i w (4.9a) wyznaczane są metodą funkcji spline (4.23) ze związków (4.24). Następnie wyznaczamy pole prędkości w obszarze uplastycznionym wg. przedstawionego wcześniej schematu (patrz równania (4.13)) i obliczamy wartość parametru Odqvista w danym punkcie obszaru płynięcia obliczając całkę:

$$(4.33) \int_0^t \dot{\epsilon}_i dL = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\epsilon}_x^2 + \dot{\epsilon}_y^2 - \dot{\epsilon}_x \dot{\epsilon}_y + \frac{3}{4} \dot{\epsilon}_{xy}^2)} dL$$

wzdłuż trajektorii cząstki, która w wyniku deformacji znalazła się w punkcie n (rys. IV.14).

Procedura obliczenia tej całki jest następująca:

- A/ określamy oczko przemieszczonej siatki charakterystyk z poprzedniego etapu, wewnątrz której leży punkt n (rys. IV.16).



rys. IV.16 Oznaczenia przy obliczaniu parametru Odqvista w punkcie n .

b/ na podstawie znajomości współrzędnych i wartości w punktach I, II, III i IV /z poprzedniego etapu/ obliczamy wartość (4.33) metodą interpolacji dwuliniowej [47], w której współczynniki równania postaci:

$$(4.34) \quad \epsilon_i = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 xy$$

przedstawiającego wycinek powierzchni $\epsilon_i = F(x, y)$ rozpiętej nad rozpatrywanym oczkiem siatki (rys. IV.16) określa się z warunku aby cztery narożne punkty o wartościach $\epsilon_i^I, \epsilon_i^{II}, \epsilon_i^{III}$ i ϵ_i^{IV} leżały na tej powierzchni. Otrzymujemy układ czterech równań algebraicznych na cztery poszukiwane wielkości $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i po jego rozwiązaniu możemy z równania (4.34) obliczyć wartość całki (4.33) w punkcie n /bieżącej siatki charakterystyk/. W wyniku przemieszczenia cząstki w czasie deformacji całkowita wartość tego parametru w punkcie n jest równa sumie

$$(4.35) \quad \epsilon_i = \int_0^t \dot{\epsilon}_i d\bar{t} + \Delta \epsilon_i$$

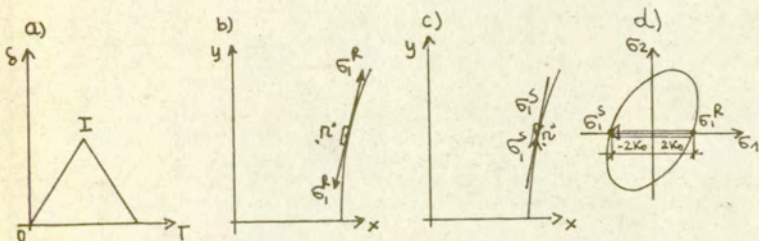
gdzie $\Delta \epsilon_i$ jest intensywnością odkształceń cząstki w bieżącym etapie deformacji ($\Delta t = \Delta$).

Po wyznaczeniu wartości parametru Odqvista ϵ_i , kąta obrotu osi głównych naprężeń w poszczególnych punktach obszaru plastycznego obliczamy wartość funkcji $K(\epsilon_i)$ (2.14) i składowych tensora $\underline{\sigma}$ (3.14) wg. przedstawionych już schematów. Następnie wyznaczamy kształt brzegu swobodnego oraz wartości naprężenia średniego i kąta φ wzdłuż tego brzegu i przystępujemy do obliczeń w następnym etapie deformacji.

IV.3. Algorytm obliczeń cyklicznego zginania

Cykliczne zginanie polega na wielokrotnym zgięciu próbki w przedziale kąta $\pm \delta_0$ (rys. IV.1b). Prędkość obrotowa części sztywnych ω_0 zmienia znak. Proces ten można przedstawić za pomocą ciągu monotonicznego zginania na odcinkach (0-I), (I-II), itd (rys. IV.1b). Zatem rozwiązanie tego zagadnienia sprowadza się do złożenia ciągu rozwiązań monotonicznych na w/w odcinkach dla odpowiednich wartości naprężeń wzdłuż brzegu swobodnego w punktach I, II, ... itd (rys. IV.1c). Weźmy dla przykładu dowolną cząstkę n (rys. IV.17b), leżącą wzdłuż brzegu swobodnego O_1A i prześledźmy zmianę wartości i kierunku naprężenia głównego σ_1 przy przejściu cząstki np. ze stanu jednoosiowego rozciągania do stanu jednoosiowego ściskania w punkcie I schematu (IV.17a) dla materiału bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem izotropowym oraz kinematycznym:

a/ materiał sztywno-idealnie plastyczny



rys. IV.17. Zmiana kierunku naprężenia głównego w cząstce n

Zgodnie z (rys. IV.17d) wartość naprężenia głównego σ_1^S w cząstce po zmianie kierunku prędkości obrotowej ω_0 na przeciwny wynosi:

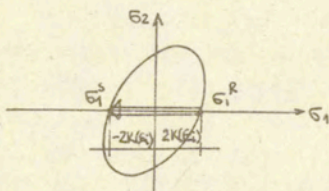
$$(4.36) \quad \sigma_1^S = \sigma_1^R - 4K_0 \quad , \quad \text{gdzie}$$

$$(4.37) \quad \sigma_1^R = 2K_0$$

Podstawiając (4.37) do (4.36) mamy

$$(4.38) \quad \sigma_1^S = -2K_0$$

b/ wzmocnienie izotropowe



rys.IV.18. Zmiana wartości naprężenia głównego σ_1 w cząstce n.

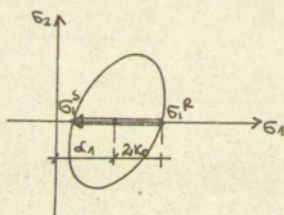
$$(4.39) \quad \sigma_1^R = 2K(\epsilon_i) \quad \text{gdzie } K(\epsilon_i) \text{ dane jest prawem (2.14).}$$

$$(4.40) \quad \sigma_1^S = \sigma_1^R - 4K(\epsilon_i)$$

Podstawiając (4.39) do (4.40) mamy :

$$(4.41) \quad \sigma_1^S = -2K(\epsilon_i)$$

c/ wzmocnienie kinematyczne



rys.IV.19. Zmiana wartości naprężenia głównego w cząstce n.

$$(4.42) \quad \sigma_1^R = \alpha_1 + 2K_0 \quad \text{gdzie } \alpha_1 \text{ dane jest na podstawie równania (3.14).}$$

$$(4.43) \quad \sigma_1^S = \sigma_1^R - 4K_0$$

Podstawiając (4.42) do (4.43) mamy:

$$(4.44) \quad \sigma_1^s = \alpha_1 - 2K_0$$

Dodać tu należy, że $k(\epsilon_i)$ w (4.39) i α_1 w (4.42) dane są na podstawie rozwiązania na odcinku (0-I). W punkcie „0” materiał traktujemy jako sztywno-idealnie plastyczny, gdzie

$$(4.45) \quad \sigma_1 = 2K_0, \text{ gdzie } K_0 \text{ jest stałą materiałową.}$$

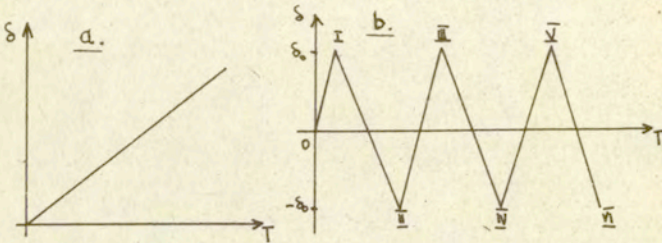
Zróbmy na końcu zestawienie wartości σ_1 przed i po zmianie znaku prędkości obrotowej w punkcie I (rys. IV.17a).

Materiał	przed zmianą	po zmianie
Sztywno-idealnie plastyczny	$2K_0$	$-2K_0$
Sztywno plastyczny ze wzmocnieniem izotropowym	$2k(\epsilon_i)$	$-2k(\epsilon_i)$
Sztywno plastyczny ze wzmocnieniem kinematycznym	$\alpha_1 + 2K_0$	$\alpha_1 - 2K_0$

Wartości σ_1 w punktach II, III, IV, itd. (rys. IV.20b) określamy analogicznie jak w punkcie I.

IV.4. Program obliczeń

Przedstawiony algorytm stanowi podstawę programu obliczeniowego, analizującego proces plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem w warunkach płaskiego stanu odkształcenia podczas monotonicznego - cyklicznego zginania elementu z podwójnym symetrycznym wycięciem kołowym (rys. IV.21).

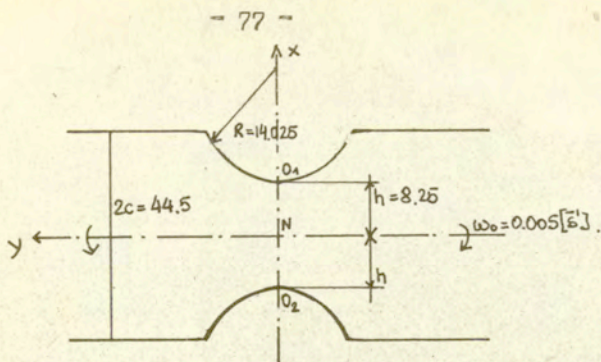


rys. IV.20. Monotoniczne - a i cykliczne - b zginanie karbu.

Na rysunku tym na osi rzędnych odłożono kąt ugięcia próbki zginanej δ zaś na osi odciętych etapy deformacji T .

Zbiór danych do tego programu stanowią:

- | | |
|---|--------------|
| a/ prędkość obrotowa części chwytowych próbki | - ω_0 |
| b/ liczba etapów deformacji plastycznej | - T |
| c/ dokładność obliczeń kąta | - d_1 |
| d/ dokładność obliczeń położenia osi obojętnej | - d_2 |
| e/ moduł wzmocnienia | - H |
| f/ promień wycięcia kołowego karbu | - R |
| g/ szerokość elementu z karbem | - $2c$ |
| h/ kąt ugięcia elementu z karbem dla obciążeń cyklicznych | - δ_0 |
| i/ granica plastyczności na ścinanie | - K_0 |
| j/ czas trwania jednego etapu deformacji | - Δt |
| k/ długość minimalnego przekroju | - $2h$ |
| l/ dokładność iteracji składowych ϵ | - e |



rys.IV.24. Wymiary elementu z podwójnym symetrycznym karbem

Przed wykonaniem obliczeń głównych, program poddano testowaniu, którego celem było sprawdzenie zbieżności użytych schematów iteracyjnych w zależności od wartości kroku obliczeniowego w (rys.IV.21a).

Zbieżność schematów iteracyjnych programu oceniono na podstawie zależności liczby iteracji \mathcal{I}_1 po których osiąga się żądaną dokładność d_1 oraz \mathcal{I}_2 po których osiąga się żądaną dokładność d_2 od kroku obliczeń w . Oceny tej dokonano dla dwu modeli materiału: sztywno-idealnie plastycznego oraz sztywno plastycznego ze wzmocnieniem liniowym, z uwzględnieniem izotropowej i kinematycznej hipotezy wzmocnienia, a obliczenia wykonano dla następujących danych:

$$\omega_0 = 0.005 \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

$$T = 36$$

$$d_1 = 5 \cdot 10^{-7}$$

$$d_2 = 5 \cdot 10^{-4}$$

$$H = 1.732$$

$$R = 14.025 \text{ [cm]}$$

$$2c = 44.5 \text{ [cm]}$$

$$\delta_0 = 2^\circ$$

$$k_0 = 115.5 \text{ [MPa]}$$

$$\Delta t = 1.0 \text{ [s]}$$

$$2h = 16.5 \text{ [cm]}$$

$$e = 5 \cdot 10^{-6}$$

Zależności te przedstawiono w tabelach:

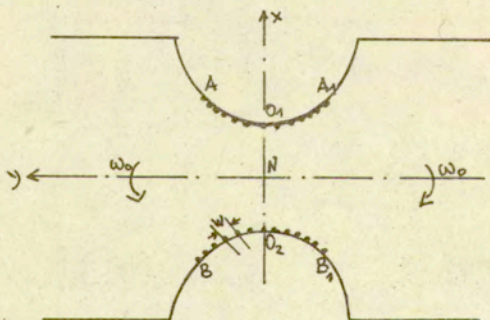
Ta/ model sztywno-idealnie plastyczny materiału

W [rad]	0,264	0,226	0,114	0,092
J_1	4	3	3	3
J_2	6	4	4	4

Tb/ model sztywno plastyczny ze wzmocnieniem

W [rad]	0,264	0,226	0,144	0,092	
J_1	6	3	3	3	hipoteza wzmocnienia izotropowego
J_2	8	5	5	5	
J_1	6	3	3	3	hipoteza wzmocnienia kinematycznego
J_2	8	4	4	4	

Na podstawie tych danych przyjęto do dalszych obliczeń wartość $W = 0,226$ [rad] ; odpowiada ona 13-tu punktom na brzegu swobodnym części ściskanej obszaru plastycznego BO_2B_1 i 13-tu punktom na brzegu swobodnym części rozciąganej AO_1A_1 tego obszaru (rys. IV.21.a).



rys. IV.21.a Rozmieszczenie punktów brzegowych na brzegach swobodnych obszarów: rozciąganej AO_1A_1 i ściskanej BO_2B_1 .

Program napisano w języku FORTRAN 4 ; realizuje on obliczenia równocześnie dla ściskanej BNB_1 i rozciąganej ANA_1 części obszaru plastycznego (rys. IV.2a). Zbiór wyników obliczeń w jednym etapie deformacji w punkcie węzłowym siatki charakterystyk /dla obu hipotez wzmocnienia/ tworzą następujące wielkości:

- | | | |
|---|----|---|
| 1/ współrzędne siatki charakterystyk | -- | x, y |
| 2/ wartości składowych prędkości | -- | v_x, v_y |
| 3/ wartość naprężenia średniego | -- | p |
| 4/ wartość kąta nachylenia większego z naprężeń głównych | -- | φ |
| 5/ wartość parametru Odqvista | -- | ϵ_i |
| 6/ wartość niejednorodności plastycznej | -- | $K(\epsilon_i)$ |
| 7/ wartość składowych tensora $\underline{\epsilon}$ | -- | $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ |
| 8/ wartość składowych tensora $\underline{\omega}$ | -- | ω_z |
| 9/ wartość składowych tensora naprężeń $\underline{\sigma}$ | -- | $\sigma_x, \sigma_y, \bar{\tau}_{xy}$ |
| 10/ wartości składowych przemieszczenia punktów węzłowych | -- | $\Delta x, \Delta y$ |
| 11/ wartość momentu zginającego | -- | M_{pl} |

Wielkości te są znormalizowane według następujących wzorów:

$x = \bar{x}/h$	$\epsilon_x = \bar{\epsilon}_x/K_0$	$\sigma_x = \bar{\sigma}_x/K_0$	$\Delta x = \bar{\Delta x}/h$
$y = \bar{y}/h$	$\epsilon_y = \bar{\epsilon}_y/K_0$	$\sigma_y = \bar{\sigma}_y/K_0$	$\Delta y = \bar{\Delta y}/h$
$v_x = \bar{v}_x/h$	$\epsilon_{xy} = \bar{\epsilon}_{xy}/K_0$	$\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{xy}/K_0$	$M_{pl} = \bar{M}_{pl}/d^2 h^2 K_0$
$v_y = \bar{v}_y/h$	$K = \bar{K}/K_0$	$p = \bar{p}/K_0$	

Wielkości z daszkiem są wielkościami wymiarowymi.

R o z d z i a ł V

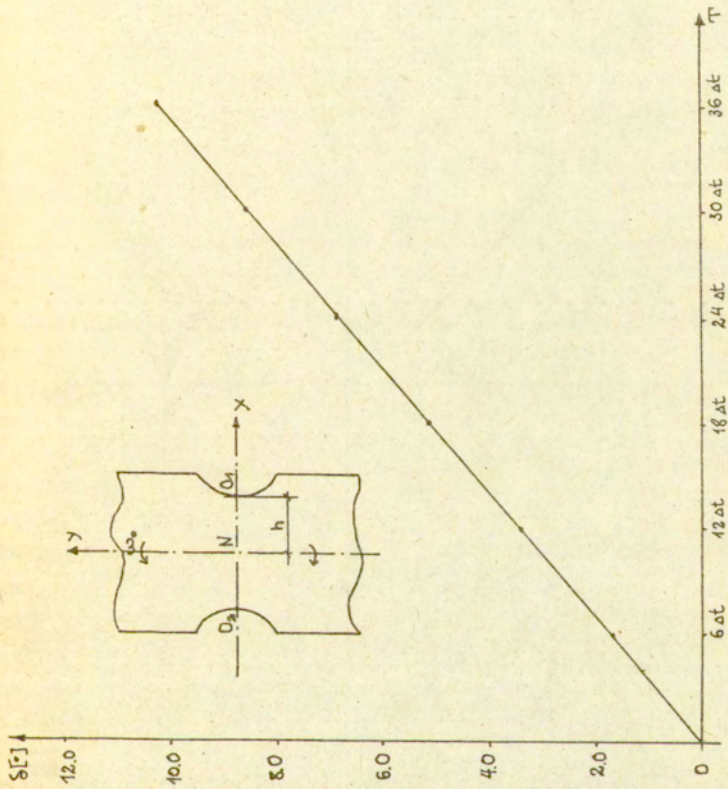
WYNIKI OBLICZEN

Na podstawie przedstawionego algorytmu i programu obliczeń w rozdziale IV uzyskano następujące wyniki dla monotonicznego i wolno zmieniającego się cyklicznego zginania elementu osłabionego podwójnym symetrycznym wycięciem kołowym w warunkach płaskiego stanu odkształcenia (rys. IV.20). Wyniki te odnoszą się do materiału sztywno-idealnie plastycznego, sztywno plastycznego ze wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym. Rozwiązanie przedstawiono na szczelbu przekroju obszaru plastycznego płynięcia oraz na szczelbu cząstki.

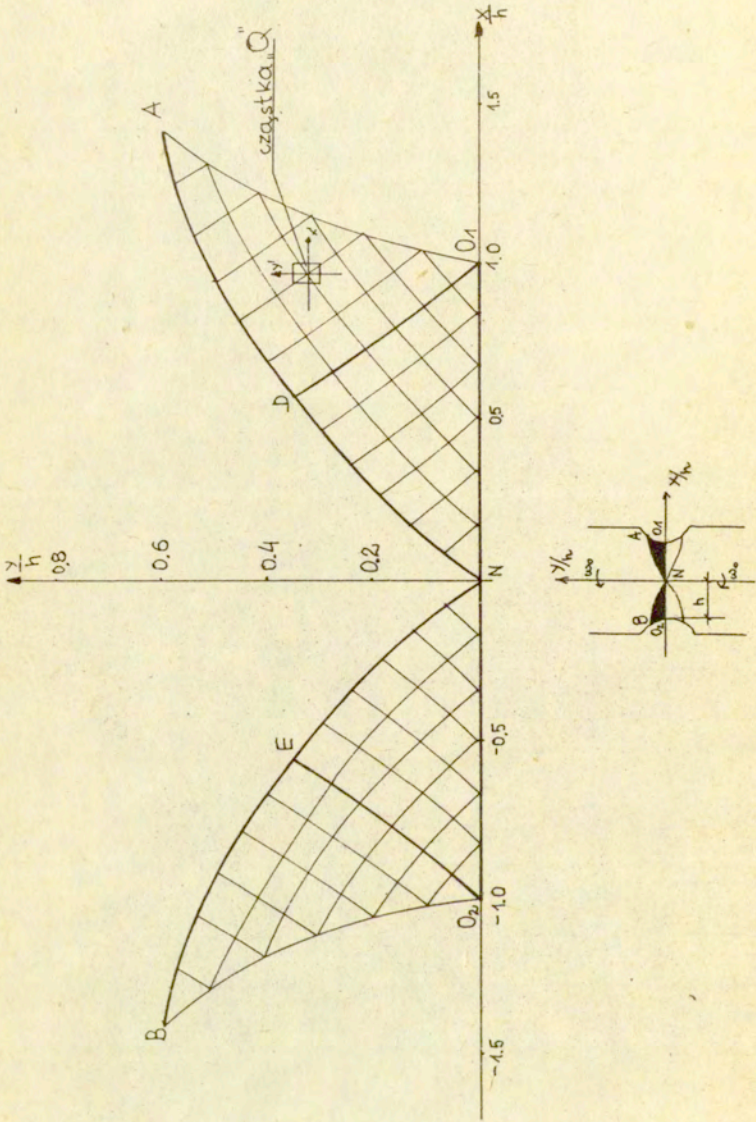
V.1. Monotoniczne zginanie

Monotonicznym zginaniem próbki nazywamy taki proces deformacji materiału, który zachodzi w wyniku wymuszonego obrotu jej części sztywnych z pewną prędkością obrotową ω_0 . Na podstawie przyjętej i omówionej w rozdziale III metody obliczeniowej dokonano podziału całkowitej deformacji materiału na 36 etapów, /o jednostkowym czasie trwania każdego z nich/. Na (rys.V.1) przedstawiono zależność kąta zgięcia próbki δ w funkcji liczby etapów. Jeden etap odpowiada zgięciu próbki o kąt $d\delta = 0.2865^\circ$ /36 etapów odpowiada $= 10.313^\circ$ /. Zgodnie z przyjętą metodą obliczeń rozwiązanie danego zagadnienia składa się z ciągu rozwiązań dla naprężeń i prędkości płynięcia w poszczególnych etapach. I tak w etapie wstępnym rozwiązanie dla naprężeń przedstawiono w postaci:

- siatki charakterystyk $\frac{1}{2}$ obszaru plastycznego,
- rozkładu naprężenia średniego p i kąta ψ - kąta nachylenia naprężenia głównego σ_1 do osi X wzdłuż przekrojów: O_1D, O_1N, AN w części rozciąganej O_1AN oraz O_2N, O_2E, NB w części ściskanej O_2BN obszaru plastycznego (rys.V.2),
- rozkładu naprężenia stycznego τ_{xy} wzdłuż przekrojów O_1D, AN .



RYS V.1.



RYS. V. 2.

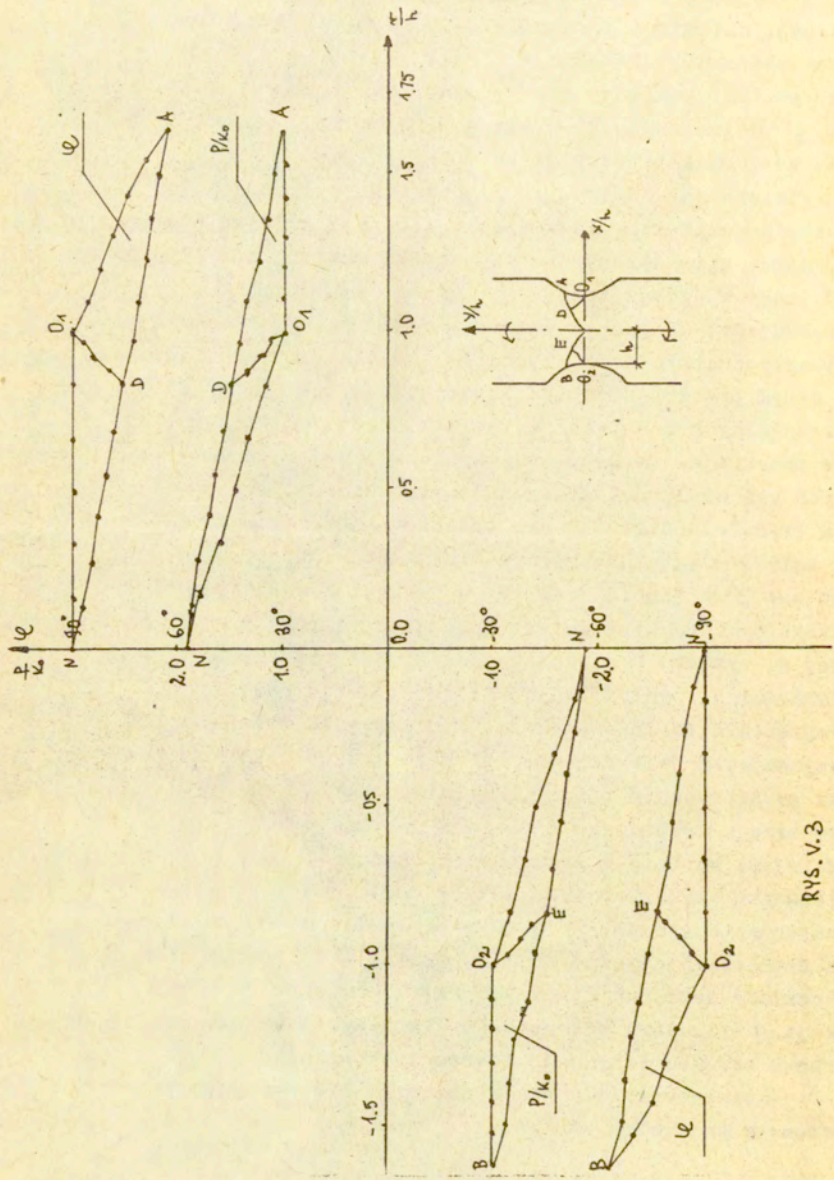
Wymienione na str. 80 przekroje AN i BN leżą wzdłuż linii oddzielającej część sztywną próbki od jej części uplastycznionej, natomiast przekroje O_1D , O_2E , O_1N i O_2N leżą w centrum obszaru plastycznego (rys. V.2).

Na (rys. V.2) pokazano siatkę charakterystyk we współrzędnych x, y odniesionych do wymiaru h elementu. Siatka ta składa się wzajemnie prostopadłych, przecinających się spiral logarytmicznych. Punkty przecięcia tych spiral noszą nazwę punktów węzłowych. Każdy punkt węzłowy na danym etapie deformacji utożsamiony jest z cząstką materiału. Wybierając 13 punktów wzdłuż brzegu swobodnego A_1O_1A i B_1O_2B (rys. IV.4) uzyskujemy 182 punkty węzłowe, czyli materiał w obszarze uplastycznionym dzielimy na 182 cząstki. Rozkład naprężeń w danym przekroju oznacza rozkład naprężeń panujących w poszczególnych cząstkach materiału, leżących wzdłuż wybranego przekroju. To samo dotyczy rozkładu innych interesujących nas wielkości statycznych lub kinematycznych.

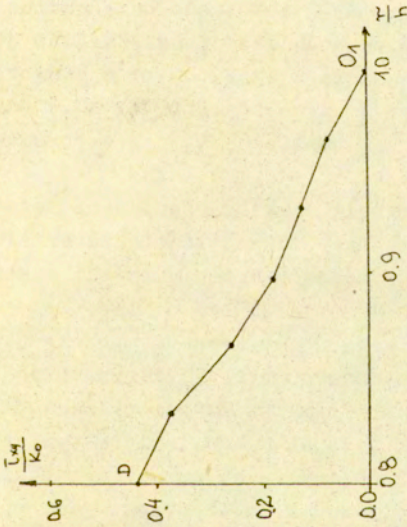
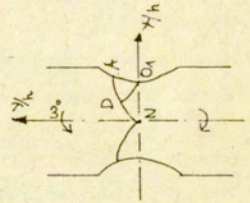
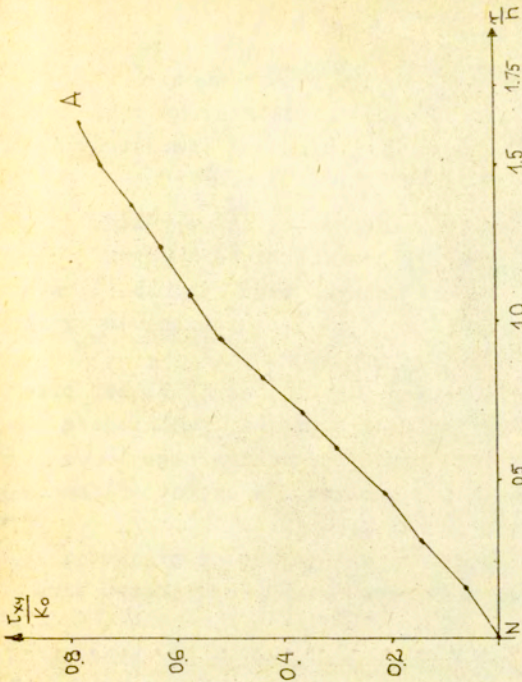
Na (rys. V.3) zilustrowano przebieg naprężenia średniego ρ i kąta ϱ - kąta nachylenia większego z naprężeń głównych do osi X w etapie wstępnym w funkcji τ - odległości poszczególnych punktów danego przekroju od punktu N , odniesionej do wymiaru h elementu wzdłuż w/w przekrojów (rys. V.2). Wartości ρ odniesiono do stałej materiałowej K_0 .

Naprężenie średnie narasta, począwszy od brzegu swobodnego, uzyskując największą wartość w punkcie N , leżącym w środku geometrycznym próbki, natomiast kąt ϱ maleje w kierunku brzegu swobodnego i obszaru sztywnego, osiągając najmniejszą wartość w krańcowych punktach A i B . W cząstkach leżących wzdłuż przekroju O_1O_2 kąt $\varrho = \pi/2$. Oznacza to iż naprężenie główne σ_1 jest prostopadłe do osi X elementu, a naprężenie styczne τ_{xy} na mocy (3.16) jest równe zero. Rozkłady naprężeń stycznych wzdłuż przekrojów O_1D , NA w funkcji τ ilustruje (rys. V.4). Naprężenia te narastają w kierunku obszaru sztywnego i brzegu swobodnego.

Rozwiązanie dla prędkości w etapie wstępnym przedstawiono w postaci:



RYS. V.3



- hodografu prędkości w $\frac{1}{2}$ obszaru plastyczności,
- rozkładu intensywności prędkości odkształceń oraz
- rozkładu składowych tensora wiru wzdłuż wymienionych na str. 80 przekrojów (rys.V.2).

Algorytm tego rozwiązania omówiono szczegółowo w rozdziale IV. Na (rys.V.5) przedstawiono hodograf prędkości płynięcia. Na osi rzędnych tego rysunku odłożono wartości V_y na odciętych V_x odniesione do wymiaru h elementu.

Największą prędkość osiągają cząstki, leżące bliżej brzegu swobodnego i obszaru sztywnego próbki, najmniejszą zaś cząstki leżące wzdłuż przekroju minimalnego $O_1 O_2$. Składowe prędkości V_x mają ten sam zwrot w części ściskanej i rozciąganej zaś V_y mają zwroty przeciwne.

Na (rys.V.6) pokazano rozkłady intensywności prędkości odkształceń $\dot{\epsilon}_i$ oraz niezerowej składowej tensora wiru $\dot{\omega}_z$ wzdłuż przekrojów $O_1 N, O_1 D$ i $O_1 A$.

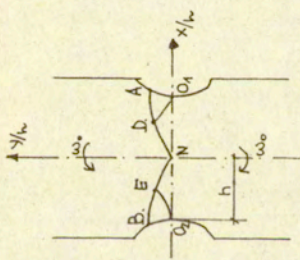
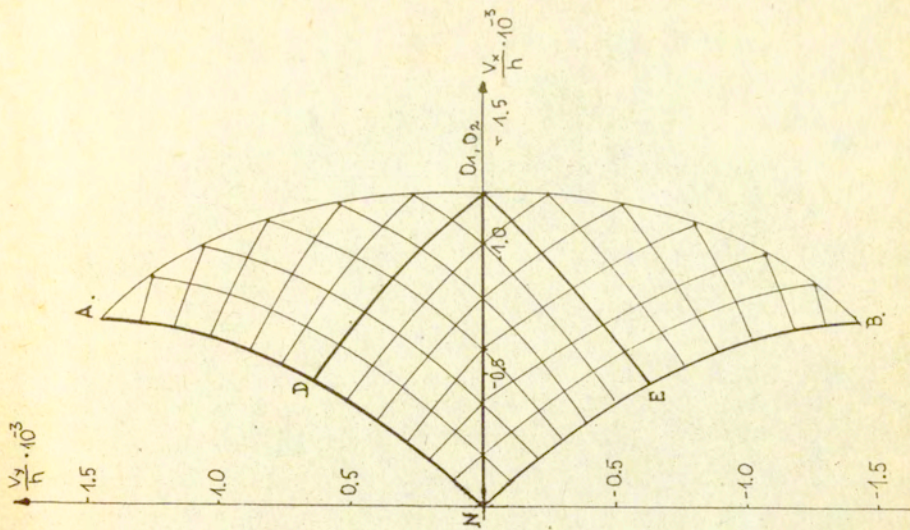
Ograniczono się do tych przekrojów z uwagi na symetrię rozkładu $\dot{\epsilon}_i$ i $\dot{\omega}_z$: $\dot{\epsilon}_i$ jest takie same wzdłuż $O_2 N, O_2 E, O_2 B$ a $\dot{\omega}_z$ zmienia tylko znak na przeciwny. Zarówno jedna jak i druga wielkość narasta w kierunku brzegu swobodnego i obszaru sztywnego. Maxymalne wartości $\dot{\epsilon}_i$ i $\dot{\omega}_z$ posiadają cząstki leżące w punktach A /część rozciągana/ i B /część ściskana/.

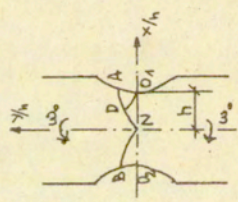
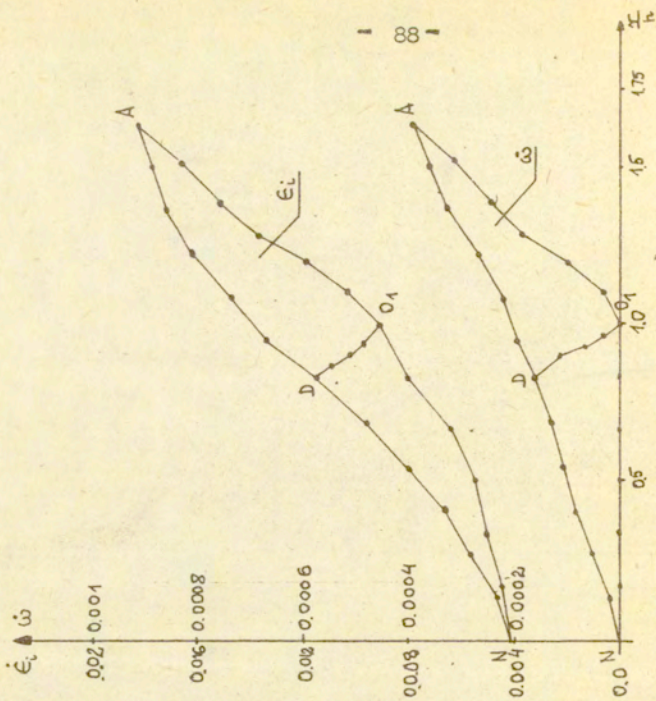
W celu przeanalizowania rozwiązania dla naprężeń i prędkości dla zaawansowanego odkształcenia materiału wybrano ostatni etap, odpowiadający ugięciu próbki o kąt $\delta_{\max} = 10.313^\circ$.

Analizę tę przeprowadzono na szczyblu przekrojów liniowych obszaru plastycznego (rys.V.6) i (rys.V.7).

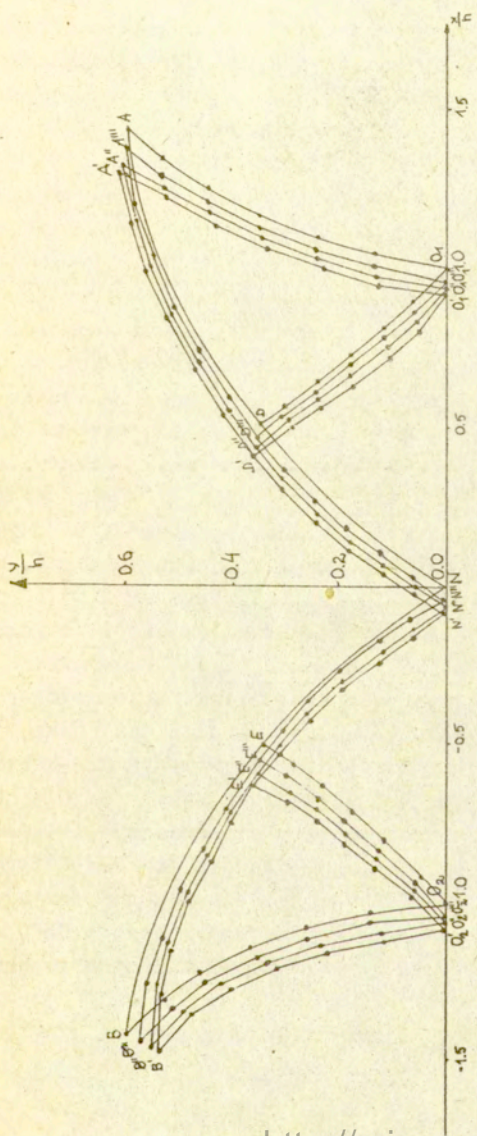
Na (rys.V.7) pokazano kształt i zakres obszaru płynięcia dla poszczególnych hipotez wzmocnienia w tym etapie.

Pewną miarą geometrycznych zmian tego obszaru w trakcie deformacji /od 1 do 36 etapu/ jest przesunięcie osi obojętnej. Dla materiału sztywno - idealnie plastycznego przesunięcie to wynosi $\Delta X_N = 0.0587$, dla



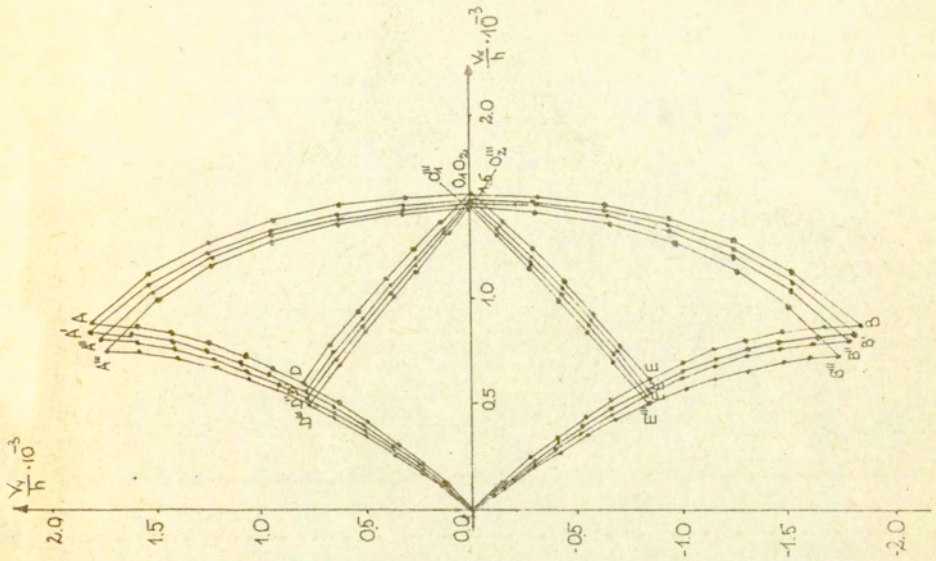


RYS. V.6



oznaczenia:
I — idealna plastyczność
II — Wzmocnienie kinematyczne
III — Wzmocnienie izotropowe

wzmocnienia kinematycznego 0.0536, dla izotropowego 0.0501. Różnice tej wielkości dla idealnej plastyczności i wzmocnienia kinematycznego wynoszą $5 \cdot 10^{-3}$ natomiast dla wzmocnienia izotropowego $8 \cdot 10^{-3}$. Prędkości płynięcia wzdłuż tych przekrojów ilustruje (rys.V.8). Różnice prędkości dla danych hipotez wzmocnienia w poszczególnych przekrojach są rzędu $\sim 10^{-5}$. Rozkład parametru Odqvista ϵ_i i zetowej składowej tensora wiru ω_z wzdłuż poszczególnych przekrojów ilustruje kolejny (rys.V.9). Na osi odciętych odłożono odległości poszczególnych punktów od środka układu współrzędnych x, y (rys.V.2), na rzędnych zaś parametr Odqvista ϵ_i i prędkość wiru ω_z . Parametr Odqvista obliczamy wg. schematu przedstawionego w rozdziale IV. Wyraża on drogę przebytą przez cząstkę w przestrzeni odkształceń. Na (rys.V.9) obserwujemy wartości ϵ_i dla tych cząstek, które w wyniku deformacji znalazły się w poszczególnych punktach węzłowych danych przekrojów. Wartości parametru Odqvista narastają w kierunku obszaru sztywnego i brzegu swobodnego. Maxymalną wartość tego parametru uzyskała cząstka w $B'''(0.26)$, minimalną cząstka w $N'(0.067)$. Największe wartości ϵ_i obserwujemy dla wzmocnienia izotropowego, nieco mniejsze dla kinematycznego i najmniejsze dla idealnej plastyczności. Max. różnica ϵ_i między wzmocnieniem izotropowym a kinematycznym wynosi 0.03 a najmniejsza 0.01, natomiast w porównaniu z idealną plastycznością różnice te wyglądają następująco: maksymalna wynosi 0.046, minimalna 0.023. Porównując zaś wzmocnienie kinematyczne z idealną plastycznością różnice te wynoszą: maksymalna 0.016, minimalna 0.0067. Zatem różnice dla wzmocnienia kinematycznego i idealnej plastyczności są najmniejsze. Przejdźmy teraz do prędkości wiru. Prędkość ta w odróżnieniu od parametru Odqvista nie ulega sumowaniu w trakcie procesu deformacji wzdłuż trajektorii danej cząstki, określa ona jedynie zmianę kierunków głównych naprężeń na danym etapie deformacji. W końcowym etapie wartość ω_z wzdłuż badanych przekrojów jest większa dla materiału ze wzmocnieniem niż dla materiału bez wzmocnienia. Różnice te dla wzmocnienia izotropowego są większe niż dla wzmocnienia kinematycznego.



Oznaczenia:
 etap 36 - $\delta = 10^{\circ} 313'$
 I - idealna plastyczność
 II - wzmocnienie kinematyczne
 III - wzmocnienie izotropowe

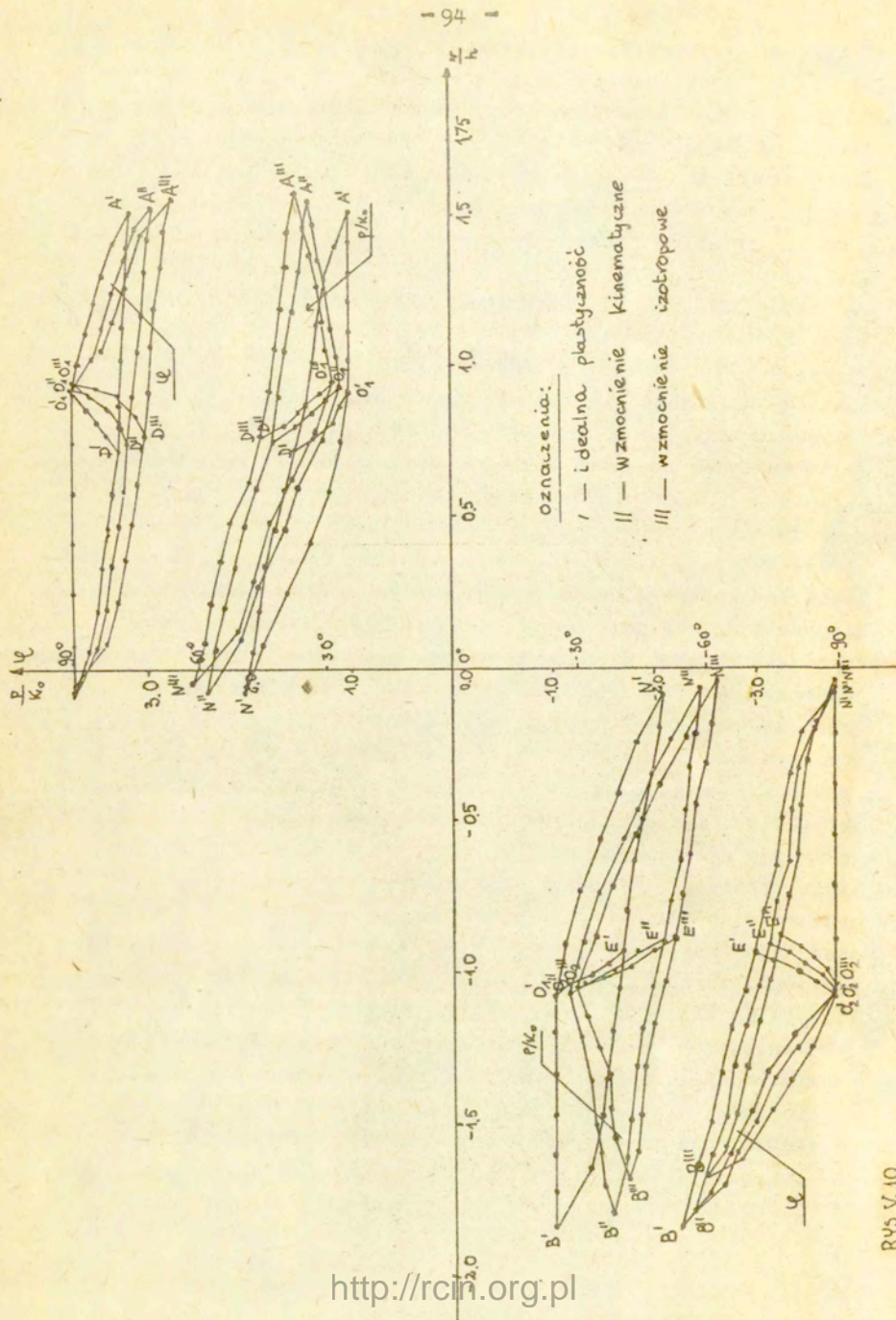
rys. V.8

Wynoszą one w pierwszym przypadku średnio $\sim 5 \cdot 10^{-5}$ w drugim 10^{-5} . Ponadto wartości $\bar{\omega}_z$ w ostatnim etapie są większe średnio o kilkanaście procent niż w etapie wstępnym. Nieznaczne zmiany dla materiału bez wzmocnienia wywołane są zmianą geometrii brzegu swobodnego i linii rozdzielającej części: sztywnej i plastycznej próbki, natomiast dla materiału ze wzmocnieniem różnice te są głównie efektem umocnienia materiału.

Przejdźmy teraz do przedstawienia pola naprężeń w końcowym etapie tego procesu.

Na (rys.V.10) przedstawiono rozkład naprężenia średniego \bar{p} i kąta φ wzdłuż badanych przekrojów. Na osi odciętych tego rysunku odłożono odległości punktów wzdłuż badanych przekrojów względem początku układu współrzędnych, odniesione do wymiaru h elementu, na rzędnych zaś wartości \bar{p} / odniesione do stałej materiałowej K_0 / i wartości kąta φ . Największe wartości naprężenia średniego \bar{p} uzyskano dla wzmocnienia izotropowego, nieco mniejsze dla kinematycznego i najmniejsze dla idealnej plastyczności. W każdym z powyższych przypadków wartość \bar{p} narasta w kierunku obszaru sztywnego i centrum geometrycznego próbki począwszy od brzegu swobodnego. Max. różnica \bar{p} między wzmocnieniem izotropowym a kinematycznym wynosi $\Delta \bar{p} = 0.125$, minimalna zaś 0.075 , natomiast w porównaniu z idealną plastycznością różnice te wyglądają następująco: maksymalna wynosi 0.525 , minimalna 0.15 . Porównując zaś wzmocnienie kinematyczne z idealną plastycznością różnice te wynoszą: maksymalna 0.4 , minimalna 0.1 . Zatem różnice dla wzmocnienia kinematycznego i izotropowego są najmniejsze.

Największe wartości kąta φ nachylenia większego z kierunków głównych do osi X obserwujemy dla materiału bez wzmocnienia nieco mniejsze dla wzmocnienia kinematycznego i najmniejsze dla wzmocnienia izotropowego. Maxymalna różnica dla idealnej plastyczności i wzmocnienia kinematycznego wynosi $\Delta \varphi = 0.33^\circ$, dla wzmocnienia izotropowego zaś 0.75° . W każdym z rozpatrzonych przypadków wartości φ maleją w kierunku obszaru sztywnego i brzegu swobodnego, osiągając najmniejsze wartości



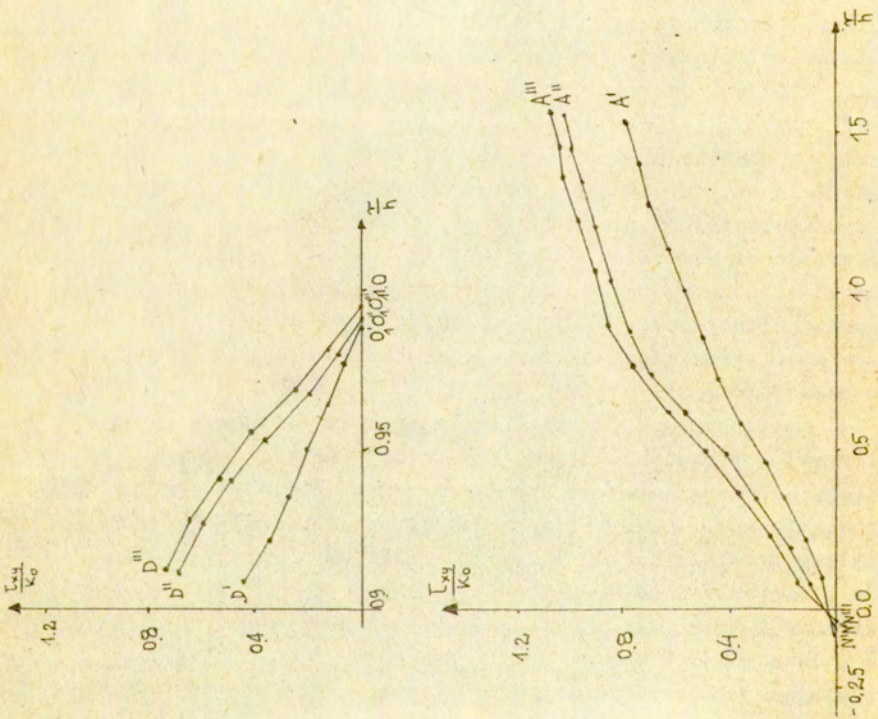
w punktach krańcowych $A, A'', A''', B, B'', B'''$ (rys. V.7).

Na (rys. V.11) przedstawiono dla przykładu rozkład naprężeń stycznych τ_{xy} odniesionych do K_0 wzdłuż przekrojów $O_1A', O_1A'', O_1A''', N'A', N'A'', N'A'''$. Największe wartości τ_{xy} obserwujemy dla wzmocnienia izotropowego, nieco mniejsze dla kinematycznego i najmniejsze dla idealnej plastyczności. Średnia różnica $\bar{\tau}_{xy}$ między wzmocnieniem izotropowym a kinematycznym wynosi $\Delta\bar{\tau}_{xy} = 0.032$ między wzmocnieniem izotropowym a idealną plastycznością 0.14, między wzmocnieniem kinematycznym a idealną plastycznością 0.12.

Porównując uzyskane wyniki na szczeblu przekrojów liniowych obszaru plastycznego dla materiału ze wzmocnieniem i bez wzmocnienia możemy powiedzieć, że uwzględnienie wzmocnienia w obliczeniach ma większy wpływ na pole naprężeń niż na pole prędkości. Porównując zaś wyniki dla wzmocnienia izotropowego i kinematycznego można powiedzieć, iż różnice są tu nieznaczne zarówno dla statyki jak i kinematyki. Stąd wniosek, iż stosowanie jednej lub drugiej hipotezy może być uzależnione jedynie od potrzeb i specyfiki danego zagadnienia. Wyniki obliczeń uzyskane na gruncie materiału sztywno-idealnie plastycznego jedynie w zakresie małych odkształceń nieznacznie różnią się od wyników dla materiału ze wzmocnieniem, natomiast w zakresie dużych odkształceń różnice te są już istotne, szczególnie w polu naprężeń (patrz rys. V.10,11). Stąd wniosek iż model ten może mieć ograniczone zastosowanie w tym przypadku jedynie do odkształceń małych.

Następnym punktem analizy jest ocena wpływu kierunków głównych naprężeń na trajektorię środka powierzchni płynnienia Hubera-Misesa w przypadku materiału ze wzmocnieniem kinematycznym. Oceny takiej można dokonać np. na podstawie analizy rozwiązania bez i z uwzględnieniem zmiany kierunków głównych wzdłuż trajektorii wybranej cząstki podczas deformacji materiału. Wybierzmy w tym celu dowolną cząstkę Q , leżącą np. w części O_1DA , znajdującej się po stronie rozciąganej obszaru plastycznego (rys. V.2). Wybór ten uzasadniony jest większą intensywnością odkształceń w tej

oznaczenia:
I - idealna plastyczność
II - wzmocnienie kinematyczne
III - wzmocnienie izotropowe



RYŚ. V. 14

części, niż np. w części O_1ND . Na (rys.V.12) pokazano trajektorie cząstki Q dla obu rozważonych przypadków. Trajektorie te przedstawiono w układzie współrzędnych, związanym z początkowym położeniem cząstki w etapie wstępnym (rys.V.4). Większy zasięg otrzymano przy uwzględnieniu zmiany kierunków głównych, mniejszy natomiast w przypadku pominięcia tych zmian. Różnica w zasięgu cząstki wynosi $\Delta l = 678 \cdot 10^{-4}$, natomiast w rozkładzie naprężenia średniego \bar{p} i kąta φ nachylenia σ_1 do osi x różnice te wyglądają następująco:

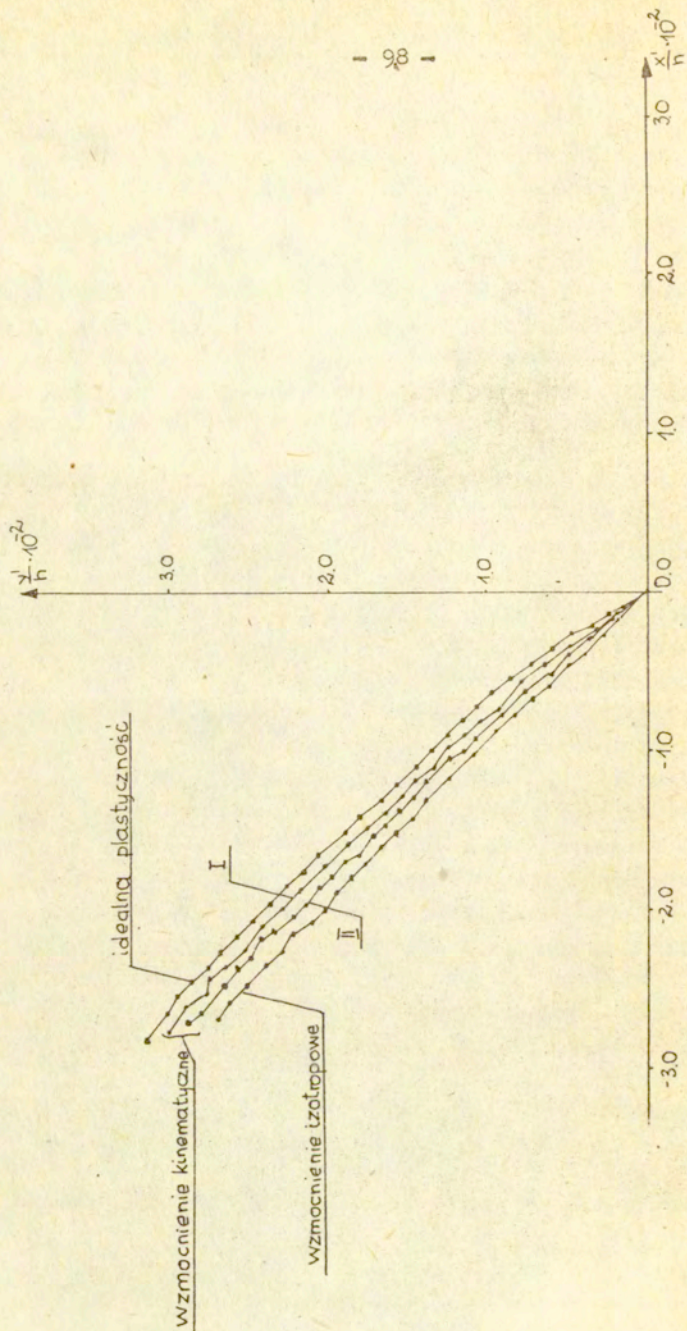
$$(\Delta \bar{p})_{\max} \cong 0.008, \quad (\Delta \varphi)_{\max} \cong 0.28^\circ.$$

Przebieg tych wielkości wzdłuż trajektorii cząstki dla obu rozważonych przypadków ilustruje (rys.V.13). Na osi odciętych tego rysunku odłożono promieniowe położenie cząstki w danym etapie deformacji względem położenia początkowego, na rzędnych zaś wartości \bar{p} odniesione do stałej materiałowej K_0 oraz wartości kąta φ . Większe wartości \bar{p} i φ otrzymano w przypadku uwzględnienia zmiany kierunków głównych.

Określenie stanu naprężenia w cząstce na danym etapie deformacji dla materiału ze wzmocnieniem kinematycznym wymaga znajomości: K_0 , \bar{p} i φ oraz położenia środka powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń. Obliczenie tego położenia związane jest z całkowaniem równania (2.33), jeśli chcemy uwzględnić zmiany kierunków głównych naprężeń lub równania (2.25), jeśli zmiany te pomijamy. Na (rys.V.14) przedstawiono trajektorie środka powierzchni płynięcia dla obu tych równań w przestrzeni naprężeń głównych. Większy zasięg środka powierzchni płynięcia otrzymano w przypadku zmiennych kierunków głównych, mniejszy zaś w przypadku ich pominięcia. Różnice zasięgu dla obu rozważonych przypadków wynoszą:

$$(\Delta \xi_1)_{\max} \cong 0.012, \quad (\Delta \xi_2)_{\max} \cong 0.036$$

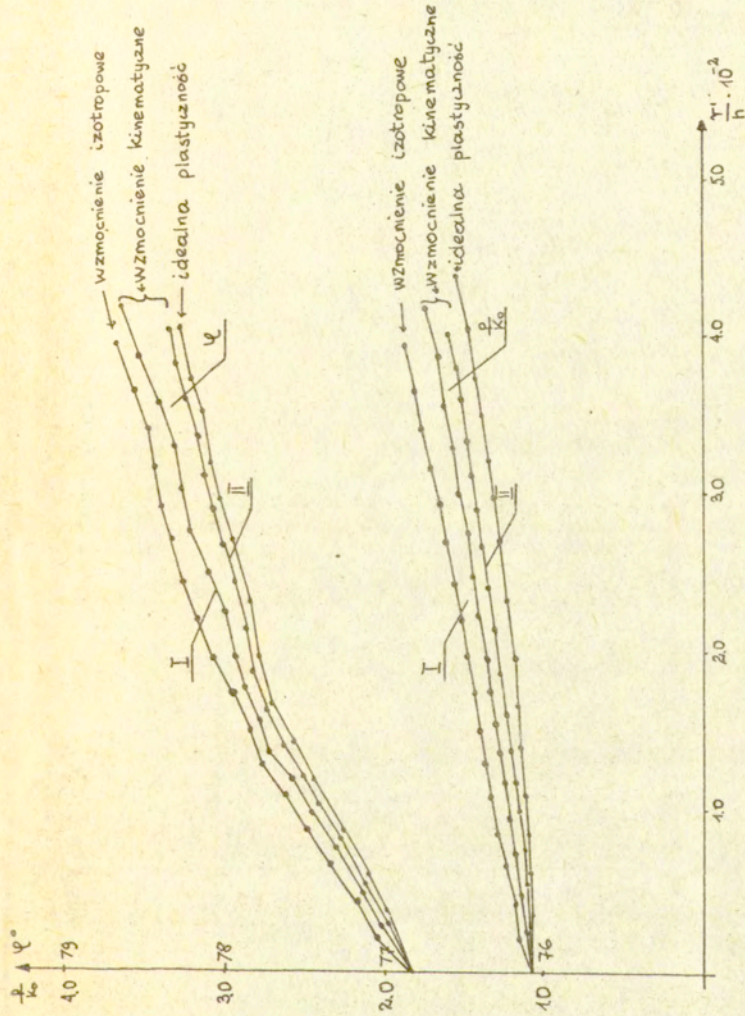
Stan naprężenia w końcowym położeniu cząstki dla obu przypadków ilustruje (rys.V.15). Na osi odciętych odłożono wartości naprężenia σ_1 , na rzędnych σ_2 , odniesionych do wartości stałej materiałowej K_0 . Większe wartości tych naprężeń otrzymano dla (2.33) mniejsze dla (2.25) tj. z po-



Oznaczenia:

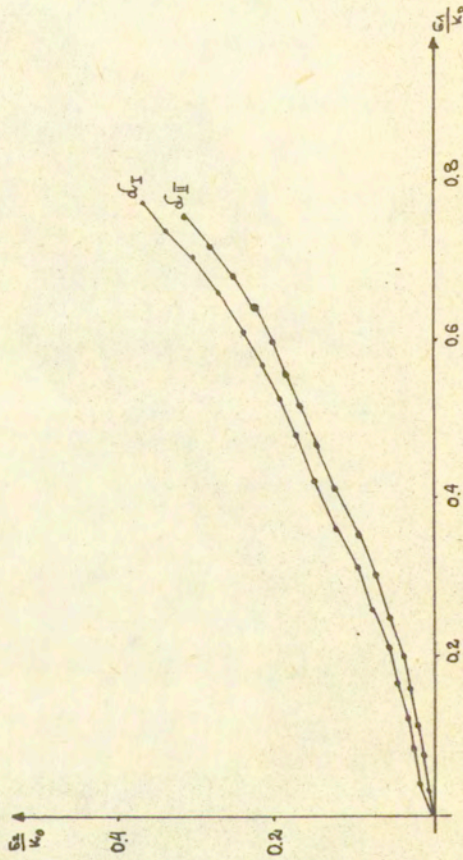
I — z uwzględnieniem obrotu kierunków głównych
II — z pominięciem obrotu kierunków głównych.

RYS. V. 12.



Oznaczenia:

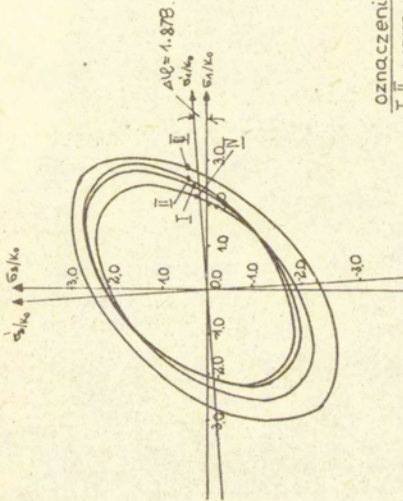
- I — z uwzględnieniem obrotu kłenków głównych naprężeń
- II — z pominięciem obrotu kłenków głównych naprężeń.



oznaczenia:

- I — z uwzględnieniem obrotu kierunków głównych naprężeń
- II — z pominięciem obrotu kierunków głównych naprężeń

RVS. V. 14



oznaczenia:

- I, II - wzmocnienie kinematyczne.
- I - z uwzględnieniem obrotu kierunków głównych
- II - z pominięciem obrotu kierunków głównych
- III - wzmocnienie izotropowe
- IV - ideałna plastyczność

RYS. V. 15.

minięciem obrotu kierunków głównych. Różnice w wartościach naprężeń głównych dla obu rozważonych przypadków wyglądają następująco:

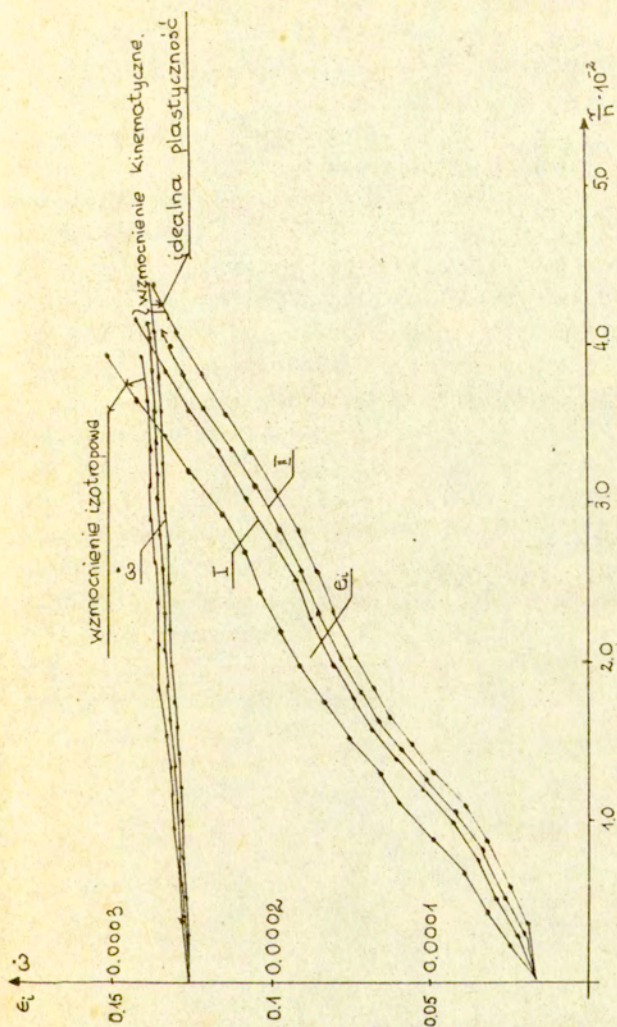
$$\Delta\epsilon_1 \approx 0.055 \quad , \quad \Delta\epsilon_2 \approx 0.038$$

Wpływ obrotu kierunków głównych na wartość parametru Odqvista oceniono na podstawie porównania rozkładu tej wielkości wzdłuż trajektorii cząstki dla obu równań (2.33) i (2.25). Na (rys.V.16) przedstawiono rozkład parametru Odqvista ϵ_i oraz niezerowej składowej tensora wiru ω_z cząstki wzdłuż jej trajektorii. Większe wartości ϵ_i otrzymano w przypadku uwzględnienia obrotu kierunków głównych, mniejsze zaś w przypadku drugim (2.25). Różnice są nieznaczne i wynoszą średnio:

$$\Delta\epsilon_i \approx 0.0033.$$

Reasumując można powiedzieć, iż rozwiązanie zagadnienia z uwzględnieniem zmiany kierunków głównych na szczyblu cząstki różni się jedynie ilościowo od analogicznego rozwiązania z pominięciem tych zmian. Większe różnice obserwujemy w polu naprężeń, mniejsze średnio o rząd wielkości w polu kinematycznym. W dyskusji tej podano maksymalne różnice omawianych wielkości. Różnice te narastają ze wzrostem odkształceń materiału, stąd wniosek, iż dla zaawansowanych odkształceń obrót cząstki powinien być uwzględniany.

Przejdźmy teraz do analizy porównawczej rozwiązania na szczyblu cząstki dla poszczególnych hipotez wzmocnienia z rozwiązaniem dla materiału sztywno-idealnie plastycznego w przypadku obciążenia monotonicznego. Na (rys.V.12) pokazano kształt i zasięg trajektorii cząstki Q (rys.V.2) w czasie tego procesu. Największy zasięg ma cząstka dla materiału bez wzmocnienia nieco mniejszy dla wzmocnienia kinematycznego i najmniejszy dla wzmocnienia izotropowego. Różnice są nieznaczne: dla idealnej plastyczności i wzmocnienia kinematycznego $\Delta l = 5 \cdot 10^{-4}$, wzmocnienia izotropowego $\Delta l = 10^{-3}$, dla wzmocnienia izotropowego i kinematycznego $\Delta l = 5 \cdot 10^{-4}$. Zatem najmniejszą różnicę obserwujemy dla idealnej plastycz-



oznaczenia:

I — z uwzględnieniem obrotu kierunków głównych

II — z pominięciem obrotu kierunków głównych

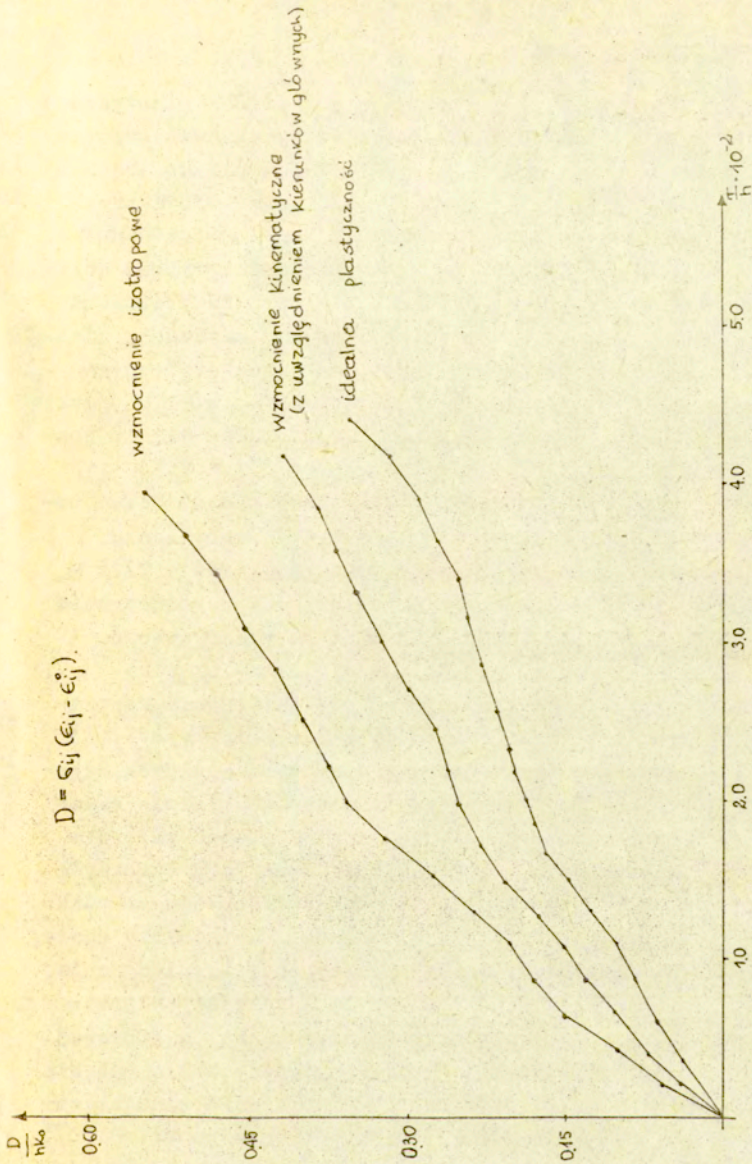
Rys. V. 16.

ności i wzmocnienia kinematycznego. Analogiczne relacje uzyskano też w przypadku parametru Odqvista (rys.V.16). Maxymalna różnica $\Delta\epsilon_i$ między wzmocnieniem izotropowym a kinematycznym wynosząca 0.03 jest większa od maksymalnej różnicy dla wzmocnienia kinematycznego /z pominięciem, kierunków głównych/ wynoszącej 0.005 średnio o rząd wielkości. Nieznaczne różnice rzędu 10^{-6} otrzymano dla prędkości wiru cząstki we wszystkich rozpatrzonych przypadkach /maksymalna wartość $\dot{\omega}_2 = 3 \cdot 10^4$ [s⁻¹]). Zatem najmniejsze różnice wielkości kinematycznych w tym procesie uzyskano dla wzmocnienia kinematycznego /z pominięciem kierunków głównych naprężeń/ i materiału sztywno-idealnie plastycznego.

Na (rys.V.13 i V.15)) przedstawiono rozwiązanie dla naprężeń wzdłuż trajektorii cząstki Q dla poszczególnych hipotez wzmocnienia i materiału sztywno-idealnie plastycznego.

W tym przypadku najmniejsze różnice otrzymano dla wzmocnienia izotropowego i kinematycznego /z uwzględnieniem kierunków głównych/ (rys.V.15). Różnice te wynoszą $\Delta\epsilon_{1,2} \sim 10^{-3}$.

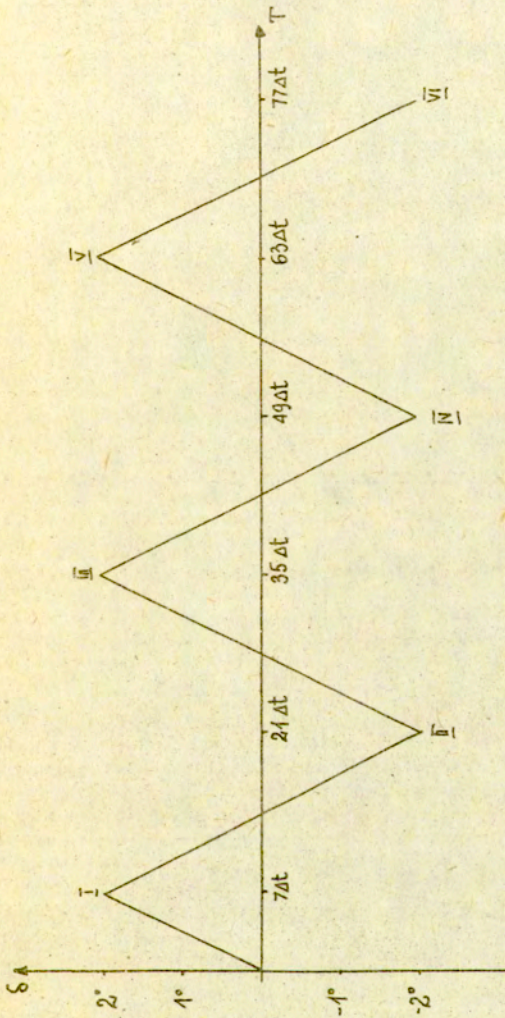
W zakończeniu tej dyskusji przedstawiono rozkład funkcji dysypacji [33] wzdłuż trajektorii cząstki Q dla rozpatrzonych modeli materiału. W każdym z tych przypadków przyrost funkcji dysypacji był dodatni (rys.V.16a).



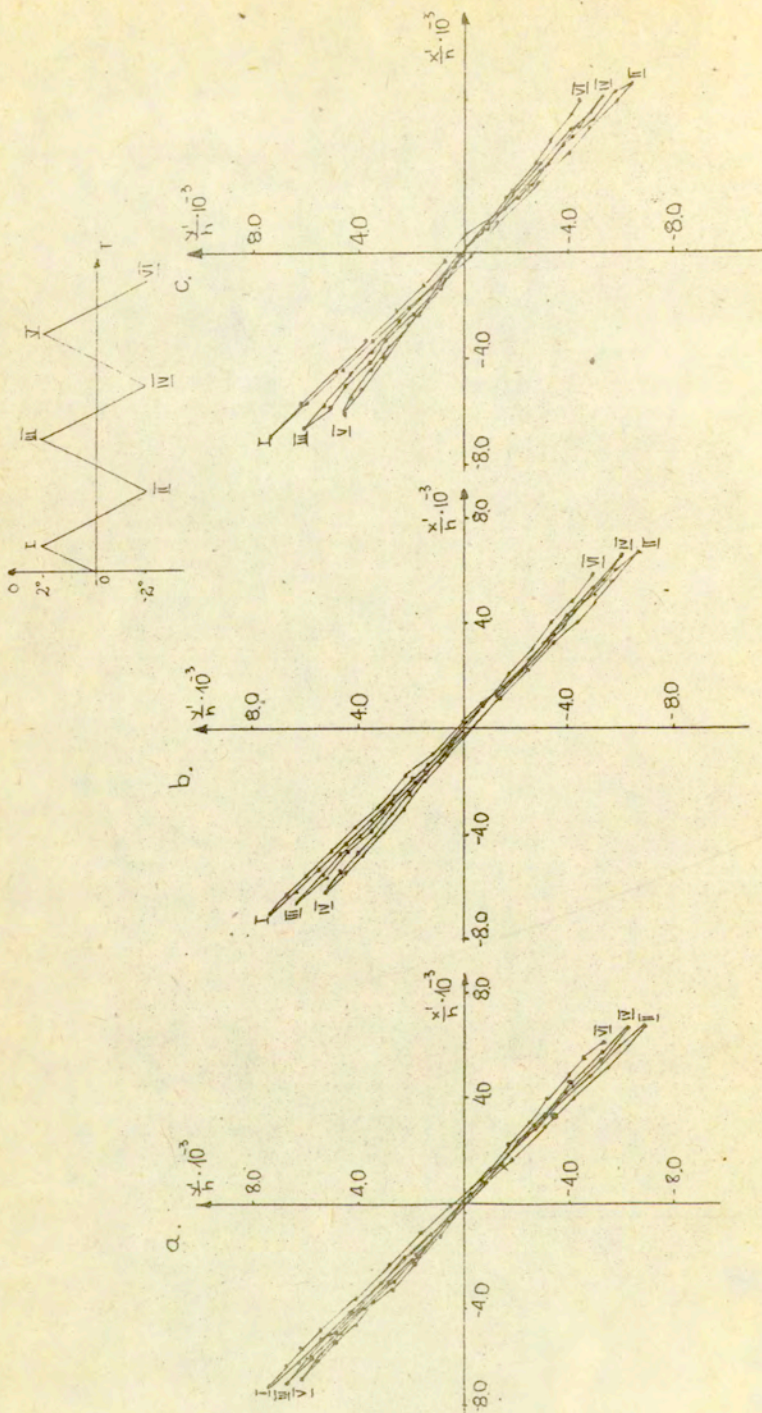
RYS. V. 16A.

V.2. Cykliczne zginanie

Cyklicznym zginaniem nazywano taki proces plastycznej deformacji materiału, który zachodzi w wyniku wielokrotnego zginania próbki w przedziale kąta $\pm \delta_0$ z zadaną prędkością obrotową jej części sztywnych ω (rys.V.17). W przeprowadzonych obliczeniach przyjęto $\delta_0 = \pm 2^\circ$, $\omega_0 = 0.005[\text{s}^{-1}]$. Zgodnie z przyjętą i omówioną w rozdziale III metodą obliczeniową całkowity proces deformacji materiału podzielono na 77 etapów o jednostkowym czasie trwania każdego z nich. Przyjmując wartość prędkości obrotowej części sztywnych pręta $\omega_0 = 0.005[\text{s}^{-1}]$, jeden etap odpowiada zgięciu próbki o kąt $d\delta = 0.2865^\circ$ ($2^\circ = 7$ etapom). Ograniczmy się do rozciąganej części obszaru plastycznego O_1AN (rys.V.2). Zgodnie z omówionym w rozdziale IV algorytmem obliczeń poszczególne odpinki schematu z (rys.V.17) odpowiadają: (I + II) - rozciąganiu, (II + III) - ściskaniu, (III + IV) - rozciąganiu, (IV + V) - ściskaniu, (V + VI) - rozciąganiu i (VI + VII) - ściskaniu tej części obszaru plastycznego. W celu przeprowadzenia tej analizy wybierzmy cząstkę Q leżącą w części O_1DA , znajdującej się po stronie rozciąganej obszaru plastycznego O_1AN (rys.V.2). Na (rys.V.18) przedstawiono trajektorie cząstki dla poszczególnych hipotez wzmocnienia. Trajektorie te pokazano w układzie związanym z początkowym położeniem cząstki w etapie wstępnym punkt O' na (wykresie V.17). Różnice w zasięgu cząstki Q podczas tego złożonego procesu w charakterystycznych punktach I, II, ..., VI (rys.V.17) są nieznaczące. Największy zasięg ma cząstka w przypadku idealnej plastyczności, nieco mniejszy dla wzmocnienia kinematycznego i najmniejszy w przypadku wzmocnienia izotropowego. Różnice te np. w końcowej fazie deformacji punkt VI, (rys.V.17) wynoszą: dla materiału sztywno-idealnie plastycznego i wzmocnienia kinematycznego $\Delta l = 2 \cdot 10^{-4}$, dla wzmocnienia izotropowego $\Delta l = 8 \cdot 10^{-4}$, dla wzmocnienia kinematycznego i izotropowego $\Delta l = 10^{-3}$. Zatem najmniejszą różnicę Δl otrzymano dla idealnej plastyczności i wzmocnienia kinematycznego. Rozkład składowych



RYS V. 17.



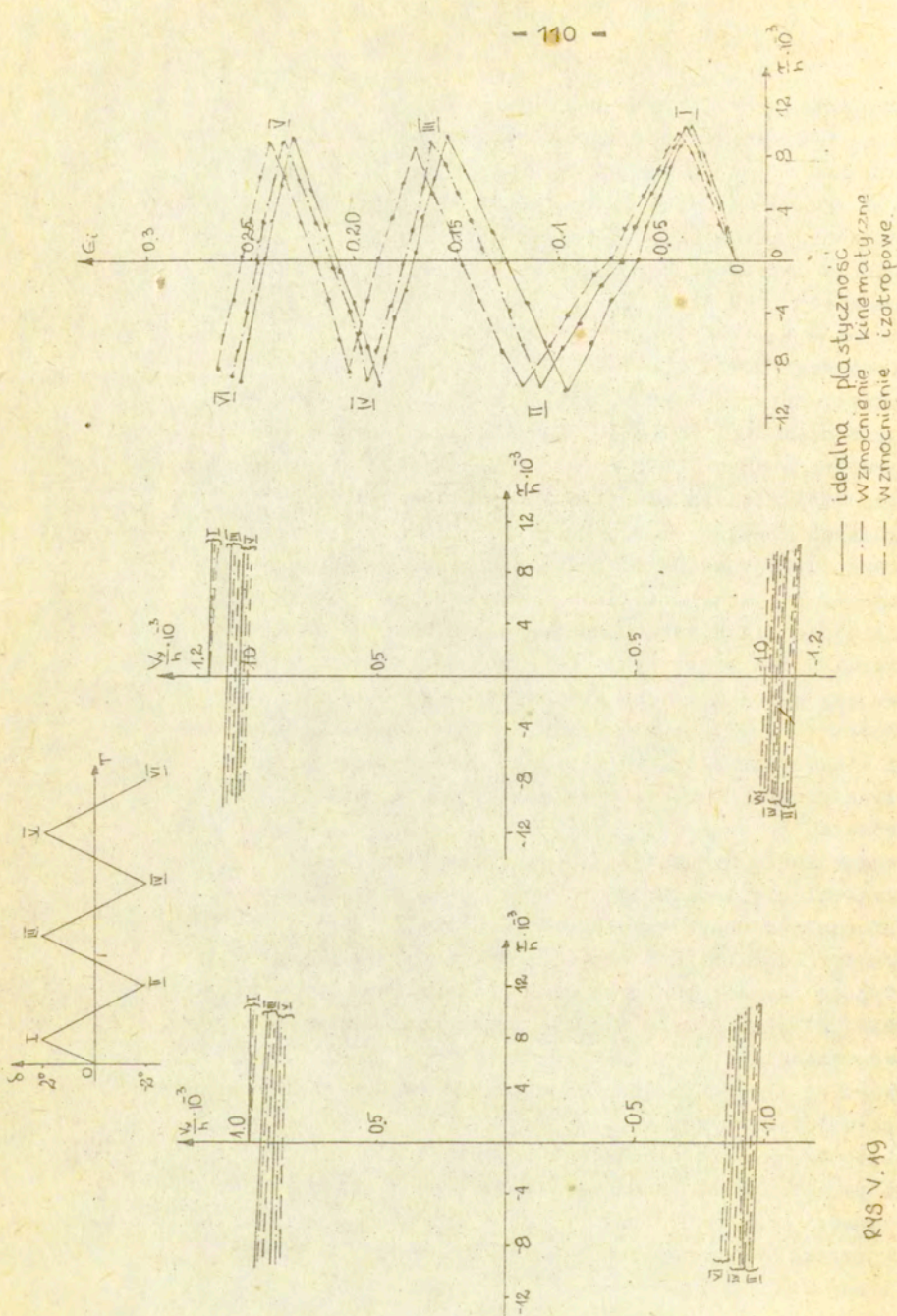
- a. idealna plastyczność
 b. wzmocnienie kinematyczne
 c. wzmocnienie izotropowe.

Rys. V.1B.

prędkości płynięcia cząstki Q (rys.V.2) wzdłuż poszczególnych trajektorii ilustruje (rys.V.19). Na osi rzędnych tego rysunku odłożono wartości składowych V_x i V_y odniesione do wymiaru h elementu na odciętych zaś odległość cząstki w poszczególnych etapach względem położenia początkowego. Zakres zmienności wartości składowych V_x i V_y w trakcie tego procesu tzn. średnia różnica między prędkością w końcu odcinka (0 ÷ I) i (0 ÷ VI) (rys.V.17) wynosi dla wzmocnienia izotropowego $\Delta V \cong 1.4 \cdot 10^{-4}$, kinematycznego $\sim 10^{-4}$, idealnej plastyczności $\sim 8 \cdot 10^{-5}$. Początkowa wartość tych składowych jest rzędu 10^{-3} . Rozkład parametru Odqvista w tym procesie ilustruje (rys.V.19c). Na osi rzędnych odłożono wartości tej wielkości na odciętych promieniowe odległości poszczególnych cząstek wzdłuż trajektorii. Największą wartość parametru Odqvista w końcowym etapie deformacji (punkt VI - rys.V.17) otrzymano dla wzmocnienia izotropowego (0.2675), mniejszą dla kinematycznego (0.25875) i najmniejszą dla materiału bez wzmocnienia (0.255). Najmniejszą różnicę obserwujemy dla wzmocnienia kinematycznego i idealnej plastyczności (0.00375), większą zaś dla wzmocnienia izotropowego i kinematycznego (0.00875). Podobne relacje są w pozostałych punktach programu zginania: np. w punkcie III (rys.V.17) różnice te wyglądają następująco:

wzmocnienie kinematyczne - idealna plastyczność - (0.00625)
wzmocnienie izotropowe - wzmocnienie kinematyczne - (0.00915)

Biorąc pod uwagę trajektorie cząstki, jej prędkość oraz parametr Odqvista można powiedzieć, że pole kinematyczne dla trzech rozważonych przypadków nieznacznie różni się od siebie. Bliższe siebie są pola prędkości dla materiału bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym. Dodajmy tu, iż wartość prędkości wiru cząstki ω_z w tym procesie nie ulega istotnym zmianom. Na (rys.V.20b) przedstawiono przebieg tej wielkości dla materiału bez wzmocnienia. Zgodnie z przeprowadzoną analizą dla obciążeń monotonicznych obrót cząstki w zakresie małych kątów zginania można pominąć. W procesie tym różnica $\Delta\omega_z$ dla materiału ze wzmocnieniem i bez wzmocnienia wynosi $\sim 10^{-7}$ ($\omega_{z \max} = 1.5 \cdot 10^{-4}$).

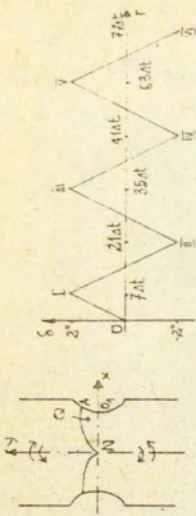


Rozwiązanie dla naprężeń przedstawiono w postaci: rozkładu naprężenia średniego ρ , funkcji niejednorodności plastycznej $K(\epsilon_i)$ oraz składowych tensora $\underline{\epsilon}$ odniesionych do stałej materiałowej K_0 . Na (rys.V.20) przedstawiono rozkłady tych wielkości wzdłuż poszczególnych odcinków procesu zginania (rys.V.17). W procesie tym obserwujemy istotne różnice w rozkładzie naprężenia średniego ρ dla wzmocnienia izotropowego i kinematycznego oraz idealnej plastyczności. Różnice te w końcowym etapie odcinka V-VI (rys.V.17) wyglądają następująco: wzmocnienie izotropowe - idealna plastyczność $\Delta\rho = 0.6$

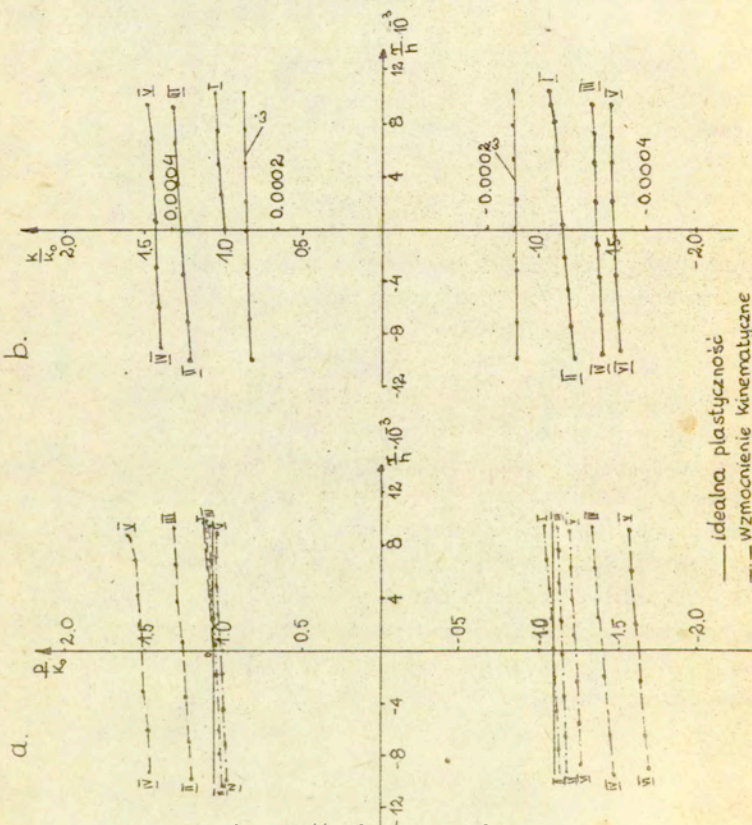
wzmocnienie izotropowe - wzmocnienie kinematyczne /z uwzględnieniem obrotu kierunków głównych naprężeń/ $\Delta\rho = 0.43$,
wzmocnienie kinematyczne - idealna plastyczność $\Delta\rho = 0.46$.

Różnice te są widoczne też na płaszczyźnie ϵ_1, ϵ_2 (rys.V.21a), gdzie przedstawiono stan naprężenia w cząstce Q w końcowym jej połączeniu (punkt VI, rys.V.18), po przebyciu złożonej trajektorii w przestrzeni fizycznej x, y . Z rysunku tego widać, że najbliższe rozwiązaniu dla idealnej plastyczności jest rozwiązanie ze wzmocnieniem kinematycznym, natomiast wzmocnienie izotropowe daje rozwiązanie znacznie odbiegające od dwóch poprzednich.

W zakończeniu tej analizy pokazano rozkład: rezydualnej niejednorodności plastycznej $K(\epsilon_i)$ oraz mikronaprężeń $\Delta\underline{\epsilon}$, jakie panują w cząstce, gdy wartość momentu zginającego jest równa zero w tym procesie (rys.V.17). Rozkład tych wielkości ilustruje (rys.V.21b,c), gdzie na osi rzędnych odłożono wartości tych wielkości, na odciętych zaś poszczególne stany deformacji cząstki, gdy moment zginający próbki jest równy zero. Oznaczono je liczbami 1,2, 3,4,5 (patrz rys.V.21b). Okazuje się, iż wartości tych wielkości maleją nieznacznie ze wzrostem liczby cykli, co może wskazywać na wolno zachodzący proces ustalania się funkcji $K(\epsilon_i)$ oraz składowych tensora $\underline{\epsilon}$ w trakcie cyklicznego zginania próbki.

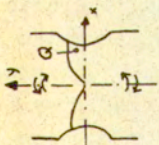


C.

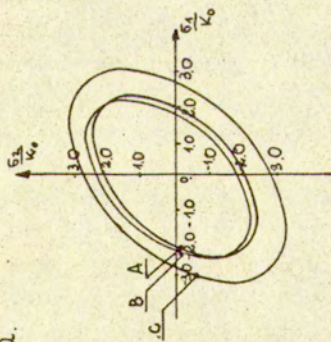


— idealna plastyczność
 - - - wzmocnienie kinematyczne
 . . . wzmocnienie izotropowe.

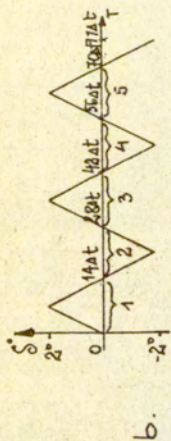
RYS. V.20



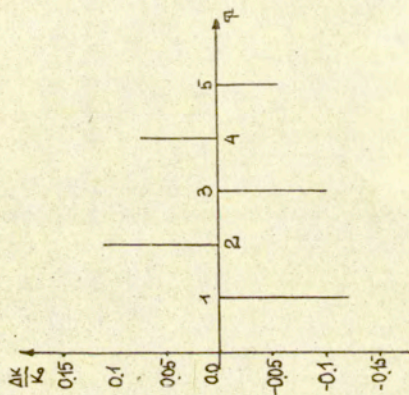
a.



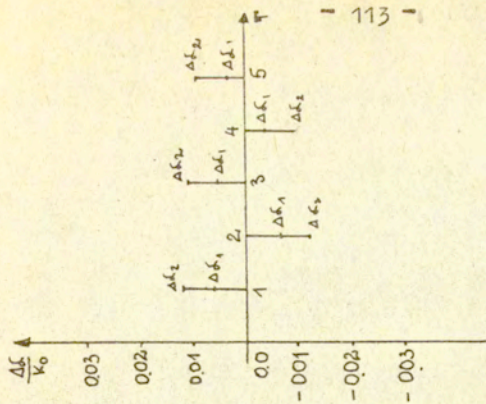
- A - idealna plastyczność
- B - wzmocnienie kinematyczne
- C - wzmocnienie izotropowe



b.



c.



W n i o s k i

W pracy zostały uzyskane następujące rezultaty:

- wyprowadzono nowe związki wzdluz charakterystyk dla wzmocnienia kinematycznego (3.25) i złożonego, uwzględniającego równomierne rozszerzanie się początkowej powierzchni plastyczności jak i zmianę jej orientacji oraz położenia w przestrzeni naprężeń (3.22) w płaskim stanie odkształcenia,
- przedstawiono równanie ewolucji powierzchni plastyczności z uwzględnieniem zmiany kierunków głównych naprężeń podczas deformacji (2.33),
- wykazano efektywność przyjętej metody obliczeniowej [4,7] dla zaawansowanego plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym na przykładzie monotonicznego i cyklicznego zginania próbki osłabionej symetrycznym, podwójnym wycięciem kołowym w płaskim stanie odkształcenia. Pokazano nowe jej zastosowanie do badania trajektorii dowolnej cząstki z obszaru plastyczności dla obu wymienionych sposobów obciążania i hipotez wzmocnienia. Pozwala to ocenić przebieg historii obciążenia na szczelbu cząstki materiału.
- przeprowadzona w (p. V.1) analiza uzyskanych rozwiązań dla wzmocnienia izotropowego, kinematycznego oraz idealnej plastyczności pokazuje, że rozwiązanie ze wzmocnieniem dla zaawansowanego płynięcia materiału wyraźnie różni się od rozwiązania dla idealnej plastyczności; różnice te są większe dla pól naprężeń niż dla pól prędkości płynięcia /średnio o rząd wielkości/. Wyniki obliczeń w przypadku idealnej plastyczności jedynie w zakresie małych odkształceń materiału ($\epsilon_i \sim 0.05$) nieznacznie różnią się od wyników dla materiału ze wzmocnieniem kinematycznym lub izotropowym. Porównując zaś wyniki dla wzmocnienia izotropowego i kinematycznego można powiedzieć, iż różnice uzyskanych rozwiązań dla naprężeń i prędkości płynięcia są nieznaczne. Stąd wniosek, iż stosowanie w obliczeniach

jednej lub drugiej hipotezy wzmocnienia w przypadku obciążeń monotonicznych uzależnione może być jedynie od potrzeb i charakteru zadania.

Porównanie rozwiązania dla wzmocnienia kinematycznego bez i ze zmianą kierunków głównych naprężeń podczas deformacji plastycznej materiału pokazuje, że rozwiązanie z uwzględnieniem zmian kierunków głównych różni się jedynie ilościowo od analogicznego rozwiązania z pominięciem tych zmian. Różnice te narastają ze wzrostem kąta ugięcia próbki stąd wniosek, iż dla dużych kątów zgięcia próbki δ /co odpowiada zaawansowanemu płynięciu materiału/ obrót kierunków głównych powinien być uwzględniany w rozwiązaniu.

- Przeprowadzona w (p.V.2) analiza rozwiązań w przypadku zginania cyklicznego dla wzmocnienia izotropowego, kinematycznego oraz idealnej plastyczności poza porównawczym jej charakterem pozwala na ocenę rezydualnych naprężeń re-szkowych [49] i niejednorodności plastycznej podczas odciążania materiału /t.j. wtedy gdy wartość momentu zginającego równa jest zeru/ w tym procesie.

Wartości tych wielkości maleją nieznacznie ze wzrostem liczby cykli, co może wskazywać na wolno zachodzący proces ustalania się funkcji $K(\epsilon_i)$ oraz składowych tensora $\underline{\epsilon}$.

Uzyskane wyniki pokazują, że rozwiązania dla naprężeń dla materiału bez wzmocnienia i ze wzmocnieniem kinematycznym różnią się nieznacznie od siebie lecz różnią się one wyraźnie od rozwiązania ze wzmocnieniem izotropowym. Różnice te narastają ze wzrostem liczby cykli. Dla używanego stopnia deformacji materiału nie można dać jednoznacznej odpowiedzi, która z hipotez wzmocnienia prowadzi do poprawnej oceny pola naprężeń w tym procesie bez odwołania się do doświadczenia. Wniosek ten jest różny od analogicznego w przypadku obciążeń monotonicznych (p. V.1), gdzie stosowanie obu hipotez wzmocnienia prowadzi do nieznacznie różniących się pól naprężeń dla dowolnego stopnia deformacji materiału.

Inaczej jest natomiast z rozwiązaniem dla prędkości. Występujące różnice prędkości płynięcia, parametru Odqvista oraz trajektorii cząstki są nieduże dla rozpatrzonych hipotez wzmocnienia i maleją ze wzrostem liczby cykli zginania. Stąd wynika analogiczny wniosek dla kinematyki tego procesu jak dla kinematyki zginania monotonicznego.

L i t e r a t u r a

1. S.B. Batdorf, B. Budiansky, Polyaxial stress-strain relations of strainhardening metal, *J. Appl. Mech.*, 21/1954/, 323-326
2. T.H. Lin, M. Ito, Theoretical plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined and reversed stress, *I. Mech. Phys. Solids*, 13/1965/, 103-115
3. T.H. Lin, Physical theory of plasticity, *Adv. Appl. Mech.* 11, 256-300, /1971/.
4. W. Szczepiński, Axially symmetric plane stress problem of a plastic strain-hardening body, *Arch. Mech. Stos.*, 15, 5, /1963/.
5. Z. Marciniak, Analysis of the process of forming axially symmetrical drawpieces with a hole at the bottom, *Arch. Mech. Stos.*, 15, 6, /1963/.
6. J. Białkiewicz, Iterative methods in the analysis of dynamic processes of plastic forming of metals, *Arch. Mech. Stos.*, 28, 4, /1976/.
7. I. Dietrich, Solving of the plastic flow problems for hardening materials, *Journal de Mécanique*, vol. 20, N^o 4, /1981/.
8. D. Besdo, Principal and slip-line methods of numerical analysis in plane and axially-symmetric deformations of rigid/ plastic media, *J. Mech. Phys. Solids*, 19, 6, /1971/
9. А. У. Кузнецов, Плоская деформация неоднородных пластических тел, *Вестник Ленинградского Университета*, 13, 3, /1958/.
10. A. Philips, Tang I-L, The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures, *Int. J. Solids structure* 8, 463-474, /1972/.

11. J. Miastkowski, Analysis of the memory effect of plastically prestrained material, Arch. Mech. Stos., 3, 20, /1968/.
12. I.F. Collins, The Application of Singular Perturbation Techniques to the Analysis of Forming Processes for Strain-Hardening Materials, TUTAM Symp. - Metal Forming Plasticity /edited by H. Lippmann/ Springer, Berlin/1978/.
13. A.J.M. Spencer, Perturbation methods in plasticity - I Plane Strain of non - homogeneous plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids 9/1961/, 279-288.
14. H.G. Hopkins, Mathematical methods in plasticity theory /part II/, Foundations of Plasticity, Edited by A. Sawczuk, /1974/.
15. E.G. Thomsen, C.T. Yang, J.B. Bierbower, An experimental investigation of the mechanics of plastic deformation of metals, Univ. of California Publications in Engineering, 5,4, /1954/.
16. C.T. Yang and E.G. Thomsen, Plastic flow in a lead extrusion, Trans. ASME, 75, /1953/.
17. E.G. Thomsen and J.T. Lapsley, Experimental stress determination within a metal during plastic flow, Proce. ASES, 11, 2, /1954/.
18. A.H. Shabaik, Theoretical methods for analysis of metal deformation problems, Ph.D. dissertation, Univ. of California, May /1966/.
19. A.H. Shabaik and E.G. Thomsen, Computer aided visio-plasticity solution of some deformation problems, Proce. Symp. on foundations of plasticity, Warsaw /1972/.
20. A.H. Shabaik and S. Kobayashi, Computer application to the visio-plasticity method, Trans. ASME, J. Eng. Ind., 89, ser. B, 2, /1967/.

21. S.A. Mohamed and A.H. Shabaik, Stress and strain distributions beyond general yield in the Charpy V-notched specimen. *J. Mech. Phys. Solids* 22, 6, /1974/.
22. T.H.C. Childs, A new visio-plasticity technique and a study of curly chip formation, *Int. J. Mech. Sci.* 13, 4, /1971/.
23. L.E. Farmer and F.L.B. Oxley, A slip-line field for planestrain extrusion of a strain-hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 19, 6, /1971/.
24. L.E. Farmer and S.W. Conning, Numerical smoothing of flow patterns, *Int. I. Mech.* 21, /1979/.
25. L.E. Farmer and R.F. Fowle, An experimental procedure for studying the flow in plane strain extrusion, *Int. I. Mech.* 21, /1979/.
26. J. Piwnik, Analiza osiowo-symetrycznych procesów obróbki plastycznej, *Praca IPPT*, 44 /1985/.
27. П. Д. Дель, Определение направлений в пластической области по распределению твердости. *Изв. Машиностроение* /1971/.
28. J.N. Robinson and A.H. Shabaik, The determination of the relationship between strain and microhardness by means of visio-plasticity, *Metallurgical Trans.*, 4, 9, /1973/.
29. П. Д. Дель, П. А. Соколов, Экспериментальное исследование неуставившейся стадии холодного выдвигания, *Машиностроение* 5, /1974/.
30. П. Д. Дель, Ф. Х. Томилов, В. А. Огородников, Напряженное состояние при теплом прессовании стали, *Терная металлургия*, 4, /1975/.
31. M. Życzkowski, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, Warszawa, PWN /1973/.

32. M. Ros, A. Eichinger, Versuche zur Klärung der Frage der Bruchgefahr, *EMPA Berichte* 14, /1926/ Zurich, Verhandl. II Int. Kongr. Techn. Mech. Zurich /1926/.
33. R. Hill, The mathematical theory of plasticity, Oxford /1950/.
34. D. Bland, The two measures of work-hardening, *Proc 9th Int. Congr. Appl. Mech.* vol 8 /1957/, 45-50.
35. W. Szczepiński, Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej, PWN Warszawa /1967/.
36. E. Melan, Der Spannungszustand eines Mises-Heuckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung, *S. Ber. Akad. Wiss., Wien /Abt. IIa/,* 147 /1938/, 73.
37. A. U. Ишуринский, Общая теория пластичности с линейным упрочнением. *Укр. Мат. Науки*, Т. 3, /1954/, 314-324.
38. W. Prager, The theory of plasticity: a survey of recent achievements, *Proc Inst. Mech. Engers* 169, /1955/, 41.
39. H. Ziegler, A modification of Prager's hardening rule. *Quart. Appl. Math.* 17, /1959/, 55-60
40. J. Ostrowska, Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych, PWN Warszawa /1982/.
41. A. Baltov and A. Sawczuk, A rule of anisotropic hardening, *Acta Mechanica*, vol. 1, /1965/, 81-92.
42. G. Backhaus, Zur Fließgrenze bei allgemeiner Verfestigung, *Z. angew. Math. Mech.* 2, 48, /1968/ 99-108; *Bull. Acad. Polon. Sci. Serie Sci. Techn.* 3, 16, /1968/, 343-352.
43. Z. Mróz, On the Description of Anisotropic Workhardening, *J. Mech. Phys. Solids* 15, /1967/, 163-175.

44. A.P. Green, The plastic yielding of notched bars due to bending, Quart. J. Mech. Appl. Math., 6, /1953/, 223-239.
45. T.E. Shoup, A parcial guide to computer methods for engineers, Prentice-Hall, Irvc. Englewood Cliffs, N.J., /1979/.
46. H.L. Morrison, Q. Richmond, Large deformation of notched perfectly plastic tensile bars, Journal of Applied Mechanics 72-APM-RR, /1973/.
47. L. Dietrich, Uwzględnienie wzmocnienia materiału w analizie złożonych procesów plastycznego pływnięcia, Prace IPPT, Warszawa /1979/.
48. Ю. И. Кагашевуз, В. В. Новиков, Тесная пластичности, учитывающая микронеправленни, Прикл. Мат. Мех. Т. 22, /1958/, 78-89.

S t r e s z c z e n i e

W pracy przedstawiono nowe rozwiązanie zagadnienia plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem kinematycznym, z uwzględnieniem zmian kierunków głównych naprężeń podczas deformacji w płaskim stanie odkształcenia. Jako przykład rozwiązano monotoniczne i cykliczne zginanie w warunkach płaskiego stanu odkształcenia elementu osłabionego podwójnym symetrycznym wycięciem kołowym. Porównano uzyskane wyniki z wynikami dla wzmocnienia izotropowego i idealnej plastyczności. Ponadto wyprowadzono nowe związki wzduż charakterystyk w płaskim stanie odkształcenia dla wzmocnienia złożonego, uwzględniającego przesunięcie, obrót i rozszerzanie się początkowej powierzchni plastyczności podczas deformacji.

SPIS TRESCI

	Strona
Wstęp	3
Rozdział I	7
METODY DOSWIADCZALNO-OBLICZENIOWE	
UWZGLĘDNIAJĄCE WZMOCNIENIE MATERIAŁU	7
I.1. Metoda oparta na doświadczalnie wyznaczonym polu kinematycznym	7
I.2. Metoda oparta na doświadczalnie wyznaczonym rozkładzie twardości	15
Rozdział II	20
MODELE MATERIAŁÓW I HIPOTEZY WZMOCNIENIA	
II.1. Modele materiałów ze wzmocnieniem	20
II.2. Hipotezy i prawa wzmocnienia	24
Rozdział III	32
METODY OBLICZENIOWE Z UWZGLĘDNIENIEM WZMOCNIENIA MATERIAŁU	
III.1. Zagadnienie plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem	32
III.2. Metody rozwiązywania zagadnień osiowo- symetrycznych płaskiego stanu naprężenia	33
III.3. Metody rozwiązywania zagadnienia plastycznego płynięcia materiału ze wzmocnieniem w warunkach płaskiego stanu odkształcenia	38
III.4. Uwagi o rozwiązaniu dla materiału pierwotnie anizotropowego w płaskim stanie odkształcenia	45
Rozdział IV	49
ALGORYTM OBLICZEŃ I METODY NUMERYCZNE W PŁASKIM STANIE ODKSZTAŁCENIA	
IV.1. Zginanie elementu z dwustronnym wycięciem kołowym	51
IV.2. Algorytm obliczeń monotonicznego zginania dla materiału ze wzmocnieniem izotropowym i kinematycznym	54

IV.3. Algorytm obliczeń cyklicznego zginania	73
IV.4. Program obliczeń	76
Rozdział V	80
WYNIKI OBLICZEN	80
V.1. Monotoniczne zginanie	80
V.2. Cykliczne zginanie	106
Wnioski	112
Literatura	117
Streszczenie	122