MANUALI HOEPLI

Del medesimo autore:

ARITMETICA PRATICA

SECONDA EDIZIONE

Un volume di pag. VIII-188

L. 1.50

ARITMETICA RAZIONALE

TERZA EDIZIONE

Un volume di pag. XII-210

L. 1.50

ESERCIZII DI ARITMETICA RAZIONALE - LIRE 1.50

273

MANUALI HOEPLI

SERIE SCIENTIFICA

273

ESERCIZII DI ARITMETICA RAZIONALE

F. PANIZZA

MANUALI HOEPLI

opis: 46686

Inw

Kat.

MANUALI HOEPLI

ESERCIZII
DI
ARITMETICA RAZIONALE

DEL DOTT.
FRANCESCO PANIZZA
Professore di Matematica nel R. Liceo Marco Polo di Venezia.

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO
—
1898

J. Wi...

Tip. Lombardi di M. Bellinzaghi
Milano - *Fiori Oscuri*, 7 - Milano

INDICE

PREFAZIONE

Le raccolte di esercizii di aritmetica razionale sono abbastanza numerose nella bibliografia estera, nè mancano nei nostri buoni trattati questioni di tal genere proposte agli studiosi. Tuttavia le migliori opere sono troppo voluminose e inadeguate alle scarse e limitate cognizioni dei nostri scolari; alcune presuppongono la conoscenza della teoria della divisibilità dei polinomi e in generale gli elementi dell'algebra e dell'aritmetica superiore; le raccolte poi di esercizii proposti sui nostri buoni trattati, anche quando sono ben ordinate, non offrono allo scolaro nessuna traccia e nessun metodo sicuro per comporre la dimostrazione e però piuttosto che invogliare il giovane allo studio delle proprietà dei numeri, lo allontanano scoraggiato. Nè l'ajuto dell'insegnante può in quest'ultimo caso riuscire di grande efficacia, poichè il numero scarso delle ore d'insegnamento e la necessità di frequenti ripeti-

zioni non permettono di uscire dal campo assai ristretto del programma.

Ho quindi pensato che non sarebbe stato inutile lavoro compilare un manuale di esercizii di aritmetica razionale, nel quale, seguendo le ordinarie divisioni di questa scienza, fossero esposte molte proprietà dei numeri e delle operazioni in modo da non presentare difficoltà insuperabili all'intelligenza dei giovani studiosi. A raggiungere questo scopo ho pensato di stendere in ogni capitolo alcune dimostrazioni dei principali teoremi e di proporre in seguito con caratteri più minuti quelle questioni che per la natura loro assai strettamente si collegassero con quelle già trattate. Spero con questo intendimento di aver compilato un manuale che, se non ha il merito dell'originalità, ha almeno quello più modesto di riuscire utile agli insegnanti e agli alunni delle nostre scuole secondarie.

Venezia, 26 Maggio 1898.

F. Panizza.

LIBRI CONSULTATI

J. Fitz Patrick et Georges Chévrel. — *Exercices d'Arithmétique.* Paris, 1891.

E. Lucas. — *Théorie des nombres.*

M. L. Maleyx. — *Leçons d'Arithmétique.* Paris, 1891.

Giacomo Bellacchi. — *Lezioni di algebra elementare.*

Fontebasso. — *Soluzione degli esercizii di Aritmetica del Bertrand.*

Journal des mathématiques élementaires, par Vuibert.

Periodico di matematica, Roma.

Nota. — *I richiami che si incontrano nel testo si riferiscono alla* 2^a *o alla* 3^a *edizione del Manuale Hoepli di* Aritmetica razionale *del* Dott. Francesco Panizza.

CAPITOLO I.

Esercizii sulle operazioni.

a) Serie del Fibonacci.

Col numero *1* si formi una serie di numeri interi

$$1, 1, 2, 3, 5, 8 \ldots.$$

in modo che ciascuno sia la somma dei due che lo precedono; se indichiamo con $u_0\ u_1\ u_2 \ldots u_h$ i successivi termini della serie, il termine generale u_h (*quello di posto qualunque* h) è dato dalla legge

$$u_h = u_{h-1} + u_{h-2}.$$

Una tal serie è conosciuta col nome di serie del Fibonacci.

1. Si ha

$1 + 1 + 2 + 3 + \ldots.\quad u_h = u_{h+2} - 1$ od anche
$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.\quad u_h = u_{h+2} - 1.$

Infatti si ha per definizione

$$u_2 = u_1 + u_0$$
$$u_3 = u_2 + u_1$$
$$u_4 = u_3 + u_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$u_{h+2} = u_{h+1} + u_h$$

Sommando membro a membro e togliendo dalla nuova eguaglianza i termini comuni ai due membri si ha

$$u_{h+2} = u_0 + u_1 + u_1 + u_2 + \ldots u_h$$

e togliendo $u_1 = 1$ da ambo i membri

$$u_{h+2} - 1 = u_0 + u_1 + u_2 + u_h.$$

2. Fra tre termini consecutivi della serie si ha l'eguaglianza

$$u^2_h = u_{h-1}\, u_{h+1} \pm 1.$$

Infatti questa eguaglianza è facile a verificare per i valori 1, 2, 3 dell'indice, poichè si ha

$$u^2_1 = u_0 \,.\, u_2 - 1 \text{ ossia } 1 = 1 \,.\, 2 - 1$$
$$u^2_2 = u_1 \,.\, u_3 + 1 \text{ ossia } 2^2 = 1 \times 3 + 1$$
$$u^2_3 = u_2 \,.\, u_4 - 1 \text{ ossia } 3^2 = 2 \times 5 - 1$$

da cui si vede che il segno $+$ si deve sciegliere quando h assume valori pari, il segno — quando assume valori dispari.

Supponiamo dunque che una tal legge sia

vera fino ad un indice h e dimostriamo che sarà vera per l'indice successivo.

Avremo allora per ipotesi

$$u^2_h = u_{h-1} \times u_{h+1} \pm 1$$

a seconda che h è pari o dispari.

Sostituendo in questa eguaglianza ad u_{h-1} il suo valore eguale $u_{h+1} - u_h$ abbiamo

$$u^2_h = (u_{h+1} - u_h)\, u_{h+1} \pm 1$$

ossia

$$u^2_h = u^2_{h+1} - u_h \cdot u_{h+1} \pm 1$$

od anche

$$u^2_{h+1} = u^2_h + u_h \cdot u_{h+1} \mp 1$$

ossia

$$u^2_{h+1} = u_h (u_h + u_{h+1}) \mp 1$$

. . . . . ma

$$u_h + u_{h+1} = u_{h+2}$$

quindi

$$u^2_{h+1} = u_h \cdot u_{h+2} \mp 1.$$

La legge è dunque vera anche per il termine u_{h+1} e però essendo vera per i primi valori di h sarà vera in generale.

3. Nella serie di Fibonacci vi sono sempre quattro termini consecutivi e al massimo cinque termini aventi lo stesso numero di cifre.

Infatti ogni numero formato con h cifre è eguale o maggiore di $10^{h,-1}$ ma sempre minore di 10^{h} che è il più piccolo numero avente $h+1$ cifre, e siccome i termini della serie crescono indefinitamente col crescere dell'indice, troveremo certamente nella serie i due ultimi termini u_{r} ed u_{r+1} minori di 10^{h-1}.

Avremo per i termini seguenti

$$u_{r+2} = u_{r} + u_{r+1} < 2 \,.\, u_{r+1} < 2 \,.\, 10^{h-1} < 10^{h}$$

$$u_{r+3} = u_{r+2} + u_{r+1} = u_{r} + 2\, u_{r+1} < 3\, u_{r+1} < 3 \,.\, 10^{h-1} < 10 \,.^{h}$$

$$u_{r+4} = u_{r+3} + u_{r+2} < 2\, u_{r+1} + 3\, u_{r+1} < 5\, u_{r+1} < 5 \,.\, 10^{h-1} < 10^{h}$$

$$u_{r+5} = u_{r+4} + u_{r+3} < 3\, u_{r+1} + 5\, u_{r+1} < 8\, u_{r+1} < 8 \,.\, 10^{h-1} < 10^{h}$$

da queste diseguaglianze si vede che i quattro termini consecutivi u_{r+2}, u_{r+3}, u_{r+4}, u_{r+5} della serie del Fibonacci sono compresi fra 10^{h-1} e 10^{h} e quindi hanno h cifre; per il termine seguente si ha

$$u_{r+6} = u_{r+5} + u_{r+4} < 13\, u_{r+1} < 13 \,.\, 10^{h-1}$$

questo termine potrebbe quindi avere anche $h+1$ cifre; questo però non può accadere per il termine successivo, infatti

$$u_{r+7} = u_{r+6} + u_{r+5} = 8\, u_{r} + 13\, u_{r+1} = 10\,(u_{r} + u_{r+1}) + 3\, u_{r+1} - 2\, u_{r} = 10 \,.\, u_{r+2} + 3\, u_{r+1} - 2\, u_{r}$$

e poichè u_{r+2} ha h cifre, $10 . u_{r+2}$ avrà $h+1$ cifre ed almeno altrettante nè avrà $10 . u_{r+2} + 3 u_{r+1} - 2 u_r$ che è maggiore di $10 . u_{r+2}$; il teorema è quindi dimostrato.

4. Si verifichi la formola

$$u_{m+h} = u_m \cdot u_h + u_{m-1} \cdot u_{h-1} \qquad (1)$$

per m qualunque e per i valori 1, 2, 3 di h, ricordando che $u_0 = 1$.

5. Supposto che l'eguaglianza precedente sia valida fino ad un certo valore $h - 1$, si dimostri che essa è valida per h qualunque.

Si parta dalle espressioni di u_{m+h-1}, u_{m+h-2}, date dalla eguaglianza precedente e colla legge di formazione dei numeri della serie si deduca la formula generale (1).

6. Qual'è la formola che si deduce dalla precedente facendo $h = m$? La si esprima nel linguaggio ordinario.

7. Si provi che moltiplicando membro a membro le eguaglianze

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2}$$

$$u_m = u_{m+1} - u_{m-1}$$

si deduce la proprietà, che la differenza fra il quadrato di un termine della serie ed il prodotto dei due che lo comprendono è costante.

Si trovi il valore di questa costante (*essa à il valore 1*).

8. Dalle eguaglianze dedotte dalla (1)

$$u_{2h+3} = u_h \, u_{h+3} + u_{h+1} \cdot u_{h+2}$$

$$u_{2h+3} = u_{h+1} \, u_{h+2} + u_h \, u_{h+1}$$

facendo $m = h \;\; h = h + 3$, ovvero $m = h + 1$
$h = h + 2$

si ricavi, moltiplicandole membro a membro, che « dati quattro termini consecutivi della serie, la differenza fra i prodotti dei medi e degli estremi è costante ». Si determini il valore della costante.

Si troverà specializzando il valore dell'indice che essa è eguale ad 1.

9. Mediante le formule che dànno la legge di formazione dei termini, si dimostri che in quattro termini successivi della serie, il prodotto dei medi è eguale alla differenza dei quadrati degli estremi.

10. Si dimostri l'esercizio 3 supponendo più in generale che sia $u_0 = a \;\; u_1 = b$.

Nota. — Leonardo Fibonacci detto Pisano, dalla sua città natale, fiorì nella prima metà del 1200; la sua opera principale è il *Liber Abbaci*.

11. Se si fa la differenza fra un numero di tre cifre ed il numero rovesciato si trova per cifra media 9, e la somma delle cifre estreme è pure eguale a 9.

Rappresentando con u d c le cifre delle unità diecine e centinaia componenti il numero dato esso sarà espresso da

$$c\ d\ u$$

ed il numero rovesciato da

$$u\ d\ c$$

conservando anche per le lettere la convenzione decimale delle cifre.

Si supponga $c > u$; allora il primo numero è maggiore del secondo; e per avere le unità del resto bisogna alla cifra u del minuendo aggiungere 10 e poi calcolare la differenza

$$u + 10 - c$$

la cifra delle decine si otterrà allora facendo la differenza

$$d - 1 + 10 - d \text{ e si ottiene } 9$$

e la cifra delle centinaia sarà

$$c - 1 - u;$$

si ha allora

$$u + 10 - c + c - 1 - u = 9 \quad c.\ d.\ d.$$

Nel caso $c = u$ il numero rovesciato sarebbe eguale al primitivo e la loro differenza zero.

12. Se da un numero formato con tre cifre consecutive si toglie il numero rovesciato, la differenza è 198.

Si esprima il numero colle potenze del 10.

13. Metodo indiano per trovare il prodotto di due numeri.

Si debba trovare il prodotto di 4815 per 379

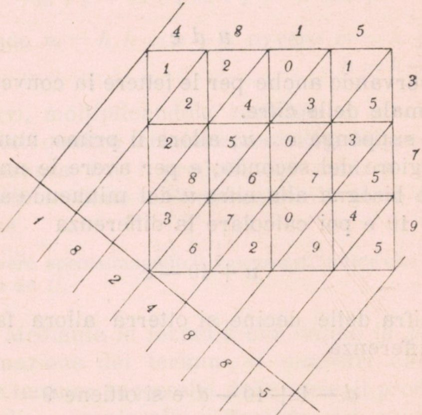

Fig. 1.

Diviso il foglio in quadrati come indica la figura 1 si dispongano le cifre del moltiplicando da sinistra a destra al di sopra di ogni quadrato in una linea orizzontale e quelle del moltiplicatore dall'alto al basso lungo una verticale una per ogni quadrato; si fa il prodotto di ogni cifra del moltiplicando per ogni cifra del moltiplicatore, e lo si scrive nel quadrato dove si incrociano la colonna e la linea in cui si trovano le cifre scelte, coll'avvertenza di collocare le decine del prodotto nella metà superiore del quadrato e le unità in quella inferiore; si fa quindi la somma per diagonali incominciando da quella inferiore a destra col metodo ordinario; si otterrà così il prodotto cercato.

Si dia spiegazione di questo procedimento, e si accenni ai vantaggi che esso presenta sul metodo ordinario di moltiplicazione.

14. Verificare la identità

$$(5+a)(5+b)=10(a+b)+(5-a)(5-b)$$

e mostrare in qual modo il secondo membro possa praticamente servire a ridurre il prodotto di due numeri compresi fra il 5 e il 10, a quello di altri due inferiori al 5.

Si debba calcolare 7×8; sarà $7=5+2$ $8=5+3$ quindi facendo $a=2$ $b=3$ e immaginando di alzare in una mano due dita, nell'altra 3, si sommeranno le dita alzate e si conteranno come decine; si moltiplicheranno i due numeri che rappresentano le dita non alzate in ciascuna mano e questo prodotto di due numeri inferiori al 5, lo si aggiungerà al numero prima ottenuto.

15. Il quadrato di un numero non può terminare colle cifre 2, 3, 7, 8. —

Si pensi al modo con cui si ottiene la cifra delle unità del prodotto e si facciano tutte le ipotesi possibili sulle cifre con cui termina il numero dato.

16. Il quadrato di un numero che termina con 5 termina con 25.

Si scomporrà il numero in decine ed unità e si applicherà il teorema del quadrato della somma di due numeri. *Arit. raz.* ediz. 2ª, pag. 29.

17. Con quali cifre può terminare la quarta potenza di un numero?

Per fare la quarta potenza di un numero basta farne il quadrato e poi di nuovo il quadrato, si tenga conto dell'esercizio 15.

Oppure si proceda direttamente col metodo indicato nello stesso esercizio.

18. Dal precedente esercizio si deduca che la differenza delle quarte potenze di due numeri termina sempre per zero o per 5 e quindi è divisibile per 5.

19. Se un numero N è un multiplo di p, aumentato di 1, qualunque sua potenza sarà della stessa forma.

Un multiplo di p è rappresentato da Kp dove K è un intero qualunque. Si applichi la legge distributiva del prodotto.

20. La cifra delle decine d'un quadrato terminato per 1 o per 9, è un numero pari.

Infatti la base del quadrato dovrà terminare o con 1, o con 3, 7, 9 e però sarà di una delle forme seguenti

$$10\,a + 1 \qquad 10\,a + 3 \qquad 10\,a + 7 \qquad 10\,a + 9$$

applicando lo sviluppo del quadrato della somma si vede che la cifra delle decine è pari perchè risulta dalla somma di cifre pari.

21. La cifra delle decine di un quadrato terminato per 5 è 2. Vedi esercizio 16.

22. La cifra delle decine di un quadrato terminato per 4 è un numero pari.

23. La cifra delle diecine di un quadrato terminato per 6 è un numero dispari.

24. Sussistono le reciproche dei teoremi 20, 21, 22, 23?

25. Qualunque quadrato dispari è della forma $8 \times k + 1$.

Infatti la base del quadrato dovendo essere un numero dispari, avrà rispetto al divisore 4 o l'una o l'altra delle due forme

$$4k+1 \qquad\qquad 4k+3$$

Ora facendo i quadrati di queste espressioni si trova sempre un multiplo di 8 aumentato di 1.

26. Rappresentando col simbolo $k^{\overline{h}}$ il prodotto

$$K\,(K+1)\,(K+2)\ldots.(K+h-1)$$

si dimostri l'eguaglianza

$$1^{\overline{h}} + 2^{\overline{h}} + 3^{\overline{h}} + \ldots.\, k^{\overline{h}} = \frac{k^{\overline{1+1}}}{h+1}$$

A tale scopo si verificherà prima la formula per $K=2$ e per h qualunque e poi si procederà col metodo di induzione.

27. Se la somma di due numeri termina con zero, i loro quadrati sono terminati colle medesime cifre. (Eserc. 15).

28. Non può essere $a \times h = a^h$ per valori interi differenti di a e di h non inferiori al 2, ed anzi si avrà per tali valori.

$$a \times h < a^h$$

Si verifichi per $h = 2$ e per $a > 2$ mediante le definizioni di prodotto e di potenza e si estenda poi ad un numero h qualunque col metodo di induzione; il solo caso di eguaglianza ha luogo per $a = h = 2$.

Il quadro seguente (fig. 2)

$$\begin{array}{l|llllll}
O & & & & & & \Sigma \\
\hline
 & u_0 & \Sigma u_0 & \Sigma^2 u_0 & \Sigma^3 u_0 & \Sigma^4 u_0 & \dots \\
 & u_1 & \Sigma u_1 & \Sigma^2 u_1 & \Sigma^3 u_1 & \Sigma^4 u_1 & \dots \\
 & u_2 & \Sigma u_2 & \Sigma^2 u_2 & \Sigma^3 u_2 & \Sigma^4 u_2 & \dots \\
 & u_3 & \Sigma u_3 & \Sigma^2 u_3 & \Sigma^3 u_3 & \Sigma^4 u_3 & \dots \\
 & u_4 & \Sigma u_4 & \Sigma^2 u_4 & \Sigma^3 u_4 & \Sigma^4 u_4 & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
u & & & & & &
\end{array}$$

Fig. 2.

è formato da numeri arbitrarii $u_0\ u_1\ u_2\ u_3$ ecc. disposti nella prima colonna a sinistra e da un'altra serie di numeri arbitrari $\Sigma u_0\ \Sigma^2 u_0\ \Sigma^3 u_0$ ecc.

disposti nella prima linea in alto; ognuno degli altri termini si ottiene sommando il termine che gli sta immediatamente di sopra con quello che precede quest'ultimo nella linea a cui appartiene.

29. Si dimostri la eguaglianza

$$\Sigma u_{p+1}^{p+1} = u_0 + \Sigma u_0 + \Sigma^2 u_1 + \Sigma^3 u_2 + \Sigma u_{p}^{p+1} \quad (1)$$

Basterà scrivere le espressioni di Σu_1 $\Sigma^2 u^2 \ldots \Sigma^{p+1} u_{p+1}$ dedotte dalla loro legge di formazione e poi sommare membro a membro.

30. Si dimostri la eguaglianza seguente

$$\Sigma u_{p+1} = \Sigma u_0 + u_0 + u_1 + u_2 + \ldots . u_p \quad (2)$$

e la si enunci in parole.

Basterà anche in questo caso scrivere le espressioni di Σu_1 $\Sigma u_2 - \Sigma u_{p+1}$ e sommare membro a membro.

31. Si estenda la eguaglianza (2) ad una Σ con un indice qualunque.

32. Si dimostri che nell'eguaglianza (1) si possono aumentare di uno stesso numero α gli indici di tutte le u.

33. Cosa diventa il quadro (fig. 2) se tutte le u si fanno eguali a 1 e tutte le Σ eguali a O.

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 *q*
0	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.
3	1	3	3	1	.	.	.	.	.	.
4	1	4	6	4	1	.	.	.	.	.
5	1	5	10	10	5	1	.	.	.	.
6	1	6	15	20	15	6	1	.	.	.
7	1	7	21	35	35	21	7	1	.	.
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	.
9	1	9	36	84	126	126	84	36	1	.
	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
p										

Fig. 3. — Triangolo aritmetico di Tartaglia.

34. In una linea qualunque del triangolo aritmetico i termini equidistanti dagli estremi sono eguali.

Verificata la proprietà per le prime linee si estenderà col metodo di induzione.

35. La somma dei termini di una linea del triangolo aritmetico è doppia della somma dei termini della linea precedente.

La dimostrazione è fondata sulla proprietà contenuta nell'esercizio precedente.

36. Un numero qualunque del triangolo aritmetico è eguale alla somma di tutti i termini superiori nella colonna precedente.

Basta ripetutamente applicare la legge di formazione dei termini del triangolo.

b) Sulla divisione.

I seguenti teoremi si dimostrano in generale ricordando la relazione fondamentale fra il dividendo a, il divisore b, il quoziente intero q ed il resto r, cioè

$$a = b \times q + r \qquad r < b$$

ed osservando che quando si ha una relazione della forma precedente con $r < b$ si può asserire che q è il quoziente della divisione di a per b.

1. In ogni divisione il dividendo è più grande del doppio del resto.

2. Ogni numero dispari è di una delle forme

$$8 \times K + 1 \quad 8K - 1 \quad 8K + 3 \quad 8 \times K - 3$$

Si escludano i resti impossibili per l'ipotesi.

3. In qual caso è lecito in una divisione scambiare il divisore col quoziente?

4. Se $a \times b = c \times d$ e se a divide c, dovrà d dividere b.

5. Per ottenere il quoziente intero di N per il prodotto $a . b . c$, basta calcolare il quoziente intero q di N per a, poi quello q_1 di q per b e così via.

Infatti se r è il resto della prima divisione r_1 quello della seconda, $r_{\prime\prime}$ quello della terza avremo:

$$N = a \times q + r \quad q = b \times q_{\prime} + r_{\prime} \quad q_{\prime} = c \times q_{\prime\prime} + r_{\prime\prime}$$

sostituendo nella seconda eguaglianza a q_1 il valore dato dalla terza eguaglianza e sviluppando il prodotto abbiamo

$$q = b \times c \times q_{\prime\prime} + b\, r_{\prime\prime} + r_{\prime}$$

e questo valore di q sostituito nella prima eguaglianza ci dà

$$N = a \times b \times c \times q_{\prime\prime} + a \times b \times r_{\prime\prime} + a\, r_{\prime} + r \qquad (1)$$

ora se ai resti r $r_{\prime}$ $r_{\prime\prime}$ attribuiamo i loro massimi valori possibili che sono rispettivamente $a - 1$, $b - 1$, $c - 1$

l'espressione $a \times b \times r_{\prime\prime} + a\, r_{\prime} + r$ assume il valore

$$a \times b \times (c - 1) + a\,(b - 1) + a - 1$$

ossia

$$a \times b \times c - a \times b + a \times b - 1 = a \times b \times c - 1$$

e però sarà

$$a \times b \times r_{\prime\prime} + a\, r_{\prime} + r = \leq a \times b \times c - 1$$

e quindi considerando $a \times b \times c$ come divisore, la (1) ci mostra che q è il quoziente intero di N per $a\, b\, c$.

Se colla segnatura $E\left(\frac{h}{m}\right)$ si dinota il quoziente intero della divisione di h per m, il teorema precedente si può esprimere nel modo seguente:

$$E\left(\frac{h}{a\,b\,c}\right) = E\left\{\frac{E\left(\frac{E\left(\frac{h}{a}\right)}{b}\right)}{c}\right\}$$

6. Per determinare il quoziente intero della divisione di un numero dato per 9, si può procedere come indica il seguente algoritmo.

Sia dato il numero $a\,b\,c\,d\,e$ dove le lettere $a\,b\,c....$ stanno a significare le cifre che compongono il numero dato nel sistema decimale si avrà:

$$\begin{aligned}
a \times 10^4 &= 9999\ a + a\\
b \times 10^3 &= 999\ b + b\\
c \times 10^2 &= 99\ c + c\\
d \times 10 &= 9\ d + d\\
e &= \quad e
\end{aligned}$$

Sommando membro a membro e dividendo per 9 ambo i membri della eguaglianza risultante, notando che i termini che formano la prima colonna nel secondo membro sono divisibili esattamente per 9 si ha

$$E\left(\frac{a\,b\,c\,d\,e}{9}\right) = E\left(\frac{a+b+c+d+e}{9}\right) + \\ + 1111\,a + 111\,b + 11\,c + d$$

e poichè ogni numero formato colla cifra 1 è una somma di potenze del 10 si avrà

$$\begin{aligned} 1111\,a &= a + 10\,a + 10^2\,a + 10^3\,a \\ 111\,b &= b + 10\,b + 10^2\,b \\ 11\,c &= c + 10\,c \\ d &= d \end{aligned}$$

sostituendo nella precedente eguaglianza ed ordinando secondo le potenze del 10 si ha:

$$E\left(\frac{a\,b\,c\,d\,e}{9}\right) = E\left(\frac{a+b+c+d+e}{9}\right) + \\ + d + c + b + a + 10(c+b+a) + 10^2(b+a) + 10^3 a.$$

Da questa ultima eguaglianza si ricava la regola seguente per determinare il quoziente intero della divisione di un numero per 9.

« Si addizionano le cifre e si divide la somma per 9, il quoziente intero ottenuto lo si addiziona colla somma delle cifre incominciando da quella delle diecine, si scrivono le unità del totale e le diecine si uniscono alla somma delle cifre incominciando da quella delle centinaja; del nuovo totale si scrive la cifra delle unità accanto a quella già scritta e le diecine si uniscono alla somma delle cifre incominciando da quella delle migliaja e così si continua fino all'ultima cifra.

Esempio. — Si voglia il quoziente intero di 394617 per 9, la somma delle cifre è

30 che diviso per 9 dà per quoziente 3;

aggiungo il 3 alla somma delle cifre del numero dato incominciando dalla seconda a destra e procedendo a sinistra, ottengo

$$3+1+6+4+9+3=26$$

scrivo il 6 (che sarà la cifra delle unità del quoziente) e riporto il 2 alla somma delle cifre incominciando dalla terza, ottengo

$$2+6+4+9+3=24$$

scrivo il 4 alla sinistra del 6 già scritto e riporto il 2 alla somma delle cifre incominciando da 4 avrò

$$2+4+9+3=18$$

scrivo l'8 alla sinistra delle due cifre già trovate e riporto 1 alla somma delle cifre incominciando dal 9 avrò

$$1+9+3=13$$

scrivo il 3 alla sinistra delle cifre già trovate e sommo 1 coll'ultima cifra, ottengo 4 che è la cifra di ordine più elevato del quoziente; questo sarà dunque 43846.

7. Quando il numero dato è esattamente divisibile per 9 si può determinare il quoziente mediante una sottrazione.

Infatti se N è il numero dato, esattamente divisibile per 9, si avrà chiamando q il quoziente

$$N=9\times q=10\,.\,q-q$$

e quindi

$$q = 10 \, . \, q - N$$

e poichè $10 \, . \, q$ si ottiene mettendo uno zero alla destra del numero q, noi potremo determinare la cifra delle unità del quoziente q sottraendo da 10 quella delle unità di N; questa rappresenterà allora la cifra delle diecine di $10 \, . \, q$ e però potremo determinare colla sottrazione la cifra delle diecine di q è così successivamente le altre cifre.

Esempio. — Si voglia determinare il quoziente per 9 del numero 328977; si opererà nel modo seguente:

$$\begin{array}{r} 65530 \\ 3\ 28977 \\ \hline 36553 \end{array}$$

$10 - 7 = 3$, cifra delle unità semplici di q, che scrivo alla sinistra dello zero, continuo come nell'ordinaria sottrazione ed ho $12 - 7 = 5$ che scrivo alla sinistra del 3 nel minuendo; $14 - 9 = 5$,

$14 - 8 = 6$, $6 - 2 = 3$; il quoziente è 36553.

8. Con un metodo analogo si deduca una regola per determinare il quoziente di un numero esattamente divisibile per 11.

Si parta dell'eguaglianza $N = 11 \times q = 10 \, . \, q + q$.

9. Esiste sempre un multiplo di un numero p

che è eguale alla differenza di due potenze di uno stesso numero b;

Corollario, quando b è la base 10.

Infatti se immaginiamo di dividere i termini della serie di potenze

$$b,\ b^2,\ b^3,\ b^4....$$

per il numero dato p, essendo i resti possibili in numero limitato si dovranno trovare due potenze b^h e b^k tali che divise per p danno resti eguali; si avranno allora le eguaglianze

$$b^h = p \times q + r \qquad b^k = p \times q_1 + r$$

e sottraendo dalla seconda, la prima eguaglianza, membro a membro (nell'ipotesi $k > h$) si avrà

$$b^k - b^h = p\,(q_1 - q).$$

10. Ogni numero di $2\,n$ cifre composto di due parti identiche di n cifre è divisibile per $10^n + 1$. Infatti chiamando $a\,b\,c ... u$ le cifre che compongono ciascuna delle due parti il numero dato N si potrà mettere sotto la forma

$$N = a\,b\,c ...\, u\, o\, o ...\, o + a\,b\,c ...\, u$$

dove il numero degli zeri sarà eguale ad n e da questa forma raccogliendo il fattore comune $a\,b\,c ... u$ si ha la dimostrazione del teorema

11. Ogni numero di $2\,n$ cifre formato di due parti di n cifre tali che la parte di destra sia eguale a k volte, quella di sinistra è divisibile per $10^n + k$. Si proceda come nell'esercizio 10.

12. Si mostri come l'esercizio 10 è un caso particolare dell'esercizio 11.

13. Ogni numero di $3n$ cifre formato di tre parti di n cifre tali che la seconda, a partire dalla sinistra sia eguale a k volte la prima e la terza a k volte la seconda, è divisibile per $10^{2n} + k.10^n + k^2$.

Si scomporrà il numero nella somma di 3 parti ciascuna composta di n cifre.

14. Si generalizzi il teorema n. 13 supponendo che il numero dato sia composto di $t \times n$ cifre e che ciascuna delle parti composta di n cifre abbia colla precedente il rapporto costante k; si dimostri che in tale ipotesi il numero dato è divisibile per

$$10^{(t-1)n} + 10^{(t-2)n}.k + \dots k^{t-1}$$

15. Un numero N è divisibile per un altro M formato da m cifre tutte eguali ad uno, quando sommando il numero formato dalle m ultime cifre alla destra di N col numero rimanente si ha un risultato divisibile per M.

Il numero N si potrà mettere sotto la forma $A.10^m + B$ e basterà allora sostituire a 10^m un numero formato di cifre 9, aumentato di 1.

16. È vera la reciproca del teorema 15?

17. Si generalizzi il teorema n. 15 supponendo la base α di numerazione.

CAPITOLO II.

Divisibilità

— *M.C.D* — *m c m* ***di più numeri.***

a) **Divisibilità.**

I teoremi che sono esposti in questo Capitolo riguardano la divisibilità, il *M.C.D*, ed il *m.c.m* di più numeri ma indipendentemente dalla teoria dei numeri primi; in seguito saranno fatte altre importanti applicazioni ai detti argomenti colla teoria dei numeri primi.

Le dimostrazioni dei teoremi indicati in questi paragrafi si ricavano in generale ricorrendo ad opportune scomposizioni del numero in somme parziali, e valgono quindi molte volte per il solo sistema di numerazione decimale; le conclusioni si fanno mediante i teoremi:

« Se un numero divide tutte le parti di una somma divide anche la somma » (*Arit. raz., Teor.* V, Cap. 6°).

« Se un numero è divisore di altri due, è divisore anche della loro differenza » (*Arit. raz.*, *Teor.* VI, Cap. 6°).

1. Il prodotto $h(h+1)$ è sempre divisibile per 2 ossia rappresenta un numero pari.

2. Il prodotto $h(h+1)$ non può terminare nè colla cifra 4 nè colla cifra 8

Basterà esaminare come termina il prodotto di due numeri consecutivi di una sola cifra.

3. Sono vere le proposizioni reciproche degli esercizii 1 e 2? Si dieno esempii.

4. Ogni numero della forma $\frac{n(n+1)}{2}$ (che per il teorema n.1. è un numero intero) non può essere terminato colle cifre 2, 4, 7, 9.

Si esamini come sarebbe terminato il prodotto $n(n+1)$ ammettendo possibile una delle precedenti cifre delle unità.

5. Ogni numero divisibile per 4 è la somma di due dispari consecutivi.

Si veda l'espressione dei numeri dispari *Arit. raz.*, parag. 42.

È vera la reciproca?

6. Di due numeri pari consecutivi, uno è divisibile per 4.

7. In qual caso un prodotto di due o più numeri è pari e in quali dispari.

8. Un numero è divisibile per 4 se la cifra delle unità aggiunta al doppio di quella delle diecine dà una somma divisibile per 4.

Dim.: Chiamando u la cifra della unità, d

quella delle diecine del numero dato N, e c il numero formato dalle rimanenti cifre si ha:

$$N = 100 \, . \, c + 10\,d + u = (100 \, . \, c + 8 \, . \, d) + \\ + (2\,d + u);$$

la prima parte $100\,c + 8\,d$ è un multiplo di 4 e quindi, se la seconda parte $2\,d + u$ sarà divisibile per 4, lo sarà il numero dato N.

È vera la proposizione reciproca?

9. Un numero è divisibile per 8 se la cifra delle unità, aggiunta al doppio della cifra delle diecine e al quadruplo di quella delle centinaia dà una somma divisibile per 8.

È vera la reciproca?

Si proceda come nel precedente esercizio.

10. Un numero è divisibile per 6, quando la cifra delle unità aggiunta a quattro volte la somma delle altre cifre dà un risultato divisibile per 6.

È vera la reciproca?

Si decomporrà il numero nella somma di tante parti quante sono le sue cifre e si osserverà che una potenza del 10 è eguale ad un multiplo di 6 più 4.

11. Un numero è divisibile per 12, quando aggiungendo al numero formato dalle ultime due cifre a destra il quadruplo della somma delle altre si ha un risultato divisibile per 12.

Si proceda come nell'esempio precedente osservando che ogni potenza del 10 incominciando dal 100 è un multiplo di 12 più il numero 4.

È vera la reciproca?

12. Due numeri a e b divisi per la loro differenza d dànno resti eguali.

È vera la reciproca?

Infatti chiamando d la differenza $a - b$, se le due divisioni dessero resti differenti, si avrebbero due eguaglianze della forma seguente:

$$a = d \times q + r \qquad b = d \times q_1 + r_1$$
$$r < d \qquad r_1 < d$$

le quali sottratte membro a membro, darebbero la seguente:

$$a - b = d(q - q_1) + (r - r_1)$$

ossia

$$d = d(q - q_1) + (r - r_1)$$

eguaglianza assurda tanto che sia $q > q_1$ come $q = q_1$.

13. Dedurre dal precedente teorema che la differenza $a^m - b^m$ è sempre divisibile per $a - b$.

Si ricorra al teorema 2, Cap. VIII, *Arit. raz.* e al precedente teorema.

14. La somma di un numero composto di un numero pari di cifre con quello rovesciato è sempre divisibile per 11.

Si veda il resto che da un numero diviso per 11 e poi si applichi il teorema 1° Cap. VIII, *Arit. raz.*

15. La somma di $2 \times n + 1$ interi consecutivi è sempre divisibile per $2 \times n + 1$.

Si chiami m il termine medio e si consideri la somma di due termini equidistanti da esso.

16. Se h è un numero pari, le espressioni.

$$h(h^2+20) \quad h(h^2-20) \quad h(h^2+4) \quad h(h^2-4)$$

sono divisibili per 8.

Si metta in evidenza il valore pari di h.

17. Nessun numero, eccettuato l'unità, può dividere due interi consecutivi.

18. Dati 4 numeri interi consecutivi, uno di essi è sempre divisibile per 4; si generalizzi questa proprietà.

19. La somma dei cubi di tre numeri interi consecutivi è sempre divisibile per il termine medio e per 9.

Si denoti con m il termine medio e si applichino agli altri due gli sviluppi dei cubi della somma e differenza di due numeri.

20. Se a e b non sono divisibili per 3, a^2-b^2 è divisibile per 3.

Si considerino i resti possibili delle divisioni di a e di b per 3.

21. Nella stessa ipotesi si provi che a^6-b^6 è divisibile per 9.

22. Qualunque sia il numero a, l'espressione a^3-a è sempre divisibile per 3.

23. L'espressione a^7-a è sempre divisibile per 7, qualunque sia il numero a.

Si considerino i resti possibili di a per 7 e il modo con cui risulta formato a^7.

24. L'espressione $10^n(9 . n - 1) + 1$ è sempre divisibile per 9.

Infatti sviluppando la parentesi si trova un multiplo di 9 diminuito di un numero formato colla sola cifra 9 e quindi divisibile per 9.

25. Un numero è divisibile per 15, quando aggiungendo al numero formato dalle due ultime cifre a destra, 10 volte la somma delle altre cifre, si ottiene un risultato divisibile per 15.

È vera la reciproca?

Si consideri che 100, 1000, ecc. sono multipli di 15 più 10.

26. L'espressione $10^n - 4$ è sempre divisibile per 6.

Si vegga l'osservazione dell'esercizio 10 di questo paragrafo nonchè le cifre che compongono $10^n - 4$.

27. Il prodotto di $4 \times n$ numeri interi consecutivi è sempre divisibile per $2^{3 \cdot n}$.

Si calcoli quanti sono i fattori pari e quanti quelli divisibili per 4, esercizio 6°.

b) M . C . D e *m . c . m* di più numeri.

1. Nella ricerca del *M . C . D* di due numeri col metodo delle divisioni successive, ciascun resto è minore della metà di quello che lo precede di due posti.

2. Il numero delle divisioni da eseguire per ottenere il *M . C . D* di due numeri non può superare la metà del più piccolo dei due numeri.

Si ricorra al precedente esercizio.

3. Il $M.C.D.$ dei tre numeri a, b, c è lo stesso di quello dei numeri $a+k\,c, b, c$ qualunque sia l'intero k.

È vera la reciproca?

4. Se nella ricerca del $M.C.D$ col metodo delle divisioni, due resti successivi R_1 ed R_2 cadono fra due termini successivi u_{n-1} ed u_n della serie di Fibonacci (vedi eserc. 1°, Cap. I), il resto seguente R_3 non potrà cadere fra gli stessi due termini e neppure fra i termini u_{n-2} ed u_{n-1}.

Infatti si ha:

$$R_1 = R_2 \,.\, q + R_3$$

od anche

$$R_3 = R_1 - R_2 \,.\, q \qquad (1)$$

ora se R_1 ed R_2 sono compresi fra i due termini successivi della serie $u_{n-1}\,u_n$ (*inclusi questi valori stessi*) si avrà

$$R_1 \leqq u_n \qquad R_2 \geqq u_{n-1}$$

e però se nella (1) invece di R_1 ed R_2 poniamo questi valori si avrà

$$R_3 \leqq u_n - u_{n-1}\,q < u_n - u_{n-1}$$

perchè aumentiamo il minuendo e diminuiamo il sottraendo

$$\text{ma } u_n - u_{n-1} = u_{n-2}$$

quindi

$$R_3 < u_{n-2}.$$

5. Dal teorema precedente risulta che fra due termini consecutivi della serie di Fibonacci o è compreso un solo resto, o se ve ne sono compresi due, nessuno sarà compreso fra i due precedenti.

Ora se a e b sono i due numeri dati $a > b$, ai quali abbiamo applicato il procedimento delle successive divisioni per la ricerca del *M. C. D* si consideri la serie finita e crescente.

$$(\alpha) \qquad R_n \, R_{n-1} \, R_{n-2} \ldots \qquad R_2 \, R_1 \, b$$

di cui il primo termine rappresenta il *M. C. D*; nella serie del Fibonacci vi sarà o un termine u_n eguale a b o due u_{n-1} ed u_n successivi che lo comprendono, poichè i numeri di una tal serie crescono indefinitamente; si consideri allora la serie del Fibonacci arrestata a un tal termine u_n

$$(\beta) \qquad u_0 \, u_1 \, u_2 \ldots \qquad u_{n-1} \, u_n.$$

Dalla osservazione fatta al principio di questo numero risulta che la serie finita (β) contiene almeno un termine di più della (α).

Allora se k è il numero delle cifre di b il termine u_n avrà o k o $k+1$ cifre; ricordando che al massimo nella serie di Fibonacci vi sono 5 termini successivi collo stesso numero di cifre (vedi eserc. 3°, Cap. I), si deduce che se u_n ha k cifre, vi saranno al massimo nella serie (β) $5 \times k$ termini, poichè 5 al massimo saranno quelli con una cifra, 5 quelli con 2, con 3, ecc.: e però in (α) vi saranno meno di $5 \times k$ termini.

Se invece u_n ha $k+1$ cifre, il termine u_{n-1} sarebbe l'ultimo della serie con k cifre e da u_0 ad u_{n-1} la serie (β) conterrebbe al massimo $5 \times k$ termini, e poichè da u_0 ad u_{n-1} la serie (β) contiene, per l'osservazione fatta, almeno tanti termini quanti la (α) conchiuderemo che in (α) non vi possono essere più di $5 \times k$ termini.

Ora il numero dei termini della serie (α) è superiore di una unità al numero delle divisioni eseguite per la ricerca del $M.C.D$ fra a e b; possiamo quindi enunciare il seguente teorema dovuto a Lamè (1844):

« Il numero delle divisioni da eseguire per la ricerca del $M.C.D$ di due numeri è inferiore a 5 volte il numero delle cifre con cui è formato il più piccolo dei numeri dati ».

6. Se i due numeri dati a e b sono due termini successivi della serie del Fibonacci, sussiste ancora il teorema precedente?

La risposta è affermativa e basta osservare cosa diventano i resti.

7. Trovare col metodo delle divisioni successive il $M.C.D$ dei due termini successivi 144 e 89 della serie del Fibonacci. Perchè i resti successivi sono i termini precedenti della serie? Generalizzare la questione.

8. Nella ricerca del $M.C.D$ di due numeri a e b ($a > b$) i resti successivi e quindi anche il $M.C.D$ sono differenze di due multipli di a e b.

Si sostituiscano nella prima eguaglianza che costituisce l'algoritmo del $M.C.D$ i valori dei resti dati dalle successive eguaglianze.

9. Quando i numeri a e b sono primi fra loro, che relazione ha luogo fra a, b. ed il loro $M.C.D$?

Corollario del teorema precedente.

10. Determinare un numero N che diviso per due dia per resto 1, per 3 dia per resto 2, per 4 dia per resto 3 e così via.

Poichè i resti sono inferiori di una unità al divisore, i numeri cercati devono essere multipli di 2, 3, 6, diminuiti di 1, ossia i numeri cercati aumentati di 1, devono essere multipli com. di 2, 3, ecc., quindi multipli del loro $m.c.m$ (*Arit. raz.* X, parag. 36).

11. Affinchè un multiplo di n numeri dati sia il più piccolo è necessario e sufficiente che dividendolo per ciascuno di essi, si ottengano dei quozienti primi fra loro, ossia che non abbiano divisori comuni eccetto l'unità.

12. Se P indica il prodotto di n numeri a, b, c,....l ed M un loro multiplo com. e se colla segnatura $D(a, b, c \ldots . l)$ si dinota il $M.C.D$ dei numeri a, b, $c \ldots . l$ si ha:

$$M = P \frac{D\left(\frac{M}{a}, \frac{M}{b}, \ldots . \frac{M}{l}\right)}{D\left(\frac{P}{a}, \frac{P}{b}, \ldots . \frac{P}{l}\right)}$$

Si esprima in due modi differenti il numero

$$D\left(\frac{M.P}{a}, \frac{M.P}{b}, \ldots \frac{M.P}{l}\right).$$

osservando che $a, b, c,$ — dividono per ipotesi tanto M quanto P.

13. Il prodotto di n numeri $a_1, a_2, \ldots\ a_n$ è eguale al loro $m.c.m.$ moltiplicato per il $M.C.D$ di tutti i prodotti ottenuti trascurandone uno.

Infatti chiamando m, il $m.c.m.$ dei numeri dati, sarà il prodotto $a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots \times a_n$ multiplo di m (*Arit. raz.* Cap. X, parag. 36) e però si avrà

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots \times a_n = m \times Q \qquad (1)$$

dove con Q si rappresenta il quoziente della divisione; ora poichè m è divisibile per ciascuno dei fattori del primo prodotto sarà Q (eser. 4°, Cap I, parag. 6) un divisore dei prodotti ottenuti dal primo trascurando successivamente un fattore, e però un divisore del loro $M.C.D.$ che chiameranno Δ per cui sarà

$$\Delta = Q \times Q_1$$

essendo Q_1 il quoziente della divisione di Δ per Q.

Ora il numero Δ divide anche il prodotto $a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots . a_n$ che è un multiplo dei precedenti per cui si ha anche

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_n = \Delta \times M. \qquad (2)$$

Da questa eguaglianza si deduce, poichè Δ

divide tutti i prodotti che si possono formare coi numeri dati meno uno, che M sarà divisibile per il numero restante e però sarà un multiplo comune dei numeri dati $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$ e però un multiplo del loro $m . c . m$ che abbiamo significato con m; si avrà dunque

$$M = m \times Q_2 \qquad (3)$$

ed osservando che per la (1) e la (2) si ha

$$m \times Q = \Delta \times M$$

si ricava

$$m \times Q = m \times Q \times Q_1 \times Q_2$$

dovrà quindi essere

$$Q_1 = 1 \qquad Q_2 = 1$$

allora la (3) ci dà $M = m$ e la (2) $\Delta = Q$ e questi valori sostituiti nella (1) o nella (2) ci dànno

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots . a_n = m \times \Delta \quad c . d . d .$$

14. Combinando i risultati ottenuti nei due esercizii precedenti si dimostri che il $m . c . m$ di n numeri $a_1, a_2 \ldots . a_n$ è eguale ad un loro multiplo qualunque M, diviso per il $M . C . D$ dei quozienti ottenuti dividendo questo multiplo per ciascuno dei numeri dati.

15. Si dimostri che il teorema n. 14 comprende quello del n. 13 come caso particolare e se ne dia l'espressione coi simboli prima indicati.

16. Dal teorema n. 14 si deduca che il prodotto di n numeri è eguale al prodotto del loro $M.C.D.$ per il $m.c.m$ dei prodotti formati coi numeri dati trascurandone uno successivamente.

Si sostituiscano ai numeri $a_1, a_2, \ldots a_n$ dell'esercizio precedente i numeri $\frac{P}{a} \frac{P}{b} \ldots$ dove P dinota il prodotto dei numeri dati ed al multiplo M lo stesso prodotto P.

17. Se sopra una linea chiusa qualunque si segnano n punti $0, 1, 2 \ldots, n-1$, e poi si congiungono di k, in k cominciando, ad es., dal punto segnato zero, $(k < n)$ si dimostri che si dovrà sempre ritornare al punto di partenza.

Si immagini percorrendo varie volte la linea chiusa di aggiungere il numero n al numero già segnato; allora al numero O sono sovraposti i numeri $n, 2.n, 3.n$, ecc., e poichè i punti corrispondenti all'operazione indicata sono O, k, $2k$, $3k$, bisognerà che un multiplo di k coincida con un multiplo di n.

CAPITOLO III.

I numeri primi.

I teoremi fondamentali di questa teoria si possono ridurre ai seguenti (*Arit. raz.* Cap. XI).

1. « Se un numero divide il prodotto di due fattori ed è primo con uno di essi deve dividere l'altro. »

2. « Se un numero primo divide un prodotto di fattori deve dividere almeno uno di essi. »

3. « Un numero composto non si può scomporre che in un modo solo in un prodotto di numeri primi. »

4. « Se un numero è divisibile separatamente per vari altri a, b, c, e questi sono primi fra loro due a due, esso sarà divisibile anche per il loro prodotto. »

Il teorema 1° è da riguardarsi fra i più importanti della teoria dei numeri; la sua dimostrazione in generale si dà ricorrendo alla teoria del *M. C. D.* Si conoscono altre dimostrazioni ma prolisse e artificiose; qui riportiamo una dimostrazione del Poinsot poco conosciuta, ma semplice ed elegante (vedi anche *Théorie des Nombres* del Tannery).

Considero la serie dei successivi multipli di un numero qualunque

$$o \quad a \quad 2a \quad 3a.... \quad ma.....$$

I resti che si ottengono dividendo per un numero m i termini della serie precedente si riprodurranno periodicamente nello stesso ordine; infatti poichè oltre al termine O vi sono certamente altri termini divisibili per m, supponiamo che il primo di essi sia $h\,a$ dove $h \leqq m$, allora il termine successivo $(h+1)\,a = h\,a + a$ darà diviso per m lo stesso resto del termine a; $(h+2)\,a = h\,a + 2\,a$ darà lo stesso resto di $2\,a$, e così $(2\,h-1)\,a = h\,a + (h-1)\,a$ darà lo stesso resto di $(h-1)\,a$, cioè nella ipotesi fatta i resti si riprodurranno periodicamente di h in h e però saranno divisibili per m solo quei termini che si ottengono moltiplicando a per un multiplo di h.

Si noti intanto che con questo procedimento resta dimostrato che ogni multiplo comune a due numeri a ed m è multiplo del loro minimo comune multiplo $h\,a$; dovrà intanto m essere divisibile per h cioè

$$m = h\,q.$$

Ora essendo $h\,a$ divisibile per m, avremo anche

$$h\,a = m\,.\,q_1$$

e sostituendo in questa eguaglianza ad m il valore precedente e poi semplificando per h, si ottiene

$$a = q \cdot q_1.$$

Questa eguaglianza combinata coll'altra $m = hq$ mostra che il numero q è un divisore comune ad a e ad m.

Ora se a ed m sono primi fra di loro sarà $q = 1$ cioè $h = m$ e il $m\,c\,.\,m$ di a e di m sarà il loro prodotto e però se il numero m dividerà il prodotto $a \times b$, dovrà b essere divisibile per m.

$a)$ Forma dei numeri primi.

Quando si divide un numero primo p per un divisore qualunque m non sono possibili che i resti primi con m e però si avranno tante espressioni possibili rispetto al divisore m quanti sono i numeri primi con m ed inferiori ad m.

1. Ogni numero primo maggiore di 2 è di una delle forme seguenti:

$$4\,.\,x + 1 \quad \text{o} \quad 4\,x - 1.$$

2. Ogni numero primo maggiore di 2 ha una delle forme seguenti:

$$8\,x + 1 \qquad 8\,x - 1 \qquad 8\,x + 3 \qquad 8\,x - 3.$$

3. Ogni numero primo maggiore di 3 è di una delle forme seguenti:

$$12\,x + 1 \qquad 12\,x - 1 \qquad 12\,x + 5 \qquad 12\,x - 5.$$

4. Si dieno esempi di numeri primi delle forme indicate negli esercizi 1, 2, 3.

5. Il quadrato di un numero primo maggiore di 3 è un multiplo di 24 aumentato di una unità.

Si parta dalle espressioni dell'esercizio 3 e se ne facciano i quadrati.

6. Si verifichi che, sostituendo nell'espressione

$$x^2 + x + 17$$

in luogo di x i numeri $0, 1, 2, \ldots. 16$ si ottengono numeri primi.

7. Si faccia altrettanto per l'espressione

$$2x^2 + 29$$

sostituendo per x i successivi numeri interi $0, 1, 2, 3, \ldots. 28$.

8. Si faccia altrettanto per l'espressione

$$x^2 + x + 41$$

sostituendo ad x i valori successivi $0, 1, 2, 3 \ldots. 40$.

Le tre espressioni date negli esercizi 6, 7, 8 furono proposte da Eulero (1772, *Memorie di Berlino*).

Esse non danno numeri primi per il valore immediatamente successivo a quello indicato, come è facile verificare.

9. Nessuna espressione della forma

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \quad \ldots. a_n x^n \qquad (1)$$

dove $a_0, a_1, \ldots. a_n$ rappresentano numeri interi può somministrare solo valori primi colla sostituzione di un numero intero qualunque al posto della x.

Infatti sia L un valore intero della x che sostituito nella formola precedente dà per risultato un numero primo p si avrà allora

$$p = a_0 + a_1 . L + a_2 L^2 + a_3 L^3 + \ldots . a_n L^n$$

poniamo allora nella (1) in luogo della x il valore $L + p . y$ dove y è un numero intero arbitrario; pensando che nello sviluppo della potenza $(L + p\, y)^r$ colla proprietà distributiva, ogni termine è un multiplo di p eccettuato il termine L^r, si otterrà come risultato della sostituzione un numero della forma

$$p + p . y$$

ossia un multiplo di p; quindi la formula (1) non può somministrare numeri primi per qualunque valore della x.

10. Un numero primo non può dividere due interi consecutivi.

11. Se a è un numero non divisibile per il numero primo p, si dimostri che i prodotti

$$a \quad 2 . a \quad 3a,\ 4a \ldots . (p - 1)\, a \qquad (1)$$

devono dare resti differenti divisi per p, e che quindi tali resti, astrazione fatta dall'ordine, devono coincidere coi numeri $1, 2, 3 \ldots . (p - 1)$.

Si proceda per assurdo ammettendo, se pure è possibile, che due prodotti divisi per p dieno eguali resti.

12. Si deduca dal teorema precedente e nelle stesse ipotesi su a e p che $a^{p-1}-1$ è sempre divisibile per p. (Teorema di Fermat).

(*Arit. raz.* Cap. VIII, teor. 2); si farà il prodotto dei numeri della serie (1) e dei rispettivi resti e si considererà la differenza dei due prodotti.

13. Nella stessa ipotesi su a e p, si dimostri che una delle due espressioni

$$a^{\frac{p-1}{2}}+1 \qquad a^{\frac{p-1}{2}}-1$$

deve essere divisibile per p.

Basterà osservare che $p-1$ è un numero pari e che però l'espressione $a^{p-1}-1$ si potrà mettere sotto forma di un prodotto. (*Arit. raz*, teor. 6, Cap. V).

14. Un numero della forma a^2+1 non può ammettere divisori primi della forma $4m-1$.

Infatti se fosse

$$a^2+1=(4m-1)\,.\,K$$

e $4m-1$ un numero primo, facendo la potenza $(2m-1)$ dei due numeri a^2 ed 1 la loro somma sarebbe anche divisibile per $4m-1$ perchè la somma delle potenze simili di esponente dispari è divisibile per la somma delle basi.

Si avrebbe quindi

$$a^{4m-2}+1=(4m-1)\,.\,q$$

ma per il teorema di Fermat, essendo $4m-$

numero primo, si ha anche

$$a^{4m-2} - 1 = (4m - 1) . Q$$

e però la differenza dei primi membri, cioè il numero 2, dovrebbe essere divisibile per il numero primo $4m - 1$; il che è assurdo.

15. Infiniti sono i numeri primi della forma $4 . x + 1$.

Infatti, se pure è possibile, sieno i numeri primi di tale forma limitati e rappresentiamoli con $p_1 p_2 . p_q$; formiamo il prodotto P; questo sarà chiaramente un numero della stessa forma e tale sarà anche il suo quadrato P^2.

Essendo quindi P^2 della forma $4x + 1$ sarà $P^2 + 1$ della forma $4x + 2$ e quindi divisibile per 2 ossia della forma $2(2x + 1)$ da cui si vede che $P^2 + 1$ ammette dei divisori primi impari che non potendo, per l'esercizio precedente, essere della forma $4m - 1$, saranno necessariamente della forma $4m + 1$ e però compresi fra i numeri $p_1 p_2 - p_q$; vi sarebbe allora un numero fra questi, che dividerebbe nello stesso tempo P^2 e $P^2 + 1$ il che è assurdo.

16. Infiniti sono i numeri primi della forma $4m - 1$.

Si faccia la differenza $1 \times 2 \times 3 \times \ldots p - 1$, dove p è un numero qualunque $\geqq 4$; tale differenza non può ammettere che divisori primi delle due forme $4m - 1$ o $4m + 1$; quelli della prima forma non possono essere in numero pari e neppure mancare, poichè in ambedue i casi la differenza avrebbe la forma $4x+1$; ci deve quindi essere almeno un divisore della differenza della forma $4m-1$ e maggiore di p, poichè nessun numero primo inferiore a p potrebbe dividere la differenza; essendo arbitrario il valore di p, si conchiude che infiniti sono i numeri primi della forma richiesta.

17. Infiniti sono i numeri primi della forma $6n-1$.

Si proceda come nell'esercizio 16.

18. In qual caso può x^2-a^2 rappresentare un numero primo?

Si decomponga la differenza dei due quadrati in un prodotto.

19. Si dimostri il teorema « la serie dei numeri primi è illimitata » facendo due prodotti parziali coi fattori primi supposti in numero finito e considerando la loro somma.

La dimostrazione è analoga a quella data nell'*Arit. raz.*, Cap. II, parag. 41.

20. Se la somma di due numeri è un numero primo, essi sono primi fra di loro.

21. Un numero primo non può essere eguale alla somma di una serie di numeri dispari consecutivi.

Escluso il caso impossibile che i numeri dispari sieno in numero pari, si esamini l'altro caso, si consideri il termine medio e la somma di due termini egualmente distanti da esso, si vedrà facendo poi la somma totale che essa si esprime mediante un prodotto e però non può rappresentare un numero primo.

22. Se colla notazione $p-1$ che si legge fattoriale di $p-1$, indichiamo il prodotto $1\times 2\times \times 3\times 4\ldots\times(p-1)$, dimostrare che se p è un numero composto, esso deve dividere tale prodotto, se invece è primo non lo può dividere.

Si deduca da questo teorema un criterio per giudicare se un numero dato è primo oppure composto.

23. Se p è un numero qualunque si ha la identità

$$p+\left(\frac{p-1}{2}\right)^2=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2$$

24. Si dimostri che non può esistere, nella ipotesi che p sia primo, altro che il numero $\frac{p-1}{2}$ soddisfacente alla relazione scritta di sopra, tale cioè che il suo quadrato aggiunto a p dia un altro quadrato.

Si supponga $p=a^2-b^2$ e si scomponga la differenza dei quadrati in un prodotto e poi si tenga presente la condizione che p è un numero primo.

25. Si dimostri per assurdo la reciproca del teorema precedente supponendo p dispari e si concluda da questi due ultimi teoremi una regola per decidere se un numero dato è primo o composto.

26. Il numero primo più grande conosciuto fino al 4 ottobre 1894 (vedi il giornale *Intermédiaire dés Mathematiciens*) è

$$2^{61}-1=2\ 315\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951$$

b) Criterii di divisibilità.

Questi criterii speciali di divisibilità sono in generale fondati sul terzo teorema accennato al principio di questo capitolo; od anche sul primo di essi combinato col terzo, nonchè su opportune scomposizioni dell'espressione del numero dato in somme parziali, alcune delle quali si riconoscono per la loro forma divisibili per il divisore dato. In generale si scomporrà il divisore dato nel prodotto di fattori primi fra loro a due a due (od anche in fattori primi) e poi si dimostrerà che l'espressione o il numero fissato, è divisibile per ciascun di essi; giova quindi rammentare i comuni criterii di divisibilità per 2, 3, 5, ecc.

Quando l'espressione data si presenta sotto forma di un prodotto di varii fattori, basterà provare che almeno uno di tali fattori è divisibile per uno dei numeri di composizione del divisore, e questo scopo si potrà raggiungere facendo tutte le possibili ipotesi sul resto della divisione dell'espressione data per il fattore di composizione del divisore.

Tali metodi appariranno più chiari con alcuni degli esercizii più avanti dimostrati.

1. Se a è un numero dispari primo con 3 e con 5 l'espressione

$$(a^2-1)\ (a^4-16)\ [a^2-(2n+1)^2]^2$$

è divisibile per 23040.

Si scomponga il numero 23040 in fattori primi. si avrà

$$23040 = 2^9 \times 3^2 \times 5.$$

Ciascuno dei tre fattori dell'espressione data essendo la differenza di due quadrati si potrà scomporre nel prodotto di due fattori; uno di questi proveniente dalla scomposizione di $a^4 - 16$ sarà $a^2 - 4$, ulteriormente decomponibile nel prodotto di due fattori, per cui ordinando tali fattori di scomposizione, l'espressione data assume quest'altra forma.

$$(a-2)\,(a-1)\,(a+1)\,(a+2)\,(a^2+4)$$
$$(a-2n-1)\,^2(a+2n+1)^2.$$

Essendo a numero dispari, $a-1$ ed $a+1$ sono numeri pari consecutivi e però uno sarà divisibile per 4 (eserc. 6, Cap. II, parag. *a*) ed il loro prodotto per $2 \times 4 = 2^3$, e poichè la differenza fra le basi dei due ultimi fattori, che sono pari, è rappresentata da $4n+2$, numero pari, ma non divisibile per 4, si riconosce facilmente che una di tali basi dovrà essere divisibile per 4, e però il prodotto divisibile per 2^3 ed il quadrato di tale prodotto per 2^6 e quindi l'espressione data è divisibile per $2^3 \times 2^6 = 2^9$.

Fra i 5 numeri consecutivi $a-2$, $a-1$, a, $a+1$, $a+1$ uno deve essere divisibile per 5 (eserc. 18, Cap. II) e poichè a per ipotesi non ha questa proprietà, dovrà essere divisibile per 5 uno dei primi quattro fattori componenti la espressione data nella seconda forma e tale sarà quindi l'espressione stessa.

Finalmente dei tre numeri consecutivi $a-2$ $a-1$ a, uno dovrà essere divisibile per 3 e siccome per ipotesi non è tale il numero a, lo dovrà essere uno dei numeri $a-2$, $a-1$, che compongono l'espressione data; per la stessa ragione dovrà essere divisibile per 3 uno dei numeri $a+1$, $a+2$ e però l'espressione data sarà divisibile per 3^2; ora essendo i tre numeri 2^9, 3^2, 5 primi fra loro due a due l'espressione data sarà divisibile per il loro prodotto ossia per 23040.

2. L'espressione $9^{3n}-8^{2n}$ è sempre divisibile per 665.

Si decomponga 665 in fattori primi e poi si metta 9^{3n} sotto la forma $27^{2n}=(35-8)^{2n}=(19+8)^{2n}$ e si considerino gli sviluppi di queste potenze.

Oppure si metta l'espressione data sotto la forma $3^{6n}-2^{6n}$ e si applichi l'esercizio 13, Cap. II.

3. Il prodotto

$$n(n+2)(5n+1)(5n-1)$$

è sempre divisibile per 24.

Si consideri il caso di n pari e di n dispari e si vedrà che vi sono sempre due fattori pari consecutivi; così pure si prova che un fattore deve essere divisibile per 3.

4. L'espressione

$$ab^2c(a^4-b^4)(b^4-c^4)$$

è sempre divisibile per 900.

Si metta l'espressione sotto la forma seguente:

$$a\,b\,(a^2+b^2)\,(a^2-b^2)\times b\,c\,(b^2+c^2)\,(b^2-c^2)$$

e si dimostri col metodo indicato, che ciascuno dei due fattori è divisibile per $2\times 3\times 5$,

5. L'espressione

$$2^{2n-1}\times 3^{n+2}+1$$

è divisibile per 11.

Basterà porre 2^{2n-1} sotto la forma $2^{2(n-1)+1}=$ $=4^{n-1}\times 2$ e $3^{n+2}=3^{n-1}.3^3$ per cui l'espressione prende la forma

$$12^{n-1}.54+1$$

allora si osservi che $12=11+1$ e $54=$multiplo di $11-1$.

6. L'espressione $9^n-8\,n-1$ è sempre divisibile per 64.

Si trovi il quoziente della divisione di 9^n-1 per $9-1$ ossia per 8 e poi si metta in evidenza questo fattore e si dimostri che l'altro fattore deve pure essere divisibile per 8.

7. L'espressione $n\,(n^2-49)\,(n^2+49)$ è sempre divisibile per 30.

Si mostrerà che l'espressione data è divisibile per i fattori primi di composizione del numero 30, supponendo tutti i resti possibili di n per tali fattori ed esaminando le forme che assumono gli altri due fattori.

8. L'espressione

$$a\,b\,(a^2-b^2)\,(a^2+b^2)$$

è sempre divisibile per 30.

9. L'espressione

$$n\,(n^2+5)$$

è sempre divisibile per 6.

10. Indicando con a la cifra delle unità di un numero dato nel sistema decimale e con b il numero restante, dimostrare che se la differenza $b-2\,a$ oppure $2\,a-b$ è divisibile per 7, tale sarà anche il numero dato.

Infatti il numero dato sarà rappresentato da

$$N=10\,.\,b+a$$

e moltiplicandolo per 5, avremo

$$5\,.\,N=50\,.\,b+5\,a=49\,b+7\,a+b-2\,a$$

e però essendo la somma dei primi due termini un multiplo di 7, se tale sarà la differenza degli altri due, sarà $5\,N$ divisibile per 7 ed essendo 7 primo con 5, sarà N divisibile per 7.

È vera la reciproca di questo teorema?

11. Colle stesse notazioni dell'esercizio precedente, si dimostri che se $b+4\,a$ è divisibile per 13, tale sarà anche il numero dato.

Si procede come nell'esercizio precedente moltiplicando il numero dato N per 4, numero primo con 13. È vera la reciproca?

12. Colle stesse segnature degli esercizi 10, 11, si dimostri che se $4\,a+3\,b$ è divisibile per 37, tale sarà anche il numero dato.

È vera la reciproca?

Si moltiplichi per 4 il numero dato N.

13. Indicando con a il numero formato dalle due ultime cifre a destra nel sistema decimale e con b il numero rimanente, si dimostri che se $a-2b$, o $2b-a$ è divisibile per 17, tale sarà anche il numero dato.

Infatti si ha

$$N=100\,b+a=85\,b+15\,b+a$$

ossia

$$N=\text{multiplo } 17+a-2\,b$$

ovvero

$$N=\text{multiplo } 17-(2\,b-a)$$

e però se $a-2b$, o $2b-a$ saranno divisibili per 17 tale sarà anche il numero N.

È vera la proposizione reciproca?

14. Ammesse le stesse notazioni dell'esercizio 13, si dimostri che se $a+8\,b$ è divisibile per 23, tale sarà anche il numero dato.

« Si troverà il massimo multiplo di 23 contenuto in 100. »

15. Ammesse le stesse notazioni dei due precedenti esercizi si dimostri che se $b-3a$ ovvero $3a-b$ sono divisibili per 43 tale sarà anche il numero dato.

È vera la reciproca?

Si moltiplichi per 3 l'espressione di N e si osservi che 300 è un multiplo di 43 diminuito di una unità.

16. Se $a+6b$ è divisibile per 47, dove a e b hanno lo stesso significato che negli esercizi 13, 14, tale sarà anche il numero dato.

È vera la reciproca?

Si troverà il massimo multiplo di 47 contenuto in 100.

17. Qual'è la forma generale dei numeri che divisi per 5 danno per resto 2 e divisi per 6 e per 9 danno per resto 5?

Ogni numero che diviso per 5 dà per resto 2 è della forma generale

$$5 . K+2$$

dove K è un numero intero qualunque; se vogliamo che diviso per 9 dia per resto 5, bisognerà che la somma dei resti delle due parti divise per 9 dia pure per resto 5 e poichè la seconda parte divisa per 9 dà per resto 2, bisognerà che la prima parte $5 . K$ divisa per 9 dia per resto 3 e poichè il prodotto di due numeri e il prodotto dei loro resti per 9 devono dare divisi per questo numero resti eguali (*Arit. raz.* Cap. VIII), poichè 5 diviso per 9 dà per resto 5, bisognerà che l'altro fattore K diviso per 9 dia per resto 6; K sarà dunque della forma $9h+6$, che sostituita nella precedente espressione in luogo di K ci dà l'espressione generale

$$45\,h+32$$

dei numeri che divisi per 5 danno per resto 2 e divisi per 9 danno per resto 5.

Volendo ora che questi numeri divisi per 6 dieno per resto 5, siccome la seconda parte divisa per 6, dà per resto 2, bisognerà che la prima cioè $45 . h$, divisa per 6 dia resto per 3; e poichè 45 diviso per 6 dà per resto 3, bisognerà che h diviso per 6 dia per resto 1; quindi h dovrà essere della forma $6 . m + 1$ dove m è un numero intero qualunque; sostituendo questa espressione di h nella penultima formula si avrà

$$270 . m + 77$$

che risponde alle condizioni imposte dalla questione.

18. Quale è la forma generale dei numeri che divisi per 5 danno per resto 2, divisi per 7 danno per resto 4, per 9 danno per resto 5 e sono inoltre divisibili per 8?

Si procederà come nell'esercizio precedente.

19. La quarta potenza di un numero divisa per 15 non può dare altri resti che 0, 1, 6, 10.

Siccome ogni numero rispetto al divisore 15 ha la forma $15 . q \mp r$ dove r al massimo avrà il valore 7, si farà la potenza quarta di tale espressione e si noterà che l'unico termine dello sviluppo non divisibile per 15 è r^4; sostituendo ad r i valori 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, facendo le quarte potenze e dividendole per 15 si avrà la dimostrazione del teorema.

20. Se un numero diviso per 15 dà per resto 6, altrettanto accadrà di qualunque sua potenza.

Infatti poichè sappiamo che n diviso per 15 dà per resto 6, n^k diviso per 15 darà lo stesso resto di 6^k; ora è evidente che 6^2 diviso per 15 dà per resto 6; ammettiamo dunque che ciò sia vero fino a 6^{n-1} e proviamo che lo sarà ancora per 6^n. Si ha $6^n = 6^{n-1} . 6$ e quindi il resto di questo prodotto diviso per 15, sarà per ipotesi quello di $6 \times 6 = 6^2$ ossia sarà il numero 6.

21. Se un numero diviso per 15 dà per resto 10 tale sarà qualunque sua potenza.

Si procederà come nell'esercizio 20.

22. La sesta potenza di qualunque numero divisa per 9 dà per resto o 0 o 1.

Si procede come nell'esercizio 19.

23. La terza potenza di qualunque numero divisa per 13 dà per resto o 0, o 1, 5, 8, 12.

24. La sesta potenza di qualunque intero divisa per 13 dà per resto 0, 1, 12.

È un corollario dell'esercizio 23 perchè la sesta potenza è il quadrato della terza.

c) M . C . D, m . c . m, divisori di un numero.

In questo paragrafo si considerano i metodi per ottenere il *M . C . D* ed il *m . c . m* di più numeri mediante la scomposizione in fattori primi; con questa scomposizione si ha anche modo di determinare tutti i divisori di un numero dato e di trovare il loro numero, come si vede nel parag. 45, Cap. XII dell'*Arit. raz.*

1. Come si riconosce se il numero dei divisori di un numero dato compresa l'unità ed il numero stesso è pari o dispari?

2. In quanti modi si può decomporre un numero dato nel prodotto di due fattori (parag. 45, Cap. XII).

3. In quanti modi si può scomporre un numero dato nel prodotto di due fattori primi fra di loro?

Sia il numero dato $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$; è evidente che i due fattori cercati non potranno contenere uno stesso numero primo, e però saranno tanti i modi di scomposizione quanti sono quelli di scomporre nel prodotto di due fattori il numero $a\,b\,c\,d$; a ciascun di questi fattori bisognerà poi attribuire l'esponente che esso ha nella composizione del numero N. Ora per l'esercizio 2° il numero dei modi di scomporre $a\,b\,c\,d$ nel prodotto di due fattori è dato da 2^4, e in generale da 2^n, se n è il numero dei fattori primi che compongono N; tale sarà quindi anche il numero possibile di maniere di scomporre N nel prodotto di due fattori primi fra di loro; volendo trascurare la coppia $1, N$ bisognerà diminuire un tal numero di una unità.

4. Trovare due numeri, conoscendone il $M.C.D$ ed il $m.c.m$.

Se M rappresenta il $m.c.m$ dei due numeri cercati e D il loro $M.C.D$ sarà necessario che D sia divisore di M, ossia

$$M = D \cdot q\,.$$

e ricordando il metodo per determinare M mediante D, avremo rappresentando con x, y i due numeri incogniti.

$$D \times q = \frac{x\,y}{D}$$

ossia

$$D^2 \cdot q = x \cdot y$$

e poichè x ed y devono essere divisibili entrambi per D ed i rispettivi quozienti devono essere primi fra loro, dividendo ambo i membri della precedente eguaglianza per D^2 si avrà

$$q = x^1 \cdot y^1$$

dove x^1 ed y^1 sono numeri primi fra loro.

Viceversa ad ogni scomposizione del numero noto q nel prodotto di due numeri primi fra di loro, corrisponde una coppia di numeri x, y che si ottengono da x^1, y^1 moltiplicandoli per D, soddisfacenti alle condizioni volute; quindi avremo tante coppie di numeri quanti sono i modi di scomporre un numero dato q nel prodotto di due fattori primi fra di loro (vedi eserc. 3° di questo parag.).

5. Il $M.C.D$ di due numeri a, b è eguale al numero dei multipli di b contenuti nella serie

$$a \quad 2\times a \quad 3\times a \quad 4\,a\ldots. \quad b\times a.$$

Sia infatti D il $M.C.D$ dei due numeri dati, e si abbia

$$a = D\times q \qquad b = D\times q_1.$$

Un termine qualunque della serie data sia $R\times a$; se esso è un multiplo di b, il quoziente ottenuto dividendo $R\times a$ per b ossia $R\times D\times q$ per $D\times q_1$, ossia $R\times q$ per q_1, dovrà essere un numero intero e poichè q e q_1 sono primi fra di loro, dovrà R essere divisibile per q_1 ·,; viceversa se R è divisibile per q_1, $R\times a$ sarà un multiplo di b; saranno quindi tanti i multipli di b contenuti nella serie data quanti sono i valori di R divisibili per q_1 e non superiori a b; essi sono....

$$q_1 \quad 2.q_1 \quad 3.q_1 \quad D.q_1,$$

cioè sono in numero di D c.d.d.

6. Come si riconosce mediante le divisioni se un multiplo comune di più numeri dati è anche il loro $m.c.m$?

7. Si dimostri che se nella formola $\dfrac{k - b\,y}{a}$

dove a, b, k sono numeri interi primi fra di loro, e così pure a e b, si sostituiscono alla lettera y i valori successivi $0, 1, 2, \ldots (a-1)$, per uno ed un solo di tali valori, il numeratore deve essere divisibile per il denominatore.

Si dimostrerà per assurdo che i resti di tali divisioni, che sono in numero di a, devono essere tutti differenti e quindi uno eguale a zero.

8. Si dimostri che l'eguaglianza $a . x + b y = k$ non può sussistere per valori interi di x e di y, quando essendo primi fra loro i tre numeri a, b, k, non sono tali i due numeri a, b.

9. Mediante l'esercizio 7° si indichi un metodo per risolvere in numeri interi l'eguaglianza $a x + b y = k$ quando tale risoluzione è possibile secondo l'esercizio 8°.

10. L'eguaglianza $a^b = b^a$. non è possibile in numeri interi differenti, se non nel caso che $a = 4$ $b = 2$ o viceversa.

Per l'esercizio 28, Cap. I (parag. a) si sa che l'eguaglianza

$$a^n = a \times n$$

non può sussistere per a ed n differenti e non inferiori al numero 2; se non per $a = n = 2$; dall'eguaglianza data si ricava che ogni divisore primo p di a $(a > b)$ deve essere anche divisore di b, e se α e β indicano rispettivamente gli esponenti di un tal fattore primo in a e in b, dovrà essere, per la $a^b = b^a$, $\alpha . b = \beta . a$. e poichè $a > b$, dovrà essere per quest'ultima eguaglianza

$$\alpha > \beta;$$

potendosi un tal ragionamento ripetere per ogni fattore primo di a si deduce che a deve essere divisibile per b, perchè contiene tutti i fattori primi di b con esponenti maggiori; sarà quindi

$$a = b \times q$$

sostituendo nella $a^b = b^a$ in luogo di a questo valore, si deduce

$$(b\,q)^b = b^{\,bq}$$

e quindi

$$b\,q = b^q;$$

ora non può essere $b < 2$ poichè in tal caso non può sussistere la eguaglianza $a^b = b^a$, e neppure $q = 1$ poichè allora sarebbe $a = b$, caso evidente, quindi l'ultima eguaglianza non può sussistere che per $b = 2 \,.\, q = 2$, da cui si deduce $a = 4$. *c.d.d.*

11. Trovare dei numeri interi che soddisfino la eguaglianza

$$x^2 + y^2 = \;{}^2.$$

Basterà cercare soluzioni dell'equazione, che sieno prime fra di loro, poichè da ognuna di esse se ne ricavano infinite altre moltiplicandole per un numero arbitrario k.

I valori di x e di y non possono in tale restrizione essere entrambi pari od entrambi dispari; infatti nel primo caso la somma dei quadrati sarebbe un numero pari e quindi tale dovrebbe essere anche z, contro l'ipotesi che x, y, z sieno primi fra di loro; nel secondo caso, essendo ciascuno dei numeri x ed y della forma $2n+1$, la somma dei loro quadrati sarebbe della forma $4.m+2$; ma i numeri di questa forma sono divisibili per 2 e non per 4, e però non possono essere quadrati perfetti.

Se dunque esistono soluzioni dell'equazione data in numeri interi primi fra di loro, dovranno essere x ed y uno pari e l'altro dispari; supponiamo, ad es., y pari della forma $2.k$ ed x dispari, è chiaro che z dovrà allora essere un numero dispari e quindi si avrà:

$$4k^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x)$$

ossia

$$k^2 = \frac{z+x}{2} \cdot \frac{z-x}{2}$$

rappresentando per ciò che si è detto $\frac{z+x}{2}$, $\frac{z-x}{2}$ numeri interi. Questi due interi $\frac{z+x}{2}$, $\frac{z-x}{2}$ devono essere primi fra di loro, poichè se vi fosse un divisore primo comune differente dall'unità, esso dovrebbe dividere la loro somma z e la loro differenza x, e quindi anche y, e però x, y, z, non sarebbero primi fra di loro.

Ne risulta che $\frac{z+x}{2}$ e $\frac{z-x}{2}$ debbono essere entrambi quadrati perfetti, e le loro basi che chiameremo p, q devono essere prime fra di loro; potremo quindi porre

$$\frac{z+x}{2}=p^2 \qquad \frac{z-x}{2}=q^2$$

da cui per via di addizione e di sottrazione si ricava

$$z=p^2+q^2. \qquad x=p^2-q^2$$

e quindi

$$y=2 \,.\, k=2 \,.\, p \,.\, q.$$

Viceversa è facile colla sostituzione, verificare che questi valori generali di x, y, z, quando p e q sieno primi fra di loro, dànno soluzioni intere dell'equazione data, purchè p e q siano scelti in modo che x, y, z sieno primi fra di loro.

Ora siccome il prodotto $p \times q$ non può avere nessun fattore comune coi numeri p^2-q^2, p^2+q^2, in causa dell'ipotesi che p e q sono primi fra di loro, si avrà la soluzione generale, se nessuno dei due numeri p^2+q^2, p^2-q^2 ammette il divisore 2, e a questa condizione si soddisfa scegliendo p e q l'uno pari e l'altro dispari.

12. Dalle formole trovate nel precedente esercizio si deduca la soluzione minima in numeri interi dell'equazione $x^2+y^2=z^2$.

13. Se x, y, z sono tre numeri interi primi fra di loro soddisfacenti alla equazione $x^2+y^2=z^2$, si dimostri che il prodotto $x \, . \, y \, . \, z$ è divisibile per 60.

Basterà, esaminando le condizioni imposte a p e q nell'esercizio 11, esprimere $x \, . \, y \, . \, z$ mediante i numeri p e q e dimostrare che l'espressione ottenuta è divisibile separatamente per 3, per 4 e per 5 che compongono il numero 60 e sono primi fra di loro due a due.

14. Se n punti dati sopra una linea chiusa (vedi eserc. 17, Cap. II, parag. *b*) si congiungono di k in $k, (k < n)$ e k è primo con n, dimostrare che si ritornerà al punto di partenza, dopo aver incontrato tutti i punti rimanenti.

15. Chiamando perfetto un numero, che è eguale alla somma dei suoi divisori, dimostrare che un numero primo non può essere perfetto.

16. Una potenza qualunque di un numero primo non può essere un numero perfetto.

Si esamini quali sono i divisori nella ipotesi fatta, e si dimostri il teorema per assurdo.

17. Affinchè $2^k - 1$ sia un numero primo è necessario che k sia numero primo. È sufficiente questa condizione?

Ammesso che k fosse numero composto, si faccia vedere fondandosi sulle divisibilità di $a^m - b^m$ per $a - b$ che anche il numero $2^k - 1$ dovrebbe ammettere dei divisori differenti dall'unità e da sè stesso.

d) Indicatore di un numero n.

Gauss nelle *Disquisitiones Aritmeticae* ha introdotto la notazione $\varphi(n)$ per dinotare il numero dei numeri primi inferiori ad n e primi con esso; così $\varphi(3)=2$ poichè i numeri inferiori a 3 e primi con 3 sono due e cioè i numeri 1 e 2; $\varphi(4)=2$ perchè i numeri inferiori a 4 e primi con 4 sono i numeri 1, 3. Alla funzione $\varphi(n)$ si dà anche il nome di indicatore di n. In questo paragrafo vogliamo raccogliere le principali proprietà della funzione $\varphi(n)$, trovarne l'espressione mediante i fattori primi di composizione del numero n, ed indicarne alcune applicazioni.

1. Dimostrare che se p è un numero primo si ha $\varphi(p)=p-1$.

2. Dimostrare che se p è un numero primo $\varphi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1$.

Basterà esaminare quali sono i soli numeri inferiori a p^α e divisibili per p e levare il loro numero da p^α.

3. Teorema fondamentale.

Se a e b sono numeri primi fra di loro si ha

$$\varphi(a\,.\,b)=\varphi(a)\,\varphi(b).$$

Indichiamo infatti con $\Psi(a)$ il numero dei numeri compresi fra 1 ed a e che hanno con a qualche divisore comune e lo stesso significato abbia il simbolo $\Psi(b)$ rispetto al numero b;

avremo allora

$$a = \varphi(a) + \Psi(a)$$
$$b = \varphi(b) + \Psi(b)$$
$$a\,b = \varphi(a\,b) + \Psi(a\,b).$$

Ora uno qualunque dei $\Psi(a\,b)$ numeri che hanno col prodotto $a\,b$ un divisore comune, sarà composto di fattori primi che entrano o tutti in a, e non in b, ovvero in b e non in a ovvero di fattori appartenenti in parte ad a e in parte a b, poichè essendo a e b, per ipotesi primi fra di loro, se non avesse fattori comuni nè con a nè con b sarebbe primo con ciascuno di essi e però primo col loro prodotto, contrariamente all'ipotesi; viceversa ogni numero inferiore ad $a\,b$ e soddisfacente ad una delle tre condizioni accennate, ha certamente con $a\,.\,b$ un divisore comune e però è uno dei numeri $\Psi(a\,b)$. I numeri della prima specie sono in numero di $\Psi(a)\,\varphi(b)$ ossia si ottengono moltiplicando ogni numero che ha qualche fattore comune con a con ciascuno di quelli che sono primi con b; i numeri della seconda specie sono $\varphi(a)\,\Psi(b)$, e quelli della terza specie in numero di $\Psi(a)\,\Psi(b)$ quindi avremo:

$$\Psi(a\,b) = \Psi(a)\,\varphi(b) + \Psi(b)\,\varphi(a) + \Psi(a)\,\Psi(b).$$

Ora moltiplicando le prime due eguaglianze e sostituendo al prodotto $a\,b$ la sua espressione data dalla terza si ha

$$\varphi(a\,b) + \Psi(a\,b) = \varphi(a)\,\varphi(b) + \Psi(a)\,\Psi(b) +$$
$$+ \varphi(a)\,\Psi(b) + \varphi(b)\,\Psi(a);$$

in questa sostituendo nel primo membro $a\ \Psi(a\,b)$ la sua espressione data dalla ultima eguaglianza e sopprimendo i termini eguali nei due membri, si ricava

$$\varphi(a\,b) = \varphi(a)\,\varphi(b).$$

Anche questo teorema, che è da ritenersi fra i più importanti dell'aritmetica superiore, fu in differenti maniere dimostrato dai diversi autori. Non credo inutile indicare una seconda interessante dimostrazione riportata in diversi trattati (ad es.: *Théorie des Nombres* del Tannery).

Sieno a e b due numeri primi fra di loro; ogni numero inferiore ad $a \times b$ si può mettere sotto la forma $a \,.\, x + y$, dove x può assumere i valori $0, 1, 2, 3 \ldots. (b-1)$ ed y i valori $0, 1, 2, 3 \ldots. (a-1)$; affinchè uno di tali numeri sia primo con a è necessario e sufficiente che alla y si attribuisca uno dei $\varphi(a)$ valori primi con a ed inferiori ad a.

Scelto uno di questi $\varphi(a)$ numeri per y, affinchè $a\,x + y$ risulti anche primo con b e quindi con $a \times b$, è necessario e sufficiente che x assuma certi $\varphi(b)$ valori particolari; infatti è facile vedere che dividendo i b numeri corrispondenti ai valori $0, 1, 2, \ldots. (b-1)$ della x si devono ottenere, per l'ipotesi di a primo con b, resti tutti differenti e saranno tutti e soli primi con b quei valori di $a \,.\, x + y$ ai quali corrispondono resti primi con b; e poichè questi sono in numero $\varphi(b)$ altrettanti saranno quelli che si possono ottenere combinando il valore scelto per y, primo con a, coi $(b-1)$ valori attribuiti alla x; ma i valori primi con a che si possono attribuire alla y sono $\varphi(a)$; ciascuno di questi ce ne dà $\varphi(b)$ primi con b e però con $a.b.$, quindi i numeri inferiori ad ab e primi con ab sono $\varphi(a).\varphi(b)$ cioè

$$\varphi(a.b) = \varphi(a).\varphi(b)$$

4. Si generalizzi la formula precedente ossia si dimostri che

$$\varphi(a\,b\,c\ldots.l) = \varphi(a)\,\varphi(b)\,\varphi(c)\ldots.\varphi(l)$$

quando i numeri $a\,b\,c\ldots.\,l$ sieno primi fra di loro a due a due

Basterà applicare ripetutamente il teorema 3, ricordando che quando un numero è primo con vari altri è primo anche col loro prodotto.

5. Applicando i precedenti esercizii si dimostri che se $n = a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ dove a, b, c, d, sono i fattori primi di composizione di n si ha

$$\varphi(n) = a^{\alpha-1} b^{\beta-1} c^{\gamma-1} d^{\delta-1} (a-1)(b-1)$$
$$(c-1)(d-1).$$

6. Supposta la conoscenza della forma precedente di $\varphi(n)$, la si applichi a dimostrare ancora la formola

$$\varphi(a\,b) = \varphi(a)\,\varphi(b)$$

quando a e b sono primi fra di loro.

7. Se n è un prodotto di fattori primi innalzati alla prima potenza sarà

$$\varphi(n^{m}) = n^{m-1} \varphi(n).$$

8. Se due numeri n, n_1 non sono primi fra loro, e se con k dinotiamo il prodotto dei fattori primi comuni presi coll'esponente uno, si avrà

$$\varphi(n \times n_1) = \varphi(n)\, \varphi(n_1) \frac{k}{\varphi(k)}.$$

Basta applicare la espressione di $\varphi(n)$ in fattori primi.

9. La somma degli indicatori di tutti i divisori di un numero $n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$, comprendendo fra i divisori l'unità e il numero stesso, è eguale ad n.

Si ammette in questo teorema che $\varphi(1) = 1$. Infatti (vedi *Arit. raz.*, Cap. XII, parag. 45) si sa che i divisori del numero dato n sono i termini del prodotto

$$(1 + a + a^2 + \ldots a^{\alpha}) \quad (1 + b + b^2 + \ldots b^{\beta}) \\ (1 + c + c^2 \ldots c^{\gamma})$$

e se ai termini componenti le differenti somme si sostituiscono i rispettivi indicatori, un tal prodotto rappresenterà la somma degli indicatori di n; questa sarà dunque data da

$$(1 + \varphi(a) + \varphi(a^2) + \ldots \varphi(a^{\alpha}))\ (1 + \varphi(b) + \varphi(b^2) + \\ + \varphi(b^{\beta})\quad (1 + \varphi(c) + \varphi(c^2) + \ldots \varphi(c^{\gamma}) + \ldots.$$

Ciò risulta dall'osservazione che i termini di ogni somma sono primi con ciascuno dei termini delle altre.

Sostituendo nell'ultimo prodotto le espressioni delle φ, avremo la somma degli indicatori dei divisori di n.

10. Se $\varphi(n)$ è un multiplo di $n-1$, il numero n è primo.

Infatti, se pure è possibile sia n un numero composto e poniamo

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$$

sarà allora

$$\varphi(n) = a^{\alpha-1} . b^{\beta-1} . c^{\gamma-1} (a-1)(b-1)(c-1)$$

ed essendo n ed $n-1$ numeri primi fra loro, $n-1$ non potrà dividere il prodotto $a^{\alpha-1} . b^{\beta-1} . c^{\gamma-1}$ e dovrebbe perciò dividere $(a-1)(b-1)(c-1)$; si avrebbe quindi una eguaglianza della forma seguente

$$(a-1)(b-1)(c-1) = (n-1) . q = \\ = (a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\gamma} - 1) . q$$

e poichè la differenza $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} - 1$ è divisibile per $a b c - 1$, si avrebbe pure una eguaglianza della forma seguente

$$(a-1)(b-1)(c-1) = (a b c - 1) . q_1 .$$

Ora questa ultima eguaglianza non è possibile, come si ricava dalla moltiplicazione membro a membro delle seguenti diseguaglianze

$$a-1 < a \qquad b-1 < b \qquad c-1 < c.$$

Quindi n non può essere nè un prodotto di numeri primi nè una potenza di un numero primo, e però sarà esso stesso un numero primo.

11. Se a è un numero primo con n ed inferiore ad esso, sarà tale anche il numero $n - a$.

12. Si dimostri che la somma $\sigma(n)$ dei numeri primi con n ed inferiori ad n è data dalla formola

$$\sigma(n) = \frac{1}{2} n \varphi(n).$$

Basterà notare che ad ogni numero a primo con n ed inferiore ad esso ne corrisponde un altro $n - a$ che ha la stessa proprietà e che sommato col precedente dà n.

13. Se $a, b, c \ldots.$ sono fattori di n primi fra di loro a due a due, ed inoltre $n = a\,b\,c \ldots.$ si avrà

$$\sigma(a)\,\sigma(b)\,\sigma(c) \ldots. = \frac{2^k}{k} \varphi(a)\,\varphi(b)\,\varphi(c) \ldots.$$

essendo k il numero di tali fattori.

Basta applicare l'esercizio 12 ai singoli fattori e poi moltiplicare membro a membro le differenti eguaglianze tenendo conto del teorema fondamentale sulle φ.

14. Dagli esercizii 12 e 13 si deduca nella stessa ipotesi sui fattori $a, b, c \ldots.$ la eguaglianza

$$\sigma(a)\,\sigma(b)\,\sigma(c) \ldots. = \frac{2}{n} \sigma(n).$$

15. Applicando le espressioni analitiche delle

φ si verifichi la identità

$$\varphi(n^m) = n^{m-1}\varphi(n).$$

16. Dall'esercizio 15 (per $m = 2$) e dal 12 si deduca la formola

$$\sigma(n) = \frac{1}{2}\varphi(n^2)$$

e la si esprima in parole.

17. Se a ed n sono numeri primi fra di loro, sarà $a^{\varphi(n)} - 1$ divisibile per n (Teorema di Eulero). Infatti se chiamiamo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$ i numeri inferiori ad n e primi con esso, i prodotti

$$(1) \qquad a\alpha,\ a\beta,\ a\gamma, \ldots.\ a\lambda$$

saranno essi pure primi con n ed i resti delle loro divisioni per n saranno tutti differenti fra di loro e differenti da zero; inoltre si riconosce facilmente che essi devono essere primi con n e però, astrazion fatta dall'ordine dovranno coincidere coi numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \lambda$.

Da ciò si deduce che il prodotto dei numeri della serie (1) e il prodotto di $\alpha, \beta, \gamma \ldots. \lambda$ devono dare divisi per n eguali resti (*Arit. raz.*, Cap. 8, Teor. 2°) e quindi la differenza di tali prodotti sarà divisibile per n; tale differenza è espressa da

$$(a^{\varphi(n)} - 1)\,\alpha\,\beta\,\gamma \ldots. \lambda;$$

ora siccome n è primo col prodotto $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots. \lambda$, esso dovrà dividere $a^{\varphi(n)} - 1$.

18. Dall'esercizio 17 si deduca il teorema di Fermat (vedi Cap. III, eserc. 12°, pag. 41).

19. Se $\alpha, \beta, \gamma \ldots . \lambda$ sono i numeri inferiori ad n e primi con n, il quadrato del loro prodotto diminuito di una unità è divisibile per n.

Infatti se dividiamo il prodotto P di tali numeri per ciascuno di essi, otteniamo $\varphi(n)$ quozienti differenti e primi con n; essi sono

$$(1) \qquad \frac{P}{\alpha} \; \frac{P}{\beta} \; \frac{P}{\gamma} \; \ldots . \; \frac{P}{\lambda}.$$

Ciascuno di questi diviso per n deve quindi dare un resto primo con n; tali resti devono poi essere differenti tutti fra di loro e però devono coincidere cogli stessi numeri $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$; da ciò si deduce che la differenza fra il prodotto dei numeri (1) e il prodotto P è un multiplo di n; si avrà dunque

$$\frac{P^{\varphi(n)}}{P} - P = n \, . \, k \, .$$

ed anche

$$P^{\varphi(n)} - P^2 = n \, . \, k \, . \, P$$

od anche

$$P^{\varphi(n)} - 1 - (P^2 - 1) = n \, . \, k \, . \, P$$

ma la prima parte $P^{\varphi(n)} - 1$ è divisibile per n essendo P primo con n (esercizio 18) quindi sarà $P^2 - 1$ divisibile per n.

20. Se n è primo e maggiore di 3 ed N

primo con n l'espressione $N^n - N$ è divisibile per $6 . n$.

Infatti si ha

$$N^n - N = N(N^{n-1} - 1);$$

il fattore $N^{n-1} - 1$ è divisibile per n per il teorema di Fermat; ora se N è divisibile per 2, sarà tale anche il prodotto $N(N^{n-1} - 1)$ e se N è dispari sarà pari l'altro fattore $N^{n-1} - 1$, quindi la espressione $N^n - N$ è sempre divisibile per 2.

Se N è divisibile per 3, sarà tale anche la espressione $N^n - N$, se poi N non ha tale proprietà, esso sarà della forma $3k \mp 1$ ed allora N^{n-1} essendo $n - 1$ pari, sarà eguale ad un multiplo di 3 aumentato di 1, e quindi $N^{n-1} - 1$ sarà divisibile per 3.

In ogni caso l'espressione $N^n - N$ è divisibile separatamente per i 3 numeri n, 2, 3 e però sarà divisibile per il loro prodotto $6 . n$.

CAPITOLO IV.

Esercizii sulle frazioni.

Quando sia proposto il paragone di varie frazioni rispetto alla loro grandezza, sarà necessario in generale ridurle ad uno stesso denominatore e confrontare fra loro i nuovi numeratori.

Il teorema fondamentale in questa teoria è che ogni frazione equivalente ad una irriducibile, ha i suoi termini equimultipli dei termini della frazione ridotta; sarà utile ancora ricordare che una frazione rappresenta il quoziente del numeratore per il denominatore.

1. Come varia una frazione $\frac{a}{b}$ quando ad ambo i termini si aggiunge o si toglie uno stesso numero?

Si ridurranno le due frazioni $\frac{a}{b}$ $\frac{a \mp m}{b \mp m}$ allo stesso denominatore; si distingueranno poi i due casi $a > b$ od $a < b$.

2. Se più frazioni sono equivalenti, sarà ancora equivalente ad esse la frazione che ha per numeratore la somma dei numeratori e per denominatore la somma dei denominatori.

Basterà rappresentare con q il valore comune delle frazioni date e con questo esprimere i numeratori.

3. Dal precedente teorema si deduca che il valore di una frazione non cambia moltiplicandone ambo i termini per uno stesso numero.

4. Se due frazioni sono equivalenti, sarà pure equivalente ad esse la frazione che ha per numeratore la differenza dei numeratori e per denominatore la differenza dei denominatori.

Si procederà come nell'esercizio 2.

5. In qual modo conviene scegliere gli interi $m \,.\, p$ affinchè sia

$$\frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+p}$$

Chiamando $\frac{\alpha}{\beta}$ la frazione irreducibile equivalente ad $\frac{a}{b}$ si troverà coll'ajuto dell'esercizio 3° e del teorema fondamentale che m e p devono essere equimultipli di α e β.

6. La frazione che ha per numeratore la somma dei numeratori di più frazioni date e per denominatore la somma dei rispettivi denominatori è compresa fra la più grande e la più piccola.

Infatti sieno

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \cdots\cdots \frac{a_n}{b_n}$$

n frazioni disposte in ordine crescente di grandezza; chiamiamo q il valore della frazione minore $\frac{a_1}{b_1}$ e q_1 il valore della maggiore $\frac{a_n}{b_n}$; si avranno allora le seguenti disuguaglianze

$$\frac{a_1}{b_1} = q \quad \frac{a_2}{b_2} > q \quad \frac{a_3}{b_3} > q \ldots\ldots \frac{a_n}{b_n} > q$$

$$\frac{a_1}{b_1} < q_1 \quad \frac{a_2}{b_2} < q_1 \quad \frac{a_3}{b_3} < q_1 \ldots\ldots \frac{a_n}{b_n} = q_1$$

dalle quali si deducono queste altre

$$a_1 = b_1 \cdot q \quad a_2 > b_2 \cdot q \quad a_3 > b_3 \cdot q \ldots\ldots \quad a_n > b_n \cdot q$$

$$a_1 < b_1 \cdot q_1 \quad a_2 < b_2 \cdot q_1 \quad a_3 < b_3 \cdot q_1 \ldots\ldots \quad a_n = b_n \cdot q_1$$

Sommando membro a membro le disuguaglianze della prima linea e poi quelle della seconda, si ha

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots \quad a_n > (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots b_n) \cdot q$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots \quad a_n < (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots b_n) \cdot q_1$$

le quali equivalgono a quest'altra

$$q < \frac{a_1 + b_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots b_n} < q_1$$

7. La frazione $\frac{n}{2n+1}$ è sempre irreducibile.

Si ragioni per assurdo e si vegga esercizio 15, Cap. II, parag. *a*.

8. La frazione $\frac{a+b}{a \, . \, b}$ è irreducibile se a e b sono primi fra loro.

Si proceda anche quì per assurdo supponendo che i due termini abbiano un divisore primo comune.

9. Due frazioni irreducibili non possono avere per somma un numero intero, se non quando hanno denominatori eguali.

Sieno $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ due frazioni irreducibili; la loro somma sarà rappresentata da

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a \, . \, d+b \, c}{b \, . \, d}$$

Ora affinchè la frazione somma rappresenti un intero è necessario e sufficiente che il numeratore sia divisibile per il denominatore $b \, . \, d$, e però dovrà anche essere separatamente divisibile tanto per b quanto per d; ma b dividendo $b \, . \, c$, dovrebbe allora dividere l'altra parte $a \, . \, d$ ed essendo per ipotesi primo con a, dovrebbe dividere d; ma per la stessa ragione dovrebbe d dividere b, ed affinchè queste due condizioni possano coesistere è necessario che sia $b=d$.

10. La somma di tre frazioni irreducibili non può essere un intero se uno dei denominatori contiene un fattore primo che non divide nessun degli altri due.

Si paragonerà la frazione il cui denominatore contiene un fattore primo che non divide gli altri due denominatori, colla somma di queste altre frazioni ridotte ai minimi termini e si applicherà l'esercizio 9.

11. Fra le frazioni proprie i cui denominatori non superano un numero intero dato n, quale è la più grande e quale la più piccola?

12. Se si dispongono in ordine di grandezza le frazioni proprie il cui denominatore non supera un numero dato n, la somma di due frazioni egualmente distanti dagli estremi è costante ed eguale a 1.

Sieno infatti

$$\frac{a_1}{b_1} \quad \frac{a_2}{b_2} \quad \frac{a_3}{b_3} \; \ldots\ldots \; \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \quad \frac{a_n}{b_n}$$

le frazioni soddisfacenti alla condizione data disposte in ordine di grandezza crescente; se dall'unità sottrarremo ad una ad una queste frazioni, otterremo delle differenze disposte in ordine decrescente e poichè tali differenze sono ancora frazioni soddisfacenti alla condizione del teorema, la serie delle differenze ottenute coinciderà colla stessa serie, scritta però in ordine inverso, cioè:

$$1-\frac{a_1}{b_1},\; 1-\frac{a_2}{b_2},\; 1-\frac{a_3}{b_3} \quad 1-\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}},\; 1-\frac{a_n}{b_n}$$

coinciderà colla

$$\frac{a_n}{b_n} \quad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \quad \frac{a_{n-2}}{b_{n-2}} \quad \frac{a_2}{b_2} \quad \frac{a_1}{b_1} \qquad (\alpha)$$

ora dalla forma (α) si riconosce che la somma di due frazioni egualmente distanti dagli estremi è eguale a 1.

13. Quale è la condizione necessaria e sufficiente perchè la frazione irreducibile $\frac{a}{b}$ sia un quadrato perfetto, ossia il quadrato di un'altra frazione?

Una frazione si dirà divisibile per un'altra quando il quoziente della prima per la seconda sia un numero intero; si dirà che una frazione è un divisore comune di più altre, quando i quozienti di ciascuna di queste per la prima sieno numeri interi; si chiamerà $M.C.D$ di più frazioni, la frazione più grande fra quelle che dividono le frazioni date; una frazione si dirà un multiplo comune di altre frazioni, quando ciascuna di queste divide la prima; si dirà minimo comune multiplo di più frazioni, la frazione più piccola divisibile per ciascuna delle date.

14. Quale è la condizione necessaria e sufficiente affinchè il quoziente di due frazioni irreducibili sia un numero intero?

Si diano esempi.

Sieno $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ due frazioni irreducibili; il loro quoziente è rappresentato da

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \, . \, d}{b \, c.}$$

Ora affinchè la frazione $\frac{a \, . \, d}{b \, . \, c}$ sia eguale ad un intero è necessario che il numeratore $a \, . \, d$

sia divisibile per il denominatore $b \, . \, c$ e quindi anche per b e per c separatamente. Ma essendo per ipotesi b primo con a, dovrà dividere d, e per la stessa ragione c dovrà dividere a. Se queste due condizioni sono soddisfatte è chiaro che il quoziente di $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$ è un numero intero, e però si potrà dire che « condizione necessaria e sufficiente affinchè una frazione $\frac{a}{b}$ irreducibile sia divisibile per un'altra irreducibile $\frac{c}{d}$, è che il denominatore della prima divida quello della seconda, e il numeratore della prima sia divisibile per quello della seconda.»

15. Dall'esercizio precedente si ricavi la regola per trovare il $M \, . \, C \, . \, D$ di più frazioni.

16. Dall'esercizio 14 si deduca una regola per trovare il $m \, . \, c \, . \, m$ di più frazioni.

17. Dividendo successivamente per 1, 2, 3, ... $2n$ il prodotto P dei primi $2 \, . \, n$ numeri della serie naturale e sommando i quozienti si otterrà un numero divisibile per $2n + 1$.

Si noti che la somma dei quozienti può essere rappresentata da

$$P\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \, . \, n}\right);$$

si raggruppino a due a due le frazioni egualmente distanti dagli estremi e allora si metterà in evidenza il fattore $2n + 1$.

Si chiama reciproco di un numero dato intero o frazionario, il numero che moltiplicato per il dato dà per prodotto 1; un tal numero quindi si otterrà dividendo 1 per il numero dato; e però se questo è una frazione, si otterrà il suo reciproco scambiando i termini.

18. Se $\frac{a}{b}$ è minore o maggiore di 1, il suo reciproco è maggiore o minore dell'unità.

19. La somma di due numeri reciproci non è mai minore di 2.

Infatti dalla ipotesi di $a > b$. si ha

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{a-b}{b} \qquad \frac{b}{a} = 1 - \frac{a-b}{a};$$

sommando membro a membro poichè

$$\frac{a-b}{b} > \frac{a-b}{a}$$

si vede che

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2;$$

il solo caso in cui la somma ha il valore 2 si ha per $b = a$ nel qual caso la frazione data è eguale all'unità.

20. Indicando con $E\ (x)$ la parte intera contenuta nel numero frazionario x si ha

$$E\left(\frac{2\,p}{a}\right) - 2\,E\left(\frac{p}{a}\right) = \begin{matrix}1\\0\end{matrix}$$

secondochè

$$E\left(\frac{2p}{a}\right) \text{ è dispari o pari.}$$

Infatti se $E\left(\frac{2p}{a}\right)$ è un numero pari $2q$ si avrà

$$2p = a \times 2q + R \qquad R < a$$

e però

$$p = a \times q + \frac{R}{2}$$

quindi essendo $\frac{R}{2} < a$, q rappresenta il quoziente intero di $\frac{p}{a}$ ossia $E\left(\frac{p}{a}\right)$, si ha quindi

$$E\left(\frac{2p}{a}\right) - 2E\left(\frac{p}{a}\right) = 0$$

Si procede nello stesso modo quando il quoziente $E\left(\frac{2a}{p}\right)$ è della forma $2q+1$.

21. Qualunque sieno i numeri interi x ed n si ha:

$$E(x) + E\left(x + \frac{1}{n}\right) + E\left(x + \frac{2}{n}\right) + \\ + \ldots E\left(x + \frac{n-1}{n}\right) = E(n \,.\, x).$$

Il primo membro dell'eguaglianza da dimostrare si può scrivere

$$E(x)+E\left(\frac{n\,x+1}{K}\right)+E\left(\frac{n\,x+2}{n}\right)+$$
$$+\dots E\left(\frac{n\,x+(n-1)}{n}\right)$$

Nessuna delle frazioni $\frac{n.\,x+R}{n}$ (per $R=1$, 2, 3, ... $(n-1)$ può rappresentare un numero intero, perchè il denominatore n divide la prima parte del numeratore, ma non la seconda che è più piccola di n; i resti delle divisioni si riconosce facilmente che devono essere tutti differenti fra di loro e però potremo porre

$$n\,x+1=n\,.\,q_1+R_1$$
$$n\,x+2=n\,.\,q_2+R_2$$
$$n\,x+3=n\,.\,q_3+R_3$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$n\,.\,x+(n-1)=n\,.\,q_{n-1}+R_{n-1}$$

e i resti $R_1, R_2, \dots R_{n-1}$, astrazione fatta dall'ordine, dovranno coincidere coi numeri $1, 2, 3, \text{-}(n\text{-}1)$.

Sommando membro a membro le precedenti eguaglianze e togliendo i termini eguali, si ha:

$$(n-1)\,n\,.\,x=n\,(q_1+q_2+\dots q_{n-1})$$

e quindi dividendo per n

$$q_1+q_2+\dots q_{n-1}=x\,(n-1)$$

ossia

$$E\left(x+\frac{1}{n}\right)+E\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots E\left(x+\frac{n-1}{n}\right)=$$
$$=x(n-1);$$

aggiungendo al primo membro $E(x)$ ed al secondo x che sono eguali perchè x è intero, si avrà la formula richiesta poichè nel secondo membro si otterrà nx che è eguale ad $E(n.x)$.

22. Dimostrare che per ridurre più frazioni al $m.c$ denominatore, si può prima ridurle ad un denominatore comune qualunque e poi dividere i termini di ciascuna frazione risultante per il più $g.c.d$ di tutti i numeratori e del denominatore comune.

Si vegga *Arit. raz.*, Cap. XIII, parag. 51.

23. Mediante il teorema espresso nel n.° 22 di questo capitolo, si dimostri l'eserc. 13, Cap. II, parag. 6, che cioè « il prodotto di n numeri a_1, $a_2 \ldots a_n$ è eguale al loro $m.c.m$ moltiplicato per il $M.C.D$ di tutti i prodotti ottenuti tralasciandone uno.

Basterà applicare l'esercizio 22 alle frazioni $\frac{1}{a_1}\ \frac{1}{a_2} \ldots \frac{1}{a_n}$ riducendole ad avere prima per denominatore comune il prodotto dei denominatori.

24. Qualunque frazione può ridursi ad avere per denominatore la differenza di due potenze del 10.

È fondato sul teorema che esiste sempre un multiplo di un numero dato eguale alla differenza di due potenze del 10, Cap. I. parag. 9

25. Nella conversione di una frazione ordinaria in decimale non può darsi che il periodo sia composto di una sola cifra eguale a 9.

Si proverà che si avrebbe l'eguaglianza assurda $R \times 10 = B \times 9 + R$ dove R è il resto che si ripete e B è il denominatore della frazione.

26. Due frazioni ordinarie equivalenti generano il medesimo numero decimale finito o periodico. È vera la proposizione reciproca?

Si esamini il procedimento per la conversione di una frazione ordinaria in decimale e si provi che debbono essere eguali rispettivamente le cifre decimali dello stesso ordine nelle conversioni delle due frazioni.

27. La somma delle frazioni $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ convertita in decimale dà sempre un numero periodico misto.

Infatti, preso come denominatore comune il prodotto dei tre denominatori delle frazioni date, la loro somma si può mettere sotto la forma seguente

$$\frac{3\,n\,(n+2)+2}{n\,(n+1)\,(n+2)}$$

Ora il denominatore essendo il prodotto di tre interi consecutivi è divisibile per 3, mentre invece il numeratore essendo un multiplo di 3 aumentato di 2, non ha tale proprietà; inoltre se n è dispari, sarà $n+1$ pari e però il denominatore divisibile per 2, mentre invece il numeratore, essendo il prodotto di tre dispari aumentato di 2, è un numero dispari; se invece n è pari, il denominatore è divisibile per 4, ma il numeratore solamente per 2. Si vede dunque che riducendo la frazione somma ai minimi termini, vi sarà sempre nel denominatore il fattore primo 3 ed anche il fattore primo 2, e quindi convertendola in numero decimale, si avrà sempre un numero decimale periodico misto.

28. Quando il denominatore di una frazione irreducibile non contiene i fattori 2, 3, 5, il periodo del numero decimale periodico semplice è divisibile per 9.

Basterà scrivere la frazione generatrice equivalente alla data e ricordare il teorema del parag. 51, Cap. XIII dell'*Arit. raz.*

29. Se una frazione ordinaria pura ed irreducibile ha il denominatore primo con 9, e dà origine ad un numero decimale non finito, il periodo di questo numero decimale deve essere divisibile per 9.

Si procede come nell'esercizio 28 distinguendo però i due casi in cui il numero decimale generato sia periodico semplice o misto e in questo secondo caso si ricorrerà al criterio di divisibilità per 9 (*Arit. raz.*, Cap. VII).

30. Il prodotto di due frazioni ordinarie irreducibili, ciascuna delle quali dà origine ad un numero decimale periodico semplice, è una frazione che dà origine ad un numero decimale della stessa specie.

Si esamineranno i fattori primi che compongono il denominatore della frazione prodotto.

31. La frazione generatrice di un numero decimale periodico misto con parte intera eguale a zero e col periodo formato della sola cifra 9, ha per denominatore l'unità seguita da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo e per numeratore questo antiperiodo aumentato di 1.

Basta scrivere la frazione generatrice colla regola ordinaria, mettere poi in evidenza nel numeratore il fattore 9 e dividere poi per questo numero ambo i termini della frazione.

32. Se due frazioni irreducibili $\frac{a}{b}$ $\frac{a_1}{b_1}$ danno origine a numeri decimali periodici, i periodi hanno il medesimo numero di cifre, quando i denominatori sono eguali o non differiscono che per i fattori primi 2 o 5 od entrambi.

Infatti se $b = b_1$, ciascuno potrà essere primo con 10 ed allora ciascuna delle frazioni darà luogo ad un numero decimale periodico semplice; sia p il numero delle cifre componenti il periodo della prima frazione e p_1 il numero analogo per la seconda. Poichè il periodo incomincia colla prima cifra dopo la virgola ed è composto di p cifre decimali, risulta dal procedimento che si segue per la conversione in decimale che i due numeri a, e $a \times 10^p$ devono, divisi per b, dare lo stesso resto e quindi la loro differenza $a(10^p - 1)$ deve essere divisibile per b e poichè b è primo per ipotesi con a, dovrà dividere $10^p - 1$, e quindi anche il suo multiplo $a_1 \times (10^p - 1)$ ma poichè questo prodotto è la differenza fra i due numeri $a_1 . 10^p$ ed a_1 si conchiude che questi, divisi per b e quindi per b_1 devono dare resti eguali; dunque p_1 non può essere superiore $a\,p$; ma ragionando nello stesso modo partendo dalla frazione $\frac{a_1}{b_1}$ si conchiuderebbe che p non può superare p_1, e però $p = p_1$.

Se poi i denominatori b e b_1 contenessero i fattori 2 o 5, si isolerebbe a denominatore una potenza del 10 moltiplicando ambo i termini per opportune potenze del 2 e del 5 e si ragionerebbe quindi nello stesso modo sulle frazioni rimanenti i cui denominatori dovrebbero essere eguali; la divisione per una potenza del 10, equivalendo ad uno spostamento della virgola, non altera il numero delle cifre della parte periodica.

33. Se $\frac{a}{b}$ è una frazione irreducibile pura che dà origine ad un numero decimale periodico semplice di p cifre, la frazione $\frac{b-a}{b}$ darà essa pure origine ad un numero decimale periodico semplice il cui periodo sommato con quello della $\frac{a}{b}$ darà per risultato $10^p - 1$.

Si ricorra all'esercizio precedente scrivendo le generatrici delle due frazioni e poi si osservi che

$$\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b} = 1$$

34. Se p è un numero primo differente dal 2 o dal 5, si dimostri, senza ricorrere alle generatrici, che è possibile convertire $\frac{1}{p}$ in una frazione della forma $\dfrac{m}{\frac{p-1}{10-1}}$; si dimostri ancora che se m è l'esponente minore, per cui $10^{m-1}-1$ è multiplo di p, dovrà $p-1$ essere divisibile per $m-1$ e il numeratore corrispondente al denominatore $10^{m-1}-1$ sarà il periodo del numero decimale periodico.

Si ricorra all'esercizio 13, Cap. III (conseguenza del Teorema di Fermat) e alla condizione necessaria e sufficiente affinchè 10^q-1 sia divisibile per 10^p-1.

35. Dall'esercizio precedente si deduca che il periodo a cui dà luogo la $\frac{1}{p}$ convertita in decimali, quando p è differente dal 2 e dal 5 deve essere divisibile per p.

36. Dal precedente esercizio si deduca un modo per determinare l'ultima cifra del periodo.

Basterà chiamando m il periodo osservare la relazione

$$10^{s-1}-1=m\,.\,p$$

e considerare che il primo membro è un numero formato colla cifra 9 e che è conosciuta la cifra con cui termina il numero primo p.

37. Se il numero delle cifre del periodo della frazione $\frac{1}{p}$ dove p è primo differente da 2 e da 5, è pari ed eguale a $2K$, il resto K che si ottiene nella conversione in decimale è eguale a $p-1$; è vera anche la reciproca.

Infatti poichè il periodo è composto di $2\,.\,k$ cifre, sarà $10^{2k}-1$ divisibile per p ma $10^{2k}-1=$

$=(10^k+1)(10^k-1)$ e però o l'uno o l'altro dei fattori sarà divisibile per p.

Ora se con R rappresentiamo il resto ottenuto nella conversione decimale di $\frac{1}{p}$ dopo aver trovato K cifre al quoziente, avremo

$$\begin{aligned} 10^k &= \text{multiplo di } p+R \\ 10^k+1 &= \text{multiplo di } p+(R+1) \\ 10^k-1 &= \text{multiplo di } p+(R-1) \end{aligned}$$

dovrà quindi o $R+1$ od $R-1$ essere divisibile per p; ora essendo $R<p$ dovrebbe $R-1$ essere eguale a zero e però $R=1$, il che non può essere perchè allora il periodo sarebbe di K sole cifre, contro l'ipotesi; dovrà dunque essere $R+1=p$ e quindi $R=p-1$ avremo quindi

$$\frac{10^k}{p}=q+\frac{p-1}{p}$$

Ora se R_h con $h<K$ è il resto che si ottiene dopo aver determinato h cifre del periodo cioè dopo aver diviso 10^h per p, poichè 10^k dà per resto $p-1$, il prodotto $10^h . 10^k=10^{k+h}$ darà lo stesso resto di $R_h(p-1)$ (*Arit. raz.*, Cap. VIII, parag. 30, teorema 2°) quando lo si divide per p; ora r_h per $h<K$ non potendo avere nè il valore $p-1$ nè il valore 1, potrà assumere i valori 2, 3, 4, — $(p-2)$ e però i resti corrispondenti alle cifre del quoziente di posto $K+1$, $K+2$.... ottenuti dividendo per p i prodotti, saranno gli

stessi di quelli di

$$2(p-1) \quad 3(p-1) \ldots . (p-2) \quad (p-1)$$

ma questi prodotti si possono scrivere

$$p+(p-2) \quad 2p+(p-3) \quad (p-3)p+ \quad 2$$

e però tali resti sono

$$p-2 \quad p-3 \quad p-4 \ldots . 2;$$

quindi se alla cifra del periodo di posto $h < K$ corrisponde un resto R_h a quella di posto $K+h$ corrisponde il resto $p-R_h$.

Il resto ottenuto dopo $2K$ cifre del periodo dovendo essere differente dai precedenti sarà quindi necessariamente 1, e però il periodo è composto di $2K$ cifre; da questa dimostrazione si ricava ancora il seguente teorema:

« Se convertendo la frazione $\frac{1}{p}$ in decimale, dove p è numero primo differente dal 2 e dal 5, il periodo è composto di un numero pari di cifre, la somma di due resti che occupano il medesimo posto nei due semiperiodi è costante ed eguale al denominatore p.

38. Si indichi quale vantaggio pratico può avere il teorema precedente.

39. Sempre colle notazioni dei precedenti esercizii, se $2K$ è il numero delle cifre del periodo, il resto corrispondente alla K^{m} cifra sarà

$p-1$ e però si avrà

$$10^k = p \cdot q + (p-1) \qquad (1)$$

chiamando q il quoziente della divisione, che costituirà quindi il semiperiodo. Moltiplicando ambo i membri per 10^k avremo

$$10^{2k} = 10^k \,.\, q \,.\, p + 10^k (p-1)$$

e quindi

$$10^{2k} = 10^k \,.\, q \,.\, p + 10^k \,.\, p - 10^k.$$

Sostituendo nel terzo termine del secondo membro a 10^k la sua espressione data da (1) si ha:

$$10^{2k} = 10^k \,.\, q \,.\, p + 10^k \,.\, p - pq - p + 1$$

da cui

$$10^{2k} - 1 = 10^k \,.\, q \,.\, p + p\,[(10^k - 1) - q\,]\,;$$

ora il quoziente di $10^{2k} - 1$ per p sappiamo che rappresenta il periodo e questo sarà dato dall'espressione

$$10^k \,.\, q + [\,(10^k - 1) - q\,]$$

e siccome $10^k - 1$ è un numero formato di tanti 9 quante sono le cifre del semiperiodo si riconosce dalla forma precedente del periodo che le cifre del secondo semiperiodo sono rispettivamente i complementi a 9 delle cifre che occupano il medesimo posto nel primo semiperiodo.

Abbiamo quindi il seguente teorema:

« Se convertendo $\frac{1}{p}$ in decimale quando p è numero primo differente dal 2 e dal 5 il periodo è composto di un numero pari di cifre, la somma delle cifre che occupano lo stesso posto nei due semiperiodi è costante ed eguale a 9. »

40. Qualunque sia il denominatore p della frazione irreducibile $\frac{m}{p}$, purchè primo con 10, il periodo a cui essa darà luogo convertendola in decimale avrà lo stesso numero di cifre di quello a cui dà luogo la frazione $\frac{1}{p}$.

Chiamando K e K^1 il numero delle cifre dei rispettivi periodi si dimostrerà che K non può essere nè minore, nè maggiore di K^1 osservando che p deve dividere 10^k-1 e $10^{k^1}-1$.

41. Se p è un numero primo differente dal 2 e dal 5 e se la frazione $\frac{1}{p}$ ha un periodo composto di $p-1$ cifre, anche la frazione pura ed irreducibile $\frac{m}{p}$ darà luogo ad un periodo composto colle stesse cifre ma in ordine differente.

Basterà ricordare l'esercizio 40, 38 e il procedimento tenuto per la conversione in decimale.

42. Data la serie indefinita di frazioni

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots\dots \frac{1}{p} \dots\dots$$

si dimostri che è possibile prendere un numero di termini abbastanza grande perchè la loro somma superi qualsivoglia quantità fissata.

Basterà raggruppare i termini nell'ordine dato ad 1, 2, 2^2, 2^3... formando delle somme parziali; si dimostrerà che ciascuna di tali somme è superiore ad $\frac{1}{2}$ e però sostituendo ad esse questo valore minore, si dimostrerà che è possibile prendere un multiplo di $\frac{1}{2}$ tale che superi la quantità fissata.

CAPITOLO V.

Estrazione di radice quadrata.

In questo Capitolo sono esposti alcuni metodi che servono per la calcolazione approssimata delle radici quadrate; non si è creduto di dare a tale argomento un largo sviluppo, poichè esso richiederebbe la completa conoscenza della teoria degli irrazionali, mentre nei limiti dei programmi assegnati alla nostra scuola secondaria basta accennare alla radice quadrata. A ben comprendere alcuni degli esercizii svolti in questo Capitolo giova richiamare i Capitoli 25, 26 e 27 della *Arit. raz.* e tenere presente che le leggi formali delle operazioni aritmetiche svolte per i numeri interi e frazionari valgono anche per i numeri irrazionali.

1. Se un numero intero ha $2n$, ovvero $2n-1$ cifre, la sua radice quadrata a meno uno ha n cifre.

Si potrà ricorrere alla regola dell'estrazione di radice quadrata ovvero all'osservazione che un numero di $2n$ cifre è compreso fra 10^{2n-1} e 10^{2n} od anche fra 10^{2n-2} e 10^{2n} che sono quadrati perfetti di cui si può determinare la radice.

2. Se un numero $n = a \cdot b^2$, dove a non è quadrato perfetto, è lecito per estrarre la radice a meno uno, estrarre da a la radice a meno uno e moltiplicarla per b?

Quale valore approssimato della radice quadrata di a si dovrebbe calcolare affinchè, moltiplicato per b rappresentasse la radice quadrata di $a\,b^2$ con un errore inferiore ad 1?

3. Se $a > b$ qualunque sieno questi due numeri, sarà $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ e viceversa.

4. Quale è il valore massimo che può avere il resto R ottenuto dalla estrazione di radice quadrata di un numero intero N?

Chiamando a la radice a meno uno, si dedurrà dalla limitazione

$$a^2 \leqq a^2 + R < (a+1)^2$$

che R può al massimo eguagliare il doppio della radice a meno uno.

5. Se a rappresenta la radice a meno uno di un numero intero N non quadrato perfetto, ed R il resto dell'operazione si dimostri che

$$a + \frac{R}{2a} > \sqrt{N}.$$

Col simbolo $\sqrt{N}$ si dinota il valore esatto della radice quadrata, che è un numero irrazionale.

Si confronteranno i quadrati delle due espressioni.

6. Colle stesse notazioni dell'esercizio 5, si provi che $\left(a+\frac{R}{2a}\right)^2$ supera al massimo di una unità il numero N.

Si svilupperà un tale quadrato, e poi si terrà presente l'esercizio 4.

7. Per estrarre la radice quadrata a meno uno da un numero frazionario o decimale, basta estrarre la radice dalla parte intera.

Basta pensare alla definizione di radice quadrata a meno uno di un numero intero.

8. Per estrarre la radice quadrata a meno uno da un numero intero si può tener conto di più della metà delle cifre a sinistra, sostituire alle rimanenti degli zeri ed estrarre dal numero risultante la radice a meno uno per eccesso.

Sia infatti a il numero intero dato di n cifre e b il numero da esso ottenuto sostituendo degli zeri a meno della metà delle cifre a destra; poichè $b \leqq a$ sarà $\sqrt{b} \leqq \sqrt{a}$ e però chiamando d la differenza fra le radici esatte di tali numeri (d *sarà zero quando* a = b) si avrà

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}+d$$

e però quadrando ambo i membri

$$a=b+2d\sqrt{b}+d^2$$

da cui

$$a \geqq b+2d\sqrt{b}$$

e

$$\frac{a-b}{2\sqrt{b}} \equiv d$$

ma i numeri a e b avendo per ipotesi più della metà delle cifre a sinistra in comune, la differenza $a-b$ avrà meno della metà delle cifre di a; invece la radice quadrata *anche approssimata* di b contiene almeno la metà delle cifre di a (eserc. 10) quindi $a-b<\sqrt{b}$ e però la frazione $\frac{a-b}{\sqrt{b}}<1$ e la frazione

$$\frac{a-b}{2\sqrt{b}}<\frac{1}{2}$$

da ciò si deduce che $d<\frac{1}{2}$ e però $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\frac{1}{2}$.

Se ora rappresentiamo con m la radice a meno uno per eccesso di $\sqrt{b}$ si avrà

$$m-\sqrt{b}<1,$$

per cui la differenza fra m e $\sqrt{a}$ sarà in ogni caso inferiore ad 1 ed m sarà quindi un valore approssimato della radice quadrata di a a meno di una unità.

9. Se a è un valore approssimato per eccesso della radice quadrata di un numero dato, N, dimostrare che $b=\frac{N}{a}$ sarà un valore approssimato per difetto.

10. Rappresentando a un valore qualunque approssimato di $\sqrt{N}$, e posto

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right) \quad b_1 = \frac{N}{a},$$

si dimostri che a_1 è un valore più approssimato di a alla radice di N per eccesso, e che b_1 è un valore più approssimato di $\frac{N}{a_1}$ per difetto; si provi inoltre che la differenza $a_1 - \sqrt{N}$ è minore della metà della differenza $a - \sqrt{N}$.

Il metodo di approssimazione indicato è conosciuto col nome di metodo di Newton; esso ha il suo fondamento sull'osservazione seguente; se indichiamo con p la quantità che bisogna aggiungere o togliere al valore approssimato a per aver la radice quadrata esatta di N avremo

$$\sqrt{N} = a \mp p$$

dove si deve prendere il segno $+$ quando a è approssimato per difetto e il segno $-$ quando è approssimato per eccesso.

Facendo il quadrato di ambo i membri si ha

$$N = a^2 \mp 2\,a\,p + p^2. \qquad (1)$$

Ora essendo p una quantità piccola, p^2 sarà ancora più piccola e però se noi la trascuriamo nella eguaglianza precedente, il numero p che si ricava dalla nuova eguaglianza sarà poco differente dal vero e $a + p$ sarà poco differente dalla radice quadrata esatta. Ora dalla eguaglianza

$$N = a^2 \mp 2\,a\,p$$

si ricava

$$p = \frac{N - a^2}{2\,a} \text{ ovvero } p = \frac{a^2 - N}{2\,a}$$

a seconda che a è approssimato per difetto o per eccesso.

Quindi il nuovo valore approssimato è dato da

$$a + \frac{N - a^2}{2\,a} = \frac{a^2 + N}{2\,a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right)$$

nel primo caso
ovvero da

$$a - \frac{a^2 - N}{2\,a} = \frac{a^2 + N}{2\,a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right)$$

nel secondo caso.

Il valore a_1 così determinato è approssimato alla $\sqrt{N}$ per eccesso; infatti dalla (1) si ricava a secondo che a è approssimato a $\sqrt{N}$ per difetto o per eccesso che

$$\frac{N - a^2}{2\,a} > p \text{ ovvero } \frac{a^2 - N}{2\,a} < p$$

e però nel primo caso

$$a_1 = a + \frac{N - a^2}{2\,a}$$

supera $\sqrt{N}$ che è eguale ad $a+p$; nel secondo caso

$$a_1 = a - \frac{a^2 - N}{5a}$$

sarà ancora $> \sqrt{N}$.

È pure evidente che il valore a_1 è più approssimato di a alla $\sqrt{N}$, quando a sia $> \sqrt{N}$; nel caso invece che a sia un valore approssimato alla $\sqrt{N}$ per difetto, si tratta di provare che la differenza fra a_1 e $a+p$ che è eguale alla $\sqrt{N}$, è minore della differenza fra $a+p$ ed a ossia di p; per dimostrare che

$$\frac{N - a^2}{2a} - p < p$$

basterà provare che

$$N - a^2 < 4ap;$$

e questa disuguaglianza discende immediatamente dalla (1) quando si osservi che p è quantità frazionaria e quindi $p^2 < 2ap$.

Posto $b_1 = \dfrac{N}{a_1}$, poichè $a_1 . b_1 = N$ ed è $a_1 > \sqrt{N}$ dovrà essere $b_1 < \sqrt{N}$.

Inoltre si ha

$$a_1 - \sqrt{N} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{N}{a}\right) - \sqrt{N} =$$

$$= \frac{a^2 + N - 2a\sqrt{N}}{2a} = \frac{(a - \sqrt{N})^2}{2a}$$

e questo risultato vale tanto che a sia approssimato per eccesso come per difetto; in questo ultimo caso si porrà nell'ultima espressione $\frac{(\sqrt{N}-a)^2}{2a}$; avremo pure

$$a_1-\sqrt{N}=\frac{a-\sqrt{N}}{2}\cdot\frac{a-\sqrt{N}}{a}$$

e poichè $\frac{a-\sqrt{N}}{a}<1$, sarà

$$a_1-\sqrt{N}<\frac{a-\sqrt{N}}{2}$$

e così si è dimostrata l'ultima parte del teorema.

11. Si mostri che applicando successivamente il metodo accennato nell'esercizio precedente, con un primo valore di a approssimato alla radice quadrata di N, si possono trovare valori approssimati per difetto o per eccesso che differiscono dal valore della radice esatta a meno di qualsivoglia quantità assegnata per quanto piccola.

12. Col procedimento che qui indichiamo si può determinare un valore approssimato a meno uno della radice quadrata di un numero intero, cercando più della metà delle cifre col metodo ordinario e poi facendo una sola divisione.

Sia N il numero dato e sia b il numero ottenuto coll'estrazione della radice quadrata a meno uno dopo aver determinato più della metà delle cifre sostituendo le rimanenti con degli zeri; sia p il numero (in generale irrazionale) che bisogna aggiungere a b, per ottenere la radice esatta si avrà allora

$$N = (b + p)^2 = b^2 + 2\,b\,p + p^2 \text{ da cui}$$

$$\frac{N - b^2}{2\,b} = p + \frac{p^2}{2\,b}.$$

Se ora con q dinoteremo il quoziente intero della divisione di $N - b^2$ per $2\,b$ e con R il resto, avremo

$$\frac{N - b^2}{2\,b} = q + \frac{R}{2\,b}$$

e quindi

$$q + \frac{R}{2\,b} = p + \frac{p^2}{2\,b}$$

$$p = q + \frac{R}{2\,b} - \frac{p^2}{2\,b}.$$

Ora poichè il numero b è formato con tante cifre quante ne ha la radice a meno uno di N, con altrettante almeno sarà formato $2\,b$; invece il numero p deve avere nella parte intiera meno della metà delle cifre della radice e però p^2 meno del numero delle cifre della radice; nella frazione $\frac{p^2}{2\,b}$ il numeratore è quindi minore del denominatore, e la frazione ha quindi un valore minore di 1; la frazione $\frac{R}{2b}$ è pure minore di 1; dunque prendendo come parte intera di p il quoziente q la quantità $b + q$ sarà approssimata alla radice a meno di una unità.

13. Dalle due eguaglianze che si sono ricavate nel numero precedente

$$(b+q)^2 = b^2 + 2\,b\,q + q^2$$

$$N = b^2 + 2\,b\,q + R$$

si deduca in qual caso $b + q$ è approssimato a $\sqrt{N}$ per difetto e in qual caso per eccesso.

CAPITOLO VI.

Sulle proporzioni.

Quattro numeri $a, b, c, d,$ sono in proporzione quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ovvero quando $a \, . \, d = b\, c$; le due definizioni sono equivalenti. Importa assai in questo argomento il tener conto dell'ordine di successione dei numeri dati.

I numeri essendo grandezze, poichè di due numeri qualunqne noi sappiamo dire se sono eguali o diseguali e possiamo stabilire il concetto della loro somma, si presenta naturale il dedurre una delle definizioni precedenti da quella più generale relativa alle grandezze; noi sceglieremo fra le varie definizioni una delle più accettate. (Vedi ad es. *Geometria del Faifofer*), secondo la quale « quattro grandezze A B C D considerate nell'ordine scritto si dicono in proporzione, quando presi della seconda B e della quarta D due equisubmultipli arbitrari $\frac{B}{n}$ e $\frac{D}{n}$

questi sieno contenuti lo stesso numero di volte rispettivamente nella prima e nella terza. »

Da questa definizione generale discende subito come conseguenza che se $\frac{B}{n}$ non è esattamente contenuto nella A, non lo sarà neppure $\frac{D}{n}$ nella C (Vedi *Faifofer*). Ammettiamo allora di sapere che

$$a : b :: c : d;$$

se $\frac{b}{n}$ è contenuto in a esattamente m volte, si avranno le eguaglianze

$$a = m \, . \, \frac{b}{n} \qquad c = m \, . \, \frac{d}{n}$$

dalle quali si deduce

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \qquad \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$$

e quindi

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ovvero } a \times d = b \times c$$

Se invece nessun sottomultiplo di b è contenuto in a, anche in c non sarà contenuto nessun sottomultiplo di d, e però chiamando r ed r_1 i resti delle divisioni di a e di c rispettivamente per $\frac{b}{n}$ e $\frac{d}{n}$ avremo

$$a = q \cdot \frac{b}{n} + r \qquad c = q \cdot \frac{d}{n} + r_1$$

$$q \frac{b}{n} < a < (q+1) \frac{b}{n} \qquad q \cdot \frac{d}{n} < c < (q+1) \frac{d}{n};$$

facendo crescere il numero intero n, si avranno sempre due limitazioni analoghe alle precedenti, e poichè la differenza

$$(q+1)\frac{b}{n} - q\frac{b}{n} = \frac{b}{n}$$

e

$$(q+1)\frac{d}{n} - q\frac{d}{n} = \frac{d}{n}$$

e queste differenze diventano al crescere di n minori di qualsivoglia quantità σ per quanto piccola, così potremo dire che i numeri a e c si presentano in questo caso come limiti di due classi convergenti.

Ora i rapporti dei num. $q\frac{b}{n}$, $q_1\frac{b}{n_1}$, $q_{11}\frac{b}{n_{11}}$ ecc. e $(q+1)\frac{b}{n}$ $(q_1+1)\frac{b}{n}$ ... al numero b sono rappresentati dalle frazioni $\frac{q}{n}$ $\frac{q_1}{n_1}$ $\frac{q_{11}}{n_{11}}$ ecc., e $\frac{q+1}{n}$, $\frac{q_1+1}{n_1}$, $\frac{q_{11}+1}{n_{11}}$ ecc., e analogamente per le altre due classi, quindi possiamo formare due classi di numeri

$$\frac{q}{n}, \frac{q_1}{n_1}, \frac{q_{11}}{n_{11}} \ldots\ldots$$

$$\frac{q+1}{n}, \frac{q_1+1}{n1}, \frac{q_{11}+1}{n_{11}} \ldots\ldots$$

la prima delle quali esprime i rapporti di numeri più piccoli di a con b, e la seconda di numeri più grandi di a pure con b, ovvero anche di numeri più piccoli o più grandi di c con d; ma siccome il numero di separazione di due classi, è unico e determinato conchiudiamo che $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. È poi chiaro che dalla prima definizione di proporzione cioè $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ discende la seconda generale per le grandezze.

I teoremi fondamentali sulle proporzioni fra numeri si possono compendiare nel seguente specchio:

Se $a:b::c:d$ e $c:d::e:f$. si avrà $a:b::e:f$.

Se $a:b::c:d$ ed $a \gtreqless b$ sarà $c \gtreqless d$.

Se $a:b::c:d$ ed $a \gtreqless c$ sarà $b \gtreqless d$.

Se $a:b::c:d$ si ha $a:c::b:d$ (permutando).

Se $a:b::c:d$ si ha $b:a=d:c$ (invertendo).

Se $a:b::c:d$, $a+b:b::c+d:d$ (componendo).

Se $a:b::c:d$, $a-b:b::c-d:d$ (dividendo).

Se $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{d}{d_1}\ldots$ si ha $\frac{a+b+c+d+}{a_1+b_1+c_1+d_1+}$

$$=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}.$$

1. Si mostri come sia possibile ordinare quattro numeri in proporzione, in modo che si

succedano o in ordine decrescente o in ordine crescente.

2. Supposto che quattro numeri a, b, c, d, considerati nell'ordine scritto, sieno in proporzione, quante altre proporzioni si possono dedurre cambiando l'ordine dei termini?

Risp. Altre 7.

3. Fra gli ordinamenti precedenti quanti ve ne sono che incominciano con uno dei numeri dati?

4. Si dimostri che se $a:b::c:d$ si possono fare cambiamenti nell'ordine dei termini in modo da non aver una proporzione: si dieno esempii numerici.

5. Si mostri che non esiste che un solo numero che possa formare proporzione coi numeri a, b, c considerati nell'ordine scritto.

6. Due o più proporzioni si possono moltiplicare termine a termine, avendosi ancora una proporzione.

Basterà dopo aver fatto il prodotto dei termini corrispondenti delle proporzioni date, verificare che il prodotto degli estremi eguaglia quello dei medi.

7. Si possono elevare a potenza con eguale esponente i termini di una proporzione.

Corollario dell'esercizio precedente.

8. Dai termini di una proporzione si possono estrarre le radici di indice eguale.

Esercizi 6 e 7.

9. Se i termini di una proporzione sono disposti in ordine crescente o decrescente (eserc. 1), la somma degli estremi è maggiore della somma dei medi.

Infatti da $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ dove $a>b>c>d$ si deduce $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$, $\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}$ e poichè $b>d$ sarà anche $a-b>c-d$ ossia $a+d>b+c$.

10. Ci sono proporzioni in cui la somma degli estremi è eguale alla somma dei medi?

Dal precedente esercizio si dedurrà che ciò può avvenire solo in particolari proporzioni.

11. Dalla proporzione $a:b::c:d$ si può dedurre $m\,a+n\,c:m\,b+n\,d::a:b$ e viceversa.

Si combineranno i teoremi (componendo) e l'ultimo citato nello specchio precedente gli esercizii.

12. Si mostri con esempi che non è lecito in generale aggiungere uno stesso numero ai termini di una proporzione.

13. In qual caso si può aggiungere uno stesso numero ai termini di una proporzione $a:b::c:d$?

Se è possibile una proporzione

$$a+m:b+m::c+m:d+m$$

si ricava mediante il prodotto dei medi e degli estremi che è necessario sia $a+d=b+c$.

Se poi $a+d=b+c$ si avrà anche qualunque sia m, $a\times m+d\,.\,m+m^2=b\times m+c\,.\,m+m^2$ ed anche $a\,m+d\,m+m^2+a\,d=b\,.\,m+c\,.\,m+$

$+ m^2 + bc$ da cui $(a+m)(d+m) = (b+m)(c+m)$ od anche $a+m : b+m :: c+m : d+m$.

Da ciò si vede che la condizione $a+d=b+c$ è necessaria e sufficiente affinchè si possa aggiungere un numero arbitrario m ai termini della proporzione $a : b :: c : d$.

14. Si mostri con esempi che non si può in generale aggiungere ai termini di una proporzione quelli corrispondenti di un'altra.

15. In qual caso sommando i termini corrispondenti di due proporzioni si ottiene ancora una proporzione?

Affinchè dalle due proporzioni

$$a : b :: c : d$$
$$a_1 : b_1 :: c_1 : d_1$$

si possa dedurre

$$a + a_1 : b + b_1 :: c + c_1 : d + d_1$$

è necessario (prodotto dei medi e degli estremi e ipotesi) che

$$a_1 d - b c_1 = b_1 c - a d_1 :$$

questa condizione (moltiplicando termine a termine le due date) si trasforma nelle due seguenti ad essa equivalenti

$$a_1 d = b_1 c \qquad b c_1 = a d_1 :$$

si vede (facendo il cammino inverso) che queste due ultime condizioni sono anche sufficienti.

16. Se quattro numeri a, b, c, d sono tali che $b = \frac{a+c}{2}$, $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)$, essi sono in proporzione.

Basterà ricavare dalle precedenti eguaglianze il valore di $\frac{1}{2}$ espresso mediante a, b, c, d ed eguagliare le due espressioni trovate.

17. Dalla proporzione $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$ (proporzione armonica) si deduce l'altra $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$ e viceversa.

CAPITOLO VII.

Progressioni aritmetiche e geometriche, medie.

Nella risoluzione della maggior parte delle questioni relative alle progressioni aritmetiche e geometriche importa ricordare le formule che dànno l'espressione del termine generale e quella della somma dei primi n termini; esse sono:

per le aritmetiche

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ dove d indica la differenza, a_1 il termine che si considera di primo posto, a_n quello di posto n

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2}\,n = \frac{2\,a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n;$$

per le geometriche

$$a_n = a_1 \,.\, q^{n-1}$$

$$S = \frac{a_n\,q - a_1}{q-1} = a_1\,\frac{q^n - 1}{q-1} = a_1\,\frac{1-q^n}{1-q};$$

si rammenti che quando $q < 1$ la somma S

tende ad un limite determinato col crescere di n, rappresentato da $\frac{a_1}{1-q}$.

Esercizii.

1. Si dimostri che un numero finito di numeri razionali può sempre far parte di una medesima progressione aritmetica.

Basterà ridurre tutti i numeri dati ad uno stesso denominatore.

2. Sussiste una proprietà analoga per le progressioni geometriche?

Si proverà con qualche semplice esempio che ciò non accade; si ricorrà all'inserzione di medi geometrici fra i due numeri dati.

3. In ogni progressione aritmetica, un termine qualunque è la semi somma dei due che lo comprendono. Si formuli la proposizione reciproca e se ne dimostri le verità.

4. In ogni progressione geometrica un termine qualunque è medio geometrico fra i due che lo comprendono; si enunci la reciproca e se ne dimostri la verità.

5. In quali progressioni aritmetiche la somma di due termini qualunque è ancora un termine della progressione? Condizione necessaria e sufficiente.

R. Quando la differenza della progressione è un divisore del primo termine.

6. Condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto di due termini qualunque di una

progressione geometrica faccia parte della progressione stessa.

Si ricorrerà all'espressione generale di due termini qualunque e si troverà che il primo termine deve essere una potenza della ragione.

7. Sommando o sottraendo i termini corrispondenti di due progressioni aritmetiche si ottiene ancora una progressione aritmetica.

8. Generalizzare il teorema precedente.

9. Moltiplicando o dividendo i termini corrispondenti di due progressioni geometriche si ottiene ancora una progressione geometrica.

10 Estendere il teorema precedente ad un numero qualunque di progressioni geometriche.

11. Dagli esercizi 8 e 10 si deducano le proprietà seguenti.

« se ai termini di una progressione aritmetica si sostituiscouo loro equimultipli si ha ancora una progressione aritmetica;

« se ai termini di una progressione geometrica si sostituiscono loro equipotenze si ha ancora una progressione geometrica ».

12. Si esprima la somma dei numeri contenuti neila ordinaria tavola di moltiplicazione.

13. Si estenda la formula precedente al caso più generale in cui i numeri costituenti la prima linea della tavola procedono da 1 ad n.

14. Si esprima la somma dei prodotti dei numeri contenuti nelle differenti linee della tavola di moltiplicazione.

15. In qual caso la somma di n interi consecutivi incominciando da un numero qualunque è divisibile per n?

16. Quali sono le progressioni aritmetiche nelle quali la somma dei primi n termini è eguale ad n^2?

Dalla formula della somma espressa mediante il primo termine e la differenza, dopo averla ordinata rispetto ad n, si dedurrà una eguaglianza, la quale dovendo essere soddisfatta per qualunque valore di n, richiede che sieno eguali a zero tutti i coefficienti; in tal modo si dedurrà che l'unica progressione avente la proprietà richiesta è quella dei numeri dispari 1, 3, 5, ...

17. Coi numeri dispari 1, 3, 5, 7, ... ecc., si formino diversi gruppi $G_1, G_2, G_3 \ldots . G_n$ mettendo nel primo gruppo il primo numero 1, nel secondo G_2 i due successivi 3 e 5, nel terzo G_3 i tre successivi e così via; si dimostri che la somma dei numeri di ogni gruppo è un cubo, e precisamente che la somma dei numeri di G_n è n^3.

Basterà calcolare il primo termine di G_n tenendo conto del numero dei dispari contenuti nei gruppi precedenti.

18. Dall'esercizio precedente si deduca una formula per la somma dei cubi dei primi n numeri naturali.

Basta osservare che la somma dei detti cubi equivale alla somma dei numeri dispari contenuti nei primi n gruppi e quindi applicare la formula che dà la somma dei primi n numeri dispari.

19. Dalla identità

$$(x+1)^3 - x^3 = 3 . x^2 + 3x + 1$$

sostituendo successivamente per x i numeri 1, 2, 3, ... n e sommando membro a membro per colonna i risultati, si deduca la formula che dà la somma dei quadrati dei primi n numeri della serie naturale.

$$R. \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + . n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \times 2 \times 3}.$$

20. Dalla formula dell'esercizio precedente se ne deduca un'altra che dia la somma dei prodotti a due a due in tutti i modi possibili dei numeri 1, 2, 3, ... n.

Basta sviluppare il quadrato di $(1 + 2 + 3 + \ldots . n)$.

21. Trovare una formola che esprima la somma delle radici quadrate a meno di una unità dei numeri della serie naturale 1, 2, 3, 4, ... n.

Si raggruppino i numeri da 1 ad n in modo che ogni gruppo incominci con un quadrato perfetto e termini col numero che precede il quadrato perfetto successivo; l'espressione di un gruppo generale sarà

$$m^2,\ m^2 + 1,\ m^2 + 2, \ldots .\ m^2 + 2m$$

ed esso comprenderà $2m + 1$ termini aventi tutti per radice a meno di una unità il numero m; quindi la somma delle radici dei numeri appartenenti a un tal gruppo sarà

$$(2m + 1)m = 2m^2 + m.$$

Se m^2 rappresenta il massimo quadrato intero contenuto in n, la somma di tutti i termini che si ottengono dal precedente, facendo successivamente $m = 1, 2, 3, \ldots m$ rappresenterà la somma delle radici di tutti i numeri da 1 fino a $(m+1)^2 - 1$; tale somma sarà quindi rappresentata da

$$2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots m^2) + (1 + 2 + 3 + \ldots m)$$

ossia da

$$\frac{m(m+1)(2m+1)}{3} + \frac{m(m+1)}{2}.$$

Per avere la somma richiesta bisognerà dalla precedente espressione levare tante volte m quanti sono i numeri che seguono n e precedono $(m+1)^2$; essi sono in numeri di $(m^2 + 2m - n)$; quindi chiamando S la somma cercata si avrà

$$S = \frac{m(m+1)(2m+1)}{3} + \frac{m(m+1)}{2} - (m^2 + 2m - n) \cdot m;$$

fatte le riduzioni si otterrà

$$S = m \cdot n - \frac{(m-1)m(2m+5)}{6}.$$

22. Se a e b sono due numeri primi fra di loro, dividendo per b i termini della serie

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots (b-1)a$$

la somma dei quozienti è rappresentata da
$\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$.

Infatti nessuno dei termini della serie può essere divisibile per b ed i resti delle divisioni devono essere tutti differenti, e però rappresentandoli rispettivamente con $r_1\, r_2 \ldots . r_{b-1}$, questi, astrazion fatta dall'ordine, dovranno coincidere coi numeri $1, 2, 3, \ldots . b-1$; i quozienti saranno quindi

$$\frac{a-r_1}{b},\ \frac{2a-r_2}{b},\ \frac{3a-r_3}{b}, \ldots . \frac{(b-1)a-r_{b-1}}{b}$$

e la loro somma

$$\frac{a+2a+3a+\ldots .(b-1)a-(r_1+r_2+\ldots . r_{b-1})}{b}$$

ossia

$$\frac{[(1+2+3+\ldots .(b-1)](a-1)}{b}$$

od anche da

$$\frac{b(b-1)(a-1)}{2b}=\frac{1}{2}(a-1)(b-1).$$

23. Condizione necessaria e sufficiente perchè un numero intero a sia eguale alla somma di p dispari consecutivi è che p sia divisore di a tale che $\frac{a}{p}-p$ sia un numero pari.

Infatti se a è la somma dei p numeri dispari

$$2n+1 \quad 2n+3 \quad 2n+5, \ldots \, 2n+2p-1$$

si avrà

$$a=2np+p^2$$

da cui

$$\frac{a}{p}-p=2n$$

dalla quale si deduce che p è divisore di a e che $\frac{a}{p}-p$ è numero pari.

Se queste condizioni sono soddisfatte si potrà allora dall'ultima eguaglianza passare alla penultima, la quale dimostra che il numero a è la somma di p dispari consecutivi.

24. Condizione necessaria e sufficiente perchè un numero intero a sia eguale alla somma di p numeri pari consecutivi è che p sia divisore di a tale che $\frac{a}{p}-p$ sia un numero dispari.

Si procederà come nell'esercizio precedente.

25. Dai precedenti esercizii si deduca una regola per decomporre un numero dato a nella somma di numeri pari o di numeri dispari consecutivi.

26. La somma degli n primi termini della serie

$$1, 2, 4, 6, 8 \ldots\ldots$$

è un numero dispari, che aumentato degli $n-1$ numeri dispari seguenti dà un cubo.

27. Date le 3 progressioni aritmetiche

$$1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$$
$$1, 3, 5, 7 \ldots\ldots$$
$$1, 4, 7, 10. \ldots\ldots$$

dimostrare che la somma dei primi n termini della seconda è eguale alla media aritmetica delle somme degli n termini delle altre due.

28. Se $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{b+c}$ sono tre numeri in progressione aritmetica saranno tali anche i numeri a^2, b^2, c^2.

29. In quali progressioni aritmetiche il prodotto di due termini qualunque fa parte della progressione?

Si farà il prodotto di due termini generali e si troveranno le condizioni affinchè esso rappresenti ancora un termine della stessa forma.

30. Due differenti progressioni aritmetiche o geometriche di egual ragione, non possono avere alcun termine in comune e fra due termini consecutivi dell'una cade sempre uno ed un solo termine dell'altra.

31. In ogni progressione geometrica la somma di un numero dispari di termini divide sempre la somma dei loro quadrati.

32. Date le due progressioni, la prima geometrica e la seconda aritmetica.

$$a,\ a \,.\, q,\ a\,q^2,\ a\,q^3 \ldots\ldots$$
$$a,\ a+d,\ a+2\,d,\ a+3\,\mathrm{d} \ldots\ldots$$

se $a + d = a \, . \, q$, dimostrare che ogni termine della seconda progressione è minore di quell… corrispondente della prima.

33. Se P rappresenta il prodotto di n quantità in progressione geometrica, S la loro somma ed S_1 la somma dei loro reciproci, si ha

$$P^2 = \left(\frac{S}{S_1}\right)^n.$$

Infatti se a_1 rappresenta il primo termine della progressione data, q il quoziente ed n il numero dei termini, il prodotto P è dato da

$$P^2 = a_1{}^{2.n} \, q^{n\,(n-1)}$$

inoltre

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

I reciproci dei termini della progressione formano alla loro volta una nuova progressione geometrica di quoziente $\frac{1}{q}$ e però sarà

$$S_1 = \frac{1}{a_1} \frac{q^n - 1}{(q - 1)\, q^{n-1}}.$$

Quindi

$$\frac{S}{S_1} = a_1{}^2 \, q^{n-1}$$

$$\left(\frac{S}{S_1}\right)^n = a_1{}^{2.n} \, q^{n\,(n-1)} = P^2.$$

34. Dati n oggetti $a_1 a_2 \ldots . a_n$, si determini il numero dei gruppi a due a due che con essi si possono formare, dovendo ogni gruppo differire dai rimanenti per contenere almeno un oggetto diverso. Tali gruppi si chiamano combinazioni della classe due ed il loro numero si suol significare col simbolo $C_{n\,.\,2}$.

Si combinerà ciascun oggetto con ciascuno dei successivi e poi si applicherà la formula che dà la somma dei numeri naturali cioè

$$1+2+3+\ldots . n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

35. Col metodo di induzione si determini il numero delle combinazioni di n oggetti della classe k, cioè il numero dei gruppi composti ciascuno di k oggetti scelti fra gli n dati e tali che ciascuno differisca dagli altri per contenere almeno un oggetto differente

R. $$C_{n\,.\,k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots .(n-k+1)}{1.2.3\ldots .k}.$$

36. Dalla formola

$$1+2+3+\ldots . n=\frac{n(n+1)}{1.2.}$$

facendo crescere n indefinitamente si deduca che il limite a cui tende la frazione

$$\frac{1+2+3+\ldots . n}{n^2}$$

è eguale ad $\frac{1}{2}$.

37. Si applichi la precedente eguaglianza a dimostrare la formola $S = \frac{1}{2} j t^2$ dei moti uniformemente accelerati, dove S rappresenta lo spazio percorso dal mobile che parte dalla quiete, j l'accelerazione del moto, t il numero delle unità di tempo per cui avviene il movimento.

Basterà immaginare decomposto il tempo t, in n intervalli eguali e supporre che in ognuno di essi il moto sia uniforme colla velocità che acquisterebbe alla fine o al principio di esso intervallo; si sommeranno gli spazî percorsi in tale ipotesi e poi si farà crescere n indefinitamente.

38. Dalla formola ricavata nell'esercizio 19 di questo Capitolo, si deduca che quando n cresce indefinitamente il limite a cui tende la frazione

$$\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots n^2}{n^3}$$

è eguale a $\frac{1}{3}$.

39. Se a, b, c, d sono quattro numeri in progressione aritmetica, l'espressione

$$a\,b\,c\,d + (b - a)^4$$

è un quadrato perfetto.

Si ponga $b - a = r$ e si esprima la formola precedente solamente con a e con r.

I numeri che si ottengono dalle progressioni aritmetiche

1, 2, 3, 4 ......
1, 3, 5, 7 ......
1, 4, 7, 10. .....
1, 5, 9, 13. .....

facendone la somma dei primi n termini, si chiamano rispettivamente l'n^{mo} triangolare, quadrato, pentagonale, esagonale, ecc. La ragione di questo nome è dovuta al fatto che pensando l'unità rappresentata da un punto è facile disporre le unità che compongono tali numeri in modo da formare un triangolo equilatero, o un quadrato, o un pentagono o un esagono regolare, ecc.

Tali numeri si chiamano quindi anche numeri poligonali; n si chiama il lato del numero poligonale; si potrà fare il calcolo di un numero poligonale quando si conosca la classe k a cui esso appartiene e il suo lato n, poichè allora basterà fare la somma dei primi n termini della progressione aritmetica che incomincia con 1 e che ha per differenza $k - 2$.

40. Si esprima la somma dei primi n numeri triangolari.

Basterà nell'espressione generale del n^{mo} triangolare, sostituire successivamente i numeri 1, 2, 3 .... n e poi fare la somma ricordando la formola che dà la somma dei quadrati dei primi n numeri naturali.

41. Si esprima la somma dei primi n numeri pentagonali.

42. Si esprima in generale l'n^{mo} poligonale della classe k.

43. Il triplo di un pentagonale è un triangolare.

44. Il prodotto per 24 di un numero pentagonale, aumentato di uno, dà un quadrato.

45. Nessun numero pentagonale può essere terminato colle cifre 3, 4, 8, 9.

46. Ogni numero esagonale è eguale ad un triangolare di lato impari.

È vera la reciproca?

47. Nessun numero esagonale può essere terminato colle cifre 2, 4, 7, 9.

48. Il nonuplo più uno di un triangolare è un altro triangolare. Si determini la relazione fra i lati di tali numeri.

49. Il triplo più uno di un ottagonale è un quadrato. Si determini la relazione fra i due lati.

50. Il doppio più uno di un decagonale è un triangolare. Si determini la relazione fra i due lati.

51. Nessun decagonale può essere terminato colle cifre 3, 4, 8, 9.

Dati n numeri

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \ldots < a_{n-1} < a_n$$

si chiamerà *media*, qualunque quantità compresa fra il più piccolo a_1 e il più grande a_n.

Le medie di più numeri sono quindi infinite; solo quando i numeri dati sono eguali fra loro, qualunque loro media coincide col valore comune.

Fra le infinite medie hanno particolare importanza:

a) la media aritmetica, rappresentata dalla formola

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots . \ a_n}{n}$$

e che simbolicamente dinoteremo con M_a;

b) la media geometrica M_g rappresentata dalla

$$\sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \ldots . \times a_n};$$

c) la media armonica M_h definita dalla eguaglianza

$$\frac{1}{M_h} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots . \ \frac{1}{a_n}}{n}.$$

52. Si dimostri che le espressioni di M_a, M_g, M_h sono effettivamente comprese fra a_1 e a_n; si enunci in parole la definizione di M_h data dalla (*c*).

53. Se tutti i numeri $a_1, a_2, \ldots . \ a_n$ sono moltiplicati per uno stesso fattore, anche la loro media aritmetica vien moltiplicata per esso.

54. Accade lo stesso per la media geometrica e per la media armonica?

55. Se ai numeri $a_1, a_2, \ldots. a_n$ si aggiunge oppur si toglie una medesima quantità, la loro media aritmetica è aumentata o diminuita della stessa quantità.

56. Chiamando *scostamenti* le differenze prese in senso algebrico fra M_a e ciascuna delle n quantità date, si dimostri che la somma degli n scostamenti è eguale a zero.

57. La media aritmetica di due quantità diseguali $a > b$ è maggiore della loro media geometrica.

Si parta dalla diseguaglianza $(a-b)^2 > o$.

58. Nel caso di due sole quantità a, b, si trovi una relazione fra M_a, M_g, M_h.

Basterà dare alla M_h una forma tale da contenere M_a e M_g.

R. $$M_g{}^2 = M_a \,.\, M_h.$$

59. Dalla precedente relazione combinata coll'esercizio 57; si deduca che la media armonica di due quantità è minore delle altre due medie.

60. Si estenda la proprietà contenuta nell'esercizio 59 al caso di più quantità.

61. È lecito, dovendo trovare la media aritmetica di più quantità, fare delle medie parziali e poi la media delle medie?

62. Uno stesso numero non può al tempo stesso essere medio aritmetico e medio proporzionale fra gli stessi due numeri.

Questa proprietà si può dedurre dal teorema espresso nell'esercizio 57, ma si può anche stabilire indipendentemente da esso; infatti detti X, Y, Z i tre numeri si dovrebbe avere

$$Y = \frac{X+Z}{2} \qquad\qquad Y = \sqrt{X.Z}$$

e però

$$X + Z - 2\sqrt{XZ} = o$$

ossia

$$(\sqrt{X} - \sqrt{Z})^2 = o \qquad\qquad X = Z.$$

63. Dalle espressioni di M_a, M_g date dopo l'esercizio 51 pel caso di due soli numeri a e b $(a > b)$ si deduca

$$M_a{}^2 - M_g{}^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

64. *Dal precedente esercizio si deduca la seguente proprietà; la differenza fra la media aritmetica e geometrica di due quantità è minore dell'ottava parte del quadrato della differenza dei due numeri divisa per il minore di essi ed è maggiore dell'ottava parte dello stesso quadrato diviso per il numero maggiore.*

Basterà sostituire ad $M_a{}^2 - M_g{}^2$ il prodotto della somma per la differenza delle basi e tener presente che si ha la limitazione

$$2\,a > M_a + M_g > 2\,b.$$

CAPITOLO VIII.

Questioni varie; problemi.

In questo capitolo sono esposti alcuni teoremi che riguardano i sistemi generali di numerazione, e sono trattati alcuni problemi allo scopo di mostrare come le proprietà dei numeri e delle operazioni, combinate con tentativi ben diretti, possano condurre alla determinazione di numeri soddisfacenti a condizioni date.

I teoremi che riguardano la numerazione a base qualunque b (vedi *Arit. raz.*, Cap. 28) si fondano quasi tutti sulla scomposizione di un numero N in polinomio ordinato secondo le potenze della base b.

$$\beta_0 + \beta_1 b + \beta_2 b^2 + \quad \beta_n b^n$$

in cui $\beta_0\ \beta_1\ \beta_2 \ldots \beta_n$ rappresentano numeri inferiori alla base, potendo anche alcuni di essi essere eguali a zero. I criteri di divisibilità nella base b si stabiliscono con procedimenti analoghi a quelli seguiti nell'*Arit. raz.*, Cap. VII, per la base 10.

1. Quale è il resto che da un numero scritto nella base b, quando lo si divida per un divisore di b?

Qual'è la condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero scritto nella detta base sia divisibile per un divisore di b?

2. Caso particolare di $b = 12$; si esprimano le condizioni di divisibilità per 2, 3, 4, 6 in tale sistema; si mostri il vantaggio di questi criterì su quelli a base 10.

3. Resto che dà un numero scritto nella base b, quando lo si divida per un divisore di b^2, b^3 e in generale di b^n; criterì di divisibilità per tali numeri.

Si immaginerà decomposto il numero dato N nella somma di due parti; una delle quali divisibile per il numero dato.

4. Quale resto si ottiene dividendo un numero scritto nella base b per un divisore di $b - 1$ o di $b + 1$; criterì di divisibilità per tali numeri.

Si procederà come nel sistema decimale per i numeri 9 e 11 (vedi *Arit. raz.*, Cap. VII).

5. Qualunque numero intero è eguale alla somma di potenze del numero 2 ovvero a una tal somma aumentata di una unità; si dieno esempì numerici; in qual caso si verifica l'una e in quale l'altra scomposizione.

Basterà immaginare scritto il numero dato nella base binaria.

6. Moltiplicazione egiziana.

La scomposizione di un numero nella somma di potenze del 2 serve a dare spiegazione dell'antico metodo egiziano di moltiplicazione (Cantor — *Vorlesungen ueber Geschikte der Mathematik Band* 1).

Si debba ad es. moltiplicare 79 per 47; si ha

$$47 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^5$$

e però

$$\begin{aligned} 79 \times 47 &= 79 \times (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^5) \\ &= 79 \times 1 && = 79 \\ &+ 79 \times 2 && = 158 \\ &+ 79 \times 2^2 = 158 \times 2 && = 316 \\ &+ 79 \times 2^3 = 316 \times 2 && = 632 \\ &+ 79 \times 2^5 = 79 \times 2^3 \times 2^2 = \\ &\quad = 632 \times 2^2 = 1264 \times 2 = 2528 \end{aligned}$$

quindi

$$79 \times 47 \quad = \quad 3713.$$

7. Che cosa si richiede per applicare prontamente il metodo precedente di moltiplicazione; vantaggio che presenta sul metodo ordinario.

8. Moltiplicazione russa.

Un altro metodo fondato sulla scomposizione in parti e che assomiglia a quello esposto nell'esercizio precedente, è il seguente usato (secondo Plakhovo) dai contadini in Russia.

Si debba moltiplicare come prima 79 per 47;

si ha

$$
\begin{array}{rlr}
79 \times 47 = 79 \times (46+1) & = & 79 \\
+\, 79 \times 46 = 158 \times 23 & & \\
= 158 \times 22 + 158 & & 158 \\
158 \times 22 = 316 \times 11 & & \\
= 316 \times 10 + 316 & & 316 \\
316 \times 10 = 632 \times 5 & & \\
= 632 \times 4 + 632 & & 632 \\
632 \times 4 = 1264 \times 2 & & 2528 \\
\hline
79 \times 47 & = & 3713
\end{array}
$$

9. Si accennino i vantaggi che presenta il metodo precedente su quello comunemente usato.

10. In un sistema a base qualunque b, la differenza fra un numero formato da p cifre in progressione aritmetica ed il numero rovesciato è costante, a parità di ragione.

Basterà esprimere il numero dato N come un polinomio composto di p termini e ordinato secondo le potenze decrescenti della base, mettendo in evidenza la cifra di ordine massimo e la differenza della progressione; formato il numero rovesciato e fatta la differenza, si vedrà che questa non dipende dal valore della prima cifra.

11. Moltiplicando il numero 12345679 per 9 si ottiene un numero formato colla sola cifra 1.

Basterà al 9 sostituire $10-1$, applicare la legge distributiva del prodotto e sottrarre le due parti.

12. Moltiplicando lo stesso numero dell'esercizio 11, ordinatamente per 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81 si ottengono numeri formati rispettivamente colle sole cifre 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Basterà osservare che i numeri 18, 27 ecc. sono i multipli di 9 secondo i numeri 2, 3, 4 . . . . 9 e che per eseguire i prodotti indicati basta prima moltiplicare il numero dato per 9 e poi il prodotto ottenuto per 2 o per 3, ecc.

13. Se al disotto di un numero scritto nella base 10 si scrive il numero stesso ma spostando di tre posti verso sinistra ciascuna cifra, la somma ottenuta è divisibile per 7, 11, 13 e per il numero dato.

Se N è il numero dato, l'altro ottenuto collo spostamento indicato è eguale a $1000\,N$ e però la loro somma è rappresentata da $1001 \times N$; ora i fattori 7, 11, 13, sono i fattori di composizione di 1001.

14. Se un numero formato di due cifre significative è divisibile per la somma delle cifre, questa è un multiplo di 3.

Infatti chiamando x ed y la cifra delle decine e delle unità, si ha per ipotesi

$$10\,x + y = K(x + y) \qquad K < 10$$

da cui si deduce

$$9 \,.\, x = (K - 1)\;(x + y)$$

e poichè $K - 1 < 9$ dovrà di necessità $x + y$ essere divisibile per 3 che è un divisore del 9.

15. Trovare un numero di due cifre significative sapendo che il suo più piccolo divisore differente dall'unità è eguale alla somma delle cifre.

Per l'esercizio 14 la somma delle cifre dovrà essere divisibile per 3, anzi dovendo rappresentare il divisore più piccolo del numero cercato sarà eguale a 3; il numero è quindi 21.

16. Trovare due numeri di due cifre terminati con 7 sapendo che il loro prodotto ha le prime due cifre fra di loro eguali e pure eguali le ultime due.

Il prodotto dei due numeri cercati dovendo per ipotesi terminare colla cifra 9, le ultime due cifre a destra formeranno il numero 99 e però se il prodotto ha tre cifre, esso dovrà per ipotesi essere eguale a 999 che si decompone nel modo voluto con pochi tentativi nel seguente modo $999 = 27 \times 37$.

Se invece il prodotto è composto di quattro cifre; esso dovrà per ipotesi essere divisibile per 11 e però dovrà essere tale uno dei due fattori; questo, dovendo per ipotesi terminare con 7 non può essere, poichè deve essere formato con sole due cifre, che il numero 77.

Se ora noi pensiamo di moltiplicare questo numero per l'altro che pure termina con 7, noi vediamo che la prima cifra a destra del secondo prodotto parziale deve essere 6, perchè questa sola sommata colla seconda cifra del primo prodotto, che è 3, può dare per risultato la cifra 9 del prodotto totale; si deduce da questa osseravzione che la cifra delle diecine del secondo fattore deve essere 8; i numeri cercati sono quindi in questo caso 77 e 87.

17. Trovare tutti i numeri di due cifre divisibili per il prodotto delle cifre.

Chiamando d, u le cifre delle diecine e delle unità si deve avere

$$10\,d + u = K\,.\,d\,.\,u$$

e però u deve essere divisibile per d; si deve quindi avere

$$u = h\,.\,d \qquad (1)$$

valore che sostituito nella precedente eguaglianza ci dà

$$10 + h = K\,.\,d\,.\,h$$

dalla quale si ricava che h deve dividere il numero 10 e quindi potrà essere $h = 1, 2, 5$; si ricavino allora in corrispondenza dei possibili valori di h quelli di d ed u (entrambi < 10) soddisfacenti alla (1) ed alla condizione imposta dal problema e si otterranno con ciò i soli numeri

$$11,\ 12,\ 15,\ 24,\ 36.$$

18. Trovare un numero di quattro cifre, eguale al quadrato del numero formato dalle ultime due cifre a destra.

Se indichiamo con x il numero formato dalle due ultime cifre a destra e con y quello formato dalle altre due si deve avere

$$100\,y + x = x^2$$

ossia

$$x(x-1)=100 \cdot y$$

ora essendo i due numeri x, $x-1$ primi fra di loro perchè consecutivi, dovrà l'uno di essi essere multiplo di 4 e l'altro un multiplo dispari di 25 che sono i fattori, primi fra di loro, che compongono il numero 100.

Avremo quindi

$$25 \times 24 = 100\,y \qquad y = 6$$
$$75 \times 76 = 100\,y \qquad y = 57$$

La seconda soluzione dà il numero 5766 che soddisfa alle condizioni volute.

19. Trovare un numero di tre cifre divisibile per 5 e tale che il quoziente della divisione sia il numero formato dalle ultime due cifre a destra.

Se N è il numero cercato ed n quello formato dalle ultime due cifre, sarà n divisibile per 5 e poichè

$$N = 5 \times n_1$$

essendo n_1 il quoziente della divisione di n per 5, si deduce dai criterii di divisibilità per 25 che anche n sarà divisibile per 25 e potrà quindi avere i valori seguenti

$$25,\ 50,\ 75$$

i quali moltiplicati per 5 danno i numeri cercati; essi sono

$$125, 250, 375.$$

20. Trovare un numero di 3 cifre divisibile per 11, e tale che scambiando la cifra delle diecine con quella delle unità, si ottenga un numero le cui tre cifre sono in progressione aritmetica.

Sieno x, y, z le tre cifre che compongono il numero cercato; poichè scambiando y con z le tre cifre devono essere in progressione aritmetica avremo chiamando T la differenza della progressione

$$Z = x + T \qquad y = x + 2\,T \qquad (1)$$

e inoltre per la divisibilità per 11 si avrà anche

$$x + z - y = \text{mult. di } 11. \qquad (2)$$

Se $T >$ o sostituendo (1) nella (2) si ricava

$$x = T \text{ e però } Z = 2\,T \qquad y = 3\,T$$

e poichè $y \leqq 9$, i valori possibili di T sono 1, 2, 3, dai quali si ottengono i numeri

$$132, 264, 396.$$

Se invece $T <$ o si avrà dalla (2), ponendo $T^1 = -T$

$$x + T^1 = \text{mult. di } 11$$

e quindi $x = 11 - T^1$, da cui si ricavano per T^1 i valori 2, 3 compatibili con quelli che si devono poi ricavare per y e per z: a tali valori di T^1 corrispondono i numeri

$$957, \quad 825.$$

21. Trovare un numero di quattro cifre quadrato perfetto in modo che le prime due cifre sieno eguali e pure eguali sieno le altre due.

Un tal numero deve essere divisibile per 11^2 e però la sua radice per 11; ora dovendo questa radice essere composta di due cifre, si cerchi per tentativi fra i multipli di 11, composti con due cifre, quello il cui quadrato soddisfa alle condizioni del problema; si trova

$$11 \times 8 = 88 \qquad 88^2 = 7744$$

22. Trovare un numero di quattro cifre, quadrato perfetto, in modo che i numeri formati dalle prime due cifre e dalle ultime due sieno pure quadrati perfetti.

La radice del primo gruppo a sinistra non può essere inferiore a 4, dovendo il suo quadrato essere per ipotesi un numero di due cifre; dalla regola per l'estrazione della radice quadrata si ricava che la prima cifra del secondo gruppo a destra componente il numero cercato, deve essere divisibile per il doppio della radice del primo gruppo; questa radice del primo gruppo è dunque di necessità eguale a 4; la prima cifra del secondo gruppo è allora 8 e la seconda dovrà essere 1; il numero cercato è quindi 1981 che è il quadrato di 41.

23. Trovare un numero di tre cifre, sapendo che la somma delle prime due cifre a sinistra è eguale all'ultima e che il quoziente del numero per 9 è un multiplo di 9.

Dovendo il numero cercato essere divisibile per 9 sarà tale la somma delle sue cifre e però la cifra delle unità dovrà, secondo l'ipotesi essere eguale a 9: e poichè lo stesso numero che si cerca deve essere un multiplo di 81, basterà fra questi multipli cercare quello di tre cifre che termina per 9. Si troverà così

$$9 \times 81 = 729.$$

24. Trovare un numero di quattro cifre eguale alla quarta potenza della somma delle sue cifre.

Se indichiamo con N la somma delle cifre del numero cercato si avrà:

$$N = x + y + z + u$$

$$N^4 = 10^3 . x + 10^2 y + 10 z + u$$

e però

$$N^4 - N = 9 (111 x + 11 y + z)$$

od anche

$$N (N^3 - 1) = 9 (111 x + 11 y + z).$$

Ora essendo i due fattori N ed $N^3 - 1$ primi fra di loro dovrà uno di essi essere divisibile per 9 e dovendo N essere compreso fra 5 e 10 perchè N^4 deve avere quattro cifre dovrà essere o $N=9$ o $N=7$; colla verifica si trova che $N=7$ soddisfa il problema e però il numero cercato è $7^4.=2401$.

25. Trovare un numero di quattro cifre eguale al cubo della somma delle sue cifre.

Si ponga (come nell'esercizio precedente)

$$N=x+y+z+u$$

e però

$$N^3-N=9(111x+11y+z)$$

od anche

$$N(N-1)(N+1)=9(111x+11y+z);$$

allora uno dei fattori del primo prodotto dovrà essere divisile per 9; ora dovendo il cubo di N essere formato di quattro cifre, il numero N dovrà essere compreso fra il 10 e il 22; e però N potrà avere uno dei valori 17, 18, 19; mediante innalzamento al cubo si trova che i primi due numeri soddisfano alla questione.

26. Trovare un numero di cinque cifre, quadrato perfetto sapendo che le cifre prima, seconda, quarta e quinta sono eguali.

Sappiamo che un quadrato deve terminare con una delle cifre 0, 1, 4, 5 6, 9; nel caso nostro si deve chiaramente escludere la cifra 0 come ultima cifra, e si devono pure escludere le cifre 1, 9, 5, 6 perchè non potrebbe la cifra delle diecine essere eguale a quella delle unità, come vuole il problema; quindi il quadrato cercato deve terminare colla cifra 4 e però sarà compreso fra 44000 e 45000; la base sarà quindi compresa fra le radici quadrate di questi numeri ossia fra 209 e 212 (incluso); l'unico numero possibile è appunto 212 il cui quadrato soddisfa alle condizioni del problema; infatti

$$212^2 = 44944.$$

27. Interpolando fra le due cifre del numero 49 il numero 48 e operando analogamente sui numeri che si ottengono con questa legge, si ottengono dei quadrati perfetti.

I numeri ottenuti colla legge indicata sono

$$4489,\ 444889,\ 44448889, \ldots\ldots$$

Il termine che nella precedente successione occupa il posto $(n-1)^{mo}$ avrà alla sua sinistra un numero formato di n cifre eguali a 4 e seguito da un numero formato di $n-1$ cifre eguali a 8 e terminato colla cifra 9; esso sarà quindi rappresentato da

$$9 + 8 \times (111 \ldots 1_{n-1}) \times 10 + 4\,(111 \ldots 1_n) \times 10^n$$

ossia da

$$1 + 8 \times (111 \ldots 1_n) \times 10 + 4\,(11 \ldots 1_n) \times 10^n$$

ma essendo

$$111 \ldots 1_n = \frac{999 \ldots 9_n}{9} = \frac{10^n - 1}{9}$$

potremo dire che il numero considerato si può rappresentare colla seguente espressione

$$\frac{4 \, . \, 10^n \, (10^n - 1) + 8 \, (10^n - 1)}{9} + 1 =$$

$$= \frac{4 \, . \, 10^{2n} + 4 \, . \, 10^n + 1}{9}$$

Ora il secondo membro della eguaglianza precedente è il quadrato di $\frac{2 \, . \, 10^n + 1}{3}$, quindi il teorema è dimostrato.

28. Determinare il più piccolo numero quadrato perfetto multiplo di 66.

Poichè $66 = 2 \times 3 \times 11$, ogni multiplo di 66 quadrato perfetto sarà della forma

$$2^{2\alpha} \times 3^{2\beta} \times 11^{2\gamma} \times A^2$$

essendo A un numero qualunque, che non contiene i fattori primi 2, 3, 11; il quadrato minore si otterrà facendo $A = \alpha = \beta = \gamma = 1$ e si ottiene con ciò il quadrato di 66.

29. Si generalizzi la questione precedente assumendo in luogo di 66 un numero qualunque N.

Basterà scomporre N in fattori primi ed osservare che affinchè un numero sia quadrato perfetto è necessario che gli esponenti dei suoi fattori primi sieno pari.

30. Generalizzare la precedente questione ad una potenza qualunque di N.

31. In ogni numero di tre cifre divisibile per 9 e per 11, la cifra delle diecine è la stessa.

Infatti ogni numero N divisibile per 9 e per 11 è divisibile per 99 e quindi della forma

$$N = (100 - 1) \cdot n = 100 \cdot n - n.$$

Ma dovendo N essere formato con tre cifre, il numero n avrà al massimo il valore 10 e però si vede che eseguendo la sottrazione indicata si otterrà sempre 9 per cifra delle diecine.

32. Se un numero di tre cifre è divisibile per 27 o per 37, sarà tale anche il numero che si ottiene ponendo la cifra delle centinaja alla destra di quella delle unità.

Infatti posto il numero dato N sotto la forma $100\,c + 10 \cdot d + u$ moltiplicandolo per 10 si ha $10 \cdot N = 1000\,c + 100\,d + 10\,u = (100\,d + 10\,u + c) + 999 \cdot c$. e poichè $999 = 27 \times 37$, sarà $999 \cdot c$ divisibile per 27 ed anche per 37 e però sarà tale anche il numero $100\,d + 10\,u + c$.

33. Trovare l'espressione generale di due numeri consecutivi, la cui somma rappresenti un quadrato.

Si ricavi a dalla eguaglianza $2\,a + 1 = (2\,n + 1)^2$.

34. Se in un numero di quattro cifre, la differenza fra il doppio della somma delle cifre medie e la somma delle cifre estreme è divisibile per 6, quel numero sommato con quello che si ottiene rovesciando le cifre è pure divisibile per 6.

Posto infatti il numero dato N sotto la forma

$$N = 1000\,m + 100\,c + d + u$$

si avrà per il numero rovesciato N^1

$$N^1 = 1000\,u + 100\,d + 10\,c + m\,.$$

e sommando membro a membro

$$N + N^1 = 1001\,(u + m) + 110\,(d + c)$$

od anche

$$N + N^1 = 1002\,(u + m) + 108\,(d + c) + \\ + 2\,(d + c) - (u + m)$$

da questa ultima eguaglianza si ricava la dimostrazione del teorema e del suo reciproco.

35. Trovare un numero x tale che la somma dei primi x interi sia un numero composto di tre cifre eguali.

Essendo la somma dei primi x numeri naturali espressa da $\frac{x\,(x+1)}{2}$ e dovendo per ipotesi una tal somma essere composta di tre cifre eguali, essa sarà divisibile per 111 e quindi anche per 3 e per 37 che ne sono i fattori; non può però essere differente dal 37 dovendo $\frac{x\,(x+1)}{2}$ essere composto di tre cifre; dovendo poi essere uno dei fattori divisibile per 3, si vede che bisogna porre

$$x + 1 = 37\,. \quad x = 36\,;$$

Infatti

$$\frac{37 \times 36}{2} = 666$$

36. Fra i divisori di un numero $N = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma . d^\delta$. quanti sono quelli che contengono K fattori primi differenti.

Dall'espressione della somma dei divisori si ricava che il numero cercato contiene tante unità quante ve ne sono nella somma dei prodotti K a K degli esponenti α, β, γ, δ dei fattori primi.

37. Si determini il numero primo p in modo che $p . 2^6$ sia eguale alla somma dei divisori.

Si ricorrerà alla formola che dà la somma dei divisori e si troverà $p = 127$.

38. Si generalizzi la precedente questione, supponendo che l'esponente del 2 sia un numero qualunque n.

39. Fra tutti i numeri che ammettono 30 divisori trovare il minimo.

Si trova $2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$.

40. Generalizzare la precedente questione.

41. Si determini una progressione geometrica di numeri interi tale che chiamando S la loro somma, si possano ottenere tutti i numeri inferiori ad S, sommando alcuni termini della progressione.

Poichè una siffatta progressione deve per necessità contenere i termini 1 e 2 non potrà essere che la seguente

$$1, 2, 2^2, 2^3 \ldots\ldots$$

Si verifica poi facilmente che essa soddisfa realmente alla condizione voluta, poichè ogni numero pari è una somma di potenze del 2, ed ogni dispari è eguale a una tal somma aumentata di una unità.

42. Se la somma delle cifre delle unità di due numeri dati è eguale a 10, i quadrati di questi numeri sono terminati colla medesima cifra.

Posto

$$a = 10 \, . \, d + u \qquad b = 10 \, . \, d_1 + u_1 \qquad u + u_1 = 10$$

Si faranno i quadrati di a e di b e si esprimerà u mediante u_1.

43. Determinare il numero m in modo che l'espressione $2\,(2 + m)$ sia un quadrato perfetto.

È necessario che m sia pari e quindi della forma $2\,.\,K$; l'espressione data diventa quindi $2^2\,(1 + K)$ e sarà quindi necessario e sufficiente che $1 + k$ sia un quadrato perfetto; da ciò si deduce k e quindi m.

44. Il quadrato di un numero primo (eccetto 2, 3) è un multiplo di 10 più o meno uno.

Si trovino i resti possibili di un numero primo diviso per 10 e si facciano i quadrati delle corrispondenti espressioni.

45. È possibile trovare dei multipli di a, b, c... che divisi per α, β, γ.... dieno sempre il medesimo resto K? Si dieno esempi numerici.

I numeri x cercati, diminuiti di K devono essere multipli di α, $\beta\,.\,\gamma$, ecc. e quindi anche di M loro minimo comune multiplo e però essi saranno della forma $My + K$ essendo y un numero arbitrario; ma affinchè essi sieno multipli di a, b, c.... e quindi del loro minimo comune multiplo P è necessario e sufficiente che sia soddisfatta in numeri interi l'eguaglianza.

$$Pz = My + K$$

e questa sarà soddisfatta, quando $\frac{P}{d}$ e $\frac{M}{d}$ sieno primi fra di loro essendo d il $M.C.D$ di P, M. K.

46. Trovare due numeri interi che differiscano di tre unità, conoscendo il loro prodotto.

Si deve avere

$$x(x-3) = n$$

ossia

$$x^2 - 3x = n.$$

e però si avrà

$$x^2 - 2x > n > x^2 - 4x$$

od anche

$$(x-1)^2 > n \geqq (x-2)^2$$

quindi $x - 2$ è la radice quadrata a meno uno del numero dato n.

Osservazione. — Questo problema si può applicare alla determinazione del numero dei lati di un poligono, di cui si conosce il numero totale delle diagonali differenti; è noto infatti che in un poligono di n lati il numero delle diagonali è rappresentato da $\frac{n(n-3)}{2}$.

47. Un numero perfetto (eguale alla somma dei suoi divisori, escluso il numero stesso) evidentemente non può essere nè un numero primo nè la potenza di un numero primo; e però si presenta naturale la domanda se un tal numero può essere della forma $a^m . b$, essendo a e b numeri primi.

Affinchè $a^m . b$ sia numero perfetto è necessario e sufficiente che

$$a^m b = (1 + a + a^2 + \ldots . a^m)(1 + b) - a^m . b .$$

ossia

$$a^m b = (1 + a + a^2 + \ldots . a^m) + (1 + a + a^2 \ldots . a^{m-1}) b .$$

od anche che

$$b \left\{ a^m - (1 + a + a^2 + \ldots . a^{m-1}) \right\} = a^m + \\ + (1 + a + a^2 + \ldots . a^{m-1})$$

ovvero

$$b = \frac{a^m + (1 + a + a^2 + \ldots . a^{m-1})}{a^m - (1 + a + a^2 + \ldots . a^{m-1})} \tag{1}$$

Affinchè il secondo membro rappresenti un numero intero è necessario (essendo a numero intero) che il denominatore sia eguale ad 1 e però deve essere

$$a^m - \frac{a^m - 1}{a - 1} = 1$$

od anche

$$(a^m - 1)(a - 2) = 0.$$

Ora dovendo essere $a > 1$, dall'ultima eguaglianza si ricava $a = 2$ e quindi dalla (1)

$$b = 1 + 2 + 2^2 + \dots 2^m.$$

e però il numero cercato è della forma

$$2^m (1 + 2 + 2^2 + \dots 2^m) = 2^m (2^{m+1} - 1) \quad (2)$$

colla condizione che $2^{m+1} - 1$ sia un numero primo.

È facile poi verificare mediante la formola che dà la somma dei divisori di un numero, che i numeri della forma (2) quando $2^{m+1} - 1$ è primo, sono perfetti.

Osservazione. — I numeri della forma (2) si chiamano numeri di Euclide perchè studiati dal geometra greco: essi sono tutti pari; si può dimostrare che ogni quadrato perfetto pari deve essere della forma (2) ma ancora non si conosce se possono esistere quadrati perfetti impari.

Ecco una piccola tavola dei primi numeri perfetti

$$\begin{aligned}
2\ (2^2 - 1) &= 6 \\
2^2\ (2^3 - 1) &= 28 \\
2^4\ (2^5 - 1) &= 146 \\
2^6\ (2^7 - 1) &= 8128 \\
2^{12}\ (2^{13} - 1) &= 33550336 \\
2^{16}\ (2^{17} - 1) &= 8589869056
\end{aligned}$$

48. Sapendo che è necessario, affinchè $2^{m+1} - 1$ sia primo, che sia primo $m + 1$, si dimostri che ogni numero perfetto è della forma

$$4^h (2 \times 4^h - 1) \text{ (fa eccezione il 6).}$$

Basterà porre al posto di m il numero pari $2h$.

49. Ogni numero perfetto pari differente dal 6 è un multiplo di 9 aumentato di 1.

Dopo aver provato direttamente che le potenze del 4 sono di una delle forme seguenti:

$$9 . K + 4 \qquad 9 . K - 2 \qquad 9 K + 1$$

si dedurrà dalla formola dei numeri perfetti data nell'esercizio 48, la dimostrazione del teorema.

50. Moltiplicando per 8 i numeri perfetti contenuti nella formola $2^m (2^{m+1} - 1)$ ed aggiungendo una unità al prodotto, si ottengono i quadrati dei numeri della forma $2^{m+2} - 1$.

Infatti

$$2^m (2^{m+1} - 1) . 2^3 + 1 = 2^{2m+4} - 2^{m+3} + 1 =$$
$$= (2^{m+2})^2 - 2 . 2^{m+2} + 1 = (2^{m+2} - 1)^2.$$

FINE

MANUALI HOEPLI

600

MANUALI HOEPLI

La collezione dei **MANUALI HOEPLI** *fu iniziata col fine di volgarizzare le scienze, di diffondere le lettere, trattare popolarmente le Arti, le Industrie e tutti gli argomenti della Vita pratica.*

Il grande successo e la sana vitalità di questa raccolta, ricca ormai di più che 600 volumi, è dovuto alla fama degli autori i quali sono tutti specialisti nelle materie che trattano, e sopratutto al fatto che qualunque Manuale di cui si fa una nuova edizione è sempre riveduto, corretto, aumentato, talvolta addirittura rifatto per tenerlo sempre all'altezza del progresso scientifico moderno. I Manuali Hoepli dunque, non si ristampano, ma si rinnovano continuamente.

Milano
1° Giugno, 1899

Ulrico Hoepli

Tutti i Manuali Hoepli sono elegantemente legati in tela.

AVVERTENZA

Tutti i MANUALI HOEPLI si spediscono **franco di porto** nel Regno. — Chi desidera ricevere i volumi raccomandati, onde evitare lo smarrimento, è pregato di aggiungere la sopratassa di raccomandazione.

I libri, non raccomandati, viaggiano a rischio e pericolo del committente.

600 - MANUALI HOEPLI - 600

Pubblicati sino al 1° Giugno 1899.

L. c.

Abitazioni. — *vedi* Fabbricati civili.

Abitazioni degli animali domestici, del Dott. U. Barpi, di pag. XVI-372, con 168 incisioni . . . . . 4 —

Abbreviature latine ed italiane. — *vedi* Dizionario.

Abiti. — *vedi* Confezioni d'abiti — Biancheria.

Acetilene (L'), del Dott. L. Castellani, di p. XVI-125. 2 —
— *vedi anche* Gaz.

Acido solforico, Acido nitrico, Solfato sodico, Acido muriatico (Fabbricazione dell'), del Dott. V. Vender, di pag. VIII-312, con 107 inc. e molte tabelle. 3 50

Acque (Le) **minerali e termali del Regno d'Italia,** di Luigi Tioli. Topografia — Analisi — Elenchi — Denominazione delle acque — Malattie per le quali si prescrivono — Comuni in cui scaturiscono — Stabilimenti e loro proprietarî — Acque e fanghi in commercio — Negozianti d'acque minerali, di pag. XXII-552. 5 50

Acustica. — *vedi* Luce e suono.

Adulterazione e falsificazione degli alimenti, del Dott. Prof. L. Gabba, di pagine VIII-211 . . . 2 —

Agricoltore. — *vedi* Prontuario.

Agricoltura. — *vedi* Computisteria agraria — Cooperative rurali — Estimo — Igiene rurale — Legislazione rurale — Macchine agricole — Malattie crittogamiche — Mezzeria — Selvicoltura.

Agronomia, del Prof. Carega di Muricce, 3ª ediz. riveduta ed ampliata dall'autore, di pag. XII-210 . . 1 50

Agronomia e agricoltura moderna, di G. Soldani, di pag. XII-404 con 134 inc. e 2 tav. cromolitograf. 3 50
— *vedi anche* Prontuario dell'agricoltore.

L. c.

Agrumi (Coltivazione, malattie e commercio degli), di A. Aloi. (In lavoro).

Alcool (Fabbricazione e materie prime), di F. Cantamessa, di pag. XII-307, con 24 incisioni . . . . . . 3 —

— *vedi anche* Cognac — Liquorista.

Algebra complementare, del Prof. S. Pincherle:

Parte I. *Analisi algebrica,* di pag. VIII-174 . . . 1 50

Parte II. *Teoria delle equazioni,* p. IV-169 con 4 inc. 1 50

Algebra elementare, del Prof. S. Pincherle, 7ª edizione, di pag. VIII-210 . . . . 1 50

— *vedi anche* Determinanti — Esercizi di algebra — Formulario scolastico di matematica.

Alighieri (Dante). — *vedi* Dantologia.

Alimentazione, di G. Strafforello, di pag. VIII-122. 2 —

— *vedi anche* Adulterazione alimenti — Analisi di sostanze alimentari — Conserve alimentari — Frumento e mais — Funghi mangerecci — Latte, burro e cacio — Panificazione razionale — Tartufi e funghi.

Alimentazione del bestiame, dei Proff. Menozzi e Niccoli, di pag. XVI-400 con molte tabelle. . . . 4 —

— *vedi anche* Bestiame.

Alluminio (L'), di C. Formenti, di pag. XXVIII-324 . 3 50

Alluminio. — *vedi* Leghe metalliche — Galvanoplastica — Galvanostegia — Metallocromia.

Aloè. — *vedi* Prodotti agricoli.

Alpi (Le), di J. Ball, trad. di I. Cremona, pag. VI-120. 1 50

Alpinismo, di G. Brocherel, di pag. VIII-312 . . . 3 —

— *vedi anche* Dizionario alpino — Prealpi bergamasche.

Amalgame. — *vedi* Leghe metalliche.

Amarico. — *vedi* Dizionario eritreo — Lingue dell'Africa.

Amatore (L') **di Maioliche e Porcellane,** di L. De Mauri, illustrato da splendide **incisioni in nero,** da **12 superbe tavole a colori** e da **3000 marche.** — Contiene: Tecnica della fabbricazione — Sguardo generale sulla storia delle Ceramiche dai primi tempi fino ai giorni nostri — Cenni Storici ed Artistici su tutte le Fabbriche — Raccolta di 3000 marche corredate ognuna di notizie relative, e coordinate ai Cenni Storici in modo che le ricerche riescano di *esito immediato* — Dizionario di termini Artistici aventi relazione coll'Arte Ceramica e di oggetti Ceramici speciali, coi prezzi correnti. Bibliografia ceramica, indici varî, di p. XII-650. 12 50

L. c.

Amatore (L') di oggetti d'arte e di curiosità, di L. De Mauri, di 600 pag. adorno di numerose incisioni e marche. Contiene le materie seguenti: Pittura — Incisione — Scoltura in avorio — Piccola scoltura — Vetri — Mobili — Smalti — Ventagli — Tabacchiere — Orologi — Vasellame di stagno — Armi ed armature — Dizionario complementare di altri infiniti oggetti d'arte e di curiosità, di pag. XII-580. 6 50

Amministrazione. — *vedi* Computisteria — Contabilità — Ragioneria.

Analisi chimica (Manuale di), del Prof. P. E. Alessandri. (In lavoro).

Analisi di sostanze alimentari, del Prof. P. E. Alessandri. (In lavoro).

Analisi del vino, ad uso dei chimici e dei legali, del Dott. M. Barth, con prefazione del Dott. I. Nessler, traduzione del Prof. E. Comboni, 2ª edizione, di pag. 142, con 7 inc. intercalate nel testo. (In lavoro).

— *vedi anche* Enologia — Vini.

Analisi matematica. — *vedi* Repertorio.

Analisi volumetrica applicata ai prodotti commerciali e industriali, del Prof. P. E. Alessandri, di pag. X-342, con 52 incisioni 4 50

Ananas. — *vedi* Prodotti agricoli.

Anatomia e fisiologia comparate, del Prof. R. Besta, di pag. VII-218 con 34 incisioni 1 50

Anatomia microscopica (Tecnica di), del Prof. D. Carazzi, di pag. XI-211, con 5 incisioni 1 50

— *vedi anche* Microscopio.

Anatomia pittorica, del Prof. A. Lombardini, 2ª ediz. riveduta e ampliata, di pag. VIII-168, con 53 inc. 2 —

Anatomia topografica, del Dott. Prof. C. Falcone, di pag. XV-395, con 30 incisioni (volume doppio) . . 3 —

Anatomia vegetale, del Dottor A. Tognini, di pagine XVI-274 con 141 incisioni (volume doppio) . . . 3 —

Anfibi. — *vedi* Zoologia.

Animali da cortile, del Prof. P. Bonizzi, di pagine XIV-238 con 39 incisioni. . . . . 2 —

— *vedi anche* Abitazioni animali — Cane — Colombi — Coniglicoltura — Majale — Pollicoltura.

Animali domestici. — *vedi* Abitazioni — Alimentazione del bestiame — Bestiame — Cane — Cavallo.

L. c.

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo,** del Prof. F. Mercanti, di pag. IV-179, con 33 incisioni 1 50
— *vedi anche* Zoonosi.

Antichità assira, babilonese, egiziaca e fenicia. — *vedi* Mitologie orientali.

Antichità greche, del Prof. V. Inama. (In lavoro).
— *vedi anche* Mitologia greca.

Antichità private dei romani, del Prof. W. Kopp, traduzione con note ed aggiunte del Prof. N. Moreschi, 2ª edizione, di pagine XII-130 . . . . 1 50
— *vedi anche* Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di Maioliche e Porcellane — Archeologia.

Antisettici. — *vedi* Medicatura antisettica.

Antropologia, del Prof. G. Canestrini, 3ª edizione, di pag. VI-239, con 21 incisioni 1 50

Apicoltura del Prof. G. Canestrini, 3ª edizione riveduta di pag. IV-215, con 43 incisioni . . . . . . 2 —

Arabo volgare, di De Sterlich e Dib Khaddag. Raccolta di 1200 vocaboli e 600 frasi usuali, 2ª ediz. (In lav.).

Araldica (Grammatica), di F. Tribolati, 3ª edizione, di pag. VIII-120, con 98 inc. e un'append. sulle "Livree„. 2 50
— *vedi anche* Vocabolario araldico.

Archeologia dell'arte, del Prof. I. Gentile:
Parte I. *Storia dell'arte greca*, testo, 3ª ed. (In lav.).
" *Atlante di 149 tavole*, e indice . . . . . 4 —
Parte II. *Storia dell'arte etrusca e romana*. testo. 2ª ediz. di pag. IV-228. . . . . 2 —
" *Atlante di 79 tavole*, e indice . . . . . 2 —
— *vedi anche* Antichità privata dei romani.

Architettura (Manuale di) **italiana,** antica e moderna di A. Melani, 3ª edizione rifatta con 131 inc. e 70 tavole di pag. XXVIII-460 . . . . 6 —

Argentatura. — *vedi* Galvanoplastica — Galvanostegia — Metalli preziosi — Piccole industrie.

Aritmetica pratica, del Prof. Dott. F. Panizza, 2ª edizione riveduta, di pag. VIII-188 . . . . 1 50

Aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. Panizza, 3ª ediz. riveduta d pag. XII-210. . . . . 1 50
— *vedi anche* Esercizi di aritmetica razionale — Formulario scolastico di matematica.

Armi e armature. — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità — Storia dell'arte militare.

L. c.

Armonia (Manuale di), del Prof. G. BERNARDI, con prefazione di E. ROSSI, di pag. XII-288 . . . . . . 3 50
— *vedi anche* Mandolinista — Musica da camera — Pianista — Storia della musica — Strumentazione.

Arte antica. — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di Maioliche e porcellane — Archeologia — Architettura — Decorazione e industrie — Pittura — Restauratore dipinti — Scoltura.

Arte del dire (L'), del Prof. D. FERRARI, Manuale di retorica per lo studente delle Scuole secondarie, 4ª ediz. corretta, di pag. XVI-288 con quadri sinottici. 1 50
— *vedi anche* Rettorica — Ritmica — Stilistica.

Arte della memoria (L'), sua storia e teoria (parte scientifica). Mnemotecnia Triforme (parte pratica) del Generale B. PLEBANI, di pag. XXXII-224 con 13 illustr. 2 50

Arte militare. — *vedi* Storia dell'arte militare.

Arte mineraria, dell'Ing. Prof. V. ZOPPETTI, di pagine IV-192, con 112 figure in 14 tavole . . . . . . 2 —

Arti (Le) **grafiche fotomeccaniche** ossia la Eliografia nelle diverse applicazioni (Fotozincotipia, fotozincografia, fotolitografia, fotocollografia, fotosilografia, sincromia, ecc.), con un Dizionarietto tecnico e un cenno storico sulle arti grafiche; 2ª ediz. corretta ed accresciuta, con molte illustrazioni, di pag. VIII-197 con 12 tavole . . . . 2 —
— *vedi anche* Carte fotografiche — Dizionario fotografico — Fotografia per dilettanti — Fotografia industriale — Fotocromatografia — Fotografia ortocromatica — Litografia — Processi fotomeccanici — Proiezioni — Ricettario fotografico.

Asfalto (L'), fabbricazione, applicazione, dell'Ing. E. RIGHETTI, con 22 incisioni, di pag. VIII-152 . . . . 2 —

Assicurazione in generale, di U. GOBBI, di p. XII-308. 3 —

Assicurazione sulla vita, di C. PAGANI, di p. VI-151. 1 50

Assistenza degli infermi nell'ospedale ed in famiglia, del Dott. C. CALLIANO, 2ª ed., p. XXIV-448, 7 tav. 4 50
— *vedi anche* Igiene — Impiego ipodermico — Materia medica — Medicatura antisettica — Organoterapia — Raggi Röntgen — Semeiotica — Sieroterapia — Soccorsi d'urgenza — Tisici.

Astronomia, di J. N. LOCKYER, nuova versione libera con note ed aggiunte del Prof. G. CELORIA, 4ª ediz.,

L. c.

di pagine XI-258 con 51 incisioni 1 50
— *vedi anche* Cosmografia — Gnomonica — Gravitazione — Ottica — Spettroscopio.

Astronomia nautica, del Prof. G. NACCARI, di pagine XVI-320, con 46 inc. e tav. numeriche (vol. doppio). 3 —

Atene, di S. AMBROSOLI, con molte illustraz. (In lav.).

Atlante geografico-storico dell'Italia, del Dott. G. GAROLLO, 24 tav. con pag. VIII-67 di testo e un'appen. 2 —

Atlante geografico universale, di KIEPERT, con notizie geografiche e statistiche del Dott. G. GAROLLO, 9ª ediz. (dalla 81000 alla 90000 copia), con 26 carte, testo e indice alfabetico . . . . 2 —

Atmosfera. — *vedi* Igroscopi e igrometri.

Attrezzatura, manovra delle navi e segnalazioni marittime, di F. IMPERATO, 2ª edizione ampliata, di p. XXVIII 594, con 305 inc. e 24 tav. in cromolit. riproducenti le bandiere marittime di tutte le nazioni. 6 —
— *vedi anche* Canottaggio — Codice di marina — Costruttore navale — Doveri del macchinista navale — Ing. navale — Filonauta — Macchinista navale — Marine (Le) da guerra — Marino militare, ecc.

Autografi. — *vedi* Raccoglitore d'.

Automobilista (Manuale dell') **e guida del meccanico conduttore d'automobili.** Trattato sulla costruzione dei veicoli semoventi, dedicato agli automobilisti italiani, agli amatori d'automobilismo in genere, agli inventori, ai dilettanti di meccanica ciclistica, ecc., del Dott. G. PEDRETTI, di pag. XVI-500, con 191 incisioni 5 50

Avicoltura. — *vedi* Animali da cortile — Colombi — Pollicoltura.

Avvelenamenti. — *vedi* Veleni.

Bachi da seta, del Prof. T. NENCI, di pag. IV-276, 3ª ediz. con 41 incisioni e 2 tavole. (In lavoro).
— *vedi anche* Gelsicoltura — Industria della seta — — Tintura della seta.

Balistica. — *vedi* Esplodenti — Pirotecnia — Storia dell'arte militare antica e moderna — Telemetria.

Ballo (Manuale del) di F. GAVINA, di pag. VIII-239, con 99 figure. Contiene: Storia della danza. Balli girati. Cotillon. Danze locali. Feste di ballo. Igiene del ballo. 2 50

Banano. — *vedi* Prodotti agricoli.

L. c.

Barbabietola da zucchero. — *vedi* Industria dello zucchero.

Batteriologia, dei Professori G. e R. Canestrini, 2ª ediz. in gran parte rifatta, di pag. x-274 con 37 inc. 1 50
— *vedi anche* Anatomia microscopica — Animali parassiti — Microscopio — Protistologia — Tecnica protistologica.

Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia, del Prof. F. Alberti, di pag. VIII-312, con 22 zincotipie . . . 2 50
— *vedi* Abitazioni animale — Alimentazione del bestiame — Cavallo — Igiene veterinaria — Zootecnia.

Biancheria. — *vedi* Confezioni d'abiti — Disegno, taglio e confezione di biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi.

Bibbia (Man. della), di G. M. Zampini, di pag. XII-308. 2 50

Bibliografia, di G. Ottino, 2ª ediz., riveduta di pagine IV-166, con 17 incisioni . . . . 2 —
— *vedi anche* Dizionario bibliografico.

Bibliotecario (Manuale del), di G. Petzholdt, tradotto sulla 3ª edizione tedesca, con un'appendice originale di note illustrative, di norme legislative e amministrative e con un elenco delle pubbliche biblioteche italiane e straniere, per cura di G. Biagi e G. Fumagalli, di pag. XX-364-CCXIII. 7 50
— *vedi anche* Bibliografia — Dizionario bibliografico.

Biliardo (Il giuoco del), del Comm. J. Gelli, di pagine XV-179, con 79 illustrazioni 2 50

Biografia. — *vedi* Cristoforo Colombo — Dantologia — Manzoni — Napoleone I — Omero — Shakespeare.

Bitume. — *vedi* Asfalto.

Bollo. — *vedi* Codice del bollo — Registro e Bollo.

Borsa (Operaz. di). — *vedi* Debito pubb. — Valori pubb.

Boschi. — *vedi* Selvicoltura.

Botanica, del Prof. I. D. Hooker, traduzione del Prof. N. Pedicino, 4ª ediz., di pag. VIII-134, con 68 inc. 1 50
— *vedi anche* Anatomia vegetale — Fisiologia vegetale — Funghi mangerecci — Malattie crittogamiche — Tabacco — Tartufi e funghi.

Buddismo, di E. Pavolini, di pag. XVI-164 . . . . . 1 50
— *vedi anche* Religioni e lingue dell'India inglese.

Botti. — *vedi* Enologia.

Box. — *vedi* Pugilato.

Bronzatura. — *vedi* Metallocromia.

Bronzo. — *vedi* Leghe metalliche.

L. c.

Burro. — *vedi* Latte — Caseificio.
Cacao. — *vedi* Prodotti agricoli.
Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, 2ª edizione rifatta, di pag. XIII-315, con 48 incisioni . . . 2 50
— *vedi anche* Cane (Allevatore del),
Cacio. — *vedi* Bestiame — Caseificio — Latte, ecc.
Caffè. — *vedi* Prodotti agricoli.
Calcestruzzo. — *vedi* Costruzioni.
Calci e Cementi (Impiego delle), per l'Ing. L. MAZZOCCHI, di pag. XII-212 con 49 incisioni . . . . . 2 —
Calcolazioni mercantili e bancarie. — *vedi* Interesse e sconto — Prontuario del ragioniere.
Calcolo infinitesimale, del Prof. E. PASCAL:
Parte I. *Calcolo differenziale*, di pag. IX-316 con 10 incisioni (volume doppio) . . . . . . 3 —
" II. *Calcolo integrale*, di pag. VI-318 con 15 incisioni (volume doppio). . . . . 3 —
" III. *Calcolo delle variazioni e Calcolo delle differenze finite*, di p. XII-330 (vol. doppio). 3 —
— *vedi anche* Esercizi di calcolo — Funzioni ellittiche — Repertorio di matematiche.
Calligrafia (Manuale di). Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d'insegnamento, con 55 tavole di modelli dei principali caratteri conformi ai programmi, del Prof. R. PERCOSSI, con 38 fac-simili di scritture, eleg. leg., tascabile, con leggío annesso al manuale per tenere il modello. 3 —
— *vedi anche* Dizionario di abbreviature latine — Grafologia — Monogrammi — Ornatista — Paleografia — Roccoglitore di autografi.
Calore (Il), del Dott. E. JONES, trad. di U. FORNARI, di pag. VIII-296, con 98 incisioni (volume doppio) . . 3 —
Cancelliere. — *vedi* Conciliatore.
Candele. — *vedi* Industria stearica.
Cane (Manuale dell'amatore ed allevatore del), di ANGELO VECCHIO, di pag. XVI-403, con 129 inc. e 51 tav. 6 50
— *vedi anche* Cacciatore.
Canottaggio (Manuale di), del Cap. G. CROPPI, di pagine XXIV-456, con 387 incisioni e 31 tavole cromolit. 7 50
— *vedi anche* Attrezzatura — Filonauta — Marino.
Cantante (Man. del), di L. MASTRIGLI, di pag. XII-132. 2 —
Cantiniere (Il). Manuale di vinificazione per uso dei

L. c.

cantinieri, di A. STRUCCHI, 3ª edizione riveduta ed aumentata, con 52 incisioni unite al testo, una tabella completa per la riduzione del peso degli spiriti, ed un'Appendice sulla produzione e commercio del vino in Italia, di pag. XVI-256 . . . . 2 —
— *vedi anche* Enologia — Vino.
Carburo di calcio. — *vedi* Acetilene.
Carta. — *vedi* L'industria della.
Carte fotografiche. Preparazione e trattamento, del Dott. L. SASSI, di pag. XII-353 . . . . 3 50
Carte geografiche. — *vedi* Atlante.
Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto sulla storia della Cartografia, del Prof. E. GELCICH, di pag. VI-257, con 37 illustrazioni . . . . . 2 —
— *vedi anche* Celerimensura — Disegno topografico — Telemetria — Triangolazione.
Case coloniche. — *vedi* Economia fabbricati rurali.
Caseificio, di L. MANETTI, 3ª ediz. nuovamente ampliata dal Prof. G. SARTORI, di pag. VIII 256 con 40 incis. 2 —
— *vedi anche* Bestiame — Latte, burro e cacio.
Catasto (Il nuovo) **italiano,** dell'Avv. E. BRUNI, di pag. VII-346 (volume doppio) . . . . 3 —
— *vedi anche* Imposte dirette — Ipoteche — Ricchezza mobile.
Cavallo (Il), del Colonnello C. VOLPINI, 2ª edizione riveduta ed ampliata di pag. VI-165, con 8 tavole . . 2 50
— *v. anche* Dizionario termini delle corse — Proverbi.
Cavi telegrafici sottomarini. Costruzione, immersione, riparazione, dell'Ing. E. JONA, di pag. XVI-338, 188 fig. e 1 carta delle comunicaz. telegraf. sottomarine. 5 50
— *vedi anche* Telegrafia.
Celerimensura e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. BORLETTI, di pag. VI-148 con 29 inc. 3 50
Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ing. G. ORLANDI, di p. 1200 con quadro generale d'interpolazioni. 18 —
Cemento. — *vedi* Calci e cementi — Costruzioni.
Cementazione. — *vedi* Tempera.
Ceralacca. — *vedi* Vernici e lacche.
Ceramiche. — *vedi* Amatore di Maioliche e Porcellane.
Chimica, del Prof. H. E. ROSCOE, traduzione del Prof. A. PAVESI, di pag. VI-24, con 36 incisioni, 5ª ediz. rifatta dal Prof. E. RICCI. (In lavoro).

L. c.

— *vedi anche* Acetilene — Acido solforico — Analisi chimica — Chimico — Tintore — Tintura della seta.

Chimica agraria, del Prof. Dott. A. ADUCCO, p. VIII-328. 2 50

— *vedi anche* Concimi — Humus.

Chimica fotografica, del Prof. R. NAMIAS. (In lav.).

Chimico (Manuale del) **e dell'industriale.** Raccolta di tabelle, di dati fisici e chimici e di processi d'analisi tecnica ad uso dei chimici analitici e tecnici, dei direttori di fabbriche, dei fabbricanti di prodotti chimici, degli studenti di chimica, ecc., ecc., del Dottor L. GABBA, 2ª ediz. ampliata ed arricchita delle tavole analitiche di H. WILL, di pag. XVI-442, con 12 tabelle. 5 50

Classificazione delle scienze, di C. TRIVERO. (In lavoro).

Climatologia, del Dott. L. DE MARCHI, di p. X-204, con 6 carte 1 50

— *vedi* Geografia fisica — Igroscopi — Meteorologia.

Coca. — *vedi* Prodotti agricoli.

Cocco. — *vedi* Prodotti agricoli.

Codice cavalleresco italiano (Tecnica del duello), opera premiata con medaglia d'oro, del Comm. J. GELLI, 8ª ediz. riveduta di pag. XV-272. . . . . 2 50

— *vedi anche* Duellante — Scherma italiana.

Codice del bollo (Il). Nuovo testo unico commentato colle risoluzioni amministrative e le massime di giurisprudenza, ecc., di E. CORSI, di pag. C-564 . . . . 4 50

Codice civile del Regno d'Italia, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, di pag. IV-216. 1 50

Codice di commercio, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, di pag. IV-148 . . . . . 1 50

Codice doganale italiano con commento e note, dell'Avv. E. BRUNI, di pag. XX-1078 con 4 inc. 6 50

— *vedi anche* Trasporti e tariffe.

Codice di Marina Mercantile, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, di pag. IV-260 . . . . 1 50

Codice metrico internazionale. — *vedi* Metrologia.

Codice penale e di procedura penale, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, di pag. IV-211 . . . . . . 1 50

L. c.

Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo, secondo il testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, di pag. IV-163. . . . . 1 50

Codice del perito misuratore, degli ing. L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI. (In lavoro).

Codice di procedura civile, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato dal Prof. Avv. L. FRANCHI, di pag. IV-154. . 1 50

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale coordinati e annotati dal Prof. Avv. L. FRANCHI, raccolti in 3 grossi vol. legati in tutta pelle flessibile.

Vol. I. Codice civile — di procedura civile — di commercio — penale — procedura penale — della marina mercantile — penale per l'esercito — penale militare marittimo (*otto codici*), di pag. VI-1160 . . . . . . 7 50

Vol. II. Parte I. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ed estesa applicazione in Italia; con annessi decreti e regolamenti e disposte secondo l'ordine alfabetico delle materie. Dalla voce " Abbordi in mare „ alla voce " Istruzione pubblica (Legge Casati), „ di pag. VIII-1364 a 2 colonne . . . . 9 —

Vol. II. Parte II ed ultima è in lavoro.

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di DAL PIAZ, corredato di annotazioni del Cav. G. PRATO, di pag. X-168, con 37 incisioni . . . . . . 2 —

— *vedi anche* Alcool — Densità dei mosti — Liquorista.

Coleotteri italiani, del Dott. A. GRIFFINI, (Entomologia I) di pag. XVI-334 con 215 inc. (vol. doppio) 3 —

— *vedi anche* Animali parassiti — Ditteri — Imenotteri — Lepidotteri.

Collezioni. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte — Amatore di maioliche — Dizionario filatelico — Raccoglitore d'autografi.

Colombi domestici e colombicoltura, del Prof. P. BONIZZI, di pagine VI-210, con 29 incisioni . . . 2 —

— *vedi anche* Animali da cortile — Pollicoltura.

Colorazione dei metalli. — *vedi* Metallocromia.

L. c.

Colori e la pittura (La scienza dei), del Prof. L. GUAITA, di pag. 248 . . . . 2 —
— *vedi anche* Dilettante di pittura — Pittura — Ristauratore di dipinti.

Colori e vernici, di G. GORINI, 3ª ediz. totalmente rifatta, per l'Ing. G. APPIANI, di pag. x-282, con 13 inc. 2 —
— *vedi anche* Luce e colori. — Vernici.

Coltivazione ed industrie delle piante tessili, propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pag. XII-476, con 72 inc. 5 —
— *vedi anche* Filatura — Tessitore.

Commercio. — *vedi* Codice — Corrispondenza commerciale — Computisteria — Geografia commerciale — Industria zucchero, Il — Mandato — Merciologia — Produzione e commercio del vino — Ragioneria — Scritture d'affari — Trasporti e tariffe.

Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. CROTTI, di pag. IV-160 . . . . 2 —

Compositore-Tipografo (Manuale dell'allievo), di S. LANDI. — *vedi* Tipografia, vol. II.

Computisteria, del Prof. V. GITTI:
Vol. I. Computisteria commerciale, 4ª ed., di p. IV-184. 1 50
Vol. II. Computisteria finanziaria, 3ª ed., di p. VIII-156. 1 50
— *vedi anche* Contabilità — Interessi e sconti — Logismografia — Ragioneria.

Computisteria agraria, del Prof. L. PETRI, nuova edizione rifatta. (In lavoro).

Concia delle pelli ed arti affini, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210. . . . . . . 2 —

Conciliatore (Manuale del), dell'AVV. G. PATTACINI. Guida teorico-pratica con formulario completo pel Conciliatore, Cancelliere, Usciere e Patrocinatore di cause. 3ª edizione ampliata dall'autore e messa in armonia con l'ultima legge 28 luglio 1895, di pag. x-465 . . 3 —

Concimi, del Prof. A. FUNARO, di pag. VII-253 . . . 2 —
— *vedi anche* Chimica agraria — Humus.

L. c.

Confezione d'abiti per signora e l'arte del taglio, compilato da EMILIA COVA. di pag. VIII-91, con 40 tav. 3 —
— *vedi* Disegno, taglio e confezione di biancheria — Macchine per cucire.

Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI, di pagine VIII-173, con 141 incisioni e 9 tavole in sincromia. 2 50

Conservazione delle sostanze alimentari, di G. GORINI, 3ª ediz. interamente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. VIII-256 . . . 2 —

Consigli pratici. — *vedi* Ricettario domestico — Ricettario industriale — Soccorsi d'urgenza.

Contabilità comunale, secondo le nuove disposizioni legislative e regolamentari (Testo unico 10 febb. 1889 e R. Decr. 6 lug. 1890), del Prof. A. DE BRUN, di p. VIII-244. 1 50
— *vedi anche* Diritto amministrativo — Legge comunale.

Contabilità domestica, Nozioni amministrativo-Contabili ad uso delle famiglie e delle scuole femminili, del rag. O. BERGAMASCHI, di pag. XVI-186 . . . 1 50
— *vedi anche* Ricettario domestico.

Contabilità generale dello Stato, dell'Avv. E. BRUNI, pag. VII-422 (volume doppio) . . . . 3 —
— *vedi anche* Computisteria.

Conversazione italiana e tedesca (Manuale di), ossia guida completa per chiunque voglia esprimersi con proprietà e speditezza in ambe le lingue, e per servire di *vade mecum* ai viaggiatori, di A. FIORI, 8ª edizione rifatta da G. CATTANEO, di pag. XIV-400. 3 50

Conversazione. — *vedi* Dottrina popolare in quattro lingue — Fraseologia francese-volapük.

Cooperative rurali, di credito, di lavoro, di produzione, di assicurazione, di mutuo soccorso, di consumo, di acquisto di materie prime, di vendita di prodotti agrari. Scopo, costituzione, norme giuridiche, tecniche, amministrative, computistiche, del Prof. V. NICCOLI, di pag. VIII-362 . . . . 3 50

Corami. — *vedi* Concia pelli.

Corazzate. — *vedi* Marine da guerra.

Corrispondenza commerciale italiana, di E. GAGLIARDI. (In lavoro).
— *vedi anche* Scritture d'affari.

Corrispondenza in cifre. — *vedi* Crittografia.

L. c.

Corse. — *vedi* Dizionario dei termini delle — Cavallo — Proverbi.

Cosmografia. *Uno sguardo all' Universo*, di B. M. La Leta, di pag. XII-197, con 11 incisioni e 3 tavole. 1 50

Costituzione degli Stati. — *vedi* Diritti e doveri — Ordinamento.

Costruttore di macchine a vapore (Manuale del), di H. Haeder. Ediz. ital. compilata sulla 5ª ediz. tedesca, con notev. aggiunte dell'Ing. E. Webber, di p. XVI-452, con 1444 inc. e 244 tab., leg. in bulgaro rosso. . . . 7 —

— *vedi anche* Disegnatore meccanico — Ingegnere navale — Meccanica — Meccanico (Il) — Meccanismi (500) — Modellatore meccanico.

Costruttore navale (Manuale del), di G. Rossi, di pag. XVI-517, con 231 figure interc. nel testo e 65 tabelle. 6 —

— *vedi anche* Attrezzatura — Canottaggio — Doveri del macchinista navale — Filonauta — Ingegnere nav. — Macchin. nav. — Marine da guerra — Marino.

Costruzioni. — *vedi* Abitazioni animali domestici — Calci e cementi — Curve — Fabbricati civili — Fognatura cittadina — Ingegnere civile — Ingegneria legale — Lavori in terra — Momenti resistenti — Peso metalli — Resistenza dei materiali — Riscaldamento e ventilazione.

Costruzioni in calcestruzzo ed in cementi armati, dell'Ing. G. Vacchelli. (In lavoro).

Cotone. — *vedi* Prodotti agricoli.

Cristallo. — *vedi* Fabbricazione degli specchi.

Cristallografia geometrica, fisica e chimica, applicata ai minerali, del Prof. E. Sansoni, di pagine XVI-368, con 284 incisioni nel testo (vol. doppio). 3 —

Cristoforo Colombo, del Prof. V. Bellio, con 10 incisioni, di pag. IV-136. . . . . 1 50

Crittogame. — *vedi* Funghi — Malattie crittog. — Tartufi.

Crittografia (La) diplomatica, militare e commerciale, ossia l'arte di cifrare o decifrare le corrispondenze segrete. Saggio del conte L. Gioppi, di pag. 177 . . 3 50

Cronologia. — *vedi* Storia e cronologia.

Cubatura dei legnami (Prontuario per la), di G. Belluomini, 3ª ediz. aumentata e corretta, di pag. 204. 2 50

Cuoio. — *vedi* Concia delle pelli.

Curiosità. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di Maioliche e Porcellane.

L. c.

Curve. Manuale pel tracciamento delle curve delle Ferrovie e Strade carrettiere di G. H. KRÖHNKE, traduzione di L. LORIA, 2ª ediz., di pag. 164, con 1 tav. 2 50

Dantologia, del Dott. G. A. SCARTAZZINI, 2ª edizione. Vita ed Opere di Dante Alighieri, di pagine VI-408. 3 —

Danza. — *vedi* Ballo.

Datteri. — *vedi* Prodotti agricoli.

Debito (Il) **pubblico italiano** e le regole e i modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. AZZONI, di pag. VIII-376 (volume doppio) . . . . 3 —

— *vedi anche* Valori pubblici.

Decorazione dei metalli. — *vedi* Metallocromia.

Decorazione del vetro. — *vedi* Fabbricaz. degli specchi.

Decorazione e industrie artistiche, dell'Architetto A. MELANI, 2 volumi, di pag. XX-460, con 118 incisioni . . . . 6 —

— *vedi anche* L'Amatore di oggetti d'arte — Amatore di Maioliche e Porcellane — Piccole Industrie.

Densità (La) **dei mosti, dei vini e degli spiriti ed i problemi che ne dipendono** — ad uso degli enochimici, degli enotecnici e dei distillat., di E. DE CILLIS, di pag. XVI-230, con 11 figure e 46 tavole . . . 2 —

— *vedi anche* Cognac — Enologia — Liquorista — Vini.

Determinanti e applicazioni, del Prof. E. PASCAL, di pag. VIII-330 (volume doppio) . . . . 3 —

Dialetti italici. Grammatica, iscrizione e lessico, di O. NAZARI. (In lavoro).

Dialetti letterari greci (epico, neo-ionico, dorico, eolico), del Prof. G. B. BONINO, di pag. XXXII-214. . 1 50

Didattica per gli alunni delle scuole normali e pei maestri elementari del Prof. G. SOLI, di pag. VIII-214. 1 50

Digesto (Il), del Prof. C. FERRINI, di pag. IV-134 . . 1 50

Dilettante di pittura (Il), **ad olio, acquarello e miniatura,** di G. RONDETTI. (In lavoro).

Dinamica elementare, del Dott. C. CATTANEO, di pag. VIII-146, con 25 figure 1 50

— *vedi anche* Termodinamica.

Dinamite. — *vedi* Esplodenti.

Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche scuole, del Prof. D. MAFFIOLI, 9ª ediz., di pag. XVI-229 . . . . 1 50

L. c.

Diritto amministrativo giusta i programmi governativi, ad uso degli Istituti tecnici, del Prof. G. LORIS, 4ª edizione, di pag. XX-521 (volume doppio) . . . . 3 —
Diritto civile, del Prof. G. LORIS, giusta i programmi governativi ad uso degli Istituti tecnici, di pag. XVI-336. 3 —
Diritto civile italiano, del Prof. C. ALBICINI, di pag. VIII-128 . . . . 1 50
— *vedi anche* Codice civile — Codice di proced. civile.
Diritto commerciale italiano, del Prof. E. VIDARI, 2ª edizione diligentemente riveduta, di pag. X-448 (volume doppio) . . . . 3 —
— *vedi anche* Codice commerciale — Mandato.
Diritto comunale e provinciale. — *vedi* Contabilità comunale — Diritto amministrativo — Legge comunale.
Diritto costituzionale, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, 2ª edizione, di pag. XVI-370 (volume doppio). . 3 —
Diritto ecclesiastico, di C. OLMO, di pagine XII-472. 3 —
Diritto internazionale privato, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, di pag, XVI-392 (volume doppio) . . . 3 —
Diritto internazionale pubblico, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, di pag. XII-320 (volume doppio) . . . 3 —
Diritto penale, dell'Avv. A. STOPPATO, di p. VIII-192. 1 50
— *vedi anche* Codice penale e di procedura penale — Codice penale militare e penale militare marittimo.
Diritto penale romano, del Prof. C. FERRINI, di pag. VIII-360 (volume doppio) . . . . 3 —
Diritto romano, del Prof. C. FERRINI, 2ª ediz. rifatta, di pag. XVI-178 . . . . 1 50
Disegnatore meccanico e nozioni tecniche generali di Aritmetica, Geometria, Algebra, Prospettiva, Resistenza dei materiali, Apparecchi idraulici, Macchine semplici ed a vapore, Propulsori, per V. GOFFI, 2ª edizione riveduta, di pag. XXI-435, con 363 figure . . 5 —
— *vedi anche* Disegno industriale — Meccanica — Meccanico — Meccanismi (500) — Modellatore meccanico.
Disegno. I principii del Disegno, del Prof. C. BOITO, 4ª edizione, di pag. IV-206, con 61 silografie . . . . 2 —
— *vedi anche* Ornatista.
Disegno assonometrico, del Prof. P. PAOLONI, di pag. IV-122 con 21 tavole e 23 figure nel testo . . . 2 —
Disegno geometrico, del Prof. A. ANTILLI, 2ª ediz., di pag. VIII-88, con 6 figure nel testo e 27 tav. litogr. 2 —

L. c.

Disegno industriale, di E. Giorli. Corso regolare di disegno geometrico e delle proiezioni. Degli sviluppi delle superfici dei solidi. Della costruzione dei principali organi delle macchine. Macchine utensili, di pagine VIII-218, con 206 problemi risolti e 261 figure . 2 —

Disegno di proiezioni ortogonali, del Prof. D. Landi, di pag. VIII-152, con 132 incisioni . . . . . 2 —

— *vedi anche* Prospettiva.

Disegno topografico, del Capitano G. Bertelli, 2ª edizione, di pag. VI-137, con 12 tavole e 10 incis. 2 —

— *vedi* Cartografia — Celerimensura — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria — Triangolazioni.

Disegno, taglio e confezione di biancheria (Manuale teorico pratico di), di E. Bonetti, con un Dizionario di nomenclatura. 2ª ediz. riveduta e aumentata, di pag. XVI-202 con 50 tav. illustrative e 6 prospetti. 3 —

— *vedi anche* Confezione d'abiti — Ricettario domestico.

Disinfezione. — *vedi* Infezione.

Distillazione. — *vedi* Alcool — Analisi del vino — Analisi volumetrica — Chimica agraria — Chimico — Cognac — Densità dei mosti — Farmacista — Liquorista.

Ditteri italiani, di Paolo Lioy (*Entomologia III*), di pag. VII-356, con 227 incisioni (volume doppio) . . 3 —

— *vedi anche* Animali parassiti — Coleotteri — Imenotteri — Lepidotteri.

Dizionario alpino italiano. Parte 1ª: *Vette e valichi italiani*, dell'Ing. E. Bignami-Sormani. — Parte 2ª: *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia*, dell'Ing. C. Scolari. di pag. XXII-310 . . . . . . 3 50

— *vedi anche* Alpi — Prealpi.

Dizionario bibliografico, di C. Arlia, di pag. 100. 1 50

— *vedi anche* Bibliografia — Bibliotecario.

Dizionario di abbreviature latine ed italiane usate nelle carte e codici specialmente del Medio Evo, riprodotte con oltre 13000 segni incisi, aggiuntovi un prontuario di **Sigle Epigrafiche.** I monogrammi, la numerazione romana ed arabica e i segni indicanti monete, pesi, misure, ecc., per cura di Adriano Cappelli Archivista-Paleografo presso il R. Archivio di Stato in Milano, di pag. LXII-433, con elegante legatura in cromo 7 50

— *vedi anche* Epigrafia latina — Paleografia.

L. c.

Dizionario Eritreo (Piccolo) **Italiano-arabo-amarico,** raccolta dei vocaboli più usuali nelle principali lingue parlate nella colonia eritrea, di A. ALLORI, di pagine XXXIII-203. . . . . 2 50

— *vedi anche* Arabo volgare — Grammatica galla — Lingue d'Africa — Tigré.

Dizionario filatelico, per il raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografia, del Comm. J. GELLI, 2ª edizione con Appendice 1898-99, di pag. LXIII-464. . . . . 4 50

Dizionario fotografico pei dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi, e 600 formule, di L. GIOPPI, di pag. VIII-600, 95 inc. e 10 tav. 7 50

Dizionario geografico universale, del Prof. Dottor G. GAROLLO, 4ª edizione del tutto rifatta e molto ampliata, di pag. XII-1451 . . . . 10 —

Dizionario milanese-italiano e repertorio italiano-milanese, di CLETTO ARRIGHI, di pag. 912, a due colonne. 2ª edizione 8 50

Dizionario stenografico. Sigle e abbreviature del sist. Gabelsberger-Noe, di A. SCHIAVENATO, di p. XVI-156. 1 50

Dizionario tascabile (Nuovo) **italiano-tedesco e tedesco-italiano,** compilato sui migliori vocabolari moderni e provvisto d'un'accurata accentuazione per la pronuncia dell'italiano, di A. FIORI, 2ª ediz., completamente rifatta dal Prof. G. CATTANEO, di p. 741. 3 50

Dizionario tascabile (Nuovo) **italiano-tedesco e tedesco-italiano,** del Prof. G. LOCELLA, 5ª ediz., di pag. 440 a due colonne, legato in tela rossa. . . . 3 —

Dizionario tecnico in quattro lingue dell'Ing. E. WEBBER, 4 volumi:

vol. I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, di p. IV-336. 4 —
vol. II. Deutsch-Italienisch-Französisch-Englisch, p. 409. 4 —
vol. III. Français-Italien-Allemand-Anglais, di p. 509. 4 —
vol. IV. English-Italian-German-French, di pag. 659. 6 —

Dizionario (Piccolo) **dei termini delle corse,** di G. VOLPINI, di pag. 47 . . . . 1 —

Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese e francese, disposte in un unico alfabeto, 1 vol. di pag. 1200 a 2 colonne . . . 8 —

L. c.

Dizionario Volapük. — *vedi* Volapük.

Dogane. — *vedi* Codice doganale — Trasporti e tariffe.

Doratura. — *vedi* Galvanostegia.

Dottrina popolare, in 4 lingue. (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. Sessa. 2ª ed., di pag. IV-212. 2 —
— *vedi anche* Conversazione italiana-tedesca — Conversazione Volapük — Fraseologia francese.

Doveri del macchinista navale e condotta della macchina a vapore marina ad uso dei macchinisti navali e degli Istituti nautici, di M. Lignarolo, di p. XVI-303. 2 50
— *vedi* Macchinista navale.

Duellante (Man. del) in appendice al *Codice cavalleresco*, di J. Gelli, 2ª ediz., di pag. VIII-256, con 27 tavole. 2 50
— *vedi anche* Codice cavalleresco — Scherma.

Ebanista. — *vedi* Falegname — Modellatore meccanico — Operaio.

Economia dei fabbricati rurali, di V. Niccoli, di pag. VI-192. . . . . 2 —

Economia matematica (Introduzione alla), dei Professori F. Virgilii e C. Garibaldi, di pag. XII-210, con 19 incisioni 1 50

Economia politica, del Prof. W. S. Jevons, traduz. del Prof. L. Cossa, 4ª ediz. riveduta di pag. XVI-179. 1 50

Elettricista (Manuale dell'), dei Proff. G. Colombo e Ferrini, di pag. VIII-204-44, con 40 incisioni . . . . 4 —

Elettricità, del Prof. Fleeming Jenkin, trad. del Prof. R. Ferrini, 2ª ediz. riveduta, di p. XII-208, con 36 incisioni 1 50
— *vedi anche* Cavi telegrafici sottomarini — Elettricità — Galvanoplastica — Galvanostegia — Illuminazione elettrica — Magnetismo ed elettricità — Metallocromia — Röntgen (Raggi di) — Telefono — Telegrafia — Unità assolute.

Embriologia e morfologia generale, del Prof. G. Cattaneo, di pag. X-242, con 71 incisioni . . . 1 50

Enciclopedia del giurista. — *vedi* Codici e leggi.

Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 grossi volumi di 3375 pagine di due colonne per ogni pagina, con Appendice (146740 voci) . . . . 20 —

Energia fisica, del Prof. R. Ferrini, di pag. VIII-187, con 47 incisioni, 2ª edizione interamente rifatta . . 1 50

L. c.

Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, del Prof. O. OTTAVI, 3ª edizione interamente rifatta da A. STRUCCHI, con una Appendice sul metodo della Botte unitaria pei calcoli relativi alle botti circolari, dell'Ing. Agr. R. BASSI, di pag. XVI-291, con 29 inc. 2 —

Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, p. VIII-223. 2 —

— *vedi anche* Alcool — Analisi del vino — Cantiniere — Cognac — Densità dei mosti — Liquorista — Malattie ed alterazioni dei vini — Produzione e commercio dei vini — Uva da tavola — Vini bianchi e da pasto — Vino — Viticoltura.

Entomologia, di A. GRIFFINI e P. LIOY, 4 volumi: (*vedi* Coleotteri — Ditteri — Lepidotteri — Imenotteri).

— *vedi anche* Animali parassiti — Apicoltura — Bachi da seta — Imbalsamatore — Insetti utili — Insetti nocivi — Naturalista viaggiatore — Zoonosi.

Epigrafia latina. Trattato elem. con esercizi prattici e facsimili, con 65 tav., del Prof. S. RICCI, di p. XXXII-448. 6 50

— *vedi* Dizionario di abbreviature latine.

Eritrea. — *vedi* Dizionario eritreo, italiano-arabo-amarico — Grammatica galla — Lingue d'Africa — Prodotti agricoli del Tropico — Tigré-italiano.

Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, di pag. IV-170 . . . . 1 50

Esattore (Manuale pratico dell'), ad uso degli Esattori comunali, Ricevitori provinciali, Messi esattoriali, Prefetti, Intendenti di finanza, Agenti imposte, Sindaci e Segretari dei Comuni, Avvocati, Ingegneri, Ragionieri, Notai, Contribuenti, ecc. del rag. G. MAINARDI. (In lavoro).

Esercizi di algebra elementare, del Prof. S. PINCHERLE, di pag. VIII-135, con 2 incisioni 1 50

— *vedi anche* Algebra — Determinanti — Formulario di matematica.

Esercizi di aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. PANIZZA, di pag. VIII-150 . . . . 1 50

— *vedi anche* Aritmetica razionale — Formulario di matematica.

Esercizi di calcolo infinitesimale (Calcolo differenziale e integrale), del Prof. E. PASCAL, di pagine XX-372 (volume doppio) . . . . 3 —

L. c.

— *vedi anche* Calcolo infinitesimale — Funzioni ellittiche — Repertorio di matematiche.

Esercizi geografici e quesiti, sull'Atlante geografico universale di R. Kiepert, di L. Hugues, 3ª edizione rifatta, di pag. VIII-208 . . . . 1 50

— *vedi anche* — Atlante — Geografia.

Esercizi sulla geometria elementare, del Professore S. Pincherle, di pag. VIII-130, con 50 incis. 1 50

— *vedi* Geometria — Metodi per risolvere i problemi.

Esercizi greci per la 4ª classe ginnasiale in correlazione alle *Nozioni elementari di lingua greca*, del Prof. V. Inama; del Prof. A. V. Bisconti, di p. XXI-237. 1 50

— *vedi anche* Grammatica greca.

Esercizi latini con regole (Morfologia generale), del Prof. P. E. Cereti, di pag. XII-332 . . . . 1 50

— *vedi anche* Grammatica latina.

Esercizi di stenografia. — *vedi* Stenografia.

Esercizi di traduzione a complemento della gramm. francese, del Prof. G. Prat, di p. VI-183. 1 50

— *vedi anche* Grammatica francese.

Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della Grammatica tedesca, del Prof. G. Adler, 2ª ediz., di pag. VIII-244 . . . 1 50

— *vedi anche* Grammatica tedesca.

Esplodenti e modo di fabbricarli, di R. Molina, di pag. XX-300 . . . . 2 50

— *vedi anche* Pirotecnia.

Essenze. — *vedi* Liquorista.

Estetica, del Prof. M. Pilo, di pag. XX-260 . . . . . 1 50

Estimo di cose d'arte. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di Maioliche e Porcellane.

Estimo dei terreni. Garanzia dei prestiti ipotecari e dell'equa ripartizione dell'imposta, dell'Ing. P. Filippini, di pag. XVI-328, con 3 incisioni. . . . . . 3 —

Estimo rurale, del Prof. Carega di Muricce, p. VI-164. 2 —

— *vedi anche* Agronomia — Catasto — Celerimensura — Disegno topografico — Economia dei fabbricati rurali — Geometria pratica — Prontuario dell'agricoltore — Triangolazioni.

Etnografia, del Prof. B. Malfatti, 2ª edizione interamente rifusa, di pag. VI-200 . . . . 1 50

— *vedi anche* Antropologia — Paleoetnologia.

L. c.

Fabbricati civili di abitazione, dell'Ing. C. Levi, di pag. XII-385, con 184 incisioni 4 50
— *vedi* Calci e cementi — Ingegnere civile — Ingegneria legale.

Fabbricati rurali. — *vedi* Abitazioni — Economia fabbricati.

Fabbricazione (La) **degli specchi e la decorazione del vetro e cristallo,** del Prof. R. Namias, di pagine XII-156, con 14 incisioni . . . . 2 —

Fabbro. — *vedi* Fonditore — Meccanico — Operaio — Tornitore.

Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, prepararli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. Belluomini, di p. x-138, con 42 inc. 2 —
— *vedi anche* Cubatura — Modellatore meccanico — Operaio.

Farmacista (Manuale del), del Prof. P. E. Alessandri, 2ª ediz. interamente rifatta e aumentata e corredata di tutti i nuovi medicamenti in uso nella terapeutica, loro proprietà, caratteri, alterazioni, falsificazioni, usi dosi, ecc., di pag. XVI-731, con 142 tav. e 82 incisioni. 6 50
— *vedi anche* Analisi volumetrica — Chimico — Impiego ipodermico — Infezione — Materia medica — Medicatura antisettica.

Farfalle. — *vedi* Lepidotteri.

Ferro. — *vedi* Fonditore — Galvanostegia — Ingegnere civile — Ingegnere navale — Leghe metalliche — Meccanismi (500) — Metallo — Metallocromia — Operaio — Peso dei metalli — Resistenza materiali — Siderurgia — Tempera — Tornitore meccanico — Travi metall.

Ferrovie. — *vedi* Codice doganale — Curve — Macchinista e fuochista. — Trasporti e tariffe.

Filatelia. — *vedi* Dizionario filatelico.

Filatura. Manuale di filatura, tessitura e lavorazione meccanica delle fibre tessili, di E. Grothe, traduzione sull'ultima edizione tedesca, di p. VIII-414 con 105 inc. 5 —
— *vedi anche* Coltivazione delle piante tessili — Piante industriali — Tessitore.

Filatura della seta, di G. Pasqualis. (In lavoro).

Filologia classica, greca e latina, del Prof. V. Inama, di pag. XII-195 . . . . 1 50

Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico più in uso nel panfiliamento, del Cap. G. Olivari, p. XVI-286. 2 50
— *vedi anche* Canottaggio.

L. c.

Filosofia. — *vedi* Estetica — Etica — Filosofia morale — Logica — Psicologia — Psicologia fisiologica.

Filosofia morale, del Prof. L. Friso, di pag. XVI-336. 3 —

Filugello. — *vedi* Bachi da seta.

Finanze. — *vedi* Computisteria finanziaria — Contabilità di Stato — Debito pubblico — Esattore — Scienza delle finanze — Valori pubblici.

Fiori artificiali, Manuale del fiorista, di O. Ballerini, di pag. XVI-278, con 144 incis. e 1 tav. a 36 colori. 3 50

— *vedi anche* Pomologia artificiale.

Fiori. — *vedi* Floricoltura.

Fisica, del Prof. Balfour Stewart, 5ª ediz. italiana rifatta dal Prof. O. Murani, di p. XII-292, con 139 inc. 1 50

Fisica (Elementi di), per gli Istituti tecnici e Licei, del Prof. O. Murani, di pag. XX-867, con 380 inc. e 3 tav. 5 50

Fisica. — *vedi* Calore — Dinamica — Energia fisica — Fulmini e parafulmini — Igroscopi — Luce e colori — Luce e suono — Microscopio — Ottica — Röentgen — Spettroscopio — Termodinamica.

Fisiologia, di Foster, traduz. del Prof. G. Albini, 3ª ediz. di pag. XII-158, con 18 incisioni 1 50

Fisiologia comparata. — *vedi* Anatomia.

Fisiologia vegetale, del Dott. Luigi Montemartini, di pagine XVI-230, con 68 incisioni 1 50

— *vedi anche* Anatomia vegetale.

Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli Roda, 2ª ediz. riveduta da G. Roda, di pag. VIII-256, con 87 inc. 2 —

— *vedi anche* Botanica — Fiori artificiali — Orticoltura — Piante e fiori — Ricettario domestico.

Florilegio poetico greco, del Prof. V. Inama. (In lav.).

Fognatura cittadina, dell'Ing. D. Spataro, di pagine X-684, con 220 figure e 1 tavola in litografia . . 7 —

Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. Belluomini, 2ª ediz., di pag. VIII-150, con 41 incis. 2 —

— *vedi anche* Leghe metalliche — Operaio — Siderurgia.

Fonologia italiana, del Prof. L. Stoppato, di pagine VIII-102 . . . . 1 50

Fonologia latina, del Prof. S. Consoli, di pag. 208. 1 50

Foreste. — *vedi* Selvicoltura.

Formaggio. — *vedi* Caseificio — Latte, burro e cacio.

Formulario scolastico di matematica elementare (aritmetica, algebra, geometria, trigonometria), di M. A. Rossotti, di pag. XVI-192 . . . . 1 50

L. c.

Fotocalchi. — *vedi* Arti grafiche — Chimica fotografica — Fotografia industriale — Processi fotomeccanici.

Fotocollografia. — *vedi* Processi fotomeccanici.

Fotocromatografia (La), del Dott. L. Sassi, di pagine XXI-138, con 19 incisioni . . . . 2 —

Fotografia ed arti affini. — *vedi* Arti grafiche — Chimica fotografica — Dizionario fotografico — Fotocromatografia — Fotografia industriale — Fotografia ortocromatica — Fotografia pei dilettanti — Litografia — Proiezioni — Ricettario fotografico.

Fotografia industriale (La), fotocalchi economici per le riproduzioni di disegni, piani, carte, musica, negative fotografiche, ecc., del Dott. Luigi Gioppi, di pag. VIII-208, con 12 incisioni e 5 tavole fuori testo. 2 50

Fotografia ortocromatica, del Dott. C. Bonacini, di pag. XVI-277 con incisioni e 5 tavole 3 50

Fotografia pei dilettanti. (Come il sole dipinge), di G. Muffone, 4ª edizione rifatta ed ampliata di pagine XVIII-362, con 93 incisioni e 10 tavole . . . . . 3 —

Fotolitografia. — *vedi* Processi fotomeccanici.

Fototipografia. — *vedi* Processi fotomeccanici.

Fragole. — *vedi* Frutta minori.

Francobolli. — *vedi* Dizionario filatelico.

Fraseologia commerciale. — *vedi* Dottrina popolare.

Fraseologia francese-italiana, di E. Baroschi Soresini, di pag. VIII-262 . . . . 2 50

Fraseologia italiana-tedesca. — *vedi* Conversazione.

Frumento e mais, del Prof. G. Cantoni, di pag. VI-168, con 13 incisioni . . . . 2 —

Frutta minori. Fragole, poponi, ribes, uva spina e lamponi, del Prof. A. Pucci, di pag. VIII-192, 96 inc. 2 50

Frutticoltura, del Prof. Dott. D. Tamaro, 2ª ediz., di pag. XVI-225, con 86 incisioni . . . . 2 —

Frutticoltura. — *vedi* Agrumi — Olivo — Prodotti agricoli del tropico — Uve da tavola — Viticoltura.

Frutti artificiali. — *vedi* Frutti artificiali — Pomologia artificiale.

Fulmini e parafulmini, del Dott. Prof. E. Canestrini, di pag. VIII-166, con 6 incisioni . . . . 2 —

Funghi mangerecci e funghi velenosi, del Dott. F. Cavara, di pag. XVI-192, con 43 tav. e 11 incisioni. 4 50
— *vedi anche* Tartufi e funghi.

L. c.

Funzioni ellittiche, del Prof. E. PASCAL, di pag. 240 1 50
— *vedi anche* Calcolo infinitesimale — Esercizi di calcolo — Repertorio di matematiche.

Fuochista. — *vedi* Macchinista e fuochista.

Gallinacei. — *vedi* Animali da cortile — Pollicoltura.

Galvanoplastica, ed altre applicazioni dell'elettrolisi. Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc. del Prof. R. FERRINI, 3ª edizione, completamente rifatta, di p. XII-292, con 45 inc. (In lavoro).

Galvanostegia. dell'ing. I. GHERSI. Nichelatura, argentatura, doratura, ramatura, metallizzazione, ecc., di pag. XII-324, con 4 incisioni 3 50

Gaz illuminante (Industria del), di V. CALZAVARA, di pag. XXXII-672, con 375 incisioni e 216 tabelle . . 7 50
— *vedi anche* Acetilene.

Gelsicoltura, del Prof. D. TAMARO, di p. XVI-175 e 22 inc. 2 —
— *vedi anche* Bachi da seta.

Geodesia. — *vedi* Celerimensura — Compensazione degli errori — Curve — Disegno topografico — Geometria pratica — Prospettiva — Telemetria — Triangolazioni.

Geografia, di G. GROVE, traduzione del Prof. G. GALLETTI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XII-160, con 26 incis. 1 50

Geografia. — *vedi* Alpi — Atlante geografico storico d'Italia — Atlante geografico militare — Cartografia — Climatologia — Cosmografia — Dizionario alpino — Dizionario geografico — Esercizi geografici — Etnografia — Mare — Naturalista viaggiatore — Prealpi bergamasche — Vulcanismo.

Geografia classica, di H. F. TOZER, traduzione e note del Prof. I. GENTILE, 5ª ediz., di pag. IV-168 . 1 50

Geografia commerciale economica. *Europa*, *Asia*, *Oceania*, *Africa*, *America*, del Prof. P. LANZONI, di pag. VIII-344 (volume doppio) . . . . . . 3 —

Geografia fisica, di A. GEIKIE, traduzione di A. STOPPANI, 3ª ediz., di pag. IV-132, con 20 incisioni . . . 1 50

Geologia, di A. GEIKIE, traduzione di A. STOPPANI, 3ª edizione di pag. VI-154, con 47 incisioni 1 50
— *vedi anche* Paleoetnologia.

L. c.

Geometria analitica dello spazio, del Prof. F. Aschieri, di pag. VI-196, con 11 incisioni 1 50
Geometria analitica del piano, del Prof. F. Aschieri, di pag. VI-194, con 12 incisioni 1 50
Geometria descrittiva, del Prof. F. Aschieri, di pag. VI-222, con 103 incisioni, 2ª edizione rifatta . . 1 50
Geometria metrica o trigonometrica, del Prof. S. Pincherle, 4ª edizione, di pag. IV-158, con 47 inc. 1 50
Geometria pratica, dell'Ing. Prof. G. Erede, 3ª edizione riveduta ed aumentata di pag. XII-258, con 134 inc. 2 —
— *vedi anche* Celerimensura — Disegno assonometrico — Disegno geometrico — Disegno topografico — Geodesia — Metodi facili per risolvere i problemi — Prospettiva — Regolo calcolatore — Statica — Stereometria — Triangolazioni.
Geometria projettiva del piano e della stella, del Prof. F. Aschieri, 2ª ediz., di p. VI-228, con 86 inc. 1 50
Geometria projettiva dello spazio, del Prof. F. Aschieri, 2ª ediz. rifatta, di pag. VI-264, con 16 incis. 1 50
Geometria pura elementare, del Prof. S. Pincherle, 4ª edizione, di pag. VIII-159, con 112 incisioni. 1 50
— *vedi anche* Esercizi di geometria — Formulario scolastico di matematica — Metodica.
Giardino (Il) infantile, del Prof. P. Conti, di pagine IV-214, con 27 tavole (volume doppio) . . . . 3 —
Ginnastica (Storia della), di F. Valletti, di p. VIII-184. 1 50
Ginnastica femminile, di F. Valletti, di pagine VI-112, con 67 illustrazioni. . . . . 2 —
Ginnastica maschile (Manuale di), per cura del Comm. J. Gelli. di pag. VIII-108, con 216 incisioni . 2 —
— *vedi anche* Giuochi ginnastici.
Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di E. Boselli. di pag. 336. con 125 incisioni . . . 4 —
— *vedi anche* Metalli preziosi — Pietre preziose.
Giuochi. — *vedi* Biliardo — Scacchi.
Giuochi ginnastici per la gioventù delle scuole e del popolo, raccolti e descritti, di F. Gabrielli, di pag. XX-218. con 24 tavole illustrative. 2 50
— *vedi anche* Giardino infantile — Ginnastica — Lawn-Tennis.
Glottologia, del Pr. G. De Gregorio, di pag. XXXII-318. 3 —

L. c.

— *vedi anche* Letterature diverse — Lingua gotica — Lingue diverse — Lingue neolatine — Sanscrito.

Gnomonica ossia l'arte di costruire orologi solari, lezioni popolari di B. M. La Leta, di p. VIII-160, con 19 figure . . . . 2 —

— *vedi anche* Orologeria.

Grafologia, del Prof. C. Lombroso, con 470 fac-simili, di pag. v-245. . . . . 3 50

Grammatica albanese con le poesie rare di Variboba, del Prof. V. Librandi, di pag. XVI-200. 3 —

Grammatica araldica. — *vedi* Araldica — Vocabolario arald.

Grammatica ed esercizi pratici della lingua danese-norvegiana con un supplemento contenente le principali espressioni tecnico-nautiche ad uso degli ufficiali di marina che frequentano il mare del nord e gli stretti del Baltico, per cura di G. Frisoni. (In lavoro).

Grammatica ed esercizi pratici della lingua ebraica, del Prof. I. Levi fu Isacco, di pag. 192 . 1 50

Grammatica francese, del Prof. G. Prat, p. XI-287. 1 50

— *vedi anche* Esercizi di traduzione — Fraseologia — Letteratura.

Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), del Prof. E. Viterbo.

Vol I. Galla-Italiano, di pag. VIII-152 . . . . . . 2 50

Vol. II. Italiano-Galla, di pag. LXIV-106 . . . . . . 2 50

Grammatica greca. (Nozioni elementari di lingua greca), del Prof. Inama, 2ª edizione di pag. XVI-208. 1 50

— *vedi anche* Dialetti lett. greci — Esercizi — Fonologia greca — Letteratura greca — Morfologia greca — Verbi greci.

Grammatica della lingua greca moderna, del Prof. R. Lovera, di pag. VI-154 . . . . 1 50

Grammatica inglese, del Prof. L. Pavia, di p. XII-260. 1 50

Grammatica italiana, del Prof. T. Concari, 2ª edizione, riveduta, di pag. XVI-230 . . . . 1 50

— *vedi anche* Fonologia italiana — Rettorica — Ritmica — Stilistica.

Grammatica latina, del Prof. L. Valmaggi, 2ª edizione di pag. VIII-256 . . . . 1 50

— *vedi anche* Esercizi latini — Fonologia latina — Letteratura romana — Verbi latini.

L. c.

Grammatica della lingua olandese, di M. MORGANA, di pag. VIII-224 (volume doppio) . . . . . . 3 —

Grammatica ed esercizi pratici della lingua portoghese-brasiliana, del Prof. G. FRISONI, di pag. XII-276 . . . . 3 —

Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del Prof. R. LOVERA, di pag. VIII-200 . . . 1 50

Grammatica russa, del Prof. VOINOVICH, di pag. X-272. 3 —

Grammatica sanscrita. — *vedi* Sanscrito.

Grammatica spagnuola, del Prof. PAVIA, p. XII-194. 1 50
— *vedi anche* Letteratura.

Grammatica della lingua svedese, del Prof. E. PÀROLI, di pag. XV-293 . . . . 3 —

Grammatica tedesca, del Prof. L. PAVIA, p. XVIII-254. 1 50
— *vedi anche* Esercizi di traduzione — Letteratura.

Grammatica turca osmanli, del Prof. L. BONELLI. (In lavoro).

Granturco. — *vedi* Frumento e mais — Industria dei molini.

Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare di Sir G. B. AIRY, trad. di F. PORRO, con 50 incisioni, di pag. XXII-176. 1 50

Grecia antica. — *vedi* Archeologia (*Parte I*) — Mitologia greca — Monete greche — Storia antica.

Greco. — *vedi* Lingua greca.

Humus (L'), la fertilità e l'igiene dei terreni culturali, del Prof. A. CASALI, di pag. XVI-220 . . 2 —
— *vedi anche* Chimica agraria — Concimi.

Idraulica, del Prof. Ing. T. PERDONI, di pag. XXVIII-392, con 301 figure e 3 tavole 6 50

Idroterapia. — *vedi* Acque minerali e termali del Regno d'Italia.

Igiene. — *vedi* Fognatura cittadina — Immunità — Infezione, disinfezione e disinfettanti — Medicatura antisettica — Zoonosi.

Igiene del lavoro, di TRAMBUSTI A. e SANARELLI, di pagine VIII-362, con 70 incisioni 2 50

Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, 2ª edizione italiana curata dal Dott. GIOV. GALLI, di pag. XVI-272 . . . . 2 50
— *vedi anche* Ricettario domestico.

Igiene rurale, di A. CARRAROLI, di pagine X-470. 3 —

L. c.

Igiene scolastica, di A. REPOSSI, 2ª ediz., di p. IV-246. 2 —

Igiene veterinaria, del Dott. U. BARPI, di p. VIII-228. 2 —

— *vedi anche* Bestiame — Cavallo — Immunità e resistenza — Zootecnia — Zoonosi.

Igiene della vista sotto il rispetto scolastico, del Dott. A. LOMONACO, di pag. XII-272 . . . . . 2 50

Igiene della vita pubblica e privata, del Dott. G. FARALLI, di pag. XII-250 . . . . 2 50

— *vedi anche* Tisici e i sanatori (Cura razionale dei).

Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, del Prof. P. CANTONI, di pag. XII-146, con 24 inc. e 7 tab. 1 50

— *vedi anche* Climatologia — Meteorologia.

Illuminazione. — *vedi* Acetilene — Gaz illuminante.

Illuminazione elettrica (Impianti di), dell'Ing. E. PIAZZOLI, 4ª ediz. interamente rifatta. (In lavoro).

— *vedi anche* Elettricista — Elettricità.

Imbalsamatore. — *vedi* Naturalista preparatore — Naturalista viaggiatore — Zoologia.

Imenotteri, Neurotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani, del Dott. A. GRIFFINI (Entomologia IV), p. XVI-687, con 243 inc. (vol. trip.). 4 50

— *vedi anche* Animali parassiti — Coleotteri — Ditteri — Insetti utili — Insetti nocivi — Lepidotteri.

Immunità e resistenza alle malattie, di B. GALLI VALERIO, di pag. VIII-218 . . . . 1 50

— *vedi anche* Igiene veterinaria — Zootecnia — Zoonosi.

Impiego ipodermico e la dosatura dei rimedi. Man. di terapeutica del Dott. G. MALACRIDA, di p. 305. 3 —

Imposte dirette (Riscossione delle), dell'Avv. E. BRUNI, di pag. VIII-158 . . . . 1 50

— *vedi anche* Catasto — Proprietario di case — Ipoteche — Ricchezza mobile.

Inchiostri. — *vedi* Ricettario industriale — Vernici, ecc.

Incisioni. — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.

Indaco. — *vedi* Prodotti agricoli.

Industria della carta, dell'Ing. L. SARTORI, di pag. VII-326, con 106 incisioni e 1 tavola 5 50

Industria (L') dei molini e la macinazione del frumento, di C. SIBER-MILLOT costruttore di molini, di pag. XX-259, con 103 incisioni nel testo e 3 tavole. 5 —

Industria del gaz. — *vedi* Gaz illuminante.

L. c.

Industria (L') saponiera, con alcuni cenni sull'industria della soda e della potassa. Materia prima e fabbricazione in generale. Guida pratica dell'Ingegnere E. Marazza, di pag. VII-410, con 111 fig. e molte tab. 6 —
— *vedi anche* Profumiere.
Industria della seta, del Prof. L. Gabba, 2ª edizione, di pag. IV-208 . . . . 2 —
Industria (L') stearica. Manuale pratico dell'Ing. E. Marazza, di p. XI-283, con 76 inc. e con molte tab. 5 —
Industria dello zucchero:
I. *Coltivazione della barbabietola da zucchero*, dell'Ing. B. R. Debarbieri, di pag. XVI-220, con 18 inc. 2 50
II. *Commercio, importanza economica e legislazione doganale*, di L. Fontana-Russo, di pag. XII-244. 2 50
III. *Fabbricazione dello zucchero*. (In lavoro).
Industrie (Piccole). Scuole e Musei industriali — Industrie agricole e rurali — Industrie manifatturiere ed artistiche, dell'Ing. I. Ghersi, 2ª edizione completamente rifatta del Manuale delle *Piccole industrie* del Prof. A. Errera, di pag. XII-372 . . . . 3 50
Industrie rurali. — *vedi* Industrie.
Infermiere. — *vedi* Assistenza degli infermi — Soccorsi d'urgenza.
Infezione, disinfezione e disinfettanti, del Dott. Prof. P. E. Alessandri, di pag. VIII-190, con 7 inc. 2 —
Infortunii sul lavoro, legislazione con commento, dell'avv. A. Salvatore. (In lavoro).
Ingegnere agronomo. — *vedi* Prontuario dell'agricoltore.
Ingegnere civile. Manuale dell'Ingegnere civile e industriale, del Prof. G. Colombo, 17ª ediz. (43°, 44° e 45° migliaio). (In lavoro).
Il medesimo tradotto in francese da P. Marcillac. 5 50
— *vedi anche* Architettura — Calci e cementi — Costruzioni — Cubatura di legnami — Disegno — Fabbricati civili — Fognatura — Lavori in terra — Momenti resistenti — Peso dei metalli — Regolo calcolatore — Resistenza dei materiali.
Ingegnere navale. Prontuario di A. Cignoni, di pag. XXXII-292, con 36 figure. Legato in pelle . . . 5 50
— *vedi anche* Attrezzatura — Canottaggio — Costruttore navale — Filonauta — Macchinista navale — Marine da guerra — Marino.

L. c.

Ingegneria legale per tecnici e giuristi (Manuale di), dell'Avv. A. Lion, di pag. VIII-552 . . . 5 50

Insetti. — *vedi* Animali parassiti — Apicoltura — Bachi — Coleotteri — Ditteri — Imenotteri — Lepidotteri.

Insetti nocivi, del Prof. F. Franceschini, di pagine VIII-264, con 96 incisioni. . . . . 2 —

Insetti utili, del Prof. F. Franceschini, di pag. XII-160, con 43 incisioni e 1 tavola . . . . 2 —

Interesse e sconto, del Prof. E. Gagliardi, 2ª ediz. rifatta ed aumentata, di pagine VIII-198 . . . . . 2 —
— *vedi anche* Prontuario di valutazioni.

Inumazioni. — *vedi* Morte vera.

Invertebrati. — *vedi* Coleotteri — Ditteri — Insetti — Lepidotteri — Zoologia.

Ipnotismo. — *vedi* Magnetismo — Spiritismo — Telepatia.

Ipoteche (Manuale per le), del Prof. Avv. A. Rabbeno, di pag. XVI-247 . . . . 1 50
— *vedi anche* Catasto — Imposte dirette — Proprietario di case — Ricchezza mobile.

Ittiologia. — *vedi* Ostricoltura — Piscicoltura — Zoologia, *vol. II.*

Lacche. — *vedi* Vernici, ecc.

Latino. — *vedi* Lingua latina

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. Sartori, di pag. X-162, con 24 inc. 2 —
— *vedi anche* Caseificio.

Lavori femminili. — *vedi* Confezione d'abiti per signora e l'arte del taglio — Disegno, taglio e confezioni di biancheria — Macchine da cucire e da ricamare — Monogrammi — Ornatista — Piccole industrie.

Lavori pubblici. — *vedi* Leggi sui lavori pubblici.

Lavori in terra (Manuale di), dell'Ing. B. Leoni, di pag. XI-305, con 38 incisioni (volume doppio) . . . . 3 —

Lawn-Tennis, di V. Baddeley, prima traduzione italiana con note e aggiunte del traduttore, di pagine XXX-206, con 13 illustrazioni 2 50
— *vedi anche* Ginnastica — Giuochi ginnastici.

Legatore di libri, con molte illustrazioni dell'Ing. L. Marocchino. (In lavoro).

Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata dall'Avv. E. Mazzoccolo, 4ª ediz., con l'aggiunta di due regolamenti e di due indici. (In lavoro).

L. c.

Legge comunale (Appendice alla) **del 22 e 23 luglio 1894,** dell'Avv. E. Mazzoccolo. di p. VIII-256. 2 —

Legge sui lavori pubblici e regolamenti, di L. Franchi 1 50

Leggi usuali. — *vedi* Codici e leggi — Registro e bollo — Sanità e sicurezza pubblica.

Leghe metalliche ed amalgame, alluminio, nichelio, metalli preziosi e imitazioni, bronzo, ottone, monete e medaglie, saldature, dell'Ing. I. Ghersi, di pag. XVI-431, con 15 incisioni . . . . 4 —

Legislazione mortuaria. — *vedi* Morte.

Legislazione rurale, secondo il progr. governativo per gli Istituti Tecnici, dell'Avv. E. Bruni, di pag. XI-423. 3 —

Legnami. — *vedi* Cubatura dei legnami — Falegname.

Lepidotteri italiani, del Dott. A. Griffini (Entomologia II), di pag. XIII-248. con 149 incisioni . . . 1 50

— *vedi anche* Animali parassiti — Coleotteri — Ditteri — Imenotteri — Insetti.

Letteratura albanese (Manuale di), del Prof. A. Straticò, di pag. XXIV-280 (volume doppio) . . . . 3 —

Letteratura americana, di G. Strafforello, p. 158. 1 50

Letteratura assira, del Dott. B. Teloni. (In lav.).

Letteratura danese. — *vedi* Letteratura norvegiana.

Letteratura ebraica, di A. Revel, 2 vol., di p. 364. 3 —

Letteratura egiziana, di L. Brigiuti. (In lavoro).

Letteratura francese, del Prof. E. Marcillac, traduzione di A. Paganini, 3ª ediz., di pag. VIII-198. 1 50

— *vedi anche* Grammatica francese — Esercizi per la grammatica francese.

Letteratura greca, di V. Inama, 12ª edizi., migliorata (dal 45° al 50° migl.) di pag. VIII-232 e una tavola . 1 50

— *vedi anche* Dialetti letterari greci — Esercizi greci — Filologia classica — Florilegio greco — Fonologia — Glottologia — Grammatica greca — Morfologia greca — Verbi greci.

Letteratura indiana, del Prof. A. De Gubernatis, di pag. VIII-159 . . . . 1 50

Letteratura inglese, del Prof. E. Solazzi, 2ª ediz., di pag. VIII-194 . . . . 1 50

— *vedi anche* Grammatica inglese.

Letteratura italiana, del Prof. C. Fenini, 5ª edizione, rifatta dal Prof. V. Ferrari. (In lavoro).

— *vedi anche* Fonologia italiana — Morfologia italiana.

L. c.

Letteratura latina. — *vedi* Esercizi latini — Filologia classica — Fonologia latina — Grammatica latina — Letteratura romana — Verbi latini.

Letteratura norvegiana, del Prof. S. CONSOLI, di pag. XVI-272 . . . . 1 50

Letteratura persiana, del Prof. I. PIZZI, di pagine X-208 . . . . 1 50

Letteratura provenzale, del Prof. A. RESTORI, di pag. X-220 . . . . 1 50

Letteratura romana, del Prof. F. RAMORINO, 5ª ediz. riveduta (dal 17° al 22° migliaio), di pag. VIII-344. . 1 50

Letteratura spagnuola e portoghese, del Prof. L. CAPPELLETTI, 2ª ediz. rifatta dal Prof. E. GORRA. (In lavoro).

— *vedi anche* Grammatica spagnuola.

Letteratura tedesca, del Prof. O. LANGE, 3ª ediz. rifatta dal Prof. MINUTTI, di pag. XVI-188 . . . . 1 50

— *vedi anche* Esercizi tedeschi — Grammatica tedesca.

Letteratura ungherese, del Dott. ZIGÀNY ARPÀD, di pag. XII-295 . . . . 1 50

Letterature slave, del Prof. D. CIÀMPOLI, 2 volumi:

I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, di pag. IV-144. 1 50

II. Russi, Polacchi, Boemi, di pag. IV-142 . . . . 1 50

Lexicon Abbreviaturarum quae in lapidibus, codicibus et chartis praesertim Medii-Aevi occurrunt.

— *vedi* Dizionario di abbreviature.

Libri e biblioteconomia. — *vedi* Bibliografia — Bibliotecario — Dizionario bibliografico — Dizionario di abbreviature latine — Epigrafia latina — Paleografia — Raccoglitore d'autografi — Tipografia.

Lingua araba. — *vedi* Arabo volgare — Dizionario eritreo — Grammatica Galla — Lingue dell'Africa — Tigrè.

Lingua gotica, grammatica, esercizi, testi, vocabolario comparato con ispecial riguardo al tedesco, inglese, latino e greco, del Prof. S. FRIEDMANN, di pag. XVI-333. 3 —

Lingua greca. — *vedi* Esercizi — Filologia — Florilegio — Fonologia — Grammatica — Letteratura — Morfologia — Dialetti — Verbi.

Lingue dell'Africa, di R. CUST, versione italiana del Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-110 . . . . . 1 50

Lingua latina. — *vedi* Dizionario di abbreviature latine — Epigrafia — Esercizi — Filologia classica — Fo-

L. c

nologia — Grammatica — Letteratura — Metrica — Verbi.

Lingue neo-latine, del Dott. E. Gorra, di pag. 147. 1 50

— *vedi anche* Filologia classica — Glottologia.

Lingue straniere (Studio delle), di C. Marcel, ossia l'Arte di pensare in una lingua straniera, traduzione del Prof. Damiani, di pag. XVI-136 . . . . . 1 50

Lingua e linguistica in genere. — *vedi* Dizionario — Esercizi — Grammatica — Letteratura.

Liquorista, di A. Rossi, con 1270 ricette pratiche. Materiale, Materie prime, Manipolazioni, Tinture, Essenze naturali ed artificiali, Fabbricazione dei liquori per macerazione, digestione, distillazione, con essenze, tinture, ecc., Liquori speciali, Vini aromatizzati, di pag. XXXII-560, con 19 incisioni nel testo . . . . . 5 —

— *vedi anche* Alcool — Cognac.

Litografia, di C. Doyen, di pag. VIII-261, con 8 tavole e 40 figure di attrezzi, ecc., occorrenti al litografo. . 4 —

— *vedi anche* Arti grafiche — Fotografia — Processi fotomeccanici.

Logaritmi (Tavole di), con 5 decimali, di O. Müller, 5ª ed., aumentata delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di M. Raina, di pag. XXXIV-186. 1 50

Logica, di W. Stanley Jevons, traduz. del Prof. C. Cantoni, 4ª ediz., di pag. VIII-154, e 16 incisioni . . 1 50

Logica matematica, del Prof. C. Burali-Forti, di pag. VI-158 . . . . 1 50

Logismografia, di C. Chiesa, 3ª ediz., di pag. XIV-172. 1 50

— *vedi anche* Computisteria — Contabilità — Ragioneria.

Luce e colori, del Prof. G. Bellotti, di pag. X-157, con 24 incision e 1 tavola 1 50

Luce e suono, di E. Jones, traduzione di U. Fornari, di pag. VIII-336, con 121 incisioni (volume doppio) . . 3 —

Macchinista e fuochista, del Prof. G. Gautero, 7ª ediz. con aggiunte dell'Ing. L. Loria, di pag. XX-172, con 24 incis. e col testo della Legge sulle caldaie, ecc. 2 —

Macchinista navale (Manuale del), di M. Lignarolo, 2ª edizione rifatta, di pag. XXIV-602, con 344 incisioni. 7 50

— *vedi anche* Costruttore navale — Doveri del macchinista navale.

L. c.

Macchine agricole, del conte A. CENCELLI-PERTI, di pag. VIII-216, con 68 incisioni . . . . 2 —

Macchine per cucire e ricamare, dell'Ing. ALFREDO GALASSINI, di pag. VII-230, con 100 incisioni . 2 50

Macchine. — *vedi* Costruttore macchine a vapore — Disegnatore meccanico — Doveri del macchinista — Il meccanico — Ingegnere civile — Ingegnere navale — Leghe metalliche — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Meccanica — Meccanismi (500) — Modellatore meccanico — Montatore (Il) di macchine — Operaio — Tornitore meccanico.

Macinazione. — *vedi* Industria dei molini.

Magnetismo ed elettricità, del Dott. G. POLONI, 2ª ediz. curata dal Prof. F. GRASSI, di pag. XIV-370, con 136 incisioni e 2 tavole 3 50

Magnetismo ed ipnotismo, del Prof. G. BELFIORE, di pag. VIII-337 . . . . 3 50

— *vedi anche* Spiritismo — Telepatia.

Maiale (Il). Razze, metodi di riproduzione, di allevamento, ingrassamento, commercio, salumeria, patologia suina e terapeutica, tecnica operatoria, tossicologia, dizionario suino-tecnico, del Prof. E. MARCHI, 2ª ediz., di pag. XX-736, con 190 incisioni e una Carta . . . 6 50

Majoliche. — *vedi* Amatore — Ricettario domestico.

Mais. — *vedi* Frumento e mais — Industria dei molini — Panificazione.

Malattie. — *vedi* Animali parassiti — Immunità — Zoonosi.

Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del Dott. R. WOLF, traduz. con note ed aggiunte del Dott. P. BACCARINI, di pag. X-268, con 50 inc. 2 —

Malattie ed alterazioni dei vini, del Prof. S. CETTOLINI, di pag. XI-138, con 13 incisioni . . . . . . 2 —

Mammiferi. — *vedi* Zoologia.

Mandato commerciale, di E. VIDARI, di pag. VI-160. 1 50

Mandolinista (Manuale del), di A. PISANI, di pagine XX-140, con 13 figure, 3 tavole e 39 esempi . . 2 —

Manicomio. — *vedi* Psichiatria.

Manzoni Alessandro. Cenni biografici, di L. BELTRAMI, di pag. 196, con 9 autografi e 68 incisioni. . 1 50

Mare (Il), del Prof. V. BELLIO, di pag. IV-140, con 6 tavole litografate a colori 1 50

— *vedi anche* Atlante — Geografia.

L. c.

Marina. — *vedi* Attrezzatura — Canottaggio — Codice — — Costruttore navale — Doveri del macchinista — — Filonauta — Ingegnere navale — Macchinista navale — Marine da guerra — Marino.

Marine (Le) **da guerra del mondo al 1897,** di L. D'ADDA, di pag. XVI-320, con 77 illustrazioni . . 4 50

Marino (Manuale del) **militare e mercantile,** del Contr'ammiraglio DE AMEZAGA, con 18 xilografie, 2ª edizione, con appendice di BUCCI DI SANTAFIORA. 5 —

Marmista (Manuale del), di A. RICCI, 2ª edizione, di pag. XII-154, con 47 incisioni . . . . 2 —

Mastici. — *vedi* Ricettario industriale — Vernici, ecc.

Matematica elementare. — *vedi* Formulario di matematica elementare.

Matematiche superiori. — *vedi* Calcolo — Repertorio di matematiche superiori.

Materia medica moderna (Manuale di), del Dott. G. MALACRIDA, di pag. XI-761 . . . . 7 50

— *vedi anche* Farmacista — Impiego ipodermico.

Meccanica, del Prof. R. STAWELL BALL, traduz. del Prof. J. BENETTI, 3ª ediz., di pag. XVI-214, con 89 inc. 1 50

— *vedi anche* Costruttore — Dinamica — Disegnatore meccanico — Disegno industriale — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Macchine agricole — Macchine da cucire e ricamare — Meccanismi (500) — Modellatore meccanico — Montatore (Il) di macchine — Operaio — Orologeria — Tornitore meccanico.

Meccanico, di E. GIORLI. Nozioni speciali di Aritmetica, Geometria, Meccanica, Generatori del vapore, Macchine a vapore, Collaudazione e costo dei materiali, Doratura, Argentatura e Nichelatura, di pagine XII-234, con 200 problemi risolti e 130 figure. . . . 2 —

Meccanismi (500), scelti fra i più importanti e recenti riferentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pneumatica, macchine a vapore, molini, torchi, orologerie ed altre diverse macchine, da H. T. BROWN, traduzione dall'Ing. F. CERRUTI, 2ª edizione italiana, di pag. VI-176, con 500 incisioni nel testo 2 50

Medaglie. — *vedi* Leghe metalliche — Monete greche — Monete romane — Numismatica — Vocabolarietto pei numismatici.

L. c.

Medicatura antisettica, del Dott. A. ZAMBLER, con prefaz. del Prof. E. Triconi, di pag. XVI-124, con 6 inc. 1 50
— *vedi anche* Farmacista — Impiego ipodermico — Materia medica.

Medicina popolare. — *vedi* Igiene popolare — Ricettario domestico.

Medio evo. — *vedi* Storia.

Memoria (L'arte della). — *vedi* Arte.

Mercedi. — *vedi* Paga giornaliera.

Merciologia, ad uso delle scuole e degli agenti di commercio, di O. LUXARDO, di pag. XII-452 . . . . . 4 —
— *vedi anche* Industrie (diverse) — Olii — Piante industriali — Piante tessili.

Meridiane. — *vedi* Gnomonica.

Metalli preziosi (oro, argento, platino, estrazione, fusione, assaggi, usi), di G. GORINI, 2ª edizione di pagine II-196, con 9 incisioni. . . . . 2 —
— *vedi anche* Leghe metalliche — Oreficeria — Saggiatore.

Metallizzazione. — *vedi* Galvanoplastica — Galvanostegia.

Metallocromia. Colorazione e decorazione chimica ed elettrica dei metalli, bronzatura, ossidazione, preservazione e pulitura, dell'Ing. I. GHERSI, di p. VIII-192. 2 50

Metallurgia. — *vedi* Alluminio — Fonditore — Galvanoplastica — Gioielleria — Leghe metalliche — Saggiatore — Siderurgia — Tempera e cementazione — Tornitore.

Meteorologia generale, del Dott. L. DE MARCHI, di pag. VI-156, con 8 tavole colorate 1 50
— *vedi anche* Climatologia — Fulmini e parafulmini — Geografia fisica — Igroscopi e igrometri.

Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, 2ª edizione italiana confrontata colla 2ª tedesca ed annotata dal Dott. Giuseppe Clerico, di pag. XVI-176. 1 50

Metodi facili per risolvere i problemi di geometria elementare, dell'Ing. E. GHERSI, con circa 200 problemi risolti. (In lavoro).

Metrica italiana. — *vedi* Ritmica e metrica italiana.

Metrologia Universale ed il **Codice Metrico Internazionale,** coll'indice alfabetico di tutti i pesi misure, monete, ecc. dell'Ing. A. TACCHINI, p. XX-482. 6 50
— *vedi anche* Codice del perito misuratore — Statica degli strumenti metrici.

L. c.

Mezzeria (Manuale pratico della) e dei varî sistemi della colonia parziaria in Italia, del Prof. Avv. A. Rabbeno, di pag. VIII-196 . . . . 1 50

Micologia. — *vedi* Funghi mangerecci — Malattie crittogamiche — Tartufi e funghi.

Microscopia. — *vedi* Anatomia microscopica — Animali parassiti — Bacologia — Batteriologia — Protistologia — Tecnica protistologica.

Microscopio (Il), Guida elementare alle osservazioni di Microscopia, del Prof. Camillo Acqua, di pagine XII-226, con 81 incisioni 1 50

Militaria. — *vedi* Codice cavalleresco — Duellante — Esplodenti — Marine da guerra — Marino — Scherma — Storia arte militare — Telemetria — Ufficiale (Manuale dell').

Mineralogia. — *vedi* Arte mineraria — Cristallografia — Marmista — Metalli preziosi — Oreficeria — Pietre preziose — Siderurgia.

Mineralogia generale, del Prof. L. Bombicci, 2ª ediz. riveduta, di pag. XVI-190, con 183 inc. e 3 tav. cromolitografiche 1 50

Mineralogia descrittiva, del Prof. L. Bombicci, 2ª ediz. di pag. IV-300, con 119 incis. (volume doppio). 3 —

Misura delle botti. — *vedi* Enologia.

Misure. — *vedi* Codice del Perito Misuratore — Metrologia.

Mitilicoltura. — *vedi* Ostricoltura — Piscicoltura.

Mitologia comparata, del Prof. A. De Gubernatis, 2ª ediz. di pag. VIII-150. (Esaurito).

Mitologia greca, di A. Foresti:
Volume I. *Divinità*, di pag. VIII-264 . . . . 1 50
Volume II. *Eroi*, di pag. 188. . . . . 1 50

Mitologie orientali, di D. Bassi:
Volume I. *Mitologia babilonese-assira*, di p. XVI-219. 1 50
Volume II. *Mitologia egiziana e fenicia*. (In lavoro).

Mnemotecnia. — *vedi* Arte della memoria.

Mobili artistici. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.

Moda. — *vedi* Confezioni d'abiti — Disegno, taglio e confezione biancheria — Fiori artificiali.

Modellatore meccanico, falegname ed ebanista, del Prof. G. Mina, di p. XVII-428, 293 inc. e 1 tav. 5 50

Molini. — *vedi* Industria dei.

L. c.

Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte. Prontuario ad uso degli ingegneri, architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura, dell'Ing. E. SCHENCK, di pag. XI-188 . 3 50

Monete greche, di S. AMBROSOLI, di pag. XIV-286, con 200 fotoincisioni e 2 carte geografiche (volume doppio). 3 —

Monete romane, del Cav. F. GNECCHI, di pag. XV-182, con 15 tavole e 62 figure nel testo 1 50

— *vedi anche* Archeologia — Metrologia — Numismatica — Tecnologia monetaria — Vocabolarietto pei numismatici.

Monogrammi, del Prof. A. SEVERI, 73 tavole divise in tre serie, le prime due di 462 in due cifre e la terza di 116 in tre cifre. 3 50

— *vedi anche* Calligrafia — Ornatista.

Montagne. — *vedi* Alpi — Alpinismo — Arte mineraria — Geografia — Geologia — Prealpi — Siderurgia.

Montatore (Il) di macchine di S. DINARO. (In lavoro).

Morale. — *vedi* Etica — Filosofia morale.

Morfologia generale. — *vedi* Embriologia.

Morfologia greca, del Prof. V. BETTEI, di pag. XX-376. 3 —

Morfologia italiana, del Prof. E. GORRA, di p. VI-142. 1 50

Morte (La) **vera e la morte apparente,** con Appendice "*La legislazione mortuaria*," del Dott. F. DELL'ACQUA, di pag. VIII-136 . . . . 2 —

Mosti. — *vedi* Densità dei.

Muriatico. — *vedi* Acido.

Musei. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di maioliche e porcellane — Pittura — Scoltura.

Musei industriali. — *vedi* Industrie (Piccole).

Musica. — *vedi* Armonia — Cantante — Mandolinista — Pianista — Storia della musica — Strumentazione — Strumenti ad arco e musica da camera.

Mutuo soccorso. — *vedi* Società di mutuo soccorso.

Napoleone I°, di L. CAPPELLETTI, con 23 fotoincisioni di pag. XX-272 . . . . 2 50

Naturalista preparatore (Il), del Dott. R. GESTRO, 3ª edizione riveduta ed aumentata del *Manuale dell'Imbalsamatore,* di pag. XVI-168, con 42 incisioni. . 2 —

Naturalista viaggiatore, dei Proff. A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 incisioni . . 2 —

L. c.

Nautica. — *vedi* Astronomia — Attrezzatura navale — Canottaggio — Codici — Costruttore navale — Doveri del macchinista navale — Filonauta — Ingegnere navale — Macchinista navale — Marine da guerra — Marino — Nuotatore.

Neurotteri. — *vedi* Imenotteri, ecc.

Nichelatura. — *vedi* Galvanostegia — Leghe metalliche.

Nitrico. — *vedi* Acido.

Notaio (Man. del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, di A. Garetti. 3ª ediz. ampliata, di pag. XXXII-332 . . 3 50

— *vedi anche* Esattore — Testamenti.

Numeri. — *vedi* Teoria dei numeri.

Numismatica, del Dott. S. Ambrosoli, 2ª ediz. accresciuta, di pag. XV-250, con 120 fotoincisioni e 4 tavole. 1 50

— *vedi anche* Archeologia — Metrologia — Monete greche — Monete romane — Tecnologia monetaria — Vocabolarietto pei numismatici.

Nuotatore (Manuale del), del Prof. P. Abbo, di pagine XII-148, con 97 incisioni 2 50

Occultismo. — *vedi* Magnetismo e ipnotismo — Spiritismo — Telepatia.

Oculistica. — *vedi* Igiene della vista.

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni, di G. Gorini, 2ª edizione, completamente rifatta dal Dott. G. Fabris, di pag. VIII-214, con 7 incisioni, 2 —

Olivo ed olio, *Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio,* del Prof. A. Aloi, 4ª ediz., di pag. XVI-361, con 45 incisioni . . . . . 3 —

Omero, di W. Gladstone, traduz. di R. Palumbo e C. Fiorilli, di pag. XII-196 . . . . 1 50

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti aggiustatori e meccanici di G. Belluomini, 4ª ediz. aumentata, di pag. XVI-240. 2 —

Operazioni doganali. — *vedi* Codice doganale — Trasporti e tariffe.

Opere pubbliche (legislazione), dell'avv. L. Franchi. (In lavoro).

— *vedi anche* Ingegneria legale.

Oratoria. — *vedi* Arte del dire — Rettorica — Stilistica.

Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, del Dott. F. Racioppi, di pag. VIII-310 (volume doppio) . 3 —

L. c.

Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, del Dott. F. Racioppi, di pag. VIII-376 (vol. doppio). 3 —
Ordinamento giudiziario (leggi sull'), dell'avvocato L. Franchi. (In lavoro).
Oreficeria. — *vedi* Giojelleria — Leghe metalliche — Metalli preziosi — Saggiatore.
Organoterapia, di E. Rebuschini, di pag. VIII-432. 3 50
Oriente antico. — *vedi* Storia antica.
Ornatista (Manuale dell'), dell'Arch. A. Melani. Raccolta di iniziali miniate e incise, d'inquadrature di pagina, di fregi e finalini, esistenti in opere antiche di biblioteche, musei e collezioni private. XXIV tav. in colori per miniatori, calligrafi, pittori di insegne, ricamatori, incisori, disegnatori di caratteri, ecc., I^a serie. 4 —
— *vedi anche* Decorazioni.
Orologeria moderna, dell'Ing. Garuffa, di pagine VIII-302, con 276 incisioni . . . . 5 —
— *vedi anche* Gnomonica.
Orologi artistici. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.
Orologi solari. — *vedi* Gnomonica.
Orticoltura, del Prof. D. Tamaro, con 60 incisioni . 4 —
Ortocromatismo. — *vedi* Fotografia.
Ortofrenia. Manuale per l'educazione dei fanciulli frenastenici (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.), del Prof. P. Parise. (In lavoro).
Ortotteri. — *vedi* Imenotteri, ecc.
Ossidazione. — *vedi* Metallocromia.
Ostricoltura e mitilicoltura, del Dott. D. Carazzi, con 13 fototipie, di pag. VIII-202 . . . . 2 50
Ottica, di E. Gelcich, di p. XVI-576, con 216 inc. e 1 tav. 6 —
Ottone. — *vedi* Leghe metalliche.
Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a lire cinque,** di C. Negrin, di pag. 222. 2 50
Paleoetnologia, del Prof. J. Regazzoni, di pag. XI-252, con 10 incisioni 1 50
— *vedi anche* Geologia.
Paleografia, di E. M. Thompson, traduz. dall'inglese, con aggiunte e note del Prof. G. Fumagalli, 2^a edizione rifatta. (In lavoro).
— *vedi anche* Dizionario di abbreviature.
Panificazione razionale, di Pompilio, di pag. IV-126. 2 —
— *vedi anche* Frumento — Industria dei molini.

L. c.

Parafulmini. — *vedi* Elettricità — Fulmini.
Parassiti. — *vedi* Animali parassiti.
Pascoli. — *vedi* Prato.
Pazzia. — *vedi* Psichiatra.
Pedagogia. — *vedi* Didattica — Estetica — Giardino infantile — Ginnastica femminile e maschile — Giuochi infantili — Igiene scolastica — Ortofrenia — Sordomuto.
Perizie d'arte. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.
Pelli. — *vedi* Concia delle pelli.
Pensioni. — *vedi* Società di mutuo soccorso.
Pepe. — *vedi* Prodotti agricoli.
Perito misuratore. — *vedi* Codice del perito misuratore.
Pesi e misure. — *vedi* Metrologia universale — Statica e applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici — Tecnologia e terminologia monetaria.

Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. Belluomini, di pag. XXIV-248 . . . . 3 50

Pianeti. — *vedi* Astronomia — Cosmografia — Gravitazione — Spettroscopio.

Pianista (Manuale del), di L. Mastrigli, di pag. XVI-112. 2 —

Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie di varietà, di A. Pucci, 2ª ediz., di pag. VIII-214, con 117 inc. 2 50
— *vedi anche* Botanica — Floricoltura — Frutta minori — Frutticoltura — Ricettario industriale.

Piante industriali, coltivazione, raccolta e preparazione, di G. Gorini, nuova edizione, di pag. II-144 . 2 —

Piante tessili. — *vedi* Coltivazione e industrie delle piante tessili.
Piccole industrie. — *vedi* Industrie.

Pietre preziose, classificazione, valore, arte del gioielliere, di G. Gorini, 2ª ed., di pag. 138, con 12 inc. 2 —
— *vedi anche* Giojelleria — Metalli preziosi.

Pirotecnia moderna, di F. Di Maio, con 111 incisioni, di pag. VIII-150 . . . . 2 50
— *vedi anche* Esplodenti — Ricettario industriale — Ricettario domestico.

Piscicoltura (d'acqua dolce), del Dott. E. Bettoni, di pag. VIII-318, con 85 incisioni . . . . 3 —
— *vedi anche* Ostricoltura — Piccole industrie — Zoologia.

L. c.

Pittura. Pittura italiana antica e moderna, dell'Arch. A. MELANI, 2ª edizione completamente rifatta, 2 vol., di pag. XX-164 e XVI-202, illustrati con 102 tav., di cui una cromolit. e 11 figure nel testo. (In lavoro).
— *vedi anche* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Anatomia pittorica — Colori (Scienza dei) — Colori e vernici — Decorazione — Dilettante di pittura — Disegno — Luce e colori — Ornatista — Ricettario domestico — Ristauratore dei dipinti.
Poesia. — *vedi* Arte del dire — Dantologia — Florilegio poetico — Letteratura — Omero — Rettorica — Ritmica — Shakespeare — Stilistica.
Pollicoltura, del March. G. TREVISANI, 3ª edizione, di pag. VII-182, con 72 incisioni 2 50
— *vedi anche* Abitazioni animali — Animali da cortile — Colombi.
Polveri piriche. — *vedi* Esplodenti — Pirotecnia.
Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, del Prof. M. DEL LUPO, pag. VI-132, e 44 inc. 2 —
Poponi. — *vedi* Frutta minori.
Porcellane. — *vedi* Amatore — Ricettario domestico.
Porco (Allevamento del). — *vedi* Maiale.
Posologia. — *vedi* Impiego ipodermico e dosatura.
Prato (Il), del Prof. G. CANTONI, di pag. 146, con 13 inc. 2 —
Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresi i passi alla Valtellina, con prefazione di A. STOPPANI, 2ª ediz., di pag. XX-124, con carta topografica e panorama delle Alpi Orobiche . . . . 3 —
— *vedi anche* Alpi — Alpinismo — Dizionario alpino.
Pregiudizi. — *vedi* Errori e pregiudizi.
Previdenza. — *vedi* Assicurazione sulla vita — Società di mutuo soccorso.
Procedura civile e procedura penale. — *vedi* Codice.
Processi fotomeccanici (I moderni). Fotocollografia, fototipografia, fotolitografia, fotocalcografia, fotomodellatura, tricromia, del Prof. R. NAMIAS, di pag. VIII-316, con 53 figure, 41 illustrazioni e 9 tavole. 3 50
Prodotti chimici. — *vedi* Acido solforico.
Prodotti agricoli del Tropico (Manuale pratico del piantatore), del cav. A. GASLINI. (Il caffè, la canna da zucchero, il pepe, il tabacco, il cacao, il tè, il dattero, il cotone, il cocco, la coca, il baniano, il banano, l'aloé, l'indaco, il tamarindo, l'ananas, l'albero del chinino,

L. c.

la juta, il baobab, il papaia, l'albero del caoutchouc, la guttaperca, l'arancio, le perle). Di pag. XVI-270 . . 2 —

Produzione e commercio del vino in Italia, di S. MONDINI, di pag. VII-304 . . . . 2 50

Profumiere (Manuale del), di A. ROSSI. (In lavoro).
— *vedi anche* Industria saponiera — Ricettario domestico — Ricettario industriale.

Proiezioni (Le). Materiale, Accessori, Vedute a movimento, Positive sul vetro, Proiezioni speciali policrome, stereoscopiche, panoramiche, didattiche, ecc., del Dott. L. SASSI. di pag. XVI-447, con 141 incisioni. 5 —

Proiezioni ortogonali. — *vedi* Disegno.

Prontuario dell'agricoltore (Manuale di agricoltura, economia, estimo e costruzioni rurali), del Prof. V. NICCOLI, di pag. XX-346 . . . . 5 50
— *vedi anche* Agronomia — Agricoltura moderna.

Prontuario del ragioniere (Manuale di calcolazioni mercantili e bancarie), del Rag. E. GAGLIARDI, di pag. XII-603 . . . . 6 50
— *vedi anche* Contabilità — Interesse e sconto — Ragioneria.

Prontuario di geografia e statistica, del Prof. G. GAROLLO, pag. 62 . . . . 1 —

Prontuario per le paghe. — *vedi* Paghe.

Proprietario di case e di opifici. Imposta sui fabbricati dell'Avv. G. GIORDANI, di pag. XX-264 . . 1 50
— *vedi anche* Ipoteche.

Prosodia — *vedi* Metrica dei greci e dei romani — Ritmica e metrica razionale italiana.

Prospettiva (Manuale di), dell'Ing. C. CLAUDI, di pagine 64, con 28 tavole . . . . 2 —

Protistologia, del Prof. L. MAGGI, 2ª edizione, di pag. XVI-278, con 93 incis. nel testo (volume doppio). 3 —
— *vedi anche* Anatomia microscopica — Animali parassiti — Batteriologia — Microscopio — Tecnica protistologica.

Prototipi (I) internazionali del metro e del kilogramma ed il codice metrico internazionale. — *vedi* Metrologia.

Proverbi in 4 lingue. — *vedi* Dottrina popolare.

Proverbi (516) **sul cavallo,** raccolti ed annotati dal Colonnello VOLPINI, di pag. XIX-172 . . . . . . 2 50
— *vedi anche* Cavallo — Dizionario termini delle corse.

L. c.

Pseudoneurotteri. — *vedi* Imenotteri, ecc.

Psichiatria. Confini, cause e fenomeni della pazzia. Concetto, classificazione, forme cliniche e diagnosi delle malattie mentali. Il manicomio, di J. FINZI, di p. VIII-222. 2 50

Psicologia, del Prof. C. CANTONI, di p. VIII-168, 2ª ediz. 1 50

— *vedi anche* Estetica — Filosofia — Logica.

Psicologia fisiologica, del Dott. G. MANTOVANI, di pag. VIII-165, con 16 incisioni 1 50

Pugilato e lotta per la difesa personale, Box inglese e francese, di A. COUGNET, di pag. XXIV-198, con 104 incisioni 2 50

Raccoglitore d'autografi, con molti facsimili, di E. BUDAN. (In lavoro).

Raccoglitore di francobolli. — *vedi* Dizionario filatelico.

Raccoglitore di oggetti d'arte. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte — Amatore di maioliche e porcellane.

Radiografia. — *vedi* Raggi Röntgen.

Ragioneria, del Prof. V. GITTI, 3ª edizione riveduta, di pag. VIII-137, con 2 tavole. 1 50

— *vedi anche* Contabilità — Interesse e sconto — Paga giornaliera — Prontuario del ragioniere.

Ragioneria delle Cooperative di consumo (Manuale di), del Rag. G. ROTA, di pag. XV-408 (vol. doppio). 3 —

Ragioneria industriale, del Prof. Rag. ORESTE BERGAMASCHI, di p. VII-280 e molti moduli (vol. doppio). 3 —

Ragioniere. — *vedi* Prontuario del.

Ramatura. — *vedi* Galvanostegia.

Razze umane. — *vedi* Antropologia.

Reclami ferroviarii. — *vedi* Trasporti e tariffe.

Registro e Bollo (Leggi sulle tasse di) **con appendice e commenti,** di L. FRANCHI 1 50

Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche, dell'Ing. G. POZZI, di pag. XV-238 con 182 incisioni e 1 tavola 2 50

Religione. — *vedi* Bibbia — Buddismo — Diritto ecclesiastico — Mitologia.

Religioni e lingue dell'India inglese, di R. CUST, tradotte dal Prof. A. DE GUBERNATIS, di p. IV-124. 1 50

— *vedi anche* Buddismo.

Repertorio di matematiche superiori. Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici, del Prof. E. PASCAL. Vol. I. *Analisi*, di pag. XVI-642 . . . . . 6 —

— Vol. II. *Geometria*. (In lavoro).

L. c.

Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, di P. Gallizia, p. x-336, con 236 inc. e 2 tav. 5 50
— *vedi anche* Momenti resistenti.

Rettili. — *vedi* Zoologia.

Rettorica, ad uso delle scuole, di F. Capello, p. vi-122. 1 50
— *vedi anche* Arte del dire — Stilistica.

Ribes. — *vedi* Frutta minori.

Ricamo. — *vedi* Disegno e taglio di biancheria — Macchine da cucire — Monogrammi — Ornatista — Piccole industrie — Ricettario domestico.

Ricchezza mobile, dell'Avv. E. Bruni, p. viii-218. 1 50
— *vedi anche* Esattore — Imposte dirette — Prontuario di valutazione.

Ricettario domestico, dell'ing. I. Ghersi. Adornamento della casa. Arti del disegno. Giardinaggio. Conservazione di animali, frutti, ortaggi, piante. Animali domestici e nocivi. Bevande. Sostanze alimentari. Combustibili e illuminazione. Detersione e lavatura. Smacchiatura. Vestiario. Profumeria e toeletta. Igiene e medicina. Mastici e plastica. Colle e cementi. Vernici ed encaustici. Metalli. Vetrerie, di pag. 550 con 2340 consigli pratici e ricette accuratamente scelte . . . 5 50

Ricettario industriale, dell'Ing. I. Ghersi. Procedimenti utili nelle arti, industrie e mestieri. Caratteri, saggio e conservazione delle sostanze naturali ed artificiali d'uso comune. Colori, vernici, mastici, colle, inchiostri, gomma elastica, materie tessili, carta, legno, fiammiferi, fuochi d'artificio, vetro. Metalli: bronzatura, nichelatura, argentatura, doratura, galvanoplastica, incisione, tempera, leghe. Filtrazione. Materiali impermeabili, incombustibili, artificiali. Cascami. Olii, saponi, profumeria, tintoria, smacchiatura, imbianchimento. Agricoltura. Elettricità, di pag. iv-564, con 26 incisioni e 940 ricette. 5 50

Ricettario fotografico, del Dott. L. Sassi, p vi-150. 2 —
— *vedi anche* Arti grafiche — Fotocromatografia — Fotografia industriale — Fotografia pei dilettanti — Fotografia ortocromatica.

Rilievi. — *vedi* Cartografia — Compensazione degli errori.

Rincoti. — *vedi* Imenotteri, ecc.

Riscaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, di R. Ferrini, 2 vol.. di p. x-332, con 94 inc. 4 —

L. c.

Risorgimento italiano (Storia del) **1814-1870**, con l'aggiunta di un sommario degli eventi posteriori, del Prof. F. Bertolini, 2ª ediz., di pag. VIII-208 . . 1 50
— *vedi anche* Storia (Breve) d'Italia — Storia e cronologia — Storia italiana.

Ristauratore dei dipinti, del Conte G. Secco-Suardo, 2 volumi, di pag. XVI-269, XII-362, con 47 inc. 6 —
— *vedi anche* Amatore d'oggetti d'arte e di curiosità.

Ritmica e metrica razionale italiana, del Prof. Rocco Murari, di pag. XVI-216 . . . . 1 50
— *vedi anche* Arte del dire — Rettorica — Stilistica.

Rivoluzione francese (La) (1789-1799), del Prof. Dott. Gian Paolo Solerio, di pag. IV-176 . . . . . 1 50
— *vedi anche* Napoleone.

Roma antica. — *vedi* Mitologia — Monete — Topografia.

Röntgen (I raggi di) **e le loro pratiche applicazioni**, di Italo Tonta, p. VIII-160, con 65 inc. e 14 tav. 2 50

Rhum. — *vedi* Liquorista.

Saggiatore (Man. del), di F. Buttari, di pag. VIII-245, con 28 incisioni 2 50

Sanità e sicurezza pubblica (Leggi sulla) **con decreti e disposizioni annesse**, di L. Franchi. 1 50

Sanscrito (Avviamento allo studio del), del Prof. F. G. Fumi, 2ª edizione rifatta, di pag. XII-254 (vol. doppio). 3 —

Saponeria. — *vedi* Industria saponiera — Profumiere.

Sarta da donna. — *vedi* Confezione di abiti — Biancheria.

Scacchi (Manuale del giuoco degli), di A. Seghieri, 2ª ediz. ampliata da E. Orsini, con una append. alla sezione delle partite giuocate e una nuova raccolta di 52 problemi di autori italiani, di pag. VI-310, con 191 incisioni. . . . . 3 —

Scherma italiana (Manuale di), su i principii ideati da Ferdinando Masiello, del Comm. J. Gelli, di pagine VIII-194, con 66 tavole 2 50
— *vedi anche* Duello.

Scienza delle finanze, di T. Carnevali, pag. IV-140. 1 50

Scienze. — *vedi* Classificazione delle scienze.

Scoltura. Scoltura italiana antica e moderna, statuaria e ornamentale dell'Arch. Prof. A. Melani, di pag. XVIII-196, con 26 figure e 56 tavole . . . . 4 —

Sconti. — *vedi* Interesse e sconto.

L. c.

Scritture d'affari (Precetti ed esempi di), per uso delle scuole tecniche, popolari e commerciali, del Prof. D. Maffioli, 2ª ediz., di pag. VIII-203 . . . . . . 1 50

Scuole industriali. — *vedi* Industrie (Piccole).

Segretario comunale. — *vedi* Esattore.

Selvicoltura, di A. Santilli, di pag. VIII-220, e 46 inc. 2 —

Semeiotica, di U. Gabbi, di pag. XVI-216, con 11 inc. 2 50

Sericoltura. — *vedi* Bachi da seta — Filatura — Gelsicoltura — Industria della seta — Tintura della seta.

Shakespeare, di Dowden, traduzione di A. Balzani, di pag. XII-242 . . . . 1 50

Sicurezza pubblica. — *vedi* Sanità.

Siderurgia (Manuale di), dell'Ing. V. Zoppetti, pubblicato e completato per cura dell'Ing. E. Garuffa, di pag. IV-368, con 220 incisioni 5 50

— *vedi anche* Fonditore — Operaio.

Sieroterapia, del Dott. E. Rebuschini, di pag. VIII-424. 3 —

— *vedi anche* Impiego ipodermico.

Sigle epigrafiche. — *vedi* Dizionario di abbreviature.

Sismologia, del Capitano L. Gatta, di pag. VIII-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50

— *vedi anche* Vulcanismo.

Smacchiatura. — *vedi* Ricettario domestico.

Smalti. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.

Soccorsi d'urgenza, del Dott. C. Calliano, 4ª ediz. riveduta e ampliata, di pag. XLVI-352, con 6 tav. litogr. 3 —

— *vedi anche* Assistenza infermi — Igiene.

Socialismo, di G. Biraghi, di pag. XV-285 (vol. dop.) 3 —

Società di mutuo soccorso. Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte, del Dott. G. Gardenghi, di pag. VI-152. 1 50

Sociologia generale (Elementi di), del Dott. Emilio Morselli, di pag. XII-172 . . . . 1 50

Sordomuto (Il) **e la sua istruzione.** Manuale per gli allievi e le allieve delle R. Scuole normali, maestri e genitori, del Prof. P. Fornari, di p. VIII-232, con 11 inc. 2 —

Sostanze alimentari. — *vedi* Adulterazione — Analisi delle — Conservazione delle.

Specchi. — *vedi* Fabbricazione degli specchi.

Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni,** di R. A. Proctor, trad. con note ed aggiunte di F. Porro, di pag. VI-178, con 71 inc. e una carta di spettri. . 1 50

L. c.

Spiritismo, di A. Pappalardo. di pag. xvi-204 . . 2 —
— *vedi anche* Magnetismo — Telepatia.
Spirito di vino. — *vedi* Alcool — Cognac — Liquorista.
Sport. — *vedi* Ballo — Biliardo — Cacciatore — Canottaggio — Cavallo — Dizionario di termini delle corse — Duellante — Filonauta — Ginnastica — Giuochi — Lawn-Tennis — Nuotatore — Pugilato — Scacchi — Scherma.
Stagno (Vasellame di). — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Leghe metalliche.
Statica (Principî di) **e loro applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici,** dell'Ing. E. Bagnoli, pag. VIII-252 con 192 inc. 3 50
— *vedi anche* Metrologia.
Statistica, del Prof. F. Virgilii. 2ª ediz., di p. VIII-176. 1 50
Stelle. — *vedi* Astronomia — Cosmografia — Gravitazione — Spettroscopio.
Stemmi. — *vedi* Araldica.
Stenografia, di G. Giorgetti (secondo il sistema Gabelsberger-Noe), 2ª edizione, di pag. IV-241. . . . . 3 —
Stenografia (Guida per lo studio della) sistema Gabelsberger-Noe, compilata in 35 lezioni da A. Nicoletti, di pag. VIII-160 . . . . 1 50
Stenografia. Esercizi graduali di lettura e di scrittura stenografica (sistema Gabelsberger-Noe), con tre novelle, del Prof. A. Nicoletti, di pag. VIII-160 . . 1 50
— *vedi anche* Dizionario stenografico.
Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alla loro costruzione in carta, del Prof. A. Rivelli, di pag. 90, con 92 incis. e 41 tav. 2 —
Stilistica, del Prof. F. Capello di pag. XII-164 . . 1 50
— *vedi anche* Arte del dire — Rettorica.
Stimatore d'arte. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità — Amatore di maioliche e porcellane.
Storia antica. Vol. I. *L'Oriente Antico*, del Prof. I. Gentile, di pag. XII-232. . . . . 1 50
Vol. II. *La Grecia*, di G. Toniazzo, di pag. VI-216. 1 50
Storia dell'arte militare antica e moderna, del Cap. V. Rossetto, con 17 tav. illustr., di p. VIII-504. 5 50
Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tavole sinottiche, del Prof. V. Casagrandi, 2ª edizione, di pag. VI-260 . . . . 1 50

L. c.

Storia della ginnastica. — Vedi *Ginnastica.*
Storia d'Italia (Breve), del Prof. P. ORSI, di p. XII-268. 1 50
Storia di Francia, di G. BRAGAGNOLO. (In lavoro).
Storia italiana (Manuale di), C. CANTÙ, di pag. IV-160 (esaurita).
— *vedi anche* Risorgimento.
Storia della musica, del Dott. A. UNTERSTEINER, di pag. 300 (volume doppio) . . . . 3 —
Storia naturale dell'uomo e suoi costumi. — *vedi* Antropologia — Etnografia — Fisiologia — Grafologia — Paleografia.
Strumentazione (Man. di), di E. PROUT, traduzione italiana con note di V. RICCI, con 96 esempi, di p. X-222. 2 50
Strumenti ad arco (Gli) **e la musica da camera,** del Duca di CAFFARELLI F., di pag. X-235 . . . 2 50
— *vedi anche* Armonia — Cantante — Mandolinista — Pianista.
Strumenti metrici. — *vedi* Metrologia — Statica.
Suono. — *vedi* Luce e suono.
Sussidi. — *vedi* Società di mutuo soccorso.
Tabacco, del Prof. G. CANTONI, di p. IV-176, con 6 inc. 2 —
Tabacchiere artistiche. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.
Tacheometria. — *vedi* Celerimensura — Telemetria — Topografia — Triangolazioni.
Taglio e confezione biancheria. — *vedi* Confezione — Disegno.
Tamarindo. — *vedi* Prodotti agricoli.
Tappezzerie. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.
Tariffe ferroviarie. — *vedi* Codice doganale — Trasporti e tariffe.
Tartufi (I) **ed i funghi,** loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura, di FOLCO BRUNI, di p. VIII-184. 2 —
— *vedi anche* Funghi.
Tasse di registro, bollo, ecc. — *vedi* Codice del bollo — Notaro. — Registro e bollo.
Tasse. — *vedi* Esattore — Imposte.
Tassidermista. — *vedi* Imbalsamatore — Naturalista viaggiatore.
Tavole logaritmiche. — *vedi* Logaritmi.
Tè. — *vedi* Prodotti agricoli.
Tecnica microscopica. — *vedi* Anatomia microscopica.
Tecnica protistologica, del Prof. L. MAGGI, di pag. XVI-318 (volume doppio) . . . . 3 —
— *vedi anche* Protistologia.

L. c.

Tecnologia. — *vedi* Dizionario tecnico.

Tecnologia meccanica. — *vedi* Modellatore meccanico.

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. Sacchetti, di pag. XVI-191 . . . . 2 —

Telefono, di D. V. Piccoli, di pag. IV-120, con 38 inc. 2 —

Telegrafia, del Prof. R. Ferrini, 2ª edizione corretta ed accresciuta, di pag. VIII-315, con 104 incisioni . . 2 —

— *vedi anche* Cavi e telegrafia sottomarina.

Telemetria, misura delle distanze in guerra, del Cap. G. Bertelli, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie. 2 —

Telepatia (Trasmissione del pensiero), di A. Pappalardo, di pag. XVI-329 . . . . 2 50

— *vedi anche* Magnetismo e ipnotismo — Spiritismo.

Tempera e cementazione, dell'Ing. Fadda, di pagine VIII-108, con 20 incisioni . . . . 2 —

Teoria dei numeri (Primi elementi della), per il Prof. U. Scarpis, di pag. VIII-152 . . . . 1 50

Teoria delle ombre, con un cenno sul Chiaroscuro e sul colore dei corpi, del Prof. E. Bonci, di pag. VIII-164, con 26 tavole e 62 figure . . . . 2 —

Terapeutica. — *vedi* Impiego ipodermico e la dosatura dei rimedi.

— *vedi anche* Farmacista — Materia medica — Medicatura antisettica — Semeiotica.

Termodinamica, del Prof. C. Cattaneo, di p. X-196, con 4 figure 1 50

Terremoti. — *vedi* Sismologia — Vulcanismo.

Terreni. — *vedi* Chimica agraria e concimi — Humus.

Tessitore (Manuale del), del Prof. P. Pinchetti, 2ª edizione riveduta, di pag. XVI-312, con illustrazioni. 3 50

— *vedi anche* Filatura — Piante tessili — Tessitura, ecc.

Testamenti (Manuali dei), per cura del Dott. G. Serina, di pag. VI-238 . . . . 2 50

— *vedi anche* Notaio.

Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. Manfredo Camperio, di pag. 180 . . . . 2 50

— *vedi anche* Arabo volgare — Grammatica galla — Lingue dell'Africa.

Tintore (Manuale del), di R. Lepetit, 3ª ediz., di pagine X-279, con 14 incisioni (volume doppio) . . . . 4 —

L. c.

Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pag. XVI-432. . . . . 5 —

— *vedi anche* Industria della seta.

Tipografia (Vol. I). Guida per chi stampa e fa stampare. — Compositori, e Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pag. 280 . . . . 2 50

Tipografia (Vol. II). Lezioni di composizione ad uso degli allievi e di quanti fanno stampare, di S. LANDI, di pag. VIII-271, corredato di figure e di modelli . . 2 50

— *vedi anche* Vocabolario tipografico.

Tisici e i sanatorii (La cura razionale dei), del Dott. A. ZUBIANI, prefazione del Prof. B. SILVA, di pag. XVI-240, con 4 incisioni . . . . 2 —

Topografia e rilievi. — *vedi* Cartografia — Catasto italiano — Celerimensura — Compensazione degli errori — Curve — Disegno topografico — Estimo dei terreni — Estimo rurale — Geometria pratica — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria — Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali.

Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, di pagine VIII-436, con 7 tavole. 4 50

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. DINARO, di pag. 164 . . . . . 2 —

— *vedi anche* Meccanico — Operaio.

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe e disposizioni vigenti, per A. G. BIANCHI, con una carta delle reti ferroviarie italiane, di p. XVI-152. 2 —

— *vedi anche* Codice doganale.

Travi metallici composti — V. *Momenti resistenti.*

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, dell'Ing. O. JACOANGELI. Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarle e calcolarle, di p. XIV-240, con 32 inc., 4 quadri degli elementi geodetici, 32 modelli pei calcoli trigonometrici e tav. ausiliarie. 7 50

— *vedi anche* Cartografia — Celerimensura — Disegno topografico — Geometria pratica — Geografia metrica — Prospettiva — Regolo calcolatore — Telemetria.

L. c.

Trigonometria. — *vedi* Geometria metrica — Logaritmi.
Tubercolosi. — *vedi* Tisici.
Uccelli. — *vedi* Zoologia.

Ufficiale (Manuale per l') del Regio Esercito italiano, di U. Morini, di pag. xx-388 . . . . 3 50
— *vedi anche* Codice cavalleresco — Duellante — Scherma.

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, dell'Ing. G. Bertolini, pag. x-124. 2 50

Usciere. — *vedi* Conciliatore.
Utili. — *vedi* Interessi e sconto — Prontuario del ragioniere.
Uva spina. — *vedi* Frutta minori.

Uve da tavola. Varietà, coltivazione e commercio, del Dott. D. Tamaro, terza edizione, di pag. xvi-278, con 8 tavole colorate, 7 fototipie e 57 incisioni. . . 4 —
— *vedi anche* Densità dei mosti — Enologia — Viticoltura.

Valli lombarde. — *vedi* Dizionario alpino — Prealpi Bergamasche.

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei) e per le operazioni di Borsa, del Dott. F. Piccinelli, 2ª edizione completamente rifatta e accresciuta, di pagine xxiv-902. . . . . 7 50
— *vedi anche* Debito pubblico.

Valutazioni. — *vedi* Prontuario del ragioniere.
Vasellame antico. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.

Veleni ed avvelenamenti, del Dott. C. Ferraris, di pag. xvi-208, con 20 incisioni 2 50

Ventagli artistici. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità.
Ventilazione. — *vedi* Riscaldamento.

Verbi greci anomali (I), del Prof. P. Spagnotti, secondo le Gramm. di Curtius e Inama, di p. xxiv-107. 1 50
— *vedi anche* — Esercizi greci — Fonologia greca — Grammatica greca — Morfologia greca.

Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. F. Pavanello, con indice alfabetico di dette forme, di pag. vi-215 . . . . . . 1 50
— *vedi anche* — Esercizi latini — Fonologia latina — Grammatica latina.

Vermouth. — *vedi* Liquorista.

L. c.

Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche e prodotti affini (Fabbricazione delle), dell'Ing. UGO FORNARI, di pag. VIII-262 . . . . . 2 —
— *vedi anche* Colori e vernici — Ricettario domestico — Ricettario industriale.
Veterinaria. — *vedi* Alimentazione del bestiame — Bestiame — Cane — Cavallo — Coniglicoltura — Igiene veterinaria — Immunità — Maiale — Zootecnia.
Vetri artistici. — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.
Vini bianchi da pasto e Vini mezzocolore (Guida pratica per la fabbric., l'affinamento e la conservaz. dei), del Barone G. A PRATO, di pag. XII-276, con 40 incisioni . . . . 2 —
Vino (Il), di G. GRAZZI-SONCINI, di pag. XVI-152. . . 2 —
Vino. — *vedi anche* Densità dei mosti — Enologia — Malattie — Produzione dei vini.
Vino aromatizzato. — *vedi* Cognac — Liquorista
Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. OTTAVI, rived. ed ampliata da A. STRUCCHI, 4ª ediz., di pag. XVI-200, con 22 incisioni . . . . . 2 —
— **ed enologia.** — *vedi* Alcool — Analisi del vino — Cantiniere — Cognac — Densità dei mosti — Enologia — Enologia domestica — Liquorista — Malattie ed alterazioni dei vini — Produzione e commercio del vino — Uve da tavola — Vino.
Vocabolarietto pei numismatici (in 7 lingue), del Dott. S. AMBROSOLI, di pag. VIII-134 . . . . . . 1 50
— *vedi anche* Monete — Numismatica.
Vocabolario araldico ad uso degli italiani, del Conte G. GUELFI, di pag. VIII-294, con 356 incis. 3 50
— *vedi anche* Grammatica araldica.
Vocabolario compendioso della lingua russa, del Prof. VOINOVICH, di pag. XVI-238 (volume doppio). 3 —
— *vedi anche* Grammatica russa.
Vocabolario tipografico, di S. LANDI. (In lavoro).
Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. MATTEI, secondo i principii dell'inventore M. SCHLEYER, ed a norma del *Dizionario Volapük* ad uso dei francesi, del Prof. A. KERCKHOFFS, p. XXX-198. 2 50
Volapük (Dizion. volapük-italiano), del Prof. C. MATTEI, di pag. XX-204 . . . . 2 50

L. c.

Volapük, Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. ROSA TOMMASI e A. ZAMBELLI, di pag. 152 . . . . . . 2 50

Vulcanismo, del Cap. L. GATTA, di p. VIII-268 e 28 inc. 1 50

— *vedi anche* Sismologia — Termodinamica.

Zoologia, dei Proff. E. H. GIGLIOLI e G. CAVANNA,

I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure . . . 1 50

II. Vertebrati. Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 incisioni. 1 50

III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), di pag. XVI-200, con 22 incisioni 1 50

— *vedi anche* Anatomia e fisiologia comparate — Animali parassiti dell'uomo — Animali da cortile — Apicoltura — Bachi da seta — Batteriologia — Bestiame — Cane — Cavallo — Coleotteri — Colombi — Coniglicoltura — Ditteri — Embriologia e morfologia generale — Imbalsamatore — Imenotteri — Insetti nocivi — Insetti utili — Lepidotteri — Maiale — Naturalista viaggiatore — Ostricoltura e mitilicoltura — Piscicoltura — Pollicoltura — Protistologia — Tecnica protistologica — Zootecnia.

Zoonosi, del Dott. B. GALLI VALERIO, di pag. XV-227. 1 50

Zootecnia, del Prof. G. TAMPELINI, di pag. VIII-297, con 52 incisioni 2 50

— *vedi anche* Alimentazione del bestiame — Cane — Cavallo — Maiale.

Zucchero. — *vedi* Industria dello zucchero.

INDICE ALFABETICO DEGLI AUTORI

Ab-Ber

Tip. Lombardi di M. Bellinzaghi
Milano - Fiori Oscuri, 7 - Milano