

**Karel Turski**

**WARUNKI PLASTYCZNOŚCI I PRAWA  
PLASTYCZNEGO WZMOCNIENIA.  
DOTYCHCZASOWE HIPOTEZY  
I NOWE PROPOZYCJE**

**22/1983**

*Praca habilitacyjna*

*P. 269a*



**WARSZAWA 1983**

ISSN 0208-5658

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 stycznia 1983 r.



57015



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN  
Nakład 180 egz. Ark.wyd. 4 . Ark. druk. 6 .  
Oddano do drukarni w maju 1983 r.  
Nr zamówienia 398/83 M-13.

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Sniadeckich 8



WARUNKI PLASTYCZNOŚCI I PRAWA PLASTYCZNEGO WZMOCNIENIA.  
DCTYCFCZASOWE HIPOTEZY I NOWE PROPOZYCJE.

1. Wstęp

Plastyczne własności metali stanowią złożony zespół cech powiązanych między sobą i jednocześnie zależnych od czynników takich jak czas i temperatura. Jednak najsilniej działającym czynnikiem, który powoduje wielką różnorodność zachowań, jest gatunek materiału związany z jego strukturą. Zmienność i złożoność plastycznych własności metali powoduje, że pomimo intensywnego ich badania od wielu lat, nadal rośnie zainteresowanie tą tematyką.

Potrzeba prowadzenia doświadczeń i poszukiwania opisu matematycznego własności plastycznych metali była związana z powszechnym ich zastosowaniem w technice. Złożoność warunków eksploatacyjnych konstrukcji metalowych wymagała doskonalenia metod ich obliczeń wytrzymałościowych, którym to tendencjom sprzyjał intensywny rozwój maszyn matematycznych. Szczególnie rozwój dużych maszyn cyfrowych stworzył możliwości dla wykorzystania skomplikowanych modeli materiału ujmujących złożone zachowanie metali w sposób dokładny.

Pierwotnym podejściem do opisu własności plastycznych metali było tworzenie ogólnych hipotez, w których współczynniki materiałowe są określane za pomocą badań przy jednoosiowym obciążaniu. Jak dotąd, taka tendencja utrzymuje się nadal, chociaż obecnie więcej uwagi przykładają się do poznania pełnego obrazu zachowania metalu w złożonych stanach naprężenia.

Nowe poszukiwania w zakresie wykorzystania wniosków płynących z eksperymentów zmierzają w kierunku uwzględnienia w równaniach zjawiska ewolucji wielkości traktowanych pierwotnie jako stałe materiałowe. Analiza przyczyn ewolucji własności plastycznych metali spowodowała wzrost zainteresowania wpływem struktury metali na ich zachowanie przy deformacji. W wyniku takich badań

pojawiły się nowe prace umożliwiające otrzymanie zależności między naprężeniami i odkształceniami przy wykorzystaniu wyników obserwacji struktury metali przy deformacji plastycznej.

Rozwinięcie skomplikowanych modeli teoretycznych materiałów umożliwiło wykorzystywanie wyników doświadcznej, które wykonano przy złożonych programach obciążania. Uzyskane możliwości w technice obliczeniowej nieco osłabiły porównania prostych modeli mechanicznie wiążących odkształcenia z naprężeniami, którą to cechę posiadały pierwsze hipotezy wzmocnienia kinematycznego.

Pomimo tendencji w rozwoju opisu plastyczności metali, postanowiono zająć się w tej pracy nową metodą uzyskania prostego równania powierzchni plastyczności. Metoda polega na analizie równania ujmującego wielkość pracy potrzebnej do wywołania sprężystej deformacji przy uplastycznieniu metali wzdłuż proporcjonalnych i nieproporcjonalnych dróg naprężenia. Proponowana metoda prowadzi się do przyjęcia wyrażenia dla pracy w postaci wielomianu dowolnego stopnia i wyeliminowania z niego tych wyrazów, które nie występują w znanym równaniu służącym do obliczania pracy przy proporcjonalnym obciążeniu. W ten sposób uzyskuje się minimalną ilość wyrazów i współczynników potrzebnych do opisu powierzchni plastyczności o niesymetrycznym kształcie, który poznano przy opracowaniu doświadczeń. W takim podejściu do opisu plastycznych własności metali oraz w analizie wyników doświadczeń spodziewamy się możliwości znalezienia nowych reguł ujmujących zachowanie się metali.

Złożone własności plastyczne metali wymagają stosowania w badaniach uściślonych warunków doświadczeń. W tej pracy zajmiemy się opisem tylko takich własności, na które nie ma wpływu zmiana czasu i temperatury. Nie będziemy również analizować oddziaływania struktury metalu na jego zachowanie przy deformacji plastycznej. Pozostają zatem sprawy związane z programami dróg obciążania i odkształcania oraz wpływ specyficznych cech związanych z gatunkiem metalu.

Metale zachowują w trakcie deformacji w przybliżeniu stałą gęstość, dużą spójność i względnie małą wrażliwość na czynniki fizyczne. Odkształcenia sprężyste metali są małe w porównaniu do odkształceń trwałych przy jednoosiowych obciążeniach więc z reguły pomija się je przy badaniu własności plastycznych również i w złożonych stanach naprężenia. Taka procedura jest ułatwiona dzięki temu, że odkształcenia całkowite można traktować jako su-



nę odkształceń sprężystych i plastycznych.

Wymienione cechy ułatwiają prowadzenie badań ale jednocześnie umożliwiają tworzenie wielu wariantów programów doświadczeń, które wymagają specyficznej techniki eksperymentalnej. Opis wyników takich badań wymaga utworzenia specjalnych hipotez, które mimo swego ogólnego sformułowania, nie są w stanie objąć całokształtu plastycznego zachowania się materiału.

Analiza szarych wyników doświadczeń pozwoliła stwierdzić, że wielokrotnie powtarzają się zjawiska, których nie opisano w ramach istniejących hipotez. Dlatego w ramach tej pracy nie wykonano nowych doświadczeń ale skupiono się na opisaniu wcześniej zaobserwowanych zjawisk. Powoływano się najczęściej na te wyniki doświadczeń, które ich autorzy opublikowali w ogólnie dostępnych wydawnictwach. Zgodnie z tą zasadą nie brano pod uwagę takich prac, w których zamieszczono wyniki zaczerpnięte z cudzej pracy doktorskiej. Taka selekcja jest szczególnie uzasadniona w przypadku prac eksperymentalnych, ponieważ autor, który ma zastrzeżenia do własnych doświadczeń, nie publikuje ich wyników w oficjalnych wydawnictwach. Od powyższej zasady uczyniono odstępstwo powołując się na prace doktorskie polskich autorów.

Praca zawiera wstęp, dwa rozdziały stanowiące zasadniczą część opracowania i zakończenie. W rozdziale 2 omówiono własności plastyczne metali poddawanych działaniu złożonego stanu naprężenia. Przedyskutowano najbardziej znane dotychczas modele mechaniczne i wykorzystywane w nich reguły ujmujące zachowanie materiału. Oddzielnie omówiono badania doświadczalne warunku plastyczności i metody opisanie go przez równania matematyczne.

Rozdział 3 zawiera nowe metody opisu plastycznego płynięcia metali. Sformułowano nowy warunek plastyczności niestarzonego materiału z anizotropią plastyczną. Dla takiego materiału opracowano prawo płynięcia i regułę wzmocnienia w złożonym stanie naprężenia. Omówiono przykłady zjawisk, które opisują proponowane równania.

Rozdział 4 poświęcono przeglądowi wyników osiągniętych w pracy.

## 2. Badania plastyczności metali w złożonym stanie naprężenia.

Przeгляд własności plastycznych metali w złożonych stanach naprężenia poświęcono omówieniu badań przeprowadzonych na materiałach polikrystalicznych. Własności polikryształów i monokryształów są podobne, jednak polikryształy zachowują się w sposób bardziej skomplikowany. Podobieństwo ich cech plastycznych odzwierciedla

się w modelach mechanicznych i prawach fizycznych proponowanych dla opisanego reagowania na obciążenie omawianych materiałów. Opis fenomenologiczny obserwowanych zjawisk sformułowany jest tak, że specyficzne cechy materiałów są wyrażone przez wartości stałe lub funkcje materiałowe zawarte we wzorach matematycznych. Ogólność zastosowanego opisu pozwala na studiowanie oddziaływania specyficznych cech fizycznych reprezentowanych przez materiały wybrane do badań i uogólnienie ich wyników na bardziej złożone warunki stanu obciążenia.

W celu pokazania problemów występujących w podjętym temacie pracy, scharakteryzowano zjawiska obserwowane przy doświadczeniach w złożonym stanie naprężenia. Przy ilustrowaniu cech plastycznych, które powinien ujmować opis fenomenologiczny skupiono się na omówieniu jakościowej strony efektów i schematycznym przedstawieniu zjawisk. Przy analizie związków matematycznych, których przeznaczeniem było odzwierciedlenie zjawisk fizycznych, skupiono uwagę na wprowadzanych uproszczeniach i niektórych konsekwencjach wynikających z tworzonych hipotez.

#### 2.1. Własności plastyczne metali w złożonym stanie naprężenia.

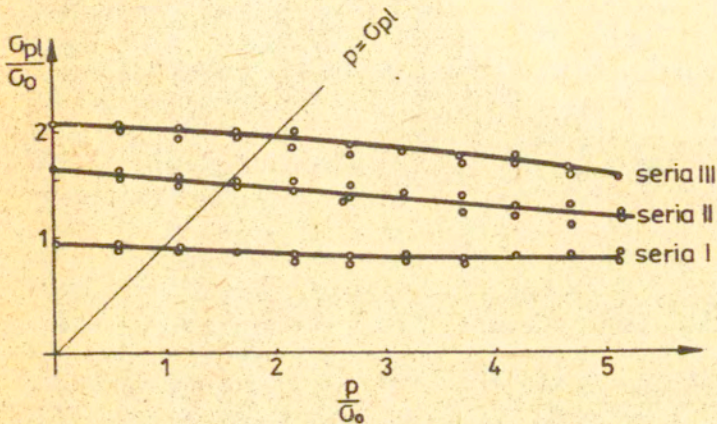
Cechy mechaniczne metali określa się przy użyciu próbek wykonanych z badanych materiałów. Opis metod badań doświadczalnych nie wchodzi w ramy niniejszej pracy. Zajmiemy się tutaj tylko wynikami doświadczeń i analizą wykrytych zjawisk.

Jako charakteryzujące własności materiałów przyjmujemy badania przy prostych i złożonych drogach obciążania. W ramach wymienionych programów obciążania mieści się również badanie wpływu ciśnienia hydrostatycznego na uplastycznienie metali.

Wpływ ciśnienia hydrostatycznego na uplastycznienie metali omówimy na przykładzie badania mosiądzu przy złożonych drogach naprężenia. Na rys.1 pokazano jak zmienia się granica plastyczności mosiądzu /Nittany No.2/ dla trzech stanów początkowych materiału. Dane do tego wykresu zaczerpnięto z pracy [1]. Na próbkach serii I wykonano badania granicy plastyczności mosiądzu obciążonego wstępnie przez ciśnienie hydrostatyczne. W serii II oraz III znajdowały się próbki (wstępnie odkształcone przy ciśnieniu  $p = 0$ ), które następnie ścisniano hydrostatycznie i badano ich granicę plastyczności przy rozciąganiu.

Najmniejszy wpływ ciśnienia hydrostatycznego /rys.1/ widać przy rozciąganiu próbek nieodkształconych wstępnie. Wykresy dla





Rys.1 Wpływ ciśnienia hydrostatycznego "p" na granicę plastyczności mosiądzu /Nittany Nr 2/ [1],  
 $G_0$  - granica plastyczności dla próbki wyżarzonej, którą badano w ciśnieniu  $p = p_{otoczenia}$   
Seria I - próbki wyżarzone;  
seria II, III - próbki wstępnie odkształcone.

próbek odkształconych wstępnie pokazują w przybliżeniu liniowy spadek granicy plastyczności ze wzrostem ciśnienia.

Rozciąganie naprężeniami  $\sigma_{pl}$  w otoczeniu ciśnienia  $p = \sigma_{pl}$  odpowiada dwuosłowemu ścisnaniu przez naprężenia o wartości  $\sigma_{pl}$ . Dla tego przypadku obciążenia, z przecięcia prostej  $p = \sigma_{pl}$  z liniami dla serii I, II, III /rys.1/ otrzymano granicę plastyczności mniejszą odpowiednio o 5%, 9%, 6% od naprężeń uplastyczniających przy jednoosiowym rozciąganiu. Można spodziewać się, że w płaskim stanie naprężenia, który najczęściej stosuje się przy weryfikacji teorii plastyczności, nie ma większego wpływu średniego naprężenia normalnego od wielkości podanych dla dwuosłowego ścisnienia.

Warto wspomnieć o dwu pracach na temat wpływu wysokiego ciśnienia na cechy plastyczne metali. Litoński [46] stwierdził zmniejszenie wzmocnienia miedzi ze wzrostem ciśnienia. Analizując wyniki różnych badań metali w otoczeniu wysokiego ciśnienia, Litoński wskazał na istnienie rozbieżnych wniosków odnoszących się do tych samych materiałów. Witczak [42] uzyskał zależności ilościowe pomiędzy granicą plastyczności i strukturą żelaza Armco, które poddano działaniu wysokiego ciśnienia. Pierwszym efektem działania podwyższonego ciśnienia jest zmniejszenie górnej granicy plastyczności żelaza Armco. Efekt ten powodują swobodne dyslokacje generowane przez wtrącenia stanowiące sprężystą nieciągłość w materiale podlegającym działaniu wysokiego ciśnienia.

Mimo istnienia wymienionych efektów [1,42,46], dla uproszczenia dalszych rozważań przyjmiemy, że ciśnienie hydrostatyczne nie wpływa na opisywane własności plastyczne metali. Takie ograniczenie dobrze odzwierciedla własności metali, które w procesie wytwarzania były poddane działaniu wysokiego ciśnienia, ewentualnie z innych przyczyn są mało wrażliwe na jego działanie. Wyeliminowanie ciśnienia hydrostatycznego z naprężeń uplastyczniających materiałów, pozwala sprowadzić wiele uzyskanych wyników badań do jednego układu współrzędnych prostokątnych na płaszczyźnie dewiatorowej.

Zajmiemy się teraz badaniami przy jednoosiowym obciążeniu. Rozpatrzmy rozciąganie z małą prędkością odkształcenia. Powyżej pewnej wielkości  $\sigma_0$  pojawiają się odkształcenia niesprężyste co powoduje odchylenie wykresu od początkowego zakresu liniowego. Dalszy przebieg wykresu zależy od rodzaju materiału. Na rys. 2 pokazano schematycznie wyniki takich badań.

Odciążanie metalu odkształconego może przebiegać w sposób liniowy /rys.2/, ewentualnie w sposób niewiele odbiegający od



liniowego. Ponowne natychmiastowe obciążenie materiału, ale teraz przez ściskanie próbki, spowoduje w przypadku "a" przebieg wykresu  $\sigma(\epsilon)$  podobny do rys.2a. W przypadku "b" wykres ściskania odpowiada metalowi, który uległ starzeniu po odciążeniu. Obciążanie odwrotne do kierunku wstępnego naprężenia będziemy nazywali obciążaniem rewersyjnym.

Jeżeli materiał odkształcony przez rozciąganie i odciążony całkowicie poddamy powtórnemu rozciąganiu, materiał wróci do początkowego wykresu  $\sigma(\epsilon)$  po pewnym małym odkształceniu trwałym /rys.2 a/. Jeżeli nastąpiło starzenie materiału odkształconego w zakresie małych odkształceń plastycznych, krzywa powtórnego rozciągania może leżeć nieco powyżej krzywej wstępnego rozciągania /rys.2 b/.

Przedstawmy proces obciążania materiału na płaszczyźnie dewiatorowej. Punkt 1 odpowiada /rys.3/ granicy proporcjonalności materiału nieodkształconego plastycznie; punkty "2" i "2 s" oznaczają odpowiednio - granicę proporcjonalności bez wpływu starzenia i z wpływem starzenia materiału odkształconego plastycznie. Koniec zakresu sprężystego przy odciążaniu i rewersyjnym obciążaniu oznaczono punktem "3" dla materiału niestarzonego i "3 s" dla materiału starzonego. Wymienione punkty należą do powierzchni ograniczającej zakres odkształceń sprężystych.

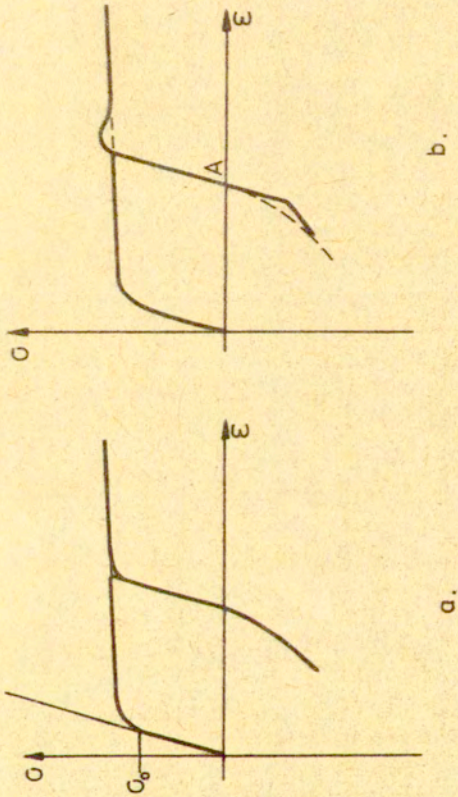
Powierzchnie sprężystości materiałów anizotropowych /rys.3/ posiadają pięć cech charakterystycznych:

1. symetria względem kierunku obciążania,
2. przesunięcie w kierunku obciążania,
3. zmiana wymiaru w kierunku obciążania,
4. zmiana wymiaru w kierunku prostopadłym do kierunku obciążania,
5. zmiana kształtu powierzchni w wyniku odkształcenia plastycznego i starzenia.

Analizując doświadczenia [4-7, 20,21] wykazano, że wektor prędkości odkształcenia plastycznego  $\dot{\epsilon}_p$  można traktować jako prostopadły do powierzchni plastyczności. Wyraźne odchylenia wektora prędkości odkształcenia od kierunku normalnej do powierzchni wiadać najczęściej [4-7] dla powierzchni odpowiadającej granicy proporcjonalności, gdy nie pojawiły się jeszcze odkształcenia plastyczne /uwaga moja, K.T./.

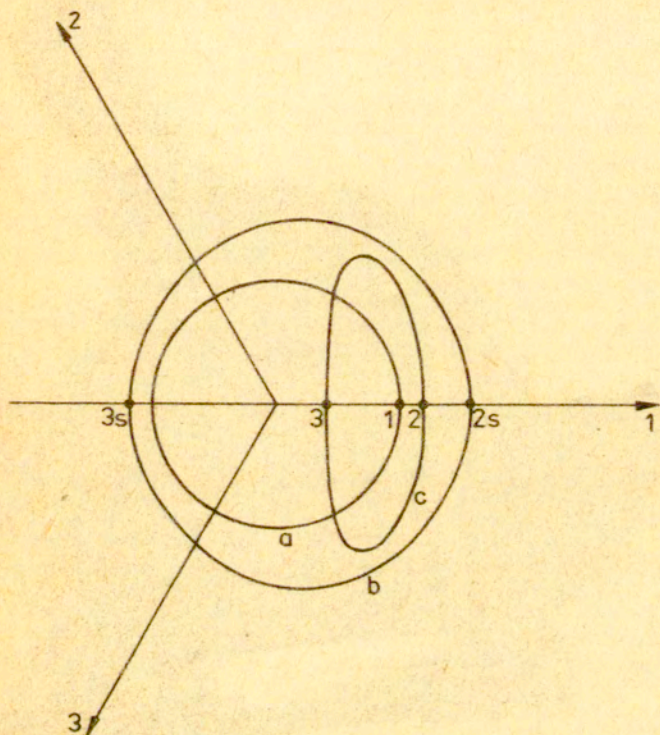
## 2.2. Modele geometryczne plastycznego płynięcia metali.

W tym rozdziale rozpatrzmy w jaki sposób plastyczne płynię-



Rys. 2 Krzywe umocnienia: rozciąganie wstępne, wtórne i rewersyjne ściskanie;  
a/ bez starzenia materiału, b/ starzenie naturalne w punkcie A.





Rys.3 Schemat powierzchni sprężystości: a/ materiał izotropowy /początkowa powierzchnia sprężystości/;  
b/ materiał anizotropowy /odkształcenie wstępne i starzenie naturalne/; c/ materiał niestarzony.

cie metali jest opisywane przez modele, które utworzono przez wyszukanie parametrów reprezentujących własności mechaniczne metali oraz zaproponowanie związków geometrycznych pomiędzy tymi parametrami. W modelach tych skupimy uwagę na omówieniu związków zawierających plastyczną część odkształcenia, co jest szczególnie uzasadnione, gdy odkształcenia sprężyste są małe w porównaniu do trwałej deformacji. Przez pominięcie odkształceń sprężystych otrzymujemy materiał sztywny, w którym odkształcenia pojawiają się po przekroczeniu granicy plastyczności. Ograniczenie się do materiału niesprężystego nie umniejsza ogólności rozważań, ponieważ w razie potrzeby można dodać odkształcenie sprężyste odpowiednio do wielkości naprężenia.

rozpatrzmy najpierw modele geometryczne opisujące materiał ze wzmocnieniem kinematycznym, a następnie omówimy model materiału ze wzmocnieniem izotropowym. Model ze wzmocnieniem izotropowym był używany wcześniej od modelu ze wzmocnieniem kinematycznym. Jednak ze względu na to, że hipoteza wzmocnienia kinematycznego uwzględnia efekt Bauschingera, można szerzej pokazać na jej przykładzie sposób uwzględnienia cech plastycznych metali w opisie teoretycznym. Jako trzecią omówimy teorię plastyczności Il'iuszyna.

### 2.2.1. Hipotezy wzmocnienia kinematycznego.

Pierwsze i bardzo trafne hipotezy opisujące zachowanie metali umacniających się przy małych deformacjach plastycznych zaproponowane zostały w pracach Iszlińskiego [25] i Pragera [26]. Główną zaletą tej hipotezy było wykazanie, że zmiany granicy plastyczności przy obciążeniach po różnych drogach naprężenia można opisać przez ruch powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń. Nowy kierunek rozwoju modelu materiału ze wzmocnieniem kinematycznym zapoczątkował Mróz [21] proponując hipotezę, która może być modyfikowana odpowiednio do specyficznych własności materiału. Z tego powodu omówimy tą hipotezę jako przykład opisu zachowania się materiału przy plastycznej deformacji.

W hipotezie wzmocnienia można wyodrębnić trzy elementy opisujące własności plastyczne materiału:

1. reguła wzmocnienia,
2. warunek plastyczności,
3. prawo płynięcia.

Wyjaśnimy znaczenie tych trzech określeń na przykładzie



hipotezy Mroza.

Pierwszą cechą rozpatrywanego modelu jest przybliżenie początkowych własności materiału przez rodzinę powierzchni plastyczności ograniczających pola stałych modułów wzmocnienia. Pole stałych modułów wzmocnienia otrzymuje się w ten sposób, że krzywą  $\sigma(\epsilon)$  przedstawia się jako linię łamaną, która składa się z odcinków prostych. Każda powierzchnia plastyczności opisywana jest przez funkcję płynięcia:

$$(2.1) \quad f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = F(\lambda),$$

gdzie:  $\alpha_{ij}$  - oznacza przemieszczenie środka powierzchni plastyczności,

$\lambda$  - jest parametrem opisującym rozszerzenie powierzchni plastyczności.

Drugą cechą modelu Mroza jest nowe prawo ruchu powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń, które razem z polem stałych modułów wzmocnienia określa regułę wzmocnienia materiału. Ruch powierzchni plastyczności wyjaśnimy przy pomocy rys.4. W trakcie obciążania w kierunku  $d\vec{\sigma}$  - środek plastyczności  $f_1$  porusza się w kierunku PR wybranym w ten sposób, że w punktach P oraz R są jednakowo skierowane normalne do  $f_1$  oraz  $f_2$ . Przy zmianie naprężenia o wielkość  $d\vec{\sigma}$ , środek powierzchni plastyczności przesuwa się o wielkość  $d\vec{\alpha}$

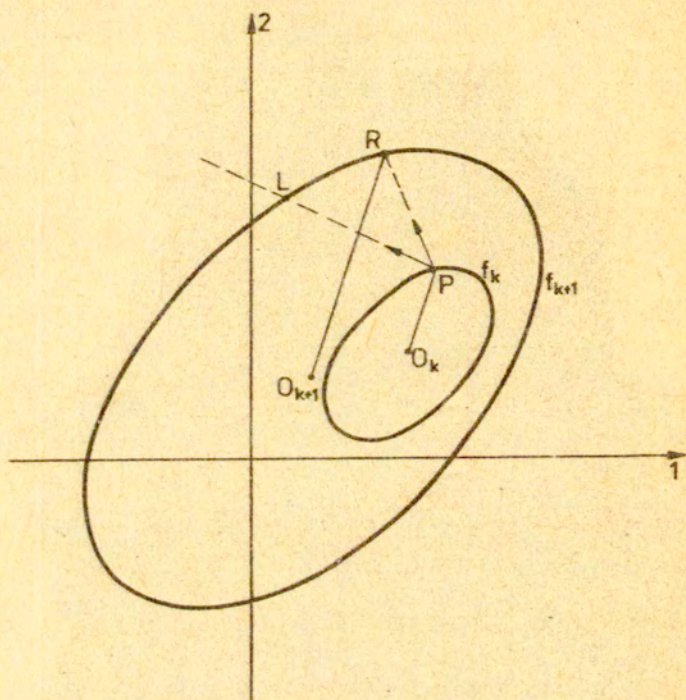
$$(2.2) \quad d\vec{\alpha} = d\mu \vec{PR},$$

gdzie  $d\mu$  - współczynnik skalarny..

Trzecią cechą omawianego podstawowego modelu wzmocnienia jest przyjęcie prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem plastyczności i wykorzystanie go do wyznaczania przyrostów odkształceń plastycznych w funkcji obciążenia.

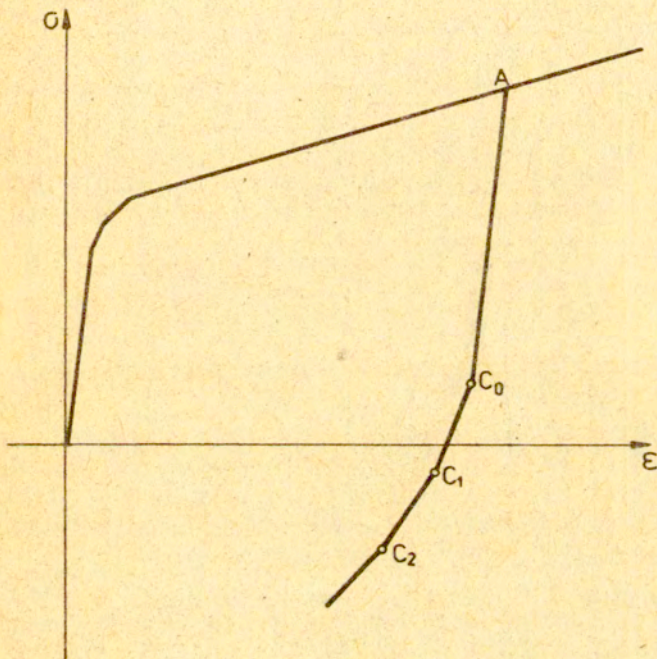
Rozpatrzmy wariant podanej hipotezy wzmocnienia. Omawiany model można zredukować do modelu wzmocnienia kinematycznego Zieglera [28] zaproponowanego w 1959 roku. W tym celu przyjmijmy, że powierzchnia  $f_1$  jest pierwszą powierzchnią plastyczności, następne powierzchnie leżą nieskończenie daleko. W tym przypadku, wektor  $d\vec{\alpha}$  jest skierowany w kierunku wektora łączącego punkt obciążenia ze środkiem powierzchni plastyczności, więc związek redukuje się do równania zaproponowanego przez Zieglera:

$$(2.3) \quad d\alpha_{ij} = d\mu (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}).$$



Rys.4 Reguła wzmocnienia kinematycznego Mroza [27] .





Rys.5 Określenie punktów powierzchni plastyczności.

W tym przypadku, pole modułów wzmocnienia sprowadzone jest do liniowego wzmocnienia w całym zakresie obciążeń.

Rozpatrzmy uproszczony kształt krzywej umocnienia opisującej proporcjonalne obciążenie materiału wyżarzonego aż do osiągnięcia wstępnego naprężenia  $\sigma_A$  i następujące po nim rewersyjne obciążanie przy zachowaniu stałej proporcji naprężeń. Dla wybranych wielkości stałych modułów umocnienia otrzymano punkty  $C_0, C_1, \dots, C_k$  /rys.5/ leżące na powierzchniach plastyczności  $f_0, f_1, \dots, f_k$ . Jeżeli będziemy odciążali materiał, to w ogólnym przypadku własności materiału, gdy zatrzymamy odciążanie w dowolnym punkcie zakresu sprężystego i powtórnie obciążymy metal w kierunku pierwszego obciążenia, otrzymamy punkt A należący do kilku powierzchni plastyczności  $f_k$ . Obciążanie powyżej punktu A będzie podążać wzdłuż pierwotnej krzywej wzmocnienia. Punkty A oraz  $C_1$  określają szerokość powierzchni plastyczności:

$$(2.4) \quad 2a = \sigma_A - \sigma_{C_1} .$$

Przeprowadzone rozumowanie pokazuje możliwość uwzględnienia w hipotezie wzmocnienia Mroza tak skomplikowanego zachowania metali, jakie opisano w poprzednich rozdziałach.

Jeżeli przyjmiemy, że wszystkie początkowe powierzchnie plastyczności  $f_k$  są opisywane przez warunek Hubera-Misesa, to przyjęte prawo przemieszczania powierzchni zapewnia, że nie nastąpi przecięcie dwu powierzchni a jedynie ich zetknięcie w jednym punkcie. Można oczywiście w ten sposób wybrać kształty dwu powierzchni, ewentualnie regułę ich przemieszczania, że przetną się one w trakcie obciążania. Jednak taka konfiguracja tworzyłaby nowe problemy, które bez wyraźnego celu komplikują model umocnienia.

Pole stałych modułów umocnienia oraz równanie warunku plastyczności zapewniające nieprzecinanie się powierzchni, uzupełnione stowarzyszonym prawem płynięcia pozwalają wyznaczyć odkształcenia przy dowolnych drogach obciążania.

### 2.2.2. Hipotezy wzmocnienia dla materiału bez efektu Bauschingera.

Omówimy obecnie hipotezy wzmocnienia, w których powierzchnia plastyczności nie przesuwa się w trakcie obciążania. Tego typu hipotezę zaproponował Hill [29], Gotth [30]. W obu przypadkach trzeba wykonać kilka doświadczeń aby wyznaczyć współczynniki materiałowe. Hipotezę Hilla wykorzystano wielokrotnie, porównując z nią nowe teorie plastyczności.



W pracy [31] używano hipotezę Hilla do obliczenia krzywych  $\sigma(\epsilon)$  przy proporcjonalnym obciążaniu, gdy określone było prawo wzmocnienia w trzech kierunkach obciążania. Jako prawo wzmocnienia przyjmowano doświadczalny wykres naprężenia w funkcji odkształcenia przy jednoosiowym obciążaniu w dowolnie wybranym kierunku. Parametr  $d\lambda$  w stowarzyszonym prawie płynięcia wyznaczono z równania:

$$(2.5) \quad d\lambda = Z d\epsilon_z = T d\epsilon_\theta = S d\bar{\theta}_{\theta z} ,$$

gdzie:  $Z$ ,  $T$ ,  $S$  - naprężenia w próbce rurkowej rozciąganej osiowo, obwodowo i skręcanej.

Wzór (2.5) pokazuje, że parametr  $d\lambda$  jest wielkością przyrostu pracy dysypowanej przy obciążaniu w kierunkach wybranych dla określenia współczynników materiałowych a więc możemy napisać

$$(2.6) \quad d\lambda = dW.$$

Aby obliczyć  $dW$ , musimy wykorzystać warunek plastyczności.

Dla obciążeń w płaszczyźnie  $\sigma_\theta, \sigma_x$  warunek plastyczności Hilla, który stosowano w pracy [31], redukuje się do postaci:

$$(2.7) \quad \frac{\sigma_x^2}{Z^2} - \frac{\sigma_\theta^2}{T^2} - \frac{\sigma_\theta \sigma_x}{2Z^2} = 1 .$$

Obliczmy zależność między  $d\lambda$  i  $dW$  w złożonym stanie naprężenia. Dla obciążeń w płaszczyźnie  $\sigma_\theta, \sigma_x$  przyrost pracy [dysypowanej] wyraża się równaniem:

$$(2.8) \quad dW = d\lambda \left( \frac{\sigma_x^2}{Z^2} + \frac{\sigma_\theta^2}{T^2} - \frac{\sigma_\theta \sigma_x}{Z^2} \right) .$$

Z powyższych dwu równań otrzymujemy:

$$(2.9) \quad dW = d\lambda \left( 1 - \frac{\sigma_\theta \sigma_x}{2Z^2} \right) .$$

Hill spełnił warunek  $dW = d\lambda$  [29] dla rozpatrywanych stanów naprężenia, dzięki wprowadzeniu współrzędnych uogólnionych. W omawianej pracy [31] warunek  $dW = d\lambda$  nie jest spełniony w przypadku złożonego stanu naprężenia.

Obliczenia dla złożonego stanu naprężenia prowadzono w ten sposób [31], że dla małej wartości  $d\epsilon_\theta$  obliczano  $d\lambda$  i następnie z wykresów znajdowano wartości  $Z$  oraz  $S$  spełniające równanie (2.5). Metodą prób i błędów należało określić taką pierwszą wartość  $d\epsilon_\theta$  aby możliwe było znalezienie  $d\lambda$  dla wszystkich wartości odkształceń. Rozwiązanie tego problemu jednakże nie daje automatycznie spełnienia  $dW = \text{const}$  dla złożonych dróg obciążania, a potrzebę takiego warunku sugeruje równanie (2.6). Jeżeli  $n$

płaszczyźnie naprężeń przedstawimy warunki plastyczności otrzymane z tych przeliczeń, otrzymamy powierzchnię początkową odpowiadającą granicy sprężystości i następne powierzchnie dla kolejnych przyrostów  $\alpha\lambda$ .

Dla paru kierunków proporcjonalnego obciążania w złożonym stanie naprężenia obliczono krzywe naprężeń w funkcji odkształceń i porównano je z wynikami doświadczeń dla stali, miedzi i stopu aluminium. Obliczone krzywe  $\sigma(\epsilon)$  dla warunku Hilla odbiegają nawet około 25% od wielkości naprężeń znalezionych w doświadczeniach, ale te różnice zależą od gatunku materiału i stanu naprężenia. Niewiele poprawiło się przybliżenie teorii do eksperymentu gdy zastosowano warunek plastyczności [40] uwzględniający obrót i przesunięcie powierzchni plastyczności, chociaż znacznie wzrosła ilość pracy obliczeniowej.

Widoczne rozbieżności między opisem teoretycznym i wynikami eksperymentalnymi mogą wynikać z dwu przyczyn. Pierwszą z nich jest nie spełnienie równego przyrostu pracy (równanie (2.9)) dla różnych dróg obciążania. Drugą przyczyną są warunki plastyczności, które dają widoczną rozbieżność z doświadczeniami dla dróg obciążania  $\sigma_x = \sigma_\theta$  i  $\sigma_x = 2\sigma_\theta$ . Zajmiemy się obecnie tym zagadnieniem.

W omawianym artykule [31] przyjęto warunek Hilla w postaci uproszczonej, dzięki czemu zredukowano ilość współczynników materiałowych. Uproszczenie polega na tym, że przyjęto dwa współczynniki równe. W ten sposób warunek plastyczności przyjmuje postać (dla  $\sigma_x, \sigma_\theta$ ):

$$(2.10) \quad F(\sigma_\theta - \sigma_x)^2 + F\sigma_x^2 + H\sigma_\theta^2 = 1.$$

Jeżeli dla  $\sigma_\theta = 0$  oznaczymy  $\sigma_x = Z$  i dla  $\sigma_x = 0$  oznaczymy  $\sigma_\theta = T$  to otrzymujemy współczynniki  $F = \frac{1}{2Z^2}$ ,  $H = -\frac{1}{2Z^2} + \frac{1}{T^2}$ .

Warto rozważyć, jakie konsekwencje powoduje przyjęcie dwu współczynników równych w równaniu Hilla. Rozpatrzmy najpierw szczególnie przypadek równania Hilla, gdy redukuje się ono do warunku Hubera-Misesa. Gdy weźmiemy współczynniki  $F = H = \frac{1}{2Z^2}$  w równaniu Hilla w postaci:

$$(2.11) \quad (F+H)\sigma_\theta^2 - 2F\sigma_\theta\sigma_x + 2F\sigma_x^2 = 1,$$

otrzymujemy warunek Hubera-Misesa:

$$(2.12) \quad \sigma_\theta^2 - \sigma_\theta\sigma_x + \sigma_x^2 = Z^2.$$

W celu porównania warunku Hubera-Misesa z warunkiem Hilla obliczymy naprężenia dla kierunku obciążania  $\sigma_\theta = 2\sigma_x$ : otrzymujemy



$\sigma_{\theta} = 1,155 Z$ . Przy jednoosiowym rozciąganiu w kierunku osi  $\sigma_{\theta}$  mamy  $\sigma_{\theta} = Z$ . Przy jednoosiowym rozciąganiu w kierunku osi  $\sigma_z$  mamy  $\sigma_z = Z$ . Przyjmijmy, że w kierunku osi  $\sigma_z$  granica plastyczności wzrosła dwukrotnie a więc mamy  $\sigma_z = 2Z$ . W kierunku osi  $\sigma_{\theta}$  mamy nadal  $\sigma_{\theta} = Z$ . Z warunku Hilla (2.10) otrzymujemy równanie:

$$(2.13) \quad \frac{1}{4} \sigma_z^2 - \frac{1}{4} \sigma_{\theta} \sigma_z + \sigma_{\theta}^2 = Z^2.$$

Dla kierunku naprężeń  $\sigma_{\theta} = 2\sigma_z$  z równania (2.13) otrzymujemy  $\sigma_{\theta} \approx 1,03Z$ . Z porównania obliczeń dla równań (2.12) oraz (2.13) widać, że podwyższenie granicy plastyczności dwukrotnie w kierunku  $\sigma_z$  spowodowało spadek granicy plastyczności w kierunku  $\sigma_{\theta} = 2\sigma_z$  w proporcji  $m = 1,03/1,155 = 0,89$ .

Obliczenia, których tu nie będziemy wykonywać, pokazują wzrost granicy plastyczności w kierunku  $\sigma_{\theta} = 2\sigma_z$  gdy materiał zostaje osłabiony w głównym kierunku anizotropii  $\sigma_z$ , nie są poparte wynikami doświadczeń. Jeżeli granica plastyczności w kierunku  $\sigma_z$  zmniejszy się aż dwukrotnie w porównaniu do materiału izotropowego, z warunku Hilla otrzymujemy w kierunku  $\sigma_{\theta} = 2\sigma_z$  wartość  $\sigma_{\theta} = \infty$ . Przedstawione wyniki obliczeń nie mają potwierdzenia w eksperymentach. Tak więc równanie, które autorzy zastosowali, ma silne ograniczenia utrudniające opis anizotropii plastycznej metalu. Innego warunku plastyczności [40] nie będziemy omawiać, ze względu na małą różnicę między nim i warunkiem Hilla.

Rozbieżności teorii z eksperymentem zmusiły do zastosowania warunków plastyczności umożliwiających wykorzystanie większej ilości badań doświadczalnych oraz prawa wzmocnienia ujmującego specyficzne cechy wykresów  $\sigma(\varepsilon)$  dla różnych dróg obciążania. Kierunek poszukiwań zilustrujemy na przykładzie następnego hipotezy.

Gotoh [30] opisał anizotropię plastyczną w płaskim stanie naprężenia za pomocą równania, które jest wielomianem czwartego stopnia o 9-u współczynnikach materiałowych. Granica plastyczności w dwu prostopadłych kierunkach jest nierówna, powierzchnia nie ulega przesunięciu. W celu określenia 9-u współczynników trzeba wykonać 5 oddzielnych badań materiałowych. Ponieważ jedną z prób jest dwuosiowe równomierne rozciąganie, zrozumiałe jest, że powierzchnia plastyczności lepiej opisuje zachowanie materiału niż warunek plastyczności, w którym wykorzystywano tylko badanie jednoosiowe. Drugą istotną cechą omawianego ujęcia

[30], jest powiązanie współczynników w warunku plastyczności z odkształceniami rozciąganych próbek, które wycięto z blachy pod różnymi kątami względem kierunku walcowania. Efektem takich zabiegów jest dobra zgodność warunku plastyczności z wynikami doświadczeń. Gotoh stosował również funkcję drugiego stopnia, której wszystkie współczynniki obliczał z pomiarów odkształceń próbek rozciąganych /a więc inaczej, niż przy badaniu warunku Hilla drugiego stopnia o czym wspomniano już w rozdziale 2.2.2/. Do tego celu używano próbki wycięte z blachy w kierunku walcowania oraz pod kątem  $45^{\circ}$  i  $90^{\circ}$  do kierunku walcowania. Dzięki tej metodzie uniknięto badań w dwuosiowym stanie naprężenia i wyznaczono trzy niezależne współczynniki równania powierzchni plastyczności, które jednak nie gwarantują poprawienia dokładności opisu wyników doświadczeń.

Interesującą sprawą jest porównanie rozbieżności występujących w opisie powierzchni plastyczności metali różnych gatunków. Jeżeli funkcja 4-tego stopnia opisuje powierzchnię zbliżoną wymiarami do warunku Hubera-Misesa, to warunek Hilla różni się od nich wyraźnie. Natomiast gdy warunek Hilla oraz Gotoha niewiele różnią się wymiarami, to różnią się znacznie od elipsy Hubera-Misesa. Należy zwrócić uwagę, że obliczenia wykonano dla odkształcenia plastycznego 15%, przy którym już dużą rolę gra wzmocnienie metalu. Dlatego rozpatrzmy obecnie jak sformułowane prawo wzmocnienia, którym była uogólniona krzywa wzmocnienia.

Wprowadzono uogólnione współrzędne  $\sigma_{eq} = f^{1/4}$  (gdzie  $f$  - warunek plastyczności) oraz  $e_{eq} = \int de_{eq}$  związane przez warunek równoważnej pracy dysypowanej [30]:

$$(2.14) \quad dW^p = \sigma_{eq} de_{eq} = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}.$$

Zastosowanie takich współrzędnych oznacza sprowadzenie krzywych naprężeń w funkcji odkształceń do wybranej krzywej wzmocnienia uznanej za reprezentację własności materiału. Jako taki uznano wykres  $\sigma(\epsilon)$  otrzymany z próby rozciągania w kierunku walcowania.

Opis zaproponowany przez Gotoha uwzględnia wszystkie odmiany badania plastyczności blachy za pomocą wyciętych z niej próbek, które umożliwiają uzyskanie odkształceń występujących w tłocznictwie. Po wykonaniu takich badań przelicza się ich wyniki na wykres  $\sigma_{eq}(e_{eq})$ , z którego wyznacza się charakterystyczne wielkości służące do obliczenia współczynników warunku plastyczności.

Opracowane równania Gotoh stosował do wyznaczania granicy plastyczności rozciąganych próbek, które wycięto z blachy pod różnymi kątami. Porównanie wyników teoretycznych z rezultatami doś-



wiadczeń pokazało bardzo dobrą ich zgodność. Warto jeszcze zaznaczyć, że odkształcenia czterech próbek i granica plastyczności trzech próbek były używane do wyznaczania współczynników materiałowych warunku plastyczności.

Teoria zaproponowana przez Gotoha nie uwzględnia przemieszczenia powierzchni plastyczności, które widać wyraźnie przy małych odkształceniach plastycznych materiału anizotropowego. Natomiast przy odkształceniach trwałych występujących w tłocznictwie osiąga się regenerację powierzchni plastyczności [32] i zbliżenie do wzmocnienia izotropowego przy dwuosiowym rozciąganiu. Dlatego równanie Gotoha dobrze opisuje warunek plastyczności blachy przy dużych odkształceniach trwałych.

Omówione w rozdziale 2.2 doświadczenia, służące do weryfikacji paru hipotez wzmocnienia, mogą być traktowane jako przesłanki ogólnego modelu opisującego plastyczne płynięcie w funkcji przykładanych obciążeń. Przy takim podejściu do problemu uplastycznienia metali najczęściej badano wpływ kierunku oraz wielkości obciążenia na umocnienie i przeważnie pomijano analizę doświadczeń w przestrzeni odkształceń. Dlatego omówimy obecnie doświadczenia wykonane dla zweryfikowania teorii plastyczności Iliuszyna, który stworzył podstawy badań wpływu geometrii trajektorii deformacji na uplastycznienie metali.

### 2.2.3. Teoria plastyczności Iliuszyna.

Sformułowane przez Iliuszyna [34] związki matematyczne między "wielkościami fizycznymi" i odkształceniem dały początek pracom eksperymentalnym o programach odmiennych od wcześniej omówionych doświadczeń. Iliuszyn wprowadził pięciowymiarową przestrzeń odkształceń ponieważ przyjął, że materiał jest nieściśliwy. Dla płaskiego stanu naprężenia otrzymuje się współrzędne

$$(2.15) \quad \epsilon_1 = \epsilon_{11} \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_{22} - \epsilon_{33}), \quad \epsilon_3 = \sqrt{2} \epsilon_{12}.$$

W tym układzie współrzędnych /przestrzeni pięciowymiarowej/ moduł wektora odkształcenia jest równy intensywności dewiatora odkształcenia:

$$\epsilon_i = \left( \sum_{i=1}^5 \epsilon_i^2 \right)^{1/2} = (\epsilon_{ij} \epsilon_{ij})^{1/2}.$$

Krzywa zakreślona przez koniec wektora odkształcenia jest trajektorią odkształcenia o długości:

$$(2.15a) \quad t = \int_0^t dt = \int_0^{\epsilon} (d\epsilon_{ij} d\epsilon_{ij})^{1/2}.$$

Analogicznie określa się w przestrzeni dewiatorów naprężeń /pięciowymiarowej dla  $\mathcal{J}_{ii} = 0$ , moduł wektora dewiatora naprężenia  $\sigma_i$  równy intensywności naprężeń oraz hodograf wektora  $\sigma_i$  nazywany drogą obciążenia.

Weryfikację eksperymentalną teorii Iliuszyna wykonał Leński [35]. Doświadczenia przeprowadzone zostały na próbkach rurkowych, które obciążono przez rozciąganie i skręcanie. Przyjęto tu materiał nieściśliwy w czasie plastycznej deformacji. Doświadczenia [35] przedstawiono we współrzędnych:

$$e_1 = \varepsilon_{xx}, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{xy}.$$

Jako składowe stanu naprężenia przyjęto:

$$\sigma_1 = \sigma_{xx}, \quad \sigma_3 = \sqrt{3} \tau_{xy}.$$

Współrzędne wybrano tak, aby ich iloczyn skalarny dawał wielkość pracy przy plastycznej deformacji rurki:  $W = \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \tau_{xy} \sigma_{xy}$ . Jednakże współrzędne zostały wybrane w ten sposób, że moduł wektora odkształcenia nie jest równy intensywności dewiatora odkształcenia, co powinno cechować przestrzeń pięciowymiarową Iliuszyna. W przypadku rozciągania ze skręceniem dla:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{xx}, \quad 2\varepsilon_{12} = \sigma_{xy}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{11},$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E_i^2 &= \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \frac{3}{2}\varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + 2\varepsilon_{12}^2 = \\ &= \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + 2\varepsilon_{12}^2 = \\ &= \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + 2\varepsilon_{12}^2 = \\ &= \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 = \frac{3}{2}\varepsilon_{11}^2 + 2\varepsilon_{12}^2 = \frac{3}{2}E_i^2 \end{aligned}$$

gdzie:  $E_i = (\varepsilon_{xx}^2 + \frac{1}{3}\sigma_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}$  jest modułem wektora o współrzędnych

$e_1 = \varepsilon_{xx}$ ,  $e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{xy}$ . Tak więc moduł tego wektora nie jest równy intensywności dewiatora odkształcenia.

Jeżeli mamy materiał z anizotropią plastyczną, to  $\varepsilon_{22} \neq \varepsilon_{33}$  i z równania (2.15) widać, że do pełnej ilustracji procesu deformacji należałoby używać trójwymiarową przestrzeń odkształceń. Jednakże wyniki wszystkich badań przedstawiono tylko we współrzędnych  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{xy}$  a więc nie można ocenić zjawisk zachodzących z powodu istnienia  $\varepsilon_2$  (równanie 2.15). W płaszczyźnie



$\epsilon_{xx}, \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{xy}$  również pokazano naprężenie w postaci wektora  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_3$  o początku znajdującym się w punkcie wyznaczonym przez odkształcenia.

Doświadczenia [35,50] poświęcono badaniom trajektorii deformacji składających się z odcinków linii prostych i fragmentów łuku koła. Jeżeli początkowo deformacja przebiega wzdłuż linii prostej w płaszczyźnie  $e_1, e_3$  to wektor naprężenia jest skierowany wzdłuż trajektorii deformacji /dla materiału wyzarzonego/. Gdy trajektoria deformacji zmienia kierunek np. o  $90^\circ$  to wektor dewiatora naprężenia obróci się o  $90^\circ$  nie wcześniej niż po długości odcinka trajektorii nazywanym "ślądem opóźnienia". Wyniki doświadczeń wskazują, że długość śladu opóźnienia silnie zależy od kąta zmiany trajektorii i prawdopodobnie słabiej od długości trajektorii deformacji.

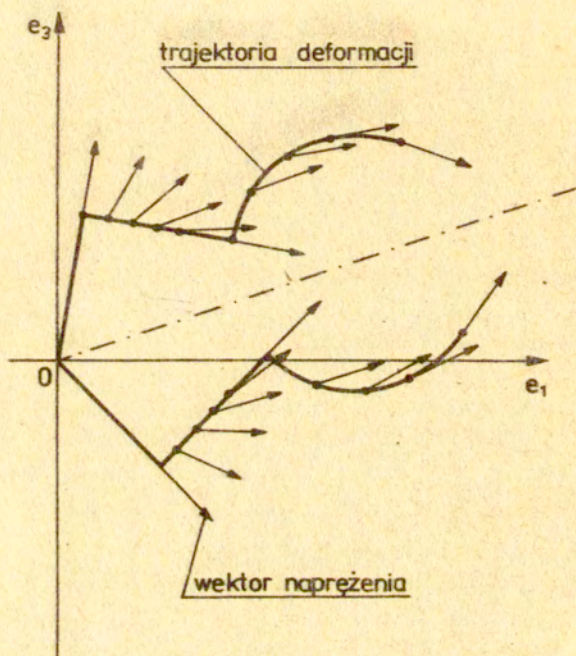
Zasadnicza część doświadczalnej weryfikacji teorii Iliuszyna przeznaczona była na badania postulatu izotropii /rys.6/.

Postulat izotropii ma prostą interpretację geometryczną. Wynika z niego, że przy sztywnym obrocie i lustrzanym odbiciu trajektorii, nie zmieniają się długości wektorów naprężenia z nią związanych. Przeprowadzone doświadczenia wykazały, że postulat izotropii jest zachowany nawet dla złożonych geometrii trajektorii deformacji.

Doświadczalnie stwierdzono, że należy rozróżnić trajektorie małej krzywizny oraz trajektorie zawierające odcinki proste o dużej zmianie kierunku. W szczególności [50] przy trajektorii kołowej o promieniu krzywizny  $R \geq 10 \epsilon_{spr}$  /trzy długości śladu opóźnienia/ oraz intensywności odkształcenia plastycznego nie większej niż 4,5% okazało się, że wektor naprężenia jest styczny do trajektorii. Otrzymany wynik dowodzi, że ma tu zastosowanie znana reguła proporcjonalności składowych dewiatora prędkości odkształcenia i dewiatora naprężenia.

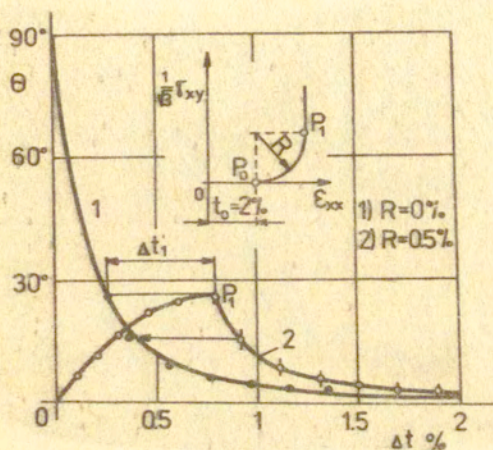
W celu dokładnego zbadania kierunku wektora naprężenia wykonano [35] wykresy jego składowej normalnej do trajektorii deformacji w funkcji długości trajektorii. Z wykresów widać, że składowa normalna naprężenia nie spada do zera na prostoliniowym fragmencie trajektorii deformacji po nagłej zmianie jej kierunku. Wyniki doświadczeń wskazują, że należy zmienić definicję śladu opóźnienia, którą stosował Leński [35, 50]. Ślad opóźnienia powinien być długością przyrostu trajektorii deformacji zawartą pomiędzy dwoma jej segmentami, na których wektor naprężenia zachowuje stały kąt względem trajektorii deformacji.

Doświadczenia doprowadziły Leńskiego [11] do hipotezy lokal-



Rys.6 Trajektorie deformacji o jednakowej wewnętrznej geometrii.





Rys. 7 Kąt  $\theta$  między wektorem  $\sigma$  i wektorem  $d\epsilon$  w funkcji przyrostu  $\Delta t = t - t_0$  długości trajektorii deformacji dla miękkiej stali S10C [49].  
 • punkty  $\phi$  krzywej 2 cofnięte o wielkość  $\Delta t_1$ .

nej określoności przy rosnących odkształceniach, którą bardziej szczegółowo badali Ohashi et al. [49]. Doświadczenia wykonano dla przestudiowania uproszczonej zależności wiążącej kąt między wektorem naprężenia " $\sigma$ " i kierunkiem przyrostu odkształcenia plastycznego  $d\epsilon$ :

$$(2.16) \quad \frac{d\theta}{dt} = f(\theta, t), \quad \cos \theta = \frac{\vec{\sigma} \cdot d\vec{\epsilon}}{|\vec{\sigma}| |d\vec{\epsilon}|}, \quad t = \int (d\epsilon_{ij} \cdot d\epsilon_{ij})^{\frac{1}{2}},$$

gdź trajektoria deformacji jest linią prostą po zmianie kierunku odkształcenia. Głównym celem badań było wykazanie, że historia odkształcenia przed punktem załamania trajektorii nie ma wpływu na powyższy związek dla prostoliniowego odcinka trajektorii odkształcenia /rys. 7/.

Gdy droga przejścia między dwoma prostoliniowymi i prostopadłymi odcinkami trajektorii była łukiem o promieniu  $R > 0$ , otrzymano dla niej złożony przebieg zależności  $\theta(\Delta t)$ . Zależność  $\theta(\Delta t)$  wzdłuż łuku nie została opisana w sposób ogólny /linia  $O-P_1'$ . Druga część funkcji  $\theta(\Delta t)$  poza punktem  $P_1'$ , która odpowiada nowemu prostoliniowemu odcinkowi  $\Delta t$  trajektorii, stanowiła część wykresu /krzywa 1/ otrzymanego dla reptywnej zmiany kierunku odkształcenia. Taki przebieg wykresu  $\theta(\Delta t)$  dowodzi, że jest on niezależny od historii odkształcenia.

Weryfikację doświadczalną teorii Iljuszyna wykonywano badając trajektorie deformacji i zaniedbując porównawcze eksperymenty wzdłuż trajektorii obciążenia. Dlatego oddzielnie omówimy takie doświadczenia wykonane [39] na paru stalach, dla których badano zachowanie ich przy unikalnych programach obciążeń.

Doszczinskij i Maksak [39] zajęli się badaniami przy złożonych drogach obciążania, przy których obracają się kierunki naprężeń głównych, natomiast intensywność naprężeń zachowuje stałą wartość osiągniętą przy proporcjonalnym obciążaniu. Jako nową współrzędną wprowadzili oni długość łuku drogi obciążenia:

$$(2.17) \quad ds = \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + ds_3^2}$$

w przestrzeni płaskiego stanu naprężenia

$$(2.18) \quad s_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_x - \frac{1}{2} \sigma_y); \quad s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_y; \quad s_3 = \sqrt{2} \tau_{xy}.$$

Jako drugą współrzędną przyjęto intensywność odkształceń  $\epsilon_1$ .

Wykonano szereg doświadczeń, w których drogi obciążania leżały w przestrzeni naprężeń  $s_1, s_2, s_3$  na przecięciach płaszczyzn z powierzchnią kuli, której promień jest proporcjonalny do stałej



intensywności naprężeń. Na wykresach  $\Delta(\xi_i)$  punkty doświadczalne, dla badanego gatunku stali 45 leżały w pobliżu jednej linii prostej niezależnie od geometrii drogi obciążania. Dla mosiądzu, miedzi i stopu aluminium wyniki doświadczeń układały się również wzdłuż linii prostych, chociaż widać większy rozrzut punktów doświadczalnych niż w przypadku stali.

W wyniku przeprowadzonych doświadczeń wywnioskowano, że moduł wektora przyrostu deformacji plastycznej  $|d\mathcal{E}^p|$  jest proporcjonalny do modułu wektora przyrostu naprężeń:

$$(2.19) \quad |d\mathcal{E}^p| = n|d\mathcal{S}|.$$

Eksperymentalna funkcja (2.19) może być wykorzystana w równaniach Prandtla - Reussa [65].

W omówieniu badań związanych z teorią plastyczności Iliuszyna pominięto pewien podstawowy element techniki doświadczalnej, który powinien być oceniony przy bardzo precyzyjnych eksperymentach. Tym elementem jest stan naprężenia w próbce rurkowej poddawanej zmien-nemu rozciąganiu i skręcaniu. W pracy Leńskiego [50] podano elementarne wzory na obliczanie naprężeń, których rozkład w przekroju próbki jest stały. Taki schemat obliczeń budzi wątpliwości wywołane paru przyczynami, które wymienimy bez dodatkowych uzasadnień. W czasie niektórych programów badań następuje odciążanie a zatem w przekroju próbki skręcanej panować może sprężysto-plastyczny stan odkształcenia i przyjmowanie stałego rozkładu naprężeń jest nieuzasadnione. Próbki są odkształcane w zakresie do 2%, natomiast ich długość pomiarowa nie jest duża, ze względu na kołnierzyki służące do mocowania czujników mierzących odkształcenia. Na przykład w pracy [49] proporcja długości bazy do średnicy wynosiła 2,5 a więc znacznie mniej niż zalecano w literaturze [51] w celu uniknięcia wpływu zamocowań na wyniki doświadczeń.

Niewiele jest artykułów, które zawierają ilościowe dane ilustrujące wpływ wymienionych wyżej czynników związanych z wyznaczeniem stanu naprężeń w próbce. W pracy [51] podano wyniki obliczeń stanu naprężeń w próbce rurkowej przy różnych stanach obciążenia w zależności od wymiarów próbki. Ponieważ zalecane tam proporcje długości do średnicy rurki są dosyć trudne do zrealizowania, rozsądnym wyjściem z sytuacji byłoby stosowanie próbek o stałej geometrii początkowej we wszystkich laboratoriach.

Po scharakteryzowaniu hipotez wzmocnienia metali zajmiemy się pracami, które wykonywano dla oceny dokładności z jaką niektóre teorie ujmują zachowanie metali przy deformacji.

2.2.4. Weryfikacja doświadczalna teorii deformacyjnej i teorii plastycznego płynięcia.

Korwin [52] porównał teorię Iliuszyna w zakresie teorii deformacyjnych z teorią plastyczności Hencky i teorią małych sprężysto-plastycznych odkształceń /dla materiału ze wzmocnieniem/. Następnie porównano teorię Iliuszyna z teoriami płynięcia: Prandtla-Reussa i teorią Pragera /dla materiału umacniającego się/. Aby można było posługiwać się teorią Iliuszyna należało opracować w formie matematycznej trajektorię deformacji oraz historię naprężenia w funkcji parametrów trajektorii deformacji. Dzięki takim zabiegom udało się opisać w miarę dokładnie wyniki doświadczeń za pomocą teorii Iliuszyna, wyraźnie lepiej niż umożliwiały to cztery teorie wybrane do porównania.

Shanmy i Sidebottom [53] przeprowadzili weryfikację doświadczalną polegającą na kolejnym rozciąganiu i skręcaniu próbek z różnych metali. Porównywano wykresy naprężeń w funkcji odkształceń obliczone dla teorii odkształceniowej i teorii płynięcia. W teorii odkształceniowej używano równania Hencky, w teorii płynięcia stosowano równania Prandtla-Reussa. Porównano wyniki obliczeń dla stopu aluminium i dwa gatunków stali. Dla każdego materiału wykonano programy:

- 1/ a/ skręcanie od 0 do  $\tau_{\max}$ , b/ rozciąganie od 0 do  $\sigma_{\max}$  co wywołało spadek  $\tau$  od  $\tau_{\max}$  do  $\tau_{\sigma}$ .
- c/ skręcanie od  $\tau_{\sigma}$  do  $\tau_{\max}$  co wywołało spadek  $\sigma$  od  $\sigma_{\max}$  do  $\sigma_{\tau}$ .

2/ program podobny do 1/ ale zaczynający się od rozciągania.

Dla obu teorii otrzymywano [53] wzrost ewentualnie spadek wartości naprężeń odpowiednio do tendencji występującej w wynikach doświadczeń, a więc jakościowo opisują one zachowanie się materiału. Natomiast wykresy naprężeń obliczonych z teorii odkształceniowej leżały zawsze po przeciwnej stronie punktów doświadczalnych niż krzywe wyznaczone z teorii płynięcia.

Pod względem ilościowym uzyskano dobrą zgodność wyników [53] teorii płynięcia i doświadczeń tylko w jednym programie dla stopu aluminium /na trzy badane metale/. W pozostałych programach istnieją wyraźne rozbieżności ilościowe między wynikami doświadczeń i krzywymi teoretycznymi, jednak teoria płynięcia częściowo daje lepsze przybliżenie wartości naprężeń. Złożoność proce-



dury obliczeniowej nie pozwala na wnioskowanie, skąd biorą się różnice w dokładności opisu zachowania się tego samego metalu przy różnych programach obciążania. Wyniki wymienionych prac wskazują, że warto rozpatrzyć bliżej jak hipotezy wzmocnienia nadają się do opisanego anizotropii plastycznej.

### 2.2.5. Wpływ gatunku metalu na teoretyczny opis jego anizotropii plastycznej.

Próba rewersyjnego obciążania materiału odkształconego plastycznie /rys.1/ pozwala zmierzyć efekt Bauschinger'a, który ma duży wpływ na dokładność z jaką hipoteza wzmocnienia ujmuje przebieg naprężeń w funkcji odkształceń przy złożonych drogach obciążania.

Omówimy zmianę granicy plastyczności przy rewersyjnym obciążaniu w hipotezie Zieglera. Początkowym etapem opisu plastycznego zachowania metalu w hipotezie Zieglera jest przybliżenie doświadczalnej krzywej  $\sigma(\varepsilon)$  przez wykres ze wzmocnieniem liniowym. Dla takiego modelu możemy policzyć nową granicę plastyczności  $\sigma_+$  przy rewersyjnym obciążaniu po pewnym naprężeniu wstępnym  $\sigma_m$ . Obliczymy proporcję  $\sigma_+ / \sigma_m$ , którą użyjemy jako miarę efektu Bauschinger'a:

$$(2.20) \quad \frac{\sigma_+}{\sigma_m} = \frac{2\sigma_0}{\sigma_m} - 1,$$

$\sigma_0$  - początkowa granica plastyczności/.

Na rys.8a pokazano wykres  $\sigma_+ / \sigma_m$  w funkcji  $\sigma_0 / \sigma_m$  /linia 1/ dla miedzi. Wyniki doświadczeń /oznaczone kółkami/ zaczerpnięto z pracy [54]. Jak widać, hipoteza Zieglera nie opisuje zmiany granicy plastyczności miedzi przy rewersyjnym obciążaniu. Przybliżony opis doświadczeń można uzyskać za pomocą równania ujmującego rozszerzenie początkowej powierzchni plastyczności:

$$(2.21) \quad 2\sigma_{pl} = 2a\sigma_0 + 2b\sigma_m.$$

Dla  $\sigma_{pl} = \sigma_m = \sigma_0$  otrzymujemy

$$(2.21a) \quad b = 1 - a.$$

Granice plastyczności przy rewersyjnym obciążaniu otrzymujemy ze wzoru  $\sigma_+ + \sigma_m = 2\sigma_{pl}$  i równań (2.21), (2.21a):

$$(2.22) \quad \frac{\sigma_+}{\sigma_m} = 1 - 2a\left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_m}\right).$$

Linia 2 na rys.8a obliczona za pomocą tego równania opisuje lepiej efekt Bauschinger'a niż linia 1 obliczona z równania (2.20). Zmiana granicy plastyczności wynikająca z równania (2.22) oznacza rozszerzenie powierzchni plastyczności, którego to zjawiska nie

ujmuje hipoteza Zieglera. Można wykorzystać tu model wzmocnienia zaproponowany przez Mroza, pozwalający na uwzględnienie powierzchni plastyczności opisywanej przez zaproponowane wyżej równanie.

Na rysunku 8 b pokazano wykres  $\sigma/\sigma_m$  dla stali. Współrzędne punktów doświadczalnych obliczono wykorzystując wyniki opublikowane w pracy [5]. Z hipotezy Zieglera otrzymano linię 1, która opisuje zmianę efektu Bauschingera znacznie lepiej niż w przypadku miedzi. Uwzględnienie rozszerzenia powierzchni plastyczności /linia 2/ daje niewielkie różnice ilościowe w porównaniu z hipotezą Zieglera.

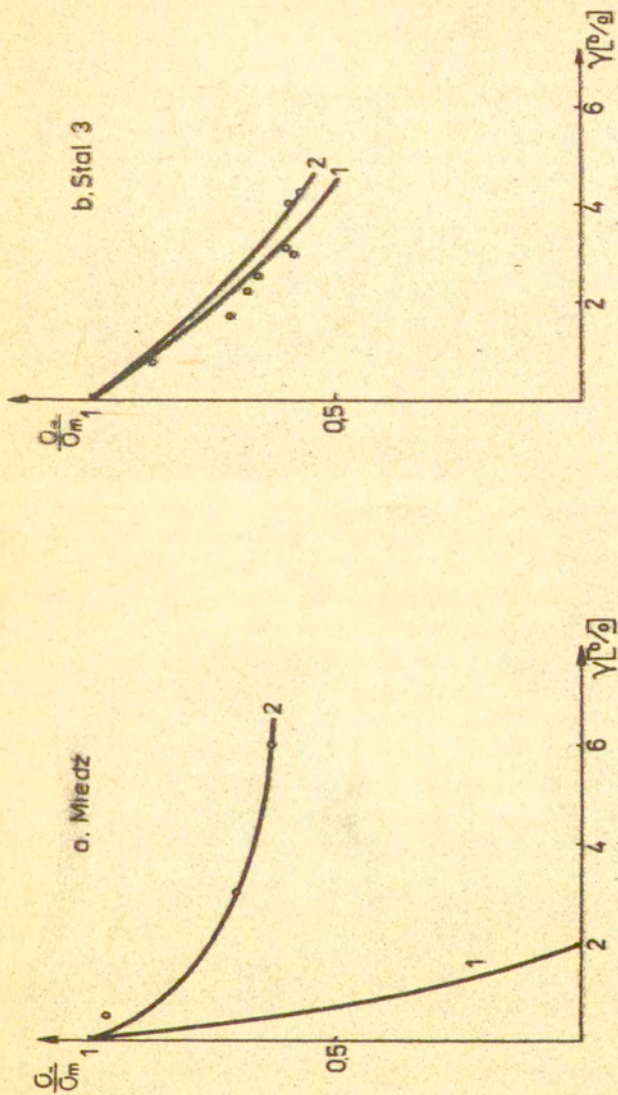
Omówione przykłady badań wskazują, że wybór hipotezy wzmocnienia należy uzależnić od gatunku metalu, którego plastyczne własności mamy opisywać. W literaturze mało danych jest na ten temat, raczej odnosi się wrażenie, że weryfikacja eksperymentalna hipotez wzmocnienia wykonywana jest systematycznie na przypadkowo wybranych metalach.

Kwestię wyboru wariantu teorii plastyczności przeznaczoną do opisania wzmocnienia metali poruszył Shanley [12]. W rozdziale dotyczącym wyznaczania krzywych  $\sigma(\epsilon)$  w złożonym stanie naprężenia przy proporcjonalnym obciążaniu podzielił on metale na dwie grupy. Bez powoływania się na źródła doświadczalne, Shanley podał, że teoria deformacyjna dobrze nadaje się do opisu krzywych  $\sigma(\epsilon)$  które mają przystanek plastyczności. Natomiast krzywe  $\sigma(\epsilon)$  bez przystanku plastyczności dobrze opisuje teoria głównych naprężeń ścinających, którą opracował Palm [14] na podstawie wcześniejszej teorii Bailey'a [13] stosowanej w obliczeniach pełzania.

Powyższe uwagi wskazują, że przyczyn rozbieżności w dokładności opisu zachowania różnych metali przez jedną teorię, można poszukiwać już w cechach charakterystycznych krzywych  $\sigma(\epsilon)$ . Na tę sprawę jak dotąd zwraca się jeszcze zbyt małą uwagę, i w niektórych przypadkach weryfikację eksperymentalną hipotezy wzmocnienia Zieglera wykonuje się przy użyciu materiałów, których anizotropii plastycznej ona nie opisuje.

W hipotezach wzmocnienia ważną rolę spełnia warunek plastyczności, którego ogólna postać matematyczna nie jest wiązana z gatunkiem metalu. Ponieważ badania warunku plastyczności będą głównym celem niniejszej pracy, skupimy się obecnie na omówieniu zasadniczych spraw z nim związanych.





Rys. 6 Zmiana efektu Bauschingera miedzi i stali 3.  
1/ reguła Zieglera; 2/ równanie (2,22).  
o - punkty doświadczalne.

### 2.3. Badania warunku plastyczności metali.

Warunek plastyczności przedstawiony w przestrzeni naprężeń nazywamy powierzchnią plastyczności. Wyniki badań doświadczalnych powierzchni plastyczności podsumowano w paru pracach [16, 32, 36, 69, 70] jednakże nie można uważać poczynionych tam uogólnień za wyczerpujące całą złożoność zagadnienia. W dalszych rozważaniach będziemy rozróżniać trzy grupy powierzchni plastyczności, które nazwiemy: 1/ powierzchnie plastyczności materiału wyżarzonego, 2/ powierzchnie plastyczności materiału odkształconego plastycznie i starzonego, 3/ chwilowe powierzchnie plastyczności materiału w trakcie procesu odkształcenia.

Powierzchnie plastyczności materiału wyżarzonego otrzymujemy przy pierwszym obciążeniu. W drugiej grupie znajdują się, jak dotąd, takie badania, w których materiał po odkształceniu został całkowicie odciążony. Doświadczenia w trzeciej grupie były wykonywane przeważnie przy częściowym odciążeniu o ile przypadkowo nie zdarzyła się droga obciążenia kończąca się chwilowym całkowitym odciążeniem. Ikegami [69, 70] wybrał z literatury przykłady doświadczalnych powierzchni plastyczności oraz usystematyzował je według całkowitego i częściowego odciążania w trakcie wetępnego odkształcania materiału.

Najwięcej doświadczalnych powierzchni plastyczności, które kwalifikują się do pierwszej grupy, opublikowano dla metali często stosowanych w technice. Szczególnie chętnie badano różne gatunki miękkiej stali, stopy aluminium, stopy miedzi, nikiel a więc także materiały, które łatwo poddawały się plastycznej deformacji. Stwierdzono, że w stanie wyżarzonej metale mają powierzchnię plastyczności zbliżoną do warunku Hubera - Misesa [37] na płaszczyźnie naprężeń głównych, chociaż zauważono sporadyczne odchylenia w kierunku innych warunków plastyczności. Warto wymierzyć dwa takie warunki plastyczności, które ograniczają zakres położenia punktów doświadczalnych.

Wewnątrz elipsy Hubera - Misesa /na płaszczyźnie naprężeń głównych/ znajduje się sześciobok odpowiadający kryterium plastyczności Treski. Na elipsie Hubera - Misesa jest opisany sześciobok otrzymany z warunku plastyczności, który proponowali Haythornthwaite [73] i Yu Mao-Hong [72]. Ten ostatni warunek, przedstawiony we współrzędnych  $\sigma, \tau$ , jest elipsą o półosiach  $\sigma_{pl}$  oraz  $\frac{2}{3}\sigma_{pl}$  a więc leży na zewnątrz elipsy Hubera - Misesa.



Yu Mao - Hong udowodnił, że jego kryterium [72] opisuje wyniki, doświadczeń, które opublikował Taylor i Quinney dla gruboziarnistej miękkiej stali oraz Ivey [74] dla stopu aluminium 19 s.

Pomiędzy warunkiem Hubera - Misesa i kryterium Treski na płaszczyźnie naprężeń głównych znajdują się punkty doświadczalne par metalu. Dokładniej zajmowali się tym zjawiskiem Mitrochin i Jagn [22], którzy badali uplastycznienie wyżarzzonego czystego niklu. Omówimy obszerniej wyniki tej pracy, jest ona rzadko cytowana w przeglądach literatury.

Mitrochin i Jagn [22] obciążali niklowe próbki w ten sposób, że dla różnych proporcji naprężeń utrzymywali stałą wartość parametru Łode  $M_{\sigma}$ . Dla tych kierunków obciążania, które charakteryzowały się jednakową wartością  $M_{\sigma}$ , uśredniano krzywe  $\sigma(\epsilon)$  aby wyeliminować wpływ niejednokrotności próbki i ewentualnej resztkowej anizotropii materiału. Krzywe  $\sigma(\epsilon)$  odpowiadające różnym wartościom  $M_{\sigma}$  układały się w ten sposób, że dla  $\epsilon_i = \text{const}$  wartość naprężeń rosła ze wzrostem  $|M_{\sigma}|$ . Największą różnicą naprężeń wynosiła około 12% dla skrajnych krzywych  $\sigma(\epsilon)$ , które otrzymano dla  $M_{\sigma} = 0$  i  $M_{\sigma} = \pm 1$ . Ta różnica odnosiła się do krzywych  $\sigma(\epsilon)$  w granicach intensywności odkształceń  $5\% \leq \epsilon_i \leq 10\%$ .

Różnica między krzywymi  $\sigma(\epsilon)$  około 12% oznacza, że naprężenia uplastyczniające powinny leżeć wewnątrz wieloboku odpowiadającego kryterium Treski na płaszczyźnie dewiatorowej naprężeń. Jednakże dla  $\epsilon_i = 8\%$  autorzy pokazali doświadczalną powierzchnię plastyczności na zewnątrz kryterium Treski i poniżej warunku Hubera-Misesa. Doświadczalna powierzchnia plastyczności jest wklęsła dla  $M_{\sigma} = 0$  i wypukła dla  $M_{\sigma} = \pm 1$ . Omówione wyniki zasługują na uwagę, ponieważ doświadczenia były starannie przygotowane w celu wyeliminowania wpływu anizotropii i niejednorodności próbek. Dodatkowo sprawdzono [22], że doświadczenia Davisa [23a] oraz Osgooda i Washingtona [23b] pozwalają wysnuć takie same wnioski o wpływie  $M_{\sigma}$ , jednak wymienieni autorzy prac nie zwrócili uwagi na ten efekt.

Omówione wyniki badań [22, 37, 72] wskazują, że nie istnieje jeden warunek plastyczności nawet dla materiału wyżarzzonego.

Powierzchnie plastyczności drugiej grupy otrzymuje się po odkształceniu plastycznym i starzeniu. Tę grupę tworzą wyniki badań przeważnie takich wyżarzonych metalu, których początkowa powierzchnia plastyczności jest zbliżona do warunków plastyczności, które omówiono wyżej. Ponieważ wymienione warunki plastyczności

mają metale o najszerszym zastosowaniu technicznym, dlatego jest zrozumiałe, że wykonano dla nich najwięcej badań.

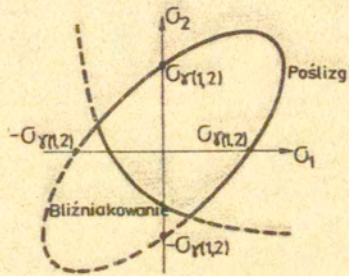
Powierzchnie plastyczności metali drugiej grupy są zbliżone kształtem do powierzchni należących do pierwszej grupy, z tą istotną różnicą, że przy małych odkształceniach plastycznych widać efekt Bauschingera wyrażający się w przesunięciu powierzchni plastyczności. Wpływ efektu Bauschingera na powierzchnię plastyczności zmniejsza się miarę wzrostu odkształceń plastycznych, które przyjęto do określenia uplastycznienia [4-7, 36] .

Dla drugiej grupy powierzchni plastyczności doświadczalnie udowodniono istnienie wtórnego, proporcjonalnego obciążenia, które powoduje zlikwidowanie wpływu historii wstępnego odkształcenia wzdłuż innych dróg naprężenia [5-7] . Ten efekt badano za pomocą próbek rurkowych i próbek płaskich. Próbkę rurkową z M63 obciążane przez dwa naprężenia rozciągające umożliwiły zbadanie zachowania powierzchni plastyczności w jednej ćwiartce płaszczyzny naprężeń głównych [5-7] . Blachy ze stopu aluminium PA-3 cięto na płaskie próbki, różnie nachylone względem kierunku walcowania [32] . Granica plastyczności rozciąganych płaskich próbek, przedstawiona w przestrzeni  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  /metoda zaprezentowana przez W. Szczepińskiego [24] /, pozwoliła zbadać jeden przekrój powierzchni plastyczności blachy.

Szczegółowa analiza [32] zachowania powierzchni proporcjonalności dowiodła, że dla opisanego efektu zapominania muszą być użyte obie hipotezy: hipoteza wzmocnienia kinematycznego i hipoteza wzmocnienia izotropowego. Najmniejsze regenerujące naprężenie wtórne jest potrzebne do osiągnięcia efektu zapominania na powierzchni proporcjonalności. Gdy przyłożono takie naprężenie wtórne, że efekt zapominania wystąpił dla granicy plastyczności  $\sigma_{01}$ , to osiągnięto graniczne naprężenie wtórne. Było to graniczne naprężenie dlatego, że przy tej wielkości naprężenia występował efekt zapominania również na następnych powierzchniach plastyczności, na przykład na  $\sigma_{02}$ .

Warto wspomnieć w drugiej grupie o powierzchniach takich metali /cynk, kadm, stopy tytanu/, które krystalizują w siatkach heksagonalnych [38] . Walcowane blachy z tych metali mogą uzyskać taką teksturę, że wycięte z nich próbki będą deformować się przez poślizg przy rozciąganiu i przez bliźniakowanie przy ścisnieniu. Jeżeli naprężenia przy bliźniakowaniu będą mniejsze od naprężeń wywołujących poślizg, to w sumie otrzymamy powierzchnię





Rys.9 Teoretyczna powierzchnia plastyczności metalu o siatce heksagonalnej.

plastyczności /rys.9/ odbiegającą kształtem od często spotykanych powierzchni, które naszkicowano na rys.3.

Trzecią grupę powierzchni plastyczności szczególnie badali Phillips [56], Kaneko et al. [57], Moon [56]. Phillips opracował szereg wyników doświadczeń wykonanych w swoim laboratorium w normalnej i podwyższonych temperaturach. Chwilowa powierzchnia plastyczności po odkształceniu przez proporcjonalne obciążenie przybiera kształt uzyskiwany i w innych badaniach tego typu. Odkształcenie wzdłuż zamanych dróg obciążania dawało w rezultacie zmianę kształtu poprzedniej powierzchni. W podobnym przypadku krzywoliniowych dróg obciążania [57] nie stwierdzono zmian kształtu chwilowej powierzchni płynięcia a tylko jej przemieszczanie, obrót i zmianę charakterystycznych wymiarów.

Różnice między wynikami doświadczeń, które opisywał Phillips i rezultatami podobnych eksperymentów opracowanych przez Kaneko et al. mogą być powodowane odmiennym zachowaniem materiału wzdłuż zastosowanych dróg obciążania, ponieważ mają one różne cechy charakterystyczne. Phillips [56] opisał powierzchnie uzyskane po odkształceniu przy krzywoliniowych trajektoriach obciążania o rosnącej intensywności naprężenia. W eksperymentach opisanych przez Kaneko et al. powierzchnię badano w zakresie naprężeń nie przekraczających pierwszego maksymalnego naprężenia przyłożonego w sposób proporcjonalny do materiału wyżarzzonego. W ten sposób badania powierzchni dokonywano [57] w zakresie zewnętrznej powierzchni plastyczności, o której pisał Moon [36]. Natomiast Phillips [56] opisał powierzchnie zmieniające się w wyniku przekraczania zewnętrznej powierzchni plastyczności. Z powyższych przyczyn warto bliżej zająć się definicją wewnętrzną i zewnętrzną powierzchni plastyczności.

Obszerne badania eksperymentalne rozwinięto w cyklu prac inspirowanych przez Bella [33], który odróżnia dwie powierzchnie plastyczności - wewnętrzną i zewnętrzną - określając je odpowiednio do ich fizycznego znaczenia. Należy podkreślić, że we wspomnianym cyklu prac nie przedstawiono własnych wykresów obrazujących powierzchnie plastyczności w przestrzeni naprężeń.

Wewnętrzna powierzchnia plastyczności [36] oddziela obszary odkształceń sprężystych i sprężysto - plastycznych a więc jest to powierzchnia sprężystości, której badania publikowali już wcześniej inni autorzy. Zewnętrzna powierzchnia plastyczności określona jest odpowiednio do rozwijanego przez Bella specyficznego opisu krzy-



wych  $\sigma(\epsilon)$  przez równania paraboliczne. Zgodnie z tym opisem, zewnętrzna powierzchnię plastyczności materiału odkształconego otrzymuje się z uogólnionego naprężenia, powyżej którego wykresy uogólnionego naprężenia w funkcji uogólnionego odkształcenia /według wzorów Bella [33]/stają się takimi parabolami, jakie znaleziono dla materiału wyżarzonego. Dla polikrystalicznego aluminium pokazano [36], że małe odkształcenia trwałe mają niewielki wpływ na zewnętrzną powierzchnię plastyczności i zachowanie materiału powyżej tej powierzchni. Dlatego Bell [33] przyjął, że zewnętrzna powierzchnia plastyczności ma ustalone położenie.

Koncepcja ustalonej zewnętrznej powierzchni plastyczności wynika również z hipotezy wzmocnienia Mroza [27]. Postulat o istnieniu ustalonej zewnętrznej powierzchni plastyczności podważają eksperymenty, które przeprowadzili Śliwowski i Turski [17] dla mosiądzu oraz Śliwowski [60] dla stopu aluminium. Po wykonaniu paru programów odkształceń trwałych, [które przerywano przy tej samej wielkości maksymalnego obciążenia, otrzymano różne powierzchnie plastyczności powyżej maksymalnego naprężenia. W świetle omówionych wyników badań, postulat o ustalonej zewnętrznej powierzchni plastyczności można uważać za przybliżony opis zachowania metali.

Zajmiemy się obecnie równaniami powierzchni plastyczności. Równania formułowano w ten sposób, aby opisywały tylko niektóre, wybrane cechy geometryczne omówionych trzech grup powierzchni plastyczności. Dlatego w następnym rozdziale literaturę podzielimy inaczej niż w tym rozdziale.

## 2.4. Równania powierzchni plastyczności.

Omówienie literatury dotyczącej równań powierzchni plastyczności podzielono na parę podrozdziałów, które zatytułowano nazwiskami autorów ważniejszego źródła wymienionego w tej grupie prac.

### 2.4.1. Hill

W tym podrozdziale zajmujemy się publikacjami na temat opisu anizotropii plastycznej przez równania, które podali Hill [29], Ota et al. [40], Bourne i Hill [41], Gotoh [30].

Z wielu prac, które nawiązują do opisu sformułowanego przez Hilla [29], wymieniono tylko te, które zajmują się ogólnymi problemami.

Hill sformułował warunek plastyczności dla anizotropowego ma-

teriału znajdującego się w złożonym stanie naprężenia [29]. Ten warunek jest wielomianem drugiego stopnia dla wszystkich składowych stanu naprężenia. Warunek plastyczności został napisany w takiej postaci, że wyeliminowano wpływ ciśnienia hydrostatycznego. Warunek plastyczności Hilla pokażemy dla przypadku obciążenia materiału przez trzy naprężenia główne:

$$(2,23a) \quad f \equiv F(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + G(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + H(\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 1.$$

F, G, H są współczynnikami zależącymi od aktualnej wielkości anizotropii. Przy zmianie parametrów F, G, H może wystąpić tylko obrót powierzchni plastyczności i zmiana jej wymiarów. Ota et al. [40] rozszerzyli warunek Hilla na przypadek, gdy występuje jeszcze przemieszczenie powierzchni plastyczności.

Hill [29] zaproponował ogólne równanie warunku plastyczności dla przypadku płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia:

$$(2,23b) \quad f = \sum A_{ijk} \sigma_x^i \sigma_y^j \tau_{xy}^k,$$

gdzie i, j, k przyjmują wartości dodatnie lub zero według wzoru  $i + j + k \leq n$ ; k musi być liczbą parzystą gdy x, y są kierunkami głównych osi anizotropii. Równanie (2,23a) w przypadku płaskiego stanu naprężenia lub odkształcenia jest szczególnym przypadkiem równania (2,23b).

Hill [29] szczegółowo omówił praktyczne warianty proponowanego przez siebie warunku plastyczności drugiego stopnia. Bourne i Hill [41] rozpatrywali równanie trzeciego stopnia, które jest szczególnym przypadkiem równania (2, 23b), jednak nie uzyskali wystarczająco dokładnego opisu zjawisk występujących w tłocznictwie. Problem ten rozwiązała Gotoh [30] używając wzór (2,23b) w postaci równania czwartego stopnia. Zastosowanie szczególnego przypadku warunku plastyczności Hilla oraz warunku plastyczności Gotoh omówiono w rozdziale 2.2.2.

Wspomniane równania warunku plastyczności mają trzy wspólne cechy. Pierwszą cechą jest to, że współrzędne naprężeń są związane z głównymi kierunkami anizotropii w materiale. Drugą cechą jest to, że współczynniki równań oblicza się wykorzystując naprężenia uplastyczniające i wywołane przez nie odkształcenia zmierzone w wybranych kierunkach obciążania. Trzecia cecha omawianej grupy równań jest konsekwencją drugiej cechy. Przyjęty sposób obliczania współczynników materiałowych sprawia, że równania warunku plastyczności nie dają się przedstawić w postaci wielomianu, w którym występują niezmienniki podstawowe dewiatora



naprężenie. Ta cecha jest warta podkreślenia dlatego, że w następnej grupie równań znajdują się tylko takie warunki plastyczności, które sprowadzają się do wielomianu z niezmiennikami podstawowymi dewiatora naprężenia i odkształcenia.

#### 2.4.2. Shrivastava, Mróz, Dubey.

Cechą charakterystyczną drugiej grupy równań jest uwzględnienie w nich funkcji odkształceń i naprężeń, dzięki czemu dokładniej opisano ewolucję początkowej powierzchni plastyczności. Ogólną teorię tej grupy równań przedstawili Shrivastava, Mróz i Dubey [18], którzy postulowali, że wszystkie istniejące warunki plastyczności i ich równania ewolucji można wyprowadzić z izotropowego wyrażenia skalarnej funkcji dwu macryc - dewiatora naprężenia i odkształcenia:

$$(2.24) \quad f \equiv f(I_2, I_3, I_2, I_3, k_1, k_2, k_3) - F(\lambda) = 0.$$

W równaniu występują liniowe funkcje niezmienników naprężenia  $I_2, I_3$ ; niezmienników odkształcenia  $I_2, I_3$ ; niezmienników iloczynów mieszanych:  $k_1 = \delta_{ij} \epsilon_{ij}^p$ ;  $k_2 = \delta_{ij} \delta_{jk} \epsilon_{ki}^p$ ;  $k_3 = \delta_{ij} \epsilon_{jk}^p \epsilon_{ki}^p$ .  $\lambda$  - jest skalarnym parametrem związanym z drogą odkształcenia.

Zaprezentowane ogólne sformułowanie funkcji płynięcia ma jednakże parę ujemnych cech. Pierwszą negatywną cechą jest to, że nie uwzględniono pewnych wersji równań przydatnych do opisu powierzchni plastyczności. W tym sformułowaniu nie mieszczą się anizotropowe warunki plastyczności omówione w poprzedniej grupie równań, które mają podstawowe znaczenie w projektowaniu obróbki plastycznej. Wrócimy do tej kwestii przy okazji równania (2.27), które jest szczególnym przypadkiem równania (2.24).

Następna negatywna cecha związana jest ze specyficznym zachowaniem materiałów znajdujących się w stanie plastycznym. Wykorzystanie drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia pozwoliło na opisanie w przybliżony sposób części zjawisk towarzyszących uplastycznieniu metali. Dążenie do uchwycenia większej ilości cech powierzchni plastyczności zmusiło do uwzględnienia w równaniach trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia, a więc pojawiły się wyrazy gdzie współrzędne mają potęgę wyższą niż druga. Omawiany problem najlepiej można zilustrować za pomocą nowego wyrażenia warunku plastyczności zaproponowanego w pracy [18] /równanie (6.10)/:

$$(2.25) \quad C_{ijkl} (\delta_{ij} - \alpha_{ij})(\delta_{kl} - \alpha_{kl}) + p J_3 - 2k^2(\lambda) = 0.$$

W tym równaniu mamy współczynnik "p" dla wielu kombinacji współrzędnych, co uniemożliwia studiowanie wariantów uproszczonych przez kolejne wprowadzenie wyrazów z takimi potęgami, których wpływ jest dotychczas nieznan. Na przykład niezmienniki  $J_1, J_2, J_3$  nie wprowadzają wyrazów typu  $A_{1,2} \sigma_j \sigma_2^2$ , które pozwalają w prosty sposób rozwinąć równania warunku plastyczności aby uzyskać więcej współczynników materiałowych. W przypadku dwu naprężeń  $\sigma, \tau$  omawiane równanie przyjmuje następującą postać:

$$(2.25a) \quad \frac{1}{3} \sigma^3 + \tau^2 + 2m \sigma^3 + 9m \sigma \tau^2 - k^2 = 0.$$

Jeden współczynnik "m" występuje w dwu wyrazach równania (2.25a). Dzięki wprowadzeniu współczynnika "m" można opisać niesymetrię powierzchni plastyczności, jednak do tego celu wystarczyłby jeden wyraz zamiast dwu, które tu pojawiły się.

Warto zwrócić uwagę na pewien przypadek ogólnej metody tworzenia równań warunku płynięcia zastosowaną przez Mroza [19]. W tej pracy wyrażono warunek płynięcia nie przez niezmienniki główne, jak to najczęściej czyni się, ale przez dodatkowe niezmienniki stanu naprężenia i odkształcenia:

$$(2.26) \quad L_{11} = \sigma_{11} + \sigma_{22}, \quad L_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} - \sigma_{12}^2, \quad M_1 = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p, \\ M_2 = \varepsilon_{11}^p \varepsilon_{22}^p - \varepsilon_{12}^p, \quad N_1 = \sigma_{11} \varepsilon_{11}^p + \sigma_{22} \varepsilon_{22}^p + 2 \sigma_{12} \varepsilon_{12}^p.$$

Przez wyrażenie reguły wzmocnienia w postaci wielomianu, który zależał od tych pięciu niezmienników, otrzymano niesymetryczny warunek plastyczności, który służył do opisanego akumulacji odkształceń wzdłużnych przy cyklicznym skręcaniu rurki. Tworzenie, poza ramami istniejących ogólnych teorii, odrębnych równań przeznaczonych do obliczania akumulacji odkształceń przy cyklicznym skręcaniu, jest następną wskazówką, że warto poszukiwać nowych dróg umożliwiających opisanie własności plastycznych metali.

Obecnie zajmiemy się omówieniem paru wariantów równań warunku plastyczności. Szczególnym przypadkiem ogólnego związku, który rozpatrywali Shrivastava, Mróz, Dubey, jest równanie

$$(2.27) \quad N_{ijkl} \delta_{ij} \delta_{kl} = 1.$$

Ograniczymy się do wyrażenia tego równania dla składowych  $s_{11}, s_{22}, s_{33}$  i wykazemy, że ten warunek plastyczności nie redukuje się do warunku Hilla /drugiego stopnia/. Po rozwinięciu równania otrzy-



wujemy dla rozważanego przypadku

$$(2.28) \quad N_{1111} \delta_{11}^2 + 2N_{1122} \delta_{11} \delta_{22} + 2N_{1133} \delta_{11} \delta_{33} + N_{2222} \delta_{22}^2 + 2N_{2233} \delta_{22} \delta_{33} + N_{3333} \delta_{33}^2 = 1.$$

Wprowadzimy współrzędne  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{13}$ ,  $\epsilon_{23}$  zamiast  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{33}$  za pomocą wzorów:

$$(2.29) \quad \begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{2}{3} (\epsilon_{12} + \epsilon_{13}), \\ \delta_{22} &= \frac{2}{3} (-\epsilon_{12} + \epsilon_{23}), \\ \delta_{33} &= \frac{2}{3} (-\epsilon_{13} - \epsilon_{23}). \end{aligned}$$

Z warunku plastyczności otrzymujemy:

$$(2.30) \quad \begin{aligned} N_{1111} (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{13}^2 + 2\epsilon_{12} \epsilon_{13}) + 2N_{1122} (-\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{12} \epsilon_{13} - \epsilon_{12} \epsilon_{23} + \epsilon_{13} \epsilon_{23}) + \\ + 2N_{1133} (-\epsilon_{12} \epsilon_{13} - \epsilon_{12} \epsilon_{23} - \epsilon_{13}^2 - \epsilon_{13} \epsilon_{23}) + N_{2222} (\epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 - 2\epsilon_{12} \epsilon_{23}) + \\ + 2N_{2233} (\epsilon_{12} \epsilon_{13} + \epsilon_{12} \epsilon_{23} - \epsilon_{13} \epsilon_{23} - \epsilon_{23}^2) + N_{3333} (\epsilon_{13}^2 + \epsilon_{23}^2 + 2\epsilon_{13} \epsilon_{23}) = \\ = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

W równaniu wykonamy uporządkowanie zmiennych:

$$(2.31) \quad \begin{aligned} (N_{1111} - 2N_{1122} + N_{2222}) \epsilon_{12}^2 + (N_{1111} - 2N_{1133} + N_{3333}) \epsilon_{13}^2 + \\ + (N_{2222} - 2N_{2233} + N_{3333}) \epsilon_{23}^2 + 2(N_{1111} - N_{1122} - N_{1133} + N_{2233}) \epsilon_{12} \epsilon_{13} + \\ + 2(N_{1122} - N_{1133} - N_{2222} + N_{2233}) \epsilon_{12} \epsilon_{23} + \\ + 2(N_{1122} - N_{1133} + N_{3333} - N_{2233}) \epsilon_{13} \epsilon_{23} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Aby równanie (2.31) sprowadzić do postaci warunku Hilla równanie (2.23a) należy przyjąć współczynniki przy iloczynach  $\epsilon_{12} \epsilon_{13}$ ,  $\epsilon_{12} \epsilon_{23}$ ,  $\epsilon_{13} \epsilon_{23}$  jako równe zero.

$$(2.32) \quad \begin{aligned} N_{1111} - N_{1122} - N_{1133} + N_{2233} &= 0, \\ N_{1122} - N_{1133} - N_{2222} + N_{2233} &= 0, \\ N_{1122} - N_{1133} - N_{2233} + N_{3333} &= 0. \end{aligned}$$

Z powyższego układu równań obliczymy  $N_{1122}$ ,  $N_{1133}$ ,  $N_{2233}$ . Po odjęciu drugiego i trzeciego równania mamy równanie:

$$(2.33) \quad -N_{2222} + 2N_{2233} - N_{3333} = 0,$$

z którego obliczamy

$$(2.34) \quad 2N_{2233} = N_{2222} + N_{3333}.$$

Po odjęciu pierwszego i drugiego równania obliczamy

$$(2.35) \quad 2N_{4422} = N_{4444} + N_{2222}.$$

Pozostał do wyznaczenia współczynnik  $N_{1133}$ , który znajdujemy z równania pierwszego i drugiego:

$$(2.36) \quad \begin{aligned} 2N_{1133} &= N_{1111} - N_{2222} + 2N_{2233} = N_{1111} - N_{2222} + N_{2222} + N_{3333} = \\ &= N_{1111} + N_{3333}. \end{aligned}$$

Wykorzystując równania (2.34), (2.35), (2.36) i (2.31) możemy obecnie wykazać, że współczynniki przy  $\epsilon_{12}^2$ ,  $\epsilon_{13}^2$ ,  $\epsilon_{23}^2$  równają się tożsamościowo zero.

$$(2.37) \quad \begin{aligned} N_{1111} - 2N_{1122} + N_{2222} &= N_{1111} - N_{1111} - N_{2222} + N_{2222} = 0, \\ N_{1111} - 2N_{1133} + N_{3333} &= N_{1111} - N_{1111} - N_{3333} + N_{3333} = 0, \\ N_{2222} - 2N_{2233} - N_{3333} &= N_{2222} - N_{2222} - N_{3333} + N_{3333} = 0. \end{aligned}$$

Otrzymane wyniki pokazują, że z równania (2.27) nie otrzymuje się warunku Hilla równanie (2.23a). Równanie (2.27) może być traktowane jako rozszerzenie warunku Hilla, o ile wprowadzi się dodatkowe hipotezy umożliwiające wyznaczenie nieznanych współczynników /równanie (2.32) / w przypadku, gdy przyjmujemy, że są one różne od zera. Następną metodą, która pozwala policzyć wszystkie współczynniki w równaniu (2.28), jest wykonanie odpowiedniej ilości doświadczeń przy prostych i złożonych stanach naprężenia.

#### 2.4.3. Bałtów i Sawczuk

Szczególnym przypadkiem ogólnej teorii, którą opracowali Shrivastava, Król, Dubey, jest reguła wzmocnienia anizotropowego wcześniej zaproponowana przez Bałtowa i Sawczuka [58]. Powierzchnię plastyczności przedstawiono w postaci równania:

$$(2.38) \quad N_{ijkl} (\Delta_{ij} - \tau_{ij}) (\Delta_{kl} - \tau_{kl}) - 1 = 0,$$

gdzie:  $N_{ijkl} = I_{ijkl} + a \tau_{ij} \tau_{kl},$

$$I_{ijkl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}),$$

$$\tau_{ij} = c \epsilon_{ij}^p,$$



$\mu$  - wartość stała,

$a, c$  - współczynniki materiałowe.

Stałą  $\mu = \frac{1}{2}$  obliczono przyjmując, że dla  $\tau_{ij} = 0$  powierzchnia plastyczności jest elipsą Hubera-Misesa. Równania uwzględnia przemieszczenie powierzchni plastyczności i związany z nim obrót. Współczynnik "a" wywołuje zmianę kształtu początkowej powierzchni plastyczności. Na przykład, przy odpowiednim wyborze współczynnika "a" otrzymuje się elipsę na płaszczyźnie dewiatorowej [58]. W innej pracy Sawczuk [3] zaproponował nową regułę wzmocnienia kinematycznego, w której równanie

$$(2.39) \quad \tau_{ij} = c_{in} \varepsilon_{nj},$$

wiąże przemieszczenie środka powierzchni plastyczności z odkształceniem plastycznym.

Daniłow [44] zmodyfikował regułę wzmocnienia Bałtowa i Sawczuka w ten sposób aby mogła nadawać się do opisu cyklicznej deformacji po wprowadzeniu zmodyfikowanego wyrażenia tensora  $N_{ijkl}$  w postaci:

$$(2.40) \quad N_{ijkl} = I_{ijkl} + A_{ijkl},$$

gdzie:  $I_{ijkl}$  - tensor izotropowy opisujący izotropowe wzmocnienie,

$A_{ijkl}$  - tensor "poprawkowy", charakteryzujący zmianę kształtu i obrót powierzchni plastyczności.

Aby uwzględnić historię deformacji, Daniłow zaproponował równanie:

$$(2.41) \quad N_{ijkl} = D(\varepsilon_i^p) (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) + \int_0^{\varepsilon_i^p} A(\varepsilon_i^p) \left( \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\varepsilon_i^p} \frac{d\varepsilon_{kl}^p}{d\varepsilon_i^p} \right) d\varepsilon_i^p.$$

Przemieszczenie powierzchni plastyczności przedstawiono w postaci:

$$(2.42) \quad \tau_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_T \int_0^{\varepsilon_i^p} B(\varepsilon_i^p) \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{d\varepsilon_i^p} d\varepsilon_i^p.$$

Skalarne funkcje  $A(\varepsilon_i^p)$ ,  $B(\varepsilon_i^p)$ ,  $D(\varepsilon_i^p)$  są określane z doświadczeń.  $\sigma_T$  oznacza granicę plastyczności.

Backhaus [45] podał zależności naprężenia od plastycznej deformacji zbliżone do reguły wzmocnienia Daniłowa. Z tego powodu nie będziemy zajmowali się bliżej wariantem teorii płynięcia Backhausa.

Bałtow i Sawczuk [58], Daniłow [44], Backhaus [45] zajmowali się szczególnymi wyrażeniami tensora  $N_{ijkl}$  przez funkcje

zależne w sposób jawny od odkształceń plastycznych. Autor tej pracy zaproponował [47] szczególny przypadek równania (2.38) anizotropowej powierzchni plastyczności, której równanie zawiera współczynniki zależne od odkształceń w sposób niejawny. Proponowane równanie opisuje elipsę na płaszczyźnie dwiatorowej naprężeń. Mała oś elipsy "2a" leży na prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych. Jeżeli oznaczymy przez  $\sigma_+$  oraz  $\sigma_-$  wartości maksymalnego i minimalnego naprężenia w kierunku osi "2a", jej długość możemy obliczyć ze wzoru:

$$(2.43a) \quad 2\bar{a} = \sigma_+ - \sigma_-.$$

Wielką oś elipsy "2b" obliczono z warunku, że elipsa jest ściśle styczna do koła o promieniu  $\sigma_+$ . Wykorzystanie tego warunku doprowadziło do równania:

$$(2.43b) \quad 2b = \sqrt{2\sigma_+(\sigma_+ - \sigma_-)}.$$

Omówiony wyżej warunek plastyczności pokazano w pracy [48] w innej formie. Tensory opisujące wzmocnienie izotropowe i anizotropowe /równanie (2.40) / przedstawiono w postaci:

$$(2.44) \quad I_{ijkl} = a(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}),$$

$$A_{ijkl} = \tau_0 \frac{\tau_{ij}\tau_{kl}}{\tau_{pq}\tau_{pq}},$$

gdzie

$$\tau_0 = (\frac{1}{2}\tau_{pq}\tau_{pq})^{\frac{1}{2}}, \quad a = (\frac{1}{2}a_{pq}a_{pq})^{\frac{1}{2}}.$$

Równanie powierzchni plastyczności zapisano w postaci:

$$(2.45) \quad N_{ijkl} \frac{(\delta_{ij} - \tau_{ij})(\delta_{kl} - \tau_{kl})}{a_{pq}a_{pq}} = C$$

gdzie:  $N_{ijkl} = I_{ijkl} + A_{ijkl}$

Wartość stałą  $c = \sigma_+$  obliczono z warunku, że powierzchnia plastyczności przechodzi przez punkt o współrzędnej  $\sigma_+$ .

Warunek plastyczności w przedstawionej postaci (2.45) pokazuje, jak ważną sprawą jest odpowiednie zapisanie równania i jego parametryzacja. Przedwczesna parametryzacja równania przez przyjęcie  $c = 1$  uniemożliwiłaby rozwiązanie całego problemu.

Zaproponowane równanie (2.45) weryfikowano w pracach [47,48] gdzie wykazano, że uzyskano opis powierzchni plastyczności tylko takiego anizotropowego materiału, który uległ starzeniu. Dlatego w rozdziale 3 będzie przedstawiona propozycja nowego równania,



które opisuje powierzchnię plastyczności materiału starzonego i niestarzonego. Obecnie omówimy istniejące równania niesymetrycznej powierzchni plastyczności, którą uzyskiwano przy częściowym ociążaniu po wstępny odkształceniu.

2.4.4. K.Kaneko, K. Ikegami, E. Shiratori.

Doświadczalne badania powierzchni plastyczności, którą otrzymano przy częściowym ociążaniu bez starzenia, prowadzono w Japonii od kilkunastu lat [59]. Teoretyczny opis zachowania się powierzchni plastyczności podali Kaneko, Ikegami, Shiratori [57]. Należy zaznaczyć, że w wymienionej pracy [57] nie wspomniano, w jaki sposób uzyskano równanie proponowanej powierzchni plastyczności.

Równanie powierzchni plastyczności [57] przedstawimy we współrzędnych  $\sigma, \tau$  aby ułatwić jej graficzną prezentację.

$$(2.46) \quad \frac{(\sigma - \sigma_B)^2}{\beta_1^2} + \frac{\tau^2}{b^2} = 1,$$

gdzie:

$$\beta_1 = \frac{1}{a} [(\sigma_A - \sigma_B - a)(\sigma - \sigma_B) + a^2 - (\sigma_A - \sigma_B - a)^2].$$

Na rys.10 pokazano wymiary  $\sigma_A, \sigma_B, a, b$ . Równanie (2.46) opisuje powierzchnię plastyczności, która jest przesunięta w kierunku osi  $\sigma$ . Jest to szczególny przypadek niepełnego równania czwartego stopnia, w którym współczynniki dobrano w ten sposób, że każdy punkt  $\sigma, \tau$  leży na innej elipsie o osiach  $2\beta_1$  oraz  $2b$ .

Na rys.11 przedstawiono teoretyczne powierzchnie plastyczności, które obliczono z równania (2.46) dla dwu wielkości

$\frac{\sigma_A - \sigma_B}{a}$ . Parametr  $\frac{\sigma_A - \sigma_B}{a}$  jest związany z asymetrią powierzchni

plastyczności. Obie powierzchnie plastyczności obliczono dla dowolnie wybranej wielkości  $\frac{\sigma_A}{a} = 2,4$ , która określa położenie po-

wierzchni na osi  $\sigma$ . W skrajnym przypadku, dla  $\frac{\sigma_A - \sigma_B}{a} = 1$

otrzymujemy ze wzoru (2.46) elipsę przesuniętą wzdłuż osi  $\sigma$  o wielkość  $\sigma_B = 1,4a$ . Takiej figury nie przekazywano na rys.11.

Dwie powierzchnie plastyczności pokazane na rys.11 różnią się kształtem. Linia 1 jest krzywą wypukłą, natomiast na linii 2 widać wklęsłość. Ze względu na uwikłaną postać równania (2.46) nie można dokładnie określić, dla jakiej wielkości  $\frac{\sigma_A - \sigma_B}{a}$  występuje przegięcie na powierzchni. Dodatkowo sprawdzono, że jeszcze przy

$\frac{\sigma_A - \sigma_B}{a} = 1,6$  otrzymuje się lekko wypukłą powierzchnię.

Skrajnym przypadkiem powierzchni takiego typu jak linia 2 na rys.11 jest powierzchnia dla parametru  $\frac{\sigma_A - \sigma_B}{a} = 2$ . Dla tego przypadku otrzymujemy z równania (2.46) dwa odcinki:

$$(\sigma_A - 2a) \leq \sigma - \sigma_B \leq \sigma_A; \quad -b \leq \tau \leq b, \quad \sigma = 0.$$

Weryfikację doświadczalną równania (2.46) przedstawiono w pracy [57], gdzie opisywano ewolucję powierzchni plastyczności mosiądzu obciążanego wzdłuż nieproporcjonalnych dróg naprężenia. Rys.12 /zaczępnęto z pracy [57] / pokazuje przykład powierzchni plastyczności mosiądzu, który został wstępnie odkształcony przez rozciąganie naprężeniem  $\sigma$ . Wyniki doświadczeń zaznaczono punktami. Autorzy pracy [57] stwierdzili, że linia teoretyczna obliczona z równania (2.46) opisuje położenie punktów doświadczalnych. Jednakże widać, że dwa punkty oznaczone rombami, leżą wyraźnie dalej od powierzchni plastyczności. Tego typu zjawisko, że granica plastyczności w kierunkach odległych od kierunku wstępnego obciążenia jest gorzej opisywana przez powierzchnię plastyczności, powtarza się często w badaniach K.Kaneko, K.Ikegami i E.Shiratori. Wspomniani autorzy nie komentowali tego zjawiska w świetle faktu, że znane są prace, gdzie nie obserwuje się podobnego układu punktów doświadczalnych w tylnej części powierzchni plastyczności.

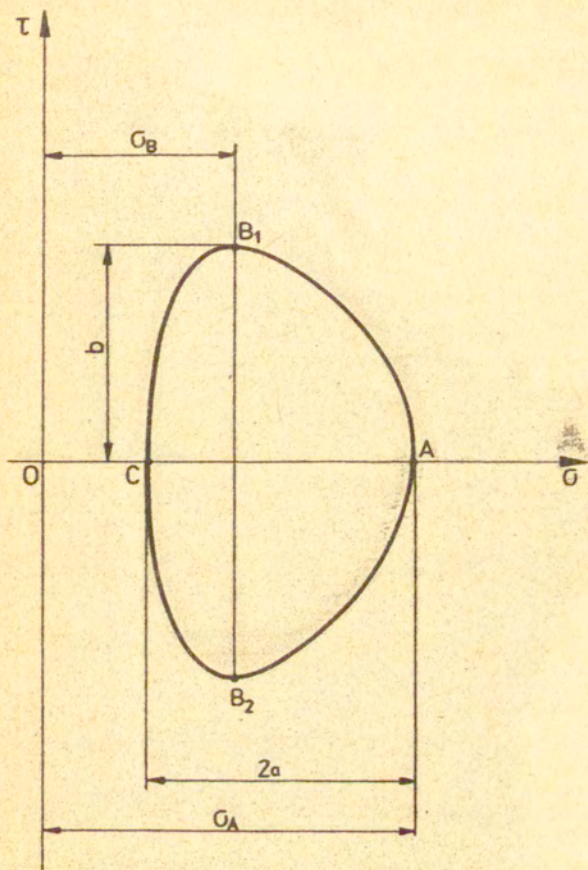
#### 2.4.5. Williams.

Williams i Svensson [66,67] przedstawili doświadczalną weryfikację warunku plastyczności, który wcześniej Williams wyprowadził w nieopublikowanej pracy doktorskiej [68]. Na temat procedury wyprowadzenia tego równania w pracach [66,67] podano ogólne informacje z których wynika, że równania powierzchni plastyczności uzyskano drogą analizy odkształceń sprężysto-plastycznej macierzy z kulistymi inkluzjami. Z powodu braku szczegółów dotyczących teoretycznej strony zagadnienia, nie będziemy tutaj opisywali modelu służącego do wyprowadzenia warunku plastyczności. Omówienie warunku plastyczności ograniczymy do ostatecznej postaci równania powierzchni plastyczności i porównania jej z wynikami doświadczeń.

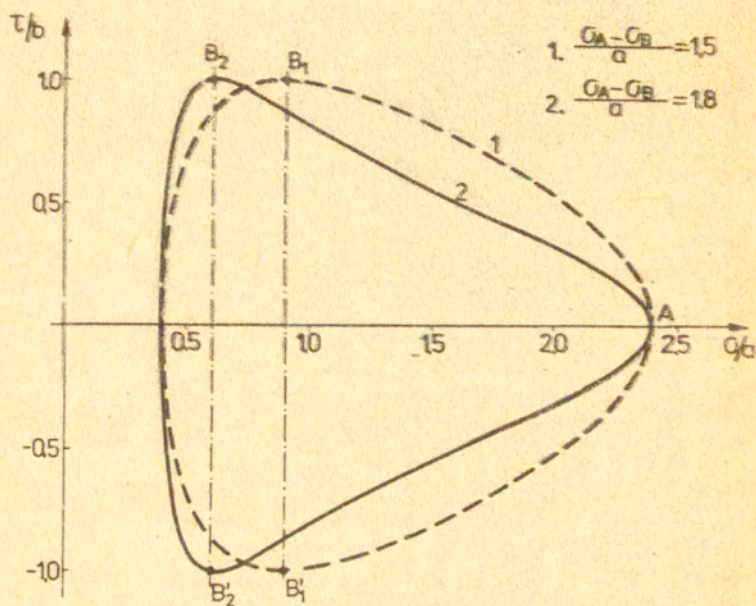
Równanie warunku plastyczności zaproponowano w postaci [66] :

$$(2.47a) \quad f = (I_{ijkl} + A_0 E_{ij}^p E_{kl}^p)(\sigma_{ij} + \alpha_{ij})(\sigma_{kl} + \alpha_{kl}) = k^2,$$



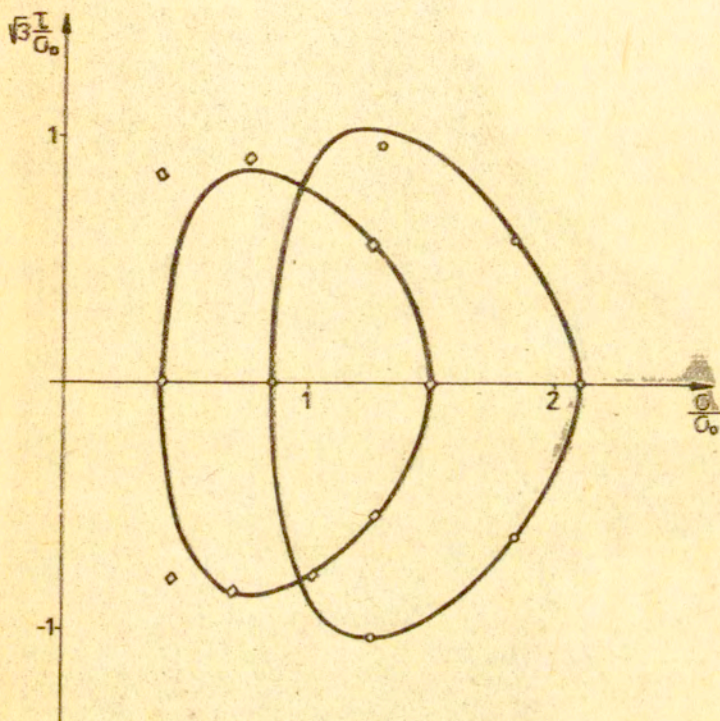


Rys. 10 Oznaczenia wymiarów powierzchni plastyczności.



Rys.11 Powierzchnie plastyczności opisane równaniem (2.46).





Rys.12 Powierzchnia plastyczności miedzi [57] .  
 $\sigma_0$  - początkowa granica plastyczności,  
 $\diamond$  - punkty doświadczalne.

gdzie: 
$$I_{ijkl} = \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl},$$

$$\alpha_{ij} = \epsilon_{ij}^P (L_{pqrs} \sigma_{pq} \sigma_{rs} - m).$$

W równaniu mamy parametry  $A_0$ ,  $m$ ,  $L_{pqrs}$ , które wiążą naprężenia z odkształceniami. Interpretację geometryczną tych parametrów pokażemy na przykładzie powierzchni plastyczności materiału obciążonego przez naprężenia  $\sigma, \tau$ .

Po wstępnym obciążeniu materiału przez naprężenie  $\sigma_0$ , dla współrzędnych  $\sigma, \tau$  otrzymujemy z równania (2.47a):

$$(2.47b) \quad \left[ \sigma + \frac{3}{2} \epsilon^P (L_{3333} \sigma^2 + 2L_{2323} \tau^2 - m) \right]^2 + \frac{3\tau^2}{\left[ 1 + \frac{3}{2} A_0 \epsilon_P^2 \right]} =$$

$$= \left[ \sigma_0 + \frac{3}{2} \epsilon_P (L_{3333} \sigma_0^2 - m) \right]^2.$$

W tym równaniu odkształcenie plastyczne  $\epsilon_P$  oznacza wielkość trwałej deformacji wywołanej przez wstępne naprężenie  $\sigma_0$ . " $A_0$ " jest parametrem anizotropii poprzecznej, ponieważ zależy od proporcji pomiędzy średnicą prostopadłą i równoległą do kierunku obciążenia wstępnego  $\sigma_0$ . Parametr " $m$ " zależy od efektu Bauschingera. Współczynniki  $L_{3333}$  oraz  $L_{2323}$  są tymi parametrami, które powodują, że powierzchnia plastyczności nie ma osi symetrii w kierunku prostopadłym do obciążenia wstępnego.

Równanie (2.47b) jest funkcją odkształcenia trwałego  $\epsilon_P$  a więc jest to równanie ewolucji warunku plastyczności. W pracach [66, 67] nie wykorzystano tej cechy równania powierzchni, ponieważ obliczono współczynniki stałe wykorzystując współrzędne czterech punktów doświadczalnych dla odpowiedniego odkształcenia wstępnego. W ten sposób otrzymano doświadczalne wykresy współczynników  $A_0$ ,  $m$ ,  $L_{2323}$  w funkcji odkształcenia wstępnego  $\epsilon_P$ . Jednak po takim obliczeniu współczynników stałych, w równaniu znika wielkość  $\epsilon_P$ , ponieważ dla czterech punktów doświadczalnych można wyznaczyć bezpośrednio iloczyny współczynników i odkształceń.

Współczynnik  $L_{3333}$  określono na drodze analizy wykresów  $d\epsilon_+/d\epsilon_-$  /gdzie  $\epsilon_+$  i  $\epsilon_-$  oznaczają odpowiednio odkształcenia plastyczne przy rosnących i malejących naprężeniach rozciągających/ w funkcji rosnących odkształceń plastycznych, które przyjmowano do wyznaczania granicy plastyczności. Z tych wykresów i teoretycznych zależności między  $d\epsilon_+/d\epsilon_-$  od naprężeń wynikało, że współczyn-



nik  $L_{3333} = 0$  w przypadku powierzchni sprężystości. W przypadku bardzo małych odkształceń plastycznych, które są potrzebne do określania granicy plastyczności materiału w równaniu (2.47b), przyjmowano jako przybliżenie  $L_{3333} = 0$ .

Jeżeli wykorzystamy wielkość  $L_{3333} = 0$  i oznaczenia pokazane na rys.8, równanie (2.47b) przybierze następującą postać:

$$(2.47c) \quad \left[ \sigma - \sigma_A + a + \frac{(\sigma_A - \sigma_B - a)}{b^2} \tau^2 \right]^2 + \frac{a^2}{b^2} \tau^2 = a^2.$$

W równaniu (2.47c) nie występuje odkształcenie plastyczne a więc ewolucję warunku plastyczności mogą powodować tylko zmiany funkcji  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$ ,  $a$ ,  $b$ . Na rys.13 przedstawiono teoretyczne powierzchnie plastyczności, które obliczono z równania (2.47c) dla dwu wielkości  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$ . Wielkość  $\sigma_A/a = 2,4$  wytrano dowolnie.

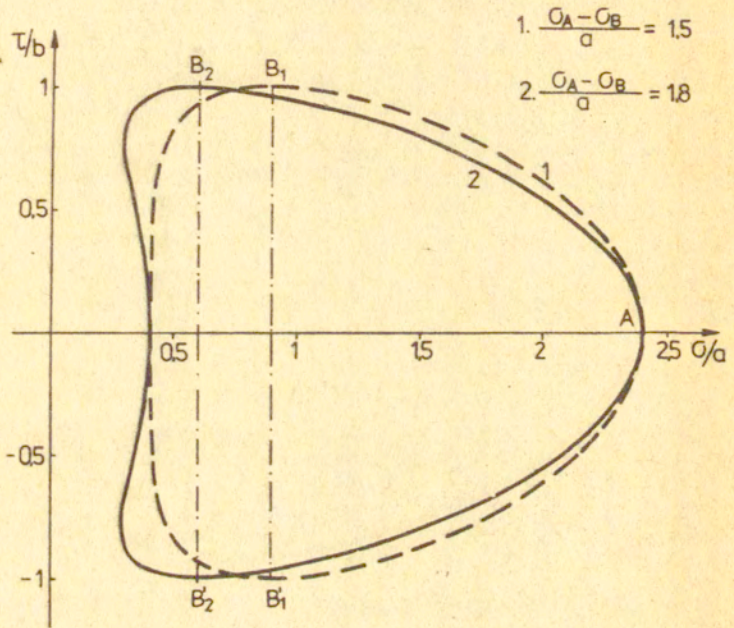
Od wielkości  $\sigma_A/a$  zależy położenie powierzchni plastyczności na osi  $\sigma$ , natomiast kształt powierzchni jest funkcją różnicy  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$ . Dla  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 1$  ze wzoru (2.47c) otrzymujemy równanie elipsy przesuniętej wzdłuż osi  $\sigma$  o wielkość  $\sigma_B/a$ :

$$(\sigma - \sigma_B)^2/a^2 + \tau^2/b^2 = 1.$$

Do opisywania wyników doświadczeń wykorzystywano zakres  $(\sigma_A - \sigma_B)/a \geq 1$ . W zakresie  $1,0 \leq (\sigma_A - \sigma_B)/a \leq 1,5$  powierzchnia plastyczności jest linią wypukłą. Dla granicznej wielkości  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 1,5$  otrzymujemy linię 1 pokazane na rys.13. Dla  $(\sigma_A - \sigma_B)/a > 1,5$  pojawia się wklęsłość powierzchni plastyczności. Przykładem takiej powierzchni plastyczności jest linia 2, którą obliczono dla  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 1,8$  /rys.13/.

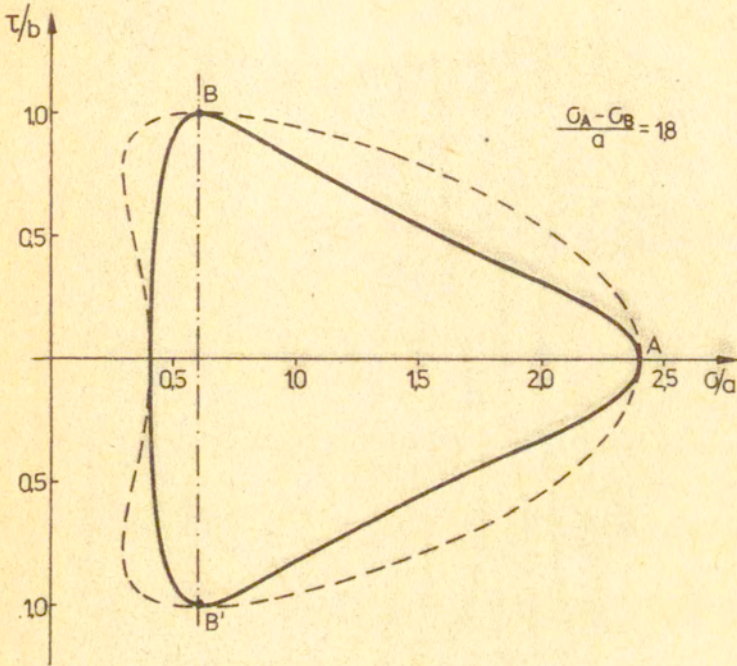
Weryfikację doświadczalną powierzchni plastyczności przeprowadzono na próbkach rurkowych, które wykonano z aluminium 1100-F [66,67]. Omówimy zasadnicze wnioski wynikające z tej weryfikacji, natomiast nie będziemy pokazywać rysunków porównawczych, które zamieszczono w cytowanych dwu pracach.

Powierzchnia plastyczności aluminium 1100-F po rozciąganiu wstępnym [66] różni się wyraźnie od powierzchni plastyczności utrzymanej po wstępnym skręcaniu [67]. Po wstępnym rozciąganiu powierzchnia jest wydłużona w kierunku rozciągania i widać na niej zaokrąglone naroże. Natomiast po wstępnym skręcaniu otrzymano powierzchnię wydłużoną w kierunku prostopadłym do obciążenia wstępnego i ze znacznie słabiej widocznym narożem niż poprzednio. Pomimo tak dużych różnic kształtu doświadczalnych po-

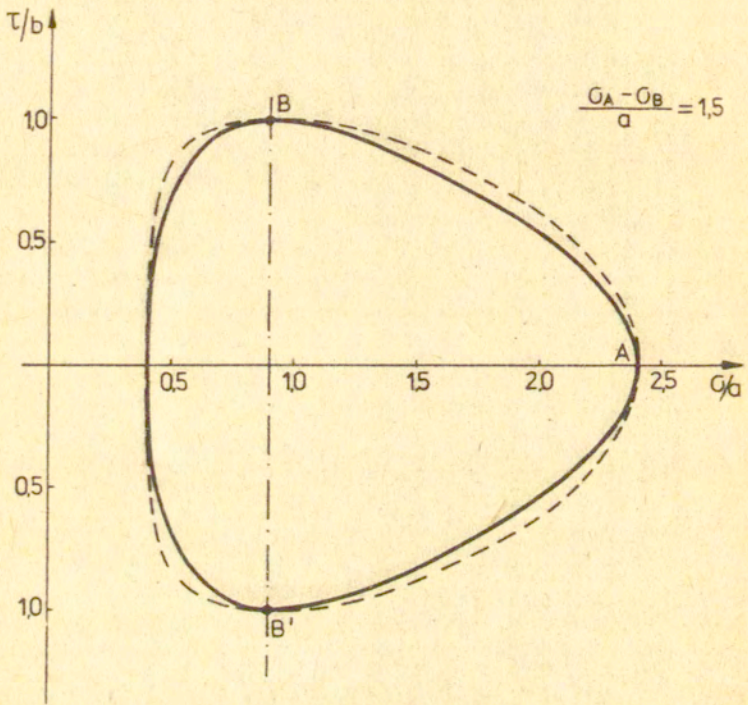


Rys.13 | Powierzchnie plastyczności opisane równaniem (2.47c).





Rys. 14a Porównanie powierzchni plastyczności.  
K.Kaneko, K.Ikegami, E.Shiratori [57] .  
J.P. Williams [68] .



Rys.14b Porównanie powierzchni plastyczności.  
K.Kaneko, K.Ikegami, E.Shiratori [57] .  
J.F. Williams [68] .



wierzchni plastyczności, równanie (2.47) opisało wyniki eksperymentu z dobrą dokładnością.

Warunek plastyczności Williamsa jest równaniem czwartego stopnia /równanie (2.47c) / a więc sprawia więcej trudności przy obliczeniach niż równanie drugiego stopnia, które do opisanie powierzchni plastyczności zaproponował Kaneko et al. /równanie (2.46) [57] /. Dlatego warto porównać powierzchnie plastyczności opisywane przez wymienione dwa równania.

Na rys. 14a,b porównano powierzchnie plastyczności proponowane przez Williamsa /linie przerywane/ oraz K.Kaneko et al. [57] /linie ciągłe wyznaczone z równania (2.46) /. Powierzchnie plastyczności dla parametru  $\frac{\sigma_A - \sigma_B}{\alpha} = 1,8$  /rys.14a/ różnią się od siebie kształtem. W tym obszarze, gdzie jedna powierzchnia jest wklęsłą, druga z nich ma wypukłość. W miarę zmniejszania się różnicy  $\sigma_A - \sigma_B$  obie powierzchnie plastyczności zbliżają się do siebie, ponieważ dla  $\frac{\sigma_A - \sigma_B}{\alpha} = 1$  stają się okręgiem. Dlatego już dla  $\frac{\sigma_A - \sigma_B}{\alpha} = 1,5$  /rys.14b/ obie powierzchnie niewiele różnią się od siebie.

Do opisywania wyników doświadczeń używano w pracach [57,65] tylko krzywe wypukłe na całym obwodzie. Mimo, że krzywe wypukłe, które wynikają z omówionych równań (2.46) oraz (2.47c) , różnią się niewiele między sobą, nową powierzchnię plastyczności proponowaną w rozdziale 3 tej pracy porównano z liniami opisywanymi przez te dwa równania.

#### 2.4.6. Zyczkowski, Kurtyka.

Zyczkowski i Kurtyka [64] przedstawili opis zachowania się powierzchni plastyczności przy skomplikowanych programach obciążania. Opracowano wzmocnienie kinematyczno-izotropowe, które opisuje efekt Bauschingera, efekt poprzecznej zmiany wymiarów powierzchni plastyczności oraz zmianę jej krzywizny. Za pomocą tego modelu wzmocnienia opisano eksperymentalne powierzchnie plastyczności zachowując ich cechy charakterystyczne, ponieważ do wyznaczenia linii teoretycznych wykorzystano wiele punktów doświadczalnych. Uzyskane możliwości opisanie dużej ilości różnych kształtów powierzchni plastyczności materiałów starzonych i niestarzonych dowodzi, że proponowany model geometryczny wypełnia istotną lukę jaką stanowił brak takiej teoretycznej powierzchni plastyczności. Krytyczna ocena prezentowanej teorii będzie możliwa dopiero gdy

ukaze się ona w druku.

#### 2.4.7. Lin, Ito.

Omówimy obecnie uśkożenia wykorzystania badań własności monokryształów do zbudowania teorii plastyczności polikryształów. Jako przykład takiego kierunku w teorii, weźmiemy prace Lina i Ito [62,71], w których otrzymano niesymetryczną powierzchnię plastyczności o kształcie podobnym do wcześniej omówionej powierzchni plastyczności materiału odkształconego i niestaraonego [57].

Lin i Ito [62] przyjęli model elementu materiału składający się z długich kryształów o przekroju kwadratowym. Grupa sześciu kryształów, które różnią się między sobą kierunkiem płaszczyzn poślizgu, poddana jest działaniu pola naprężeń, które spełniają warunki równowagi i warunek płaskiego stanu odkształcenia. Odkształcone kryształy zachowują warunki ciągłości przemieszczeń. Przyjęto jedną zależność między naprężeniem i odkształceniem dla pojedynczych kryształów w całym polikryształe. W wyniku przyjętego układu płaszczyzn poślizgu w polikryształe, jego początkowa powierzchnia plastyczności jest wielobokiem symetrycznym względem osi układu współrzędnych.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę, że obliczenia wykonano dla cynku, który ma budowę heksagonalną. W takiej siatce krystalicznej istnieje możliwość bliźniakowania przy naprężeniach niższych niż poślizg /rys.9/ co powoduje, że początkowa powierzchnia plastyczności może być niesymetryczna. Ten efekt nie jest uwzględniony w obliczeniach, które wykonali Lin i Ito [62]. Istnienie bliźniakowania zmieniłoby nie tylko kształt początkowej powierzchni ale również przyjętej krzywej umocnienia i obliczonej pętli naprężenie-odkształcenie przy cyklicznym obciążaniu.

Omówimy obecnie efekty, które wynikają ze schematu obliczeniowego teorii Lina i Ito [62].

Obciążenie poza granicę sprężystości i odciążenie całkowite grupy kryształów wprowadza anizotropię własności plastycznych. Dlatego powierzchnia sprężystości takiego materiału przesuwa się w kierunku wstępnego obciążenia i zmienia kształt, stając się powierzchnią z jedną osią symetrii. W kierunku wstępnego obciążenia, który jest osią symetrii, pojawia się wydłużone naroże. Gdy dla określenia granicy plastyczności przyjęto małą wartość odkształceń trwałych, otrzymano powierzchnię plastyczności bez naroża.



Omówione wyniki uzyskano [62] dla modelu polikryształu, który znajdował się w płaskim stanie odkształcenia.

Model innego polikryształu [71] składał się z sześćdziesięciu czterech kryształów o kształcie sześcianu. W takim sześciennym modelu możliwe były trzy ortogonalne kierunki odkształceń. Autorzy pokazali, że dla przypadku rozciągania połączonego ze ściskaniem materiału, powierzchnia sprężystości leży blisko warunku plastyczności Treski. Powierzchnia plastyczności obliczona dla bardzo małych odkształceń trwałych leżała w pobliżu powierzchni plastyczności Hubera-Misesa. Autorzy pracy [71] wyrazili nadzieję, że wzrost dokładności pomiaru odkształceń pozwoli udowodnić, że na powierzchni sprężystości jest spełniony warunek Treski.

Autorzy nie zamieścili porównania teoretycznej powierzchni plastyczności z wynikami doświadczeń, a jedynie ogólnikowo wspomnieli, że takie kształty powierzchni plastyczności uzyskuje się z doświadczeń. Ponieważ obliczenia wykonano dla cynku, warto w tym miejscu powołać się [nie na wyniki dla odmiennych metali, jak zrobili to Lin i Ito [62,71], ale na badanie stopu cynku Zamak-3, które wykonał Jenkins [63]. Badania doświadczalne próbek rurkowych wykonano przez rozciąganie i ściskanie siłą osiową w kombinacji z rozciąganiem za pomocą ciśnienia oleju właczanego do wnętrza próbki. Porównanie wyników doświadczeń z teorią pokazało, że powierzchnia plastyczności Treski w połączeniu z hipotezą, wzmocnienia kinematycznego opisują ewolucję powierzchni plastyczności stopu cynku. Naprężenia uplastyczniające wyznaczano z wykresu naprężenie-odkształcenie jako pierwsze odchylenie wykresu od linii prostej dla początkowego zakresu sprężystego, prawdopodobnie dlatego nie wszędzie potwierdzone jest stowarzyszenie prawo płynięcia.

Dobra zgodność wyników doświadczalnych z hipotezą wzmocnienia kinematycznego i kryterium plastyczności Treski wykazana przez Jenkinsa [63] pozwala krytycznie ocenić przydatność modelu proponowanego przez Lina oraz Ito do opisanie zachowania się materiału przy plastycznej deformacji. Porównanie wniosków z doświadczeń Jenkinsa z wnioskami wynikającymi z teorii Lina i Ito pokazuje, że nie można obliczyć kształtu ani wymiarów powierzchni plastyczności ale w celu ich określenia trzeba zrealizować obszerny program doświadczeń. Do opisanie wyników badania powierzchni plastyczności może być przydatne równanie, którego opraco-

wanie będzie celem dalszej części własnej pracy.

Praca Lina i Ito [62] zawiera również wyniki obliczenia pętli histerezy sprężysto-plastycznej, która stabilizuje się po jednym cyklu  $\pm \sigma_{\max}$ . Taki kształt pętli histerezy jest wynikiem przyjętego modelu polikryształu i krzywej umocnienia monokryształu. Teoretyczny kształt pętli histerezy nie jest potwierdzony przez znane i cytowane powszechnie wyniki doświadczeń, w których widać dużą zmianę szerokości pętli przy początkowych cyklach naprężeń. Tak więc przyjęty model polikryształu nie był w stanie zmienić charakterystycznej cechy przyjętej krzywej umocnienia monokryształu, jaka była stabilizacja pętli krzywej  $\sigma(\varepsilon)$  po jednym cyklu obciążenia  $\pm \sigma_{\max}$ .

#### 2.4.8. Olszak, Urbanowski

Zajmiemy się jeszcze jednym podejściem do kwestii formułowania warunku plastyczności, z którym będzie związane osiągnięcie głównego celu niniejszej pracy.

Pierwsze warunki plastyczności metali izotropowych i jednorodnych, a więc warunek Treski, Hubera-Misesa, miały określoną interpretację fizyczną. Ponieważ koncepcja stałej energii odkształcenia postaciowego, która była używana do wyprowadzenia warunku Hubera-Misesa, straciła swój sens w teorii plastyczności ciał anizotropowych, duże znaczenie uzyskał postulat o istnieniu potencjału plastycznego wprowadzony przez Misesa. Olszak i Urbanowski [2] wykorzystali postulat o potencjale plastycznym oraz definicję uogólnionej energii odkształcenia aby wyprowadzić równanie warunku plastyczności dla ciał anizotropowych niejednorodnych. W niniejszej pracy nie będziemy zajmować się ośrodkami niejednorodnymi, jednak cytujemy tę publikację ze względu na zastosowane w niej metody badań i osiągnięte wyniki.

Olszak i Urbanowski obliczali energię całkowitą odkształcenia  $\phi$  przyjmując związek między tensorem odkształcenia i naprężenia:

$$\varepsilon_{kl} = E_{kl\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}.$$

Dla granicznej wielkości energii odkształcenia postaciowego otrzymali warunek plastyczności:



$$(2.48a) \quad \frac{1}{4G^*(P)[\bar{K}(P)]^2} \bar{S}_{\alpha\lambda\mu\nu}(P) \sigma_{\alpha\lambda} \sigma_{\mu\nu} = 1,$$

gdzie:  $G^*(P)$ ,  $\bar{K}(P)$ ,  $\bar{S}_{\alpha\lambda\mu\nu}(P)$  są funkcjami tensora  $\bar{E}_{kl\mu\nu}$ .  
 $P$  - oznacza punkt ciała anizotropowego.

Autorzy postulowali związek między współczynnikami w równaniu potencjału plastycznego:

$$(2.48b) \quad 2\Psi = H_{\alpha\lambda\mu\nu}(P) \sigma_{\alpha\lambda} \sigma_{\mu\nu} = 1$$

i współczynnikami w warunku plastyczności oznaczającym stałą energię odkształcenia postaciowego /równanie (2.48a) /.

$$(2.49) \quad H_{klmn}(P) = \frac{\bar{S}_{klmn}(P)}{4G^*(P)[\bar{K}(P)]^2}.$$

Związek między tymi współczynnikami nie był poparty wynikami doświadczenia. Autorzy nie próbowali opracować matematycznej funkcji współczynników materiałowych. Zaproponowane przez nich równania w powyższej postaci uwzględniają tylko obrót powierzchni plastyczności.

W omawianej pracy warto zwrócić uwagę na dwie sprawy. Warunek plastyczności został otrzymany z wyrażenia energii odkształcenia postaciowego dzięki której ma związek z definicją stosowaną wcześniej w mechanice. Warunek plastyczności Olszaka i Urbanowskiego ma postać wielomianu dla naprężeń ze współczynnikami wyznaczonymi z doświadczeń, a więc jego budowa jest taka jak równań, które Hill zaproponował do opisu anizotropii plastycznej.

Celem powyższych rozważań nie była dokładna analiza istniejących warunków plastyczności metali, ale wskazanie, że używane równania matematyczne mają takie cechy, które powodują trudności przy stosowaniu ich w niektórych przypadkach praktycznych.

### 3. Nowe propozycje opisu wybranych plastycznych własności metali.

Przegląd plastycznych własności materiałów i ich matematycznego opisu pozwolił ujawnić parę spraw, których opracowaniu poświęcimy rozdział 3. Dlatego wymienimy te zagadnienia mimo, że niektóre z nich sygnalizowano już w toku rozdziału 2.

Równania (2.24) powierzchni plastyczności nie posiadają iloczynów mieszanych składowych dewiatora naprężenia z własnymi współczynnikami. Uwzględnienie takich wyrazów w warunku plastyczności

może ułatwić opis niektórych wyników badań doświadczalnych. W cytowanych w rozdziale 2 pracach nie wykorzystano części możliwości, jakie istnieją w analizie definicji pracy na odkształceniach sprężystych i plastycznych oraz w związku między tymi wielkościami.

Próba opracowania wymienionych zagadnień jest uzasadniona chęcią opisaną powierzchni plastyczności /materiału niestarzonego/ za pomocą równania prostszego w zastosowaniu od równań opublikowanych w znanych artykułach. Ponadto zamierzamy zastosować wnioski z analizy plastycznego płynięcia i wzmocnienia do opisanego zjawisk pojawiających się przy cyklicznym obciążaniu metali. Weźmiemy pod uwagę te zjawiska, których nie opisano dotychczas za pomocą znanych hipotez umocnienia metali.

### 3.1. Warunek plastyczności.

Pojawienie się odkształceń plastycznych powoduje dysypację pracy związanej z deformowaniem metalu i zakłócenie sprężystego zachowania materiału. Dlatego powierzchnia plastyczności, którą doświadczalnie określamy w przestrzeni naprężeń, przyjmuje kształt zależący od aktualnego stanu materiału.

Powierzchnię plastyczności można opisać za pomocą funkcji drugiego stopnia w przypadku, gdy jest ona elipsą [58]. Równania kwadratowe nie są jednak w stanie opisać kształtu powierzchni plastyczności posiadającej tylko jedną oś symetrii [47].

Powierzchnie plastyczności o jednej osi symetrii spotykamy w takich procesach, gdzie nie nastąpiło starzenie materiału, a więc przede wszystkim w trakcie procesu deformacji materiału. Kształt takiej powierzchni można opisać za pomocą pełnego równania trzeciego stopnia [18] i niepełnych równań czwartego stopnia [57,66].

W tej pracy opiszemy kształt powierzchni plastyczności za pomocą równania, które otrzymamy przez analizę przyrostu pracy potrzebnej do uplastycznienia materiału. Zaproponowany warunek plastyczności redukuje się do warunku Hubera-Misesa w przypadku deformowania materiału bez efektu Bauschingera.

#### 3.1.1. Podstawowe równanie.

Powierzchnię plastyczności określamy w przestrzeni naprężeń



jako powierzchnię, która oddziela obszar sprężystych odkształceń od obszaru sprężysto-plastycznego zachowania materiału.

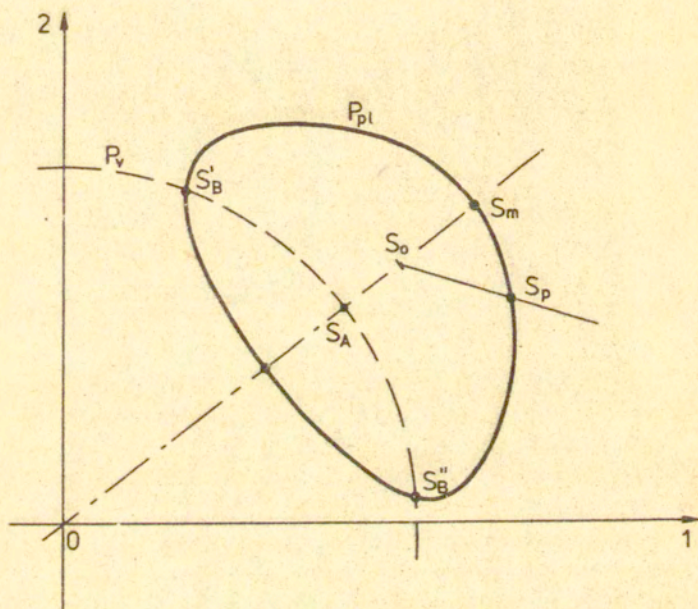
Rozpatrzmy drogę naprężenia  $S_A - S'_B$  leżącą na powierzchni  $P_V$  odpowiadającej stałej wielkości energii potencjalnej odkształceń postaciowych /rys.15/. Ta droga przecina powierzchnię plastyczności  $P_{pl}$  w dwu punktach. Dowodzi to, że uplastycznienie materiału nie jest związane z wielkością energii potencjalnej, która jest stała na drodze  $S_A - S'_B$ . Uplastycznienie może być związane z pracą zużytą na zdeformowanie materiału, ponieważ praca jest wykonywana również wtedy, gdy punkt naprężenia przesuwa się po powierzchni equipotencjalnej. Ponieważ wielkość pracy potrzebnej do postaciowej deformacji zależy od drogi naprężenia, przyjmujemy tę pracę jako wielkość określającą uplastycznienie materiału.

Wiele materiałów po odkształceniu trwałym posiada taką powierzchnię plastyczności, która nie obejmuje początku układu współrzędnych w przestrzeni naprężeń. W takim przypadku, część powierzchni plastyczności uzyskuje się przy odciążaniu materiału. Rozpatrzmy proces obciążania materiału sprężystego na przykładzie sprężyny, na którą kładziemy ciężar  $Q$ . Sprężyna ugina się o wielkość  $f$  przy czym wykonana zostaje praca  $\frac{1}{2} Qf$ . Następnie zdejmujemy mały ciężarek  $dQ$  wobec czego sprężyna podniesie ciężar  $Q-dQ$  odprężając się o wielkość  $df$ . Kosztem nagromadzonej energii potencjalnej, sprężyna wykona pracę  $dL = (Q - dQ) df$  przy podnoszeniu ciężaru. Z przeprowadzonej analizy widać, że praca przy odkształcaniu materiału ma znak dodatni, niezależnie od tego, czy jest wykonana przez ciężar  $Q$  przy ściskaniu sprężyny, czy też przez sprężynę przy podnoszeniu ciężaru. Dlatego, aby uniknąć pomyłki w znaku przy obliczaniu pracy w złożonym stanie naprężenia, gdy niektóre ze składowych stanu naprężenie rosną a inne maleją, będziemy do wzoru wstawiali absolutne wartości naprężeń i odkształceń

$$dL = |\sigma_{ij}| \cdot |d\epsilon_{ij}| \cdot$$

Weźmy element sprężysto-plastycznego materiału, na którego uplastycznienie ma wpływ tylko część dewiatorowa stanu naprężenia  $\epsilon_{ij}$ . Będziemy opisywali uplastycznienie materiału obciążonego wzdłuż dróg naprężenia składających się z trzech odcinków.

Rozpatrzmy materiał wstępnie izotropowy, który obciążono na proporcjonalnej drodze naprężenia do punktu  $S_m$  określonego przez współrzędne  $(\epsilon_m)_{ij}$ . W wyniku tego obciążenia materiał uzyskał anizotropię plastyczną. Drugi odcinek drogi naprężenia pole-



Rys.15 Schemat drogi obciążania.



gał na proporcjonalnym odciążaniu do dowolnego punktu  $S_0$ , który znajduje się w obszarze sprężystych odkształceń. Następnie materiał obciążamy wzdłuż trzeciego dowolnie skierowanego odcinka drogi naprężenia  $S_0 - S_D$  /rys.15/, który kończy się w chwili osiągnięcia granicy plastyczności.

Poszukujemy wyrażenia określającego granicę plastyczności w złożonym stanie naprężenia. W tym celu rozpatrzmy pracę naprężeń potrzebnych do postaciowej deformacji materiału przy dociążaniu w okolicy punktu  $S_0$ . Przyjmijmy, że w chwili osiągnięcia powierzchni plastyczności, wielkość pracy jest funkcją stanu naprężenia:

$$(3.1) \quad L = L(\delta_{ij}).$$

Rozwiniemy związek (3.1) w szereg Taylora w okolicy punktu  $S_0$ :

$$(3.2) \quad L = L(S_0) + \frac{\partial L}{\partial \delta_{ij}}(S_0) \frac{(\delta_{ij} - \delta_{0ij})}{1!} + \frac{\partial^2 L}{\partial \delta_{ij} \partial \delta_{kl}}(S_0) \frac{(\delta_{ij} - \delta_{0ij})(\delta_{kl} - \delta_{0kl})}{2!} + \frac{\partial^3 L}{\partial \delta_{ij} \partial \delta_{kl} \partial \delta_{pq}}(S_0) \frac{(\delta_{ij} - \delta_{0ij})(\delta_{kl} - \delta_{0kl})(\delta_{pq} - \delta_{0pq})}{3!} + \dots$$

Współczynniki, które otrzymano przez różniczkowanie pracy względem składowych dewiatorowych stanu naprężenia, są funkcją współrzędnych punktu " $S_0$ ". Przy ustalonym położeniu punktu " $S_0$ " otrzymujemy równanie  $n$ -tego stopnia ze stałymi współczynnikami.

Wyrażenie  $L$  w postaci szeregu jest operacją formalną, ponieważ w tym stadium nie można udowodnić zbieżności szeregu, nie wiadomo nawet, czy jest to szereg nieskończony.

Wyrażenie pracy potrzebnej do deformacji /równanie (3.5)/ wykorzystamy do sformułowania nowego warunku plastyczności. Jako pierwszy przypadek rozpatrzmy uplastycznienie przy proporcjonalnym obciążaniu.

### 3.1.2. Warunek plastyczności przy proporcjonalnym obciążaniu.

Pracę potrzebną dla proporcjonalnego obciążania wyrażamy przez funkcję drugiego stopnia:

$$(3.3) \quad L = \frac{1}{2G} \delta_{ij} \delta_{ij}.$$

Po wstawieniu równania (3.3) do (3.2) otrzymujemy trzy współczynniki:

$$(3.4) \quad L(S_0) = \frac{1}{2G} s_{0ij} s_{0ij},$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_{ij}}(S_0) = \frac{s_{0ij}}{G},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}}(S_0) = \frac{1}{G}.$$

Dla proporcjonalnego obciążania otrzymujemy, że pochodne  $L$  wyższego stopnia niż drugi są równe zero. Z pozostałych trzech wyrazów w równaniu (3.2) utworzymy funkcję:

$$(3.5) \quad L - L(S_0) - \frac{\partial L}{\partial s_{ij}}(S_0)(s_{ij} - s_{0ij}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}}(S_0)(s_{ij} - s_{0ij})(s_{kl} - s_{0kl}),$$

którą nazwiemy przyrostem pracy deformacji postaciowej i oznaczymy przez  $L_{S_0-S}$ :

$$(3.6) \quad L_{S_0-S} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(S_0)}{\partial s_{ij} \partial s_{kl}} (s_{ij} - s_{0ij})(s_{ij} - s_{0ij}).$$

Wykorzystując (3.4) oraz (3.6) otrzymujemy:

$$(3.7) \quad L_{S_0-S} = \frac{1}{2G} (s_{ij} - s_{0ij})(s_{ij} - s_{0ij}).$$

Dla proporcjonalnego obciążania wprowadzimy uogólnioną współrzędną:

$$(3.8) \quad \sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} (s_{ij} s_{ij})^{1/2},$$

która dla jednoosiowego obciążenia  $\bar{\sigma}$  redukuje się do  $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0$ . Z równań (3.7) i (3.8) mamy:

$$(3.9) \quad L_{S_0-S} = \frac{1}{3G} (\sigma - \tau_0)^2,$$

gdzie:

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} (s_{0ij} s_{0ij})^{1/2}.$$

Przyjmijmy taką wartość  $\tau_0$ , która spełnia warunek:



$$(3.10) \quad (\sigma_A - \tau_0)^2 = (\sigma_C - \tau_0)^2,$$

gdzie  $\sigma_A, \sigma_C$  oznaczają odpowiednio granicę sprężystości przy obciążaniu i odciążaniu od naprężenia  $\tau_0$ . Z równania (3.10) otrzymujemy współrzędną punktu  $S_0$  /inne rozwiązanie równania (3.10), z którego wynika  $\sigma_A = \sigma_C$  jest dalej nieprzydatne/:

$$(3.11) \quad \tau_0 = \frac{1}{2} (\sigma_A + \sigma_C).$$

Wprowadźmy wielkość "α" w równaniu (3.10)

$$(3.12) \quad \alpha = \sigma_A - \tau_0 = -\sigma_C + \tau_0.$$

Z równań (3.9) i (3.12) otrzymujemy:

$$(3.13) \quad L_{S_0-S} = \frac{\alpha^2}{3G}.$$

Dla wybranej wielkości  $\tau_0$  otrzymaliśmy stałą wielkość przyrostu pracy potrzebnej do uplastycznienia w przypadku proporcjonalnego obciążania i odciążania materiału anizotropowego. Z równań (3.7) i (3.13) otrzymujemy warunek plastyczności przy proporcjonalnych drogach naprężenia:

$$(3.14) \quad \frac{3}{2} (\delta_{ij} - \delta_{oij})(\delta_{ij} - \delta_{oij}) = \alpha^2.$$

Obecnie zajmiemy się uplastycznieniem materiału odkształconego wzdłuż dowolnej drogi naprężenia przechodzącej przez punkt  $S_0$ .

### 3.1.3. Warunek plastyczności przy złożonych drogach naprężenia.

Przyrost pracy  $L_{S_0-S}$  przy nieproporcjonalnych drogach naprężenia obliczymy z równania (3.2):

$$(3.15) \quad L_{S_0-S} = L - L(S_0) - \frac{\partial L(S_0)}{\partial \delta_{ij}} (\delta_{ij} - \delta_{oij}) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(S_0)}{\partial \delta_{ij} \partial \delta_{kl}} (\delta_{ij} - \delta_{oij})(\delta_{kl} - \delta_{okl}) + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 L(S_0)}{\partial \delta_{ij} \partial \delta_{kl} \partial \delta_{pq}} (\delta_{ij} - \delta_{oij})(\delta_{kl} - \delta_{okl})(\delta_{pq} - \delta_{opq}) + \dots$$

Wielkość "L" jest nieznaną, dlatego  $L_{s_0-s}$  obliczymy wykorzystując drugi wariant równania (3.15) :

$$(3.15a) \quad L_{s_0-s} = C_{ijkl} (\delta_{ij} - \delta_{0ij})(\delta_{kl} - \delta_{0kl}) + \\ + C_{ijklpq} (\delta_{ij} - \delta_{0ij})(\delta_{kl} - \delta_{0kl})(\delta_{pq} - \delta_{0pq}) + \dots$$

gdzie:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(S_0)}{\partial \delta_{ij} \partial \delta_{kl}}, \\ C_{ijklpq} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 L(S_0)}{\partial \delta_{ij} \partial \delta_{kl} \partial \delta_{pq}}.$$

Badanie warunku plastyczności w przestrzeni dewiatorowej naprężeń i poszukiwanie współczynników materiałowych jest operacją utrudnioną ze względu na obowiązujący związek  $\mathbf{A}_{11} = 0$ . Dlatego posłużymy się pięciowymiarową przestrzenią układu współrzędnych  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), które określają równania [34] :

$$(3.16) \quad \delta_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} x_1, \quad \delta_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_3, \\ \delta_{22} = -\frac{1}{\sqrt{6}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} x_2, \quad \delta_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_4, \\ \delta_{33} = -\frac{1}{\sqrt{6}} x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_2, \quad \delta_{31} = \frac{1}{\sqrt{2}} x_5.$$

Równania (3.16) zostały ułożone w ten sposób, że moduł wektora łączącego punkt  $x_i$  z początkiem układu współrzędnych równy jest wielkości intensywności naprężeń  $\sigma_1 = (\delta_{ij} \delta_{ij})^{1/2}$ .

Przyjmijmy, że mamy do czynienia z materiałem o początkowych izotropowych własnościach określonych przez wielkość granicy plastyczności  $\sigma_{pl}$ . Dla takiego materiału powierzchnia plastyczności jest kulą we współrzędnych  $x_i$ , ponieważ mamy związek:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{pl}.$$

Wykonajmy obciążenie wzdłuż dowolnie wybranej prostej " $r_x$ ". Początkowa powierzchnia plastyczności ulegnie ewolucji w ten sposób, że otrzymamy powierzchnię, której oś symetrii będzie leżała wzdłuż prostej  $r_x$ . Z tego powodu możemy ograniczyć rozpatrywanie geometrii powierzchni do analizy płaskiej krzywej leżącej na dowolnej płaszczyźnie zawierającej oś symetrii powierzchni.



Do naszych rozważań przyjmijmy płaszczyznę  $x_1, |x_3$ .  
 W celu dalszego uproszczenia rozważań przyjmijmy, że oś współrzędnych  $x_1$  jest osią symetrii powierzchni plastyczności. W tym przypadku mamy następujące współrzędne środka powierzchni plastyczności:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} x_{01} &= \sqrt{\frac{3}{2}} s_{011} \quad , \\ x_{02} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (s_{022} - s_{033}) = 0 \quad . \\ x_{03} &= x_{04} = x_{05} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Wyprowadzenie równania powierzchni plastyczności, której osią symetrii jest oś  $x_1$ , będzie znacznym ułatwieniem przy wyznaczaniu współczynników stałych i omawianiu ewolucji kształtu krzywej teoretycznej, którą to równanie opisuje. Poczynione uproszczenia w niczym nie zmieniają ogólności procedury postępowania w przypadku poszukiwania niesymetrycznej powierzchni plastyczności.

Następnym uproszczeniem jest poprzestanie na analizie równania trzeciego stopnia, które po wyrugowaniu zbędnych wyrazów daje najprostszą z możliwych postaci równania opisującego powierzchnię plastyczności niestarszonego materiału. Aby uzyskać możliwość opisywania powierzchni plastyczności jeszcze bardziej odbiegających od elipsy należałoby wykorzystać równania wyższego stopnia niż trzeci. Uznając, że równanie trzeciego stopnia wystarcza do opisu powierzchni plastyczności niestarszonego materiału, podano jeszcze równanie czwartego stopnia, aby uwidocznić ilość i postać wyrazów wprowadzonych przy podwyższaniu stopnia równania /równanie (3.12c) /.

Pierwszy i drugi wyraz równania (3.15a) przedstawiają wyrażenia algebraiczne odpowiednio drugiego i trzeciego stopnia ze stałymi współczynnikami. Pozostawimy we wzorze (3.15a) wspomniane dwa wyrazy, które po przekształceniu za pomocą związków (3.16) i (3.17) doprowadzają do równania trzeciego stopnia ze stałymi współczynnikami:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} L_x &= d_0(x_1 - x_{01})x_3 + d_1(x_1 - x_{01})^2 + d_2x_3^2 + d_3(x_1 - x_{01})x_3^2 + \\ &+ d_4(x_1 - x_{01})^2x_3 + d_5(x_1 - x_{01})^3 + d_6x_3^3 \quad . \end{aligned}$$

Równanie (3.18) zawiera współczynniki  $d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6$ , które możemy podzielić na trzy grupy, w zależności od warunków brzegowych potrzebnych do określenia wielkości współczynników. Do pierwszej grupy zaliczymy współczynniki przy potęgach typu  $x_k^3$ . Współczynniki te określimy wykorzystując warunek, że równanie (3.18) musi redukować się do wzoru na przyrost pracy dla proporcjonalnego obciążania w kierunku  $x_1$ . Ponieważ przyrost pracy przy proporcjonalnym obciążaniu wyraża równanie drugiego stopnia względem  $x_1$ , możemy napisać warunek (3.19a<sub>1</sub>) oraz (3.19a<sub>2</sub>):

$$(3.19a_1) \quad x_3 = 0, \quad L_{S_0-S} = d_1(x_1 - x_{01})^2.$$

Proporcjonalne obciążanie w kierunku  $x_3$  mamy dla:

$$(3.19a_2) \quad x_{01} = 0, \quad x_1 = 0, \quad L_{S_0-S} = d_2 x_3^2.$$

Po podstawieniu warunków (3.19a<sub>1</sub>) oraz (3.19a<sub>2</sub>) do równania (3.18) otrzymujemy

$$d_1(x_1 - x_{01})^2 = d_1(x_1 - x_{01})^2 + d_5(x_1 - x_{01})^3,$$

$$d_2 x_3^2 = d_2 x_3^2 + d_6 x_3^3.$$

Z tych dwu równań obliczamy:

$$(3.20a) \quad d_5 = 0,$$

$$(3.20b) \quad d_6 = 0.$$

Współczynniki  $d_0, d_4$  związane są z wyrazami zawierającymi  $x_3$  w pierwszej potęgę, wobec czego zaliczymy je do drugiej grupy współczynników. W ogólnym przypadku tę grupę tworzyłyby współczynniki przy wyrazach zawierających iloczyny mieszane  $x_1$  w dowolnej potęgę oraz  $x_3$  w potęgę nieparzystej. Współczynniki tej grupy określimy w ten sposób, aby oś  $x_1$  była osią symetrii powierzchni plastyczności. Powyższy warunek możemy zapisać w następujący sposób:

$$(3.19b_1) \quad x_1 - x_{01} = + A_1, \quad x_3 = \pm B_1;$$



$$(3.19b_2) \quad x_1 - x_{01} = -A_1 ; \quad x_3 = \pm 3_2 ;$$

Po podstawieniu wzorów (3.19b<sub>1</sub>) oraz (3.20a) , (3.20b) do równania (3.18) mamy:

$$L_x = d_0 A_1 B_1 + d_1 A_1^2 + d_2 B_1^2 + d_3 A_1 B_1^2 + d_4 A_1^2 B_1 ,$$

$$L_x = -d_0 A_1 B_1 + d_1 A_1^2 + d_2 B_1^2 + d_3 A_1 B_1^2 - d_4 A_1^2 B_1 .$$

Z powyższych dwu równań otrzymujemy zależność:

$$d_0 + d_4 A_1 = 0 .$$

Analogiczne działania przeprowadzone dla warunku (3.19b<sub>2</sub>) doprowadzają do równania:

$$-d_0 + d_4 A_1 = 0 .$$

Z ostatnich dwu równań otrzymujemy:

$$(3.20c) \quad d_0 = 0 ;$$

$$(3.20d) \quad d_4 = 0 .$$

Po wstawieniu (3.20 a,b,c,d) do równania (3.18) otrzymujemy:

$$(3.21a) \quad L_x = d_1 (x_1 - x_{01})^2 + d_2 x_3^2 + d_3 (x_1 - x_{01}) x_3^2 .$$

Podzielmy równanie (3.21a) przez wielkość  $L_x$  :

$$(3.21b) \quad \bar{d}_1 (x_1 - x_{01})^2 + \bar{d}_2 x_3^2 + \bar{d}_3 (x_1 - x_{01}) x_3^2 = 1 .$$

$$\text{gdzie:} \quad \bar{d}_1 = \frac{d_1}{L_x} , \quad \bar{d}_2 = \frac{d_2}{L_x} , \quad \bar{d}_3 = \frac{d_3}{L_x} .$$

Równanie (3.21b) jest poszukiwanym przez nas równaniem powierzchni plastyczności. Fizyczny sens tej powierzchni polega na tym, że w każdym jej punkcie, przyrost pracy potrzebnej do postaciowej deformacji sprężystej materiału jest dany wzorem (3.21a) .

Bez wyprowadzenia podamy równanie symetrycznej powierzchni czwartego stopnia:

$$(3.21c) \quad \bar{d}_1 (x_1 - x_{01})^2 + \bar{d}_2 x_3^2 + \bar{d}_3 (x_1 - x_{01}) x_3^2 + \bar{d}_4 (x_1 - x_{01})^2 x_3^2 = 1 .$$

Równanie to otrzymamy, jeżeli w ogólnym równaniu (3.15a) pozostawimy czwartą pochodną pracy. Porównanie wzorów (3.21b) oraz (3.21c) pokazuje, że podwyższanie stopnia równania wprowadza tylko jeden wyraz, a więc możemy w ten sposób opisać tylko jeden nowy efekt zaobserwowany w doświadczalnej powierzchni plastyczności. Ponieważ poszukiwano równania powierzchni plastyczności materiału niestarzonego /rys.10/, która ma jedną oś symetrii, a możemy opisać taką powierzchnię przez równanie trzeciego stopnia (3.21b), w dalszych rozważaniach nie będziemy wykorzystywać równania czwartego stopnia.

Poszukiwanie równania powierzchni plastyczności przez rozpatrywanie przyrostu pracy doprowadziło do znacznego uproszczenia końcowego wyniku /równanie (3.21b) /. Uproszczenie polegało na wyeliminowaniu wyrazu zależącego od trzeciej potęgi składowych naprężenia. Taki wyraz występuje w bardziej skomplikowanym równaniu proponowanym w artykule [18] /równanie (2.25a) w tej pracy/. Jednak wyrazy zawierające trzecią potęgę naprężenia nie są niezbędne dla uwzględnienia niesymetrii kształtu powierzchni plastyczności.

Wyprowadzone tutaj równanie (3.21b) jest prostsze od równań powierzchni plastyczności proponowanych w literaturze [57, 68]. Równania te zamieszczono pod numerem (2.46) i (2.47c) w tej pracy. Jak już wspomniano, równanie (3.21b) jest niepełnym równaniem trzeciego stopnia, natomiast równania (2.46) i (2.47c) są niepełnymi równaniami czwartego stopnia a więc są bardziej skomplikowane.

Równanie (3.21b) przekształcimy w ten sposób, aby obliczone za jego pomocą powierzchnie plastyczności można było porównać we współrzędnych  $\sigma, \tau$  z powierzchniami opisywanymi przez równania (2.46) i (2.47c). Dla stanu naprężenia  $\sigma, \tau$  otrzymujemy z równań (3.16) dwie współrzędne, które mogą być różne od zera:

$$(3.22) \quad \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} s_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma, \\ x_3 &= \sqrt{2} s_{12}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu wzorów (3.22) do równania (3.21b) otrzymujemy:

$$(3.23) \quad e_1(\sigma - \tau_0)^2 + e_2\tau^2 + e_3(\sigma - \tau_0)\tau^2 = 1.$$



gdzie:  $r_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} x_{01}$ .

Współczynniki  $e_1, e_2, e_3$  wyznaczmy, jeżeli wykorzystamy wymiary powierzchni plastyczności, którą pokazano na rys. 10. Dla tej powierzchni możemy napisać następujące warunki brzegowe:

$$(3.24a) \quad \tau = 0, \quad \sigma_+ = \sigma_A, \quad \sigma_- = \sigma_A - 2a.$$

$$(3.24b) \quad \sigma = \sigma_B, \quad \tau = \pm b, \quad \frac{d\tau}{d\sigma} = 0.$$

Po podstawieniu do równania (3.23) warunków brzegowych (3.24a, b) oraz wielkości  $r_0$ , którą obliczymy ze wzoru (3.11):  $r_0 = \sigma_A - a$  i po wykonaniu przekształceń otrzymujemy wartości współczynników:

$$(3.25) \quad e_1 = \frac{1}{a^2}, \quad e_2 = \frac{a^2 + (\sigma_A - \sigma_B - a)^2}{a^2 b^2}, \quad e_3 = 2 \frac{\sigma_A - \sigma_B - a}{a^2 b^2},$$

Równanie (3.23) ze współczynnikami (3.25) możemy przedstawić w następującej postaci:

$$(3.23a) \quad \left(\frac{\sigma - \sigma_A}{a} + 1\right)^2 + \left[1 + \left(\frac{\sigma_A - \sigma_B}{a} - 1\right)\right]^2 \frac{\tau^2}{b^2} + 2\left(\frac{\sigma_A - \sigma_B}{a} - 1\right)\left(\frac{\sigma - \sigma_A}{a} + 1\right) \frac{\tau^2}{b^2} = 1.$$

Powierzchnie plastyczności wyznaczono z równania (3.23a) dla różnych wartości parametru  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$ . Ten parametr jest związany z asymetrią powierzchni plastyczności. Na rys. 16 pokazano powierzchnie plastyczności dla parametru  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$ , którego wielkości równają się 1; 1,2; 1,5; 1,8; 2. Wszystkie powierzchnie obliczono dla dowolnie wybranej wielkości  $\sigma_A/a = 2,4$ , która określa położenie powierzchni na osi  $\sigma$ .

Dla  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 1$  otrzymujemy z równania (3.23a) elipsę drugiego stopnia, która jest przesunięta z początku układu współrzędnych o wielkość  $\sigma_B = \sigma_A - a$ . We współrzędnych  $\sigma/a, \tau/b$  elipsa zmienia się w okrąg o promieniu  $a = 1$ .

Dla  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 2$  równanie (3.23a) redukuje się do wyrażenia:

$$\left(\frac{\sigma - \sigma_A}{a} + 1\right)^2 + 2 \frac{\tau^2}{b^2} + 2\left(\frac{\sigma - \sigma_A}{a} + 1\right) \frac{\tau^2}{b^2} = 1,$$

które można przekształcić do następującej postaci:

$$(3.23b) \quad \left( \frac{\sigma - \sigma_A}{a} + 2 \right) \left( \frac{\sigma - \sigma_A}{a} + 2 \frac{\xi^2}{b^2} \right) = 0.$$

Równanie (3.23b) przedstawia parabolę o równaniu:

$$\frac{\sigma - \sigma_A}{a} = -2 \frac{\xi^2}{b^2}.$$

Parabola jest ograniczona przez odcinek  $\frac{\xi}{b} = \pm 1$ , który leży w odległości  $\sigma = \sigma_A - 2a$  od początku układu współrzędnych. Powierzchnię plastyczności opisaną równaniem (3.23b) pokazano jako linię 5 na rys.16. Pozostałe powierzchnie plastyczności, z których trzy pokazano na rys.16, mają kształty pośrednie pomiędzy wymienionymi skrajnymi liniami: okręgiem i parabolą zamkniętą prostą.

Na oddzielnych wykresach porównamy proponowaną tu powierzchnię plastyczności obliczoną z równania (3.23a) oraz powierzchnie wyznaczone z równań (2.46) i (2.47c). Powierzchnie plastyczności obliczone dla dwu wielkości  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$ , które wynoszą 1,5 i 1,8 pokazano na rys.17.

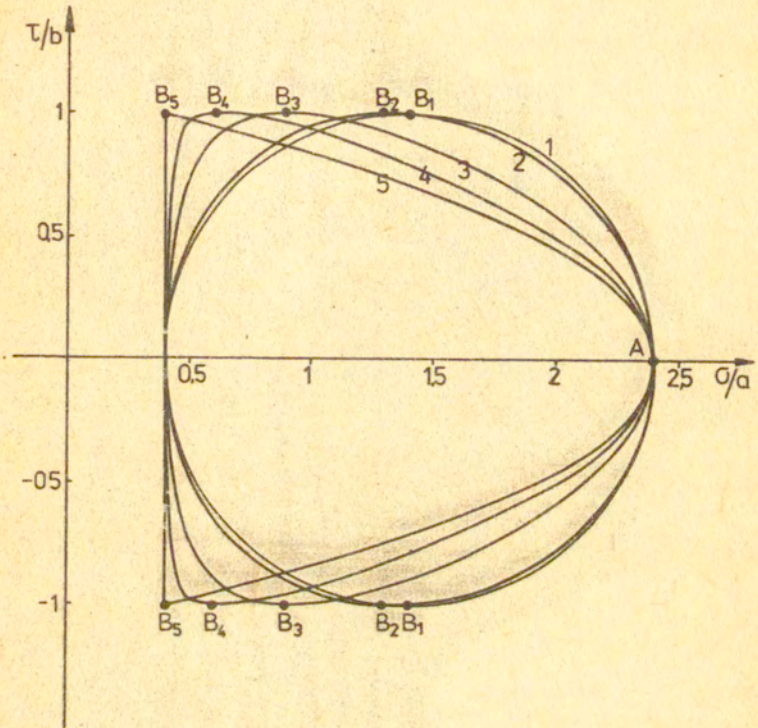
Dla  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 1,5$  pokazane powierzchnie plastyczności leżą blisko siebie. Proponowana w tej pracy powierzchnia plastyczności, którą narysowano linią ciągłą, znajduje się pomiędzy powierzchnią Williamsa /górną linią/ i K.Kaneko et al. /dolna linia/.

Dla  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 1,8$  wzajemne usytuowanie krzywych zmienia się w ten sposób, że proponowana powierzchnia plastyczności leży blisko wypukłych części dwu pozostałych linii. Na rys.17 widać, że proponowana powierzchnia plastyczności jest wypukła dla rozpatrywanych parametrów  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$ , natomiast na pozostałych dwu powierzchniach pojawiają się wklęsnięcia przy dużej asymetrii jej kształtu.

Powierzchnie plastyczności opisane równaniem (2.46), (2.47c) są wypukłe tylko do wartości  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$  odpowiednio 1,6 oraz 1,5. Zatem proponowana powierzchnia jest porównywalna w większym zakresie wielkości  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$  z linią wyznaczoną za pomocą równania (2.46) /rys.11/.

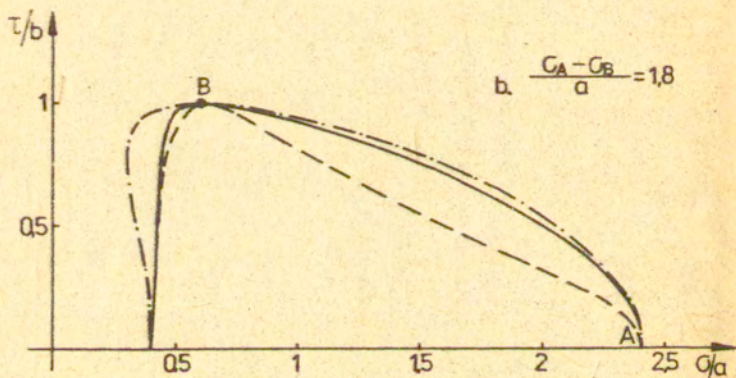
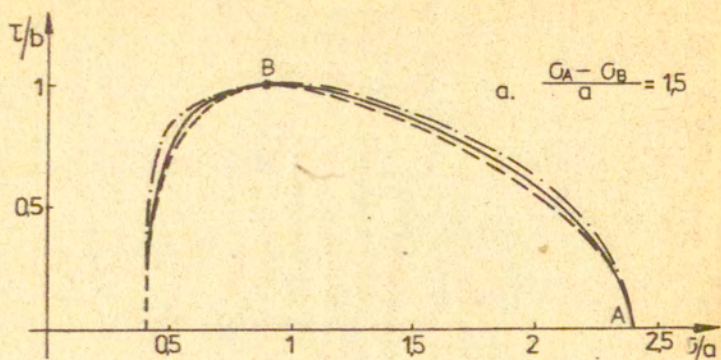
Pokażemy, jak zmienia się różnica między współrzędnymi  $\sigma$  obliczonymi z równań (2.46) i (3.23a) dla  $\frac{\xi}{b} = 0,5$  ponieważ w tym rejonie omawiane dwie linie leżą najdalej od siebie /rys.17/.





Rys.16 Proponowana powierzchnia plastyczności.

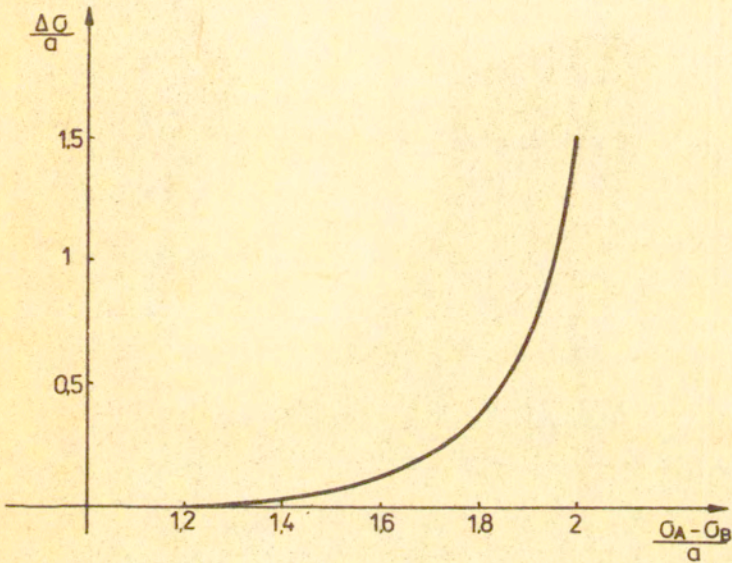
Nr linii	1	2	5	4	5
$(\sigma_A - \sigma_B)/\alpha$	1,0	1,1	1,5	1,8	2,0



Rys.17 Porównanie powierzchni plastyczności:

- proponowane równanie (3.25)
- równanie (2.46)
- .-.-.-.- równanie (2.47)





Rys.18 Różnica  $\Delta\sigma/a$  współrzędnych, które obliczono z równań (2.46) oraz (3.25) dla  $\frac{\tau}{b} = 0,5$  pokazana w funkcji parametru asymetrii  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$ .

Obliczoną różnicę między współrzędnymi oznaczono przez  $\Delta\sigma/a$  i przedstawiono w funkcji wielkości  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$  na wykresie /rys. 18/. Parametr  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$  dla powierzchni plastyczności, które otrzymano z doświadczeń [57], zmieniał się w granicach  $1 \ll \frac{\sigma_A - \sigma_B}{a} \ll 1,53$ . Dla  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 1,53$  mamy  $\Delta\sigma/a = 4\%$  różnicy między porównywanymi powierzchniami plastyczności. W tym zakresie możemy przyjąć, że omawiane dwie powierzchnie plastyczności niewiele różnią się między sobą. Dla wartości  $(\sigma_A - \sigma_B)/a = 1,53$  na powierzchni plastyczności Williamsa /równanie (2.47 c)/ istnieje wklęsnięcie a więc pominiemy ją przy tych porównaniach.

Kaneko et al. [57] pokazali, że ich równanie dobrze opisuje wyniki doświadczeń. Ponieważ powierzchnia plastyczności proponowana w tej pracy /równanie (3.23a) /, niewiele różni się od powierzchni Kaneko et al. dla praktycznie spotykanych wielkości  $(\sigma_A - \sigma_B)/a$ , możemy uważać, że obie powierzchnie opisują wyniki doświadczeń z podobną dokładnością. Dlatego nie pokazano dodatkowych porównań powierzchni plastyczności proponowanej w tym rozdziale /równanie (3.23a) / i wyników doświadczeń, które można znaleźć w omówionej literaturze.

### 3.2. Plastycznie płynięcie materiału anizotropowego ze wzmocnieniem.

Równanie warunku plastyczności wprowadzono bez powiązania z definicją uplastycznienia oraz umocnieniem, które powodują odkształcenia trwałe. Uwzględnieniem wymienionych czynników zajmiemy się w tym rozdziale. Po krótkim omówieniu definicji uplastycznienia wyprowadzimy prawo płynięcia, które wiąże naprężenia z prędkością odkształceń. Następnie omówimy regułę ruchu powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń. Zastosowanie otrzymanych związków matematycznych zilustrujemy na przykładach zachowania się materiału przy cyklicznym obciążaniu.

#### 3.2.1. Określenie granicy plastyczności

Deformacja plastyczna wywołuje ewolucję powierzchni plastyczności, która zmienia kształt, wymiary i położenie względem układu współrzędnych w przestrzeni naprężeń. Dodatkowym czynnikiem wpływającym na przebieg wymienionych zjawisk jest definicja uplastycznienia, która wyraźnie oddziałuje na wymiary powierzchni



plastyczności.

Szczególnie często określano granicę plastyczności dla tradycyjnie wybieranych wielkości odkształceń trwałych. W dwu skrajnych przypadkach, gdy definicja uplastycznienia uwzględnia bardzo małe albo duże odkształcenia trwałe, jej wpływ na powierzchnię plastyczności jest niewielki. W interesującym nas przypadku, gdy uwzględniamy bardzo małe odkształcenia trwałe, otrzymujemy powierzchnię obejmującą obszar sprężystego zachowania się materiału. Mniejszą od tak określonej granicy sprężystości jest powierzchnia proporcjonalności odpowiadająca naprężeniom, które wywołują plastyczne płynięcie powodujące odchylenie wykresu  $\sigma(\epsilon)$  od pierwotnego prostoliniowego przebiegu.

Moduł Younga zwykle zależy od drogi obciążania. Jeżeli przy określaniu granicy proporcjonalności i sprężystości posługujemy się lokalną wielkością modułu Younga, wpływ jego zmian na naprężenia uplastyczniające zostanie wyeliminowany. Dlatego przy omawianiu modelu materiału ograniczymy się do przypadku uwzględniającego stałą wartość modułu Younga.

### 3.2.2. Frawo płynięcia

Weźmy element początkowo sprężystego materiału, który umacnia się w wyniku deformacji plastycznej. Przyjmijmy dowolne naprężenia  $\sigma_{ij}$  działające na element materiału.

Rozpatrujemy model materiału, w którym dyspacja pracy związana jest tylko ze składowymi dewiatora naprężenia. Rozważania ograniczamy do przypadku ustalonych prędkości odkształceń i naprężeń:

$$(3.27) \quad \ddot{\epsilon} = \frac{d^2 \epsilon}{dt^2} = 0, \quad \ddot{\sigma} = \frac{d^2 \sigma}{dt^2} = 0.$$

Prędkości naprężeń i odkształceń są określone przez swoje składowe za pomocą wzorów:

$$(3.28) \quad \dot{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}, \\ \dot{\epsilon} = (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij})^{1/2}.$$

Rozpatrzmy fragment procesu deformacji, gdy zmieniające się naprężenia wykonały pracę  $dL$ . W obszarze sprężystym przyjmujemy, że praca  $dL$  zostaje zużyta tylko na zmianę stanu naprężenia. Gdy osiągnęliśmy granicę plastyczności, pojawiły się odkształcenia

trwałe wywołane przez poślizgi, które umocniły materiał i wywołały dysypację pracy dW. Z tej przyczyny dalsze powiększanie deformacji plastycznej materiału wymagało wykcnania pracy  $dL_S$  związanej ze zmianą sprężystej deformacji materiału. Zajmijmy się związkami pomiędzy mocą  $\dot{L}_S$  wymaganą do sprężystej deformacji materiału oraz prędkością dysypacji pracy  $\dot{W}$  :

$$(3.29) \quad \dot{W} = \dot{W}(\dot{L}_S) .$$

Przy badaniu związku (3.29) posłużymy się równaniem (3.2), które przedstawimy w postaci:

$$(3.30) \quad L = L_0 + L_m + L_{S_0-S} ,$$

$$\text{gdzie: } L_0 = L(S_0) = \frac{1}{2G} \delta_{oij} \delta_{oij} ,$$

$$L_m = \frac{\partial L}{\partial \delta_{ij}} (S_0) (\delta_{ij} - \delta_{c_{ij}}) = c_{ij} (\delta_{ij} - \delta_{c_{ij}}) ,$$

$$L_{S_0-S} - \text{ patrz równanie (3.15a) .}$$

Przyrost pracy  $L_{S_0-S}$  służył do określenia powierzchni plastyczności w złożonym stanie naprężenia. Wielkość  $L_0$  jest częścią pracy związaną tylko z położeniem środka powierzchni plastyczności.

Przyjmijmy uproszczony model materiału, w którym powierzchnia plastyczności nie zmienia wymiarów w trakcie trwałej deformacji ośrodka, ale może przemieszczać się w przestrzeni naprężeń. W tym przypadku mamy stałą wartość  $L_{S_0-S}$  dla ustalonego kierunku  $S_0-S$  oraz zmienne  $L_0$  i  $L_m$ . Z równania (3.30) otrzymujemy dla  $\dot{L}_{S_0-S} = 0$  :

$$3.31 \quad \dot{L} = \dot{L}_0 + \dot{L}_m ,$$

$$\text{gdzie: } \dot{L}_0 = \frac{1}{G} \delta_{oij} \dot{\delta}_{oij} ,$$

$$\dot{L}_m = c_{ij} (\dot{\delta}_{ij} - \dot{\delta}_{c_{ij}}) + c_{ij} (\delta_{ij} - \delta_{c_{ij}}) .$$

Wielkość  $\dot{L}_0$  jest taka sama dla wszystkich punktów powierzchni plastyczności, natomiast  $\dot{L}_m$  zależy od aktualnego stanu naprężenia. Z tego powodu będziemy poszukiwać zależności prędkości dysypacji pracy tylko od mocy  $\dot{L}_0$ . Wielkość  $\dot{L}_0$  zależy od historii



naprężenia, którą uwzględnia się we współrzędnej  $\delta_{oij}$ .

Pracę dysypowaną /równanie (3.29) / możemy zapisać następująco:

$$(3.32) \quad \dot{W} = |\delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}| = |\delta_{ij} - \delta_{oij}| |\dot{\epsilon}_{ij}| + |\delta_{oij}| |\dot{\epsilon}_{ij}|.$$

Część pracy dysypowanej:

$$(3.33) \quad \dot{W}_p = |\delta_{ij} - \delta_{oij}| |\dot{\epsilon}_{ij}|,$$

Zależy od aktualnego stanu naprężenia. Drugi składnik we wzorze (3.32):

$$(3.34) \quad \dot{W}_o = |\delta_{oij}| |\dot{\epsilon}_{ij}|,$$

jest niezależny od aktualnego naprężenia, natomiast zależy od kierunku obciążania, który wpływa na wielkość  $\dot{\epsilon}_{ij}$ . Podobnie jak  $\dot{L}_o$  /równanie (3.31) /, wielkość  $\dot{W}_o$  zależy od historii obciążania poprzez współrzędną  $\delta_{oij}$ . Dlatego wyodrębnimy z równania (3.29) zależność:

$$(3.35) \quad \dot{W}_o = \dot{W}_o(\dot{L}_o),$$

którą użyjemy do wprowadzenia reguły płynięcia. Rozwińmy  $\dot{W}_o$  w szereg Taylora dla małego przyrostu  $\Delta \dot{L}_o$  w okolicy punktu  $\dot{L}_o$ :

$$(3.36) \quad \dot{W}_o = \dot{W}_o(\dot{L}_o) + \frac{d\dot{W}_o}{d\dot{L}_o}(\dot{L}_o) \frac{\Delta \dot{L}_o}{1!} + \frac{d^2\dot{W}_o}{d^2\dot{L}_o^2}(\dot{L}_o) \frac{(\Delta \dot{L}_o)^2}{2!} + \dots$$

Dla przyjętych warunków prędkości naprężeń i odkształceń /równania (3.27) / nie istnieją pochodne  $\dot{W}_o$  i  $\dot{L}_o$  stopnia wyższego niż drugi. Wykorzystanie tego wniosku umożliwia ograniczenie ilości wyrazów w wyrażeniu dla  $\dot{W}_o$ . Współczynniki w szeregu możemy wyrazić w postaci:

$$(3.37) \quad \frac{d\dot{W}_o}{d\dot{L}_o}(\dot{L}_o) = \frac{d\dot{W}_o/dt}{d\dot{L}_o/dt}(\dot{L}_o) = \frac{\ddot{W}_o}{\ddot{V}_o}(\dot{L}_o) = \frac{1}{c_1(\lambda_\sigma, s)},$$

gdzie:  $c_1(\lambda_\sigma, s)$  współczynnik zależący od historii naprężenia  $\lambda_\sigma$  i położenia punktu obciążania  $S$ .

$$(3.38) \quad \frac{d^2\dot{W}_o}{d\dot{L}_o^2}(\dot{L}_o) = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\dot{W}_o}{d\dot{L}_o} \right) (\dot{L}_o) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\ddot{W}_o}{\ddot{V}_o} \right) (\dot{L}_o) = \frac{\ddot{W}_o \ddot{V}_o - \dot{W}_o \ddot{V}_o}{\ddot{V}_o^2} = 0.$$

Podobnie można wykazać, że  $(d\dot{L}_o^n/dL_o^n)(\dot{L}_o) = 0$  dla  $n > 1$ .  
 Tak więc w równaniu (3.36) pozostaje nam jeden stały współczynnik różny od zera oraz wartość początkowa  $\dot{W}_o(\dot{L}_o)$ .

Ze wzoru (3.37) wyprowadzimy poszukiwaną regułę płynięcia. Wstawmy w równanie (3.37):  $\dot{W}_o = \dot{s}_{oij} \dot{E}_{ij}$ ,  $\dot{L}_o = \frac{1}{G} \dot{s}_{oij} \dot{s}_{oij}$ .  
 Otrzymujemy:

$$(3.39) \quad \frac{1}{c(\lambda_\sigma, s)} = \frac{\dot{s}_{oij} \dot{E}_{ij}}{\dot{s}_{oij} \dot{s}_{oij}} = \frac{\dot{s}_o \dot{E} \cos \alpha}{\dot{s}_o^2},$$

gdzie:  $c(\lambda_\sigma, s) = G c_1(\lambda_\sigma, s)$ ;  $\dot{s}_o = (\dot{s}_{oij} \dot{s}_{oij})^{1/2}$ .

$\alpha$  - kąt między wektorami  $\dot{s}_o^*$ ,  $\dot{E}^*$ .

Z równania (3.39) otrzymujemy:

$$(3.40) \quad \frac{1}{c(\lambda_\sigma, s)} = \frac{\dot{E} \cos \alpha}{\dot{s}_o}.$$

Regułę płynięcia otrzymamy ze wzoru (3.40)

$$(3.41) \quad \dot{E} = \frac{1}{c(\lambda_\sigma, s)} \frac{\dot{s}_o}{\cos \alpha}.$$

Wyprowadzony związek ma budowę podobną do reguły Pragera:  $\dot{s}_{oij} = C \dot{E}_{ij}$ , która opisywała ruch środka powierzchni plastyczności w zależności od odkształceń.

Współczynnik "c" możemy obliczyć, jeżeli wykonamy proporcjonalne obciążanie izotropowego materiału, w czasie którego mamy  $\cos \alpha = 1$ . Z równania (3.41) otrzymujemy:

$$(3.42) \quad c = \frac{\dot{s}_o}{\dot{E}}.$$

W ogólnym przypadku materiału, współczynnik "c" może być wielkością zmienną, która zależy od historii obciążania  $\lambda_\sigma$ . Postać funkcji  $c(\lambda_\sigma)$  należy określić za pomocą doświadczeń.

Wprowadźmy parametr  $\lambda_\sigma$  jako wielkość ujmującą historię obciążania:

$$(3.43) \quad \lambda_\sigma = \int_{t_0}^t \dot{s}_o dt.$$



Parametr  $\lambda_{\sigma}$  jest długością drogi końca wektora  $\vec{x}_0$ .

Wielkość prędkości odkształceń trwałych  $\dot{\epsilon}$  /równanie (3.44)/ oraz parametr  $\lambda_{\sigma}$  zależą od prędkości środka powierzchni plastyczności  $\vec{x}_0$ , którą trzeba opisać za pomocą reguły umocnienia. Istnieje parę reguł umocnienia, jednak zastosowanie ich w tej pracy wymaga adaptacji polegającej na uwzględnieniu specyficznego kształtu i zachowania powierzchni plastyczności w czasie plastycznego płynięcia. Sprawami związanymi z regułą ruchu powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń będziemy zajmować się w następnym rozdziale.

### 3.2.3. Reguła wzmocnienia kinematycznego.

Ustalenie reguły wzmocnienia rozpoczniemy od omówienia zjawisk, które powinny być w niej uwzględnione. Badania doświadczalne pokazały, że powierzchnia plastyczności [57] ma jedną oś symetrii, która przechodzi przez początek układu współrzędnych. To zjawisko wykryto przy badaniach, które prowadzono natychmiast po plastycznym odkształceniu wstępnie izotropowego materiału. Ponadto, omawiane badania potwierdziły wcześniej znany fakt, że przy proporcjonalnym obciążaniu materiału wstępnie izotropowego, powierzchnia plastyczności przemieszcza się w kierunku działania naprężenia.

Reguła wzmocnienia [57], sformułowana w celu uwzględnienia wymienionych dwu zjawisk, zawiera ograniczenia ruchu powierzchni plastyczności, które powodują rozbieżności z nowymi wynikami doświadczeń. Następne prawo wzmocnienia [59] dzięki wprowadzeniu historii naprężenia w równania, pozwoliło opisać zachowanie materiału przy jednym programie cyklicznego obciążania. Ta ostatnia reguła umocnienia ma złożoną budowę matematyczną, która nie jest potrzebna do wyjaśnienia zasady ruchu powierzchni plastyczności. Dlatego w dalszych rozważaniach oprzemy się na regule Zieglera [28], która nadaje się do opisu niektórych przypadków cyklicznego umocnienia metalu [60, 61],

Przyjmijmy, że na przemieszczenie powierzchni plastyczności /równanie (3.17) / składają się dwa ruchy: przesunięcia wzdłuż osi symetrii oraz obrót wraz z osią symetrii. Wymienione dwa ruchy składowe zwiążemy regułą:

$$(3.45) \quad \dot{\vec{x}}_0 = \dot{\mu}(\vec{\sigma} - \vec{\tau}_0),$$

gdzie:  $\dot{M}$  - skalarny współczynnik proporcjonalności  
 $\vec{\sigma}$  - wektor naprężenia w punkcie obciążania,  
 $\vec{\tau}_0$  - wektor leżący wzdłuż osi symetrii powierzchni  
plastyczności.

Wybrana reguła wzmocnienia ma tę samą budowę co reguła wzmocnienia kinematycznego zaproponowana przez Zieglera, ale różni się od niej interpretacją wektora  $\vec{\tau}_0$ . Reguła Zieglera opisywała ruch powierzchni plastyczności, która we współrzędnych Iliuszyna sprowadzała się do powierzchni kuli o środku leżącym w odległości  $\tau_0$  od początku układu współrzędnych. W naszym przypadku, wektor  $\vec{\tau}_0$  łączy początek układu współrzędnych z punktem  $S_0$ , który leży na osi symetrii powierzchni plastyczności /równanie (3.11)/.

Procedurę znalezienia nowego położenia powierzchni plastyczności rozpoczynamy od obliczania przyrostu  $d\vec{\tau} = \vec{\tau}_0 dt$ , który pozwala znaleźć nowy kierunek i długość wektora  $\vec{\tau}_0$ . Następnie obracamy powierzchnię plastyczności w ten sposób, aby na jej osi symetrii leżał nowy wektor  $\vec{\tau}_0$ . Ostateczne położenie powierzchni przyjmuje, gdy jej punkt  $S_0$  przesuniemy wzdłuż osi symetrii do punktu wyznaczonego przez koniec wektora  $\vec{\tau}_0$ .

Warto przypomnieć sobie specyficzne cechy reguły Zieglera, które będą obowiązywać również przy kształcie powierzchni plastyczności proponowanym w tej pracy. Dla materiału z anizotropią plastyczną omówimy najpierw obciążenie wzdłuż proporcjonalnej drogi naprężenia, gdy środek powierzchni plastyczności /punkt  $S_0$ / nie leży na drodze obciążania. W miarę przesuwania się punktu obciążania wzdłuż drogi proporcjonalnego naprężenia, tor środka powierzchni plastyczności będzie zbliżał się do kierunku obciążania ale nigdy się z nim nie przetnie. Z powodu takiej kinematyki ruchu powierzchni plastyczności, reguła Zieglera opisuje efekt pamięci tylko w sposób przybliżony.

Drugim przykładem jest cykliczne obciążanie przy zachowaniu stałego naprężenia maksymalnego wzdłuż dwu przecinających się prostoliniowych dróg naprężenia. Przy odpowiednio dużym naprężeniu maksymalnym, tor środka powierzchni plastyczności dąży do ustabilizowanego kształtu między dwoma punktami zwrotnymi. Podobnie jak w poprzednim przypadku i tutaj następuje asymptotyczne dążenie do trajektorii środka powierzchni plastyczności o stałej geometrii.

Reguła wzmocnienia w połączeniu z prawem płynięcia i nowym warunkiem plastyczności pozwalają opisać zachowanie materiału przy skomplikowanych programach obciążania. Wiele takich progra-



mów omawiano [60] dla początkowego warunku plastyczności Hubera-Misesa przesuniętego z początku układu współrzędnych zgodnie z regułą Zieglera. Wprowadzenie warunku plastyczności trzeciego stopnia spowoduje we wspomnianych przykładach tylko różnice ilościowe. Dlatego przy omówieniu zastosowania reguły wzmocnienia i prawa płynięcia do opisu plastycznego zachowania materiału ograniczymy się do reguły Zieglera, w której używa się początkowego warunku plastyczności Hubera-Misesa.

### 3.2.4. Wyniki doświadczeń.

#### 3.2.4.1. Powiększanie się powierzchni plastyczności przy cyklicznej deformacji.

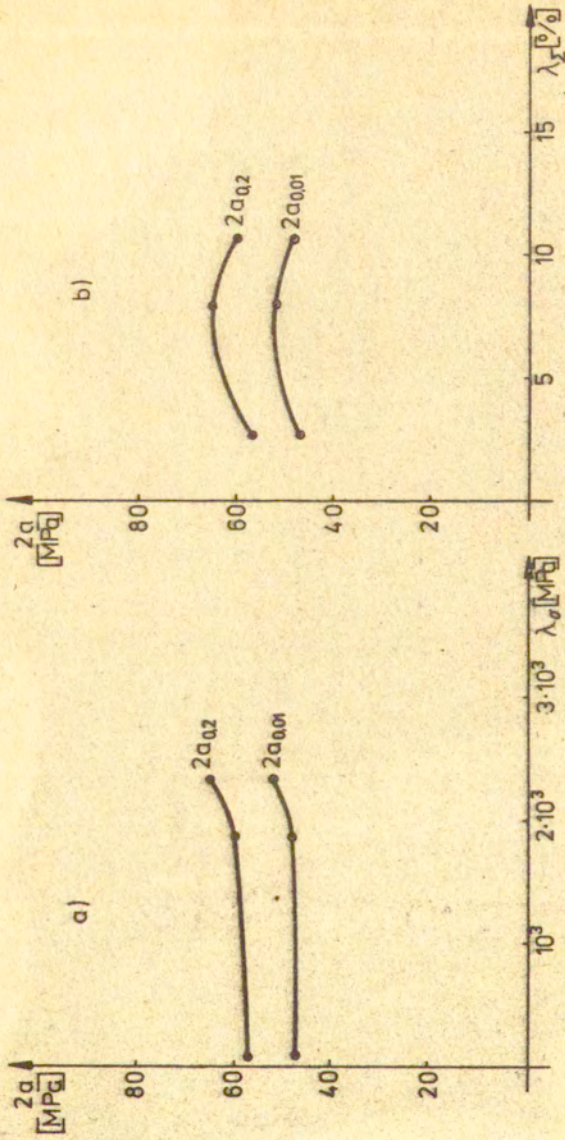
Dotychczas nie znaleziono parametru, który wskazuje, jaki program jednoosiowych obciążeń cyklicznych powoduje największe umocnienie materiału. To zagadnienie pojawiło się przy opracowaniu wyników badania mosiądzu deformowanego cyklicznie przez rozciąganie i ściskanie [17]. Wykonano trzy różne programy obciążeń, w których zachowano jednakowe największe naprężenie  $\bar{\sigma}$  ostatnim cyklu.

Powierzchnie plastyczności odpowiadające trzem programom obciążania różniły się wielkością co świadczy o różnym umocnieniu materiału. Najmniejsza powierzchnia plastyczności odpowiadała pierwszemu programowi obciążania przez rozciąganie wstępne do naprężenia  $\bar{\sigma}$ . Nieco większą powierzchnię otrzymano dla drugiego programu, gdy próbki deformowano cyklicznie przy stałej amplitudzie odkształcenia  $\Delta \epsilon$ . Największa powierzchnia odpowiadała trzeciemu programowi przy obciążeniu przez rozciąganie i ściskanie z zachowaniem stałej wielkości amplitudy naprężeń  $\bar{\sigma}$  w ostatnim cyklu.

Oznaczmy średnicę powierzchni plastyczności w kolejnych programach przez  $2a_1, 2a_2, 2a_3$ . Z opracowania wyników doświadczeń otrzymano wnioszek:

$$(3.47) \quad 2a_1 < 2a_2 < 2a_3 \dots$$

W wymienionym artykule [17] nie udało się wskazać jednego parametru, którego powiększenie w programie obciążeń odpowiadałoby wzrostowi powierzchni plastyczności.



Rys. 19 Szerokość powierzchni plastyczności, którą wyznaczono dla:  $\epsilon_{pl} = 0,01\%$  oraz  $\epsilon_{pl} = 0,02\%$  w funkcji długości trajektorii: a/ wstępnego naprężenia b/ wstępnego odkształcenia  $\lambda_f$ .  $\circ$ ,  $\bullet$  punkty doświadczalne.



rozpatrzmy możliwość wykorzystania parametru  $\lambda_{\sigma}$  /równanie (3.43)/ do opisanego rozwoju powierzchni plastyczności. Oczywiście sprawą jest, że najmniejszy parametr  $\lambda_{\sigma}$  otrzymamy dla jednokrotnego rozciągania próbki w pierwszym programie obciążania. Największą wartość  $\lambda_{\sigma}$  osiąga w trzecim programie wahadłowego rozciągania i ściskania ze stałą wielkością końcowego naprężenia, ponieważ  $\tau_0$  ma stałą wielkość  $\tau_0 = \tau_{0max}$  w każdym cyklu obciążania. Rosnące stopniowo wielkości  $\tau_0$  od  $\tau_0 = 0$  do  $\tau_0 = \tau_{0max}$  występują w drugim programie, gdy zachowano stałą szerokość pętli deformacji. Zatem w drugim programie otrzymamy mniejszą wartość  $\lambda_{\sigma}$  niż w trzecim programie obciążania /pod warunkiem utrzymania równej ilości cykli obciążania w obu programach/. Z przeprowadzonej analizy wynika wniosek:

$$(3.48) \quad \lambda_{\sigma_1} < \lambda_{\sigma_2} < \lambda_{\sigma_3}.$$

Porównując nierówności (3.47) i (3.48) widzimy, że powiększenie się zaproponowanego parametru  $\lambda_{\sigma}$  odpowiada poszerzeniu powierzchni plastyczności przy cyklicznej deformacji materiału.

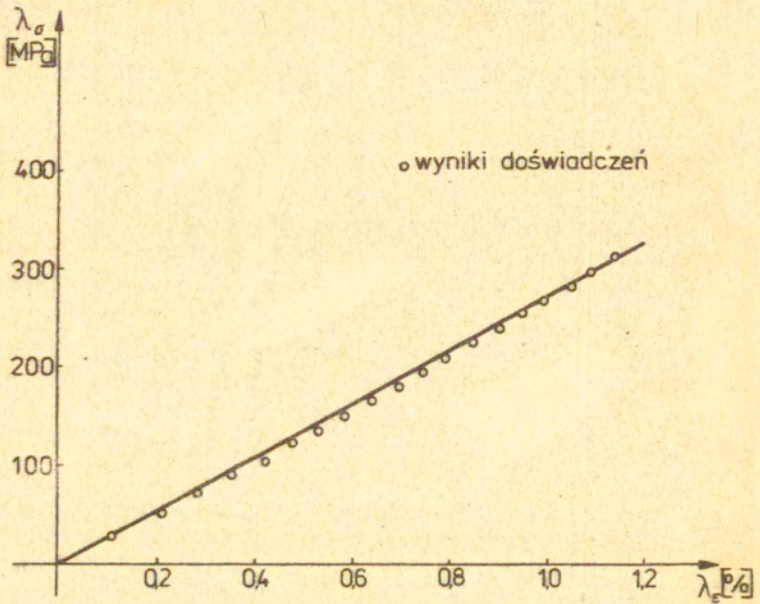
Na rys. 19a przedstawiono szerokości powierzchni plastyczności  $2a$  w funkcji parametru  $\lambda_{\sigma}$ , który obliczono korzystając z wyników doświadczeń opublikowanych w pracy [17]. Obliczone wielkości zaznaczono małymi kółkami na wykresie. Na wykresie podano szerokość powierzchni plastyczności  $2a$ , którą wyznaczono dla dwu dowolnych wielkości odkształceń trwałych  $\epsilon_{pl}$ . Wybrano granicę sprężystości określoną dla  $\epsilon_{pl} = 0,01\%$  oraz granicę plastyczności określoną dla  $\epsilon_{pl} = 0,2\%$ . Szerokość powierzchni plastyczności odpowiadającą tym odkształceniom trwałym oznaczono przez  $2a_{0,01}$  oraz  $2a_{0,2}$ . Z wykresu widać, że  $2a(\lambda_{\sigma})$  jest funkcją rosnącą.

Na rys. 19b pokazano szerokość powierzchni plastyczności "2a" w funkcji parametru  $\lambda_{\epsilon}$ , który jest związany z historią odkształcenia:

$$\lambda_{\epsilon} = \int (d\epsilon_z^p d\epsilon_z^r)^{1/2},$$

gdzie:  $d\epsilon_z^p$  - oznacza odkształcenie trwałe w kierunku osi podłużnej próbki rurkowej.

Układ punktów doświadczalnych wskazuje, że funkcja  $2a(\lambda_{\epsilon})$  nie jest funkcją rosnącą w całym zakresie  $\lambda_{\epsilon}$ .



Rys.20 Długość trajektorii naprężenia  $\lambda_\sigma$  w funkcji długość trajektorii odkształcenia  $\lambda_\epsilon$  przy cyklicznym obciążaniu wstępnie rozciągniętego stopu aluminium PA - 6T.



### 3.2.4.2. Pętla wykresu $\sigma(\varepsilon)$ przy nieproporcjonalnych drogach cyklicznego obciążania.

Wprowadzona reguła wzmocnienia oraz prawo pływnięcia pozwalają obliczyć odkształcenia w funkcji długości toru środka powierzchni plastyczności przy nieproporcjonalnych drogach naprężenia. Przy cyklicznym obciążaniu kolejno dwoma prostopadłymi naprężeniami otrzymano z doświadczeń ustabilizowany tor środka powierzchni plastyczności, któremu odpowiada ustabilizowana szerokość pętli  $\Delta l$  wykresu  $\sigma(\varepsilon)$ . Ten przykład wskazuje, że proponowane reguły wiążące prędkość odkształceń z prędkością środka powierzchni plastyczności odpowiadają jakościowej stronie zjawiska. W tej sytuacji sprawą drugorzędną jest wielkość współczynnika "c" /równanie (3.42) /, który decyduje o rozbieżności między proponowanym modelem materiału i wynikami doświadczeń. Na rys.20 pokazano wykres długości toru środka powierzchni plastyczności  $\lambda_\sigma$  w funkcji sumy odkształceń  $\lambda_\varepsilon$  /liczonej po odciążeniu/. Tak określone  $\lambda_\varepsilon$  równa się sumie szerokości pętli histerezy  $\Delta l$ . Wielkość  $\lambda_\varepsilon$  obliczono ze wzoru:

$$(3.49) \quad \lambda_\varepsilon = \int_0^\varepsilon (d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij})^{1/2} .$$

Wyniki doświadczeń służące do obliczenia wykresu  $\lambda_\sigma(\lambda_\varepsilon)$  zaczerpnięto z pracy [60], str.26, 82. Doświadczenia wykonano używając materiał o nieznannej historii naprężenia, dlatego przyjęto jako początek rozpatrywanego toru środka powierzchni plastyczności jego położenie w punkcie 1, który uzyskano po pierwszym cyklu obciążania.

Ponieważ obciążanie składa się z cykli proporcjonalnego naprężenia, współczynnik "c" /równanie (3.42) / możemy znaleźć rysując styczną do wykresu  $\lambda_\sigma(\lambda_\varepsilon)$ . Okazuje się, że w rozpatrywanym programie obciążania uzyskano praktycznie stałą wielkość współczynnika "c". Współczynnik "c" jest większy od modułu wzmocnienia krzywej  $\sigma(\varepsilon)$  materiału nieodkształconego. Z przeprowadzonej analizy wynika wniosek, że współczynnik "c" może zależeć od historii wstępnego odkształcenia do punktu, w którym następuje odchylenie od początkowego proporcjonalnego obciążania. Potrzebne byłoby wykonanie większej ilości doświadczeń na różnych materiałach celem dokładniejszego poznania opisanego zjawiska.

#### 4. Zakończenie

Pracę rozpoczęto od omówienia własności plastycznych metali przy złożonych stanach naprężenia i niektórych hipotez służących do opisu tych badań. Wybrano takie hipotezy, które pozwoliły w schematyczny sposób omówić skomplikowane zachowanie się metali przy deformacji plastycznej. Za pomocą znanych wyników doświadczeń pokazano, że hipotezę wzmocnienia należy wybierać w zależności od gatunku metalu, którego anizotropię plastyczną mamy zamiar opisywać.

Specjalną uwagę poświęcono równaniom warunku plastyczności, które były dorobkiem polskich autorów: Hubera, Olszaka i Urbanowskiego, Sawczuka, Mroza. Stwierdzono, że prace Hubera, Olszaka i Urbanowskiego stworzyły podstawy do otrzymania nowego równania powierzchni plastyczności i hipotezy umocnienia, które były celem drugiej części pracy.

Nowe równanie powierzchni plastyczności otrzymano z wyrażenia określającego przyrost pracy potrzebnej do zapoczątkowania płynięcia materiału. Do tego momentu cały przyrost pracy zużyty został na sprężystą deformację. W najprostszej postaci równanie powierzchni plastyczności jest niepełnym równaniem trzeciego stopnia, które opisuje uplastycznienie materiału odkształconego i niestarzonego.

Postulowano związek między pracą dysypowaną przy plastycznej deformacji i mocą potrzebną do sprężystej deformacji materiału. Z tego związku wyprowadzono prawo płynięcia materiału, które posłużyło do sformułowania parametru opisującego historię obciążania.

Wykorzystano znane wcześniej wyniki doświadczalnego badania plastyczności aby pokazać zjawiska, które są opisywane przez zaproponowane reguły. Opisano zjawisko stabilizacji pętli odkształcenia przy cyklicznym obciążaniu wzdłuż nieproporcjonalnych dróg naprężenia. Omówiono zależność wielkości powierzchni plastyczności od historii obciążania.

Równanie powierzchni plastyczności, prawo płynięcia i reguła wzmocnienia kinematycznego zawierają współczynniki materiałowe, które powinny być przestudiowane w oddzielnych eksperymentach dokładniej, niż uczyniono to w niniejszej pracy.

Przedstawione w rozdziale 3 omówienie wyników doświadczeń



potwierdziło skuteczność zaprezentowanego podejścia do opisu zachowania materiału przy plastycznej deformacji. Osiągnięte wyniki uzyskano przy bardzo prostym warunku, że powierzchnia plastyczności nie zmienia swoich wymiarów w trakcie procesu deformacji. W miarę potrzeby można badać inne warianty proponowanej hipotezy, aby uwzględnić zmianę wymiarów powierzchni plastyczności.

Literatura.

1. L.W.Hu, J.Markovitz, T.A.Bartush, Proc. SESA, 1, 23, 1966.
2. W.Olszak, W.Urbanowski, Arch.Mech.Stos., 8, 4, 1956, 671.
3. A.Sawczuk, Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Techn., 28, 11-12, 1980, 279.
4. J.Miastkowski, W.Szczepiński, Mech.Teor.Stos., 3, 2, 1965, 55.
5. J.Miastkowski, Mech.Teor.Stos., 4, 2, 1966, 5.
6. J.Miastkowski, Mech.Teor.Stos., 6, 1, 1968, 3.
7. J.Miastkowski, Arch.Mech.Stos., 3, 20, 1968, 261.
8. E.A.Davis, J.Appl.Mech., 10, A-187, Dec.1943, /cyt. za [9] /.
9. J.F.Bell, Encyklopedia of Physics, vol.VI a/1, ed. C.Truesdell, Springer-Verlag, N.York, 1973.
10. L.W.Hu, J.Mech.Phys.Solids, 4, 2, 1956, 96.
11. В.С.Ленский, Прикл.Мех., ОММК АН УССР, Т.V, В.3, 18.
12. F.R.Shanley, Strength of Materials, Mc Graw-Hill Book Comp., N.York, 1957.
13. R.W.Bailey, Paper presented at the World Power Conference, Tokyo, 1932, /cyt. za [12] /.
14. J.H.Palm, Appl.Sci.Research, A2, 1, 1949, 54, /cyt. za [12] /.
15. Badania podstawowych praw wzmocnienia, Prace wykonane w latach 1961-1970, Prace IPPT-PAN, 45/1971.
16. M.J.Michno Jr., W.N.Findley, Int.J.Non-Linear Mech., 11, 1976, 59.
17. M.Śliwowski, K.Turski, Mech.Teor.Stos., 12, 3, 1974, 389.
18. H.P.Shrivastava, Z.Mróz, R.N.Dubey, ZAMM, 53, 1973, 625.
19. Z.Mróz, Proc.Int.Symp. on Plasticity, Warsaw, 1972.
20. E.Shiratori, K.Ikegami, K.Kaneko, Bull. JSME, 16, 100, 1973.
21. E.Shiratori, K.Ikegami, K.Kaneko, Bull. JSME, 17, 113, 1974.
22. Н.М.Митрохин, Д.И.Ягн, ДАН, Т.135, 4, 1960, 796.
- 23a. E.Davis, J.Appl.Mech., 10, 4, A-147, 1943, /cyt. za [22] /.
- 23b. W.Osgood, D.Washington, J.Appl.Mech., 14, 2, A-147, 1947, /cyt. za [22] /.
24. W.Szczepiński, Arch.Mech.Stos., 15, 2, 1963, 275.
25. А.Д.Ишлинский, Укр.Мат.Жур., 6, 3, 1954.
26. W.Prager, Proc.Inst.Mech.Engrs., 169, 1955, 41.



27. Z. Króź, J. Mech. Phys. Solids, 15, 1967, 163.
28. H. Ziegler, Quart. Appl. Math., 17, 1, 1959, 55.
29. R. Hill, Plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.
30. M. Gotch, Int. J. Mech. Sci., 19, 1977, 505.
31. R. M. W. Frederking, O. M. Sidebottom, J. Appl. Mech., 38, 1, 1971, 15.
32. J. Miastkowski, Prace IPPT-PAN, 41, Warszawa, 1973.
33. J. F. Bell, Arch. Rat. Mech. Anal., 75, 2, 1981, 103.
34. А. А. Илюшин, Пластичность, Изд. АН СССР, Москва 1963.
35. V. S. Lensky, Proc. of the Second Symposium on Naval Structural Mech., Brown University 1960, 259.
36. H. Moon, Acta Mech., 24, 3-4, 1976, 191.
37. L. Dietrich, J. Miastkowski, W. Szczepiński, Nośność graniczna elementów konstrukcji, PWN, Warszawa, 1970.
38. W. A. Backofen, Deformation Processing, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Massachusetts, 1972.
39. Г. А. Дошинский, В. И. Максак, Мех. Тв. Тела, 5, 1966, II 8.
40. T. Ota, A. Shindo, H. Fukuoka, Proc. of the 9-th Japan Nat. Congr. for Appl. Mech., 1959.
41. L. Bourne, R. Hill, Phil. Mag., 41, 1950, 671, / cyt. za [30] /.
42. Z. Witzczak, Praca doktorska, Polit. Warsz., Wyd. Mech. Pre-czyzyjnej, Warszawa, 1976.
43. W. Olszak, W. Urbanowski, Arch. Mech. Stos., T. 8, 4, 1956.
44. В. Л. Данилов, Мех. Тв. Тела, 6, 1971, I 46.
45. G. Backhaus, Z. Angew. Math. Mech., Bd. 48, H. 2, 1968.
46. J. Litoński, Praca doktorska, IPPT-PAN, Warszawa, 1971.
47. K. Turski, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn., 20, 10, 1972, 425.
48. K. Turski, Proc. Symp. Franco-Polonais: Problèmes de Rheologie et de Mécanique des Sols, Nice, 1974.
49. Y. Ohashi, Y. Kurita, T. Suzuki, M. Tokuda, J. Mech. Phys. Solids, 29, 1981, 51.
50. В. С. Ленский, Изв. АН СССР, ОТН, II, 1958, I 5.
51. В. Н. Jones, Exp. Mech., 1, 8, 1968, 10.
52. И. М. Коровин, Мех. Тв. Тела, 3, 1969, I 52.

53. M.R.Shammy, O.M.Sidebottom, *Exp. Mech.*, 7, 12, 1967, 497.
54. W.M.Mair, H.Ll.D.Fugh, *J.Mech.Eng.Sci.*, 6, 2, 1954, 150.
55. Г.Б.Талыпов, *Исслед. Упруг.Пласт.*, Изд.ЛГУ, 1968, 58.
56. A.Phillips, Juh-Ling Tang, *Int.Jour. of Solids and Struct.*, 8, 4, 1972.
57. K.Kaneko, K.Ikegami, E.Shiratori, *Bull. JSME*, 19, 132, 1976, 577.
58. A.Bařtow, A.Sawczuk, *Acta Mech.*, 2, 1, 1965, 81.
59. K.Kaneko, *Bull. JSME*, 24, 187, 1981, 9.
60. M.Śliwowski, *Praca doktorska, IPPT-PAN, Warszawa*, 1977.
61. R.Marjanović, W.Szczepiński, *Arch.Mech.Stos.*, 26, 3, 1974.
62. T.H.Lin, M.Ito, *J.Mech.Phys.Solids*, 13, 2, 1965, 103.
63. D.R.Jenkins, *J.Appl.Mech.*, 32, 4, 1965, 849.
64. M.Życzkowski, T.Kurtyka, 18-ta Polska Konferencja Mechaniki Ciała Stałego, Wisła-Jawornik, 7-14 września 1976.
65. Г.А.Дощинский, В.И.Максак, *Мех.Тв.Тела*, 3, 1966, 153.
66. J.F.Williams, N.S.Svensson, *J.Strain Anal.*, 5, 2, 1970, 128.
67. J.F.Williams, N.S.Svensson, *J.Strain Anal.*, 6, 4, 1971, 263.
68. J.F.Williams, *Thesis presented to the University of Melbourne for the degree of Ph.D. 1969, /cyt. za [66] /.*
- 69a. K.Ikegami, *J.Soc.Mat.Sci.*, 24, 261, 1975, 491, /po japońsku/.
- 69b. K.Ikegami, *J.Soc.Mat.Sci.*, 24, 263, 1975, 709, /po japońsku/.
70. K.Ikegami, *Proc. Euromech Colloquium 115, June 19-22, 1979.*
71. T.H.Lin, M.Ito, *J.Engng.Sci.*, 4, 5, 1966, 543.
72. Yu Mao-Hong, *Int.J.Mech.Sci.*, 25, 1, 1983, 71.
73. R.M. Haythornthwaite, *Trans. ASCE* 127, 1962, 1252.
74. H.J.Ivey, *J.Mech.Engng.Sci.*, 3, 1, 1961, 15.



## Spis treści

1. Wstęp
2. Badania plastyczności metali w złożonym stanie naprężenia.
  - 2.1. Własności plastyczne metali w złożonym stanie naprężenia.
  - 2.2. Modele geometryczne plastycznego płynięcia metali.
    - 2.2.1. Hipotezy wzmocnienia kinematycznego.
    - 2.2.2. Hipotezy wzmocnienia dla materiału bez efektu Bauschingera.
    - 2.2.3. Teoria plastyczności Iliuszyna.
    - 2.2.4. Weryfikacja doświadczalna teorii deformacyjnej i teorii plastycznego płynięcia.
    - 2.2.5. Wpływ gatunku metalu na teoretyczny opis jego anizotropii plastycznej.
  - 2.3. Badania warunku plastyczności metali.
  - 2.4. Równania powierzchni plastyczności.
    - 2.4.1. Hill.
    - 2.4.2. Shrivastava, Mróz, Dubey.
    - 2.4.3. Bałtow, Sawczak.
    - 2.4.4. Kaneko, Ikegami, Shiratori.
    - 2.4.5. Williams.
    - 2.4.6. Życzkowski, Kurtyka.
    - 2.4.7. Lin, Ito.
    - 2.4.8. Olszak, Urbanowski.
3. Nowe propozycje opisu wybranych plastycznych własności metali.
  - 3.1. Warunek plastyczności.
    - 3.1.1. Podstawowe równanie.
    - 3.1.2. Warunek plastyczności przy proporcjonalnym obciążaniu.
    - 3.1.3. Warunek plastyczności przy złożonych drogach naprężania.
  - 3.2. Plastyczne płynięcie materiału anizotropowego ze wzmocnieniem.
    - 3.2.1. Określenie granicy plastyczności.
    - 3.2.2. Prawo płynięcia
    - 3.2.3. Reguła wzmocnienia kinematycznego.
    - 3.2.4. Wyniki doświadczeń
      - 3.2.4.1. Powiększenie się powierzchni plastyczności przy cyklicznej deformacji.
      - 3.2.4.2. Pętla wykresu  $\sigma(\epsilon)$  przy nieproporcjonalnych drogach cyklicznego obciążenia.

4. Zakończenie.

Literatura.