KARCZEW-
SKI

POCZĄTKI
GEOMETRYI

II

# POCZĄTKI
# GEOMETRYI

w

ośmiu Księgach na dwie

części podzielonych.

zebrane przez

*Wincentego Karczewskiego*,

Nauczyciela Matematyki w Szkole Woiewódzkiey, Woiewództwa Krakowskiego; byłego Zastępcę Professora Astronomii w Imperatorskim Wileńskim Uniwersytecie, Pomocnika w Obserwatorium Astronomiczném tegoż Uniwersytetu.

II

## CZĘŚĆ DRUGA

w KIELCACH
w Drukarni Jana Nep. Wodziczki.
1823. Roku.

W tém pierwszém wydaniu, ograniczyłem się początkami nayprostszemi, a razem naypotrzebnieyszemi; zawilsze lub mniey do Geometryi Elementarney należące, zachowałem do następnego, ieżeli obecne, będąc łaskawie od Czytelników lubiących oyczysty ięzyk i Naukę przyięte, zasłuży na ich uwagi, które z naywiększą wdzięcznością przyiąwszy, korzystać niezaniedbam.

Kielce dnia 31. Lipca 1823. roku.

*Wincenty Karczewski.*

# LISTA
## *Prenumeratorów.*

X. Bielski Professor z Zliborza.
Chodylski Onufry ex. 25.
Chwalibóg Jan z Opatowca.
Ciastowski.
Giersz Wilchelm Radca Budowniczy Woiewodztwa Krakowskiego.
Grubecki Sebastyan.
Jerowski.
Kotowicz Woyciech.
Krassowski Kazimierz z Bolechowca.
Kulczycki Michał U. S. Woie. w Kielcach.
Krauss Antoni U. S. Woie. w Kielcach.
Kański Franciszek.
Katarzyński Józef.
Kawecki Walenty U. S. Woie. w Kielcach.
Klimkiewicz Mateusz.
Leskiewicz Jgnacy.
X. Malinowski Antoni U. U. War.
Malinowski Marceli U. S. w Kielcach.
Machczyński Jgnacy.
Noiński Jan.
Niewiarowski Antoni W. G.
Oraczewski Augustyn.
X. Prusiński.
Patrzobowski Franciszek.
Rożycki Samuel.
Radzieiowski Teodor.

Schwartz Kupiec Obywatel Miasta Kielc.
Slubowski Antoni.
Solecki Antoni.
Wielogłowski Kasper.
Waygert Wilchelm R. D.
Zarski Woyciech Assesor Dyr. Gór.
Zamoyski Michał.
Zieliński M.
Zaiączkowski Wincenty.

# REJESTR RZECZY

*w Części Drugiey zawartych.*

## KSIĘGA PIĄTA.

## K S I Ę G A VI.

## KSIĘGA VII.

# POCZĄTKI GEOMETRYI.

## CZĘŚĆ DRUGA

Obeymuiąca figury trzy rozmiary maiące, to iest: długość, szerokość, i wysokość.

## KSIĘGA PIĄTA.

O płaszczyznach i kątach bryłowych.

### *Opisania.*

1. Linija prosta iest *prostopadłą do płaszczyzny*, *płaszczyzna do linij*, ieżeli ta ostatnia iest prostopadłą do wszystkich linij krzyżuiących się na płaszczyznie w iey *spodku*. Spodkiem prostopadłey nazywać bę- /a /. wątpliw

A dzie-

dziemy punkt, w którym dotyka się pła-
szczyzny.

II. Linija iest *równoległą do płaszczyzny*, *płaszczyzna do linij*, *i dwie płaszczyzny* między sobą, skoro przedłużone iak naydaley w iakimkolwiek kierunku, nieprzecinaią się.

III. Jeżeli dwie płaszczyzny przecinaią się, wspólném ich przecięciem iest linija prosta; ilość zaś większa lub mnieysza o którą są od siebie oddalone nazywa się *pochyłością*, która mierzy się kątem powstaiącym z przecięcia się dwóch prostopadłych prowadzonych na każdey z tych płaszczyzn, do tego samego punktu wspólnego przecięciasię. Kąt ten może bydź ostry, rozwarty, lub prosty, w tym ostatnim przypadku płaszczyzny są do siebie *prostopadłemi*.

IV. Przestrzeń kątowa obięta między kilku płaszczyznami zbiegaiącemi się w iednym punkcie, nazywa się *kątem bryłowym*. Do złożenia kąta bryłowego potrzeba naymniey trzech płaszczyzn.

## ZADANIE PIERWSZE.

*Twierdzenie.*

*Linija prosta niemoże leżeć w części na płaszczyznie, w części zewnątrz płaszczyzny.*

Ponieważ płaszczyzna iest powierzchnią, na którey biorąc od upodobania ~~w iakiemkolwiek mieyscu~~ dwa punkta, i łącząc ie liniją prostą, ta całkiem leży na płaszczyznie.

ZA-

## ZADANIE II.

### *Twierdzenie.*

*Przecinaiące się dwie linije proste, leżą na iedney płaszczyznie, i oznaczaią iey położenie.* (fig. 181).

[Wystawiwszy płaszczyznę obracaiącą się około linij AB, ta w obrocie swoim trafiwszy na punkt C, linija AC leżeć będzie na iedney płaszczyznie z liniją AB, maiąc na niey dwa swoie punkta A, C,] a położenie tey płaszczyzny iuż iest oznaczoném przez to tylko, że obeymuie przecinaiące się dwie linije proste AB, AC.

*Wniosek.* Więc tróykąt ABC, trzy punkta A, B, C, nie będące w linij prostey, i dwie równoległe AB, CD (fig. 182), oznaczaią położenie płaszczyzny; ponieważ poprowadziwszy sieczną EF, płaszczyzna przechodząca przez dwie linije proste AE, EF, przechodzić także będzie przez dwie równoległe AB, CD.

## ZADANIE III.

### *Twierdzenie.*

*Wspólném przecięciem się dwóch płaszczyzn iest linija prosta.*

Gdyby trzy punkta wspólne dwóm płaszczyznom nie były w linij prostey, [naówczas każda z dwóch płaszczyzn przechodząc przez te punkta złożyłyby iednę i tę samę płaszczyznę (Zad. II), co iest przeciwko założeniu.

## ZADANIE IV.

### *Twierdzenie.*

*Jeżeli linija prosta iest prostopadłą do dwóch drugich krzyżuiących się w iey spodku, będzie prostopadłą do ~~iakieykolwiek~~ inney linij prostey przechodzącey przez iey spodek, i prostopadłą do płaszczyzny.* (fig. 183).

Niech będzie linija AP prostopadła do PB, PC; powiadam, że będzie prostopadłą do PQ, przechodzącey przez spodek P, i do płaszczyzny MN.

W kącie BPC, przez punkt Q, wzięty od upodobania na linij PQ, poprowadziwszy liniją prostą BC, tak, ażeby $BQ = QC$ (Zagad. V. K. III.), złączmy AB, AQ, AC. W tróykątach BPC, BAC (Zad. XIV. K. III). mamy

$$\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PQ}^2 + 2\overline{QC}^2$$
$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AQ}^2 + 2\overline{QC}^2;$$

odeymuiąc pierwsze równanie od drugiego, i uważaiąc że tróykąty APC, APB prostokątne przy P, daią

$$\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2$$
$$\overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2,$$ będziemy mieli
$$\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\overline{AQ}^2 - 2\overline{PQ}^2.$$

Biorąc z obu stron połowę mamy

$$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2, \text{ albo}$$
$$\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2$$

Więc tróykąt APQ będąc prostokątnym przy P (Zad. XI. K. III.), linija AP, iest prostopadłą do PQ.

*Uwaga.* Więc aby linija prosta była prostopadłą do płaszczyzny, zaś płaszczyzna do linij, dosyć iest by ta ostatnia była prostopadłą do dwóch tylko linij prostych krzyżuiących się na płaszczyznie w iey spodku (Opis. I).

*Wniosek I.* Prostopadła AP, będąc krótszą od pochyłey AQ, mierzy prawdziwą odległość punktu A, od płaszczyzny MN.

*Wniosek II.* Z punktu danego P na płaszczyznie, iednę tylko prostopadłę wyprowadzić można; bo gdybyśmy z tego punktu wyprowadzili dwie prostopadłe, w kierunku ich przepuściwszy płaszczyznę nieograniczoną, przecięcie się téy płaszczyzny z płaszczyzną MN, będzie linija prosta PQ, więc z punktu danego P, na linij prostey PQ możnaby było wyprowadzić dwie prostopadłe, do tey samey płaszczyzny co iest rzeczą niepodobną (Zad. I. K. I. Wnios). Równie iest rzeczą niepodobną z punktu danego zewnątrz płaszczyzny spuścić dwie prostopadłe na tę płaszczyznę; ponieważ gdyby AP, AQ były temi dwiema prostopadłemi, naówczas tróykąt APQ, miałby dwa kąty APQ, AQP, proste, co bydź niemoże (Zad. XXVII. K. I. Wnios. III).

ZADA-

## ZADANIE V.

### *Twierdzenie.*

*Linije pochyłe w rówuey odległości od prostopadłey są równe, zaś z dwóch pochyłych nierównych, ta iest dłuższa, która bardziey od prostopadłey oddala się.* (fig. 184).

Ponieważ kąty APB, APC, APD są ~~kątami prostemi~~, wziąwszy odległości PB, PC, PD równe między sobą, tròykąty APB, APC, APD, maiące kąt równy obięty bokami ró-wnemi (Zad. VI. K. I.) są równe; więc przeciw-prostokątne, albo pochyłe AB, AC, AD, są między sobą równe.

Jeżeli odległość PE > PD, albo PB, widoczną iest rzeczą, że linija pochyła AE > AB, albo AD.

*Wniosek.* Wszystkie linije pochyłe AB, AC, AD, i t. d. sobie równe, dotykaią się obwodu koła BCD, opisanego ze spodka prostopadłey P, iako srzodka; więc maiąc dany punkt A, zewnątrz płaszczyzny, chcąc na tey ostatniey znaleść spodek P, prostopadłey spuszczoney z punktu danego A; oznaczywszy na tey płaszczyznie trzy punkta B, C, D, równie oddalone od punktu A, szukaymy srzodka ~~obwodu~~ koła przez nie przechodzącego, srzodek ten będzie spodkiem szukanym.

*Uwaga.* Kąt ABP, nazywa się *nachyleniem* linij pochyłey AB do płaszczyzny MN, widziemy że to nachylenie iest równe we wszy-

stkich

stkich linijach pochyłych AB, AC, AD, it. d. równie oddalonych od prostopadłey; ponieważ wszystkie tróykąty ABP, ACP, ADP it. d. są równe między sobą.

## ZADANIE VI.

### *Twierdzenie.*

*Spuściwszy prostopadłą na płaszczyznę, i obrawszy liniją prostą na tey płaszczyznie; ieżeli ze spodka prostopadłey poprowadzimy prostopadłą do tey linij, i złączymy iey ~~ostateczny~~ koniec z ~~ostatecznym~~ końcem pierwszey prostopadłey, linija łącząca ~~ostateczne~~ końce tych prostopadłych będzie prostopadłą do linij ~~leżącey~~ na płaszczyznie.* (fig. 185).

Niech będzie AP prostopadła do płaszczyzny MN, i linija BC położona na tey płaszczyznie; ieżeli ze spodka prostopadłey P, poprowadzimy prostopadłą do BC, i złączymy AD, powiadam, że AD będzie prostopadłą do BC. Weźmy BD=DC, i złączmy PB, PC, AB, AC: ponieważ DB=DC, pochyła PB=PC; co zaś do prostopadłey AP, ponieważ PB=PC, pochyła AB=AC (Zadanie V.); więc linija AD maiąc dwa ostateczne swoie punkta A, i D, w równey odległości od ostatecznych końców linij prostey B, i C, iest prostopadłą do srzodka linij BC.

*Wniosek.* Widzimy razem że BC iest prostopadłą do płaszczyzny ADP, ponieważ

BC

B C, iest prostopadłą razem do dwoch linij prostych A D, P D.

*Uwaga.* Dwie linije A F, B C nie leżąc na tey samey płaszczyznie nigdy się nieprzetną. Naykrótsza odległość tych linij iest linija prosta P D, która iest prostopadłą razem do linij A P, i do B C. Odległość P D, iest naykrótsza między temi dwiema linijami; ponieważ ieżeli złączymy dwa drugie punkta iakiemi są A i B, będziemy mieli A B > A D, A D > P D, azatém A B > P D.

## ZADANIE VII.

*Twierdzenie.*

*Jeżeli linija prosta, iest prostopadłą do płaszczyzny, wszystkie linije do niey równoległe, będą także prostopadłemi do tey samey płaszczyzny.* (fig. 186).

Niech będzie linija prosta A P, prostopadła do płaszczyzny M N, powiadam, że linija E D, równoległa do A F, będzie także prostopadła do płaszczyzny M N. W kierunku równoległych A P, E D, poprowadźmy płaszczyznę którey przecięcie się z płaszczyzną M N, będzie P D; na płaszczyznie M N, wykreślmy liniją B C, prostopadłą do P D, i złączmy A D. Podług wniosku zadania poprzedzaiącego, B C iest prostopadłą do płaszczyzny A P D E; więc kąt B D E iest prosty: kąt E D P iest także prosty, ponieważ A P iest prostopadłą

tgcumy A D, zamiast: i poprowadźmy l. prostą A D, albo: punkta A, D, złączmy l. prostą: wyrażenie to będące przełożonem z sposobu mow. franc. joignez A D, wyprowadza krotkość, ale nie iest dość jasne. sto... mówię: o wyrazie ... prostopadłe do A D, zamiast: prostopadłe do linii ...

[Gallicyzm: potrzeba było napisać: poprowadź l. równoległą do AP, a do prostopadłą do płaszcz. MN, wyprowadziwszy ją ze z punktu itd.

stopadłą do PD, zaś DE równoległa do AP; więc linija DE będąc prostopadłą do dwóch linij prostych DP, DB, iest prostopadłą do płaszczyzny MN (Zad. IV).

*Wniosek. I.* Naodwrót, ieżeli linije AP, ED, są prostopadłemi do płaszczyzny MN, będą równoległemi; ponieważ gdyby niemi niebyły, wyprowadziwszy z punktu D, równoległą do AP, ta będąc prostopadła do płaszczyzny MN, z punktu D, możnaby ~~było~~ wyprowadzić dwie prostopadłe do tey samey płaszczyzny, co bydź niemoże (Zad. IV).

[Gallicyzm, lepiey by to powiedzieć: bo gdyby ~~nie były równoległe~~ niebyły równoległe albo: bo gdyby l. DE nie była równoległa do AB.

*Wniosek. II.* Jeżeli z trzech linij nie leżących na iedney płaszczyznie, dwie są równoległe do trzeciéy, są równoległe między sobą; ~~wystawiwszy~~ płaszczyznę prostopadłą do linij trzeciey, dwie pierwsze do niey równoległe, będąc prostopadłemi do tey samey płaszczyzny, podług wniosku poprzedzaiącego, będą między sobą równoległemi.

[bo cóż w przeciwnym razie / nie uważa do czego?

NB. ~~[illegible]~~ ten wniosek u Legendra w całości, bo nie ma figury wytłumaczenia

ZADANIE VIII.

*Twierdzenie.*

*Jeżeli iedna linija prosta, iest równoległą do drugiey wykreślonej na płaszczyznie, będzie także równoległą do tey płaszczyzny.* (fig. 187).

Jeżeli linija prosta AB, iest równoległą do CD, wykreśloney na płaszczyznie MN, powiadam, że będzie do tey płaszczyzny ró-

wno-

wnoległą. Przepuściwszy przez linije AB i CD płaszczyznę, gdyby linija AB, leżąca na płaszczyznie ABCD, przecięła się z płaszczyzną MN, przecięłaby się koniecznie w którym kolwiek punkcie linij CD, która iest wspólném przecięciem się tych dwóch płaszczyzn; linija zaś AB, przeciąć linij CD niemoże, ponieważ do niey iest równoległą; więc też nieprzetnie i płaszczyzny MN; azatém do niey iest równoległą (Opis. II).

## ZADANIE IX.

### *Twierdzenie.*

*Dwie płaszczyzny prostopadłe do tey samey linij prostey są równoległe między sobą.* (fig. 188).

Niech będą dwie płaszczyzny MN, PQ, prostopadłe do tey samey linij prostey AB, powiądam, że będą między sobą równoległe.

Ponieważ gdyby te płaszczyzny przecięły się z któreykolwiek strony, obrawszy punkt O, na linij wspólnego ich przecięcia się, złączmy OA, OB; linija AB prostopadła do płaszczyzny MN, iest prostopadłą do linij OA, prowadzoney przez iey spodek na tey płaszczyznie; dla tey samey przyczyny AB, iest prostopadłą do BO; więc OA, OB, byłyby dwiema prostopadłemi spuszczonemi z iednego punktu O, na tę samę liniją prostą, co iest rzeczą niepodobną (Zad. XV. K. I). Więc płaszczyzny MN, PQ, są równoległemi.

## ZADANIE X.

### *Twierdzenie.*

*Przecięcia dwóch płaszczyzn równoległych, przez płaszczyznę trzecią, są równoległemi* (fig. 189).

Niech będą przecięcia EF, GH, dwóch płaszczyzn MN, PQ, od trzeciey płaszczyzny EFHG, powiadam, że te przecięcia będą równoległemi. Ponieważ gdyby linije EF, GH, będące na płaszczyznie EFHG, niebyły równoległemi, przedłużone przecięłybysię; azatém przecięłybysię i płaszczyzny MN, PQ, na których leżą, co bydź niemoże gdyż z założenia te dwie płaszczyzny są równoległemi.

## ZADANIE XI.

### *Twierdzenie.*

*Linija prostopadła do iedney płaszczyzny, iest prostopadłą do płaszczyzny drugiey do pierwszey równoległey* (fig. 188).

Niech będzie linija prosta AB, prostopadła do płaszczyzny MN, powiadam, że iest prostopadłą do płaszczyzny PQ, równoległey do MN.

Poprowadziwszy od upodobania na płaszczyznie PQ, liniją BC, przez AB i BC, przepuściwszy płaszczyznę ABC, przecięcie iey z płaszczyzną MN, to iest AD, iest równoległém do BC (Zad. X.); lecz z założenia lini-

przecięcie jej z płaszczyzną MN, lin. prosta AD, jest równoległa do BC

113. Albo P. K. dowodzenia tego nie rozumiał albo też wyrażenia francuzkie dosłownie tłomaczył dosłownie ~~bez~~ żadney uwagi. Legendre wyraża się w tem miejscu tak:



linija AB, będąc prostopadłą do płaszczyzny MN, iest prostopadłą do linij AD; więc iest także prostopadłą do równoległey BC (Zad. XXIII. K. I. Wnios. I.); 113 a ponieważ linija AB iest prostopadłą do całey linij BC, przechodzącey przez iey spodek na płaszczyznie PQ, więc iest prostopadłą do płaszczyzny PQ.

et puisque la ligne AB est perpendiculaire à ~~toute la ligne~~ BC menée par son pied dans le plan 62, il s'ensuit qu'elle est perpendi-

## ZADANIE XII.

*Twierdzenie.*

*Linije równoległe obięte dwiema płaszczyznami równoległemi są równe.* (fig. 189).

Przez linije równoległe EG i FH, przepuściwszy płaszczyznę EGHF, przecinaiącą płaszczyzny równoległe MN, PQ, w kierunku EF i GH, przecięcia EF, GH są równoległe (Zad. X.); gdy z założenia EG, FH są także równoległe, więc figura EGHF będąc równoległobokiem, EG=FH (Zadanie XXIX. K. I).

gallicyzm

*Wniosek. Dwie płaszczyzny równoległe we wszystkich punktach są w równey od siebie odległości;* ~~ponieważ~~ ieżeli EG i FH, są prostopadłe do dwóch płaszczyzn MN, PQ, będą równoległe, azatém równe (Zad. VII).

kum. bo

## ZADANIE XIII.

*Twierdzenie.*

*Jeżeli dwa kąty nie leżące na tey samey płaszczyznie*

culaire au plan 62. — wyraz toute znaczy tu ~~tu tem~~ ~~[illegible]~~ mająca każda nie zaś cała — błąd, któregoby uczącemu się trudno wymożna

[illegible] polszczyzny właściwym —
[illegible] Pulcwiniu !



*płaszczyznie maią ramiona równoległe i w tym samym kierunku, kąty będą równe, a ich płaszczyzny równoległe.* (fig. 190).

Niech będą dwa kąty CAF, DBE nie będące na tey samey płaszczyznie, których ramiona AC, BD, AF, BE, są równoległe i w tym samym zwrócone kierunku, powiadam, że te kąty będą równe, a ich płaszczyzny równoległe.

Wziąwszy AC=BD, AF=BE, złączmy CF, DE, AB, CD, FE. Ponieważ linija AC, iest równa i równoległa do BD, figura ABDC będąc równoległobokiem (Zad. XXXI. K. I.), linija CD, iest równa i równoległa do AB. Dla tey samey przyczyny linija FE, iest równa i równoległa do AB; więc także CD, iest równa i równoległa do FE; azatém figura CFED będąc równoległobokiem, bok CF, iest równy i równoległy do DE; w tróykątach zatém równo-bocznych CAF, DBE, kąt CAF=DBE.

Nakoniec powiadam, że płaszczyzna ACF, iest równoległą do płaszczyzny BDE; przypuśćmy że płaszczyzna równoległa do BDE przechodząca przez punkt A, przetnie linije CD, FE, w innych iakich punktach aniżeli C i F, naprzykład w punktach G i H; naówczas podług Zadania XII., trzy linije AB, GD, EH, będą równe: lecz trzy linije AB, CD, FE, iuż są równe; więc mielibyśmy CD=GD, EH=EF, co bydź niemoże; azatém

[nie mi[illegible] równa do BD: potrzeba było powrócić [illegible] linie AC, BD są równe i równoległe

[galli-cyzm

[illegible] tego [illegible] Δ CAF [illegible] = [illegible] Δ DBE, ale [illegible] niejest równoboczny.

[sposób mówienia niekoniecznie dobry — gallicyzm [illegible] [illegible] stąd pochodzą [illegible] [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] [illegible]

[ - powinno być Jeżeli dwie płaszczyzny — cięte MN, PQ są przecięte itd. —



zatém płaszczyzna ACF iest równoległą do płaszczyzny BDE.

*Wniosek.* [Dwie płaszczyzny równoległe MN, PQ przecięte od dwóch drugich płaszczyzn CABD, FABE, kąty CAF, DBE, powstaiące z przecięć tych płaszczyzn równoległych są równe; ~~ponieważ~~ [ przecięcie AC, iest równoległe do BD (ZAD. X.); AF do BE, więc kąt CAF = DBE.

[Gdyż

## ZADANIE XIV.

### *Twierdzenie.*

*Jeżeli trzy linije proste nie leżące na tey samey płaszczyznie są równe i równoległe, tróykąty z obu stron powstaiące z połączenia* [~~*ostatecznych*~~ *końców tych linij prostych linijami prostemi, będą równe, a ich płaszczyzny równoległe.* (fig. 190).

Jeżeli trzy linije proste AB, CD, FE, nieleżące na tey samey płaszczyznie są równe i równoległe, powiadam, że tróykąty ACF, BDE powstaiące z połączenia [~~ostatecznych~~ końców są równe, a ich płaszczyzny równoległe. [~~Gdy~~ linija AB, iest równą i równoległą do CD, figura ABDC iest równo-ległobokiem (Zad. XXXI. K. I), więc bok AC iest równy i równoległy do BD. Dla podobney przyczyny boki AF, BE, są równe i równoległe i boki CF, DE, [ więc dwa tróykąty ACF, BDE są równe (Zad. XI. K. I.); do-wie-

[Ponieważ

[Trzeba było dodać są bowiem równe i równoległe.

wiedziemy następnie podobnie iak w Zadaniu poprzedzaiącém, że ich płaszczyzny są równoległe.

## ZADANIE XV.

### *Twierdzenie.*

*Dwie linije proste obięte między trzema płaszczyznami równoległemi są pocięte na części proporcyonalne.* (fig. 191).

Przypuśćmy że linija AB przecina płaszczyzny równoległe MN, PQ, RS, w punktach A, E, B; zaś linija CD przecina też same płaszczyzny w punktach C, F, D; powiadam że będziemy mieli

AE : EB :: CF : FD.

Poprowadźmy liniją prostą AD przecinaiącą płaszczyznę PQ w punkcie G, i złączmy AC, EG, GF, BD; przecięcia EG, BD, płaszczyzn równoległych PQ, RS, przez płaszczyznę ABD są równoległe (Zad. X). więc (Zad. XV. K. IV).

AE : EB :: AG : GD;

Podobnie przecięcia AC, GF/ będąc równoległemi mamy / galliż

AG : GD :: CF : FD,

Więc z przyczyny stosunku wspólnego AG : GD będziemy mieli

AE : EB :: CF : FD.

ZADA-

Czyż dwie l. proste mogą się w dwóch lub więcey punktach przecinać?



## ZADANIE XVI.

*Twierdzenie.*

*W czworoboku iakimkolwiek, którego boki leżą lub nieleżą na iedney płaszczyznie; ieżeli podzielimy boki pzeciwległe na części proporcyonalne, i przez punkta podziału poprowadzimy linije proste, te przetną się w iednym punkcie, w stosunku, w iakim są odpowiadaiące przeciwległe boki czworoboku* (fig. 192).

W czworoboku iakimkolwiek ABDC, poprowadziwszy przez punkt A równoległą do BD, zaś przez punkt B, równoległą do AC; płaszczyzna MN będzie równoległą do RS (Zad. XIII.); równolegle do płaszczyn MN, RS, poprowadziwszy trzecią płaszczyznę PQ, linije proste AB, CD, przez te trzy płaszczyzny będą pocięte na części proporcyonalne (Zad. XV).

AE : EB :: CF : FD,

z założenia boki AC, BD są pocięte liniją GH w punktach G i H, tak że mamy

AG : GC :: BH : HD;

powiadam 1*mo*, że linija prosta GH przetnie liniją prostą EF w iednym punkcie O.

Przez punkt F, poprowadźmy liniją prostą IK równoległą do AB, przecinaiącą płaszczyzny MN, i RS w punktach I, K, złączmy CI, KD, AI, BK; linije proste AI, BK, EF wypadaiące z przecięcia się pła-

płaszczyzny ABKI, z trzema płaszczyznami równoległemi MN, PQ, RS, są równoległe; dowiedziemy podobnie że CI, iest równoległą do KD. Poprowadziwszy linije proste GU, HT, równoległe do AI i BK, te będą także równoległemi do EF. To założywszy mamy AG : GC :: IU : UC

BH : HD :: KT : DT,

gdy pierwsze dwa stosunki z przypuszczenia są równe, drugie dwa złożą proporcyą następuiącą: IU : UC :: KT : DT.

Azatém skoro równoległe CI, KD, są pocięte proporcyonalnie w punktach U i T, trzy punkta U, F, T, powinny bydź w linij prostey (Uwaga Zad. XXII. K. III.), tak, że łącząc U, T, liniją prostą UT, ta przeydzie przez punkt F, linij prostey EF. Z tąd wypada że płaszczyzna przechodząca przez UT i EF, obeymować będzie dwie linije proste UG i TH, równoległe do EF, więc przechodząc przez liniją GH, ta przetnie liniją EF w punkcie O, płaszczyzny PQ.

2*do*. Linije proste GH i AB, pocięte na części proporcyonalne przez trzy płaszczyzny MN, PQ, RS, daią proporcyą

AE : EB :: GO : OH,

mamy także

AI : GU :: AC : GC,

zaś AI = EF, GU = OF, iako równoległe obięte między równoległemi, więc

EF : OF :: AC : GC,

 aza-

azatém EE — OF : OF :: AC — GC : GC
czyli EO : OF :: AG : GC

## ZADANIE XVII.

### *Twierdzenie.*

*Pochyłość dwóch płaszczyzn, mierzy się kątem powstaiącym z przecięcia się dwóch prostopadłych, prowadzonych na każdey z tych płaszczyzn do tego samego punktu ich wspólnego przecięcia się.* (fig. 193).

To iest: miarą pochyłości dwóch płaszczyzn MAN, MAP, iest kąt NAP, powstaiący z dwóch prostopadłych NA, PA, prowadzonych na każdey z tych płaszczyzn do wspólnego przecięcia się AM; obrawszy inny punkt M, i poprowadziwszy prostopadłe CM na płaszczyznie MN, i BM na płaszczyznie MP, do wspólnego przecięcia się AM, kąt BMC, będzie także miarą tey samey pochyłości; ponieważ MB i AP, będąc prostopadłemi do tey samey linij AM, są równoległemi. Dla tey samey przyczyny MC będąc równoległą do AN, kąt BMC = PAN (Zad. XIII.); azatém oboiętną iest rzeczą prowadzić prostopadłe do któregokolwiek punktu wspólnego przecięcia się dwóch płaszczyzn.

To okazawszy powiadam, że ieżeli dwa kąty PAD, DAN są równe, pochyłości odpowiadaiące płaszczyzn MAP, MAD, i MAD, MAN będą także równe.

Na

Na ten koniec, na płaszczyznach PAN, BMC, ze srzodków A i M, promieniem od upodobania, opisawszy łuki NDP, CFB, poprowadźmy AD; dwie płaszczyzny PAN, BMC, prostopadłe do tey samey linij prostey MA, są równoległe (Zad. IX.); więc przecięcia AD, MF, tych dwóch ~~płaszczyzn~~ przez płaszczyznę trzecią MAD będąc równoległe-~~mi~~, kąt BMF=PAD (Zad. XIII.). Jeżeli kąt DAP=DAN, widoczną iest rzeczą że pochyłości dwóch płaszczyzn MP, MN, to iest DAMP, i DAMN będą równe; gdyż podstawa PAD, ułożywszy się doskonale w kącie równym DAN, maiąc wysokość wspólną AM, dwie te pochyłości zbiegną się całkiem iedna z drugą. Gdyby kąt DAP, zamykał się pewną liczbę razy spełna w kącie PAN, pochyłość DAMP zamykać się będzie tę samę liczbę razy spełna w pochyłości PAMN. Dowiedziemy podobnie (Zad. XVII. K. II.), że iakikolwiek będzie stosunek kąta PAD, do kąta PAN, pochyłość DAMP, będzie w tym samym stosunku do pochyłości PAMN; azatém kąt NAP, może bydź wzięty za miarę pochyłości dwóch przecinaiących się płaszczyzn MAP, MAN.

*Uwaga.* Znayduie się tyle kątów złożonych przez dwie płaszczyzny, ile przez dwie linije proste. Więc dwóch płaszczyzn przecinaiących się wzaiemnie, kąty w wierzchołku przeciwległe są równe, kąty przyległe razem wzięte składaią dwa kąty proste; ieżeli iedna płaszczyzna iest prostopadłą do drugiey, druga iest prostopadłą do pierwszey. W przecięciu się płaszczyzn równoległych przez płaszczyznę trzecią, zachodzą te same równości i własności, iakie w przecięciu się dwóch linij równoległych przez liniją trzecią.

## ZADANIE XVIII.

### *Twierdzenie.*

*Jeżeli linija prosta iest prostopadłą do płaszczyzny, druga płaszczyzna przechodząca przez tę prostopadłą będzie prostopadłą do płaszczyzny pierwszey.* (fig. 194).

Niech będzie linija AP, prostopadła do płaszczyzny MN; powiadam, że cała płaszczyzna AB, przechodząca przez AP, będzie prostopadłą do płaszczyzny MN.

Niech BC, będzie przecięciem płaszczyzn AB, MN; ieżeli na płaszczyznie MN, poprowadzimy DE prostopadłą do BC, linija AP prostopadła do płaszczyzny MN, będzie prostopadłą do BC, DE; lecz kąt DPA, mierzący pochyłość płaszczyzn AB, MN (Zad. XVII.), iest prosty, więc płaszczyzna AB, iest prostopadłą do MN (Opis. III).

*Uwaga.* Skoro trzy linije AP, BP, DP, są do siebie prostopadłemi, każda z nich iest prostopadłą do płaszczyzny dwóch drugich, a trzy płaszczyzny są do siebie prostopadłemi.

ZADA-

## ZADANIE XIX.

### *Twierdzenie.*

*Jeżeli dwie płaszczyzny są do siebie prostopadłemi, poprowadziwszy na pierwszey liniją prostopadłą do wspólnego ich przecięcia się, ta będzie prostopadłą do płaszczyzny drugiey.* (fig. 194).

Niech płaszczyzna AB, będzie prostopadłą do MN, poprowadziwszy na pierwszey prostopadłą PA, do wspólnego przecięcia się PB, ta iest prostopadłą do płaszczyzny MN.

a) Ponieważ na płaszczyznie MN, poprowadziwszy prostopadłą DP do BP; 1a kąt DPA prosty, gdyż płaszczyzny są do siebie prostopadłemi, więc linija AP, będąc prostopadłą do BP i DP, iest prostopadłą do płaszczyzny MN (Zad. IV).

*Wniosek.* Jeżeli płaszczyzna AB, iest prostodadłą do MN, z punktu P, wspólnego przecięcia się, wyprowadziwszy prostopadłą do płaszczyzny MN, ta całkiem leżeć będzie na 1b płaszczyznie AB; 1b ponieważ gdyby nieleżała, z punktu P, wspólnego przecięcia się na płaszczyznie AB, prostopadłey do MN, poprowadzona linija prosta PA, byłaby prostopadłą do płaszczyzny MN; więc z iednego punktu P, byłyby dwie prostopadłe do płaszczyzny MN, co iest rzeczą niepodobną (Zad. IV. Wnios. II).

ZADA-

## ZADANIE XX.

*Twierdzenie.*

*Wspólne przecięcie się dwóch płaszczyzn prostopadłych do płaszczyzny trzeciey, iest także prostopadłém do tey ostatniey płaszczyzny.* (fig. 194).

Jeżeli dwie płaszczyzny AB, AD, są prostopadłemi do trzeciey MN, wspólne ich przecięcie się AP, iest także prostopadłém do płaszczyzny MN.

Ponieważ ieżeli z punktu P, wyniesiemy prostopadłą do płaszczyzny MN, ta znaydować się razem musi na płaszczyznach AB i AD (Zad. XIX. Wniosek); azatém na wspólném ich przecięciu się AP.

## ZADANIE XXI.

*Twierdzenie.*

*W kącie bryłowym składaiącym się z trzech kątów płaskich, summa dwóch którychkolwiek, iest większa od trzeciego.* (fig. 195).

Niech będzie kąt bryłowy S, złożony z trzech kątów płaskich ASB, ASC, BSC, i niech kąt BSC będzie naywiększy ze trzech; powiadam, że będziemy mieli

$$ASB < ASC + BSC.$$

Na płaszczyznie ASB, wykreśliwszy kąt BSD=BSC, poprowadźmy od upodobania lini–

liniją prostą $ADB$; a wziąwszy $SC=SD$, złączmy $AC$, $BC$.

Dwa boki $BS$, $SD$, równe dwóm bokom $BS$, $SC$, obeymuią kąt $BSD=BSC$; więc w dwóch tróykątach $BSD$, $BSC$ równych, mamy $BD=BC$. Lecz $AB < AC+BC$; odeymuiąc z iedney strony $BD$, z drugiey ilość równą $BC$, pozostanie $AD < AC$. Dwa boki $AS$, $SD$ są równe dwóm bokom $AS$, $SC$, trzeci $AD$ będąc mnieyszy od trzeciego $AC$; więc (Zad X. K. I.) kąt $ASD < ASC$. Dodaiąc z iedney strony $BSD$, z drugiey ilość równą $BSD$, będziemy mieli $ASD+BSD < ASC+BSC$, czyli $ASB < ASC+BSC$.

## ZADANIE XXII.

### *Twierdzenie.*

*Summa kątów płaskich składaiących kąt bryłowy, iest mnieysza od czterech kątów prostych.* (fig. 196).

Przetniymy kąt bryłowy $S$, płaszczyzną $ABCDE$; z punktu $O$, wziętego na tey płaszczyznie, poprowadźmy do wszystkich kątów linije $OA$, $OB$, $OC$, $OD$, $OE$. Liczba kątów w tróykątach ułożonych około wierzchołka $S$, iest równa liczbie kątów w tròykątach ułożonych około wierzchołka $O$. Lecz w punkcie $B$, kąty $ABO$, $OBC$ razem wzięte składaią kąt $ABC < ABS+SBC$ (Zad. XXI.); podobnie w punkcie $C$, kąt $BCD$

$<BCS$

1a summ

$< BCS + SCD$, i tak daley co do innych kątów wieloboku ABCDE. Więc w tróykątach których wierzchołkiem iest O, summa kątów przy podstawie iest mnieysza, od summy kątów przy podstawie w tróykątach których wierzchołkiem iest S; azatém przez wynadgrodzenie, summa kątów ułożonych około punktu O, iest większa od summy kątów około punktu S. ~~Gdy~~ summa kątów około punktu O, iest równa czterem kątom prostym (Zad. II. K. I.), więc summa kątów płaskich składaiących kąt bryłowy S, iest mnieysza od czterech kątów prostych.

## ZADANIE XXIII.

*Twierdzenie.*

*W dwóch kątach bryłowych, składaiących się z trzech kątów płaskich równych w każdym, pochyłość płaszczyzn przy których kąty są równe, iest równa.* (fig. 197).

Niech będzie kąt $ASC = DTF$, $ASB = DTE$, $BSC = ETF$; powiadam, że pochyłość dwóch płaszczyzn ASC, ASB, iest równa pochyłości płaszczyzn DTF, DTE.

Wziąwszy od upodobania SB, spuśćmy prostopadłą BO, na płaszczyznę ASC; z punktu O, poprowadziwszy OA, OC, prostopadłe do SA, SC; złączmy AB, BC; weźmy następnie $TE = SB$; spuściwszy prostopadłą EP, na płaszczyznę DTF; z punktu P, poprowadziwszy PD, PF, prostopadłe

dłe do TD, TF, złączmy DE, EF. Tròykaty SAB, TDE, prostokatne przy A i D (Zad. VI.), maią kat ASB=DTE, więc kąt SBA=TED. Nadto SB=TE; azatém tróykąt SAB będąc równy tróykątowi TDE, SA=TD, AB=DE. Dowiedziemy podobnie że SC=TF, BC=EF. To założywszy mamy czworobok SAOC, równy czworobokowi TDPF; kładąc bowiem kąt ASC, na iemu równy DTF, ponieważ SA=TD, SC=TF, punkt A, padnie na punkt D, punkt C, na punkt F. A w tym samym czasie prostopadłe OA, PD, na SA i TD, i prostopadłe OC, PF na SC, TF przystaiąc do siebie gdyż są równe, punkt O, padnie na punktP. W tróykątach AOB, DPE prostokątnych przy O i P, przeciwprostokątna AB=DE, bok AO=DP, więc (Zad. XVIII. K. I). kąt OAB=PDE. Kąt zaś OAB iest miarą pochyłości dwóch płaszczyzn ASB, DTE, do płaszczyzn ASC, TDF (Zad. XVII), więc te dwie pochyłości są równe.

*Wniosek.* W dwóch kątach bryłowych składaiących się z trzech kątów płaskich równych w każdym, ieżeli kąty równe czyli odpowiadaiące *są rozłożone w tym samym porządku*, naówczas te dwa kąty zbiegną się całkiem ieden z drugim. Jakoż w czworoboku SAOC, równym TDPF, bok SA przystanie do boku TD, SC do TF, i punkt O padnie na punkt P. I gdy tróykąt OAB= PDE, prostopadła OB=EP; nadto pro-

sto-

stopadłe te leżą w tym samym kierunku, więc punkt B, trafiwszy na punkt E, linija SB przypadnie do linij TE, i dwa katy bryłowe zbiegną się całkiem ieden z drugim.

Gdyby w dwóch kątach bryłowych, kąty płaskie równe, były *rozłożone w porządku wywrótnym*, te dwa kąty bryłowe będą równe; lecz zbieżenie się ich iest niepodobném; gatunek ten równości nazywać będziemy *równością przez symetryą*. Więc dwa kąty bryłowe powstaiące z trzech kątów płaskich równych w każdym, lecz rozłożonych w porządku wywrótnym, nazywać będziemy *kątami równemi przez symetryą*, albo *kątami symetrycznemi*.

Ta sama uwaga stosuie się do kątów bryłowych składaiących się z więcey aniżeli trzech kątów płaskich: więc gdy ieden kąt bryłowy składa się z kątów płaskich A, B, C, D, E, zaś drugi z tych samych kątów w porządku wywrótnym A, E, D, C, B; te dwa kąty bryłowe będą *symetrycznemi*.

W figurach płaskich niemasz właściwie mówiąc równości przez symetryą, ponieważ można ie przewrócić i brać bez odmiany *nad*, zamiast *pod*; inaczey się ma w bryłach, gdzie trzeci rozmiar może bydź wzięty w dwóch kierunkach różnych.

ZADA-

Popunt Porvcelu, na un lunceł bo nie wiedział co to znay



## ZADANIE XXIV.

*Zagadnienie.*

*Maiąc dane trzy kąty płaskie składaiące kąt bryłowy, wykreślić na płaszczyznie pochyłość dwóch płaszczyzn ten kąt składaiących.* (fig. 198).

W kącie bryłowym S, w którym znamy trzy kąty płaskie ASB, ASC, BSC, chcąc wykreślić na płaszczyznie pochyłość dwóch płaszczyzn, naprzykład ASB, ASC; uczyniwszy to samo wykreślenie iak w zadaniu poprzedzaiącém, kąt OAB będzie kątem żądanym, który mamy wykreślić na płaszczyznie. Weźmy na tey ostatniey kąt B'SA równy kątowi płaskiemu w bryle ASB, ASC = ASC, B"SC = BSC; z punktów B' i B", spuśćmy prostopadłe B'A, B"C, na SA i SC, spotykaiące się w punkcie O. Z punktu A, iako srzodka, promieniem AB', opisawszy półobwód koła B'bE; z punktu O, do B'E wyprowadźmy prostopadłą Ob, przecinaiącą półobwód w b, złączmy Ab, a kąt EAb, będzie pochyłością szukaną dwóch płaszczyzn ASC, ASB w kącie bryłowym, to iest równy kątowi OAB. Jakoż w tróykątach prostokątnych B'SA, BSA, przy A, kąty przy S są równe; więc kąty przy B i B' są także równe. Lecz gdy przeciw-prostokątna SB' = SB, dwa te tróykąty będąc rowne, SA figury płaskiey iest = SA figury bryłowey, i linija AB' czyli Ab, na figurze płaskiey = AB, na figurze bryłowey. Dowiedziemy podobnie, że SC, i czworo-

bez cerem

ro-

roboki SAOC, w obu figurach są równe, i że AO, w figurze płaskiey = AO, w figurze bryłowey; więc w iedney i drugiey figurze tróykąty prostokątne AOb, AOB, maiąc przeciw-prostokątną i bok równy (Zad. XVIII. K. I.), są równe, azatém kąt EAb, wykreślony na płaszczyznie, iest równy OAB pochyłości dwóch płaszczyzn SAB, SAC, w kącie bryłowym.

Skoro punkt O, pada między A i B', na figurze płaskiey, kąt EAb, staie się rozwartym, i mierzącym zawsze prawdziwą pochyłość płaszczyn: dla czego oznaczyliśmy przez EAb nie zaś przez OAb pochyłość żądaną, ażeby to samo rozwiązanie służyć mogło na wszystkie przypadki bez wyiątku.

*Uwaga.* Ażeby z trzech kątów płaskich wziętych od upodobania złożyć kąt bryłowy, potrzeba by ich summa była mnieyszą od czterech kątów prostych, bez czego kąt bryłowy niemiałby mieysca (Zad. XXII.); potrzeba nadto, ażeby wziąwszy od ubodobania dwa kąty płaskie B'SA, ASC, trzeci CSB" był taki, by prostopadła B"C, na bok SC, przecięła srzednicę B'E, między iey ostatecznemi końcami B' i E. Granice kąta CSB", są prostopadłe z obu stron B"C, z punktów B' i E, to iest: B'I, EK, spotykaiące w punktach I, K, obwód koła opisany promieniem SB", więc granice kata CSB", będą CSI, CSK.

Lecz w tróykącie równoramiennym B'SI, li-

linija $CS$ przedłużona będąc prostopadłą do podstawy $B'I$, kąt $CSI = CSB' = ASC + ASB'$. W tróykącie zaś równo-ramiennym $ESK$, linija $SC$, będąc prostopadłą do $EK$, kąt $CSK = CSE$. Nadto z przyczyny tróykątów równych $ASE$, $ASB'$, kąt $ASE = ASB'$; więc $CSE$ albo $CSK = ASC - ASB'$.

Z tąd wypada, że zagadnienie będzie zawsze podobném do rozwiązania, skoro trzeci kąt $CSB''$, będzie mnieyszy od summy dwóch drugich $ASC$, $ASB'$, a większy od ich różnicy: warunek zgadzaiący się z twierdzeniem XXI.; ponieważ podług tego twierdzenia potrzeba ażeby $CSB'' < ASC + ASB'$; potrzeba także ażeby $ASC < CSB'' + ASB'$, albo $CSB'' > ASC - ASB'$.

## ZADANIE XXV.

### *Zagadnienie.*

*Maiąc dane dwa z trzech kątów płaskich składaiących kąt bryłowy z pochyłością ich płaszczyzn, znaleść trzeci kąt płaski.*

Jeżeli $ASC$, $ASB'$ (fig. 198.), są dwa kąty płaskie dane, przypuśćmy, że $CSB''$ będzie trzecim kątem szukanym; naówczas uczyniwszy to samo wykreślenie iak w zagadnieniu poprzedzaiącém, kąt obięty między płaszczyznami dwóch pierwszych będzie $EAb$. Gdy kąt $EAb$, oznacza się za pomocą $CSB''$ skoro dwa drugie są dane, znaydziemy zatém

kąt

kąt CSB", za pomocą EAb. Na ten koniec wziąwszy od upodobania SB', i spuściwszy na SA prostopadłą nieograniczoną B'E, złożmy kąt EAb równy pochyłości dwóch płaszczyzn danych; z punktu b, w którym ramie Ab, przecina obwód koła opisany ze srzodka A, i promieniem AB', spuśćmy na AE prostopadłą bO, zaś z punktu O, na SC prostopadłą nieograniczoną OCB", wziąwszy SB"=SB', kąt CSB" będzie trzecim kątem płaskim żądanym.

*Uwaga.* Jeżeli kąt bryłowy iest *poczwórny* to iest: ieżeli składa się ze czterech kątów płaskich ASB, BSC, CSD, DSA (fig. 199). wiadomość tych kątów niewystarcza do oznaczenia wzaiemnych pochyłości ich płaszczyzn; ponieważ z temi samemi kątami płaskiemi możemy składać niezliczoną liczbę kątów bryłowych. Lecz ieżeli dodamy warunek naprzykład, iż znana iest pochyłość dwóch płaszczyzn ASB, BSC, naówczas kąt bryłowy będąc całkiem oznaczony, możemy znaleść pochyłość drugich iego dwóch płaszczyzn iakichkolwiek.

KSIĘ-

# KSIĘGA VI.

# O Wielościanach.

---

*Opisania.*

I. Każda bryła zakończona płaszczyznami czyli ścianami płaskiemi, nazywa się *wielościanem*. (Te płaszczyzny same zakończone są linijami prostemi). Więc *czworościanem*, *sześcianem*, *ośmiościanem*, *dwónastościanem*, *dwódziestościanem* i t. d., nazywać będziemy bryły zakończone 4, 6, 8, 12, 20, i t. d. ścianami. Dla złożenia wielościanu potrzeba naymniey czterech płaszczyzn.

II. Wspólne przecięcie się dwóch ścian przyległych wielościanu nazywa się *krawędzią*.

III. Wielościan, którego wszystkie ściany są wielobokami foremnemi równemi, a kąty bryłowe równe, nazywa się *wielościanem foremnym*. Niżey widzieć będziemy iż takich wielościanów mamy tylko pięć.

IV. Bryła obięta pod wielu równoległoboków płaszczyznami, zakończona z iedney i drugiey strony dwiema płaszczyznami wieloboków równych i równoległych, nazywa się *pryzmatem* czyli *graniastosłupem*.

Dla złożenia tey bryły, niech będzie ABCDE (fig. 200). wielobok iakikolwiek; ie-

ieżeli na płaszczyznie do niego równoległey, poprowadzimy linije proste FG, GH, HI, i t. d. równe i równoległe do boków AB, BC, CD, it.d., złożemy wielobok FGHIK, równy wielobokowi ABCDE; ieżeli następnie połączymy wierzchołki kątów podobnych linijami prostemi AF, BG, CH, DI, EK, sciany ABGF, BCHG, CDIH, EDIK, AEKF, będą równoległobokami, a bryła ABCDEFGHIK *pryzmatem.*

V. Wieloboki równe i równoległe ABCDE, FGHIK, nazywaią się *podstawami pryzmatu*; drugie płaszczyzny równoległoboków wzięte razem stanowią *powierzchnią bokową*, czyli *wypukłość pryzmatu.* Linije proste równe AF, BG, CH i t.d., nazywaią się *krawędziami pryzmatu.*

VI. Prostopadła spuszczona z podstawy wyższey na podstawę niższą iest *wysokością* pryzmatu.

VII. Pryzmat iest *prosty*, skoro iego krawędzie są równe wysokości; *pochyły*, gdy wysokość mnieysza od krawędzi.

VIII. Pryzmat *tróykątny*, *czworokątny*, *pięciokątny* it.d. bierze nazwisko od podstawy tróykątney, czworoboczney, pięcioboczney i t. d.

IX. Pryzmat, którego podstawy i sciany są równoległobokami, nazywa się *równoległościanem.*

Równoległościanem *prostokątnym*, gdy podstawy i ściany są prostokątami.

X. Równoległościan, którego podstawy i ściany są kwadratami równemi, nazywa się *sześcianem kubicznym*, albo *foremnym*.

XI. Bryła powstaiąca z wielu płaszczyzn tróykątnych zbiegaiących się w iednym punkcie S, i opieraiących się na różnych bokach tego samego wieloboku ABCDE, nazywa się *piramidą* czyli *ostrosłupem*. Wielobok ABCDE, iest *podstawą* piramidy, punkt S *wierzchołkiem*, zbiór zaś tróykątów ASB, BSC, i t. d. *powierzchnią wypukłą*, czyli *bokową*.

XII. Prostopadła spuszczona z wierzchołka na podstawę (przedłużona ieżeli tego wymaga potrzeba), iest *wysokością* piramidy.

XIII. Piramida iest *tróykątną*, *czworokątną* i t. d. podług tego iak podstawa iest troykątem, cworobokiem i t. d.

XIV. Jeżeli podstawa iest wielobokiem foremnym, a prostapadła przechodzi przez iey srzodek, naówczas piramida będąc *foremną*, prostopadła nazywa się iey *osią*.

XV. W wielościanie linija prosta łącząca wierzchołki dwóch kątów bryłowych nieprzyległych, nazywa się *przekątną*.

XVI. Dwa wielościany zbudowane podobnie na wspólney podstawie ieden pod, drugi nad, tym sposobem, że wierzchołki kątów bryłowych odpowiadaiących, leżąc na tey samey linij prostey prostopadłey do podstawy, są w równey od niey odległości, nazywaią

 się

się *wielościanami symetrycznemi*. Jeżeli linija prosta S T (fig. 202.), będąc prostopadłą do płaszczyzny A B C, iest od niey przeciętą w punkcie O na dwie części równe, dwie piramidy S A B C, T A B C, są dwa wielościany symetryczne.

XVII. Dwie piramidy tróykątne są *podobne*, skoro ściany podobne będąc podobnie ułożone, maią pochyłość równą. Jeżeli kąt A B C = D E F (fig. 203.), B A C = E D F, A B S = D E T, B A S = E D T, nadto pochyłość płaszczyzn A B S, A B C, iest równa pochyłości płaszczyzn odpowiadaiących D T E, D E F, piramidy S A B C, T D E F, są podobne.

XVIII. Złożywszy tróykąt z wierzchołków trzech kątów wziętych na tey samey ścianie albo podstawie pewnego wielościanu, wystawić sobie możemy że wierzchołki różnych kątów bryłowych wielościanu, będące zewnątrz płaszczyzny tey podstawy, są wierzchołkami tyluż piramid tróykątnych maiących za wspólną podstawę tróykąt oznaczony, a każda z tych piramid oznaczy położenie każdego kąta bryłowego wielościanu względnie do podstawy. To założywszy: dwa wielościany są *podobne*, skoro maiąc podstawy podobne, wierchołki kątów bryłowych odpowiadaiących zewnątrz tych podstaw, są oznaczone piramidami tróykątnemi podobnemi w każdym.

XIX. Nazy-

XIX. Nazywać będziemy *wierzchołkami* wielościanu punkta znayduiące się w wierzchołkach iego różnych kątów bryłowych.

Opuść. D. W. Voyer Leg. p. 164.

## ZADANIE PIERWSZE.

### *Twierdzenie.*

*Dwa wielościany maiące te same wierzchołki, i w tey samey liczbie, zbiegną się całkiem ieden z drugim.*

Maiąc wielościan, chcąc zbudować drugi maiący z pierwszym te same wierzchołki i w tey samey liczbie, potrzeba, ażeby płaszczyzny tego ostatniego nieprzechodziły przez punkta, przez które przechodzą płaszczyzny wielościanu pierwszego, bez czego, dwa te wielościany w niczém by się nieróżniły: lecz naówczas postawiwszy pierwszy wielościan na płaszczyznie, gdy wszystkie iego wierzchołki będą nad płaszczyzną, wierzchołki drugiego byłyby nad i pod tą płaszczyzną, co iest przeciwko założeniu, więc dwa wielościany maiące te same wierzchołki i w tey samey liczbie, zbiegną się koniecznie całkiem ieden z drugim. przeciwne założeniu

*Uwaga.* Łatwo zbuduiemy wielościan maiąc dane położenie punktów A, B, C, K, i t. d. maiących mu służyć za wierzchołki; na ten koniec obrawszy trzy punkta D, E, H, przez któreby przepuszczona płaszczyzna DEH, obiąwszy punkta C, K, zostawiła wszystkie inne z tey samey strony, nad, lub pod tą pła- ogół. pozostałe

 szczy-

szczyzną; płaszczyzna DEH, albo DEHKC tak oznaczona, będzie ściana bryły. Przez krawędź EH, przepuściwszy płaszczyznę, nachylaymy aż spotka ieden lub kilka nowych punktów F, I, płaszczyzna FEHI, będzie drugą ścianą. Tym sposobem przepuszczaiąc następnie płaszczyzny przez krawędzie znalezione, zakończymy ze wszech stron bryłę, która będzie wielościanem żądanym, gdyż ~~dwa~~ wielościany maiące te same wierzchołki ~~nie znayduią się.~~

## ZADANIE II.

### *Twierdzenie.*

*W dwóch wielościanach symetrycznych, ściany odpowiądaiące, i pochyłości dwóch ścian przyległych, są równe.* (fig. 205).

Na podstawie wspólney ABCDE, niech będą M i N, wierzchołki dwóch kątów bryłowych iednego wielościanu, M' i N', wierzchołki odpowiadaiące wielościanu drugiego; podług opisania linije proste MM', NN', będąc prostopadłemi do płaszczyzny ABC, są od tey ostatniey podzielone w punktach $m$, $n$, na dwie części równe. Obróciwszy trapez $m$M'N'$n$, około $mn$, i położywszy na płaszczyznie $m$MN$n$, z przyczyny kątów prostych przy $m$ i $n$, bok $m$M' przystanie do boku $m$M, $n$N', do $n$N, więc gdy dwa trapezy zbiegną się całkiem ieden z drugim MN = M'N'.

Niech

Niech P, będzie trzecim wierzchołkiem wielościanu wyższego, zaś P' iemu odpowiadaiacym w drugim, będziemy mieli także $MP = M'P'$, $NP = N'P'$; więc *tróykąt* MNP, *łączący trzy wierzchołki wielościanu wyższego, iest równy tróykątowi* M'N'P' *łączącemu trzy wierzchołki odpowiadaiące w wielościanie drugim.*

Jeżeli tróykąty leżąc na iedney płaszczyznie, składaią tę samę ścianę wielościanu, tróykąty odpowiadaiące leżąc na drugiey płaszczyznie składać będą ścianę wieloboku odpowiadaiącą równą. Jakoż, niech będą MPN, NPQ, dwa tróykąty przyległe leżące na tey samey płaszczyznie, i troykąty M'P'N', N'P'Q' pierwszym odpowiadaiące. Kąt $MNP = M'N'P'$, $PNQ = P'N'Q'$, złączywszy MQ, M'Q', tróykąt MNQ będąc równy M'N'Q', kąt $MNQ = M'N'Q'$. ka Ponieważ MPNQ składa iednę płaszczyznę, kąt $MNQ = MNP + PNQ$, a-zatém kąt $M'N'Q' = M'N'P' + P'N'Q'$. Gdyby płaszczyzny M'N'P', P'N'Q', M'N'Q', nieskładały iedney i tey samey płaszczyzny, złożyłyby kąt bryłowy i mielibyśmy (Zad. XX. K. V). kąt $M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q'$, co niema mieysca; więc dwa tróykąty M'N'P', P'N'Q', są na iedney i tey samey płaszczyznie.

Z tąd wypada, że każda ściana bądź tróykątna bądź wielobokowa w iednym wielościanie, odpowiada ścianie równey w drugim, i

że

że dwa wielościany symetryczne są obięte tą samą liczbą płaszczyzn równych.

Na okazanie, że pochyłość dwóch ścian przyległych iakichkolwiek w iednym wielościanie symetrycznym, równa pochyłości dwóch ścian odpowiadaiących w drugim, niech będą MPN, NPQ, dwa tróykąty ułożone na wspólney krawędzi NP, dwóch ścian przyległych; M'P'N', N'P'Q', tróykąty pierwszym odpowiadaiące;

1b

kąt N, możemy brać za kąt bryłowy złożony z trzech kątów płaskich MNQ, MNP, PNQ, równych kątom płaskim M'N'Q', M'N'P', P'N'Q', składaiącym kąt bryłowy N';

1c.

gdy te kąty płaskie są równe, więc pochyłość dwóch płaszczyzn MNP, PNQ, iest równa pochyłości płaszczyzn odpowiadaiących M'N'P', P'N'Q' (Zad. XXII. K. V).

## ZADANIE III.

*Twierdzenie.*

*Dwa pryzmata maiące kąt bryłowy obięty trzema płaszczyznami równemi i podobnie rozłożonemi, są równe.* (fig. 200).

Jeżeli podstawa ABCDE$=$*abcde*, równoległobok ABGF$=$*abgf*, BCHG$=$*bchg*; powiadam, że pryzmat ABCI iest równy pryzmatowi *abci*. Jakoż, dwie podstawy ABCDE, *abcde*, przeniesione na siebie iako równe

a)

zbiegną się, trzy kąty płaskie ABC, ABG, GBC, składaiące kąt bryłowy wy B, są równe trzem kątóm płaskim *abc*, *abg*, *gbc*, składaiącym kąt bryłowy *b*, i podobnie rozłożone: więc kąty bryłowe B i *b*, będąc równe, krawędź BG padnie i będzie równa krawędzi *bg*; z przyczyny zaś równoległoboków ABGF, *abgf*, równych, bok GF padnie i przystanie do boku *gf*, GH do *gh*; więc gdy podstawa wyższa FGHIK, pryzmatu pierwszego, zbieży się całkiem z podstawą wyższą *fghik*, pryzmatu drugiego, z dwóch tych brył zrobi się tylko iedna, ponieważ będą miały te same wierzchołki. (Zad. I).

*Wniosek.* Więc dwa pryzmata proste są równe, ieżeli maią podstawy i wysokości równe.

## ZADANIE IV.

### *Twierdzenie.*

*W każdym równoległościanie płaszczyzny przeciwległe są równe i równoległe.* (fig. 206).

Gdy podług opisania tey bryły, podstawy ABCD, EFGH są równoległobokami równemi, boki AD i AE, będąc równe i równoległe do boków BC i BF, kąty DAE, CBF, są równe (Zad. XIII. K. V.), a płaszczyzny równoległe; azatém równoległobok DAEH iest równy i równoległy do równoległoboku CBFG. Podobnym sposobem dowiewiedlibyśmy, że równoległoboki przeciwległe ABFE, DCGH, są równe i równoległe.

*Wniosek.* Ponieważ równoległościan iest bryłą obiętą sześciu płaszczyznami, z których przeciwległe są równe i równoległe, więc dwie ściany iakiekolwiek przeciwległe mogą bydź wzięte za podstawy równoległościanu.

*Uwaga.* Maiąc trzy linije proste AB, AE, AD, przechodzące przez punkt A, i czyniące między sobą kąty dane, możemy na nich wybudować równoległościan, prowadząc przez ostateczny koniec każdey, płaszczyznę równoległą do płaszczyzny dwóch drugich, to iest: przez punkt B, płaszczyznę równoległą do DAE; przez punkt D, równoległą do BAE; zaś przez E, do BAD. Wzaiemne przecięcia się tych płaszczyzn złożą równoległościan żądany.

## ZADANIE V.

### *Twierdzenie.*

*W każdym równoległościanie kąty bryłowe przeciwległe są symetryczne, zaś przekątne przechodzące przez wierzchołki tych kątów przecinaią się wzaiemnie na dwie części równe.* (fig. 206).

Porównywaiąc kąt bryłowy A, z kątem iemu przeciwległym G; kąt płaski EAB = EFB = HGC, kąt DAE = DHE = CGF, kąt DAB = DCB = HGF; więc trzy kąty

pła-

płaskie składaiące kąt bryłowy A, będąc równe trzem kątom płaskim składaiącym kąt bryłowy G, nadto rozłożone w kierunku przeciwnym, azatém 1*mo* dwa kąty bryłowe A i G, są symetryczne (Zad. XXIII. K. V). 2*do* przepuściwszy przekątne EC, AG, przez wierzchołki przeciwległe: ponieważ linija AE, iest równoległą i równą CG, figura AEGC, iest równoległobokiem; więc przekątne EC, AG, przetną się wzaiemnie na dwie części równe (Zad. XXXII. K. I). Dowiedlibyśmy podobnie że przekątne EC, DF, przetną się także na dwie części równe; więc 2*do* cztery przekątne przetną się wzaiemnie na dwie części równe w iednym punkcie, który możemy uważać za srzodek równoległościanu.

## ZADANIE VI.

### *Twierdzenie.*

*Płaszczyzna przechodząca przez dwie krawędzie równoległo-przeciwległe, dzieli równoległościan na dwa pryzmata tróykątne symetryczne.* (fig. 207).

Niech będzie płaszczyzna BDHF, przechodząca przez dwie krawędzie równoległo-przeciwległe BF, DH; powiadam, że ta płaszczyzna dzieli równoległościan AG, na dwa pryzmata tróykątne ADBEHF, DBCHFG symetryczne; ponieważ tróykąty ADB, EHF, maiące boki równe i równoległe są równe, a

ścia-

ściany bokowe ABFE, ADHE, DBFH, są równoległobokami; więc bryła ADBEHF, iest pryzmatem: toż samo iest względem bryły DBCHFG. a Że te bryły są symetrycznemi, na podstawie ADB zbuduymy pryzmat ADBE'H'F', symetryczny pryzmatowi ADBEHF. Podług zadania II. płaszczyzny ABF'E'=ABFE, ADH'E'=ADHE; porównawszy pryzmat DBCHFG, z pryzmatem ADBE'H'F', podstawa HFG=ADB; równoległobok GHDC=FEAB=BAE'F'; i równoległobok GFBC=HEAD=DAE'H', więc trzy płaszczyzny składaiące kąt bryłowy G, w pryzmacie DBCHFG, b będąc równe trzem płaszczyznom składaiącym kąt bryłowy A, w pryzmacie ADBE'H'F', nadto podobnie rozłożone, dwa te pryzmata są równe (Zad. III). Lecz ieden z nich ADBE'H'F' iest symetryczny pryzmatowi ADBEHF, więc drugi DBCHFG iest także symetryczny ADBEHF.

## ZADANIE VII.

*Twierdzenie. przybrane.*

a *Części pryzmatu pociętego płaszczyznami równoległemi, wydaią wieloboki równe.*

Jeżeli pryzmat ABCI (fig. 201.), iest pocięty płaszczyznami równoległemi, części NOPQRN, STVXYS, są wielobokami równemi. Ponieważ boki NO, ST, będąc przecięciami

dwóch

Il en est de même

dwóch płaszczyzn równoległych przez płaszczyznę trzecią ABGF są równoległe, nadto obięte między równoległemi krawędziami AF, BG, pryzmatu; więc NO=ST. Dla podobnéy przyczyny boki OP, PQ, QR, RN, są równe bokom odpowiadaiącym TV, VX, XY, YS. Nadto boki te są równoległe, więc kąty NOP, OPQ i t. d., pierwszey części, będąc równe kątom odpowiadaiącym STV, TVX i t. d. części drugiey; zatém dwie części NOPQRN, STVXYS, są wielobokami równemi.

*Wniosek.* Każda część pryzmatu iest równa podstawie, skoro odcięta równolegle do podstawy.

## ZADANIE VIII.

### *Twierdzenie.*

*Dwa pryzmata tróykątne symetryczne na które rozkłada się równoległościan, są równo-wartuiące.* (fig. 208).

Niech będą dwa pryzmata tróykątne symetryczne ABDEFH, BDCFHG, na które rozłożył się równoległościan AG; powiadam, że te dwa pryzmata tróykątne symetryczne są równo-wartuiące.

Przez wierzchołki B i F, poprowadźmy płaszczyzny B*adc*, F*ehg*, prostopadłe do krawędzi FB, spotykaiące z iedney strony w *a*, *d*, *c*; z drugiey w *e*, *h*, *g*, trzy drugie

kra-

krawędzie EA, HD, GC, tego samego równoległościanu. Części B*adc*, F*ehg*, są równoległobokami równemi, ponieważ odcięte płaszczyznami prostopadłemi do tey samey linij prostey, azatém równoległemi (Zad. VII.); zaś dwa boki przeciwległe tey samey części *a*B, *dc*, są przecięciami dwóch płaszczyzn równoległych ABFE, DCGH, przez tę samę płaszczyznę. Dla podobney przyczyny, tak figura B*ae* F, iako też inne ściany bokowe BF*gc*, *cdhg*, *adhe*, będąc równoległobokami, bryła B*adc*F*ehg*, iest pryzmatem (Opis. IV.); a pryzmatem prostym, ponieważ krawędź BF, iest prostopadłą do podstawy B*adc*.

To założywszy, ieżeli płaszczyzną BF HD, podzielimy pryzmat prosty B*h*, na dwa pryzmata tróykątne proste *a*B*de*F*h*, B*dc* F*hg*; powiadam, że pryzmat tróykątny pochyły ABDEFH, będzie równo-wartuiący pryzmatowi tróykątnemu prostemu *a*B*de*F*h*.

Jakoż te dwa pryzmata maiąc część wspólną ABD*he*F, dosyć iest okazać, że części pozostałe, to iest bryły B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, są równo-wartuiące między sobą.

Z przyczyny równoległoboków ABFE, *a*BF*e*, boki AE, *ae*, będąc równe bokowi do nich równoległemu BF, są równe między sobą; więc odiąwszy część wspólną A*e*, pozostanie A*a*=E*e*. Podobnie dowiedziemy że D*d*=H*h*.

Te-

C/9

Teraz aby wykonać przełożenie dwóch brył B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, położywszy podstawę F*eh*, na podstawie równey B*ad*, punkt *e*, padnie na punkt *a*, punkt *h*, na *d*, i boki E*e*, H*h*, padną na boki im równe A*a*, D*d*, ponieważ są prostopadłemi do tey samey płaszczyzny B*ad*. Więc te dwie bryły zbiegną się całkiem iedna z drugą. Dodawszy do części wspólney ABD*he*F, bryłę B*a*AD*d*, będziemy mieli pryzmat tróykątny prosty; do tey samey części wspólney ABD*he*F, dodawszy bryłę F*e*EH*h*=B*a*AD*d*, otrzymamy pryzmat tróykątny pochyły; więc pryzmat pochyły ABDEFH, iest równo-wartuiący pryzmatowi prostemu *a*B*de*F*h*. Dowiedlibyśmy podobnym sposobem, że pryzmat pochyły DBCHFG, iest równo-wartuiący pryzmatowi prostemu *d*B*ch*F*g*. Lecz dwa pryzmata proste *a*B*de*F*h*, *d*B*ch*F*g*, są równe, maiące tę samę wysokość BF, i podstawy *a*B*d*, *d*B*c* równe, iako będące połowami tego samego równoległoboku (Zad. III. Wnios). Azatém dwa pryzmata tróykątne ABDEFH, DBCHFG, równo-wartuiące pryzmatom równym, są równo-wartuiące między sobą.

*Wniosek I.* Każdy pryzmat tróykątny ABDEFH, iest połową równoległościanu AG, zbudowanego na tym samym kącie bryłowym A, z temi samemi krawędziami AB, AD, AE.

*Wnio-*

*Wniosek II.* Każdy równoległościan pochyły ABCDEFGH, może bydź zamieniony na równoległościan prosty $aBcdeFgh$.

## ZADANIE IX.

### *Twierdzenie.*

*Dwa równoległościany maiące podstawę wspólną, a których podstawy wyższe leżą na tey samey płaszczyznie, i między temi samemi równoległemi, są równo-wartuiące.* (fig. 209).

Niech będą dwa równoległościany AG, AL, maiące podstawę wspólną ABCD, a których podstawy wyższe EFGH, IKLM, leżą na tey samey płaszczyznie; między temi samemi równoległemi EK, HL; powiadam, że te dwa równoległościany będą równo-wartuiące.

Mogą tu bydź trzy przypadki podług tego, iak $EI > EF$, $EI = EF$, albo $EI < EF$, lecz dowodzenie będąc to samo na każdy przypadek, powiadam naprzod: że pryzmat tróykątny AEIDHM, iest równy pryzmatowi tróykątnemu BFKCGL.

Jakoż tróykąt $AEI = BFK$, ponieważ kąty A i B, są równe iako maiące boki równoległe, nadto bok $AE = BF$, $AI = BK$, więc dwa tróykąty EAI, FBK, przystaną do siebie (Zad. VI. K. I). Równoległoboki AD HE, BCGF, iako przeciwległe w tym samym

mym równoległościanie są równe; dla podobney przyczyny równoległobok ADMI=BC LK. Więc kąt bryłowy A, będąc obięty trzema ścianami równemi trzem ścianom obeymuiącym kąt bryłowy B, i podobnie rozłożonemi, dwa pryzmata AEIDHM, BFK CGL, są równe (Zad. III). Odiąwszy od całey bryły ABCDEKLH, pryzmat AEM, pozostanie równoległościan AIL; od tey samey bryły ABCDEKLH, odiąwszy pryzmat BFL=AEM, pozostanie równoległościan AEG; azatém dwa równoległościany AIL, AEG, są równo-wartuiące.

*Wniosek.* Jeżeli przypuścmy że krawędź AD, iest prostopadłą do płaszczyzny AIKB, równoległościan ABCDIKLM będzie prosty; ieżeli nadto EA, iest prostopadłą do płaszczyzny ABCD, równoległościan ABCDE FGH, będzie prostokątny. Więc każdy równoległościan prosty może bydź zamieniony na równoległościan prostokątny równo-wartuiący tey samey podstawy i wysokości.

## ZADANIE X.

### *Twierdzenie.*

*Dwa równoległościany tey samey podstawy i wysokości są równo-wartuiące.*

Niech ABCD (fig. 210.), będzie wspólną podstawą dwóch równoległościanów AG, AL, których podstawy wyższe IKLM, EFGH,

dla

dla wspólney wysokości leżą na tey samey płaszczyznie. a/ Gdy boki EF, AB, IK, są rowne i równoległe, bok EF, iest równy i równoległy do IK: dla podobney przyczyny bok GF, iest równy i równoległy do LK. Przedłużywszy boki FE, GH, iako też KL, IM, tak, ażeby przeciąwszy się złożyły równoległobok NOPQ, widoczną iest że ten ostatni będzie równy tak podstawie EFGH, iako też IKLM. Wystawiwszy teraz trzeci równoległościan maiący podstawę niższą ABCD, zaś wyższą NOPQ, ten będzie równo-wartuiący równoległościanom AG i AL (Zad. IX.); gdyż maiąc tę samę podstawę niższą, wyższe leżąc na tey samey płaszczyznie są obięte równoległemi GQ, FN, IQ, KP; więc dwa równoległościany AG, AL, maiące tę samę podstawę i wysokość są równo-wartuiące.

*Wniosek.* Jeżeli przypuścimy że krawędź IA, iest prostopadłą do płaszczyzny ABCD, równoległościan ABCDIKLM będzie prostym. Więc równoległościan pochyły ABCD EFGH, może bydź zamieniony na równoległościan prosty tey samey podstawy i wysokości.

c/ *Uwaga.* Podług wniosku zadania IX, równoległościan prosty może bydź zamieniony na równoległościan prostokątny tey samey podstawy i wysokości; podług zaś wniosku poprzedzaiącego każdy równoległościan pochyły ły może bydź zamieniony na równoległościan prostokątny tey samey wysokości i podstawy równo - wartuiącey.

## ZADANIE XI.

### *Twierdzenie.*

*Dwa równoległościany prostokątne tey samey podstawy, są iak wysokości.* (fig. 212).

Niech będą dwa równoległościany prostokątne AG, AL, tey samey podstawy ABCD; powiadam, iż są iak wysokości AE, AI.

Przypuśćmy naprzód, że wysokości AE, AI, będąc *współmierne* są iak dwie liczby całkie, naprzykład iak 15 iest do 8. Podzieliwszy AE na 15 części równych, AI obeymować ich będzie 8; przez punkta podziału *x*, *y*, *z*, i t. d. poprowadziwszy płaszczyzny równoległe do podstawy, te podzielą bryłę AG na 15 równoległościanów cząstkowych równych między sobą, iako maiących podstawy i wysokości równe; podstawy równe, ponieważ wszyskte przecięcia w pryzmacie *np.* MIKL, równoległe do podstawy ABCD, są równe podstawie (Zad. VII.); wysokości równe, gdyż te są podziałami samemi A*x*, *xy*, *xz*, i t. d. Z tych 15 rownoległościanów równych, 8 zamyka się w AL; więc bryła AG, iest do bryły AL, iak 15 do 8, czyli w ogólności iak wysokość AE, do wysokości AI.

Założmy powtóre, że wysokości AE, AI

D sa

Raz przypuśćmy, drugi raz założmy.

są *niewspółmierne*; powiadam, że będziemy ieszcze mieli

*bryt.* AG : *bryt* AL : : AE : AI.

a/ 16 Ponieważ, ieżeli ta proporcya nie iest prawdziwą, trzy pierwsze wyrazy zostaiąc te same, czwarty będzie większy albo mnieyszy od AI; przypuśćmy że będzie większy, i że mamy *bryt* AG : *bryt* AL : : AE : AO.

Podzieliwszy wysokość AE, na części równe mnieysze od OI, przynaymniey ieden punkt podziału $m$, padnie między O i I; przez ten punkt poprowadziwszy płaszczyznę $m$P, równolegle do podstawy ABCD, będziemy mieli nowy równoległościan AP, maiący za podstawę ABCD, a którego wysokość A$m$, będąc współmierną z wysokością AE równoległościanu AG, mamy proporcyą

*bryt.* AG : *bryt.* AP : : AE : A$m$

lecz z przypuszczenia

*bryt.* AG : *bryt.* AL : : AE : AO,

skoro w tych dwóch proporcyach poprzedniki są równe, następniki złożą proporcyą

*bryt.* AP : *bryt.* AL : : A$m$ : AO.

Gdy równoległościan AP > AL, potrzebaby A$m$ > AO; lecz przeciwnie A$m$ < AO, azatém ta proporcya iest fałszywą: aże wypadła z dwóch proporcyy poprzedzaiących, z których pierwsza została dowiedzioną, druga koniecznie fałszywą bydź musi. Więc równoległościan AG, niemoże bydź do równoległościanu AL, iak wysokość AE, do wysokości

więk-

większey od AI, więc czwarty wyraz równy AI. Dowiedlibyśmy podobnym sposobem, że czwarty wyraz tey proporcyi niemoże bydź mnieyszy od AI, więc iest równy AI. Azatém iakikolwiek będzie stosunek dwóch wysokości, dwa równoległościany tey samey podstawy są iak wysokości, to iest:

*bryt.* AG : *bryt.* AI :: AE : AI.

## ZADANIE XII.

### *Twierdzenie.*

*Dwa równoległościany prostokątne tey samey wysokości, są iak podstawy.* (fig. 213).

Jeżeli dwa równoległościany prostokątne AG, AK, maią tę samę wysokość AE, powiadam, że są między sobą iak podstawy ABCD, AMNO.

Umieściwszy dwie bryły iednę przy drugiey iak figura pokazuie, przedłużmy płaszczyznę ONKL aż do przecięcia się z płaszczyzną DCGH w kierunku PQ, otrzymamy trzeci równoległościan AQ, mogący się porównać z równoległościanami AG, AK.

Dwie bryły AG, AQ, maiące tę samę podstawę AEHD, są iak wysokości AB, AO; podobnie dwie bryły AQ, AK, maiące tę samę podstawę AOLE, są iak wysokości AD, AM. Więc będziemy mieli dwie proporcye

*bryt.* AG : *bryt.* AQ :: AB : AO

*bryt.* AQ : *bryt.* AK :: AD : AM.

Mnożąc te dwie proporcye porządkiem, i wymazuiąc w wypadku wspólnego czynnika *bryl.* AQ, otrzymamy

*bryl.* AG : *bryl.* AK :: AB × AD : AO × AM.

Lecz AB × AD wyraża podstawę ABCD, zaś AO × AM podstawę AMNO, więc

*bryl.* AG : *bryl.* AK :: ABCD : AMNO.

Azatem dwa równoległościany prostokątne tey samey wysokości są iak podstawy.

## ZADANIE XIII.

### *Twierdzenie.*

*Dwa równoległościany prostokątne iakiekolwiek, są między sobą, iak wieloczyny z podstaw przez wysokości, albo iak wieloczyny z ich trzech ~~rozmiarów~~.* (fig. 213).

Ja

Umieściwszy dwie bryły AG, AZ tak, ażeby ich powierzchnie miały kąt wspólny BAE, przedłużmy płaszczyzny potrzebne dla złożenia trzeciego równoległościanu AK, tey samey wysokości z równoległościanem AG. Podług zadania poprzedzaiącego będziemy mieli

*bryl.* AG : *bryl.* AK :: ABCD : AMNO.

Lecz dwa równoległościany AK, AZ, maiące tę samę podstawę AMNO, są iak wysokości AE, AX; więc

*bryl.* AK : *bryl.* AZ :: AE : AX.

Mnożąc porządkiem te dwie proporcye, i wymazuiąc w wypadku wspólnego czynnika *bryl.* AK, otrzymamy

*bryl.*

*bryt.* AG : *bryt.* AZ :: ABCD $\times$ EA : AMNO $\times$ AX.

Na mieyscu podstaw ABCD, AMNO, położywszy AB $\times$ AD i AO $\times$ AM, będziemy mieli

*bryt.* AG : *bryt.* AZ :: AB $\times$ AD $\times$ AE : AO $\times$ AM $\times$ AX.

Więc **dwa równoległościany** prostokątne iakiekol**wiek, są** iak wieloczyny z ich trzech rozmiarów.

*Uwaga.* Z poprzedzaiącey proporcyi następuiące wypada równanie

$$\frac{bryt.\ AG}{bryt.\ AZ} = \frac{AB \times AD \times AE.}{AO \times AM \times AX.}$$

Ułamek składaiący pierwszą stronę wyraża liczbę razy, którą równoległościan prostokątny AG, obeymuie równoległościana prostokątnego AZ; tę liczbę razy odkryie nam druga strona, gdy wyrazimy w liczbach, za pomocą iakieykolwiek *iednostki* linijowey, wartość krawędzi AB, AD, AE, iednego równoległościanu, i AO, AM, AX krawędzi drugiego, szukaiąc następnie iak wiele razy liczba *oderwana* wyrażaiąca wieloczyn AB $\times$ AD $\times$ AE, zamykać będzie liczbę oderwaną wyrażaiącą wieloczyn AO $\times$ AM $\times$ AX. Jeżeli *np.* AB = 5 iednostek linijowych, AD = 4, AE = 6; AO = 3, AM = 3, AX = 5, będziemy mieli

AB $\times$ AD $\times$ AE = 120

AO $\times$ AM $\times$ AX = 45, więc

*bryt.*

$$\frac{\textit{brył.}\ AG}{\textit{brył.}\ AZ} = \frac{120}{45} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

to iest: że równoległościan AG, składać się będzie z dwa razy wziętego równoległościanu AZ, nadto dwie trzecie tegoż samego równoległościanu.

Lecz bryła mierzyć się powinna iednostką tego samego gatunku, na ten koniec bierze się sześcian kubiczny. Przypuściwszy zatém że bryła AZ będzie tym sześcianem, będziemy mieli

$$AO = AM = AX.$$

Biorąc razem krawędź AO sześcianu, za iednostkę linijową, otrzymamy

$$AO \times AM \times AX = 1.$$

16 Więc znalazłszy liczbę razy, którą każda z krawędzi AB, AD, AE równoległościanu AG, którego chcemy mierzyć zamyka iednostkę AO, będziemy mieli

$$\frac{\textit{brył.}\ AG}{\textit{brył.}\ AZ} = AB \times AD \times AE.$$

16. Pierwsza strona oznaczaiąc rzetelnie liczbę razy, którą równoległościan AG zamyka iednostkę swoiego gatunku, będzie wyrażeniem miary liczebney tego równoległościanu, więc wyraziwszy dla skrócenia to wyrażenie przez *brył.* AG, będziemy mieli

$$\textit{brył.}\ AG = AB \times AD \times AE.$$

I w tym to razie można tylko mówić: że *równoległościan prostokątny ma za miarę wie-*

to-

*loczyn z trzech krawędzi zbiegaiących się w tym samym kącie bryłowym*, a który pospolicie dla skrócenia nazywa się trzema iego rozmiarami.

Widzieliśmy nadto (Zad. IV. K. III. Uwaga), że wyrażenie AB × AD, iest miarą podstawy ABCD równoległościanu, więc będziemy mieli

*bryt.* AG = *podstawie* ABCD × AE.

Z kąd widzimy ieszcze, *że równoległościan prostokątny iest równy wieloczynowi z podstawy przez wysokość.*

Wielkość bryły, iey obiętość czyli iey rozciągłość stanowi to, co nazywamy iey *bryłowatością*, a wyraz *bryłowatość*, używa się szczególniey na oznaczenie miary pewney bryły: więc mówić będziemy, *bryłowatość równoległościanu prostokątnego iest równa wieloczynowi z podstawy przez wysokość*, albo *wieloczynowi z trzech iego rozmiarów.*

Jeżeli w sześcianie kubicznym krawędź oznaczymy przez 1, 2, 3, i t. d. bryłowatość wyrazi się przez $1 \times 1 \times 1 = 1$; $2 \times 2 \times 2 = 8$; $3 \times 3 \times 3 = 27$ it. d. Z tąd widzimy dla czego w Arytmetyce nazwaliśmy *sześcianem* wieloczyn, wypadaiący z rozmnożenia trzech czymików równych. (Art. §. 122).

## ZADANIE XIV.

### *Twierdzenie.*

*Bryłowatość równoległościanu, i wogól-*

*no-*

*łości bryłowatość iakiegokolwiek pryzmatu, iest równa wieloczynowi z podstawy przez wysokość.*

Ponieważ 1*mo* równoległościan iakikolwiek iest równo-wartuiący *równoległościanowi prostokątnemu* tey samey wysokości i podstawy równo-wartuiącey (Zad. X. Uwaga). Bryłowatość zaś tego ostatniego iest równa iego podstawie mnożoney przez wysokość, a zatém bryłowatość pierwszego iest równa wieloczynowi z podstawy przez wysokość.

2*do* Każdy pryzmat czyli graniastosłup tróykątny iest połową równoległościanu maiącego tę samę wysokość i dwa razy większą podstawę (Zad. VIII). Bryłowatość zaś tego ostatniego równa iego podstawie mnożoney przez wysokość; więc bryłowatość pryzmatu tróykątnego iest równa wieloczynowi z iego podstawy (połowy podstawy równoległościanu) mnożoney przez wysokość.

3*tio* Pryzmat iakikolwiek, może bydź podzielony na tyle pryzmatów tróykątnych tey samey wysokości, ile można złożyć tróykątów w wieloboku służącym za podstawę. Lecz bryłowatość każdego pryzmatu tróykątnego iest równa iego podstawie mnożoney przez wysokość, i gdy wysokość iest ta sama dla wszystkich; więc summa wszystkich pryzmatów cząstkowych, będzie równa summie wszystkich tróykątów służących za podstawy, mnożoney przez wysokość wspólną. Azatém bry-

ło-

łowatość iakiegokolwiek pryzmatu wielokatnego, iest równa wieloczynowi z iego podstawy przez wysokość.

*Wniosek.* Wyraziwszy przez P, *p*, bryłowatość dwóch pryzmatów; przez H, *h*, wysokości, przez B, *b*, podstawy, będziemy mieli $P = H \times B$, $p = h \times b$; z kąd nam wypada następuiąca proporcya:

$$P : p :: H \times B : h \times b$$

Jeżeli podstawy są równe będziemy mieli

$$P : p :: H : h$$

Jeżeli wysokości są równe otrzymamy

$$P : p :: B : b.$$

Więc pryzmata tey samey podstawy są iak wysokości, tey zaś samey wysokości, iak podstawy.

## ZADANIE XV.

### *Twierdzenie przybrane.*

*Jeżeli piramida czyli ostrosłup* SABCDE, *iest przecięta przez płaszczyznę abcde równoległą do podstawy.* (fig. 214).

1*mo* Krawędzie SA, SB, SC, SD, SE, i wysokość SO, są pocięte proporcyonalnie w punktach *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *o*;

2*do* Odcięcie *abcde*, iest wielobokiem podobnym do podstawy ABCDE.

Ponieważ 1*mo* płaszczyzny ABCDE, *abcde*, są do siebie równoległemi, ich przecięcia AB, *ab*, przez płaszczyznę trzecią SAB,

SAB, są także równoległemi (Zad. X. K. V.); więc tróykąty SAB, S*ab*, będąc podobne, daią proporcyą następuiącą

$$SA : Sa :: SB : Sb$$

będziemy mieli także

$$SB : Sb :: SC : Sc, \text{ i t. d.}$$

więc wszystkie krawędzie SA, SB, SC i t. d., są pocięte proporcyonalnie w punktach *a*, *b*, *c*, i t. d. Wysokość SO, iest przeciętą w tey samey proporcyi w punkcie *o*; ponieważ BO będąc równoległą do *bo*, tróykąty SBO, S*bo* daią proporcyą

$$SO : So :: SB : Sb.$$

Ponieważ 2*do* linija *ab* iest równoległą do AB, *bc* do BC, *cd* do CD, it.d. kąt $abc = ABC$, $bcd = BCD$ i t. d.; nadto z przyczyny tróykątów podobnych SAB, S*ab*, mamy

$$AB : ab :: SB : Sb$$

z przyczyny zaś tróykątów podobnych SBC, S*bc*, mamy

$$BC : bc :: SB : Sb, \text{ z tąd}$$

$$AB : ab :: BC : bc;$$

będziemy mieli także

$$BC : bc :: CD : cd \text{ i t. d.}$$

Więc wieloboki ABCDE, *abcde*, maiące kąty równe i boki odpowiadaiące proporcyonalne, są podobne.

*Wniosek.* Niech będą SABCDE, SXYZ dwie piramidy maiące wierzchołek wspólny, i tę samę wysokość, czyli których podstawy leżą na tey samey płaszczyznie; ieżeli te pi-

ra-

ramidy przetniemy tą samą płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstaw, powiadam, *że odcięcia abcde, xyz, będą między sobą iak podstawy* ABCDE, XYZ.

Ponieważ dla podobieństwa wieloboków ABCDE, *abcde*, ich powierzchnie są iak kwadraty z boków odpowiadaiących AB, *ab* (Zad. XXVII. K. III.); lecz

$$AB : ab :: SA : Sa, \text{ więc}$$

$$ABCDE : abcde :: \overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2.$$

dla tey samey przyczyny

$$XYZ : xyz :: \overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2.$$

Gdy *abcxyz* iest iedną i tą samą płaszczyzną, więc $SA : Sa :: SX :: Sx$ z tąd

$$ABCDE : abcde :: XYZ : xyz;$$

azatém dwa odciecia *abcde*, *xyz*, są między soką iak podstawy ABCDE, XYZ.

## ZADANIE XVI.

### *Twierdzenie przybrane.*

*Bryłowatość każdey piramidy tróykątney, iest większa od czwartey części wieloczynu z podstawy przez wysokość, a mnieysza od połowy tego wieloczynu.* (fig. 215).

Niech będzie SABC piramida tróykątna, którey S wierzchołkiem, ABC podstawą; ieżeli podzielimi krawędzie SA, SB, SC, AB, AC, BC, na dwie części równe w punktach D, E, F, G, H, I, i przez te punkta poprowadzimy linije DE, EF, DF, EG, FH, FH, EI, GI, GH; powiadam, że piramida SABC składać się będzie z dwóch pryzmatów AGHFED, EGICFH, równo-wartuiących; i dwóch piramid SDEF, EGBI równych. /Z wykreślenia ED iest równoległą do AB, GE do AS; więc figura ADEG iest równoległobokiem. Dla tey samey przyczyny iest równoległobokiem figura ADFH; azatem trzy linije proste AD, GE, HF, będąc równe i równoległe, bryła AGHFDE iest pryzmatem (Zad. XIV. K. V). Dowiodłszy podobnym sposobem że bryła EGICFH iest także pryzmatem, powiadam, że dwa te pryzmata tróykątne są równo-wartuiące.

Jakoż ieżeli na krawędziach GI, GE, GH, zbuduiemy równoległościan GX, pryzmat tróykątny GEICFH iest połową tego równoległościanu (Zad. VIII.), z drugiey strony pryzmat AGHFDE iest równy połowie równoległościanu GX (Zad. XIV.), ponieważ maiąc tę samę wysokość, tróykąt AGH podstawa pryzmatu, iest połową równoległoboku GICH (Zad. II. K. III), podstawy równoległościanu. Więc dwa pryzmata EGICFH, AGHEDF są równo-wartuiące.

Te dwa pryzmata odięte od całey piramidy SABC, pozostaną dwie piramidy SDEF, EGBI równe.

Gdy BE=SE, BG=AG=DE, EG=AD=SD, więc tróykąt BEG=ESD. Dla podobney przyczyny tróykąt BEI=ESF;

nad-

nadto pochyłość płaszczyzn BEG, BEI, iest równa pochyłości płaszczyzn ESD, ESF, ponieważ BEG leży na iedney płaszczyznie z ESD, podobnie iak BEI z ESF. Przeniosłszy piramidę EGBI, na piramidę SD EF, tróykąt EBG przystanie do SDE, płaszczyzna BEI padnie na płaszczyznę ESF, a ponieważ tróykąty EBI, SEF są równe i podobnie rozłożone, punkt I padnie na punkt F, i dwie piramidy SDEF, EGBI, zbiegną się całkiem iedna z drugą. Więc cała piramida SABC składa się z dwóch pryzmatów tróykątnych AGF, GIF, równo-wartuiących, i dwóch piramid SDEF, EGBI równych.

Azatém 1*mo* ieżeli z wierzchołka S, spuścimy na płaszczyznę ABC prostopadłą SO, przecinaiącą płaszczyznę DEF równoległą do ABC w punkcie P; ponieważ SD $=\frac{1}{2}$SA, SP$=\frac{1}{2}$SO (Zad. XV.); tróykąt zaś DEF$=\frac{1}{4}$ABC: więc bryłowatość pryzmatu AGHF DE$=\frac{1}{4}$ABC $\times$ $\frac{1}{2}$SO, bryłowatość zaś dwóch pryzmatów AGHFDE, EGICFH razem wziętych$=\frac{1}{4}$ABC $\times$ SO. Dwa te pryzmata są mnieysze od całey piramidy SABC, ponieważ w niey są zamknięte; azatém *bryłowatość piramidy tróykątney iest większa od czwartey części wieloczynu z podstawy przez wysokość.*

Nakoniec, ieżeli poprowadzimy linije proste DG, DH, będziemy mieli nową pirami-

dę

dę ADGH=SDEF; gdyż ułożywszy podstawę DEF, na podstawie równey AGH, kąty SDE, SDF, będąc równe kątóm DAG, DAH, linija DS padnie na AD (Zad. XXV. K. V.), i wierzchołek S, na wierzchołek D. Piramida ADGH iest mnieyszą od pryzmatu AGHDEF; ponieważ w nim iest zamknięta; azatém każda z piramid SDEF, EGBI, będąc mnieysza od pryzmatu AGHDEF, cała piramida SABC składaiąca się z dwóch piramid i dwóch pryzmatów, iest mnieyszą od czterech pryzmatów. Aże bryłowatość iednego pryzmatu $=\frac{1}{8}ABC\times SO$, bryłowatość cztery razy wzięta $=\frac{1}{2}ABC\times SO$. Więc *bryłowatość całey piramidy tróykątney iest mnieysza od połowy wieloczynu z podstawy przez wysokość.*

ZADANIE XVII.

*Twierdzenie.*

*Bryłowatość piramidy tróykątney iest równa trzeciey części wieloczynu z podstawy przez wysokość.* (fig. 215).

Niech będzie SABC piramida tróykątna iakakolwiek, którey podstawa ABC, wysokość SO; powiadam, że będziemy mieli *bryt.* $SABC=\frac{1}{3}ABC\times SO$, albo $SO\times\frac{1}{3}ABC$.

Jakoż, ieżeli przypuścimy że bryłowatość piramidy SABC nie iest równa $SO\times\frac{1}{3}ABC$, potrzeba aby tey piramidy bryłowa-

tość

tość była równa wieloczynowi z SO przez ilość większą albo mnieyszą od $\frac{1}{3}$ABC, przypuśćmy *naprzód* że mamy

*bryt.* $SABC = SO \times (\frac{1}{3}ABC + M)$.

M, wyrażać będzie pewną powierzchnię.

Poprowadziwszy przez punkt D, srzodek krawędzi SA, płaszczyznę DEF równoległą do podstawy ABC; piramida SABC podzieli się na dwie piramidy równe SDFE, EGBI, i na dwa pryzmata równo-wartuiące AGHDEF, EGIFHC (Zad. XVI). PO, będąc wysokością pierwszego z tych pryzmatów, mamy

$$AGHDEF = PO \times DEF$$

więc summa dwóch pryzmatów to iest:

$$2AGHDEF = 2PO \times DEF \text{ albo } SO \times DEF$$

Jeżeli odejmiemy wartość summy dwóch pryzmatów, od wartości całey piramidy SABC, reszta wyrażać będzie wartośś dwóch piramid SDEF, EGBI, to iest:

$$2SDEF = SO \times (\tfrac{1}{3}ABC - DEF + M)$$

gdy $ABC = 4DEF$ więc

$$\tfrac{1}{3}ABC - DEF = \tfrac{4}{3}DEF - \tfrac{3}{3}DEF = \tfrac{1}{3}DEF$$

co podstawiwszy otrzymamy

$$2SDEF = SO \times (\tfrac{1}{3}DEF + M),$$

ponieważ $\frac{1}{2}SO = SP$, biorąc połowę z obu stron znaydziemy

*bryt.* $SDEF = SP \times (\frac{1}{3}DEF + M)$.

Zkąd widzimy, że dla otrzymania bryłowatości piramidy SDEF, potrzeba mnożyć wysokość, przez trrecią część podstawy, powięk-

szo-

szoney tą samą powierzchnią M, którąśmy powiększyli trzecią część podstawy piramidy poprzedzaiącey SABC.

Przez punkt K, srzodek krawędzi SD, poprowadziwszy płaszczyznę KLM równoległą do DEF, przecinaiącą SP w punkcie Q. Piramidę SDEF rozłożymy na dwa pryzmata tróykątne równo-wartuiące, i dwie piramidy równe; a rozumuiąc iak wyżey, znaydziemy na wyrażenie iedney z tych piramid, którey wysokość SQ

*bryt.* $SKLM = SQ \times (\frac{1}{3}KLM + M)$,

M, będąc zawsze tą samą powierzchnią, którąśmy dodali do trzeciey części podstaw dwóch piramid poprzedzaiących SDEF, SABC.

Składaiąc tym sposobem piramidy, iż każdey następuiącey podstawa będzie czwartą częścią podstawy piramidy poprzedzaiącey, pryidziemy do piramidy z podstawą tak małą iak sami będziemy chcieli. Niech *np.* w piramidzie wyrażoney przez

*bryt.* $Sabc = So \times (\frac{1}{3}abc + M)$

$\frac{1}{3}abc + M > \frac{1}{2}abc$, to iest: że

$M > \frac{1}{6}abc$, co zawsze bydź może.

W tym przypadku mielibyśmy

$So \times (\frac{1}{3}abc + M) > So \times \frac{1}{2}abc$

Azatém *bryt.* $Sabc > So \times \frac{1}{2}abc$, co bydź niemoże, dowiedliśmy bowiem w Zadaniu poprzedzaiącém, że bryłowatość piramidy tróykątney iest mnieysza od połowy wieloczynu z podstawy przez wysokość; azatém piramida

SABC

SABC niemoże bydź równą wieloczynowi z wysokości SO, przez ilość większą od trzeciey części podstawy.

Przypuśćmy *powtóre*: że

$$Bryt.\ SABC = SO \times (\tfrac{1}{3}ABC - M),$$

będziemy mieli iak w przypadku poprzedzaiącym na wyrażenie dwóch pierwszych pryzmatów rowno-wartuiących AGHDEF, EGIFHC,

$$2AGHDEF = SO \times DEF.$$

Odiąwszy ten wypadek od poprzedzaiącego, i uważaiąc że

$$ABC = 4DEF,$$

wykonywaiąc te same uproszczenia iak wyżey znaydziemy

$$2SDEF = SO \times (\tfrac{1}{3}DEF - M)$$

a z tąd

$$SDEF = SP \times (\tfrac{1}{3}DEF - M).$$

Składaiąc następnie iak w przypadku poprzedzaiącym piramidy, te wszystkie będą miały na wyrażenie wieloczyn z ich wysokości przez trzecią część podstawy zmnieyszoney tą samą powierzchnią M. Ilości zaś $\frac{1}{3}ABC$, $\frac{1}{3}DEF$, $\frac{1}{3}KLM$, $\frac{1}{3}abc$, co raz umnieyszaiąc się, stać się mogą mnieysze od powierzchni M, która, albo zamknie się między dwiema ilościami tuż po sobie następuiącemi, albo iedney stanie się równą. Przypuśćmy *np.* że M, będzie zamkniętą między $\frac{1}{3}abc$, i powierzchnią tuż następuiącą $\frac{1}{4}.\frac{1}{3}abc$, albo $\frac{1}{12}abc$, tak że będziemy mieli $\frac{1}{3}abc > M$, zaś $\frac{1}{12}abc < M$; co

E się

się tycze pierwszey nierówności będziemy mogli odjąć M od $\frac{1}{3}abc$, co zaś do drugiey, otrzymamy różnicę

$\frac{1}{3}abc - M < \frac{1}{3}abc - \frac{1}{12}abc$ czyli

$\frac{1}{3}abc - M < \frac{1}{4}abc$ azatém

$So \times (\frac{1}{3}abc - M) < So \times \frac{1}{4}abc$, to iest że *Bryt.* $Sabc < So \times \frac{1}{4}abc$, co bydź niemoże (Zad. XVI).

Przypuściwszy $M = \frac{1}{3}abc$, wyrażenie bryłowatości piramidy $Sabc$, to iest: $So \times (\frac{1}{3}abc - M)$ stanie się *zerem*, co iest także niepodobieństwem.

Więc gdy bryłowatość piramidy SABC niemoże bydź równą wieloczynowi z wysokości SO, przez ilość mnieyszą lub większą od trzeciey części podstawy ABC, azatém

*Bryt.* $SABC = SO \times \frac{1}{3}ABC$ albo $= \frac{1}{3}SO \times ABC$.

*Wniosek I.* Każda piramida tróykątna, iest trzecią częścią pryzmatu tróykątnego tey samey podstawy i wysokości.

*Wniosek II.* Wyraziwszy przez $P$, $p$, bryłowatość dwóch piramid, przez $H$, $h$, wysokości, przez $B$, $b$, podstawy, będziemy mieli $P = \frac{1}{3}H \times B$, $p = \frac{1}{3}h \times b$, zkąd nam wypada proporcya

$P : p :: \frac{1}{3}H \times B : \frac{1}{3}h \times b$, albo

$P : p :: H \times B : h \times b$.

Jeżeli $H = h$, otrzymamy

$P : p :: B : b$.

Jeżeli zaś $B = b$, będziemy mieli

$P : p :: H : h$.

Więc

Więc *dwie piramidy tróykątne* tey samey wysokości są iak podstawy: tey zaś samey podstawy iak wysokości.

## ZADANIE XVIII.

### *Twierdzenie.*

*Każda piramida ma za miarę trzecią część wieloczynu z podstawy przez wysokość.*

Przepuściwszy płaszczyzny (fig. 214.), SEB, SEC, przez przekątne EB, EC, piramidę wielokątną SABCDE, podzielimy na kilka piramid tróykątnych maiących tę samę wysokość SO. Gdy podług twierdzenia poprzedzaiącego każda z tych piramid mierzy się mnożąc podstawy ABE, BCE, CDE, przez trzecią część wysokości SO; więc summa piramid tróykątnych, albo piramida wielokątna SABCDE, będzie miała za miarę summę tróykątów ABE, BCE, CDE, albo wielobok ABCDE, mnożony przez $\frac{1}{3}$ SO; azatém każda piramida ma za miarę trzecią część wieloczynu z podstawy przez wysokość.

*Wniosek I.* Każda piramida iest trzecią częścią pryzmatu tey samey podstawy i wysokości.

*Wniosek II.* Dowiedziemy podobnym sposobem iak we wniosku II. Zad. XVII., że dwie piramidy tey samey wysokości są iak podstawy, tey zaś samey podstawy iak wysokości.

*Uwaga.* Możemy ocenić bryłowatość każdego wielościanu rozkładaiąc go na piramidy, a ten rozkład wykonać się może wielu sposobami: ieden z nayprostszych, przepuścić płaszczyzny dzielące przez wierzchołek tego samego kąta bryłowego, naówczas będziemy mieli tyle piramid cząstkowych, ile będzie scian w wielościanie, wyiąwszy sciany składaiące kąt bryłowy, z którego rozchodziły się płaszczyzny dzielące.

## ZADANIE XIX.

### *Twierdzenie.*

*Dwa wielościany symetryczne są równo-wartuiące, czyli równe w bryłowatości.* (fig. 202).

1*mo* Dwie piramidy tróykątne symetryczne SABC, TABC, maiące za wspólną miarę wieloczyn z podstawy ABC, przez trzecią część wysokości SO=TO, są równo-wartuiące.

2*do* Podzieliwszy iakimkolwiek sposobem ieden z wielościanów symetrycznych na piramidy tróykątne, będziemy mogli także podzielić drugi wielościan na piramidy tróykątne symetryczne; i gdy piramidy tróykątne symetryczne są równo-wartuiące, więc dwa wielościany całkowite symetryczne, są także równo-wartuiące, czyli równe w bryłowatości.

ZADA-

## ZADANIE XX.

*Twierdzenie.*

*Przeciąwszy piramidę płaszczyzną równoległą do podstawy, pozostała piramida ucięta, iest równa summie trzech piramid, maiących za wysokość wspólną, wysokość piramidy uciętey, a za podstawy, podstawę niższą piramidy uciętey, podstawę wyższą, i srzednią proporcyonalną między temi dwiema ostatniemi podstawami.* (fig. 217).

Niech będzie SABCDE piramida przecięta płaszczyzną *abcde*, równoległą do podstawy; niech TFGH, będzie piramidą tróykątną maiącą podstawę i wysokość równą lub równo-wartuiącą podstawie i wysokości piramidy poprzedzaiącey. Wystawiwszy dwie podstawy leżące na tey samey płaszczyznie, naówczas płaszczyzna *abcde* przedłużona, oznaczy w piramidzie tróykątney odcięcie *fgh*, będące w tey samey wysokości nad wspólną płaszczyzną podstaw: z kąd wypada

*fgh*:*abcde*::FGH:ABCDE (Zad. XV.);

gdy podstawy są równo-wartuiące, odcięcia *fgh*, *abcde*, będąc takiemiż, piramidy S*abcde*, T*fgh*, i piramidy całkowite SABCDE, TEGH są także równo-wartuiące; więc piramidy ucięte ABCDE *abcde*, FGH *fgh*, będąc równowartuiącemi, na dowodzenie dosyć iest wziąść piramidę tróykątną.

Na ten koniec niech będzie FGH *hfg* (fig.

(fig. 218). piramida ucięta: płaszczyzna przechodząca przez trzy punkta F, $g$, H, odetnie od piramidy uciętey, piramidę tróykątną $g$F GH, maiącą za podstawę, podstawę niższą FGH piramidy uciętey, zaś za wysokość, wysokość piramidy uciętey, gdyż wierzchołek $g$, leży na płaszczyznie równoległey do podstawy niższey.

Odiąwszy tę piramidę, pozostanie piramida czworokątna $gfh$HF, którey wierzchołkiem iest $g$, podstawą $fh$HF. Płaszczyzna przechodząca przez trzy punkta $f$, $g$, H, podzieli piramidę czworokątną na dwie piramidy tróykątne $g$F$f$H, $gfh$H; z których ostatnia ma za podstawę, podstawę wyższą $gfh$ piramidy uciętey, za wysokość, wysokość piramidy uciętey, ponieważ iey wierzchołek H, leży na płaszczyznie równoległey do podstawy wyższey.

Co się tycze trzeciey piramidy tróykątney, $g$F$f$H: poprowadziwszy $g$K równolegle do $f$F, wystawić możemy nową piramidę $f$FHK, którey wierzchołkiem iest K, podstawą F$f$H; dwie te piramidy będą miały tę samę podstawę F$f$H, i tę samę wysokość, ponieważ wierzchołki $g$ i K, leżą na linij $g$K równoległey do F$f$, azatém równoległey do płaszczyzny podstawy; więc te piramidy są równo-wartuiące. Lecz piramidy $f$FKH wierzchołek może bydź uważany w $f$, azatém będzie miała wysokość piramidy uciętey; co

do

do podstawy FKH, powiadam, że iest srzednią proporcyonalną między podstawami FGH, *fgh*. Jakoż, w tróykątach FHK, *fgh*, gdy kąt F$=f$, bok FK$=fg$, mamy (Zad. XXIV. K. III).

$$FHK : fgh :: FH : fh$$

mamy także

$$FHG : FHK :: FG : FK \text{ albo } fg.$$

Lecz tróykąty podobne FHG, *fgh* daią

$$FG : fg :: FH : fh, \text{ azatém}$$

$$FHG : FHK :: FHK : fgh.$$

## ZADANIE XXI.

### *Twierdzenie.*

*Przeciąwszy pryzmat tróykątny płaszczyzną* DEF (fig. 216.), *pochyłą do podstawy* ABC, *pozostała z tąd bryła, równa będzie summie trzech piramid, których wierzchołkami są punkta* D, E, F, *podstawą zaś wspólną* ABC.

Płaszczyzna przechodząca przez trzy punkta F, A, C, odetnie pryzmatowi uciętemu ABCDEF piramidę tróykątną FABC, mającą za podstawę ABC, a którey wierzchołkiem iest punkt F.

Odiąwszy tę piramidę, pozostanie piramida czworokątna FACDE, którey wierzchołkiem F, podstawą ACDE. Płaszczyzna przechodząca przez punkta E, F, C, podzieli tę

osta-

ostatnią na dwie piramidy tróykątne AEFC, DEFC.

bez sensu

[Piramida AEFC maiąca za podstawę tróykąt AEC, a którey wierzchołkiem iest punkt F, iest równo-wartuiącą piramidzie BAEC maiącey za podstawę AEC, a którey punkt B wierzchołkiem. Te dwie piramidy maiące tę samę podstawę i wysokość, gdyż linija BF będąc równoległą do AE, CD, iest równoległą do płaszczyzny ACE, są równo-wartuiące; lecz w piramidzie BAEC, możemy wziąść ABC za podstawę, zaś punkt E za wierzchołek.]

Co się tycze piramidy DEFC, ta naprzód zamienioną bydź może na AFCD maiącą tę samę podstawę FCD, i wysokość; gdyż AE, iest równoległą do płaszczyzny FCD. Piramida zaś AFCD zamienioną bydź może na ABCD maiącą tę samę podstawę ACD, i wysokość; gdyż wierzchołki F i B, leżą na linij równoległey do płaszczyzny ACD. Więc piramida DEFC będąc równo-wartuiącą piramidzie ABCD, w tey ostatniey ABC możemy wziąść za podstawę, punkt zaś D za wierzchołek.

*Wniosek.* Jeżeli krawędzie AE, BF, CD, są prostopadłemi do płaszczyzny ABC, będą razem wysokościami trzech piramid składaiących pryzmat ucięty, a bryłowatość pryzmatu uciętego wyrazi się

$$\tfrac{1}{3}ABC \times AE + \tfrac{1}{3}ABC \times BE + \tfrac{1}{3}ABC \times CD$$

czyli

czyli $\frac{1}{3}ABC \times (AE + BF + CD)$.

## ZADANIE XXII.

*Twierdzenie.*

*Dwie piramidy tróykątne podobne, maią sciany odpowiadaiące podobne, a kąty bryłowe odpowiadaiące równe.* (fig. 203).

Podług opisania, dwie piramidy tróykątne SABC, TDEF są podobne, ieżeli tróykąty SAB, ABC, są podobne do tróykątów TDE, DEF, i podobnie rozłożone; to iest, ieżeli kąt ABS = DET, BAS = EDT, ABC = DEF, BAC = EDF, i pochyłość płaszczyzn SAB, ABC, równa pochyłości płaszczyzn TDE, DEF.

Wziąwszy BG = ED, BH = EF, BI = ET, złączmy GH, GI, IH. Piramida TDEF, iest równa piramidzie IGBH, ~~gdyż~~ boki GB, BH, będąc równe bokom DE, EF, kąt GBH, równy z przypuszczenia kątowi DEF, tróykąt GBH = DEF. Przenosząc iednę piramidę na drugą, podstawa DEF przystanie do podstawy GBH; a ponieważ pochyłość dwóch płaszczyzn DTE, DEF, iest równa pochyłości płaszczyzn SAB, ABC płaszczyzna DET padnie na płaszczyznę ABS. Lecz z przypuszczenia kąt DET = GBI, więc ET padnie na BI; i gdy cztery punkta D, E, F, T, zbiegną się ze czterma punktami G, B, H, I,

z racji zrównania

et puisque les quatre points coincident

H, I, (Zad. I.), piramida TDEF zbieży się z piramidą IGBH.

Z przyczyny tróykątów równych DEF, GBH, kąt BGH=EDF=BAC; więc linija GH iest równoległą do AC, GI do AS (Zad. XXIII. K. I.); azatém płaszczyzna IGH iest równoległą do płaszczyzny SAC (Zad. XIII. K. V). Z tąd wypada, że tróykąt IGH albo iemu równy TDF, iest podobny tróykątowi SAC (Zad. XIV.); tróykąt IBH=TEF, podobny SBC; więc dwie piramidy tróykątne podobne SABC, TDEF maią cztéry ściany odpowiadaiące podobne.

Dowiedliśmy iuż, że kąt bryłowy E, iest równy kątowi odpowiadaiącemu B, gdy pozostałe kąty bryłowe odpowiadaiące, powstaią z trzech kątów płaskich równych i podobnię rozłożonych, więc dwie piramidy tróykątne podobne, maią ściany odpowiadaiące podobne, a kąty bryłowe odpowiadaiące równe.

*Wniosek I.* Tróykąty podobne w dwóch piramidach, daią proporcye następuiące:

AB:DE::BC:EF::AC:DF::AS:DT ::SB:TE::SC:TF;

Więc *w piramidach tróykątnych podobnych, krawędzie odpowiadaiące są proporcyonalne.*

*Wniosek II.* Dla tego że kąty bryłowe odpowiadaiące są równe, *pochyłość dwóch ścian iakichkolwiek wiedney piramidzie, iest rowna pochyłości dwoch ścian odpowiadaiących w piramidzie drugiey podobney.*

*Wnio-*

*Wniosek III.* Jeżeli przetniemy piramidę tróykątną SABC, płaszczyzna GIH równoległą do ściany SAC; piramida cząstkowa BGIH, będzie podobna do piramidy całkowitey BASC: ponieważ tróykąty BGI, BGH, będąc podobne tróykątom BAS, BAC, i podobnie rozłożone, nadto pochyłość ich płaszczyzn iest równa, więc dwie piramidy są podobne.

*Wniosek IV.* W ogólności, *ieżeli przetniemy piramidę iakąkolwiek* SABCDE (fig. 214.), *płaszczyzną a b c d e równoległą do podstawy, piramida cząstkowa, Sabcde, będzie podobną piramidzie całkowitey* SAB CDE. Gdy podstawy ABCDE, *abcde*, są podobne, złączywszy AC, *ac*, dowiedliśmy, że piramida tróykątna SABC, iest podobną piramidzie S*abc*; więc punkt S, iest oznaczony w stosunku do podstawy ABC, iak punkt S, w stosunku do podstawy *abc* (Opis. XVIII.); azatem dwie piramidy SABCDE, S*abcde*, są podobne.

*Uwaga. Dwie piramidy tróykątne są podobne, skoro maią krawędzie odpowiadaiące proporcyonalne.*

Ponieważ maiąc proporcye (fig. 203).

AB:DE::BC:EF::AC:DF::AS:DT::
SB:TE::SC:TF,

tróykąty ABS, ABC będą podobne tróykątom DET, DEF i podobnie rozłożone.

Bę-

opuszczam początek uwagi
którego wytłumaczyć nie mam

Będziemy mieli także tróykąt SBC podobny tróykątowi TEF; więc trzy kąty płaskie składaiące kąt bryłowy B, będąc równe trzem kątom płaskim składaiącym kąt bryłowy E, wypada, że pochyłość płaszczyzn SAB, ABC, równa pochyłości płaszczyzn odpowiadaiących TDE, DEF, azatém dwie piramidy są podobne.

## ZADANIE XXIII.

### *Twierdzenie.*

*Dwa wielościany podobne, maią ściany odpowiadaiące podobne, a kąty bryłowe odpowiadaiące równe.* (fig. 219).

Niech będzie ABCDE podstawa wielościanu; M, N, wierzchołki dwóch kątów bryłowych zewnątrz tey podstawy, oznaczone piramidami tróykątnemi MABC, NABC, których podstawą wspólną iest ABC; niech będą w drugim wielościanie, *abcde* podstawa odpowiadaiąca czyli podobna podstawie ABCDE; *m*, *n*, wierzchołki odpowiadaiące M, N, oznaczone piramidami *mabc*, *nabc*; powiadam 1*mo* że odległości MN, *mn*, są proporcyonalne bokom odpowiadaiącym AB, *ab*.

Piramida MABC, będąc podobną piramidzie *mabc*, pochyłość płaszczyzn MAC, BAC, równa pochyłości płaszczyzn *mac*, *bac*; dla podobney przyczyny pochyłość płaszczyzn NAC, BAC, iest równa pochyłości

pła-

płaszczyzn *nac*, *bac*: odiąwszy pierwsze pochyłości od ostatnich, pozostanie pochyłość płaszczyzn NAC, MAC, równa pochyłości płaszczyzn *nac*, *mac*.

Lecz dla podobieństwa tych samych piramid, tróykąty MAC, NAC, są podobne tróykątom *mac*, *nac*: Więc dwie piramidy tróykątne MNAC, *mnac*, maiące dwie ściany podobne, podobnie rozłożone, i równo do siebie nachylone, są podobne (Zad. XX.); ich zaś krawędzie odpowiadaiące daią proporcyą

MN : *mn* : : AM : *am*, nadto
AM : *am* : : AB : *ab*, więc
MN : *mn* : : AB : *ab*.

Niech będą P, *p*, dwa drugie wierzchołki odpowiadaiące tych samych wielościanów, będziemy także mieli

PN : *pn* : : AB : *ab*,
PM : *pm* : : AB : *ab*; więc
MN : *mn* : : PN : *pn* : : PM : *pm*.

Azatém *tróykąt* PNM, *łączący trzy wierzchołki iakiekolwiek wielościanu, iest podobny tróykątowi p n m, łączącemu trzy wierzchołki odpowiadaiące wielościanu drugiego.*

Niech będą ieszcze Q, *q*, dwa wierzchołki odpowiadaiące, a tróykąt PQN będzie podobny tróykątowi *pqn*. Powiadam nadto, że pochyłość płaszczyzn PQN, PMN, iest równa pochyłości płaszczyzn *pqn*, *pmn*. [Kąt bryłowy N, składaiący się z trzech kątów płaskich QNM, QNP, PNM, iest równy kątotowi bryłowemu *n*, składaiącemu się z trzech kątów płaskich *qnm*, *qnp*, *pnm*, równych pierwszym; a zatém pochyłość płaszczyzn PNQ, PNM, iest równa pochyłości płaszczyzn odpowiadaiących *pnq*, *pnm*; więc ieżeli dwa tróykąty PNQ, PNM, leżą na tey samey płaszczyznie, w którym przypadku mielibyśmy kąt $QNM = QNP + PNM$, mielibyśmy także kąt $qnm = qnp + pnm$, a dwa tróykąty *qnp*, *pnm*, leżałyby także na tey samey płaszczyznie. To wszystko cośmy teraz dopiero dowiedli, ma mieysce iakiekolwiek będą kąty M, N, P, Q, porównane z kątami odpowiadaiącemi *m*, *n*, *p*, *q*.

Jeżeli powierzchnia iednego wielościanu, podzieloną będzie na tróykąty ABC, ACD, MNP, NPQ i t. d.; powierzchnia wielościanu drugiego zamykać będzie podobną liczbę tróykątów *abc*, *acd*, *mnp*, *npq* i t. d. podobnych i podobnie rozłożonych; i ieżeli kilka tróykątów, iakiemi są MPN, NPQ i t. d. leżą na tey samey płaszczyznie, tróykąty im odpowiadaiące *mpn*, *npq* i t. d. leżeć także będą na tey samey płaszczyznie. Więc każda ściana wieloboczna w iednym wielościanie, odpowiadać będzie ścianie wieloboczney w wielościanie drugim; a dwa wielościany obięte będą pod tą samą liczbą płaszczyzn podobnych, i podobnie rozłożonych. Powiadam nadto, że kąty bryłowe odpowiadaiące będą równe. Ponieważ *np.* ieżeli kąt bryłowy N,

skła-

składa się z kątów płaskich QNP, PNM, MNR, QNR, kąt bryłowy odpowiadaiący $n$, składać się będzie z kątów płaskich $qnp$, $pnm$, $mnr$, $qnr$. Gdy te kąty płaskie, i pochyłości dwóch płaszczyzn przyległych odpowiadaiących są równe, dwa kąty bryłowe są także równe, iako mogące całkiem przystać do siebie. Azatém dwa wielościany podobne maią ściany odpowiadaiące podobne, a kąty bryłowe odpowiadaiące równe.

*Wniosek.* Jeżeli ze czterech wierzchołków wielościanu, złożymy piramidę tróykątną, i gdy złożymy drugą ze czterech wierzchołków odpowiadaiących wielościanu podobnego, dwie te piramidy, maiące krawędzie odpowiadaiące proporcyonalne będą podobne.

Widzimy razem, że dwie przekątne odpowiadaiące AN, $an$, są między sobą iak boki odpowiadaiące AB, $ab$.

## ZADANIE XXIV.

### *Twierdzenie.*

*Dwa wielościany podobne, mogą się dzielić na tę samę liczbę piramid tróykątnych podobnych, i podobnie rozłożonych.*

Widzieliśmy iuż, że powierzchnie dwóch wielościanów dzielić się mogą na tę samę liczbę tróykątów podobnych, i podobnie rozłożonych. Uważaiąc wszystkie tróykąty wielościanu, wyiąwszy składaiące kąt bryłowy A, iako

si . . . . dque . . autor [illegible] [illegible] [illegible]
[illegible]

iako podstawy tylu piramid tróykątnych, których wierzchołkiem iest A; te piramidy wzięte razem składać będą wielościan: podzieliwszy także drugi wielościan na piramidy maiące wspólny kąt *a*, odpowiadaiący A; iasną iest rzeczą, że piramida łącząca cztery wierzchołki iednego wielościanu, będzie podobna piramidzie łączącey cztery wierzchołki odpowiadaiące w wielościanie drugim. Więc dwa wielościany podobne, mogą się dzielić na tę samę liczbę piramid tróykątnych podobnych, i podobnie rozłożonych.

## ZADANIE XXV.

### *Twierdzenie.*

*Dwie piramidy podobne są między sobą, iak sześciany z boków odpowiadaiących.* (fig. 214).

Gdy dwie piramidy są podobne, naymnieysza może bydź umieszczona w naywiększey tak, ze maiąc kąt bryłowy S wspólny, podstawy ABCDE, *abcde*, będą równoległe; ponieważ ściany odpowiadaiące podobne, kąt S*a*b=SAB, S*bc*=SBC, więc płaszczyzna *abc* iest równoległą do płaszczyzny ABC (Zad. XIII. K. V). To założywszy, niech będzie SO prostopadła spuszczona z wierzchołka S, na płaszczyznę ABC, przecinaiąca płaszczyznę *abc*, w punkcie *o*; będziemy mieli (Zad. XV).

SO:

SO : So :: SA : Sa :: AB : *ab*; azatém

$\frac{1}{3}SO : \frac{1}{3}So :: AB : ab.$

Z podobieństwa zaś podstaw mamy (Zadanie XXVII. K. III).

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$$

Mnożąc te dwie proporcye wyraz z wyrazem otrzymamy

$$ABCDE \times \tfrac{1}{3}SO : abcde \times \tfrac{1}{3}So :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3;$$

gdy $ABCDE \times \frac{1}{3}SO$, iest miarą bryłowatości piramidy SABCDE (Zad. XVII.); zaś $abcde \times \frac{1}{3}So$, piramidy *Sabcde*, więc dwie piramidy podobne są między sobą iak sześciany z boków odpowiadaiących.

## ZADANIE XXVI.

### *Twierdzenie.*

*Dwa wielościany podobne są między sobą, iak sześciany z boków odpowiadaiących.* (fig. 219).

Ponieważ dwa wielościany podobne mogą bydź podzielone na tę samę liczbę piramid tróykątnych podobnych (Zad. XXIV). Dwie zaś piramidy podobne APNM, *apnm*, są między sobą iak sześciany z boków odpowiadaiących AB, *ab*. I gdy ten sam stosunek będzie miał mieysce między drugiemi dwiema iakiemikolwiek piramidami odpowiadaiącemi; więc summa wszystkich piramid składaiących wielościan, albo sam wielościan, iest do drugiego wielościanu, iak sześcian z boku

 ktoktórego kolwiek pierwszego, do sześcianu z boku odpowiadaiącego drugiego.

*Uwaga ogólna.*

Głównieysze zadania tey księgi, tyczące się bryłowatości wielościanów, wyraźmy sposobem Algiebraicznym.

Oznaczywszy przez B podstawy, zaś przez H wysokości pryzmatu i piramidy:

*bryłowatość pryzmatu* $= B \times H = BH$

*bryłowat. piram.* $= B \times \frac{1}{3}H = \frac{1}{3}B \times H = \frac{1}{3}BH.$

Wyraziwszy przez A i B podstawy piramidy uciętey, przez H wysokość; $\sqrt{AB}$, wyrażać będzie podstawę srzednio-proporcyonalną, więc

*bryłowatość piramidy uciętey* $= \frac{1}{3}H \times (A + B + \sqrt{AB})$.

Niech będzie B, podstawa pryzmatu tróykątnego uciętego, H, H', H'', wysokości iego trzech wierzchołków wyższych,

*bryłowatość pryzmatu uciętego* $= \frac{1}{3}B \times (H + H' + H'')$.

Oznaczywszy przez P, *p*, bryłowatości dwóch wielościanów podobnych, przez A, *a*, dwa boki lub dwie przekątne odpowiadaiące, będziemy mieli

$$P : p :: A^3 : a^3.$$

---

autor tłumaczy [illegible] [illegible] [illegible] i dla tego [illegible], choć w Legendre [illegible] DODA-

# DODATEK
## o *Wielościanach foremnych.*

*Pięć tylko mamy wielościanów foremnych.* Ponieważ podług opisania, wielościanami foremnemi nazywamy bryły, których ściany są wielobokami foremnemi równemi, a kąty bryłowe równe. Więc w małey tylko liczbie przypadków warunki te mogą mieć mieysce.

1*mo* Jeżeli ściany są tróykątami równobocznemi, z trzech, czterech i pięciu tylko kątów tych tróykątów, możemy złożyć kąt bryłowy wielościanu: z kąd będziemy mieli trzy bryły foremne iakiemi są: *czworościan*, (fig. 243.); *ośmiościan* (fig. 245.); *dwódziestościan* (fig. 247.); z kątów tróykątów równobocznych większey liczby brył foremnych złożyć niemożemy, ponieważ sześć tych kątów składaiąc cztery kąty proste, kąta bryłowego niezłożą (Zad. XXI. K. V).

2*do* Jeżeli ściany są kwadratami, z trzech kątów tych kwadratów złożywszy kąt bryłowy, wypadnie *sześcian foremny*, albo *kubiczny* (fig. 244.); cztery kąty kwadratów, wartuiąc cztery kąty proste, kąta bryłowego niezłożą.

3*tio* Nakoniec, ieżeli ściany są pięciobokami foremnemi, składaiąc ich kąty po trzy, wypadnie *dwónastościan foremny* (fig. 246).

Scian o większey liczbie boków brać niemożemy, ponieważ trzy kąty sześcioboku foremnego wartuią cztery kąty proste, zaś trzy kąty siedmioboku wartować będą ieszcze więcey. Azatém pięć tylko mamy wielościanów foremnych, trzy z tróykątów równobocznych, ieden z kwadratów, i ieden z pięcioboków.

KSIĘGA

# KSIĘGA VII.

## O Kuli.

### *Opisania.*

I. Bryła zakończona powierzchnią krzywą, którey wszystkie punkta są w równey odległości od punktu wziętego wewnątrz bryły nazwanego *srodkiem*, nazywa się *kulą*. Formowanie się kuli poymować możemy obrótem półkola DAE (fig. 220.), około srzednicy DE; slady w tym obrocie zostawione od linij krzywey DAE, złożą powierzchnią krzywą, którey wszystkie punkta będą w równey odległości od srzodka C.

II. Linija prosta idąca od srzodka do punktu powierzchni, nazywa się *promieniem kuli*; *srzednicą* zaś albo *osią*, linija prosta przechodząca przez srzodek, lecz zakończona z obu stron powierzchnią.

Wszystkie promienie kuli są równe, wszystkie srzednice dwa razy większe od promienia, są także równe.

III. Przeciąwszy kulę płaszczyzną, odcięcie będzie kołem: *kołem wielkiém*, gdy płaszczyzna przeydzie przez srzodek kuli, *kołem małém*, gdy mimo ten srzodek.

IV. Płaszczyzna maiąca ieden punkt wspólny z powierzchnią kuli, nazywa się *płaszczyzną styczną*. tylko

V. Punkt powierzchni kuli, równie oddalony od wszystkich punktów obwodu koła zakreślonego na teyże powierzchni, iest *biegunem* tego koła.

VI. Część powierzchni kuli obięta trzema łukami kół wielkich, nazywa się *tróykątem kulistym*. Łuki te (nazywaiące się także *bokami* tróykąta kulistego), zawsze są mnieysze od półobwodu koła. Kąty które ich płaszczyzny składaią między sobą, są kątami tróykąta kulistego.

VII. Tróykąty kuliste, dla tych samych przyczyn co tróykąty prostokreślne nazywaią się *prostokątnemi*, *równo-ramiennemi*, *równobocznemi* i t. d.

VIII. Część powierzchni kuli obięta więcey aniżeli trzema łukami kół wielkich, iest *wielobokiem kulistym*.

IX. *Taśmą spiczastą*, nazywać będziemy część powierzchni kuli, obiętą dwóma półobwodami kół wielkich, przecinaiących się na wspólney srzednicy.

X. *Klinem* zaś *kulistym*, część kuli zamkniętą między dwiema płaszczyznami półobwodów kół wielkich, i taśmą spiczastą.

XI. *Piramida kulista*, iest to część kuli obięta między płaszczyznami kąta bryłowego, którego wierzchołkiem iest srzodek, i wielobokiem kulistym, odciętym temi samemi płaszczyznami, służącym za podstawę piramidzie kulistey.

XII. Przez

sont toujours supposés
plus petits.

F [illegible]
[illegible] interceptés. [illegible]
E [illegible]

XII. Przez *Pas*, rozumieć będziemy część powierzchni kuli, odciętą dwiema płaszczyznami równoległemi, które są *podstawami* pasa. Jedna z tych płaszczyzn może bydź styczną do kuli, naówczas *pas* będzie o iedney podstawie.

XIII. *Odcinkiem kulistym*, nazywać będziemy część kuli obiętą dwiema płaszczyznami równoleglemi służącemi odcinkowi kulistemu za podstawy. Jedna z tych płaszczyzn może bydź styczną do kuli, naówczas odcinek kulisty będzie o iedney podstawie.

XIV. *Wysokością* pasa lub odcinka, iest prostopadła mierząca odległość dwóch płaszczyzn równoległych będących podstawami pasa i odcinka.

XV. W czasie, gdy półkole DAE obracaiąc się około srzednicy DE, opisuie kulę, każdy wycinek kołowy DCF, albo FCH, opisuie bryłę nazwaną *wycinkiem kulistym*.

Tandis que...

## ZADANIE PIERWSZE.

### *Twierdzenie.*

*Każde przecięcie kuli płaszczyzną iest kołem.* (fig. 221).

Niech będzie C srzodek kuli, AMB odcięcie. Z punktu C spuściwszy prostopadłą CO na płaszczyznę AMB, i do różnych punktów linij krzywey AMB ograniczaiącey odcię-

cię-

cięcie, poprowadziwszy pochyłe CM, CM, CB, CA, te będąc promieniami tey samey kuli są równe, a więc równo oddalone od prostopadłey CO (Zad. V. K. V.); azatém odcięcie AMB iest kołem, którego srzodkiem iest punkt O.

*Wniosek I.* Jeżeli odcięcie przechodzi przez srzodek kuli, iego promień będzie promieniem kuli, więc wszystkie wielkie koła są sobie równe.

*Wniosek II.* Dwa wielkie koła przecinaią się na dwie części równe, ponieważ wspólnem ich przecięciem się iest srzednica kuli.

*Wniosek III.* Każde wielkie koło, dzieli kulę i iey powierzchnię na dwie części równe; oddzieliwszy bowiem dwie półkule, te zupełnie przystaną do wspólney podstawy; obrócone zaś powierzchnie wypukłością ku tey samey stronie, i przyłożone, zbiegną się całkiem iedna z drugą, bez czego byłyby punkta bliższe lub dalsze srzodka, co iest przeciwko opisaniu kuli.

*Wniosek IV.* Srzodek kuli, i srzodek małego koła, znayduią się na tey samey linij prostey prostopadłey do płaszczyzny tego ostatniego.

*Wniosek V.* Małe koła o tyle są mnieysze, o ile są bardziey oddalone od srzodka kuli; ponieważ im odległość CO iest większą, tém cięciwa AB iest mnieyszą, która iest srzednicą małego koła AMB.

*Wnio-*

*Wniosek VI.* Przez dwa punkta dane na powierzchni kuli, możemy tylko poprowadzić ieden łuk koła wielkiego, ponieważ te dwa punkta ze srzodkiem kuli, są trzema punktami oznaczaiącemi położenie płaszczyzny. Gdyby dwa punkta dane były na ostatecznych końcach srzednicy, naówczas leżąc ze srzodkiem kuli na iedney linij prostey, tyle przez nie możemy poprowadzić łuków kół wielkich, ile się nam podobać będzie.

## ZADANIE II.

### *Twierdzenie.*

*W każdym tróykącie kulistym, bok którykolwiek iest mnieyszy od summy dwóch drugich.* (fig. 222).

Niech będzie ABC tróykąt kulisty, O srzodek kuli; poprowadziwszy promienie AO, BO, CO, ieżeli przepuścimy płaszczyzny AOB, AOC, COB, te złożą w punkcie O, kąt bryłowy, a kąty AOB, AOC, COB, będą miały za miarę boki AB, AC, BC, tróykąta kulistego ABC. Gdy każdy z trzech kątów płaskich składaiących kąt bryłowy, iest mnieyszy od summy dwóch drugich (Zad. XXI. K. V.); więc bok którykolwiek tróykąta ABC, iest mnieyszy od summy dwóch drugich.

## ZADANIE III.

### *Twierdzenie.*

*Naykrótsza droga na powierzchni kuli*

z ie-

[illegible]

*z iednego punktu do drugiego, iest łuk koła wielkiego łączący dwa punkta dane.* (fig. 225).

Niech będzie ANB łuk koła wielkiego, łączący punkta A i B; i niech będzie zewnątrz tego łuku, ieżeli bydź może punkt M, należący do linij naykrótszey między A i B. Przez punkt M, poprowadziwszy łuki kół wielkich MA, MB, weźmy NB=MB.

Podług twierdzenia poprzedzaiącego, łuk AN + NB < AM + MB; odeymuiąc z obu stron NB=MB, pozostanie AN < AM.

Odległość zaś od B do M, bądź, że się zbieży całkiem z łukiem BM, bądź że będzie całkiem inną liniją, iest równa odległości z B do N; ponieważ obracaiąc płaszczyznę wielkiego koła BM, około srzednicy przechodzącey przez B, można przyprowadzić punkt M do punktu N, a naówczas naykrótsza linija z M do B, iakakolwiek ona będzie, zbieży się z liniją od N do B; więc dwie drogi z A do B, iedna przechodząc przez M, druga zaś przez N, maią część równą z M do B, i z N do B. Pierwsza droga z przypuszczenia iest krótszą; więc odległość z A do M byłaby krótszą, od odległości z A do N, co bydź niemoże, ponieważ dowiedliśmy że AM > od AN; więc żaden punkt z linij naykrótszey między A i B, niemoże bydź zewnątrz łuku ANB, azatém ten sam łuk iest naykrótszą liniją, między swoiemi ostatecznemi końcami.

ZA-

## ZADANIE IV.

*Twierdzenie.*

*W tróykącie kulistym, summa trzech boków, iest mnieysza od obwodu koła wielkiego.* (fig. 224).

Jeżeli w tróykacie kulistym ABC, przedłużymy boki AB, AC, aż do przecięcia się w punkcie D; ponieważ dwa wielkie koła przecinaia się na dwie części równe (Zad. I.), łuki ABD, ACD, będą pół-obwodami kół; lecz w tróykącie BCD, bok $BC < BD + CD$ (Zad. II.), dodaiąc z obu stron $AB + AC$, otrzymamy

$$AB + AC + BC < ABD + ACD.$$

## ZADANIE V.

*Twierdzenie.*

*W każdym wieloboku kulistym, summa bokow, iest mnieysza od obwodu koła wielkiego.* (fig. 225).

W pięcioboku ABCDE, przedłużywszy boki AB, DC, aż do przecięcia się w punkcie F; ponieważ $BC < BF + CF$, summa boków w pięcioboku ABCDE, iest mnieysza, od summy w czworoboku AEDF. Przedłużywszy boki AE, FD, aż do spotkania się w punkcie G, $ED < EG + GD$; summa boków w czworoboku AEDF, iest mnieysza od summy boków w tróykącie AFG; gdy summa ma boków tego ostatniego iest mnieysza od obwodu koła wielkiego, azatém i summa boków wieloboku ABCDE, iest mnieysza od tego samego obwodu koła (czytać Zad. XXII. K. V).

## ZADANIE VI.

*Twierdzenie.*

*Ostateczne końce srzednicy prostopadłey do płaszczyzny koła wielkiego, są biegunami tego koła, i biegunami wszystkich kół małych do wielkiego koła równoległych.* (fig. 220).

Jeżeli srzednica DE, iest prostopadłą do płaszczyzny koła wielkiego AMB, powiadam, że ostateczne iey końce D i E, są biegunami koła AMB, i biegunami wszystkich kół małych *np.* FGN, do wielkiego koła równoległych.

Linija DC, prostopadła do płaszczyzny AMB, iest prostopadłą do każdey linij prostey CA, CM, CB, i t. d. przez iey spodek na tey płaszczyznie przechodzącey, więc wszystkie łuki DA, DM, DB, i t. d. iakoteż EA, EM, EB, i t. d. będąc czwartą częścią obwodu koła, punkta D i E, zostaiąc w równey odległości od wszystkich punktów obwodu koła AMB; są biegunami tego koła (Opis. V).

W drugim przypadku promień DC, prostopadły do płaszczyzny AMB, będąc także prostopadłym do płaszczyzny równoległey FNG,

FNG, przechodzi przez srzodek C koła małego FNG (Zad. I.); poprowadziwszy linije pochyłe DF, DN, DG, te zostaiąc w równey odległości od prostopadłey DO, są równe. Lecz cienciwy równe obeymuią łuki równe (Zad. V. K. II.); azatém gdy wszystkie łuki DF, DN, DG, i t. d. są równe, punkt D, iest biegunem koła małego FNG, a dla podobney przyczyny, punkt E, iego drugim biegunem.

*Wniosek I.* Łuk MD, wyprowadzony z iakiegokolwiek punktu łuku koła wielkiego AMB, do iego bieguna, będąc czwartą częścią obwodu koła, dla skrócenia nazywać będziemy *kwadransem*; kwadrans ten z łukiem AM, składa kąt prosty, ponieważ linija DC, będąc prostopadłą do płaszczyzny AMC, cała płaszczyzna DMC, przechodząca przez liniją DC, iest prostopadłą do płaszczyzny AMC (Zad. XVIII. K. V.), więc kąt tych płaszczyzn, albo podług opisania VI. kąt AMD, iest kątem prostym.

*Wniosek II.* Chcąc znaleść biegun łuku danego AM, poprowadziwszy łuk nieograniczony MD prostopadły do AM, weźmy MD równy kwadransowi, a punkt D, będzie iednym z biegunów łuku AM; albo z dwóch punktów A i M, łuku danego AM, wyprowadziwszy łuki AD, MD, prostopadłe do AM, punkt przecięcia się D tych dwóch łuków, będzie biegunem żądanym.

*Wnio-*

*Wniosek III.* Naodwrót, ieżeli odległość punktu D, od każdego z punktów A i M, iest równa kwadransowi, punkt D, iest biegunem łuku AM, a kąty DAM, AMD kątami prostemi. Ponieważ ieżeli ze srzodka kuli C, poprowadzimy promienie CA, CD, CM: kąty ACD, MCD, będąc kątami prostemi, linija CD iest prostopadłą do dwóch linij prostych CA, CM; więc iest także prostopadłą do ich płaszczyzny; azatém punkt D, będąc biegunem łuku AM, kąty DAM, AMD są kątami prostemi.

*Uwaga.* Za pomocą biegunów, z naywiększą łatwością kreślić możemy różne łuki na powierzchni kuli; obracaiąc *np.* łuk DF, około punktu D, ostateczny koniec F, opisze koło małe FNG; obracaiąc zaś kwadrans DA około punktu D, ostateczny koniec A, opisze łuk koła wielkiego AM. Jeżeli chcemy połączyć punkta dane A, M, lub łuk AM przedłużyć, z punktów A i M iako ze srzodków w odległości o kwadrans, zakreśliwszy łuki, te przeciąwszy się oznaczą biegun D, z którego iako ze srzodka w odległości o kwadrans, łączą się punkta dane A i M, i przedłuża się łuk AM.

Nakoniec ieżeli z punktu danego P, chcemy spuścić łuk prostopadły na łuk dany AM; przedłuża się ten ostatni do S, ażeby odległość PS była równa kwadransowi, z punk-

tu

tu S iako bieguna, w odległości o kwadrans zakreślony łuk PM, będzie łukiem żądanym.

## ZADANIE VII.

*Twierdzenie.*

*Płaszczyzna prostopadła do ostatecznego końca promienia, iest styczną do kuli.* (fig. 226).

Obrawszy na płaszczyznie FAG, prostopadłey do ostatecznego końca promienia OA, punkt iakikolwiek M, i poprowadziwszy OM, AM, kąt OAM będąc kątem prostym, OM > OA; gdy punkt A leży na powierzchni kuli, punkt M, i wszystkie inne punkta płaszczyzny FAG, leżeć będą zewnątrz kuli. Azatém płaszczyzna FAG, maiąc ieden tylko punkt A wspólny z powierzchnią kuli, iest do niey styczną (Opis. IV).

*Uwaga.* Jeżeli odległość srzodków dwóch kul, równa summie albo różnicy promieni, naówczas dwie kule maiąc ieden punkt wspólny będąc stycznemi iedna do drugiey, ich srzodki i punkt dotknięcia leżeć będą na iedney linij prostey.

## ZADANIE VIII.

*Twierdzenie.*

*Kąt* BAC (fig. 226). *powstaiący z przecięcia się dwóch łuków* AB, AC, *kół wiel-*

*kich*

*kich, iest równy kątowi* FAG, *złożonemu ze stycznych do tych łuków w punkcie* A: *ma także za miarę łuk* DE, *opisany z punktu* A *iako bieguna między bokami* AB, AC, *przedłużonemi ieżeli tego wymaga potrzeba.*

Styczne AF, AG, leżąc na płaszczyznach łuków AB, AC, są prostopadłemi do tego samego promienia AO; więc kąt FAG, równy pochyłości płaszczyzn OAB, OAC (Zad. XVII. K. V.) iest równy kątowi BAC. Gdy łuki AD, AE, są kwadransami, linije OD, OE, będąc prostopadłemi do AO, kąt DOE, równy pochyłości płaszczyzn AOD, AOE, ma za miarę łuk DE, który iest także miarą kąta BAC.

*Wniosek.* Więc kąty tróykątów kulistych, mogą się porównywać przez łuki kół wielkich, opisanych z ich wierzchołków iako biegunów, i obiętych między ich bokami: z tąd łatwo iest wykreślić kąt równy kątowi danemu.

*Uwaga.* Kąty w wierzchołkach przeciwległe ACO, BCN (fig. 238.) są równe; a kąty przyległe ACO, OCB, razem wzięte składaią dwa kąty proste, ponieważ powstaią z przecięcia się dwóch płaszczyzn ACB, OCN.

ZADANIE IX.

*Twierdzenie.*

*W tróykącie* ABC (fig. 227.). *z punktów*

*tów* A, B, C, *iako biegunów, opisawszy łuki* EF, FD, DE, *składaiące tróykąt* DEF; trzy punkta D, E, F, *będą biegunami boków* BC, AC, AB.

Punkt A, będąc biegunem łuku EF, odległość AE iest kwadransem; punkt C, będąc biegunem łuku DE, odległość CE iest także kwadransem; więc punkt E, oddalony o kwadrans od każdego z punktów A i C, iest biegunem łuku AC (Zad. VI. Wnios. III). Podobnym sposobem dowiedziemy, że punkta D i F, są biegunami łuków BC, AB.

*Wniosek.* Więc tróykąt ABC, może bydź wykreślony za pomocą tróykąta DEF, i naodwrót.

ZADANIE X.

*Twierdzenie.*

*Każdy kąt w iednym z tróykątów* ABC, DEF (fig. 227), *ma za miarę półobwód, mniey bok przeciwległy w tróykącie drugim.*

Przedłużywszy boki AB, AC, aż do spotkania się z bokiem EF, w punktah G i H; punkt A będac biegunem łuku GH, kąt A ma zamiarę łuk GH. Lecz łuki EH, GF, są kwadransami, ponieważ punkta E, F, są biegunami łuków AH, AG; więc EH + GF składaią półobwód koła. Gdy EH + GF = EF + GH; więc łuk GH maiący kąt A za miarę, iest równy pół-obwodowi, mniey bok

G EF;

dla autora wyraz [illegible] trudny, i dla tego opuszczam go... [illegible]



EF; podobnie dowiedziemy że kąt $B = \frac{1}{2} ob - DF$, kąt $C = \frac{1}{2} ob - DE$.

Własność ta powinna bydź wzaiemną między dwóma tróykątami, ponieważ wykreślaią się ieden za pomocą drugiego. Więc kąty D, E, F, tróykąta DEF, maią za miarę względnie $\frac{1}{2} ob - BC$, $\frac{1}{2} ob - AC$, $\frac{1}{2} ob - AB$. Jakoż *np.* kąt D, ma za miarę łuk MI; zaś $MI + BC = MC + BI = \frac{1}{2} ob$: więc łuk MI mierzy kąt $D = \frac{1}{2} ob - BC$, i tak co do innych.

*Uwaga.* Krom tróykąta DEF (fig. 228.), możnaby złożyć trzy drugie, z przecięcia się trzech łuków DE, EF, DF. Lecz zadanie tycze się tróykąta srzodkowego, (fig. 227,), który tém się odznacza od trzech drugich, że dwa kąty A i D, są położone z tey samey strony boku BC; B i E, z tey samey strony AC; zaś C i F, ze strony AB.

Tróykąty ABC, DEF, nazywaią się *tróykątami biegunowemi.*

## ZADANIE XI.

### *Twierdzenie przybrane.*

*W tróykącie* ABC (fig 229.), ~~*z punktów* A *i* B, *iako biegunów*~~, *w odległości* AC ~~*i* BC, *zakreśliwszy łuki kół małych* DEC, DFC;~~ *i przez punkt* D, ~~*w którym te łu-ki przetną się*~~, *poprowadziwszy łuki kół wielkich*

*kich* AD, DB; *tróykąt* ABC *będzie równy tróykątowi* ADB.

Z wykreślenia bok AD = AC, DB = BC, AB wspólny; więc trzy boki w tróykącie ABC, są równe trzem bokom w tróykącie ADB.

Wystawiwszy srzodek kuli O, możemy poymować kąt bryłowy powstaiący z trzech kątów płaskich AOB, AOC, BOC; i drugi kąt bryłowy z trzech kątów płaskich AOB, AOD, BOD. Gdy boki tróykąta ABC, są równe bokom tróykąta ADB, kąty płaskie składaiące ieden z tych kątów bryłowych, są równe kątom płaskim składaiącym kąt bryłowy drugi: lecz w tym przypadku (Zad. XXIII. K.V.), pochyłości płaszczyzn na których znayduią się kąty równe są równe, więc kąty tróykąta kulistego ABC, są równe kątom tróykąta ADB, to iest: DAB = BAC, DBA = ABC, ADB = ACB. Azatém boki i kąty tróykąta ABC, będąc równe bokom i kątom tróykąta ADB, wszystkie części pierwszego, są równe częściom drugiego.

*Uwaga.* Gdy równość tych tróykątów niewypada z ich przystawania, tróykąty ABC, ADB, nazywać będziemy *tróykątami symetrycznemi.* i mniej [illegible]

## ZADANIE XII.

### *Twierdzenie.*

*Dwa tróykąty leżące na iedney lub dwóch* *kulach równych są równe, ieżeli dwa boki w iednym tróykącie, równe dwóm bokom w drugim tróykącie, obeymuią między sobą kąt równy.* (fig. 230).

Niech będzie bok AB = EF, AC = EG, i kąt BAC = FEG; tróykąt FEG, iest równy tróykątowi BAC, albo tróykątowi symetrycznemu DAB (czytać Zad. VI. K. I).

## ZADANIE XIII.

### *Twierdzenie.*

*W dwóch tróykątach leżących na iedney lub dwóch kulach równych, ieżeli dwa kąty w iednym tróykącie, są równe dwóm kątom w drugim tróykącie, i bok przyległy tym dwóm kątom w iednym tróykącie, iest równy bokowi przyległemu dwóm kątom w tróykącie drugim, te dwa tróykąty przystaną do siebie.* (Czytać Zad. VII. K. I).

## ZADANIE XIV.

### *Twierdzenie.*

*Dwa tróykąty leżące na iedney lub dwóch kulach równych, równo-boczne, są równo-kątne; a kąty równe są przeciwległe bokom równym.* (fig. 229).

Widzieliśmy w Zadaniu XI. że maiąc trzy boki dane AB, AC, BC, mogliśmy złożyć dwa tróykąty ABC, ADB, różniace się w po-

ło-

łożeniu swych części, lecz równe co do ich wielkości; więc dwa tròykąty równo-boczne równe, bądź przez przystawanie, bądź przez symetryą, są równo-kątne, a kąty równe są przeciwległe bokom równym. (Czytać Zad. XI. K. I).

## ZADANIE XV.

### *Twierdzenie.*

*W tróykącie kulistym równo-ramiennym, kąty przeciwległe bokom równym są równe; i na odwrót, ieżeli dwa kąty są równe tróykąt będzie równo-ramienny.* (fig. 231).

1*mo* Jeżeli bok AB = AC, powiadam, że kąt C = B: poprowadziwszy z wierzchołka A do srzodka podstawy łuk AD, dwa tróykąty BAD, DAC, maiące po trzy boki równe, maią także po trzy kąty równe, azatém B = C.

2*do* Jeżeli kąt B = C, powiadam, że bok AC = AB: gdyby bok AB, niebył równy bokowi AC, niech będzie od niego większy; wziąwszy BO = AC, złączmy OC. Dwa boki BO, BC, równe dwóm bokom AC, BC, obeymuią kąty OBC, ACB równe; więc (Zad. XII) kąt OCB = ABC; lecz z przypuszczenia kąt ABC = ACB, więc kąt OCB, byłby równy kątowi ACB, co bydź niemoże, więc AB niemoże się różnić od AC; azatém boki AB, AC, przeciwległe kątom równym B i C, są równe.

*Uwa-*

*Uwaga.* Z równości tróykątów BAD, DAC, wypada, że kąt BAD = DAC, kąt BDA = ADC; więc te ostatnie będąc kątami prostemi, azatém *łuk z wierzchołka tróykąta kulistego równo-ramiennego prowadzony na połowę iego podstawy, iest prostopadły do tey podstawy, i dzieli kąt w wierzchołku na dwie części równe.* (Czytać Zad. XII. i XIII. K. I).

## ZADANIE XVI.

### *Twierdzenie.*

*W tróykącie kulisym z dwóch boków naywiększy, iest przeciwległy kątowi naywiększemu; z dwóch zaś kątów naywiększy, iest przeciwległy bokowi naywiększemu.* (fig. 232).

1*mo* Niech będzie kąt A > B; złożywszy kąt BAD = B, będziemy mieli AD = BD (Zad. XV.): lecz AD + DC > AC; na mieyscu AD położywszy DB, otrzymamy BD + DC czyli BC > AC.

2*do* Jeżeli bok BC > AC; powiadam, że kąt BAC > ABC. Gdyby kąt BAC był równy kątowi ABC, bok BC byłby równy bokowi AC, co iest przeciwko założeniu. Gdyby kąt BAC był mnieyszy od kąta ABC, bok BC, byłby mnieyszy od boku AC, co iest także przeciwko założeniu; azatém kąt BAC > ABC. (Czytać Zad. XIV. K. I).

ZA-

## ZADANIE XVII.

*Twierdzenie.*

*Jeżeli dwa boki iednego tróykąta, są równe dwóm bokom drugiego tróykąta, wykreślonego na iedney lub dwóch kulach równych, i ieżeli kąt w pierwszym tróykącie iest większy od kąta w tróykącie drugim, bok trzeci tróykąta pierwszego, będzie większy od boboku trzeciego tróykąta drugiego.* (fig. 233).

Dowodzenie zupełnie to samo, iak w Zadaniu X. Księgi I.

## ZADANIE XVIII.

*Twierdzenie.*

*Jeżeli dwa tróykąty leżące na iedney lub dwóch kulach równych są równo-kątne, są także i równo-boczne.*

Wyraziwszy przez A i B, dwa tróykąty dane, przez P i Q dwa ich tróykąty biegunowe; gdy z założenia kąty w tróykątach A, B, są równe, boki w tróykątach biegunowych P, Q, będą równe (Zad. X.): lecz skoro tróykąty P, Q są równo-boczne, więc też są i równo-kątne (Zad. XIV.); a gdy kąty w tróykątach P, Q, są równe, boki w tróykątach biegunowych A, B będą także równe (Zad. X). Więc dwa tróykąty A, B, będąc równo-kątne, są razem równo-boczne. To samo twierdzenie dowiedźmy ieszcze sposobem na-

następuiącym. Niech we dwóch tróykątach równo-kątnych ABC, DEF (fig. 254.), kąt A=D, B=E, C=F; powiadam, że będziemy mieli bok AB=DE, AC=DF, BC=EF.

Na przedłużeniu boków BA, CA, wziąwszy AG=DE, AH=DF, złączmy GH, przedłużaiąc łuki BC, GH w obie strony, aż do przecięcia się w punktach I, K.

Dwa boki AG, AH, będąc równe DF, DE, kąt GAH=BAC=EDF; więc gdy dwa tróykąty GAH, EDF, przystaną do siebie (Zad. XII.), kąt AGH=DEF=ABC, kąt zaś AHG=DFE=ACB.

W tróykątach IGB, GBK, bok BG wspólny, kąt IGB=GBK; a ponieważ summa kątów IGB+BGK równa dwóm kątom prostym, równie iak summa GBK+IBG, kąt BGK=IBG. Więc dwa tróykąty IBG, GBK będąc równe (Zad. XIII.), bok IG=BK, IB=GK.

Podobnym sposobem dowiedziemy, że w tróykątach ICH, CHK, bok IH=CK, HK=IC. Od części równych BK, IG, odeymuiąc równe CK, IH, reszty BC, GH będą równe. Nadto gdy kąt BCA=AHG, ABC=AGH, więc tróykąty ABC, AHG, maiące bok równy przyległy dwóm kątom równym, są równe: aże tróykąt DEF iest równy tróykątowi AHG, więc iest także równy tróykątowi ABC, i będziemy mieli AB=

DE,

DE, AC=DF, BC=EF. Azatém we dwóch tróykątach kulistych równo-kątnych, boki przeciwległe kątom równym, są równe.

*Uwaga.* Zadanie to nie ma mieysca w tróykątach prostokreślnych, gdzie równość kątów wnosi się z proporcyonalności boków. Lecz we wszystkich zadaniach tyczących się tróykątów kulistych dodawaliśmy, *iż są na iedney lub dwóch kulach równych*; na kulach zaś równych dwa tróykąty niemogą bydź podobne nie będąc równe. Azatém równość kątów ciągnie za sobą koniecznie równość boków. Gdyby tróykąty leżały na kulach nierównych, naówczas kąty będąc równe, tróykąty byłyby podobne, boki zaś odpowiadające byłyby w stosunku promieni kul.

## ZADANIE XIX.

### *Twierdzenie.*

*W tróykącie kulistym summa trzech kątów iest mnieysza od sześciu, a większa od dwóch kątów prostych.*

1*mo* Każdy kąt w tróykącie kulistym iest mnieyszy od dwóch kątów prostych; azatém summa trzech kątów iest mnieysza od sześciu kątów prostych.

2*do* Pół-obwód koła, mniey bok odpowiadaiący w tróykącie biegunowym, iest miarą każdego kąta w tróykącie kulistym (Zad. X.); więc summa trzech kątów tego ostatniego go ma za miarę trzy pół-obwody, mniey summa boków tróykąta biegunowego; summa zaś boków tróykąta biegunowego mnieysza od dwóch pół-obwodów (Zad. IV) odięta od trzech pół-obwodów, zostawi resztę większą od pół-obwodu, czyli od dwóch kątów prostych; azatém summa trzech kątów w tróykącie kulistym iest większa od dwóch kątów prostych.

*Wniosek I.* Summa kątów w tróykątach kulistych nie iest stateczną, zmienia się od dwóch do sześciu kątów prostych, niedochodząc ani iedney ani drugiey granicy. Więc z dwóch kątów danych trzeciego niepoznamy.

*Wniosek II.* Tróykąt kulisty może mieć dwa albo trzy kąty proste, dwa lub trzy kąty rozwarte. Jeżeli tróykąt ABC (fig. 235). ma dwa kąty B i C proste, wierzchołek A będzie biegunem podstawy BC (Zad. VI.), boki zaś AB, AC, kwadransami. Jeżeli nadto kąt A iest prosty, tróykąt ABC maiąc wszystkie trzy kąty proste, zamykaiąc się ośm razy na powierzchni kuli, boki będą kwadransami.

Opuszczać

## ZADANIE XX.

### *Twierdzenie.*

*Taśma śpiczasta iest do powierzchni kuli, iak kąt tey taśmy do czterech kątów prostych, albo iak łuk mierzący ten kąt do obwodu koła.* (fig. 236).

Niech

Niech będzie taśma spiczasta AMBNA, którey kąt MAN mierzy się łukiem MN; przypuściwszy naprzód, że łuk MN będąc współmierny z obwodem MNPQM, ma się do obwodu iak 5 do 48, podzielmy obwód na 48 części równych, których łuk obeymować będzie 5. Jeżeli następnie połączymy biegun A, z punktami podziału obwodu przez kwadranse, otrzymamy na półkuli AMNPQM, 48 tróykątów równych. Więc cała kula obeymować będzie tych tróykątów cząstkowych 96, z których taśma spiczasta 10; więc taśma spiczasta iest do kuli, iak 10 do 96, albo iak 5 do 48, to iest iak łuk MN do obwodu koła.

Jeżeli łuk MN, nie iest współmierny z obwodem koła, dowiedziemy podobnym sposobem iak w wielu innych przypadkach, że taśma spiczasta iest do kuli, iak łuk MN do obwodu koła.

*Wniosek I.* Dwie taśmy spiczaste są między sobą, iak ich katy.

*Wniosek II.* Widzieliśmy (Zad. XIX.), że ośm tróykątów o trzech kątach prostych, obeymuią całą powierzchnię kuli; wziąwszy pole iednego z tych tróykątów za iednostkę, powierzchnia kuli wyrazi się przez 8; powierzchnia zaś taśmy spiczastey, którey kąt iest A, przez 2 A (ieżeli razem kąt A iest oceniony, biorąc kąt prosy za iednostkę); ponieważ

2 A : 8 : : A : 4,

więc mamy tu dwie iednostki różne; iedna na

po-

powierzchnie, to iest tróykąt kulisty z trzema kątami prostemi, i bokami równemi kwadransowi; druga na kąty to iest kąt prosty.

*Uwaga.* Klin kulisty obięty płaszczyznami AMB, ANB, iest do całey kuli, iak kąt A, do czterech kątów prostych. Ponieważ ieżeli taśmy spiczaste są równe, kliny kuliste będą także równe; więc dwa kliny kuliste są między sobą, iak kąty powstaiące z przecięcia się płaszczyzn te kliny obeymuiących.

## ZADANIE XXI.

### *Twierdzenie.*

*Dwa tróykąty kuliste symetryczne są równe co do powierzchni.* (fig. 237.)

Niech będą dwa tróykąty symetrzyczne ABC, DEF, w których bok AB=DE, AC =DF, CB=FE; powiadam, że powierzchnia tróykąta ABC, iest równa powierzchni DFE. Obrawszy punkt P za biegun koła małego przechodzącego przez trzy punkta A, B, C; z którego poprowadziwszy łuki równe (Zad. VI.) PA, PB, PC, i przy punkcie F, wziąwszy kąt DFQ=ACP, łuk FQ=CP, złączmy DQ, QE.

Boki DF, FQ, równe bokom AC, CP, kąt DFQ=ACP; więc dwa tróykąty DFQ, ACP, będąc równe (Zad. XII.) bok DQ= AP, kąt DQF=APC.

W tróykątach DFE, ABC, kąty DFE, ACB,

ACB, przeciwległe bokom równym DE, AB, są równe (Zad. XV), odiąwszy kąty DFQ, ACP, z wykreślenia równe, pozostanie kąt QFE=PCB. Nadto boki QF, FE, równe bokom PC, CB; Więc dwa tóykąty FQE, CPB, będąc równe bok QE=PB, kąt FQE=CPB.

Uważaiac tróykąty DFQ, ACP; bok PA przystanie do boku QD, PC do QF, nadto kąty równe; gdy dwa te tróykąty zbiegną się ieden z drugim, powierzchnia DQF=APC. Dla podobney przyczyny powierzchnia FQE =CPB. Powierzchnia zaś DQE=APB; więc DQF+FQE—DQE=APC+CPB —APB; czyli DFE=ABC; a zatém dwa tróykąty symetryczne, są równe co do powierzchni.

*Uwaga.* Bieguny P, Q, mogłyby znaydować się wewnątrz tróykątów ABC, DEF; naówczas potrzebaby dodadź trzy tróykąty DQF, FQE, DQE, dla złożenia tróykąta DEF; i tróykąty APC, CPB, APB, dla złożenia tróykąta ABC; lecz dowodzenie byłoby zawsze to samo.

## ZADANIE XXII.

### *Twierdzenie.*

*Summa tróykątów w wierzchołkach przeciwległych, powstaiących z przecięcia się dwóch kół wielkich na półkuli, iest równa ta–*

*taśmie śpiczastey, maiącey kąt równy kątowi w wierzchołku.* (fig. 238.)

To iest: ieżeli dwa wielkie koła AOB, COD, przecinaią się na półkuli ACBDO, summa tróykątów AOC, BOD, iest równa taśmie śpiczastey, maiącey kąt BOD.

Przedłużywszy boki OB, OD, aż do przecięcia się w punkcie N, łuki OBN, AOB, będą połobwodami kół; odiąwszy z obu stron OB, będziemy mieli BN=AO. Podobnym sposobem otrzymamy DN=CO, BD=AC; więc dwa tróykąty AOC, DNB, symetryczne, maiące trzy boki równe, są równe co do powierzchni (Zad. XXI.) a zatém summa tróykątów AOC, BOD, iest równa taśmie spiczastey OBNDO, maiącéy kąt BOD.

*Uwaga.* Więc dwie piramidy kuliste, którym tróykąty AOC, BOD, służą za podstawy razem wzięte, składaią klin kulisty, maiący kąt BOD.

## ZADANIE XXIII.

### *Twierdzenie.*

*Powierzchnia tróykąta kulistego, iest równa summie iego kątów, zmieyszoney dwóma kątami prostemi.* (fig. 239.)

W tróykącie ABC, przedłużywszy boki aż do przecięcia się z wielkiém kołem DEFGHI; gdy dwa tróykąty w wierzchołkach przeciwległe są równe taśmie spiczastey, którey po-

wierzchnia wyraża się przez dwa razy wzięty kąt w wierzchołku (Zad. XX.): więc

$$DAE + HAG = 2A$$
$$GBF + IBD = 2B$$
$$HCI + FCE = 2C$$

a ponieważ

Gdy summa tych sześciu tróykątów przewyższa powierzchnią półkuli o dwa razy wzięty troykąt ABC, zaś powierzchnia półkuli wyraża się przez 4. (Zad. XX.), więc

$$2ABC = 2A + 2B + 2C - 4$$
czyli $$ABC = A + B + C - 2$$

Azatém powierzchnia tróykąta kulistego iest równa summie iego kątów, mniey dwóma kątami prostemi.

*Wniosek I.* W tym wymiarze, ile będzie kątów prostych, tyle tróykąt zadany obeymować będzie tróykątów o trzech kątach prostych, czyli ósmych części kuli, która iest iednostką powierzchni (Zad. XX). Jeżeli *np.* kąty są równe $\frac{4}{3}$ kąta prostego, trzy kąty wartować będą 4 kąty proste, a tróykąt zadany wyrażony przez $4 - 2$ albo 2, będzie równy dwóm tróykątóm o trzech kątach prostych, czyli czwartey części powierzchni kuli.

*Wniosek II.* Tróykąt kulisty ABC, iest równo-wartuiący taśmie spiczastey, którey kąt iest równy $\frac{1}{2}(A + B + C) - 1$; piramida kulista z podstawą ABC, równo-wartuie klinowi kulistemu maiącemu kąt wyrażony przez

$$\frac{1}{2}(A + B + C) - 1.$$

Opuścić uwagę

ZADA-

## ZADANIE XXIV.

*Twierdzenie.*

*Powierzchnia wieloboku kulistego, ma zamiarę summę kątów, mniey wieloczyn z dwóch kątów prostych przez liczbę boków wieloboku mniey dwóma.* (fig. 240.)

Z wierzchołka A, poprowadziwszy do wszystkich innych wierzchołków przekątne AC, AD; wielobok ABCDF, podzielony będzie na tyle tróykątów, ile boków mniey dwóma troykątami. Gdy powierzchnia każdego tróykąta, ma za miarę summę iego kątów, mniey dwa kąty proste; więc summa ze wszystkich kątów tróykątów, iest równa summie kątów wieloboku: a zatém powierzchnia wieloboku, iest równa summie kątów, mniey tyle razy dwa kąty proste, ile iest boków mniey dwóma.

*Uwaga.* Wyraziwszy przez $s$, summę kątów w wieloboku kulistym; przez $n$ liczbę boków; kąt prosty biorąc za iedność, powierzchnia wieloboku będzie miała za miarę

$$s-2\,(n-2) \text{ albo } s-2n+4.$$

KSIĘGA

# KSIĘGA VIII.

## O Walcu i Ostrokręgu.

### *Opisania.*

I. Obracaiąc prostokąt ABCD (fig. 250.), około boku nieruchomego AB, ślady powierzchni prostokąta zostawione w tym obrócie, utworzą bryłę nazwaną *Walcem*; bok CD utworzy *powierzchnię wypukłą*, boki zaś AD, BC koła, które są *podstawami* walca. Bok nieruchomy AB, nazywa się *osią* albo *wysokością* walca. Każde odcięcie KLMN prostopadłe do osi, a tém samém równoległe do podstaw, iest kołem równém obu podstawom. Każde odcięcie PQGH prostopadłe do podstaw i przechodzące przez oś, iest prostokątem dwa razy większym od prostokąta tworzącego.

II. Obracaiąc tróykąt prostokątny SAB (fig. 251), około boku nieruchomego SA, ślady powierzchni tróykata zostawione w tym obrócie, utworzą bryłę nazwaną *Ostrokręgiem*; przeciw-prostokątna SB utworzy *powierzchnię wypukłą*, bok zaś AB koło, będące *podstawą* ostrokręgu. Punkt S *wierzchołkiem*, SA *osią* albo *wysokością*, zaś SB, nazywa się *bokiem* ostrokręgu. Każde odcięcie HKFI prostopadłe do osi, a zatém i do

H pod-

podstawy, iest kołem mnieyszém od podstaw. Każde odcięcie SED prostopadłe do podstawy i przechodzące przez oś iest tróykątem równo-ramiennym, dwa razy większym od tróykąta tworzącego.

III. Odciąwszy od ostrokręgu SCDBE równolegle do podstawy, ostrokręg SFKHI, pozostała bryła FKHICDBE, nazywa się *ostrokręgiem uciętym*; którego tworzenie się poymować możemy obrótem trapeza ABHG, z kątami przy A i G prostemi, około linij nieruchomey AG, nazwaney *osią* albo *wysokością*; koła w tym obrócie utworzone BDCE, HKFI, nazywaią się *podstawami*, zaś BH *bokiem* ostrokręgu uciętego.

IV. Dwa walce, albo ostrokręgi są *podobne*, skoro ich osie maią się do siebie iak średnice podstaw.

V. Wpisawszy wielobok ABCDF (fig. 252) w koło służące za podstawę walcowi, i wybudowawszy na tym wieloboku pryzmat prosty, równey z walcem wysokości, pierwszy, nazywa się *pryzmatem w walec wpisanym*, drugi, *walcem na pryzmacie opisanym*; krawędzie bowiem AF, BG, i t. d. pryzmatu, prostopadłe do płaszczyzny podstaw, obwinięte powierzchnią wypukłą walca, są linijami dotknięć pryzmatu z walcem.

VI. Opisawszy wielobokiem ABCD (fig. 253) koło służące za podstawę walcowi, i wybudowawszy na tym wieloboku pryzmat prosty,

równey

równey z walcem wysokości, ostatni, nazywa się *walcem w pryzmat wpisanym*, pierwszy, *pryzmatem na walcu opisanym*. Ponieważ z punktów dotknięć M, N, i t. d. boków A B, B C, z kołem, wyprowadziwszy prostopadłe M X, N Y i t d. do płaszczyzn podstaw, te leżąc razem na powierzchni walca i pryzmatu, są ich linijami dotknięć.

*Twierdzenia przybrane tyczące się powierzchni.*

I.

*Powierzchnia płaska, iest mnieyszą od każdey inney powierzchni maiącey z pierwszą to samo zakończenie.* (fig. 254.)

Przepuściwszy w iakimkolwiek kierunku płaszczyznę B P D, przecinaiącą powierzchnię płaską O A B C D w kierunku B D, zaś drugą powierzchnię P A B C D maiącą z pierwszą to samo zakończenie w kierunku B P D; linija prosta B D, leżąca na powierzchni płaskiey, będąc krótszą od linij B P D, leżącey na powierzchni pierwszą otaczaiącey, powierzchnia płaska O A B C D, iest mnieyszą od powierzchni otaczaiącey P A B C D.

II.

*Każda powierzchnia wypukła, iest mnieyszą od powierzchni drugiey otaczaiącey, maiącey z pierwszą to samo zakończenie.*

Jeżeli powierzchnia wypukła O A B C D (fig. 255.), nieiest mnieyszą od powierzchni ią otaczaiących, niech z pomiędzy tych ostatnich powierzchnia PABCD będzie naymnieyszą, a razem równą powierzchni OABCD. Przepuściwszy płaszczyznę styczną do punktu O, powierzchni OABCD; ta odetnie część powierzchni PABCD, która część maiąc to samo zakończenie z płaszczyzną styczną, będzie odniey większą (*T.p.I.*); zamiast części odciętéy, podstawiwszy płaszczyznę styczną, mielibyśmy nową powierzchnię, zawsze otaczaiącą powierzchnię OABCD, lecz mnieyszą od powierzchni z przypuszczenia naymnieyszey PABCD, co bydź niemoże; a zatém powierzchnia wypukła OABCD, iest mnieyszą od wszystkich innych otaczaiących, i maiących z pierwszą to samo zakończenie. (Czytać Zad. IX. K. IV.) Dowiedlibyśmy zupełnie tym samym sposobem, że 1*mo* ieżeli powierzchnia wypukła zakończona dwóma obwodami kół ABC, DEF (fig. 256), iest obwinięta drugą powierzchnia iakakolwiek maiącą z pierwszą te same zakończenia, obwiniona iest naymnieyszą. 2*do* Jeżeli powierzchnia wypukła AB (fig. 257), iest otoczona zewszech stron drugą powierzchnią MN, bądź, że maią pünkta, linije, płaszczyzny, wspólne, bądź ich niemaią; otoczona, zawsze iest mnieysa od otaczaiącey.

III.

*Powierzchnia wypukła pryzmatu prostego, iest równa wieloczynowi z perymetru podstawy przez wysokość.* (fig. 252).

Gdy powierzchnia pryzmatu składa się z sumz summy prostokątów ABGF + BCHG + CDIH it. d. których wysokości AF, BG, CH i t. d. są równe wysokości pryzmatu, summa zaś ich podstaw AB + BC + CD i t. d. składaią perymetr iego podstawy; a zatem summa tych prostokątów, czyli powierzchnia wypukła pryzmatu, iest równa wieloczynowi z perymetru podstawy, przez iego wysokość.

*Wniosek.* Dwóch pryzmatów prostych maiących tę samę wysokość, powierzchnie wypukłe są, iak perymetra ich podstaw.

IV.

*Powierzchnia wypukła walca, iest większa od powierzchni wypukłey pryzmatu wpisanego, a mnieysza od powierzchni wypukłey pryzmatu opisanego.* (fig. 252).

Przeciąwszy walec z pryzmatem w pisanym płaszczyzną równoległą do postaw, odcięcie będzie wielobokiem w pisanym w koło; gdy powierzchnia podstawy walca, iest większa od powierzchni podstawy pryzmatu wpisanego; więc chociaż walec z pryzmatem wpisanym maiąc tę samę wysokość są równe co do długości, niebędąc równe co do szerokości, powierzchnia wypukła pierwszego, iest większa od powierzchni wypukłey drugiego.

Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że powierzchnia wypukła walca w pisanego, iest mnieyszą od powierzchni wypukłey pryzmatu opisanego. (fig. 253.)

ZADA-

## ZADANIE PIERWSZE.

*Twierdzenie.*

*Bryłowatość walca, iest równa wieloczynowi z iego podstawy przez wysokość.* (fig. 258)

Wyraziwszy powierzchnią podstawy walca przez *pow.* CA, wysokość przez CH, będziemy mieli

$$pow.\ CA \times CH = bryl.\ \text{walca } ACH.$$

Gdyby ilość *pow.* CA × CH, niebyła miarą walca zpodstawą promienia CA, byłaby miarą walca mnieyszego lub większego. Przypuśćmy że iest miara walca mnieyszego, i niech

$$pow.\ CA \times CH = bryl.\ \text{walca } DCH.$$

Na kole promienia CD, opisawszy wielobok foremny LMNP, którego boki niedotkną się obwodu koła CA (Zad. X. K. IV), zbuduymy pryzmat prosty maiący za podstawę wielobok LMNP, a za wysokość, wysokość walca CH, a który będzie *pryzmatem opisanym na walcu* z podstawą promienia CD. Wiemy (Zad. XIV. K. VI) że:

$$pow.\ LMNP \times CH = bryl.\ \text{pryzm. } HCLMNP.$$

Porównywaiąc strony tego ostatniego równania z poprzedzaiącém widziemy że czynnik CH będąc wspólny, *pow.* LMNP < *pow.* CA, więc

$$pow.\ LMNP \times CH < pow.\ CA \times CH;$$

azatém, gdy pierwsza strona drugiego równania, mnieysza od strony pierwszey równania pierwszego, strona druga drugiego, mnieyszą

bydź

bydź powinna od strony drugiey pierwszego, to iest: pryzmat HCLMNP opisany, powinien bydź mnieyszy od walca DCH w weń wpisanego, co bydź niemoże; więc ilość *pow.* $CA \times CH$ niemoże bydź miarą bryłowatości walca mnieyszego od walca ACH, azatém

$$pow.\, CA \times CH = bryt.\ \text{walca}\ ACH.$$

Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że ilość *pow.* $CD \times CH$, niemoże bydź miarą bryłowatości walca większego, naprzykład walca ACH, i że *pow.* $CD \times CH = bryt.$ walca DCH. Więc bryłowatość walca iest równa wieloczynowi z iego podstawy przez wysokośc.

*Wniosek I.* Wyraziwszy przez W, w, bryłowatości dwóch pryzmatów; przez H, h, wysokości; przez B, b, podstawy, będziemy mieli $W : w :: H \times B : h \times b$,
ieżeli $H = h$,

$$W : w :: B : b;$$

gdy $B = b$, $W : w :: H : h$.
Więc walce tey samey wysokości są iak podstawy, tey zaś samey podstawy, iak wysokości.

*Wniosek II.* W walcach podobnych (opis IV), Wyraziwszy śrzednicę podstaw przez D, d, będziemy mieli

$$H : h :: D : d,$$

gdy podstawy są kołami, więc (Zad. XII. K. IV)

$$B : b :: D^2 : d^2;$$

rozmnożywszy te dwie proporcye wyraz z wyrazem, otrzymamy

$H \times B$

$$H \times B : h \times b :: D^3 : d^3, \text{ więc}$$
$$W : w :: D^3 : d^3 :: H^3 : h^3.$$

To iest: że walce podobne są, iak sześciany ze śrzednic ich podstaw, albo iak sześciany z wysokości.

+ Opuszczenie

## ZADANIE II.

### *Twierdzenie.*

*Powierzchnia wypukła walca, iest równa wieloczynowi z obwodu iego podstawy przez wysokość.* (fig. 258).

Wyraziwszy obwód podstawy walca promienia C A przez *ob.* C A, wysokość przez CH, będziemy mieli

*ob.* C A × C H = *pow.* walca A C H.

Gdyby ilość *ob.* C A × C H, niebyła miarą powierzchni walca z podstawą promienia C A, byłaby miarą powierzchni walca mnieyszego lub większego. Przypuśćmy że iest miarą powierzchni walca mnieyszego, i niech

*ob.* C A × C H = *pow* walca D C H.

No kole promienia C D, opisawszy wielobok foremny L M N P, którego boki niedotkną się obwodu koła C A, zbuduymy pryzmat prosty maiący za podstawę wielobok L M N P, a za wysokość, wysokość walca C H, a który będzie *pryzmatem opisanym na walcu* z podstawą promienia C D. Wiemy (T. *p.* III.), że

*perym* (L M + M N + ....) × C H = *pow.* pryz. H C L M N P.

Po-

Porównywaiąc strony tego ostaniego równania z poprzedzaiącém, widziemy, że czynnik CH, będąc wspólny, perymetr $LM + MN + \ldots < ob.\ CA$, więc

$$Perym.\,(LM + MN + \ldots) \times CH < ob.\ CA \times CH;$$

azatém, gdy pierwsza strona drugiego równania, mieysza od strony pierwszey równania pierwszego, strona druga drugiego, mnieyszą bydź powinna od strony drugiey pierwszego, to iest: *pow.* pryz. HCLMNP opisanego, powinna bydź mnieyszą od powierzchni walca DCH w weń w pisanego, co bydź niemoże (T. *p.* IV); azatém iłość *ob.* $CA \times CH$, niemoże bydź miarą powierzchni walca mnieyszego od walca ACH, ~~więc~~

$$ob.\ CA \times CH = pow.\ \text{walca } ACH.$$

Podobym sposobem dowiedlibyśmy, że *ob.* $CD \times CH$, niemoże bydź miarą powierzchni walca większego, naprzykład walca ACH, i że *ob.* $CD \times CH = pow.$ wal. DCH. Azatém powierzchnia wypukła walca, iest równa wieloczynowi z obwodu iego podstawy przez wysokość.

## ZADANIE III.

### *Twierdzenie.*

*Bryłowatość ostrokręgu, iest równa wieloczynowi z iego podstawy przez trzecią część wysokości.* (fig. 259.)

Wy-

Wyraziwszy powierzchnię podstawy ostrokręgu promienia AO przez *pow.* AO, wysokość przez SO, będziemy mieli

$pow.\ AO \times \frac{1}{3} SO = bryt.$ ostrokręgu AOS.

Gdyby ilość $pow.\ AO \times \frac{1}{3} SO$, niebyła miarą ostrokręgu z podstawą promienia AO, byłaby miarą ostrokręgu większego lub mnieyszego. Przypuśćmy że iest miarą ostrokręgu większego, i niech

$pow.\ AO \times \frac{1}{3} SO = bryt.$ ostro. BOS.

Na kole promienia AO, opisawszy wielobok foremny MNPQ, którego boki niedotkną się obwodu koła promienia BO, zbuduymy piramidę maiącą za podstawę wielobok MNPQ, a któréy wierzchołkiem, iest wierzchołek ostrokręgu S. Wiemy (Zad. XVIII. K. VI) że: $pow.\ MNPQ \times \frac{1}{3} SO = bryt.$ piram. MNPQS. Porównywaiąc strony tego ostatniego równania z poprzedzaiącém, widziemy, że czynnik $\frac{1}{3} SO$, będąc wspólny, $pow.\ MNPQ > pow.\ AO$, więc $pow.\ MNPQ \times \frac{1}{3} SO > pow.\ AO \times \frac{1}{3} SO$;

azatém, gdy pierwsza strona drugiego równania, większa od strony pierwszey równania pierwszego, strona druga drugiego, większą bydź powinna od strony drugiey pierwszego, to iest: piramida MNPQS w pisana, powinna bydź większą od ostrokręgu BOS na piramidzie opisanego, co bydź niemoże; więc ilość $pow.\ AO \times \frac{1}{3} SO$, niemoże bydź miarą bryłowatości ostrokręgu większego od ostrokręgu AOS, azatém *Pow.*

*pow*. AO $\times \frac{1}{3}$ SO $=$ *bryl*. ostro. AOS.
Podobnym sposobem dowiedlibyśmy że ilość OB $\times \frac{1}{3}$ SO, niemoże bydź miarą bryłowatości ostrokręgu mieyszego, naprzykład ostrokręgu AOS, i że *pow*. OB $\times \frac{1}{3}$ SO $=$ *bryl*. ostro. BOS. Więc bryłowatość ostrokręgu, iest równa wieloczynowi z iego podstawy przez trzecią część wysokości.

*Wniosek I.* Ostrokręg iest trzecią częścią walca tey samey podstawy i wysokości.

*Wniosek II.* Wyraziwszy przez O, *o*, bryłowatości dwóch ostrokręgów; przez H, *h*, wysokości; B, *b*, podstawy; będziemy mieli $O = \frac{1}{3}B \times H$, $o = \frac{1}{3}b \times h$, ztąd

$$O : o :: B \times H : b \times h;$$

Jeżeli $B = b$, będziemy mieli

$$O : o :: H : h,$$

gdy $H = h$, otrzymamy

$$O : o :: B : b.$$

Więc ostrokręgi tey samey podstawy, są iak wysokości: tey samey wysokości iak podstawy.

*Uwaga.* Oznaczywszy przez R, *r*, promienie podstaw dwóch ostrokręgów, gdy $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$ (Zad. XII. K. IV), więc $O = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $o = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, z tąd

$$O : o :: R^2 \times H : r^2 \times h.$$

Jeżeli ostrokręgi są podobne, mamy

$$R : r :: H : h, \text{ czyli}$$

$$R^2 : r^2 :: H^2 : h^2$$

rozmnożywszy poprzedniki ostatniey proporcyi przez H, następniki przez *h*, otrzymamy

$R^2 \times H$ :

$$R^2 \times H : r^2 \times h :: H^3 : h^3,$$

więc $O : o :: H^3 : h^3 :: R^3 : r^3 :: (2R)^3 : (2r)^3$; to iest: że ostrokręgi podobne są, iak sześciany zwysokości, albo iak sześciany z promieni, lub sześciany ze śrzednic ich podstaw.

## ZADANIE IV.

### *Twierdzenie.*

*Bryłowatość ostrokręgu uciętego, iest równa summie trzech ostrokręgów, maiących za wysokość wspólną, wysokość ostrokręgu uciętego, a za podstawy podstawę niższą ostrokręgu uciętego, podstawę wyższą, i srzednią proporcyonalną między temi dwiema podstawami.* (fig. 260)

Niech będzie ostrokręg SBA przecięty płaszczyzną EPD, równoległą do podstawy; niech TFGH będzie piramidą tròykątną maiącą wysokość równą, zaś podstawę równowartuiącą podstawie ostrokręgu. Wystawiwszy dwie podstawy leżące na téy samey płaszczyznie, na ówczas płaszczyzna EPD przedłużona, oznaczy w piramidzie tróykątney odcięcie IKL; będące w téy samey wysokości nad wspólną płaszczyzną podstaw. Gdy podstawy BA, ED są iak kwadraty z promieni BO, EP (Zad. XII. K IV), albo iak kwadraty z wysokości SO, SP; więc i tróykąty FGH, IKL są, iak kwadraty z tych samych wysokości (Zad. XV. K. VI.); lecz z przypuszczenia

tró-

tróykąt F G H iest równo-wartuiący powierzchni koła B A, więc tróykąt I K L, iest równo-wartuiący powierzchni koła E D. Wiemy że

*Bryt.* ostro. S B A $=$ *pow.* B A $\times \frac{1}{3}$ S O, zaś *Bryt.* piram. T F G H $=$ *pow.* F G H $\times \frac{1}{3}$ S O; gdy *pow.* B A, iest równo-wartuiącą *pow.* F G H, więc

*Bryt.* ostro. S B A $=$ *Bryt.* piram. T F G H.

Podobnym sposobem dowiedziemy, że

*Bryt.* ostro. S E D $=$ *Bryt.* piram. T I K L; azatém, ostrokręg ucięty E B A D, iest równo-wartuiący piramidzie uciętey I K L F G H. Gdy piramida ucięta iest równa summie trzech piramid maiących za wysokość wspólną P O, za podstawy: iedna F G H, druga I K L, trzecia srzednią proporcyonalną między F G H, I K L (Zad. XX. K. VI). Więc ostrokręg ucięty E B A D, będzie równy trzem ostrokręgom równo-wartuiącym trzem wyższym piramidom, maiącym za wysokość, wysokość wspólną ostrokręgu i piramidy uciętey P O, za podstawy, iedna powierzchnię koła promienia B O, druga promienia E P, trzecia, srzednią proporcyonalną między temi dwiema ostatniemi powierzchniami kół.

[illegible] uciętej

*Wniosek.* Gdy powierzchnie kół promieni B O, E P, maią za miarę $\pi \times \overline{BO}^2$, $\pi \times \overline{EP}^2$, więc bryłowatość ostrokręgów którym te powierzchnie służą za podstawy, będą miały za miarę $\frac{1}{3}\pi \times \overline{BO}^2 \times PO$; zaś bryłowatość ostrokręgu z podstawą srzednią proporcyonalną

$\frac{1}{3}\pi \times BO^2 \times PO + \frac{1}{3}\pi\, EP^2 \times BO$

$* = \frac{1}{3}\pi . OP \times [BO + EP + AO \times PD]$



ną $\frac{1}{3} \pi \times BO \times EP \times PO$. Dodawszy wyrażenia tych trzech ostrokręgów, otrzymamy

*Bryt.* ostr. ucię. $EBAD = \frac{1}{3} \pi \times PO \times$ ~~* $[\overline{BO}^2 \times \overline{EP}^2 \times AO \times PD]$.~~

Z A D A N I E V.

*Twierdzenie.*

*Powierzchnia wypukła ostrokręgu, iest równa wieloczynowi z obwodu iego podstawy przez połowę boku.* (fig. 259)

To iest: *ob.* $OA \times \frac{1}{2} SA =$ *pow.* ostro. AOS. Gdyby ilość *ob.* $OA \times \frac{1}{2} SA$, niebyła miarą powierzchni ostrokręgu z podstawą promienia OA byłaby miarą powierzchni ostrokręgu większego lub mnieyszego. Przypuśćmy większego, i niech

*ob.* $OA \times \frac{1}{2} SA =$ *pow.* ostro. BOS.

Na kole promienia OA, opisawszy wielobok foremny MNPQ, którego boki niedotkną się obwodu koła promienia OB, zbuduymy na nim piramidę foremną maiącą wierzchołek wspólny z ostrokręgiem S; gdy powierzchnia tey piramidy składa się z tróykątów MSN, NSP, PSQ, z których każdy ma za miarę wieloczyn z podstawy MN, NP, PQ, przez połowę wysokości SA, im wszystkim wspólney iako będącey *bokiem* ostrokręgu (*opis* II), więc summa tych tróykątów, czyli powierzchnia wypukła piramidy, iest równa wieloczynowi z perymetru podstawy piramidy, przez połowę boku ostrokręgu, to iest:

*perym.* ~~* (MN × NP × ...)~~ $\times \frac{1}{2} SA =$ *pow* piram. MNPQS

Po-

$*(MN + NP + \ldots) \times \frac{1}{2} SA = pow$

Porównywaiąc strony tego ostatniego równania z poprzedzaiącém, czynnik $\frac{1}{2}$ S A będąc wspólny, *perym.* (MN + NP + ....) > *ob.* OA, więc *perym.* (MN + NP + ....) $\times$ $\frac{1}{2}$SA > *ob.* OA $\times$ $\frac{1}{2}$SA;
azatém, gdy pierwsza strona drugiego równania, większa od strony pierwszey równania pierwszego, strona druga drugiego, większą bydź powinna od strony drugiey pierwszego, to iest: że powierzchnia piramidy MNPQS, wpisaney, powinna bydź większą od powierzchni ostrokręgu BOS opisanego, co bydź niemoże; azatém ilość *ob.* OA $\times$ $\frac{1}{2}$ SA niemoże bydź miarą powierzchni ostrokręgu większego od ostrokręgu AOS, więc

*ob.* AO $\times$ $\frac{1}{2}$SA = *pow.* ostro. AOS.

Uważaiąc że perymetr MN + NP + ... < *ob.* OB, SA < SB, łatwo okażemy, że *ob.* OB $\times$ $\frac{1}{2}$SB, niemoże bydź miarą powierzchni ostrokręgu mnieyszego, naprzykład ostrokręgu AOS, iże *ob.* OB $\times$ $\frac{1}{2}$SB = *pow.* ostro. BOS.
Azatém powierzchnia wypukła ostrokręgu iest równa wieloczynowi z obwodu iego podstawy przez połowę boku.

*Uwaga.* Wyraziwszy przez L bok ostrokręgu, przez R promień podstawy, któréy obwód będzie 2 $\pi$ R (Zad. XII. K. IV), powierzchnia ostrokręgu będzie miała za miarę

2 $\pi$ R $\times$ $\frac{1}{2}$L albo $\pi$ RL.

ZADANIE VI.

*Twierdzenie.*

*Powierzchnia wypukła ostrokręgu uciętego, iest równa wieloczynowi z iego boku, przez połowę summy obwodów dwóch podstaw.* (fig. 261).

Przepuściwszy płaszczyznę SAB przez oś SO, i do linij SA, spuściwszy prostopadłą FA równą obwodowi koła promienia AO złączmy SF, i poprowadźmy DH równoległą do AF. Z podobieństwa tróykątów SAO, SDC; SAF, SDH, mamy

AO : DC :: SA : SD

AF : DH :: SA : SD, więc

AF : DH :: AO DC, albo *ob.* AO : *ob.* DC (Zad. XI. K. IV).

Gdy z wykreślenia AF = *ob.* AO, więc DH = *ob.* DC.

*Pow.* tróy SAF = AF $\times$ $\frac{1}{2}$SA = *ob.* AO $\times$ $\frac{1}{2}$SA = *pow.* ostro. SAB.

*Pow.* tróy. SDH = DH $\times$ $\frac{1}{2}$SD = *ob.* DC $\times$ $\frac{1}{2}$SD = *pow.* ostro. SDE.

Więc *pow.* ostro. SAB — *pow.* ostro. SDE = *pow.* ostro. ucię. ADEB = *pow.* trapeza AFHD, gdy powierzchnia tego ostatniego = AD $\times$ $\frac{1}{2}$ (AF + DH) (Zad. VII. K. III); azatém powierzchnia ostrokręgu uciętego ADEB, iest równa iego bokowi AD, mnożonemu przez połowę summy obwodów dwóch iego podstaw.

*Wniosek.* Ze środzka boku AD, poprowadziwszy równoległe IL, IM, do AB, AF, dowiodłszy podobnym sposobem iak wyżey, że IM = *ob.* IK, wiemy (Zad. VII. K. III) że

tra-

trapez AFHD = AD × IM = AD × *ob.* IK; więc *powierzchnia ostrokręgu uciętego iest ieszcze równa wieloczynowi zboku przez obwód z odcinka srzodkuiącego między dwiema podstawami.*

## ZADANIE VII.

### *Twierdzenie przybrane.*

*W wieloboku foremnym, obrawszy kilka boków następnych, i poprowadziwszy promień koła wpisanego; ieżeli około srzednicy obrócimy część wieloboku, powierzchnia tą częścią utworzona, będzie miała za miarę wieloczyn z wysokości czyli osi téy powierzchni, przez obwód koła wpisanego.* (fig. 262.)

Z ostatecznych końców i srzodka I boku AB, spuściwszy na oś prostopadłe BM, BN, IK, i poprowadziwszy promień koła wpisanego OI; powierzchnia utworzona bokiem AB, będzie miała za miarę AB × *ob.* IK (Zad. VI) Poprowadziwszy AX równoległą do osi, z podobieństwa tróykątów BAX, OIK, mamy

AB : AX :: OI : IK albo

AB : MN :: *ob.* OI : *ob.* IK, ztąd

AB × *ob.* IK, czyli powierzchnia opisana bokiem AB, równa MN × *ob.* OI. Podobnym sposobem znaydziemy, że powierzchnia opisana bokiem BC = NP × *ob.* OI, bokiem CD = PQ × *ob.* OI. Azatém powierzchnia opisana częścią wieloboku ABCD $=$ (MN $+$ NP $+$ PQ) $\times$ *ob.* OI, czyli MQ $\times$ *ob.* OI to iest: swoiey wysokości czyli osi mnożoney przez obwód koła wpisanego.

*Uwaga.* W wieloboku z liczbą boków parzystą, ieżeli oś FG, przechodzi przez dwa wierzchołki przeciwległe F, G, cała powierzchnia obrótem poł-wieloboku FRABCDEHG utworzona, iest równa wieloczynowi z osi FG, przez obwód koła wpisanego promienia OI. Jakoż uważaiąc naprzód część pół-obwodu RABCDEH; spuściwszy prostopadłe RS, HL, na oś FG, powierzchnia tą częścią wieloboku utworzona $=$ SL $\times$ *ob.* OI; następnie, powierzchnia ostrokręgu utworzona bokiem HG $=$ *ob.* HL $\times \frac{1}{2}$ HG (Zad. V). Spuściwszy prostopadłą OT, na połowę boku GH, z podobieństwa tróykątów GOT, GHL, mamy GL : GT :: HL : OT.

gdy GT $= \frac{1}{2}$ GH, zaś OT $=$ OI więc

GL : $\frac{1}{2}$ GH :: *ob.* HL : *ob.* OI ztąd

*ob.* HL $\times \frac{1}{2}$ HG, czyli powierzchnia utworzona bokiem HG $=$ GL $\times$ *ob.* OI; podobnym sposobem znaydziemy że powierzchnia utworzona bokiem FR $=$ FS $\times$ *ob.* OI; azatém powierzchnia utworzona całym poł-wielobokiem $=$ (GL $+$ LS $+$ SF) $\times$ *ob.* OI, czyli GF $\times$ *ob.* OI.

## ZADANIE VIII.

### *Twierdzenie.*

*Powierzchnia kuli iest równa wieloczy-*

*no-*

*nowi z iey srzednicy przez obwód koła wielkiego.* (fig. 263.)

To iest: $AB \times ob. AC = pow.$ kuli $AC$.

Gdyby ilość $AB \times ob. AC$, niebyła miarą powierzchni kuli promienia $AC$, byłaby miarą powierzchni kuli większey albo mnieyszey. Przypuśćmy większey, i niech

$$AB \times ob. AC = pow \text{ kuli } DC.$$

Na kole promienia $AC$, opisawszy wielobok foremny $MNPQRS$, z liczbą boków parzystą, którego boki niedotkną się obwodu koła promienia $CD$, niech będą $M$, $S$, dwa wierzchołki przeciwległe tego wieloboku. Około srzednicy $MS$, obróciwszy pół-wielobok $MNPQRS$, będziemy mieli (Zad. VII.)

$$MS \times ob. AC = pow \text{ wielo. } MNPQRS.$$

Porównywaiąc strony tego ostaniego równania z poprzedzaiącém, czynnik $ob. AC$ będąc wspólny, $MS > AB$, więc

$$MS \times ob. AC > AB \times ob. AC;$$

azatém, gdy pierwsza strona drugiego równania, większa od strony pierwszey równania pierwszego, strona druga drugiego, większą bydź powinna od strony drugiéy pierwszego, to iest: powierzchnia, utworzona wielobokiem $MNPQRS$ wpisanym. powinna bydź większą od powierzchni kuli promienia $DC$ opisaney, co bydź niemoże; azatem ilość $AB \times ob. AC$, nie może bydź miarą powierzchni kuli promienia większego od $AC$, więc

$$AB \times ob. AC = pow. \text{ kuli } AC.$$

Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że DE $\times$ *ob.* CD, niemoże bydź miarą powierzchni kuli promienia mnieyszego, *np.* AC, i że DE $\times$ *ob.* CD $=$ *pow.* kuli DC. Azatém powierzchnia kuli, iest równa wieloczynowi z iey srzednicy przez obwód koła wielkiego.

*Wniosek.* Gdy powierzchnia koła wielkiego, iest równa wieloczynowi *z obwodu przez połowę promienia*; powierzchnia kuli będąc równa wieloczynowi *z obwodu przez srzednicę*, iest od niey cztery razy większą.

*Uwaga.* Skoro powierzchnia kuli daie się porównywać z powierzchnią płaską, więc 1*mo* gdy taśma spiczasta z kątem A, iest do powierzchni kuli, iak kąt A do 4 kątów prostych, albo iak łuk koła wielkiego mierzący ten kąt A do obwodu tego samego koła, więc gdy powierzchnia kuli $=$ *obwodowi* $\times$ *srzednicę*, powierzchnia taśmy spiczastey $=$ *obw* $\times$ *łuk*. 2*do* Troykąt kulisty, iest równo-wartuiący taśmie spiczastey, którey kąt iest równy połowie przewyżki summy trzech kątów tróykąta nad dwa kąty proste. Wyraziwszy przez P, Q, R, łuki kół wielkich mierzące trzy kąty; przez C, obwód koła wielkiego; przez D srzednicę: łuk mierzący kąt taśmy spiczastéy, wyrazi się przez $\frac{1}{2}(P+Q+R-\frac{1}{2}C)$; zaś powierzchnia tróykąta przez $D\times\frac{1}{2}(P+Q+R-\frac{1}{2}C)$. Jeżeli w tróykącie są wszystkie kąty proste, łuki P, Q, R, będąc kwadransami, ich summa równa $\frac{3}{4}C$, którey przewyżka nad $\frac{1}{2}C$ równa $\frac{1}{4}C$,

zaś

zaś połowa $= \frac{1}{8}$C. Azatém powierzchnia tróy-kąta kulistego o trzech kątach prostych $= \frac{1}{8}$C $\times$ D = ósmey części całey powierzchni kuli.

## ZADANIE IX.

### *Twierdzenie.*

*Powierzchnia pasa kulistego, iest równa wieloczynowi z iego wysokości przez obwód koła wielkiego.* (fig. 269.)

Obrawszy łuk EF mnieyszy lub większy od kwadransa, i spuściwszy prostopadłą FG na promień EC; pas utworzony obròtem łuku EF około EC, to iest: pas EFG = EG $\times$ *ob.* EC. Gdyby pas EFG, niebył równy wieloczynowi EG $\times$ *ob.* EC, będzie równy wieloczynowi mnieyszemu albo większemu; przypuśćmy że pas EFG < EG $\times$ *ob.* EC i że

*pas* EFG = EG $\times$ *ob.* CA

Wpisawszy część wieloboku foremnego EMNOPF w łuk promienia CE, którego boki niedotkną się łuku promienia CA, spuśćmy prostopadłą na bok ME; powierzchnia utworzona obrótem wieloboku EMNOPF około EG to iest (Zad VII.)

*pow.* EMNOPF = EG $\times$ *ob.* CI.

Porównywaiąc strony tego ostatniego równania z poprzedzaiącém, czynnik EG będąc wspólny, *ob.* CI > *ob.* CA: *pow.* EMNOPF wpisana, powinna bydź większą od powierzchni opisaney pasa EFG, co bydź niemoże; więc

pas

pas EFG $=$ EG $\times$ *ob.* EC. Dowiedziemy także, że niemoże bydź ażeby pas ABD $>$ AD $\times$ *ob.* CA. Powierzchnia kuli opisana półobwodem ABH, to iest: *pow.* ABH $=$ (AD $+$ DH) $\times$ *ob.* CA, czyli AD $\times$ *ob.* CA $+$ DH $\times$ *ob.* CA $=$ *pas* ABD $+$ *pas* DBH; odiąwszy z drugiey strony tego równania ilość większą *pas* ABD, z pierwszey mnieyszą AD $\times$ *ob* CA, otrzymamy *pas* DBH $<$ DH $\times$ *ob.* CA, co iakieśmy już dowiedli bydź niemoże.

Uważaiąc pas utworzony obrótém łuku FH (fig. 220.) około srzednicy DE, spuściwszy prostopadłe FO, HQ, widziemy że ten pas iest różnicą pasów utworzonych łukami DH, DF; z których pierwszy to iest: *pas* DHQ $=$ DQ $\times$ *ob.* DC, drugi, *pas* DFO $=$ DO $\times$ *ob.* DC, azatém pas DHQ — pas DFO czyli *pas* FHQO $=$ (DQ $-$ DO) $\times$ *ob.* DC $=$ OQ $\times$ *ob.* DC; więc powierzchnia każdego pasa kulistego czy to o iedney lub o dwóch podstawach, iest równa wieloczynowi z iego wysokości przez obwód koła wielkiego.

*Wniosek.* Wyraziwszy przez Z, z, pasy; przez H, *h*, ich wysokości; przez R, promień kuli; przez S, iey powierzchnią: mamy $Z = 2\pi RH$, $z = 2\pi Rh$, z tąd $Z : z :: H : h$, Więc pasy maią się iak ich wysokości. Gdy $S = 4\pi R^2$ (Zad. VIII) więc mamy:

$$Z : S :: 2\pi RH : 4\pi R^2 :: H : 2R.$$

To iest: pas ma się do powierzchni kuli iak iego wysokość do srzednicy teyże kuli.

ZAD-

## ZADANIE X.

*Twierdzenie.*

*Jeżeli tróykąt i prostokąt téy samey podstawy i wysokości obracaią się razem około wspólney srzednicy, bryła utworzona obrótem tróykąta iest trzecią częścią walca utworzonego obrótem prostokąta.* (fig. 264. 265)

W tróykącie BAC, spuściwszy prostopadłą AD, ostrokręg utworzony obrotem tróykąta BAD, iest trzecią częścią walca utworzonego obrótem prostokąta BFAD (Zad. III), zaś ostrokręg utworzony obrótem troykąta DAC, iest trzecią częścią walca utworzonego obrótem prostokąta DAEC, więc summa tych ostrokręgów, czyli bryła utworzona całym tróykątem BAC, iest trzecią częścią summy dwóch walców, albo walca utworzonego obrótem całego prostokąta BFEC.

Gdy prostopadła AD pada zewnątrz tróykąta BAC (fig. 265), ostrokręg utworzony obrótem tróykąta BAC, a który iest różnicą dwóch tróykątów BAD — CAD, iest trzecią częścią walca utworzonego obrótem prostokąta BFEC, będącego różnicą dwóch prostokątów BFAD — CEAD; azatém bryła utworzona obrótem tróykąta, iest trzecią częścią walca utworzonego obrótem prostokąta tey samey podstawy i wysokości.

*Uwaga.* Powierzchnia koła promienia $AD = \overline{\pi} \times \overline{AD}^2$ więc walec utworzony obró-

tem

tem prostokąta BFEC $= \overline{\pi} \times \overline{AD}^2 \times BC$, bryła zaś utworzona obrótem tróykąta BAC $= \frac{1}{3} \overline{\pi} \times \overline{AD}^2 \times BC$.

## ZADANIE XI.

### *Zagadnienie.*

*Znaleść miarę bryły utworzoney obrótem tróykąta około linij przechodzącey zewnątrz przez ieden z iego wierzchołków.* (fig. 266.)

W tróykącie ACB, obracaiącym się około linij CD, przedłużywszy bok AB aż do przecięcia się z osią w punkcie D, spuśćmy prostopadłe AM, BN.

Bryła utworzona obrótem tróykąta ACD $= \frac{1}{3} \overline{\pi} \times \overline{AM}^2 \times CD$, tróykątem zaś BCD $= \frac{1}{3} \overline{\pi} \times \overline{BN}^2 \times CD$, więc różnica tych brył, czyli bryła utworzona obrótem tróykąta ACB ma za miarę $\frac{1}{3} \overline{\pi} (\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2) \times CD$.

Chcąc temu wyrażeniu nadadź inny kształt, z punktu I, połowy AB, spuściwszy prostopadłą IK do CD, i przez punkt B, poprowadziwszy równoległą BO do CD, będziemy mieli (Zad. VII. K. III.) $AM + BN = 2\,IK$, zaś $AM - BN = AO$; więc $(AM + BN) \times (AM - BN) = \overline{AM}^2 - \overline{BN}^2 = 2\,IK \times AO$ (Zad. X. K III); azatém miara bryły utworzoney obrótem tróykąta ACB, będzie ieszcze wyrażoną przez $\frac{2}{3} \overline{\pi} \times IK \times AO \times CD$. Spuściwszy prostopadłą CP na AB, z podobieństwa tróykątów BOA, DCP mamy $AO : CP :: AB : CD$ ztąd

AO $\times$

$AO \times CD = CP \times AB$ gdy druga strona równa iest dwa razy wziętey powierzchni tróykąta $ACB$, więc $AO \times CD = 2 ACB$; azatém miara bryły utworzoney obrótem tróykąta $ACB$ iest także równa $\frac{4}{3} \pi \times ACB \times IK$ albo $ACB \times \frac{2}{3} ob. IK$, (ponieważ $2 \pi \times IK = ob. IK$); to iest: *wieloczynowi z powierzchni tróykąta obracaiącego się, przez dwie trzecie obwodu opisanego środkiem podstawy.*

*Wniosek.* Gdyby tróykąt $ACB$ był równo-ramienny (fig. 267), linija $CI$ będąc prostopadłą do $AB$, powierzchnia $ACB = AB \times \frac{1}{2} CI$; podstawiwszy tę wartość w wyższém wyrażeniu, otrzymamy $\frac{2}{3} \pi \times AB \times IK \times CI$. Lecz z podobieństwa tróykątów $AOB$, $CKI$, mamy $AB : BO$ albo $MN :: CI : IK$, z tąd $AB \times IK = MN \times CI$; azatém bryła utworzona tróykątem równo-ramiennym $= \frac{2}{3} \pi \times \overline{CI}^2 \times MN$.

*Uwaga.* Ten sam wypadek otrzymamy, gdy podstawa tróykąta obracaiącego się, iest równoległą do osi; iakoż, do wartości walca utworzonego obrótem $AMNB$, dodawszy wartość ostrokręgu $AMC$, a odciągnąwszy wartość ostrokręgu $BCN$, otrzymamy wartość bryły utworzoney tróykątem $ACB = \pi \times \overline{AM}^2 (MN + \frac{1}{3} MC - \frac{1}{3} CN)$ gdy $CN - CM = MN$, więc $\pi \times \overline{AM}^2 \times \frac{2}{3} MN$, albo $\frac{2}{3} \pi \times \overline{CP}^2 \times MN$, zgadza się z wyrażeniem poprzedzaiącém.

fig 268

ZADANIE XII.

*Twierdzenie.*

*W wieloboku foremnym, obrawszy kilka bo-*

*boków następnych, i poprowadziwszy promień koła wpisanego, ieżeli około srzednicy obróciemy wycinek wielobokowy, bryła tym wycinkiem utworzona, będzie miała za miarę dwie trzecie obwodu mnożonego przez kwadrat z promienia koła wpisanego, i przez część srzednicy czyli osi oznaczoney prostopadłemi z ostatecznych końców części wieloboku spuszczonemi.* (fig. 262)

To iest *bryt* AOD $= \frac{2}{3}\overline{\pi} \times \overline{OI}^2 \times MQ$. Ponieważ wielobok iest foremny, więc wszystkie tróykąty AOB, BOC i t. d. są równe, i równo-ramienne; azatém podług wniosku zadania poprzedzaiącego, *bryt* AOB + *bryt* BOC + *bryt* COD $= \frac{2}{3}\overline{\pi} \times \overline{OI}^2\,(MN+NP+PQ)$ czyli

*bryt* AOD $= \frac{2}{3}\overline{\pi} \times \overline{OI}^2 \times MQ$

*Uwaga.* bryła utworzona wycinkiem ROH $= \frac{2}{3}\overline{\pi} \times \overline{OI}^2 \times SL$, zaś tróykątem HOG $= \frac{1}{3}\overline{\pi} \times \overline{HL}^2 \times OG$ (Zad. X); lecz wieloczyny $HL \times OG = HG \times OT$, iako mierzące dwa razy wziętą powierzchnię tróykąta OGH więc $\frac{1}{3}\overline{\pi} \times HL \times HL \times OG = \frac{1}{3}\overline{\pi} \times HL \times HG \times OT$. Z podobieństwa tròykątów HLG. OTG mamy $GL : TG :: HL : OT$, z tąd $HL \times GT = GL \times OT$, gdy $HG = 2\,GT$, więc $HL \times HG = 2\,GL \times OT$; podstawuiąc tę wartość wyżey, i uważaiąc że $OT = OI$, bryłowatość utworzona tróykątem HOG $= \frac{2}{3}\overline{\pi} \times \overline{OI}^2 \times GL$. Podobnym sposobem dowiedziemy, że bryła utworzona tróykątem ROF $= \frac{2}{3}\overline{\pi} \times \overline{OI}^2 \times FS$. Azatém bryła utworzona pół-wielobokiem

kiem FRABCDEHG $= \frac{2}{3}\pi \times \overline{OI}^2$ (GL + LS + FS) czyli $\frac{2}{3}\pi \times \overline{OI}^2 \times GF$.

## ZADANIE XIII.

*Twierdzenie.*

*Bryłowatość wycinka kulistego iest równa wieloczynowi z pasa służącego mu za podstawę, przez trzecią część promienia, bryłowatość zaś kuli wieloczynowi z powierzchni przez trzecią część promienia.* (fig. 269)

Gdy w wycinku kulistym ACB, powierzchnia pasa ABC $= 2\pi \times AC \times AD$ (Zad. IX), rozmnożywszy drugą stronę przez $\frac{1}{3}AC$, powiadam, że

$\frac{2}{3}\pi \times \overline{AC}^2 \times AD =$ *brył.* wy. ku. ACB.

Gdyby pierwsza strona tego ostatniego równania, nie była miarą bryłowatości wycinka kulistego promienia AC, byłaby miarą wycinka większego, albo mnieyszego. Przypuśćmy większego, i niech

$\frac{2}{3}\pi \times \overline{AC}^2 \times AD =$ *bryl.* wy. ku. ECF.

Wpisawszy część wieloboku foremnego EMNOPF w łuk promienia CE którego boki niedotkną się łuku promienia CA, spuśćmy prostopadłe CI na bok ME, i FG na EC; mamy (Zad. XII)

$\frac{2}{3}\pi \times \overline{CI}^2 \times EG =$ *bryl.* wy. wielo. EMNOPFC

Porównywaiąc strony tego ostatniego równania z poprzedzaiącém, widziemy, że $\overline{CI}^2 > \overline{AC}^2$, nadto $FB = AE > GD$, $AG + AE > AG + GD$, czyli $EG > AD$; więc $\frac{2}{3}\pi \times \overline{CI}^2 \times EG > \frac{2}{3}\pi \times \overline{AC}^2 \times AD$; azatém *bryl.* wycin. wielobo. EMNOPFC

wpi-

wpisanego, powinna bydź większą od *bryt.* wyci. kulistego ECF opisanego, co bydź niemoże.

Podobnym sposobem dowiedlibyśmy, że wieloczyn *np.* $\frac{2}{3}\pi \times \overline{CE}^2 \times EG$ niemoże bydź miarą bryłowatości wycinka mnieyszego od wycinka promienia CE. Azatém bryłowatość wycinka kulistego iest równa wieloczynowi z pasa służącego mu za podstawę przez trzecią część promienia.

Gdy w obrócie około srzednicy AH wycinek kołowy ACB zamieni się na pół-kole ABH, wycinek kulisty ACB zamieni się na kulę promienia AC, którey bryłowatość będzie równa wieloczynowi z całey powierzchni kuli przez trzecią część promienia.

*Wniosek.* Gdy powierzchnie kul są iak kwadraty z promieni, zaś powiérzchnie mnożone przez promienie iak sześciany z promieni więc *bryłowatości dwóch kul są iak sześciany z promieni, albo sześciany ze srzednic.*

*Uwaga.* Wyraziwszy przez R. promień kuli, iey powierzchnia będzie $4\pi R^2$, zaś bryłowatość $4\pi R^2 \times \frac{1}{3}R^3$. Gdy przez D oznaczymy srzednicę $R = \frac{1}{2}D$, zaś $R^3 = \frac{1}{8}D^3$, więc bryłowatość kuli wyrazi się także przez $\frac{1}{6}\pi D^3$.

## ZADANIE XIV.

### *Twierdzenie.*

*Powierzchnia i bryłowatość kuli, tak się ma do powierzchni i bryłowatości walca opisanego (obeymuiąc w to podstawy), iak 2 do 3.* (fig. 270.)

Ma-

Maiąc wielkie koło MPNQ wpisane w kwadrat ABCD; pólkole QMP, z półkwadratem ODAP obracaiąc się razem około srzednicy QP, pierwsze, utworzy kulę, drugi, walec na kuli opisany, którego wysokość AD równa srzednicy PQ, i którego podstawy srzednica AB, równa srzednicy koła wielkiego MN = PQ. Gdy powierzchnia wypukła walca (Zad. II), i powierzchnia kuli (Zad. VIII) iest równa wieloczynowi z obwodu koła wielkiego przez srzednicę, więc *powierzchnia wypukła walca opisanego, iest równa powierzchni kuli.* Lecz powierzchnia kuli równa 4 powierzchnom koła wielkiego, więc i powierzchnia wypukła walca opisanego iest równa 4 powierzchniom koła wielkiego, do których dodawszy powierzchnię dwóch podstaw równe dwóm powierzchniom koła wielkiego, powierzchnia kuli będzie się miała do powierzchni walca iak 4 : 6, iak 2 : 3.

Nakoniec gdy podstawa walca opisanego równa powierzchni koła wielkiego a wysokość srzednicy, iego bryłowatść równa wieloczynowi *z powierzchni koła wielkiego przez srzednicę*; bryłowatość zaś kuli będąc równą wieloczynowi *z powierzchni koła wielkiego przez* $\frac{4}{3}$ *promienia* = $\frac{2}{3}$ *srzednicy*. Więc bryłowatość kuli ma się do bryłowatości walca opisanego iak 2 : 3.

## ZADANIE XV.

Opuszczam uwagi

*Zagadnienie.*

*Znaleść wartość bryły utworzoney obrótem*

*tem odcinka kołowego obracaiącego się około srzednicy zewnątrz położoney.* (fig. 271)

Z ostatecznych końców cieńciwy odcinka BMD, spuściwszy prostopadłe BF, DE; ze śrzodka C poprowadziwszy prostopadłą CI, i promienie CB, CD; od bryły utworzoney wycinkiem ~~ACB~~, odiąwszy bryłę utworzoną wycinkiem ~~DCA~~, różnica, czyli bryła utworzona wycinkiem $DCB = \frac{2}{3}\pi \times \overline{CB}^2 \times EF$. Lecz bryła utworzona tróykątem równo-ramiennym $DCB = \frac{2}{3}\pi \times \overline{CI}^2 \times EF$; więc bryła utworzona odcinkiem $BND = \frac{2}{3}\pi \times EF\,(\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2)$. W tróykącie zaś prostokątnym BIC mamy $\overline{CB}^2 - \overline{CI}^2 = \overline{BI}^2 = \frac{1}{4}\overline{BD}^2$, azatém bryła utworzona odcinkiem $BMD = \frac{1}{6}\pi \times \overline{BD}^2 \times EF$.

## ZADANIE XVI.

*Twierdzenie.*

*Każdy odcinek kulisty, obięty między dwiema płaszczyznami równoległemi, ma za miarę pół-summy podstaw, mnożoney przez wysokość, więcey bryłowatość kuli którey ta wysokość służy za srzednicę.* (fig. 271)

Niech będzie odcinek kulisty obięty między dwiema płaszczyznami równoległemi BF, DE. Bryła utworzona odcinkiem $BMD = \frac{1}{6}\pi \times \overline{BD}^2 \times EF$, ostrokręg ucięty utworzony trapezem $BDFE = \frac{1}{3}\pi \times EF\,(\overline{DE}^2 + \overline{BF}^2 + DE \times BF)$; więc odcinek kulisty będący summą tych dwóch brył iest równy

$$\frac{1}{6}\pi \times EF\,(2\overline{DE}^2 + 2\overline{BF}^2 + 2\,DE \times BF + \overline{BD}^2).$$

Poprowadziwszy BO równolegle do EF mamy

DO

$DO = DE - BF$, $\overline{DO}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BF}^2 - 2DE \times BF$, zaś $\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{BF}^2 - 2DE \times BF$. Podstawiwszy tę wartość zamiast $\overline{BD}^2$, otrzymamy na wartość bryłowatości odcinka kulistego

$$\tfrac{1}{6}\pi \times EF\,(3\,\overline{DE}^2 + 3\,\overline{BF}^2 + \overline{EF}^2),$$

która rozkłada się na dwie części, iedna: $\frac{1}{6}\pi \times EF\,(3\,\overline{DE}^2 + 3\,\overline{BF}^2) = EF \times \frac{1}{2}(\pi\,\overline{DE}^2 + \pi\,\overline{BF}^2)$ = *pół-summie podstaw mnożoney przez wysokość;* druga: $\frac{1}{6}\pi \times \overline{EF}^3$ = *bryłowatości kuli srzednicy* EF.

*Wniosek.* Gdy w odcinku kulistym iedna podstawa stanie się zerem, *odcinek kulisty o iedney podstawie iest równo-wartuiący połowie walca tey samey podstawy i wysokości, więcey kula którey ta sama wysokość służy za srzednicę.*

*Uwaga Ogólna.*

Wyraziwszy przez R, promień podstawy walca i ostrokręgu, przez H ich wysokości: *Brył.* walc. $= \pi R^2 H$; *bryt.* ostro. $= \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Oznaczywszy przez A, B promienie podstaw ostrokręgu uciętego, przez H wysokość, zaś przez R promień kuli: *Bryt.* ostro. ucię. $= \frac{1}{3}\pi H (A^2 + B^2 + AB)$; *Bryt.* kuli $= \frac{4}{3}\pi R^3$. Gdy R wyraża promień wycinka kulistego, H wysokość pasa; P, Q podsta. odcin. H wyso. *Bryt.* wy. kul. $= \frac{2}{3}\pi R^2 H$; *Bryt.* odci. k. $= \frac{1}{2}(P+Q)H + \frac{1}{6}\pi R^3$; *Bryt.* odci. k. o iedney podsta. $= \frac{1}{2}PH + \frac{1}{6}\pi H^3$.

*Koniec Księgi* VIII. *i ostatniey.*

# Omyłki.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Kar.* 199 | *W.* 22 | zamiast AP poprawić AD. |
| — 210 | — 1 | EE p. EF. |
| — 214 | — 23 | kąt BSC p. kąt ASB. |
| — 215 | — 13 | BSD p. BSC. |
| — 222 | — 9 | SB"=SB" p. SB"=SB'. |
| — 225 | — 6 | S, p. S (fig. 196). |
| — 241 | — 14 | AF p. AE. |
| — 261 | — 26 | TEGH p. TFGH. |
| — 285 | — 1 | srzodek C p. srzodek O. |
| — 299 | — 29 | prosy p. prosty. |

W części pierw. w Liście Prenum. zamiast Kuliński Jacenty Prof. p. Kukliński.

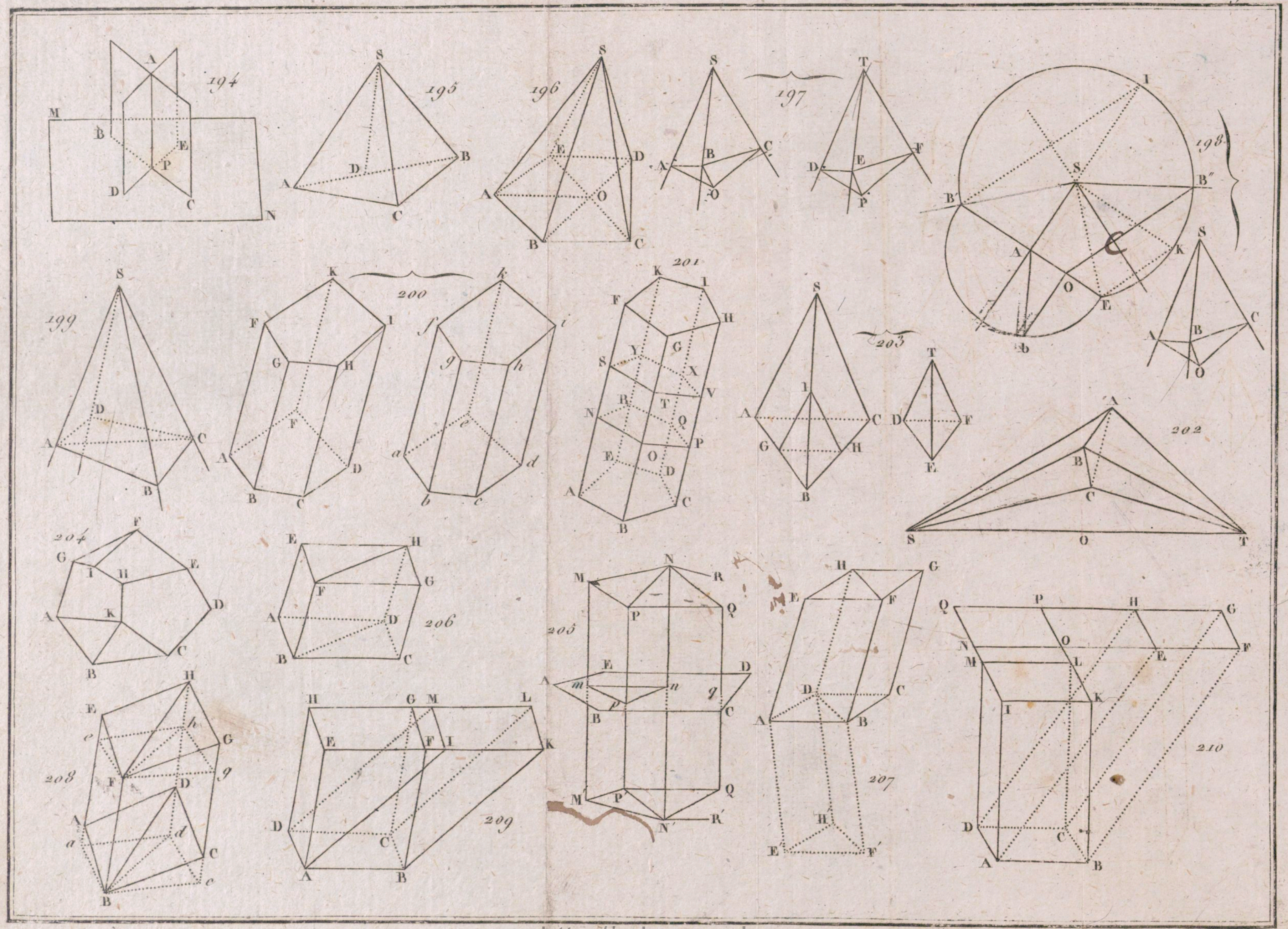
*w Figurach*

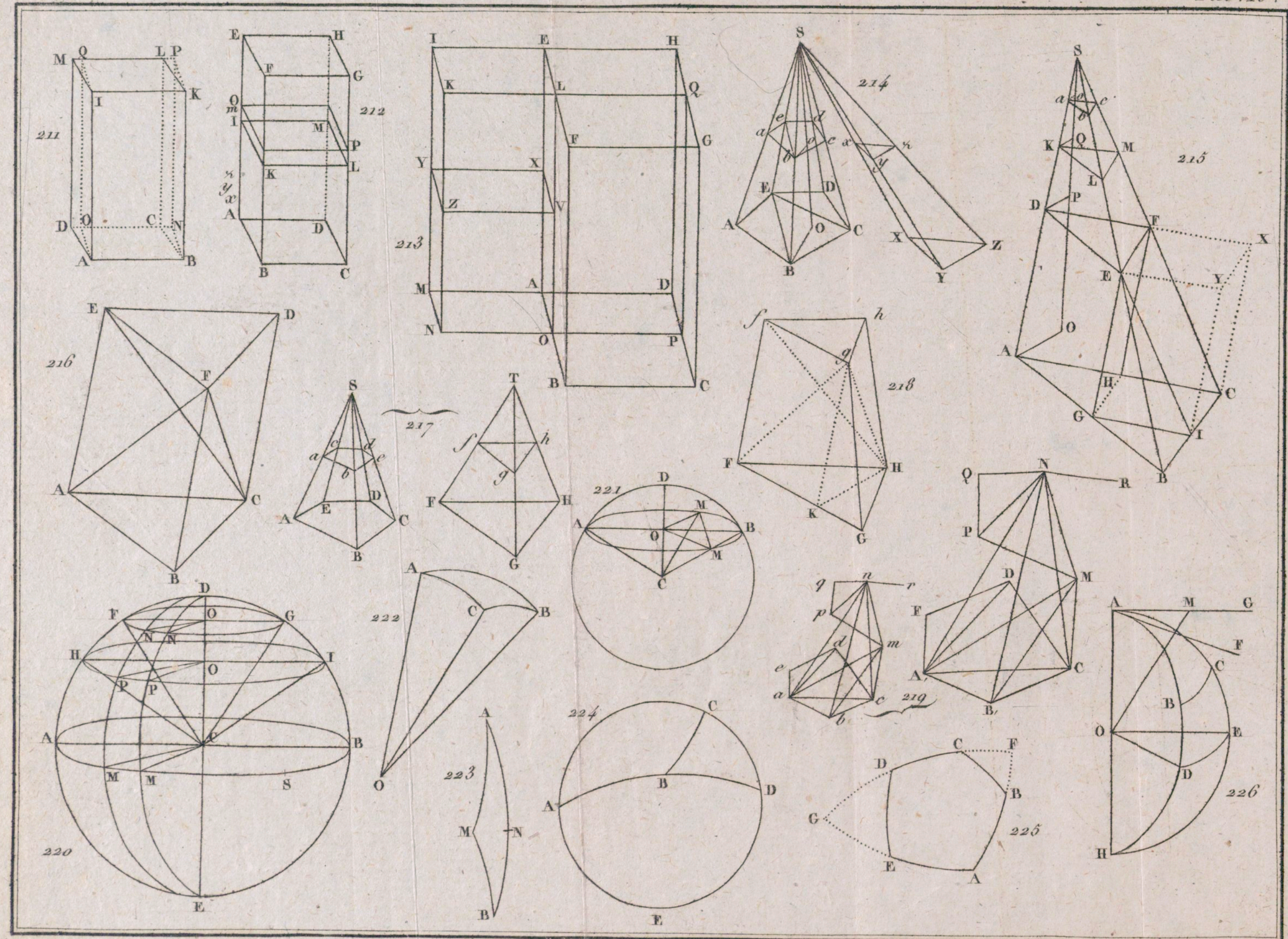
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (fig. 192) | zamiast | AB | położyć | AEB. |
| (fig. 198) | — | OB" | — | OCB". |
| (fig. 200) | — | ABCD | — | ABCDE. |
| (fig. 217) | — | *abedc* | — | *abcde* |
| (fig. 219) | — | ABCDF | — | ABCDE. |
| (fig. 220) | — | COOD | — | CQOD. |
| (fig. 228) | — | *f*DF*d* | — | *f*DE*d*. |
| (fig. 234) | — | DFFE | — | DEFE. |

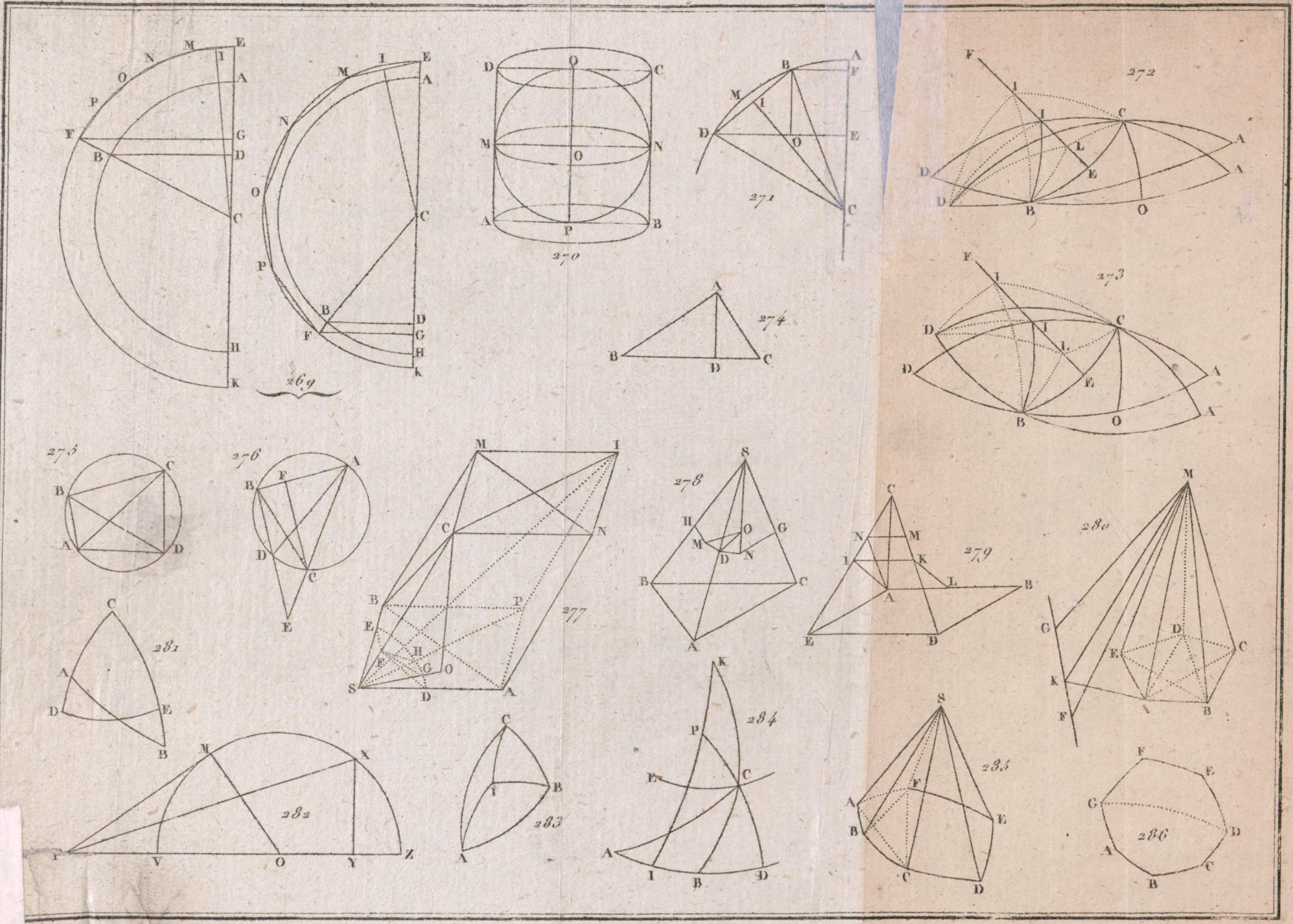
Między figurami leżącemi pod fig. 243, napisać (fig. 247).

(fig. 265) na mieyscu D położyć C, na mieyscu zaś C literę D.

(fig. 266) zamiast AM, napisać AOM.


194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210


211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226


269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286