

Praca doktorska

Zdzisław Śloderbach

KRYTERIA ROZDWOJENIA
STANÓW RÓWNOWAGI
W UOGÓLNIONEJ TERMOPLASTYCZNOŚCI

37 / 1980



P. 269



WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 września 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 37/1980

P r a c a d o k t o r s k a

Promotor: Doc.dr hab.inż. Bogdan Raniecki



57123

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 150 egz. Ark.wyd.4,5, Ark.druk.6,25

Oddano do drukarni we wrześniu 1980 r.

Nr zamówienia 628/e/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

KRYTERIA ROZDWOJENIA STANÓW RÓWNOWAGI W UOGÓLNIONEJ
TERMOPLASTYCZNOŚCI

Wstęp

Celem pracy jest wyprowadzenie kryteriów rozdzielenia stanów równowagi /bifurkacji stanów równowagi/ w sprzężonej uogólnionej termoplastyczności dla przypadku małych gradientów przemieszczeń i ich prędkości. Wyprowadzono kryterium globalne oraz silniejsze kryterium lokalne. Kryteria te są równocześnie dostatecznymi warunkami jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego podstawowego problemu brzegowego sprzężonej termoplastyczności. Wyprowadzone warunki jednoznaczności poza czysto matematyczno - poznawczą wartośćią mają również duże znaczenie praktyczne, jako, że stanowią one narzędzie do oceny krytycznych obciążeń przy przekroczeniu których możliwe jest rozdzielenie stanów równowagi / bifurkacja stanów równowagi /. Fakt ten zilustrowano na dwóch przykładach, z których pierwszy dotyczy problemu lokalizacji odkształcenia plastycznego w warunkach izotermicznych, drugi natomiast - problemu nieizotermicznego/adiabatyicznego/ "czystego" ścinania.

W rozdziale I wyprowadzono równania pola sprzężonej uogólnionej termoplastyczności wykorzystując postulaty klasycznej termodynamiki procesów nieodwracalnych. Uogólnienie to w stosunku do istniejących już prac/por.np. [1-5], [8], [12-13] / polega tutaj na przyjęciu najogólniejszej postaci dla potencjałów termodynamicznych /np.dla energii swobodnej/, nie zaś w postaci addytywnej. Dzięki przyjęciu takiego założenia możliwe stało się nie tylko wyspecyfikowanie i opis wszystkich efektów sprzężeń termomechanicznych analizowanych w pracach cytowanych wyżej, lecz również efektu sprzężenia sprężysto-plastycznego, a równania konstytutywne plastycznego płynięcia mają charakter niestowarzyszonych

praw nawet w przypadku przyjęcia postulatu Gyarmatiego. Fakt że równania konstytutywne sprzężonej uogólnionej termoplastyczności ważne są również w przypadku niestowarzyszonych praw płynięcia plastycznego, a także że uwzględniają efekt sprzężenia sprężysto-plastycznego oznacza, że można je stosować do opisu nie tylko metali lecz również materiałów porowatych oraz skał i gruntów.

W rozdziale II sformułowano podstawowy przyrostowy problem brzegowy sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. Następnie wyprowadzono lokalne i globalne kryterium wykluczające możliwość wystąpienia stanu bifurkacji. Kryteria te wyprowadzono analizując problem jednoznaczności rozwiązania sformułowanego w punkcie 7 przyrostowego / prędkościowego / problemu brzegowego. Podobny przyrostowy problem brzegowy sprzężonej termoplastyczności był już w literaturze badany / por. np. [1], [3], [5]/. W niniejszej pracy wzorowano się na metodach stosowanych w tych pracach. Oryginalnym jednak elementem jest, jak już wspomniano wcześniej, przyjęcie niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia oraz uwzględnienie wpływu odkształceń plastycznych na własności termosprężyste ciał. Żądanie takie prowadzi do trudniejszego problemu aniżeli te, które były rozpatrywane w literaturze do tej pory. Wystarczy wspomnieć, że jeśli ograniczyć się tylko do procesów obciążenia plastycznego, to rozpatrywany tutaj problem matematyczny nie jest problemem samosprężonym.

W rozdziale III wykorzystano dostateczny lokalny warunek wykluczający bifurkację rozwiązując dwa przykłady. W pierwszym porównano wyniki ograniczeń nakładanych na izotermiczną funkcję wzmocnienia przez warunek na lokalizację deformacji plastycznych Rice'a - Rudnickiego [40-41] i przez wyprowadzone w niniejszej pracy kryterium lokalne wykluczające możliwość wystąpienia stanu bifurkacji. W drugim przykładzie / por. p. 12 / rozpatrzono problem czystego adiabatycznego ścinania. Uzyskane wyniki wykorzystano w punkcie 13 pracy, w którym rozważa się problem adiabatycznego skręcania grubościennych i cienkościennych metalowych rurek. Oszacowano krytyczne adiabatyczne wartości momentu skręcającego, po przekroczeniu którego może wystąpić stan bifurkacji na zew - natrznym promieniu skręcanych grubo- i cienkościennych metalowych rurek.

Po rozdziale III zamieszczone są uwagi końcowe, w których dokonano krótkiego streszczenia problemów przedstawionych w pracy. Następnie przedstawiono wnioski i propozycje dotyczące kierunków rozwoju przyszłych badań w dziedzinie sprzężonej uogólnionej termoplastyczności.

W pracy zamieszczone są trzy dodatki w których podano dowody matematyczne tez omawianych w podstawowym tekście niniejszej pracy. Ułatwiło to dyskusję fizycznych aspektów uzyskanych wyników.

W dodatku A wyprowadzono warunki konieczne jednoznaczności rozwiązania dla sformułowanych problemów oznaczonych symbolami b_1 i b_2 odpowiednio /por. p. 6 /. W dodatku tym zamieszczone są również warunki jednoznacznej odwracalności równań konstytutywnych wyrażonych w prędkościach naprężeń i odkształceń.

W dodatku B przedstawiona jest procedura dowodu twierdzenia o lokalnym dostatecznym warunku jednoznaczności sformułowanego w punkcie 8.1 niniejszej pracy. Przeprowadzony dowód ma charakter dowodu matematycznego nie wprost. Badając dodatnią określoność wyrażenia podcałkowego oznaczonego symbolem I wyprowadzono wspomniany dostateczny lokalny warunek jednoznaczności.

W dodatku C pokazano, że dostateczny lokalny warunek jednoznaczności wynikający z żądania, aby funkcja podcałkowa oznaczona symbolem J' /por. p. 8.1 / była dodatnio określona, jest taki sam jak dla funkcji podcałkowej dla ciała sprężysto-plastycznego. Fakt ten stanowi również pewne kryterium potwierdzające słuszność wprowadzenia takiego wyrażenia podcałkowego J' majoryzującego wyrażenie podcałkowe dla ogólnego ciała sprężysto-plastycznego.

Oznaczenia i skróty

$$A \cdot B \longrightarrow A_i B_i \quad \text{lub} \quad A_{ij} B_{ij} \quad (i, j, k, l, m, n, \dots = 1 \dots 3)$$

$$A^{(k)} \cdot B^{(k)} = \sum_{k=1}^{K=M} A^{(k)} B^{(k)}$$

$$A^{(l)} B^{(l)} = \sum_{l=1}^{L=M} A^{(l)} B^{(l)}$$

$$\text{tr } A = A_{ii} \quad , \quad \text{sym } A \longrightarrow \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji})$$

$$AB \longrightarrow A_{ij} B_j \quad \text{lub} \quad A_{mn} B_{ij}$$

$$\text{dev } A = A - \frac{1}{3}(\text{tr } A) \mathbf{1}$$

$$A \circ B \longrightarrow A_i B_j \quad \text{lub} \quad A_{ij} B_{mn}$$

$$\mathbf{1} \longrightarrow \delta_{ij} \quad \text{/delta Kroneckera/}$$

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \quad \text{/ } x_j \text{ - współrzędne punktu położenia cząstki/}$$

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{/ } t \text{ - czas/}$$

$$\text{grad } A \longrightarrow A_{i,j}$$

$$\text{div } A \longrightarrow A_{i,i} \quad \text{lub} \quad A_{ij,j}$$

$$\frac{\partial A}{\partial B} dB \longrightarrow \frac{\partial A_{ij}}{\partial B_{mn}} dB_{mn}$$

Jeżeli Π i K oznaczają "wektory par" tensorów drugiej i zero-
wej walencji, to działanie $\Pi \cdot K$ jest skalarom:

$$\Pi \cdot K = \sum_{N=1}^{N=n} \Pi_{ij}^{(N)} K_{ij}^{(N)} + \sum_{M=1}^{M=m} \Pi^{(M)} K^{(M)}$$

Jeżeli Z oznacza "wektor par" tensorów czwartej i drugiej walencji ;

$$Z \Leftrightarrow \left\{ Z_{m n k l}^{(M)} ; Z_{m n}^{(M)} \right\}_{\substack{M=1 \dots n \\ M=1 \dots m}} \text{ zaś } M \text{ jest}$$

tensorem czwartej walencji, to MZ jest następującym "wektorem par" sumy tensorów czwartej i drugiej walencji jako

$$MZ \Leftrightarrow \left\{ \sum_{N=1}^{N=n} M_{ijmn} Z_{m n k l}^{(N)} ; \sum_{M=1}^{M=1} M_{ijmn} Z_{m n}^{(M)} \right\}$$

Natomiast gdy α jest tensorem drugiej walencji to działanie $\alpha \circ (MZ)$ jest "wektorem par" sumy tensorów drugiej i zerowej walencji

$$\alpha \circ (MZ) \Leftrightarrow \left\{ \sum_{N=1}^{N=n} \alpha_{ij} M_{ijmn} Z_{m n k l}^{(N)} ; \sum_{M=1}^{M=m} \alpha_{ij} M_{ijmn} Z_{m n}^{(M)} \right\}$$

Gdy Z jest "wektorem par" tensorów czwartej i drugiej walencji jak poprzednio, a K jest "wektorem par" tensorów drugiej i zerowej walencji, to wyrażenie $Z \circ K$ oznacza wektor sumy tensorów drugiej walencji jako

$$Z \circ K = \sum_{N=1}^{N=n} Z_{ijmn}^{(N)} K_{mn}^{(N)} + \sum_{M=1}^{M=m} Z_{ij}^{(M)} K^{(M)}$$

Gdy α jak poprzednio jest tensorem drugiej walencji to wyrażenie $\alpha \cdot (Z \circ K)$ oznacza skalar następująco

$$\alpha \cdot (Z \circ K) = \sum_{N=1}^{N=n} \alpha_{ij} Z_{ijmn}^{(N)} K_{mn}^{(N)} + \sum_{M=1}^{M=m} \alpha_{ij} Z_{ij}^{(M)} K^{(M)}$$

Gdy Π oznacza "wektor par" tensorów drugiej i zerowej walencji a \mathcal{E} oznacza tensor drugiej walencji, to różniczka wektora par Π względem \mathcal{E} określa następujący wektor par sumy tensorów drugiej i zerowej walencji

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathcal{E}} \circ d\mathcal{E} \Leftrightarrow \left\{ \sum_{N=1}^{N=n} \frac{\partial \Pi_{ij}^{(N)}}{\partial \mathcal{E}_{kl}} d\mathcal{E}_{kl} ; \sum_{M=1}^{M=m} \frac{\partial \Pi^{(M)}}{\partial \mathcal{E}_{kl}} d\mathcal{E}_{kl} \right\}$$

Natomiast różniczka wektora par Π tensorów drugiej i zerowej walencji względem wektora par K tensorów drugiej i zerowej walencji przedstawia wektor par sumy tensorów drugiej i zerowej walencji następujące:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} \circ dK \Leftrightarrow \left\{ \sum_{N=1}^{N=n} \left(\sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial \Pi_{ij}^{(N)}}{\partial K_{kl}^{(r)}} dK_{kl}^{(r)} + \sum_{s=1}^{s=m} \frac{\partial \Pi_{ij}^{(N)}}{\partial K^{(s)}} dK^{(s)} \right) ; \right. \\ \left. \sum_{M=1}^{M=m} \left(\sum_{r=1}^{r=n} \frac{\partial \Pi^{(M)}}{\partial K_{kl}^{(r)}} dK_{kl}^{(r)} + \sum_{s=1}^{s=m} \frac{\partial \Pi^{(M)}}{\partial K^{(s)}} dK^{(s)} \right) \right\}$$

gdzie, jak widać, należy wykonać sumowanie po wszystkich r z przedziału $(1 \div n)$ i po wszystkich s z przedziału $(1 \div m)$ dla każdego N i M odpowiednio.

Na podstawie poprzednich oznaczeń i skrótów możemy powyższe różniczki napisać bardziej skrótowe jako

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathcal{E}} \circ d\mathcal{E} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathcal{E}} \circ d\mathcal{E} ; \frac{\partial \Pi}{\partial \mathcal{E}} \cdot d\mathcal{E} \right\}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial K} \circ dK \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial K} \circ dK ; \frac{\partial \Pi}{\partial K} \cdot dK \right\}$$

ROZDZIAŁ I

PODSTAWOWE RÓWNANIA SPRĘŻONEJ UOGÓLNIONEJ TERMOPLASTYCZNOŚCI

1. Wstęp

W niniejszym rozdziale wyprowadza się równania pola sprężonej uogólnionej termoplastyczności w oparciu o ujęcia klasycznej termodynamiki procesów nieodwracalnych. Do opisu stanu termodynamicznego ciała sprężysto-plastycznego wykorzystuje się koncepcję makroskopowych parametrów wewnętrznych /por. np. [1-5], [6-11] /. Przy opracowaniu tego rozdziału wzorowano się na wcześniejszych pracach [1-6], [8], [12-13] dotyczących tej dziedziny. Zasadnicza zmiana w stosunku do istniejących prac polega na tym, że nie korzysta się tutaj z założenia o rozkładzie energii swobodnej na sumę dwu energii, z której jedna opisuje własności termosprężyste ciała, zaś druga proces wzmocnienia plastycznego niezależnie od własności termosprężystych. Dzięki temu możliwe jest opisanie efektów sprzężeń sprężysto-plastycznych obserwowanych w takich ciałach niemetalicznych jak np. skały. Przy wyprowadzaniu ogólnych równań prędkościowych nie korzysta się również z często stosowanego postulatu o istnieniu potencjału dysypacyjnego /postulat Gyarmatiego [14] /. Wykorzystanie tego postulatu niekoniecznie prowadzi do stowarzyszoneści praw plastycznego płynięcia. Okazuje się jednak /por. p. 4.2/, że w konsekwencji jego przyjęcia kierunek sumy tensorów prędkości odkształceń plastycznych i prędkości nieodwracalnych odkształceń sprężystych jest prostopadły do chwilowej powierzchni plastyczności. Ten ważny fakt nie był wydaje się do tej pory podkreślony w literaturze. W pracach [15-16] ; w których podjęto próbę wyprowadzenia niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia wykorzystując koncepcję teorii plastyczności Kadaszewicza-Nowożyłowa [17] , nie zauważono występowania tego efektu.

W punkcie drugim przyjmujemy podstawowe założenia dotyczące równania stanu /tzw. równania Gibbsa/ i źródła entropii.

Dyskusję ogólnych termostatycznych własności ciał sprężysto-plastycznych przeprowadza się w p. 3, w którym podajemy podstawowe tożsamości termodynamiczne, uwzględniające efekty sprzężeń.

W punkcie 4-tym dyskutuje się równanie prędkościowe. Formuluje się równania ewolucji dla parametrów wewnętrznych w oparciu o ogólne podejście i w oparciu o koncepcję wynikającą z przyjęcia postulatu Gyarmatiego.

W całym rozdziale korzysta się z założenia, że gradienty przemieszczeń i prędkości są małe. Korzysta się więc z założeń nieskończenie małej teorii ośrodka ciągłego. Założenie to umożliwia bardziej przejrzystą analizę aspektów fizycznych teorii, w szczególności analizę wszelkiego rodzaju sprzężeń termodynamicznych /por. np. [1-5] /.

Dla prostoty zakładamy, że wszystkie operacje i cały opis wykonywane są w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych.

2. Podstawowe założenia. Równanie Gibbsa i źródło entropii.

Załóżmy, że lokalny stan termodynamiczny opisują następujące parametry stanu [1] ,

\mathcal{E}^e - tensor małych odkształceń sprężystych

S - entropia właściwa /entropia jednostki masy/

$\mathcal{A}e^{(N)}$ - zbiór symetrycznych tensorowych parametrów wewnętrznych 2-go rzędu / $N = 1 \dots n$ / , $\mathcal{A}e^{(N)} = \mathcal{A}e^{(N)T}$
tzn. $\mathcal{A}e_{ij}^{(N)} = \mathcal{A}e_{ji}^{(N)}$

$\mathcal{A}e^{(M)}$ - zbiór skalarnych parametrów wewnętrznych / $M = 1 \dots m$ /

Oznaczamy symbolem K , zbiór parametrów wewnętrznych w formie "wektora par"

$$K \Leftrightarrow \left\{ \mathcal{A}e^{(N)}, \mathcal{A}e^{(M)} \right\} \begin{matrix} N=1 \dots n \\ M=1 \dots m \end{matrix}$$

Przyjmujemy, że podstawowe równanie stanu, tzw. równanie Gibbsa, wyrażone w formie różniczki energii wewnętrznej właściwej u ma postać

$$du(s, \mathcal{E}^e, K) = T ds + \frac{1}{\rho_0} \mathcal{G} \cdot d\mathcal{E}^e + \frac{1}{\rho_0} \Pi \cdot dK \quad /2.1/$$

tutaj Π oznacza "wektor par" sił wewnętrznych stowarzyszonych ze zbiorem parametrów wewnętrznych

$$\Pi \Leftrightarrow \left\{ \Pi^{(N)}, \Pi^{(M)} \right\} \begin{matrix} N=1 \dots n \\ M=1 \dots m \end{matrix}$$

gdzie $\Pi^{(N)} = \Pi^{(N)T}$ tzn. $\Pi_{ij}^{(N)} = \Pi_{ji}^{(N)}$

Lokalne ujęcie zasady zachowania energii jest następujące

$$\dot{u} = \frac{1}{\rho_0} \mathcal{G} \cdot \dot{\mathcal{E}} - \frac{1}{\rho_0} \operatorname{div} \mathcal{Q} \quad /2.2/$$

gdzie symbolem \mathcal{Q} - oznacza się strumień ciepła wymienianego z otoczeniem przez powierzchnię o jednostkowym polu w jednostce czasu, T - jest temperaturą bezwzględną, \mathcal{G} - naprężeniem, ρ_0 jest gęstością masy ciała w stanie naturalnym, $\operatorname{div} \mathcal{Q} = \frac{\partial \mathcal{Q}_i}{\partial x_i}$, zaś współrzędne prostokątne x_i wyznaczają początkowe położenie cząstki ciała.

Równanie lokalnego bilansu entropii napisane dla jednostki objętości ciała ma następującą postać

$$\rho_0 \dot{s} = - \operatorname{div} \left(\frac{\mathcal{Q}}{T} \right) + \mathcal{G}^{(s)} \quad /2.3/$$

gdzie $-\left(\frac{\mathcal{Q}}{T}\right)$ oznacza strumień entropii a $\mathcal{G}^{(s)}$ określa produkcję entropii /entropię wytwarzaną/ w jednostce czasu, objętości i w określonej cząstce.

Druga część drugiej zasady termodynamiki /sformułowanie lokalne/ wyraża się poprzez następującą nierówność

$$\mathcal{G}^{(s)} \geq 0 \quad /2.4/$$

Produkcję entropii można obliczyć rozwiązując układ 3 równań /2.1/ - /2.3/ względem nieznanych \dot{u} , \dot{s} i $\delta^{(s)}$

$$T \delta^{(s)} = D - \frac{1}{T} q \cdot \nabla T, \quad \nabla T = \text{grad } T \quad /2.5/$$

$$D = \delta \cdot \dot{\epsilon}^p - \pi \cdot \dot{K} \quad /2.6/$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad /2.7/$$

D - wyraża dysypację energii mechanicznej w jednostce czasu i w jednostce objętości

Zbiór sił występujących w /2.5/

$$X^\delta = \left\{ \delta ; -\pi ; \frac{1}{T} \nabla T \right\} \quad /2.8/$$

nazywa się zbiorem sił dysypacyjnych lub zbiorem bodźców termodynamicznych, zaś zbiór

$$\dot{X}^\delta = \left\{ \dot{\epsilon}^p ; \dot{K} ; q \right\} \quad /2.9/$$

zbiorem miar prędkości przepływów termodynamicznych [2], [10], [14], [18-19].

3. Dyskusja termostatycznych własności ciał sprężysto-plastycznych

Do opisu własności termostatycznych można użyć różnych potencjałów termodynamicznych. Prowadzi to oczywiście do równoważnych opisów własności termostatycznych materiału.

Oznaczmy następujące zbiory niezależnych parametrów stanu :

$$Y_K^{SE} = \{S, \mathcal{E}^e, K\}; \quad Y_K^{TE} = \{T, \mathcal{E}^e, K\}; \quad Y_K^{TG} = \{T, \mathcal{G}, K\} \quad /3.1/$$

Odpowiednie potencjały termodynamiczne oznaczymy w sposób następujący

$$U = U(Y_K^{SE}) \quad - \text{energia wewnętrzna}$$

$$A(Y_K^{TE}) = [U - TS]_{S=S(Y_K^{TE})} \quad - \text{energia swobodna} \quad /3.2/$$

$$G(Y_K^{TG}) = [A - \frac{1}{p_0} \mathcal{G} \cdot \mathcal{E}^e]_{\mathcal{E}^e = \mathcal{E}^e(Y_K^{TG})} \quad - \text{funkcja Gibbsa}$$

Ich różniczki zupełne wynoszą odpowiednio /por. 2.1/

$$dA = -s dT + \frac{1}{p_0} \mathcal{G} \cdot d\mathcal{E}^e + \frac{1}{p_0} \pi \cdot dK \quad /3.3/$$

$$dG = -s dT - \frac{1}{p_0} \mathcal{E}^e d\mathcal{G} + \frac{1}{p_0} \pi \cdot dK$$

zaś wynikające z nich termiczne równania stanu podane są w tabeli 1.

TABELA 1

Energia wewnętrzna $U = U(Y_K^{SE})$	Energia swobodna $A = A(Y_K^{TE})$	Funkcja Gibbsa $G = G(Y_K^{TG})$
$/3.4/$ $T(Y_K^{SE}) = \frac{\partial U(Y_K^{SE})}{\partial S}$	$-s(Y_K^{TE}) = \frac{\partial A(Y_K^{TE})}{\partial T}$	$-s(Y_K^{TG}) = \frac{\partial G(Y_K^{TG})}{\partial T}$

<p>13.5/</p> $\frac{1}{\beta_0} \sigma(Y_K^{SE}) = \frac{\partial U(Y_K^{SE})}{\partial \varepsilon^e}$	$\frac{1}{\beta_0} \sigma(Y_K^{TE}) = \frac{\partial A(Y_K^{TE})}{\partial \varepsilon^e}$	$-\frac{1}{\beta_0} \varepsilon^e = \frac{\partial G(Y_K^{TE})}{\partial \sigma}$
<p>13.6/</p> $\frac{1}{\beta_0} \pi(Y_K^{SE}) = \frac{\partial U(Y_K^{SE})}{\partial K}$	$\frac{1}{\beta_0} \pi(Y_K^{TE}) = \frac{\partial A(Y_K^{TE})}{\partial K}$	$\frac{1}{\beta_0} \pi(Y_K^{TE}) = \frac{\partial G(Y_K^{TE})}{\partial K}$

Różniczkowanie względem "wektora par" występujące w tabeli 1 określone jest następująco

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial K} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \rho^{(N)}}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial \rho^{(M)}} \right\} \begin{matrix} N = 1 \dots n \\ M = 1 \dots m \end{matrix} \quad /3.7/$$

Analogicznie

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \pi} \Leftrightarrow \left\{ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \pi^{(N)}}, \frac{\partial(\cdot)}{\partial \pi^{(M)}} \right\} \begin{matrix} N = 1 \dots n \\ M = 1 \dots m \end{matrix} \quad /3.8/$$

gdzie znak /·/ - oznacza symbolicznie różniczkowaną funkcję .
 Wprowadza się następujące definicje podstawowych wielkości fizycznych opisujących własności termostatyczne ciał stałych

$$C_{\epsilon}(Y_K^{TE}) = T \frac{\partial s(Y_K^{TE})}{\partial T} = \frac{\partial u(Y_K^{TE})}{\partial T}$$

$$C_{\sigma}(Y_K^{TS}) = T \frac{\partial s(Y_K^{TS})}{\partial T} \quad /3.9/$$

$$L(Y_K^{TS}) = \frac{\partial \epsilon^e(Y_K^{TS})}{\partial \sigma} ; \quad M(Y_K^{TE}) = \frac{\partial \sigma(Y_K^{TE})}{\partial \epsilon^e} \quad /3.10/$$

$$\alpha(Y_K^{TS}) = \frac{\partial \epsilon^e(Y_K^{TS})}{\partial T} \quad /3.11/$$

$$Z(Y_K^{TS}) = \frac{\partial \epsilon^e(Y_K^{TS})}{\partial K} ; \quad N(Y_K^{TE}) = \frac{\partial \sigma(Y_K^{TE})}{\partial K} \quad /3.12/$$

Tutaj C_{ϵ} i C_{σ} są ciepłami właściwymi mierzonymi odpowiednio przy stałych (ϵ^e, K) i (σ, K) ; M jest tensorem izotermicznych modułów sprężystości w stanie Y_K^{TE} zaś L - tensorem izotermicznej podatności sprężystej w stanie Y_K^{TS} .

Symbolem α oznaczono tensor rozszerzalności cieplnej materiału.

N - jest wektorem par tensorów 4 i 2 walencji reprezentującym izotermiczną zmianę stanu naprężenia wskutek przemian wewnętrznych towarzyszących odkształceniu plastycznemu w stanie Y_K^{TE} .

Z - jest natomiast wektorem par tensorów 4 i 2 walencji reprezentującym izotermiczną zmianę deformacji sprężystych spowodowaną przemianami wewnętrznymi w stanie $Y_K^{T\theta}$.

Wielkości /3.9/ - /3.12/ są zależne. Spełniają one następujące tożsamości wynikające z istnienia potencjałów termodynamicznych [2].

$$M = \left(L^{-1} \right)_{\theta = \theta(Y_K^{T\theta})} \text{ lub } 2 \left[M_{ijmn} L_{mnr} \right]_{\theta = \theta(Y_K^{T\theta})} = \delta_{is} \delta_{jr} + \delta_{ir} \delta_{js} \quad / 3.13 /$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad ; \quad M_{ijmn} = M_{mnij} = M_{jimn} = M_{ijnm} \quad / 3.14 /$$

$$C_{\theta} = \left[C_{\theta} + \frac{T}{\rho_0} \alpha \cdot M \alpha \right] \epsilon^e = \epsilon^e(Y_K^{T\theta}) \quad / 3.15 /$$

W dalszym ciągu korzystać będziemy również z następujących tożsamości termodynamicznych, których dowód można znaleźć w pracy [2].

$$\frac{\partial s(Y_K^{T\theta})}{\partial \epsilon^e} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi(Y_K^{T\theta})}{\partial T} = \frac{1}{\rho_0} (M \alpha)_{\theta = \theta(Y_K^{T\theta})} \quad / 3.16 /$$

$$- \rho_0 \frac{\partial s(Y_K^{T\theta})}{\partial K} = \frac{\partial \pi(Y_K^{T\theta})}{\partial T} \quad ; \quad - \rho_0 \frac{\partial s(Y_K^{T\theta})}{\partial K} = \frac{\partial \pi(Y_K^{T\theta})}{\partial T}$$

oraz

$$\frac{\partial S(Y_K^{T\delta})}{\partial \delta} = \frac{1}{\beta_0} \alpha$$

$$\frac{1}{\beta_0} \frac{\partial \pi(Y_K^{S\epsilon})}{\partial S} = \frac{\partial T(Y_K^{S\epsilon})}{\partial K}$$

/3.17/

$$\frac{\partial \mathcal{E}^e(Y_K^{T\delta})}{\partial T} = \beta_0 \frac{\partial S(Y_K^{T\delta})}{\partial \delta}$$

Ze względu na to, że potencjały termodynamiczne nie są przedstawiane w postaci addytywnej [1-4] lecz w najogólniejszej postaci, zachodzą dodatkowo następujące tożsamości sprzężeń termodynamicznych, z których korzysta się w dalszej części pracy.

$$-L N = -L(Y_K^{T\delta}) N(Y_K^{T\epsilon}) = Z$$

/3.18/

$$-M Z = -M(Y_K^{T\epsilon}) Z(Y_K^{T\delta}) = N$$

$$\frac{\partial \pi(Y_K^{T\epsilon})}{\partial \mathcal{E}^e} = N ; - \frac{\partial \pi(Y_K^{T\delta})}{\partial \delta} = Z$$

/3.19/

oraz

$$\frac{\partial S(Y_K^{T\delta})}{\partial K} = \frac{\partial S(Y_K^{T\epsilon})}{\partial K} + \frac{1}{\beta_0} \alpha \circ (MZ)$$

/3.20/

$$\frac{\partial \pi(Y_K^{T\delta})}{\partial T} = \frac{\partial \pi(Y_K^{T\epsilon})}{\partial T} - \alpha \circ (MZ)$$

/3.21/

Najważniejsze własności termostaticzne materiałów sprężystoplastycznych można omówić, przyjmując za zbiór niezależnych parametrów stanu kolejno Y_K^{TE} i Y_K^{TB} oraz obliczając przyrosty zależnych parametrów [1] /por. kolumny 2 i 3 w tabeli 1/ i wzory /3.9 - 3.21/.

Otrzymujemy więc

$$Tds(Y_K^{TE}) = \underbrace{C_E dT}_{\text{pojemność cieplna}} + \underbrace{\frac{T}{\rho_0} d\epsilon^e \cdot M\alpha}_{\text{ciepło odkształcenia sprężystego}} - \underbrace{\frac{T}{\rho_0} \frac{\partial \pi}{\partial T} \cdot dK}_{\text{ciepło wewnętrznych przemian}} \quad /3.22/$$

pojemność cieplna ciepło odkształcenia sprężystego ciepło wewnętrznych przemian

$$Tds(Y_K^{TB}) = \underbrace{C_B dT}_{\text{pojemność cieplna}} + \underbrace{\frac{T}{\rho_0} \alpha \cdot d\delta}_{\text{termostaticzny efekt piezokaloryczny}} - \underbrace{\frac{T}{\rho_0} \frac{\partial \pi}{\partial T} \cdot dK}_{\text{ciepło wewnętrznych przemian}} \quad /3.23/$$

termostaticzny efekt piezokaloryczny

$$d\epsilon^e(Y_K^{TB}) = \underbrace{L d\delta}_{\text{izotermiczna podatność sprężysta}} + \underbrace{\alpha dT}_{\text{rozszerzalność cieplna}} + \underbrace{Z^0 dK}_{\text{izotermiczna zmiana deformacji sprężystych na skutek przemian wewnętrznych}} \quad /3.24/$$

izotermiczna podatność sprężysta rozszerzalność cieplna izotermiczna zmiana deformacji sprężystych na skutek przemian wewnętrznych

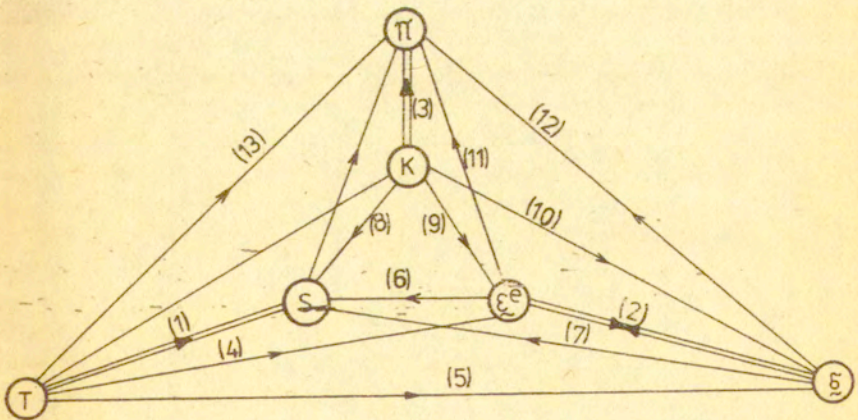
$$d\delta(Y_K^{TE}) = \underbrace{M d\epsilon^e}_{\text{izotermiczna sprężystość}} + \underbrace{M\alpha dT}_{\text{sprężyste naprężenia}} + \underbrace{N^0 dK}_{\text{izotermiczna zmiana naprężenia spowodowana przemianami wewnętrznymi}} \quad /3.25/$$

izotermiczna sprężystość sprężyste naprężenia izotermiczna zmiana naprężenia spowodowana przemianami wewnętrznymi

$$d\pi(Y_{\kappa}^{Te}) = \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial K} \circ dK}_{\text{zmiana sił wewnętrznych towarzysząca wewn. przemianom}} + \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial T} dT}_{\text{wewnętrzne siły cieplne}} + \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial \epsilon^e} d\epsilon^e}_{\text{zmiana sił wewnętrznych spowodowana sprężystymi deformacjami}} \quad /3.26/$$

$$d\pi(Y_{\kappa}^{T\delta}) = \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial K} \circ dK}_{\text{zmiana sił wewnętrznych towarzysząca wewn. przemianom}} + \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial T} dT}_{\text{wewnętrzne siły cieplne}} + \underbrace{\frac{\partial \pi}{\partial \delta} \circ d\delta}_{\text{zmiana sił wewnętrznych spowodowana zmianą stanu naprężenia}} \quad /3.27/$$

Sprężenia termostatyczne w obszarze odkształceń sprężysto-plastycznych zilustrowano schematycznie na rys. 1. Skorzystano tu z analogicznego schematu sprzężeń występujących w termoplastyczności podanego w [1] .



Rys.1

/1/ - pojemność cieplna, /2/ - sprężystość, /3/ - zmiana sił wewnętrznych towarzysząca wewnętrznym przemianom, /4/ - rozszerzalność cieplna - γ_{21} , /5/ - sprężyste naprężenia cieplne - γ_{21}^* , /6/ - ciepło deformacji sprężystej - γ_{12}^* , /7/ - efekt piezokaloryczny - γ_{12} , /8/ - ciepło przemian wewnętrznych - γ_3 , /9/ - zmiana odkształceń sprężystych na skutek przemian wewnętrznych - γ_{23} , /10/ - zmiana stanu naprężenia wskutek przemian wewnętrznych - γ_{23}^* , /11/ - zmiana sił wewnętrznych spowodowana zmianą deformacji sprężystej - γ_{13}^* , /12/ - zmiana sił wewnętrznych wskutek zmiany stanu naprężenia - γ_{13} , /13/ - wewnętrzne siły cieplne - γ_{31} .

Bezwymiarowe współczynniki $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \gamma_{12}^*, \gamma_{21}^*, \gamma_{23}, \gamma_{23}^*, \gamma_{13}, \gamma_{13}^*$ i γ_{31} , które pojawiają się w poniższych wzorach /3.28 - 3.29/ i dalszych nie mają żadnego znaczenia fizycznego. Wykorzystując pomysł podany w [1] wprowadza się je dla ułatwienia interpretacji różnych członów i niektórych efektów sprzężeń występujących w równaniach. Są one również użyteczne przy dokonywaniu pewnych uproszczeń. Są to liczby znaczące, które w uogólnionym przypadku przybierają wartość 1 oraz wartość zero jeżeli którykolwiek z efektów sprzężeń zilustrowanych na rys. 1 jest pomijany. Jeżeli na przykład podstawić $\gamma_{12}^* = 0$ wówczas pomijane jest ciepło deformacji sprężystej gdy $\gamma_{23} = 0$ - pomijany jest wpływ przemian wewnętrznych na odkształcenia sprężyste, itd. Ponieważ w niniejszej pracy interesują nas tylko te przemiany wewnętrzne, które są spowodowane odkształceniami plastycznymi i które na gruncie makroskopowym objawiają się w formie wzmocnienia plastycznego więc efekty oznaczone numerami /9-12/ na rys. 1 można również nazwać "efektami sprzężenia sprężysto-plastycznego". Taka nazwa była już używana w literaturze [20-25]. Liczba γ_1 wskazywać będzie ciepło dysypacji, które nie należy do termodynamicznych efektów cieplnych i nie jest wyszczególnione w opisie do rys. 1.

Eliminując δ z równań /2.3/, /3.22/ i /3.23/ otrzymuje się odpowiednio dwa alternatywne równania dla temperatury.

Obliczając $\dot{\bar{\delta}}$ z równania /3.5/2 i $\dot{\bar{\epsilon}}^e$ z równania /3.5/3 oraz wykorzystując /3.9 - 3.12/ odpowiednio, otrzymamy następujące dwa alternatywne zestawy równań składające się z równania dla temperatury i związku między prędkościami odkształceń sprężystych, naprężeń i temperatury.

$$\rho_0 C_E \dot{T} = \gamma_1 D - \gamma_{21} T \alpha \cdot M \dot{\bar{\epsilon}}^e + \gamma_3 T \frac{\partial \pi}{\partial T} \cdot \dot{K} + q_0 \quad /3.28/$$

$$\dot{\bar{\epsilon}}^e = L \dot{\bar{\delta}} + \gamma_{21} \alpha \dot{T} + \gamma_{23} Z \square \dot{K}$$

oraz

$$\rho_0 C_E \dot{T} = \gamma_1 D - \gamma_{12}^* T \alpha \cdot M \dot{\bar{\epsilon}}^e + \gamma_3 T \frac{\partial \pi}{\partial T} \cdot \dot{K} + q_0 \quad /3.29/$$

$$\dot{\bar{\delta}} = M \dot{\bar{\epsilon}}^e - \gamma_{21}^* \dot{T} M \alpha + \gamma_{23}^* N \square \dot{K}$$

gdzie $q_0 = -\text{div } q$

$$\theta = T - T_0$$

/3.30/

Q, T_0 - jest temperaturą odniesienia

Zauważamy, że prędkość sprężystych deformacji występująca w /3.28/2 można przedstawić w sposób następujący

$$\dot{\bar{\epsilon}}^e = \dot{\bar{\epsilon}}^{e'} + \dot{\bar{\epsilon}}^{e''} \quad /3.31/$$

gdzie $\dot{\bar{\epsilon}}^{e'} = L \dot{\bar{\delta}} + \gamma_{21} \alpha \dot{T}$ - jest tzw. odwracalną częścią prędkości deformacji sprężystej

a $\dot{\bar{\epsilon}}^{e''} = \gamma_{23} Z \square \dot{K}$ - jest nieodwracalną częścią prędkości deformacji sprężystej związaną z przemianami wewnętrznymi towarzyszącymi odkształceniom plastycznym. Tego typu rozkład tensora $\dot{\bar{\epsilon}}^e$ na dwie części oraz ich interpretację podano w pracach [20-23] dla przypadku procesu izotermicznego.

Porównując /3.31/ z /2.7/ możemy napisać, że

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p = \dot{\epsilon}^{e'} + \dot{\epsilon}^{e''} + \dot{\epsilon}^p \quad /3.32/$$

Wprowadzmy jeszcze jeden potencjał termodynamiczny - entalpię χ [18-19], [26-28],

$$\chi(Y_K^{T\delta}) = \gamma_1 G(Y_K^{T\delta}) + \gamma_3 T S(Y_K^{T\delta}) \quad /3.33/$$

Wówczas wykorzystując /3.28/, i /3.33/, równanie dla temperatury można wyrazić poprzez moc odkształcenia plastycznego, oraz zmianę entalpii spowodowaną zmianą parametrów wewnętrznych następująco:

$$\beta_0 C \delta \dot{T} = \gamma_1 \delta \cdot \dot{\epsilon}^p - \gamma_{12} T \alpha \cdot \dot{\delta} - \beta_0 \frac{\partial \chi(Y_K^{T\delta})}{\partial K} \cdot \dot{K} + q_0 \quad /3.34/$$

Równanie /3.34/ w tej postaci może być użyteczne do analizy energii utajonej w ciele w wyniku deformacji plastycznej w zamkniętym cyklu naprężenia [1-2], [12].

4. Równania prędkościowe

4.1. Ogólna postać równań prędkościowych

Termiczne równania stanu występujące w którejkolwiek z kolumn tabeli 1 stanowią pierwszą grupę równań konstytutywnych termoplastyczności. Drugą grupę stanowią równania prędkościowe wiążące bodźce termodynamiczne /2.8/ ze zbiorem prędkości przepływów termodynamicznych /2.9/.

Przyjmijemy następującą ogólną postać równań prędkościowych:

$$q = \phi^q(\nabla T, Y_K^T) \quad , \quad \phi^q(0, Y_K^T) = 0 \quad /4.1/$$

gdzie

$$Y_K^T = \{ T, K \}$$

$$\dot{E}^p = \Lambda \frac{\partial f_1^p(X^D, Y_K^T)}{\partial \delta}, \quad K = \Lambda d(X^D, Y_K^T) = \Lambda d \quad /4.2/$$

Jeżeli $f_1^p = 0$ i $\Lambda \geq 0$

$\dot{E}^p = 0$, $K = 0$ jeżeli $f_1^p < 0$ lub $f_1^p = 0$ i $\Lambda < 0$ /4.3/

gdzie $X^D = \{\delta, -\pi\}$

Tutaj $f_1^p = f_1^p(\delta, -\pi, K, T)$ jest uogólnioną funkcją płynięcia plastycznego określoną w przestrzeni sił termodynamicznych X^D taką, że $f_1^p = 0$ określa powierzchnię płynięcia w tej przestrzeni.

Ponieważ ϕ^2 nie zależy od sił dysypacyjnych δ i $-\pi$ więc na to ażeby spełniona była nierówność /2.4/ trzeba aby zachodziło spełnienie dwóch niezależnych nierówności

$$-\phi^2 (\nabla T, Y_K^T) \cdot \nabla T \geq 0 \quad \frac{\partial f_1^p}{\partial \delta} \cdot \delta - \pi \cdot d \geq 0 \quad /4.4/$$

Jeżeli w miejsce π podstawić odpowiednie równanie stanu /3.6/₃ to otrzymamy funkcję płynięcia i odpowiedni warunek płynięcia f w przestrzeni naprężeń

$$f_1^p(\delta, -\pi, K, T) \Big|_{\pi = \pi(\delta, K, T)} = f(Y_K^T) \quad /4.5/$$

Mnożnik Λ występujący w /4.2/_{1,2} można wyeliminować wykorzystując warunek "stowarzyszenia" $\dot{f}_1^p = \dot{f} = 0$ gdy $f_1^p = f = 0$ jako

$$f_\delta^p \cdot \dot{\delta} + f_T^p \cdot \dot{T} - \Lambda \dot{h} = 0 \quad \text{stąd} \quad \Lambda = \frac{(f_\delta^p \cdot \dot{\delta} + f_T^p \cdot \dot{T})}{\dot{h}} \quad /4.6/$$

gdzie
$$h = - \frac{\partial f}{\partial K} \cdot d \quad /4.7/$$

jest tzw. funkcją wzmocnienia,

oraz
$$f_\sigma = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad , \quad f_T = \frac{\partial f}{\partial T} \quad /4.8/$$

Przyjmując klasyczny warunek na obciążenie plastyczne ($\dot{\epsilon}^p \neq 0$) wtedy i tylko wtedy gdy $f_\sigma \cdot \dot{\sigma} + f_T \dot{T} \geq 0$, na podstawie /4.6/₂ otrzymamy, że $h \geq 0$

Równania /4.2/₁ można przedstawić w postaci

$$\dot{\epsilon}^p = \begin{cases} \frac{1}{h} \frac{f}{f_\sigma} (f_\sigma \dot{\sigma} + f_T \dot{T}) & \text{jeżeli } f=0 \text{ i } f_\sigma \dot{\sigma} + f_T \dot{T} \geq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } f < 0 \text{ lub jeżeli } f=0 \text{ i } f_\sigma \dot{\sigma} + f_T \dot{T} < 0 \end{cases} \quad /4.9/$$

gdzie na podstawie /4.5/ mamy

$$f_{\sigma, \sigma} = \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} = f_\sigma - \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \pi} \quad /4.10/$$

4.2. Szczególne postacie równań prędkościowych wynikająca z postulatu Gyarmatiego.

Bardziej szczególną postać równań prędkościowych można uzyskać korzystając z uogólnionego postulatu Gyarmatiego [1], [14]. Przyjmijmy więc, że siły dysypacyjne /termodynamiczne/ X^D posiadają potencjał $\psi^D(\dot{x}^D, Y_k^T)$ [1], [2], [14],

$$X^D = \frac{\partial \psi^D}{\partial \dot{x}^D} \quad , \quad \dot{x}^D = \{ \dot{\epsilon}^p, \dot{K} \} \quad /4.11/$$

różniczkowalny wszędzie z wyjątkiem punktu $\dot{x}^D = 0$.

Ponieważ związki /4.11/ mają opisywać materiał plastyczny nie wrażliwy na prędkość przepływów termodynamicznych, więc muszą one być niezmiennicze przy zmianie skali czasu. Nietrudno jest sprawdzić, że równania /4.11/ są niezmiennicze przy zmianie skali czasu, pod warunkiem, że funkcja ψ^D jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem \dot{x}^D [2].

Jednorodność funkcji ψ^D implikuje z kolei, zależność funkcji $X^D(\dot{x}^D, Y_K^T)$ [1], [2], [20]. To oznacza, że istnieje funkcja $f_1(X^D, Y_K^T)$ zwana uogólnioną funkcją płynięcia taką, że

$$f_1(X^D, Y_K^T) = 0 \quad \text{jeżeli} \quad \dot{x}^D \neq 0 \quad /4.12/$$

Wówczas związki odwrotne względem /4.11/ można przedstawić w następujący sposób

$$\dot{x}^D = \Lambda \frac{\partial f_1}{\partial X^D} \quad \text{jeżeli} \quad \dot{x}^D \neq 0 \quad \text{i} \quad f_1 = 0 \quad /4.13/$$

Zakładając, że stany z $f_1 > 0$ są stanami nieosiągalnymi oraz przyjmując dodatkowo powszechnie stosowane kryterium odciążenia i obciążenia /4.9/_{1,2} otrzyma się uogólnienie niezotermicznych "praw plastycznego płynięcia" W.Pragera [8], w formie identycznej z /4.9/ z tą różnicą, że funkcja d występująca w /4.2/₂ i /4.7/ przyjmie postać

$$d = - \frac{\partial f_1}{\partial \pi} \quad /4.14/$$

Wykorzystując /4.14/ oraz /4.10/, /3.12/ i /3.19/, otrzymamy

$$\frac{\partial \mathcal{E}^e}{\partial K} \dot{K} + \dot{\mathcal{E}}^p = \Lambda \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \quad /4.15/$$

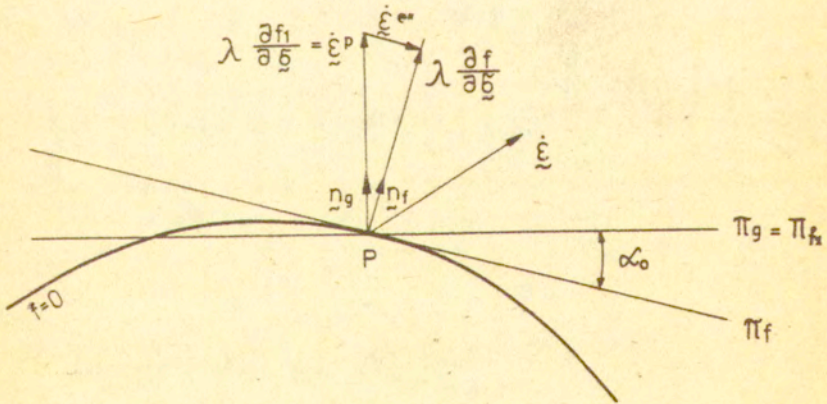
gdzie Λ określone jest wzorem /4.6/.

Podstawiając /3.31/3 do /4.15/ okazuje się, że

$$\dot{\mathcal{E}}^{e''} + \dot{\mathcal{E}}^P = \Lambda \frac{\partial f^P}{\partial \mathcal{G}} \quad /4.16/$$

W sformułowaniu ogólnym /por. p.4.1/ tensor $\dot{\mathcal{E}}^P$ jest prostopadły do powierzchni $f_1=0$ ale nie jest prostopadły do powierzchni $f=0$. Natomiast suma tensorów $\dot{\mathcal{E}}^{e''} + \dot{\mathcal{E}}^P$ nie jest prostopadła ani do powierzchni $f_1=0$ ani do $f=0$.

W konsekwencji przyjęcia postulatu Gyarmatiego, suma tensorów $\dot{\mathcal{E}}^{e''} + \dot{\mathcal{E}}^P$ /por. /4.16// jest prostopadła do powierzchni plastyczności $f=0$. Wydaje się, że fakt ten nie był do tej pory rozpoznany w literaturze. Zilustrowano go na rys. 2.



Rys. 2

Na rysunku tym,

Π_f - oznacza hiperpłaszczyznę styczną do chwilowej powierzchni plastyczności $f=0$ w punkcie P wyznaczoną przez jednostkowy wektor normalny n_f ,
$$n_f = \frac{f_s}{\left| \left(f_s \cdot f_s \right)^{\frac{1}{2}} \right.}$$

Π_g - oznacza hiperpłaszczyznę styczną do powierzchni płynięcia plastycznego $f_1=0$ mającej charakter potencjału plastycznego wyznaczoną przez wektor normalny n_g , jako

$$n_g = \frac{f_{1,s}}{\left| \left(f_{1,s} \cdot f_{1,s} \right)^{\frac{1}{2}} \right.}$$

α_0 - jest kątową miarą dewiacji spowodowanej zmianą sił wewnętrznych Π /por. /3.19// w zależności od stanu naprężenia, co jest równoważne zmianie modułów sprężystości na skutek deformacji plastycznych /por. /3.12/ i /3.26//.

W przedstawionym w /p. 4.2/ zarysie teorii materiałów nie wrażliwych na prędkość przepływów termodynamicznych, wszystkie równania przyjmą konkretną postać pod warunkiem znajomości funkcji termodynamicznej G /lub jakiegokolwiek innego potencjału termodynamicznego/, ψ^2 i φ^2 lub G , f_1 i φ^2 .

W sformułowaniu najogólniejszym podanym w /p. 4.1/ potrzebna jest jeszcze znajomość funkcji $d = d(X^2, Y_k^T)$ dla równań ewolucji parametrów wewnętrznych K .

ROZDZIAŁ II

JEDNOZNACZNOŚĆ

5. Wstęp

W niniejszym rozdziale formułuje się przyrostowy problem brzegowy sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. Następnie dokonuje się interpretacji warunków jednoznaczności rozwiązania sformułowanego przyrostowego problemu brzegowego. Wyprowadza się warunki konieczne jednoznaczności rozwiązania problemu. Następ-

niewyprowadza się dostateczny lokalny warunek i globalne dostateczne kryterium jednoznaczności oraz przedstawia się globalny dostateczny warunek jednoznaczności. Podobny przyrostowy problem brzegowy sprzężonej termoplastyczności był już w literaturze badany /por. [1], [3], [5] /. W niniejszej pracy wzorujemy się na metodach stosowanych w tych pracach. Oryginalnym jednak elementem jest przyjęcie niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia i uwzględnienie wpływa odkształceń plastycznych na własności termosprężyste ciał. Żądanie takie prowadzi do trudniejszego problemu aniżeli te, które były rozpatrywane w literaturze do tej pory.

Ponadto dostateczny lokalny warunek jednoznaczności sprzężonej termoplastyczności wyprowadzony przez Mroza i Ranieckiego [3-4] nie jest warunkiem optymalnym.

W Dodatku B niniejszej pracy pokazuje się procedurę otrzymania optymalnego warunku z wprowadzonej jednoparametrowej rodziny lokalnych warunków jednoznaczności.

6. Jednoznaczność rozwiązania przyrostowych problemów dla procesów jednorodnych

Rozważmy ciało o dostatecznie małych rozmiarach i o jednostkowej masie. Jeżeli stan termodynamiczny każdej cząstki ciała jest jednakowy w dowolnej chwili procesu, to taki proces nazywa się procesem jednorodnym. W przypadku tego typu procesów wielkość $\text{div } \mathbf{q}$ występującą w równaniach dla temperatury należy interpretować jako prędkość globalnej wymiany ciepła ciała z otoczeniem, zaś ρ_0 jako odwrotność całkowitej objętości ciała.

Załóżmy, że znany jest stan termodynamiczny ciała w pewnej chwili t_0 procesu jednorodnego - taki stan, że warunek $f_1 = f = 0$ jest spełniony. Można sformułować następujące przyrostowe problemy dla tego typu procesów: spełniające układ równań /2.7/, /3.24 - 3.25/, /3.28 - 3.29/, /4.2/ i /4.6/ należy dla chwili znaleźć wartości

$a_1 / \dot{\epsilon} \text{ i } q_0$ przyjmując, że $\dot{\delta}(t_0) \text{ i } \dot{T}(t_0)$ są zadane

$a_2 / \dot{\delta} \text{ i } q_0$ " " $\dot{\epsilon}(t_0) \text{ i } \dot{T}(t_0)$ " "

$b_1 / \dot{\epsilon} \text{ i } \dot{T}$ " " $\dot{\delta}(t_0) \text{ i } q_0(t_0)$ " "

$b_2 / \dot{\delta} \text{ i } \dot{T}$ " " $\dot{\epsilon}(t_0) \text{ i } q_0(t_0)$ " "

gdzie $q_0 = -\text{div } q$

Nie jest trudno sprawdzić, że na to ażeby rozwiązanie problemów / a_1 / i / a_2 / było jednoznaczne muszą koniecznie być spełnione znane w izotermicznej teorii plastyczności, [20-21], [30-32] warunki odpowiednio

$$h > 0 \quad \text{i} \quad h + g_4 \cdot M f_6^p > 0 \quad /6.1/$$

gdzie $g_4 = f_{1,5} + \gamma_{23} Z^{\alpha d}$ /6.2/

a h jest izotermiczną funkcją wzmocnienia por. /4.7/. Warunki te są również warunkami wystarczającymi. Okazuje się jednak, że mogą istnieć dwa rozwiązania problemów / b_1 / i / b_2 / nawet gdy nierówności /6.1/ są spełnione. Warunki jednoznaczności dla problemów / b_1 / i / b_2 / mają następującą postać /patrz Dodatek A/:

Problem / b_1 /

$$h_1 = h - m_6 f_T^p > 0 \quad /6.3/$$

Problem / b_2 /

$$H = h + g_4 \cdot M f_6^p - \frac{1}{p} \left(m_6 + \gamma_{12}^* \xi g_4 \cdot M f_6^p \right) \left(f_T^p - \gamma_{21}^* \alpha \cdot M f_6^p \right) > 0 \quad /6.4/$$

gdzie

$$m_{\sigma} = \frac{1}{\rho_0 C_{\sigma}} \left[\gamma_1 (\sigma \cdot f_{1,\sigma} - \pi \cdot d) - \gamma_3 T \left(\frac{\partial \pi(Y_{\kappa}^{T\sigma})}{\partial T} \cdot d \right) \right] \quad /6.5/$$

$$\xi = \frac{1-p}{M_{\alpha}^2} = \frac{T}{\rho_0 C_{\sigma}} \quad , \quad p = \frac{C_{\epsilon}}{C_{\sigma}} \quad , \quad M_{\alpha}^2 = \alpha \cdot M \alpha \quad /6.6/$$

Dla przypadku stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia ($f_{1,\sigma} = f_{\sigma}$) i przy pominięciu wszystkich efektów sprzężenia sprężystoplastycznego, tzn. ($\gamma_{23} = \gamma_{23}^* = \gamma_{13} = \gamma_{13}^* = 0$) wielkość ($m_{\sigma} = m$) była analizowana w pracach [1], [3]. Autorzy interpretując wielkość m_{σ} przy analizie izotermicznego procesu cyklicznego w przestrzeni naprężeń zauważyli, że w przypadku metali m_{σ} jest na ogół dodatnie

$$m_{\sigma} > 0 \quad /6.7/$$

Nierówności /6.3/ i /6.4/ stanowią uogólnienie warunków jednoznaczności wyprowadzonych przez Mroza i Ranieckiego [1], [3-4] i Kamieniarza [33]. Uogólnienie tutaj polega na uwzględnieniu niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia i wpływu odkształceń plastycznych na własności termosprężyste ciała. Warunki podane w pracy [1], [3] można otrzymać z /6.3/ i /6.4/ pomijając wszystkie efekty sprzężenia sprężystoplastycznego - ($\gamma_{23} = \gamma_{23}^* = \gamma_{13} = \gamma_{13}^* = 0$) oraz przyjmując stowarzyszone prawa plastycznego płynięcia ($f_{1,\sigma} = f_{\sigma}$).

Warunek /6.4/ należy traktować jako ograniczenie nakładane na funkcje występujące w grupie równań konstytutywnych. Jeżeli ($H=0$) wówczas z teorii wynika, iż możliwa jest chwilowa zmiana naprężeń i temperatury w sytuacji gdy element ciała nie jest odkształcany ($\dot{\epsilon} = 0$) i nie wymienia ciepła z otoczeniem ($q_0 = 0$). Jednakże takie zdarzenie z pewnością nie występuje w ciałach rzeczywistych.

Jeżeli $h_1 = 0$ wówczas ciało w procesie adyabatyicznym ($q_0 = 0$) zachowuje się podobnie jak ciało idealnie - plastyczne tzn. możliwe jest chwilowe adyabatyczne płynięcie ciała ($\dot{\epsilon} \neq 0$) przy stałych naprężeniach ($\dot{\sigma} = 0$). To zjawisko może wystąpić w zakresie dużych odkształceń, dlatego w dalszym ciągu zakładając będziemy, że funkcje konstytutywne spełniają również warunek /6.3/. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że w przypadku metali spełnienie warunku /6.3/ implikuje na ogół spełnienie warunku /6.4/ /por. [1-3] /.

Założmy, że oba warunki /6.3/ i /6.4/ są spełnione. Rozwiązanie problemów przyrostowych / b_1 / i / b_2 / można przedstawić w następującej postaci.

Problema / b_1 /

Korzystając z /4.2/, /3.28/, /2.7/ otrzymamy następujące związki pomiędzy $\dot{\epsilon}$ i $\dot{\sigma}$ oraz \dot{T} i $\dot{\sigma}$:

$$\dot{\epsilon} = L^{(a)} \dot{\sigma} + \frac{j}{h_1} K^{(p)} \dot{\sigma} + \frac{j}{h_1} q f_T \left[(f_{\sigma} + \gamma_{23} Z^{\alpha d}) + \gamma_{21} m_5 \alpha \right] - \gamma_{21} q \alpha \quad /6.8/1$$

$$\dot{T} = -\gamma_{12} \xi \alpha \cdot \dot{\sigma} + \frac{j m_5}{h_1} \left[(f_{\sigma} - \gamma_{12} \xi f_T \alpha) \cdot \dot{\sigma} - f_T q \right] - q \quad /6.8/2$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{j}{h_1} \left[(f_{\sigma} - \gamma_{12} \xi f_T \alpha) \cdot \dot{\sigma} - f_T q \right] \quad /6.8/3$$

$$\dot{\epsilon}^e = L \dot{\sigma} + \gamma_{21} \dot{T} \alpha + \frac{j}{h_1} \left[(f_{\sigma} - \gamma_{12} \xi f_T \alpha) \cdot \dot{\sigma} - q f_T \right] (\gamma_{23} Z^{\alpha d}) \quad /6.8/4$$

gdzie

$$K^{(p)} = (f_{\sigma} + \gamma_{23} Z^{\alpha d} + \gamma_{21} m_5 \alpha) \otimes (f_{\sigma} - \gamma_{12} \xi f_T \alpha) \quad /6.9/$$

$$L^{(a)} = L - \gamma_{21} \gamma_{12} \xi (\alpha \otimes \alpha) ; \quad q = \frac{1}{\beta_0 C_5} \operatorname{div} q$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } f = 0 \text{ i } (f_{\sigma} - \gamma_{12} \bar{f}_{\tau} \alpha) \cdot \dot{\sigma} - q f_{\tau} > 0 \\ 0 & \text{jeżeli } f < 0 \text{ lub } f = 0 \text{ i } (f_{\sigma} - \gamma_{12} \bar{f}_{\tau} \alpha) \cdot \dot{\sigma} - q f_{\tau} < 0 \end{cases}$$

$$\Lambda = \frac{1}{h_1} \left[(f_{\sigma} - \gamma_{12} \bar{f}_{\tau} \alpha) \cdot \dot{\sigma} - q f_{\tau} \right] \quad /6.10/$$

Tutaj $L^{(a)}$ oznacza tensor adiabetycznych podatności sprężystych. Zauważmy /por. [1] /, że drugi człon po prawej stronie równania /6.8/, nie jest równy prędkości plastycznego odkształcenia. Można go uważać jako prędkość adiabetycznego plastycznego odkształcenia. Tensor $K^{(a)}$ nie jest tensorem symetrycznym $K_{ijmn} \neq K_{mnij}$. Brak symetrii powodują tutaj oprócz rozszerzalności cieplnej towarzyszącej dysypacji i zmiany granicy plastyczności z przyrostem temperatury wynikającej z efektu piezokalorycznego również efekty sprężenia "sprężysto-plastycznego" i przyjęcie niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia.

Fakt ten w dużym stopniu utrudnia dowód twierdzenia o jednoznaczności rozwiązania problemu przyrostowego dla procesów niejednorodnych i w konsekwencji sformułowanie odpowiednich kryteriów bifurkacji.

Równania dla prędkości przepływów termodynamicznych można również wyrazić poprzez $\dot{\sigma}$ i q . Mają one następującą postać

$$\dot{K} = \frac{j}{h_1} \left[(f_{\sigma} - \gamma_{12} \bar{f}_{\tau} \alpha) \cdot \dot{\sigma} - q f_{\tau} \right] d(X^{\sigma}, Y^{\tau}_K) \quad /6.11/$$

Uwzględniając postulat Gyarmatiego i wynikający z niego warunek /4.14/, powyższy związek przyjmie postać

$$-\dot{K} = \frac{j}{h_1} \left[(f_{\sigma} - \gamma_{12} \bar{f}_{\tau} \alpha) \cdot \dot{\sigma} - q f_{\tau} \right] \frac{\partial f_1(X^{\sigma}, Y^{\tau}_K)}{\partial \Pi} \quad /6.12/$$

Problem /b₂/

Alternatywne równania /odpowiadające równaniom /6.8// otrzymuje się, korzystając ze związków /4.2/, /3.29/, /2.7/,

$$\ddot{\Theta} = M^{(a)} \dot{\Theta} + \frac{\gamma_{21}^* Q}{\rho} M \alpha - \frac{j_1^{(p)}}{H} K^1 \dot{\Theta} - \frac{j_1 Q}{\rho H} \left(\gamma_{21}^* \alpha \cdot M f_0 - f_T \right) / \left(\tilde{\varphi}_\varepsilon M \alpha + B_N \right) / 6.13/1$$

$$\dot{T} = \frac{1}{\rho} \left(\gamma_{12}^* \alpha \cdot M \dot{\Theta} + q \right) + \frac{j_1}{\rho H} \left(m_0 + \gamma_{12}^* \gamma_{14} \cdot M f_0 \right) \left[B \cdot \dot{\Theta} + \frac{Q}{\rho} \left(\gamma_{21}^* \alpha \cdot M f_0 - f_T \right) \right] / 6.13/2$$

$$\dot{\Theta}^p = \frac{j}{H} \left[B \cdot \dot{\Theta} + \frac{Q}{\rho} \left(\gamma_{21}^* \alpha \cdot M f_0 - f_T \right) \right] f_{1,0} / 6.13/3$$

gdzie

$$j_1 = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } f = 0 \text{ i } B \cdot \dot{\Theta} + \frac{Q}{\rho} \left(\gamma_{21}^* \alpha \cdot M f_0 - f_T \right) \geq 0 \\ 0 & \text{jeżeli } f < 0 \text{ lub } f = 0 \text{ i } B \cdot \dot{\Theta} + \frac{Q}{\rho} \left(\gamma_{21}^* \alpha \cdot M f_0 - f_T \right) < 0 \end{cases}$$

$$M^{(a)} = M + \frac{\gamma_{12}^* \gamma_{21}^*}{\rho} \gamma_{11} \left(M \alpha \right) \otimes \left(M \alpha \right) ; B_N = B - N_2 / 6.14/$$

$$B = M f_0 + \gamma_{12}^* \frac{\gamma_{11}}{\rho} \left(\gamma_{21}^* \alpha \cdot M f_0 - f_T \right) ; K^1 = \left[\tilde{\varphi}_\varepsilon \left(M \alpha \right) - N_2 \right] \otimes B + B \otimes B$$

W tensorze K^1 występują dodatkowe dotąd nie oznaczone wielkości, a mianowicie

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon = \gamma_{21}^* \frac{m_0}{\rho} + \gamma_{12}^* \frac{\gamma_{11}}{\rho} f_T - \gamma_{12}^* \gamma_{23}^* \frac{\gamma_{11}}{\rho} \left\{ \alpha \cdot \left[N_0 \left(\gamma_{3d} + \gamma_{21}^* f_{1,n} \right) \right] \right\} / 6.15/$$

oraz

$$N_2 = \gamma_{23}^* N^{\sigma} d + \gamma_{13} N^{\sigma} f_{1,n}^p = N^{\sigma} (\gamma_{23}^* d + \gamma_{13} f_{1,n}^p) \quad /6.16/$$

gdzie
$$f_{1,n}^p = \frac{\partial f_1}{\partial n} \quad /6.17/$$

Przy wyprowadzaniu /6.15/ skorzystano z wyrażenia /A.2/2 zamieszczonego w Dodatku A oraz /3.18/2.

Symbolem $M^{(a)}$ oznaczono tensor adiabatycznych modułów sprężystości. Podobnie jak w poprzednim przypadku tensor wiążący prędkość naprężenia i prędkość odkształcenia nie jest tensorem symetrycznym gdyż $K_{ijmn}^{(p)} \neq K_{mnij}^{(p)}$.

Zauważmy, że jeżeli spełnione są oba warunki /6.3/ i /6.4/, to równania /6.13/ są równoważne równaniom /6.8/. Można je otrzymać rozwiązując /6.13/1 względem δ i podstawiając otrzymany wynik do /6.13/2 i /6.13/3.

Jeżeli w równaniach /6.8/ - /6.12/ i /6.13/ - /6.17/ pominąć wszystkie efekty sprzężeń termodynamicznych ($\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_{12} = \gamma_{23}^* = \gamma_{13} = \gamma_{12}^* = \gamma_{23} = 0$) i gdy ($f_{1,\sigma}^p = f_{\sigma}^p$), to równania te będą tworzyły dwa równoważne zespoły podstawowych równań teorii naprężeń cieplnych w ciałach sprężystoelastycznych /wówczas $q = \dot{T}$ lub $-\text{div} q = \rho_0 C \sigma \dot{T}$ oraz $\rho = 1$ /.

7. Sformułowanie przyrostowego problemu brzegowego

Jeżeli spełniony jest warunek /6.3/, to układ równań /6.8/ - /6.12/, jest równoważny podstawowemu układowi równań /2.7/, /3.19/, /3.20/, /3.24/, /3.25/, /3.28 - 3.29/, /4.2/, /4.6/, /4.7/, gdzie

$$q = \frac{1}{\rho_0 C \sigma} \text{div} q \quad /7.1/$$

Podobna równoważność ma miejsce w odniesieniu do równań /6.13/ - /6.14/ /łącznie z odpowiednimi równaniami dla $\partial t^{(N)}$ i $\partial t^{(M)}$, pod warunkiem, że $H > 0$.

Układ tych równań, wraz z prawem przewodnictwa cieplnego /4.1/ oraz równaniem ruchu i związkami kinematycznymi podanymi poniżej odpowiednio

$$\operatorname{div} \sigma + \rho_0 b_m = \rho_0 \dot{v} \quad /7.2/$$

$$2\dot{\epsilon}_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}$$

gdzie v - jest wektorem prędkości cząstek a b_m - jest siłą masową, tworzy zespół podstawowych równań pola sprężonej termoplastyczności. Łącznie z warunkami brzegowymi i warunkami początkowymi może on służyć jako podstawa do analizy wielu zagadnień uogólnionej termoplastyczności, zarówno dynamicznych jak i quasistatycznych.

Można sformułować następujący przyrostowy problem brzegowy statystyki [1].

Niech w pewnej chwili czasu t_0 ciało zajmuje obszar przestrzenny \mathcal{D} . Oznaczmy symbolem $\bar{\mathcal{D}}$ domknięcie obszaru \mathcal{D} zaś symbolem S brzeg $\bar{\mathcal{D}}$. S jest domknięciem sumy nieprzecinających się otwartych regularnych powierzchni S_v i S_r . Niech w chwili t_0 znany będzie stan termodynamiczny

$$T, \sigma, K \quad /7.3/$$

oraz prędkości sił masowych \dot{b}_m w każdym punkcie X domknięcia $\bar{\mathcal{D}}$. Zakłada się, że funkcje /7.3/ spełniają warunek $f \leq 0$. Przyjmujemy, że w chwili t_0 na częściach brzegu S_r i S_v znane są odpowiednio wartości sił powierzchniowych $t^{(0)}$ i prędkości punktów materialnych $v^{(0)}$, tzn.

$$\begin{aligned} \sigma n &= t^{(0)} & \text{dla } X \in S_r \\ v &= v^{(0)} & \text{dla } X \in S_v \end{aligned} \quad /7.4/$$

gdzie \bar{n} jest jednostkowym wektorem normalnym do S skierowanym na zewnątrz D [1], [3], [5], .

Problem polega na znalezieniu funkcji $\bar{\delta}$, $\bar{\epsilon}$, $\bar{\nu}$ określonych w \bar{D} oraz funkcji \bar{T} określonej w D , które spełniają w obszarze D równania /6.1/ - /6.4/, /7.1/, /7.2/, /4.1/ oraz przyrostowe równania równowagi

$$\operatorname{div} \bar{\delta} + \rho_0 \bar{b}_m = 0 \quad /7.5/$$

Zauważmy, że znając funkcje /7.3/ możemy wyznaczyć q w każdym punkcie obszaru D bezpośrednio z równania /4.1/ różniczkując T i q względem zmiennych X .

Wyżej sformułowany problem odgrywa w sprzężonej termoplastyczności taką samą rolę jak odpowiedni problem przyrostowy w izotermicznej teorii plastyczności, mianowicie: jeżeli jego rozwiązanie jest niejednoznaczne, to niejednoznaczne jest również rozwiązanie problemu ogólnego, w którym zadana jest historia zmian sił powierzchniowych, prędkości i temperatury na powierzchni ciała.

8. Omówienie warunków jednoznaczności

Zbadanie jednoznaczności rozwiązania postawionego w p. 7 problemu brzegowego stanowi jeden z głównych celów niniejszej pracy. W oparciu o tego typu badania podamy w niniejszym punkcie dwa kryteria umożliwiające oszacowanie od strony bezpiecznej krytycznego stanu termodynamicznego, przy którym możliwe jest wystąpienie bifurkacji deformacji ciała. Kryteria te stanowią równocześnie warunki dostateczne jednoznaczności przyrostowego problemu brzegowego: warunek lokalny i warunek globalny. Warunek lokalny jest łatwy do bezpośredniego praktycznego wykorzystania, gdyż wyraża się bezpośrednio przez funkcje konstytutywne i stałe materiałowe. Daje on jednak gorsze oszacowanie stanu krytycznego. Warunek globalny, odwrotnie, pozwala le-

piej oszacować stany krytyczne ale jest trudniejszy w zastosowaniach gdyż wymaga znalezienia kinematycznych pól prędkości, dla których pewien funkcjonał /por. p. 8.2/ osiąga wartość zero. Przy wyprowadzeniu obu warunków korzystał będziemy z metody wprowadzonej przez Mroza i Ranieckiego w pracy [4]. Autor korzystał również z nieopublikowanego rękopisu pracy Ranieckiego [34] dotyczącej kryteriów bifurkacji w niestowarzyszonej teorii plastyczności przy dużych odkształceniach.

8.1. Warunek lokalny

W Dodatku B niniejszej pracy podany jest dowód następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE

Jeżeli w każdym punkcie ciała w jego części gdzie zachodzą plastyczne deformacje $D_f = \{X : f = 0\}$, następująca nierówność jest spełniona,

$$h_1 = h - m_\sigma f_T > \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(g \cdot M g^{(a)} \right) \left(\bar{f}_\sigma \cdot M \bar{f}_\sigma^{(a)} \right)} - g \cdot M \bar{f}_\sigma \right] = h_1^* / 8.1/$$

gdzie

$$g = \left(f_{1,\sigma} + \gamma_{23} Z^\sigma d + \gamma_{21} m_\sigma \alpha \right) \quad /8.2/$$

$$\bar{f}_\sigma = \left(f_\sigma - \gamma_{12} \bar{f}_T \alpha \right)$$

wówczas może istnieć tylko jeden zbiór funkcji $\{\bar{\delta}, \bar{\epsilon}, \bar{\tau}\}$ klasy co najmniej C^2 , który jest rozwiązaniem sformułowanego w punkcie 7 przyrostowego problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termoplastyczności.

Nierówność /8.1/ stanowi wspomniane na początku punktu 8 lokalne kryterium bifurkacji. Każdy stan termodynamiczny, dla którego warunek /8.1/ jest spełniony jest stanem bezpiecznym z punktu

widzenia możliwości wystąpienia rozdziwienia tego stanu. Ponieważ w procesie deformacji ciała wartość funkcji /modułu/ wzmocnienia na ogół maleje więc wartość h^* można traktować jako górne oszacowanie nieznaney krytycznej wartości h odpowiadającej stanowi krytycznemu.

Szczególne przypadki wyrażenia postaci /8.1/ były już w literaturze cytowane. Hueckel i Majer [20-21] otrzymali podobny warunek analizując stabilność materiału rozumianą jako dodatniość połowy iloczynu tensora prędkości naprężenia i tensora prędkości odkształcenia. Autorzy ograniczyli się w badaniach do przypadku izotermicznej teorii plastyczności /brak sprzężeń termomechanicznych/ zachowując efekty sprzężenia sprężysto-plastycznego i niestowarzyszone prawa plastycznego płynięcia.

Również Mróz [31] otrzymał wyrażenie tego rodzaju analizując lokalne dostateczne warunki jednoznaczności w przypadku izotermicznej i niesprężonej teorii plastyczności dla praw o niestowarzyszonym prawie plastycznego płynięcia. Otrzymany warunek w [31] podano w postaci "unormowanej" dla materiału izotropowego ze względu na własności sprężyste i ściśliwego.

8.2. Globalny warunek i globalne kryterium jednoznaczności

Założmy, że istnieją dwa zbiory funkcji $\{\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}, \bar{\tau}, \bar{u}\}$, $\{\bar{\sigma}^*, \bar{\epsilon}^*, \bar{\tau}^*, \bar{u}^*\}$, które są rozwiązaniem sformułowanego w p. 7 przyrostowego problemu brzegowego sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. Wtedy musi być spełniona następująca równość

$$\Lambda^* = \int_V (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^*) \cdot (\dot{\bar{\epsilon}} - \dot{\bar{\epsilon}}^*) dV = 0 \quad /8.3/$$

Wynika to z faktu, że oba rozwiązania spełniają te same warunki brzegowe /7.4/. Oznaczmy symbolem \int funkcję podcałkową wyrażenia /8.3/, zależną od $\dot{\bar{\epsilon}}$ i $\dot{\bar{\epsilon}}^*$ dla ciała sprężysto-plastycznego następująco:

$$J(\dot{E}, \dot{E}^*, j_1, j_1^*) = \left[\delta(\dot{E}) - \delta(\dot{E}^*) \right] \cdot \Delta \dot{E} \quad /8.4/$$

gdzie

$$\Delta \dot{E} = \dot{E} - \dot{E}^* \quad , \quad \delta^* = \delta(\dot{E}^*)$$

zaś $j_1 = j_1(\dot{E})$ i $j_1^* = j_1(\dot{E}^*)$ są zdefiniowane równaniem /6.14/.

Natomiast δ i \dot{E} oraz δ^* i \dot{E}^* powiązane są równaniem /6.13/, które można napisać w bardziej zwartej formie następująco:

$$\delta = M_1 \dot{E} - M_1 d_1 - \frac{j_1}{H_1} g^* \left[\bar{f}_\sigma^* (\dot{E} - d_1) + Z_1 \right] \quad /8.5/$$

gdzie

$$g^* = M_1 g = \tilde{\varphi}_\epsilon (M\alpha) - N_2 + B$$

$$\bar{f}_\sigma^* = M_1 \bar{f}_\sigma = B \quad , \quad d_1 = \gamma_{21}^* q\alpha \quad /8.6/$$

$$Z_1 = -q f_\tau \quad , \quad M_1 = M^{(a)} \quad , \quad H_1 = H$$

Wprowadźmy funkcję J' zależną od \dot{E} i \dot{E}^* w sposób następujący

$$J'(\dot{E}, \dot{E}^*) = \Delta \dot{E} \cdot M_1 \Delta \dot{E} - \frac{1}{4X^2 H} \left[(g^* + X^2 \bar{f}_\sigma^*) \cdot \Delta \dot{E} \right]^2 \quad /8.7/$$

gdzie X^2 - jest pewnym skalarnym parametrem.

Wyrażenie powyższe przedstawia więc sobą jednoparametrową rodzinę wyrażeń J' ze względu na parametr X^2 .

Funkcje J i J' oprócz zmiennych niezależnych \dot{E} i \dot{E}^* zależą od stanu termodynamicznego /por. 7.3/.

Pokażemy, że przy zadanym stanie termodynamicznym takim samym dla J i J' , dla każdej pary (\dot{E} i \dot{E}^*) prawdziwa jest następująca nierówność

$$J(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}^*, j_1, j_1^*) - J_1(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}^*) \geq 0 \quad /8.8/$$

Wprowadźmy oznaczenia dla funkcji - $J(\epsilon, \dot{\epsilon}^*, j_1, j_1^*)$ następująco:

$$\begin{aligned} J_1 &= J(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}^*, 1, 1) && \text{jeżeli } j_1(\dot{\epsilon}) = 1 \text{ i } j_1(\dot{\epsilon}^*) = 1 \\ J_2 &= J(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}^*, 1, 0) && \text{jeżeli } j_1(\dot{\epsilon}) = 1 \text{ i } j_1(\dot{\epsilon}^*) = 0 \\ J_3 &= J(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}^*, 0, 1) && \text{jeżeli } j_1(\dot{\epsilon}) = 0 \text{ i } j_1(\dot{\epsilon}^*) = 1 /8.9/ \\ J_4 &= J(\dot{\epsilon}, \dot{\epsilon}^*, 0, 0) && \text{jeżeli } j_1(\dot{\epsilon}) = 0 \text{ i } j_1(\dot{\epsilon}^*) = 0 \end{aligned}$$

Obliczając następnie różnicę /8.8/ dla wszystkich możliwych czterech przypadków /8.9/, na podstawie /8.5/ i /8.4/ oraz /8.7/, otrzymamy

$$(J_1 - J')H = \frac{1}{4x^2} (V_g - x^2 V_f)^2 \geq 0$$

$$(J_2 - J')H = -x^2 A_\epsilon A_\epsilon^* + \left[x A_\epsilon^* - \frac{1}{2x} (V_g - x^2 V_f) \right]^2 \geq 0$$

gdź $A_\epsilon \geq 0$ i $A_\epsilon^* < 0$

$$(J_3 - J')H = -x^2 A_\epsilon A_\epsilon^* + \left[x A_\epsilon + \frac{1}{2x} (V_g - x^2 V_f) \right]^2 \geq 0 /8.10/$$

gdź $A_\epsilon < 0$ i $A_\epsilon^* \geq 0$

$$(J_4 - J')H = \left[x V_f + \frac{1}{2x} (V_g - x^2 V_f) \right]^2 \geq 0$$

gdzie

$$V_g = g^* \cdot \Delta \dot{\epsilon}, \quad V_f = \bar{f}_g^* \cdot \Delta \dot{\epsilon} \quad /8.11/$$

oraz

$$A_\epsilon = \bar{f}_g^* \cdot (\dot{\epsilon} - d_1) + Z_1, \quad A_\epsilon^* = \bar{f}_g^* \cdot (\dot{\epsilon}^* - d_1) + Z_1$$

Stąd wynika prawdziwość nierówności /8.8/.

Sformułujemy teraz następujące dostateczne globalne kryterium wykluczające bifurkację:

Niech $H > 0$ w każdym punkcie $X \in \mathcal{D}_f$. Jeżeli dla każdego kinematycznie dopuszczalnego pola prędkości \mathcal{V} , które znika na części powierzchni S_V , jest spełniona następująca nierówność

$$\int_{\mathcal{D}} J'_2(\mathcal{V}) dV - \int_{\mathcal{D}_f} J'_1(\mathcal{V}) dV > 0 \quad /8.12/$$

wówczas może istnieć tylko jedna para $\{\bar{\sigma}, \bar{T}\}$, będąca rozwiązaniem przyrostowego problemu brzegowego sprzężonej termoplastyczności. Tutaj, funkcje podcałkowe występujące w wyrażeniu /8.12/ mają następującą postać

$$J'_1(\dot{E}) = \frac{1}{4x^2H} \left[(g^* + x^2 \bar{f}_\sigma^*) \cdot \Delta \dot{E} \right]^2 \quad /8.13/$$

$$J'_2(\dot{E}) = \dot{E} \cdot M_1 \dot{E}$$

Prawdziwość powyższego kryterium nie jest trudno dowieść.

Ponieważ wyrażenie /8.3/ ze znakiem zero po prawej stronie dopuszcza istnienie dwóch zbiorów funkcji, które są rozwiązaniem sformułowanego problemu brzegowego więc warunkiem wykluczającym wystąpienie stanu bifurkacji będzie dodatniość wyrażenia /8.3/ tzn. $(\Lambda^* > 0)$ [5], [35-38]. Nierówność ta stanowi dostateczny globalny warunek jednoznaczności.

Prawdziwość dostatecznego globalnego kryterium jednoznaczności /8.12/ wynika bezpośrednio z nierówności /8.8/ i nierówności $\Lambda^* > 0$.

Warunek całkowy /8.12/ przedstawiony w tej postaci posiada istotne znaczenie praktyczne. Mianowicie, jeśli dla zadanego stanu /7.3/ niemożliwe jest znalezienie takiego pola \mathcal{V} , dla którego suma całek występująca po lewej stronie wyrażenia jest równa zero, to można być pewnym, że stan ten jest stanem bezpiecznym z punktu widzenia możliwości wystąpienia bifurkacji.

Koncepcja wyprowadzenia takiego kryterium była już podjęta w pracach Hilla [35-37] dla ciał sprężysto-plastycznych przy dużych odkształceniach i dla izotermicznego przyrostowego problemu brzegowego. Natomiast dla przyrostowego problemu brzegowego sprężonej termoplastyczności takie kryterium było wyprowadzone przez Mroza i Ranieckiego /por. [1], [3-5] / dla przypadku stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia. Inne dostateczne globalne kryterium jednoznaczności dla przyrostowych problemów izotermicznej plastyczności dla ciał sprężysto-plastycznych o niestowarzyszonym prawie płynięcia plastycznego podał Majer [39]. Wprowadzono tam pojęcie dwupunktowej niesymetrycznej funkcji skalarnej zależnej liniowo od funkcji Greena dla ciała liniowo sprężystego. Trudność w praktycznym korzystaniu z tego kryterium związana jest z faktem, że funkcja Greena dla ciała o dowolnym kształcie jest na ogół nieznaną.

W Dodatku C pokażemy, że dostateczny lokalny warunek jednoznaczności wynikający z żądania aby funkcja podcałkowa J' była dodatnio określona jest taki sam jak dla ciała sprężysto-plastycznego /6.13/₁ lub /8.5/ pod warunkiem, że parametr X^2 przyjmie postać optymalną określoną jako

$$X_o^2 = \left(\frac{g^* \cdot L_1 \cdot g^*}{\bar{f}_6^* \cdot L_1 \cdot \bar{f}_6^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad /8.14/$$

/por. C.10/

Procedura otrzymania optymalnego parametru X_o^2 jest także zamieszczona w Dodatku C.

Dla parametru X_o^2 lokalny dostateczny warunek jednoznaczności staje się odpowiednio warunkiem optymalnym /najsilniejszym/ z całej rodziny jednoparametrowych dostatecznych warunków jednoznaczności. Podstawiając z kolei wartość optymalną parametru $(X^2 = X_o^2)$ do wyrażenia /8.7/ otrzymamy optymalne /najsilniejsze/ wyrażenie podcałkowe, które oznaczymy symbolem J'_o .

9. Przypadki szczególne lokalnego warunku jednoznaczności

W uogólnionym przypadku w dostatecznym lokalnym warunku jednoznaczności /8.1/ występują funkcje g , \bar{f}_σ , m_σ i $M^{(a)}$, które będą inne w przypadkach mniej ogólnych modeli ciał. W mniej ogólnych modelach ciał funkcje te odpowiednio będą przyjmować bardziej prostą postać.

Rozpatrzmy teraz niektóre wybrane następujące przypadki

1/ Stowarzyszone prawa plastycznego płynięcia

$$f_{1,\pi} = 0 \quad \text{tzn.} \quad f_1 = f_1(\sigma, Y_K^T) = f(\sigma, Y_K^T)$$

Wówczas funkcje g i \bar{f}_σ i m_σ występujące w warunku jednoznaczności /8.1/ przyjmą postać następującą

$$g = (f_\sigma + \gamma_{23} Z^0 d + \gamma_{21} m_\sigma \alpha)$$

$$\bar{f}_\sigma = (f_\sigma - \gamma_{12} \xi f_T \alpha), \quad m_\sigma = \frac{1}{\rho_0 C_\sigma} \left[\gamma_1 (\sigma \cdot f_\sigma - \pi \cdot d) - T \gamma_3 \frac{\partial \pi(Y_K^T)}{\partial T} \cdot d \right] \quad 19.1/$$

W tym przypadku uogólniona funkcja płynięcia plastycznego nie zależy od wewnętrznych sił dysypacyjnych π /por. /4.5//, które jednak zależą od stanu naprężenia /por. /3.6/3/.

Ponadto zachowane są wszystkie sprzężenia termo-mechaniczne oraz wszystkie efekty sprzężenia sprężysto-plastycznego.

2/ Przypadek wykluczający istnienie sprzężenia sprężysto-plastycznego

$$\gamma_{23} = \gamma_{23}^* = \gamma_{15} = \gamma_{15}^* = 0$$

Wówczas

$$g = (f_{1,5} + \gamma_{21} m_\sigma \alpha)$$

$$\bar{f}_\sigma = (f_\sigma - \gamma_{12} \xi f_T \alpha)$$

19.2/

$$m_\sigma = \frac{1}{\rho_0 C_\sigma} \left[\gamma_1 (\sigma \cdot f_{1,5} - \pi \cdot d) - \gamma_3 T \frac{\partial \pi(Y_K^T)}{\partial T} \cdot d \right]$$

W tym przypadku zachowane są także wszystkie efekty sprzężeń termo-mechanicznych oraz prawa plastycznego płynięcia pozostają niestowarzyszone. Model takiego ciała może być użyteczny przy analizie adiabatycznych procesów szybkowania i lokalizacji występujących w procesach obciążania metalowych elementów.

3/ Stowarzyszone prawa plastycznego płynięcia przy równoczesnym braku efektów sprzężenia sprężysto-plastycznego.

$$f_{1,6} = f_6 \quad \text{oraz} \quad \gamma_{25} = \gamma_{25}^* = \gamma_{15} = \gamma_{15}^* = 0$$

Wówczas

$$g = \left(f_6 + \gamma_{21} m_6 \alpha \right)$$

$$\bar{f}_6 = \left(f_6 - \gamma_{12} \sum_T f_T \alpha \right)$$

$$m_6 = \frac{1}{\rho_0 C_6} \left[\gamma_1 \left(\bar{f}_6 \cdot f_6 - \pi \cdot d \right) - \gamma_3 T \frac{\partial \pi / \gamma_K'}{\partial T} \cdot d \right] \quad /9.3/$$

Ten sam rezultat opisany przez wyrażenia /9.3/ uzyskuje się również w przypadku korzystania z postulatu Gyarmatiego /por. p. 4/ z tym, że funkcję d występującą w m_6 należy zastąpić wyrażeniem /4.14/. W przypadku tym mamy więc do czynienia z modelem ciała sprzężonej termoplastyczności wyprowadzonym i analizowanym przez Mroza i Ranieckiego w pracach [1-4].

Wyprowadzony przez tych autorów dostateczny lokalny warunek jednoznaczności i zamieszczony w pracach np. [3-4] nie jest jednak warunkiem optymalnym. Warunek ten można otrzymać z jednoparametrowej rodziny warunków jednoznaczności ze względu na parametr C /patrz Dodatek B /B.20 - B.21// podstawiając do /B.21/ przyjętą wartość dla parametru ($C = C^0 = 1$) .

Nie jest to jednak wartość optymalna dla parametru optymalizującego jednoparametrową rodzinę warunków jednoznaczności, co jest pokazane w Dodatku B niniejszej pracy.

4/ Przypadek równań przybliżonych /analizowanych w [1], [5] /

$$f_{1,6} = \bar{f}_6, \quad \gamma_{23} = \gamma_{23}^* = \gamma_{13}^* = \gamma_{13} = \gamma_{12} = 0 \quad \text{oraz} \quad \gamma_{21} \gamma_1 = \gamma_{21} \gamma_3 = 0$$

Wówczas

$$g = f_6, \quad \bar{f}_6 = f_6$$

/9.4/

$$m_6 = \frac{1}{\beta_0 C_6} \left[\gamma_1 (\bar{f}_6 \cdot f_6 - \pi \cdot d) - \gamma_3 T \frac{\partial \pi(\gamma_{\kappa}^T)}{\partial T} \cdot d \right]$$

$$M^{(a)} = M \quad \text{/por. /3.13/}_1 \text{ i /6.9/}_2/$$

Na podstawie /8.1/ i /C.13/ otrzymamy w tym przypadku, że

$$h_1 > 0 \quad \text{ i } \quad H > f_6 \cdot M f_6$$

Warunki te otrzymuje się przyjmując założenia jak w przypadku 3 oraz dodatkowo pomijając efekt piezokaloryczny ($\gamma_{12} = 0$) i rozszerzalność cieplną ale tylko od zmiany temperatury spowodowanej ciepłem dysypacji /i ciepłem przemian wewnętrznych/. Z analitycznego punktu widzenia oznacza to pominięcie tych członów w równaniach /6.8/ i /8.2/, w których występujące iloczyny $\gamma_{21} \gamma_1 = 0$, $\gamma_{21} \gamma_3 = 0$ przyjmują wartość zero [1], [5].

5/ Teoria plastyczności niesprężona ze względu na oddziaływania ciepłno-mechaniczne

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_{12}^* = \gamma_{21}^* = \gamma_{31} = 0$$

Wówczas

$$g = (f_{1,6} + \gamma_{23} Z^0 d)$$

/9.5/

$$\bar{f}_6 = f_6$$

$$m_6 = 0, \quad M^{(a)} = M, \quad h_1 = h$$

Tego typu modele są często stosowane do opisu ciał typu skały i grunty /por. [20-23] , [39] /.

6/ Teoria plastyczności niesprężona ze względu na oddziaływania cieplno-mechaniczne oraz wykluczająca efekty sprzężeń sprężysto-plastycznych

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_{12}^* = \gamma_{21}^* = \gamma_{31} = 0 \text{ oraz } \gamma_{23} = \gamma_{23}^* = \gamma_{13}^* = \gamma_{13} = 0$$

Wówczas

$$g = f_{1,6} , \quad \bar{f}_6 = f_6$$

$$m_6 = 0 , \quad M^{(a)} = M , \quad h_1 = h \quad /9.6/$$

Przypadek tego ciała szczegółowo analizowany był m.innymi przez Mroza [30] , [31] . Autor ten w pracy [31] podał także dostateczny lokalny warunek jednoznaczności zgodny z /8.1/ dla ciała izotropowego ze względu na własności sprężyste i ściśliwego.

Przedstawione w tym punkcie niektóre przypadki ciał sprężysto-plastycznych i odpowiadające im dostateczne lokalne warunki jednoznaczności /8.1/ nie wyczerpują oczywiście wszystkich możliwości, które wynikają z uogólnionego sprzężonego modelu ciała termoplastycznego /6.8/ i odpowiadającemu mu lokalnemu warunkowi jednoznaczności /8.1/.

Przykładowo możliwe są modele ciał otrzymane przy kolejnym przyjmowaniu uproszczeń w efektach sprzężeń termo-mechanicznych kładąc kolejno $(\gamma_1, \gamma_{12}, \gamma_{21}, \dots)$ równe zero a następnie łącząc je parami itd. wyczerpując możliwe kombinacje.

Wybrane przypadki /1 - 6/ odpowiadają w mniejszym lub większym stopniu standardowym modelom ciał sprężysto-plastycznym, które były już omawiane i cytowane w literaturze /patrz np. przypadki /3 - 6//.

ROZDZIAŁ III

PRZYKŁADY SZACOWANIA STANU BIFURKACJI

10. Wstęp

Wprowadzone w rozdziale II warunki jednoznaczności uwzględniają efekty sprzężeń termo-mechanicznych, sprężysto-plastycznych oraz zawierają przypadki niestowarzyszonych praw plastycznego płynięcia. Oznacza to, że można je stosować do materiałów typu metale /nieściśliwe i ściśliwe plastycznie/, materiałów porowatych oraz do skał czy też gruntów. W rozdziale tym przedstawiamy rezultaty wykorzystujące dostateczny lokalny warunek jednoznaczności w dwóch przypadkach. W pierwszym przykładzie /por. p. 11/ porównamy rezultaty ograniczeń nakładanych na wartość izotermicznej funkcji wzmocnienia h przez warunek na lokalizację deformacji plastycznej Rice'a - Rudnickiego [40-41] i przez lokalny dostateczny warunek jednoznaczności /8.1/ wykluczający możliwość wystąpienia bifurkacji. Okazuje się, że warunek jednoznaczności daje bezpieczniejsze oszacowania krytycznych obciążeń aniżeli warunek na lokalizację deformacji. W drugim przypadku /por. p. 12/ rozpatrujemy problem czystego adiabatyicznego ścinania. Uzyskane w tym punkcie rezultaty wykorzystuje się w p. 13, w którym rozważa się problem adiabatyicznego skręcania grubościennych i cienkościennych metalowych rurek. Wyznacza się wartości krytycznego adiabatyicznego momentu skręcającego, przy którym to może wystąpić stan bifurkacji na zewnętrznym promieniu skręcanych rurek. W zagadnieniu skręcania grubościennej rurki /p. 13.1/ uwzględniono pewien efekt geometryczny i dokonano zarazem pewnego uproszczenia przy obliczaniu krytycznego momentu skręcającego. Problem skręcania cienkościennych rurek z uwzględnieniem sprzężenia między polem odkształceń a polem temperatur był już badany [42], [43] gdzie wykorzystano dane doświadczenie Manjoine'a [44] dla stali węglowej. W naszym przypadku korzystamy z danych doświadczalnych dla pewnych stali nierdzewnych zawartych w [50].

11. Porównanie lokalnego warunku jednoznaczności z warunkiem na lokalizację Rice'a i Rudnickiego [40-41] .

11.1. Omówienie warunku na lokalizację

W pracy [40] Rice i Rudnicki wyprowadzili kryterium powstawania lokalizacji deformacji plastycznej w materiałach ściśliwych plastycznie i sprężyste.

Równania konstytutywne takich materiałów zmodyfikowano dla przypadku małych deformacji $\dot{\sigma} \approx \dot{\sigma}'$ /gdzie $\dot{\sigma}'$ - oznacza pochodną obiektywną Jaumanna tensora σ / przedstawione są następująco:

$$2\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{\mu} + \frac{1}{h} \frac{\dot{\sigma}'_{ij}}{\bar{J}} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{J}} \dot{\sigma}_{kl} + \tilde{\mu} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3} \right] \quad /11.1/$$

$$\dot{\epsilon}_{kk} = \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{2\mu + 3\lambda} + \frac{\beta}{h} \left[\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{J}} \dot{\sigma}_{kl} + \tilde{\mu} \frac{\dot{\sigma}_{kk}}{3} \right]$$

gdzie

$$\dot{\epsilon}' = \text{dev } \dot{\epsilon} \quad , \quad \sigma' = \text{dev } \sigma$$

h - jest izotermiczną funkcją wzmocnienia /por. wzór /6.1//

β - współczynnik dylatacji

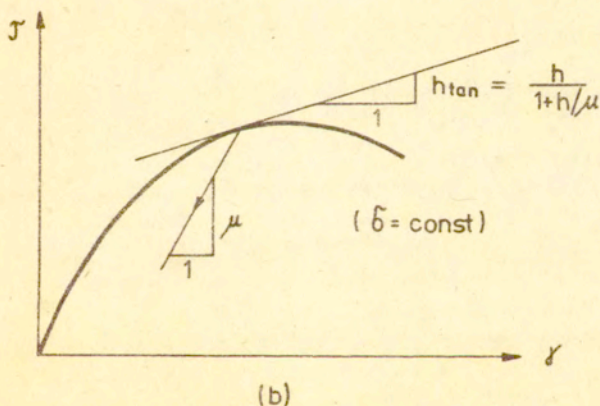
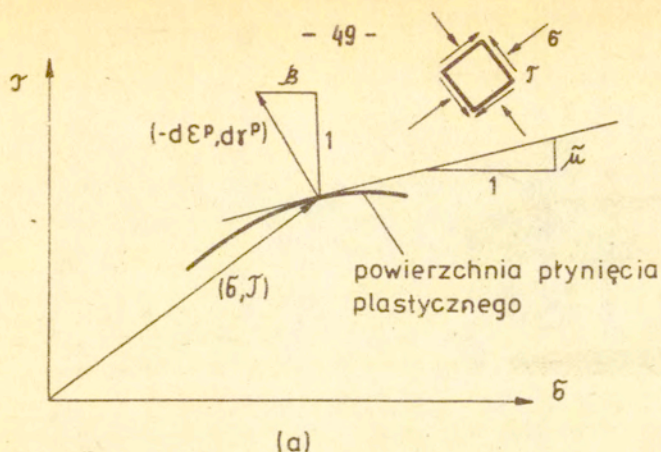
$\tilde{\mu}$ - współczynnik tarcia wewnętrznego

μ i λ - są stałymi sprężystymi Lame

Natomiast \bar{J} oznacza drugi niezmiennik deviatora naprężenia

$$\bar{J} = \left(\frac{1}{2} \dot{\sigma}'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad /11.2/$$

Interpretacja współczynników $\tilde{\mu}$ i β pokazana jest na rys. 3a dla przypadku ścinania w obecności ciśnienia hydrostatycznego, a interpretacja funkcji wzmocnienia h na rys. 3b wg [40] .



Rys. 3/a/. Schemat powierzchni płynięcia plastycznego ukazującej geometryczną interpretację współczynników: tarcia wewnętrznego $\tilde{\mu}$ i współczynnika dylatacji β .

Rys. 3/b/. Krzywa naprężenia ścinające \mathcal{T} od odkształcenia ścinania δ ukazująca geometryczną interpretację izotermicznej funkcji wzmocnienia h , stycznego modułu wzmocnienia $h \tan$, oraz sprężystego modułu ścinania μ .

W ogólnym przypadku, kiedy współczynnik tarcia wewnętrznego $\tilde{\mu}$ nie jest równy współczynnikowi dylatacji ($\tilde{\mu} \neq \beta$) i oba współczynniki są różne od zera wówczas prawa plastycznego płynięcia /11.1/ są niestowarzyszone i uwzględniają ściśliwość sprężystą

i plastyczną opisywanego materiału. Prawa te nie uwzględniają efektu sprzężenia sprężysto-plastycznego. W przypadku gdy $(\bar{\mu} = \beta \neq 0)$ wówczas prawo płynięcia /11.1/ jest stowarzyszone, /por. [40] /.

Wreszcie w przypadku $(\bar{\mu} = \beta = 0)$ równania /11.1/ przyjmują postać związków konstytutywnych Prandtla - Reussa nie uwzględniających plastycznej ścisłości materiału, /por. [40-41] /. Krytyczna wartość funkcji wzmocnienia określająca początek lokalizacji plastycznej deformacji [40-41] jest następująca.

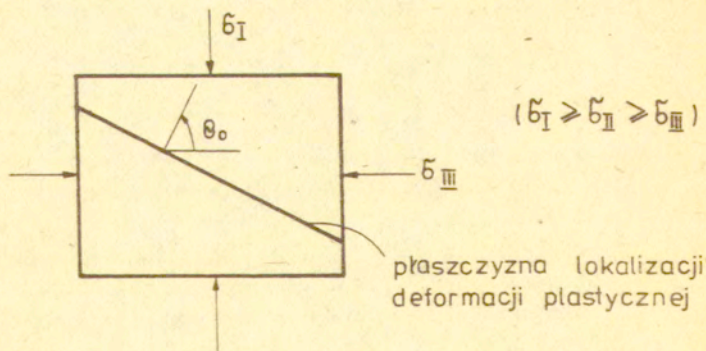
$$\frac{h^{cr}}{\mu} = \frac{1+\mu}{9(1-\nu)} (\beta - \bar{\mu})^2 - \frac{1+\nu}{2} \left(N + \frac{\beta + \bar{\mu}}{2} \right)^2 \quad /11.3/$$

gdzie ν - jest współczynnikiem Poissona.

Parametr N występujący w /11.3/ zależy od stanu naprężenia

i jest zdefiniowany następująco $\bar{\sigma}'_{II} = N \bar{\sigma}'$,

gdzie $\bar{\sigma}'_{II}$ - jest drugą składową główną dwiastora naprężenia w układzie współrzędnych (por. rys. 4.)



Rys.4

Na rysunku * kąt θ_0 - jest kątem orientującym płaszczyznę lokalizacji deformacji plastycznej w układzie kierunków głównych. Jest on zależny od wielkości $(N \nu \beta i \bar{\mu})$ [40].

Maxymalna wartość krytycznej funkcji wzmocnienia /11.3/ jest osiągnięta dla wartości

$$N = - \frac{(\bar{\mu} + \beta)}{3} \quad 1$$

wówczas otrzymamy, że

$$\frac{h^{cr}}{\mu} = \frac{1 + \nu}{9(1 - \nu)} (\beta - \bar{\mu})^2 \quad /11.4/$$

Z analizy przeprowadzonej w [40] wynika dodatkowo, że równania /11.3/ i /11.4/ nie są ważne w dowolnym zakresie zmienności współczynników $\bar{\mu}$ i β lecz są słuszne tylko w zakresie

$$\bar{\mu} + \beta < \sqrt{3} \quad /11.5/$$

11.2. Lokalny warunek jednoznaczności dla przypadku równań konstytutywnych Rice'a i Rudnickiego /11.1/.

Na podstawie analizy przeprowadzonej w /p. 11.1/ powiemy, że równania konstytutywne /11.1/ należą do klasy równań konstytutywnych rozpatrzonych w przypadku szczególnym 6 /por. R. II p. 9/.

Porównując więc /9.6/ z /11.1/ po przekształceniach, otrzymamy

$$g_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2J} + \frac{\beta}{3} \delta_{ij}$$

$$\left(\frac{p}{\sigma} \right)_{kl} = \frac{\sigma_{kl}}{2J} + \frac{\bar{\mu}}{3} \delta_{kl} \quad /11.6/$$

oraz $h_1 = h$ i $M^{[3]} = M$, /por. [41] /.

Dla ciała izotropowego ze względu na własności sprężyste są słuszne następujące zależności [2]

$$M_{ijkl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}$$

/11.7/

oraz

$$\frac{2\mu + 3\lambda}{\mu} = \frac{2(1 + \nu)}{1 - 2\nu}$$

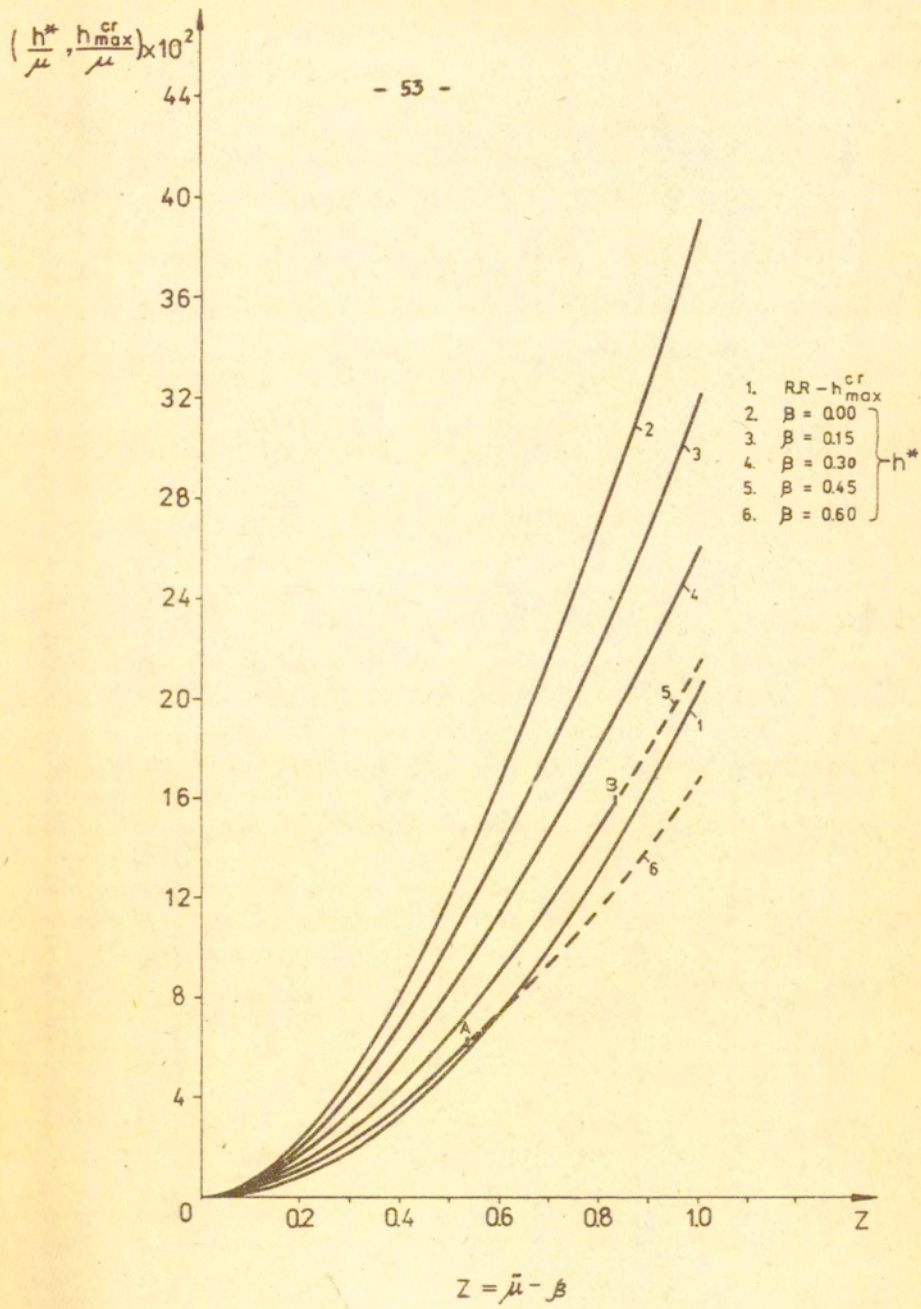
Podstawiając wyrażenia /11.6/ do warunku /8.1/ i uwzględniając /11.7/ po przekształceniach otrzymamy

$$\frac{h}{\mu} > \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left[1 + \frac{2}{3} \beta^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \left[1 + \frac{2}{3} \bar{\mu}^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right]} - \left[1 + \frac{2}{3} \beta \bar{\mu} \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right] \right) = \frac{h^*}{\mu} /11.8/$$

Jest to poszukiwana postać lokalnego warunku jednoznaczności, którą porównamy z warunkiem na lokalizację /11.4/.

11.3. Porównanie warunków /11.4/ i /11.8/

Na rys. 5 krzywa 1 oznacza graficzne przedstawienie warunku na maksymalną krytyczną funkcję wzmocnienia h_{max}^{cr} /11.4/ w zależności od wprowadzonego parametru Z zdefiniowanego jako $(Z = \bar{\mu} - \beta)$. Tak wprowadzony parametr Z nie posiada żadnego sensu fizycznego lecz wprowadzono go w celach użytecznych. Krzywe /2, 3, 4, 5, 6/ są natomiast graficznym obrazem otrzymanym z lokalnego warunku jednoznaczności na h^* /11.8/ przy podstawieniu parametru Z . Wprowadzając parametr Z do /11.8/ nie otrzymamy zależności tylko od parametru Z jak w przypadku /11.4/ lecz zależność od parametru Z i β . W tym przypadku wyrażenie /11.8/ tworzyć będzie jednoparametrową rodzinę warunków na h^* w zależności od parametru β . Przedstawione rezultaty na rys. 5 otrzymane przyjmując za [40], że stała Poissona $\nu = 0.3$, współczynnik tarcia wewnętrznego $\bar{\mu}$ przyjmuje wartości z zakresu /0,0 - 0,9/ a współczynnik dylatacji β z przedziału /0,0 - 0,6/.



Rys. 5

Zauważamy, że dostateczny lokalny warunek jednoznaczności /11.8/ jest górnym /bezpieczniejszym/ oszacowaniem warunku na lokalizację deformacji plastycznej /11.4/. Oznacza to, że dla danego materiału warunek /11.4/ dopuszcza mniejszą wartość krytycznej funkcji wzmocnienia / σ_0 oznacza, że dopuszczalne są większe obciążenia zewnętrzne/ aniżeli lokalny warunek jednoznaczności /11.8/.

Na podstawie analizy podanej w /por. p. 11.1/ oraz z rys. 5 możemy więc powiedzieć, że dla każdej wartości współczynników $(\nu, \bar{\mu}, \beta)$ wziętych z podanego w [40] zakresu i takich samych dla warunków /11.3/, /11.4/ i /11.8/ istnieją następujące nierówności wynikające z tych warunków

$$h^{cr} \leq h^{cr}_{max.} \leq h^* \quad /11.9/$$

Punkty /A i B/ na krzywych /6 i 5/ rys. 5 są granicznymi punktami, w których i po przekroczeniu których niespełniona jest wymagana nierówność /11.5/ dotycząca zakresu ważności warunku na lokalizację /11.4/ od współczynników $\bar{\mu}$ i β .

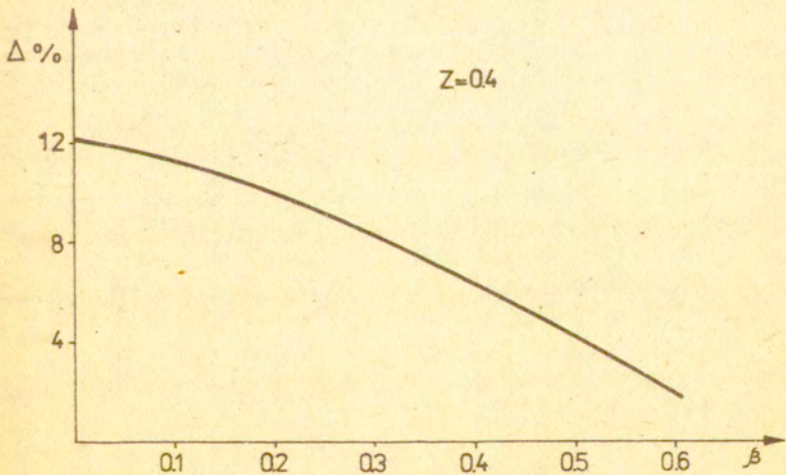
Punkt wspólny, w którym następuje równość warunków /11.4/ i /11.8/ jest punktem zerowym / $Z = 0$ / a więc dla $(\bar{\mu} = \beta)$. Jest to jak wspomniano wcześniej punkt, w którym równania konstytutywne /11.4/ przyjmują postać stowarzyszonych praw plastycznego płynięcia. Wówczas to dostateczny lokalny warunek jednoznaczności /8.1/ /por. [32], [45] / i zarazem warunek lokalizacji plastycznej deformacji /11.4/ przyjmują postać $(h^{cr}_{0,max.} = h^*_0 = 0)$, natomiast ogólny warunek lokalizacji /11.3/ przyjmuje wartość ujemną.

Na rys. 6 przedstawiono procentową zmianę współczynnika oszacowania Δ rozumianego jako

$$\Delta = \frac{h^*_{tan.} - h^{cr}_{max.tan.}}{\mu} = \frac{\frac{h^*}{\mu} - \frac{h^{cr}_{max.}}{\mu}}{\left(1 + \frac{h^*}{\mu}\right) \left(1 + \frac{h^{cr}_{max.}}{\mu}\right)} \quad /11.10/$$

w zależności od współczynnika ścisłości β jako parametru dla przyjętej wartości $Z = 0,4$.

Interpretacja geometryczna i analityczna stycznych krytycznych modułów wzmocnienia (h_{tan}^* i $h_{max.tan}^{cr}$) dla danego materiału w zależności od krytycznych funkcji wzmocnienia (h^* i h_{max}^{cr}) odpowiednio, jest pokazana na rys. 3b. Wartości ($\frac{h^*}{\mu}$ i $\frac{h_{max}^{cr}}{\mu}$) dla danego Z w zależności od współczynnika β określano z rys. 5.



Rys.6

Z rys. 6 wynika, że oszacowanie to jest bardzo dokładne /się-
gające $\sim 2\%$ dla $\beta = 0,6$ i $\sim 12\%$ dla $\beta = 0,0/$. Można stąd
powiedzieć, że oszacowanie warunku na lokalizację deformacji
/11.4/ poprzez warunek lokalny jednoznaczności /11.8/ jest lep-
sze w przypadku materiałów bardziej ściśliwych plastycznie,
czemu odpowiadają większe wartości współczynnika β , aniżeli
nieściśliwych plastycznie / $\beta = 0,0/$.

12. Wzmocnienie izotropowe. Problem czystego ścinania

12.1. Model ciała z izotropowym wzmocnieniem

Rozważmy szczególny model ciała sprężysto-plastycznego
z izotropowym wzmocnieniem i stowarzyszonym prawem plastyczne-
go płynięcia.

Niech stan wewnętrzny tego ciała opisuje tylko jeden parametr
skalarny $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}$. Założymy, że funkcję Gibbsa można przed-
stawić w postaci

$$G = G^e(\mathcal{E}, T) + G^p(\mathcal{H}) \quad /12.1/$$

co jest równoznaczne z pominięciem efektów sprzężenia spręży-
sto-plastycznego i ciepła przemian wewnętrznych ($\gamma_3 = 0$) i
($\gamma_{13} = \gamma_{1\bar{3}} = \gamma_{23} = \gamma_{2\bar{3}} = 0$).

Funkcji /12.1/ odpowiada następująca addytywna postać entalpii
/por. /3.33//,

$$\chi = \chi^e(\mathcal{E}, T) + G^p(\mathcal{H}) \quad /12.2/$$

gdzie $\chi^e = G^e(\mathcal{E}, T) + T S(\mathcal{E}, T)$

zaś siła termodynamiczna π

$$\pi = \rho_0 \frac{\partial G}{\partial \mathcal{H}} = \rho_0 \frac{\partial G^p}{\partial \mathcal{H}} = \pi(\mathcal{H}) \quad /12.3/$$

nie zależy ani od stanu naprężenia ani od temperatury. Przyjmujemy, że nieodwracalny proces plastycznego płynięcia stowarzyszony jest z następującą funkcją płynięcia

$$\dot{f}_2 = \sigma_{(i)} - Y_1(\pi, \alpha e, T) \quad /12.4/$$

gdzie $Y_1 = Y_0(\alpha e, T) \exp \pi(\alpha e)$

której odpowiada warunek H-M ($\dot{f}_2 = 0$). Występująca w równaniu powyższym wielkość $\sigma_{(i)}$ jest intensywnością naprężenia zdefiniowaną następująco

$$\sigma_{(i)} = \left(\frac{3}{2} \sigma' \cdot \sigma' \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma' = \text{dev } \sigma \quad /12.4/_{3,4}$$

Podstawiając /12.3/ do /12.4/ granicę plastyczności przy prostym rozciąganiu możemy wyrazić jako funkcję αe i T

$$f(\sigma, \alpha e, T) = \dot{f}_2 \Big|_{\pi = \pi(\alpha e)} = \sigma_{(i)} - Y(\alpha e, T) \quad /12.5/$$

gdzie $Y(\alpha e, T) = Y_1 \Big|_{\pi = \pi(\alpha e)}$

Prawa płynięcia stowarzyszone z funkcją f oraz równanie ewolucji dla parametru wewnętrznego αe mają postać

$$\dot{\epsilon}^{iP} = \frac{3}{2} \frac{\Lambda}{\sigma_{(i)}} \sigma' \quad , \quad \dot{\alpha e} = \Lambda \frac{\partial Y_1}{\partial \pi} \quad /12.6/$$

gdzie $\dot{\epsilon}^{iP} = \text{dev } \dot{\epsilon}^P$; $\dot{\epsilon}^P_{kk} = 0$

Biorąc pod uwagę warunek $f = 0$, równanie /12.6/, oraz przyjętą szczególną postać funkcji Y_1 widzimy, że parametr αe można utożsamić z pracą odkształcenia plastycznego

$$\dot{\alpha e} = \sigma' \cdot \dot{\epsilon}^{iP} \quad /12.7/$$

12.2. Uproszczony warunek lokalny jednoznaczności

W pracy [1] dokonując analizy wpływu różnego rodzaju sprzążeń na krytyczną wartość funkcji wzmocnienia h wykazano, że efekt piezokaloryczny oraz rozszerzalność cieplna od wzrostu temperatury spowodowanego dysypacją nie mają znaczenia przy praktycznym wykorzystywaniu warunku lokalnego. Dlatego w dalszym ciągu przyjmujemy, że $\gamma_{12} = 0$ oraz $\gamma_{21} \gamma_1 = 0$. Warunek lokalny pokrywa się wówczas z warunkiem odwracalności i ma prostą postać /por. /6.3//.

$$h_1 = h - m_\varepsilon f_T > 0 \quad /12.8/$$

gdzie

$$m_\varepsilon = \frac{\gamma_1}{\rho_0 c_\varepsilon} \left[\varepsilon \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon} + \pi \frac{\partial f_2}{\partial \pi} \right] = \frac{\gamma_1}{\rho_0 c_\varepsilon} \left(\varepsilon \cdot f_{2,\varepsilon} + \pi f_{2,\pi} \right) /12.9/$$

Wykorzystując założenia przyjęte w punkcie /12.1/ stwierdzamy, że w stanie $h_1 = 0$, przy którym może wystąpić bifurkacja ma miejsce następujący związek

$$\frac{\partial Y(\alpha, T)}{\partial \alpha} = \frac{\gamma_2(\pi-1)}{\rho_0 c_\varepsilon} \frac{\partial Y(\alpha, T)}{\partial T} \quad /12.10/$$

Przy przyjętych założeniach z równania /3.34/ wynika, że zmianę temperatury w procesie lokalnie adiabatycznym ($q_0 = \text{div } q = 0$) obliczyć można ze wzoru

$$\rho_0 c_\varepsilon = \gamma_2 \alpha - \rho_0 G^p(\alpha) \quad /12.11/$$

Zdefiniujemy adiabatyczną granicę plastyczności następująco

$$Y^{(a)}(\alpha) = Y(\alpha, T) \Big|_{T=T(\alpha)} \quad /12.12/$$

gdzie $T = T(\alpha\ell)$ określone jest równaniem /12.11/.
 Obliczając pochodną $\frac{\partial Y^{(a)}}{\partial \alpha\ell}$ i wykorzystując /12.10/ stwierdzamy, że

$$\frac{dY^{(a)}(\alpha\ell)}{d\alpha\ell} = 0 \quad /12.13/$$

Tak więc stan krytyczny jest stanem, któremu odpowiada maksimum na krzywej adiabatycznej w próbie na proste rozciąganie lub w próbie na czyste ścinanie, gdyż

$$Y(\alpha\ell, T) = \sqrt{3} k(\alpha\ell, T) \quad /12.14/$$

gdzie $k = k(\alpha\ell, T)$ jest izotermiczną granicą plastyczności przy czystym ścinaniu.

Równanie dla temperatury /12.11/ zawiera jak widać /drugi człon po prawej stronie/ wyrażenie uwzględniające ukrytą energię deformacji plastycznej [46], [47]. Ponieważ założyliśmy wcześniej, że pomijamy ciepło wewnętrznych przemian ($\gamma_3 = 0$) /por. p. 12.1/, wówczas wyrażenie $\rho_0 G^p(\alpha\ell)$ jest równe ukrytej energii deformacji plastycznej, [1-2], [12].

Dla dalszej analizy problemu założymy, że wyrażenie $\rho_0 G^p(\alpha\ell)$ jest liniową zależnością od parametru wewnętrznego $\alpha\ell$ co jest na podstawie zależności /12.3/ równoznaczne z faktem, że siła termodynamiczna Π jest stała. Przy tych założeniach analizując proces deformacji plastycznej w dalszej części pracy stała Π będzie odgrywać rolę stałej materiałowej.

12.3. Krytyczne naprężenie w adiabatycznej próbie na proste rozciąganie /czyste ścinanie/ dla niektórych stali nierdzewnych

Rozważmy klasę metali, które dadzą się opisać następującym związkiem między rzeczywistym naprężeniem $\bar{\sigma}$, logarytmicz-

nym odkształceniem plastycznym ε^p i temperaturą $(\theta^\circ C = T - 273)$, dla przypadku prostego rozciągania [13], [42-43], [48],

$$\bar{\sigma} = \bar{\gamma}(\varepsilon^p, \theta) = (c - b\theta) / (b_1 + \varepsilon^p)^n \quad /12.15/$$

Stałe materiałowe $(c, b, b_1, n, \rho_0 C \varepsilon, \pi, E, \bar{\sigma}_0)$ dla pewnych stali nierdzewnych stopowych według danych doświadczalnych zawartych w [49], [50], które zawierają się w następujących przedziałach

$$c = (45 - 500) \quad [kg/mm^2]$$

$$b = (0,02 - 0,5) \quad [kg/(mm^2 \cdot ^\circ C)]$$

$$b_1 = 0,016 \quad , \quad n = (0,2 - 0,5)$$

$$\rho_0 C \varepsilon = (0,3 - 0,4) \quad [kg/(mm^2 \cdot ^\circ C)]$$

$$E = (2,0 - 2,2) \times 10^4 \quad [kg/mm^2] \quad , \quad E - \text{moduł Younga}$$

$$\bar{\sigma}_0 = (20 - 60) \quad [kg/mm^2]$$

gdzie $\bar{\sigma}_0 = c b_1^n$ jest początkową granicą plastyczności przy $(\varepsilon^p = 0 \quad i \quad \theta = 0^\circ C)$.

Przedstawimy zależność konstytutywną /12.15/ w wielkościach bezwymiarowych następująco

$$\mathcal{T} = (A - \theta^*) / (b_1 + \varepsilon^p)^n \quad /12.16/$$

gdzie

$$\mathcal{T} = \frac{\bar{\sigma}(1+\nu)}{\sqrt{3} E} \quad , \quad \theta^* = \frac{b(1+\nu)}{\sqrt{3} E} \theta \quad , \quad A = \frac{c(1+\nu)}{\sqrt{3} E} \quad , \quad 2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad /12.17/$$

Bezwymiarowa praca odkształcenia plastycznego jest określona następująco

$$\mathcal{H}^* = \frac{1+\nu}{E} \mathcal{H} = \sqrt{3} \int_0^{\varepsilon^p} \mathcal{T}(\theta, \bar{\varepsilon}^p) d\bar{\varepsilon}^p \quad /12.18/$$

gdzie $\mathcal{A} = \int_0^{\varepsilon^p} \delta(\theta, \bar{\varepsilon}^p) d\bar{\varepsilon}^p$ jest wymiarową pracą odkształcenia plastycznego.

Po podstawieniu wyrażenia /12.16/ do /12.18/ i scałkowaniu, otrzymamy

$$\mathcal{A}^* = \sqrt{3} (A - \theta^*) \left[(b_1 + \varepsilon^p)^{n+1} - b_1^{n+1} \right] \frac{1}{n+1} \quad /12.19/$$

Przyjmując, że $\rho_0 G^p = \pi \cdot \mathcal{A}$, $\pi \approx 0,1$ z równania /12.11/ otrzymamy

$$\theta^* = \delta \mathcal{A}^* \quad , \quad \delta = 5,196 \frac{b}{\rho_0 G b} \quad /12.20/$$

Tutaj bezwymiarowy parametr δ reprezentuje wrażliwość granicy plastyczności stali na temperaturę. Z układu równań /12.16/, /12.19/ i /12.20/ możemy wyznaczyć następujące adiabaty

$$\mathcal{I}^a = \mathcal{I}(\mathcal{A}^*) \quad , \quad \varepsilon^p = \varepsilon^p(\mathcal{A}^*) \quad , \quad \theta^* = \delta \mathcal{A}^* \quad /12.21/$$

Porównując pochodną /12.21/, do zera znajdziemy krytyczną wartość \mathcal{A}_{cr}^* i następnie odpowiadające jej krytyczne wartości ε_{cr}^p , θ_{cr}^* i \mathcal{I}_{cr}^a jako

$$\varepsilon_{cr}^p = \left[\frac{n(1+n-\sqrt{3}\delta b_1^{n+1})}{\sqrt{3}\delta} \right]^{\frac{1}{n+1}} - b_1$$

$$\theta_{cr}^* = A \frac{(n-\sqrt{3}\delta b_1^{n+1})}{(1+n-\sqrt{3}\delta b_1^{n+1})} \quad /12.22/$$

$$\mathcal{I}_{cr}^a = A \left(1 - \frac{n-\sqrt{3}\delta b_1^{n+1}}{1+n-\sqrt{3}\delta b_1^{n+1}} \right) \left[\frac{n(1+n-\sqrt{3}\delta b_1^{n+1})}{\sqrt{3}\delta} \right]^{\frac{n}{1+n}}$$

Na podstawie dokładnej analizy wyrażenia /12.22/2 stwierdzamy, że dla $\delta = /0,028 - 0,702/$ określonej na podstawie /12.20/2

dla przyjętych wartości $b = /0,02 - 0,5/$ i $f_0 C_0 \approx 0,35$ wyrażenie to można z bardzo dużą dokładnością zastąpić następującym prostym związkem

$$\theta_{cr}^* \approx A \frac{n}{1+n} \quad /12.23/$$

Na podstawie /12.23/ wyrażenie na \mathcal{T}_{cr}^a /por. /12.22/3/ można również napisać w prostej formie jako

$$\mathcal{T}_{cr}^a \approx A \left| \frac{1}{1+n} \right| \left[\frac{n/1+n - \sqrt{3} \delta B_1^{n+1}}{\sqrt{3} \delta} \right]^{\frac{n}{n+1}} \quad /12.24/$$

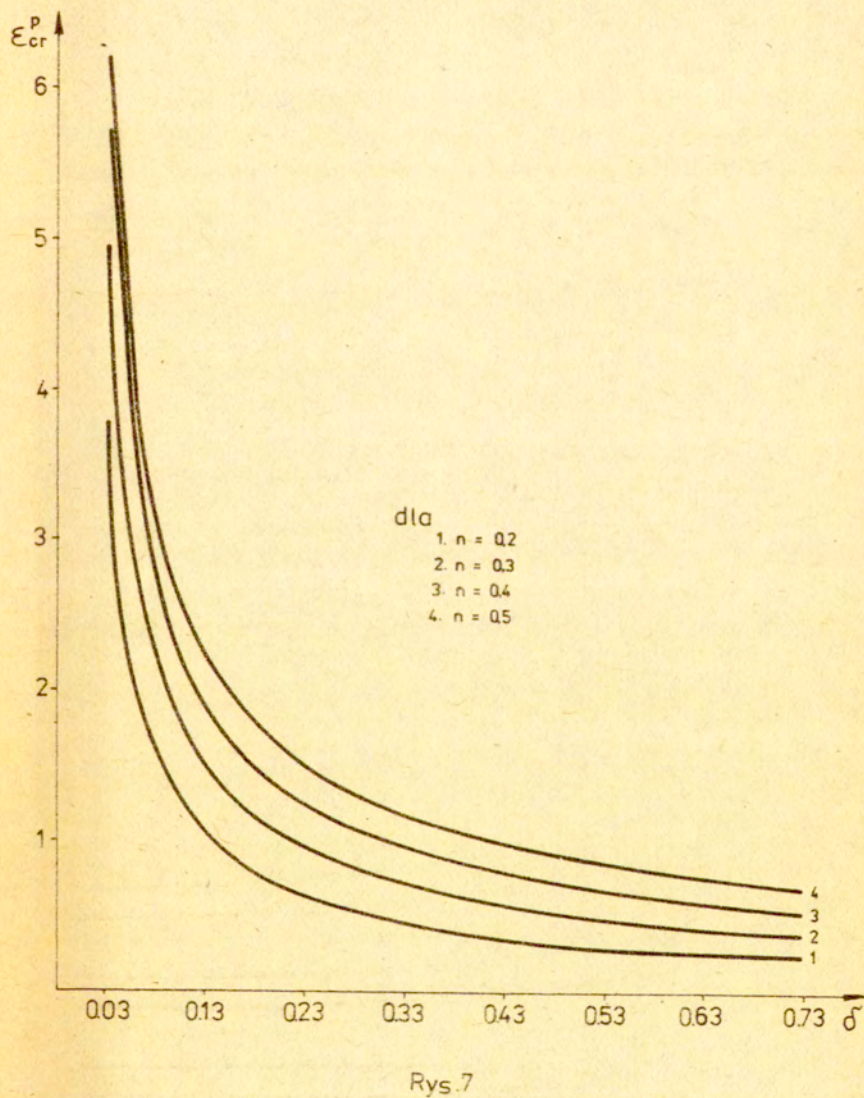
Zależność krytycznej wartości - \mathcal{E}_{cr}^p /12.22/1, od parametru δ dla $n = /0.2, 0.3, 0.4, 0.5/$ pokazano na rys. 7.

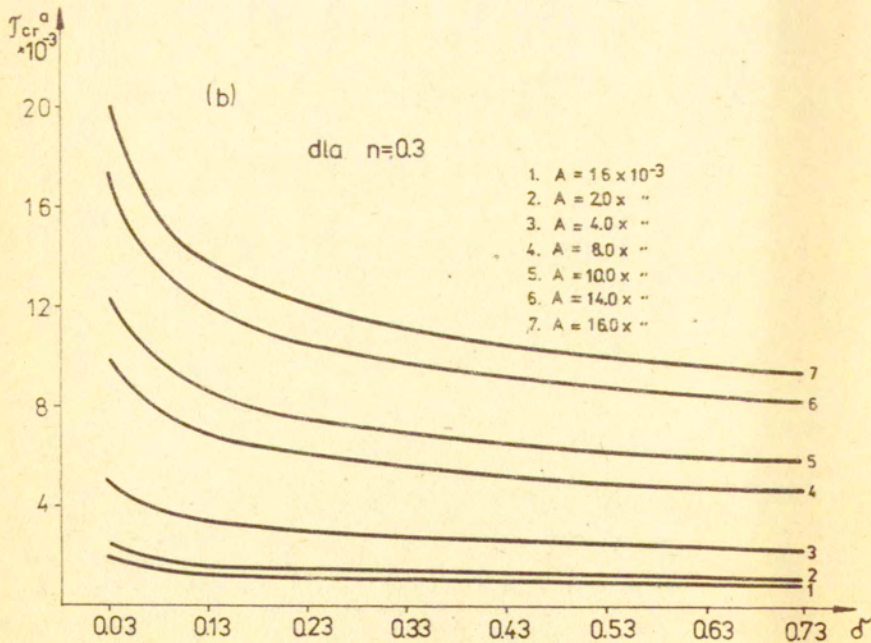
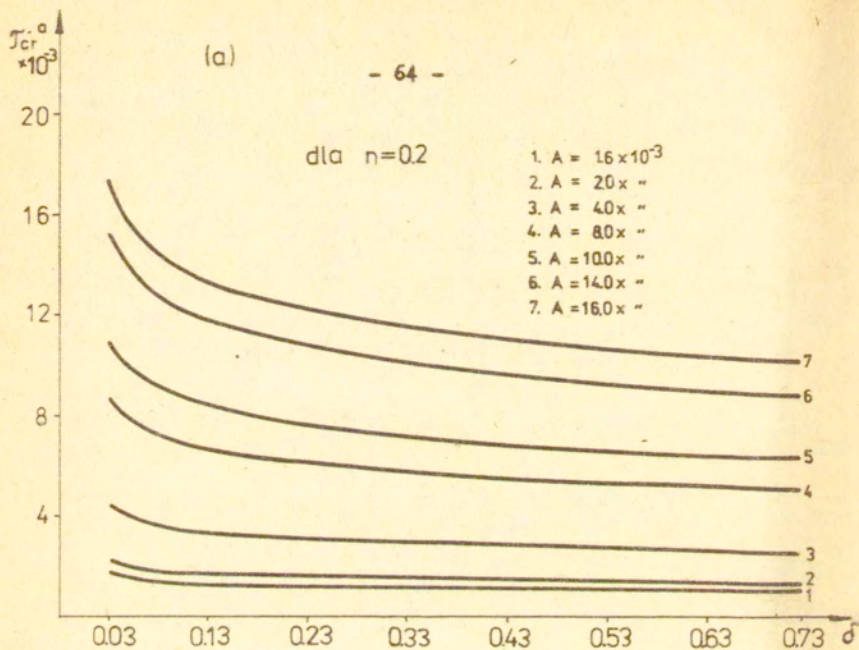
Natomiast na rysunkach 8/a-d/ przedstawiono krytyczną wartość naprężeń \mathcal{T}_{cr}^a /12.24/ w zależności od parametru δ dla wybranych wartości współczynnika wzmocnienia n i wybranych wartości A . Przedstawione wykresy na rysunkach 7 i 8/a-d/ mają charakter monogramów i będą użyteczne w dalszej pracy przy analizie krytycznych wartości obciążeń momentem skręcającym dla czystego adiabatyicznego skręcania grubościennych i cienkościennych metalowych rur.

13. Skręcanie

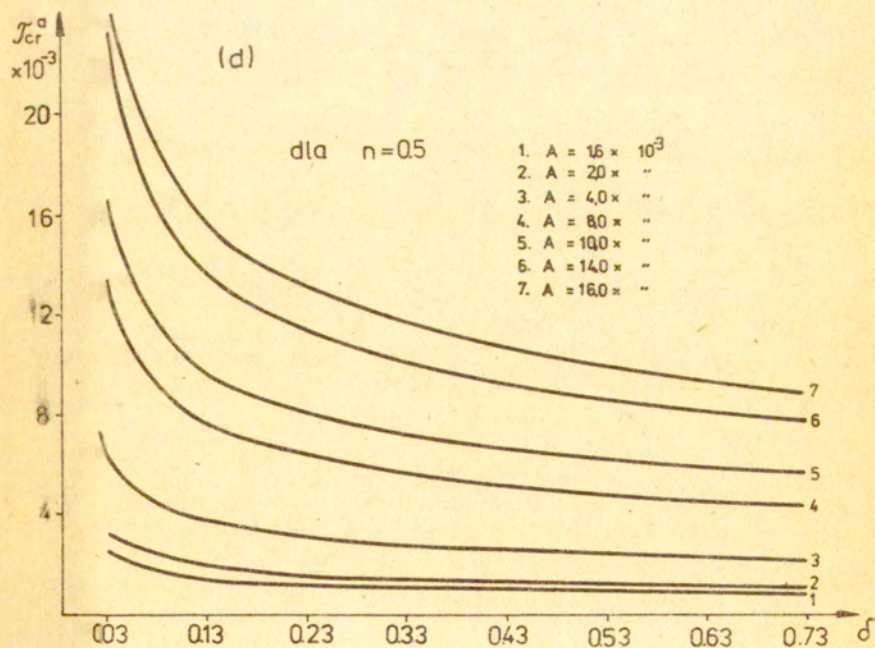
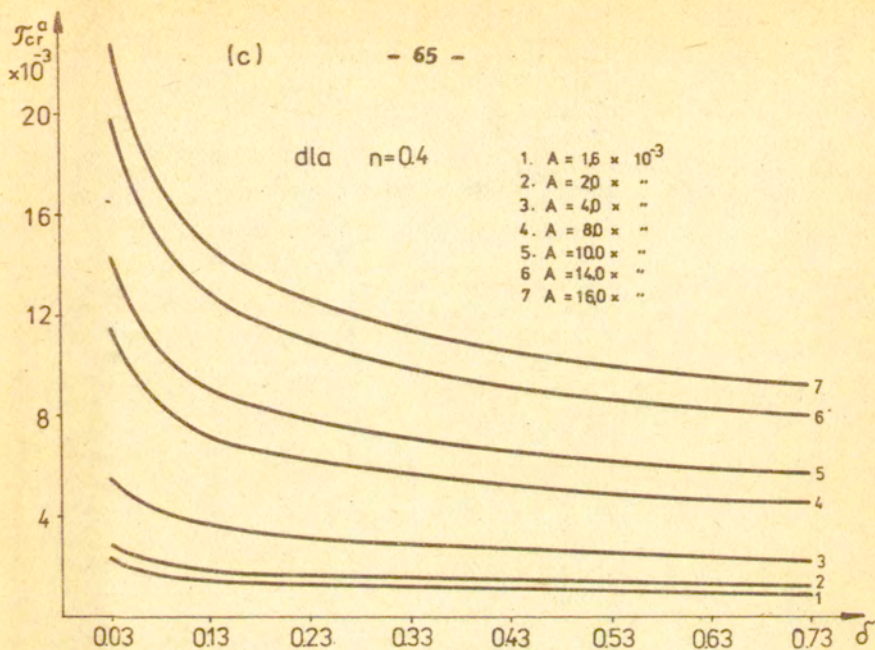
13.1. Adiabatyczne skręcanie grubościennej rurki

Rozpatrzmy problem czystego adiabatyicznego skręcania grubościennej rurki. Przyjmujemy więc, że podczas skręcania występują tylko sztywne obroty poprzecznych przekrojów rurki i, że zachodzi w jej środkowej części stan odpowiadający stanowi czystego ścinania. Wykorzystując rezultaty z /p. 12/ pracy wyznaczmy krytyczną wartość adiabatyicznego momentu skręcającego, przy którym na zewnętrznym promieniu skręcanej rurki mogą poja-



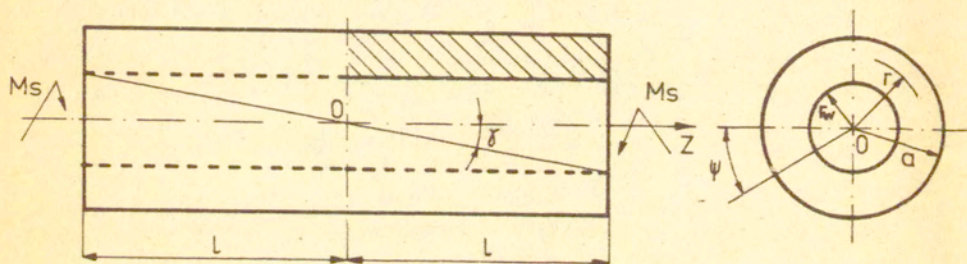


Rys 8 (a,b)



Rys.8(c,d)

wić się stany bifurkacji. W przypadku grubościennej rurki zadanie to ma charakter zagadnienia dwuwymiarowego.



Rys.9

Wprowadźmy następującą miarę deformacji plastycznej /por. np. [43]/

$$\varepsilon^p = \frac{\operatorname{tg} \gamma^p}{\sqrt{3}} \quad /13.1/$$

gdzie γ^p - jest kątem plastycznego ścinania

Na podstawie /2.7/ napiszemy, że

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p \quad /13.2/$$

gdzie γ^e - jest kątem sprężystego ścinania

Z analizy geometrycznej problemu skręcania /por. rys. 9/, otrzymamy

$$\operatorname{tg} \gamma = \alpha_s r \quad /13.3/$$

gdzie α_s - jest kątem skręcania na jednostkę długości

r - jest promieniem bieżącym skręcanej rurki

Z wyrażenia /13.2/ otrzymamy, że

$$\operatorname{tg} \gamma^e = \frac{\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma^p}{1 + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \gamma^p} \quad /13.4/$$

W przypadku czystego skręcania grubościennej rurki na podstawie [51] napiszemy następujący związek konstytutywny

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma^e \quad /13.5/$$

Na podstawie wyrażen /13.1/, /13.3 - 13.5/ napiszemy

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_s r - \sqrt{3} \varepsilon^p}{1 + \sqrt{3} \alpha_s r \varepsilon^p} \right) \quad /13.6/$$

Wprowadźmy następujące wielkości bezwymiarowe

$$\beta_s \equiv \alpha_s a, \quad \rho \equiv \frac{r}{a}, \quad \rho_w \equiv \frac{r_w}{a} \quad /13.7/$$

gdzie a - jest zewnętrznym promieniem skręcaniej rurki /rys. 9/
Podstawiając wyrażenia /13.7/ do /13.6/ otrzymamy

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_s \rho - \sqrt{3} \varepsilon^p}{1 + \sqrt{3} \beta_s \rho \varepsilon^p} \right) \quad /13.8/$$

Wiemy, że pierwsze stany bifurkacji mogą wystąpić na zewnętrznym promieniu skręcaniej grubościennej rurki tzn. dla $\rho = 1$. Wówczas na promieniu tym odkształcenia plastyczne, temperatura oraz naprężenia ścinania przyjmą swoje krytyczne wartości por. wyrażenia /12.22/ lub równoznacznie /12.22/, /12.23/ i /12.24/. Mając na uwadze powyższe i podstawiając krytyczne wartości ε_{cr}^p , \mathcal{J}_{cr}^a oraz $\rho = 1$ do wyrażenia /13.8/ i przekształcając otrzymamy

$$\beta_s^{cr} = \frac{2J_{cr}^a + \sqrt{3} \varepsilon_{cr}^p}{1 - 2\sqrt{3} J_{cr}^a \varepsilon_{cr}^p} \quad /13.9/$$

gdzie β_s^{cr} - jest bezwymiarowym krytycznym kątem skręcania /por. /13.7/1/, dla którego na zewnętrznym promieniu skręcanej rurki mogą pojawić się stany bifurkacji.

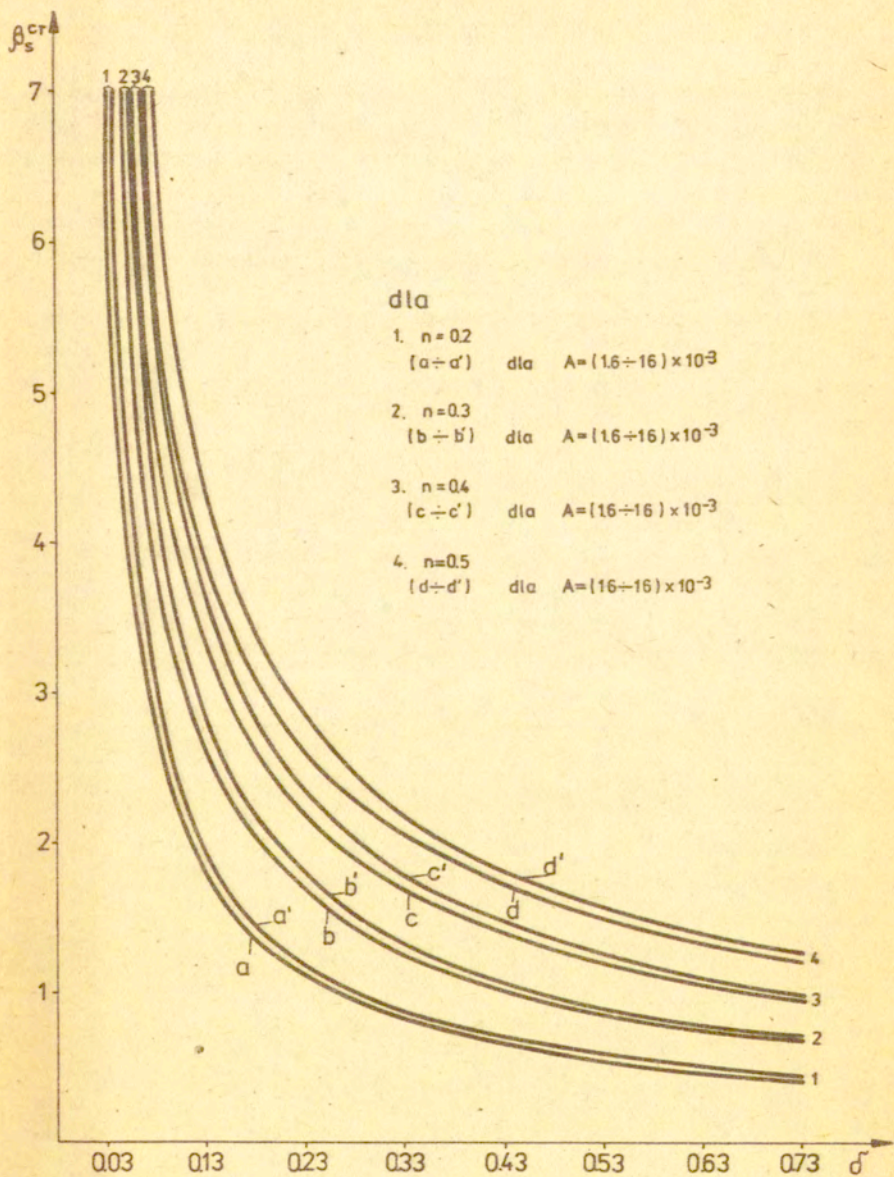
Wyrażenie na β_s^{cr} w zależności od parametru δ dla przedziału wartości A i dla wybranych wartości współczynnika wzmocnienia n /por. wyrażenia /12.22/1,3 i /12.24// jest pokazane na rys. 10, który będzie użyteczny w dalszej analizie skręcania grubościennych rurek. Z analitycznego rachunku przeprowadzonego niezależnie wynikało, że położenie strefy sprężysto plastycznej określonej przez ρ_{cr}^c [51] w chwili gdy na zewnętrznym promieniu skręcanego wałka osiągany jest stan krytyczny jest bardzo małe tzn. ρ_{cr}^c jest rzędu 10^{-2} . Z porównania z /13.7/2,3 możemy napisać, że $\rho_w \gg \rho_{cr}^c$ co oznacza, że w przypadku skręcania grubościennych rurek w chwili gdy osiągany jest stan krytyczny, cały przekrój jest w stanie uplastycznienia. Powyższa uwaga będzie użyteczna w obliczeniu krytycznego adiabatycznego momentu skręcającego.

Z rys. 9 i zależności /13.7/1, widać, że kąt ψ mierzony na czole skręcanej rurki [51] jest równy

$$\psi = \alpha_s l = \beta_s \frac{l}{a} \quad /13.10/$$

Bezwymiarowy moment skręcający M_s^* określimy rozwiązując następującą całkę [51], [52],

$$M_s^* = \frac{M_s(1+\nu)}{E a^3} = 2\pi \int_{\rho_w}^1 r \rho^2 d\rho \quad /13.11/$$

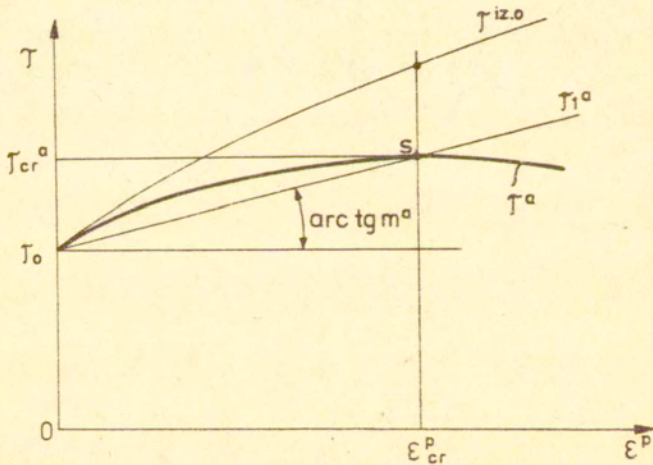


Rys.10

Dla ogólnych równań /por. /12.16/, /12.21/₁, /13.8// opisujących nasz problem nie uzyskamy analitycznego rozwiązania wyrażenia /13.11/ i należy przeprowadzić obliczenia metodą numeryczną.

Można dokonać jednak pewnego uproszczenia, które pozwoli otrzymać oszacowanie wyrażenia typu /13.11/ i otrzymać rozwiązanie uproszczone analityczne.

W tym celu wykorzystamy liniową zależność na \mathcal{T}^a w zależności od deformacji plastycznej w miejsce nieliniowej zależności typu /12.16/ i /12.21/₁. Idea tego uproszczenia pokazana jest na rys. 11.



Rys.11

gdzie $m^a = \frac{\mathcal{T}_{cr}^a - \mathcal{T}_0}{\epsilon_{cr}^p}$ jest liniowym modułem wzmocnienia

Stąd $\mathcal{T}_1^a = \mathcal{T}_0 + m^a \epsilon^p$ /13.12/

jest poszukiwaną liniową zależnością szacującą od "dołu" wyra-

żenia J^a . Krzywa $J^{ix.0}$ przedstawia schematycznie zależność /12.16/ dla $\theta = 0^\circ\text{C}$.

Podstawiając J_1^a w miejsce J^a w wyrażeniu /13.6/ otrzymamy

$$T_0 + m^a \varepsilon^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_s \rho - \sqrt{3} \varepsilon^p}{1 + \sqrt{3} \varepsilon^p \beta_s} \right) \quad /13.13/$$

Z zależności /13.13/ po przekształceniach wyznaczmy zależność $\varepsilon^p(\rho)$ jako rozwiązanie algebraicznego równania kwadratowego

$$\varepsilon^p = \frac{-(2m^a + \sqrt{3})}{4\sqrt{3} m^a \beta_s \rho} - \frac{T_0}{2m^a} + \frac{\sqrt{\Delta(\rho)}}{4\sqrt{3} m^a \beta_s \rho} \quad /13.14/$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) &= a_s \rho^2 + b_s \rho + c_s \\ a_s &= 4\beta_s(3T_0^2 + 2\sqrt{3} m^a) \\ b_s &= 4T_0 \beta_s(3 - 2\sqrt{3} m^a) \\ c_s &= (2m^a + \sqrt{3}) \end{aligned} \quad /13.15/$$

Podstawiając wyrażenie /13.14/ do równania /13.12/ otrzymamy poszukiwaną zależność $J_1^a(\rho)$, jako

$$J_1^a = \frac{T_0}{2} - \frac{2m^a + \sqrt{3}}{4\sqrt{3} \beta_s \rho} + \frac{\sqrt{\Delta(\rho)}}{4\sqrt{3} \beta_s \rho} \quad /13.16/$$

Podstawiając wyrażenie /13.16/ do /13.11/ określimy "dolny" adiabatyczny moment skręcającej, jako

$$\begin{aligned} M_{155}^{*a} &= 2\pi \int_{\rho_w}^1 J_1^a(\rho) \rho^2 d\rho = 2\pi \left[A_s(\rho_w) + \frac{[\Delta(\rho_w)]^{\frac{3}{2}}}{96 a_s \beta_s^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_s(\rho_w) b_s [\Delta(\rho_w)]^{\frac{1}{2}}}{32 \sqrt{3} a_s^2 \beta_s} - \frac{c_s}{64 \sqrt{3} a_s^{\frac{2}{3}} \beta_s} \ln \left[\beta_s(\rho_w) + 2 \left(a_s \Delta(\rho_w) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right] \end{aligned} \quad /13.17/$$

$$A_s(\rho_w) = \frac{T_0}{6} (1 - \rho_w^3) - \frac{2M^a + \sqrt{3}}{8\sqrt{3}\beta_s}$$

gdzie $\Delta(\rho_w) = a_s(1 - \rho_w^2) + b_s(1 - \rho_w) + c_s$

$$B_s(\rho_w) = 2a_s(1 - \rho_w) + b_s$$

/13.18/

$$C_s = b_s(4a_s c_s - b_s^2)$$

Moment skręcający odpowiadający krytycznemu stanowi /por. punkt 5 na rys. 11/ określimy z wyrażenia /13.17/ następująco

$$M_{zs.cr.}^{*a} = M_{zs.}^{*a} \Big|_{\beta_s = \beta_s^{cr}} \quad /13.19/$$

Aby więc określić adiabaticzny krytyczny moment skręcający należy do wyrażeń /13.15/ i /13.17 - 13.18/ podstawić w miejsce β_s wielkość β_s^{cr} określoną zależnością /13.9/ i pokazaną na rys. 10. Na rys. 12/a-d/ przedstawiono krytyczną wartość adiabaticznego momentu skręcającego $M_{zs.cr.}^{*a}$ /13.19/ liczonego według uproszczonego schematu określonego zależnością /13.12/ w zależności od parametru δ dla wybranych wartości A i dla wybranych wartości współczynnika wzmocnienia Π . Bezwymiarowy promień wewnętrzny /13.7/3 grubościennej rurki przyjęto równy połowie $\rho_w = 0,5/$.

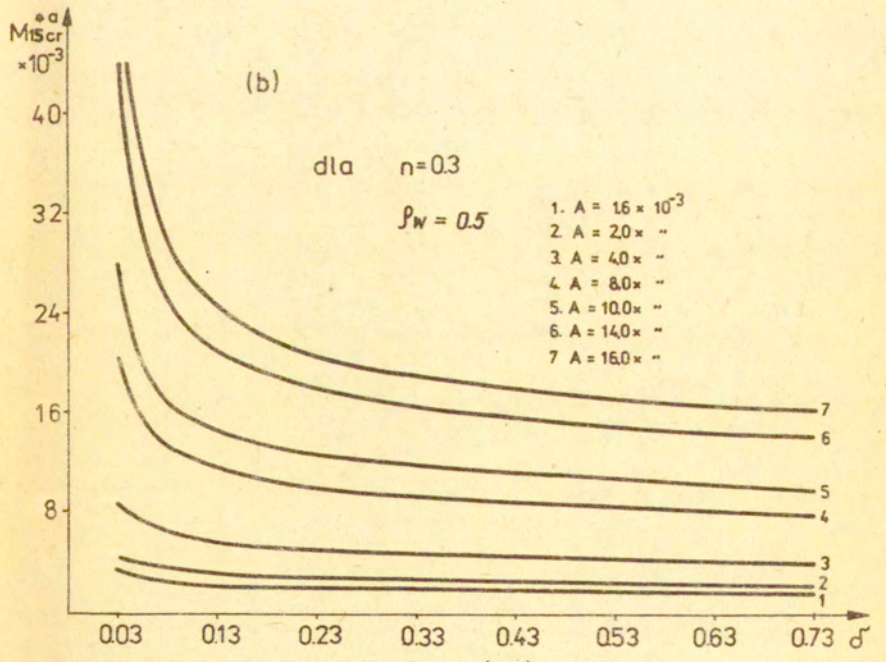
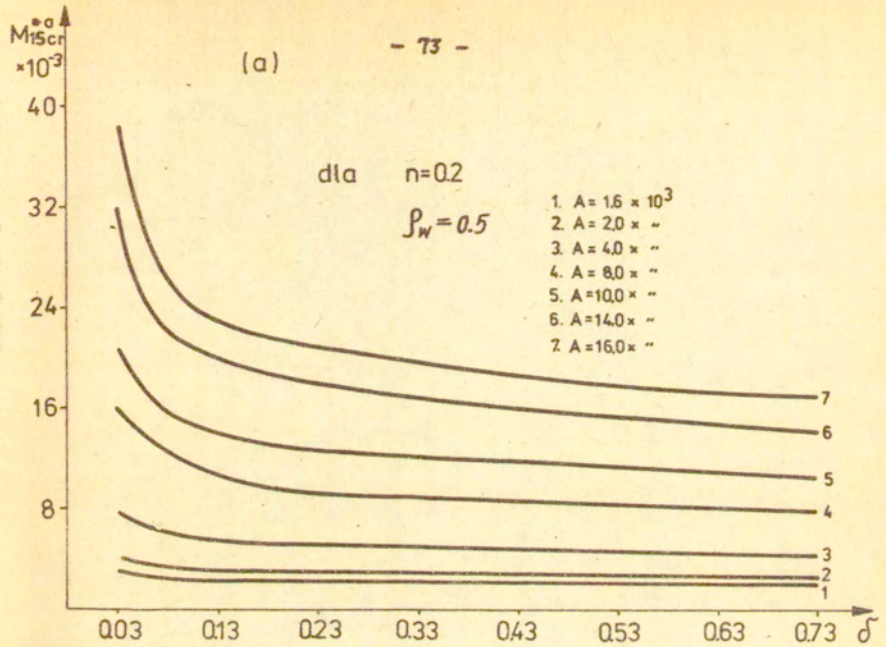
Przykład 1

Niech stal nierdzewna, z której wykonana jest grubościenna rurka charakteryzuje się następującymi wartościami stałych materiałowych:

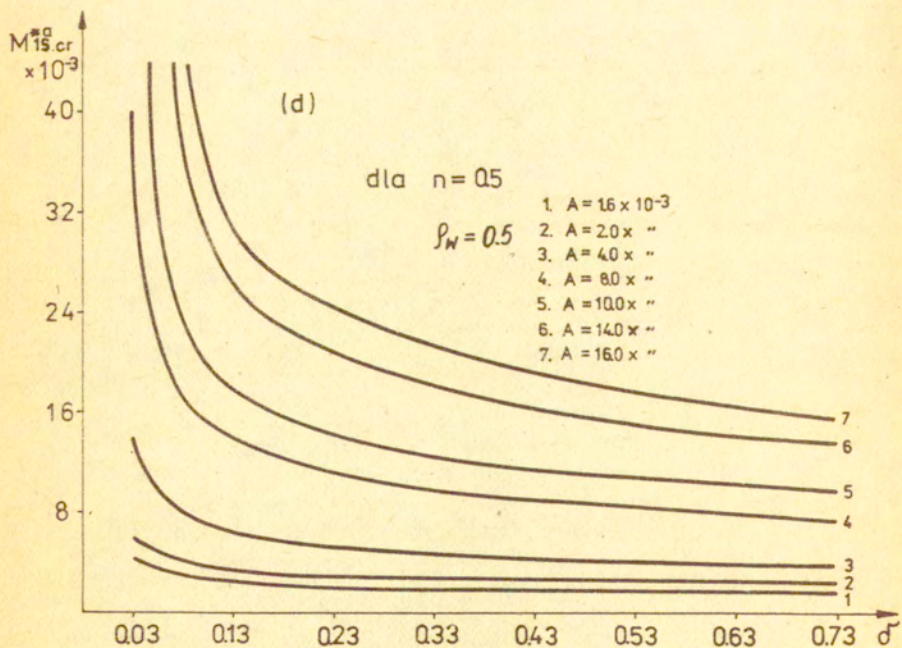
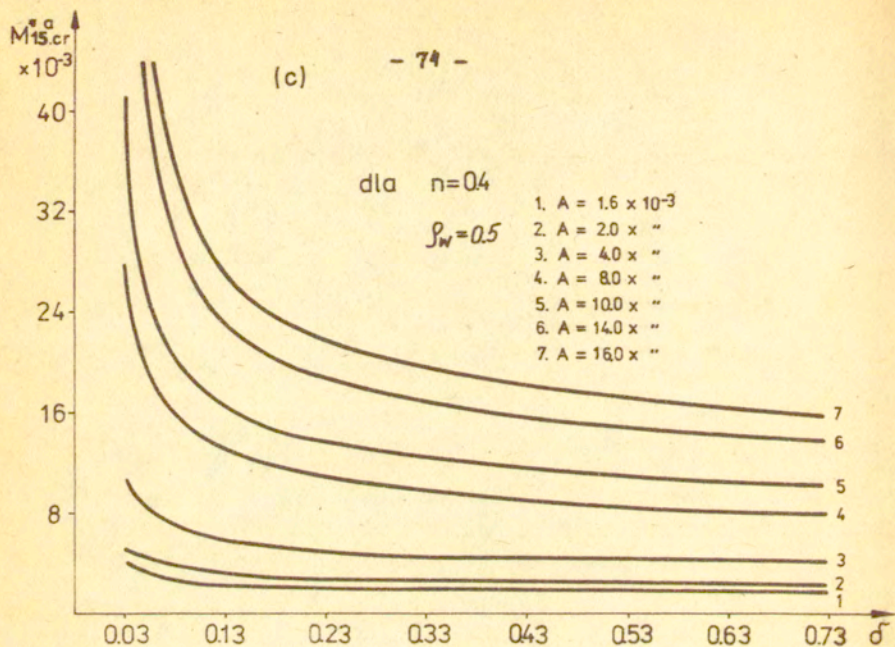
$$c = 112 \text{ kG/mm}^2, \quad b = 0,336 \text{ kG/(mm}^2 \cdot \text{°C)}, \quad b_1 = 0,016$$

$$\Pi = 0,3, \quad \rho_0 c_0 = 0,35 \text{ kG/(mm}^2 \cdot \text{°C)}, \quad \Pi = 0,1, \quad E = 2,1 \times 10^4 \text{ kG/mm}^2$$

$$b_0 = 32,4 \text{ kG/mm}^2, \quad \nu = 0,3$$



Rys.12(ab)



Rys.12(c,d)

stąd na podstawie /12.17/₃, /12.20/₂ i /12.23/ wyznaczmy, że

$$A = 4,0 \times 10^{-3}, \quad \delta = 0,4988, \quad \theta_{cr}^* = 0,923 \times 10^{-3}$$

Z rys. 7 i 8b wyznaczmy ε_{cr}^p i \mathcal{J}_{cr}^a odpowiednio jako:

$$\varepsilon_{cr}^p = 0,52, \quad \mathcal{J}_{cr}^a = 2,52 \times 10^{-3}$$

Dla $\beta_w = 0,5$ z wykresu 12b otrzymamy, że

$$M_{1s.cr.}^{*a} = 4,3 \times 10^{-3}$$

Na podstawie /12.17/_{1,2} i /13.11/ dla $Q = 20 \text{ mm}$ otrzymamy

$$\sigma_{cr}^a = 70,6 \text{ kg/mm}^2, \quad \theta_{cr}^* = 66,3^\circ\text{C}, \quad M_{1s.cr.}^a = 554,5 \text{ kgm}$$

Z rys. 11 widać, że "górne" oszacowanie $M_{s.cr.}^a$ można otrzymać analogicznie, używając krzywej izotermicznej $\mathcal{J}^{iz.o}$. Wówczas na podstawie przybliżonej analizy możemy używać następującego oszacowania.

$$M_{1s.cr.}^{*iz.o} \cong (1+n) M_{1s.cr.}^{*a} \Rightarrow M_{1s.cr.}^{*a} < M_{s.cr.}^{*a} < (1+n) M_{1s.cr.}^{*a}$$

Stąd określimy

$$M_{1s.cr.}^{iz.o} \cong 720,7 \text{ kgm}$$

$$\text{oraz } 554,3 < M_{s.cr.}^a < 720,7 \quad [\text{kgm}]$$

Z powodu przeprowadzonej "linearyzacji" wyrażenia podcałkowego /13.11/ takimi nierównościami więc można oszacować wyrażenie nieliniowe /12.21/₁,

13.2. Adiabatyczne skręcanie cienkościennej rurki

W przypadku adiabatycznego skręcania cienkościennej rurki metalowej, możemy stan naprężenia utożsamiać ze stanem esy-stego ścinania. Następnie w przypadku dostatecznie cienkościennej rurki założymy, że naprężenie ścinające \mathcal{J} jest prawie stałe po grubości ścianki a odchylenia od stałości nie mają praktycznego znaczenia. W tym przypadku po uwzględnieniu powyższych

założeń, zadanie skręcania ma charakter zagadnienia jednowymiarowego.

Wobec powyższych założeń, wyrażenie na bezwymiarowy krytyczny moment skręcający /por. wyrażenie /13.11// daje się przedstawić następująco

$$\bar{M}_{s.cr.}^{*a} \cong 2 \pi \tau_{cr.}^a \int_{\rho_w}^1 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} \pi \tau_{cr.}^a (1 - \rho_w^3) \quad /13.20/$$

Korzystanie w celach użytecznych z warunku /13.20/ jest bardzo proste. Mianowicie, dla danego materiału /danej stali nierdzewnej/ należy określić z monogramów /por. rys. 8/a-d// odpowiednie $\tau_{cr.}^a$, przyjąć odpowiedni promień wewnętrzny ρ_w skręcanej cienkościennej rurki i obliczyć prosto dopowiedni moment skręcający $\bar{M}_{s.cr.}^{*a}$. Powyższe zilustrujemy następującym przykładem.

Przykład 2.

Niech materiał charakteryzują te same stałe materiałowe jak w przykładzie 1 /por. p. 13.1/. Przyjmujemy, że $\rho_w = 0,9$.

Mamy więc, że $\tau_{cr.}^a = 2,52 \times 10^{-3}$.

Na podstawie /13.20/ otrzymamy

$$\bar{M}_{s.cr.}^{*a} \cong 1,43 \times 10^{-3}$$

Na podstawie /13.17/ dla $Q = 20 \text{ mm}$ określimy wymiarowy krytyczny moment skręcający równy $\bar{M}_{s.cr.}^a = 184,8 \text{ kgm}$.

Wartości krytycznej adiabatycznej deformacji $\epsilon_{cr.}^p$ i adiabatycznej krytycznej temperatury $\theta_{cr.}^*$ /lub $\theta_{cr.}$ / pozostają co do wartości te same jak w przykładzie 1.

UWAGI KOŃCOWE

1. W pracy wyprowadzono równania pola sprzężonej uogólnionej termoplastyczności, w której uwzględniono efekty sprzężeń termo-mechanicznych, sprężysto-plastycznych a prawa plastycznego płynięcia mają charakter niestowarzyszony.

Dla takiego uogólnionego ciała sprężysto-plastycznego sformułowano podstawowy przyrostowy problem brzegowy sprzężonej termoplastyczności. Następnie, wyprowadzono dostateczny lokalny warunek, dostateczne globalne kryterium oraz dostateczny globalny warunek jednoznaczności rozwiązania dla sformułowanego przyrostowego problemu brzegowego. Wzorowano się na pracach [1-5]. W części aplikacyjnej pracy /por. rozdział III/ wykorzystano dostateczny lokalny warunek jednoznaczności w dwóch przykładach. W pierwszym porównano go z warunkiem na lokalizację deformacji plastycznej Rudnickiego-Rice'a [40-41], gdzie okazało się, że dostateczny lokalny warunek jednoznaczności daje bezpieczniejsze oszacowania krytycznych obciążeń aniżeli warunek na lokalizację deformacji. W języku matematyki oznacza to, że jest on warunkiem silniejszym.

W drugim przykładzie rozpatrzono problem czystego adiabatyicznego ścinania, w którym określono krytyczną wartość adiabatyicznych naprężeń ścinających po przekroczeniu których może wystąpić stan bifurkacji. Wyniki te następnie wykorzystano w analizie adiabatyicznego skręcania grubościennych i cienkościennych metalowych rurek, w której oszacowano krytyczną wartość adiabatyicznego momentu skręcającego, po przekroczeniu którego na zewnętrznym promieniu skręcanych rurek może wystąpić stan bifurkacji.

Obliczeniowe rezultaty przykładów przedstawiono w postaci wykresów.

2. W pracy podaje się jedynie ogólne ramy teorii sprzężonej uogólnionej termoplastyczności. W dalszych badaniach należy przeprowadzić specyfikację funkcji konstytutywnych w oparciu o przeprowadzone badania doświadczalne. Należy rozpatrzeć problem opisu ruchu postępowego i deformacji powierzchni plastyczności w przestrzeni naprężeń /tzn. opisać wzmocnienie kinematyczne i efekt Bauschingera/.

Dla wyprowadzonego modelu ciała sprężysto-plastycznego przyszłe badania powinny umożliwić wyprowadzenie zasad wariacyjnych i ekstremalnych oraz podanie podstawowych nierówności. Umożliwiłoby to w przyszłości sformułowanie i rozwiązanie konkretnych zagadnień brzegowych dla ciał sprężysto-plastycznych.

Istniejące do tej pory prace (por. np. [39], [53], [60-63]) poświęcone wyprowadzeniu zasad ekstremalnych i wariacyjnych w izotermicznej teorii plastyczności o niestowarzyszonych pracach plastycznego płynięcia stanowią nowy istotnie trwały wkład dla tego kierunku badań naukowych. Natomiast jeżeli chodzi o uogólnioną sprzężoną nieizotermiczną teorię termoplastyczności wydaje się, że problem ten do tej pory nie został rozwiązany i jest nadal otwarty.

3. W przyszłości należałoby także uogólnić ramy przedstawionej w pracy teorii sprzężonej termoplastyczności w celu uwzględnienia efektów geometrycznych związanych z dużymi deformacjami ciała /por. np. [54-59] /.
4. W charakterze użytecznym /aplikacyjnym/ należy poszukiwać rozwiązania konkretnych przykładów i zagadnień występujących w technice, w których można by wykorzystać rezultaty wynikające z zastosowania wyprowadzonych dostatecznych warunków wykluczających możliwość wystąpienia stanu bifurkacji. Należałoby także na przykładzie, pokazać i zinterpretować zauważony w pracy efekt wynikający z przyjęcia postulatu Gyarmatiego /por. p. 4.2/, który do tej pory nie był w literaturze wyspecyfikowany.

LITERATURA

1. B.Raniecki, Zagadnienia stosowanej termoplastyczności, Praca habilitacyjna, Prace IPPT /JFTR-Reports/, 29, 1977.
2. B.Raniecki, An Introduction to the Concepts of applied thermoplasticity, Lectures notes, Material Center, Royal Institute of Technology, Stockholm, April-May 1976.
3. Z.Mróz, B.Raniecki, On the uniqueness problem in coupled thermoplasticity, Int. J. Engn. Sci., 14, 1976, 211-221.
4. Z.Mróz, B.Raniecki, A derivation of the uniqueness conditions in coupled thermoplasticity, Int. J. Engn. Sci., 14, 1976, 395-401.
5. B.Raniecki, Jednoznaczność i zasady wariacyjne w termoplastyczności w tomie "Termoplastyczność", Ossolineum, Wrocław, 1973, 175-222.
6. J.Kestin, Rola termodynamiki w termoplastyczności, w tomie "Termoplastyczność", Ossolineum, Wrocław, 1973, 5-71.
7. J.R.Rice, Inelastic constitutive relations for solids; An Internal - variable theory and its applications to metal plasticity, J. Mech. Phys. Solids, 19, 1971, 433-455.
8. W.Prager, Non-isothermal plastic deformation, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., B 61, 1958, 176-182.
9. P.Perzyna, Internal variables description of plasticity, Problems of Plasticity, Warsaw 1972, ed. A.Sawczuk, Noordhoff International Publishing, Leyden 1974, 145-176.
10. P.Perzyna, Termodynamika Materiałów Niesprężystych, PWN - Warszawa, 1978.
11. O.W.Dillon Jr., A thermodynamic basis of plasticity, Acta Mechanica, 3, 1967, 182-195.
12. B.Raniecki, A.Sawczuk, Thermal effects in Plasticity, Part I: Coupled Theory, ZAMM 55, 6, 1975, 333-341.
13. B.Raniecki, A.Sawczuk, Thermal effects in Plasticity, Part II: Uniqueness and Applications, ZAMM 55, 7/8, 1975, 363-373.

14. J.Gyarmati, Non-equilibrium Thermodynamics, Field Theory and variational Principles, Springer, Berlin, N.Y., 1970.
15. В.В.Зуев, Определяющие соотношения для сред, упругие свойства которых зависят от пластических деформаций и температуры, ДАН - СССР, 1978, Том 238, № 4, 820 - 822.
16. В.В.Зуев, Определяющие соотношения теории пластичности в пространствах деформаций и напряжений, ДАН - СССР, 1978, Том 242, № 4, 792-795.
17. Ю.Кадешевич, В.В.Новожилов, Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения, ПММ, Том 2, в.1, 1958.
18. K.Gumiński, Termodynamika procesów nieodwracalnych, PWN - Warszawa, 1962.
19. S.Wiśniewski, B.Staniszewski, R.Szymanik, Thermodynamics of nonequilibrium processes, PWN - Warsaw and D.Reidel Publ. Comp. Dordrecht Holland, 1976.
20. T.Hueckel and G.Maier, Incremental boundary value problems in the presence of coupling of elastic and plastic deformations: A Rock Mechanics Oriented Theory, Int. J. Solids Structures, 1977, vol. 13, 1-15.
21. T.Hueckel and G.Maier, Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for geotechnical media, Published on the Proc. 9-th JCSMFE, Tokyo, 1977.
22. T.Hueckel, Coupling of elastic and plastic deformations of bulk solids, Meccanica 11, 227-235, 1976.
23. T.Hueckel, Jan. A.König, Some problems in elastoplasticity, Akademia Pollacca Delle Scienze, Conferenze 74, Ossolineum 1979.
24. Y.F.Dafalias, Elasto-plastic coupling within a thermodynamic strain space formulation of plasticity, Int. J. Non-Linear Mechanics, vol. 12, 327-337, Pergamon Press 1977.
25. Y.F.Dafalias, Il'iushin's postulate and resulting thermodynamic conditions on elasto-plastic coupling, Int. J. Solids Structures, 1977, vol. 13, 239-251, Pergamon Press.

26. K.Gumiński, *Termodynamika*, PWN-Warszawa, 1974.
27. H.B.Callen, *Thermodynamics*, Ed. J.Wiley and Sons, N.Y.-London 1960.
28. K.Zalewski, *Wykłady z termodynamiki fonomenologicznej i statystycznej*, Wydanie II, PWN-Warszawa 1969.
29. Л.И.Седов, *Механика сплошной среды*, Том 2, Изд. Наука, Москва, 1970.
30. Z.Mróz, *Non-associated flow laws in plasticity*, *Journal de Mécanique*, vol. II, No 1, Mars 1963.
31. Z.Mróz, *On forms of constitutive laws for elastic-plastic solids*, *Arch. Mech. Stosowanej*, 1, 18, 1966.
32. W.Olszak, P.Perzyna, A.Sawczuk /i inni/. *Teoria plastyczności*, PWN-Warszawa, 1965.
33. Я.А.Каменярж, *О некоторых свойствах уравнений модели связанной термопластичности*, *ПММ*, 36, 6, 1972.
34. B.Raniecki, *Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations*, *Bull. Ac. Polon. Sci., ser. sci. tech.* /w druku/.
35. R.Hill, *A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids*, *J. Mech. Phys. Solids*, 6, 236-249, 1958.
36. R.Hill, *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*, *J. Mech. Phys. Solids*, 1959, vol. 7, 209-225, Pergamon Press.
37. R.Hill, *Uniqueness in general boundary-value problems for elastic or inelastic solids*, *J. Mech. Phys. Solids*, 1961, vol. 9, 114-130, Pergamon Press.
38. R.Hill, *Uniqueness criteria and extremum principles in self-adjoint problems of continuum mechanics*, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 10, 185-194, Pergamon Press, 1962.
39. G.Maier, *A minimum principle for incremental elasto-plasticity with non-associated flow laws*, *J. Mech. Phys. Solids*, 1970, vol. 18, 319-330, Pergamon Press.

40. J.W.Rudnicki, J.R.Rice, Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J.Mech. Phys. Solids*, 1975, vol. 23, 371-394. Pergamon Press.
41. J.R.Rice, The localization of plastic deformation in theoretical and applied mechanics, ed. W.F.Koiter, North-Holland Publ.Co., 1976, 207-220.
42. M.Kamiński, Sprężenie pola odkształceń z polem temperatury w zagadnieniu skręcania cienkościennej rurki, *Rozprawy Inżynierskie*, Tom. 24, zeszyt 1, Warszawa 1976, PWN.
43. J.Litoński, Badanie niestateczności przy plastycznym skręcaniu wykorzystując sprężenie termomechaniczne. Niestateczność lokalna. *Rozprawy Inżynierskie*, Tom 24, 4, Warszawa 1976, PWN.
44. M.J.Manjoine, Influence of rate of strain and temperature on Yield stresses of mild steel, *J. Appl. Mech.*, 11, 1944, 211-218.
45. R.Hill, The mathematical theory of plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.
46. М.А.Большанина, В.Е.Панин, Скрытая энергия деформации, в книге "Исследования по физике твердого тела", Изд. АН СССР, 1957, 194-233.
47. M.B.Bever, D.L.Holt, A.L.Titchener, Stored energy of cold work, *Progress in Material Sciences*, vol. 17, Pergamon Press, 1973.
48. J.F.Bell, The physics of large deformation of Crystalline Solids, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, N.York, 1968.
49. Z.Marciniak, Odkształcenia graniczne przy tłoczeniu blach, WNT-Warszawa, 1971.
50. Н.И.Безухов, В.Л.Баханов, И.И.Гольденблат, Н.А.Николаенко, А.М.Синюков, Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур, Изд. Машиностроение, Москва, 1965.

51. A.Mendelson, Plasticity - theory and applications, N.York 1958, Mc Millan Company.
52. Л.М.Качанов, Основы теории пластичности, Изд. Наука, Москва, 1969.
53. J.J.Telga, Dual extremum principles in rate boundary value problems of non-associated plasticity, Int. J.Engng Sci. vol. 17, 215-226.
54. A.E.Green, P.M.Naghdi, A thermodynamic development of elastic-plastic continua, Proc. JUTAM, Symp. Irreversible Aspects Continuum Mech., 1968, 117-131.
55. E.H.Lee, Elastic-plastic deformation at finite strains, J. Appl. Mech., ASME, March 1969, 1-6.
56. A.E.Green, P.M.Naghdi, Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain, Int. J. Engng Sci. 9, 1971, 1219-1229.
57. Th.Lehmann, Some thermodynamic considerations of phenomenological theory of non-isothermal elastic-plastic deformations, Arch. Mech. Stos. 24, 1972, 975-984.
58. B.Raniecki, K.Thermann, Infinitesimal thermoplasticity and kinematics of finite elastic-plastic deformations. Basic concepts., Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Nr 2, Juni 1978.
59. Th. Lehmann, Some aspects of non-isothermic large inelastic deformations, Solid Mech. Arch. 3, 1978.
60. M.J.I. Sewell, The governing equations and extremum principles of elasticity and plasticity generated from a single functional, Part 1, Struc. Mech., 2, 1-32, 1973.
61. B. Noble and M.I. Sewell, On dual extremum principles in applied mathematics, J. Inst. Math. Appl. 9, 123-193, 1972.
62. W.D.Collins, Dual extremum principles for dissipative systems, University of Wisconsin, Mathematics Research Center, Report 1624, 1976.
63. J.J.Telega, Variational Principles for rate boundary value problems in non-associated plasticity, ZAMM, 60, 2, 71-82, 1980.

DODATEK A

Procedura wyprowadzania poniższych warunków jest wzorowana na [3], [5].

I. Aby wyprowadzić warunek $H > 0$ /problem b_2 / założmy w pierwszym rzędzie, że dla zadanych wartości prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}$ i $\text{div } q$ ma miejsce proces aktywnego obciążenia plastycznego $(\dot{\epsilon}^p \neq 0)^p$ i oznaczymy przez $\Lambda^{(p)}$ i $\dot{T}^{(p)}$ odpowiednie wartości Λ i T . Wówczas układ równań algebraicznych dla $\Lambda^{(p)}$ i $\dot{T}^{(p)}$ można otrzymać podstawiając wyrażenia /3.29/2, /2.7/ i /4.2/ do warunku "stowarzyszenia" /4.6/ i równania /3.29/1. Mamy więc

$$\left(\frac{p}{T} - \gamma_{21}^* \alpha \cdot M \frac{p}{\sigma} \right) \dot{T}^{(p)} - \left(h + g_4 \cdot M \frac{p}{\sigma} \right) \Lambda^{(p)} = - \frac{p}{\sigma} \cdot M \dot{\epsilon} \quad /A.1/$$

$$\dot{T}^{(p)} - \frac{1}{\rho} \left(m_{\sigma} + \gamma_{12}^* \bar{\gamma} \alpha \cdot M \frac{p}{\sigma} \right) \Lambda^{(p)} = - \gamma_{12}^* \frac{\bar{\gamma}}{\rho} \alpha \cdot M \dot{\epsilon} - \frac{q}{\rho}$$

gdzie przy wyprowadzaniu /A.1/2 skorzystano z następujących zależności

$$m_{\sigma} = m_{\epsilon} + \gamma_3 \gamma_{12}^* \gamma_{23}^* \bar{\gamma} \alpha \cdot (N \sigma d) \quad , \quad q = \frac{1}{\rho_0 C_{\sigma}} \text{div } q \quad /A.2/$$

$$m_{\epsilon} = \frac{1}{\rho_0 C_{\sigma}} \left[\gamma_2 \left(\sigma \cdot \frac{p}{\sigma} - \pi \cdot d \right) - \gamma_{3T} \frac{\partial \pi(\gamma_{\kappa}^{\text{TE}})}{\partial T} \cdot d \right]$$

Układ równań algebraicznych /A.1/ ma jednoznaczne rozwiązanie w postaci

$$H \Lambda^{(p)} = \frac{p}{\sigma} \cdot M \dot{\epsilon} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{p}{T} - \gamma_{21}^* \alpha \cdot M \frac{p}{\sigma} \right) \left(\gamma_{12}^* \bar{\gamma} \alpha \cdot M \dot{\epsilon} + q \right) \quad /A.3/$$

$$H \dot{T}^{(p)} = \frac{1}{\rho} \left(m_{\sigma} + \gamma_{12}^* \bar{\gamma} \alpha \cdot M \frac{p}{\sigma} \right) \left(\frac{p}{\sigma} \cdot M \dot{\epsilon} \right) - \frac{h + g_4 \cdot M \frac{p}{\sigma}}{\rho} \left(\gamma_{12}^* \bar{\gamma} \alpha \cdot M \frac{p}{\sigma} + q \right)$$

pod warunkiem, że spełniony jest warunek $H \neq 0$. Teraz, z kolei założymy, że dla zadanych wartości $\dot{\mathbf{E}}$ i $\text{div } \mathbf{q}$ zachodzi proces odciążenia ($\dot{\mathbf{E}}^p = 0$). Oznaczmy przez $\dot{T}^{(e)}$ i $\dot{\mathbf{S}}^{(e)}$ odpowiednie wartości dla \dot{T} i $\dot{\mathbf{S}}$ dla tego procesu. Z równań /3.29/ otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{T}^{(e)} &= \frac{1}{\rho} \left(\gamma_{12}^* \int \alpha \cdot M \dot{\mathbf{E}} + q \right) \\ \dot{\mathbf{S}}^{(e)} &= M \dot{\mathbf{E}} + \frac{\gamma_{21}^*}{\rho} \left(\gamma_{12}^* \int \alpha \cdot M \dot{\mathbf{E}} + q \right) / M \alpha \end{aligned} \quad /A.4/$$

Korzystając z równań /A.3/ i /A.4/ można ustalić następujący związek pomiędzy $L^{(e)} = \int_V \dot{\mathbf{S}}^{(e)} + \int_T \dot{T}$ i $\Lambda^{(p)}$ jako

$$H \Lambda^{(p)} = L^{(e)} \quad /A.5/$$

Zgodnie z przyjętym kryterium odciążenia, o którym stanowi ujemny znak wyrażenia $L^{(e)}$, jako związek ustalamy ($\text{sign } \Lambda^{(p)} = \text{sign } L^{(e)}$). Związek ten zapewnia jednoznaczne istnienie $\dot{\mathbf{S}}$, wówczas z /A.5/ otrzymamy, że

$$H > 0 \quad /A.6/$$

II. Procedura wyprowadzenia warunku $h_1 > 0$ /problem b_1 / jest analogiczna do zagadnienia pierwszego z tym, że w tym wypadku wygodniej jest posługiwać się równaniami /3.28/.

Interesują nas jedynie te punkty ciała, w których $f = 0$.

Wielkości $\Lambda^{(p)}$, $\dot{T}^{(p)}$ i $\dot{T}^{(e)}$ są tym razem funkcjami $\dot{\mathbf{S}}$.

Założmy, że dla danych wartości $\dot{\mathbf{S}}$ i $\text{div } \mathbf{q}$ zachodzi proces obciążenia ($\dot{\mathbf{E}}^p \neq 0$). Z /2.7/, /3.28/₁, /3.28/₂ i /4.2/ otrzymamy

$$f_T \dot{T}^{(p)} - h_1 \Lambda^{(p)} = - \int_V \dot{\mathbf{S}} \quad /A.7/$$

$$\dot{T}^{(p)} - m_5 \Lambda^{(p)} = - \gamma_{12} \int \alpha \cdot \dot{\mathbf{S}} - q$$

Alternatywny układ równań algebraicznych /A.7/ ma jednoznaczne rozwiązanie postaci

$$\begin{aligned} h_1 \Lambda^{(p)} &= f \cdot \dot{\sigma} - \gamma_{12} f_T \xi \alpha \cdot \dot{\sigma} - q f_T \\ h_1 \dot{T}^{(p)} &= m_{\sigma} f_{\sigma} \dot{\sigma} - \gamma_{12} h \xi \alpha \cdot \dot{\sigma} - h q \end{aligned} \quad /A.8/$$

pod warunkiem, że

$$h_1 = h - m_{\sigma} f_T \neq 0$$

Załóżmy teraz, że dla danych $\dot{\sigma}$ i $\text{div} q$ zachodzi proces odciążenia ($\dot{\epsilon}^p = 0$), to bezpośrednio z /3.28/₁ otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{T}^{(e)} &= -\gamma_{12} \xi \alpha \cdot \dot{\sigma} - q \\ \dot{\epsilon}^{(e)} &= L \dot{\sigma} - \gamma_{21} \left(\gamma_{12} \xi \alpha \cdot \dot{\sigma} - q \right) \alpha \\ \dot{\epsilon} &= \dot{\epsilon}^{(e)} \end{aligned} \quad /A.9/$$

Obliczając $L^{(e)} = f_{\sigma} \dot{\sigma} + f_T \dot{T}^{(e)}$ z łatwością spostrzegamy, że

$$h_1 \Lambda^{(p)} = L^{(e)} \quad /A.10/$$

Stąd otrzymujemy poszukiwany warunek

$$h_1 > 0 \quad /A.11/$$

DODATEK B

Wyprowadzenie dostatecznego lokalnego warunku jednoznaczności rozwiązania przyrostowego problemu brzegowego wszerowano na metodzie podanej w pracy [3], [4] i [34].

Założmy, że istnieją dwa zbiory funkcji $\{\bar{\sigma}, \dot{\epsilon}, \dot{u}, \dot{t}\}$ i $\{\bar{\sigma}^*, \dot{\epsilon}^*, \dot{u}^*, \dot{t}^*\}$, które są rozwiązaniami przyrostowego /prędkościowego/ problemu brzegowego. Należy wyprowadzić warunek, przy spełnieniu którego $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^*$ a funkcje $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^*$, $\dot{t} = \dot{t}^*$ otrzyma się jednoznacznie z /6.8/₁ i /6.8/₂.

Spełnienie tego warunku implikuje $h_1 > 0$.

Stosując Tw. Gaussa - Ostrogradskiego, mamy

$$\int_D (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^*) \cdot (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^*) dV = 0 \quad /B.1/$$

Według /6.8/₁, $\dot{\epsilon}$ i $\dot{\epsilon}^*$ są funkcjami $\bar{\sigma}$ i $\bar{\sigma}^*$ odpowiednio.

Oznaczmy funkcję podcałkową wyrażenia /B.1/, przez

$$I(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^*, j, j^*) = \Delta \bar{\sigma} \cdot \Delta \dot{\epsilon} \quad /B.2/$$

gdzie $\Delta \bar{\sigma} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}^*$; $\Delta \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^*$

oraz $j = j(\bar{\sigma})$ i $j^* = j(\bar{\sigma}^*)$ są określone przez /6.9/.

Należy wobec powyższego wyznaczyć warunek taki, przy spełnieniu którego I jest funkcją dodatnio - określoną /tzn. $I > 0$ dla $\bar{\sigma} \neq \bar{\sigma}^*$ i $I = 0$ dla $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^*$ /.

Zauważmy, że równanie /6.8/ można napisać w następującej postaci

$$\dot{\epsilon} = L_1 \bar{\sigma} + \frac{j}{h_1} g(\bar{f}_\sigma \cdot \bar{\sigma} + Z_1) + d_1 \quad /B.3/$$

gdzie

$$g = \left(f_{1,6} + \gamma_{23} Z^0 d + \gamma_{21} m_6 \alpha \right)$$

$$\bar{f}_6 = \left(f_6 - \gamma_{12} \bar{f}_T \alpha \right), \quad d_1 = -\gamma_{21} q \alpha \quad /B.4/$$

$$Z_1 = -q \bar{f}_T, \quad L_1 = L^{(a)}, \quad M_1 = M^{(a)}$$

/a/. Niech $j = j^* = 1$

Podstawiając /B.3/ do /B.2/, otrzymamy

$$I(\dot{\sigma}, \dot{\sigma}^*, 1, 1) = I_1 = \Delta \dot{\sigma} \cdot L_1 \Delta \dot{\sigma} + \frac{1}{h_1} \left[(g \cdot \Delta \dot{\sigma}) \left(\frac{\bar{f}_6 \cdot \Delta \dot{\sigma}}{f_6} \right) \right] /B.5/$$

Teraz, rozłożmy wektor $\Delta \dot{\sigma}$ w kierunku $M_1 g$, $M_1 \bar{f}_6$ i kierunku t prostopadłym do obu poprzednich kierunków odpowiednio w 9-cio wymiarowej przestrzeni z metryką L_1 .

Obliczając iloczyn $(\Delta \dot{\sigma} \cdot L_1 \Delta \dot{\sigma})$, wówczas wyrażenie na I_1 przyjmie następującą formę

$$I_1 = \begin{cases} t \cdot L_1 t + \frac{1}{h_1(1-m_{gf}^2)} \left[A \left(\frac{\bar{f}_6 \cdot \Delta \dot{\sigma}}{f_6} \right)^2 + 2B \left(\frac{\bar{f}_6 \cdot \Delta \dot{\sigma}}{f_6} \right) (g \cdot \Delta \dot{\sigma}) + C (g \cdot \Delta \dot{\sigma})^2 \right] & \text{jeżeli } m_{gf}^2 < 1 \\ t \cdot L_1 t + \frac{A_0}{M_f^2 h_1} \left(\frac{\bar{f}_6 \cdot \Delta \dot{\sigma}}{f_6} \right)^2 & \text{jeżeli } m_{gf}^2 = 1 \end{cases} /B.6/$$

gdzie

$$t = \Delta \dot{\delta} - \frac{1}{1 - m_{gf}^2} \left[\frac{1}{M_f^2} (\bar{f}_\delta \cdot \Delta \dot{\delta}) - \frac{m_{gf}}{M_f M_g} (g \cdot \Delta \dot{\delta}) M_1 \bar{f}_\delta \right] \\ + \frac{1}{1 - m_{gf}^2} \left[\frac{1}{M_g^2} (g \cdot \Delta \dot{\delta}) - \frac{m_{gf}}{M_g M_f} (\bar{f}_\delta \cdot \Delta \dot{\delta}) M_1 \bar{f}_\delta \right] \\ \text{jeżeli } m_{gf}^2 < 1$$

$$t = \Delta \dot{\delta} - \frac{\bar{f}_\delta \cdot \Delta \dot{\delta}}{M_f^2} M_1 \bar{f}_\delta \quad \text{jeżeli } m_{gf}^2 = 1$$

oraz

$$M_f^2 = \bar{f}_\delta \cdot M_1 \bar{f}_\delta \quad ; \quad M_g^2 = g \cdot M_1 g \quad ; \quad m_{gf} = \frac{g \cdot M_1 \bar{f}_\delta}{M_f M_g}$$

$$A = \frac{h_1}{M_f^2} \quad \text{/B.7/}$$

$$B = \frac{1}{2} (1 - m_{gf}^2) - \frac{m_{gf}}{M_f M_g} h_1 \quad ; \quad C = \frac{h_1}{M_g^2}$$

$$A_0 = h_1 + M_f^2 + m_{gf} M_f M_g$$

Ponieważ $h_1 > 0$, wówczas I_1 /B.6/ jest formą kwadratową symetryczną, która jest dodatnio określona gdy

$$A \cdot C - B^2 > 0 \quad \text{/B.8/}$$

Uwzględniając /B.7/ w /B.8/, otrzymamy analogicznie

$$a_1 h_1^2 + b_1 h_1 + c_1 > 0$$

gdzie

$$a_1 = 1$$

/B.9/

$$b_1 = m_{gf} M_f M_g$$

$$c_1 = - \left(1 - m_{gf}^2 \right) \frac{M_f^2 M_g^2}{4}$$

Rozwiązując powyższą nierówność, otrzymamy poszukiwany warunek jako

$$h_1 > \frac{1}{2} M_g M_f \left(1 - m_{gf} \right)$$

/B.10/

Po uwzględnieniu /B.7/ w powyższym wyrażeniu bez trudu otrzymamy poszukiwany warunek /B.1/.

Dodajmy, że w przypadku $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$ warunek /B.10/ lub /B.1/ przybiera następującą postać

$$h_1 > 0$$

/B.11/

/b/. Niech $j = 1$, $j^* = 0$

Wówczas

$$I(\dot{\sigma}, \dot{\sigma}^*, 1, 0) = I_2 = \Delta \dot{\sigma} \cdot L_1 \Delta \dot{\sigma} + \frac{1}{h_1} \left(g \cdot \Delta \dot{\sigma} \right) \left[\bar{p} \cdot \dot{\sigma} + Z_1 \right] /B.12/$$

Badanie dodatniej określoności wyrażenia /B.12/, przeprowadzimy następująco. Niechaj g będzie rozłożone na kierunek \bar{f}_δ i β w sposób następujący

$$g = C\bar{f}_\delta + \beta \quad /B.13/$$

gdzie C jest stałą parametryczną służącą do optymalizacji warunku jednoznaczności w przypadku gdy jednocześnie następuje obciążanie i odciążanie /b/ i /c/. Wówczas z /B.4/_{1,2}, /B.13/, będzie

$$\beta = \bar{f}_\delta / (1-C) + (\gamma_{21} m_\delta + C \gamma_{12} \bar{f}_\delta) \alpha + Z^0 (\gamma_{13} f_{4,n} + \gamma_{23} d) /B.14/$$

Należy doprowadzić /B.12/ do wyrażenia będącego formą kwadratową. Oszacujmy więc I_2 następująco

$$I_2 \geq I'_2 = \Delta \bar{\delta} \cdot L_1 \Delta \bar{\delta} + \frac{1}{h_1} [C \bar{A}_\delta^2 + \bar{A}_\delta (\beta \cdot \Delta \bar{\delta})] /B.15/$$

gdzie

$$I_2 = I'_2 - \frac{C}{h_1} \bar{A}_\delta \bar{A}_\delta^* \quad /B.16/$$

oraz

$$\bar{A}_\delta = \bar{f}_\delta \cdot \bar{\delta} + Z_1 \geq 0, \quad \bar{A}_\delta^* = \bar{f}_\delta \cdot \bar{\delta}^* + Z_1 < 0$$

Podobnie jak poprzednio, rozłożmy wektor $\Delta \bar{\delta}$ na kierunek $M_1 \beta$ i kierunek t_1 prostopadły do $M_1 \beta$ w 9-cio wymiarowej przestrzeni z metryką L_1 . Podstawiając tak otrzymany rezultat w /B.15/, otrzymamy

$$I'_2 = t_1 \cdot L_1 t_1 + \frac{1}{h_1} [\bar{A}_1 (\beta \cdot \Delta \bar{\delta})^2 + 2 \bar{B}_1 \bar{A}_\delta (\beta \cdot \Delta \bar{\delta}) + \bar{C}_1 \bar{A}_\delta^2] /B.17/$$

gdzie

$$t_1 = \Delta \bar{\delta} - \frac{\beta \cdot \Delta \bar{\delta}}{M_\beta^2} M_{1\beta}$$

/B.18/

$$M_\beta^2 = \beta \cdot M_{1\beta}$$

$$\bar{A}_1 = \frac{h_1}{M_\beta^2}, \quad \bar{B}_1 = \frac{1}{2}, \quad \bar{C}_1 = C$$

Wyrażenie /B.17/ jest formą kwadratową dodatnio określoną gdy

$$\bar{A}_1 \bar{C}_1 - \bar{B}_1^2 > 0 \quad /B.19/$$

Po uwzględnieniu /B.18/ w /B.19/, otrzymamy

$$h_1 > \frac{M_\beta^2}{4C} \quad /B.20/$$

Postać /B.20/ pokazuje, że mamy rodzinę jednoparametrową warunków jednoznaczności ze względu na parametr C .

Wyznaczyć chcemy warunek minimum ze względu na C aby możliwie najbliższej szacować stany bifurkacji.

Uwzględniając w /B.20/ wyrażenie /B.13/, otrzymamy

$$h_1 > \frac{1}{4C} \left[(g - C \bar{f}_\delta) \cdot M_1 (g - C \bar{f}_\delta) \right] = \frac{1}{4C} \left[M_g^2 - 2C M_{g\bar{f}_\delta} + C^2 M_{\bar{f}_\delta}^2 \right] /B.21/$$

gdzie

$$M_{g\bar{f}_\delta} = g \cdot M_1 \bar{f}_\delta = \bar{f}_\delta \cdot M_1 g$$

Prawa część wyrażenia /B.21/ powinna więc osiągać minimum ze względu na parametr skalarny C . Niech,

$$F(C) = \frac{1}{4} \left(\frac{M_g^2}{C} - 2 M_{g\bar{f}_\delta} + C M_{\bar{f}_\delta}^2 \right) \quad /B.22/$$

wówczas

$$\frac{\partial F(c)}{\partial c} = 0 \quad /B.23/$$

Z warunku /B.23/ otrzymamy, że

$$C^0 = \frac{M_g}{M_f}, \quad F(C^0) = F^0, \quad C > 0 \quad /B.24/$$

Podstawiając wyrażenie /B.24/, do nierówności /B.21/ po przekształceniach otrzymamy

$$h_1 > \frac{1}{2} (M_g M_f - M_{gf}) \quad /B.25/$$

Uwzględniając w powyższym wyrażeniu oznaczenia /B.7/ bez trudu otrzymamy poszukiwaną nierówność /8.1/.

Można pokazać, że drugi człon w wyrażeniu /B.17/ jest równy zero, gdy

$$\bar{A}_1 (\beta \cdot \Delta \bar{\sigma}) = - \bar{B}_1 \bar{A}_5 \quad /B.26/$$

Stąd $I_2 = I_2'$ gdy $\bar{A}_5 = 0$. Wtedy z /B.16/ - /B.26/ wynika, że

$$I_2 > 0$$

/c/. Niech $j=0$, $j^*=1$

Procedura dowodu, że $I(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}^*, 0, 1) = I_3 > 0$ jest analogiczna jak dla przypadku /b/. Mamy więc

$$I_3' = I_3 + \frac{c}{h_1} \bar{A}_5 \bar{A}_5^* \quad /B.27/$$

$$\bar{A}_5 = \int_{\bar{f}_6} \bar{\sigma} + Z_1 < 0, \quad \bar{A}_5^* = \int_{\bar{f}_6} \bar{\sigma}^* + Z_1 \geq 0$$

Stąd

$$I'_3 \geq I_3 = t_1 \cdot L_1 t_1 + \frac{1}{h_1} \left[\bar{A}_1 (\beta \cdot \Delta \dot{\sigma})^2 - 2 \bar{B}_1 \bar{A}_1 \beta (\beta \cdot \Delta \dot{\sigma}) + \bar{C}_1 (A_1^*)^2 \right] \quad /B.28/$$

gdzie t_1 , \bar{A}_1 , \bar{B}_1 i \bar{C}_1 są określone w /B.18/.

Stąd analogicznie jak w przypadku /b/ wynika, że $I_3 > 0$

/d/. Niech $j = j^* = 0$

Wówczas wyrażenie podcałkowe

$$I(\dot{\sigma}, \dot{\sigma}^*, 0, 0) = I_4 = \Delta \dot{\sigma} \cdot L_1 \Delta \dot{\sigma} \quad /B.29/$$

jest dodatnio określone ponieważ $L_1 = L^{(a)}$ jest dodatnio -
określone.

Wówczas z /B.1/ bezpośrednio wynika, że $\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^*$.

DODATEK C

Pokażemy teraz, że J' jest dodatnio określone jeżeli /8.1/ jest spełnione. Ten fakt stwierdza, że dostateczny lokalny warunek jednoznaczności jest taki sam dla funkcji podcałkowej J' jak i dla ciała sprężysto-plastycznego J . Jest to również pewne kryterium pozwalające potwierdzić słuszność wprowadzenia takiego wyrażenia J' .

Oznaczmy

$$\left(g^* + x^2 \bar{f}_\theta^* \right) = M_1 W \quad /C.1/$$

Z /8.6/ i /C.1/ wynika, że

$$M_1 W = \tilde{\varphi}_E (M\alpha) - N_2 + B(1 + x^2) \quad /C.2/$$

oraz

$$W = \tilde{\varphi}_E L_1 (M\alpha) - L_1 N_2 + L_1 B(1 + x^2)$$

Podstawiając /C.1/ do /8.7/, otrzymamy

$$J' = \Delta \dot{E} \cdot M_1 \Delta \dot{E} - \frac{1}{4x^2 H_1} \left[(M_1 W) \cdot \Delta \dot{E} \right] \quad /C.3/$$

Rozkładając $\Delta \dot{E}$ na kierunek W i kierunek \dot{t}^* prostopadły do W w 9-cio wymiarowej przestrzeni z metryką M_1 otrzymamy następujące wyrażenia:

$$\dot{t}^* = \Delta \dot{E} - \frac{\Delta \dot{E} \cdot (M_1 W)}{M_W^2} \quad /C.4/$$

gdzie

$$M_W^2 = W \cdot M_1 W$$

Wówczas

$$J' = t^* \cdot M_1 t^* + \frac{1}{(4x^2 H_1) M_W^2} \left(4x^2 H_1 - M_W^2 \right) \left(\Delta \dot{E} \cdot M_1 W \right)^2 \quad /C.5/$$

Z /C.5/ wynika, że J' jest dodatnio określone gdy

$$H_1 > \frac{1}{4x^2} \left(W \cdot M_1 W \right) \quad /C.6/$$

Należy obecnie przeprowadzić procedurę optymalizacji warunku /C.6/ żeby osiągał on minimum względem parametru x^2 .

Warunek /C.6/ przedstawia więc sobą rodzinę jednoparametrową warunków jednoznaczności dla ciała porównawczego.

Niech

$$y = x^2 \quad \text{stad} \quad y > 0$$

$$\mathcal{P}(y) = \frac{1}{y} \left(W \cdot M_1 W \right) \quad /C.7/$$

Uwzględniając /C.7/, w wyrażeniu /C.2/ i obliczając pochodną otrzymamy

$$\frac{\partial \mathcal{P}(y)}{\partial y} = 0$$

więc

$$\frac{\partial \mathcal{P}(y)}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \left(W \cdot M_1 W \right) + \frac{2}{y} \left(W \cdot M_1 L_1 B \right) = 0 \quad /C.8/$$

stad

$$2y \left(W \cdot B \right) = \left(W \cdot M_1 W \right)$$

Wyrażenie /C.8/₃ wynika z warunku na ekstremum funkcji $P(y)$ w zależności od skalarnego parametru y .

Należy przekształcić wyrażenie /C.8/₃ do poszukiwanego rezultatu po uwzględnieniu wyrażań na W /por. /C.2/₁/.

Przekształćmy wyrażenie /C.2/₂ do postaci następującej

$$W = W_1 + x^2 L_1 B \quad /C.9/$$

gdzie

$$W_1 = \int_{\tilde{g}}^{\tilde{g}} L_1(M\alpha) - L_1 N_2 + L_1 B$$

Podstawiając /C.9/ do wyrażenia /C.8/, po przekształceniach otrzymamy

$$y_0 = x_0^2 = \sqrt{\frac{g^* L_1 g^*}{\bar{f}_0^* \cdot L_1 \bar{f}_0^*}} \quad /C.10/$$

gdzie g^* i \bar{f}_0^* określone są związkami /8.6/₁ i /8.6/₂ odpowiednio.

Bez trudu można pokazać, że podstawiając /C.10/ do /C.6/ i uwzględniając /8.6/_{1,2} z /C.9/, otrzymamy po przekształceniu następujące

$$H > \frac{1}{2} \left[\sqrt{(W_1 \cdot M_1 W_1) (B \cdot L_1 B)} + W_1 \cdot B \right] \quad /C.11/$$

Można pokazać, że zachodzą następujące równości

$$W_1 = g \quad , \quad B = M_1 \bar{f}_0 \quad /C.12/$$

Wówczas z /6.3/, /6.4/, /8.2/ i /C.12/ wynika

$$H = h_1 + g \cdot M_1 \bar{f}_0 \quad /C.13/$$

Uwzględniając /C.12/ i /C.13/ w wyrażeniu /C.11/ po przekształceniu bez trudności otrzymuje się warunek /8.1/, co kończy dowód.

SPIS TREŚCI

WSTĘP	3
ROZDZIAŁ I - PODSTAWOWE RÓWNANIA SPRĘŻONEJ UOGÓLNI- NEJ TERMOPLASTYCZNOŚCI	9
1. Wstęp	9
2. Podstawowe założenia. Równanie Gibbsa i źródło entropii	10
3. Dyskusja termodynamicznych własności ciał sprężysto- plastycznych	12
4. Równania prędkościowe	22
4.1. Ogólna postać równań prędkościowych	22
4.2. Szczególna postać równań prędkościowych wy- nikająca z postulatu Gyarmatiego	24
ROZDZIAŁ II - JEDNOZNACZNOŚĆ	27
5. Wstęp	27
6. Jednoznaczność rozwiązania przyrostowych problemów brzegowych dla procesów jednorodnych	28
7. Sformułowanie przyrostowego problemu brzegowego	34
8. Omówienie warunków jednoznaczności	36
8.1. Warunek lokalny jednoznaczności	37
8.2. Globalny warunek i globalne kryterium jedno- znaczności	38
9. Przypadki szczególne lokalnego warunku jednoznacz- ności	43
ROZDZIAŁ III - PRZYKŁADY SZACOWANIA STANU BIFURKACJI ..	47
10. Wstęp	47
11. Porównanie lokalnego warunku jednoznaczności z warunkiem na lokalizację deformacji Rice'a - Rudnickiego	48
12. Wzmocnienie izotropowe. Problem czystego ścinania ..	56
12.1. Model ciała z izotropowym wzmocnieniem	56
12.2. Uproszczony warunek lokalny jednoznaczności	58

12.3. Krytyczne naprężenie w próbie na proste rozciąganie /czyste ścinanie/ dla niektórych stali nierdzewnych	59)
13. Skręcanie	62
13.1. Adiabatyiczne skręcanie grubościennnej rurki	62
13.2. Adiabatyiczne skręcanie cienikościennnej rurki	75
UWAGI KOŃCOWE	77
LITERATURA	79
DODATEK A	84
DODATEK B	87
DODATEK C	95