NAUKA I METODA

Tegoż autora poprzednio wydane dzieła:

NAUKA I HYPOTEZA. Przekład M. M. Horwitza.
WARTOŚĆ NAUKI. Przekład Ludw. Silbersteina.

H. POINCARÉ

PROF. SORBONY, CZŁONEK AKADEMJI

Nauka i Metoda

PRZEKŁAD M. H. HORWITZA

NAKŁAD JAKÓBA MORTKOWICZA.
WARSZAWA 1911 - G. CENTNERSZWER I SKA.
LWÓW: KSIĘGARNIA H. ALTENBERGA.

ODBITO W DRUKARNI NARODOWEJ W KRAKOWIE.

WSTĘP.

Zebrałem tutaj rozmaite studja, ściągające się mniej lub bardziej bezpośrednio do zagadnień metodologji naukowej. Metoda naukowa polega na obserwowaniu i eksperymentowaniu; gdyby badacz rozporządzał nieskończonym czasem, wystarczyłoby powiedzieć mu: »Patrz, a patrz dobrze«; ponieważ przecież nie ma on czasu patrzeć na wszystko, a zwłaszcza patrzeć dobrze na wszystko, musi on przeprowadzić pewien wybór. Pierwszym tedy pytaniem jest, jak dokonać tego wyboru. Pytanie to staje przed fizykiem równie dobrze jak przed historykiem; nasuwa się ono i matematykowi, a zasady, któremi muszą się kierować jedni i drudzy, nie są pozbawione analogji. Badacz stosuje się do nich instynktownie, a przez rozmyślanie nad temi zasadami można przewidzieć przyszłość matematyki.

Lepiej jeszcze zorjentujemy się w tym, obserwując uczonego przy robocie — należy tedy przedewszystkim poznać mechanizm psychologiczny twórczości, zwłaszcza twórczości matematycznej. Obserwacja metod pracy matematyka jest szczególnie pouczająca dla psychologa.

We wszystkich naukach obserwacyjnych trzeba się liczyć z błędami, wynikającemi z niedoskonałości naszych zmysłów i naszych narzędzi. Na szczęście można przypuścić, że w pewnych warunkach błędy te częściowo wzajemnie się znoszą, tak, iż znikają w wywodach średnich; kompensacja ta jest dziełem przypadku. Ale czymże jest przypadek? Trudno jest pojęcie to usprawiedliwić a nawet określić; a przecież to, co powiedziałem o błędach obserwacji, dowodzi, że badacz naukowy nie może się bez tego pojęcia obejść. Konieczne jest przeto danie możliwie ścisłej definicji tego tak niezbędnego a tak nieuchwytnego pojęcia.

Są to rzeczy ogólne, które właściwie stosują się do wszystkich nauk; mechanizm twórczości matematycznej n. p. nie różni się w swej istocie od mechanizmu twórczości wogóle. Przechodzę następnie do kwestji, ściągających się szczególniej do pewnych nauk specjalnych, przedewszystkim do matematyki.

W poświęconych jej rozdziałach zmuszony jestem traktować przedmioty nieco bardziej oderwane. Nasamprzód mówię o pojęciu przestrzeni; powszechnie wiadomo, że przestrzeń jest względna, a raczej powszechnie się to mówi, lecz ileż osób myśli jeszcze tak, jakgdyby uważały ją za absolutną; a przecież nieco refleksji starczy, by spostrzec, na jakie to je naraża sprzeczności.

Kwestje, związane z nauczaniem, mają swoją wagę, naprzód same przez się, powtóre zaś i dlatego, że rozmyślanie nad najlepszym sposobem wprowadzania nowych pojęć do dziewiczych umysłów jest zarazem rozmyślaniem nad sposobem, w jaki pojęcia te zdobywali nasi przodkowie, a przeto nad ich prawdziwym pochodzeniem, czyli, w gruncie rzeczy, nad ich prawdziwą naturą. Dlaczego dzieci najczęściej nic nie rozumieją z definicji, które zadawalają uczonych? Dlaczego trzeba im dawać inne definicje? Pytanie to zadaję sobie w rozdziale następnym; sądzę, że jego rozwiązanie mogłoby poddać użyteczne myśli filozofom, którzy zajmują się logiką nauk.

Z drugiej strony wielu matematyków mniema, że matematykę można sprowadzić do reguł logiki formalnej. Podjęto w tym kierunku olbrzymie wysiłki; nie cofnięto się, aby tego dopiąć, przed odwróceniem historycznego porządku gienezy naszych pojęć, i próbowano wytłumaczyć skończoność przez nieskończoność. Myślę, że mi się powiodło okazać wszystkim, którzy przystępują do tej kwestji bez uprzedzenia, że jestto zwodnicze złudzenie. Liczę na to, że czytelnik zrozumie wagę kwestji i przebaczy mi suchość stronic, jakie musiałem jej poświęcić.

Ostatnie rozdziały, dotyczące mechaniki i astronomji, łatwiej się będą czytały.

Mechanika zdaje się znajdować w okresie zupełnego przewrotu. Zuchwali nowatorzy rozbijają w drzazgi pojęcia, które się zdawały najmocniej ugruntowane. Przedwczesnym niewątpliwie byłoby przyznawać im słuszność dlatego tylko, że są nowatorami. Trzeba jednakże znać ich poglądy, starałem się przeto je wyłożyć. Trzymałem się możliwie najbliżej porządku historycznego; gdyż nowe zapatrywania wydawałyby się nazbyt dziwne, gdyby się nie widziało, jak one powstawały.

Astronomja odsłania przed nami potężne widowiska i podnosi olbrzymie zagadnienia. Niepodobna zastosować do nich wprost metody doświadczalnej; laboratorja nasze są zbyt małe. Lecz analogja ze zjawiskami, do których laboratorja te pozwalają dotrzeć, może być astronomowi przewodnikiem. Droga Mleczna n. p. jest zbiorowiskiem słońc, których ruchy rządzą się napozór jedynie kaprysem. Wszelako zbiorowisko to można przyrównać do zbiorowiska cząsteczek gazu, którego własności poznaliśmy przez teorję kinetyczną gazów. I w ten sposób metoda fizyka wspomaga, na okólnej drodze, astronoma.

Wreszcie zamierzyłem nakreślić w kilku wierszach historję rozwoju gieodezji francuskiej; opowiedziałem, za cenę jakich wytrwałych wysiłków i często jakich niebezpieczeństw gieodeci dali nam te trochę wiadomości, jakie posiadamy o kształcie ziemi. Czyż jestto kwestja metody? Zapewne, albowiem historja ta nas uczy, z jaką ostrożnością należy przeprowadzać poważne badania naukowe, i ile trzeba czasu i mozołu, by zdobyć jeden znak dziesiętny więcej.

KSIĘGA PIERWSZA.

BADACZ A NAUKA.

Rozdział I.

Wybór faktów.

Tołstoj tłumaczy w jednej ze swoich książek, dlaczego »Nauka dla Nauki« jest jego zdaniem koncepcją niedorzeczną. Nie możemy poznać wszystkich faktów, gdyż ilość ich jest z punktu widzenia praktycznego nieskończoną. Trzeba tedy wybierać; skoro tak, to czyż przy wyborze tym mielibyśmy poprostu ulegać kaprysowi naszej ciekawości; czy nie lepiej jest kierować się użytecznością, naszemi potrzebami praktycznemi a zwłaszcza moralnemi; czy nie mamy nic lepszego do roboty, jak rachowanie liczby robaczków, istniejących na naszej planecie?

Jasne jest, że wyraz użyteczność nie ma dla Tołstoja tego samego znaczenia, jakie weń wkładają ludzie interesu i, w ślad za niemi, większość naszych współczesnych. Dba on mało o zastosowania przemysłowe, o cuda elektryczności, lub automobilizmu, które uważa raczej za przeszkody do postępu moralnego; użytecznym jest to tylko, co może człowieka uczynić lepszym.

Co do mnie, to zbytecznym niemal jest stwierdzenie, że nie zadawala mnie żaden z tych dwu ideałów; nie jestem spragniony ani tej plutokracji chciwej i ograniczonej, ani tej demokracji cnotliwej i miernej, gdzie jedyną troską byłoby nadstawianie lewego policzka, i gdzie żyliby mędrcy, wyzuci z ciekawości, którzy unikając wszelkich nadużyć, nie umarliby z choroby, ale z całą pewnością umarliby z nudy. Ale jestto ostatecznie kwestją smaku, i nie nad tym chcę się zastanawiać.

Samo zagadnienie istnieje wszelako, i musi skupić na sobie naszą uwagę; jeżeli o wyborze naszym może stanowić jedynie kaprys lub bezpośrednia użyteczność, tedy nie może istnieć nauka dla nauki, ani tym samym nauka wogóle. Czyż tak jest? Niema wątpliwości, że trzeba dokonać wyboru; jakkolwiek prędkobyśmy się uwijali, zjawiska postępują po sobie szybciej, i nie potrafilibyśmy za niemi nadążyć; podczas gdy badacz odkrywa fakt, miljardy miljardów faktów powstają w sześciennym milimetrze jego ciała. Chcieć zawrzeć przyrodę w nauce, jestto chcieć wtłoczyć całość w część.

Ale uczeni sądzą, że istnieje hierarchja faktów, i że można dokonać zpośród nich trafnego wyboru; mają oni słuszność, gdyż w przeciwnym razie nie byłoby nauki, a nauka istnieje. Toż bije w oczy, że zdobycze przemysłu, które zbogaciły tylu ludzi praktycznych, nie ujrzałyby nigdy światła, gdyby istnieli jedynie ci ludzie praktyczni, gdyby nie poprzedzili ich bezinteresowni szaleńcy, którzy zmarli w biedzie, nie myśleli nigdy, co jest użyteczne, a przecież kierowali się czymś innym jak kaprysem.

Szaleńcy ci zaoszczędzili, jak powiedział Mach, swym następcom trudu myślenia. Ludzie, którzyby pracowali wyłącznie ze względu na zastosowania bezpośrednie, nie pozostawiliby nic poza sobą, i w obliczu jakiejś nowej potrzeby musianoby rozpoczynać wszystko od początku. Otóż większość ludzi nie lubi myśleć, co jest może dobre, skoro kieruje niemi instynkt, i to często lepiej, niżby kierował rozum czystym umysłem — przynajmniej wówczas, gdy zmierzają oni do celu bezpośredniego i zawsze tego samego; ale instynkt jestto rutyna, i gdyby go nie zapładniała myśl, nie robiłby on u człowieka postępów większych niż u pszczoły lub mrówki. Trzeba tedy myśleć za tych, co myśleć nie lubią, a że jest ich wielu, trzeba, żeby każda z naszych myśli była użyteczną możliwie najczęściej, i dlatego nowoodkryte prawo będzie tym cenniejsze, im będzie ono ogólniejsze.

Wskazuje to, jak powinien być dokonywany nasz wybór; najbardziej interesującemi faktami są fakty, któremi można się posługiwać kilka razy; te, co do których jest najwięcej szans, że się powtórzą. Mieliśmy szczęście narodzić się w świecie, w którym fakty takie istnieją. Przypuśćmy, że zamiast 60 pierwiastków chemicznych mamy ich 60 miljardów, że jedne z nich nie są pospolite a inne rzadkie, lecz że wszystkie są rozłożone jednostajnie. Natenczas, ilekroć podniesiemy z ziemi kamyk, będzie znaczne prawdopodobieństwo, że składa się on z jakiejś nieznanej substancji; nic z tego, co wiemy o innych kamykach, nie stosowałoby się do tego; na każdy nowy przedmiot patrzelibyśmy, jak nowonarodzone dziecię; jak ono, umielibyśmy jedynie słuchać się swoich kaprysów lub potrzeb; w takim świecie nie byłoby nauki; myśl nawet a może i życie byłyby w nim niemożliwe, gdyż ewolucja nie byłaby w stanie rozwinąć instynktów zachowawczych. Dzięki Bogu, jest inaczej; jestto szczęście niedoceniane, jak wszystkie szczęścia, do których się jest przyzwyczajonym. Biolog miałby podobny kłopot, gdyby istniały tylko osobniki, a nie było gatunków, i gdyby dziedziczność nie sprawiała, że synowie są podobni do ojców.

Jakież więc fakty mają szansę, że się powtórzą? Są to przedewszystkim fakty proste. Jasne jest, że w fakcie złożonym mamy tysiąc okoliczności połączonych przypadkiem, i że tylko przypadek o wiele mniej jeszcze prawdopodobny mógłby je znowu połączyć. Ale czyż istnieją fakty proste, a jeśli tak, to jak je rozpoznać? Któż nam zaręczy, że to, co wydaje się nam prostym, nie kryje w sobie splotu nieskończenie złożonego? Nie możemy powiedzieć nic ponadto, że trzeba przekładać fakty, które w y d a j ą s i ę prostemi nad fakty, w których nasze niedoskonałe oko rozróżnia elementy odrębne. Wówczas mamy jedno z dwojga: albo prostota ta jest rzeczywista, albo elementy są zmieszane tak ściśle, że niepodobna ich wyodrębnić. W pierwszym wypadku mamy szanse napotkać znowu ten sam fakt prosty czy to w całej jego czystości, czy jako element składowy układu złożonego. W drugim wypadku ścisła ta mieszanina ma również więcej szans powrotu niż niejednorodna zbieranina; przypadek umie mieszać, nie umie natomiast rozwikływać, i wzniesienie z rozlicznych elementów uporządkowanej budowli, w której można cokolwiek rozróżnić, może być zrobione jeno z rozmysłem. Mało więc jest szans, by zbieranina, w której można cokolwiek rozróżnić, kiedykolwiek powróciła. Jest za to szans dużo, byśmy mieszaninę, na pierwszy rzut oka jednorodną, napotkali jeszcze wiele razy. Fakty, które wydają się prostemi, chociażby nawet niemi nie były, łacniej od innych zostaną znowu przywrócone przez przypadek.

W tym tkwi usprawiedliwienie metody, której instynktownie trzymają się badacze; a mocniej być może jeszcze gruntuje tę metodę to, że fakty częste wydają się nam prostemi właśnie dlatego, że jesteśmy do nich przyzwyczajeni.

Ale gdzież szukać faktu prostego? Badacze urządzają nań wyprawy w dwie dziedziny krańcowe, w obszary nieskończenie wielkiego i nieskończenie małego. Astronom znalazł go, bo odległości gwiazd są olbrzymie, tak wielkie, że każda z nich wydaje się tylko punktem; tak wielkie, że różnice jakościowe zacierają się; bo wreszcie punkt jest prostszy niż ciało, posiadające kształt i pewne własności. Fizyk natomiast szukał zjawiska elementarnego, krająć fikcyjnie ciała na nieskończenie małe sześciany, a to dlatego, że warunki zagadnienia, zmieniające się w sposób powolny i ciągły przy przejściu od jednego punktu ciała do drugiego, można uważać za stałe wewnątrz każdego z tych małych sześcianów. Podobnież biologowi instynkt kazał uważać komórkę za bardziej interesującą, niż całe zwierzę, i wyniki jego badań przyznały mu słuszność, gdyż komórki, należące do najrozmaitszych organizmów, bardziej są do siebie podobne, jeśli się umie dopatrzeć podobieństw między niemi, niż całe organizmy. Socjolog jest w większym kłopocie; dla niego elementami są ludzie, a ci są zbyt różni, zbyt zmienni, zbyt kapryśni, słowem są sami zbyt złożeni; to też historja się nie powtarza; jakże tedy wybrać fakt interesujący, to znaczy fakt, który się powtarza; metoda to właśnie wybór faktów, trzeba więc dbać przedewszystkim o wymyślenie metody, i wymyślono ich dużo, bo żadna się nie narzucała; każda dysertacja socjologiczna proponuje nową metodę, której stosowania nowy doktor wszelako starannie unika, wobec czego socjologia jest nauką, posiadającą najwięcej metod i najmniej ustalonych za ich pomocą rezultatów.

Rozpocząć tedy należy od faktów regularnych; ale skoro tylko rządząca niemi reguła zostanie ustalona, skoro wzniesie się ona ponad wszelkie wątpliwości, fakty, które w zupełności się do niej stosują, staną się rychło nieciekawe, bo nie uczą niczego nowego. Natenczas wagi nabiera wyjątek. Przestaje się szukać podobieństwa, uważając przedewszystkim na różnice, a zpośród różnic wybiera się nasamprzód najwydatniejsze, nietylko dlatego, że są najbardziej uderzające, ale i dlatego, że będą najbardziej pouczające. Prosty przykład pozwoli lepiej zrozumieć moją myśl; przypuśćmy, że idzie o określenie krzywej przez obserwowanie kilku jej punktów. Praktyk, dbały jedynie o bezpośrednią użyteczność, będzie obserwował tylko te punkty, których potrzebuje dla jakiegoś specjalnego celu; punkty te będą rozłożone na krzywej w sposób nierówny; w jednej okolicy będzie ich dużo, w innej będą one tak rzadkie, że nie będzie można ich połączyć linją ciągłą, i nie będą one mogły służyć do innych zastosowań. Człowiek nauki postępować będzie inaczej; ponieważ chce on zbadać krzywą dla niej samej, rozłoży on punkty dla obserwacji w sposób prawidłowy, i skoro tylko pozna pewną ich ilość, połączy je ciągłą kreską i otrzyma całą krzywą. A robić to będzie tak oto: gdy oznaczy jeden z punktów końcowych krzywej, nie pozostanie w okolicy tego punktu, lecz pobiegnie do drugiego końca; po obu krańcach najciekawszym punktem będzie punkt środkowy, i tak dalej.

Tak więc, skoro pewna reguła zostanie ustanowiona, przedewszystkim trzeba szukać wypadków, w których reguła ta traci stosowalność. Stąd, między innemi, interes, jaki posiadają fakty astronomiczne, przeszłość gieologiczna; posuwając się daleko w przestrzeni lub daleko w czasie, możemy spodziewać się, że zwykłe nasze reguły okażą się zupełnie wywróconemi, a wielkie te przewroty pomogą nam lepiej widzieć lub lepiej rozumieć małe zmiany, jakie się odbywają bliżej nas, w małym kąciku świata, w którym powołani jesteśmy żyć i działać. Podróże po odległych krajach, gdzie napozór niema czego szukać, sprawią, że lepiej poznamy ten blizki nam kącik.

Celem naszym powinno być wszelako nie tyle stwierdzanie podobieństw i różnic, ile raczej odnajdywanie utajonych powinowactw pod pozorami obcości. Poszczególne reguły wydają się zrazu rozbieżnemi, bliższe przecież wniknięcie przekonywa, że są między niemi podobieństwa; różne co do treści, zbliżone są one do siebie pod względem formy, ładu swych części. Rozpatrywane pod tym kątem, rozszerzają się one w oczach, zdążają do ogarnięcia wszystkiego. Stąd wysoka wartość pewnych faktów, które, dołączone do danej grupy faktów, uzupełniają ją w taki sposób, że staje się ona wiernym obrazem innych znanych ugrupowań.

Kilka tych słów — obszerniej się nad tym rozwodzić nie mogę — wystarcza, by dowieść, że badacz nie wybiera na chybi-trafi faktów, które ma obserwować. Nie rachuje on robaczków, jak mówi Tołstoj, gdyż ilość tych zwierzątek, lubo wielce interesująca, ulega kapryśnym wahaniom. Usiłuje on skondensować wiele doświadczenia i wiele myśli w niewielkiej objętości, i dlatego to mała książeczka, traktująca o fizyce, zawiera tak wiele doświadczeń dokonanych i tysiąc razy więcej jeszcze doświadczeń możliwych, których rezultaty znane są z góry.

Ale to, nad czym zastanawialiśmy się dotychczas, jest tylko jedną stroną kwestji. Uczony nie bada przyrody dlatego, że jestto użyteczne; bada ją, bo sprawia mu to przyjemność, a sprawia mu przyjemność, bo przyroda jest piękna. Gdyby nie była piękna, nie wartoby jej było poznawać, życie nie byłoby warte, aby je przeżywać. Nie mówię tu, oczywiście, o pięknie, które postrzegają nasze zmysły, o pięknie materjalnych własności i pozorów; nie żebym nim pogardzał, broń mnie Boże, ale nie ma ono nic wspólnego z nauką; mówię tutaj o owym wewnętrzniejszym pięknie, płynącym z harmonijnego ładu części, uchwytnym dla czystego umysłu. Ono to daje ciało, daje, że tak powiem, szkielet owym mieniącym się pozorom, schlebiającym naszym zmysłom, i bez tej podpory piękno tamtych ulotnych marzeń byłoby niedoskonałe, bo byłoby niezdecydowane i rozpływające się. Natomiast piękno intelektualne wystarcza samo sobie, i dla niego to, więcej, być może, niż dla przyszłego dobra ludzkości, uczony skazuje się na długą i uciążliwą pracę.

Poszukiwanie tego szczególnego piękna, poczucie harmonji świata kieruje więc nami przy wyborze faktów, najbardziej przyczyniających się do tej harmonji, podobnie jak artysta wybiera te z rysów swego modela, które uzupełniają portret i nadają mu charakter i życie. I niema obawy, by ta instynktowna i nieznana troska odwracała uczonego od poszukiwania prawdy. Można wymarzyć sobie świat harmonijny, ale jakże daleko świat rzeczywisty pozostawi go za sobą; najwięksi zpośród artystów, jakich widział świat, Grecy, zbudowali sobie niebo; jakże nędzne jest ono wobec nieba prawdziwego, naszego nieba.

Prostota i wielkość są piękne, i dlatego szukamy faktów prostych i faktów wielkich, dlatego lubujemy się to w śledzeniu olbrzymiego biegu ciał niebieskich, to znów w tropieniu przez mikroskop owej przedziwnej małości, która również jest wielkością, to wreszcie w szukaniu w czasach gieologicznych śladów przeszłości, pociągającej nas, bo odległej.

I troska o piękno prowadzi do tego samego wyboru, co troska o użyteczność. I w ten też sposób owa ekonomja myśli, owa ekonomja wysiłku, która według Macha jest stałym dążeniem nauki, jest zarazem źródłem piękna i praktyczną korzyścią. Te gmachy budzą w nas zachwyt, w których architekt potrafił znaleźć proporcję między środkami a celem, w których kolumny zdają się nosić bez wysiłku i lekko włożony na nie ciężar, jak wdzięczne karjatydy Erechteionu.

Skąd ta zgodność? Czy wypływa ona poprostu z tego, że pięknemi wydają się nam te właśnie rzeczy, które najlepiej się dopasowują do naszej umysłowości, i są przeto narzędziem, którym umysłowość ta najsprawniej umie obracać? Czy też mamy tu grę ewolucji i doboru naturalnego? Czy ludy, których ideał najlepiej odpowiadał ich dobrze zrozumianemu interesowi, wytępiły inne i zajęły ich miejsce? Jedne i drugie dążyły do swego ideału, nie zdając sobie sprawy ze skutków, a dążenie to prowadziło jedne do zguby, dając drugim panowanie. Pokusa bierze mniemać, że tak było istotnie; jeżeli Grecy zwyciężyli barbarzyńców, i jeżeli Europa, dziedziczka myśli Greków, panuje nad światem, to dzieje się to dlatego, że dzicy lubili kolory krzyczące i hałaśliwe dźwięki bębna, zaprzątające wyłącznie ich zmysły, podczas gdy Grecy kochali się w pięknie intelektualnym, ukrytym pod pięknem zmysłowym, które właśnie daje umysłowości pewność i siłę.

Zwycięstwo takie budziłoby zapewne wstręt w Tołstoju, nie chciałby on przyznać mu prawdziwej użyteczności. Lecz to bezinteresowne poszukiwanie prawdy dla jej piękna również jest zdrowe i również zdolne zrobić człowieka lepszym. Zapewne, zdarzają się zawody, myśliciel nie zawsze czerpie z tego poszukiwania ową pogodę, jaką mu ono daćby powinno, a nawet istnieją myśliciele, obdarzeni bardzo złym charakterem.

Czyż mamy stąd wnieść, że trzeba porzucić naukę i studjować jedynie moralność?

A sami moraliści czyż są doprawdy nieposzlakowani, gdy zejdą ze swej kazalnicy?

Rozdział II.

Przyszłość matematyki.

Metoda, która pozwala przepowiedzieć przyszłość matematyki, polega na zbadaniu jej historji i jej stanu obecnego. Dla nas, matematyków, metoda ta odpowiada naszemu zawodowemu, że tak powiem, sposobowi myślenia. Jesteśmy przyzwyczajeni do ekstrapolowania, które jest sposobem wyprowadzania przyszłości z przeszłości i teraźniejszości, a że znamy dobrze jego wartość, nie narażamy się na złudzenia co do doniosłości rezultatów, do których ono prowadzi.

Bywali dawniej niefortunni prorocy. Powtarzali oni często, że wszystkie zagadnienia rozwiązalne już zostały rozwiązane, i że pozostaje jedynie zbierać zżęte kłosie. Na szczęście przykład przeszłości uczy nas, co o tym myśleć. Nieraz już zdawało się ludziom, że rozwiązali wszystkie zagadnienia, albo przynajmniej, że sporządzili inwentarz tych, które wogóle dają się rozwiązać. A później znaczenie wyrazu »rozwiązanie« rozszerzyło się, zagadnienia nierozwiązalne stały się najbardziej interesującemi, zjawiły się nadto nowe zagadnienia, o jakich dawniej nie myślano. Dla Greków dobrym rozwiązaniem było takie, które posługuje się jedynie linją i cyrklem; później wymagano, aby doń prowadziło jedynie wyciąganie pierwiastków, później, aby nie zawierało ono innych funkcji prócz algiebraicznych i logarytmicznych. Taki rozwój pojęć wypierał ustawicznie pesymistów, zmuszał ich do cofania się, i dzisiaj, być może, znikli oni zupełnie.

Nie mam tedy zamiaru ich zwalczać, skoro sami wymarli; wiemy, że matematyka będzie się i nadal rozwijała, idzie tylko o to, w jakim kierunku. Odpowiedzą mi, że »we wszystkich kierunkach«, i twierdzenie to będzie częściowo słuszne; ale gdyby było ono całkowicie słuszne, stałoby się prawie przerażającym. Zdobyte skarby stałyby się rychło zawadą na drogach myśli, nagromadzenie ich potworzyłoby zatory, równie nieprzebyte, jak nieprzebytą była nieznana prawda dla tego, co o jej istnieniu nie wiedział.

Historyk, a nawet fizyk musi dokonać wyboru pośród faktów: mózg badacza, będący jedynie kątem wszechświata, nie zdoła nigdy zawrzeć całego wszechświata, toteż z niezliczonych faktów, jakich nam dostarcza przyroda, jedne zostaną pominięte, inne zapamiętane. Stosuje się to *a fortiori* do matematyki; matematyk również nie może zachować, jak groch z kapustą, wszystkich faktów, jakie napotyka; tym bardziej, że fakty te tworzy — on sam, niemal że nie rzekłem — jego kaprys. On to konstruuje w całości nową kombinację, zbliżając do siebie jej elementy; wyjątkowo tylko otrzymuje on gotową kombinację w darze od przyrody.

Niewątpliwie, zdarza się niekiedy, że matematyk podejmuje pewne zagadnienie, aby uczynić zadość pewnej potrzebie fizyki; że fizyk lub inżynier żądają odeń wyliczenia pewnej liczby ze względu na jej zastosowanie. Czyżby wynikało stąd, że my matematycy mamy się ograniczyć do czekania na obstalunki i, zamiast uprawiania naszej nauki dla swojej przyjemności, nie mieć innych trosk nad przystosowanie się do naszej klijenteli? Jeżeli jedynym przedmiotem matematyki jest niesienie pomocy badaczom przyrody, tedy od nich winnibyśmy oczekiwać haseł i rozkazów. Czy pogląd taki jest uzasadniony? Niewątpliwie nie; gdybyśmy nie byli uprawiali nauk ścisłych dla nich samych, nie bylibyśmy stworzyli owego narzędzia, jakim jest matematyka, i w chwili, kiedyby przyszła komenda fizyka, okazalibyśmy się bezbronnemi.

I fizycy również, kiedy przystępują do badania pewnego zjawiska, nie czekają, by jakaś pilna potrzeba życia praktycznego zmusiła ich do tego, — i mają rację; gdyby uczeni XVIII-go wieku zarzucili byli elektryczność, dlatego, że była dla nich tylko ciekawostką, pozbawioną praktycznego interesu, nie mielibyśmy w wieku XX-tym ani telegrafu, ani elektrochemji, ani elektrotechniki. Zmuszeni wybierać, fizycy nie kierują się więc w swym wyborze jedynie względami na użyteczność. Jakże więc postępują oni, gdy wypada im wybierać zpośród faktów przyrodzonych? Wytłumaczyliśmy to w rozdziale poprzednim; faktami, które ich interesują, są te, które mogą zaprowadzić do odkrycia pewnego prawa; te przeto, które są analogiczne do wielu innych faktów, które nie wydają się odosobnionemi, lecz ściśle powiązanemi w grupy z innemi faktami. Fakt odosobniony uderza wzrok każdego, zarówno pospolitego człowieka jak uczonego badacza. Ale tylko fizyk potrafi dojrzeć łącznik, jednoczący kilka faktów, między któremi zachodzi analogja głęboka lecz ukryta. Anegdota o jabłku Newtona nie jest prawdopodobnie prawdziwa, lecz jest symboliczna; możemy więc ją traktować jak prawdziwą. Otóż przed Newtonem wielu chyba ludzi widziało spadające jabłka: żaden nie potrafił nic z tego wywnioskować. Fakty byłyby jałowe, gdyby nie było umysłów, zdolnych dokonać wśród nich wyboru, wyróżniając te, poza któremi kryje się coś, i poznać, co się za niemi kryje, umysłów, które pod powłoką surowego faktu wyczuwać będą duszę tego faktu.

W matematyce robimy zupełnie to samo; przerozmaite elementy, któremi rozporządzamy, możemy wiązać w miljony różnych kombinacji; ale każda z tych kombinacji jest całkiem bez wartości, dopóki jest odosobniona; często skonstruowanie jej kosztowało nas wiele trudu, lecz niema stąd absolutnie żadnej korzyści, prócz chyba tematu do ćwiczeń dla uczni szkół średnich.

Ale postać rzeczy zmieni się radykalnie z chwilą, gdy kombinacja ta zajmie miejsce w klasie kombinacji analogicznych, i gdy zauważymy tę analogję; będziemy wówczas mieli do czynienia nie z faktem lecz z prawem. I w owej chwili prawdziwym wynalazcą będzie nie pracownik, który cierpliwie zbudował kilka z tych kombinacji, lecz ten, kto ujawni ich powinowactwo. Pierwszy widział jedynie surowy fakt, drugi wyczuł duszę faktu. Często dla stwierdzenia tego powinowactwa wystarczy, że wynajdzie on nowy wyraz, i wyraz ten będzie twórczym; historja nauki dostarczyćby nam po temu mogła mnóstwa przykładów, dobrze znanych wszystkim.

Słynny filozof wiedeński Mach powiedział, że rolą nauki jest ekonomja myśli, jak rolą maszyny ekonomja wysiłku. Jestto bardzo trafne. Człowiek dziki rachuje na palcach lub zapomocą kamyków. Ucząc dzieci tabliczki mnożenia, oszczędzamy im na przyszłość niezliczonych operacji z kamykami. Ktoś kiedyś upewnił się, zapomocą kamyków, czy też inną drogą, że 6 razy 7 daje 42, i przyszło mu na myśl zanotować ten rezultat, i dlatego my nie potrzebujemy zaczynać od początku. Człowiek ów, nawet jeśli rachował jedynie dla swojej przyjemności, nie stracił napróżno czasu, jego rachunek zajął mu wszystkiego dwie minuty, a kosztowałby on łącznie dwa miljardy minut, gdyby miljard ludzi musiał po nim zaczynać od początku.

Miarą doniosłości faktu jest zatym jego wydajność, to znaczy ilość myśli, jaką pozwala nam on zaoszczędzić.

W fizyce faktami o wielkiej wydajności są fakty, podlegające jakiemuś bardzo ogólnemu prawu, gdyż pozwalają one przewidzieć wielką ilość innych faktów; nieinaczej jest w matematyce. Przeprowadziłem skomplikowany rachunek i z mozołem dotarłem do pewnego wyniku; trud, jakiego mnie to kosztowało, opłaci się tylko wówczas, jeśli uczyni on mnie zdolnym przewidywać wyniki innych analogicznych rachunków i przeprowadzać je z całą pewnością, bez posuwania się poomacku, nieuniknionego przy pierwszym rachunku. Tym mniej jeszcze czas mój będzie stracony, jeśli właśnie to macanie drogi dopomogło mi do odkrycia głębokiej analogji, jaka zachodzi między zagadnieniem, nad którym ślęczałem, a o wiele rozleglejszą klasą innych zagadnień; jeśli wskazało mi ono podobieństwa i różnice między temi zagadnieniami, jeśli słowem ujawniło mi perspektywę uogólnienia. Zdobyczą moją będzie natenczas coś więcej niż nowy wynik: będzie nią nowa siła.

Wzór algiebraiczny, który daje rozwiązanie pewnego typu zagadnień liczbowych, gdy zastąpi się w wyniku końcowym litery przez liczby, jest prostym przykładem, który się sam nasuwa. Dzięki niemu jeden jedyny rachunek algiebraiczny oszczędza robotę ustawicznego rozpoczynania od początku nowych rachunków liczbowych. Ale przykład ten oddaje tylko zgruba istotę rzeczy; każdy czuje, że istnieją analogje, nie dające się wyrazić za pomocą wzorów, i te są właśnie najcenniejsze.

Cenę posiada nowy wynik wówczas, jeśli przez powiązanie elementów, znanych oddawna lecz rozproszonych i z pozoru sobie obcych, wprowadza on nagle ład tam, gdzie panował pozór bezładu. Pozwala on wówczas na ogarnięcie jednym rzutem oka każdego z tych elementów oraz miejsca, jakie ono zajmuje w zespole. Nowy ten fakt jest nietylko cenny sam przez się, lecz on tylko nadaje wartość wszystkim dawnym faktom, które ze sobą wiąże. Umysł nasz jest ułomny, jak ułomnemi są nasze zmysły; zgubiłby się on w komplikacji świata, gdyby komplikacja ta nie była harmonijną, widziałby tylko jego szczegóły, jak krótkowidze, i musiałby zapomnieć każdy z tych szczegółów, zanimby zaczął oglądać następny, ponieważ byłby niezdolny wszystkiego ogarnąć. Jedynemi faktami, godnemi naszej uwagi, są te, które wprowadzają ład do tej komplikacji i czynią ją przez to dostępną.

Matematycy przywiązują znaczną wagę do wytworności swych metod i ich wyników; nie jestto jakiś dyletantyzm estetyczny. Cóż bowiem w rozwiązaniu zagadnienia matematycznego lub w dowodzie odczuwamy, jako wytworność? Harmonję poszczególnych części, ich symetrję, fortunne ich ugrupowanie; wszystko, słowem, co nadaje im ład, wprowadza jedność, co przez to pozwala nam orjentować się w nich, rozumieć zarówno całość jak szczegóły. A to samo właśnie nadaje im wielką wydajność; albowiem im jaśniej będziemy mogli widzieć całość, im łacniej ogarnąć ją będziemy mogli jednym rzutem oka, tym lepiej dostrzeżemy jej analogje z innemi, sąsiedniemi przedmiotami, tym przeto więcej będziemy mieli szans zgadnięcia możliwych uogólnień. Wytworność może wypływać z uczucia czegoś nieprzewidzianego naskutek nieoczekiwanego spotkania się rzeczy, których zwykle się do siebie nie zbliża; i w tym razie jest ona płodną, gdyż odsłania nam w ten sposób powinowactwa przedtym nieznane; jest płodną nawet wówczas, gdy jest wynikiem kontrastu między prostotą środków a złożonością postawionego zagadnienia; pobudza nas ona wówczas do rozmyślania nad przyczyną tego kontrastu, i najczęściej okazuje się, że przyczyną tą nie jest przypadek lecz jakieś nieprzeczuwane przez nas prawo. Słowem, uczucie matematycznej wytworności jestto poprostu zadowolenie, wypływające z jakiejś odpowiedniości między dopiero co odkrytym rozwiązaniem a potrzebami naszego umysłu, i dla tej właśnie odpowiedniości rozwiązanie to może się stać narzędziem naszej myśli. Estetyczne to zadowolenie jest tym samym związane z ekonomją myśli. I znowu nasuwa mi się porównanie z Erechteionem, — lecz nie chcę go zbyt często odgrzewać.

Dla tejże samej racji, gdy przydługi rachunek da nam w końcu wynik prosty i uderzający, nie czujemy zadowolenia, dopóki nie wykażemy, że moglibyśmy przewidzieć jeśli nie cały ten wynik, to przynajmniej najbardziej charakterystyczne jego rysy. I czemuż to? Cóż nam przeszkadza zadowolić się rachunkiem, który dał nam, zdałoby się, wszystko, cośmy chcieli wiedzieć? To mianowicie, że w analogicznych wypadkach długi ten rachunek nie dałby się bezpośrednio zastosować, natomiast owo często nawpółintuicyjne rozwiązanie, które mogło było pozwolić przewidzieć wynik, wskaże nam i wówczas drogę do celu. Krótkość tego rozumowania sprawia, że się jednym spojrzeniem ogarnia wszystkie jego części i postrzega odrazu, co w nim należy zmienić, by je dopasować do wszystkich zagadnień tej samej natury, które mogą się wysunąć. A ponieważ pozwala ono przewidzieć, czy rozwiązanie tych zagadnień będzie proste, wskazuje tym samym, czy wogóle warto przystępować do wykonania rachunku.

Uwagi powyższe wystarczają by okazać, jak próżnym byłoby usiłowanie zastąpienia jakimkolwiek działaniem mechanicznym swobodnej inicjatywy matematyka. Dla osiągnięcia wyniku o istotnej wartości nie wystarcza mleć rachunki lub puścić w ruch maszynę, ład zaprowadzającą; nie wszelki bowiem ład lecz ład nieoczekiwany posiada wartość. Maszyna może wgryźć się w fakt surowy, nie chwyci ona nigdy duszy faktu.

Od połowy zeszłego stulecia matematycy coraz więcej dbają o bezwzględną ścisłość; mają oni niewątpliwie słuszność, i tendencja ta będzie się i nadal potęgowała. W matematyce ścisłość nie jest wszystkim, lecz bez niej niema nic; dowód, który nie jest ścisły, nie jest niczym. Nikt, sądzę, nie poda tej prawdy w wątpliwość. Gdyby wszakże wziąć ją zbyt dosłownie, możnaby wywnioskować, że przed rokiem 1820, naprzykład, nie było matematyki; byłoby to jawną przesadą; matematycy ówcześni lubili zakładać domyślnie to, co my tłumaczymy w rozwlekłych dyskursach; nie znaczy to, by zupełnie tego nie widzieli; lecz prześlizgiwali się po tych rzeczach zbyt szybko, a dokładne w nie wejrzenie wymagałoby, by zadali sobie trud wypowiedzenia ich.

Wszelako, czyż zawsze potrzeba je wypowiadać tyle razy? ci, co pierwsi zatroszczyli się przedewszystkim o ścisłość, dali nam rozumowania, które możemy starać się naśladować; ale jeśliby wszystkie przyszłe dowody miały być zbudowane według tego modelu, traktaty matematyczne stałyby się bardzo długie; a długości tej boję się nietylko dlatego, że się lękam przeludnienia bibljotek, lecz dlatego, że się obawiam, iż dowody nasze, wydłużając się, stracą ową postać harmonijną, której użyteczną rolę wytłumaczyłem powyżej.

Mając na celu ekonomję myśli, nie wystarcza dawać modele do naśladowania. Trzeba, aby po nas można się było obyć bez tych modeli, i zamiast powtarzać dokonane już rozumowanie, streścić je w paru wierszach. Kilkakrotnie powiodło się już to zrobić; istniał n. p. pewien typ rozumowań, które były do siebie podobne, i które napotykało się wszędzie; były one doskonale ścisłe, ale były długie. Pewnego dnia wymyślono wyraz: »jednostajność zbieżności« i wyraz ten uczynił je zbytecznemi; nie było już potrzeby ich powtarzać, bo można je było stosować domyślnie. Rozszczepiacze trudności na czworo mogą nam tedy oddać podwójną usługę: nasamprzód mogą nas nauczyć robić w razie potrzeby tak, jak oni, zwłaszcza zaś mogą nam pozwolić możliwie najczęściej robić nie tak jak oni, nie poświęcając nic z ścisłości.

Widzieliśmy przed chwilą na jednym przykładzie, jaka jest doniosłość wyrazów w matematyce, a przykładów takich mógłbym przytoczyć bardzo wiele. Trudno wprost uwierzyć, ile myśli może oszczędzić dobrze obrany wyraz, jak mówi Mach. Nie wiem, czy nie powiedziałem już gdzieś, że matematyka jest sztuką nadawania tej samej nazwy różnym rzeczom. Trzeba, by rzeczy te, różne co do treści, były podobne co do kształtu, żeby mogły, że tak powiem, odlewać się w jedną formę. Gdy język został trafnie obrany, ku zdziwieniu naszemu wszystkie dowodzenia, przeprowadzone dla znanego przedmiotu, stosują się bezpośrednio do wielu nowych przedmiotów; nie potrzeba nic w nich zmieniać, nawet wyrazów, bo różnym tym przedmiotom nadaliśmy te same nazwy.

Dobrze obrany wyraz wystarcza najczęściej, by znikły wyjątki od reguł, formułowanych w dawnym języku; w tym to celu wymyślono ilości ujemne, ilości urojone, punkty w nieskończoności, że te tylko wymienię. A wyjątki, pamiętajmy, są zgubne, bo zasłaniają prawa.

Jedną z cech, po których właśnie można poznać fakty o wielkiej wydajności, jest to, że pozwalają one na owe szczęśliwe inowacje językowe. Fakt surowy jest w takich razach często bez znaczniejszego interesu, można było wiele razy go stwierdzić, nie oddając nauce większej usługi; nabiera on wartości dopiero z chwilą, gdy bardziej przenikliwy myśliciel dostrzeże ujawnione przez ten fakt powinowactwo i usymbolizuje je w wyrazie.

I fizycy zresztą postępują zupełnie tak samo; wynaleźli oni wyraz energja, i wyraz ten okazał się na dziw płodnym, bo i on tworzył prawo, rugując wyjątki, bo dawał tę samą nazwę rzeczom różnym w treści a podobnym z formy.

Zpośród wyrazów, które wywarły najszczęśliwszy wpływ, wskażę na wyrazy grupa i niezmiennik. Pozwoliły one dostrzec istotę wielu rozumowań matematycznych; wykazały, w jak wielu wypadkach dawni matematycy rozważali grupy, nie wiedząc o tym, i jakto wówczas, kiedy zdawało im się, że są od siebie bardzo dalecy, nagle znajdowali się w bliskim sąsiedztwie, nie rozumiejąc dlaczego.

Powiedzielibyśmy dzisiaj, że rozważali oni grupy izomorfijne. Wiemy dziś, że w grupie treść obchodzi nas mało, że ważna jest jedynie forma, i że jeśli znamy dobrze pewną grupę, znamy tymsamym wszystkie grupy izomorfijne; i dzięki wyrazom: grupa i izomorfizm, które w kilku sylabach streszczają to subtelne prawidło i spoufalają z nim rychło wszystkie umysły, przejście z jednej dziedziny do drugiej odbywa się bezpośrednio, oszczędzając wszelkiego wysiłku myśli. Pojęcie grupy wiąże się zresztą z pojęciem przekształcenia; czemu przypisuje się taką wartość nowemu przekształceniu? bo pozwala ono z jednego twierdzenia wyprowadzić dziesięć lub dwadzieścia; posiada ono tę samą wartość, co zero dopisane z prawej strony do liczby całkowitej.

Te sprężyny oznaczały dotychczas kierunek ruchu nauki matematycznej, i one też z pewnością oznaczać go będą w przyszłości. W oznaczaniu tego kierunku bierze jednak również udział charakter wysuwających się zagadnień. Nie możemy zapominać, jaki winien być nasz cel; moim zdaniem cel ten jest dwojaki; nauka nasza graniczy z jednej strony z filozofją, z drugiej z fizyką, i dla tych dwu sąsiadek pracujemy; jakoż widzieliśmy zawsze i zawsze bedziemy widzieli matematyków, idących w dwu przeciwległych kierunkach.

Z jednej strony nauka matematyczna musi rozmyślać nad samą sobą, i jestto pożyteczne, bo rozmyślać nad samą sobą znaczy dla niej rozmyślać nad umysłem ludzkim, który ją stworzył, tymbardziej, że jestto z wszystkich jego tworów ten, dla którego najmniej czerpał on zzewnątrz. To stanowi o pożyteczności pewnych spekulacji matematycznych jak np. tych, których przedmiotem są postulaty, gieometrje niezwyczajne, funkcje o dziwnym wyglądzie. Im bardziej oddalą się te spekulacje od najpospolitszych pojęć, a przeto od przyrody i od zastosowań, tym lepiej wskażą nam, co może zdziałać umysł ludzki, gdy coraz bardziej uchyla się zpod tyranji świata zewnętrznego, tym lepiej zatym pozwolą nam poznać go samego w sobie.

Ale główną naszą armję winniśmy kierować w stronę przeciwną, w stronę przyrody.

Tam spotkamy fizyka lub inżyniera, który nam powie: »Czy nie moglibyście mi zcałkować tego równania różniczkowego, będę go potrzebował od dziś za tydzień dla takiej a takiej budowy, która ma być ukończona na taki termin«. »Równanie to, odpowiadamy, nie wchodzi do żadnego z typów całkowalnych, wszak wiecie, że niema ich dużo.« »Tak, wiem to, lecz w takim razie, jakiż z was pożytek?« Po większej części wszelako możnaby się porozumieć; inżynierowi właściwie nie jest potrzebna całka w postaci skończonej; potrzebna mu jest znajomość ogólnego wyglądu funkcji całkowej, lub potrzebuje poprostu pewnej cyfry, którąby można było łatwo wyprowadzić z tej całki, gdyby się ją znało. Zwykle nie zna się samej całki, ale możnaby wyrachować cyfrę tę bez niej, gdyby się dobrze wiedziało, jaka to cyfra potrzebna jest inżynierowi i z jakim przybliżeniem.

Kiedyś uważano równanie za rozwiązane jedynie wówczas, gdy wyrażono jego rozwiązanie zapomocą skończonej ilości znanych funkcji; ale jestto możliwe conajwyżej raz na sto razy. Zawsze natomiast możemy, a właściwie powinniśmy się starać rozwiązać zagadnienie, że tak powiem, jakościowo, to znaczy starać się poznać ogólny kształt krzywej, która wyobraża funkcję niewiadomą.

Pozostaje wówczas znalezienie ilościowego rozwiązania zagadnienia; jeżeli niewiadomej nie można oznaczyć zapomocą rachunku skończonego, to można ją zawsze wyrazić w postaci nieskończonego zbieżnego szeregu, który pozwala ją wyrachować. Czy można to uważać za prawdziwe rozwiązanie? Opowiadają, że Newton zakomunikował Leibnizowi anagram mniej więcej taki: *aaaaabbbeeeeii* itd. Leibniz, oczywista, nie zrozumiał z tego nic; lecz my, którzy znamy klucz, wiemy, że anagram ten w przekładzie na język nowoczesny mówi: »Umiem całkować wszystkie równania różniczkowe«, co mogłoby nam nastręczyć myśl, że Newton miał duże szczęście, albo też, że osobliwie się łudził. W istocie chciał on poprostu powiedzieć, że był w stanie utworzyć (zapomocą metody współczynników nieoznaczonych) szereg potęg, czyniących formalnie zadość danemu równaniu.

Podobne rozwiązanie nie zadowoliłoby nas dzisiaj, i to dla dwu względów: dlatego, że zbieżność jest zbyt powolna, i że wyrazy następują po sobie bez określonego prawa. Przeciwnie, szereg Θ wydaje się nam odpowiadającym wszelkim wymaganiom, naprzód dlatego, że zbiega się bardzo szybko (ważne dla praktyka, który chce otrzymać swoją liczbę możliwie najrychlej), powtóre zaś dlatego, że obejmujemy jednym rzutem prawo wyrazów (dla teoretyka, aby zaspokoić jego potrzeby estetyczne).

Wobec tego niema więcej zagadnień rozwiązanych i zagadnień nierozwiązanych; istnieją tylko zagadnienia bardziej lub mniej rozwiązane stosownie do tego, czy rozwiązanie to stanowi szereg o bardziej lub mniej szybkiej zbieżności, lub czy rządzi nim prawo bardziej lub mniej harmonijne. Zdarza się przecież, że rozwiązanie niedoskonałe toruje drogę do rozwiązania lepszego. Niekiedy zbieżność szeregu jest tak wolna, że rachunek jest praktycznie nie do przeprowadzenia, i że dane rozwiązanie jest jedynie dowodem teoretycznej rozwiązalności samego zagadnienia.

Inżynier uzna rozwiązanie takie za pozbawione wszelkiej wartości, i słusznie, skoro nie pomoże mu ono wykończyć budowy na oznaczony termin. Mało dba on o to, czy będzie to użyteczne dla inżynierów XXII-go stulecia; my oceniamy tę kwestję z innego stanowiska, i więcej nam sprawia niekiedy zadowolenia zaoszczędzenie dnia pracy naszym wnukom, niż godziny naszym współczesnym.

Niekiedy, idąc omackiem, empirycznie poniekąd, osiągamy wzór dostatecznie zbieżny. I czegóż wam więcej potrzeba, powie nam inżynier; a my, pomimo wszystko, nie jesteśmy zadowoleni, wolelibyśmy przewidzieć tę zbieżność. Dlaczego? bo gdybyśmy potrafili przewidzieć ją raz, potrafilibyśmy przewidzieć ją innym razem. Powiodło nam się — jestto dla nas bardzo niewiele, jeżeli nie mamy poważnej nadziei, że powiedzie się znowu.

W miarę rozwoju nauki staje się trudniejszym ogarnięcie jej całej; wówczas usiłuje się pokrajać ją na kawałki, ograniczyć się jednym takim kawałkiem; słowem — specjalizować się. Gdyby proces ten trwał dalej, stałoby się to dotkliwą przeszkodą dla postępów nauki. Jak powiedzieliśmy, postępy jej mogą być wywołane nieoczekiwanemi zbliżeniami rozmaitych jej części. Zbytnia specjalizacja wykluczałaby takie zbliżenia. Miejmy nadzieję, że kongresy takie, jak heidelberski i rzymski, nawiązując komunikację między matematykami, otworzą nam widok na pole sąsiada, zmuszą nas do porównania tego pola do naszego, do wychylenia się poza naszą wioskę; staną się one w ten sposób najlepszym lekarstwem na niebezpieczeństwo powyżej wskazane.

Ale zadużo trawię czasu na uwagi ogólne, pora już wejść w szczegóły.

Dokonajmy przeglądu rozmaitych nauk szczególnych, których zespół stanowi matematykę; zobaczmy, co każda z nich zrobiła, dokąd zmierza, i czego można się od niej spodziewać. Jeżeli powyższe poglądy są słuszne, będziemy musieli stwierdzić, że w przeszłości wielkie postępy zachodziły wówczas, gdy dwie z tych nauk zbliżyły się do siebie, gdy uświadomiono sobie podobieństwo ich form pomimo odmienności ich treści, gdy jedna jęła się modelować na drugiej, tak, iż każda z nich mogła korzystać ze zdobyczy drugiej. Zarazem powinnibyśmy dostrzec w podobnych zarysowujących się zbliżeniach postępy przyszłości.

Arytmetyka.

Postępy arytmetyki były znacznie powolniejsze niż postępy algiebry i analizy, i nietrudno jest zrozumieć, dlaczego tak było. Poczucie ciągłości, ten tak cenny przewodnik w badaniach, nie może służyć arytmetykowi; każda liczba całkowita odosobniona jest od innych, posiada poniekąd własną indywidualność; każda z nich jest pewnego rodzaju wyjątkiem, i dlatego twierdzenia ogólne rzadsze są w teorji liczb, dlatego również twierdzenia istniejące są bardziej ukryte i dłużej wymykają się badaczom.

Skoro arytmetyka jest spóźniona w stosunku do algiebry i analizy, tedy najlepiej zrobi, jeśli będzie się starała modelować na tych naukach, aby skorzystać z ich postępów. Arytmetyk powinien tedy kierować się analogjami z algiebrą. Analogje te są liczne i jeśli w wielu wypadkach nie zbadano ich dość zbliska, by z nich wyciągnąć korzyści, to przeczuwa się je przynajmniej oddawna, i sam język obu tych nauk dowodzi, że je dostrzeżono. Tak np. mówi się o liczbach przestępnych (transcendentnych) i zdaje się sobie sprawę z tego, że przyszła klasyfikacja tych liczb ma już wzór w klasyfikacji funkcji przestępnych, jakkolwiek nie jest jeszcze widocznym, jak będzie można przejść od jednej klasyfikacji do drugiej; bo gdyby to było widocznym, byłoby to już zrobione, i przestałoby być dziełem przyszłości.

Pierwszym przykładem, który mi się nasuwa, jest teorja porównań (kongruencji), wykazująca zupełny paralelizm z teorją równań algiebraicznych. Niewątpliwie powiedzie się dopełnić ten paralelizm niechybną równoległością między teorją krzywych algiebraicznych a porównaniami o dwu zmiennych. Kiedy zaś zagadnienia, dotyczące porównań o kilku zmiennych, będą rozwiązane, będzie to pierwszym krokiem ku rozwiązaniu wielu zadań analizy nieoznaczonej.

Algiebra.

Teorja równań algiebraicznych ściągać będzie jeszcze długo uwagę matematyków; przystępować do niej można ze stron licznych i rozmaitych.

Nie należy mniemać, że algiebra jest skończona, ponieważ dostarcza nam prawideł na formowanie wszelkich możliwych kombinacji; pozostaje poszukiwanie kombinacji interesujących, czyniących zadość temu lub innemu warunkowi. W ten sposób ukonstytuuje się pewnego rodzaju analiza nieoznaczona, w której niewiadomemi będą nie liczby całkowite lecz wielomiany. A w tym razie algiebra weźmie za model arytmetykę, kierując się analogją, jaką wykazuje z liczbą całkowitą bądź wielomian całkowity o jakichkolwiek współczynnikach, bądź wielomian całkowity o współczynnikach całkowitych.

Gieometrja.

Zdawałoby się, że gieometrja nie może zawierać w sobie nic, czegoby nie było już w algiebrze lub w analizie; że fakty gieometryczne nie są niczym innym, jak faktami algiebraicznemi lub analitycznemi, wyrażonemi w innym języku. Możnaby tedy sądzić, że po powyższym przeglądzie arytmetyki i algiebry nie mamy już nic do powiedzenia, coby dotyczyło specjalnie gieometrji. Lecz mniemanie takie równałoby się zapoznaniu wagi dobrze urobionego języka, nierozumieniu tego, co dodaje do samych rzeczy sposób ich wysłowienia a przeto i ich zgrupowania.

Nasamprzód rozważania gieometryczne pobudzają nas do wysuwania nowych zagadnień: są to wprawdzie, jeśli chcecie, zagadnienia analityczne, ale których nie wysunęlibyśmy nigdy ze względu na samą analizę. Analiza wszelako na tym korzysta, podobnie, jak korzysta z zagadnień, które zmuszona jest rozwiązać, aby zaspokoić potrzeby fizyki.

Wielką wyższością gieometrji jest, że w niej zmysły mogą popierać intelekt, pomagają odgadnąć drogę, i wiele umysłów woli sprowadzać zagadnienia analizy do postaci gieometrycznej. Niestety, zmysły nasze nie mogą nas zaprowadzić bardzo daleko i odmawiają nam towarzystwa, skoro tylko zechcemy wylecieć poza trzy klasyczne wymiary. Czy znaczy to, że po wyjściu z tego ograniczonego obszaru, w którym jakgdyby chcą nas one uwięzić, powinniśmy jedynie liczyć na analizę czystą, i że wszelka gieometrja więcej niż trójwymiarowa jest czcza i bezprzedmiotowa? W pokoleniu, które nas poprzedziło, najwięksi mistrze byliby odpowiedzieli »tak«; my dzisiaj tak jesteśmy z tym pojęciem obyci, że możemy o nim mówić nawet w wykładzie uniwersyteckim, nie budząc zbytniego zdziwienia.

Ale jakiż jest z niego użytek? Odpowiedź nietrudna: daje ono nam przedewszystkim bardzo wygodny język, który wyraża w terminach bardzo zwięzłych to, co język zwykły wypowiedziałby w wielosłownych zdaniach. Nadto język ten każe nam nazywać jedną i tą samą nazwą to, co jest do siebie podobne, i uwypukla analogje, wrażając je w sposób niezatarty w naszą pamięć. Pozwala nam więc kierować się w owej zbyt wielkiej i niewidzialnej dla nas przestrzeni, przypominając nam ustawicznie przestrzeń widzialną, która jest wprawdzie niedoskonałym tylko tamtej obrazem, ale przecież jest jej obrazem. I tutaj tedy, podobnie jak w poprzednich przykładach, analogja z rzeczami prostemi pozwala nam rozumieć rzeczy złożone.

Ta gieometrja o więcej niż trzech wymiarach nie jest poprostu gieometrją analityczną, nie jest czysto ilościową, jest również jakościową i głównie tym jest interesująca. Istnieje nauka, zwana *Analysis Situs*, której przedmiotem jest badanie stosunków położenia rozmaitych elementów danej figury, abstrahując od ich wielkości. Gieometrja ta jest czysto jakościową; twierdzenia jej pozostałyby prawdziwe, gdyby figury dokładne zastąpione zostały przez figury zgruba narysowane przez dziecko. Można zbudować *Analysis Situs* o więcej niż trzech wymiarach. Doniosłość *Analysis Situs* jest ogromna i nie mogę wprost położyć na nią zbyt wielkiego nacisku; korzyści, jakie z niej wyciągnął Riemann, jeden z jej twórców, starczyłby za dowód. Musi się powieść zbudować ją całkowicie w przestrzeniach wyższych: będziemy wówczas w posiadaniu narzędzia, które pozwoli istotnie widzieć w nadprzestrzeni i dopełnić braki naszych zmysłów.

Zagadnienia *Analysis Situs* nie byłyby, być może, powstały, gdyby się posługiwano wyłącznie językiem analitycztym; albo raczej — mylę się — powstałyby z pewnością, skoro rozwiązanie ich niezbędne jest dla mnóstwa zagadnień z dziedziny analizy; ale powstałyby jako zagadnienia odosobnione, jedne po drugich, bez ujawnienia łączących je węzłów.

Cantoryzm.

Mówiłem już wyżej o odczuwanej przez nas potrzebie ustawicznego wspinania się znowu do pierwszych zasad naszej nauki, i o korzyści, jaka może stąd płynąć dla badań nad umysłem ludzkim. Ta właśnie potrzeba natchnęła dwie próby, które zajęły znaczne bardzo miejsce w najnowszej historji matematyki. Pierwszą jest cantoryzm, który oddał nauce znane usługi. Cantor wprowadził do nauki nowy sposób rozważania nieskończoności matematycznej, o czym będziemy mieli sposobność mówić w rozdziale VII-ym. Jednym z najcharakterystyczniejszych rysów cantoryzmu jest, że zamiast wznoszenia się ku pojęciom ogólnym przez budowanie konstrukcji coraz bardziej złożonych i definjowania przez konstrukcję, wychodzi on z *genus supremum* i definjuje, jak powiedzieliby scholastycy, jedynie *per genus proximum et differentiam specificam*. Stąd odraza, jaką budził on niekiedy w niektórych umysłach, np. u Hermite'a, którego ulubioną ideją było porównywanie nauk matematycznych do nauk przyrodniczych. U większości z nas uprzedzenie to rozproszyło się; zdarzyło się przecież, że potknięto się o pewne paradoksy, o pewne sprzeczności, ktćre napełniłyby radością Zenona z Elei i szkołę megarską. I oto każdy szuka leku. Moim zdaniem — a jestto zdanie i innych — najważniejszym jest, aby nigdy nie wprowadzać innych tworów prócz tych, które można w zupełności zdefinjować zapomocą skończonej ilości wyrazów. Jakikolwiek z leków się zastosuje, możemy przewidzieć radość lekarza, który będzie miał sposobność obserwować piękny wypadek patologiczny.

Poszukiwanie postulatów.

Z drugiej strony usiłowano wyliczyć pewniki i postulaty mniej lub bardziej ukryte, które stanowią podstawę poszczególnych teorji matematycznych. Hilbert osiągnął w tej dziedzinie świetne wyniki. Zdawałoby się zrazu, że jestto dziedzina wyraźnie ograniczona, i że nie będzie w niej nic do roboty, skoro inwentarz będzie skończony, co musi nastąpić dość rychło. Ale kiedy wszystko będzie wyliczone, będzie dość sposobów rozklasyfikowania wszystkiego; dobry bibljotekarz znajduje zawsze zajęcie, a każda nowa klasyfikacja będzie pouczająca dla filozofa.

Urywam ten przegląd, nie mając żadnych złudzeń co do jego zupełności. Sądzę, że przykłady te wystarczą, by okazać, jaki był mechanizm postępu nauk matematycznych w przeszłości, i w jakim kierunku muszą się one posuwać w przyszłości.

Rozdział III.

Twórczość matematyczna.

Geneza twórczości matematycznej stanowi dla psychologa zagadnienie wybitnie interesujące. Stoi on wobec aktu, w którym umysł ludzki zdaje się czerpać najmniej ze świata zewnętrznego, kiedy działa, istotnie lub pozornie, sam przez się i nad samym sobą, — to też, badając proces myśli matematycznej, można spodziewać się dotrzeć do najwewnętrzniejszej istoty umysłowości ludzkiej.

Zrozumiano to oddawna; przed kilku miesiącami czasopismo »l'Enseignement Mathématique«, wydawane przez Laisanta i Fehra, przeprowadziło ankietę o nawyknieniach umysłowych i metodach pracy matematyków. Główne rysy niniejszego artykułu były już nakreślone, kiedy wyniki tej ankiety zjawiły się w druku; nie mogłem przeto z nich skorzystać, ograniczę się też powiedzeniem, że większość zawartych w nich świadectw potwierdza moje wnioski, — większość tylko, boć kiedy poddajemy się orzeczeniu głosowania powszechnego, nie możemy pochlebiać sobie, że osiągniemy jednomyślność.

Pierwszy fakt, który powinien wzbudzić nasze źdźiwienie, albo raczej powinienby był je wzbudzić, gdybyśmy nie byli doń tak bardzo przyzwyczajeni, polega na tym, że ogromna ilość ludzi nie rozumie matematyki. Skoro matematyka powołuje się jedynie na reguły logiczne, uznane przez wszystkie normalnie funkcjonujące umysły, skoro oczywistość jej jest oparta na zasadach wspólnych wszystkim ludziom, na zasadach, których nikt, o ile nie jest szaleńcem, nie może negować; — tedy czymże się dzieje, że istnieje tyle osób, dla których jest ona zgoła niedostępna?

Że nie każdy posiada zdolność pracy twórczej, niema w tym nic tajemniczego. Że nie wszyscy są w stanie zapamiętać dowodzenie, którego się niegdyś nauczyli, i z tym można się pogodzić. Ale żeby każdy nie mógł pojąć rozumowania matematycznego w chwili, kiedy mu je wykładają, — musi się nam wydać, gdy się nad tym zastanowimy, zgoła dziwnym. A przecież ludzie, którzy z trudem śledzą bieg takiego rozumowania, stanowią większość: nikt nie poda tego w wątpliwość, a i doświadczenie nauczycieli szkół średnich napewno nie zada temu kłamu.

Cowięcej: jakże to jest możliwe, żeby w matematyce popełniano błędy? Zdrowy umysł nie powinien popełniać błędów logiki, a jednak istnieją subtelne głowy, które, choć nie potkną się na krótkim rozumowaniu, jakie się wykonywa w zwykłych sprawach życiowych, przecież nie są zdolne śledzić lub powtórzyć bez błędu dowodzenia matematycznego, dłuższego wprawdzie, ale będącego w końcu jedynie nagromadzeniem drobnych rozumowań zupełnie analogicznych z temi, jakie przeprowadzają z taką łatwością. Czyż trzeba dodać, że i sami matematycy nie są nieomylni?

Jedna tylko, jak mi się zdaje, istnieje na te pytania odpowiedź. Wyobraźmy sobie długi szereg sylogizmów tak ustawionych, że wnioski pierwszych służą za przesłanki następnym: będziemy w stanie zrozumieć każdy z tych sylogizmów, i przechodząc od przesłanek do wniosków, nie narazimy się na zbłądzenie. Lecz między chwilą, kiedy po raz pierwszy napotykamy pewne twierdzenie, jako wniosek z sylogizmu, a chwilą, kiedy znowu je odnajdujemy, jako przesłankę innego sylogizmu, upłynie często dużo czasu, przesunie się wiele ogniw łańcucha; zdarzyć się przeto może, że twierdzenia tego zapomnimy; albo, cogorsza, że zapomnimy, co ono właściwie oznacza. Może się tedy zdarzyć, że zamiast niego weźmiemy inne twierdzenie, nieco różniące się od tamtego, albo że, zachowując dawne brzmienie, nadamy mu treść nieco odmienną, i w ten sposób narazimy się na błąd.

Matematykowi wypada często posługiwać się taką lub inną regułą; oczywiście zanim jej użył po raz pierwszy, dowiódł jej; i w momencie, gdy dowodzenie to tkwiło zupełnie naświeżo w jego pamięci, rozumiał doskonale jego treść i zakres, nie obawiał się, że je wypaczy lub skazi. W następstwie wszakże powierzył je swej pamięci, i stosuje je poprostu w sposób mechaniczny; i wówczas, jeżeli pamięć go zawiedzie, może je zastosować całkiem naopak. Tak np., że wezmę przykład prosty i niemal pospolity, robimy niekiedy błędy rachunkowe dlatego, że zapomnieliśmy tabliczki mnożenia.

Z tego stanowiska szczególne uzdolnienie do matematyki polegałoby na pewności pamięci lub na zdolności do niezwykłego natężania uwagi. Byłaby to zdolność podobna do zdolności gracza w wista, który pamięta, jakie karty już położono; albo, podnosząc się o stopień wyżej, do zdolności gracza w szachy, który potrafi objąć wielką ilość kombinacji i zachować je w pamięci. Każdy dobry matematyk powinienby być zarazem dobrym szachistą i odwrotnie; powinienby on również być dobrym rachmistrzem. Zapewne zdarza się to niekiedy, Gauss np. był jednocześnie gienialnym matematykiem i, za pacholęcych już lat, doskonałym rachmistrzem.

Ale istnieją wyjątki, albo raczej nie są to wyjątki, gdyż są one liczniejsze niż wypadki, odpowiadające regule. Gauss to był właśnie wyjątkiem. Co do mnie, to muszę wyznać, że jestem absolutnie niezdolny zrobić dodawania bez błędu. Byłbym również bardzo złym szachistą; wykalkulowałbym wprawdzie, że robiąc pewien ruch, narażam się na takie a takie niebezpieczeństwo; rozważyłbym kolejno wiele innych posunięć, które odrzuciłbym dla innych racji, i w końcu zrobiłbym posunięcie, nad którym zastanawiałem się już był poprzednio, gdyż tymczasem zapomniałbym o niebezpieczeństwie, które sam przewidziałem.

Słowem, mam pamięć niezłą ale niedostateczną, bym mógł się stać dobrym szachistą. Dlaczegóż nie zawodzi mnie ona wśród rozumowania matematycznego, gdzie zabłądziłaby większość szachistów? Oczywiście dlatego, że wspiera ją poczucie ogólnego biegu rozumowania. Dowodzenie matematyczne nie jest prostym kleceniem sylogizmów, są to sylogizmy, ustawione w pewnym porządku, i porządek, w jakim elementy te są umieszczone, jest daleko ważniejszy niż same te elementy. Jeżeli posiadam czucie, intuicję, że tak powiem, tego porządku, tak, iż obejmuję jednym rzutem oka całość rozumowania, nie mam czego obawiać się, że zapomnę jeden z elementów, każdy sam trafi do przygotowanej dlań ramy, nie wymagając ode mnie żadnego wysiłku pamięci.

Natenczas, kiedy powtarzam rozumowanie, którego się nauczyłem, mam wrażenie, że mógłbym je był sam wynaleźć; jestto często tylko złudzenie; ale nawet w takim razie, nawet jeśli nie jestem dość zdolny, by tworzyć sam, wynajduję je sam ponownie, w miarę tego jak je powtarzam.

Łatwo zrozumieć, że to poczucie, ta intuicja porządku matematycznego, która pozwala nam zgadywać ukryte harmonje i związki, nie może być udziałem każdego. Jedni nie będą posiadali ani tego subtelnego a trudnego do określenia poczucia, ani tej, przewyższającej średnią miarę, siły pamięci i uwagi, a przeto będą zupełnie niezdolni do rozumienia matematyki nieco wyższej; ci są najliczniejsi. Innym poczucie to będzie właściwe w stopniu słabym tylko, ale będą oni obdarzeni niepospolitą pamięcią i wielką zdolnością koncentracji uwagi. Nauczą się na pamięć jednych szczegółów za drugiemi, będą mogli rozumieć matematykę i niekiedy ją stosować, ale nie będą w stanie tworzyć. Inni wreszcie posiadać będą w mniejszym lub większym stopniu wspomnianą specjalną intuicję, i ci nietylko będą mogli rozumieć matematykę, nawet jeżeli nie są obdarzeni nadzwyczajną pamięcią, ale będą mogli stać się twórcami i próbować działalności wynalazczej z powodzeniem mniejszym lub większym, w zależności od stopnia rozwoju ich intuicji.

Czymże bo jest twórczość matematyczna? Nie polega ona na robieniu nowych kombinacji ze znanych już istot matematycznych. To mógłby robić pierwszy lepszy, ale kombinacje, któreby w ten sposób powstały, byłyby nieskończenie liczne, i większość z nich byłaby pozbawiona wszelkiego interesu. Twórczość polega właśnie na tym, by nie konstruować zbytecznych kombinacji, konstruować natomiast istotnie użyteczne, które stanowią nieznaczną mniejszość. Tworzyć — znaczy to rozróżniać, znaczy wybierać.

W tym wyborze za fakty matematyczne godne badania należy uznać te, które przez swe analogje z innemi faktami posiadają moc naprowadzania nas na poznanie praw matematycznych, podobnie jak fakty doświadczalne prowadzą nas do poznania prawa fizycznego. Są to fakty, które objawiają nam nieprzeczuwane z góry powinowactwa między innemi faktami, znanemi oddawna, ale niesłusznie uważanemi za wzajemnie sobie obce.

Pośród kombinacji, na których zatrzyma się nasz wybór, najpłodniejszemi będą często te, które utworzone zostały z elementów, zapożyczonych z dziedzin bardzo od siebie odległych; nie chcę przez to powiedzieć, że, aby tworzyć w matematyce, wystarczy zbliżyć do siebie dwa możliwie różne przedmioty; większość kombinacji, któreby w ten sposób uformowano, byłaby całkowicie jałowa; ale niektóre, bardzo nieliczne, zpośród nich są najpłodniejsze ze wszystkich możliwych.

Tworzyć, jakem powiedział, to wybierać; być może jednak, że wyrażenie to nie jest zupełnie trafne, gdyż nasuwa ono obraz kupującego, któremu przedstawiają mnóstwo próbek, i który ogląda je kolejno, by dokonać wyboru. Tutaj ilość próbek byłaby tak wielka, że nie starczyłoby całego życia na ich obejrzenie. W rzeczywistości wybór odbywa się inaczej. Jałowe kombinacje nie powstaną nawet w umyśle twórcy. W polu jego świadomości zjawiać się będą zawsze kombinacje istotnie użyteczne, i te nawet, które odrzuci, odznaczać się będą w pewnym stopniu cechami kombinacji użytecznych. Wygląda to tak, jakgdyby wynalazca był egzaminatorem drugiego stopnia, którego zadaniem jest ściślejsze przesłuchiwanie kandydatów, uznanych już po pierwszym egzaminie za dostatecznie uzdolnionych.

Wszystko, com powiedział powyżej, możnaby zaobserwować lub wywnioskować, czytając pisma matematyków, byle czytać je z dostateczną rozwagą.

Aby przeniknąć głębiej, trzeba zobaczyć, co się dzieje w samej duszy matematyka. W tym celu najlepiej zapewne będzie, jeśli wyłożę osobiste swe wspomnienia. Ograniczę się opowiedzeniem, jak napisałem moją pierwszą rozprawę o funkcjach fuchsowskich. Muszę z góry przeprosić za to, że użyję paru wyrażeń technicznych, ale nie powinny one odstraszyć czytelnika, gdyż nie ma on bynajmniej koniecznej potrzeby je rozumieć. Powiem, np., że znalazłem dowodzenie takiego a takiego twierdzenia, w takich a takich okolicznościach, twierdzenie to będzie miało barbarzyńską nazwę, której wielu czytelników nie będzie znało, lecz nie ma to żadnej wagi; interesującym dla psychologa jest nie twierdzenie lecz okoliczności.

Od dwu tygodni usiłowałem dowieść, że nie może istnieć żadna funkcja analogiczna z funkcjami, które później nazwałem fuchsowskiemi; wiedza moja była wówczas wielce ograniczona; co dnia siadałem do biurka, przepędzałem przy nim godzinę lub dwie, próbowałem wielkiej ilości kombinacji i nie dochodziłem do żadnych wyników. Pewnego wieczoru napiłem się, wbrew mym nawyknieniom, czarnej kawy i nie mogłem zasnąć; myśli rodziły się rojami; czułem, że się jak gdyby obijają jedne o drugie, aż dwie zahaczyły się o siebie i utworzyły trwałą kombinację. Rano ustanowiłem istnienie pewnej klasy funkcji fuchsowskich, tych mianowicie, które pochodzą od szeregu hypergieometrycznego; pozostawało mi tylko zredagowanie wyników, co zabrało nie więcej nad kilka godzin czasu.

Chciałem następnie przedstawić te funkcje przez iloraz dwu szeregów; pomysł ten był zupełnie świadomy i celowy; kierowałem się analogją z funkcjami eliptycznemi. Zadałem sobie pytanie, jakie powinnyby były być własności tych szeregów, gdyby one istniały, i doszedłem bez trudności do utworzenia szeregów, które nazwałem tetafuchsowskiemi.

W tym momencie opuściłem Caen, gdzie mieszkałem był wówczas, by wziąć udział w wycieczce gieologicznej, zorganizowanej przez Szkołę Górniczą. Perypetje podróży sprawiły, żem zapomniał o swych pracach matematycznych; po przybyciu do Coutances wsiedliśmy do omnibusu, aby udać się na jakiś spacer; w chwili, kiedy stawiałem nogę na stopniu, przyszło mi do głowy — chociaż nic w moich poprzedzających myślach nie zdawało się być do tego przygotowaniem — że przekształcenia, których użyłem dla definicji funkcji fuchsowskich, są identyczne z przekształceniami gieometrji nie-euklidesowej. Nie sprawdziłem tego; nie miałbym na to czasu, gdyż skoro tylko usiadłem w omnibusie, powróciłem do rozpoczętej poprzednio rozmowy — ale miałem odrazu całkowitą pewność, że tak jest. Po powrocie do Caen, z wypoczętą głową, poddałem ową myśl sprawdzeniu, dla spokoju sumienia.

Zająłem się następnie studjowaniem zagadnień arytmetycznych bez dużego napozór skutku, i nie podejrzewając, by miało to jakikolwiek związek z memi poprzedniemi badaniami. Zniechęcony niepowodzeniem, pojechałem przepędzić parę dni nad brzegiem morza i myślałem o czymś zupełnie innym. Pewnego dnia, gdym się przechadzał po skałach nadbrzeżnych, zjawiła mi się myśl — znowu tak krótka, nagła i nacechowana absolutną pewnością, — że przekształcenia arytmetyczne form kwadratowych trójkowych nieoznaczonych są identyczne z przekształceniami gieometrji nie-euklidesowej.

Powróciwszy do Caen zastanowiłem się nad tym wynikiem, i wyprowadziłem zeń pewne konsekwencje; przykład form kwadratowych wskazywał mi, że istnieją grupy fuchsowskie poza temi, które odpowiadają szeregowi hypergieometrycznemu; przekonałem się, że można do nich zastosować teorję szeregów tetafuchsowskich, i że przeto istnieją funkcje fuchsowskie odmienne od funkcji, wywodzących się z szeregu hypergieometrycznego, jedynych, które znałem przedtym. Oczywiście założyłem sobie znalezienie wszystkich tych funkcji; poddałem je systematycznemu oblężeniu i zdobywałem kolejno najbardziej wysunięte placówki; były przecież takie, które trzymały się jeszcze, i tych właśnie upadek pociągnąłby za sobą poddanie się głównej pozycji. Zrazu wszystkie moje wysiłki nie dały mi nic ponad lepszą znajomość trudności, jakie należało pokonać, co też było już coś warte. Cała ta praca odbywała się zupełnie świadomie.

Następnie pojechałem do Mont-Valérien, gdzie miałem odsłużyć wojskowość; zaprzątnięty więc byłem czymś zupełnie innym, niż poprzednio. Pewnego dnia, gdym przechodził przez bulwar, zjawiło się w moim umyśle rozwiązanie trudności, która mnie zatrzymywała. Nie próbowałem natychmiast głębiej się nad nim zastanowić, i dopiero po skończeniu terminu ćwiczeń wojskowych powróciłem do tej kwestji. Byłem w posiadaniu wszystkich elementów rozwiązania, pozostawało mi jedynie zebrać je i uporządkować. To też zredagowałem ostateczną swą rozprawę jednym tchem i bez trudu.

Ograniczę się tym jednym przykładem, niema bowiem celu je mnożyć; o innych moich badaniach musiałbym dać relacje zupełnie podobne do powyższej; a spostrzeżenia, podane przez innych matematyków w ankiecie miesięcznika »Enseignement Mathématique«, potwierdzają tylko moje uwagi.

Co uderza przedewszystkim, to te napozór nagłe olśnienia, jawne oznaki długiej poprzedzającej nieświadomej pracy; rola, jaką nieświadoma ta praca odgrywa w twórczości matematycznej, wydaje mi się bezsporną, ślady jej można odnaleźć w innych wypadkach, kiedy mniej rzuca się ona w oczy. Często się zdarza, że, kiedy pracujemy nad jakąś trudniejszą kwestją, za pierwszym razem nie dochodzimy do żadnych wyników; następnie urządzamy sobie krótszy lub dłuższy odpoczynek i znowu siadamy do stołu; w ciągu pierwszej pół godziny nie trafia się znowu nic ciekawego, poczym raptem zjawia się w umyśle idea decydująca. Powiedziećby można, że praca świadoma była bardziej owocna, dlatego że ją przerwano i odpoczynek wrócił umysłowi moc i świeżość. Ale prawdopodobniejsze jest, że odpoczynek był zapełniony nieświadomą pracą, i że wynik tej pracy objawił się później matematykowi zupełnie tak, jak to było w wypadkach, które opisałem; różnica polega jedynie na tym, że objawienie nie nastąpiło podczas przechadzki lub podróży, lecz zaszło w czasie świadomej pracy ale niezależnie od tej pracy, która odgrywa tutaj conajwyżej rolę wyładowywacza, jest jakgdyby ostrogą, pobudzającą osiągnięte podczas odpoczynku lecz nieuświadomione jeszcze rezultaty do przybrania postaci świadomej.

Inna jeszcze nasuwa się uwaga, dotycząca warunków tej nieświadomej pracy; oto, aby ona była możliwa, a w każdym razie, aby była płodna, trzeba koniecznie, żeby zarówno przed nią jak po niej istniał okres pracy świadomej. Nigdy — i przytoczone przezemnie przykłady dostatecznie tego dowodzą — nagłe te natchnienia nie występują inaczej jak po kilku dniach celowych wysiłków, które, jak się wydawało, były zupełnie bezpłodne, nie dały nic pozytywnego, biegły po błędnej drodze. Wysiłki te nie były wszakże, jak się później okazało, tak jałowe, wprawiły one w ruch nieświadomą maszynę, która bez nich nie potrafiłaby pracować i niczegoby nie wytworzyła.

Konieczność drugiego okresu prasy świadomej po natchnieniu łatwiej jeszcze jest zrozumiała. Trzeba wyzyskać wyniki jego natchnienia, wyprowadzić z nich bezpośrednie konsekwencje, uporządkować je, zredagować dowodzenia, ale, nadewszystko, trzeba je sprawdzić. Mówiłem o poczuciu bezwzględnej pewności, cechującym natchnienie; w przytoczonych wypadkach poczucie to nie było zwodnym, i tak też bywa najczęściej; nie należy wszakże sądzić, że jestto reguła bez wyjątku; często poczucie to pomimo całej swej żywości zawodzi, a przekonywamy się o tym wówczas, kiedy chcemy nadać dowodzeniu postać uporządkowaną i dostępną dla innych. Fakt ten obserwowałem zwłaszcza w stosunku do pomysłów, na które wpadałem rano lub wieczorem, leżąc w łóżku, w stanie półsennym.

Takie są fakty; a oto uwagi, jakie one rodzą. »Ja« nieświadome, czyli, jak się mówi, »ja« subliminalne, podświadome, odgrywa w twórczości matematycznej rolę kapitalną — wynika to z wszystkiego, cośmy powiedzieli. Ale zazwyczaj »ja« podświadome uważamy za czysto automatyczne. Otóż, jak widzieliśmy, praca automatyczna nie jest prostą pracą mechaniczną, nie można jej powierzyć maszynie, jakkolwiek wysokie byłoby jej udoskonalenie. Nie idzie tu tylko o stosowanie reguł, o fabrykowanie największych ilości możliwych kombinacji według pewnych praw stałych. Kombinacje, jakieby w ten sposób otrzymano, byłyby nadzwyczajnie liczne, bezużyteczne i zawadzające. Prawdziwa praca twórcy polega na dokonaniu zpośród tych kombinacji wyboru, rugującego rzeczy bezużyteczne, albo raczej na niezadawaniu sobie trudu fabrykowania ich. Reguły, które kierują tym wyborem, są niezmiernie subtelne i misterne, niepodobna niemal wyrazić ich w ścisłym wysłowieniu; czuje się je raczej, niż formułuje; jakżeby się wobec tego miało wyobrazić sobie sito, zdolne mechanicznie je stosować?

Nasuwa się tedy pierwsza hypoteza: »ja« podświadome nie jest bynajmniej niższe od »ja« świadomego; nie jest ono czysto automatyczne, zdolne jest rozróżniać, posiada takt i zręczność; umie wybierać, umie zgadywać. Więcej jeszcze: umie lepiej zgadywać niż »ja« świadome, gdyż powodzi mu się tam, gdzie to ostatnie spotkał zawód. Czyż więc »ja« podświadome nie jest wyższe nad »ja« świadome? Jasne jest, jakiej doniosłości jest to pytanie. Boutroux w niedawno wygłoszonym odczycie opowiedział, jak to samo pytanie wysunęło się w zupełnie innych sprawach, oraz jakie konsekwencje pociągnęłaby za sobą odpowiedź twierdząca. (Patrz również książkę tegoż autora p. t. »Nauka a Religja« str. 313 i następne).

Czy wyłożone przeze mnie fakty narzucają tę odpowiedź twierdzącą? Przyznam się, że co do mnie, na taką odpowiedź zgodziłbym się chyba z najżywszą niechęcią. Przyjrzyjmy się przeto raz jeszcze faktom i zastanówmy się, czy nie dałyby się one objąć innym wytłumaczeniem.

Pewne jest, że kombinacje, nasuwające się umysłowi w pewnego rodzaju olśnieniu, po dość długiej pracy nieświadomej, są naogół kombinacjami użytecznemi i płodnemi, zdają się być wytworami pierwotnie dokonanego doboru. Czy z tego wynika, że »ja« podświadome zgadło przez swą subtelną intuicję użyteczność tych kombinacji i utworzyło tylko te, czy też utworzyło wiele innych, pozbawionych interesu, i te pozostały nieuświadomionemi.

Gdyby słuszna była druga hypoteza, wszystkie kombinacje tworzyłyby się automatycznie w podświadomym »ja«, ale do pola świadomości docierałyby jedynie te, które przedstawiają pewien interes. I to przypuszczenie jest jeszcze nacechowane tajemniczością. Jakaż to przyczyna sprawia, że wśród tysiąca wytworów naszej nieświadomej działalności umysłowej jedne są powołane do przekroczenia progu, podczas gdy inne pozostają przed nim? Czy nadanie tego przywileju jest sprawą czystego przypadku? Oczywiście, że nie; np. zpośród wszystkich podniet, działających na nasze zmysły, uwagę naszą przyciągną jedynie najsilniejsze, chyba, że inne skierują ją na nie przyczyny. Mówiąc ogólniej, uprzywilejowanemi wśród zjawisk nieświadomych, t. j. zdolnemi dotrzeć do świadomości, są te, które bezpośrednio lub pośrednio najmocniej zahaczają naszą wrażliwość.

Dziwne się może wyda powoływanie się na wrażliwość, gdy mówimy o twierdzeniach matematycznych, które zdawałoby się, wchodzą w zakres jedynie intelektu. Przypomnijmy tedy, że istnieje uczucie piękna matematycznego, harmonji liczb i kształtów, wytworności gieometrycznej. Jest ono prawdziwym uczuciem estetycznym, dobrze znanym wszystkim prawdziwym matematykom. I wkracza niewątpliwie w dziedzinę wrażliwości.

Owóż, jakie to istoty matematyczne posiadają dla nas owe cechy piękna i wytworności, zdolne są wywoływać pewnego rodzaju wzruszenie estetyczne? Te, których elementy rozłożone są harmonijnie, tak, iż umysł bez wysiłku obejmuje ich całość, przenikając zarazem szczegóły. Harmonja ta jest jednocześnie zadowoleniem naszych potrzeb estetycznych i pomocą dla umysłu, który podpiera i który prowadzi. Kładąc przed oczy całość, w której panuje ład, każe nam przeczuwać istnienie prawa matematycznego. A powiedzieliśmy wyżej, że jedynemi faktami matematycznemi, które zasługują na naszą uwagę i mogą się stać użytecznemi, są te, które mogą nam ujawnić jakieś prawo matematyczne. Dochodzimy tedy do następującego wniosku. Kombinacjami użytecznemi są właśnie kombinacje najpiękniejsze, to znaczy te, które zdolne są wywrzeć urok na ową szczególną wrażliwość, znaną wszystkim matematykom, a tak obcą profanom, że często, słysząc o niej, tłumić muszą uśmiech.

Cóż występuje natenczas? Śród bardzo wielkiej ilości kombinacji, które naślepo wytworzyło »ja« podświadome, niemal wszystkie są pozbawione interesu i bezużyteczne; ale tym samym nie działają one na naszą wrażliwość estetyczną; świadomość nigdy ich nie pozna; niektóre tylko są harmonijne a przeto są jednocześnie użyteczne i piękne, sa one zdolne wzruszyć ową szczególną wrażliwość matematyka, której podrażnienie ściągnie na nie jego uwagę, i w ten sposób pozwoli im przejść do świadomości.

Jestto tylko hypoteza, wszelako następujące spostrzeżenie zdaje się ją potwierdzać: kiedy nagłe olśnienie opanuje umysł matematyka, najczęściej go ono nie zwodzi; ale zdarza się też niekiedy, że wyniki jego nie wytrzymują próby sprawdzenia, otóż prawie zawsze daje się zauważyć, że i ten chybiony pomysł, gdyby się okazał trafnym, odpowiadałby doskonale naszemu naturalnemu instynktowi wytworności matematycznej.

Tak więc wrażliwość estetyczna odgrywa rolę owego subtelnego sita, i dlatego ten, kto nie jest nią obdarzony, nie będzie nigdy prawdziwym twórcą.

Ale to nie rozstrzyga jeszcze bynajmniej wszystkich trudności; »ja« świadome jest wielce i ostro ograniczone; natomiast granic »ja« poświadomego nie znamy, i dlatego bez wielkiej odrazy skłonni jesteśmy przypuścić, że w ciągu krótkiego czasu może ono utworzyć więcej rozmaitych kombinacji, niż zmieścićby się mogło w całym żywocie świadomego człowieka. Jednakże granice te istnieją; czyż jest prawdopodobne, by było ono w stanie utworzyć wszystkie możliwe kombinacje w ilości takiej, że pomyślenie jej budzi lęk w wyobraźni? a przecież byłoby to niezbędne, albowiem, jeśli utworzy ono tylko małą część tych możliwych kombinacji, i jeśli zrobi to na chybi-trafi, to mało będzie szans, że kombinacja dobra, ta, którą trzeba właśnie wybrać, będzie się wśród nich znajdowała.

Wytłumaczenia trzeba, być może, szukać w owym okresie świadomej pracy wstępnej, poprzedzającej zawsze wszelką owocną pracę nieświadomą. Niechaj będzie mi wolno zrobić zgruba porównanie zmysłowe. Wyobraźmy sobie przyszłe elementy naszych kombinacji w postaci podobnej do haczykowatych atomów Epikura. Podczas zupełnego spoczynku umysłu atomy te są nieruchome, są one, że tak powiem, przyczepione do muru; zupełny spoczynek może trwać nieograniczenie, atomy te nie spotkają się ze sobą i przeto nie będą mogły utworzyć żadnej kombinacji.

Natomiast w ciągu okresu spoczynku pozornego a właściwie nieświadomej pracy, niektóre z nich odczepiają się od muru i zostają wprawione w ruch. Przebiegają przestrzeń — omal nie powiedziałem: pokój, w którym są zawarte — we wszystkich kierunkach, jakgdyby stanowiły rój komarów albo, jeśli kto woli porównanie bardziej uczone, jak molekuły gazowe z teorji kinetycznej gazów. Wzajemne ich zderzenia mogą natenczas tworzyć nowe kombinacje.

Jakaż jest rola wstępnej świadomej pracy? Polega ona oczywiście na uruchomieniu niektórych z tych atomów, na odczepieniu ich od muru i rozkołysaniu. Badaczowi wydaje się, że nie zrobił nic pozytywnego, bo mieszał elementy na tysiąc różnych sposobów, próbując je ułożyć, i nie zdołał znaleźć zadawalającego układu. Aliści po tym poruszeniu, narzuconym im przez naszą wolę, atomy nie powracają do stanu pierwotnego spoczynku. Kontynuują swobodnie swój taniec.

Owóż nasza wola nie wybrała tych atomów na chybitrafi; kierowała się doskonale określonym celem; uruchomione atomy nie są tedy jakiemikolwiek atomami; są to te, po których można się zasadnie spodziewać, że dadzą poszukiwane rozwiązanie. Uruchomione atomy będą się w swym biegu uderzały wzajem o siebie, oraz o inne, jeszcze nieruchome, o ile o nie zawadzą. Raz jeszcze radbym przeprosić za moje nieokrzesane porównanie; ale nie wiem doprawdy, jakbym potrafił inaczej opowiedzieć myśl moją.

Tak czy owak, jedynemi kombinacjami, które mają szanse utworzenia się, są te, w których conajmniej jeden z elementów jest jednym zpośród atomów, świadomie obranych przez naszą wolę. A jasne jest, że wśród tych właśnie kombinacji znajduje się ta, którą powyżej nazwałem »dobrą kombinacją«. Ta okoliczność łagodzi w znacznej mierze paradoksalność hypotezy pierwotnej.

Inna uwaga. Nie zdarza się nigdy, żeby nieświadoma praca dostarczała nam gotowego rezultatu nieco dłuższego rachunku, który polega jedynie na stosowaniu stałych reguł. Możnaby mniemać, że »ja« podświadome, jako całkiem automatyczne, szczególnie powinnoby być zdolne wykonywać tego rodzaju poniekąd czysto mechaniczną pracę. Zdawałoby się, że, pomyślawszy sobie wieczorem czynniki mnożenia, należy się spodziewać, że, budząc się rano, będziemy mieli gotowy iloczyn, albo też, że można wykonać nieświadomie rachunek algiebraiczny, rachunek sprawdzenia naprzykład. Tymczasem doświadczenie dowodzi, że niema nic podobnego. Natchnienia, owoc owej nieświadomej pracy, nie mogą dać nic ponad punkty wyjścia dla podobnych rachunków; same zaś rachunki muszą być wykonane w ciągu drugiego okresu pracy świadomej, który następuje po natchnieniu, kiedy to sprawdza się wyniki tego natchnienia i wyprowadza z nich konsekwencje. Reguły tych rachunków ścisłe są i zawiłe; wymagają one dyscypliny, uwagi, woli a przeto świadomości. Natomiast w »ja« podświadomym sprawuje rządy wolność, gdyby można było dać tę nazwę prostemu brakowi dyscypliny i bezładowi, zrodzonemu przez przypadek. A ten właśnie bezład pozwala na tworzenie się niespodzianych skojarzeń.

Jedną jeszcze, ostatnią, zrobię uwagę: przytaczając powyżej parę osobistych spostrzeżeń, mówiłem o spędzonej bezsennie nocy, podczas której naskutek podniecenia pracowałem jakgdyby mimowoli; wypadki takie są częste i nie jest konieczne, by anormalna działalność umysłowa była wywołana, jak podówczas u mnie, podniecającym środkiem fizycznym. Otóż wygląda to tak, jakgdybyśmy w takich wypadkach byli świadkami swojej własnej nieświadomej pracy, która stała się częściowo dostrzegalna dla naszej podnieconej świadomości, nie zmieniając wszakże przytym nic ze swej natury. Pozwala to nam zdać sobie jako tako sprawę z różnic zachodzących między obu mechanizmami, lub, jeśli kto woli, między metodami pracy obu »ja«. Jakoż spostrzeżenia psychologiczne, które w ten sposób poczyniłem, potwierdzają jak mi się zdaje, w głównych zarysach sformułowane przeze mnie powyżej poglądy.

A poglądy te, zaiste, potrzebują takich potwierdzeń, gdyż, pomimo wszystko, są one i pozostają bardzo hypotetycznemi: jednakże interes, jaki poruszona kwestja przedstawia, jest tak wielki, że nie żałuję, iż podzieliłem się niemi z czytelnikiem.

Rozdział IV.

P r z y p a d e k.

I.

»Jakże można odważyć się mówić o prawach przypadku? Czyż przypadek nie jest antytezą wszelkiego prawa?« Od tych słów rozpoczyna Bertrand swój R a c h u n e k p r a w d o p o d o b i e ń s t w a. Prawdopodobieństwo jest przeciwieństwem pewności; jestto to, czego się nie wie, i czego przeto nie umie się wyrachować. Tkwi w tym sprzeczność conajmniej pozorna, o której też wiele już pisano.

Przedewszystkim: cóż to jest przypadek? Starożytni rozróżniali zjawiska, które zdawały się podlegać prawom harmonijnym, ustanowionym raz na zawsze, oraz zjawiska, które przypisywali przypadkowi; te ostatnie były to zjawiska, których nie można było przewidywać, gdyż były oporne wszelkiemu prawu. Prawa ścisłe nie decydowały o wszystkim, co się działo w każdej poszczególnej dziedzinie, wykreślały one jedynie granice, między któremi wolno było obracać się przypadkowi. W takim pojmowaniu wyraz przypadek posiadał sens ścisły, objektywny: co było przypadkiem dla jednego człowieka było również przypadkiem dla drugiego i nawet dla bogów.

Lecz takie pojmowanie nie jest już naszym; myśmy się stali bezwzględnemi deterministami, i ci nawet, co chcą zastrzec prawa ludzkiej wolnej woli, pozwalają determinizmowi panować niepodzielnie przynajmniej w świecie nieorganicznym. Każde zjawisko, jakkolwiek drobne, ma przyczynę, i umysł nieskończenie potężny, nieskończenie dobrze powiadomiony o prawach przyrody mógłby był je przewidzieć u samego zarania wieków. Gdyby umysł taki istniał, nie możnaby było grać z nim w żadną grę hazardowną, bo zawszeby się przegrywało.

Albowiem wyraz przypadek nie miałby dlań sensu, albo raczej nie byłoby wcale przypadku. Dla nas przypadek istniałby dzięki naszej słabości i niewiadomości. Nie wychodząc zresztą nawet poza naszą słabą ludzkość, to, co jest przypadkiem dla nieuka, nie jest nim dla uczonego. Przypadek jest jedynie miarą naszej niewiadomości. Zjawiskami przypadkowemi są, mocą definicji, te, których praw nie znamy.

Czy wszelako definicja ta jest zadawalająca? Kiedy pasterze chaldejscy śledzili oczyma ruchy gwiazd, nie znali oni jeszcze praw Astronomji, a czyżby myśleli, że gwiazdy poruszają się na traf szczęścia? Gdy nowoczesny fizyk bada nowe zjawisko i odkrywa rządzące nim prawo we wtorek, to czyżby powiedział on w poniedziałek, że zjawisko to jest przypadkowe? Co więcej; czyż się często nie powołuje przy przewidywaniu pewnego zjawiska na to, co Bertrand nazwał prawami przypadku? W teorji kinetycznej gazów np. odnajdujemy znane prawa Mariotte'a i Gay-Lussaca dzięki hypotezie, że prędkości molekuł gazowych zmieniają się w sposób nieprawidłowy, czyli przypadkowo. Dostrzegalne prawa byłyby o wiele mniej proste, powiedzą wszyscy fizycy, gdyby prędkościami rządziło jakieś proste prawo elementarne, gdyby, jak się mówi, były one zorganizowane, gdyby podlegały jakiejś dyscyplinie. Dzięki przypadkowi właśnie, to jest dzięki naszej niewiadomości czy nieuctwu możemy wyprowadzać wnioski co do tych praw dostrzegalnych; jeżeli tedy wyraz przypadek jest poprostu synonimem niewiadomości, to cóż to wszystko znaczy? Czy należy to rozumieć tak oto:

»Żądacie, bym przepowiedział zjawiska, które nastąpią. Gdybym, na nieszczęście, znał prawa tych zjawisk, przepowiednia ta wymagałaby odemnie rachunków, z których niepodobna wybrnąć, i byłbym zmuszony zrzec się dania wam odpowiedzi; ponieważ jednak na szczęście nie znam ich, odpowiem wam odrazu. I co najosobliwsza, odpowiedź moja będzie trafna«.

Musi więc przypadek być czymś innym niż nazwą, jaką nadajemy naszej niewiadomości między zjawiskami, których przyczyn nie znamy, musimy rozróżniać zjawiska przypadkowe, o których rachunek prawdopodobieństwa da nam prowizoryczne wiadomości, oraz zjawiska, które nie są przypadkowe, i o których nie możemy nic powiedzieć, dopóki nie oznaczymy kierujących niemi praw. Co zaś dotyczy samych zjawisk przypadkowych, to jasnym jest, że wiadomości, jakich nam o nich dostarcza rachunek prawdopodobieństwa, nie przestaną być prawdziwe z chwilą, gdy zjawiska te zostaną lepiej poznane.

Dyrektor towarzystwa ubezpieczeń na życie nie wie, kiedy umrze każdy z ubezpieczonych, ale liczy on na rachunek prawdopodobieństwa i na prawo wielkich liczb, i nie błądzi, skoro rozdaje dywidendy swoim akcjonarjuszom. Dywidendy te nie zniknęłyby, gdyby przenikliwy bardzo i bardzo niedyskretny lekarz przyszedł i po podpisaniu polis powiadomił dyrektora o szansach życia każdego z ubezpieczonych. Lekarz ten rozproszyłby niewiadomość dyrektora, lecz nie miałby żadnego wpływu na dywidendy, które oczywiście nie są wytworem tej niewiadomości.

II.

Aby znaleźć lepszą definicję przypadku, trzeba rozpatrzeć kilka zpośród faktów, które się zgodnie uważa za przypadkowe, i do których rachunek prawdopodobieństwa zdaje się stosować; zbadamy następnie, jakie są ich cechy wspólne.

Jako pierwszy przykład rozpatrzymy równowagę nietrwałą; wiemy o stożku, który opiera się na swym wierzchołku, że upadnie, tylko nie wiemy, w którą stronę; zdaje nam się, że zadecyduje o tym jedynie przypadek. Gdyby nasz stożek był doskonale symetryczny, gdyby oś jego była doskonale pionowa, gdyby nie ulegał żadnej innej sile prócz ciężkości, nie upadłby wcale. Lecz najmniejsza skaza w symetrji przechyli go zlekka w tę lub inną stronę, a skoro tylko przechyli się on choć trochę, tedy upadnie całkowicie w tę stronę. Gdyby nawet symetrja była doskonała, najlżejsze drgnięcie, najsłabszy powiew powietrza, zdoła go przechylić o łuk parosekundowy; wystarczy to, by zdecydować o jego upadku a nawet o kierunku tego upadku, który będzie ten sam, co kierunek początkowego nachylenia.

Drobna, nie podpadająca pod naszą obserwację przyczyna wywołuje znaczny, rzucający się w oczy skutek, i mówimy wówczas, że skutek ten jest dziełem przypadku. Gdybyśmy dokładnie znali prawa przyrody i stan wszechświata w chwili początkowej, moglibyśmy dokładnie przepowiedzieć stan tego samego wszechświata w chwili późniejszej. Ale nawet wówczas, gdyby prawa przyrody nie miały już dla nas tajemnic, nie moglibyśmy znać stanu początkowego inaczej niż w p r z y b l i ż e n i u. Jeśli pozwala nam to przewidzieć stan późniejszy z t y m s a m y m p r z y b l i ż e n i e m, tedy mamy wszystko, czego nam potrzeba, mówimy, że zjawisko było przewidziane, że kierują nim prawa; lecz nie zawsze tak jest; zdarzyć się może, że małe różnice w warunkach początkowych wywołują duże różnice w zjawiskach końcowych; mały błąd przy ujęciu tamtych dałby wówczas ogromny w ujęciu tych. Przewidywanie staje się niemożliwe, mamy zjawisko przypadkowe.

Drugi nasz przykład będzie bardzo podobny do pierwszego; zaczerpniemy go z meteorologji. Dlaczego meteorologowie mają takie trudności przy przepowiadaniu pogody z jaką taką pewnością? Dlaczego deszcze a nawet burze zdają się nam nawiedzać nas za sprawą przypadku, tak, iż wielu ludzi uważa za całkiem naturalne modlić się o deszcz lub pogodę, kiedy ci sami uznaliby za śmieszne wznosić modły o zaćmienie? Stwierdzamy, że wielkie zakłócenia atmosferyczne zachodzą naogół w okolicach, w których atmosfera znajduje się w stanie równowagi nietrwałej. Meteorologowie widzą wprawdzie, że równowaga jest nietrwała, że gdzieś utworzy się cyklon; ale nie są w stanie orzec, gdzie; różnica jednej dziesiątej stopnia w tę lub tamtą stronę od pewnego punktu sprawia, że cyklon wybucha nie tu lecz tam i sieje spustoszenia w miejscowości, którą byłby w przeciwnym razie pozostawił nietkniętą. Gdybyśmy znali tę dziesiątą część stopnia, moglibyśmy przewidzieć to z góry, lecz doświadczenia nie były ani dość gęste, ani dość dokładne, i dlatego wszystko zdaje się być dziełem przypadku. I tutaj znowu odnajdujemy ten sam kontrast między minimalną różnicą niedostrzegalną dla obserwatora, a skutkami znacznemi, które mogą się stać niekiedy okropnemi klęskami.

Przejdźmy do innego przykładu: do repartycji małych planet na zodjaku. Początkowe ich długości mogły być jakiekolwiek; ale ich średnie ruchy były różne, krążą one od tak dawna, że można rzec, iż obecny ich rozkład wzdłuż zodjaku jest dziełem p r z y p a d k u. Bardzo małe różnice początkowe między ich odległościami od słońca, albo, co wychodzi na jedno, między ich ruchami średniemi doprowadziłyby w końcu do olbrzymich różnic między ich obecnemi długościami; w samej bowiem rzeczy nadmiar jednej tysiącznej sekundy w średnim ruchu dziennym da po upływie trzech lat jedną sekundę, po dziesięciu tysiącach lat jeden stopień, cały zaś okrąg po trzech czy czterech miljonach lat — a cóż to znaczy w zestawieniu z czasem, jaki upłynął od chwili, gdy małe planety oderwały się od mgławicy Laplace'a? Oto więc raz jeszcze mała przyczyna i wielki skutek; albo raczej małe różnice w przyczynie i wielkie różnice w skutku.

Gra w ruletę nie tak bardzo odbiega, jakby się zdawało, od powyższego przykładu. Niechaj będzie wskazówka, którą można puszczać w ruch obrotowy dookoła osi po tarczy, podzielonej na 100 wycinków naprzemian czerwonych i czarnych. Jeśli zatrzyma się na wycinku czerwonym, partja jest wygrana, w przeciwnym razie jest przegrana. Wszystko zależy oczywiście od początkowego pchnięcia wskazówki. Wskazówka zrobi 10 lub 20 obrotów i zatrzyma się mniej lub bardziej rychło w zależności od tego, czy pchnąłem ją silniej czy słabiej. Ale różnica jednej tysiącznej czy jednej dwutysiącznej w sile pchnięcia wystarczy, by wskazówka zatrzymała się bądź przy wycinku czarnym, bądź przy wycinku sąsiednim t. j. czerwonym. Różnic takich nie postrzega nasz zmysł mięśniowy, nie chwytają ich nawet najsubtelniejsze nasze przyrządy. Nie jestem tedy w stanie przewidzieć, co zrobi wskazówka, którą w ruch puściłem, i dlatego serce me bije, i czekam, co mi przyniesie przypadek. Różnica w przyczynie jest niepostrzegalna, różnica w skutku ma dla mnie ogromną wagę, gdyż decyduje ona o całej mojej stawce.

III.

Niechaj mi będzie wolno przy tej sposobności zrobić uwagę nieco obcą memu przedmiotowi. Pewien filozof powiedział przed kilku laty, że przyszłość jest oznaczona przez przeszłość, lecz przeszłość nie jest oznaczona przez przyszłość; czyli, innemi słowy, że ze znajomości teraźniejszości możemy wyprowadzić znajomość przyszłości, lecz nie znajomość przeszłości; albowiem, twierdził, jedna przyczyna wywołuje jeden określony skutek, podczas gdy jeden i ten sam skutek może być wywołany przez kilka różnych przyczyn. Oczywista, żaden człowiek nauki nie podzieli takiego poglądu; prawa przyrody wiążą poprzednik z następnikiem w sposób taki, że poprzednik jest określony przez następnik równie dobrze jak następnik przez poprzednik. Lecz jakież było źródło błędu owego filozofa? Wiemy, że według zasady Carnota zjawiska fizyczne są nieodwracalne, i że świat zdąża do jednostajności. Kiedy dwa ciała o różnej temperaturze znajdują się obok siebie, cieplejsze oddaje część swego ciepła zimniejszemu; możemy przeto przewidzieć, że się temperatury wyrównają. Skoro przecież temperatury staną się równe, tedy cóż będziemy mogli powiedzieć o stanie dawniejszym układu? Powiemy wprawdzie, że jedno z ciał było ciepłe a drugie zimne, ale nie będziemy w stanie odgadnąć, które z nich było dawniej cieplejsze.

Jednakże w rzeczywistości temperatury nie staną się nigdy doskonale równe. Różnica temperatur zdąża tylko do zera w sposób asymptotyczny. Następuje moment, kiedy nasze termometry nie są już dość czułe, aby różnicę tę ujawniać. Gdybyśmy przecież rozporządzali termometrami tysiąc, sto tysięcy razy czulszemi, przekonalibyśmy się, że istnieje jeszcze mała różnica temperatury, że jedno z ciał pozostało trochę cieplejsze niż drugie: pozwoliłoby nam to twierdzić, że to właśnie ciało było niegdyś o wiele cieplejsze niż tamto.

Bywają tedy, w przeciwieństwie do tego, cośmy widzieli w poprzednich przykładach, zjawiska, w których wielkie różnice w przyczynach dają małe w skutkach. Flammarion wyobraził sobie kiedyś obserwatora, który oddala się od kuli ziemskiej z prędkością większą niż prędkość światła; dla tego człowieka czas zmieniłby swój znak na odwrotny. Historja byłaby wywrócona, Waterloo poprzedzałoby Austerlitz. Otóż dla takiego obserwatora zmienionyby też był na odwrotny porządek skutków i przyczyn; równowaga nietrwała przestałyby być wyjątkiem; wobec powszechnej nieodwracalności wszystko zdawałoby się wyłaniać z jakiegoś chaosu w stanie równowagi nietrwałej; cała przyroda wyglądałaby dlań jakgdyby oddana na pastwę przypadku.

IV.

Weźmy teraz inne przykłady, o cechach odmiennych nieco od podpatrzonych powyżej. Nasamprzód teorję kinetyczną gazów. Jak winniśmy sobie wyobrażać rezerwuar napełniony gazem? Niezliczone molekuły, ożywione wielkiemi prędkościami, prują rezerwuar we wszystkich kierunkach; co chwila uderzają one o ścianki lub uderzają się o siebie; a zderzenia te odbywa się w warunkach najrozmaitszych. Co nas w tym przedwszystkim uderza, to nie nieznaczna wielkość przyczyn lecz ich złożoność. A przecież i tutaj znajdujemy znowu tamtą właściwość, i widzimy, że odgrywa ona dużą rolę. Gdyby pewna molekuła odchylona została w prawo lub w lewo od swej drogi o bardzo małą ilość tego samego rzędu wielkości, co promień działania molekuł gazowych, tedy uniknęłaby ona najbliższego zderzenia, albo też odbyłoby się ono w warunkach odmiennych, i mogłoby to zmienić, być może, o 90^0 lub 180^0 kierunek jej prędkości po zderzeniu.

Widzimy więc, że wystarczy odchylić molekułę przed zderzeniem o ilość nieskończenie małą, aby wywołać po zderzeniu odchylenie skończone. Jeżeli zatym molekuła ulega dwu kolejnym zderzeniom, odchylenie nieskończenie małe drugiego rzędu przed pierwszym zderzeniem wystarczy, by nadać jej po pierwszym zderzeniu odchylenie nieskończenie małe pierwszego rzędu, a po drugim odchylenie skończone. A w rzeczywistości molekuła ulegnie nie dwu tylko zderzeniom lecz bardzo wielkiej ilości zderzeń na sekundę. Przeto jeśli pierwsze zderzenie pomnoży odchylenie przez bardzo dużą ilość A, po n zderzeniach będzie ono pomnożone przez A^n; stanie się więc ono bardzo wielkie nietylko dlatego, że A jest bardzo wielkie, to jest dlatego, że małe przyczyny wywołują wielkie skutki, ale i dlatego, że wykładnik n jest bardzo duży, to jest dlatego, że zderzenia są bardzo liczne, i przyczyny bardzo złożone.

Przejdźmy do drugiego przykładu; dlaczego przy ulewie rozkład kropli deszczu wydaje nam się dziełem przypadku?

I tutaj dzieje się to za sprawą złożoności przyczyn, decydujących o ich tworzeniu się. W atmosferze rozeszła się pewna ilość jonów, w ciągu długiego czasu ulegały one ustawicznie zmieniającym się prądom powietrznym, porywały je wiry o bardzo małych rozmiarach, i w ten sposób końcowy ich rozkład jest zupełnie inny niż początkowy. Nagle temperatura obniża się, para zgęszcza się, i każdy z tych jonów staje się środkiem kropli deszczu. Aby wiedzieć, jaki będzie rozkład tych kropli, i ile ich spadnie na każdy kamień, byłaby niewystarczającą znajomość położenia początkowego jonów, trzebaby ponadto wciągnąć w rachubę wpływ tysiąca drobniutkich i kapryśnych prądów powietrznych.

To samo ma miejsce, gdy naprószymy w naczynie z wodą pyłki kurzu; naczynie to przebiegają prądy, których prawa nie znamy, o którym wiemy jedynie, że jest bardzo złożone, i po pewnym czasie rozkład pyłków w naczyniu tym będzie miał cechy przypadkowości, to jest będzie jednostajny; będzie to właśnie następstwem złożoności tych prądów. Gdyby ulegały one jakiemu prostemu prawu, gdyby np. naczynie miało kształt obrotowy, i gdyby prądy krążyły dokoła osi, zakreślając koła, nie mielibyśmy już owego jednostajnego rozkładu, bo każdy pyłek zachowałby swą początkową wysokość i początkową odległość od osi.

Do tego samego wyniku przyprowadziłoby nas rozważenie mieszaniny dwu cieczy lub dwu drobnoziarnistych substancji proszkowatych. Podobnież się rzeczy mają — że weźmiemy przykład grubszy — przy mieszaniu talji kart. Przy każdym przełożeniu karty ulegają permutacji (analogicznej do tych, jakie są przedmiotem teorji podstawień). Jakąż permutację otrzymamy w końcu? Prawdopodobieństwo, by była to pewna określona permutacja (np. ta, która sprowadza na miejsce n kartę, która zajmowała miejsce $\varphi(u)$ przed permutacją,) prawdopodobieństwo to, mówię, zależy od przyzwyczajeń gracza. Ale jeśli gracz ten miesza karty dosyć długo, ilość kolejnych permutacji będzie bardzo duża, i porządek końcowy, jaki stąd wyniknie, będzie już tylko rzeczą przypadku; to znaczy, że wszystkie możliwe porządki będą jednakowo prawdopodobne. Wynik ten będzie dziełem wielkiej ilości kolejnych permutacji tj. złożoności zjawiska.

W końcu słowo o teorji błędów. Tutaj właśnie mamy przyczyny złożone i liczne. Ileż zasadzek czyha na obserwatora, zbrojnego nawet w najlepsze narzędzie! Powinien on zabiegać koło wykrycia najznaczniejszych i unikania ich. Będą to te, z których płyną błędy systematyczne. Lecz skoro je wyruguje — a przypuśćmy, że mu się to powiedzie — pozostanie jeszcze wiele małych, które przez nagromadzenie swych skutków mogą się stać niebezpieczne. Takie jest źródło błędów przypadkowych; przypisujemy je przypadkowi, dlatego, że ich przyczyny są zbyt złożone i zbyt liczne. I tutaj mamy znowu małe przyczyny, lecz każda z nich wywołałaby skutek również mały, jedynie zespół ich i ilość czynią je groźnemi.

V.

Istnieje jeszcze trzeci punkt widzenia, mniej posiadający wagi niż dwa pierwsze, i dlatego mniej się nim będę zajmował. Kiedy idzie o to, aby przewidzieć pewien fakt w celu zbadania jego poprzedników, usiłujemy się poinformować o tym, co się działo dawniej; ponieważ jednak niepodobna tego zrobić dla wszystkich części wszechświata, zadawalamy się wiadomością o tym, co się dzieje w sąsiedztwie punktu, w którym fakt ma zajść, albo co, jak się zdaje, ma jakiś związek z tym faktem. Wiadomości te nie mogą być wyczerpujące, trzeba przeto umieć wybierać. Może się wszakże zdarzyć, że pominiemy okoliczności, które zrazu wydały nam się całkiem obce przewidywanemu faktowi, co do których nie przyszłoby nam na myśl, aby mogły tu mieć jaki wpływ, a które jednakowoż, wbrew wszelkiemu przewidywaniu, odgrywają doniosłą rolę.

Przez ulicę przechodzi człowiek, idący za swojemi interesami; ktoś, znający te interesy, mógłby powiedzieć, z jakiej przyczyny wyszedł on o danej godzinie, i dlaczego przeszedł przez daną ulicę. Na dachu pracuje strycharz; przedsiębiorca, który go wynajął, może w pewnych granicach przewidzieć, co on będzie robił. Lecz człowiek, idący ulicą, nie myśli wcale o strycharzu, ani strycharz o nim: zdałoby się, że należą do dwu zupełnie sobie obcych światów. Aliści strycharz opuszcza dachówkę, która zabija przechodnia — a my orzekamy bez namysłu, że jestto rzecz przypadku.

Słabość naszego umysłu nie pozwala nam objąć całego świata i zmusza do pokrajania go na kawałki. Staramy się robić to możliwie najmniej sztucznie, a przecież zdarza się że dwa z tych kawałków oddziaływają wzajem na siebie. Skutki takiego wzajemnego oddziaływania wydają się nam dziełem przypadku.

Czy stanowi to trzeci sposób pojmowania przypadku? Nie zawsze; bo w większości wypadków sprowadza się on do pierwszego lub drugiego. Ilekroć dwa światy, zazwyczaj sobie obce, zaczynają nagle na siebie oddziaływać, prawa tego oddziaływania muszą być wielce złożone, z drugiej zaś strony bardzo mała zmiana w warunkach początkowych byłaby wystarczyła, aby oddziaływanie to wogóle nie miało miejsca. Jakże mało byłoby potrzeba, by ów człowiek przeszedł o sekundę później, lub strycharz o sekundę wcześniej opuścił dachówkę!

VI.

Wszystko, cośmy powiedzieli, nie tłumaczy nam jeszcze, dlaczego przypadek ulega pewnym prawom. Czy to, że przyczyny są małe, lub że są złożone, wystarcza, byśmy mogli przewidywać, jeśli nie, jakie będą ich skutki w *każdym poszczególnym wypadku*, to przynajmniej, jaka będzie *średnia* tych skutków? Odpowiedzi na to pytanie będziemy szukali, zastanawiając się znowu nad kilku z powyżej przytoczonych przykładów.

Rozpocznę od rulety. Powiedziałem, że punkt, przy którym zatrzyma się wskazówka, zależeć będzie od nadanego mu pchnięcia początkowego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pchnięcie to ma taką lub inną wartość? Nic o tym nie wiem, ale trudno mi jest nie przypuścić, że prawdopodobieństwo to nie jest wyrażone przez funkcję analityczną ciągłą. Prawdopodobieństwo, że pchnięcie jest zawarte między a i $a+\varepsilon$, będzie natenczas prawie ściśle równe prawdopodobieństwu, że jest ono zawarte między $a+\varepsilon$ i $a+2\varepsilon$, byle ε było dość małe. Jestto własność wspólna wszystkim funkcjom analitycznym. Małe zmiany funkcji są proporcjonalne do małych zmian zmiennej niezależnej.

Ale przypuśćmy, że bardzo mała zmiana pchnięcia wystarczy, by wskazówka zamiast zatrzymać się przy jednym wycinku, zatrzymała się przy wycinku sąsiednim. Od a do $a+\varepsilon$ będzie to wycinek czerwony, od $a+\varepsilon$ do $a+2\varepsilon$ — czarny; prawdopodobieństwo każdego czerwonego wycinka jest więc takie same, jak prawdopodobieństwo następnego wycinka czarnego, a przeto prawdopodobieństwo całkowite wycinków czerwonych jest równe prawdopodobieństwu całkowitemu czarnych.

Daną zagadnienia jest funkcja analityczna, wyrażająca prawdopodobieństwo danego określonego pchnięcia początkowego. Ale twierdzenie pozostaje prawdziwe niezależnie od tego, jaką jest ta dana, gdyż oparte jest na własności wspólnej wszystkim funkcjom analitycznym. Wynika z tego, że w rezultacie możemy się zupełnie obyć bez owej danej.

Cośmy powiedzieli powyżej o rulecie, stosuje się również do przykładu małych planet. Na zwierzyniec (zodjak) można patrzeć, jak na olbrzymią ruletę, po której Stwórca puścił bardzo dużą ilość kulek, nadając im rozmaite prędkości początkowe, zmieniające się według pewnego, jakiegokolwiek zresztą, prawa. Obecny ich rozkład jest jednostajny i niezależny od tego prawa dla tych samych racji, co w przykładzie poprzednim. Widzimy w ten sposób, dlaczego zjawiska ulegają prawom przypadku, kiedy drobne różnice w przyczynach wystarczają, by wywoływać wielkie różnice w skutkach. Prawdopodobieństwa tych drobnych różnic można wówczas uważać za proporcjonalne do samych tych różnic, właśnie dlatego, że różnice te są małe, i że małe przyrosty funkcji ciągłej są proporcjonalne do przyrostów zmiennej.

Przejdźmy do innego zupełnie przykładu, w którym górujące znaczenie posiada złożoność przyczyn; niechaj ktoś tasuje talję kart. Przy każdym akcie tasowania zmienia on porządek kart, i może go zmienić na różne sposoby. Przypuśćmy dla prostoty wykładu, że mamy tylko 3 karty. Karty, które przed przetasowaniem znajdowały się w porządku 123, mogą po nim zajmować miejsca

123, 231, 312, 321, 132, 213.

Każde z tych 6-ciu przypuszczeń jest możliwe, i odpowiednie ich prawdopodobieńswa będą:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6.$$

Suma tych sześciu liczb wynosi 1; lecz nie wiemy o nich nic ponadto; te sześć prawdopodobieństw zależy naturalnie od nieznanych nam nawyknień gracza.

Przy drugim przetasowaniu i przy następnych będzie znowu to samo i w tych samych warunkach; to znaczy, że p_4 np. wyobraża zawsze prawdopodobieństwo, by trzy karty które po n-ym przetasowaniu i przed $n+1$-ym leżały w porządku 123, zajęły po $n+1$-ym przetasowaniu miejsca 321. Jestto prawdziwe niezależnie od wartości liczby n, bo nawyknienia gracza, jego sposób tasowania kart, pozostają te same.

Jeżeli przecież ilość przetasowań jest bardzo duża, karty które przed 1-ym przetasowaniem zajmowały miejsca 123, będą mogły po ostatnim zająć miejsca

123, 231, 312, 321, 132, 213

i prawdopodobieństwo każdego z tych sześciu wypadków będzie prawie ściśle jednakowe i równe $\frac{1}{6}$; tak będzie niezależnie od wielkości liczb $p_1 \ldots p_6$, których nie znamy. Wielka ilość przetasowań, to jest złożoność przyczyn, wywołała jednostajność.

Stosowałoby się to bez zmian, gdyby było więcej niż 3 karty, ale dla trzech kart nawet dowód byłby bardzo skomplikowany; ograniczę się przeto tutaj dowodem dla dwu tylko kart. Dwa tylko wówczas możliwe są wypadki

$$12,\ 21$$

o prawdopodobieństwach p_1 i $p_2 = 1 - p_1$. Przypuśćmy, że dokonano n przetasowań, i przypuśćmy, że wygrywam 1 franka, jeśli karty znajdują się w końcu w porządku początkowym, i że przegrywam franka, jeśli porządek ten będzie odwrócony. Moja nadzieja matematyczna będzie natenczas równa

$$(p_1 - p_2)^n.$$

Różnica $p_1 - p_2$ jest z pewnością mniejsza od 1; jeżeli przeto n jest bardzo wielkie, moja nadzieja będzie równa zeru; nie mamy potrzeby znać p_1 i p_2, żeby wiedzieć, że gra jest sprawiedliwa.

Jeden wszakże możliwy jest wyjątek, jeśli mianowicie jedna z liczb p_1 i p_2 równa jest 1 druga zaś zeru. R o z u m o w a n i e n a s z e n i e s t o s u j e s i ę d o t e g o w y p a d k u, d l a t e g o, ż e p o c z ą t k o w e n a s z e z a ł o ż e n i a s ą w ó w c z a s z b y t p r o s t e.

Rozważania powyższe stosują się nietylko do mieszania kart lecz do wszelkich mieszanin zarówno cieczy jak proszków; i nawet do mieszanin cząsteczek gazowych w kinetycznej teorji gazów. Wracając do tej teorji, przypuśćmy na chwilę, że mamy gaz, którego cząsteczki nie mogą się wzajem zderzać, lecz ulegają odchyleniom na skutek uderzeń o ścianki naczynia, w którym gaz jest zawarty. Jeśli kształt naczynia jest dostatecznie złożony, rozmieszczenie cząsteczek oraz prędkości stanie się rychło jednostajnym. Inaczej będzie, jeśli naczynie jest kuliste lub posiada kształt prostokątnego równoległościanu; dlaczego? Ponieważ w pierwszym z tych dwu wypadków odległość środka od jakiejkolwiek drogi, przebieganej przez cząsteczkę, będzie stała; w drugim stałą będzie wartość bezwzględna kąta każdej drogi ze ścianami równoległościanu.

Widzimy stąd, co należy rozumieć przez warunki zbyt proste; są to warunki, zachowujące coś, pozostawiające jakiś niezmiennik. Czy równania różniczkowe zagadnienia są zbyt proste, byśmy mogli zastosować prawa przypadku? Pytanie to wydaje się zrazu pozbawionym ścisłego sensu; teraz wiemy, co ono oznacza. Zbyt prostemi są one wówczas, gdy coś zachowują, gdy istnieje dla nich całka jednostajna; skoro coś z warunków początkowych pozostaje niewzruszone, tedy jasnym jest, że położenie końcowe nie może być niezależne od położenia początkowego.

Przejdźmy wreszcie do teorji błędów. Nie wiemy, jakie jest źródło błędów przypadkowych, i właśnie dlatego, że tego nie wiemy, — wiemy, że ulegają one prawu Gaussa. Oto paradoks. Tłumaczy się on mniej więcej tak samo, jak w wypadkach poprzednich. Jedno tylko mamy potrzebę wiedzieć: że błędy są bardzo liczne, że są bardzo małe, że każdy z nich może być równie dobrze ujemny jak dodatni. Jaka jest krzywa prawdopodobieństwa każdego z nich? nic o tym nie wiemy, przypuszczamy tylko, że krzywa ta jest symetryczna. Dowodzi się wówczas, że błąd wypadkowy stosować się będzie do prawa Gaussa, i to prawo wypadkowe jest niezależne od praw szczególnych, których nie znamy. I tutaj znowu prostota wyniku jest właśnie skutkiem złożoności danych.

VII.

Ale czekają nas jeszcze nowe paradoksy. Mówiłem przed chwilą o fikcji Flammariona, o człowieku, który pędzi szybcej niż światło, i dla którego czas ma znak odwrotny. Powiedziałem, że dla niego wszystkie zjawiska zdawałyby się być dziełem przypadku. Tak jest z pewnego punktu widzenia, a przecież wszystkie te zjawiska w określonej chwili nie byłyby rozmieszczone zgodnie z prawami przypadku, bo rozmieszczenie to byłoby takie same, jak dla nas, którzy widząc je w rozwoju harmonijnym, nie rozpoczynającym się od jakiegoś chaotycznego stanu początkowego, nie uważamy ich za rządzone przez przypadek.

Cóż to znaczy? W oczach Lumena, owego flammarionowego człowieka, małe przyczyny zdają się wywoływać wielkie skutki; dlaczegoż to, co on ogląda, nie odbywa się tak, jak wówczas, gdy my widzimy wielkie skutki, wywołane przez małe przyczyny? Czyżby to samo rozumowanie nie stosowało się do obu wypadków?

Powróćmy do tego rozumowania: kiedy małe różnice w przyczynach wywołują wielkie w skutkach, to dlaczego wówczas skutki są rozmieszczone według praw przypadku? Przypuśćmy, że różnica jednego milimetra w przyczynie wywołuje różnicę jednego kilometra w skutku. Jeżeli skutek, odpowiadający parzystemu kilometrowi, oznacza dla nas wygraną, tedy prawdopodobieństwo wygranej równa się dla nas $\frac{1}{2}$; dlaczego? Dlatego, że wymaga to, by przyczyna odpowiadała milimetrowi parzystemu. Otóż, wolno mniemać, że prawdopodobieństwo, by przyczyna zmieniała się między pewnemi granicami, będzie proporcjonalne do odstępu między temi granicami, byle odstęp ten był dostatecznie mały. Przyjęcie tego założenia jest niezbędnym warunkiem, aby można było wyrazić prawdopodobieństwo za pomocą funkcji ciągłej.

Niechaj teraz wielkie przyczyny wywołują małe skutki. W wypadku takim my nie przypisalibyśmy zjawisko przypadkowi, Lumen natomiast uznałby je za dzieło przypadku. Różnicy kilometra w przyczynie odpowiadałaby różnica milimetra w skutku. Czy i teraz prawdopodobieństwo, by przyczyna była zawarta między dwu granicami, oddalonemi od siebie o n kilometrów, będzie proporcjonalne do n? Nie mamy żadnego powodu to przypuścić, gdyż ta odległość n kilometrowa jest duża. Lecz prawdopodobieństwo, by skutek pozostał zawarty między dwu granicami odległemi o n milimetrów będzie właśnie równe tamtemu, nie będzie więc proporcjonalne do n

i to pomimo, że ta odległość n-milimetrowa jest mała. Niepodobna zatym wyobrazić prawa prawdopodobieństwa skutków zapomocą krzywej ciągłej; zrozumiejmy się dobrze: krzywa ta może pozostać ciągłą w analitycznym sensie wyrazu, zmianom nieskończenie małym odciętej będą odpowiadały nieskończenie małe zmiany rzędnej. Lecz z punktu widzenia praktyki nie będzie ona ciągła, bo zmianom bardzo małym odciętej nie będą odpowiadały bardzo małe zmiany rzędnej. Będzie niemożliwym nakreślenie tej krzywej zapomocą zwykłego ołówka: oto, co chcę powiedzieć.

Jakiż stąd wniosek? Lumen nie ma prawa powiedzieć, że prawdopodobieństwo przyczyny (prawdopodobieństwo jego przyczyny, która jest naszym skutkiem) musi być koniecznie wyobrażone przez funkcję ciągłą. Ale skoro tak, tedy dlaczego my mamy to prawo? Dlatego, że ów stan równowagi nietrwałej, który powyżej nazywaliśmy początkowym, sam jest wytworem długich poprzedzających go dziejów. W ciągu tych dziejów działały złożone przyczyny i działały długo: przyczyniły się one do zmieszania ze sobą elementów, i miały dążność do ujednostajnienia wszystkiego, przynajmniej na małej przestrzeni; zaokrągliły one węgły, zrównały góry i zapełniły doliny: jakkolwiek kapryśną i nieforemną była pierwotna oddana im krzywa, pracowały one tyle nad jej zregulowaniem, że przekażą nam w końcu krzywą ciągłą. I dlatego to możemy z całym zaufaniem przypuścić ciągłość krzywej.

Lumen nie miałby tych samych powodów, aby dojść do takiego wniosku; dla niego przyczyny złożone nie występowałyby, jako czynniki regulacji i wyrównania, lecz przeciwnie wywołałyby różniczkowanie i nierówność. W jego oczach z jakiegoś pierwotnego chaosu wyłaniałby się stopniowo świat coraz bardziej urozmaicony; obserwowane przezeń zmiany byłyby dlań nieprzewidziane i niedające się przewidzieć; zdawałyby mu się dziełem jakiegoś kaprysu; lecz kaprys ten opierałby się wszelkim prawom, gdy nasz przypadek posiada swoje prawa. Wszystkie te uwagi wymagałyby, aby je obszerniej rozwinąć, co ułatwiłoby, być może, zrozumienie nieodwracalności wszechświata.

VIII.

Staraliśmy się określić pojęcie przypadku, — naturalnym teraz będzie, że zadamy sobie pytanie: czy przypadek, w ten sposób określony w granicach, w jakich definicja jego jest możliwa, posiada cechy objektywności?

Możnaby mieć co do tego wątpliwości. Mówiłem o przyczynach bardzo małych i bardzo złożonych. Lecz to, co jest bardzo małe dla jednego, czyż nie może być wielkie dla innego, a co się wydaje bardzo złożonym jednemu, czyż innemu nie może się wydać prostym? Odpowiedziałem już częściowo na to pytanie, bo wyraziłem powyżej w sposób ścisły, w jakim wypadku równania różniczkowe stają się zbyt proste, aby prawa przypadku można było stosować. Wypada jednak rozpatrzeć sprawę nieco bliżej, gdyż można zająć w stosunku do niej inne jeszcze stanowiska.

Co znaczy wyrażenie »bardzo mały«? Aby to zrozumieć, wystarczy przypomnieć sobie to, co powiedzieliśmy wyżej. Różnica jest bardzo mała, odstęp jest bardzo mały, jeżeli w granicach tego odstępu prawdopodobieństwo pozostaje prawie ściśle stałe. A dlaczego prawdopodobieństwo to można uważać za stałe wewnątrz małego odstępu? Dlatego, że przypuszczamy, że prawo prawdopodobieństwa jest wyrażone przez krzywą ciągłą: i to ciągłą nietylko w analitycznym znaczeniu tego wyrazu, lecz ciągłą z punktu widzenia p r a k t y k i, jakem to powyżej wyłuszczył. Znaczy to, że nietylko nie będzie w niej poprostu dziur, lecz, że nie będzie również posiadała zbyt ostrych ani zbyt wydatnych występów ni wklęśnięć.

Cóż nas upoważnia do tego założenia? Rzekliśmy już wyżej, że pobudza nas do tego fakt, iż od zarania dziejów świata trwa nieustanna działalność skomplikowanych przyczyn, czynnych w jednym i tym samym kierunku, i sprawiających, że świat zdąża ustawicznie ku jednostajności, i nigdy nie może cofać się wstecz. Te właśnie przyczyny zgładziły stopniowo występy i zapełniły wklęśnięcia, i dlatego nasze krzywe prawdopodobieństw przedstawiają jedynie łagodne falistości. Po upływie miljardów, miljardów wieków dokonany będzie jeszcze jeden krok ku jednostajności, i falistości te będą dziesięćkroć łagodniejsze niż obecnie: średni promień krzywizny naszej krzywej stanie się dziesięć razy większy. I wówczas długość, która dziś nie wydaje się nam bardzo małą, bo na naszej krzywej łuk tej długości nie może być uważany za prosto-linijny, będzie musiała uchodzić za bardzo małą, bo krzywizna stanie się dziesięć razy mniejsza, i łuk tej długości będzie mógł być prawie ściśle upodobniony do prostej.

Tak więc wyrażenie »bardzo mały« pozostaje względne; ale nie jest ono względne w zależności od tego lub innego człowieka, jest ono względne w zależności od obecnego stanu świata. Znaczenie jego się zmieni, kiedy świat stanie się jednostajniejszy, kiedy wszelkie rzeczy bardziej jeszcze się ze sobą pomieszają. Lecz wówczas ludzie zapewne nie będą mogli żyć, i będą musieli odstąpić miejsca innym istotom; czy istoty te mam nazwać o wiele mniejszemi lub o wiele większemi? I oto kryterjum nasze, pozostając prawdziwym dla wszystkich ludzi, zachowuje znaczenie objektywne.

Jakież jest, z kolei, znaczenie wyrażenia: »bardzo złożony«? Jedną odpowiedź na to pytanie już dałem, o czym przypomniałem na początku niniejszego paragrafu, ale istnieją jeszcze inne. Przyczyny złożone, jak powiedzieliśmy, dają mieszaninę coraz jednostajniejszą — lecz ileż czasu będzie potrzeba, by mieszanina ta w zupełności nas zadowoliła? Kiedyż nagromadzi się dosyć komplikacji? Kiedy uznamy, że karty tasowano dość długo? Gdy mieszamy dwa proszki, niebieski i biały, w pewnej chwili barwa mieszaniny wydaje się nam jednostajną; jestto skutkiem ułomności naszych zmysłów; będzie ona jednostajną dla dalekowidza, który musi patrzeć z daleka, a nie będzie nią jeszcze dla krótkowidza. A kiedy stanie się jednostajną dla wszelkiego wzroku, będzie można jeszcze cofnąć granicę przez zastosowanie narzędzi optycznych. Niema widoków na to, by człowiek zdołał kiedykolwiek rozróżnić nieskończoną rozmaitość szczegółów, kryjącą się — jeśli kinetyczna teorja jest prawdziwą — pod pozorną jednostajnością gazu. A przecież, jeśli przyjąć poglądy Gouy'ego na ruch brownowski, czy mikroskop nie jest w przededniu pokazania nam czegoś podobnego?

Nowe to kryterjum jest więc, podobnie jak pierwsze, względnym, i jeżeli zachowuje charakter objektywny, to dlatego, że wszyscy ludzie posiadają te same mniej więcej zmysły, że moc ich narzędzi jest ograniczona, i że zresztą posługują się niemi jedynie w razach wyjątkowych.

IX.

To samo stosuje się w naukach, dotyczących życia duchowego ludzi [moralnych] a w szczególności w historji. Historyk jest zmuszony dokonać wyboru wśród zdarzeń epoki, którą bada; podaje te tylko, które zdają mu się najważniejszemi. Ograniczył się n. p. opowiedzeniem najznaczniejszych wypadków z XVI-go wieku oraz najgodniejszych uwagi faktów z XVII-go. Jeśli pierwsze wystarczają do wytłumaczenia drugich, mówimy o tych ostatnich, że »odpowiadają prawom historji«. Jeżeli natomiast wielkie zdarzenie z XVII-go wieku ma za przyczynę mały fakt z w. XVI-go, nie podany przez żadną historję, tedy mówi się, że zdarzenie to jest dziełem przypadku, i wyraz ten ma to samo znaczenie, co w naukach fizycznych; wyraża on, że małe przyczyny wywołują duże skutki.

Największym przypadkiem jest urodzenie się wielkiego człowieka. Przypadkiem jedynie spotkały się ze sobą dwie komórki rodne różnej płci, z których każda zawierała właśnie owe tajemnicze pierwiastki, których wzajemne działanie miało wytworzyć gieniusza. Zgodzić się trzeba, że pierwiastki te muszą być rzadkie i że spotkanie ich jest jeszcze rzadsze. Jakże mało byłoby potrzeba, by zawierającą je spermatozoidę odchylić od jej drogi; wystarczyłoby odchylić ją o dziesiątą część milimetra, a Napoleon nie byłby się narodził, i losy całego kontynentu inną poszłyby koleją. Żaden przykład nie jest w stanie lepiej unaocznić istotne cechy przypadku.

Słowo jeszcze o paradoksach, wynikających na tle stosowania rachunku prawdopodobieństwa do nauk, dotyczących działalności człowieka w społeczeństwie [t. zw., moralnych']. Dowiedziono, że do żadnego parlamentu nie wejdzie nigdy żaden poseł z opozycji, albo przynajmniej, że zdarzenie to jest tak nieprawdopodobne, iż można bez obawy trzymać zakład przeciw, i to trzymać miljon przeciw jednemu. Condorcet usiłował obliczyć, ile potrzebaby przysięgłych, aby omyłka sądowa była praktycznie niemożliwą. Gdyby kto zechciał oprzeć się w rzeczywistości na rezultatach tych rachunków naraziłby się z pewnością na taki sam zarzut jak ów, coby się zakładał, ufny w rachunek, że opozycja nie zdobędzie nigdy ani jednego przedstawiciela.

Prawa przypadku nie mają zastosowania do takich kwestji.

Jeżeli orzeczenia sądowe nie zawsze są oparte na przesłankach słusznych, to wszakże są one mniej, niż się zdaje, rzeczą przypadku; być może iż należy tego żałować, bo gdyby tak nie było, sposób Condorceta byłby nas ochronił od wszelkich omyłek sądowych.

Czegóż nas to uczy? Skłonni jesteśmy przypisać przypadkowi fakty tego typu, dlatego, że przyczyny ich są dla nas przesłonione; nie jestto jednak prawdziwy przypadek. Wprawdzie przyczyn danego faktu nie znamy, wprawdzie są one skomplikowane; ale nie są dostatecznie skomplikowane, skoro zachowują pewne elementy, a widzieliśmy, że jestto cechą charakterystyczną przyczyn »zbyt prostych«. Kiedy ludzie są w gromadzie, decyzje ich nie są rzeczą przypadku, nie są wzajem od siebie niezależne; oddziaływają oni na siebie. Wchodzą w grę liczne przyczyny, wywołują w ludziach zakłócenia, porywają ich na prawo i na lewo, — jednego przecież nie są w stanie zniszczyć: ich przyzwyczajenia do owczego pędu. I to właśnie się zachowuje.

X.

Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa do nauk ścisłych pociąga za sobą również wiele trudności. Dlaczego cyfry dziesiętne w tablicy logarytmicznej, dlaczego cyfry dziesiętne liczby π są rozmieszczone według praw przypadku? Gdzieindziej już zastanawiałem się nad tym pytaniem, gdy szło o logarytmy,[1] i w tym razie jest ono łatwe; jasne jest, że mała różnica w argumencie da małą różnicę w logarytmie, ale dużą różnicę w szóstej dziesiętnej logarytmu. Odnajdujemy ciągle to samo kryterjum.

Natomiast w odniesieniu do liczby π pytanie to nastręcza o wiele znaczniejsze trudności, i na razie nie mam w tej kwestji nic do powiedzenia.

Nastręczyłoby się wiele innych kwestji, gdybym chciał się niemi zająć, zanim rozwiązałem tę, nad którą zamierzyłem szczególniej się zastanowić. Gdy stwierdzamy pewien prosty rezultat, n. p. gdy znajdujemy jakąś okrągłą liczbę, mówimy, że rezultat ten nie może być rzeczą przypadku, i dla wytłumaczenia go szukamy przyczyny nie przypadkowej. Albowiem małe tylko zachodzi prawdopodobieństwo, by z pośród 10.000 liczb przypadek dał liczbę okrągłą n. p. liczbę 10.000; na 10.000 szans jedna tylko jest pomyślna. Ale też jedna tylko szansa na 10.000 sprzyja zdarzeniu się którejkolwiek innej liczby; a przecież żadna inna liczba nie zdziwi nas, nie zawahamy się uważać jej zdarzenie się za rzecz przypadku; a to poprostu dlatego, że będzie się ona mniej rzucała w oczy.

Czyż jestto wszystko prostym złudzeniem, czy też w pewnych wypadkach pogląd taki jest słuszny? Chyba tak, gdyż

---

[1]) »Nauka i hypoteza«, wyd. polskie, str. 158—9.

w przeciwnym razie wszelka nauka byłaby niemożliwa. Jakże postępujemy, gdy chcemy poddać próbie pewną hypotezę? Nie możemy sprawdzić wszystkich jej konsekwencji, bo ilość ich jest nieskończona; ograniczamy się sprawdzeniem niektórych tylko, i jeśli wypada ono pomyślnie, uznajemy hypotezę za potwierdzoną, ponieważ takiego powodzenia nie umielibyśmy położyć na karb przypadku. I to samo rozumowanie powtarza się w gruncie rzeczy zawsze.

Nie mogę tutaj całkowicie go uzasadnić dla krótkości czasu; to wszakże przynajmniej mogę powiedzieć: mamy do wyboru dwa przypuszczenia, albo przyczyny prostej albo owego zespołu przyczyn skomplikowanych, który nazywaliśmy przypadkiem. Uważamy za naturalne przyjąć, że pierwsza wywołuje wynik prosty, i natenczas, skoro stwierdzamy taki prosty wynik, np. liczbę okrągłą, wydaje nam się prawdopodobniejsze przypisać go przyczynie prostej, która musiałaby go dać prawie z pewnością, niż przypadkowi, który mógłby go dać jedynie raz na 10.000. Inaczej, gdy stwierdzamy wynik, ktory nie jest prosty; wprawdzie przypadek również da go nie częściej, niż raz na 10.000; ale i przyczyna prosta nie ma więcej za sobą, by dać ten wynik.

KSIĘGA DRUGA.

ROZUMOWANIE MATEMATYCZNE.

Rozdział I.

Względność przestrzeni.

I.

Niemożliwością jest wyobrazić sobie przestrzeń próżną; wszystkie wysiłki, by przedstawić sobie przestrzeń czystą, z wyrugowaniem zmiennych obrazów przedmiotów materjalnych, mogą dać jedynie wyobrażenie, w którym np. powierzchnie silnie zabarwione ustąpią miejsca linjom o barwie słabej; chęć posunięcia się po tej drodze aż do końca sprawiłaby, że wszystkoby się rozwiało w nicość. To właśnie stanowi o radykalnej względności przestrzeni.

Ktokolwiek mówi o przestrzeni bezwzględnej, używa wyrazu bez treści. Jestto prawda, głoszona oddawna przez wszystkich, którzy zastanawiali się nad tą kwestją, a przecież nazbyt często jest się skłonnym o niej zapominać.

Znajduję się w określonym punkcie Paryża, np. na placu Panteonu, i mówię: jutro przyjdę t u t a j znowu. Jeśliby kto zapytał: czy rozumiesz przez to, że powrócisz do tego samego punktu przestrzeni, — skłonny byłbym odpowiedzieć: owszem; lecz odpowiedź ta byłaby błędna, gdyż do jutra ziemia się przesunie, unosząc ze sobą plac Panteonu, który przebiegnie przeszło 2 miljony kilometrów. Uwzględnienie tego przesunięcia nie o wiele poprawiłoby moją odpowiedź, albowiem te 2 miljony kilometrów ziemia przebiegnie w swym ruchu dookoła słońca, a słońce z kolei przesuwa się w stosunku do Drogi Mlecznej, a i sama Droga Mleczna znajduje się w ruchu, lubo nie jesteśmy w możności poznać jej prędkości. Tak więc nie wiemy nic, i nic nigdy wiedzieć nie będziemy o tym, o ile plac Panteonu przesuwa się w ciągu dnia. Słowem, chciałem powiedzieć: Jutro będę znów widział kopułę i fronton Panteonu, a gdyby nie było Panteonu, zdanie moje nie miałoby żadnego sensu, i wyobrażenie przestrzeni rozwiałoby się.

Jestto jedna z najbanalniejszych postaci zasady względności przestrzeni; lecz istnieje inna jeszcze, którą ze szczególnym naciskiem uwydatnił Delboeuf. Przypuśćmy, że w ciągu jednej nocy wszystkie wymiary wszechświata stały się tysiąc razy większe: świat pozostanie p o d o b n y do siebie samego w tym sensie, w jakim rozumie się pojęcie p o d o b i e ń s t w a w trzeciej księdze gieometrji (w trzeciej księdze — według klasycznego we Francji legendre'owskiego układu gieometrji elementarnej. — Przyp. tłum.). Tylko że długości dawniej jednometrowe będą teraz wynosiły jeden kilometr, długości jednomilimetrowe — jeden metr. Łóżko, na którym spoczywam, i samo moje ciało wzrosną w tej samej proporcji. Jakież będą moje odczucia, kiedy się nazajutrz obudzę, wobec tak zadziwiającego przekształcenia? Otóż nie zauważę nic zgoła. Najdokładniejsze pomiary nie będą w stanie ujawnić mi cośkolwiek z tego olbrzymiego przewrotu, gdyż metry, któremi będę mierzył, będą również zmienione w tych samych proporcjach, co przedmioty, które będę usiłował zmierzyć. W rzeczywistości przewrót ten istnieje dla tych jedynie którzy rozumują tak, jakgdyby przestrzeń była bezwzględna. Jeżeli przez chwilę rozumowałem, jak oni, to po to, by lepiej uwidocznić, że w poglądzie ich tkwi sprzeczność. To też należałoby powiedzieć, że ponieważ przestrzeń jest względna, nie wydarzyło się nic wcale, i dlatego to nic nie zauważyliśmy.

Czy wobec tego mamy prawo mówić, że znamy odległość między dwoma punktami? Nie, gdyż odległość ta mogłaby ulec ogromnym zmianom, a mybyśmy nic o tym nie mogli wiedzieć, jeżeliby inne odległości zmieniły się w tej samej proporcji. Przed chwilą widzieliśmy, że kiedy mówię: Będę tutaj jutro, nie znaczy to: Będę jutro w tym punkcie przestrzeni, w którym jestem dzisiaj, lecz: Będę jutro na tej samej odległości od Panteonu, co dzisiaj. A oto już przekonywamy się, że sformułowanie to nie wystarcza, i że należy powiedzieć: jutro i dzisiaj stosunek odległości mojej od Panteonu do długości mego ciała będzie równy tej samej liczbie.

Przypuściliśmy powyżej, że przy zmianie wymiarów świata, świat ten pozostaje jednak podobny do siebie. Ale można iść znacznie dalej, i pochop do tego da nam jedna z najosobliwszych teorji fizyków współczesnych. Według Lorentza i Fitzgeralda [1]) wszystkie ciała, unoszone przez ziemię w jej ruchu, ulegają odkształceniu. Odkształcenie to jest wprawdzie bardzo niewielkie, gdyż wszystkie wymiary równoległe do ruchu ziemi zmniejszają się o jedną miljonową, wymiary zaś prostopadłe do tego ruchu pozostają niezmienione. Ale samo już istnienie tego odkształcenia — niezależnie od tego, czy jest ono niewielkie, czy znaczne — wystarcza dla wniosku, który powyżej wywiodę. Zresztą, chociaż powiedziałem, że jest ono niewielkie, w istocie nic o tym nie wiem; sam uległem tu uporczywemu złudzeniu, które każe nam mniemać, że wyobrażamy sobie przestrzeń bezwzględną; miałem na myśli ruch ziemi po jej orbicie eliptycznej dookoła słońca, i prędkość tego ruchu wziąłem równą 30 kilometrom. Ale prawdziwej jej prędkości (rozumiem przez to, tym razem, nie jej prędkość bezwzględną, co nie miałoby sensu, lecz prędkość jej w stosunku do eteru) nie znam, i nie mam żadnej możności ją poznać: jest ona, być może, 10, 100-kroć większa, a więc odkształcenie byłoby 100, 10.000 razy znaczniejsze.

Czy jesteśmy w stanie uwidocznić to odkształcenie? Oczywiście nie; oto sześcian o krawędzi 1-ometrowej; na-

[1]) Patrz niżej Rozdz. XI.

skutek przenoszenia się ziemi odkształca się on, jedna z jego krawędzi, mianowicie równoległa do ruchu, kurczy się, inne pozostają niezmienione. Jeśli zechcę sprawdzić to zapomocą metra, zmierzę naprzód jedną z krawędzi prostopadłych do ruchu, i stwierdzę, że mój metr przywiera ściśle do tej krawędzi; jakoż żadna z tych dwu długości nie jest zmieniona, bo obie są prostopadłe do ruchu. Przejdę następnie do pomiaru innej krawędzi, równoległej do ruchu; w tym celu zmienię położenie mego metra, obrócę go tak, iżby przywarł do tej krawędzi. Ale ta zmiana położenia metra, naskutek której stał się on równoległym do ruchu, sprawia, że i on z kolei uległ odkształceniu; tak więc, chociaż długość krawędzi nie wynosi już 1 metra, metr przylgnie do niej ściśle, i ja nic z tej zmiany nie zauważę.

Zapyta więc kto, jaki jest pożytek z hypotezy Lorentza i Fitzgeralda, skoro żadne doświadczenie nie jest zdolne jej sprawdzić? Otóż tak nie jest; powyższy mój wykład był niezupełny; mówiłem jedynie o pomiarach, których można dokonać za pomocą metra; ale długości można również mierzyć przez czas, jakiego potrzebuje światło, by je przebiec, pod warunkiem założenia, że prędkość światła jest stała i niezależna od kierunku. Lorentz mógł był wytłumaczyć fakty, zakładając, że prędkość światła jest większa w kierunku ruchu ziemi niż w kierunku prostopadłym. Wolał on przypuścić, że prędkość jest ta sama we wszystkich tych kierunkach, lecz, że ciała są mniejsze w jednych, większe w innych. Gdyby powierzchnie fal światła uległy tym samym odkształceniom, co ciała materjalne, nie zauważylibyśmy wcale odkształcenia Lorentza Fitzgeralda.

Zarówno w jednym jak w drugim wypadku nie może być mowy o wielkości bezwzględnej lecz o pomiarze tej wielkości zapomocą jakiegoś narzędzia; narzędziem tym może być metr lub droga, przebieżona przez światło; mierzymy jedynie stosunek wielkości do narzędzia; i jeśli stosunek ten okaże się zmienionym, nie mamy żadnego sposobu dowiedzieć się, czy zmieniła się dana wielkość, czy też narzędzie.

Na co wszakże chcę położyć nacisk, to na to, że przy tym odkształceniu świat nie pozostał podobny do siebie; kwadraty stały się prostokątami lub równoległobokami, koła elipsami, kule elipsoidami. A jednak nie mamy żadnego sposobu dowiedzieć się, czy odkształcenie to jest rzeczywiste.

Jasne jest, że możnaby posunąć się jeszcze znacznie dalej; zamiast odkształcenia Lorentza-Fitzgeralda, którego prawa są szczególnie proste, możnaby wyobrazić sobie odkształcenie całkiem dowolne. Ciała mogłyby się odkształcać według praw dowolnych, dowolnie skomplikowanych, nie zauważylibyśmy tego, byle wszystkie ciała bez wyjątku zmieniały się według tych samych praw. Kiedy mówimy: wszystkie ciała bez wyjątku, rozumiemy przez to i nasze ciało, i promienie świetlne, wysyłane przez poszczególne przedmioty.

Gdybyśmy oglądali świat w jednym z owych zwierciadeł o skomplikowanym kształcie, odkształcających przedmioty w sposób dziwaczny, wzajemne stosunki poszczególnych części tego świata nie byłyby przez to zmienione; albowiem gdy dwa ciała stykają się, odbicia ich zdają się również stykać. Wprawdzie patrząc w takie zwierciadło, dostrzegamy odkształcenie, ale to dlatego, że świat rzeczywisty istnieje swego odkształconego odbicia; i gdyby nawet rzeczywisty ten świat był dla nas ukryty, istnieje coś, czego przed nami ukryć nie można: my sami; nie możemy przestać widzieć lub przynajmniej czuć naszego ciała i naszych członków, które nie uległy odkształceniu, i które dalej nam służą jako narzędzia pomiaru. Jeżeli przecież wyobrazimy sobie, że i nasze ciało zostało odkształcone, i to w taki sam sposób, jak jego odbicie w zwierciadle, zabrakłoby nam z kolei i tych narzędzi pomiaru, i nie możnaby było stwierdzić odkształcenia.

Rozważmy teraz dwa światy, z których jeden jest odbiciem drugiego; każdemu przedmiotowi P świata A odpowiada w świecie B przedmiot P', który jest jego odbiciem;

współrzędne tego odbicia P' są określonemi funkcjami współrzędnych przedmiotu P; funkcje te mogą być zresztą zupełnie dowolne; zakładam jedynie, że obrano je raz na zawsze. Między położeniem P i położeniem P' zachodzi stała zależność; jaka jest ta zależność, niema to dla nas znaczenia; wystarcza, by była stałą.

Otóż dwa te światy nie dają się od siebie odróżnić. Chcę powiedzieć, że pierwszy będzie dla swoich mieszkańców tym, czym jest drugi dla swoich. I trwałoby to dopóty, dopóki światy te pozostawałyby sobie obce. Przypuśćmy, że zamieszkujemy świat A, i że zbudowaliśmy naszą naukę i w szczególności naszą gieometrję; w ciągu tego czasu mieszkańcy świata B zbudują naukę, że zaś ich świat jest odbiciem naszego, ich gieometrja będzie również odbiciem naszej, albo, mówiąc trafniej, będzie ta sama. Jeżeli przecież pewnego dnia otworzy się dla nas okno na świat B, zdejmie nas litość nad jego mieszkańcami: »Nieszczęśliwi, powiemy, myślą, że zbudowali gieometrję, ale to, co tak nazywają, jest tylko grubym odbiciem naszej, ich proste są koślawe, ich koła garbate, kule ich pokryte kapryśnemi nierównościami«. I podejrzewać nie będziemy, że oni to samo mówią o nas, i że nigdy nie będzie wiadomo, kto ma słuszność.

Widzimy, w jakim szerokim znaczeniu rozumieć należy względność przestrzeni; przestrzeń jest w rzeczywistości bezkształtna [amorfna], i jedynie rzeczy, które w niej tkwią, nadają jej formę. Cóż wtedy trzymać o owej, ponoć nam właściwej, bezpośredniej intuicji linji prostej lub odległości? Intuicji odległości samej w sobie tak dalece nie posiadamy, że, jak powiedzieliśmy, w ciągu jednej nocy dana odległość mogłaby się stać tysiąc razy większa. a mybyśmy tego nie byli w stanie zauważyć, gdyby wszystkie inne odległości uległy takiej samej zmianie. W ciągu tej nocy świat A mógłby zostać nawet zastąpiony przez świat B, a my nie mielibyśmy żadnego sposobu dowiedzenia się o tym, i wówczas wczorajsze linje proste przestałyby być prostemi, a my nicbyśmy z tego nie zauważyli.

Część przestrzeni nie jest sama przez się, i w bezwzględnym znaczeniu tego wyrazu, równa się innej części przestrzeni; albowiem, jeśli jest równą tamtej dla nas, to nie jest tamtej równą dla mieszkańców świata *B*; i ci mają akurat tyleż prawa do odrzucenia naszego poglądu, co my do potępienia ich zapatrywania.

Okazałem gdzieindziej[1]), jakie są konsekwencje tych faktów ze stanowiska właściwego pojmowania gieometrji nieeuklidesowej i innych gieometrji analogicznych; nie chcę do tego wracać; dzisiaj spojrzę na nie z innego punktu widzenia.

II.

Skoro owa intuicja odległości, kierunku, linji prostej, słowem intuicja przestrzeni nie istnieje, skądże pochodzi nasze mniemanie, że ją posiadamy? Jeżeli jestto tylko złudzenie, to czemu jest ono tak uporczywe? Wypada się nad tym bliżej zastanowić. Niemasz bezpośredniej intuicji wielkości, powiedzieliśmy, nie możemy dotrzeć poza stosunek tej wielkości do naszych narzędzi pomiaru. Nie bylibyśmy tedy w stanie skonstruować przestrzeni, gdybyśmy nie rozporządzali narzędziem dla jej mierzenia; otóż narzędziem, do którego wszystko odnosimy, którym posługujemy się instynktownie, jest nasze własne ciało. W stosunku do niego umieszczamy przedmioty zewnętrzne, i jednemi stosunkami przestrzennemi tych ciał, jakie sobie możemy wyobrazić, są ich stosunki z naszym ciałem. Nasze ciało służy nam, że tak powiem, jako układ osi współrzędnych.

Naprzykład w chwili α o obecności przedmiotu *A* dowiaduję się przez zmysł wzroku; w innej chwili β obecność innego przedmiotu *B* oznajmia mi inny zmysł, np. słuch lub dotyk. Sądzę, że przedmiot *B* zajmuje to samo miejsce, co przedmiot *A*. Co to znaczy? Przedewszystkim nie znaczy to,

---

[1]) Nauka i Hypoteza, Wyd. pol., str. 61 i nast., Wartość Nauki, wyd. pol. str. 39.

że dwa te przedmioty zajmują w dwu różnych chwilach jeden i ten sam punkt przestrzeni bezwzględnej, która, gdyby nawet istniała, uchylałaby się od naszego poznania, ponieważ w czasie między chwilami α i β układ słoneczny przesunął się, i przesunięcia jego nie mamy możności poznać. Znaczy to, że te dwa przedmioty zajmują to samo położenie względne w stosunku do naszego ciała.

Cóż jednak znaczy to ostatnie powiedzenie? Wrażenia, które odebraliśmy od tych przedmiotów, szły drogami absolutnie różnemi, przez nerw optyczny w wypadku przedmiotu *A*, przez nerw akustyczny dla przedmiotu *B*. Z punktu widzenia jakościowego nie mają one ze sobą nic wspólnego. Wyobrażenie tych przedmiotów, jakie możemy sobie wytworzyć, są absolutnie różnorodne, jedno nie daje się do drugiego sprowadzić. Ale wiem, że aby dosięgnąć przedmiotu *A*, wystarczy, że wyciągnę w pewien sposób prawą rękę; kiedy tego nie robię, wyobrażam sobie czucia mięśniowe i inne czucia analogiczne, które towarzyszyłyby temu wyciągnięciu ręki, i wyobrażenie to jest skojarzone z wyobrażeniem przedmiotu *A*.

Otóż wiem również, że mogę dosięgnąć przedmiotu *B* wyciągając prawą rękę w ten sam sposób, któremu to wyciągnięciu ręki towarzyszy ten sam orszak czuć mięśniowych. I kiedy mówię, że te dwa przedmioty zajmują to samo miejsce, nie mówię nic ponadto.

Wiem również, że mógłbym dosięgnąć przedmiotu *A* przez inny odpowiedni ruch ręki lewej, i wyobrażam sobie czucia mięśniowe, które towarzyszyły temu ruchowi; i przez ten sam ruch ręki lewej, któremu towarzyszyłyby te same czucia, mógłbym również dosięgnąć przedmiotu *B*.

Jestto dla mnie rzeczą dużej wagi, bo w ten sposób potrafię się bronić przeciw niebezpieczeństwom, które mogłyby mi grozić bądź ze strony przedmiotu *A*, bądź ze strony przedmiotu *B*. Każdemu ciosowi, który może w nas ugodzić, przyroda dodała jeden lub kilka sposobów zasłonięcia się przed nim. Jeden i ten sam sposób zasłonięcia się może odpowiadać kilku uderzeniom; tak n. p. jeden i ten sam ruch ręki prawej pozwoliłby nam obronić się w chwili α od przedmiotu A; w chwili β od przedmiotu B. Podobnie przed jednym i tym samym ciosem można się zasłonić w różny sposób, powiedzieliśmy n. p., że przedmiotu A można dosięgnąć równie dobrze pewnym ruchem ręki prawej, jak pewnym ruchem ręki lewej.

Wszystkie te zasłony [parades] nie mają ze sobą nic wspólnego pozatym, że pozwalają się zasłonić od jednego i tego samego ciosu, i to właśnie, i nic ponadto, chcemy wyrazić, kiedy mówimy, że są to ruchy, prowadzące do jednego i tego samego punktu przestrzeni. Podobnież przedmioty, o których mówimy, że zajmują jeden i ten sam punkt przestrzeni, nie mają ze sobą nic wspólnego pozatym, że jedna i ta sama zasłona pozwala się od nich obronić.

Albo wyraźmy to jeszcze inaczej. Wyobraźmy sobie niezliczone druty telegraficzne, jedne dośrodkowe, inne odśrodkowe. Druty odśrodkowe uprzedzają nas o wypadkach, zachodzących na zewnątrz, druty dośrodkowe mają wypadkom tym zaradzić. Między drutami ustanowione są połączenia [connexions] w taki sposób, że kiedy prąd przebiega przez jeden z drutów dośrodkowych, prąd ten działa na cewkę [relai] i wzbudza prąd w jednym z drutów odśrodkowych, przyczym urządzone to jest tak, aby kilka drutów dośrodkowych mogło działać na jeden i ten sam drut odśrodkowy, jeśli jeden i ten sam zabieg odpowiada kilku niebezpieczeństwom, i aby jeden i ten sam drut dośrodkowy był w stanie wstrząsnąć różne druty odśrodkowe bądź jednocześnie, bądź jednym w braku drugiego, ilekroć jednemu i temu samemu niebezpieczeństwu może zaradzić kilka zabiegów.

Ten to złożony system skojarzeń, ta, że tak powiemy, tablica rozdzielcza [tableau de distribution], stanowi całą naszą gieometrję, albo raczej całą treść instynktowną naszej gieometrji. To, co nazywamy naszą intuicją linji prostej lub odległości jest to nasza świadomość tych skojarzeń i ich imperatywnego charakteru.

Nietrudno też jest zrozumieć źródła samej tej imperatywności. Skojarzenie wydaje się nam tymbardziej niezniszczalnym, im jest dawniejszym. Lecz skojarzenia te nie są w swej większości zdobyczą jednostki, bo ślady ich dają się stwierdzić u nowonarodzonego dziecka: są to zdobycze rasy. Dobór naturalny musiał doprowadzić do tych zdobyczy tym szybciej, im bardziej były one niezbędne.

Z tego stanowiska należy uznać te, o których mówimy, za chronologicznie najdawniejsze, bo bez nich organizm nie mógłby się bronić. Skoro tylko komórki przestały poprostu się sklejać, i wypadło im wzajemnie się wspomagać, z konieczności musiał zorganizować się mechanizm podobny do opisanego przez nas, aby pomoc ta nie zbaczała z drogi i chroniła wprost od niebezpieczeństw.

Jeśli żabie odetnie się głowę, i następnie opuści się kroplę kwasu na pewien punkt jej skóry, usiłuje ona zetrzeć kwas zapomocą najbliższej łapki, jeśli zaś i tę łapkę się odamputuje, posługuje się ona w tym celu łapką symetryczną do tamtej. Mamy tu ową podwójną zasłonę, o której mówiliśmy powyżej, która pozwala zwalczać zło zapomocą innego środka, skoro pierwszym się nie rozporządza. I ta właśnie rozmaitość zasłon oraz wynikająca z niej koordynacja stanowią przestrzeń.

Widzimy tedy, do jakich głębin nieświadomego trzeba się opuścić, aby odkryć pierwsze ślady owych skojarzeń przestrzennych, wynikających z gry najniższych części systemu nerwowego. Nic więc dziwnego, że każda próba odkojarzenia tego, co od tak dawna jest skojarzone, musi napotkać na silny opór. Ten właśnie opór nazywamy oczywistością prawd gieometrycznych; oczywistość ta jestto poprostu wstręt do zerwania z bardzo staremi przyzwyczajeniami, z któremi zawsze nam było dobrze.

III.

Stworzona w ten sposób przestrzeń nie sięga dalej, niż dokąd może dotrzeć moje ramię; rozsunięcie jej granic wymaga interwencji pamięci. Istnieją punkty, których nie jestem w stanie dosięgnąć, z jakimkolwiek wysiłkiem wyciągać będę rękę; gdybym był przygwożdżony do ziemi, jak np. polip wodny, który może jedynie wyciągać swe macki, wszystkie te punkty byłyby poza przestrzenią, gdyż wrażenia, jakie moglibyśmy odczuwać wskutek działania ciał, znajdujących się w tych punktach, nie kojarzyłyby się z ideją żadnego ruchu, pozwalającego nam na dosięgnięcie ich, żadnej odpowiedniej zasłony. Wrażenia te zdawałyby się nie posiadać żadnej cechy przestrzennej, nie próbowalibyśmy ich lokalizować.

Ale my nie jesteśmy przytwierdzeni do ziemi, jak zwierzęta niższe; jeżeli nieprzyjaciel jest zbyt daleko, możemy naprzód iść ku niemu, i potym, skoro będziemy dość blizko, wyciągnąć rękę. Jestto również zasłona, lecz zasłona na dużą odległość. Nadto jestto zasłona złożona, i w wyobrażenie o niej wchodzą wyobrażenia czuć mięśniowych, wynikłych z ruchu nóg, czuć mięśniowych, wynikłych z końcowego ruchu ręki, wyobrażenia czuć kanałów półkolistych i t. d. Winniśmy zresztą wyobrażać sobie nie kompleks czuć współczesnych, lecz kompleks czuć kolejnych, następujących po sobie w określonym porządku, i dlatego powiedziałem przed chwilą, że interwencja pamięci jest niezbędna.

Zauważmy jeszcze, że aby dotrzeć do jednego i tego samego punktu, mogę bliżej podejść do celu, aby mniej forsownie wyciągnąć rękę; nie jedną określoną zasłonę, tysiąc rozmaitych zasłon mogę przeciwstawić jednemu i temu samemu niebezpieczeństwu. Wszystkie te zasłony mogą składać się z czuć, nie mających ze sobą nic wspólnego, a przecież uważamy je za oznaczające jeden i ten sam punkt przestrzeni, ponieważ odpowiadają one jednemu niebezpieczeństwu, i wszystkie są skojarzone z pojęciem tego niebezpieczeństwa. Możliwość odparowania jednego i tego samego uderzenia stanowi o jedności tych rozmaitych zasłon, podobnie jak możliwość być odparowanemi w jeden i ten sam sposób stanowi o jedności uderzeń najrozmaitszej natury, grożących nam z jednego i tego samego punktu przestrzeni. Ta podwójna tożsamość stanowi o indywidualności każdego punktu przestrzeni, i w pojęciu przestrzeni niemasz nic ponadto.

Przestrzeń, rozważana w paragrafie poprzednim, którą moglibyśmy nazwać przestrzenią zwężoną, była odniesiona do osi, związanych z moim ciałem; osi te były stałe, bo ciało moje nie poruszało się, poruszały się jedynie niektóre jego członki. Do jakichże osi należy odnosić w sposób naturalny przestrzeń rozległą, to znaczy przestrzeń nową, powyżej określoną? Punkt określamy szeregiem ruchów, które należy wykonać, żeby doń dotrzeć, wychodząc z pewnego początkowego położenia ciała. Osie są tedy związane z tym położeniem początkowym ciała.

Ale położenie, które nazwałem początkowym, może być dowolnie obranym zpośród wszystkich położeń, jakie ciało moje kolejno zajmowało; jeżeli mniej lub bardziej nieświadoma pamięć tych położeń kolejnych jest niezbędna dla gienezy pojęcia przestrzeni, pamięć ta może przecież sięgać mniej lub bardziej daleko w przeszłość. Wynika stąd już w samej definicji przestrzeni pewna nieoznaczoność, i ta właśnie nieoznaczoność stanowi jej względność.

Niema przestrzeni absolutnej, istnieje jedynie przestrzeń względna w odniesieniu do pewnego początkowego położenia ciała. Dla istoty świadomej, przytwierdzonej do ziemi, jak zwierzęta niższe, która przeto znałaby jedynie przestrzeń zwężoną, przestrzeń byłaby również względna (bo byłaby odniesiona do jej ciała), lecz istota ta nie miałaby świadomości tej względności, gdyż osi, do których odnosiłaby ona tę przestrzeń, nie zmieniałyby się! Zapewne, skała, do której byłaby przykuta ta istota, nie byłaby nieruchomą, bo brałaby udział w ruchu naszej planety; dla nas więc osi te zmieniałyby się co chwila; lecz dla niej nie zmieniałyby się wcale. Mamy możność odnosić naszą przestrzeń rozciągłą to do położenia *A* naszego ciała, uważanego za początkowe, to do położenia *B*, które zajmowało ono w parę chwil później, i które wolno nam z kolei uważać za początkowe; co chwila dokonywamy przeto nieświadomej zmiany współrzędnych. Możności tej nie posiadałaby nasza urojona istota, i dlatego, że wzbronioneby jej było podróżowanie, uważałaby przestrzeń za absolutną. W każdym momencie narzucałby się jej określony układ osi; układ ten mógłby się w rzeczywistości zmieniać, dla niej byłby on ciągle tym samym, bo byłby ciągle układem jedynym. Inaczej rzecz się ma dla nas, którzy w każdej chwili posiadamy kilka układów osi, zpośród których możemy wybierać dowolnie pod warunkiem sięgania pamięcią w mniej lub bardziej odległą przeszłość.

Ale, ponadto, przestrzeń zwężona nie byłaby jednorodną poszczególnych punktów tej przestrzeni nie można uważać za równoważne, gdyż jednych możnaby dosięgnąć jedynie za cenę największych wysiłków, inne natomiast byłyby łatwo dostępne. Natomiast przestrzeń rozciągła wydaje się nam jednorodną, i wszystkie jej punkty uważamy za równoważne. Co mamy przy tym na myśli?

Wychodząc z pewnego położenia *A*, możemy, poczynając od *A*, wykonać pewne ruchy *M*, którym odpowiada pewien kompleks czuć mięśniowych. Z innego położenia *B* możemy wykonać ruchy *M'*, którym odpowiadają te same czucia mięśniowe. Niechaj natenczas a będzie położeniem pewnego punktu ciała, np. końca małego palca ręki prawej, w położeniu początkowym *A*, niechaj *b* będzie położeniem tego samego palca po wykonaniu ruchów *M*, wychodząc z tego położenia *A*. Niechaj następnie *a'* będzie położeniem tego palca w położeniu *B*, *b'* jego położeniem po wykonaniu ruchów *M'*, poczynając od położenia *B*.

Otóż mamy zwyczaj mówić, że punkty przestrzeni *a* i *b* są do siebie w takim stosunku, jak punkty, *a'* i *b'*, co poprostu znaczy, że obydwu szeregom ruchów *M* i *M'* towarzyszą te same czucia mięśniowe. Ponieważ zaś mam świadomość tego, że po przejściu od położenia *A* do położenia *B* ciało moje zachowało zdolność wykonywania tych samych ruchów, wiem tedy, że istnieje punkt przestrzeni, który znajduje się do punktu *a'* w takim samym stosunku, jak jakikolwiek punkt *b* do punktu *a*, tak iż oba punkty *a* i *a'* są równoważne. To właśnie nazywa się jednorodnością przestrzeni. I dlatego również przestrzeń jest względna, ponieważ własności jej pozostają te same, niezależnie od tego, czy się ją odniesie do osi *A* lub do osi *B*. W ten sposób względność przestrzeni i jej różnorodność są jednym i tym samym.

Jeżeli teraz chcę przejść do wielkiej przestrzeni, która służy nietylko mnie, lecz w której mogę umieścić cały wszechświat, to przejście to będzie aktem wyobraźni. Wyobrażę sobie, co odczuwałby olbrzym, który mógłby w paru susach dosięgnąć planet; albo też, jeśli kto woli, co odczułbym ja sam w obliczu miniaturowego świata, w którym planety te byłyby zastąpione przez małe kulki, a na jednej z tych kulek poruszałby się lilipucik, którego nazwę »ja«. Lecz ten akt wyobraźni byłby niemożliwy, gdybym był uprzednio nie skonstruował mojej przestrzeni zwężonej i mojej przestrzeni rozciągłej na mój osobisty użytek.

IV.

Dlaczego wszystkie te przestrzenie posiadają trzy wymiary? Powróćmy do »tablicy rozdzielczej«, o której mówiliśmy wyżej. Z jednej strony mamy listę możliwych niebezpieczeństw; oznaczmy je przez *A1*, *A2* itd.; a z drugiej listę rozmaitych środków zapobiegawczych, które podobnie nazwiemy *B1*, *B2* itd. Mamy następnie połączenia między ostrzegaczami pierwszej listy i zasłonami drugiej tak, iż np. jeżeli ostrzegacz o niebezpieczeństwie *A3* zacznie działać, wprawi on w ruch cewkę, odpowiadającą zasłonie *B4*.

Ponieważ mówiłem poprzednio o drutach dośrodkowych i drutach odśrodkowych, obawiam się, że ktoś może widzieć w tym wszystkim nie proste porównanie, lecz opis systemu nerwowego. Bynajmniej tak nie jest, a to dla kilku racji: przedewszystkim nie pozwoliłbym sobie na wygłoszenie zdania o strukturze systemu nerwowego, którego nie znam, kiedy ci, co go badali, robią to jedynie z ostrożnością; następnie dlatego, że pomimo mojej niekompetencji, czuję, że schemat byłby nadto symplistyczny; wreszcie dlatego, że na mojej liście zasłon figurują zasłony bardzo złożone, które w wypadku przestrzeni rozciągłej mogą nawet, jak widzieliśmy, składać się z paru kroków oraz ruchu ramienia. Nie idzie więc o połączenie fizyczne między dwu przewodnikami, lecz o skojarzenie psychologiczne między dwu szeregami czuć.

Jeżeli zarówno A_1 jak A_2 są skojarzone z zasłoną B_1, i jeżeli A_1 jest również skojarzone z zasłoną B_2, natenczas naogół A_2 i B_2 będą również skojarzone. Gdyby podstawowe to prawo nie było ogólnie prawdziwe, mielibyśmy jeden wielki zamęt, i nie byłoby nic podobnego do koncepcji przestrzeni ani do gieometrji. Istotnie, przypomnijmy, jak określiliśmy punkt przestrzeni. Zrobiliśmy to w dwojaki sposób: z jednej strony jestto ogół ostrzegaczy A, znajdujących się w połączeniu z jedną i tą samą zasłoną B; jestto z drugiej strony ogół zasłon B, znajdujących się w połączeniu z jednym i tym samym ostrzegaczem A. Gdyby prawo nasze nie było prawdziwe, należałoby powiedzieć, że A_1 i A_2 odpowiadają jednemu i temu samemu punktowi, ponieważ oba znajdują się w połączeniu z B_1; ale należałoby powiedzieć również, że nie odpowiadają one jednemu i temu samemu punktowi, ponieważ A_1 byłby w połączeniu z B_2, co nie miałoby miejsca dla A_2. Stalibyśmy wobec sprzeczności.

Gdyby wszelako prawo to było ściśle i zawsze prawdziwe, przestrzeń byłaby całkiem różna od tego, czym jest. Mielibyśmy ostro od siebie odcięte kategorje, na które rozpadałyby się z jednej strony ostrzegacze A, z drugiej zasłony B; kategorje te byłyby bardzo liczne lecz całkowicie od siebie odosobnione. Przestrzeń składałaby się z punktów bardzo licznych lecz odosobnionych, byłaby n i e c i ą g ł a. Nie byłoby racji, aby uszeregować te punkty raczej w tym porządku, niż w owym, a przeto nie byłoby racji, aby przypisywać przestrzeni trzy wymiary.

Ale tak nie jest; niechaj mi wolno będzie powrócić na chwilę do języka ludzi, znających już gieometrję; muszę to zrobić, bo jestto język, który rozumieją najlepiej ci, od których usiłuję być zrozumianym. Kiedy chcę odparować cios, staram się dotrzeć do punktu, z którego cios ten pochodzi, lecz wystarczy, bym się doń dostatecznie zbliżył. Wówczas zasłona B_1 będzie mogła odpowiadać A_1 i A_2, jeżeli punkt odpowiadający B_1 jest dostatecznie blisko zarówno punktu, odpowiadającego A_1, i punktu, odpowiadającego A_2. Możliwe jest przecie, że punkt, odpowiadający innej zasłonie B_2, będzie dostatecznie bliski punktu, odpowiadającego A_1, nie będąc bliskim punktu, odpowiadającego A_2. Tak iż zasłona B_2 będzie mogła odpowiadać A_1, nie mogąc odpowiadać A_2.

Dla człowieka, nie znającego gieometrji, wyrazi się to poprostu, jako wykroczenie przeciw sformułowanemu powyżej prawu. Wówczas stan rzeczy będzie następujący. Dwie zasłony B_1 i B_2 będą skojarzone z jednym i tym samym ostrzegaczem A_1 oraz z wielką bardzo ilością ostrzegaczy, które zaliczymy do tej samej kategorji co A_1, i które będą dla nas odpowiadały jednemu i temu samemu punktowi przestrzeni. Ale będziemy mogli znaleźć ostrzegacze A_2, które będą skojarzone z B_2 a nie będą skojarzone z B_1, i które w zamian będą skojarzone z B_3, które to B_3 nie było skojarzone z A_1 itd., tak iż w szeregu

$$B_1,\ A_1,\ B_2,\ A_2,\ B_3,\ A_3,\ B_4,\ A_4$$

każdy wyraz jest skojarzony z następnym i z poprzednim, lecz nie jest skojarzony z wyrazami odległemi o parę miejsc.

Zbyteczna dodawać, że każdy wyraz tych szeregów nie jest odosobniony, lecz wchodzi w skład bardzo licznej kategorji innych ostrzegaczy lub innych zasłon, która posiada te same co on połączenia, i którą można uważać za odpowiadającą jednemu punktowi przestrzeni. Prawo podstawowe, lubo dopuszcza wyjątki, pozostaje tedy niemal zawsze prawdziwym. Tylko że naskutek tych wyjątków kategorje te nie są już całkowicie odosobnione lecz wzajemnie na siebie następują i w pewnej mierze się przenikają, tak iż przestrzeń staje się ciągła.

Z drugiej strony porządek, w którym kategorje te powinny być uszeregowane, nie jest już dowolny, i np. w powyżej wypisanym szeregu *B2* musi być umieszczone między *A1* i *A2*, a przeto między *B1* i *B3*, błędnym zaś byłoby umieszczenie go między *B3* i *B4*.

Istnieje przeto pewien naturalny porządek, według którego szeregują się nasze kategorje, odpowiadające punktom przestrzeni, i doświadczenie mówi nam, że porządek ten ma postać tablicy o potrójnym wejściu, i dlatego to przestrzeń posiada trzy wymiary.

V.

Tak więc własność charakterystyczna przestrzeni, polegająca na tym, że posiada ona trzy wymiary, jest poprostu własnością naszej tablicy rozdzielczej, własnością wewnętrzną, że tak powiemy, umysłu ludzkiego. Wystarczyłoby zniszczyć niektóre z tych połączeń tj. z tych skojarzeń pojęć, aby otrzymać inną tablicę rozdzielczą, i mogłoby to wystarczyć, aby przestrzeń nabyła czwartego wymiaru.

Niejednego czytelnika wniosek ten zapewne zadziwi. Czyżby, pomyśli on, świat zewnętrzny nie miał na te rzeczy wcale wpływu? Skoro ilość wymiarów pochodzi od naszego ustroju, mogłyby istnieć istoty myślące, żyjące w naszym świecie, lecz zbudowane inaczej niż my, a przeto mniemające, że świat posiada mniej lub więcej niż trzy wymiary. Czyż p. de Cyon nie powiedział, że japońskie myszy, posiadające tylko dwie pary kanałów półkolistych sądzą, że świat ma dwa wymiary? I czy wobec tego ta istota myśląca, o ile jest zdolna zbudować fizykę, nie zbuduje fizyki dwu- lub czterowymiarowej, która wszakże będzie w pewnym sensie tą samą co nasza, bo będzie opisem tego samego świata w innym języku?

Istotnie, wydaje się, że byłoby możliwe przełożyć naszą fizykę na język gieometrji czterowymiarowej; lecz ten, kto podjąłby tę próbę, zadałby sobie wiele trudu dla małej korzyści; wystarczy więc, że wspomnimy tutaj, że w mechanice Hertza można znaleźć coś analogicznego. Wszelako zdaje się, że przekład byłby zawsze mniej prosty niż tekst, że zawsze miałby cechy przekładu, że język trzech wymiarów jest najwłaściwszy dla opisu naszego świata, jakkolwiek opisu tego możnaby dokonać ostatecznie i w innym narzeczu.

Zresztą nasza tablica rozdzielcza nie powstała drogą przypadku. Istnieje połączenie między ostrzegaczem A_1 i zasłoną B_1, jestto wewnętrzną własnością naszego umysłu; skądże pochodzi to połączenie? stąd, że zasłona B_1 pozwala rzeczywiście obronić się od niebezpieczeństwa A_1; to zaś jest faktem zpoza nas, jest własnością świata zewnętrznego. Nasza tablica rozdzielcza jest więc tylko przekładem zespołu faktów zewnętrznych; jeżeli posiada ona trzy wymiary to dlatego, że przystosowała się do świata, który posiadał pewne własności; a główną zpośrod tych własności jest istnienie przyrodzonych ciał stałych, których przemieszczenia odbywają się w granicach postrzegalności według praw, które nazywamy prawami ruchu ciał stałych niezmiennych. Jeśli tedy język trzech wymiarów jest językiem, który pozwala nam najłatwiej opisać nasz świat, nie powinno to nas dziwić; język ten jest modelowany na naszej tablicy rozdzielczej; a tablica ta została ustanowiona po to, żebyśmy mogli żyć w tym świecie.

Powiedziałem, że moglibyśmy pomyśleć istoty myślące, żyjące w naszym świecie, których tablica rozdzielcza posiadałaby cztery wymiary, i któreby przeto myślały w nadprzestrzeni. Nie jest wszakże pewne, czy podobne istoty, o ileby się narodziły w naszym świecie, mogłyby żyć w nim i bronić się od tysiącznych niebezpieczeństw, jakieby je osaczały.

VI.

Na zakończenie parę jeszcze uwag. Zachodzi uderzający kontrast między nieokrzesaniem owej gieometrji prymitywnej, sprowadzającej się do tego, co nazwałem tablicą rozdzielczą, a nieskończoną dokładnością gieometrji matematyków. A przecież ta ostatnia narodziła się z tamtej; ale nietylko z niej; musiała ona zostać zapłodniona naszą zdolnością konstruowania pojęć matematycznych, np. pojęcia grupy; trzeba było znaleźć pośród czystych pojęć pojęcia najlepiej przystosowane do owej przestrzeni nieokrzesanej, której gienezę spróbowałem wytłumaczyć na poprzedzających kartkach, i która jest nam wspólną z wyższemi zwierzętami.

Oczywistość pewnych postulatów gieometrycznych jest jedynie, jak się rzekło, naszym wstrętem do zrzeczenia się bardzo starych nawyknień. Lecz postulaty te są nieskończenie dokładne, kiedy nasze nawyknienia mają kontury zasadniczo mgliste. Skoro tylko chcemy myśleć, musimy mieć postulaty nieskończenie dokładne, bo jestto jedynym sposobem uniknięcia sprzeczności; lecz wśród wszystkich możliwych systemów postulatów istnieją takie, które wzdragalibyśmy się wybrać, ponieważ nie godziłyby się dostatecznie z naszemi nawyknieniami; jakkolwiek mglistemi, jakkolwiek elastycznemi są te nawyknienia, posiadają one przecież granice elastyczności.

Widzimy więc, że jeśli gieometrja nie jest nauką doświadczalną, to jestto nauka, zrodzona z okazji doświadczenia, że przestrzeń, która jest przedmiotem jej badania, stworzyliśmy my, lecz stworzyliśmy ją, przystosowując do świata, w którym żyjemy. Wybraliśmy przestrzeń najdogodniejszą, lecz wyborem naszym kierowało doświadczenie; ponieważ wybór ten był nieświadomy, zdaje nam się, że został nam narzucony; jedni mówią, że narzuca go nam doświadczenie, inni, że rodzimy się z gotową przestrzenią;

z poprzedzających rozważań wynika, jaka doza prawdy i jaka błędu tkwi w każdym z tych poglądów.

Trudno jest oznaczyć, jaki udział w tym postępowym wychowaniu, które doprowadziło do skonstruowania przestrzeni, przypada jednostce a jaki rasie. W jakiej mierze jeden z nas, przeniesiony od urodzenia w świat całkowicie odmienny, w którym np. przeważałyby ciała, poruszające się według praw ruchu ciał stałych nie-euklidesowych, w jakiej, powiadam, mierze, mógłby on zrzec się przestrzeni przodków i zbudować przestrzeń zupełnie nową?

Udział rasy zdaje się o wiele przeważającym; wszelako, jeśli jemu to zawdzięczamy przestrzeń nieokrzesaną, przestrzeń mglistą, o której mówiłem powyżej, przestrzeń zwierząt wyższych: to czyż nie nieświadomemu doświadczeniu jednostki zawdzięczamy nieskończenie dokładną przestrzeń matematyka? Pytanie to niełacno daje się rozstrzygnąć. Przytoczmy przecież przykład, wskazujący, że przestrzeń, przekazana nam przez naszych przodków, posiada jednak jeszcze pewną plastyczność. Niektórzy myśliwi potrafią strzelać do ryb w wodzie, pomimo, że obraz tych ryb jest podniesiony przez załamanie. Robią to zresztą instynktownie: nauczyli się modyfikować dawny swój instynkt kierunku; albo, jeśli kto woli, zastępować skojarzenie A_1, B_1 innym skojarzeniem A_1, B_2, ponieważ doświadczenie wykazało im, że tamto skojarzenie chybiało celu.

Rozdział II.

Definicje matematyczne a nauczanie.

1. Mam mówić tutaj o ogólnych definicjach w matematyce; tak przynajmniej opiewa tytuł tego rozdziału, nie potrafię wszakże zamknąć się w tym przedmiocie tak, jakby tego wymagała reguła jedności akcji; nie będę go mógł traktować, nie zahaczając trochę o inne kwestje pobliskie, i jeśli zmusi

mnie to do wkraczania od czasu do czasu na zagony brzeżne z prawa i z lewa, czytelnicy moi zechcą mi to przebaczyć.

Cóż to jest dobra definicja? Dla filozofa czy dla uczonego jestto definicja, stosująca się do wszystkich zdefinjowanych przedmiotów, i stosująca się jedynie do nich: jestto definicja, czyniąca zadość regułom logiki. W nauczaniu wszakże jest inaczej: dobrą definicją jest ta, która jest zrozumiała dla uczniów.

Czym się dzieje, że istnieje tyle umysłów opornych rozumieniu matematyki? Czyż nie jest w tym coś paradoksalnego? Jakże to, oto nauka, która odwołuje się jedynie do podstawowych zasad logiki, np. do zasady sprzeczności, do tego, co stanowi poniekąd szkielet naszej umysłowości, z czego nie możnaby się wyzuć, nie przestając myśleć, — i są ludzie, którzy uważają ją za niejasną! i ludzie ci stanowią nawet większość! Że nie są w stanie sami tworzyć, to jeszcze ujdzie, ale że nie rozumieją dowodów, jakie im się wykłada, że pozostają ślepi, gdy ofiarowujemy im światło, które nam zdaje się świecić najczystszym blaskiem, to już jest dziw nad dziwy.

A przecież nie trzeba mieć za sobą wielkiej praktyki egzaminacyjnej, żeby wiedzieć, że ci ślepi nie są bynajmniej istotami wyjątkowemi. Stoimy tu wobec niełatwej do rozwiązania kwestji, którą muszą się jednak zajmować wszyscy ci, co się chcą poświęcić nauczaniu.

Co znaczy: rozumieć? Czy wyraz ten ma to samo znaczenie dla każdego? Czy zrozumieć dowód pewnego twierdzenia znaczy zbadać kolejno każdy z sylogizmów, które się nań składają, i stwierdzić, że jest on poprawny, odpowiadający regułom logiki? Podobnież czy zrozumieć definicję, to znaczy stwierdzić jedynie, że się zna już znaczenie wszystkich użytych terminów, i że nie zawiera ona żadnej sprzeczności wewnętrznej?

Tak jest dla niektórych; kiedy stwierdzą to, tedy powiedzą: zrozumiałem. Tak nie jest — dla większości. Wszyscy niemal są o wiele bardziej wymagający, chcą wiedzieć nietylko, czy wszystkie sylogizmy danego dowodu są poprawne, ale nadto, dlaczego wiążą się one w takim porządku a nie w innym. Dopóki wydają się im one wytworem kaprysu nie zaś umysłu bezustannie świadomego celu, do którego zmierza, sądzą oni, że nie zrozumieli.

Zapewne nie zdają sobie oni sami dobrze sprawy, czego wymagają, i nie umieliby sformułować swych życzeń, ale nie są zadowoleni, czują niewyraźnie, że coś im brakuje. Cóż następuje wówczas? Na początku postrzegają oni jeszcze rzeczy oczywiste, które się im przedkłada; ponieważ jednak są one związane z poprzedzającemi i z następującemi nicią zbyt cienką, przesuwają się one, nie pozostawiając śladu w ich mózgu; idą natychmiast w zapomnienie; po jednej chwili oświetlenia pogrążają się one znowu w noc wieczną. Kiedy posuną się oni dalej w matematyce, nie będą widzieli nawet i tego przemijającego światła, bo twierdzenia opierają się jedne na drugich, a te, któreby im były potrzebne, będą zapomniane; w ten sposób staną się oni niezdolni do rozumienia matematyki.

Nie zawsze jestto wina profesora; często umysł ich, który musi postrzegać nić przewodnią, jest zbyt leniwy, by szukać jej i by ją znaleźć. Ale żeby im przyjść z pomocą, musimy przedewszystkim dobrze zrozumieć, o co się oni potykają.

Inni będą sobie ustawicznie zadawali pytanie: do czego to służy? nie będą rozumieli, dopóki nie znajdą dokoła siebie, w praktyce czy w przyrodzie, racji bytu tego lub innego pojęcia matematycznego. Pod każdy wyraz chcieliby podłożyć obraz zmysłowy; definicja musi wywoływać w ich umyśle ten obraz, w każdym stadjum dowodzenia muszą widzieć, jak się obraz ten przekształca i rozwija. Pod tym jedynie warunkiem zrozumieją i zapamiętają. Ci ulegają często własnemu złudzeniu; nie słuchają oni rozumowań, patrzą na figury; zdaje im się, że zrozumieli, a oni tylko widzieli.

2. Ileż rozmaitych skłonności! Czy należy je zwalczać?

Czy trzeba z nich korzystać? I gdybyśmy chcieli je zwalczać, to którą wypadałoby popierać? Czy trzeba wykazać tym, co zadawalają się czystą logiką, że widzą tylko jedną stronę rzeczy? Czy może należy mówić tym, co się nie zaspokajają tak tanim kosztem, że to, czego się domagają, nie jest potrzebne?

Innemi słowy, czy powinniśmy zmuszać młodzież do zmienienia natury jej umysłu? Wysiłki takie byłyby próżne; nie posiadamy kamienia filozoficznego dla transmutacji metali, nad któremi pracujemy; możemy co najwyżej obrabiać je, przystosowując się do ich własności.

Wiele dzieci jest niezdolnych do zostania matematykami, a przecież trzeba je nauczyć matematyki; a i sami matematycy nie zostali wszyscy odlani w jednej formie. Wystarczy czytać ich dzieła, by rozróżnić wśród nich dwa typy umysłów, logików jak n. p. Weierstrass, i intuityków, jak Riemann. Tę samą różnicę stwierdzić można wśród naszych studentów. Jedni wolą rozwiązywać zadania »zapomocą analizy«, jak się wyrażają, inni »zapomocą gieometrji«.

Bezcelowym byłoby chcieć coś w tym zmienić, a zresztą czyby to było pożądanym? Dobrze jest, by istnieli logicy i intuitycy; któż odważyłby się orzec, że wolałby, żeby Weierstrass nie był nigdy pisał, albo żeby nie było Riemanna. Musimy się tedy pogodzić z rozmaitością umysłów albo raczej powinniśmy się nią cieszyć.

3. Skoro wyraz rozumieć ma kilka znaczeń, definicje, które będą najbardziej zrozumiałe dla jednych, nie będą najlepiej odpowiadały innym. Mamy definicje, które starają się wywołać obraz, oraz definicje, które ograniczają się kombinowaniem form pustych, doskonale logicznych, ale tylko logicznych, wypatroszonych przez abstrakcję z wszelkiej zawartości.

Nie wiem, czyli jest bardzo potrzebne przytaczanie przykładów? Przytoczmy ich przecież kilka, i weźmy nasamprzód, jako przykład krańcowy, definicję ułamków. W szkołach początkowych, aby określić ułamek, kraje się na części jabłko lub ciasto; kraje się je oczywiście w myśli, nie w rzeczywistości, nie przypuszczam bowiem, by budżet nauczania początkowego pozwalał na taką rozrzutność. W wyższej szkole normalnej natomiast i na uniwersytetach mówi się: ułamek jestto zespół dwu liczb całkowitych, oddzielonych od siebie poziomą kreską; określa się, drogą umów, działania, jakim się poddaje te symbole; dowodzi się, że prawidła tych działań są te same, co w rachunku z liczbami całkowitemi, i stwierdza się w końcu, że pomnożenie według tych prawideł ułamka przez jego mianownik daje w rezultacie licznik. Wszystko to jest bardzo dobre, bo wykład ten przeznaczony jest dla młodzieży, oddawna już spoufalonej z pojęciem ułamków przez dzielenie jabłek i innych przedmiotów, i której umysł wysubtelniony przez tęgie wykształcenie matematyczne dojrzał stopniowo do pożądania definicji czysto logicznej. Ale jakież byłoby oszołomienie początkującego, któremuby chciano je zaprezentować?

Takie również definicje znajdziecie w słusznie podziwianej i wielokrotnie nagradzanej książce Hilberta »*Grundlagen der Geometrie*«. Jakoż, rozpoczyna się ona od słów: »Pomyślmy trzy układy **rzeczy**, które nazwiemy punktami, prostemi, płaszczyznami«. Cóż to są te »rzeczy«? nie wiemy i nie potrzebujemy wiedzieć; szkodliwym byłoby nawet, gdybyśmy starali się o tym dowiedzieć; mamy prawo wiedzieć o nich to jedynie, co nam o nich mówią pewniki, jak ten n. p.: Dwa różne punkty oznaczają zawsze prostą, opatrzony takim komentarzem: zamiast oznaczają, możemy powiedzieć, że prosta przechodzi przez te dwa punkty, albo, że łączy te dwa punkty, albo, że te dwa punkty leżą na prostej. Tak więc »leżeć na prostej« jest poprostu zdefinjowane jako synonim »oznaczać prostą«. Książkę Hilberta cenię wysoko, ale nie polecibym jej liceiście. Mógłbym zresztą zrobić to bez obawy, nie dobrnąłby on w niej zbyt daleko.

Wziąłem przykłady krańcowe — żadnemu nauczycielowi nie przyszłoby na myśl posunąć się aż tak daleko. Ale nawet na znacznej jeszcze odległości od takich wzorów czyż nie naraża się on na podobne niebezpieczeństwo?

Jesteśmy w klasie 4-ej; profesor dyktuje: okręg jest miejscem punktów płaszczyzny jednakowo odległych od punktu wewnętrznego, nazwanego środkiem. Dobry uczeń wypisuje to zdanie w swoim kajecie; zły uczeń rysuje w nim rozmaite figielki; lecz żaden z nich nie zrozumiał; wówczas profesor bierze kredę i kreśli na tablicy koło. »Aha! — myślą uczniowie, czemuż to nie powiedział odrazu; okrąg to jest krążek, bylibyśmy zrozumieli«. Bezwątpienia rację ma profesor. Definicja uczniów nic nie byłaby warta, gdyż nie mogłaby służyć do żadnego dowodzenia, a zwłaszcza dlatego, że nie mogłaby ich wdrożyć do zbawiennego przyzwyczajenia analizowania swych pojęć. Ale trzebaby im wykazać, że nie rozumieją tego, co im się zdaje, że rozumieją, naprowadzić ich na to, by zdali sobie sprawę z nieociosania ich pierwotnego pojęcia, by sami odczuli potrzebę odczyszczenia go i okrzesania.

4. Powrócę jeszcze do wszystkich tych przykładów; chciałem tylko pokazać wam owe dwie przeciwne koncepcje; stanowią one w stosunku do siebie jaskrawy kontrast. Kontrast ten tłumaczy nam historja nauki. Kiedy czytamy książkę, napisaną przed pięćdziesięciu laty, większa część znajdujących się w niej rozumowań wyda się nam nieścisłą.

Przyjmowano w owych czasach, że funkcja ciągła nie może zmienić znaku, nie przybierając wartości zero; dzisiaj dowodzi się tego. Przyjmowano, że zwykłe reguły rachunku są stosowalne do liczb niewspółmiernych, dzisiaj dowodzi się tego. Przyjmowano wiele innych rzeczy, które niekiedy były błędne.

Ufano intuicji; lecz intuicja nie może nam dać ścisłości ani nawet pewności, jak się o tym coraz bardziej przekonywano. Mówi ona n. p., że każda krzywa posiada styczną, to znaczy, że każda funkcja ciągła posiada pochodną, co jest błędne. A ponieważ zależało ludziom na pewności, trzeba było coraz bardziej kurczyć dział intuicji.

Jak odbyła się ta nieunikniona ewolucja? Dostrzeżono rychło, że ścisłość nie może zamieszkać w rozumowaniach, jeśli się jej uprzednio nie wprowadzi do definicji.

Przedmioty, któremi zajmuje się matematyka, były przez długi czas źle zdefinjowane; zdawało się, że się je zna, bo przedstawiano je sobie przy pomocy zmysłów, czy wyobraźni, ale były to jedynie grube obrazy nie zaś ścisłe pojęcia, których mogłoby się imać rozumowanie.

Tutaj więc musiały się zwrócić wysiłki logików. Tak np. dla liczby niewspółmiernej.

Niejasna idea ciągłości, którąśmy poczerpnęli z intuicji, rozłożyła się na skomplikowany układ nierówności, do których wchodzą jedynie liczby całkowite. W ten sposób rozproszyły się ostatecznie wszystkie trudności, które przestrachsiały w naszych ojcach, gdy ci rozmyślali nad podstawami rachunku nieskończonostkowego.

Dzisiaj w analizie pozostają jedynie liczby całkowite lub układy skończone albo nieskończone liczb całkowitych, połączone siecią równości i nierówności.

Matematyka, jak się mówi, zarytmetyzowała się.

5. Czy jednak to zdobycie przez matematykę absolutnej ścisłości odbyło się bez ofiary? Bynajmniej, co wygrała ona na ścisłości, to straciła na objektywności. Właśnie przez oddalanie się od rzeczywistości zdobyła ona ową doskonałą czystość. Można dziś swobodnie przebiec cały jej obszar, niegdyś najeżony przeszkodami, lecz przeszkody te nie znikły. Przeniesiono je tylko na granicę, i trzeba je znowu przezwyciężyć, jeśli się chce przekroczyć tę granicę i przeniknąć do królestwa praktyki.

Dawniej posiadaliśmy niewyraźne pojęcie, utworzone z różnorodnych elementów, z których jedne były *a priori*, inne pochodziły z mniej lub bardziej przetrawionych doświadczeń; zdawało nam się, że znamy intuicyjnie główne ich własności. Dzisiaj odrzuca się elementy empiryczne, zachowując jedynie elementy *a priori;* jedna z własności służy za definicję, a wszystkie inne wyprowadza się z niej drogą ścisłego rozumowania. Wszystko to jest zupełnie w porządku, ale pozostaje dowieść, że własność tę, która stała się definicją, posiadają istotnie przedmioty rzeczywiste, które poznaliśmy z doświadczenia, i które nasunęły nam owo niewyraźne intuicyjne pojęcie. Aby tego dowieść, trzeba będzie odwołać się do doświadczenia lub wysilić intuicję — a gdybyśmy nie byli w stanie tego dowieść, twierdzenia nasze byłyby doskonale ścisłe, ale też doskonale bezużyteczne.

Logika płodzi niekiedy potwory. W ciągu ostatniego półstulecia zjawiło się mnóstwo dziwacznych funkcji, które jakgdyby starają się usilnie o to, by możliwie najmniej mieć podobieństwa z uczciwemi funkcjami, które służą do czegoś. Nie są ciągłe, albo też są ciągłe ale nie mają pochodnych itd. Cowięcej, z punktu widzenia logicznego te osobliwe funkcje są najogólniejszemi, te zaś, które napotykamy bez szukania, okazują się wypadkami szczególnemi. Zajmują one mały tylko kącik.

Niegdyś, kiedy wynajdywano jaką nową funkcję, robiono to ze względu na jakiś praktyczny cel; dziś wynajduje się je umyślnie po to, by wystawić na szwank rozumowania naszych ojców, i nie wydobędzie się z nich nigdy nic ponadto.

Gdyby logika była jedynym przewodnikiem pedagoga, powinienby on zaczynać naukę od funkcji najogólniejszych, to jest najdziwaczniejszych. Powinienby kazać początkującemu borykać się z całym tym muzeum teratologicznym. Jeśli tego nie robicie, mogliby powiedzieć logicy, dojdziecie do ścisłości jedynie etapami.

6. Zapewne, ale nie możemy tak lekceważyć sobie rzeczywistości, a nie mam na myśli jedynie rzeczywistości świata zmysłowego, choć i ta również ma swoją cenę, skoro właśnie dla walki z nią żąda od was uzbrojenia dziewięć dziesiątych waszych uczniów. Istnieje rzeczywistość subtelniejsza,

nadająca życie matematyce, a przecież całkiem odmienna od logiki.

Ciało nasze składa się z komórek, a komórki z atomów; czyż komórki te i te atomy stanowią całą rzeczywistość ciała ludzkiego? Czyż sposób, w jaki komórki te są uszykowane, nadający jedność osobnikowi, nie jest również rzeczywistością i to rzeczywistością o wiele bardziej interesującą?

Czy przyrodnik, który słonia nie badał nigdy inaczej jak przez mikroskop, zna to zwierzę w zupełności?

Tak samo jest w matematyce. Kiedy logik rozłoży każdy dowód na mnóstwo działań elementarnych, z których każde będzie poprawne, nie będzie on jeszcze w posiadaniu całej rzeczywistości; owo nieuchwytne coś, które nadaje jedność dowodowi, wymknie się z jego sieci.

Pocóż będziemy w gmachach, dźwigniętych przez naszych mistrzów, podziwiali dzieło murarza, jeśli nie potrafimy zrozumieć planu architekta? A tego widoku ogólnego nie jest w stanie dać nam czysta logika, żądać go musimy od intuicji.

Weźmy dla przykładu pojęcie funkcji ciągłej. Jestto zrazu tylko obraz zmysłowy, kreska nakreślona kredą na czarnej tablicy. Stopniowo oczyszcza się ono; służy nam do zbudowania złożonego układu nierówności, odtwarzającego wszystkie linje obrazu pierwotnego; kiedy wszystko jest skończone, kabłąki się zdejmuje, jak po zbudowaniu sklepienia; owo nieociosane wyobrażenie, jako niepotrzebna już teraz podpora, znika, i pozostaje jedynie sam gmach, niepokalany dla logika. A przecież gdyby profesor nie był przypomniał pierwotnego obrazu, gdyby nie posiłkował się chwilowo kabłąkiem, jakżeby miał uczeń zrozumieć, jaki to kaprys kazał owym nierównościom piętrzyć się w określony sposób jedne na drugich? Definicja byłaby logicznie poprawna, lecz nie wskazywałaby mu prawdziwej rzeczywistości.

7. Oto tedy zmuszeni jesteśmy cofnąć się wstecz; przykro jest niewątpliwie nauczycielowi wykładać to, co go nie zadawala w zupełności; lecz zadowolenie nauczyciela nie

jest jedynym celem nauczania; trzeba przedewszystkim dbać o to, czym jest umysł ucznia, i czym go chcemy zrobić.

Zoologowie twierdzą, że rozwój embrjonalny zwierzęcia streszcza w krótkim bardzo okresie czasu całe dzieje jego przodków z czasów gieologicznych. Rozwój umysłowy zdaje się podlegać podobnemu prawu. Wychowawca musi przeprowadzić dziecko przez tę samą drogę, przez którą przeszli jego ojcowie; szybciej, ale nie przeskakując etapów. W tym też sensie historja nauki winna być pierwszym naszym przewodnikiem.

Ojcowie nasi sądzili, że wiedzą, co to jest ułamek, lub ciągłość, lub pole powierzchni krzywej; dopiero my zauważyliśmy, że oni tego nie wiedzieli. Podobnie uczniom naszym zdaje się, że wiedzą to, gdy zaczynają poważnie uczyć się matematyki. Jeśli bez należytego przygotowania przyjdę i powiem im: »Nie, nie wiecie tego; nie rozumiecie tego, co według waszego mniemania rozumiecie; trzeba, żebym wam dowiódł tego, co się wam wydaje oczywistym«, i jeśli w dowodzeniu oprę się na przesłankach, które wydadzą im się mniej oczywistemi niż wnioski, tedy cóż pomyślą ci nieszczęśliwi? Pomyślą, że nauka matematyczna jest poprostu dowolnym nagromadzeniem bezużytecznych subtelności; i albo nabiorą do niej odrazy; albo będą się nią bawili jak grą, i dojdą do podobnego stanu umysłów, jak sofiści greccy.

Natomiast później, kiedy umysł ucznia, obyty z rozumowaniem matematycznym, dojrzeje przez długie z nim obcowanie, wątpliwości zrodzą się same przez się, i wówczas dowodowi waszemu będą radzi. Wywoła on później nowe wątpliwości, i dziecku nasuwać się będą kolejno kwestje, jak nasuwały się one kolejno naszym ojcom, aż umysł jego, aby mieć uczucie zadowolenia, będzie wymagał doskonałej ścisłości. Nie wystarcza wątpić o wszystkim, trzeba wiedzieć, dlaczego się wątpi.

8. Głównym celem nauczania matematyki jest rozwijanie pewnych zdolności umysłu, a wśród tych zdolności intuicja nie jest najmniej cenną. Przez nią to świat matematyczny

pozostaje w zetknięciu ze światem rzeczywistym, i gdyby matematyka czysta mogła się bez niej obejść, trzebaby było zawsze do niej się uciekać, by zapełnić przepaść, oddzielającą symbol od rzeczywistości. Praktyk będzie jej zawsze potrzebował, a na jednego czystego matematyka musi przypadać stu praktyków.

Inżynier winien otrzymać zupełne wykształcenie matematyczne — lecz na co mu ono ma służyć? na to, by widział rozmaite postaci rzeczy, i by widział je szybko; nie ma on czasu wdawać się w subtelne szczególiki. Musi on w przedmiotach fizycznych, z jakiemi ma do czynienia, rozpoznawać rychło punkty, których mogą się imać narzędzia matematyczne, któreśmy mu dali w rękę. Jakżeby to zrobił, gdybyśmy pozostawili między jednemi a drugiemi ową głęboką przepaść, wykopaną przez logików?

9. Obok przyszłych inżynierów siedzą inni mniej liczni uczniowie, którzy z czasem mają zostać nauczycielami; ci przeto muszą poznać całą głębię nauki; im przedewszystkim jest niezbędna pogłębiona i ścisła znajomość pierwszych zasad. Lecz nie jest to racja, by nie kultywować u nich intuicji; albowiem nabyliby fałszywego pojęcia o nauce, gdyby patrzyli na nią zawsze z jednej tylko strony, a i u swoich przyszłych uczniów nie potrafiliby rozwijać zdolności, którejby nie posiadali sami.

Nawet czystemu matematykowi zdolność ta jest potrzebna, gdyż zapomocą logiki dowodzi się, zapomocą intuicji — tworzy. Umieć krytykować jest dobrze, umieć tworzyć lepiej. Potraficie rozpoznać, czy dana kombinacja jest poprawna; ale pięknie będziecie wyglądali, jeżeli nie posiądziecie sztuki wybierania zpośród wszystkich możliwych kombinacji. Logika nas poucza, że na pewnej drodze nie napotkamy z pewnością przeszkód; nie mówi nam, jaka droga wiedzie do celu. Trzeba bo umieć widzieć cel zdaleka, a zdolnością, która nas uczy widzieć, jest intuicja. Bez niej matematyk byłby tym, czym pisarz biegły w gramatyce, lecz pozbawiony myśli. A jakżeby zdolność ta miała się rozwijać, jeśli się ją goni i prześladuje, skoro się tylko objawi, jeśli się uczy nieufać jej, zanim się jeszcze dowie, co dobrego można z niej przeczerpnąć.

I tutaj muszę otworzyć nawias, by podnieść wielką wagę ćwiczeń pisemnych. Zadaniom pisemnym nie wyznaczono, być może, dostatecznego miejsca przy niektórych egzaminach, np. w Szkole politechnicznej. Powiadają mi, że zamknęłyby one drzwi przed wielu bardzo dobremi uczniami, którzy umieją bardzo dobrze swoje kursa, bardzo dobrze je rozumieją, a którzy przecież są niezdolni zastosować je w najprostszym nawet wypadku. Powiedziałem powyżej, że wyraz rozumieć ma kilka znaczeń: ci rozumieją jedynie w pierwszy sposób, a widzieliśmy przed chwilą, że takie rozumienie nie wystarcza, aby zrobić z ucznia ani inżyniera ani matematyka. A ponieważ zmuszeni jesteśmy dokonać wyboru, wolę wybrać tych, co rozumieją całkowicie.

10. Czyż jednak sztuka trafnego rozumowania nie jest również cenną zaletą, którą profesor matematyki powinien przedewszystkim kultywować? Bynajmniej o tym nie zapominam; troska o nią musi być żywa i to od samego początku. Byłbym głęboko zmartwiony, gdyby się gieometrja w moich oczach miała wyrodzić w jakąś nędzną tachymetrję, i nie piszę się wcale na krańcowe poglądy niektórych niemieckich Oberlehrer'ów. Ale dosyć jest sposobności ćwiczenia uczniów w poprawnym rozumowaniu w częściach matematyki, w których się nie spotyka wskazanych przezemnie niedogodności. Istnieją długie łańcuchy twierdzeń, w których absolutna logika panowała od pierwszej chwili i, że tak powiemy, w sposób naturalny, w których pierwsi matematycy dali nam modele, godne ustawicznego naśladowania i podziwu.

Nadmiernej subtelności należy unikać przy wykładzie pierwszych zasad; tutaj działałaby ona raczej odpychająco i zresztą byłaby bez pożytku. Niepodobna wszystkiego dowieść ani wszystkiego zdefinjować; trzeba będzie zawsze kiedyś poczerpnąć z intuicji; cóż to waży, czy się to zrobi trochę wcześniej lub trochę później, albo nawet czy się od niej weźmie trochę więcej lub trochę mniej, byleśmy przez poprawne posługiwanie się przesłankami, których nam ona dostarczyła, nauczyli się trafnie rozumować.

11. Czy możliwe jest uczynić zadość tylu sprzecznym warunkom? Czy jest to zwłaszcza możliwe, kiedy idzie o danie definicji? Jak znaleźć zwięzłe sformułowanie, odpowiadające równocześnie nieprzejednanym prawom logiki, naszej potrzebie zrozumienia miejsca, jakie nowe pojęcie zajmuje w całokształcie nauki, naszej potrzebie myślenia obrazami? Najczęściej sformułowania takiego się nie znajdzie, i dlatego też nie wystarcza wypowiedzieć definicję; trzeba ją przygotować i trzeba ją usprawiedliwić.

Co chcę przez to powiedzieć? Wiecie, że mówi się często: wszelka definicja zawiera w sobie domyślnie pewnik, albowiem zakłada ono istnienie definjowanego przedmiotu. Definicja będzie tedy usprawiedliwiona z punktu widzenia logicznego dopiero wówczas, gdy się *dowiedzie*, że nie pociąga ona za sobą żadnej sprzeczności, ani wewnętrznej ani w stosunku do dawniej przyjętych prawd.

Ale tego nie dosyć; definicja jest sformułowana jako umowa; lecz większość umysłów zaprotestowałaby, gdybyście chcieli ją im narzucić, jako umowę dowolną. Nie zaznają spokoju, dopóki nie odpowiecie im na mnóstwo zapytań.

Definicje matematyczne są najczęściej, jak to okazał Liard, prawdziwemi konstrukcjami, zbudowanemi w całości z pojęć prostych. Ale dlaczego ułożyć te elementy w taki właśnie sposób, kiedy istnieje tysiąc innych układów możliwych? Czy dla kaprysu? Jeśli nie, to dlaczego ta oto kombinacja ma mieć większe prawo bytu niż każda inna? Jakiej potrzebie czyni zadość? Jakim sposobem przewidziano, że odegra ona w rozwoju nauki wybitną rolę, że skróci nasze rozumowania i nasze rachunki? Czy istnieje w przyrodzie jakiś zwykły przedmiot, któryby był jej, że tak powiem, grubym i nieociosanym obrazem?

To nie wszystko jeszcze; skoro odpowiecie na wszystkie te pytania w sposób zadawalający, będziemy już wiedzieli, że noworodek ma prawo być ochrzczonym; lecz i wybór imienia nie jest dowolny; trzeba wytłumaczyć jakiemi kierowaliśmy się analogjami, i że jeśli daliśmy analogiczne nazwy rzeczom różnym, to rzeczy te różnią się tylko co do zawartości a podobne są do siebie co do formy; że własności ich są analogiczne i, że tak powiem, równoległe.

Za tę to cenę będzie można uczynić zadość wszelkim skłonnościom i wszelkim wymaganiom. Jeśli sformułowanie jest dość poprawne, by podobać się logikowi, usprawiedliwienie zadowoli intuityka. Ale można zrobić jeszcze lepiej; ilekroć będzie to możliwe, usprawiedliwienie poprzedzi sformułowanie i przygotuje je; do sformułowania ogólnego poprowadzi zbadanie kilku wypadków szczególnych.

Inna jeszcze okoliczność: każda z części sformułowania pewnej definicji ma na celu odróżnienie przedmiotu definjowanego od klasy innych pobliskich przedmiotów. Definicja będzie zrozumiana dopiero wówczas, gdy wskażecie nietylko przedmiot zdefinjowany lecz i przedmioty sąsiednie, od których należy go odróżnić, gdy jasną się stanie ta różnica, i gdy dodacie wyraźnie: dlatego to, formułując definicję, powiedziałem to i to.

Ale czas już wyjść poza okólniki i rozważyć, jak wyłożone powyżej nieco abstrakcyjne zasady mogą być zastosowane do arytmetyki, gieometrji, analizy i mechaniki.

Arytmetyka.

Nie potrzeba definjować liczby całkowitej; natomiast zazwyczaj definjuje się działania nad liczbami całkowitemi; myślę, że uczniowie uczą się tych definicji na pamięć i niewkładają w nie żadnej treści. Dwie są po temu racje: naprzód każe się im ich uczyć zbyt wcześnie, gdy ich umysł nie odczuwa jeszcze żadnej tego potrzeby; następnie definicje te nie są zadawalające ze stanowiska logiki. Dla dodawania nie podobna znaleźć dobrej definicji poprostu dlatego, że trzeba się gdzieś zatrzymać, i że nie można wszystkiego definjować. Nie jestto definicją dodawania, gdy się mówi, że polega ono na »dokładaniu«. Jedyne, co można zrobić, to zacząć od pewnej ilości przykładów konkretnych i powiedzieć: działanie, któreśmy oto wykonali, nazywa się dodawaniem.

Inaczej z odejmowaniem; można określić je logicznie jako działanie odwrotne do dodawania; czy od tego jednak trzeba zacząć? I tutaj należy również rozpocząć od przykładów, wykazać na tych przykładach odwrotność obu działań; przygotuje to i usprawiedliwi definicję.

Podobnie i dla mnożenia; weźmie się jakieś zadanie szczególne; wykaże, iż można je rozwiązać przez dodanie kilku równych sobie liczb; wskaże się następnie, że dochodzi się prędzej do rezultatu przez mnożenie, działanie, które uczniowie umieją już wykonywać przez rutynę, a definicja logiczna wyłoni się już stąd całkiem naturalnie.

Dzielenie określi się jako działanie odwrotne w stosunku do mnożenia; ale rozpocznie się od przykładu, wziętego z pospolitego pojęcia podziału, i wskaże się na tym przykładzie że przez mnożenie otrzymujemy z powrotem dzielną.

Pozostają działania nad ułamkami. Trudności nastręcza jedynie mnożenie. Najlepiej będzie wyłożyć naprzód teorję proporcji, z niej dopiero będzie można wyprowadzić definicję logiczną; ale żeby pobudzić do przyjęcia definicji, które napotyka się na początku tej teorji, trzeba definicje te przygotować ua wielu przykładach, wziętych zpośród zagadnień klasycznych na regułę trzech, przyczym dane w tych zagadnieniach będą musiały być ułamkami. Nie trzeba się też obawiać spoufalenia uczniów z pojęciem proporcji za pomocą obrazów gieometrycznych, czy to odwołując się do ich wspomnień, jeśli uczyli się już gieometrji, czy uciekając się do intuicji bezpośredniej, jeśli się jej nie uczyli, co przygotuje ich zresztą do nauki gieometrji Dodam wreszcie, że określiwszy mnożenie ułamków, należy usprawiedliwić tę definicję przez dowód, że posiada ono cechy przemienności, łączności i rozdzielności;

i zwrócić wyraźnie uwagę słuchaczy na to, że stwierdzenie tych cech ma na celu usprawiedliwienie definicji.

Obrazy gieometryczne, jak widzimy, odgrywają w tym wszystkim dużą rolę; i rolę tę usprawiedliwia filozofja oraz historja nauki. Gdyby arytmetyka pozostała wolna od jakiejkolwiek mieszaniny z gieometrją, znałaby ona jedynie liczbę całkowitą; jeżeli zaś stworzyła coś jeszcze, to po to, aby przystosować się do potrzeb gieometrji.

Gieometrja.

W gieometrji napotykamy przedewszystkim pojęcie linji prostej. Czy można określić linję prostą? Definicja zwykła, najkrótsza droga pomiędzy dwoma punktami, wcale mnie nie zadawala. Zacząłbym poprostu od linjału i pokazałbym nasamprzód uczniowi, jak można sprawdzić linjał przez odwrócenie; to sprawdzenie jest prawdziwą definicją linji prostej; linja prosta jest osią obrotu. Pokazalibyśmy mu później, jak sprawdza się linjał przez ślizganie, co dałoby nam jedną z najważniejszych własności linji prostej. Co zaś do owej innej własności linji prostej, że jest ona najkrótszą drogą od jednego punktu do drugiego, to jestto twierdzenie, którego można dowieść apodyktycznie, lecz dowód jest zbyt subtelny, by można go było wkluczyć w kurs szkoły średniej. Lepiej będzie pokazać, że sprawdzony uprzednio linjał przylega do napiętej nici. Wobec innych analogicznych trudności nie trzeba się obawiać wprowadzania nowych pewników, które należy poprzeć pospolitemi doświadczeniami.

Toż i tak trzeba przyjąć pewną ilość pewników, a jeśli przyjmiemy ich trochę więcej niż jest ściśle niezbędnym, nie będzie stąd wielkiego nieszczęścia; istotnym jest, nauczyć się trafnie rozumować na przyjętych już pewnikach. Wujaszek Sarcey, który lubił się powtarzać, mawiał często, że w teatrze widz przyjmuje chętnie wszelkie postulaty, które mu się narzuca na początku, ale skoro kurtyna się podniesie, staje się on nieprzejednanym co do logiki. Otóż w matematyce jest tak samo.

Przy kole można zacząć od cyrkla; uczniowie rozpoznają od pierwszego rzutu oka nakreśloną krzywą; zwróci się im później uwagę na to, że odległość obu ostrzy przyrządu pozostaje stała, że jedno z tych ostrzy jest nieruchome, drugie ruchome, i w ten sposób dojdzie się naturalnie do definicji logicznej.

Definicja płaszczyzny wymaga domyślnego pewnika, i nie należy tego taić. Weźcie rajzbret i zwróćcie uwagę na to, że ruchomy linjał ciągle przystaje do tego rajzbretu, zachowując przy tym trzy stopnie swobody ruchów. Porównajcie z walcem i stożkiem, do których to powierzchni prosta przystaje tylko o tyle, o ile pozostawimy jej dwa jedynie stopnie swobody; następnie weźmie się trzy rajzbrety; pokaże się naprzód, że mogą one ślizgać się, przylegając do siebie, i to przy trzech stopniach swobody; i wreszcie, żeby wyróżnić płaszczyznę od kuli, że dwa z tych rajzbretów, z których każdy przylega do trzeciego, przylegają i do siebie.

Zdziwi was może to ustawiczne posługiwanie się ruchomemi narzędziami; nie jestto bynajmniej jakieś radzenie sobie nieokrzesanemi domowemi środkami, jest w tym więcej filozofji, niżby się zrazu mogło wydawać. Czym bo jest gieometrja dla filozofa? Jestto badanie pewnej grupy, — i jakiej grupy? — grupy ruchów ciał stałych. Jakże tedy określić tę grupę, nie wprawiając w ruch pewnej ilości ciał stałych?

Czy mamy zachować klasyczną definicję równoległych i rzec, że nazywa się tak dwie proste, które, leżąc w jednej płaszczyźnie, nie spotkają się, jakkolwiek dalekobyśmy je przedłużyli? Nie — bo definicja ta jest negatywna, bo jest niesprawdzalna w doświadczeniu, i przeto nie może być uważana za bezpośrednią daną intuicji. Nie — dlatego zwłaszcza, że jest ona całkiem obca pojęciu grupy, rozważaniu ruchu ciał stałych, który, jakem powiedział, jest istotnym źródłem gieometrji. Czyż nie byłoby lepiej określić naprzód prostolinijne przesunięcie figury niezmiennej, jako ruch, w którym wszystkie punkty tej figury posiadają drogi prostolinijne; okazać, że przesunięcie takie jest możliwe, ślizgając ekierkę po linjale? Z tego twierdzenia doświadczalnego, podniesionego do godności pewnika, łatwoby już było wyprowadzić pojęcie równoległej i sam postulat Euklidesa.

Mechanika.

Nie będę się tu zaprzątał definicją prędkości, przyspieszenia i innych pojęć kinematycznych; korzystnie będzie je związać z pojęciem pochodnej.

Zatrzymam się natomiast dłużej na definicji pojęć dynamicznych siły i masy.

Jedno mnie uderza: w jakim stopniu młodzieńcy, którzy otrzymali wykształcenie średnie, dalecy są od stosowania do świata realnego praw mechanicznych, których ich nauczono. Nietylko są niezdolni to robić; ale nawet nie przychodzi im to na myśl. W ich pojęciu świat nauki odgrodzony jest od świata rzeczywistości nieprzebytą tamą. Nierzadko zdarza się widzieć dobrze ubranego pana, prawdopodobnie bakałarza (czyli, według naszej terminologji, posiadacza patentu dojrzałości, abiturjenta, *przyp. tłum.)* który, siedząc w powozie, wyobraża sobie, że pomaga mu się toczyć, opierając się nogami o przód, i to wbrew zasadzie akcji i reakcji (działania i oddziaływania).

Jeśli spróbujemy zanalizować stan dusz naszych uczniów, mniej nas to będzie dziwiło; jakaż jest dla nich prawdziwa definicja siły? nie ta, którą recytują, lecz inna, przyczajona w kąciku ich umysłu i stamtąd całkowicie nim kierująca. Oto ta definicja: siły są to strzałki, z których buduje się równoległoboki. Strzałki te są urojonemi istotami, nie mającemi nic wspólnego z niczym istniejącym w przyrodzie. Oczywiście można byłoby temu zapobiec, gdyby się było pokazało im siły, działające w rzeczywistości, zanim się je zaczęło przedstawiać zapomocą strzałek.

Jak określić siłę? Niema dobrej definicji logicznej, wykazałem to, jak sądzę, dostatecznie gdzieindziej. [1]) Istnieje definicja antropomorficzna, czucie mięśniowego wysiłku; ta jest doprawdy zbyt gruba, i niepodobna z niej wyprowadzić nic użytecznego.

Oto jaką trzeba będzie iść drogą: trzeba przedewszystkim, aby poznać rodzaj »siła«, zaznajomić się kolejno z wszystkiemi gatunkami tego rodzaju, są one bardzo liczne i bardzo rozmaite; mamy ciśnienie cieczy na ścianki naczyń, w których są one zawarte; napięcie nici; sprężystość sprężyny; ciężkość, działającą na wszystkie molekuły ciała; tarcia; wspólną normalną akcję i reakcję dwu stykających się ciał stałych.

Jestto tylko definicja jakościowa; trzeba się nauczyć mierzyć siłę. W tym celu okażemy naprzód, że można zastąpić jedną siłę przez inną, nie nadwerężając równowagi; pierwszy przykład takiego zastąpienia znajdujemy w wadze i podwójnym ważeniu Bordy. Pokażemy następnie, że można zastąpić ciężar nietylko przez inny ciężar, lecz przez siły innego typu: n. p. hamulec Prony'ego pozwala nam zastąpić ciężar przez tarcie.

Z wszystkiego tego wynika pojęcie równoważności dwu sił.

Trzeba określić kierunek siły. Jeżeli siła F jest równoważna do innej siły F', przyłożonej do rozważanego ciała za pośrednictwem napiętej nici, tak, iż F może być zastąpione przez F' bez zakłócenia równowagi, natenczas punkt zaczepienia nici będzie, mocą definicji, punktem przyłożenia siły F' oraz równoważnej siły F; kierunek nici będzie kierunkiem siły F' oraz równoważnej siły F.

Następnie przejdzie się do porównywania wielkości sił. Jeżeli pewna siła może zastąpić dwie inne o tym samym kierunku, tedy równa się ona ich sumie, pokaże się n. p., że

---

[1]) »Nauka i Hypoteza«, str. 85 i nast. przekładu polskiego. *(Przyp. tłum.)*.

ciężar 20 gramów może zastąpić dwa ciężary 10-cio gramowe.

Czy to wystarcza? Nie jeszcze. Umiemy już porównywać napięcie dwu sił, które posiadają ten sam kierunek i ten sam punkt przyłożenia; trzeba nauczyć się to robić w wypadku kierunków różnych. Wyobraźmy sobie w tym celu nić, napiętą przez ciężar, i przechodzącą przez blok; powiemy, że napięcie obu kawałków nici jest jednakowe i równe ciężarowi napinającemu.

Oto nasza definicja — pozwala nam ona porównywać napięcia naszych dwu kawałków nici, a przy pomocy poprzedzających definicji porównywać dwie jakiekolwiek siły, równolegle do tych dwu kawałków. Trzeba ją usprawiedliwić przez wykazanie, że napięcie ostatniego kawałka pozostaje to samo dla tego samego napinającego ciężaru niezależnie od ilości i rozkładu bloków transmisyjnych. Trzeba ją potym uzupełnić przez wykazanie, że jestto prawdziwe jedynie dla bloków bez tarcia.

Skoro tylko opanujemy te definicje, trzeba okazać, że punkt przyłożenia, kierunek i natężenie wystarczają do oznaczenia siły; że dwie siły, dla których elementy te są te same, są z a w s z e równoważne i mogą być z a w s z e wzajemnie przez siebie zastąpione, czy to w równowadze czy w ruchu i to niezależnie od tego, jakie inne siły wchodzą ponadto w grę.

Trzeba okazać, że dwie siły zbieżne mogą być zawsze zastąpione przez jedną wypadkową, i że w y p a d k o w a t a p o z o s t a j e t a s a m a, czy ciało jest w spoczynku, czy w ruchu, i niezależnie od tego, jakie inne siły są doń przyłożone.

Trzeba wreszcie okazać, że siły określone, tak, jakeśmy to powyżej zrobili, czynią zadość zasadzie równości akcji i reakcji.

Wszystkiego tego nauczyć nas może doświadczenie, i tylko doświadczenie.

Wystarczy przytoczyć kilka pospolitych doświadczeń, które uczniowie robią codzień, nie zdając sobie z tego sprawy, oraz wykonać wobec nich niewielką ilość eksperymentów prostych i dobrze dobranych.

Dopiero po przejściu przez te wszystkie zakręty wolno będzie przedstawiać siły zapomocą strzałek, a chciałbym nawet, by się w dalszym ciągu rozumowań powracało od czasu do czasu od symbolu do rzeczywistości. Nie trudno byłoby n. p. zilustrować równoległobok sił zapomocą przyrządu, utworzonego z trzech nici, przechodzących przez bloki, napiętych przez ciężary, i wzajemnie się równoważących przy ciągnieniu jednego i tego samego punktu.

Znając siłę, łatwo jest określić masę; tym razem definicję należy zaczerpnąć z dynamiki; niema sposobu zrobić inaczej, boć celem jest tu właśnie zrozumienie różnicy między masą a wagą. I tutaj definicję należy przygotować przez doświadczenia; jakoż, istnieje maszyna, jakgdyby specjalnie stworzona po to, żeby pokazać, co to jest masa, mianowicie maszyna Atwooda; przypomnieć zresztą będzie potrzeba prawa spadku ciał, że przyspieszenie naskutek ciężkości jest takie same dla ciał ciężkich i dla ciał lekkich, że zmienia się z szerokością gieograficzną itd.

A teraz, jeśli mi powiecie, że wszystkie metody, jakie zalecam, oddawna już są stosowane w liceach, więcej mnie to uraduje niż zadziwi: wiem, że wzięte w całości nasze nauczanie matematyki jest dobre, nie chcę wywracać go do góry nogami, przeciwnie, chcę jedynie udoskonaleń zwolna postępowych. Nauczanie to nie powinno ulegać nagłym wahaniom pod kapryśnym tchnieniem przemijających mód. W takich burzach zginęłaby rychło wysoka jego wartość wychowawcza. Dobra i tęga logika powinna i nadal być jego podstawą. Definicja przez przykład jest zawsze potrzebna, lecz powinna ona przygotować definicję logiczną, nie powinna jej zastąpić; powinna przynajmniej budzić jej potrzebę w wypadkach, gdy prawdziwa definicja logiczna może być z pożytkiem wyłożona dopiero w nauczaniu wyższem.

Nie będzie między nami nieporozumienia co do tego, że to, co powiedziałem dzisiaj, nie oznacza zarzucenia tego, co napisałem gdzieindziej. Częstokroć miałem sposobność krytykowania niektórych definicji, które zalecam dzisiaj. Krytyki te podtrzymuję w całości. Definicje te mogą być jedynie prowizoryczne. Ale trzeba przez nie przejść.

Rozdział III.

Matematyka a Logika.

Wstęp.

Czy matematyka może zostać sprowadzona do logiki, czy może się obejść bez właściwych sobie zasad? Istnieje cała szkoła, pełna zapału i wiary, usiłująca wykazać, że tak jest. Posiada ona swój specjalny język, w którym niema słów, i który się posługuje jedynie znakami. Język ten jest rozumiany jedynie przez niewielką ilość wtajemniczonych, profani więc skłonni są ufać ich stanowczym orzeczeniom. Nie będzie, być może, bez pożytku rozpatrzenie nieco bliższe tych orzeczeń, aby przekonać się, czy wykluczający wszelkie wątpienie ich ton jest usprawiedliwiony.

Dla tym lepszego przecież zrozumienia natury kwestji, trzeba będzie wdać się w niektóre szczegóły historyczne, zwłaszcza przypomnieć charakter prac Cantora.

Oddawna już wprowadzone zostało do matematyki pojęcie nieskończoności; lecz nieskończoność ta była, mówiąc językiem filozofów, *stawaniem się*. Nieskończoność matematyczna była jedynie ilością, zdolną rosnąć ponad wszelkie granice; była to ilość zmienna, o której nie można było powiedzieć, że *przekroczyła* wszelkie granice, lecz że *może je przekroczyć*.

Cantor przedsięwziął wprowadzenie do matematyki nieskończoności aktualnej, to znaczy ilości, która nietylko jest zdolna przekroczyć wszelkie granice, lecz którą uważa się za taką, która je istotnie przekroczyła. Nasuwają się pytania w rodzaju następujących: Czy punktów w przestrzeni jest więcej niż liczb całkowitych? Czy w przestrzeni jest więcej punktów niż na płaszczyźnie? Itp.

Ilość liczb całkowitych, ilość punktów w przestrzeni itd. jest dla Cantora liczbą kardynalną nadskończoną, to znaczy liczbą kardynalną większą niż wszystkie zwykłe liczby kardynalne. Zajął się on następnie porównaniem tych liczb kardynalnych nadskończonych; przez ułożenie w odpowiednim porządku elementów zespołu, który zawiera ich nieskończoność, wymyślił on również liczby porządkowe nadskończone, nad któremi się nie będę tutaj rozwodził.

Liczni matematycy puścili się w jego ślady i postawili sobie szereg podobnych pytań. W takim stopniu spoufalili się z liczbami nadskończonemi, że w końcu doszli do uzależnienia teorji liczb skończonych od teorji liczb kardynalnych Cantora. Ich zdaniem prawdziwie logiczny wykład matematyki powinien rozpocząć od ustanowienia własności ogólnych liczb kardynalnych nadskończonych, i następnie wyodrębnić z pośród nich pewną malutką klasę — zwykłych liczb całkowitych. Dzięki tej okólnej drodze możnaby było dowieść wszystkich twierdzeń, dotyczących tej małej klasy (to znaczy całej naszej arytmetyki i algiebry), nie opierając się na żadnej zasadzie, nieobjętej logiką.

Metoda ta jest oczywiście przeciwna wszelkiej zdrowej psychologji; nie tak z pewnością postępował umysł ludzki, gdy budował matematykę; to też autorzy jej nie zamierzają, jak mniemam, wprowadzić ją do nauczania średniego. Ale czy jest ona przynajmniej logiczna, albo, mówiąc trafniej, czy jest poprawna? Wolno jest o tym wątpić.

Jednakże matematycy, którzy się nią posługiwali, są bardzo liczni. Nagromadzili wzory i wyzwolili się w swym mniemaniu od wszystkiego, co nie jest czystą logiką, przez napisanie rozpraw, w których wzory nie są przeplatane, jak to bywa w zwykłych książkach matematycznych, mową wyjaśniającą, lecz z których mowa ta zupełnie znikła.

Na nieszczęście doszli oni do wyników sprzecznych ze sobą, do tak zwanych antynomji cantorowskich, do których będziemy mieli sposobność powrócić. Sprzeczności te nie zniechęciły ich, pobudziły ich raczej do wprowadzenia zmian do stosowanych reguł tak, iżby ujawnione już sprzeczności zostały usunięte, co zresztą nie gwarantuje zupełnie od ukazania się sprzeczności nowych.

Czas jest poddać sprawiedliwemu sądowi te przesadne dążności. Nie mam nadziei, że przekonam ich wyznawców; gdyż zbyt długo żyli w tej atmosferze. Zresztą, kiedy obaliliście jeden z ich dowodów, możecie być pewni, że odrodzi się on jutro z nieznacznemi zmianami, i niektóre zpośród nich kilkakrotnie już powstawały z popiołów. Podobne są do starożytnej hydry lerneńskiej o słynnych, wciąż znowu odrastających głowach. Herkules dał sobie z nią radę, bo jego hydra miała dziewięć tylko czy też jedenaście głów; ale tutaj jest ich więcej, są one w Anglji, w Niemczech, we Włoszech, we Francji, i sam Herkules musiałby spasować. Odwołuję się przeto jedynie do ludzi zdrowego rozsądku bez uprzedzeń.

I.

W ostatnich latach ogłoszono wiele prac o matematyce czystej i filozofji matematyki, zmierzających do wywikłania i wyodrębnienia z rozumowania matematycznego pierwiastków logicznych. Prace te zanalizował i wyłożył z dużą jasnością Couturat w dziele zatytułowanym: »Zasady Matematyki«.

Zdaniem Couturat nowsze prace, zwłaszcza prace Russella i Peano ostatecznie, rozstrzygnęły tak długo ciągnący się spór między Leibnitzem a Kantem. Wykazali oni, że niemasz sądu syntetycznego *a priori* (jak Kant nazywał sądy których nie można dowieść analitycznie, ani sprowadzić do tożsamości, ani ustanowić doświadczalnie), wykazali, że matematyka daje się całkowicie sprowadzić do logiki, i że intuicja nie gra w niej żadnej roli.

To właśnie wyłożył Couturat w wymienionej powyżej książce; to samo wypowiedział wyraźniej jeszcze w mowie swojej na jubileuszu Kanta, czym spowodował mego sąsiada do zauważenia półgłosem: »Widać, że obchodzimy setną rocznicę śmierci Kanta«.

Czy możemy się podpisać pod tym ostatecznym wyrokiem? Nie sądzę, i spróbuję okazać, dlaczego.

II.

W nowej matematyce uderza nas przedewszystkiem czysto formalny jej charakter: »Pomyślmy, mówi Hilbert, trzy rodzaje rzeczy, które nazywać będziemy punktami, prostemi i płaszczyznami, umówmy się, że prosta będzie oznaczona przez dwa punkty, i że zamiast mówić, że ta prosta jest oznaczona przez dwa punkty, będziemy mogli mówić, że przechodzi ona przez te dwa punkty, albo też, że te dwa punkty leżą na tej prostej«. Nie tylko nie wiemy, czym są te rzeczy, lecz nie powinniśmy nawet próbować się tego dowiedzieć. Nie potrzebujemy tego, i ktoś, ktoby nigdy nie widział ani punktu, ani prostej, ani płaszczyzny, mógłby uprawiać gieometrję równie dobrze jak my. Niech wyrażenie przechodzić przez lub wyrażenie leżeć na nie wywołuje w nas żadnego obrazu, gdyż pierwsze jest poprostu synonimem wyrażenia być oznaczonym, drugie wyrażenia oznaczać.

Tak tedy, aby dowieść pewnego twierdzenia, nie jest potrzebne ani nawet pożyteczne wiedzieć, co ono oznacza. Możnaby zastąpić gieometrę przez fortepian do rozumowania, wymyślony przez Stanley Jevonsa; albo, jeśli wolicie, możnaby wymyślić maszynę taką, iż w jeden jej koniec wkładanoby pewniki, a z drugiego otrzymywanoby twierdzenia, podobnie jak do legiendarnej maszyny chicagoskiej wkłada się żywe wieprze a wydobywa szynki i kiełbasy. Matematyk nie potrzebuje więcej niż ta maszyna rozumieć, co robi.

Z tego formalnego charakteru jego gieometrji nie robię zarzutu Hilbertowi. Ku temu musiał dążyć wobec zagadnienia, jakie sobie postawił. Przedsięwziął on sprowadzić do minimum liczbę podstawowych pewników gieometrji i sporządzić zupełną ich listę; otóż w rozumowaniach, w których umysł nasz pozostaje czynnym, w których intuicja odgrywa jeszcze pewną rolę, w rozumowaniach, że tak powiem, żywych, trudno jest nie wprowadzić jakiegoś pewnika lub postulatu, któryby pozostał niedostrzeżony. Dlatego dopiero po sprowadzeniu wszystkich rozumowań gieometrycznych do postaci czysto mechanicznej mógł on mieć pewność, że spełnił swoje zamierzenie i wykończył swe dzieło.

Inni podjęli zrobienie dla arytmetyki i dla analizy tego, co Hilbert zrobił dla gieometrji. Czy jednak, nawet gdyby im się to całkowicie powiodło, równałoby się to ostatecznemu skazaniu kantystów na milczenie? Może niezupełnie — gdyż sprowadzenie myśli matematycznej do próżnej formy z całą pewnością myśl tę kaleczy. Przypuśćmy nawet, że dowiedziono, iż wszystkie twierdzenia można wyprowadzić zapomocą metod czysto analitycznych, zapomocą prostych kombinacji logicznych ze skończonej ilości pewników, i że pewniki te są jedynie umowami. Filozof miałby prawo dochodzić źródeł tych umów, badać, dlaczego uznano je za lepsze, niż umowy przeciwne.

Dalej, logiczna poprawność rozumowań, które prowadzą od pewników do twierdzeń, nie jest jedyną rzeczą, którą się mamy zajmować. Czy prawidła doskonałej logiki wyczerpują całą matematykę? Równałoby się to powiedzeniu, że sztuka szachisty sprowadza się do prawideł posuwania figur. W pośród wszystkich konstrukcji, które można skombinować z materjałów, jakich dostarcza logika, trzeba dokonać wyboru;

prawdziwy gieometra dokonywa wyboru trafnie, bo kieruje nim określony instynkt lub niewyraźne poczucie jakiejś głębszej, bardziej ukrytej gieometrji, która jedynie nadaje wartość całej skonstruowanej budowli.

Poszukiwać źródło tego instynktu, badać prawa tej głębokiej gieometrji, które się czuje lecz których się nie formułuje, byłoby też pięknym zadaniem dla filozofów, którzy nie chcą, by logika była wszystkim. Nie z tego wszakże punktu widzenia chcę patrzeć, nie tak chcę postawić kwestję. Instynkt ten, o którym mówiłem powyżej, niezbędny jest dla tych, co tworzą, zdawaćby się jednak mogło, że możnaby się bez niego obejść przy uczeniu się danej już stworzonej nauki. Otóż chcę poddać zbadaniu, czy prawdą jest, że skoro przyjmiemy za dane zasady logiki, można już nie odkryć lecz dowieść wszystkich prawd matematycznych, nie odwołując się znowu do intuicji.

III.

Na pytanie to dałem dawniej już odpowiedź przeczącą (p. Nauka i Hypoteza, rozdział I); czy nowsze prace pobudzają nas zmienienia tej odpowiedzi? Jeśli odpowiedź moja brzmiała przecząco, to dlatego, że »zasada indukcji zupełnej« wydawała mi się niezbędną dla matematyka i niedającą się sprowadzić do logiki. Zasada ta, jak wiadomo ma następujące brzmienie:

»Jeśli pewna własność jest prawdziwa dla liczby 1, i jeśli ustanowimy, że jest ona prawdziwa dla $n+1$ o ile jest prawdziwa dla n, tedy będzie ona prawdziwa dla wszystkich liczb całkowitych«. Upatrywałem w tej zasadzie rozumowania matematyczne *par excellence*. Nie chciałem przez to powiedzieć, jak mniemali niektórzy, że wszystkie rozumowania matematyczne dadzą się sprowadzić do zastosowania tej zasady. Bliższe nieco rozpatrzenie tych rozumowań wykazałoby nam, że stosują one wiele innych analogicznych zasad, posiadających te same cechy istotne. Zasada indukcji zupełnej jest tylko najprostszą ze wszystkich tej kategorji, i dlatego wybrałem ją, jako typ.

Nazwa zasady indukcji zupełnej, która się upowszechniła, nie jest trafna. Niemniej ten tryb rozumowania jest prawdziwą indukcją matematyczną, różniącą się od indukcji zwykłej jedynie swą pewnością.

IV.

Definicje i pewniki.

Istnienie takich zasad stanowi trudność dla nieprzejednanych logików; jakże dają sobie z nią radę? Zasada indukcji zupełnej, mówią oni, nie jest właściwym pewnikiem czyli sądem syntetycznym *a priori;* jestto poprostu definicja liczby całkowitej. Jestto więc prosta umowa. Ażeby roztrząsnąć ten pogląd, musimy zbadać nieco bliżej stosunki między definicjami a pewnikami.

Zajrzyjmy nasaprzód do artykułu Couturat o definicjach matematycznych, umieszczonego w czasopiśmie »*l'Enseignement mathématique*«, wydawanym przez księgarnie Gauthier-Villarsa w Paryżu i Georga w Gienewie. Znajdziemy w tym artykule rozróżnienie między definicją bezpośrednią i definicją przez postulaty.

»Definicja przez postulaty, mówi Couturat, stosuje się nie do jednego oddzielnego pojęcia lecz do układu pojęć; polega ona na wyliczeniu zależności podstawowych, które je łączą, i które wystarczają dla dowiedzenia wszystkich innych własności; zależności te są postulatami...«

Jeżeli uprzednio określono wszystkie te pojęcia prócz jednego, tedy to ostatnie będzie mocą definicji przedmiotem, czyniącym zadość tym postulatom.

Tak więc niektóre niedające się dowieść pewniki matematyczne miałyby być poprostu przebranemi definicjami. Stanowisko to jest często słuszne; i ja je podzielam w stosunku n. p. do postulatu Euklidesa.

Inne pewniki gieometrji nie wystarczają dla zupełnego określenia odległości; odległością jest tedy, mocą definicji, ta zpośród wszystkich wielkości, czyniących zadość tym innym pewnikom, dla której postulat Euklidesa jest prawdziwy.

Otóż logicy zapatrują się na zasadę indukcji zupełnej tak, jak ja na postulat Euklidesa, chcą w niej widzieć jedynie przebraną definicję.

Aby wszakże na to mieli prawo, muszą być spełnione dwa warunki. Stuart Mill powiedział, że każda definicja przypuszcza pewnik, opiewający, że definjowany przedmiot rzeczywiście istnieje. W tym rozumieniu nie pewnik byłby przebraną definicją lecz przeciwnie definicja — przebranym pewnikiem. Stuart Mill rozumiał wyraz »istnieć« w znaczeniu materjalnym i empirycznym; chciał on powiedzieć, że definjując koło, twierdzi się, że w przyrodzie istnieją rzeczy okrągłe.

W tej postaci niepodobna się zgodzić z jego poglądem. Matematyka jest niezależna od istnienia przedmiotów materjalnych; w matematyce wyraz »istnieć« może mieć jedno tylko znaczenie — znaczy on: być wolnym od sprzeczności. Z tą poprawką myśl Stuarta Milla staje się słuszną; definjując pewien przedmiot, twierdzimy, że definicja nie zawiera w sobie sprzeczności.

Jeżeli tedy mamy pewien układ postulatów i jeżeli potrafimy dowieść, że postulaty te nie zawierają sprzeczności, będziemy mieli prawo uważać je za definicję jednego z figurujących w nich pojęć. Jeżeli nie możemy tego dowieść, musimy to przyjąć bez dowodu, i to właśnie będzie pewnikiem; i w ten sposób, szukając definicji pod postulatem, znajdziemy znowu pewnik pod definicją.

Aby okazać, że definicja nie zawiera sprzeczności, posługujemy się najczęściej p r z y k ł a d e m, usiłujemy znaleźć przykład przedmiotu, czyniącego zadość definicji. Weźmy definicję przez postulaty; chcemy zdefinjować pojęcie A i mówimy, że mocą definicji do kategorji A należy każdy przedmiot, dla którego pewne postulaty są prawdziwe. Jeżeli potrafimy dowieść bezpośrednio, że wszystkie te postulaty są prawdziwe dla pewnego przedmiotu B, definicja będzie usprawiedliwiona; przedmiot B będzie przykładem dla kategorji A. Będziemy mieli pewność, że postulaty nie są ze sobą sprzeczne, skoro istnieją wypadki, w których wszystkie one są prawdziwe.

Ale taki bezpośredni dowód przez przykład nie zawsze jest możliwy.

Ażeby ustanowić, że postulaty nie zawierają sprzeczności, trzeba wówczas rozpatrzeć wszystkie twierdzenia, jakie dają się wyprowadzić z tych postulatów, uważanych jako przesłanki, i wykazać, że pośród tych twierdzeń niema dwóch, z którychby jedno było w sprzeczności z drugim. Jeżeli ilość tych twierdzeń jest skończona, bezpośrednie sprawdzenie jest możliwe. Wypadek taki jest nieczęsty i mało zresztą interesujący.

Jeżeli ilość tych twierdzeń jest nieskończona, przeprowadzenie takiego bezpośredniego sprawdzenia nie jest możliwe; trzeba się uciec do sposobów dowodzenia, które zwykle będą się musiały powoływać na tę zasadę indukcji zupełnej, którą właśnie chce się poddać sprawdzeniu.

Wyłuszczyliśmy powyżej jeden z warunków, którym logicy winni uczynić zadość, i zobaczymy dalej, że tego nie zrobili.

V.

Istnieje inny ponadto warunek. Skoro dajemy definicję, to po to, by się nią posługiwać.

W dalszym więc ciągu wykładu znajdujemy zdefinjowany uprzednio wyraz; czy mamy prawo stosować do przedmiotu, który wyraz ten wyobraża, postulat, który nam posłużył jako definicja? Oczywiście, że tak, jeżeli tylko wyraz zachował to samo znaczenie, jeżeli nie przypisujemy mu domyślnie odmiennego znaczenia. Otóż zdarza się to niekiedy, i po większej części trudno jest to zauważyć; trzeba sprawdzić, w jaki sposób wyraz ten dostał się do naszego wykładu, i czy w samej rzeczy drzwi, przez które wszedł, nie wymagają innej definicji niż ta, która została sformułowana.

Trudność tę napotykamy we wszystkich zastosowaniach matematyki. Pojęcie matematyczne ujęliśmy w definicję oczyszczoną i ścisłą; i dla czystego matematyka niemasz miejsca na żadne wahanie; kiedy wszakże zechcemy je zastosować do nauk fizycznych n. p., natenczas mamy nie to czyste pojęcie lecz przedmiot konkretny, który jest częstokroć grubym tylko pojęcia tego obrazem. Mówiąc, że przedmiot ten czyni bodaj w przybliżeniu zadość definicji, wypowiadamy nową prawdę, którą wynieść ponad wątpliwość może jedynie doświadczenie, i która nie posiada już cech na umowie opartego postulatu.

Ale i w obrębie matematyki czystej napotyka się tę samą trudność.

Dajecie subtelną definicję liczby; poczym, gdy załatwiliście się z definicją, nie myślicie o niej więcej; albowiem w istocie nie z definicji tej dowiedzieliście się, co to jest liczba, wiedzieliście to oddawna, i kiedy później pióro wasze kreśli wyraz liczba, wkładacie weń tę samą treść, co każdy; żeby wiedzieć, jaka jest ta treść, i czy jest ona rzeczywiście ta sama w tym lub innym zdaniu, trzeba sprawdzić, jak zostaliście naprowadzeni na mówienie o liczbie i na wprowadzenie tego wyrazu do każdego z tych zdań. Nie będę się tutaj dłużej nad tym rozwodził, gdyż będę miał sposobność do tego powrócić.

Tak tedy niechaj będzie wyraz, który określiliśmy jawnie przez wyraźną definicję A; stosujemy go następnie w wykładzie naszym w sposób, przypuszczający domyślnie inną definicję B. Możliwe jest, że obie definicje oznaczają ten sam przedmiot. Ale jeżeli tak jest, jestto nowa prawda, której trzeba albo dowieść, albo którą trzeba przyjąć jako niezależny pewnik.

Z o b a c z y m y p o n i ż e j, ż e l o g i c y n i e u c z y n i l i temu drugiemu warunkowi lepiej zadość niż pierwszemu.

VI.

Definicje liczby bardzo są liczne i bardzo rozmaite; zrzekam się wyliczenia nawet nazwisk ich autorów. Nie powinno nas to dziwić, że jest ich tak wiele. Gdyby jedna z nich była zadowalająca, nie kuszonoby się o dawanie nowych. Jeżeli każdy nowy filozof, który zajmował się tą kwestją, uważał za konieczne wynaleźć inną definicję, to dlatego, że nie był zadowolony z definicji swych poprzedników, a nie był zadowolony dlatego, że wydawało mu się, że zawierają one błędne koło.

Ilekroć czytałem prace, poświęcone temu zagadnieniu, miałem zawsze silne uczucie niepokoju; ustawicznie spodziewałem się potknięcia o błędne koło, a jeślim go odrazu nie zauważał, obawiałem się, żem źle patrzył.

Bo nie można dać definicji, nie formułując zdania, a trudno jest sformułować zdanie, do któregoby nie wchodził wyraz, oznaczający jakąś liczbę, albo przynajmniej wyraz »kilka«, albo przynajmniej jakiś wyraz w liczbie mnogiej. Znajdziemy się wówczas na śliskiej pochyłości, która w każdej chwili naraża na niebezpieczeństwo spadku w błędne koło.

Poniżej zatrzymam się na tych jedynie definicjach, w których błędne koło najzręczniej jest ukryte.

VII.

Pazygrafja.

Język symboliczny, stworzony przez Peano, odgrywa w nowych tych badaniach dużą bardzo rolę. Wprawdzie język ten posiadą pewną pożyteczność, lecz zdaje mi się, że Couturat przywiązuje doń przesadną wagę, co wywołać musiało zdziwienie u samego Peana.

Istotnym pierwiastkiem tego języka są pewne znaki algiebraiczne, przedstawiające poszczególne łączniki: jeżeli, i, albo, więc. Być może, że znaki te są dogodne; inną jest rzeczą, czy są one powołane do odnowienia całej filozofji. Trudno jest przypuścić, że wyraz j e ż e l i, skoro go napiszemy w postaci $\supset$ nabiera nowej jakiejś mocy.

Ten wynalazek Peana nazywał się dawniej p a z y g r a f j ą t. j. sztuką napisania traktatu matematycznego bez użycia ani jednego wyrazu z języka pospolitego. Nazwa ta określała bardzo wyraźnie jej stosowalność. Później podniesiono ją do wybitniejszej godności, nadając jej tytuł l o g i s t y k i. Wyrazu tego używają podobno w Szkole wojennej dla oznaczenia sztuki wachmistrzowskiej (po francusku *maréchal des logis),* sztuki prowadzenia i rozkładania obozem wojska; jasne przecież jest, że nowa logistyka nie ma z tą nic wspólnego, że nowa ta nazwa zdradza zamiar dokonania przewrotu w logice.

Nową tę metodę widzimy przy pracy w rozprawie matematycznej Burali-Fortiego: *»Una Questione sui numeri transfiniti«*, umieszczonej w tomie XI *Rendiconti del circolo matematico di Palermo.*

Przedewszystkim zaznaczam, że jestto rozprawa bardzo ciekawa, i jeśli biorę ją tutaj jako przykład, to właśnie dlatego, że jest ona najważniejszą ze wszystkich, napisanych w nowym języku. Zresztą mogą ją czytać i profani, dzięki tłumaczeniu włoskiemu, podanemu między wierszami.

Ważność tej rozprawy polega na tym, że zawiera ona pierwszy przykład owych antynomji, które napotykamy w badaniu liczb nadskończonych, i które od kilku lat przyprawiają matematyków o rozpacz. Celem tej rozprawki, mówi Burali-Forti, jest okazanie, że mogą istnieć dwie liczby nadskończone (porządkowe) a i b, takie, iż a nie jest równe b, ani większe, ani mniejsze.

Niechaj się czytelnik uspokoi: aby zrozumieć poniższe rozważania, nie ma on potrzeby wiedzieć, co to jest liczba porządkowa nadskończona.

Owóż Cantor właśnie dowiódł, że między dwiema liczbami nadskończonemi, podobnie jak między dwiema liczbami skończonemi, nie może zachodzić żaden inny stosunek prócz równości lub nierówności w tę lub inną stronę. Ale nie o treści tej rozprawy chcę tutaj mówić: chcę jedynie zająć się jej formą, i pytam właśnie, czy forma ta pozwala dużo zyskać pod względem ścisłości, i czy wynagradza ona przez to wysiłki, jakich wymaga od pisarza i od czytelnika.

Burali-Forti daje nam taką oto definicję liczby 1:

$$1 = \iota T' \{ Ko \frown (u, h) \, \varepsilon \, (u \, \varepsilon \, \mathrm{Jeden}) \},$$

która to definicja wybitnie się nadaje do tego, aby dać pojęcie o liczbie 1 ludziom, którzy nigdy o liczbie tej nie słyszeli.

Zbyt mało znam język peański, by odważyć się na krytykę, ale mam obawę, czy definicja ta nie zawiera *petitio principii*, bo zauważam 1 w cyfrze w pierwszej części równości i jeden literami w drugiej.

Jakkolwiek jest, Burali Forti wychodzi z tej definicji i po krótkim rachunku otrzymuje równanie

$$(27) \qquad 1 \, \varepsilon \, \mathrm{No}$$

które poucza nas, że *Jeden* jest liczbą.

Skoro już mówimy o tych definicjach pierwszych liczb, przypomnijmy, że Couturat określił również 0 i 1.

Co to jest zero? jestto ilość elementów klasy żadnej *(classe nulle)*; a co to jest klasa żadna? jestto klasa nie zawierająca żadnego elementu.

Określać zero przez nul a nul przez żaden jestto doprawdy nadużywaniem bogactwa języka francuskiego; to też Couturat wprowadził do swojej definicji udoskonalenie przez to, że ją napisał tak oto:

$$0 = \iota \Lambda : \varphi x = \Lambda \,.\, \supset .\, \Lambda = (x \varepsilon \varphi x),$$

co znaczy po polsku: zero jestto ilość przedmiotów, czyniących zadość warunkowi, który nigdy nie jest spełniony.

Ponieważ jednak nigdy znaczy w żadnym razie, nie widzę, by postęp był bardzo znaczny.

Spieszę dodać, że definicja liczby 1, jaką daje Couturat, jest bardziej zadawalająca.

Jeden, mówi on, jestto ilość elementów klasy, której dwa jakiekolwiek elementy są identyczne.

Jest ona bardziej zadawalająca, rzekłem, w tym sensie, że dla określenia 1 nie posługuje się on wyrazem *jeden*; wzamian zato posługuje się wyrazem *dwa*. Otóż obawiam się, że gdyby zapytano Couturat, co to jest dwa, musiałby się on uciec do wyrazu jeden.

VIII.

Ale powróćmy do rozprawy Burali-Fortiego; powiedziałem, że wnioski jego znajdują się w bezpośredniej sprzeczności z wnioskami Cantora. Otóż pewnego dnia odwiedził mnie p. Hadamard, i rozmowa dotknęła tej antynomji.

»Czy rozumowanie Burali-Fortiego, powiedziałem mu, nie wydaje się panu bez zarzutu?

— Nie, przeciwnie, nie umiem nic zarzucić Cantorowi. Zresztą Burali-Forti nie miał prawa mówić o zespole wszystkich liczb porządkowych.

— Przepraszam, miał to prawo, bo mógł położyć

$$\Omega = T' \, (No, \overline{\varepsilon} >).$$

Chciałbym wiedzieć, kto mógłby go od tego powstrzymać, i czyż można powiedzieć, że pewien przedmiot nie istnieje, skoro go nazwano Ω?«

Napróżno jednak, nie mogłem go przekonać (co zresztą byłoby smutne, bo on właśnie miał rację). Czy dlatego tylko żem nie mówił dość wymownie po peańsku? być może, choć, w gruncie rzeczy, myślę, że nie dlatego.

Tak więc, pomimo całego tego pazygraficznego aparatu, kwestja nie została rozwiązana. Czego to dowodzi? Dopóki idzie jedynie o okazanie, że jeden jest liczbą, pazygrafja wystarcza, lecz skoro nastręcza się trudność, skoro trzeba rozwiązać antynomję, pazygrafja staje się bezsilna.

Rozdział IV.

Nowe Logiki.

I.

Logika Russella.

Ażeby usprawiedliwić swe pretensje, logika musiała się przekształcić. Narodziły się nowe logiki, z pośród których najbardziej interesującą jest logika Russella. Mogłoby się zdawać, że o logice formalnej nie można napisać nic nowego, i że Arystoteles przejrzał ją do dna. Lecz pole, jakie Russell przypisuje logice, jest nieskończenie rozleglejsze niż pole logiki klasycznej, i powiodło mu się wypowiedzieć o tym przedmiocie poglądy oryginalne i niekiedy słuszne.

Przedewszystkim, podczas gdy logika Arystotelesa była przedewszystkim logiką klas, i za punkt wyjścia brała stosunek podmiotu do orzeczenia, Russell podporządkowuje logikę klas logice twierdzeń. Klasyczny sylogizm »Sokrates jest człowiekiem« itd. ustępuje miejsca sylogizmowi hypotetycznemu: Jeżeli A jest prawdziwe, B jest prawdziwe, otóż jeżeli B jest prawdziwe, C jest prawdziwe, i t. d. Jestto, moim zdaniem, bardzo fortunny pomysł, ponieważ klasyczny sylogizm daje się łatwo sprowadzić do sylogizmu hypotetycznego, gdy natomiast przekształcenie odwrotne nie daje się uskutecznić bez trudności.

Cowięcej: Russella logika twierdzeń jest badaniem praw, według których kombinują się spójniki *jeżeli*, *i*, *albo* i przeczenie *nie*. Stanowi to znaczne rozszerzenie dawnej logiki. Własności klasycznego sylogizmu rozciągają się bez trudności na sylogizm hypotetyczny, a w formach tego ostatniego łatwo jest rozpoznać formy scholastyczne; odnajduje się tedy wszystko, co jest istotne w logice klasycznej. Lecz teorja sylogizmu jest dopiero składnią spójnika *jeżeli* oraz, być może, przeczenia.

Przez dodanie dwu innych spójników *i* i *albo* Russell otwiera przed logiką nowe dziedziny. Znaki *i*, *albo* stosują się do tych samych praw, co znaki $\times$ i $+$, to znaczy do praw przemienności, łączności i rozdzielności.

Tak *i* przedstawia mnożenie logiczne, gdy *albo* przedstawia dodawanie logiczne. I to również jest bardzo interesujące.

B. Russell dochodzi do wniosku, że z jakiegokolwiek twierdzenia fałszywego wynikają wszystkie inne twierdzenia prawdziwe lub fałszywe. Couturat powiada, że wniosek ten na pierwszy rzut oka wydawać się będzie paradoksalnym. Ale każdy, komu zdarzyło się poprawiać złą dysertację matematyczną, oceni, jak trafna jest uwaga Russella. Autor często potrzebuje znacznego mozołu, żeby dojść do pierwszego fałszywego równania, lecz skoro tylko je otrzymał, gromadzenie najbardziej zadziwiających rezultatów — z których ten lub ów może być nawet prawdziwy — idzie mu jak po maśle.

II.

Widzimy, o ile nowa logika jest bogatsza od logiki klasycznej; rozporządza ona liczniejszemi symbolami, które pozwalają na urozmaicone kombinacje, i ilość tych kombinacji nie jest, jak poprzednio, ograniczona. Czy ma się prawo nadać takie rozszerzone znaczenie wyrazowi logika? Próżnym byłoby zastanawiać się nad tą kwestją i toczyć przeciw Russellowi poprostu spór o słowa. Przyznajmy mu to, czego żąda; lecz nie dziwmy się, jeśli niektóre prawdy, które uznano za niedające się sprowadzić do samej logiki, w dawnym tego słowa znaczeniu, zostaną w ten sposób sprowadzone do logiki w znaczeniu nowym, zupełnie od tamtego różnym.

Wprowadziliśmy wiele nowych pojęć, które nie są prostemi kombinacjami dawnych; Russell zdawał też sobie z tego sprawę, i nietylko na początku rozdziału pierwszego, to jest logiki twierdzeń, lecz również na początku rozdziału drugiego i trzeciego, to jest logiki klas i zależności, wprowadził on nowe wyrazy, które uznał za niedające się zdefinjować.

Ponadto wprowadza on również zasady, które uznaje za niedające się dowięść. Ale te niedające się dowieść zasady to są odwołania się do intuicji, to sądy syntetyczne *a priori*. Uważaliśmy je za intuicyjne, kiedyśmy je napotykali mniej lub bardziej jawnie sformułowane w wykładach matematyki; czyż zmieniła się ich natura przez rozszerzenie się znaczenia wyrazu logika i dlatego, że znajdujemy je teraz w książce, zatytułowanej: »Traktat logiki«? Charakter ich się nie zmienił; zmieniło się jedynie ich miejsce.

III.

Czy zasady te możnaby uważać za przebrane definicje? W tym celu trzebaby móc dowieść, że nie zawierają one w sobie sprzeczności. Trzebaby dowieść, że jakkolwiek daleko przedłużyłoby się szereg dedukcji, nie naraziłoby się nigdy na sprzeczność.

Możnaby spróbować rozumować, jak następuje: Możemy sprawdzić, że działania nowej logiki, zastosowane do przesłanek wolnych od sprzeczności muszą dać wyniki również wolne od sprzeczności. Jeżeli przeto po n działaniach nie napotkamy sprzeczności, nie napotkamy jej również i po $n+1$. Niemożliwe jest przeto, żeby była chwila, kiedy sprzeczność się zaczyna, co dowodzi, że jej nie napotkamy nigdy. Czy mamy prawo tak rozumować? Nie — bo opieralibyśmy się na indukcji zupełnej; a zasady indukcji zupełnej — nie zapominajmy o tym — jeszcze nie znamy.

Nie mamy zatym prawa uważać te pewniki za przebrane definicje, i pozostaje nam jedno tylko wyjście: dla każdego z nich musimy przyjąć nowy akt intuicji. Taka też jest, jak sądzę, myśl Russella i Couturat.

Tak więc każde z dziewięciu niedających się zdefinjować pojęć, i z dwudziestu niedających się dowieść twierdzeń (myślę, że gdybym to ja je liczył, dorachowałbym się kilku więcej), które stanowią podstawę nowej logiki, logiki w znaczeniu szerokim, wymagą nowego i niezależnego aktu naszej intuicji i, czemu tego nie powiedzieć, prawdziwego sądu syntetycznego *a priori*. Co do tego punktu wszyscy zdają się być w zgodzie, ale Russell utrzymuje — i to wydaje mi się wątpliwym, że po tych odwołaniach się do intuicji rola jej się kończy; nie będzie już nigdy potrzeby ponownego odwoływania się do niej, i można będzie ukonstytuować całą matematykę, nie wprowadzając żadnego nowego elementu.

IV.

Couturat powtarza często, że ta nowa logika jest zupełnie niezależna od pojęcia liczby. Nie będę się bawił liczeniem, ile jego wykład zawiera przymiotników liczbowych zarówno kardynalnych jak porządkowych lub przymiotników nieoznaczonych, jak »kilka«. Przytoczmy przecież parę przykładów:

»Iloczyn logiczny dwu lub kilku twierdzeń jest...«;

»Wszystkie twierdzenia mogą posiadać jedynie dwie wartości, mogą być prawdziwe lub fałszywe«;

»Iloczyn względny dwu zależności jest zależnością«;

»Zależność zachodzi między dwu wyrazami«; itd. itd.

Niekiedy nie byłoby niemożliwym ominięcie tej niedogodności, ale też niekiedy stanowi ona istotę rzeczy. Zależność nie da się rozumieć bez dwu wyrazów; niepodobna mieć intuicję zależności bez jednoczesnej intuicji obu jej wyrazów i bez stwierdzenia, że jest ich dwa, albowiem warunkiem właśnie, żeby zależność można było pojąć, jest, aby wyrazów było dwa i tylko dwa.

V.

Arytmetyka.

Dochodzimy do tak nazwanej przez Couturat teorji porządkowej, która jest podstawą właściwej arytmetyki. Couturat zaczyna od sformułowania pięciu pewników Peana, które są niezależne, jak tego dowiedli Peano i Padoa.

1. Zero jest liczbą całkowitą.
2. Zero nie jest następnikiem żadnej liczby całkowitej.
3. Następnikiem liczby całkowitej jest liczba całkowita, do czego należałoby dodać:

każda liczba całkowita posiada następnik.

4. Dwie liczby całkowite są równe, jeżeli ich następniki są równe.

5-tym pewnikiem jest zasada indukcji zupełnej.

Couturat uważa te pewniki za przebrane definicje; stanowią one definicję przez postulaty: zera, »następnika« i liczby całkowitej.

Lecz widzieliśmy, że definicja przez postulaty wówczas tylko się nadaje, jeśli można dowieść, że nie zawiera ona w sobie sprzeczności.

Czy tak się rzeczy tutaj mają? Bynajmniej.

Dowodu nie można przeprowadzić przez przykład. Niemożna wybrać części liczb całkowitych np. trzy pierwsze, i okazać, że czynią one zadość definicji.

Jeżeli wezmę serję 0, 1, 2 widzę wprawdzie, że czyni ona zadość pewnikom 1, 2, 4 i 5; ale żeby czyniła zadość pewnikowi 3, trzeba jeszcze, żeby 3 było liczbą całkowitą a więc, żeby serja 0, 1, 2, 3 czyniła zadość pewnikom; jakoż czyni ona zadość pewnikom 1, 2, 4 i 5, lecz pewnik 3 wymaga nadto, żeby 4 było liczbą całkowitą, i żeby serja 0, 1, 2, 3, 4 czyniła zadość pewnikom, i tak dalej.

Jest tedy niemożliwym przeprowadzenie dowodu pewników dla kilku liczb całkowitych bez przeprowadzenia tego dowodu dla wszystkich; trzeba się zrzec dowodu przez przykład.

Trzeba zatym wziąć wszystkie konsekwencje naszych pewników i zobaczyć, czy niema w nich sprzeczności. Gdyby ilość tych konsekwencji była skończona, byłoby to łatwe; ale jest ich nieskończoność; jestto cała matematyka albo przynajmniej cała arytmetyka.

Cóż tedy robić? Ostatecznie możnaby, być może, powtórzyć rozumowanie z Nr. III.

Ale, jak powiedzieliśmy, rozumowanie to jest indukcją zupełną, a idzie właśnie o sprawdzenie zasady indukcji zupełnej.

VI.

Logika Hilberta.

Przystąpmy z kolei do kapitalnej pracy Hilberta, którą przedstawił kongresowi matematyków w Heidelbergu, i której przekład francuski, dokonany przez Piotra Boutroux pojawił się w Enseignement mathématique jednocześnie z przekładem angielskim Halsteda w The Monist. W pracy tej, zawierającej myśli wielkiej głębokości, autor kładzie sobie cel podobny do celu Russella, lecz odchyla się w wielu punktach od swego poprzednika.

»Jednakże, mówi on, jeśli patrzeć zbliska, to okaże się, że w zasadach logicznych w postaci, jaką się im zwykle nadaje, tkwią już pewne pojęcia arytmetyczne, np. pojęcie Zespołu i, w pewnej mierze, pojęcie Liczby. W ten sposób wpadamy w błędne koło, i dlatego to, aby usunąć możliwość jakiegokolwiek paradoksu, zdawało mi się koniecznym rozwinąć jednocześnie zasady Logiki i zasady Arytmetyki«.

Widzieliśmy wyżej, że to, co mówi Hilbert o zasadach Logiki w postaci, jaką się im zwykle nadaje, stosuje się również do logiki Russella. Tak tedy dla Russella Logika poprzedza Arytmetykę; dla Hilberta są one »jednoczesne«. Znajdziemy później inne, bardziej jeszcze głębokie różnice. Wskażemy na nie w miarę ich ujawniania się, tymczasem wolę śledzić krok za krokiem rozwój myśli Hilberta, przytaczając dosłownie najważniejsze ustępy.

»Rozważmy przedewszystkiem przedmiot 1«. Stwierdźmy, że postępując w ten sposób, nie przypuszczamy zgoła pojęcie liczby, gdyż 1 jest dla nas poprostu symbolem, którego znaczenie nic nas nie obchodzi. »Grupy utworzone zapomocą tego przedmiotu przez powtórzenie go dwa, trzy, kilka razy...« Otóż tym razem jest już inaczej: skoro wprowadzamy wyrazy dwa, trzy i zwłaszcza kilka, wprowadzamy pojęcie liczby; i definicja liczby całkowitej skończonej, którą znajdziemy za chwilę, będzie nieco spóźniona. Autor był o wiele za przenikliwy, żeby nie dostrzec tego *petitio principii*. Toteż pod koniec swej pracy usiłuje on naprawić to zapomocą istnego gipsowania.

Hilbert wprowadza następnie dwa proste przedmioty 1 i = i rozpatruje wszystkie kombinacje tych dwu przedmiotów, wszystkie kombinacje ich kombinacji itd. Rozumie się samo przez się, że trzeba zapomnieć zwykłe znaczenie tych dwu znaków i nie przypisywać im żadnego. Dzieli on następnie te kombinacje na dwie klasy, na klasę istot i na klasę nie-istot, i aż do dalszych założeń podział ten jest całkowicie dowolny; wszelkie twierdzenie twierdzące mówi nam, że dana kombinacja należy do klasy istot; wszelkie twierdzenie przeczące mówi, że pewna kombinacja należy do klasy nie-istot.

VII.

Zaznaczmy teraz różnicę najwyższej doniosłości. Dla Russella przedmiot jakikolwiek, który oznacza on przez x, jestto przedmiot zupełnie nieoznaczony, co do którego nie przypuszcza on nic; dla Hilberta jestto jedna z kombinacji, utworzonych z symbolów 1 i =; nie pojmuje on wprowadzania czegokolwiek innego prócz kombinacji przedmiotów już zdefinjowanych. Hilbert formułuje zresztą swą myśl w sposób najwyraźniejszy, i uważam za konieczne przytoczyć *in extenso* odnośny ustęp. »Wyrazy nieoznaczone, figurujące w pewnikach (zamiast wyrazów »jakikolwiek« lub »wszystkie« logiki zwykłej) wyobrażają wyłącznie ogół przedmiotów i kombinacji, któreśmy już posiedli w obecnym stanie teorji, lub które właśnie wprowadzamy. Kiedy przeto wyprowadzać się będzie twierdzenia z danych pewników, na miejsce tych nieoznaczonych będzie się miało prawo wstawiać jedynie te przedmioty i ich kombinacje. Nie trzeba będzie również zapominać, że, kiedy zwiększamy ilość przedmiotów podstawowych, pewniki zostają tym samym rozszerzone, i dlatego powinny być znowu poddane próbie i ewentualnie ulec modyfikacjom«.

Pogląd ten stanowi zupełny kontrast w stosunku do zapatrywań Russella. Dla tego filozofa można zastąpić x nietylko przez przedmioty znane, lecz przez cokolwiek. Russell jest wierny swemu stanowisku, które jest stanowiskiem zrozumiałości [de la compréhension]. Wychodzi on z ogólnej idei istnienia i bogaci ją coraz więcej, zarazem ją zwężając, dodając jej nowe własności. Hilbert natomiast uznaje za istoty możliwe jedynie kombinacje przedmiotów już znanych; dlatego (uwzględniając jedną ze stron jego myśli) możnaby powiedzieć, że staje on na stanowisku rozciągłości [de l' extension].

VIII.

Ciągnijmy dalej wykład idej Hilberta. Wprowadza on dwa pewniki, które wyraża w swoim języku symbolicznym, a które w języku takich profanów, jak my, oznaczają, że wszelka ilość jest równa samej sobie, i że wszelkie działanie, dokonane na dwu tożsamych ilościach, daje wyniki tożsame. W takim sformułowaniu pewniki te są oczywiste, lecz przedstawienie ich w takiej postaci jest zdradą w stosunku do myśli Hilberta: według niego zadaniem matematyki jest jedynie kombinowanie czystych symbolów, i prawdziwy matematyk powinien operować niemi, nie troszcząc się o ich znaczenie. To też jego pewniki nie są dla niego tym, czym są dla zwykłego człowieka.

Uważa je on jako definicję przez postulaty symbolu $=$, dotychczas pozbawionego wszelkiego znaczenia. Lecz aby uprawnić tę definicję, trzeba okazać, że owe dwa pewniki nie prowadzą do żadnej sprzeczności.

W tym celu Hilbert posługuje się rozumowaniem z § III, nie zdając sobie, jak się zdaje, sprawy z tego, że stosuje indukcję zupełną.

IX.

Koniec rozprawy Hilberta jest całkiem enigmatyczny — nie będziemy się też nad nim obszerniej zastanawiali. Roi się tu od sprzeczności; czuje się, że autor posiada niejasną świadomość *petitio principii*, jakie popełnił, i że usiłuje on napróżno zagipsować pęknięcia swego rozumowania.

Cóż to mówi? W chwili, kiedy ma dowieść, że definicja liczby całkowitej zapomocą pewnika indukcji zupełnej nie zawiera w sobie sprzeczności, Hilbert wymyka się, jak wymknęli się Russell i Couturat, bo trudności tej nie może podołać.

X.

Gieometrja.

Gieometrja, mówi Couturat, jest obszerną zamkniętą w sobie nauką, w której nie napotyka się wcale zasady indukcji zupełnej. Jestto słuszne w pewnej tylko mierze, nie można powiedzieć, że się jej nie napotyka wcale, lecz, że się ją napotyka mało. Jeżeli odniesiemy się do Rational Geometry Halsteda (New-York, John Wiley and Sons, 1904), ułożonej według zasad Hilberta, napotkamy zasadę indukcji zupełnej po raz pierwszy na str. 114 (o ile nie szukałem źle, co jest bardzo możliwe).

Tak więc gieometrja, która przed paru zaledwie laty zdawała się dziedziną, w której panowanie intuicji było bezsporne, jest dziś obszarem, na którym zdają się trjumfować logistycy. Fakt ten jest najlepszą miarą doniosłości prac gieometrycznych Hilberta i głębokiej pieczęci, jaką prace te pozostawiły na naszych pojęciach.

Nie poddawajmy się przecież złudnemu wrażeniu. Jakież jest w gruncie rzeczy twierdzenie podstawowe Gieometrji? Że pewniki Gieometrji nie zawierają w sobie sprzeczności, a tego nie można dowieść bez zasady indukcji.

Jak Hilbert dowodzi tego podstawowego punktu? Opierając się na Analizie, a przez nią na Arytmetyce, a przez nią na zasadzie indukcji.

I jeśli kiedykolwiek zostanie wynaleziony inny dowód, trzeba będzie znowu oprzeć się na tej zasadzie, boć ilość możliwych konsekwencji pewników, które mają nie być ze sobą w sprzeczności, jest nieskończona.

XI.

Konkluzja.

Konkluzją naszą jest przedewszystkim, że zasady indukcji zupełnej nie można uważać za przebraną definicję liczby całkowitej.

Oto trzy prawdy:

Zasada indukcji zupełnej;

Postulat Euklidesa;

Prawo fizyczne, według którego fosfor topnieje przy 44^0 (przytoczona przez Le Roy).

Mówią: są to trzy przebrane definicje, pierwsza jest definicją liczby całkowitej, druga linji prostej, trzecia fosforu.

Przyznaję to w wypadku drugiej, nie przyznaję pierwszej ani trzeciej, i wytłumaczę racje tej pozornej niekonsekwencji.

Przedewszystkim widzieliśmy, że definicja nadaje się o tyle tylko, o ile jest dowiedzione, że nie zawiera ona sprzeczności. Wykazaliśmy również, że dla pierwszej definicji dowód ten jest niemożliwy; co do drugiej, to przypomnieliśmy właśnie przed chwilą, że Hilbert przeprowadził w zupełności ten dowód.

Co do trzeciej, to jasne jest, że nie tkwi w niej sprzeczność: ale czy znaczy to, że ta definicja gwarantuje należycie istnienie zdefinjowanego przedmiotu? Jesteśmy tu już nie w naukach matematycznych, lecz w naukach fizycznych, i wyraz istnienie posiada tu znaczenie odmienne, nie oznacza on braku sprzeczności, lecz istnienie objektywne.

Jestto pierwsza racja, dlaczego robię różnicę między owemi trzema wypadkami; istnieje nadto racja druga. Czy w procesie stosowania tych trzech pojęć występują one, jako zdefinijowane przez te trzy postulaty?

Zastosowania możliwe zasady indukcji zupełnej są niezliczone; weźmy np. jedno z wyłożonych wyżej, to, w którym usiłuje się ustanowić, że dany zbiór pewników nie może doprowadzić do sprzeczności. W tym celu rozważa się jeden z szeregów sylogizmów, które można snuć, wychodząc z tych pewników, jako z przesłanek.

Kiedy dokończyło się n-go sylogizmu, widzi się, że można zbudować jeszcze jeden, będzie to $n+1$-y; tak więc liczba n służy do liczenia szeregu kolejnych działań, jestto liczba, którą można otrzymać drogą kolejnych dodawań. Jestto zatym liczba, od której można wznieść się do jedności drogą *kolejnych odejmowań*. Byłoby to oczywiście niemożliwe, gdyby zachodziła równość $n = n - 1$, gdyż w takim razie otrzymywalibyśmy przez odejmowanie ciągle tę samą liczbę. Tak więc sposób, w jaki zostaliśmy naprowadzeni na rozważanie tej liczby n, przypuszcza definicję liczby całkowitej skończonej, mianowicie definicji następującej: *liczbą całkowitą skończoną jest liczba, którą można otrzymać przez kolejne dodawania, liczba taka, że n nie jest równe $n - 1$.*

Poczym, co robimy? Okazujemy, że jeżeli nie było sprzeczności przy n-ym sylogizmie, nie będzie jej również przy $n+1$-ym, i wnosimy, że jej nie będzie nigdy. Mówicie: mam prawo tak wnioskować, ponieważ liczby całkowite są mocą definicji takiemi, dla których podobne rozumowanie jest uprawnione; ale to przypuszcza inną definicję liczby całkowitej, mianowicie następującą: liczbą całkowitą jest liczba, do której można stosować rozumowanie przez rekurencję; w danym razie jestto liczba, o której można powiedzieć, że, jeżeli brak sprzeczności w chwili sylogizmu, którego numer jest liczbą całkowitą, pociąga za sobą brak sprzeczności w chwili sylogizmu, którego numer jest następną liczbą całkowitą, to nie będzie sprzeczności w żadnym sylogizmie, którego numer jest liczbą całkowitą.

Dwie te definicje nie są tożsame; zapewne, są one równoważne, lecz są takiemi mocą sądu syntetycznego *a priori*; nie można przejść od jednej do drugiej drogą czysto-logiczną. Dlatego nie mamy prawa przyjąć drugiej definicji, wprowadziwszy liczbę całkowitą drogą, która przypuszcza pierwszą.

Jakże natomiast rzeczy się mają w wypadku linji prostej? Tłumaczyłem to już tyle razy, że waham się powtórzyć się raz jeszcze; ograniczę się zwięzłym streszczeniem mojej myśli.

Nie mamy tu, jak w wypadku poprzednim, dwu równoważnych definicji, niedających się logicznie do siebie sprowadzić. Mamy tylko jedną, dającą się wyrazić słowami. Czyżbyśmy mieli drugą, którą czujemy, nie będąc w stanie jej sformułować, przez to, że posiadamy intuicję linji prostej, albo, że wyobrażamy sobie linję prostą? Przedewszystkim nie możemy jej sobie wyobrazić w przestrzeni gieometrycznej, lecz jedynie w przestrzeni wyobrażeniowej, nadto zaś możemy sobie wyobrazić równie dobrze przedmioty, posiadające inne własności linji prostej prócz czynienia zadość postulatowi Euklidesa. Przedmiotami temi są »proste nie-euklidesowe«, które z pewnego stanowiska nie są istnościami bez konkretnej treści, lecz kołami (prawdziwemi kołami prawdziwej przestrzeni) ortogonalnemi do pewnej kuli. Jeżeli z pośród tych przedmiotów, jednakowo dostępnych dla wyobraźni, prostemi nazwiemy pierwsze (proste euklidesowe), nie zaś drugie (proste nie-euklidesowe), to dzieje się to poprostu mocą definicji.

A w sprawie trzeciego przykładu, definicji fosforu, to jasne jest, że prawdziwa definicja brzmiałaby tak oto: Fosfor jestto ów kawałek materji, który widzę w tamtej flaszeczce.

XII.

Skoro już mówię o tym przedmiocie, jeszcze jedno słowo. O przykładzie fosforu powiedziałem: »Twierdzenie to jest prawdziwym sprawdzalnym prawem fizycznym, gdyż znaczy ono: wszystkie ciała, posiadające wszystkie inne własności fosforu prócz jego punktu topliwości, topnieją jak on, przy 44°«. Na co mi odpowiedziano: »Nie, prawo to nie jest sprawdzalne, albowiem, gdyby sprawdzono, że dwa ciała podobne do fosforu topnieją jedno przy 44° drugie przy 50°, możnaby zawsze powiedzieć, że prócz punktu topliwości istnieje jeszcze jakaś inna nieznana własność, która je od siebie odróżnia«.

Otóż chciałem powiedzieć niezupełnie to, — powinien byłem napisać: Wszystkie ciała, które posiadają takie a takie własności w ilości skończonej (mianowicie własności fosforu, wyliczone w wykładach chemji, z wyłączeniem punktu topliwości), topnieją przy 44°.

Dla tym lepszego unaocznienia różnicy między wypadkiem prostej a wypadkiem fosforu, zróbmy jedną jeszcze uwagę. Prosta posiada w przyrodzie kilka wizerunków mniej lub bardziej niedoskonałych, z których najważniejszemi są promienie świetlne i oś obrotu ciała stałego. Przypuśćmy, że stwierdzono, że promień świetlny nie czyni zadość postulatowi Euklidesa (np. przez okazanie, że pewna gwiazda posiada paralaksę ujemną) — cóż zrobimy wówczas? Czy wywnioskujemy, że prosta, która jest mocą definicji drogą światła, nie czyni zadość postulatowi, czy też, przeciwnie, że ponieważ prosta czyni mocą definicji zadość postulatowi, promień nie jest prostolinijny?

Zapewne, wolno nam przyjąć tę lub tamtą definicję, a przeto i ten lub tamten wniosek; lecz przyjęcie pierwszej byłoby głupie, bo promień świetlny czyni prawdopodobnie zadość w sposób niedoskonały nietylko postulatowi Euklidesa lecz i innym własnościom linji prostej; że, jeśli odchyla się on od prostej euklidesowej, to w nie mniejszej mierze odchyla się od osi obrotu ciał stałych, która jest innym niedoskonałym wizerunkiem linji prostej, wreszcie podlega on zapewne zmianom, tak iż linja, która była prostą wczoraj, przestanie nią być jutro, jeśli się zmieni ta lub inna okoliczność fizyczna.

Przypuśćmy teraz, że zostanie zrobione odkrycie, iż fosfor nie topnieje przy 44°, lecz przy 43·9°. Czy wywnioskujemy stąd, że, skoro fosfor jest mocą definicji ciałem, topniejącym przy 44°, ciało obecne nie jest prawdziwym fosforem, albo też, przeciwnie, że fosfor topnieje istotnie przy 43·9°? I tutaj wolno nam jest przyjąć tę lub inną definicję, a więc i ten lub inny wniosek; ale przyjąć pierwszą definicję byłoby postępkiem głupim, ponieważ nie można zmieniać za każdym razem nazwy ciała, ilekroć oznaczy się nowy znak dziesiętny jego punktu topliwości.

XIII.

W rezultacie próby Russella i Hilberta są owocem dużego nakładu siły; każdy z nich napisał książkę, pełną poglądów oryginalnych, głębokich i często bardzo trafnych. Książki te dadzą nam dużo materjału do rozmyślań i dużo możemy się z nich nauczyć. Pośród wyników, do których doszli, pewna ilość, duża nawet ilość, jest ugruntowana i zachowa trwałą wartość.

Ale mniemanie, że rozstrzygnęli oni ostatecznie spór między Kantem a Leibnitzem i obalili kantowską teorję matematyki, jest oczywiście niesłusznym. Nie wiem, czy istotnie takie było ich przeświadczenie, lecz jeśli tak było, tedy byli oni w błędzie.

Rozdział V.

Ostatnie wysiłki Logistyków.

I.

Logistycy chcieli odpowiedzieć na poprzedzające rozważania. W tym celu zmuszeni byli przekształcić Logistykę, zwłaszcza Russell zmodyfikował w pewnych punktach pierwotne swe poglądy. Nie wkraczając w szczegóły tej dyskusji, chciałbym powrócić do dwu najważniejszych w moim rozumieniu pytań: czy reguły Logistyki dały dowód swej płodności i nieomylności? Czy prawdą jest, że pozwalają one dowieść zasady indukcji zupełnej bez żadnego odwoływania się do intuicji?

II.

Nieomylność Logistyki.

Co do płodności Logistyki, to zdaje się, że Couturat żywi naiwne złudzenia. Logistyka, mówi on, obdarza wynalazczość »szczudłami i skrzydłami«, i na stronicy następnej: »D z i e s i ę ć l a t u p ł y w a, jak Peano ogłosił pierwsze wydanie swego F o r m u l a r z a«.

Jakżeto, już dziesięć lat macie skrzydła, i jeszczeście nie latali!

Mam najwyższy szacunek dla Peano, który zrobił bardzo ładne rzeczy (że przypomnę jego krzywą, zapełniającą całe pole); ale ostatecznie nie posunął się on ani dalej, ani wyżej, ani szybcej, niż większość matematyków bezskrzydłych, i mógłby był zrobić to równie dobrze za pomocą swych nóg.

Przeciwnie, widzę w logistyce jedynie pęta dla twórcy; bynajmniej nie pozwala nam ona zyskać na zwięzłości, i jeśli potrzeba 27 równań, by okazać, że 1 jest liczbą, to ileż ich będzie potrzeba, by dowieść prawdziwego twierdzenia? Jeżeli z Whiteheadem odróżniać będziemy indywiduum x, klasę, której jedynym członkiem jest x, i która nazywać się będzie x, dalej klasę, której jedynym członkiem jest klasa, której jedynym członkiem jest x, i która nazywać się będzie $\iota\iota x$, to czyż te rozróżnienia, przy całej swej użyteczności, zaprawdę ulżą naszemu lotowi?

Logistyka zmusza nas do wypowiedzenia wszystkiego, co się zwykle przypuszcza domyślnie; zmusza nas ona do posuwania się krok za krokiem; jestto, być może, pewniejsze, lecz nie jest szybsze.

Nie skrzydła dajecie nam — prowadzicie nas raczej na pasku. Przeto mamy prawo żądać, żeby pasek ten chronił nas od upadku. Za tę tylko cenę możemy się nań zgodzić. Jeżeli papier wartościowy nie przynosi wielkich procentów, to musi on przynajmniej być tak pewny, jak pierwsza hypoteka.

Czy trzeba stosować się ślepo do waszych reguł? Zapewne, gdyż inaczej musielibyśmy kierować się intuicją przy ocenie ich wartości; skoro tak, tedy muszą one być nieomylne; ślepe zaufanie można żywić jedynie do nieomylnego autorytetu. Jestto zatym dla was nieodpartą koniecznością. Będziecie nieomylni — albo was nie będzie.

Nie macie prawa nam powiedzieć: »Mylimy się, przyznajemy to ale i wy się mylicie«. Dla nas mylić się jest nieszczęściem, bardzo wielkim nieszczęściem, — dla was jest to śmiercią.

Nie mówcie też: czyż nieomylność arytmetyki wyklucza błędy w dodawaniu? reguły rachunku są nieomylne, — mylą się ci, co nie stosują tych reguł; sprawdzenie ich rachunków wskaże odrazu, w jakiej chwili odchylili się od tych reguł. Tutaj jest zupełnie inaczej; logistycy zastosowali swoje reguły — i popadli w sprzeczności; i jestto w takim stopniu słuszne, że zabierają się oni do zmienienia swych reguł i »porzucenia pojęcia klasy«. I czemuż je zmieniać, jeśli są nieomylne?

»Nie jesteśmy zobowiązani, mówicie, do rozwiązywania *hic et nunc* wszelkich możliwych zagadnień«. Och, nie wymagamy od was aż tyle! jeśli nie dacie żadnego rozwiązania danego zagadnienia, nie zrobimy wam z tego najmniejszego zarzutu; lecz wy, przeciwnie, dajecie nam dwa rozwiązania i to ze sobą sprzeczne, tak iż jedno przynajmniej z nich jest fałszywe, i to właśnie jest bankructwem.

Russell usiłuje pogodzić te rzeczy sprzeczne, co, jego zdaniem, jest możliwe jedynie za cenę »zwężenia lub nawet porzucenia pojęcia klasy«. A Couturat, dyskontując powodzenie tej próby, dodaje: »Jeżeli logistycy podołają temu, co było ponad siły innych, Poincaré raczy przypomnieć sobie to zdanie, i zasługę rozwiązania przypisać Logistyce«.

Ależ nie: Logistyka istnieje, posiada ona swój kodeks, który wyszedł już w czterech wydaniach; albo raczej kodeks ten jest samą Logistyką. Czy Russell zamierza wykazać, że jedno przynajmniej z dwu sprzecznych rozumowań przekroczyło nakazy tego kodeksu? Bynajmniej — chce on zmienić te prawa, znieść pewną ich ilość. Jeśli mu się to powiedzie, przypiszę tego zasługę intuicji Russella, nie Logistyce peańskiej, którą on tym samym obali.

III.

polemika
z

Prawo do sprzeczności.

Definicji liczby całkowitej, przyjętej przez Logistyków, postawiłem dwa główne zarzuty. Cóż odpowiada Couturat na pierwszy z tych zarzutów?

Co znaczy w matematyce wyraz istnieć? znaczy on, powiedziałem, być wolnym od sprzeczności. Couturat jest innego zdania: »Istnienie logiczne, mówi, jest czymś zupełnie innym, niż brakiem sprzeczności. Polega ono na fakcie, że pewna klasa nie jest próżna: powiedzieć: istnieją *a* — znaczy to, mocą definicji, twierdzić, że klasa *a* nie jest zerem«. Zapewne też twierdzić, że klasa *a* nie jest zerem, jestto, mocą definicji, twierdzić, że istnieją *a*. Lecz jedno z tych twierdzeń jest równie pozbawione sensu jak drugie, o ile obydwa nie znaczą, albo że można widzieć i dotykać *a*, co jest sensem, jaki im nadają fizycy i przyrodnicy, albo, że można operować pojęciem *a*, nie popadając w sprzeczności, co jest sensem, jaki im nadają logicy i matematycy.

Dla Couturat nie brak sprzeczności dowodzi istnienia lecz istnienie dowodzi braku sprzeczności. Ażeby ustanowić istnienie pewnej klasy, trzeba przeto ustanowić przez przykład, że istnieje indywiduum, należące do tej klasy. »Ale, powie kto, jakże się dowodzi istnienia tego indywiduum? Czyż istnienie to nie musi być ustanowione, aby można zeń było wyprowadzić istnienie klasy, do której ono należy? Otóż nie; jakkolwiek się to może wydawać paradoksalnym, nie dowodzi się nigdy istnienia indywiduum. Indywidua, przez to samo, że są indywiduami, są zawsze uważane za istniejące. Nigdy nie zachodzi potrzeba wyrażenia, że indywiduum istnieje w znaczeniu absolutnym, lecz jedynie, że istnieje ono w pewnej klasie«. Couturat uważa swe własne powiedzenie za paradoksalne, nie będzie on z pewnością sam jeden tylko tego zdania. Musi ono przecież mieć jakiś sens; chce on zapewne powiedzieć, że istnienie indywiduum, które byłoby samo jedne na świecie, i o którym nie twierdzi się nic, nie może doprowadzić do sprzeczności; dopóki będzie ono samo, nie będzie ono oczywiście nikomu zawadzało. Niechajże będzie: przypuścimy istnienie indywiduum »w znaczeniu absolutnym«, ale nie będziemy mogli nic z nim począć; wypadnie wam ponadto dowieść istnienia indywiduum »w pewnej klasie«, i w tym celu będziecie zawsze musieli okazać, że twierdzenie: to indywiduum należy do tej klasy — nie jest sprzeczne ani samo w sobie, ani w stosunku do innych przyjętych postulatów.

»Jestto tedy wymaganiem dowolnym i nieprawnym, ciągnie dalej Couturat, gdy się twierdzi, że definicja posiada wartość o tyle tylko, o ile się uprzednio dowiedzie, że nie zawiera ona sprzeczności«. Couturat głosi tu w wyrazach, nad które nie masz energiczniejszych i dumniejszych — prawo do sprzeczności. »W każdym razie *onus probandi* przypada tym, którzy sądzą, że zasady te są sprzeczne«. O postulatach mniemać należy, że są zgodne ze sobą, dopóki ktoś nie dowiedzie, że tak nie jest, podobnie jak o oskarżonym, że jest niewinny.

Niepotrzeba chyba dodawać, że nie godzę się na ten pogląd. Ależ, odpowiedzą nam, dowód, którego od nas wymagacie jest niemożliwy, nie możecie nas wzywać do »chwytania księżyca zębami«. Za pozwoleniem, niemożliwym jest on dla was — nie dla nas, którzy przyjmujemy zasadę indukcji, jako sąd syntetyczny *a priori*. A będzie to koniecznym zarówno dla was, jak dla nas.

Żeby dowieść, że w pewnym układzie postulatów nie tkwi sprzeczność, trzeba stosować zasadę indukcji zupełnej; ten tryb rozumowania nietylko niema w sobie nic »dziwacznego«, ale jestto jedyny poprawny. Nie jest »nieprawdopodobne«, aby go kiedykolwiek używano; nietrudno jest znaleść na to »przykłady i precedensy«. Przytoczyłem dwa takie przykłady w moim artykule, wzięte z broszury Hilberta. Nie jest on jedynym, który go używał, a ci, co tego nie robili, nie mieli słuszności. Zarzuciłem Hilbertowi nie to, że się uciekł do tego rozumowania (matematyk tak rasowy, jak on, nie mógł nie widzieć, że potrzeba było dowodu, i że ten dowód był jedynym możliwym), lecz, że się doń uciekł i zarazem nie poznał w nim rozumowania przez rekurencję.

IV.

Zarzut drugi.

Wskazałem na drugi błąd logistyków w artykule Hilberta; dziś Hilbert jest wyklęty, i Couturat nie uważa go już za logistyka; zapyta mnie on tedy, czy znalazłem ten sam błąd u logistyków prawowiernych. Nie, nie widziałem go na kartach, które przeczytałem; nie wiem, czy go znajdę na trzystu stronicach, które napisali, a których nie mam ochoty czytać.

Ale będą musieli popełnić ten błąd w chwili, w której zechcą wyciągnąć z nauki matematycznej jakiekolwiek zastosowanie. Nie jest zadaniem tej nauki wpatrywać się wiecznie w swój własny pępek; przylega ona do przyrody i tej czy innej chwili zetknie się z nią; i owej chwili trzeba będzie otrząsnąć się z definicji czysto werbalnych i przestać zadawalać się słowami.

Powróćmy do przykładu Hilberta; idzie wciąż o rozumowanie przez rekurencję, i o kwestję, czy dany układ postulatów nie zawiera sprzeczności. Couturat powie mi, bez wątpienia, że w takim razie go to nie dotyka, — lecz nie będzie to, być może, bez interesu dla tych, którzy nie dopominają się, jego wzorem, prawa do sprzeczności.

Chcemy, jak powyżej dowieść, że nie napotkamy sprzeczności po jakiejkolwiek, dowolnie wielkiej, ilości rozumowań byle ilość ta była skończona. W tym celu trzeba zastosować zasadę indukcji. Czy należy tu rozumieć przez liczbę całkowitą każdą liczbę, do której się, mocą definicji, stosuje zasada indukcji? Oczywiście nie, bo w przeciwnym razie doprowadziłoby nas to do wielce niedogodnych konsekwencji.

Żeby mieć prawo założyć pewien układ postulatów, musimy być upewnieni, że nie tkwi w nich sprzeczność. Jestto prawda, przyjęta przez większość uczonych, powiedziałbym przez wszystkich, gdybym nie przeczytał ostatniego artykułu Couturat. Ale cóż ona mówi? Czy znaczy ona tyle: musimy być pewni, że nie napotkamy sprzeczności po skończonej ilości twierdzeń, przyczym liczbą skończoną jest mocą definicji liczba, która posiada wszystkie własności o charakterze rekurencji, tak iż, gdyby jednej z tych własności było brak, gdybyśmy np. trafili na sprzeczność, tedy umówimy się uważać taką liczbę za nieskończoną?

Innemi słowy, czy chcemy powiedzieć: musimy być pewni, że nie napotkamy sprzeczności, z warunkiem, że umówimy się, że się zatrzymamy właśnie na chwilę przed jej napotkaniem? Wystarczy wypowiedzieć taki pogląd, aby go potępić.

Tak więc rozumowanie Hilberta nietylko zakłada zasadę indukcji, lecz zakłada, że zasada ta jest nam dana nie jako prosta definicja lecz jako sąd syntetyczny *a priori*.

Streszczając:

Dowód jest niezbędny.

Jedynym dowodem możliwym jest dowód przez rekurencję.

Jest on uprawniony o tyle tylko, o ile przyjmie się zasadę indukcji, i zasadę tę uważa się nie za definicję lecz za sąd syntetyczny.

V.

Antynomje cantorowskie.

Przejdę teraz do rozpatrzenia nowej rozprawy Russella. Rozprawa ta została napisana w celu pokonania trudności, wywołanych przez owe antynomje cantorowskie, do których wielekroć już robiliśmy aluzje. Cantor sądził, że może zbudować Naukę Nieskończoności; inni również poszli po drodze, przezeń otworzonej, lecz rychło potknęli się o dziwne sprzeczności. Z pośród tych licznych już sprzeczności najsławniejszemi są:

1-o Antynomja Burali-Fortiego;

2-o Antynomja Zermelo-Königa;

3-o Antynomja Richarda.

Cantor dowiódł, że liczby porządkowe (idzie tu o liczby porządkowe nadskończone, pojęcie nowe przezeń wprowadzone) mogą być uszykowane w szereg linjowy, to znaczy, że z dwu liczb porządkowych nierównych, jedna jest zawsze mniejsza od drugiej. Burali-Forti dowodzi, że jest przeciwnie; jakoż, brzmi w streszczeniu jego rozumowanie, jeżeliby można było uszykować wszystkie liczby porządkowe w szereg linjowy, szereg ten definjowałby liczbę porządkową większą od wszystkich innych; możnaby do niej dodać jeszcze 1, co dałoby liczbę porządkową jeszcze większą, co jest sprzeczne z powyższym.

Powrócimy później do antynomji Zermelo-Königa o charakterze nieco odmiennym; a oto na czym polega antynomja Richarda (Revue générale des Sciences, 30 czerwca

1905). Rozważmy wszystkie liczby dziesiętne, które można zdefinjować zapomocą skończonej ilości słów; dziesiętne te liczby stanowią zespół E; i łatwo jest stwierdzić, że zespół ten jest odliczalny, to znaczy, że można ponumerować poszczególne liczby dziesiętne tego zespołu od 1 do nieskończoności. Przypuśćmy, że to ponumerowanie zostało dokonane, i zdefinjujmy liczbę N w następujący sposób. Jeżeli n-y znak dziesiętny n-ej liczby zespołu E jest

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

tedy n-ym znakiem dziesiętnym liczby N będzie

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, 1.

Jak stąd widać, N nie jest równe n-ej liczbie E, a ponieważ n jest jakiekolwiek, przeto N nie należy do E, a przecież N powinnoby należeć do tego zespołu, boć zdefinjowaliśmy je zapomocą skończonej ilości słów.

Zobaczymy później, że sam Richard dał wielce przenikliwe wytłumaczenie tego paradoksu, i że wytłumaczenie to daje się rozciągnąć *mutatis mutandis* na inne analogiczne paradoksy. Russell przytacza nadto jeszcze jedną dość zabawną antynomję.

Jaka jest najmniejsza zpośród wszystkich liczb, których nie można zdefinjować zapomocą zdania utworzonego z mniej niż stu polskich wyrazów?

Liczba ta istnieje; albowiem ilość liczb, które można zdefinjować zapomocą takiego zdania, jest skończona, gdyż ilość wyrazów w języku polskim jest skończona; zatym wśród nich będzie jedna liczba mniejsza od wszystkich innych.

A jednak — z drugiej strony — liczba ta nie istnieje, gdyż w definicji jej tkwi sprzeczność. Liczba ta jest bowiem zdefinjowana przez zdanie wydrukowane kursywą, które jest utworzone z mniej niż stu polskich wyrazów; a mocą definicji liczba ta nie powinna móc być zdefinjowana zapomocą takiego zdania.

VI.

Zigzag-theory i No-classes-theory.

Jakaż jest postawa Russella wobec tych sprzeczności? Zanalizowawszy te, o których mówiliśmy przed chwilą, i przytoczywszy inne jeszcze, nadawszy im postać, która przypomina Epimenidesa, nie waha się on wywnioskować:

»A propositional function of one variable does not always determine a class«. Funkcja propozycyjna (to znaczy definicja) nie zawsze określa pewną klasę. »Propositional function» lub »norm« może nie być »predykatywną« (orzekającą). I nie znaczy to, że te niepredykatywne twierdzenia określają klasę próżną, klasę zero; nie znaczy, że niema żadnej wartości x, odpowiadającej definicji i mogącej być jednym z elementów klasy. Elementy istnieją, lecz nie mają prawa zrzeszyć się, by utworzyć klasę.

Ale jestto dopiero początek i trzeba umieć poznać, czy dana definicja jest lub nie jest predykatywną; aby rozwiązać to zadanie, Russell waha się między trzema teorjami, które nazywa

A. The zigzag-theory;

B. The theory of limitation of size;

C. The no classes theory.

Według zigzag-theory: »definicje (funkcje propozycyjne), określają klasę, kiedy są bardzo proste, przestają zaś ją określać jedynie wówczas, gdy są skomplikowane i niejasne«.

Któż zdecyduje, czy definicję można uważać za dostatecznie prostą? Na pytanie to niema odpowiedzi, raczej lojalne przyznanie się do bezsilności: »reguły, które pozwoliłyby poznać, czy definicje te są predykatywne, byłyby niezmiernie skomplikowane, i nie przemawiają za niemi żadne przekonywujące racje. Brakowi temu mogłaby zaradzić dowcipniejsza pomysłowość lub oparcie się o rozróżnienia jeszcze nie zaznaczone. Ale dotychczas przy poszukiwaniu tych reguł nie powiodło się znaleźć innej zasady kierowniczej, jak brak sprzeczności«.

Teorja ta pozostaje tedy dosyć ciemna; jeden tylko ognik rozświetla mroki: jestto wyraz zigzag. To, co Russell nazywa »zigzag-giness« jestto zapewne owa cecha osobliwa, charakteryzująca argument Epimenidesa.

Według theory of limitation of size, klasa traciłaby prawo istnienia skoroby się stawała zbyt rozległa. Wolnoby jej było, być może, być nieskończoną, byle nie była nią zbytnio.

I stajemy znowu wobec tej samej trudności: w jakiej to chwili zacznie ona być zbyt nieskończoną? Rozumie się, że trudności tej nie pokonano, i Russell przechodzi do teorji trzeciej.

W no classes theory zabronione jest wymawianie wyrazu klasa, i wyraz ten należy zastępować urozmaiconemi omówieniami. Co za zmiana dla logistyków, którzy mówią ciągle o klasach i klasach klas! Wypadnie przerobić odnowa całą Logistykę. Wyobraźcie sobie stronicę Logistyki po usunięciu wszystkich twierdzeń, w których jest mowa o klasach. Pozostanie jedynie kilka przeżytków, rozsypanych na białej stronicy. *Apparent rari nantes in gurgite vasto.*

Jakkolwiekbądź, takie są wahania Russella, modyfikacje, którym podda zasady podstawowe, przyjęte przezeń po dziś dzień. Potrzeba będzie kryterjów dla zdecydowania, czy definicja jest zbyt skomplikowana lub zbyt rozległa, i kryterjów tych niepodobna będzie usprawiedliwić inaczej, jak przez odwołanie się do intuicji.

Ostatecznie Russell przechyla się ku no classes theory.

Jakkolwiekbądź, Logistyka ma być przebudowana odnowa, i trudno powiedzieć, co z niej uda się uratować. Zbyteczna dodawać, że zagrożone są jedynie Cantoryzm i Logistyka; prawdziwa matematyka, ta, która do czegoś służy, będzie mogła nadal się rozwijać według swych zasad własnych, nie troszcząc się o burze, szalejące poza nią, i sięgać krok za krokiem po zwykłe swe zdobycze, które są ostatecznemi i których nie wypada im nigdy porzucać.

VII.

Prawdziwe rozwiązanie.

Jakiż mamy zrobić wybór z pośród tych różnych teorji? Sądzę, że rozwiązanie jest zawarte w liście Richarda, o którym mówiłem wyżej, i który można znaleźć w *Revue Générale des Sciences* z 30 czerwca 1905 r. Wyłożywszy antynomję, którą nazwaliśmy antynomją Richarda, daje on jej wytłumaczenie.

Przypomnijmy sobie, cośmy powiedzieli o tej antynomji w § V; E jest zespołem *wszystkich* liczb, które można zdefinjować zapomocą skończonej ilości słów, *nie wprowadzając pojęcia samego zespołu* E. W przeciwnym razie definicja E zawierałaby błędne koło; nie można definjować E przez sam zespół E. Otóż zdefinjowaliśmy N wprawdzie zapomocą skończonej ilości słów, lecz opierając się na zespole E. I dlatego N nie stanowi części E.

W przykładzie, wybranym przez Richarda, wniosek nasuwa się z całą oczywistością, i oczywistość ta wyda się jeszcze większą, kiedy odniesiemy się do samego tekstu jego listu. I to samo wytłumaczenie stosuje się do innych antynomji, jak łatwo jest sprawdzić.

Tak więc *definicjami, które należy uważać za niepredykatywne, są te, które zawierają błędne koło*. Przykłady, rozpatrzone powyżej, dostatecznie wykazują, co przez to rozumiem. Czy to właśnie Russell nazywa »zigzag-giness«? Pytanie to zadaję, nie rozwiązując go.

VIII.

Dowody zasady indukcji.

Rozpatrzmy teraz domniemane dowody zasady indukcji, w szczególności dowody Whiteheada i Burali-Fortiego.

Rozpocznijmy od dowodu Whiteheada i skorzystajmy z kilku nowych terminów, szczęśliwie wprowadzonych przez Russella w jego świeżej rozprawie.

Nazwijmy klasą rekurentną, wszelką klasę liczb, zawierającą zero, oraz zawierającą $n+1$ o ile zawiera n.

Nazwijmy liczbą induktywną wszelką liczbę, wchodzącą do wszystkich klas rekurentnych.

Pod jakim warunkiem ta ostatnia definicja, odgrywająca istotną rolę w dowodzie Whiteheada, będzie »predykatywną«, a przeto się nada?

Według tego, co poprzedza, przez wszystkie klasy rekurentne należy rozumieć wszystkie te, do których definicji nie wchodzi pojęcie liczby induktywnej.

W przeciwnym razie wpadamy znowu w błędne koło, które zrodziło antynomje.

Otóż Whitehead nie zachował tej ostrożności.

Rozumowanie Whiteheada jest tedy wadliwe; jestto to samo rozumowanie, które doprowadziło do antynomji; było ono nieprawnym, kiedy dawało rezultaty błędne; pozostaje nieprawnym, kiedy wypadkiem prowadzi do rezultatu prawdziwego.

Definicja, zawierająca błędne koło, nie definjuje nic. Nic nie pomoże powiedzenie, że jesteśmy pewni, jakiekolwiek znaczenie nadamy naszej definicji, że przynajmniej zero należy do klasy liczb induktywnych; nie o to idzie, czy klasa ta jest próżna, lecz o to, czy można ją ściśle odgraniczyć. Klasa »niepredykatywna« to nie jest klasa próżna, lecz klasa, której granice są niewyraźne.

Zbyteczna zaznaczyć, że szczególny ten zarzut pozostawia nietkniętemi zarzuty ogólne, stosujące się do wszystkich dowodów.

IX.

Burali-Forti dał inny dowód w swym artykule Le Classi finite (»Atti di Torino«, t. XXXII). Lecz musi on przyjąć dwa postulaty:

Pierwszy, że istnieje zawsze przynajmniej jedna klasa nieskończona.

Drugi brzmi, jak następuje:

$$u \varepsilon K (K - \iota\Lambda) . \supset . u < \upsilon' u$$

Pierwszy postulat nie jest bardziej oczywisty, niż zasada, o której dowód idzie; drugi nietylko nie jest oczywisty lecz jest nieprawdziwy; jak to okazał Whitehead, jak zresztą zauważyłby odrazu każdy kret, jeśliby ten pewnik został wyrażony w języku zrozumiałym, gdyż znaczy on tyle: ilość kombinacji, które można utworzyć z kilku przedmiotów, jest mniejsza niż ilość tych przedmiotów.

X.

Pewnik Zermelo.

W słynnym swym dowodzie Zermelo opiera się na następującym pewniku:

W jakimkolwiek zespole (lub nawet w każdym zespole zespołu zespołów) można zawsze wybrać na chybi trafi element (nawet jeśliby ten zespół zespołów zawierał nieskończoność zespołów). Pewnik ten stosowano tysiące razy, nie formułując go, ale skoro tylko go sformułowano, wywołał on wątpliwości. Niektórzy matematycy, jak Borel, stanowczo go odrzucili; w innych budzi on podziw. Zobaczmy, co o nim myśli Russell według jego ostatniego artykułu.

Nie wypowiada się on za ani przeciw, ale rozważania, którym się oddaje, są wysoce suggiestywne.

Przedewszystkim malowniczy przykład: przypuśćmy, że posiadamy tyle par butów, ile istnieje liczb całkowitych, tak iż moglibyśmy ponumerować pary od 1 do nieskończoności — ile będziemy mieli butów? Czy ilość butów będzie równa ilości par? Tak, jeśli w każdej parze but prawy różni się od buta lewego; istotnie, wystarczy wówczas nadać numer $2n-1$ butowi prawemu n-ej pary, i numer $2n$ butowi lewemu n-ej pary. Nie, — jeśli but lewy jest taki sam jak prawy, gdyż podobna operacja stanie się niemożliwa. Chyba, że się przyjmie pewnik Zermelo, ponieważ wówczas można będzie wybrać w każdej parze na chybi trafi but, który się będzie uważało za prawy.

XI.

Wnioski.

Dowód, istotnie oparty na Analitycznej Logice, składać się będzie z szeregu twierdzeń; jedne, które służyć będą jako przesłanki, będą tożsamościami lub definicjami; inne wyprowadzać się będą z tamtych krok za krokiem; a chociaż łącznia między każdym twierdzeniem a twierdzeniem następnym będzie bezpośrednio widoczna, nie będzie widać od pierwszego rzutu oka, jak można było przejść od pierwszego twierdzenia do ostatniego, które będzie się mogło wydawać nową prawdą. Skoro przecież zastąpi się kolejno każde figurujące w nich wyrażenie przez jego definicję, i posunie tę operację możliwie daleko, w końcu pozostaną jedynie tożsamości, i wszystko sprowadzi się do jednej olbrzymiej tautologji. Logika pozostanie tedy jałową, o ile nie zostanie zapłodniona przez intuicję.

Oto co napisałem niegdyś; logicy wyznają pogląd przeciwny i sądzą, że pogląd ten uzasadnili, dając istotne dowody nowych prawd. Jakiż jest mechanizm tych dowodów?

Dlaczego przez zastosowanie do ich rozumowań opisanego powyżej postępowania, to znaczy przez zastąpienie zdefinjowanych wyrażeń przez ich definicje, nie doprowadzamy ich do roztopienia się w tożsamości podobnie jak zwykłe rozumowania? Dlatego, że postępowanie to nie daje się do nich zastosować. I czemu to? bo definicje ich nie są predykatywne, zawierają one owe ukryte błędne koła, na które wyżej zwróciłem uwagę; definicje niepredykatywne nie mogą być wstawione na miejsce zdefinjowanego wyrażenia. Wobec tego Logistyka przestaje być jałową, rodzi ona antynomję.

Definicje niepredykatywne zostały zrodzone przez wiarę w istnienie nieskończoności aktualnej (spełnionej). Albowiem w definicjach tych figuruje wyraz wszystkie, jak to widać z przytoczonych przez nas przykładów. Wyraz wszystkie posiada znaczenie całkiem jasne, kiedy idzie o skończoną ilość przedmiotów; żeby przy nieskończonej ilości przedmiotów można było wziąć jeszcze jeden przedmiot, musi istnieć nieskończoność aktualna. W przeciwnym razie niepodobna będzie pojmować wszystkich tych przedmiotów, jako założonych przed ich definicją, i wówczas, jeśli definicja pojęcia N zależy od wszystkich przedmiotów A, może być ona obciążona błędnym kołem, jeżeli śród przedmiotów A znajdują się takie, których nie można zdefinjować, nie posiłkując się samym pojęciem N.

Reguły logiki formalnej wyrażają poprostu własności wszystkich możliwych klasyfikacji. Warunkiem wszelako ich stosowalności jest, żeby klasyfikacje te były niewzruszone, żeby nie trzeba ich było modyfikować w trakcie rozumowania. Jeżeli idzie jedynie o klasyfikację skończonej ilości przedmiotów, łatwo jest zachować klasyfikacje bez zmiany. Jeżeli ilość przedmiotów jest nieoznaczona, to znaczy, jeżeli się jest ustawicznie narażonym na pojawianie się przedmiotów nowych i nieprzewidzianych, zdarzyć się może, że zjawienie się nowego przedmiotu zmusi do zmodyfikowania klasyfikacji, i w ten sposób jest się narażonym na antynomje.

Niema nieskończoności aktualnej; cantorowcy o tym zapomnieli i popadli w sprzeczności. Cantoryzm oddał wprawdzie usługi, ale wówczas tylko, kiedy go stosowano do prawdziwego zagadnienia, którego wyrazy były jasno określone, i wtedy można było posuwać się naprzód bez obawy.

Logistycy, podobnie jak cantorowcy, zapomnieli o tym, i oparli się o te same trudności. Ale idzie o to, czy weszli oni na tę drogę dzięki przypadkowi, czy też było to dla nich koniecznością.

Dla mnie jestto kwestja niewątpliwa; wiara w nieskończoność aktualną jest nieodłączna od logistyki russellowskiej To właśnie odróżnia ją od logistyki hilbertowskiej. Hilbert staje na punkcie widzenia rozciągłości [extension] właśnie po to, by uniknąć antynomji cantorowskiej; Russell staje na punkcie widzenia zrozumiałości [compréhension]. Przeto rodzaj poprzedza dlań gatunek, a *summum genus* poprzedza wszystko. Nie nastręczałoby to niedogodności, gdyby *summum genus* był skończony; ale jeśli jest on nieskończony, trzeba założyć nieskończoność przed skończonością, to jest uważać nieskończoność za aktualną.

I nietylko z nieskończonemi klasami mamy do czynienia; kiedy przechodzimy od rodzaju do gatunku, zwężając pojęcie przez wprowadzenie nowych warunków, ilość tych warunków jest znowu nieskończona. Albowiem wyrażają one zazwyczaj, że rozważany przedmiot związany jest taką lub inną zależnością z wszystkiemi przedmiotami nieskończonej klasy.

Ale to wszystko — należy już do historji. Russell zauważył niebezpieczeństwo i zaradzi mu. Zmieni wszystko; i niechaj nie będzie nieporozumienia: gotuje się on nietylko do wprowadzenia nowych zasad, które pozwolą na działania dawniej zakazane; gotuje się również do zabronienia działań, które dawniej uważał za uprawnione. Nie zadawala się czczeniem tego, co palił; co ważniejsza: spali to, co czcił. Nie dodaje nowego skrzydła do budowli, podkopuje jej fundamenty.

Dawna Logistyka umarła, i to w takim stopniu, że zigzag-theory i no classes - theory wiodą już ze sobą spór o puściznę po niej. Ażeby osądzić nową, poczekamy, aż będzie istniała.

KSIĘGA TRZECIA.

MECHANIKA NOWA.

Rozdział I.

Mechanika i rad.

I.

Wstęp.

Czy zasady ogólne Dynamiki, które od czasów Newtona były podstawą nauki fizycznej i zdawały się niewzruszonemi, mają być teraz porzucone albo przynajmniej poddane głębokiej modyfikacji? Pytanie takie nasuwa się wielu umysłom od kilku lat. Odkrycie radu obaliło, ich zdaniem, dogmaty naukowe, uważane za najtrwalsze: z jednej strony niemożliwość transmutacji metali; z drugiej postulaty podstawowe Mechaniki. Być może, zbyt pośpiesznie uznano te nowości za ostatecznie ustalone i obalono wczorajszych bożków; być może, wypadałoby raczej poczekać z zajęciem stanowiska na doświadczenia liczniejsze i bardziej decydujące. Niemniej przeto należy już dzisiaj znać nowe poglądy oraz poważne bardzo argumenty, na których się one opierają.

Przypomnijmy przedewszystkim w paru słowach, na czym polegają owe zasady.

A. Ruch punktu materjalnego odosobnionego i niepodległego działaniu żadnej siły zewnętrznej jest prostodrożny i jednostajny; jestto zasada bezwładności: niemasz przyspieszenia bez siły;

B. Przyspieszenie punktu ruchomego posiada ten sam kierunek, co wypadkowa wszystkich sił, którym punkt ten podlega; równa się ono ilorazowi tej wypadkowej przez współczynnik, zwany m a s ą punktu ruchomego.

Określona w ten sposób masa ruchomego punktu jest wielkością stałą; nie zależy ona od prędkości, nabytej przez ten punkt; jest ona taka sama niezależnie od tego, czy siła jest równoległa do prędkości i zdąża jedynie do przyspieszenia lub zwolnienia ruchu punktu, alboteż czy siła ta jest prostopadła do prędkości i zdąża do odchylenia tego ruchu na prawo lub na lewo, to znaczy do s k r z y w i e n i a drogi.

C. Wszystkie siły, działające na dany punkt materjalny, są wynikiem działania innych punktów materjalnych; zależą one jedynie od położeń i prędkości w z g l ę d n y c h tych poszczególnych punktów materjalnych.

Skombinowanie zasad *B* i *C* daje z a s a d ę r u c h u w z g l ę d n e g o, według której prawa ruchu układu materjalnego są te same, czy się odnosi ten układ do osi stałych, czy też odniesie się go do osi ruchomych, przenoszących się ruchem postępowym prostodrożnym i jednostajnym, tak iż niemożliwe jest odróżnienie ruchu bezwzględnego (absolutnego) od ruchu względnego, odniesionego do takich ruchomych osi;

D. Jeżeli punkt materjalny *A* działa na inny punkt materjalny *B*, ciało *B* oddziaływa rówież na *A*, i dwa te działania są siłami równemi i wbrew przeciwnemi. Jestto z a s a d a r ó w n o ś c i d z i a ł a n i a i o d d z i a ł y w a n i a albo, krócej, z a s a d a o d d z i a ł y w a n i a.

Obserwacje astronomiczne, najpospolitsze zjawiska fizyczne potwierdziły, zdałoby się, te zasady w sposób zupełny, stały i bardzo ścisły. Zapewne, mówi się dzisiaj, ale to dlatego tylko, że zawsze operowano jedynie niewielkiemi prędkościami; np. Merkury, który jest najszybszą planetą, przebiega zaledwie 100 kilometrów na sekundę. Czy ciało to zachowywałoby się w taki sam sposób, gdyby prędkość jego była stokrotnie większa? Pytanie to pozwala nam w każdym razie co do jednego nie żywić niepokoju: jakiekolwiek będą postępy automobilizmu, upłynie jeszcze dużo czasu, zanim będziemy musieli zrzec się stosowania do naszych maszyn klasycznych zasad Dynamiki.

W jakiż sposób potrafiono osiągnąć prędkości tysiąc razy większe, niż prędkość Merkurego, równe np. dziesiątej lub trzeciej części prędkości światła albo nawet jeszcze bardziej zbliżone do tej prędkości? Za sprawą promieni katodowych i promieni radu.

Wiadomo, że rad wysyła trzy gatunki promieni, które oznacza się zapomocą liter greckich α, β, γ; poniżej — o ile nie będzie wyraźnie powiedziane co innego — będziemy stale mówili o promieniach β, analogicznych do promieni katodowych.

Po odkryciu promieni katodowych zjawiły się dwie teorje: Crookes przypisywał obserwowane zjawiska istnemu bombardowaniu cząsteczkami; Hertz — szczególnym falowaniom eteru. Było to wznowieniem sporu o teorje światła, który przed stuleciem rozdzielił fizyków na dwa obozy; Crookes podjął teorję emisji, porzuconą w optyce; Hertz trzymał się teorji undulacyjnej. Fakty zdają się przyznawać słuszność Hertzowi.

Stwierdzono, po pierwsze, że promienie katodowe niosą ze sobą ujemny ładunek elektryczny; ulegają one odchyleniu przez pole magnetyczne i przez pole elektryczne; i odchylenia te są właśnie takie same, jakie wywoływałyby te same pola w ruchu pocisków, ożywionych bardzo wielką prędkością i noszących silne ładunki elektryczności. Te dwa odchylenia zależne są od dwu ilości: od prędkości oraz od stosunku ładunku elektrycznego pocisku do jego masy; nie można poznać wartości bezwzględnej tej masy ani wartości ładunku lecz jedynie ich stosunek; w rzeczy bowiem samej, skoro podwoimy ładunek i masę, nie zmieniając prędkości, podwoimy przez to siłę, która dąży do odchylenia pocisku; ponieważ przecie masa jego również jest podwojona, przyspieszenie oraz widome odchylenie nie będą zmienione. Obserwacja dwu odchyleń dostarczy nam tedy dwu równań dla oznaczenia tych dwu niewiadomych. Daje to prędkość równą 10.000 do

30.000 kilometrów na sekundę; stosunek ładunku do masy jest również bardzo duży. Można go porównać z odpowiednim stosunkiem, dotyczącym jonu wodoru w elektrolizie; otóż pocisk katodowy niesie około tysiąc razy więcej elektryczności, niżby niosła taka sama masa wodoru w elektrolicie.

Dla potwierdzenia tych poglądów potrzebaby bezpośredniego pomiaru tej prędkości, aby ją można było porównać z prędkością w powyżej wskazany sposób wyliczoną. Dawniejsze doświadczenia J. J. Thomsona dały wyniki sto razy za małe; ale też były one obciążone rozlicznemi błędami. Kwestję tę podjął ponownie Wiechert, i do doświadczenia swego wprowadził drgania hertzowskie: otrzymane rezultaty zgadzają się z teorją przynajmniej co do rzędu wielkości; wielce byłoby ciekawe ponowne przeprowadzenie tych doświadczeń. Jakkolwiekbądź, teorja undulacyjna zdaje się bezsilną, skoro idzie o zdanie sprawy z całokształtu tych faktów.

Te same rachunki, wykonane dla promieni β radu dały jeszcze znaczniejsze prędkości, 100.000, 200.000 kilometrów i więcej jeszcze. Prędkości te przewyższają o wiele wszystkie nam znane. Wprawdzie, jak wiadomo oddawna, światło przebiega 300.000 kilometrów na sekundę; lecz nie jest ono przenoszeniem materji, gdy natomiast, skoro się przyjmuje teorję emisji dla promieni katodowych, istniałyby cząsteczki materjalne istotnie ożywione pomienionemi prędkościami, i wypada zbadać, czy zwykłe prawa Mechaniki jeszcze się do nich dają stosować.

II.

Masa podłużna i masa poprzeczna.

Wiadomo, że prądy elektryczne rodzą zjawiska indukcji w szczególności samoindukcji [»self-induction«]. Gdy prąd wzmaga się, natenczas rozwija się elektrobodźcza siła samoindukcji, przeciwdziałająca temu prądowi; gdy natomiast prąd słabnie, elektrobodźcza siła samoindukcji działa w kierunku podtrzymania prądu. Samoindukcja przeciwstawia się tedy wszelkiej zmianie w napięciu prądu, podobnie jak w Mechanice bezwładność ciała sprzeciwia się wszelkiej zmianie w prędkości. S a m o i n d u k c j a j e s t z a t y m i s t n ą b e z w ł a d n o ś c i ą. Wszystko odbywa się tak, jakgdyby prąd nie mógł krążyć, nie wprawiwszy w ruch otaczającego eteru, i jakgdyby naskutek tego bezwładność tego eteru dążyła do utrzymania stałego napięcia tego prądu. Trzeba przezwyciężyć tę bezwładność, by prąd zaczął krążyć, trzeba również ją przezwyciężyć, by mógł on ustać.

Promień katodowy, który jest deszczem pocisków naładowanych elektrycznością ujemną może być przyrównany do prądu; zapewne, prąd ten różni się, przynajmniej na pierwsze wejrzenie, od zwykłych prądów przewodnictwa, kiedy to materja jest nieruchoma, a elektryczność krąży poprzez materję. Jestto p r ą d p r z e n i e s i e n i a (konwekcyjny), przy którym elektryczność, przylegająca do materjalnego ciałka niesiona jest ruchem tego ciałka. Lecz Rowland dowiódł, że prądy konwekcyjne wywołują te same objawy magnetyczne, co prądy przewodnictwa; muszą one przeto wywoływać te same objawy indukcji.

Albowiem, gdyby było inaczej, gwałciłoby to zasadę zachowania energji; zresztą Crémieu i Pender zastosowali metodę, która b e z p o ś r e d n i o uwidocznia te objawy indukcji.

Jeśli prędkość katodowego ciałka ulegnie zmianie, zmieni się również napięcie odpowiadającego mu prądu; i powstaną zjawiska samoindukcji, zmierzające do sprzeciwiania się tej zmianie. Ciałka te winny tedy posiadać podwójną bezwładność: swą bezwładność oraz własną bezwładność pozorną, pochodzącą od samoindukcji, wywołującej te same objawy. Będą one fedy więc posiadały masę pozorną, składającą się z ich masy rzeczywistej oraz z masy fikcyjnej pochodzenia elektromagnetycznego. Rachunek wskazuje, że fikcyjna ta masa zmienia się z prędkością, i że siła bezwładności, pochodząca od samoindukcji, nie jest jednakowa, gdy prędkość pocisku przyspiesza się lub zwalnia, albo też gdy się odchyla; to samo stosuje się więc do pozornej całkowitej siły bezwładności.

Całkowita pozorna masa nie jest tedy jednakowa, gdy siła rzeczywista, działająca na ciałko, jest równoległa do jego prędkości i zdąża do przyspieszania ruchu, alboteż gdy jest ona prostopadła do tej prędkości i zdąża do zmienienia jej kierunku. Trzeba zatym rozróżniać masę całkowitą podłużną i masę całkowitą poprzeczną. Masy te zależne są zresztą od prędkości. Taki jest wynik prac teoretycznych Abrahama.

Co określa się przy pomiarach, o których mówiliśmy w rozdziale poprzednim, kiedy się mierzy oba odchylenia? Z jednej strony prędkość, z drugiej zaś stosunek ładunku do całkowitej masy poprzecznej. Jakże wobec tego wyodrębnić w tej masie całkowitej masę rzeczywistą i fikcyjną masę elektromagnetyczną? Gdybyśmy mieli jedynie właściwe promienie katodowe, byłby to zamysł niewykonalny; na szczęście przecież posiadamy promienie radu, które, jak widzieliśmy, są o wiele szybsze. Nie wszystkie te promienie są identyczne i nie zachowują się w jednakowy sposób pod działaniem pola elektrycznego i magnetycznego. Doświadczenie okazuje, że odchylenie elektryczne jest funkcją odchylenia magnetycznego, i można, chwytając na czułą kliszę promienie radu, które uległy działaniu obu pól, sfotografować krzywą, przedstawiającą związek między temi obu odchyleniami. Zrobił to Kaufmann i wyprowadził stąd związek między prędkością i stosunkiem ładunku do pozornej całkowitej masy, który to stosunek nazwiemy ε.

Możnaby przypuścić, że istnieje kilka gatunków promieni, z których każdy jest scharakteryzowany przez określoną prędkość, określony ładunek i określoną masę. Lecz hypoteza ta jest mało prawdopodobna; bo i dlaczegóżby wszystkie ciałka o tej samej masie miały przyjmować zawsze tę samą prędkość? Naturalniejsze jest przypuścić, że ładunek oraz r z e c z y w i s t a masa są jednakowe dla wszystkich pocisków, i że różnią się one jedynie swą prędkością. Jeżeli stosunek ε jest funkcją prędkości, to nie dlatego, że masa rzeczywista zmienia się z tą prędkością; lecz ponieważ fikcyjna masa elektromagnetyczna zależy od tej prędkości, pozorna masa całkowita, jedyna dająca się obserwować, musi od niej zależeć, pomimo że masa rzeczywista od niej nie zależy i jest stała.

Rachunki Abrahama dają nam prawo, według którego masa f i k c y j n a zmienia się w funkcji prędkości; doświadczenie Kaufmanna daje prawo zmiany masy c a ł k o w i t e j. Zestawienie tych dwu praw pozwoli tedy określić stosunek masy r z e c z y w i s t e j do masy całkowitej.

Taką jest metoda, którą posługiwał się Kaufmann dla oznaczenia tego stosunku. I otrzymał wynik zgoła niespodziewany: m a s a r z e c z y w i s t a j e s t r ó w n a z e r u.

Dało to pochop do koncepcji całkiem nieoczekiwanych. Rozciągnięto na wszystkie ciała to, czego dowiedziono jedynie dla ciałek katodowych. To, co my nazywamy masą, miałoby być tylko pozorem; wszelka bezwładność miałaby być pochodzenia elektromagnetycznego. Ale w takim razie masa przestałaby być stałą, wzrastałaby z prędkością; przybliżenie stała dla prędkości mniejszych niż 1000 kilometrów na sekundę, masa rosłaby następnie i stawałaby się nieskończoną dla prędkości światła. Masa poprzeczna przestałaby być równa podłużnej: byłyby one jedynie przybliżenie równe dla niezbyt wielkich prędkości. Zasada *B* Mechaniki przestałaby być prawdziwa.

III.

Promienie kanałowe.

Przy obecnym stanie rzeczy wniosek taki może się zdawać przedwczesnym. Czy można stosować do całej materji to, co zostało ustanowione tylko dla tych tak lekkich ciałek, którą są jedynie emanacją materji i, być może, nie są nawet prawdziwą materją? Zanim przecież przystąpimy do tej kwestji, wypada powiedzieć parę słów o innym rodzaju promieni. Mam na myśli promienie kanałowe, *Kanalstrahlen* Goldsteina. Katoda wysyła jednocześnie z promienia katodowemi, naładowanemi elektrycznością ujemną, promienie kanałowe, naładowane elektrycznością dodatnią. Promienie te, nie będąc odpychane przez katod, pozostają naogół w jego sąsiedztwie i tworzą »powłokę *chamois*« którą nie bardzo jest łatwo zauważyć; jeżeli przecież katod jest podziurawiony i jeśli prawie zupełnie zamyka rurkę, promienie kanałowe będą się rozchodziły w tył od katodu, w kierunku przeciwnym niż promienie katodowe, co umożliwi ich zbadanie. W ten sposób powiodło się uwidocznić ich dodatni ładunek i wykazać, że odchylenia elektryczne i magnetyczne zachodzą i tutaj, podobnie jak dla promieni katodowych, lecz są o wiele słabsze.

Rad wysyła również promienie analogiczne do promieni kanałowych i względnie bardzo łatwo pochłanialne, które nazwano promieniami α.

Można, jak w wypadku promieni katodowych, zmierzyć oba odchylenia, i wyprowadzić z nich prędkość oraz stosunek ε. Wyniki są mniej stałe, niż dla promieni katodowych, lecz prędkość jak również stosunek ε są mniejsze; ciałka dodatnie są mniej obarczone ładunkami niż ciałka ujemne; albo też, jeśli zrobić przypuszczenie naturalniejsze, że ładunki są równe i odwrotne co do znaków, ciałka dodatnie są znacznie większe. Ciałka te, z których jedne są naładowane dodatnio, drugie ujemnie, otrzymały nazwę elektronów.

IV.

Teorja Lorentza.

Ale elektrony przejawiają swoje istnienie nietylko w tych promieniach, w których widzimy je ożywione olbrzymiemi prędkościami. Odgrywają one również, jak zobaczymy, bardzo różne od powyższej role, służą ku wytłumaczeniu najważniejszych zjawisk optyki i elektryczności. Świetna synteza, którą pokrótce przedstawimy, jest dziełem Lorentza.

Cała materja jest utworzona z elektronów, noszących olbrzymie ładunki, a jeśli wydaje się nam ona obojętna, to dlatego, że ładunki o przeciwnych znakach tych elektronów wzajem się kompensują. Można sobie np. wyobrazić pewnego rodzaju układ słoneczny, utworzony przez jeden wielki elektron dodatni, dokoła którego grawitują liczne małe planety, które są elektronami ujemnemi, i są przyciągane przez elektryczność o przeciwnym znaku, stanowiącą ładunek elektronu centralnego. Ładunki ujemne tych planet kompensują ładunek dodatni tego Słońca, tak iż suma algiebraiczna wszystkich tych ładunków równa się zeru.

Wszystkie te elektrony kąpią się w eterze. Eter jest wszędzie tożsamy w stosunku do siebie, zakłócenia rozchodzą się według tych samych praw, co światło lub drgania hertzowskie w próżni. Poza elektronami i eterem niema nic. Gdy fala świetlna przenika do części eteru, w której znajduje się duża ilość elektronów, elektrony te zaczynają się poruszać pod wpływem zakłócenia eteru i z kolei oddziaływują na eter. W ten sposób tłumaczyłoby się załamanie, rozpraszanie, podwójne załamanie i pochłanianie. Podobnież, jeżeli elektron zostaje wprawiony w ruch naskutek jakiejkolwiek przyczyny, mąci on eter dokoła siebie i wywołuje fale świetlne, co tłumaczy emisję światła przez ciała żarzące się.

W niektórych ciałach, np. w metalach, mielibyśmy elektrony nieruchome, między któremi krążą elektrony ruchome, korzystające z zupełnej swobody prócz swobody porzucenia tego metalu i przekroczenia powierzchni, która je oddziela od zewnętrznej próżni lub od powietrza lub od jakiegokolwiek innego niemetalicznego ciała. Te ruchome elektrony zachowują się tedy wewnątrz metalicznego ciała tak, jak według kinetycznej teorji gazów cząsteczki gazu wewnątrz naczynia, w którym gaz ten jest zamknięty. Ale pod wpływem różnicy potencjału elektrony ruchome ujemne miałyby dążność do kierowania się w jedną stronę, elektrony ruchome dodatnie — w drugą. To wywoływałoby prądy elektryczne, i dlatego to ciała byłyby przewodnikami. Z drugiej strony prędkości naszych elektronów byłyby tym większe, im wyższą byłaby temperatura, jeżeli przyjmujemy porównanie z teorją kinetyczną gazów, kiedy jeden z tych ruchomych elektronów napotyka powierzchnię metalicznego ciała, której to powierzchni nie może przekroczyć, zostaje on odbity jak kula bilardowa od bandy, i prędkość jego ulega nagłej zmianie kierunku. A elektron, jak zobaczymy poniżej, kiedy zmienia kierunek, staje się źródłem fali świetlnej, i dlatego to gorące metale żarzą się.

W innych ciałach, w dielektrykach i ciałach przezroczystych, elektrony ruchome korzystają z daleko mniejszej swobody. Pozostają one jakgdyby przywiązane do nieruchomych elektronów, które je przyciągają. Im bardziej się od nich oddalają, tym większa jest ta atrakcja, która usiłuje zawrócić je wstecz. Odchylenia ich mogą być przeto tylko niewielkie; nie mogą krążyć lecz jedynie wahać się dokoła swego położenia średniego. Dla tego to powodu ciała te nie są przewodnikami; mają one pozatym być przeważnie przezroczyste oraz załamujące dlatego, że drgania świetlne udzielają się elektronom ruchomym, mogącym dokonywać wahań, i że wynika stąd zakłócenie.

Nie mogę podać tutaj szczegółów rachunku; ograniczę się powiedzeniem, że ta teorja zdaje sprawę ze wszystkich faktów znanych i że pozwala przewidywać fakty nowe, jak np. zjawisko Zeemana.

V.

Konsekwencje mechaniczne.

Możemy teraz rozważyć dwie hypotezy:

1° Elektrony dodatnie posiadają masę rzeczywistą o wiele większą niż ich fikcyjna masa elektromagnetyczna; jedynie elektrony ujemne są pozbawione masy rzeczywistej. Możnaby nawet przypuścić, że prócz elektronów o obu znakach istnieją atomy obojętne, nie posiadające innej masy poza swą masą rzeczywistą. W takim razie Mechanika pozostaje nietknięta; niema potrzeby zmieniać jej praw; masa rzeczywista jest stała; ruchy ulegają poprostu zakłóceniom naskutek objawów samoindukcji, co było i dawniej wiadome; zakłócenia te są zresztą tak nieznaczne, że można ich nie brać w rachubę, z wyjątkiem wypadku elektronów ujemnych, które, nie posiadając masy rzeczywistej, nie są prawdziwą materją;

2°. Ale istnieje i inne stanowisko; można przypuścić, że niema atomów obojętnych, i że elektrony dodatnie, równie jak ujemne, nie posiadają masy rzeczywistej. Natenczas, skoro masa rzeczywista znika, wyraz m a s a traci wszelkie znaczenie, albo też będzie oznaczał fikcyjną masę elektromagnetyczną; w takim razie masa przestanie być stała, m a s a poprzeczna nie będzie równa masie podłużnej, zasady Mechaniki będą obalone.

Przedewszystkim słówko wyjaśnienia. Powiedzieliśmy, że dla tego samego ładunku masa c a ł k o w i t a elektronu dodatniego jest o wiele większa niż masa elektronu ujemnego. Skoro tak, tedy naturalne jest przypuścić, że elektron dodatni posiada prócz swej masy fikcyjnej znaczną masę rzeczywistą; co sprowadziłoby nas z powrotem do pierwszej hypotezy. Lecz można również przypuścić, że masa rzeczywista jest równa zeru zarówno dla jednych jak dla drugich, ale masa fikcyjna elektronu dodatniego jest o wiele większa dlatego, że elektron ten jest o wiele mniejszy. Nie omyliłem się: o wiele mniejszy. Albowiem przy tej hypotezie bezwładność jest pochodzenia wyłącznie elektromagnetycznego; sprowadza się ona do bezwładności eteru; elektrony nie są niczym same przez się; są to poprostu dziury w eterze, dokoła których eter się burzy; im mniejsze są te dziury, tym więcej będzie eteru, tym większą przeto będzie bezwładność eteru.

Jak zdecydować wybór między temi dwiema hypotezami? Czy operując z promieniami kanałowemi tak, jak to zrobił Kaufmann z promieniami β? Jestto niemożliwe; prędkość tych promieni jest o wiele za mała. Czyż zatym każdy będzie musiał się zdecydować według swego temperamentu, konserwatyści pójdą w jedną stronę, zwolennicy rzeczy nowych w drugą? Być może, ale żeby dobrze zrozumieć argumenty nowatorów, trzeba będzie uwzględnić inne jeszcze ich rozważania.

Rozdział II.

Mechanika i Optyka.

I.

Aberacja.

Wiadomo, na czym polega zjawisko aberacji, odkryte przez Bradleya. Światło, wysłane przez gwiazdę, potrzebuje pewnego czasu na przebieżenie lunety; w ciągu tego czasu luneta, uniesiona ruchem Ziemi, zmieniła swe miejsce. Gdyby tedy luneta była wycelowana w prawdziwym kierunku gwiazdy, obraz utworzyłby się w punkcie, w którym znajdowało się skrzyżowanie nici siatki, kiedy światło dosięgło objektywu, i skrzyżowanie to nie znajdowałoby się już w tym samym punkcie, kiedy światło dosięgło płaszczyzny siatki. Zdawałoby się tedy, że trzeba cofnąć lunetę, żeby sprowadzić znowu obraz na skrzyżowanie nici. Wynika stąd, że astronom nie nastawi lunety w kierunku prędkości bezwzględnej gwiazdy tj. na prawdziwe położenie gwiazdy, lecz w kierunku prędkości względnej światła w stosunku do Ziemi, to znaczy na tak zwane położenie pozorne gwiazdy.

Prędkość światła jest znana; możnaby tedy mniemać, że jesteśmy w stanie wyliczyć prędkość bezwzględną Ziemi. (Objaśnię poniżej, co rozumiem przez wyrażenie »bezwzględną«). Bynajmniej tak nie jest: znamy wprawdzie położenie pozorne gwiazdy, którą obserwujemy; ale nie znamy jej położenia prawdziwego; prędkość światła znamy jedynie ze względu na jej wielkość nie zaś na kierunek.

Gdyby więc ruch bezwzględny Ziemi był prostolinijny i jednostajny, nie podejrzewalibyśmy wcale zjawiska aberacji; lecz prędkość tego ruchu jest zmienna; składa się ona z dwu części: prędkości układu słonecznego, którego ruch jest prostolinijny i jednostajny; prędkości Ziemi w stosunku do Słońca, która jest zmienna. Gdyby istniała jedynie prędkość układu słonecznego tj. owa część stała, obserwowany kierunek byłby niezmienny. Położenie, któreby się wówczas obserwowało, nazywa się średnim położeniem pozornym gwiazd.

Skoro natomiast uwzględnimy obie części prędkości Ziemi, będziemy mieli pozorne położenie obecne, które zakreśla małą elipsę dokoła średniego położenia pozornego, i tę to elipsę obserwuje się.

Pomijając ilości bardzo małe, zobaczymy poniżej, że rozmiary tej elipsy zależą jedynie od stosunku prędkości Ziemi w odniesieniu do Słońca do prędkości światła, tak iż wpływa tu jedynie prędkość względna Ziemi w odniesieniu do Słońca.

Baczność — wszelako. Wniosek ten nie jest całkowicie ścisły, jeno przybliżony; posuńmy przybliżenie nieco dalej. Rozmiary elipsy zależą przecież od prędkości bezwzględnej Ziemi. Porównajmy wielkie osi elipsy w wypadku poszczególnych gwiazd: dostarczy nam to, przynajmniej w teorji, sposobu oznaczenia tej prędkości bezwzględnej.

Byłoby to, być może, mniej rażące, niż się wydaje napozór; albowiem prędkość bezwzględna, o której jest tu mowa, nie jest prędkością w stosunku do jakiegoś próżnego absolutu, lecz w stosunku do eteru, który mocą definicji uważamy za znajdujący się w stanie bezwzględnego spoczynku.

Zresztą sposób to czysto teoretyczny. Jakoż aberacja jest bardzo mała, możliwe zmiany w rozmiarach elipsy aberacji są jeszcze o wiele mniejsze, i muszą być uważane, jeśli uważać aberację za wielkość pierwszego rzędu — za wielkości rzędu drugiego: około jednej tysiącznej sekundy; pozostają one przeto niepostrzegalnemi dla naszych narzędzi. Wreszcie zobaczymy później, dlaczego teorji powyższej nie można przyjąć, i dlaczego nie moglibyśmy oznaczyć tej wielkości bezwzględnej, nawet gdyby nasze narzędzia były tysiąckroć dokładniejsze!

Możnaby pomyśleć o innym sposobie, o którym też istotnie pomyślano. Prędkość światła w wodzie nie jest taka sama jak w powietrzu; czy nie możnaby porównać dwu położeń pozornych jednej i tej samej gwiazdy, oglądanej kolejno poprzez lunetę, zapełnioną powietrzem i zapełnioną wodą? Eksperyment ten dał wyniki ujemne; w prawach pozornych odbicia i załamania niema zmian, wywołanych przez ruch Ziemi. Zjawisko to można wytłumaczyć w sposób dwojaki.

1° Możnaby przypuścić, że eter nie jest w spoczynku, że unoszą go ze sobą poruszające się ciała. Nie byłoby w takim razie dziwne, że zjawisk załamania nie zakłóca ruch Ziemi, boć wszystko, pryzmy, lunety, eter, unoszone jest łącznie jednym i tym samym ruchem. Aberacja zaś tłumaczyłaby się pewnego rodzaju załamaniem, tworzącym się na powierzchni, która oddziela eter w spoczynku, zapełniający przestrzenie międzygwiezdne, od eteru, unoszonego ruchem Ziemi. Na tej właśnie hypotezie (całkowitego unoszenia eteru) oparta jest teorja Hertza, dotycząca Elektrodynamiki ciał w ruchu.

2° Fresnel natomiast przypuszcza, że eter znajduje się w absolutnym spoczynku w próżni, w spoczynku prawie absolutnym w powietrzu, i że częściowo go unoszą środowiska załamujące. Lorentz nadał tej teorji postać bardziej zadawalającą. Według niego eter jest w stanie spoczynku, w ruchu są jedynie elektrony; w próżni, gdzie wchodzi w grę jedynie eter, w powietrzu, gdzie wchodzi on w grę prawie jedynie, unoszenie eteru jest równe zeru lub prawie równe zeru; w ośrodkach załamujących, w których zakłócenie wywołują jednocześnie drgania eteru i drgania elektronów, wprawionych w ruch przez wstrząśnienia eteru, undulacje są częściowo unoszone.

O wyborze między temi dwu hypotezami pozwala stanowić eksperyment Fizeau, który zapomocą pomiarów frendzli interferencyjnych porównał prędkość światła w spoczywającym lub poruszającym się powietrzu z prędkością światła w spoczywającej lub poruszającej się wodzie. Doświadczenia te potwierdziły hypotezę fresnelowską częściowego unoszenia. Ponownie je przeprowadził z takim samym wynikiem Michelson. Teorję Hertza należy przeto odrzucić.

II.

Zasada względności.

Ale jeżeli ruch Ziemi nie unosi ze sobą eteru, to czy jest możliwe wyodrębnienie zapomocą zjawisk optycznych prędkości bezwzględnej Ziemi, czyli raczej jej prędkości w stosunku do nieruchomego eteru? Doświadczenie dało odpowiedź przeczącą, pomimo że zmieniano metody eksperymentowania na wszelkie możliwe sposoby. Jakikolwiek będzie się stosowało sposób, nie wykryje się nic prócz prędkości względnych, to znaczy prędkości pewnych ciał materjalnych w odniesieniu do innych ciał materjalnych. Istotnie, jeżeli źródło światła i narzędzia obserwacji znajdują się na Ziemi i uczestniczą w jej ruchu, wyniki eksperymentalne są zawsze te same, jakiekolwiek było położenie aparatu względem kierunku ruchu Ziemi po jej orbicie. Jeżeli występuje aberacja, to dlatego, że źródło, którym jest gwiazda, jest w ruchu w stosunku do obserwatora.

Dotychczasowe hypotezy tłumaczą doskonale ten ogólny wynik, jeżeli pominąć ilości bardzo małe, rzędu kwadratu aberacji. Wytłumaczenie to oparte jest na pojęciu czasu lokalnego, które postaram się wyjaśnić, a które wprowadzone zostało przez Lorentza. Niechaj z dwu obserwatorów, którzy chcą uregulować swe zegarki według metody sygnałów optycznych, jeden znajduje się w *A*, drugi w *B*. Umawiają się oni, że *B* da *A* sygnał, gdy jego zegarek wskazywać będzie określoną godzinę, a *A* nastawi swój zegarek na tę godzinę, skoro zauważy sygnał. Gdyby operacja polegała tylko na tym, wynikałby błąd systematyczny, albowiem światło potrzebuje pewnego czasu *t* dla przejścia od *B* do *A*, naskutek czego zegarek *A* spóźniać się będzie o *t* w stosunku do zegarka *B*. Błąd ten łatwo jest skorygować. Wystarczy skrzyżować sygnały. *A* powinien zkolei posłać sygnały *B*, i po tym nowym uregulowaniu zegarek *B* będzie się spóźniał o *t* w stosunku do zegarka *A*. Wystarczy natenczas wziąć średnią arytmetyczną między obu godzinami.

Ale ten sposób operowania przypuszcza, że światło tyleż czasu potrzebuje, żeby przejść od *A* do *B*, co od *B* do *A*. Jestto słuszne, o ile obserwatorzy pozostają nieruchomi; tak nie jest, jeśli są oni niesieni wspólnym ruchem postępowym, ponieważ w takim razie *A* np. iść będzie naprzeciw światłu, idącemu od *B*, gdy *B* uciekać będzie od światła, idącego od *A*. Jeżeli zatym obserwatorzy są niesieni wspólnym ruchem, nie zdając sobie z tego sprawy, regulacja ich zegarków będzie wadliwa; zegarki ich nie będą wskazywały tego samego czasu; każdy będzie wskazywał czas lokalny, odpowiadający punktowi, w którym się znajduje.

Nasi obserwatorzy nie będą mieli żadnego sposobu zauważenia tego, jeżeli nieruchomy eter może im przekazywać jedynie sygnały świetlne, i jeżeli inne sygnały, które mogliby sobie posyłać, są przekazywane przez środowiska, unoszone łącznie z niemi ich ruchem postępowym. Obserwowane przez każdego z nich zjawisko będzie opóźnione albo przedwczesne; nie będzie ono zachodziło w tej samej chwili, w jakiejby zachodziło, gdyby nie było owego ruchu postępowego; ponieważ wszakże będzie się je obserwowało ze źle uregulowanym zegarkiem, nie zauważy się tego, i pozory nie będą zmienione.

Wynika stąd, że kompensację łatwo jest wytłumaczyć, dopóki pomija się kwadrat aberacji, a doświadczenia były przez długi czas zbyt mało dokładne, iżby wypadało brać go w rachubę. Aliści pewnego dnia Michelson wpadł na pomysł metody o wiele subtelniejszej: wywołał on interferencję promieni, które po odbiciu przez zwierciadła przebiegły różne odległości; ponieważ każda z odległości niewiele się różniła od jednego metra, i frendzle interferencyjne pozwalały mierzyć różnice, wynoszące ułamek jednej tysiącznej milimetra, nie można już było pomijać kwadratu aberacji — a jednak wyniki były znowu ujemne. Teorja wymagała tedy uzupełnienia — i została też uzupełniona hypotezą Lorentza i Fitz-Geralda.

Fizycy ci przypuszczają, że wszystkie ciała, niesione ruchem postępowym, ulegają skurczeniu w kierunku tego ruchu, podczas gdy ich wymiary prostopadłe do tego ruchu pozostają niezmienione. Skurczenie to jest takie same dla wszystkich ciał; jest ono bardzo małe, dla prędkości takiej, jak prędkość Ziemi, wynosi około jednej dwieście miljonowej. Nasze narzędzia miernicze nie mogłyby zresztą ujawnić tego skurczenia, nawet gdyby były o wiele dokładniejsze; albowiem metry, zapomocą których mierzymy, ulegają temu samemu skurczeniu, co przedmioty mierzone. Jeżeli pewne ciało przylega ściśle do metra, kiedy zarówno ciało a więc i metr są zwrócone w kierunku ruchu Ziemi, nie przestanie ono przylegać ściśle do metra w innym położeniu, i to właśnie dlatego, że zmiana jest taka sama dla obu ciał. Ale inaczej jest, gdy mierzymy daną długość nie metrem lecz czasem, jakiego wymaga światło, by ją przebiec — i tak właśnie postępował Michelson.

Ciało, które było kuliste w stanie spoczynku, przyjmie tedy kształt spłaszczonej elipsoidy obrotowej, kiedy będzie w ruchu; lecz obserwator będzie je wciąż uważał za kuliste, ponieważ sam uległ analogicznemu odkształceniu łącznie z wszystkiemi przedmiotami, które odgrywają dlań rolę wiech przy mierzeniu. Natomiast powierzchnie fal świetlnych, które pozostały ściśle kulistemi, będą mu się wydawały wydłużonemi elipsoidami.

Cóż będzie wówczas? Niechaj obserwatora i źródło światła niesie razem ruch postępowy: powierzchnie faliste, pochodzące z tego źródła, będą to kule, których środkami będą kolejne położenia źródła; odległość takiego środka od obecnego położenia źródła będzie proporcjonalna do czasu, jaki upłynął od chwili wypływu światła, to jest do promienia kuli. Wszystkie te kule są tedy homotetyczne jedna do drugiej w stosunku do obecnego położenia źródła, które nazwiemy S. Ale naszemu obserwatorowi wszystkie te kule wydadzą się naskutek skurczenia wydłużonemi elipsoidami, i wszystkie te elipsoidy będą również homotetyczne w stosunku do punktu S; mimośród wszystkich tych elipsoid jest jednakowy i zależy jedynie od prędkości Ziemi. P r a w o k u r c z e n i a s i ę o b i e r z e m y w t a k i s p o s ó b, ż e b y p u n k t S z n a j d o w a ł s i ę w o g n i s k u p o ł u d n i k o w e g o c i ę c i a e l i p s o i d y.

Tym razem kompensacja będzie c a ł k o w i c i e ś c i s ł ą, i to tłumaczy doświadczenie Michelsona.

Mówiłem wyżej, że według teorji zwykłych, obserwacje aberacji astronomicznej mogłyby nam dać prędkość bezwzględną Ziemi, gdyby narzędzia nasze były tysiąc razy dokładniejsze. Muszę wprowadzić zmianę do tego wniosku. Zapewne, kąty zaobserwowane uległyby zmianie naskutek działania tej prędkości bezwzględnej, ale koła z podziałkami, jakiemi się posługujemy dla pomiaru kątów, zostałyby odkształcone przez ruch postępowy: stałyby się elipsami; wynikłby stąd błąd dla zmierzonego kąta, i t e n d r u g i b ł ą d s k o m p e n s o w a ł b y ś c i ś l e p i e r w s z y.

Ta hypoteza Lorentza i Fitz-Geralda wydaje się zrazu wielce dziwną; w tej chwili nie możemy powiedzieć na jej korzyść nic ponadto, że jest ona poprostu bezpośrednim przekładem na język teorji wyniku eksperymentu Michelsona, jeśli się d e f i n i u j e długości przez czasy, jakich światło potrzebuje, aby je przebyć.

Jakkolwiekbądź, niepodobna oprzeć się wrażeniu, że zasada względności jest ogólnym prawem Przyrody, że nigdy zapomocą żadnych dających się pomyśleć środków nie będzie można dotrzeć do innych prędkości prócz prędkości względnych, a rozumiem przez to nietylko prędkości ciał w stosunku do eteru, lecz prędkości jednych ciał w stosunku do drugich. Zgodność tak wielu rozmaitych doświadczeń sprawia, że niepodobna ujść pokusie uważania tej zasady względności za posiadającą wartość tego samego np. rzędu, co wartość zasady równoważności. W każdym razie wypada zobaczyć, do jakich konsekwencji doprowadziłby nas taki pogląd, i poddać następnie te konsekwencje kontroli doświadczenia.

III.

Zasada oddziaływania.

Zobaczmy, co się staje w teorji Lorentza z zasadą równości działania i oddziaływania. Elektron A zostaje wprawiony w ruch dzięki jakiejkolwiek przyczynie; wywołuje on zakłócenie w eterze; po upływie pewnego czasu zakłócenie to dosięga innego elektronu B, który zostaje wytrącony ze swego położenia równowagi. Przy takim przebiegu rzeczy nie może być równości między działaniem i oddziaływaniem, przynajmniej o tyle, o ile się nie bierze w rachubę eteru lecz wyłącznie elektrony, które jedynie są dostępne dla obserwacji, boć materja nasza składa się z elektronów.

Jakoż, elektron A wytrącił elektron B z jego położenia; gdyby nawet elektron B zkolei oddziałał na A, oddziaływanie to mogłoby być równe działaniu, lecz w żadnym razie nie mogłoby być jednoczesnym, bo ruch elektronu B może się rozpocząć dopiero po upływie pewnego czasu niezbędnego dla przejścia impulsu poprzez eter. Ściślejszy rachunek, zastosowany do tego zagadnienia, daje następujący wynik: Niechaj ekscytator Hertza będzie umieszczony w ognisku parabolicznego zwierciadła, do którego jest przymocowany mechanicznie; ekscytator ten wysyła fale elektromagnetyczne, i zwierciadło odsyła wszystkie te fale w jednym i tym samym kierunku; ekscytator promieniować więc będzie energję w określonym kierunku. Otóż rachunek wskazuje, że ekscytator cofnie się, jak armata, która wypuściła pocisk. W wypadku armaty cofnięcie jest naturalnym wynikiem równości działania i oddziaływania. Armata cofa się, ponieważ pocisk, na który ona wywarła działanie — oddziaływa na nią.

Ale tutaj jest inaczej. To, co posłaliśmy w dal, nie jest pociskiem materjalnym: jestto energja, a energja nie ma masy. A zamiast ekscytatora mogliśmy byli wziąć poprostu lampę z reflektorem,ześrodkowującym jej promienie w jednym kierunku.

Wprawdzie, jeżeli energja, wysłana przez ekscytator lub lampę, napotka przedmiot materjalny, przedmiot ten ulegnie mechanicznemu pchnięciu, zupełnie tak, jak gdyby dosięgnął go prawdziwy pocisk, i pchnięcie to będzie równe cofnięciu się ekscytatora lub lampy, jeśli nic z energji nie zginęło w drodze, i jeśli przedmiot pochłania tę energję w całości. Zdaje się to nasuwać myśl, że i tutaj zachodzi kompensacja działania i oddziaływania. Lecz kompensacja ta, nawet jeżeli jest zupełna, jest zawsze spóźniona. Nie zajdzie ona nigdy, jeśli światło po opuszczeniu swego źródła błąka się po przestrzeniach międzygwiezdnych, nie zaczepiając nigdzie o ciało materjalne; będzie niezupełną, jeśli ciało, które napotka, nie jest całkowicie pochłaniającym.

Czy te działania mechaniczne są zbyt małe, aby je można było zmierzyć, czy też są one dostępne dla doświadczenia? Działania te są poprostu identyczne z działaniami ciśnień Maxwella-Bartoliego; Maxwell przewidział był te ciśnienia zapomocą rachunków, odnoszących się do Elektrostatyki i Magnetyzmu; Bartoli doszedł do tego samego wyniku drogą rozważań z dziedziny Termodynamiki.

W ten sposób tłumaczy się warkocze komet. Małe cząstki odrywają się od jądra komety; uderza w nie światło słoneczne, które je odpycha na podobieństwo deszczu pocisków, idących od Słońca. Masa tych cząstek jest tak mała, że odpychanie to przeważa atrakcję newtonowską; utworzą one przeto warkocze, oddalając się od Słońca.

Bezpośrednie doświadczalne sprawdzenie nie było łatwe do dokonania. Pierwsza próba doprowadziła do skonstruowania radiometru. Lecz przyrząd ten obraca się w stronę przeciwną do tej, jaką wskazuje teorja, i odkryte później wytłumaczenie jego obrotu jest zupełnie inne. Wreszcie dopięto celu przez osiągnięcie doskonalszej próżni oraz przez niezaczernienie jednej powierzchni skrzydeł i skierowanie pęku światła na jedną z powierzchni. Objawy radiometryczne i inne przyczyny perturbujące ruguje się zapomocą szeregu drobiazgowych zabiegów, i otrzymuje się odchylenie bardzo małe ale podobno odpowiadające teorji.

Zarówno teorja Hertza, o której mówiliśmy wyżej, jak i teorja Lorentza przewidują te same objawy ciśnienia Maxwella-Bartoliego. Ale przecież zachodzi różnica. Przypuśćmy, że energja w postaci np. światła idzie od źródła światła ku jakiemukolwiek ciału skroś ośrodek przezroczysty. Ciśnienie Maxwella-Bartoliego będzie działało nietylko na źródło wysyłające i na oświetlane ciało odbierające, lecz również na materję ośrodka przezroczystego, przez który przechodzi. W chwili, gdy fala świetlna dosięgnie nowej strefy tego ośrodka, ciśnienie popchnie naprzód zapełniającą ją materję i cofnie ją znowu wtył, gdy fala opuści tę strefę. W ten sposób cofnięcie się źródła ma za odpowiednik ruch naprzód materji przezroczystej, stykającej się z tym źródłem; po chwili cofnięcie się tej samej materji ma za odpowiednik ruch naprzód materji przezroczystej, znajdującej się nieco dalej, itd.

Czy wszakże kompensacja jest zupełna? Czy działanie ciśnienia Maxwella-Bartoliego na materję przezroczystego ośrodka jest równe jej oddziaływaniu na źródło światła, i to niezależnie od tego, jaka jest ta materja? Czy może działanie to jest tym mniejsze, im mniej załamujący i bardziej rozrzedzony jest ośrodek, i w próżni staje się równe zeru? Jeśli przyjąć teorję Hertza, która uważa materję za związaną mechanicznie z eterem, tak iż eter jest całkowicie unoszony ruchem materji, tedy na pierwsze pytanie trzeba dać odpowiedź twierdzącą, na drugie — przeczącą.

W takim razie zachodziłaby doskonała kompensacja, jak tego wymaga zasada równości działania i oddziaływania, nawet w powietrzu, nawet w próżni międzyplanetarnej, w której wystarczyłoby przypuścić istnienie pozostałości materji bodaj najrzadszej. Jeśliby natomiast przyjąć teorję Lorentza, tedy kompensacja byłaby zawsze niedoskonałą, byłaby niepostrzegalna w powietrzu i równa zeru w próżni.

Lecz widzieliśmy wyżej, że doświadczenie Fizeau nie pozwala na zachowanie teorji Hertza; trzeba zatym przyjąć teorję Lorentza a w konsekwencji zrzec się zasady oddziaływania.

IV.

Konsekwencje zasady względności.

Widzieliśmy poprzednio, jakie racje każą uważać zasadę względności za ogólne prawo Przyrody. Zobaczymy, do jakich konsekwencji doprowadziłaby nas ta zasada, gdybyśmy ją uważali za ostatecznie dowiedzioną.

Przedewszystkim zmusza nas ona do uogólnienia hypotezy Lorentza i Fitz-Geralda o kurczeniu się wszystkich ciał w kierunku przeniesienia. W szczególności trzeba będzie rozciągnąć tę hypotezę na same elektrony. Abraham uważał elektrony za kuliste i nieodkształcalne; my będziemy musieli przyjąć, że elektrony, kuliste w stanie spoczynku, ulegają kurczeniu się Lorentza, skoro są w ruchu i przybierają wówczas postać spłaszczonych elipsoid.

To odkształcenie elektronów wpłynie na ich własności mechaniczne. Istotnie, powiedziałem, że przenoszenie się tych naładowanych elektronów jest prawdziwym prądem konwekcyjnym, i pozorna ich bezwładność pochodzi od samoindukcji tego prądu: wyłącznie w stosunku do elektronów ujemnych; właściwie nie wiadomo, czy wyłącznie, gdyż nie wiemy jeszcze, jak się rzeczy mają z elektronami dodatniemi. Otóż odkształcenie elektronów, które zależy od ich prędkości, zmieni rozkład elektryczności na ich powierzchni, a zatym i napięcie prądu konwekcyjnego, przez nie wywoływanego, a zatym i prawa, według których samoindukcja tego prądu będzie się zmieniała w funkcji prędkości.

Natenczas kompensacja będzie doskonała i będzie odpowiadała zasadzie względności, a to pod dwoma warunkami:

1° Że elektrony dodatnie nie posiadają masy rzeczywistej lecz jedynie fikcyjną masę elektromagnetyczną; albo przynajmniej, że rzeczywista ich masa, jeżeli istnieje, nie jest stała i zmienia się z prędkością według tych samych praw, co ich masa fikcyjna;

2° Że wszystkie siły są pochodzenia elektromagnetycznego albo przynajmniej, że zmieniają się one z prędkością, według tych samych praw, co siły pochodzenia elektromagnetycznego.

Autorem tej doniosłej syntezy jest również Lorentz; zatrzymajmy się chwilę nad nią i zobaczmy, co z niej wynika. Nasamprzód, niema już materji, skoro elektrony dodatnie nie posiadają masy rzeczywistej a przynajmniej stałej masy rzeczywistej. Obecne zasady naszej Mechaniki, oparte na stałości masy, muszą tedy ulec zmianie.

Następnie trzeba poszukać wytłumaczenia elektromagnetycznego wszystkich znanych sił, w szczególności grawitacji, a przynajmniej zmienić prawo grawitacji tak, iżby siła ta zmieniała się z prędkością przynajmniej w taki sam sposób, jak siły elektromagnetyczne. Do punktu tego jeszcze wrócimy.

Wszystko to robi zrazu wrażenie czegoś sztucznego. Zwłaszcza owo odkształcenie elektronów wydaje się wielce hypotetyczne. Ale można rzecz przedstawić inaczej, nie kładąc tej hypotezy odkształcenia u podstawy rozumowania. Uważajmy elektrony za punkty materjalne, i zapytajmy się, jak powinna się zmieniać ich masa w funkcji prędkości, aby nie nadwerężać zasady względności. Albo jeszcze inaczej, zapytajmy się, jakie powinno być ich przyspieszenie pod wpływem pola elektrycznego lub magnetycznego, aby zasada ta nie była gwałcona, i aby, przy bardzo niewielkiej prędkości, otrzymać znowu prawa zwykłe. Okaże się, że zmiany tej masy lub tych przyspieszeń muszą się odbywać tak, jak gdyby elektron ulegał odkształceniu Lorentza.

V.

Eksperyment Kaufmanna.

Stoimy tedy wobec dwu teorji: według jednej, teorji Abrahama, elektrony są nieodkształcalne, według drugiej ulegają one odkształceniu Lorentza. W obu wypadkach masa ich rośnie z prędkością i staje się nieskończona, gdy prędkość ta dosięga prędkości światła; lecz prawo zmienności jest różne. Metoda, zastosowana przez Kaufmanna w celu ujawnienia prawa zmienności masy, powinna zatym, jak się zdaje, dać nam sposób doświadczalny zdecydowania między temi dwu teorjami.

Niestety pierwsze jego eksperymenty nie były na to dość dokładne; toteż uważał on za konieczne podjąć je znowu z większemi ostrożnościami, mierząc z wielką starannością napięcie pól. W nowej postaci przyznały one słuszność teorji Abrahama. Zasada względności nie miałaby więc wartości zasady tak ścisłej, jaką jej się przypisywało; nie byłoby żadnej racji mniemać, że elektrony dodatnie są pozbawione masy rzeczywistej tak, jak elektrony ujemne.

Jednakowoż, zanim ostatecznie uznamy ten wniosek, potrzeba nieco zastanowienia. Kwestja jest tak doniosła, że byłoby pożądane, aby doświadczenie Kaufmanna przeprowadził raz jeszcze inny eksperymentator [1]). Na nieszczęście doświadczenie to jest bardzo subtelne, i przeprowadzić je skutecznie potrafi jedynie fizyk tak zręczny, jak Kaufmann. Za-

---

[1]) W chwili oddawania książki pod prasę, dowiadujemy się, że Bucherer podjął znowu ten eksperyment, otaczając go nowemi ostrożnościami, i że otrzymał wbrew Kaufmannowi, rezultaty, potwierdzające poglądy Lorentza. (Przyp. aut. z końca r. 1908-go).

rządzone były wszelkie niezbędne ostrożności, i niewiadomo, jakiby można wysunąć zarzut.

Na jeden przecież punkt chciałbym skierować uwagę: mianowicie na pomiar pola elektrostatycznego, od którego to pomiaru wszystko zależy. Pole to powstało między dwiema zbrojami kondensatora; między temi zbrojami trzeba było zrobić możliwie doskonałą próżnię, aby izolacja była zupełna. Zmierzono wówczas różnicę potencjału obu zbroi i otrzymano pole, dzieląc tę różnicę przez odległość zbroi. Przypuszcza się przy tym, że pole jest jednostajne; czyż jest-to pewne? Czy nie jest możliwe, że zachodzi raptowny spadek potencjału w sąsiedztwie jednej ze zbroi, np. zbroi ujemnej? Może zachodzić różnica potencjału przy zetknięciu metalu z próżnią, i możliwe jest, że różnica ta nie jest taka sama ze strony ujemnej i ze strony dodatniej; naprowadzają mnie na to przypuszczenie objawy klapy elektrycznej między rtęcią a próżnią. Jakkolwiek małe byłoby prawdopodobieństwo, że jest tak, zdaje się, że należałoby się z tym liczyć.

VI.

Zasada bezwładności.

W nowej Dynamice zasada bezwładności pozostaje prawdziwa, to znaczy, że elektron izolowany będzie posiadał ruch prostolinijny i jednostajny. Przynajmniej taki jest pogląd ogółu fizyków; wszelako Lindemann wyraził wątpliwości, czy zapatrywanie to jest słuszne; nie chcę wziąć udziału w tej dyskusji, której nie mogę tu wyłożyć dla jej dużej trudności. W każdym razie wystarczyłoby wprowadzić do teorji nieznaczne modyfikacje, aby ją zabezpieczyć od zarzutów Lindemanna.

Wiadomo, że ciało, pogrążone w płynie, uczuwa przy ruchu znaczny opór, a to dlatego, że nasze płyny są lepkie; w płynie idealnym, doskonale pozbawionym lepkości, ciało ciągnęłoby za sobą jakgdyby ruchliwy ciekły ogon w rodzaju bruzdy. Na początku ruchu potrzebaby było dużego wysiłku, żeby je ruszyć z miejsca, gdyż trzebaby wstrząsnąć nietylko samo ciało, lecz i ciecz, która ma utworzyć bruzdę. Skoro przecież ruchby się rozpoczął, trwałby on bez oporu, ponieważ ciało, posuwając się naprzód, przenosiłoby poprostu ze sobą zakłócanie cieczy bez zwiększania całkowitej siły żywej tej cieczy. Wszystko odbywałoby się tedy tak, jakgdyby jego bezwładność była zwiększona. Elektron, posuwający się w eterze, zachowywałby się w taki sam sposób: dokoła niego eter byłby wzburzony, lecz zakłócenie to towarzyszyłoby ciału w jego ruchu; naskutek tego dla obserwatora, unoszonego wraz z elektronem, pola elektryczne i magnetyczne, które towarzyszą temu elektronowi, zdawałyby się niezmiennemi, i mogłyby ulec zmianie jedynie naskutek zmiany w prędkości elektronu. Niezbędnyby tedy był wysiłek, żeby wprawić elektron w ruch, bo trzebaby było stworzyć energję tych pól; natomiast, skoroby się ruch już rozpoczął, nie potrzebaby już żadnego wysiłku, aby go utrzymać, gdyż wystarcza, aby stworzona energja przenosiła się poprostu za elektronem, jak bruzda. Energja ta może zatym jedynie zwiększyć bezwładność elektronu, jak burzenie się cieczy zwiększa bezwładność ciała, zanurzonego w doskonałym płynie. A nawet elektrony, przynajmniej ujemne, nie posiadają innej bezwładności jak ta.

W hypotezie Lorentza siła żywa, która jest identyczna z energją eteru, nie jest proporcjonalna do v^2. Zapewne, jeżeli v jest bardzo małe, siła żywa jest prawie ściśle proporcjonalna do v^2, ilość ruchu prawie ściśle proporcjonalna do v, obie masy prawie ściśle stałe i równe sobie. Kiedy wszakże prędkość zdąża do prędkości światła, siła żywa, ilość ruchu i obydwie masy rosną ponad wszelkie granice.

W hypotezie Abrahama wzory są nieco bardziej skomplikowane; lecz w istotnych rysach powyższe twierdzenia są i tutaj prawdziwe.

Tak, masa, ilość ruchu, siła żywa stają się nieskończone, kiedy prędkość jest równa prędkości światła. Wynika stąd, że żadne ciało nie osiągnie nigdy żadnemi środkami prędkości większej niż prędkość światła. W rzeczy samej, w miarę wzrostu prędkości rośnie jego masa, tak iż jego bezwładność przeciwstawia każdemu nowemu przyrostowi prędkości coraz większy opór.

Nasuwa to następującą kwestję: przyjmijmy zasadę względności; znajdujący się w ruchu obserwator nie powinien móc zauważyć własnego swego ruchu. Otóż jeżeli żadne ciało w bezwzględnym swym ruchu nie może przekroczyć prędkości światła, lecz może się do niej dowolnie zbliżyć, tedy musi to się stosować również do względnego ruchu tego ciała w odniesieniu do naszego obserwatora. Zjawia się przeto pokusa rozumowania tak oto: Obserwator może dosięgnąć prędkości 200.000 kilometrów; ciało w względnym ruchu swym w odniesieniu do obserwatora może dosięgnąć tej samej prędkości; wobec tego jego prędkość bezwzględna wyniesie 400.000 kilometrów, co jest niemożliwe, gdyż jestto cyfra większa od prędkości światła. Jestto jedynie pozór, który się rozwiewa, skoro się uwzględni sposób, w jaki Lorentz oznacza czasy lokalne.

VII.

Fala przyspieszenia.

Elektron w ruchu wywołuje w otaczającym go eterze perturbację; jeśli ruch jego jest prostolinijny i jednostajny, perturbacja ta sprowadza się jedynie do bruzdy, o której mówiliśmy poprzednio. Inaczej jest, gdy ruch jest krzywolinijny i niejednostajny. Zakłócenie można wówczas rozpatrywać, jako złożone z dwu innych zakłóceń, które Langevin nazwał falą prędkości i falą przyspieszenia.

Fala prędkości to właśnie owa bruzda, która powstaje przy ruchu jednostajnym.

Fala przyspieszenia natomiast jest zakłóceniem zupełnie analogicznym do fal świetlnych, które wychodzi od elektronu w chwili, gdy ten otrzymuje przyspieszenie i następnie rozchodzi się kolejnemi kulistemi falami z prędkością światła.

Stąd wniosek: w ruchu prostolinijnym i jednostajnym energja zachowuje się całkowicie; lecz skoro tylko jest przyspieszenie, zachodzi strata energji, która się rozprasza w postaci fal świetlnych i idzie w nieskończoność skroś eter.

Wszelako, skutków tej fali przyspieszenia, w szczególności odpowiadającej jej straty energji, w większości wypadków można nie brać w rachubę, i to nietylko w Mechanice zwykłej i w ruchach ciał niebieskich, lecz nawet w promieniach radu, kiedy prędkość jest bardzo duża, lecz nie przyspieszenie. Można się wówczas ograniczyć zastosowaniem praw Mechaniki i napisać, że siła jest równa iloczynowi masy przez przyspieszenie, przyczym jednak masa ta zmienia się z prędkością według wyżej wyłożonych praw. Mówi się wówczas, że ruch jest p r a w i e - s t a t e c z n y [quasi-stationnaire].

Inaczej byłoby we wszystkich wypadkach, kiedy przyspieszenie jest duże; główne z tych wypadków są następujące: 1⁰ W żarzących się gazach niektóre elektrony nabierają ruchu drgającego o bardzo wielkiej częstości drgań; odchylenia są bardzo małe, prędkości są skończone, przyspieszenia bardzo wielkie: energja udziela się wówczas eterowi, i dlatego to gazy te wypromieniowują światło o takim samym perjodzie, co oscylacje eteru; 2⁰ Odwrotnie, kiedy gaz otrzymuje światło, te same elektrony zostają wprawione w drgania ze znacznemi przyspieszeniami i pochłaniają światło; 3⁰ W ekscytatorze Hertza elektrony, krążące w masie metalicznej, ulegają w chwili wyładowania nagłemu przyspieszeniu i nabierają następnie ruchu drgającego o wysokiej częstości. Skutkiem tego jest, że część energji promieniuje w postaci fal hertzowskich; 4⁰ W żarzącym się metalu elektrony, zamknięte w tym metalu, są ożywione dużemi prędkościami; dochodząc do powierzchni metalu, której nie mogą przekroczyć, odbijają się od niej i w ten sposób otrzymują znaczne przyspieszenie. Dlatego to metal wysyła światło. Wytłumaczyłem to już w rozdziale X § IV. Szczegóły praw emisji światła przez ciała czarne dają się doskonale wytłumaczyć na gruncie tej hypotezy; 5^0 Wreszcie, kiedy promienie katodowe uderzają o antykatod, elektrony ujemne, z których składają się te promienie, i które są ożywione bardzo dużemi prędkościami, nagle się zatrzymują w ruchu. Naskutek przyspieszeń, jakim w ten sposób ulegają, wywołują one undulacje w eterze. Takie miałoby być, zdaniem niektórych fizyków, pochodzenie promieni Roentgena, które byłyby poprostu promieniami świetlnemi o bardzo krótkiej długości fali.

Rozdział III.

Mechanika Nowa i Astronomja.

I.

Ciążenie.

Masę można określić dwoma sposobami: 1^0 przez iloraz siły na przyspieszenie; jestto prawdziwa definicja masy, miara bezwładności ciała; 2^0 przez przyciąganie, jakie wywiera dane ciało na ciało zewnętrzne, w myśl prawa Newtona. Powinniśmy tedy odróżnić masę-współczynnik bezwładności i masę-współczynnik przyciągania. Według prawa Newtona między temi dwoma współczynnikami zachodzi ścisła proporcjonalność. Ale jestto dowiedzione jedynie dla prędkości, do których można stosować ogólne zasady dynamiki. Otóż widzieliśmy, że masa-współczynnik bezwładności rośnie z prędkością; czy mamy wnieść, że masa-współczynnik przyciągania rośnie również z prędkością i pozostaje proporcjonalną do współczynnika bezwładności, albo też, że przeciwnie, ten współczynnik przyciągania pozostaje stałym? Niema żadnego sposobu rozstrzygnięcia tego pytania.

Z drugiej strony, jeżeli współczynnik przyciągania zależy od prędkości, tedy, skoro prędkości dwu ciał wzajemnie się przyciągających nie są naogół jednakowe, jakaż zależność będzie zachodziła między tym współczynnikiem a obu prędkościami?

Można co do tego robić jedynie hypotezy, i naturalnym jest zbadanie, które z tych hypotez zgadzałyby się z zasadą względności. Jest ich bardzo wiele; jedyną, o której tutaj będę mówił, jest hypoteza Lorentza, którą pokrótce wyłożę.

Rozważmy naprzód elektrony w spoczynku. Dwa elektrony jednoimienne odpychają się, dwa elektrony różnoimienne przyciągają się; w zwykłej teorji wzajemne ich działania są proporcjonalne do ich ładunków elektrycznych; jeżeli więc mamy cztery elektrony, dwa dodatnie, A i A', i dwa ujemne, B i B', i jeśli wartości bezwzględne ładunków tych czterech elektronów są jednakowe, odpychanie A od A' będzie przy jednakowej odległości równe odpychaniu B od B' i będzie także równe przyciąganiu A do B' i A' do B. Jeżeli tedy A i B znajdują się bardzo blisko siebie podobnież jak A' i B', działanie układu $A + B$ na układ $A' + B'$ sprowadzi się do dwu odpychań i dwu przyciągań, ściśle się kompensujących, i działanie wypadkowe będzie równe zeru.

Owóż cząsteczki materjalne należy właśnie rozważać, jako pewnego rodzaju układy słoneczne, w których krążą elektrony dodatnie i ujemne, przyczym suma algiebraiczna wszystkich ładunków jest równa zeru. Cząsteczka materjalna daje się więc pod każdym względem przyrównać do układu $A + B$, o którym mówiliśmy powyżej, tak iż całkowite wzajemne działanie elektryczne dwu cząsteczek powinnoby być równe zeru.

Lecz doświadczenie wykazuje nam, że cząsteczki te przyciągają się na skutek ciążenia newtonowskiego; wobec tego można zrobić dwie hypotezy: można przypuścić, że ciążenie nie ma nic wspólnego z przyciąganiami elektrostatycznemi, że pochodzi ono od całkiem odmiennej przyczyny i że poprostu działa obok nich; albo też można przypuścić, że niema proporcjonalności przyciągań do ładunków, i że przyciąganie, jakie ładunek $+1$ wywiera na ładunek -1, jest większe, niż wzajemne odpychanie dwu ładunków + 1 lub dwu ładunków — 1.

Innemi słowy, pole elektryczne, pochodzące od elektronów dodatnich, oraz pole, wywołane przez elektrony ujemne, przenikałyby się wzajemnie, pozostając odrębnemi. Elektrony dodatnie byłyby wrażliwsze na pole, wywołane przez elektrony ujemne, niż na pole, wywołane przez elektrony dodatnie; i odwrotnie w wypadku elektronów ujemnych. Jasne jest, że hypoteza ta komplikuje nieco Elektrostatykę, lecz sprowadza do niej ciążenie. Byłoby to w rezultacie to samo, co w hypotezie Franklina.

Zobaczmy zkolei, co będzie, jeśli elektrony są w ruchu. Elektrony dodatnie wywołają w eterze zakłócenie i wytworzą w nim pole elektryczne i pole magnetyczne. Podobnież elektrony ujemne. W następstwie działanie wszystkich tych pól na elektrony zarówno dodatnie, jak ujemne, wyrazi się, jako impuls mechaniczny. W teorji zwykłej pole elektromagnetyczne, wywołane przez ruch elektronów dodatnich, wywiera na dwa elektrony różnoimienne o jednakowych bezwzględnych ładunkach, działania równe i wbrew przeciwne. Można wówczas bez niedogodności nie rozróżniać pola, pochodzącego od ruchu elektronów dodatnich, od pola, wywołanego przez ruch elektronów ujemnych, i rozważać jedynie sumę algiebraiczną tych dwu pól, to znaczy pole wypadkowe.

Przeciwnie, w nowej teorji działanie pola elektromagnetycznego, pochodzącego od elektronów dodatnich, na elektrony dodatnie odbywa się według praw zwykłych, i to samo można powiedzieć o działaniu na elektrony ujemne pola, pochodzącego od elektronów ujemnych. Rozważmy teraz działanie pola, pochodzącego od elektronów dodatnich, na elektrony ujemne (lub odwrotnie); stosować się ono będzie również do tych samych praw lecz z innym współczynnikiem. Każdy elektron jest wrażliwszy na pole, wytworzone przez elekrony o znaku przeciwnym, niż na elektrony jednoimienne.

Taką jest hypoteza Lorentza, która sprowadza się do hypotezy Franklina dla niewielkich prędkości; dla takich prędkości tłumaczy więc ona prawo Newtona. Nadto, skoro ciążenie sprowadza się do sił o pochodzeniu elektrodynamicznym, teorja ogólna Lorentza będzie się doń stosowała, a przeto nie będzie nadwerężona zasada względności.

Widzimy, że prawo Newtona nie jest stosowalne do wielkich prędkości, i że dla ciał w ruchu musi ono ulec modyfikacji zupełnie tak samo, jak prawa Elektrostatyki dla elektryczności w ruchu.

Wiadomo, że zakłócenia elektromagnetyczne rozchodzą się z prędkością światła. Możnaby więc mniemać, że teorję powyższą należy odrzucić, skoro się przypomni, że ciążenie rozchodzi się według rachunków Laplacea conajmniej dziesięć miljonów razy prędzej, niż światło, że przeto nie może ono być pochodzenia elektrodynamicznego. Wynik rachunków Laplacea jest dobrze znany, lecz naogół nie rozumie się, co on znaczy. Laplace przypuszczał, że, jeśli rozchodzenie się ciążenia nie jest momentalne, jego prędkość rozchodzenia się kombinuje się z prędkością przyciąganego ciała, podobnie jak w wypadku światła w zjawisku aberacji astronomicznej, tak iż siła rzeczywista nie jest skierowana wzdłuż prostej, łączącej oba ciała, lecz tworzy z tą prostą mały kąt. Jestto zupełnie specjalna hypoteza, niedostatecznie usprawiedliwiona, a w każdym razie całkiem różna od hypotezy Lorentza. Wynik, do jakiego doszedł Laplace, nie dowodzi nic przeciw teorji Lorentza.

II.

Porównanie z obserwacjami astronomicznemi.

Czy teorje powyższe dadzą się pogodzić z obserwacjami astronomicznemi? Zauważmy przedewszystkim, że jeżeli je uznamy za słuszne, energja ruchów planetarnych będzie się ustawicznie rozpraszała naskutek f a l i p r z y s p i e s z e n i a. Miałoby to za wynik, że średnie ruchy ciał niebieskich ustawicznieby się przyspieszały, jakgdyby ciała te poruszały się w ośrodku, stawiającym opór. Lecz objaw ten byłby nadzwyczaj słaby, o wiele zbyt nikły, aby go mogły ujawnić najdokładniejsze obserwacje. Przyspieszenie ciał niebieskich jest względnie niewielkie, tak iż działanie fali przyspieszenia jest znikome, i ruch może być uważany za prawie-stateczny. Wprawdzie działania fali przyspieszenia ustawicznie się do siebie dodają, lecz nawet to ich nagromadzanie się jest tak powolne, że trzebaby tysięcy lat obserwacji, aby się one dały odkryć.

Przeprowadźmy więc rachunek, uważając ruch za prawie-stateczny, oraz na gruncie trzech następujących hypotez:

A. Przyjmijmy hypotezę Abrahama (elektrony nieodkształcalne) i zachowajmy prawo Newtona w zwykłej jego postaci;

B. Przyjmijmy hypotezę Lorentza o odkształcaniu elektronów i zachowajmy zwykłe prawo Newtona;

C. Przyjmijmy hypotezę Lorentza o elektronach i zmodyfikujmy prawo Newtona tak, jakeśmy to zrobili w paragrafie poprzednim, czyniąc je zgodnym z zasadą względności.

Najwyraźniejszym będzie wynik ruchu Merkurego, ponieważ planeta ta posiada największą prędkość. Tisserand niegdyś wykonał podobny rachunek, przyjmując prawo Webera; przypominam, że Weber usiłował wytłumaczyć zjawiska elektrostatyczne oraz elektrodynamiczne, zakładając, że elektrony (których nazwa nie była jeszcze wymyślona) wywierają wzajemnie na siebie przyciągania i odpychania według kierunku łączącej je prostej i zależne nietylko od ich odległości, lecz nadto od pochodnych pierwszych i drugich tych odległości, a więc, od ich prędkości i od ich przyspieszeń. To prawo Webera, dość różne od praw, wysuwających się dzisiaj, przedstawia przecież pewne z niemi analogje. Tisserand znalazł, że jeśliby atrakcja newtonowska odbywała się według prawa Webera, wynikałaby dla ruchu punktu przysłonecznego Merkurego warjacja wiekowa 14″, zwrócona w tę samą stronę, co warjacja zaobserwowana i dotychczas niewytłumaczona, lecz mniejsza od niej, bo tamta wynosi 38″.

Powróćmy do hypotez A, B i C, zbadajmy naprzód ruch planety, przyciąganej przez środek nieruchomy. Hypotezy B i C nie różnią się wówczas od siebie, albowiem skoro punkt przyciągający jest nieruchomy, pole przezeń utworzone jest polem czysto elektrostatycznym, w którym przyciąganie zmienia się w stosunku odwrotnym do kwadratu odległości, zgodnie z prawem elektrostatycznym Coulomba, tożsamym z prawem Newtona.

Równanie sił żywych stosuje się i tutaj, jeśli wziąć nową definicję siły żywej; podobnież na miejsce równania pól występuje inne równanie równoważne; moment ilości ruchu jest wielkością stałą, lecz ilość ruchu musi być zdefinjowana tak, jak tego wymaga nowa Dynamika.

Jedynym uczuwalnym działaniem będzie ruch wiekowy punktu przysłonecznego. Na gruncie teorji Lorentza otrzymamy dla tego ruchu wartość równą połowie tej, jaką dało prawo Webera; na gruncie teorji Abrahama — dwu piątym.

Jeżeli teraz weźmiemy dwa ciała ruchome, grawitujące dokoła wspólnego środka ciężkości, wyniki będą się bardzo mało różniły od powyższych, jakkolwiek rachunki będą nieco bardziej złożone. Ruch punktu przysłonecznego Merkurego wynosiłby tedy 7″ w teorji Lorentza, i 5,6″ w teorji Abrahama.

Wynik jest zresztą proporcjonalny do n^3a^2, gdzie n jest ruchem średnim ciała, a promieniem jej orbity. Dla planet na mocy prawa Keplera wynik zmienia się przeto w stosunku odwrotnym do $\sqrt{a^5}$, jest on więc nieuczuwalnym, za wyjątkiem wypadku Merkurego. Jest on również nieuczuwalnym dla Księżyca, jakkolwiek n jest bardzo wielkie, gdyż a jest niezmiernie małe; w rezultacie jest on pięć razy mniejszy dla Wenus niż dla Merkurego, a sześćset razy mniejszy dla Księżyca. Dodajmy że w wypadku Wenus i Ziemi ruch perihelium (dla jednej i tej samej prędkości kątowej tego ruchu) byłby o wiele trudniejszy do ujawnienia przez obserwacje astronomiczne, albowiem mimośród tych orbit jest o wiele mniejszy niż dla Merkurego.

Słowem, jedynym wynikiem uczuwalnym w obserwacjach astronomicznych byłby ruch perihelium Merkurego, zwrócony w tę samą stronę, co ruch zaobserwowany a dotychczas niewytłumaczony, lecz znacznie odeń mniejszy.

Nie można tego uważać za argument na korzyść Nowej Dynamiki, bo trzeba i nadal szukać innego wytłumaczenia większej części anomalji Merkurego; ale w mniejszym jeszcze stopniu można to uważać za argument przeciw niej.

III.

Teorja Lesagea.

Pożytecznym będzie zestawić te rozważania z pewną oddawna zaproponowaną teorją, mającą wytłumaczyć ciążenie powszechne. Przypuśćmy, że w przestrzeniach międzyplanetarnych krążą we wszystkich kierunkach ożywione wielkiemi prędkościami ciałka o bardzo rzadkiej substancji. Uderzenia tych ciałek nie będą wywoływały w ciele odosobnionym w przestrzeni żadnego widomego objawu, bo uderzenia te odbywają się jednakowo we wszystkich kierunkach. Skoro natomiast dwa ciała A i B znajdą się w pobliżu, ciało B odgrywać będzie rolę ekranu i zatrzyma część ciałek, które, gdyby go nie było, uderzyłyby ciało A. Wówczas uderzenia, jakie otrzyma A w kierunku przeciwnym do B, nie będą miały przeciwwagi, albo też ulegną kompensacji tylko niezupełnej, i popchną A ku B.

Taką jest teorja Lesagea; roztrząśniemy ją przedewszystkiem z punktu widzenia Mechaniki zwykłej. Nasamprzód, jak mają się odbywać zderzenia, o których mówi ta teorja: czy według praw ciał doskonale sprężystych, czy według praw ciał pozbawionych sprężystości, czy według jakiegoś prawa pośredniego? Ciałka Lesagea nie mogą się zachowywać, jak ciała doskonale sprężyste; bo w przeciwnym razie skutek byłby równy zeru, gdyż ciałka, zatrzymane przez ciało B, byłyby zastąpione przez inne ciałka, któreby się odbiły od B, i rachunek okazuje, że w takim razie kompensacja byłaby doskonała.

Zderzenie musi więc prowadzić do utraty energji przez ciałka, i energja ta powinnaby zamieniać się w energję cieplną. Jakaż byłaby wytworzona w ten sposób ilość ciepła? Zauważmy, że atrakcja przechodzi wskroś ciał; musimy więc wyobrazić sobie Ziemię np., nie jako ekran pełny, lecz składający się z bardzo wielkiej ilości malutkich cząsteczek kulistych, z których każda odgrywa rolę małego ekranu, między któremi ciałka Lesagea mogą swobodnie krążyć. Tak więc, Ziemia nietylko nie jest pełnym ekranem, lecz nie jest nawet durszlakiem, bo dziury zajmują w niej o wiele więcej miejsca niż części pełne.

Żeby sobie to uprzytomnić, przypomnijmy, że Laplace okazał, że atrakcja, przechodząc skroś ziemię, osłabia się conajwyżej o jedną dziesięciomiljonową, i dowód jego jest bez zarzutu; jeżeliby w rzeczy samej atrakcja była pochłaniana przez ciała, przez które przechodzi, przestałaby ona być proporcjonalna do masy; byłaby względnie słabsza dla ciał wielkich niż dla ciał małych, bo musiałaby przechodzić przez większą grubość. Przyciąganie, wywierane przez Słońce na Ziemię, byłoby przeto względnie słabsze, niż przyciąganie Słońca na Księżyc, z czego wynikałaby bardzo znaczna anomalja w ruchu Księżyca. Gdybyśmy więc przyjęli teorję Lesagea, musielibyśmy przypuścić, że całkowita powierzchnia cząsteczek kulistych, z jakiej składa się Ziemia, stanowi conajwyżej jedną dziesięciomiljonową część całkowitej powierzchni Ziemi.

Darwin dowiódł, że teorja Lesagea prowadzi ściśle do prawa Newtona, jedynie o tyle, o ile założymy, że ciałka są całkowicie pozbawione sprężystości. Przyciąganie, wywierane przez Ziemię na masę 1 na odległość 1, będzie wówczas proporcjonalne jednocześnie do powierzchni całkowitej S składających ją cząsteczek kulistych, do prędkości v ciałek, do pierwiastka kwadratowego z gęstości ρ ośrodka, utworzonego przez ciałka. Ciepło wytworzone będzie proporcjonalne do S, do gęstości ρ i do sześcianu prędkości v.

Trzeba wszakże wziąć w rachubę opór, jaki odczuwa ciało, poruszające się w podobnym ośrodku; w istocie, nie może się ono poruszać, nie idąc na spotkanie niektórych uderzeń i nie uciekając jednocześnie przed uderzeniami, idącemi w kierunku przeciwnym, tak, iż kompensacja, zachodząca w stanie spoczynku, przestaje się odbywać. Opór, jaki daje rachunek, jest proporcjonalny do S, do ρ i do v; otóż wiadomo, że ciała niebieskie poruszają się tak, jakgdyby nie odczuwały żadnego oporu, i dokładność obserwacji pozwala na wyznaczenie granicy oporowi ośrodka.

Ponieważ opór ten zmienia się proporcjonalnie do $S\rho v$, podczas gdy atrakcja zmienia się prop. do $S\sqrt{\rho v}$, widzimy więc, że stosunek oporu do kwadratu atrakcji jest odwrotnie proporcjonalny do iloczynu Sv.

Posiadamy tedy granicę dolną iloczynu Sv. Mieliśmy już poprzednio granicę górną dla S (przez pochłanianie atrakcji przez ciała, skroś które przechodzi); posiadamy więc granicę dolną prędkości v, która musi być conajmniej równa $24 \cdot 10^{17}$ razy wziętej prędkości światła.

Możemy stąd wyprowadzić ρ oraz wytworzoną ilość ciepła; ilość ta wystarczałaby do podniesienia temperatury o 10^{26} stopni na sekundę; Ziemia otrzymywałaby w ciągu danego czasu 10^{20} razy więcej ciepła, niż Słońce wysyła w ciągu tego samego czasu; mówię nie o cieple, które Słońce wysyła Ziemi, lecz o cieple, które wypromieniowuje ono we wszystkich kierunkach.

Oczywiste jest, że Ziemia niedługoby znosiła takie warunki.

Do niemniej fantastycznych wniosków doszlibyśmy gdybyśmy, wbrew poglądowi Darwina, uposażyli ciałka Lesagea w sprężystość niedoskonałą, acz nierówną zeru. Siła żywa tych ciałek nie byłaby całkowicie zamieniona w ciepło, lecz wywoływana atrakcja byłaby również mniejsza, tak, iż jedynie część tej siły żywej, zamieniona w ciepło, przyczyniałaby się do wytwarzania atrakcji, co wychodziłoby na jedno. Trafne zastosowanie twierdzenia *du viriel* pozwoliłoby zdać sobie z tego sprawę.

Można przekształcić teorję Lesagea; znieśmy ciałka i wyobraźmy sobie, że eter jest przebiegany we wszystkich kierunkach przez fale świetlne, idące od wszystkich punktów przestrzeni. Kiedy przedmiot materjalny otrzymuje falę świetlną, fala ta wywiera nań działanie mechaniczne naskutek ciśnienia Maxwella - Bartoliego, zupełnie tak, jakgdyby uległo ono uderzeniu materjalnego pocisku. Pomienione fale mogą więc odgrywać rolę ciałek Lesagea. Takie przypuszczenie robi np. Tommasina.

Nie usuwa to przecież trudności. Prędkość rozpowszechniania się musi być równa prędkości światła, co prowadzi przy wyliczeniu oporu ośrodka do cyfry zgoła nie do przyjęcia. Nadto jeżeli światło odbija się całkowicie, wynik jest równy zeru, zupełnie jak w założeniu ciałek doskonale sprężystych. Ażeby było przyciąganie, światło musi być częściowo pochłaniane; lecz wówczas wytwarza się ciepło. Rachunki nie różnią się istotnie od rachunków, do jakich prowadzi zwykła teorja Lesagea, i rezultat zachowuje ten sam fantastyczny charakter.

Z drugiej strony, atrakcja nie ulega pochłonięciu przez ciała, przez które przechodzi, wcale, albo też w bardzo nieznacznym tylko stopniu; inaczej rzecz się ma ze znanym nam światłem. Światło, które wywoływałoby atrakcję newtonowską, musiałoby poważnie się różnić od światła zwykłego, długość jego fal musiałaby np. być bardzo krótka. Że już pominiemy, iż gdyby oczy nasze były wrażliwe na to światło, całe niebo musiałoby się nam wydawać o wiele jaśniejsze niż Słońce, któreby na jego tle tworzyło czarną plamę; w przeciwnym razie, Słońceby nas odpychało, zamiast nas przyciągać. Dla tych racji światło, które pozwoliłoby tłumaczyć atrakcję, musiałoby być o wiele podobniejsze do promieni X Roentgena niż do zwykłego światła.

I nawet właściwości promieni Roentgena nie byłyby tu wystarczającemi; jakkolwiek duża jest ich zdolność przenikania ciał, nie potrafiłyby przechodzić skroś całą Ziemię; trzebaby zatym pomyśleć promienie X' o wiele bardziej przenikliwe niż zwykłe promienie X. Następnie część energji tych promieni X' musiałaby ulegać zniszczeniu, aby atrakcja była możliwa. Jeżeli nie chcemy, aby zamieniała się ona w ciepło, bo prowadziłoby to do olbrzymiego wytwarzania ciepła, trzeba przypuścić, że promieniuje ona we wszystkich kierunkach w postaci promieni wtórnych — nazwijmy je promieniami X'' — które będą musiały być jeszcze o wiele przenikliwsze od promieni X', bo, w przeciwnym razie, one zkolei zakłócałyby zjawisko atrakcji.

Do takich skomplikowanych hypotez dochodzi się z konieczności, jeżeli się chce uratować życie teorji Lesagea.

Lecz wszystko, cośmy powyżej powiedzieli, przypuszcza zwykłe prawa Mechaniki. Jeżeli przyjmiemy zasady Dynamiki Nowej, to czyż będzie lepiej? I przedewszystkim, czy możemy zachować zasadę względności? Weźmy nasamprzód teorję Lesagea w jej pierwotnej postaci i przypuśćmy, że przestrzeń jest przebiegana przez ciałka materjalne; gdyby te ciałka były doskonale sprężyste, prawa ich zderzeń stosowałyby się do tej zasady względności, wiemy wszakże, że wówczas wynik ich byłby równy zeru. Trzeba więc przypuścić, że ciałka te nie są sprężyste, a w takim razie trudno jest wymyślić prawo zderzeń, zgodne z zasadą względności. Zresztą, dałoby to również wytwarzanie się wielkiej ilości ciepła, i przecież bardzo uczuwalny opór ośrodka.

Jeśli porzucimy te ciałka i powrócimy do hypotezy ciśnienia Maxwella - Bartoliego, trudności nie będą mniejsze. Próbę tę podjął sam Lorentz w rozprawie, przedłożonej amsterdamskiej Akademji Umiejętności 25-go kwietnia 1900 r.

Rozważmy układ elektronów, zanurzonych w eterze, przez który przebiegają we wszystkie strony fale świetlne; jeden z tych elektronów, oderwany przez jedną z tych fal, zostanie wprawiony w drganie; drganie jego będzie synchroniczne z drganiem światła; lecz będzie mogła zachodzić różnica fazy, jeżeli elektron pochłania część energji fali. Albowiem jeżeli pochłania on energję, to znaczy, że drganie eteru pociąga za sobą elektron; musi się więc spóźniać w stosunku do eteru. Elektron w ruchu daje się przyrównać do prądu przenoszenia (konwekcyjnego); zatym, każde pole magnetyczne, w szczególności pole, wytworzone przez samą perturbację świetlną, musi wywierać działanie mechaniczne na ten elektron. Działanie to jest bardzo słabe; prócz tego zmienia ono znak w ciągu jednego okresu; pomimo to działanie średnie nie jest równe zeru, jeżeli zachodzi różnica fazy między drganiami elektronu i eteru. Działanie średnie jest proporcjonalne do tej różnicy, a więc do energji, pochłoniętej przez elektron.

Nie mogę wdać się tutaj w szczegóły rachunków; powiem tylko, że w wyniku ostatecznym otrzymuje się atrakcję dwu elektronów, zmieniającą się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości i proporcjonalną do energji, pochłoniętej przez oba elektrony.

Atrakcja nie może się odbywać inaczej, jak przy pochłanianiu światła, a przeto przy wytwarzaniu ciepła, i to zdecydowało Lorentza do porzucenia tej teorji, która się co do istoty swej nie różni od teorji Lesagea - Maxwella - Bartoliego. Istotnie, gdyby był on poprowadził rachunki do końca, doszedłby do wyników wręcz przerażających. Znalazłby, że temperatura Ziemi musiałaby rosnąć o 10^{13} stopni na sekundę.

IV.

Wnioski.

Usiłowałem dać w małej ilości wyrazów możliwie zupełne pojęcie o nowych tych poglądach; starałem się wytłumaczyć, jak one powstały, iżby czytelnik nie miał powodu przerażać się ich zuchwalstwem. Teorje nowe nie są jeszcze dowiedzione; dużo po temu brakuje; są one tylko oparte o dość poważny zespół prawdopodobieństw, aby się nie miało prawa traktować ich z pogardą. Nowe doświadczenia powiedzą nam zapewne, co ostatecznie o nich myśleć należy. Węzeł kwestji jest w eksperymencie Kaufmanna i w tych, jakie się być może przeprowadzi, aby poddać go sprawdzeniu.

Niechaj mi wolno będzie, zanim skończę, wypowiedzieć jedno życzenie. Przypuśćmy, że za kilka lat teorje te poddane zostaną nowym próbom, i że wyjdą z nich zwycięsko; nasze nauczanie średnie narażone wówczas będzie na wielkie niebezpieczeństwo: niektórzy profesorowie zechcą zapewne wprowadzić nowe teorje do swych wykładów. Nowości są tak pociągające, i tak ciężko jest wydawać się nie dosyć postępowym! Już conajmniej będzie się miało ochotę otworzyć dzieciom oczy, i zanim się im wyłoży mechanikę zwykłą, uprzedzi się je, że jest ona już przestarzała, i że była dobra conajwyżej dla tego starego hebesa Laplacea. I wówczas nie przyswoją one sobie, jak należy, Mechaniki zwykłej.

Czyż dobre jest uprzedzić je, że jest ona tylko przybliżona? Owszem; lecz później, kiedy będą już nią przeniknięte do szpiku kości, kiedy umysł ich wdroży się do jej biegów myśli, kiedy nie będą już narażone na to, że się jej oduczą, wówczas można będzie bez obawy wskazać im jej granice.

Żyć muszą z Mechaniką zwykłą; ją jedynie będą miały sposobność stosować; jakiekolwiek postępy zrobi automobilizm, wozy nasze nie dosięgną nigdy prędkości, dla których przestaje ona być prawdziwa. Mechanika nowa jest zbytkiem, a o zbytku należy myśleć wówczas dopiero, gdy niema niebezpieczeństwa, że wyjdzie on na szkodę temu, co jest niezbędne.

KSIĘGA CZWARTA.

NAUKA ASTRONOMICZNA.

Rozdział I.

Droga Mleczna i Teorja Gazów.

Rozważania, które tu chcę wyłożyć, zaprzątały dotychczas bardzo mało uwagę astronomów; conajwyżej mógłbym przytoczyć jeden bystry pomysł lorda Kelvina, który otworzył przed nami nowe pole badań, ale dotychczas nikt jeszcze tam za nim nie poszedł. Ja również nie mam do zakomunikowania oryginalnych wyników, mogę tylko dać pojęcie o nasuwających się zagadnieniach, o których rozwiązanie nikt się dotychczas nie kłopotał.

Powszechnie wiadomo, jak wyobraża sobie znaczna część fizyków współczesnych budowę gazów; gazy utworzone są z niezliczonego mnóstwa cząsteczek, które, biegnąc z olbrzymiemi prędkościami, krzyżują się we wszystkich kierunkach. Cząsteczki te działają prawdopodobnie na odległość jedne na drugie, lecz działanie to zmniejsza się bardzo szybko z odległością, tak, iż drogi ich pozostają przybliżenie prostolinijne, prostolinijność ta ustaje jedynie wówczas, gdy dwie cząsteczki przechodzą bardzo blisko siebie; w takim razie wzajemne ich przyciąganie lub odpychanie każe im zboczyć na prawo lub na lewo. To właśnie zjawisko nazywa się niekiedy zderzeniem; nie należy wszakże rozumieć tego wyrazu z d e r z e n i e w znaczeniu zwykłym; niema potrzeby, by obie cząsteczki zetknęły się ze sobą, wystarczy, że zbliżą się do siebie dostatecznie, aby wzajemne ich przyciągania stały się uczuwalne. Prawa zboczenia, jakiemu ulegają one są takie same, jakgdyby zaszło prawdziwe zderzenie.

Zdaje się zrazu, że bezładne zderzenia pyłków tej nieprzeliczonej kurzawy prowadzić mogą jedynie do nierozwikłalnego chaosu, opornego analizie matematyka. Lecz prawo wielkich liczb, owo najwyższe prawo przypadku przychodzi nam z pomocą; w obliczu bezładu połowicznego bylibyśmy bezsilni, lecz w bezładzie najkrańcowszym owo prawo statystyczne ustanawia pewnego rodzaju porządek średni, w którym umysł może się zorjentować. Badanie tego porządku średniego stanowi właśnie teorję kinetyczną gazów; wykazuje ona, że prędkości cząsteczek są jednakowo rozłożone pomiędzy wszystkie kierunki, że wielkość tych prędkości zmienia się od cząsteczki do cząsteczki, lecz, że i ta zmienność podlega prawu, zwanemu prawem Maxwella. Prawo to mówi nam, ile jest cząsteczek, ożywionych daną prędkością. Skoro tylko gaz odchyli się od tego prawa, zderzenia wzajemne cząsteczek, wywołując zmianę w wielkości i kierunku ich prędkości, zdążają do tego, aby je znowu szybko prawu temu poddać. Fizycy usiłowali nie bez powodzenia wytłumaczyć w ten sposób doświadczalne własności gazów, np. prawo Mariottea.

Rozważmy teraz Drogę Mleczną; tutaj widzimy również nieprzeliczoną kurzawę, tylko że jej pyłkami nie są atomy, lecz ciała niebieskie; pyłki te również poruszają się z wielkiemi prędkościami; działają one wzajem na siebie na odległość, lecz działanie to jest na wielką odległość tak słabe, że drogi ich są prostolinijne; wszelako od czasu do czasu dwa zpośród nich mogą się dostatecznie zbliżyć do siebie, aby zostać odchylone od swej drogi, jak kometa, któraby przeszła zbyt blisko Jowisza. Słowem, w oczach olbrzyma, dla którego słońca nasze byłyby tym, czym są dla nas nasze atomy, Droga Mleczna wydawałaby się bańką gazu.

Taką była myśl naczelna lorda Kelvina. Cóż możemy wywnioskować z tego porównania? W jakiej mierze jest ono trafne? Nad tym właśnie zastanowimy się razem z czytelnikiem; zanim dojdziemy do ostatecznego wniosku, przeczuwamy z góry, że teorja kinetyczna gazów będzie dla astronoma wzorem nie tyle z litery, ile z ducha. Dotychczas mechanika niebieska usiłowała ująć jedynie układ słoneczny, oraz parę układów gwiazd podwójnych. Natomiast przed całością Drogi Mlecznej, przed gromadami gwiazd, przed rozwiązalnemi mgławicami cofała się, widząc w nich tylko chaos. Lecz Droga Mleczna nie jest bardziej złożona niż gaz; metody statystyczne, oparte na rachunku prawdopodobieństwa, i stosowalne do gazu, dadzą się zastosować i do niej. Przedewszystkim trzeba sobie zdać sprawę z podobieństw obu wypadków oraz z ich różnic.

Lord Kelvin usiłował określić tym sposobem rozmiary Drogi Mlecznej; dotychczas trzeba było w tym celu liczyć gwiazdy widzialne przez nasze teleskopy, lecz nie jesteśmy pewni, czy za gwiazdami które widzimy, niema innych, których nie widzimy; tak, iż nie wielkość Drogi Mlecznej zmierzylibyśmy w ten sposób, lecz donośność naszych instrumentów. Nowa teorja nowych nam dostarczy środków. W istocie, znamy ruch gwiazd najbliższych nas, i możemy powziąć pewne pojęcie o wielkości i kierunku ich prędkości. Jeżeli poglądy, wyłożone powyżej, są trafne, prędkości te powinny stosować się do prawa Maxwella, i średnia ich wartość da nam to, co, że tak powiemy odpowiada temperaturze naszego fikcyjnego gazu. Lecz temperatura ta zależna jest zkolei od rozmiarów naszej bańki gazowej. Jakże bo będzie się zachowywała masa gazowa, porzucona w próżni, jeśli elementy jej przyciągają się według prawa Newtona? Przybierze ona kształt kulisty, nadto, naskutek ciążenia, gęstość będzie większa w środku, ciśnienie będzie rosło również od powierzchni ku środkowi naskutek ciężaru części zewnętrznych, przyciąganych do środka; wreszcie, temperatura rosnąć będzie ku środkowi: temperatura i ciśnienic związane są prawem adiabatycznym, tak jak w kolejnych warstwach naszej atmosfery. Na samej powierzchni ciśnienie będzie równe zeru, podobnież jak i temperatura absolutna, to jest prędkość cząsteczek.

Nasuwa się tu jedno pytanie: mówiliśmy o prawie adiabatycznym, lecz prawo to nie jest jednakowe dla wszystkich gazów, bo zależy ono od stosunku ciepła właściwego przy stałym ciśnieniu do ciepła właściwego przy stałej objętości; dla powietrza i gazów analogicznych stosunek ten wynosi 1,42; lecz czyż do powietrza wypadałoby przyrównać Drogę Mleczną? Oczywiście nie; należałoby ją rozważać, jako gaz jednoatomowy, jak para rtęci, jak argon, jak hel, to znaczy, że stosunek pomieniony należałoby wziąć równym 1,66. Istotnie, jedną z naszych cząsteczek byłby np. układ słoneczny; lecz planety są to osobniki miniaturowe, Słońce jedynie wchodzi w rachubę, cząsteczka nasza jest więc w samej rzeczy jednoatomową. I nawet jeśli weźmiemy gwiazdę podwójną, prawdopodobne jest, że działanie obcego ciała niebieskiego, któreby się do niej zbliżyło, byłoby dość znaczne, aby odchylić ogólny ruch przenoszenia tego układu o wiele wcześniej, nimby mogło wywołać zakłócenie orbit względnych obu jego składników; słowem gwiazda podwójna zachowywałaby się jak niepodzielny atom.

Jakkolwiekbądź, ciśnienie, a przeto i temperatura byłyby w środku kuli gazowej tym większe, im większa byłaby ta kula, gdyż ciśnienie zwiększa się o ciężar wszystkich kolejnych warstw. Możemy przypuścić, że jesteśmy mniej więcej w środku Drogi Mlecznej, i obserwując średnią prędkość własną gwiazd, poznamy to, co odpowiada temperaturze środka naszej kuli gazowej, i oznaczymy jej promień.

O wyniku możemy powziąć pewne pojęcie za pomocą następujących rozważań; zróbmy hypotezę prostszą: Droga Mleczna jest kulista i masy są w niej rozłożone w sposób jednorodny; wynika stąd, że ciała niebieskie zakreślają w niej elipsy o wspólnym środku. Jeżeli przypuścimy, że prędkość równa jest zeru na powierzchni, możemy wyliczyć prędkość w środku za pomocą równania sił żywych. Znajdujemy w ten sposób, że prędkość ta jest proporcjonalna do promienia kuli i do pierwiastka kwadratowego jej gęstości. Jeżeliby masa tej kuli była równa masie Słońca, a promień jej promieniowi orbity Ziemi, prędkość ta byłaby równa (o czym łatwo można się przekonać) prędkości Ziemi na jej orbicie. Lecz w wypadku, któryśmy przypuścili, masa Słońca musiałaby być rozłożona w kuli o promieniu 1,000,000 razy większym, gdyż promieniem tym jest odległość najbliższych gwiazd; gęstość jest więc 10^{18} razy mniejsza; otóż prędkości są tego samego rzędu, promień więc musi być 10^9 razy większy, to znaczy, równy tysiąc razy wziętej odległości gwiazd najbliższych, co dałoby około miljarda gwiazd w Drodze Mlecznej.

Lecz, powie kto, hypotezy te dalekie są od rzeczywistości; naprzód, Droga Mleczna nie jest kulista, o czym mówić będziemy niżej, a powtóre teorja kinetyczna gazów nie godzi się z hypotezą jednorodnej kuli. Ale przeprowadzając rachunek ścisły, opierający się na tej teorji, doszlibyśmy do wyniku niewątpliwie różnego, lecz tego samego rzędu wielkości; otóż w podobnym zagadnieniu dane są tak niepewne, że rząd wielkości jest jedynym celem, do którego rozsądnie można zdążać.

Nasuwa się tutaj następująca uwaga; wynik lorda Kelvina, któryśmy powyżej odnaleźli drogą rachunku przybliżonego, zgadza się naogół z szacowaniami, jakie porobili obserwatorzy przy pomocy swoich teleskopów; należałoby tedy wnieść, że istotnie powiodło nam się wyczerpać Drogę Mleczną. Pozwala to również rozwiązać inną kwestję. Są gwiazdy, które widzimy, ponieważ świecą, lecz czyżby nie było ciemnych ciał, krążących po przestrzeniach międzygwiezdnych, o których istnieniu przez długi czas nic nie wiedziano? Gdyby tak było, metoda lorda Kelvina dałaby nam całkowitą ilość gwiazd, łącznie z gwiazdami ciemnemi; ponieważ osiągnięta przez niego cyfra jest tego samego rzędu, co dostarczona przez teleskop, tedy niema materji ciemnej, albo przynajmniej niema jej tyle, ile materji świecącej.

Zanim pójdziemy dalej, wypada rozważyć zagadnienie pod innym kątem. Czy Droga Mleczna o takim ustroju jest istotnie obrazem gazu we właściwym znaczeniu? Jak wiadomo, Crookes wprowadził pojęcie czwartego stanu materji, w którym gazy, rozrzedzone ponad miarę, przestały być prawdziwemi gazami, i stały się tym, co on nazywa materją promienistą. Czy Droga Mleczna wobec swej małej gęstości jest obrazem materji gazowej, czy też materji promienistej? Odpowiedź na to pytanie da nam rozważenie tego, co się nazywa swobodnym przebiegiem [»libre parcours«].

Drogę cząsteczki gazowej można uważać, jako utworzoną z odcinków prostolinijnych, powiązanych małemi łukami, odpowiadającemi kolejnym zderzeniom. Długosć każdego z tych odcinków nazywa się swobodnym przebiegiem; długość ta nie jest oczywiście jednakowa dla wszystkich odcinków i dla wszystkich cząsteczek; weźmy średnią wszystkich tych długości; nosi ona nazwą średniego przebiegu. Jest on tym większy, im mniejszą jest gęstość gazu. W wypadku materji promienistej przebieg średni jest większy, niż rozmiary naczynia, w którym zamknięty jest gaz, tak iż cząsteczka może przebiec całe naczynie, nie narażając się na zderzenie; w przeciwnym razie materja jest gazową. Wynika stąd, że jeden i ten sam płyn może być promienistym w małym naczyniu, a gazowym w dużym; możliwe jest, że właśnie dlatego w rurce Crookesa trzeba tym doskonalszą wytworzyć próżnię, im rurka jest większa.

Jakże się rzeczy mają z Drogą Mleczną? Jestto masa gazu o bardzo małej gęstości, lecz o bardzo wielkich rozmiarach; czy gwiazda może liczyć na to, że przejdzie przez tę masę, nie narażając się na zderzenia, to znaczy, na przesunięcie się dość blisko innej gwiazdy, aby zostać od swej drogi odchyloną? Lecz cóż rozumiemy przez wyrażenie »dość blisko«? Jest ono z konieczności nieco dowolne; przypuśćmy, że będzie to odległość od Słońca do Neptuna, co odpowiadałoby odchyleniu o 10^0; przypuśćmy, że każda z naszych gwiazd jest osłonięta ochronną powłoką kulistą o powyższym promieniu; czy prosta zdoła przejść między temi kulami? Z odległości średniej gwiazd Drogi Mlecznej promień tych kul będzie widziany pod kątem około jednej dziesiątej sekundy. Umieśćmy na kuli niebieskiej miljard kółek o promieniu jednej dziesiątej sekundy. Czy jest prawdopodobne, że koła te pokryją znaczną ilość razy kulę niebieską? Bynajmniej; pokryją zaledwie jedną szesnastomiljonową jej część. Tak więc Droga Mleczna nie jest obrazem materji gazowej, lecz materji promienistej Crookesa. Nie mniej jednak, ponieważ powyżej wyprowadzone przez nas wnioski są na szczęście bardzo mało ścisłe, nie mamy potrzeby wprowadzać do nich znaczniejszych zmian.

Ale zachodzi inna trudność: Droga Mleczna nie jest kulista, a dotychczas rozumowaliśmy tak, jakgdyby nią była, bo takim jest kształt równowagi, jaki przybrałby gaz odosobniony w przestrzeni. Istnieją natomiast roje gwiazd, których kształt jest kulisty, i do których lepiej dałoby się zastosować to, co powiedzieliśmy powyżej. Herschel próbował już wytłumaczyć ciekawy ich wygląd. Przypuszczał on, że gwiazdy rojów są rozłożone w sposób jednostajny, że przeto każdy rój stanowi kulę jednorodną; każda gwiazda zakreślałaby wówczas elipsę, i czasy obiegu na wszystkich tych orbitach byłyby jednakowe; tak, iż przy końcu jednego okresu rój powracałby do pierwotnej konfiguracji, i konfiguracja ta byłaby trwała. Na nieszczęście roje nie wydają się jednorodnemi; daje się zauważyć zgęszczenie w środku, które wprawdzie oglądalibyśmy i w kuli jednorodnej, bo jest ona grubszą w środku; lecz nie byłoby ono w takim razie tak znacznym. Rój gwiazd wypada więc przyrównać raczej do gazu w równowadze adiabatycznej, który przybiera kształt kulisty, bo jestto figura równowagi masy gazowej.

Lecz, powie kto, roje te są o wiele mniejsze niż Droga Mleczna, w której prawdopodobnie skład wchodzą, i lubo są gęstsze, stanowią raczej coś analogicznego do materji promienistej; otóż gazy osiągają swoją równowagę stałą dopiero na skutek niezliczonych zderzeń cząsteczek. Możnaby przecież dać sobie z tym radę. Przypuśćmy, że gwiazdy roju posiadają właśnie tyle energji, ile potrzeba, aby ich prędkość była zerem w chwili, gdy dosięgają powierzchni; wówczas mogą one przejść przez rój bez zderzeń, lecz dotarłszy do powierzchni, powrócą w tył i przebędą go znowu; po wielkiej ilości takich podróży ulegną one wreszcie odchyleniu naskutek zderzenia; mielibyśmy w takim razie również materję, którą możnaby uważać za gazową; gdyby wypadkiem w roju były gwiazdy o prędkości większej, byłyby one zeń wyszły oddawna, byłyby go porzuciły nazawsze. Dla wszystkich tych względów ciekaweby było zbadać znane roje, postarać się poznać prawo gęstości i zobaczyć czy, jestto adiabatyczne prawo gazów.

Powróćmy przecież do Drogi Mlecznej; nie jest ona kulista i wyobrażaćby ją sobie raczej można, jako spłaszczoną tarczę. Jasne jest tedy, że masa, która opuściła powierzchnię bez prędkości, przybędzie do środka z prędkościami różnemi, zależnie od tego, czy opuści powierzchnię w pobliżu środka tarczy, albo też jej brzegu; w ostatnim wypadku prędkość byłaby znacznie większa.

Otóż dotychczas zakładaliśmy, że prędkości własne gwiazd, te, które obserwujemy, muszą być tego samego rzędu, co prędkości, których nabyłyby podobne masy; nastręcza to pewien kłopot. Podaliśmy wyżej pewną wartość dla rozmiarów Drogi Mlecznej, i wyprowadziliśmy ją z prędkości własnych zaobserwowanych, które są tego samego rzędu wielkości, co prędkość Ziemi na jej orbicie; lecz jaki wymiar zmierzyliśmy w ten sposób? Czy grubość? czy promień tarczy? Zapewne coś pośredniego; cóż w takim razie możemy powiedzieć o samej grubości lub o promieniu tarczy? Brakuje mi danych, aby przeprowadzić rachunek; poprzestaję na zaznaczeniu możności oparcia przybliżonej przynajmniej oceny wymiarów na głębszym roztrząśnięciu ruchów własnych.

Natenczas mamy przed sobą dwie hypotezy: albo gwiazdy Drogi Mlecznej ożywione są prędkościami w większości równoległemi do płaszczyzny galaktycznej, lecz pozatym rozłożonemi jednostajnie we wszystkich kierunkach równolegle do tej płaszczyzny. Jeśli tak jest, obserwacja ruchów własnych powinna ujawnić przewagę składowych równoległych do Drogi Mlecznej; trzebaby zobaczyć, czy tak jest, bo nie wiem, czy systematyczne roztrząsanie z tego punktu widzenia zostało przeprowadzone. Z drugiej strony, podobna równowaga mogłaby jedynie być prowizoryczną, albowiem, naskutek zderzeń, cząsteczki, to jest gwiazdy, nabędą po pewnym czasie znacznych prędkości prostopadłych do Drogi Mlecznej i w końcu wyjdą z jej płaszczyzny, tak, iż układ zdążać będzie do kształtu kulistego, jedynej figury równowagi odosobnionej masy gazowej.

Albo też cały układ ożywiony jest wspólnym ruchem obrotowym, i dlatego jest spłaszczony podobnie jak Ziemia, jak Jowisz, jak wszystkie wirujące ciała. Ponieważ jednak spłaszczenie jest duże, ruch obrotowy musi być szybki; porozumieć się przecież trzeba, co do znaczenia wyrazu *szybki*. Gęstość Drogi Mlecznej jest 10^{25} razy mniejsza, niż gęstość Słońca; prędkość obrotu, która będzie $\sqrt{10^{25}}$ razy mniejsza, niż prędkość Słońca, da dla Drogi Mlecznej spłaszczenie takie same jak u Słońca; prędkość 10^{12} razy wolniejsza, niż prędkość Ziemi, to znaczy jedna trzydziesta sekundy łuku na stulecie, będzie prędkością bardzo szybką, niemal że za szybką, aby równowaga stała była możliwa.

W tej hypotezie ruchy własne, oglądane w obserwacji, wydawać nam się będą jednostajnie rozłożonemi, i nie będzie już przewagi składowej równoległej do płaszczyzny galaktycznej. Nie powiedzą one nam nic o samym obrocie, bo my jesteśmy częścią składową obracającego się układu. Jeżeli spiralne mgławice są innemi drogami mlecznemi, obcemi naszej, nie biorą one udziału w tym ruchu obrotowym, i możnaby badać ich ruchy własne. Coprawda są one bardzo odległe; jeżeli mgławica posiada rozmiary Drogi Mlecznej, a promień jej pozorny wynosi np. 20″, jej odległość jest równa 10.000 razy wziętemu promieniowi Drogi Mlecznej.

Nic to jednak nie szkodzi, bo wszak nie o ruchu przenoszenia naszego układu chcielibyśmy od nich powziąć wiadomości, lecz o jego ruchu obrotowym. Toż gwiazdy stałe ujawniają nam przez swój ruch pozorny obrót dzienny Ziemi, chociaż odległość ich jest olbrzymia. Na nieszczęście obrót możliwy Drogi Mlecznej, jakkolwiek jest względnie szybki, jest bardzo wolny, biorąc absolutnie, ponadto nastawianie lunet na mgławice nie może być bardzo dokładne; trzebaby przeto tysięcy lat obserwacji, aby się czegoś dowiedzieć.

Jakkolwiekbądź, w drugiej tej hypotezie kształt Drogi Mlecznej byłby kształtem ostatecznym.

Nie będę dłużej roztrząsał względnej wartości tych dwu hypotez, ponieważ istnieje trzecia podobniejsza, być może, do prawdy. Wiadomo, że wśród mgławic nierozwiązalnych można rozróżnić kilka rodzin: mgławice nieforemne, jak Oriona, mgławice planetarne i obrączkowe, mgławice spiralne. Widma dwu pierwszych rodzin zostały oznaczone, są one przerywane; mgławice te nie są zatym utworzone z gwiazd; zresztą rozkład ich na niebie jest, jak się zdaje, w zależności od Drogi Mlecznej; czy daje się zauważyć w nich dążność do oddalania się od Drogi Mlecznej, czy też do zbliżania się do niej, wchodzą one w skład jej systemu. Przeciwnie, mgławice spiralne uważane są naogół za niezależne od Drogi Mlecznej; przypuszcza się, że podobnie, jak ona, składają się one z mnóstwa gwiazd, że są to słowem inne drogi mleczne bardzo odległe od naszej. Świeże prace Stratonowa pozwalają uważać samą Drogę Mleczną za mgławicę spiralną — i to właśnie stanowi ową trzecią hypotezę, o której chciałem mówić.

Jakże wytłumaczyć ów, tak osobliwy, wygląd mgławic spiralnych, które są zbyt foremne i zbyt stałe, aby go można było przypisać przypadkowi? Przedewszystkim wystarczy rzucić okiem na obraz jednej z nich, aby stwierdzić, że masa jej jest w ruchu obrotowym; można nawet widzieć kierunek tego obrotu; wszystkie promienie spiralne zakrzywione są w tę samą stronę; oczywiste jest, że, mówiąc militarnie, *skrzydło posuwające* się opóźnia się względem *osi*, i to wyznacza kierunek obrotu. Więcej jeszcze; jasne jest, że mgławic tych nie można przyrównać do gazu w stanie spoczynku, ani nawet do gazu w równowadze względnej, pod działaniem jednostajnego obrotu; podobne one są raczej do gazu, znajdującego się w ruchu ustawicznym, w którym krążą prądy wewnętrzne.

Przypuśćmy np., że obrót jądra środkowego jest szybki (wiecie już, co rozumiem przez ten wyraz), zbyt szybki dla równowagi stałej; wówczas na równiku siła odśrodkowa przeważy atrakcję, gwiazdy będą miały dążność do wymknięcia się przez równik, i tworzyć będą rozbieżne prądy; lecz przy ich oddalaniu się, ponieważ ich moment obrotu pozostaje stałym, a promień wodzący rośnie, ich prędkość kątowa będzie się zmniejszała, i stąd pochodzi, że skrzydło posuwające się wydaje się opóźnione.

Przy tym założeniu nie byłoby prawdziwego ustawicznego ruchu, jądro środkowe traciłoby ciągle materję, która by je porzucała, aby doń nie wrócić, i stopniowo topniałoby. Lecz hypotezą naszą można zmodyfikować. Gwiazda w miarę oddalania się traci na prędkości i w końcu zatrzymuje się w biegu; w tym momencie chwyta ją znowu atrakcja i zawraca ku jądru; będziemy więc mieli prądy dośrodkowe. Trzeba przypuścić, że prądy dośrodkowe znajdują się w pierwszym szeregu, a prądy odśrodkowe w drugim, że znów powrócimy do porównania z kolumną wojska, dokonywującą zwrotu; istotnie złożona siła odśrodkowa musi być kompensowana przez atrakcję, wywieraną przez środkowe warstwy roju na warstwy krańcowe.

Zresztą, po pewnym czasie ustanowia się pewien układ stateczny; skoro rój się skrzywił, atrakcja, wywierana na punkt obrotu przez posuwające się skrzydło, zdąża do zwolnienia tego punktu, a atrakcja punktu obrotu na posuwające się skrzydło zmierza do przyspieszenia ruchu tego skrzydła, którego spóźnienie przestaje się zwalniać, tak iż ostatecznie wszystkie promienie obracają się z prędkością jednostajną.

Można przecież przypuścić, że ruch obrotowy jądra jest szybszy niż obrót promieni.

Pozostaje jedno jeszcze pytanie; dlaczego te dośrodkowe i odśrodkowe roje zdążają do skoncentrowania się w promienie, nie zaś rozsypują się we wszystkie strony? Dlaczego te promienie są rozłożone w sposób prawidłowy? Przyczyną koncentrowania się rojów jest atrakcja, wywierana przez już istniejące roje na gwiazdy, które w ich pobliżu wysuwają się z jądra środkowego. Skoro pewna nierówność się wytworzyła, przyczyna ta zdąża do jej wzmocnienia.

Dlaczego te promienie są rozłożone w sposób prawidłowy? Jestto kwestja trudniejsza. Przypuśćmy, że niema obrotu, że wszystkie gwiazdy znajdują się w dwu płaszczyznach prostopadłych tak, iż ich rozkład jest symetryczny względem tych dwu płaszczyzn. Symetrja sprawia, że niema żadnej racji, aby wyszły one z tych płaszczyzn, ani też, aby symetrja została zakłóconą. Konfiguracja ta dałaby więc nam równowagę, lecz byłaby to równowaga nietrwała.

Jeżeli natomiast istnieje ruch obrotowy, znajdziemy analogiczną konfigurację równowagi z czterema krzywemi promieniami, równemi sobie i przecinającemi się pod kątem 90^0, i jeśli obrót jest dostatecznie szybki, równowaga ta będzie mogła być trwała.

Nie jestem w stanie powiedzieć o tym nic bliższego: ale i to już pozwala przewidzieć, że, być może, spiralne te formy uda się kiedyś wytłumaczyć na gruncie jedynie prawa ciążenia oraz rozważań statystycznych, podobnych do rozważań z teorji gazów.

To, co powiedziałem powyżej o prądach wewnętrznych, wskazuje, że nie będzie bez interesu systematyczne roztrząśnięcie całości ruchów własnych; będzie można to przedsięwziąć za jakie sto lat, kiedy będzie się dokonywało drugiego wydania Mapy Nieba, i zestawi się je z pierwszym, którego obecnie dokonywamy.

Zanim skończę, chciałbym zwrócić waszą uwagę na jedną jeszcze kwestję, mianowicie na kwestję wieku Drogi Mlecznej lub mgławic. Gdyby nasze przypuszczenia znalazły potwierdzenie, moglibyśmy wyrobić sobie o tym wieku pewne pojęcie. Owa równowaga statystyczna, której wzoru dostarczają nam gazy, może się ustanowić jedynie w następstwie bardzo licznych zderzeń. Jeśli zderzenia te są rzadkie, równowaga nastąpi dopiero po upływie bardzo długiego czasu; jeśli istotnie Droga Mleczna (lub przynajmniej roje, które wchodzą w jej skład), jeśli mgławice osiągnęły tę równowagę, tedy muszą one być bardzo stare, i można wyznaczyć granicę dolną ich wieku. Można otrzymać również granicę górną tego wieku; równowaga nie jest ostateczna i nie może trwać wiecznie. Nasze mgławice spiralne dałyby się przyrównać do gazów, ożywionych ustawicznemi ruchami; lecz gazy w ruchu są lepkie i prędkości ich w końcu się zużyją. To, co tutaj odpowiada lepkości (i zależy od szans zderzeń cząsteczek), jest nadzwyczaj nikłe, tak, iż stan obecny będzie mógł trwać jeszcze przez czas bardzo długi, lecz nie nieskończony, i nasze drogi mleczne nie będą mogły żyć wiecznie, ani stać się nieskończenie staremi.

Nie wszystko to jeszcze. Rozważmy naszą atmosferę: na powierzchni musi panować temperatura nieskończenie mała i prędkość cząsteczek bliska zera. Lecz dotyczy to jedynie prędkości średniej, naskutek zderzeń jedna z tych cząsteczek będzie mogła nabyć (wprawdzie rzadko) prędkości ogromnej, i wówczas wyjdzie z atmosfery, a skoro wyjdzie, już do niej nie wróci; atmosfera nasza opróżnia się w ten sposób z nadzwyczajną powolnością. Droga Mleczna również tracić będzie od czasu do czasu gwiazdę takim samym sposobem, i to również ogranicza jej trwanie.

Jeżeli obrachujemy w ten sposób wiek Drogi Mlecznej, znajdziemy niewątpliwie olbrzymie cyfry. Owóż gotuje nam to nowe kłopoty. Niektórzy fizycy, na innych wspierając się rozważaniach, sądzą, że byt słońc jest zaledwie efemeryczny, i wynosi około pięćdziesięciu miljonów lat; nasze zaś minimum byłoby nieporównanie większe. Czyż należy mniemać, że ewolucja Drogi Mlecznej rozpoczęła się, kiedy materja była jeszcze ciemna? Lecz czym się to stało, że gwiazdy, które ją stanowią, doszły wszystkie jednocześnie do wieku dojrzałego, który to wiek tak krótkie ma mieć trwanie? Albo może dochodzą one kolejno do tego wieku, a te, które oglądamy, są jedynie nieznaczną mniejszością obok innych, które już zgasły, albo kiedyś zabłysną? Lecz jakże to pogodzić z tym, cośmy powiedzieli wyżej o nieobecności materji ciemnej w znaczniejszej proporcji? Czy trzeba będzie porzucić jedną z tych dwu hypotez, i którą? Poprzestaję na wskazaniu tej trudności, nie kusząc się o jej usunięcie; zakończę więc wielkim znakiem zapytania. Albowiem interesującym jest stawianie zagadnień nawet wówczas, gdy rozwiązanie ich zdaje się bardzo odległym.

Rozdział II.

Gieodezja francuska.

Każdy rozumie, jak pełnym interesu jest poznanie kształtu i rozmiarów naszego globu; znajdą się przecież ludzie, których, być może, dziwi ubieganie się za wielką dokładnością. Czyż nie jest to zbytkiem? Jaki jest pożytek z wysiłków gieodętów?

Gdyby pytanie to zadać jakiemu członkowi parlamentu, zapewneby odpowiedział: »Skłonny jestem mniemać, że gieodezja jest jedną z nauk najpożyteczniejszych; albowiem należy ona do nauk, które nas kosztują najdrożej«. Chciałbym spróbować dać wam odpowiedź nieco dokładniejszą.

Wielkie dzieła sztuki budowlanej, zarówno zwykłej, jak militarnej mogą być przedsiębrane jedynie na gruncie długich badań, oszczędzających wiele prób poomacku, zawodów, zbytecznych kosztów. Badań tych można dokonać jedynie na dobrej mapie. Lecz mapa będzie poprostu bezwartościową fantazją, jeśli się przy jej konstrukcji nie oprze na mocnym kośćcu. Będzie podobna do ludzkiego ciała, pozbawionego szkieletu.

Otóż tego kośćca dostarczają pomiary gieodetyczne; bez gieodezji więc niemasz dobrej mapy; bez dobrej mapy niemasz wielkich robót publicznych.

Racje te byłyby zapewne dostateczne, aby usprawiedliwić wiele wydatków; są one przystosowane do wymagań ludzi praktycznych. Nie na nie przecież wypada tutaj położyć nacisk; istnieją bowiem racje wyższe i, w gruncie rzeczy, ważniejsze.

Postawimy przeto kwestję inaczej: czy gieodezja może przyczynić się do lepszej znajomości przyrody? Czy pozwala poznać jej jedność i harmonję? Albowiem fakt odosobniony małą ma cenę, i zdobycze nauk posiadają wartość o tyle tylko, o ile torują drogę dalszym zdobyczom.

Jeżeli tedy odkrytoby mały garb na elipsoidzie ziemskiej, odkrycie to samo przez się niewielki przedstawiałoby interes. Cennym zaś stałoby się to odkrycie wówczas, gdybyśmy, poszukując przyczyny tego garbu, mogli spodziewać się przeniknięcia nowych tajemnic.

Jakoż, kiedy w XVIII-ym stuleciu Maupertuis i La Condamine zapuszczali się w różne odległe krainy, to szło im nietylko o to, by poznać kształt naszej planety, lecz o całość układu świata.

Jeśliby się miało okazać, że Ziemia jest spłaszczona, oznaczałoby to tryumf Newtona, a więc teorji grawitacji oraz całej nowoczesnej Mechaniki niebieskiej.

A czyż dzisiaj, półtora stulecia po zwycięstwie newtończyków, gieodezja nie jest powołana do rozszerzenia naszego poznania?

Nie wiemy, co się znajduje wewnątrz naszej kuli. Studnie kopalniane i sondowania pozwoliły nam poznać warstwę grubości 1 do 2 kilometrów, to znaczy jedną tysiączną masy całkowitej; ale cóż jest głębiej?

Ze wszystkich podróży nadzwyczajnych, wyśnionych przez Juljusza Vernea, podróż do środka ziemi zaprowadziła nas, być może, w najmniej dotychczas zbadane krainy.

A niedosięgłe te skały wywierają na odległość przyciąganie, działające na wahadło i odkształcające sferoidę ziemską. Gieodezja może tedy zważyć je, że tak powiemy, z oddali, i powiadomić nas o rozkładzie ich mas. Pozwoli ona w ten sposób widzieć w rzeczywistości owe tajemnicze krainy, które Juljan Verne ukazywał nam tylko w wyobraźni.

Nie jestto jedynie próżnym marzeniem. Astronom francuski Faye, przez porównanie wszystkich pomiarów, doszedł do wielce nieoczekiwanego wniosku: pod oceanami leżą skały o wielkiej masie, pod lądami natomiast znajdują się przestrzenie próżne.

Nowsze obserwacje wprowadzą, być może, pewne szczegółowe poprawki do tych wniosków.

Jakkolwiek będzie, sędziwy badacz wskazał nam, w jakim kierunku winny iść poszukiwania, co gieodeta może powiedzieć gieologowi, ciekawemu wewnętrznego ustroju Ziemi, a nawet myślicielowi, zaciekającemu się nad przeszłością i pochodzeniem naszej planety.

Dlaczego przecież nadałem niniejszemu rozdziałowi tytuł: »Gieodezja francuska«? Bo nauka ta w większym, być może, stopniu, niż nauki inne, przybrała w każdym kraju barwę narodową. Nietrudno jest znaleźć przyczynę tego zjawiska.

Współzawodnictwo jest rzeczą nieuniknioną. Współzawodnictwo naukowe jest zawsze — a przynajmniej prawie zawsze — kurtuazyjne; jest ono potrzebne, bo zawsze jest płodne.

A przedsięwzięcia gieodezyjne, wymagające tak długich wysiłków i tylu współpracowników, usuwają na plan drugi jednostkę (oczywiście wbrew jej woli); nikt nie ma prawa powiedzieć: to jest moim dziełem. I współzawodnictwo odbywa się tutaj nie między poszczególnemi ludźmi, lecz między narodami.

Nasuwa się w ten sposób pytanie, jaki był udział Francji w tym międzynarodowym turnieju. Powiedzmy odrazu, że mamy prawo być zeń dumni.

Na początku XVIII-go stulecia wszczęto długie dyskusje między newtończykami, którzy sądzili Ziemię spłaszczoną, zgodnie z wymaganiami teorji grawitacji, a Cassinim, który, wprowadzony w błąd przez nieścisłe pomiary, uważał glob ziemski za wydłużony. Jedynie bezpośrednia obserwacja mogła kwestję rozstrzygnąć. Zadanie to, olbrzymie na owe czasy, zostało podjęte przez naszą Akademję Umiejętności.

Podczas gdy Maupertuis i Clairaut mierzyli stopień południka pod kołem biegunowym, Bouguer i La Condamine udali się ku Andom, w kraje podległe podówczas Hiszpanji, stanowiące obecnie rzeczpospolitą Ekwadoru.

Wysłannicy nasi musieli pokonywać wielkie trudności, bo podróże nie były wówczas tak łatwe jak dzisiaj.

Wprawdzie okolica, w której operował Maupertuis, nie była pustynią, a nawet danym mu podobno było doznawać w krainie laponek owych słodkich uciech serca, które nie są dostępne prawdziwym żeglarzom podbiegunowym. Była to ta sama mniej więcej okolica, do której za naszych dni wykwintnie urządzone parowce przenoszą co lato karawany turystów i młodych angielek. W owych wszakże czasach nie było jeszcze agiencji Cooka, i Maupertuisowi zdawało się, że istotnie odbył on wyprawę biegunową.

Być może, iż nie był on całkowicie w błędzie. Rosjanie i Szwedzi dokonywają obecnie podobnych pomiarów na Szpicbergu w okolicach, po których wędrują olbrzymie kry lodu. Ale rozporządzają oni całkiem innemi środkami, a różnica czasów wyrównywa niewątpliwie różnicę szerokości gieograficznych.

Imię Maupertuisa doszło do nas z głębokiemi śladami pazurów doktora Akakii; badacz ten miał nieszczęście nie podobać się Voltaire'owi, który był wówczas królem dowcipu. Zrazu chwalił go bez miary; lecz pochlebstwa królów są równie groźne jak ich niełaska, bo rzadko trwają dłużej, niż dzień jeden. Sam Voltaire coś o tym wiedział.

Voltaire nazywał był Maupertuisa swoim ukochanym mistrzem myślenia, margrabią koła biegunowego, drogim spłaszczycielem świata oraz Cassiniego i nawet, pochlebstwo najwyższe, sir Izaakiem Maupertuis; pisał doń: »Jedynie króla pruskiego na tym samym co Pana stawiam poziomie; brakuje mu tylko to, że nie jest matematykiem«. Rychło przecież następuje zmiana sceny, nie mówi on już o podniesieniu go do rangi boga, jak niegdyś Argonautów, ani o sprowadzeniu z wyżyn Olimpu rady bogów, aby podziwiała jego prace, lecz o przykuciu go łańcuchami w zakładzie dla obłąkanych. Nie mówi już o wzniosłym jego umyśle, lecz o jego despotycznej pysze, podszytej małą ilością wiedzy a wielką śmieszności.

Nie mam zamiaru opowiadać tych bohatersko-komicznych zapasów; pozwolę sobie jednak na parę uwag o dwu wierszach Voltairea. W swoim »Discours sur la modération« (nie idzie tu o umiarkowanie w pochwałach ani w krytykach) poeta pisze:

Vous avez confirmé dans des lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.

Te dwa wiersze (które zajęły miejsce dawnych hiperbolicznych pochwał) są wielce niesprawiedliwe, i niema żadnej wątpliwości, że Voltaire zbyt był światły, żeby nie zdawać sobie z tego sprawy.

Wówczas ceniono jedynie odkrycia, których można dokonać, nie wychodząc ze swego domu.

Dzisiaj zlekceważonoby raczej teorję. Byłoby to zapoznaniem celu nauki.

Czy przyrodą rządzi kaprys, czy też panuje w niej harmonja? oto pytanie; piękno nauki polega właśnie na tym, że ujawnia nam ona tę harmonję, i przez to zasługuje na to, aby ją uprawiać. A jedyną drogą do tej harmonji jest zgodność teorji z doświadczeniem. Celem naszym jest przeto zbadanie, czy zgodność ta zachodzi czy nie. Skoro tak, tedy każda z obu części, które mamy ze sobą porównywać, jest zarówno niezbędną. Zaniedbać jedną dla drugiej byłoby nonsensem. Odosobniona, teorja byłaby próżna, doświadczenie — krótkowzroczne; i jedna i drugie byłyby bezużyteczne i pozbawione interesu.

Maupertuis ma zatym prawo do udziału w sławie. Zapewne, udział ten jest mniejszy od udziału Newtona, w którym paliła się iskra boża, a nawet od udziału jego współpracownika Clairauta. Niemniej nie jest on do pogardzenia, gdyż dzieło jego było niezbędne, i jeśli Francja, wyprzedzona przez Anglję w wieku XVII-ym, tak wybitny wzięła rewanż w wieku następnym, to zawdzięcza to nietylko gienjuszowi Clairautów, d'Alembertów, Laplaceów; ale również wytrwałej cierpliwości Maupertuisów i La Condamineów.

Dochodzimy do okresu, który możnaby nazwać drugim okresem bohaterskim Gieodezji. Francja jest na wewnątrz rozdarta. Cała Europa jest przeciw niej uzbrojona; zdawałoby się, że olbrzymie te boje winny wyczerpywać wszystkie siły. Bynajmniej — ma ona ich jeszcze dosyć, aby służyć nauce. Ludzie owej epoki nie cofali się przed żadnym przedsięwzięciem, bylito ludzie wiary.

Delambreowi i Méchainowi poruczono zmierzenie łuku, idącego od Dunkierki do Barcelony. Tym razem nie podąża się do Laponji lub Peru: nieprzyjacielskie eskadry zagrodziłyby nam drogę do tych krajów. Jeżeli przecież ekspedycje są mniej dalekie, to przeszkody a nawet niebezpieczeństwa są w tych niespokojnych czasach równie wielkie.

We Francji Delambreowi wypadło porać się ze złą wolą podejrzliwych municypalności. Wiadomo, że dzwonnice, jako widzialne zdaleka i stanowiące dobry cel dla przyrządów optycznych, służą często gieodetom, jako znaki. Ale w kraju, który przebiegał Delambre nie było już dzwonnic. Jakiś prokonsul, którego nazwiska nie pomnę, przeciągnął był tamtędy, i chełpił się, że obalił wszystkie dzwonnice, które wznosiły się dumnie ponad niskie pomieszkania sankiulotów.

Trzeba tedy było budować piramidy z desek i pokrywać je białym płótnem, aby je łatwiej było obserwować. Ale okazało się to rzeczą bynajmniej nie niewinną. Białe płótno! któż był tym śmiałkiem, co na świeżo wyzwolonych naszych wzgórzach odważał się zatykać ohydny sztandar kontrrewolucji? Musiano przeto oblamować białość płótna błękitnemi i czerwonemi szlakami.

Méchain, który operował w Hiszpanji, inne musiał pokonywać, nie mniej wielkie, trudności. Tutaj nie brak było dzwonnic, lecz czy instalowanie się na nich z narzędziami tajemniczemi i może djabelskiemi nie było bluźnierstwem? Rewolucjoniści byli sojusznikami Hiszpanji, lecz sojusznicy ci pachnęli nieco stosem.

»Ustawicznie, pisze Méchain, spotykają nas groźby, że przyjdą i zamordują nas«. Na szczęście, dzięki napomnieniom księży, listom pasterskim biskupów, srodzy hiszpanie ograniczają się pogróżkami.

W kilka lat później Méchain odbył powtórną ekspedycję do Hiszpanji: zamierzał przedłużyć linję południkową od Barcelony do Balearów. Po raz pierwszy podjęto przebycie zapomocą trójkątowań szerokiej cieśniny morskiej, obserwując znaki, zatknięte na wysokiej górze odległej wyspy. Przedsięwzięcie było dobrze pomyślane i dobrze przygotowane; niemniej jednak spełzło na niczym. Badacz francuski napotkał przeróżne przeszkody, na które gorzko się żali w swych listach. »Piekło — pisze on, z pewną, być może, przesadą — piekło i wszystkie plagi, jakiemi rzyga ono na świat, burze, wojna, dżuma, czarne intrygi sprzysięgły się przeciw mnie!«

Faktem jest, że napotkał on u swoich współpracowników więcej pychy i uporu, niż dobrej woli, i że tysiące przypadków opóźniło jego pracę. Dżuma nie była niczym w porównaniu ze strachem przed dżumą: wszystkie wyspy tego archipelagu obawiały się zawleczenia zarazy z wysp sąsiednich. Po długich tygodniach dopiero powiodło się Méchainowi otrzymać pozwolenie na wylądowanie, pod warunkiem poddania wszystkich swych papierów dezinfekcji octem.

Zrażony i chory, wysłał podanie o powrót, kiedy zaskoczyła go śmierć.

Zaszczyt kontynuowania i skończenia rozpoczętego dzieła przypadł Arago i Biotowi.

Dzięki poparciu rządu hiszpańskiego, opiece paru biskupów, a zwłaszcza jednego ze słynnych hersztów zbójeckich, operacje posuwały się dość szybko naprzód. Były one szczęśliwie ukończone, i Biot z powrotem we Francji, kiedy wybuchła burza.

Była to chwila, kiedy cała Hiszpanja sięgała po oręż, aby bronić przeciw nam swej niepodległości. Po co ten cudzoziemiec właził na góry i dawał sygnały? Oczywiście, żeby sprowadzić armję francuską. Arago udało się ujść nienawiści tłumu jedynie przez to, że sam stawił się do więzienia. W więzieniu miał przyjemność czytać w dziennikach hiszpańskich opis swej własnej egzekucji. Dzienniki ówczesne podawały niekiedy wiadomości, uprzedzające fakty. Pociechą dlań mogło być przynajmniej to, że, według sprawozdań w gazetach, umarł odważnie i po chrześcijańsku.

Ale i więzienie okazało się schroniskiem nie dość pewnym; trzeba więc było uciekać i przedostać się do Algieru. Tutaj wsiada na statek algierski idący ku Marsylji. Statek ten zostaje schwytany przez hiszpańskiego korsarza, i oto Arago jest z powrotem w Hiszpanji, włóczony z więzienia do więzienia wśród robactwa i w najstraszliwszej nędzy.

Gdyby szło jedynie o poddanych i gości, dej nie byłby nic powiedział. Lecz na pokładzie znajdowały się dwa lwy, które monarcha afrykański przesyłał Napoleonowi. Dej zagroził wojną.

Statek i więźniowie zostali wypuszczeni na wolność. Oznaczanie położeń powinnoby było być dokonywane dobrze, boć miano na pokładzie astronoma; lecz astronom cierpiał na morską chorobę i marynarze algierscy, którzy chcieli skierować się do Marsylji, wylądowali w Bougie. Stąd Arago udał się do Algieru, przebywając Kabylję pieszo, wśród tysiąca niebezpieczeństw. Przez długi czas zatrzymywano go w Afryce i grożono ciężkiemi robotami. W końcu udało mu się powrócić do Francji; obserwacje jego, przechowywane pod koszulą, i co dziwniejsza, jego instrumenty przetrwały bez uszkodzeń straszne te przygody.

Dotychczas Francja nietylko zajmowała pierwsze miejsce, lecz prawie sama jedna była na widowni. W następstwie nie gnuśnieliśmy w bezczynności, i nasza mapa sztabu gieneralnego jest wzorem w swoim rodzaju. Lecz nowe metody obserwacji i rachunku szły do nas głównie z Niemiec i z Anglji. Dopiero od jakich czterdziestu lat Francja znowu powróciła na dawne stanowisko.

Zawdzięcza to ona uczonemu oficerowi, gienerałowi Perrier, który dokonał szczęśliwie przedsięwzięcia istotnie śmiałego, gieodetycznego złączenia Hiszpanji i Afryki. Na czterech wierzchołkach po obu brzegach morza Śródziemnego ustawiono stacje. W czasie długich miesięcy wyczekiwano na spokojną i przezroczystą atmosferę. Wreszcie dostrzeżono wązki pas światła, który przebył 300 kilometrów nad powierzchnią mórz. Operacja się powiodła.

Dzisiaj powzięto zuchwalsze jeszcze projekty. Z pewnej góry w pobliżu Nicei wysyłać się będzie sygnały na Korsykę, ale nie dla celów gieodetycznych, lecz dla pomiarów prędkości światła. Odległość wynosi tylko 200 kilometrów, lecz promień światła będzie musiał odbyć podróż tam i z powrotem po odbiciu się od zwierciadła, umieszczonego na Korsyce. A nie wolno mu zabłądzić w drodze, bo musi on powrócić ściśle do punktu wyjścia.

Od tego czasu gieodezja francuska nie przestaje być czynną. Nie obfituje wprawdzie w równie zadziwiające przygody, lecz naukowe jej dzieło jest olbrzymie. Terytorjum Francji zamorskiej, podobnie jak terytorjum metropolji, pokrywa się dokładnie zmierzonemi trójkątami.

Wymagania znacznie wzrosły i to, co budziło podziw naszych ojców, nas już nie zadawala. Lecz w miarę pogoni za dokładnością wzrastają trudności pomiarów; wkoło nas pełno jest pułapek, strzec się musimy mnóstwa nieprzewidzianych źródeł błędów. Trzeba więc tworzyć coraz nieomylniejsze instrumenty.

I pod tym względem Francja nie dała się wyprzedzić. Przyrządy nasze dla pomiarów baz i kątów nie pozostawiają nic do życzenia; przytoczę również wahadło pułkownika Defforgesa, pozwalające na oznaczenie ciężkości z dokładnością dotychczas niedosiągnioną.

Przyszłość gieodezji francuskiej spoczywa obecnie w rękach »Service géographique de l'armée« (Gieograficznej służby armji), na którego czele stali kolejno gienerał Bassot i gienerał Berthaut. Było to dla naszej nauki rzeczą bardzo szczęśliwą. Aby uprawiać gieodezję, nie wystarcza posiadać uzdolnienie naukowe; trzeba być w stanie znosić uciążliwą pracę we wszelkich klimatach; trzeba, aby kierownik umiał zdobyć posłuszeństwo swych współpracowników i narzucić je tubylczym pomocnikom. Są to cnoty wojskowe. Wiadomo zresztą, że w armji naszej nauka dotrzymywała zawsze kroku odwadze.

Dodajmy, że organizacja wojskowa gwarantuje niezbędną jedność działania. Trudniej byłoby pogodzić uroszczenia uczonych, zazdrosnych o swą niezależność, dbałych o to, co zwą swą sławą, a którzy przecież musieliby pracować zgodnie pomimo znacznych odległości, jakieby ich dzieliły. Między dawnemi gieodetami zdarzały się często spory, które niekiedy długotrwałym odbijały się echem. Akademja długo rozbrzmiewała zatargiem między Bouguerem a La Condaminem. Nie chcę twierdzić, że wojskowi wolni są od namiętności, lecz dyscyplina narzuca milczenie nazbyt drażliwym miłościom własnym.

Kilka rządów obcych powołało naszych oficerów dla zorganizowania swej służby gieodetycznej: jestto dowód, że wpływ Francji zagranicą nie osłabł.

We wspólnym dziele, sławnym jest również udział naszych inżynierów hydrografów. Plany naszych brzegów, naszych kolonji, badania przypływów stanowią obszerne pole ich trudów. Wymienię wreszcie ogólną niwelację Francji, dokonywaną zapomocą pomysłowych metod Lallemanda.

Z takiemi ludźmi pewni jesteśmy przyszłości. Nie zbraknie im też pracy: nasze kolonialne imperjum otwiera przed niemi ogromne a źle zbadane przestrzenie. Co więcej: międzynarodowe Stowarzyszenie gieodetyczne uznało potrzebę nowego pomiaru łuku Quito, oznaczonego niegdyś przez La Condaminea. Operację tę powierzono Francji; miała ona wszelkie do tego prawa, boć nasi to przodkowie dokonali byli, że tak powiemy, naukowego zdobycia Kordylierów. Praw tych zresztą nikt nie podał w wątpliwość, i rząd nasz postanowił z nich skorzystać.

Kapitanowie Maurain i Lacombe dokonali pierwszego rekonesansu, i szybkość, z jaką wywiązali się ze swej misji, wymagającej przebycia krajów napół dzikich i pięcia się na urwiste góry, zasługuje na wszelkie pochwały. Wzbudziła ona podziw gienerała Alfaro, prezydenta rzeczypospolitej Ekwatoru, który przezwał ich »los hombres de hierro« — żelaźni ludzie.

Ostateczna misja wyjechała później pod wodzą podpułkownika (wówczas komendanta) Bourgeois. Wyniki osiągnięte potwierdziły nadzieje. Ale oficerowie nasi napotkali nieprzewidziane trudności klimatyczne. Po kilkakroć jeden z nich zmuszony był pozostawać parę miesięcy na wysokości 4000 metrów w obłokach i śniegu, nie widząc wcale sygnałów, na które miał skierować swoje narzędzia, a które były wciąż przesłonięte. Wszakże, dzięki ich wytrwałości i odwadze, pociągnęło to za sobą jedynie opóźnienie i nadwyżkę wydatków, nie zmniejszając bynajmniej dokładności pomiarów.

WNIOSKI OGÓLNE.

Na poprzedzających kartkach starałem się wytłumaczyć, jak badacz powinien przystępować do dokonania wyboru pośród niezliczonych faktów, nastręczających się jego uwadze, skoro naturalna ułomność jego umysłu zmusza go do dokonania wyboru, pomimo, że wybór jest zawsze ofiarą. Wytłumaczyłem to nasamprzód drogą rozważań ogólnych, przypominając z jednej strony naturę zagadnienia, o którego rozwiązanie idzie, i usiłując z drugiej lepiej zrozumieć naturę umysłu ludzkiego, który jest głównym narzędziem rozwiązania. Wytłumaczyłem to następnie na przykładach; przykładów tych nie mnożyłem w nieskończoność; ja również musiałem dokonać wyboru, i wybrałem naturalnie kwestje, które były przedmiotem moich własnych badań. Inni dokonaliby zapewne odmiennego wyboru; lecz mniejsza z tym, gdyż sądzę, że doszliby do tych samych wyników.

Istnieje hierarchja faktów; jedne nie posiadają doniosłości; nie dają nam one poznać nic, prócz siebie samych. Badacz, który je stwierdził, nie poznał nic ponad jeden fakt, i nie stał się zdolnym do przewidywania faktów nowych. Fakty te odbywają się, jak się zdaje, raz jeden, i nie powracają nigdy.

Istnieją prócz tego fakty o wielkiej wydajności; każdy z nich daje nam poznać nowe prawo. A skoro jest mus dokonania wyboru, tedy na te fakty winien badacz skierować uwagę.

Zapewne, klasyfikacja ta jest względna i zależna od słabości naszego umysłu. Faktami o małej wydajności są fakty złożone, na które rozmaite okoliczności mogą wywierać uczuwalny wpływ, i okoliczności te są zbyt liczne i zbyt rozmaite, żebyśmy byli w stanie wszystkie je od siebie odróżnić. Powinienbym raczej powiedzieć, że są to fakty, które my uważamy za złożone, dlatego, że umysł nasz nie jest w stanie rozwikłać plątaniny owych okoliczności. Umysł szerszy i subtelniejszy od naszego wydałby o nich zapewne sąd odmienny. Lecz mniejsza z tym; my możemy się posługiwać nie owym umysłem wyższym, lecz naszym.

Fakty o wielkiej wydajności są to fakty, które uważamy za proste; bądź dlatego, że są niemi rzeczywiście, dlatego że ulegają jedynie wpływowi małej ilości ściśle oznaczonych okoliczności, bądź dlatego, że przybierają pozór prostoty, ponieważ rozliczne okoliczności, od których one zależą, stosują się do praw przypadku, i w ten sposób wzajemnie się kompensują. I tak się rzeczy mają najczęściej. I to właśnie zmusiło nas do bliższego nieco rozpatrzenia, czym jest przypadek. Fakty, do których dają się stosować prawa przypadku, stają się dostępne badaczowi, którego zniechęciłaby niezwykła złożoność zagadnień, do których prawa te nie są stosowalne.

Widzieliśmy, że rozważania te stosują się nietylko do nauk fizycznych lecz również do nauk matematycznych. Metody dowodzenia fizyka i matematyka nie są jednakowe. Lecz metody wynalazczości bardzo są do siebie podobne. W obu wypadkach polegają one na wzniesieniu się od faktu do prawa i na poszukiwaniu faktów, zdolnych do doprowadzenia do pewnego prawa.

Ażeby to wykazać, przyjrzałem się umysłowi matematyka przy pracy i to w trojakiej formie: umysłowi matematyka wynalazcy i twórcy; umysłowi nieświadomego gieometry, który u naszych odległych przodków lub w zamierzchłych latach naszego dzieciństwa skonstruował naszą instynktowną ideję przestrzeni; umysłowi młodzieńca, przed którym nauczyciele szkół średnich odsłaniają pierwsze zasady nauki i usiłują wytłumaczyć podstawowe definicje. Wszędzie widzieliśmy rolę, jaką odgrywa intuicja i zmysł uogólnienia, bez którego każde z tych trzech, że tak powiem, pięter matematyki byłoby skazane na bezsilność.

I nawet w dowodzie matematycznym logika nie jest wszystkim; prawdziwe rozumowanie jest istną indukcją, pod wielu względami różną od indukcji fizycznej, lecz podobnie jak ta, postępującą od rzeczy szczególnych do ogólnych. Wszystkie wysiłki, przedsiębrane w celu obalenia tego stanu rzeczy i sprowadzenia indukcji matematycznej do reguł logiki, zakończyły się niepowodzeniami, źle ukrytemi używaniem języka niedostępnego profanom.

Przykłady, które zaczerpnąłem z nauk fizycznych, ukazały nam rozmaite wypadki faktów o wielkiej wydajności. Eksperyment Kaufmanna z promieniami radu dokonywa jednoczesnego przewrotu w Mechanice, Optyce i Astronomji. Dlaczego? Bo w miarę rozwoju tych nauk poznaliśmy lepiej łączące je związki, i w następstwie zarysowały się przed niemi jakgdyby ogólne kontury nauki powszechnej. Istnieją fakty wspólne kilku naukom, które wydają się źródłem wspólnym systemów wód, rozchodzących się w rozmaitych kierunkach, podobne do owego węzła saint-gotardzkiego, z którego wychodzą wody, zasilające cztery różne koryta rzek.

Pozwala to nam dokonywać wyboru faktów z większą przenikliwością niż nasi poprzednicy, którzy uważali te koryta za odrębne i oddzielone nieprzebytemi przegrodami.

Wybierać trzeba zawsze fakty proste, zpośród nich zaś należy dawać pierwszeństwo faktom, leżącym u takich gotardzkich węzłów, jak wspomniany powyżej.

Nawet wówczas, gdy między poszczególnemi naukami niema bezpośredniej łączni, jedna może wspomagać drugą światłem analogji. Kiedy badano prawa, którym ulegają gazy, wiadomo było, że stoi się wobec faktu o wielkiej wydajności; a przecież oceniano tę wydajność jeszcze niżej jej wartości, gdyż gazy przedstawiają z pewnego stanowiska obraz Drogi Mlecznej, i fakty, które wydawały się interesującemi jedynie dla fizyka, otworzą rychło nowe i nieoczekiwane widnokręgi — Astronomji.

Wreszcie, kiedy gieodeta stwierdza, że musi przesunąć lunetę o kilka sekund, aby ją nastawić na znak, który z wielkim mozołem był zatknął, jestto zapewne fakt bardzo mały; lecz jestto fakt o wielkiej wydajności nietylko dlatego, że odkrywa istnienie małego garbu na gieoidzie ziemskim, bo sam przez się garbek ten nie przedstawiałby znacznego interesu, — lecz dlatego, że garbek ten daje orjentację co do rozkładu materji wewnątrz globu, a przeto i co do przeszłości naszej planety, co do jej przyszłości i praw jej rozwoju.

SPIS RZECZY: