ROMUALD WITWIŃSKI

ZBIÓR ZADAŃ
NA DYSKUSYĘ I NA BADANIE ZALEŻNOŚCI FUNKCYONALNEJ

Z PRZEDMOWĄ

L. ZARZECKIEGO

Szanownemu Panu Profesorowi Samuelowi Dicksteinowi od autora.
1923/X 16 r.

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — LUBLIN — ŁÓDŹ
KRAKÓW — G. GEBETHNER I SPÓŁKA
POZNAŃ — KSIĘGARNIA M. NIEMIERKIEWICZA

ROMUALD WITWIŃSKI

ZBIÓR ZADAŃ
NA DYSKUSYĘ I NA BADANIE ZALEŻNOŚCI FUNKCYONALNEJ

Z PRZEDMOWĄ

L. ZARZECKIEGO

NAKŁAD GEBETHNERA I WOLFFA
WARSZAWA — LUBLIN — ŁÓDŹ
KRAKÓW — G. GEBETHNER I SPÓŁKA
POZNAŃ — KSIĘGARNIA M. NIEMIERKIEWICZA

Geprüft und freigegeben durch die Kais. Deutsche Presseabteilung.
Warschau den 7. 10. 1916. T. № 2941. Dr. № 178.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

SŁOWO WSTĘPNE.

Gdy, przed kilkunastu laty, z inicyatywy ś. p. Rafała Kornilowicza powstało w Warszawie Koło matematyczno-fizyczne, głównem zadaniem pracy nielicznych jego członków i założycieli była reforma nauczania matematyki w szkole średniej. Usiłowania te zbiegły się z dążeniami reformatorskiemi na Zachodzie i były w dużym stopniu ich wpływem owiane. Nieliczni wypowiedzieli walkę formalizmowi bezdusznemu nauczaniu, kultowi formuł dla formuł, uprawianiu zadań na zastosowanie tych formuł, zaniedbaniu związku z otaczającą rzeczywistością i innemi naukami, zapoznaniu samego ducha istotnego nauki... Chodziło wszak o żywotne interesy myśli ludzkiej. Nauka, którą zowią umiejętności królową, nauka, w której się przejawia z całą jasnością potęga rozumu ludzkiego, moc skupienia myśli, twórczość samodzielna ducha naszego, w nauczaniu szkolnem wyglądała jak nędzna „rzecz sama w sobie" śród pulsującej życiem realności.

Każda praca celowa i wytrwała wywiera skutki, na razie może nieznaczne, ale zawsze pomyślne. To też praca członków Koła matematyczno-fizycznego wpływ na nauczanie wywarła. Dziś inne poglądy panują w szkołach, inaczej przedstawiają się programy matematyki, duża zmiana nastąpiła w sposobie wykładu. Zjawiło się kilku młodych nauczycieli, którzy z całym zapałem młodości wnoszą ducha nowego w stare urzędowe formy programu i nauczania matematyki. Rozwijanie myślenia funkcyonalnego, graficzne przedstawienia, elementy rachunków wyższych i t. p. pojęcia już nie są, jak dawniej, przed laty kilkunastu, nowością — stopniowo wchodzą w życie.

Jednym z zasadniczych postulatów reformy nauczania matematyki jest zmodyfikowanie charakteru zadań, dawanych uczniom do rozwiązania, przez wprowadzenie w szerokim stopniu elementu dyskusyi, który nadaje zadaniu żywość oraz wymaga samodzielności myślenia. Zadanie na dyskusyę rozpatruje wielkości zmienne, bada przebieg ich zmienności, uczy obserwować jej własności, zbliża zagadnienie matematyczne do rzeczywistości, do faktów obserwowanych w doświadczeniu, a tem samem uczy myślenia w formie daleko lepszej, niż zadanie, wymagające zastosowania znanych wzorów lub prawd wogóle.

„Zbiór zadań“ p. R. Witwińskiego ma na celu dać materyał odpowiedni w nauczaniu szkolnem z dziedziny zadań na dyskusyę. Jest to u nas pierwsza w tej dziedzinie świadoma próba. Przerabianie podobnych zadań powinno znaleźć swój czas w programie każdej szkoły. Lepiej jest opuścić pewne części „teoryi“, niż zapomnieć o zadaniach na dyskusyę. Każdy doświadczony i myślący nauczyciel przekona się, jak wielkie znaczenie dla wyrobienia matematycznego i wogóle myślowego mają podobne zadania.

L. Zarzecki.

I. Dyskusya równań i nierówności, badanie funkcyi, przedstawienia graficzne.

1. Dane jest równanie

$$\frac{x+a}{2}=3.$$

Uważając a jako zmienną niezależną i x, jako funkcyę, zbadać tę funkcyę i przedstawić ją graficznie.

Znaleźć wszystkie wartości dodatnie zmiennej a, przy której funkcya x jest również dodatnią.

2. Dane jest równanie

$$\frac{x+a}{b}=c.$$

Znaleźć warunki, jakie powinny spełniać liczby a, b, c, aby pierwiastek tego równania 1) był dodatni, 2) ujemny, 3) równy zeru.

3. Dane jest równanie

$$y=3x-6.$$

Znaleźć graficznie taką wartość na x, przy której $y=9$, i otrzymany rezultat sprawdzić zapomocą rachunku.

4. Dane jest równanie

$$y=(3-a)x+1.$$

Zakładając, że liczba a zmienia się od 0 do 3, zbadać odpowiadające zmiany położenia linii prostej, mającej to równanie.

5. Dany jest układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 3x+5y=20a. \end{cases}$$

Znaleźć warunki, które musi spełniać parametr a, aby oba pierwiastki tego układu były 1) dodatnie, 2) oba ujemne, 3) jeden dodatni, drugi ujemny. Przedstawienie graficzne.

6. Dane są dwa równania jednoczesne

$$\begin{cases} y=2x+a \\ y=4x+b. \end{cases}$$

Znaleźć warunki, które powinny spełniać parametry a i b, aby pierwiastek y tego układu był dodatni, ujemny, równy zeru.

Rozpatrzyć przypadek, w którym $a=3$, i rezultaty badania przedstawić graficznie.

7. Dany jest układ dwóch równań

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ y=4x+b. \end{cases}$$

Znaleźć warunki, które powinien spełniać parametr b, aby

1) oba pierwiastki były dodatnie,
2) oba ujemne,
3) jeden równy zeru (x lub y),
4) znaków różnych (2 przypadki).

8. Dane jest równanie

$$8x^2-(m-1)x+m-7=0.$$

Znaleźć m tak, aby pierwiastki tego równania były

1) rzeczywiste i równe,
2) równe, lecz znaków przeciwnych,
3) odwrotnościami jeden drugiego,
4) jeden równy zeru.

9. Znaleźć c tak, aby pierwiastki równania

$$3x^2-10x+c=0$$

1) były oba dodatnie,
2) jeden dodatni, drugi ujemny,
3) jeden równy zeru,
4) oba urojone.

10. W równaniu

$$2x^2-(m-1)x+m+1=0$$

znaleźć m tak, aby różnica pierwiastków tego równania równała się 1.

11. Znaleźć warunek rzeczywistości pierwiastków równania

$$(a^2+b^2)x^2-2acx-b^2+c^2=0.$$

12. Znaleźć zależność, zachodzącą między spółczynnikami a, b, c równania kwadratowego

$$ax^2+bx+c=0,$$

aby różnica pierwiastków tego równania była równa 1.

13. Rozwiązać układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}\right)(2y-3x-2)=m \\ (4x-1)(7y+3x+5)=18. \end{cases}$$

Znaleźć warunek rzeczywistości pierwiastków tego układu i rozpatrzyć różne przypadki, zależne od wartości parametru m.

Wyznaczyć wartości parametru m, przy których $x=0$, $x=-1$.

14. W równaniu kwadratowem

$$9x^2-(2-\lambda)x-11+\lambda=0$$

wyznaczyć parametr λ tak, aby 1) pierwiastki tego równania były równe, 2) równe, lecz znaków przeciwnych.

15. Dane jest równanie o pierwiastkach rzeczywistych

$$ax^2+bx+c=0.$$

Nie rozwiązując równania, podać warunki, konieczne i dostateczne, przy których liczba dana λ jest 1) mniejszą od mniejszego pierwiastka, 2) zawiera się między pierwiastkami, 3) jest większa od większego pierwiastka.

Rozwiązanie. 1) $(a\lambda^2+b\lambda+c)a>0$ i $\lambda<-\frac{b}{2a}$; 2) $(a\lambda^2+b\lambda+c)a<0$; 3) $(a\lambda^2+b\lambda+c)a>0$ i $\lambda>-\frac{b}{2a}$.

16. Rozwiązać równanie

$$\frac{ax}{x-a}+x=b$$

i zbadać jego pierwiastki. Znaleźć warunek, przy którym oba pierwiastki są większe od a.

17. Przy jakich wartościach liczby m równanie

$$x^4-x^2-m=0$$

posiada wszystkie pierwiastki rzeczywiste?

18. W jakich granicach może zmieniać się liczba λ, aby równanie

$$x^4-2(\lambda-5)x^2+\lambda^2+10\lambda-23=0$$

posiadało 0, 2, albo 4 pierwiastki rzeczywiste?

19. Jak należy obrać liczbę λ, aby równanie

$$(\lambda-2)x^4-2(\lambda+3)x^2+(\lambda-1)=0$$

posiadało 1) wszystkie 4 pierwiastki rzeczywiste, 2) dwa rzeczywiste i dwa urojone, 3) wszystkie urojone?

20. Przedyskutować równanie drugiego stopnia

$$a(x+1)^2+b(x-1)^2-2\lambda(x^2+1)=0,$$

gdzie a, b, λ oznaczają wielkości stałe, i rozpatrzyć, jakie miejsce zajmują liczby $+1$ i -1 względem pierwiastków tego równania. Zakładamy, że $a>b$. Zbadać w szczególności przypadek, w którym $a=-b=+1$.

21. Znaleźć m tak, aby parabola

$$y=x^2-8x+m$$

była styczna do osi x.

22. *Znaleźć* zależność, która powinna zachodzić między spółczynnikami b i c, aby parabola

$$y=x^2+bx+c$$

była styczna do osi x.

23. Dana jest prosta

$$y=2x-m$$

i parabola $$y=x^2-3x+m_1,$$

Wyznaczyć m i m_1 w ten sposób, aby te linie przecinały się w punkcie $x=1$, $y=1$, i znaleźć drugi punkt przecięcia. Przedstawienie graficzne.

24. Parabola

$$y=x^2-6x+m$$

jest styczna do osi x i do prostej

$$y=2x-m_1.$$

Wyznaczyć punkt styczności paraboli z prostą. Przedstawienie graficzne.

25. Dany jest układ dwóch równań

$$\begin{cases} x^2+y^2=100 \\ y=x+m. \end{cases}$$

1) Znaleźć m tak, aby ten układ miał jedną i tylko jedną parę rozwiązań.

2) Znaleźć warunki, którym powinien czynić zadość parametr m, aby dany układ miał dwie różne pary rozwiązań, albo nie posiadał ich wcale. Przedstawienie graficzne.

26. Dane jest koło
$$x^2+y^2=2$$
i prosta
$$y=x+m.$$
Znaleźć m tak, aby prosta była styczna do koła.

27. Dana jest prosta
$$y=2x-2$$
i parabola
$$y=x^2-2x+m.$$
Wyznaczyć m tak, aby prosta była styczna do paraboli.

28. Dana jest prosta
$$y=2x+m$$
i parabola
$$y=x^2-2x+6.$$
Znaleźć m tak, aby prosta była styczna do paraboli.

29. Dana jest prosta
$$y=mx+3$$
i parabola
$$y=x^2-6x+7.$$
Znaleźć m tak, aby prosta była styczna do paraboli.

30. Dany jest układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi
$$\begin{cases} y=x^2+4x+5 \\ y=2x+m. \end{cases}$$
Wyznaczyć m tak, aby ten układ miał jedną i tylko jedną parę rozwiązań.

31. Dany jest układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi
$$\begin{cases} y=x^2+3x-1 \\ y=mx-2. \end{cases}$$
Wyznaczyć liczbę m tak, aby ten układ miał jedną i tylko jedną parę rozwiązań.

32. Dane są dwa równania jednoczesne
$$\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ ay=x^2+b. \end{cases}$$
Znaleźć warunki, które powinny spełniać parametry a i b, aby układ tych równań miał 1, 2, 3, 4 rozwiązania, albo też nie posiadał ich wcale. Przedstawienie graficzne.

33. Znaleźć zależność, która powinna zachodzić między parametrami a i b układu równań

$$\begin{cases} x^2+y^2=b \\ y=ax+b, \end{cases}$$

aby ten układ miał jedną i tylko jedną parę rozwiązań.

34. Rozwiązać układ dwóch równań

$$\begin{cases} x^2+y^2=169 \\ 5y=x^2+35 \end{cases}$$

i korzystając z ich przedstawienia graficznego, przewidzieć, że układ ten ma tylko dwie pary rozwiązań.

35. Rozwiązać graficznie układ dwóch równań

$$\begin{cases} xy=6 \\ x+y=5. \end{cases}$$

Korzystając z przedstawienia graficznego, przekonać się, że układ dany ma dwie pary pierwiastków symetrycznych. Wyniki otrzymane sprawdzić zapomocą rachunku.

36. Dany jest układ dwóch równań

$$\begin{cases} xy=9 \\ x+y=m. \end{cases}$$

Znaleźć warunki, które powinien spełniać parametr m, aby ten układ miał 1) dwie pary pierwiastków rzeczywistych, 2) jedną parę pierwiastków, 3) pierwiastki urojone. Otrzymane rezultaty przedstawić graficznie.

37. Dany jest układ dwóch równań

$$\begin{cases} xy=1 \\ y=mx+1. \end{cases}$$

Zbadać pierwiastki tego układu w zależności od parametru m i podać warunki, przy których układ ten posiada pierwiastki rzeczywiste albo urojone. Rezultaty badania przedstawić graficznie.

38. Dane są dwie osie spółrzędnych Ox i Oy i koło, styczne do osi Ox w punkcie początkowym, o promieniu $=r$.

1) Udowodnić, że między spółrzędnymi x i y punktów okręgu zachodzi związek

$$x^2+(y\mp r)^2=r^2,$$

gdzie znaki — i + odpowiadają przypadkom, kiedy koło jest położone w obszarze y-ów dodatnich lub ujemnych.

2) Znaleźć warunek, który powinna spełniać zmienna x, aby y posiadał wartości rzeczywiste, urojone, równe zeru.

3) Wykazać, że jednej i tej samej wartości y odpowiadają dwie wartości x, związane zależnością

$$x_1 + x_2 = 0.$$

4) Zakładając, że $r = 5$, znaleźć x tak, aby y równał się 9.

39. Rozwiązać graficznie układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} x^2 + (y-5)^2 = 25 \\ x = 4 \end{cases}$$

i otrzymane pierwiastki sprawdzić zapomocą rachunku.

40. Dany jest układ dwóch równań

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ x = m \end{cases}$$

Znaleźć warunek, który powinna spełniać liczba m, aby ten układ posiadał pierwiastek y urojony. Przedstawienie graficzne.

41. Dany jest układ dwóch równań

$$\begin{cases} x^2 + (y-3)^2 = 9 \\ y = m. \end{cases}$$

Znaleźć warunki, które powinien spełniać parametr m, aby ten układ posiadał pierwiastki różne rzeczywiste, równe, urojone.

Rozwiązać zadanie graficznie, a następnie rezultaty sprawdzić zapomocą rachunku.

42. Rozwiązać graficznie układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} x^2 + (y-10)^2 = 100 \\ y = x + 8. \end{cases}$$

Nie rozwiązując układu bezpośrednio, przewidzieć znaki pierwiastków tego układu.

43. Dane jest koło

$$x^2 + (y-5)^2 = 25$$

i prosta

$$y = x + m.$$

Przy jakich wartościach parametru m linie te przecinają się w dwóch punktach, jednym punkcie, albo nie przecinają się wcale.

W przypadku dwóch punktów przecięcia zbadać w zależności od wartości parametru m znaki pierwiastków układu powyższego.

44. Dany jest układ dwóch równań

$$\begin{cases} x^2+(y-4)^2=16 \\ y=mx+5. \end{cases}$$

Udowodnić, że, niezależnie od wartości rzeczywistej spółczynnika m, układ ten posiada zawsze dwa rzeczywiste pierwiastki. Podać rozwiązanie graficzne i analityczne.

45. Przedstawić graficznie równanie

$$y^2+(x-b)^2=b^2,$$

i na otrzymanym wykresie pokazać te wartości x, przy których y jest rzeczywisty albo urojony.

46. Dany jest układ dwóch równań z dwiema niewiadomemi

$$\begin{cases} y^2+(x-1)^2=1 \\ y=2x+m. \end{cases}$$

Znaleźć m tak, aby ten układ miał jedną i tylko jedną parę pierwiastków.

Wskazać warunki, którym musi czynić zadość parametr m, aby ten układ posiadał dwa pierwiastki rzeczywiste, albo nie posiadał ich wcale. Rezultaty badania przedstawić graficznie.

47. Jaki warunek winna spełniać liczba n, aby przy wszystkich rzeczywistych wartościach x zachodziła nierówność

$$x^2+2x+n>10?$$

48. Rozwiązać nierówności

$$1)\quad 4x^3-10x^2+48x<0.$$

$$2)\quad 3x^3-12x^2+9x>0.$$

49. Znaleźć h tak, aby nierówność

$$x^2+2hx+h>{}^3/_{16}$$

była prawdziwa przy wszystkich wartościach rzeczywistych x.

50. Rozwiązać nierówność

$$\frac{x^2+10x+16}{x-1}>10.$$

51. Jakim warunkom powinna czynić zadość liczba m, aby trójmian

$$mx^2+(m-1)x+m-1$$

był ujemny przy wszystkich rzeczywistych wartościach x?

52. Rozwiązać nierówność

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>0.$$

53. Przy jakich wartościach h ułamek

$$\frac{x^2-hx+1}{x^2+x+1}$$

zawiera się między -3 i $+3$?

54. Opierając się na własnościach znaku trójmianu kwadratowego, zbadać położenie, które zajmują liczby 4 i 6 względem pierwiastków równania kwadratowego

$$x^2-8x+15=0.$$

55. Dane jest równanie kwadratowe

$$x^2-7x+6=0.$$

Zakładając o pierwiastkach x_1, x_2 tego równania, że $x_1<x_2$, uporządkować te pierwiastki i liczbę 3 w porządku wzrastania.

56. Opierając się na własnościach znaku trójmianu kwadratowego, uporządkować w porządku wzrastania pierwiastki x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ równania

$$x^2-22x+80=0$$

i liczby 4 i 20.

57. Dane jest równanie kwadratowe

$$2x^2-9x+m=0.$$

Znaleźć warunek, który powinna spełniać liczba m, aby liczba 2 zawierała się między pierwiastkami tego równania.

58. Nie rozwiązując równania kwadratowego

$$x^2-12x+32=0,$$

wykazać, że 1) jeden z pierwiastków tego równania jest większy od 5, a drugi mniejszy od 5; 2) oba pierwiastki są większe od 3; 3) oba pierwiastki są mniejsze od 9.

59. Znaleźć liczbę całkowitą x tak, aby ułamek

$$\frac{x+2}{4-x}$$

był większy od 2.

60. Znaleźć minimum funkcyi

$$y=\frac{x^2+4}{x},$$

gdy x przybiera tylko wartości dodatnie, i zbudować krzywą, odpowiadającą zmienności tej funkcyi.

Posługując sie otrzymanym wykresem, zbadać warunki, które powinna spełniać zmienna x, aby funkcya y była większa od 4.

Otrzymane rezultaty sprawdzić zapomocą rachunku.

61. Wyznaczyć graficznie warunki, które powinna spełniać liczba x, aby ułamek

$$\frac{x^2-9}{x}$$

był dodatni albo ujemny, i rezultaty sprawdzić zapomocą rachunku.

62. Znaleźć warunek, który powinna spełniać liczba h, aby trójmian

$$x^2-2hx+1$$

był dodatni przy wszelkich rzeczywistych wartościach x. Podać przedstawienie graficzne.

63. Znaleźć spółczynniki trójmianu

$$ax^2+bx+c,$$

aby ten trójmian był równy zeru przy $x=8$ i osiągał minimum $=-12$ przy $x=6$.

64. Znaleźć spółczynniki trójmianu

$$y=ax^2+bx+c$$

tak, aby ten trójmian osiągał minimum $=-1$ przy $x=2$ i żeby jego wartość przy $x=1$ była równa 1. Przedstawić graficznie trójmian, spełniający żądane warunki.

65. Dana jest funkcya

$$y=\frac{x^2+bx+c}{x^2+b'x+c'},$$

przybierająca minimum $y=-1$ przy $x=-1$ i maximum $y=2$ przy $x=+1$.

Przy obecności tych warunków znaleźć wartości na spółczynniki b, c, b', c' i zbudować odpowiadającą krzywą.

66. Dany jest trójmian kwadratowy

$$y=\frac{1}{2}(x^2-6x+h).$$

1) Wyznaczyć spółczynnik h tak, aby minimum tego trójmianu równało się $^1/_2$.

2) Zbudować w tym przypadku krzywą przebiegu zmienności funkcyi y.

3) Wyznaczyć na krzywej punkt tak, aby styczna w tym punkcie do krzywej tworzyła z osią Ox kąt, równy 45^0.

67. Zbadać przebieg zmienności funkcyi

$$y=\frac{x+1}{x},$$

przedstawić tę funkcyę graficznie i zbudować jej asymptoty.

68. Zbadać przebieg zmienności funkcyi

$$y=\frac{x+3}{x-3}$$

i zbudować odpowiadającą krzywą.

69. Zbadać przebieg zmienności funkcyi

$$y=\frac{2x}{x-2}$$

i przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej. Znaleźć wszystkie wartości x, przy których funkcya y jest zawarta między 3 i 4.

70. Zbadać przebieg zmienności funkcyi

$$y=\frac{x}{x^2-2x+m},$$

gdzie m oznacza wielkość stałą.

Przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej i rozpatrzyć różne przypadki, które mogą mieć miejsce w zależności od wartości parametru m.

Rozwiązanie. Funkcya

$$y=\frac{x}{x^2-2x+m}$$

jest ciągła dla wszystkich wartości x, z wyjątkiem tych, które zamieniają na zero mianownik x^2-2x+m. Ten trójmian ma dwa pierwiastki rzeczywiste i różne przy obecności warunku $m<1$, dwa pierwiastki równe—przy $m=1$, i nie ma pierwiastków, jeżeli $m>1$.

Pochodna funkcyi y względem x jest

$$y' = \frac{-x^2+m}{(x^2-2x+m)^2};$$

jeżeli parametr m jest dodatni, wówczas ta pochodna staje się zerem przy dwóch wartościach $x = \pm\sqrt{m}$, i, jeżeli parametr m jest ujemny, pochodna y' jest stale ujemna.

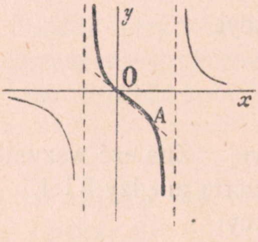
Wartości osobliwe parametru m, są to wartości 0 i 1.

Przypadek I. $m<0$.

W tym przypadku, funkcya y jest nieciągła przy dwóch wartościach x, mających znaki różne, i które to wartości oznaczymy przez α i β; ponieważ pochodna y' jest tutaj stale ujemna, przeto funkcya y stale maleje, i tablica zmian przedstawia się, jak to poniżej:

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
y'	$-$		$-$ $-$		$-$
y	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$

Na rysunku 1 przedstawiona jest odpowiadająca krzywa. Krzywa ta przechodzi przez początek układu 0, i styczna w tym punkcie ma spółczynnik kątowy $= \frac{1}{m}$, ponieważ granica ułamka $\frac{y}{x}$ przy $x=0$ równa się $\frac{1}{m}$. Szukajmy położenia krzywej względem tej stycznej; oznaczmy przez Y rzędną stycznej; będziemy mieli



Rys 1.

$$y - Y = \frac{x}{x^2-2x+m} - \frac{x}{m} = \frac{-x^2(x-2)}{m(x^2-2x+m)}$$

Dla wartości x, blizkich do zera, $y - Y$ jest dodatnie, i krzywa jest położona, jak to na rys. 1.

W szczególności, $y - Y$ staje się zerem przy $x=2$, zatem styczna w punkcie początkowym przecina krzywą w punkcie A, którego odcięta $=2$; z łatwością widzimy, że ta liczba zawiera się między α i β.

Przypadek II. $m=0$.

Równanie sprowadza się do równania

$$y = \frac{x}{x^2-2x} = \frac{x}{x(x-2)}.$$

Krzywa rozpada sie na dwie: jedną — oś y, czyli $x=0$, i drugą— hiperbolę równoboczną $y = \frac{1}{x-2}$, albo $(x-2)y=1$. Ta hiperbola ma za asymptoty dwie proste $x=2$, $y=0$. Budowa jej nie przedstawia żadnej trudności.

Przypadek III. $0<m<1$.

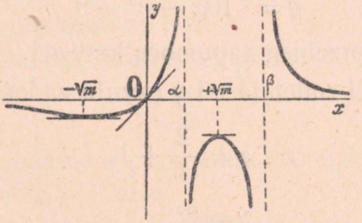
Mianownik funkcyi y przybiera dwa pierwiastki dodatnie α i β, a licznik pochodnej staje się zerem przy dwóch wartościach $\pm\sqrt{m}$. Porównajmy $\sqrt{m}$ z α i β; zastępując x przez $\sqrt{m}$ w trójmianie x^2-2x+m, otrzymamy

$$2m-2\sqrt{m}, \quad \text{albo} \quad 2\sqrt{m}\,(\sqrt{m}-1),$$

co jest ilością ujemną. Otóż, $\sqrt{m}$ jest zawarty między α i β. Zauważmy także, że pochodna y' jest ujemną dla wartości x, położonych zewnątrz przedziału $(-\sqrt{m}, +\sqrt{m})$ i dodatnią dla wszystkich wartości tego przedziału. Mamy więc tablicę następującą:

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		α		$\sqrt{m}$		β		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$		$+$		$-$		$-$	
y	0	$\searrow$	$min.$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$	$\nearrow$	$max.$	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0

i krzywą odpowiadającą (rys. 2).



Rys. 2.

Przypadek IV. $m=1$.

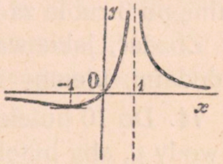
W tym przypadku mamy

$$y=\frac{x}{(x-1)^2}, \quad y'=-\frac{x+1}{(x-1)^3}.$$

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$		$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0

Należy zauważyć, że y nie zmienia znaku, gdy x przekracza wartość $=1$, ponieważ ta wartość jest pierwiastkiem podwójnym mianownika.

Stąd wyprowadzamy formę krzywej (rys. 3).



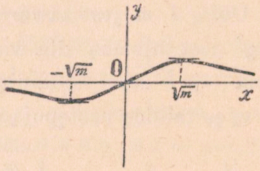
Rys. 3.

Przypadek V. $m>1$.

Mianownik nie staje się zerem; pochodna ma zawsze dwa pierwiastki $\pm\sqrt{m}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{m}$		0		$+\sqrt{m}$		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$+$		$-$	
y	0	$\searrow$	*min.*	$\nearrow$	0	$\nearrow$	*max.*	$\searrow$	0

Budujemy odpowiadającą krzywą (rys. 4).



Rys. 4.

71. Zbadać przebieg zmienności funkcyi

$$y=\sqrt{10x-x^2-9}$$

i przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej.

72. Wielkości zmienne x i y czynią zadość równaniom:

$$x=\frac{2}{t}+1,$$

$$y=2t.$$

Znaleźć związek między zmiennymi x i y, zbadać ten związek i zbudować odpowiadającą krzywą.

II. Funkcya liniowa i dyskusya równania liniowego.

73. Kupiec kupił a butelek wina po 5 rubli za butelkę. Po dolaniu do tego wina jeszcze 4 butelek wody, kupiec sprzedał mieszaninę po 3 ruble za butelkę. Ile kupiec zyskał na tej sprzedaży?

Zbadać, jakie warunki powinna spełniać liczba a, aby zysk był dodatni, ujemny lub zerowy. Przedstawienie graficzne.

74. Do 10 butelek wina w cenie po 5 rb. za butelkę dolano tyle wody y, aby butelka rozcieńczonego wina mogła być sprzedawana bez zysku i bez straty po x rubli za butelkę.

1) Ile butelek wody dolano?

2) Znaleźć warunek możliwości zadania.

3) Uważając y jako funkcyę jednoznaczną zmiennej x, zbadać tę funkcyę, podać jej przedstawienie graficzne i na otrzymanym wykresie pokazać obszar możliwości zadania.

75. Wiadro płynu zawiera mieszaninę wody i spirytusu, przyczem ilość spirytusu stanowi 40% ilości całej mieszaniny; do tego płynu dolewamy wodę w takiej ilości y (wiader), aby w otrzymanej mieszaninie ilość spirytusu wynosiła $x\%$. Liczba y jednoznacznie zależy od x.

1) Znaleźć związek między x i y w postaci równania $y=f(x)$ i podać warunek, który winna spełniać liczba x, aby zadanie było możliwe.

2) Zbadać ten związek i zbudować odpowiadającą krzywą.

3) Rozwiązać zadanie w przypadkach szczególnych, kiedy $x=1, 2, 4, 5, 12$ i t. d.

76. Z dwóch gatunków herbaty po 3 i 5 rb. za funt, kupiec zrobił mieszaninę w ilości 20 funtów, którą następnie sprzedał bez zysku i bez straty po a rubli za funt.

1) Ile funtów herbaty każdego gatunku miał kupiec?

2) Jaki warunek powinna spełniać liczba a, aby zadanie było możliwe.

3) Rozwiązać zadanie w przypadku szczególnym, gdy $a=4^1/_2$, i podać przedstawienie graficzne.

77. W dwóch koszykach znajdują się jabłka, przyczem w pierwszym dwa razy więcej, niż w drugim. Do pierwszego koszyka zostało dołożono 5, a do drugiego a jabłek, poczem okazało się, że w drugim koszyku jest jabłek dwa razy więcej, niż w pierwszym. Ile było jabłek początkowo w każdym koszyku?

Jakiemu warunkowi powinna być poddana liczba a, aby zadanie było możliwe? Jaki warunek winna spełniać liczba a, aby ilości jabłek w każdym koszyku były liczbami całkowitemi? Oznaczając przez y liczbę jabłek w drugim koszyku, przedstawić graficznie związek między y i a.

78. Ojciec ma a lat, a syn ma b lat. Za ile lat stosunek lat ojca do lat syna będzie równał się n? Dyskusya.

Rozwiązanie. Niech to ma miejsce za x lat; równanie zadania jest:

$$a+x=n(b+x);$$

skąd

$$x=\frac{a-nb}{n-1} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Badanie. n jest liczbą, większą od 1, zatem mianownik jest różny od zera i dodatni. Co do licznika, możliwe są trzy założenia:

$$a > nb;\quad a = nb;\quad a < nb.$$

1. $a > nb$.—Przy obecności tego warunku, licznik i, co za tem idzie, x jest dodatni.

Ta wartość dodatnia x daje bezpośrednią odpowiedź na zadanie, to jest, że w *przyszłości*, po przeciągu liczby lat, wyrażonej wzorem (1), ojciec będzie n razy starszy od syna. W rzeczy samej, stosunek lat ojca do lat syna obecnie równa się $\frac{a}{b}$ (ułamk. niewł.); stosunek ten powinien się zmniejszyć, ponieważ z warunku $a > nb$ znajdujemy $n < \frac{a}{b}$; a wiemy, że dodając jednakowo do obu wyrazów ułamka niewłaściwego, zmniejszamy jego wartość.

2. $a = nb$.—W tym przypadku licznik wzoru (1) staje się zerem, i jednocześnie $x = 0$. Rozwiązanie to pokazuje, że szukany fakt ma miejsce obecnie, albowiem z warunku danego mamy $\frac{a}{b} = n$, czyli, że już teraz stosunek lat ojca do lat syna ma żądaną wartość n.

3. $a < nb$. — Licznik x-a, a więc i sam x jest ujemny. W rzeczy samej, obecnie stosunek lat ojca do lat syna $= \frac{a}{b}$; z warunku zaś mamy, że $n > \frac{a}{b}$, to jest trzeba, żeby ten stosunek powiększył się; jasnem jest, że to jest niemożliwe w przyszłości, ponieważ, dodając jednakowo do wyrazów ułamka niewłaściwego, nie zwiększamy, lecz zmniejszamy jego wartość.

Wartość bezwzględna rozwiązania ujemnego czyni zadość równaniu, otrzymanemu z pierwotnego przez zamianę x na $-x$, to jest — równaniu:

$$a - x = n(b - x),$$

a więc wartość ta daje odpowiedź bezpośrednią na zadanie: „ojciec ma a lat, syn—b lat; *ile lat temu* ojciec był n razy starszy od syna“?

W tej formie, przy danym warunku $n > \frac{a}{b}$, zadanie jest możliwe, ponieważ, odejmując jednakowo od obu wyrazów ułamka niewłaściwego, istotnie powiększamy jego wartość.

Zakończenie. Z powyższego wynika, że nadając rozpatrywanemu zadaniu formę najogólniejszą: „stosunek lat ojca do lat syna równa się $\frac{a}{b}$;

wyznaczyć czas, w którym ten stosunek ma wartość daną n", — znajdziemy, że wzór (1) daje dla wszystkich przypadków rozwiązanie zadania, jeżeli znalezioną liczbę lat będziemy uważali: w *przyszłości*, gdy jest *dodatnią* i w *przeszłości*, gdy jest *ujemną*.

79. Oznaczając przez y liczbę przekątnych, poprowadzonych z jednego wierzchołka wieloboku, przez x liczbę jego boków, napisać związek między temi liczbami, zbadać ten związek, przedstawić go graficznie i następnie na otrzymanym wykresie pokazać obszar możliwości zadania.

80. Dane są dwie proste równoległe w odległości $AB = 3$ i prosta zmienna, przechodząca przez punkt C, położony na AB w odległości $=1$ od punktu A. Prosta ta przecina równoległe odpowiednio w punktach M i N.

Odcinek $AM = x$ jednoznacznie wyznacza odcinek NB, który oznaczmy przez y.

1) Znaleźć związek między x i y w postaci równania $y = f(x)$.

2) Zbadać przebieg zmienności y, gdy x zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$, i przedstawić ten przebieg graficznie.

81. Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $AB = BC = a$. Na boku BC, albo na jego przedłużeniu, obieramy punkt M, którego odległość od punktu B, czyli $BM = x$. Przez punkt M prowadzimy prostą, równoległą do boku AB, przecinającą podstawę AC w punkcie N. Odcinek MN oznaczamy przez y.

1) Zakładając, że odcinek x jest dany, znaleźć długość odcinka y.

2) Zbadać przebieg zmienności y, gdy x przybiera wszystkie wartości od $-\infty$ do $+\infty$ i podać wykres tej zmienności.

82. Dane są dwa koła, styczne do jednej i tej samej prostej w punktach A i B $(AB = a)$ i położone z różnych stron tej prostej. Na odcinku AB obieramy punkt M w odległości zmiennej x od punktu B. Z punktu M prowadzimy styczną do koła (A) i oznaczamy ją przez y.

1) Znaleźć związek między x i y w postaci równania $y = f(x)$.

2) Zbadać przebieg zmienności y, gdy x zmienia się od o do a i przedstawić ten przebieg graficznie.

83. Na prostej Ox od punktu O, w jednym i tym samym kierunku, odkładamy odcinki $OA = a$, $OB = b$ $(a > b)$ i następnie do prostej Ox wystawiamy prostopadłe AA' i BB'. Na prostej AA' obieramy punkt M w odległości zmiennej x od A $(AM = x)$ i przez ten punkt prowadzimy równoległą MN do Ox, przecinającą BB' w punkcie N. Oznaczmy przez K punkt przecięcia prostych BB' i OM i przez y odcinek NK.

1) Znaleźć związek między y i x w postaci równania $y=f(x)$.

2) Zbadać ten związek i przedstawić go graficznie.

84. Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym przyprostokątna $AC=a(AC>AB)$. Ze środka przeciwprostokątnej BC wystawiamy prostopadłą, przecinającą AC w punkcie D.

1) Oznaczając AD przez x i pole kwadratu, wystawionego na AB przez y, wyrazić pole y w funkcji zmiennej x.

2) W jakich granicach może zmieniać się x, aby zadanie było możliwe?

3) Zbadać przebieg zmienności pola y; przedstawić ten przebieg graficznie i na wykresie pokazać obszar możliwości zadania.

85. Dane jest koło O o promieniu $=R$. Z punktu A, położonego zewnątrz tego koła, w odległości x od środka O, prowadzimy dwie styczne do koła AP, AQ (P, Q — punkty styczności). Układ, tak otrzymany, obraca się dokoła prostej AO, jako osi.

Oznaczając przez y stosunek bocznej powierzchni stożka APQ do powierzchni pozostałej części otrzymanej bryły obrotowej, znaleźć związek między x i y w postaci równania $y=f(x)$, zbadać ten związek i podać przedstawienie graficzne.

86. Jeden z robotników wyrabia dziennie a łokci sukna, a drugi w przeciągu tego samego czasu b łokci. Pierwszy już wyrobił c łokci, a drugi o m łokci więcej. Za ile dni od czasu obecnego, liczba łokci, wyrobionych przez jednego i drugiego będzie jednakowa? Dyskusya.

87. Dwa wodozbiory, z których jeden zawiera już a litrów, a drugi b litrów, otrzymują odpowiednio: pierwszy c litrów a drugi d litrów na godzinę. Za ile godzin pierwszy wodozbiór będzie zawierał wody dwa razy więcej, niż drugi. Dyskusya.

88. W m funtach wody morskiej znajduje się p funtów soli. Ile funtów czystej wody należy dolać, aby m funtów mieszaniny zawierały tylko p' funtów soli. Dyskusya.

89. Poprowadzić styczną wspólną do dwóch kół danych.

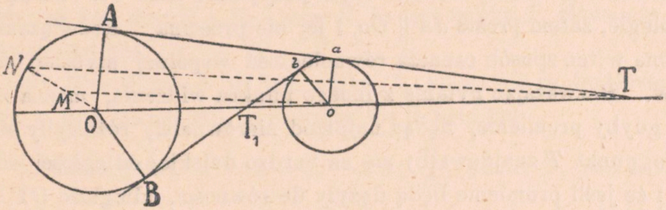
A. *Konstrukcya stycznej wspólnej zewnętrznej.*

Niech odległość OT punktu przecięcia stycznej wspólnej zewnętrznej z linią środków od środka O równa się x; promień $OA=R$; $oa=R'$; $Oo=d$. Z podobieństwa trójkątów OAT i oaT mamy:

$$OT : oT = OA : oa, \quad \text{albo} \quad x : (x-d) = R : R',$$

skąd

$$x = \frac{dR}{R-R'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



Rys. 5.

Dyskusya składać się będzie z trzech głównych części, zależnie od tego, czy mianownik $R-R'$ jest dodatni, ujemny lub równy zeru.

I. $R-R'>0$, albo $R>R'$. Wartość x jest w tym przypadku dodatnia, skończona i $>d$, ponieważ $\frac{R}{R-R'}>1$, a więc punkt T znajduje się na przedłużeniu linii Oo. Prócz tego jest niezbędnem, aby $x \geqq d+R'$, albo $\frac{dR}{R-R'} \geqq d+R'$. Ponieważ $R-R'>0$, przeto, mnożąc obie strony przez tę różnicę, nie zmienimy znaku nierówności, zatym

$$dR \geqq (d+R')(R-R'),$$

skąd

$$d \geqq R-R'.$$

Nierówność jest spełniona, gdy 1) koła są położone jedno zewnątrz drugiego, nie mając punktów wspólnych, ponieważ wówczas $d >$ nawet $R+R'$; 2) koła mają styczność zewnętrzną; 3) przecinają się. Równość zaś jest spełniona przy styczności wewnętrznej; w tym ostatnim przypadku $x=\frac{(R-R')R}{R-R'}=R$, i punkt T zlewa się z punktem styczności kół.

Gdy $R'=O$, czyli koło małe sprowadza się do samego środka, wówczas warunek możliwości sprowadza się do $d \geqq R$, a $x=d$,—rezultaty zrozumiałe same przez się.

II. $R-R'<0$, albo $R<R'$. W tym przypadku x jest ujemne, zatem punkt T znajduje się na lewo od środka O. W tym przypadku odpada potrzeba powtórnego badania. uskutecznionego wyżej, ponieważ dla wyznaczenia różnych położeń punktu T oczywiście wystarczy przewrócić

rysunek poprzedni tak, aby mniejsze koło znajdowało się na lewo od większego.

III. $R - R' = 0$, albo $R = R'$, to jest oba koła są równe. Możliwe są przytem przypadki następujące:

a) Jeżeli $d > 0$, $x = \frac{dR}{0} = \infty$, czyli, że punkt T odsuwa się w nieskończoność. W rzeczy samej, w tym przypadku linie OA i oa są równe i równoległe, zatem prosta $aA \parallel Oo$, i jej nie przecina. Rozwiązanie nieskończone w ten sposób oznacza równoległość wspólnej stycznej do linii środków. Rozważając pytanie z innego punktu widzenia, można zauważyć, że gdyby promienie, będąc najprzód nierównemi, różniłyby się nieznacznie, punkt T znajdowałby się na bardzo dalekiej odległości od punktu O, i że jeśli promienie będą dążyły do równości, odległość OT będzie wzrastała nieograniczenie; gdy promienie są równe, punkt T odchodzi w nieskończoność, i $x = \infty$.

b) Jeżeli, przy $R - R' = 0$, i $d = 0$, wówczas $x = \frac{0}{0}$, i zadanie staje się nieoznaczonem. Istotnie, oba koła mają w tym przypadku wspólny środek i równe promienie, czyli zlewają się; ani linia Aa, ani Oo nie mają w takim razie określonego położenia, a więc i punkt ich przecięcia jest zupełnie nieoznaczony.

c) Wreszcie, jeżeli $R = R' = 0$, x również przybiera postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$. Nieoznaczoność ta z łatwością tłumaczy się: oba koła sprowadzają się do swych środków, linia Aa zlewa się z Oo, i punkt T może być obrany zupełnie dowolnie na linii Oo.

Konstrukcya. Wzór (1) daje proporcyę: $(R - R') : R = d : x$, która powiada, że x jest to odcinek czwarty proporcyonalny do trzech linii $R - R'$, R i d. Prowadząc promień dowolny ON w kole o środku O, odkładamy na nim odcinek $NM = R'$; otrzymamy $OM = R - R'$. Połączywszy punkt M z punktem o, prowadzimy $NT \parallel Mo$; punkt T jest punktem szukanym. Prowadząc z tego punktu styczną TA do koła O, przekonamy się, że ta prosta dotknie i koła o.

B. *Konstrukcya stycznej wspólnej wewnętrznej.* Oznaczając odległość OT_1 przez x, z podobieństwa trójkątów OBT_1 i obT_1 mamy:

$$\frac{x}{R} = \frac{d - x}{R'},$$

skąd

$$x = \frac{dR}{R + R'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dyskusya. Ponieważ $\frac{R}{R+R'} < 1$, przeto zawsze $x < d$, czyli punkt T_1 znajduje się między środkami. Prócz tego, odległość T_1O nie może być $< R$, inaczej, $\frac{dR}{R+R'} \geqslant R$, skąd $d \geqslant R+R'$, to jest koła muszą być położone zewnątrz siebie. W przypadku granicznym, przy styczności zewnętrznej kół, $d = R + R_1$ i $x = R$, to jest punkt T_1 zlewa się z punktem styczności kół.

Gdy $R' = 0$, $x = d$, to jest punkt T_1 zlewa się ze środkiem O', do którego w tym przypadku, sprowadza się drugie koło.

Wreszcie, jeżeli $R = R' = 0$, —$x = \frac{0}{0}$, punkt T_1 jest nieoznaczony: w samej rzeczy, w tym przypadku prosta Aa zlewa się z linią środków.

Konstrukcya analogiczna do poprzedniej.

90. Obliczyć podstawę i wysokość prostokąta, wiedząc, że ich suma równa się a i że jeśli powiększymy podstawę o 5, a wysokość o 4, wówczas pole prostokąta powiększy się o 100□. Dyskusya.

91. Na przeciwprostokątnej trójkąta, którego przyprostokątne równają się 1 i 3, znaleźć punkt tak, aby suma jego odległości od przyprostokątnych równała się l. Zbadać warunki, które musi spełniać długość l, aby zadanie było możliwe. Rozwiązać zadanie dwoma sposobami, wprowadzając dwie niewiadome, lub też tylko jedną.

Wskazówka. Przyjąć za niewiadome odległości szukanego punktu od przyprostokątnych.

92. Na przeciwprostokątnej trójkąta, którego przyprostokątne równają się b i c, znaleźć punkt, którego suma odległości od przyprostokątnych równa się długości danej l. Dyskusya.

III. Badanie trójmianu kwadratowego i dyskusya równania kwadratowego.

93. W półkole o średnicy $AB = a$ jest wpisany trójkąt ABC, w którym przyprostokątna $AC = x$; rzut tej przyprostokątnej na średnicę AB oznaczmy przez y.

1) Znaleźć związek między x i y w postaci równania $y = f(x)$.

2) Zbadać ten związek i zbudować odpowiadającą krzywą.

94. Oznaczając przez y liczbę wszystkich przekątnych wieloboku, przez x liczbę jego boków, znaleźć związek między x i y w postaci równania $y = f(x)$, zbadać ten związek i przedstawić go graficznie. Na otrzymanym wykresie wskazać obszar możliwości zadania.

95. Dane jest półkole o średnicy $AC = 4$, którą przedłużamy do punktu D tak, aby $CD = 2$.

Na półkolu obieramy punkt B w odległości $= x$ od A ($AB = x$), i pole kwadratu, wystawionego na odcinku BD oznaczamy przez y.

1) Znaleźć pole y w funkcyi x.

2) Zbadać przebieg zmienności tego pola, gdy x rośnie od 0 do 4 i zbudować odpowiadającą krzywą.

96. W trójkącie ABC bok $AC = a$, kąt $A = 45^0$ i odcinek AD wyznaczony na boku AC przez prostopadłą, poprowadzoną z wierzchołka B na bok przeciwległy, równa się x.

1) Oznaczając przez y kwadrat boku BC, wyrazić y w zależności od x.

2) Zbadać przebieg zmienności y, gdy x przybiera wszelkie wartości możliwe i zbudować odpowiadającą krzywą.

97. Dany jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC (A — wierzchołek kąta prostego), którego wysokość AO jest równa h. Przez punkt M, położony na tej wysokości w odległości $= x$ od wierzchołka A, prowadzimy prostą równoległą do BC, przecinającą AB w punkcie D. Długość odcinka DO oznaczmy przez y.

1) Znaleźć długość y w zależności od x.

2) Zbadać przebieg zmienności odcinka DO, gdy x przybiera wszystkie wartości możliwe i zbudować krzywą zmienności.

98. W równaniu kwadratowem

$$x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$$

wyznaczyć a w ten sposób, aby suma kwadratów pierwiastków tego równania była minimum. Obliczyć to minimum.

99. Dane jest koło o średnicy $AB = 2R$ i odcinek AC na tej średnicy $= 2x (0 \leqslant x \leqslant R)$.

1) Znaleźć x tak, aby potęga punktu, dzielącego odcinek AC na dwie równe części, była równa wartości danej l^2.

2) Wskazać warunek, który winna spełniać liczba l^2, aby zadanie było możliwe, podać największą możliwą wartość l^2 i odpowiadającą jej wartość x.

3) Wykazać, że w przypadku możliwości, zadanie ma jedno i tylko jedno rozwiązanie.

100. Dany jest odcinek $AB=a$ i prosta L, równoległa do AB, przechodząca przez punkt C, znajdujący się w jednakowej odległości $=b$ od punktów A i B.

1) Na prostej L znaleźć punkt M tak, aby odległość AM była równa długości danej l ($CM=x$).

2) Zbadać warunek możliwości zadania, wskazać najmniejszą możliwą wartość l i odpowiadającą jej wartość x.

3) Wykazać, że zadanie ma naogół dwa rozwiązania, związane zależnością

$$x_1+x_2=-a.$$

4) Biorąc pod uwagę, że x może przybierać wartości dodatnie i ujemne, znaleźć warunki, które winna spełniać długość l, aby 1) oba pierwiastki były ujemne, 2) jeden dodatni, a drugi ujemny, 3) jeden równy zeru.

5) Oznaczając długość odcinka AM przez y i uważając y jako funkcyę jednoznaczną x, zbadać tę funkcyę, przedstawić ją graficznie i otrzymane rezultaty porównać z poprzednimi.

101. Warunki zadania poprzedniego. Odcinek AM zastąpić przez odcinek BM i rozwiązać analogiczne zagadnienie.

102. Odcinek $AB=a$ jest podzielony na dwie części w punkcie M.

1) Zbadać zmiany sumy pól kół, mających za średnice odcinki AM i BM.

2) Zbadać zmiany sumy objętości kul, mających za średnice powyższe odcinki.

103. Na bokach kwadratu $ABCD$ budujemy równe odcinki $AE=BF=CG=DH=x$; oznaczmy przez y pole kwadratu $EFGH$: pole y jednoznacznie zależy od zmiennej x.

1) Znaleźć związek między x i y w postaci równania $y=f(x)$. [x zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$].

2) Zbadać ten związek i zbudować odpowiadającą krzywą.

3) Obliczyć z dokładnością do $\frac{1}{100}$ pole y, jeżeli $AB=6$, a długość $x=$ przekątnej kwadratu $ABCD$.

104. Na bokach $=a$ trójkąta równobocznego ABC budujemy równe odcinki $AD=CF=BE=x$. Pole trójkąta DEF oznaczmy przez y.

1) Wyrazić pole y w zależności od x.

2) Zbadać zmienność y i przedstawić ją graficznie.

105. Dane są dwie osie prostokątne Ox, Oy i koło o promieniu $= R$, mające punkt O za środek. Na okręgu tego koła obieramy punkt M, z którego prowadzimy prostopadłe MA i MB odpowiednio na osie Ox, Oy. Uważajmy promień koła, wpisanego w trójkąt OAB.

1) Wyznaczyć położenie punktu M tak, aby ten promień równał się wartości danej r. (Przyjąć za niewiadomą odległość $OA = x$).

2) Znaleźć warunki, którym powinien czynić zadość promień r, aby zadanie było możliwe, podać największą możliwą wartość r i znaleźć odpowiadającą wartość x.

3) Wykazać, że zadanie ma naogół dwa rozwiązania, związane zależnością

$$x_1^2 + x_2^2 = R^2.$$

4) x jednoznacznie wyznacza r. Zbadać przebieg zmienności r, gdy x przybiera swoje wartości możliwe ($O < x < R$), i porównać otrzymane rezultaty z otrzymanymi poprzednio.

106. W trójkącie prostokątnym stosunek sumy przyprostokątnych do przeciwprostokątnej równa się a; pole tego trójkąta równa się b.

1) Znaleźć boki tego trójkąta.

2) Wykazać, że warunek możliwości zadania wyraża się wzorem:

$$1 < a^2 < 2.$$

3) Rozwiązać zadanie w przypadku szczególnym, kiedy

$$a = \frac{7}{5} \text{ i } b = 6.$$

107. Trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna $BC = a$ i kąt $ABC = x$, jest wpisany w półkole. Styczna w punkcie C przecina AB w punkcie D.

1) Wyznaczyć kąt x tak, aby suma $2AB + AD$ była równa długości danej l.

2) Znaleźć warunek możliwości zadania, podać najmniejszą wartość l i odpowiającą jej wartość x.

3) Wykazać, że w przypadku możliwości zadanie ma tylko jedno rozwiązanie.

4) Przyjmując za niewiadomą bok $AB = y$ i biorąc pod uwagę związek $\cos x = \frac{y}{a}$, znaleźć równanie zadania względem y,

zbadać to równanie i porównać rezultaty z otrzymanymi poprzednio.

108. Na prostej nieograniczonej dane są dwa punkty A i B w odległości $=4$. W punktach A i B wystawiamy prostopadłe, na których bierzemy odpowiednio dwa punkty M i N tak, aby $MA=3$ i $NB=5$. Na prostej AB obieramy punkt C w odległości $=x$ od punktu A $(AC=x)$.

Suma kwadratów MC^2+NC^2, którą oznaczymy przez y, jednoznacznie zależy od x.

1) Znaleźć związek między x i y $[y=f(x)]$.

2) Zbadać ten związek, gdy x przybiera wszelkie wartości możliwe, i zbudować odpowiadającą krzywą.

109. W trójkąt ABC, którego podstawa $AC=12$, a wysokość $BD=6$, wpisujemy prostokąt o wysokości $=x$.

1) Znaleźć x tak, aby pole tego prostokąta równało się wartości danej l^2.

2) Wskazać warunki możliwości zadania, podać największą możliwą wartość l^2 i odpowiadającą jej wartość x.

3) Wykazać, że zadanie ma naogół dwa rozwiązania, związane zależnością

$$x_1+x_2=6.$$

4) Oznaczmy pole prostokąta przez y. Uważając y jako funkcyę jednoznaczną zmiennej niezależnej x, zbadać tę funkcyę i otrzymane rezultaty porównać z poprzednimi.

110. Odcinek dany $AB=a$ jest podzielony w punkcie C na dwie części, z których $AC=x$.

1) Wyznaczyć wartość x w ten sposób, aby suma pól kwadratów (albo trójkątów równobocznych), wystawionych na odcinkach AC i CB była równa liczbie danej l^2.

2) Znaleźć warunki możliwości zadania, podać najmniejszą możliwą wartość l^2 i odpowiadającą jej wartość x.

3) Wykazać, że zadanie ma naogół dwa rozwiązania, związane zależnością

$$x_1+x_2=a.$$

4) Oznaczając przez y sumę pól kwadratów (albo trójkątów równobocznych) i uważając y jako funkcyę jednoznaczną zmiennej x, zbadać tę funkcyę i porównać rezultaty z poprzednimi.

111. Dany jest okrąg koła o średnicy $AB=2R$, na którym obieramy dwa punkty C i P, położone z różnych stron środka koła O: punkt C — w odległości, równej $\frac{1}{3}R$ od A, i punkt P — w odległości $OP=\frac{5}{3}R$ od środka O. Na tym okręgu porusza się pewien punkt M.

1) Oznaczając przez x rzut zmienny promienia OM na średnicę AB i przez y—sumę kwadratów odległości punktu M od punktu C i od prostopadłej, poprowadzonej do AB w punkcie P, wyrazić y w funkcyi zmiennej x.

2) Zbadać przebieg zmienności y, gdy x zmienia się od $-R$ do $+R$, i zbudować krzywą, odpowiadającą tej zmienności.

112. Wewnątrz kuli O wycięto kulę spółśrodkową o promieniu mniejszym o 3 *cm*. Niech x oznacza promień mniejszej kuli, a y—objętość pozostałej po wydrążeniu bryły.

1) Znaleźć zależność między zmiennymi x i y.

2) Zbadać tę zależność i zbudować odpowiadającą krzywą

113. Opisać na kuli danej stożek tak, aby stosunek jego powierzchni zupełnej do powierzchni kuli równał się liczbie danej m. Zbadać warunek, który powinna spełniać liczba m, aby zadanie było możliwe, i wykazać, że w przypadku możliwości zadanie ma naogół dwa rozwiązania.

Krótkie rozwiązanie. Biorąc za niewiadomą wysokość stożka x, otrzymamy równanie zadania:

$$x^2-4mRx+8mR^2=0.$$

Aby pierwiastek x odpowiadał zadaniu, należy, aby ten pierwiastek był rzeczywisty, dodatni i większy od $2R$. Warunek rzeczywistości jest $m\geqslant 2$. Oba pierwiastki są dodatnie; pozostaje do spełnienia trzeci warunek: kładąc w równaniu $x=2R$, otrzymamy $f(2R)=+4R^2$, czyli rezultat znaku jednakowego ze spółczynnikiem przy x^2. Wnosimy stąd, że $2R$ zawiera się zewnątrz pierwiastków, — a więc oba pierwiastki są $<2R$, albo oba są $>2R$. Suma pierwiastków $=4mR$, a ponieważ $m\geqslant 2$, zatem suma pierwiastków jest $\geqslant 8R$; wobec tego oba pierwiastki nie mogą być $<2R$, w przeciwnym razie ich suma byłaby $<4R$. Otóż oba pierwiastki są większe od $2R$, i zadanie ma dwa rozwiązania.

Przy jakiej wartości m zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

114. Kulę daną o promieniu $=R$ przeciąć płaszczyzną tak, aby objętość otrzymanego odcinka kulistego równała się objętości walca, mającego tę samą podstawę, a wysokość, równą odległości środka kuli od tej wspólnej podstawy. Wykazać, że zadanie jest zawsze możliwe i posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie.

Wskazówka. Oznaczyć przez x ($<R$) wysokość odcinka kulistego.

115. W trójkącie prostokątnym przyprostokątne są b i c. Wyznaczyć na przeciwprostokątnej punkt tak, aby suma kwadratów odległości tego punktu od przyprostokątnych była równa wartości danej m^2. Obierając za niewiadomą jedną z tych odległości x, zbadać otrzymane równanie i wskazać warunek możliwości zadania; rozpatrzyć trzy przypadki:

$$1)\ b^2<m^2,\quad 2)\ b^2>m^2,\quad 3) b^2=m^2.$$

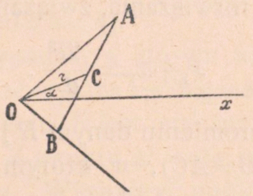
Wskazówka. Wziąć pod uwagę, że x może przybierać wartości tak dodatnie, jak i ujemne.

116. Dany jest trójkąt ABC i środkowa AD; na tej środkowej obieramy punkt M tak, aby jego odległość od punktu D była równa x. Środkowa $AD=m$, bok $BC=a$.

1) Oznaczając przez y sumę $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2$, znaleźć y w zależności od x.

2) Zbadać przebieg zmienności y i zbudować odpowiadającą krzywą.

117. Dana jest prosta Ox i punkt C, wyznaczony przez kąt $COx=\alpha$ i odległość $OC=r$. Przez punkt O, z jednej i drugiej strony prostej Ox, prowadzimy dwie proste OA, OB, tworzące z Ox



równe kąty x, i następnie z punktu C—prostą, dzielącą się w tym punkcie na dwie części równe.

Wyznaczyć kąt x w ten sposób, aby iloczyn $OA\,.\,OB$ był równy kwadratowi odcinka danego a. Dyskusya.

Krótkie rozwiązanie.

$$\alpha<x<\frac{\pi}{2},\ \text{albo}\ 2\alpha<2x<\pi,$$

$$\frac{1}{2}OA\,.\,OB\,.\,\sin 2x=OA\,.\,r\sin(x-\alpha)=OB\,.\,r\sin(x+\alpha),$$

skąd

$$OA = \frac{2r \sin(x+\alpha)}{\sin 2x},$$

$$OB = \frac{2r \sin(x-\alpha)}{\sin 2x}.$$

Równanie zadania:

$$4r^2 \sin(x+\alpha) \sin(x-\alpha) = a^2 \sin^2 2x,$$

albo

$$2r^2(\cos 2\alpha - \cos 2x) = a^2 \sin^2 2x$$

i ostatecznie

$$a^2 \cos^2 2x - 2r^2 \cos 2x + 2r^2 \cos 2\alpha - a^2 = 0.$$

Ze związku $\qquad 2\alpha < 2x < \pi$

wynika związek $\qquad -1 < \cos 2x < \cos 2\alpha.$

Należy się przekonać, że $\cos 2\alpha$ zawiera się między pierwiastkami równania, zaś -1 zewnątrz pierwiastków: zadanie ma jedno tylko rozwiązanie.

118. Przez punkt C, położony na dwusiecznej kąta prostego BOE (O—wierzchołek) w odległości, równej d, od jego boków, poprowadzić linię prostą BE tak, aby pole trójkąta BOE miało wartość daną l^2. (Oznaczyć przez x bok OE).

Zbadać warunek możliwości zadania, podać najmniejszą możliwą wartość l^2 i odpowiadającą jej wartość x, i wykazać, że zadanie ma naogół dwa rozwiązania, związane zależnością.

$$x_1 + x_2 = \frac{2l^2}{d}.$$

119. W koło o promieniu danym R jest wpisany trójkąt równoramienny BAC ($AB = AC$), w którym kąt przy wierzchołku $BAC = 2x$.

1) Znaleźć w funkcyi x promień r koła, wpisanego w trójkąt BAC.

2) Zbadać przebieg zmienności promienia r i przedstawić tę zmienność graficznie.

Krótkie rozwiązanie:

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin 2x} = 2R; \quad AB = 2R \cos x; \quad BC = 2R \sin 2x.$$

$$\frac{1}{2}(2AB + BC)r = \frac{1}{2} AB^2 \sin 2x,$$

skąd

$$r=\frac{AB^2 \sin 2x}{2AB+BC}=\frac{4R^2\cos^2 x \sin 2x}{4R\cos x+2R\sin 2x}$$

$$=\frac{2R\cos^2 x\sin x}{1+\sin x}=2R\sin x(1-\sin x).$$

Tablica zmian.

x	0		30^0		$\frac{\pi}{2}$
r'		$+$		$-$	
r	0	$\nearrow$	$\frac{R}{2}$	$\searrow$	0

120. Wyrazić $y=\cos 4a$ w funkcyi

$$x=\cos a.$$

Zbadać przebieg zmienności funkcyi y i przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej.

121. Dany jest stożek obrotowy, w którym promień podstawy $=R$, a wysokość $=h$. Niech P będzie płaszczyzną, równoległą do podstawy stożka, poprowadzoną w odległości $=x$ od tej podstawy i przecinającą stożek według koła C.

Uważajmy powierzchnię zupełną y walca, wpisanego w ten stożek i mającego za podstawę koło C.

1) Znaleźć związek między zmiennymi y i x w postaci równania $y=f(x)$.

2) Zbadać przebieg zmienności powierzchni y i zbudować odpowiadającą krzywą $(0<x<h)$.

3) Rozpatrzyć przypadek, w którym krzywa zmian sprowadza się do prostej, i podać wykres tej degeneracyi.

122. Koło o promieniu R jest styczne do dwóch prostych prostopadłych Ox, Oy. Z punktu M koła prowadzimy prostopadłe MA, MB na Ox i Oy. Wyznaczyć punkt M tak, aby promień koła, wpisanego w trójkąt OAB, był równy długości danej r. Dyskusya.

Rozwiązanie. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia długości OM. Połóżmy $OA=x$ i $OB=y$, mamy $\overline{OM}^2=x^2+y^2$.

Koło J, styczne do Ox, Oy, ma za równanie

$$(x-R)^2+(y-R)^2=R^2. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Z trójkąta prostokątnego OAB, w którym przyprostokątne są x i y, a przeciwprostokątna równa się $x+y-2r$; mamy

$$x^2+y^2=(x+y-2r)^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Podstawiając w to ostatnie równanie wartość na (x^2+y^2), znalezioną z równania (1)

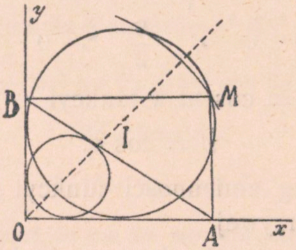
$$x^2+y^2=2R(x+y)-R^2$$

i porządkując względem $(x+y)$, otrzymujemy

$$(x+y)^2-2(R+2r)\,(x+y)+R^2+4r^2=0,$$

skąd

$$x+y=R+2r\pm 2\sqrt{Rr}.$$



Podstawiając tę wartość na $(x+y)$ w równanie (1), ostatecznie otrzymamy

$$\overline{OM}^2=x^2+y^2=(R\pm 2\sqrt{Rr})^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)'$$

W ten sposób wyznaczymy punkt M, jako przecięcie koła (1) z jednym z kół $(2)'$, którego środek jest to punkt O i promień

$$OM=R\pm 2\sqrt{Rr}.$$

Dyskusya. Aby koło J przecinało jedno z kół O, trzeba i wystarcza, aby odległość środków $OJ=R\sqrt{2}$ była zawarta między różnicą i sumą promieni. Mamy więc

$$|\pm 2\sqrt{Rr}\,| < R\sqrt{2}<2\,(R\pm\sqrt{Rr}).$$

Nierówność pierwsza, po podniesieniu do kwadratu, przybiera postać

$$r<\frac{R}{2};$$

Druga nierówność jest oczywiście zawsze spełniona ze znakiem $+$ przed pierwiastkiem, a wzięta ze znakiem —, prowadzi do warunku

$$2\sqrt{Rr}<R(2-\sqrt{2}\,),$$

albo

$$r<\frac{R}{2}\,(3-2\sqrt{2}).$$

Wynik dyskusyi jest następujący: ponieważ $3-2\sqrt{2}<1$, przeto

1) jeżeli $0<r<\frac{R}{2}(3-2\sqrt{2})$, mamy 4 rozwiązania;

2) jeżeli $\frac{R}{2}(3-2\sqrt{2})<r<\frac{R}{2}$, mamy tylko 2 rozwiązania;

3) jeżeli $r=\frac{R}{2}(3-2\sqrt{2})$ albo $r=\frac{R}{2}$, wówczas jedno z kół O dotyka koła J, i zadanie ma najwyżej 3, albo 1 rozwiązanie.

123. Dany jest odcinek $AB=13$ i prosta nieograniczona Δ, przecinająca odcinek AB w punkcie C, położonym między A i B, tak że $AC=4$. Na prostej Δ obieramy punkt M tak, aby $CM=x$, i następnie opisujemy na trójkącie ABM koło, przecinające prostą Δ w punktach K i L.

1) Znaleźć odcinek x tak, aby długość LM miała wartość daną l.

2) Znaleźć warunek możliwości zadania, podać najmniejszą możliwą wartość l i odpowiadającą jej wartość x.

3) Wykazać, że zadanie ma naogół dwa rozwiązania, związane zależnością

$$x_1+x_2=l.$$

124. W półkole o średnicy $=a$ jest wpisany trójkąt ABC, w którym przyprostokątna $AC=x$.

1) Wyznaczyć długość x tak, aby obwód trójkąta ABC równał się wartości danej l.

2) Znaleźć warunek możliwości zadania, podać największą wartość, którą może przybierać obwód l, i odpowiadającą jej wartość x.

3) Wykazać, że zadanie ma naogół dwa rozwiązania, związane zależnością

$$x_1^2+x_2^2=a^2.$$

125. Na kole o promieniu $=r$ jest opisany trójkąt prostokątny ABC, którego przyprostokątna $AC=x$.

1) Wyznaczyć długość x tak, aby przeciwprostokątna trójkąta ABC miała wartość daną l.

2) Znaleźć warunek, któremu powinna czynić zadość długość l, aby zadanie było możliwe.

3) Wykazać, że zadanie ma naogół dwa rozwiązania, związane zależnością

$$x_1^2+x_2^2=l^2.$$

4) Przy jakiej wartości l zadanie ma tylko jedno rozwiązanie?

126. W kulę o promieniu $=R$ wpisano stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym: Następnie układ ten przecięto płaszczyzną, równoległą do podstawy stożka, w odległości $=x$ od jego wierzchołka.

Oznaczmy przez y pole pasa kołowego, zawartego pomiędzy stożkiem a kulą.

1) Wyznaczyć pole y w funkcyi zmiennej x.

2) Zbadać przebieg zmienności y i zbudować krzywą, odpowiadającą tej zmienności.

127. Dana jest kula O o promieniu $OB=R$ i wpisany w nią stożek SAB. Podstawą stożka SAB jest wielkie koło kuli, prostopadłe do promienia SO. Kulę i stożek przecinamy płaszczyzną P. Odległość tej płaszczyzny siecznej od środka kuli O oznaczamy przez x. Przekroje, otrzymane w przecięciu, są kołami spółśrodkowymi. Pole pierścienia, zawartego pomiędzy tymi kołami, oznaczamy przez y. Pole y jednoznacznie zależy od x.

1) Znaleźć pole y w funkcyi zmiennej x.

2) Zbadać przebieg zmienności y i zbudować odpowiadającą krzywą.

128. Stożek ścięty i walec mają wspólną podstawę i wysokość. Oznaczmy przez x stosunek promieni obu podstaw stożka ściętego. Przez y oznaczmy stosunek objętości stożka ściętego do objętości walca.

1) Znaleźć równanie, wyrażające związek, między x i y.

2) Zbadać przebieg zmienności funkcyi y i wykreślić odpowiadającą krzywą.

129. Dana jest kula o promieniu $=R$. Prostopadle do średnicy danej AB, w odległości $=x$ od A, prowadzimy płaszczyznę P, przecinającą AB w punkcie C, i następnie budujemy dwa stożki, mające za podstawę wspólną przekrój kuli przez płaszczyznę P i za wierzchołki—punkty A i B.

1) Znaleźć odległość x tak, aby stosunek sumy objętości tych stożków do objętości kuli o średnicy AC był równy liczbie danej m.

2) Wykazać, że zadanie ma jedno tylko rozwiązanie i jest możliwe przy wszelkiej wartości m.

3) Rozpatrzyć przypadek, gdy $m=0$, i przedstawić go graficznie.

130. Dana jest bryła, utworzona z dwóch stożków obrotowych, wierzchołkami przeciwległych i mających kąt przy wierzchołku $=2a$. Odległość podstaw tych stożków $=h$. Oznaczmy przez x wysokość jednego z tych stożków $(0 \leqslant x \leqslant h)$, przez y powierzchnię zupełną bryły. Powierzchnia y jednoznacznie zależy od x.

1) Znaleźć związek między x i y w postaci równania $y=f(x)$.

2) Zbadać przebieg zmienności powierzchni y i zbudować krzywą, odpowiadającą tej zmienności.

131. Dana jest kula o średnicy $AB=2R$ i płaszczyzna, prostopadła do tej średnicy, przeprowadzona w odległości $=x$ od B i przecinająca kulę według koła C. Oznaczmy przez y sumę objętości odcinka kulistego, mającego wysokość $=x$, i stożka, którego podstawą jest koło C a wierzchołkiem punkt A.

1) Uważając y jako funkcyę jednoznaczną zmiennej

$$x \; (0 \leqslant x \leqslant 2R),$$

wyznaczyć tę funkcyę w postaci równania $y=f(x)$.

2) Zbadać przebieg zmienności tej funkcyi i zbudować odpowiadającą krzywą.

132. Dane jest koło O o promieniu $=R$ i dwie średnice prostopadłe $A'A$, $B'B$. Punkt M, wzięty na okręgu, łączymy ze środkiem koła O, z punktu M prowadzimy prostopadłą MP na $B'B$ i wreszcie w punkcie M prowadzimy styczną do koła, przecinającą średnicę $B'B$ w punkcie Q. Położenie punktu M na okręgu jest w zupełności wyznaczone przez odległość $OP=x$.

1) Znaleźć x tak, aby stosunek objętości bryły, powstałej od obrotu trójkąta OMP koło średnicy AA', do objętości bryły, powstałej od obrotu trójkąta PQM koło tejże średnicy, równał się danej dodatniej liczbie k $(V=kV_1)$.

2) Wykazać, że zadanie jest możliwe przy wszelkiej wartości k i posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie.

(Równanie zadania jest następujące:

$$2(k+1)x^4 - kR^2x^2 - kR^4 = 0).$$

133. *Podział odcinka w stosunku średnim i skrajnym.* Odcinek dany AB podzielić w punkcie D na dwie części tak, aby większa część AC była średnią proporcyonalną między mniejszą częścią BC i odcinkiem AB.

Rozwiązanie. Z warunków zadania mamy $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \,.\, \overline{CB}$, albo, oznaczając odcinek AB przez a, część AC przez x, skąd $BC = a - x$, będziemy mieli równanie

$$x^2 = a(a - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

albo

$$x^2 + ax - a^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dyskusja. Ażeby pierwiastek równania (2) czynił zadość zadaniu, należy, aby ten pierwiastek był rzeczywisty, dodatni i mniejszy od a.

Ponieważ wyraz wolny równania (2) jest ujemny $(= -a^2)$, przeto równanie to posiada zawsze pierwiastki rzeczywiste; dalej, pierwiastki są znaków przeciwnych, ponieważ ich iloczyn jest ujemny, przytem mniejszy według bezwzględnej wartości jest dodatni, ponieważ suma pierwiastków jest ujemna $(= -a)$. Pozostaje przekonać się, czy będzie pierwiastek dodatni mniejszy od a. W tym celu podstawiamy w trójmian, stanowiący pierwszą część równania (2), najpierw o, następnie a, i spostrzegamy, że rezultaty tych podstawień ($-a^2$ i $+a^2$) mają znaki przeciwne. Wnosimy stąd, że pierwiastek dodatni jest mniejszy od a: pierwiastek ten daje punkt C, położony między A i B, i stanowi rozwiązanie zadania w bezpośrednim sensie.

Drugi pierwiastek równania (2) jest ujemny; aby wykryć znaczenie tego ujemnego pierwiastka, podstawmy w równanie (1), *pierwotne*, $-x$ zamiast x; otrzymamy równanie

$$x^2 = a(a + x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

które posiada pierwiastki równe, lecz przeciwne znakami, pierwiastkom równania (1). W ten sposób, pierwiastek ujemny równania (1), wzięty ze znakiem przeciwnym, daje rozwiązanie zadania, odpowiadającego równaniu (3). To ostatnie, jak to jest widocznem bezpośrednio, wyznacza punkt C', położony na przedłużeniu linii BA, na prawo od A,—punkt, również czyniący zadość zadaniu: w rzeczy samej, jeżeli położymy $AC' = x$, będziemy mieli $BC' = a + x$, i równanie (3) jest równoważne równaniu

$$\overline{AC'}^2 = AB \,.\, BC'.$$

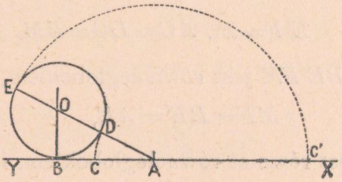
Otóż, pierwiastek ujemny daje drugie rozwiązanie zadania, a znak tego pierwiastka wskazuje, że ostatni powinien być zbudowany na przedłużeniu linii BA w kierunku A, przeciwległym pierwszemu pierwiastkowi. Rozwiązanie algebraiczne, pomimo odpowiedzi na zadanie w ścisłem znaczeniu tego słowa, wykazało nam, że zadaniu, uważanemu w szerszem znaczeniu, czynią zadość dwa punkty C i C', przyczem znaki pierwiastków wskazują na położenie tych punktów względem A.

Rozwiązując równanie (1), znajdujemy

$$x' = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1);$$

$$x'' = -\frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Budowa pierwiastków. Na nieograniczonej prostej XY bierzemy odcinek $AB = a$, wystawiamy do niej prostopadłą w punkcie B i na tej ostatniej odkładamy odcinek $BO = \frac{a}{2}$; z punktu O, jako ze środka, promieniem $= BO$, kreślimy okrąg i, połączywszy punkt A ze środkiem O,



przedłużamy prostą AO do przecięcia z okręgiem w punkcie E; drugi punkt przecięcia niech będzie D. Proste AD i AE są to wartości bezwzględne pierwiastków x' i x''. Istotnie, z trójkąta prostokątnego AOB mamy:

$$AO = \sqrt{\overline{BO}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2};$$

więc

$$AD = AO - OB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} = x',$$

$$AE = AO + OB = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} + \frac{a}{2} = x''.$$

Pozostaje tylko przenieść AD na AB, na lewo od punktu A i AE— na przedłużeniu AB, na prawo od punktu A: w ten więc sposób otrzymamy szukane punkty C i C'.

134. Dany jest trójkąt ABC i trzy punkty D, E, F, obrane na bokach trójkąta ABC w ten sposób, aby

$$\frac{DC}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{BF}{BC} = x.$$

Uważajmy pole trójkąta, którego bokami są odcinki AF, BD, CE, i oznaczmy pole tego trójkąta przez y.

1) Zbadać przebieg zmienności pola y, gdy x zmienia się od 0 do 1.

2) Rozwiązać zadanie w przypadku szczególnym, gdy $x = {}^1/_2$ [1]).

Rozwiązanie. Niech będzie $BM \parallel AC$, $CM \parallel BD$, $BE' = AE$; wówczas

$$\frac{BE'}{AB} = \frac{BF}{BC} = x, \text{ — i } E'F \parallel AC,$$

zatym z podobieństwa $\triangle \triangle ABC$ i $BE'F$ mamy

$$\frac{E'F}{AC} = x,$$

albo

$$E'F = x \,.\, AC = DC = BM,$$

czyli, że czworobok $BE'FM$ jest równoległobokiem, wobec czego

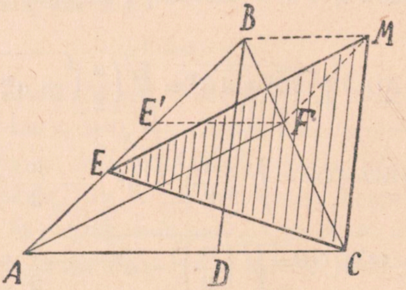
$$MF = BE' = AE,$$

czworobok $AEMF$ jest również równoległobokiem, i, co za tem idzie,

$$AF = ME.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$BD = MC.$$



W ten sposób trójkąt, który podleży naszemu badaniu, jest wprowadzony do rysunku; jest nim trójkąt EMC: boki tego trójkąta są to właśnie odcinki $AF (= ME)$, $BD (= MC)$, $EC (= EC)$.

Ponieważ

$$\frac{\triangle BDC}{\triangle ABC} = \frac{\triangle AEC}{\triangle ABC} = \frac{\triangle ABF}{\triangle ABC} = x,$$

---

[1]) Zadanie to było postawione przed kilku laty na stronicach „Wektora“ przez prof. Lucyana Zarzeckiego. Tutaj podaję geometryczne rozwiązanie tego zagadnienia.

przeto pole $\triangle BDC =$ pole $\triangle AEC =$ pole $\triangle AFB$, a także pole $\triangle BDC =$ pole $\triangle BMC$. To ustaliwszy, oznaczmy pole $\triangle ABC$ przez S.

Pole $EBMC = \triangle EBC + \triangle BMC = \triangle EBC + \triangle AEC = S$;

z drugiej strony

$$y = \text{pole } EBMC - \text{pole } \triangle EBM,$$

skąd ostatecznie

$$y = S - \text{pole } \triangle EBM,$$

i zagadnienie sprowadza się do obliczenia pola trójkąta EBM w funkcyi x:

$$\frac{\triangle EBM}{\triangle ABC} = \frac{EB \,.\, BM}{AB \,.\, AC}.$$

Zastępując w tej proporcyi pole ABC przez S, EB przez $AB - AE = AB - xAB = AB(1-x)$ i BM przez xAC, znajdujemy

$$\frac{\triangle EBM}{S} = \frac{x(1-x) \,.\, AB \,.\, AC}{AB \,.\, AC},$$

skąd

$$\triangle EMB = Sx(1-x),$$

i wreszcie szukane pole

$$y = S - Sx(1-x),$$

albo

$$y = S(x^2 - x + 1).$$

W ten sposób, badanie pola y prowadzi do badania trójmianu kwadratowego, i dalsze rozważania są zbyteczne.

W przypadku, gdy $x = {}^1/_2$, mamy $y = {}^3/_4\, S$; jest to najmniejsza wartość pola trójkąta, utworzonego z odcinków AF, BD, CE, które są w tym przypadku środkowemi trójkąta ABC.

IV. Funkcya sześcienna całkowita.

135. Uważajmy kulę o średnicy $DD' = 1\ m$; na tej kuli wykreślone jest koło C, którego płaszczyzna jest prostopadła do średnicy DD', i przecina tę średnicę w punkcie P, położonym w odległości $= x$ od punktu D. Następnie zbudowano stożek, którego wierzchołek leży w punkcie D i ma za podstawę koło C.

1) Znaleźć objętość y stożka w zależności od x.

2) Zbadać zmienność tej objętości, jeżeli punkt P przesuwa się od D do D', i przedstawić graficznie tę zmienność.

136. Zbadać zmiany objętości prostopadłościanu, którego podstawą jest kwadrat, jeżeli wiadomo, że wysokość prostopadłościanu jest o 1 większa od boku podstawy.

Zbudować krzywą zmian i wyznaczyć jej punkt przegięcia.

137. Dana jest kula o średnicy $AB = 2R$. Niech P jest to płaszczyzna, prostopadła do średnicy AB i przecinająca kulę według koła C.

Oznaczając przez x odległość płaszczyzny P od punktu A, przez y—objętość ostrosłupa, mającego za wierzchołek punkt A i za podstawę trójkąt równoboczny, wpisany w koło C.

1) Wyrazić objętość y w funkcyi zmiennej x $(0 < x < 2R)$.

2) Zbadać przebieg zmienności y i zbudować odpowiadającą krzywą.

138. Dany jest stożek S, w którym promień podstawy $= R$, a wysokość $= h$. Stożek ten przecięto płaszczyzną, równoległą do podstawy i zbudowano nowy stożek S_1, mający koło przekroju za podstawę i środek podstawy danego stożka za wierzchołek.

1) Oznaczając przez x odległość wierzchołka stożka S od płaszczyzny przekroju, przez y—objętość stożka S_1, znaleźć związek między x i y w postaci równania $y = f(x)$.

2) Zbadać ten związek i zbudować odpowiadającą krzywą.

139. Kula S o promieniu $= R$ jest przecięta płaszczyzną P, prostopadłą do średnicy danej AB w punkcie C, położonym w odległości $AC = x$ od punktu A. Uważajmy stożek o wierzchołku A, mający za podstawę koło przecięcia płaszczyzny P z kulą S, i kulę, mającą AG za średnicę.

Zbadać przebieg zmienności stosunku różnicy objętości pomienionych stożka i kuli do powierzchni zupełnej kuli S. Przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej.

140. Prosta AC obraca się naokoło punktu A, przez który przechodzi prosta stała (A). Na prostej AC obieramy odcinki $AB = a$, $BC = b$ i budujemy rzut B_1C_1 odcinka BC na prostą (A), który oznaczamy przez x.

1) Znaleźć w funkcyi x objętość y stożka ściętego, powstałego przez obrót trapezu BCB_1C_1 dokoła prostej A.

2) Zbadać przebieg zmienności y, gdy x przybiera swoje wartości możliwe, i zbudować odpowiadającą krzywą.

141. Na krawędziach SA, SB, SC ostrosłupa trójkątnego $SABC$ budujemy odpowiednio odcinki

$$Sa = xSA;\quad Sb = xSB;\quad Sc = xSC.$$

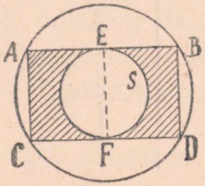
Uważajmy ostrosłup *Gabc*, w którym wierzchołek *G* jest to środek ciężkości ostrosłupa *SABC*. Objętość ostrosłupa *Gabc* oznaczmy przez y.

Zbadać przebieg zmienności y, zakładając, że x zmienia się od 0 do 1, i zbudować odpowiadającą krzywą.

142. Walec *ABCD* o wysokości $EF = 2x$ jest wpisany w kulę o średnicy $=1$. Na wysokości *EF* tego walca, jako na średnicy, opisano kulę *S*, która dotyka dwóch podstaw walca w ich środkach *E* i *F*. Uważajmy różnicę między objętością walca *ABCD* i objętością kuli *S*.

Zbadać przebieg zmienności tej różnicy, gdy zmienia się x. Przy jakiej wartości x ta różnica osiąga maximum? Podać tę wartość maximum.

Rozwiązanie. Objętość walca *ABCD*, w którym promień podsta-



wy jest $AE = \sqrt{1-x^2}$ i wysokość $EF = 2x$, wynosi

$$\pi(1-x^2)2x;$$

różnica między tą objętością i objętością kuli *S* o promieniu x jest równa

$$y = 2\pi x(1-x^2) - \frac{4}{3}\pi x^3,$$

albo

$$y = \frac{2}{3}\pi(3x - 5x^3).$$

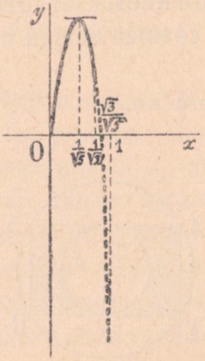
Aby zbadać funkcyę y, gdy x rośnie od 0 do 1, weźmy jej pochodną

$$y' = 2\pi(1-5x^2).$$

Pochodna ta staje się zerem przy dodatniej wartości $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, przechodząc od $+$ do $-$; stąd wynika, że funkcya y, przybierająca na początku wartość $=0$, rośnie do pewnego maximum, równego

$$y_1 = \frac{2}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{5}}(3-1) = \frac{4\pi}{3}\sqrt{1/_5};$$

a następnie maleje do wartości$=-\frac{4\pi}{3}$, przechodząc przez zero przy $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. W tym momencie objętość dwóch części walca, położonych zewnątrz kuli EF, jest równa części tej kuli, wychodzącej nazewnątrz walca, tak że kiedy kula EF przecina powierzchnię boczną walca, co zachodzi przy warunku $x > AE = \sqrt{1-x^2}$, albo $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$, wówczas y przedstawia różnicę dwóch części niewspólnych walca i kuli. Na przedstawionej tu krzywej zmienności funkcyi y część ciągła odpowiada przypadkowi, kiedy kula EF jest w całości zawarta w walcu.



143. Zbadać przebieg zmienności różnicy objętości stożka, wpisanego w kulę, i odcinka kulistego, mającego tę samą podstawę.

Wskazówka. Obrać za zmienną niezależną wysokość odcinka kulistego x.

V. Funkcya ułamkowa i pierwiastkowa.

144. Dane jest półkole o średnicy $AB=2R$ i proste AA_1, BB_1, prostopadłe do tej średnicy. Na prostej BB_1 obieramy punkt C w odległości $=x$ od punktu B, i następnie z punktu C prowadzimy styczną do półkola, przecinającą AA_1 w punkcie D. Odcinek DA oznaczamy przez y.

1) Zakładając, że x zmienia się od 0 do $+\infty$ wyrazić odcinek y w funkcyi zmiennej niezależnej $x=[yf(x)]$.

2) Zbadać przebieg zmienności y i zbudować odpowiadającą krzywą.

3) Uważajmy pole trójkąta CDO (O—środek półkola), które oznaczymy przez y, jako funkcyę zmiennej x. Zbadać zmiany pola y i podać przedstawienie graficzne tych zmian.

145. Dane są trzy proste CA, AB, DB, przyczem CA i DB są prostopadłe do AB. Odcinek $AB=6$, jest podzielony w punkcie F na dwie części, z których $AF=1$. Na prostej DB obieramy punkt L tak, że $LB=x$, i następnie w punkcie F prowadzimy prostopadłą do FL, która przecina CA w punkcie K. Oznaczając odcinek KA przez y,

1) Wyrazić y w zależności od x.

2) Zbadać przebieg zmienności y, gdy x przybiera wszystkie wartości możliwe, i zbudować odpowiadającą krzywą.

3) Oznaczając przez Y pole trójkąta KLF, zbadać zmienność tego pola i podać przedstawienie graficzne.

146. Przez punkt C, położony na dwusiecznej kąta prostego Oxy, poprowadzono prostą, przecinającą osie Ox, Oy odpowiednio w punktach A i B. Oznaczmy długość odcinka OA przez x, odcinka OB—przez y.

1) Wyrazić długość y w zależności od x.

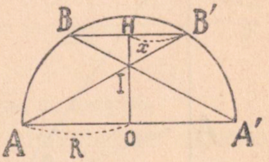
2) Zbadać zmienność odcinka y i zbudować krzywą, odpowiadającą tej zmienności.

3) Wyznaczyć granicę, do której podąża y, gdy x rośnie do $+\infty$.

174. Dane jest półkole, mające za średnicę odcinek $AA'=2R$; poprowadźmy cięciwę BB', równoległą do AA'; niech będzie I punkt przecięcia przekątnych trapezu $ABB'A'$, H — środek BB'. Zbadać zmiany odcinka IH, gdy cięciwa BB', przemieszcza się równolegle do samej siebie.

Rozwiązanie. Połóżmy $OA=R$, $HB'=x$ i $IH=y$. Trójkąty podobne IHB', IOA dają:

$$\frac{y}{IO}=\frac{x}{R}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



z drugiej strony:

$$y+IO=HO=\sqrt{R^2-x^2}\,, \qquad (2)$$

skąd

$$\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{x}{x+R},$$

i

$$y=\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{x+R}.$$

Pochodna

$$y'=\frac{-x^2-Rx+R^2}{(x+R)\sqrt{R^2-x^2}}.$$

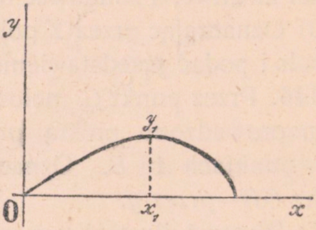
Licznik pochodnej y' staje się zerem przy jednej tylko wartości *dodatniej* x, mniejszej od R, mianowicie wartości

$$x_1=\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}\quad(<R).$$

Pochodna y' jest *dodatnia* w przedziale $(0, x_1)$, *ujemna* — w przedziale (x_1, R).

Oto tablica przebiegu zmienności i odpowiadająca krzywa:

x	0		x_1		R
y'		$+$		$-$	
y	0	$\nearrow$	y_1 *max.*	$\searrow$	0

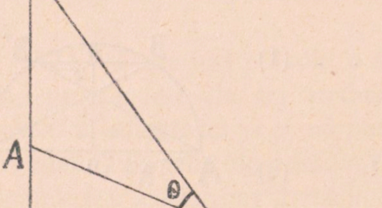


148. Dany jest trójkąt ABC i trzy punkty D, E, F na jego bokach, obrane tak, aby

$$\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}=x.$$

Znaleźć w funkcyi zmiennej x pole trójkąta DEF i zbadać przebieg zmienności tego pola, gdy x przybiera wszystkie wartości możliwe.

149. Na jednym z boków kąta prostego budujemy dwa odcinki $OA=a$, $OB=b$, i tworzymy kąt $AMB=\theta$, mający za wierzchołek zmienny punkt M, poruszający się na drugim boku kąta prostego.



Znaleźć związek, zachodzący między kątem θ i odległością $OM=x$ punktu M od wierzchołka kąta prostego. Zakładając, że x rośnie od 0 do $+\infty$, zbadać ten związek i zbudować odpowiadającą krzywą.

Rozwiązanie. Załóżmy, że $a < b$; oznaczmy kąt

$$\angle AMO = \alpha \text{ i } \angle BMO = \beta,$$

mamy

$$tg\theta = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha\, tg\beta}.$$

Ponieważ

$$tg\beta = \frac{b}{x} \quad \text{i} \quad tg\alpha = \frac{a}{x},$$

przeto

$$tg\theta = \frac{(b-a)x}{x^2 + ab}.$$

Kąt ostry zmienia się w tym samym sensie, co i jego tangens, zatem kąt θ zmienia się jak funkcya $\frac{x}{x^2+ab}$, gdy x rośnie od 0 do ∞. Weźmy pochodną funkcyi

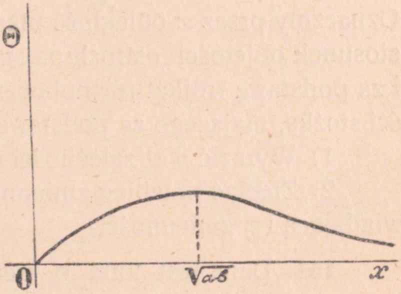
$$y = \frac{x}{x^2 + ab};$$

otrzymamy

$$y' = \frac{(x^2+ab) - 2x^2}{(x^2+ab)^2} = \frac{(ab - x^2)}{(x^2+ab)^2}.$$

Pochodna ta staje się zerem przy $x = \sqrt{ab}$, jest dodatnia przy $x < \sqrt{ab}$, ujemna — przy $x > \sqrt{ab}$, — stąd tablica zmian:

x	0		$\sqrt{ab}$		$+\infty$
y'		+	0	—	
$tg\theta$	0	↗	$\frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$ max.	↘	0



W ten sposób, gdy x rośnie od 0 do $+\infty$, $tg\,\theta$ rośnie od 0 do pewnego maximum, i następnie przybiera wartości poprzednie w porządku odwrotnym. Przebieg zmienności ilustruje przedstawiona tu krzywa.

150. Koła o promieniach a i b są odpowiednio styczne w punktach A i B do tej samej prostej. Z punktu A poprowadzono styczną do koła o promieniu b; styczna ta przecina koło o promieniu a w punkcie C. Oznaczmy przez x odległość punktów styczności, przez y—cięciwę AC.

1) Znaleźć związek między x i y w postaci równania $y=f(x)$.

2) Zbadać ten związek i zbudować odpowiadającą krzywą.

151. Dane jest koło O o promieniu $=R$. Z punktu A, położonego zewnątrz tego koła, w odległości x od środka O, prowadzimy dwie styczne do koła AP i AQ (P i Q—punkty styczności). Układ, tak otrzymany, obraca się dokoła prostej AO, jako osi.

Oznaczmy przez y powierzchnię bryły obrotowej i uważajmy ją, jako funkcyę zmiennej x ($\infty > x > R$).

Zbadać przebieg zmienności y i zbudować odpowiadającą krzywą.

(Zadanie prowadzi do badania funkcyi $y=x+\frac{R^2}{x}+2R$).

152. Na prostej Ox od punktu O, w jednym i tym samym kierunku, odkładamy odcinki $OA=a$, $OB=b$ ($a>b$) i następnie do prostej Ox wystawiamy prostopadłe AA' i BB'. Na prostej AA' obieramy punkt M w odległości zmiennej x od A ($AM=x$) i przez ten punkt prowadzimy równoległą MN do Ox, przecinającą BB' w pnnkcie N.

1) Znaleźć równanie, wyrażające związek między kątem $MON=\theta$ i odległością zmienną x.

2) Zbadać ten związek i przedstawić go zapomocą krzywej.

153. Kula o średnicy $AB=2R$ jest przecięta płaszczyzną, prostopadłą do średnicy AB i przecinającą kulę według koła C. Oznaczmy przez x odległość płaszczyzny P od punktu A i przez y stosunek objętości ostrosłupa, mającego za wierzchołek punkt A i za podstawę trójkąt równoboczny, wpisany w koło C, do objętości stożka, mającego za podstawę koło C i za wierzchołek punkt B.

1) Wyrazić y w zależności od x.

2) Zbadać przebieg zmienności y i zbudować krzywą, odpowiadającą tej zmienności.

154. Dana jest kula o średnicy $AB=2R$. Płaszczyzna P jest prostopadła do tej średnicy w punkcie C, którego odległość od punktu A równa się x.

Uważajmy dwa stożki, mające za podstawę wspólną przekrój kuli płaszczyzną P i za wierzchołki punkty A i B. Oznaczmy przez y stosunek sumy objętości tych stożków do objętości kuli o średnicy $=AC$.

1) Wyrazić stosunek y w zależności od x.

2) Zbadać przebieg zmienności y i zbudować krzywą, odpowiadającą tej zmienności.

155. Na kuli o promieniu $=R$ opisany jest stożek równoboczny (czyli stożek, którego przekrój osiowy jest trójkątem równobocznym). W odległości $KH=x$ od podstawy prowadzimy płaszczyznę CD, równoległą do podstawy.

1) Znaleźć w funkcyi x stosunek pola przekroju CD, otrzymanego w stożku, do pola przekroju EF, otrzymanego w kuli.

2) Zbadać przebieg zmienności tego stosunku, gdy x rośnie od 0 do $2R$, i zbudować odpowiadającą krzywą.

Rozwiązanie. 1) Płaszczyzna sieczna przecina stożek i kulę według dwóch kół o promieniach KC i KE.

Mamy

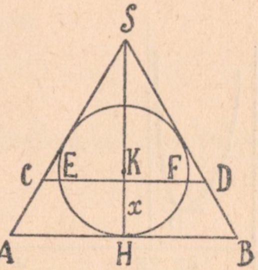
$$\overline{KE}^2 = x(2R - x)$$

i w trójkątach podobnych SKC, SHA

$$\frac{KC}{HA} = \frac{SK}{SH}.$$

skąd

$$KC = \frac{HA(SH - x)}{SH}.$$



Zastępując HA przez $R\sqrt{3}$, SH przez $3R$, otrzymujemy

$$KC = \frac{R\sqrt{3}\,(3R - x)}{3R} = \frac{3R - x}{\sqrt{3}},$$

i wreszcie znajdujemy stosunek szukany

$$y = \frac{\pi\overline{KC}^2}{\pi\overline{KE}^2} = \frac{(3R - x)^2}{3x(2R - x)}.$$

2) Funkcya y jest ciągła w przedziale $(0, 2R)$ i staje się nieskończoną przy $x=0$ i $x=2R$. Jej pochodna jest

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{-2x(2R - x)(3R - x) + (3R - x)^2\, 2(R - x)}{x^2\,(2R - x)^2}.$$

Licznik pochodnej jest podzielny przez $3R - x$; iloraz wynosi

$$-2[x(2R - x) + (3R - x)(R - x)] = -2(3R^2 - 2Rx).$$

Pochodna więc może być przedstawiona w postaci

$$y' = -\frac{2R}{3} \cdot \frac{(3R-x)\left(\frac{3}{2}R-x\right)}{x^2(2R-x)^2}.$$

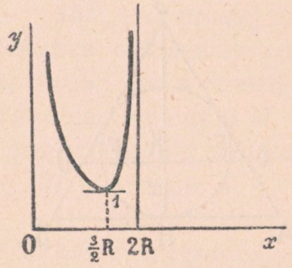
Pochodna ta, jak widzimy, ma znak przeciwny temu, który ma iloczyn

$$(3R-x)\left(\frac{3}{2}R-x\right).$$

Pochodna ta jest ujemna, gdy x zawiera się między 0 i $\frac{3}{2}R$, jest dodatnia, gdy x jest zawarte między $\frac{3}{2}R$ i $2R$, staje się 0 przy $x=\frac{3}{2}R$.

Stąd następująca tablica zmienności:

x	0		$^3/_2R$		$2R$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			min.		



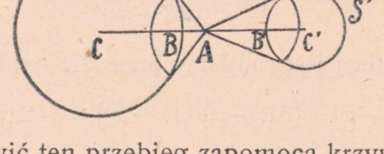
Minimum $=1$ funkcyi y odpowiada przypadkowi, kiedy przekroje CD i EF pokrywają się kołem styczności kuli i stożka. Przedstawiona tu krzywa przybiera za asymptoty oś Oy i prostą $x=2R$.

156. Dane są dwie kule, położone zewnątrz siebie, o środkach C i C' i o promieniach $R=4a$, $R'=a$.

Niech d będzie odległość środków kul, B i B' — punkty najbliższej odległości na tych dwóch kulach. Punkt świetlny A przemieszcza się na odcinku BB'. Niech będzie

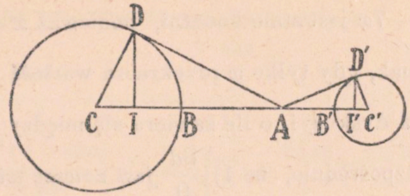
$$CA=x.$$

1) Zbadać przebieg zmienności sumy powierzchni odcinków kulistych, oświecanych przez punkt A.



2) Przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej.

Rozwiązanie. Powierzchnia oświecanego odcinka kulistego na kuli S równa się $2\pi R \,.\, JB$.



Odcinek $JB = R - CJ$; z trójkąta prostokątnego ACD znajdujemy

$$\overline{CD}^2 = CJ \,.\, CA,$$

skąd

$$CJ = \frac{\overline{CD}^2}{CA} = \frac{R^2}{x}.$$

Zatym powierzchnia powyższego odcinka jest

$$2\pi R\left(R - \frac{R^2}{x}\right);$$

zupełnie analogicznie obliczamy powierzchnię oświecanego odcinka kulistego na kuli S':

$$2\pi R'\left(R' - \frac{R'^2}{d-x}\right)$$

i następnie sumę tych dwóch powierzchni

$$y = 2\pi\left(R^2 + R'^2 - \frac{R^3}{x} - \frac{R'^3}{d-x}\right);$$

albo, zastępując R przez $4a$ i R' przez a, znajdujemy

$$y = 2\pi a^2\left[17 - a\left(\frac{64}{x} + \frac{1}{d-x}\right)\right].$$

Aby zadanie miało sens, musi być $d > 5a$, i x może się zmieniać tylko od $4a$ do $d - a$.

Przy obecności tych warunków funkcya y jest ciągła i przybiera pochodną

$$y' = 2\pi a^3\left[\frac{64}{x^2} - \frac{1}{(d-x)^2}\right],$$

którą można napisać jeszcze tak:

$$y' = 2\pi a^3\left[\frac{8}{x} + \frac{1}{d-x}\right]\left[\frac{8}{x} - \frac{1}{d-x}\right],$$

albo

$$y' = \frac{2\pi a^3 (8d - 7x)(8d - 9x)}{x^2 (d - x)^2}.$$

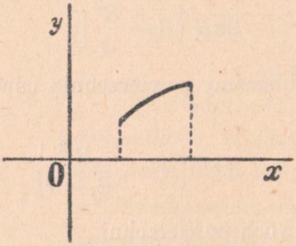
Czynnik $8d - 7x$ jest stale dodatni, ponieważ $x < d$; drugi czynnik $8d - 9x$ zmienia znak, gdy tylko x przekracza wartość $\frac{8d}{9}$. Ta wartość winna być poddana dyskusyi, o ile zawiera się między $4a$ i $d - a$.

Widzimy bezpośrednio, że 1) $\frac{8d}{9}$ *jest zawsze większe od* $4a$; 2) $\frac{8d}{9}$ *jest większe od* $d - a$, *o ile* $d < 9a$; 3) $\frac{8d}{9}$ *jest mniejsze od* $d - a$, *o ile* $d > 9a$.

Musimy więc roztrząsnąć dwa przypadki:

Przypadek I. $d < 9a$.

W tym przypadku $\frac{8d}{9}$ jest większe od $d - a$. Otóż, jeżeli x ro-



śnie od $4a$ do $d - a$, x jest zawsze mniejsze od $\frac{8d}{9}$; wobec tego pochodna y' jest stale dodatnia, i y rośnie.

Przy $x = 4a$

$$y = \frac{2\pi a^2 (d - 5a)}{d - 4a},$$

i przy $x = d - a$

$$y = \frac{32\pi a^2 (d - 5a)}{d - a}.$$

Gałęź krzywej odpowiadającej zwrócona jest swą wklęsłością do osi y-ów ujemnych, ponieważ, jak to łatwo sprawdzić, druga pochodna y'' jest ujemna.

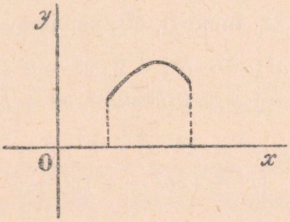
Przypadek II. $d > 9a$.

W tym przypadku, wartość $\frac{8d}{9}$ jest zawarta między $4a$ i $d - a$.

Pochodna y' jest dodatnia, jeżeli $x < \frac{8d}{9}$, i ujemna, jeżeli $x > \frac{8d}{9}$.

Tablica zmian przedstawia się, jak to poniżej:

x	$4a$		$\frac{8d}{9}$		$d-a$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\frac{2\pi a^2(d-5a)}{d-4a}$	$\nearrow$	$2\pi a^2\left(17-\frac{81a}{d}\right)$ (*max.*)	$\searrow$	$\frac{32\pi a^2(d-5a)}{d-a}$



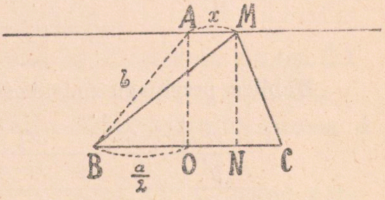
157. *Zadanie o dwóch źródłach światła.* — W dwóch punktach B i C, których odległość równa się a, umieszczono dwa źródła światła, mające jednakowe naprężenia. Ilość światła, którą od tych źródeł otrzymuje punkt dany M, mierzy się sumą odwrotności kwadratów odległości BM, CM. Punkt M porusza się na prostej, równoległej do prostej BC i przechodzącej przez punkt stały A, którego odległości od punktów B i C równają się b.

Oznaczając przez x odległość zmienną AM, zbadać zmiany ilości światła, które otrzymuje punkt M; rozpatrzyć przypadki, kiedy $b < a$ i $b \geqslant a$.

Rozwiązanie. Zadanie prowadzi do badania funkcyi

$$y = \frac{1}{\overline{BM}^2} + \frac{1}{\overline{CM}^2}.$$

Aby obliczyć $\overline{BM}^2$ i $\overline{CM}^2$ w funkcyi x, poprowadźmy prostopadłą MN na BC; wówczas mamy:



$$\overline{BM}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{MN}^2,$$

ale

$$BN = BO + ON = \frac{a}{2} + x,$$

i

$$MN = AO = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$$

zatym

$$\overline{BM}^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + b^2 - \frac{a^2}{4} = x^2 + ax + b^2.$$

Zupełnie tak samo znajdziemy

$$\overline{CM}^2 = x^2 - ax + b^2,$$

wobec czego funkcya y przybiera postać

$$y = \frac{1}{x^2+ax+b^2} + \frac{1}{x^2-ax+b^2} = \frac{2(x^2+b^2)}{x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4}.$$

Biorąc pochodną tej funkcyi, otrzymujemy

$$y' = \frac{4x[x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4] - 2(x^2+b^2)[4x^3+2(2b^2-a^2)x]}{[x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4]^2} =$$

$$= -\frac{4x[x^4+2b^2x^2+b^2(b^2-a^2)]}{[x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4]^2}.$$

Mianownik funkcyi y, równy $\overline{BM}^2 \,.\, \overline{CM}^2$, jest różny od zera i dodatni, zatym funkcya y i jej pochodna są to funkcye ciągłe.

Pochodna y' staje się równą zeru przy $x=0$, skąd $y_0 = \frac{2}{b^2}$, i przy wartościach, równych rzeczywistym pierwiastkom równania

$$x^4 + 2b^2x^2 + b^2(b^2-a^2) = 0.$$

Suma pierwiastków tego równania drugiego stopnia względem x^2 równa się ujemnej liczbie $-2b^2$; stąd wynika, że równanie to posiada jeden pierwiastek dodatni ($=x^2$), o ile iloczyn $b^2(b^2-a^2)$ jest ujemny, czyli $b<a$.

Rozwiązując teraz równanie powyższe względem x, kolejno otrzymujemy:

$$(x^2+b^2)^2 = a^2b^2;\quad x^2+b^2 = +ab,$$

skąd

$$x^2 = b(a-b)$$

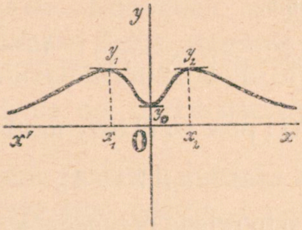
i

$$y_1 = y_2 = \frac{2}{a(2b-a)}.$$

Tablica przebiegu zmienności tak się przedstawia:

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
y	0	↗	y_1 *max.*	↘	y_0 *min.*	↗	y_2 *max.*	↘	0

Krzywa, tu przedstawiona, jest symetryczna względem osi Oy i przybiera oś Ox za asymptotę.



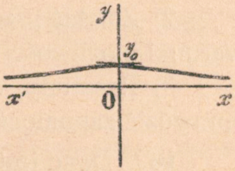
W przypadku, kiedy

$$b \geqslant a,$$

wartości x_1, x_2 nie istnieją, i pochodna badanej funkcyi staje się zerem tylko przy wartości $x = 0$.

Przebieg zmienności funkcyi w tym przypadku i krzywą odpowiadającą tej zmienności, dają tablica i krzywa następujące:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	0	$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$	y_0 *max.*	$\searrow$	0



158. W koło o promieniu $= R$ wpisany jest trójkąt równoramienny o podstawie $= 2x$.

Oznaczając przez y sumę podstawy i wysokości tego trójkąta, zbadać przebieg zmienności y, gdy x przybiera wszystkie wartości możliwe, i zbudować odpowiadającą krzywą.

159. Dane są dwie proste równoległe i między nimi punkt A, stanowiący wierzchołek kąta prostego trójkąta, którego dwa pozostałe wierzchołki są położone na każdej z równoległych. Zbadać przebieg zmienności pola tego trójkąta.

160. Dane są dwie osie prostokątne OX, OY i punkt M na osi OX w stałej odległości $= a$ od punktu O.

Przez punkt M prowadzimy prostą Δ, nachyloną do osi OX, pod kątem $= 45^0$, i następnie promieniem, równym x, ze środka C, położonego na osi OX, opisujemy koło, które przecina prostą Δ w punktach P i Q.

1) Wyrazić w funkcyi x długość odcinka PQ i zbadać przebieg jego zmienności.

2) Wyrazić w funkcyi x pole trójkąta CPQ i zbadać przebieg zmienności tego pola.

Krótkie rozwiązanie.

$$\frac{PQ}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+2ax-a^2}\,; \quad \triangle\ CPQ=\frac{(a-x)\sqrt{x^2+2ax-a^2}}{2}.$$

Aby odcinek PQ i pole CPQ były możliwe, musi być:

$$x \geqq a(\sqrt{2}-1),$$

gdzie znak równości odpowiada przypadkowi granicznemu, w którym x jest promieniem koła, stycznego do prostej Δ, innemi słowy, przy $x=a(\sqrt{2}-1)$, mamy $PQ=0$ i $\triangle\ CPQ=0$.

161. Dane jest koło o promieniu, równym 1, i punkt C w odległości, równej 2 od środka tego koła. Z punktu C, jako ze środka, promieniem, równym x, opisujemy nowe koło, które przecina pierwsze w punktach A i B.

1) Wyrazić długość cięciwy $y=AB$ w funkcyi promienia x.

2) Zbadać przebieg zmienności y, gdy zmienia się x; podać warunki możliwości zadania i zbudować odpowiadającą krzywą.

3) Rezultaty, otrzymane na drodze badania analitycznego, sprawdzić zapomocą bezpośredniego obserwowania figury.

162. Dane jest koło o promieniu $=4$ i prosta nieograniczona, położona w odległości $=5$ od środka koła, na której obrany jest pewien punkt M. Następnie na tej samej prostej budujemy punkt C tak, aby długość stycznej, wyprowadzonej z tego punktu do koła równała się odległości CM.

1) Wykazać, że położenie punktu C na prostej jednoznacznie zależy od położenia punktu M na tejże prostej.

2) Oznaczając przez x odległość punktu M od spodka prostopadłej, wyprowadzonej ze środka koła na daną prostą, i przez y—długość rzeczonej stycznej, wyrazić zależność między x i y w postaci równania $y=f(x)$, i następnie zbadać przebieg zmienności y, gdy x zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$.

163. Dana jest funkcya

$$y=\frac{a^2x}{2x^2-5ax+2a^2},$$

gdzie a oznacza liczbę dodatnią daną.

1) Zbadać przebieg zmienności tej funkcyi i przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej.

2) Poprowadźmy prostą, równoległą do osi Ox, przecinającą krzywą w dwóch punktach P i Q. Niech P', Q' są to rzuty tych dwóch punktów na oś Ox. Udowodnić, że gdy prosta PQ przesuwa się równolegle do samej siebie, wówczas punkty P', Q' są niezmiennie punktami sprzężonymi harmonicznymi względem dwóch punktów, położonych na osi Ox i mających za odcięte $x = +a$ i $x = -a$.

3) Niech M będzie środkiem odcinka PQ. Mając daną rzędną punktu M, obliczyć jego odciętą, i posługując się otrzymanym związkiem, zbudować miejsce, które kreśli punkt M, gdy prosta PQ przesuwa się równolegle do osi Ox tak, że przecina krzywą.

Rozwiązanie. 1) Funkcya jest ciągła przy wszystkich wartościach x, różnych od wartości $x = \frac{a}{2}$ i $x = 2a$, które zamieniają na zero mianownik funkcyi. Funkcya ta staje się zerem przy wartościach $x = 0$ i $x = \pm\infty$.

Weźmy jej pochodną. Po dokonaniu redukcyi, będziemy mieli:

$$y' = \frac{2a^2(a^2 - x^2)}{(2x^2 - 5ax + 2a^2)^2};$$

Pochodna ta staje się równą zeru przy $x = \pm a$, pozostając dodatnią w przedziale $| -a, +a |$.

Tablica przebiegu zmienności przedstawia się w sposób następujący:

x	$-\infty$		$-a$		$\frac{a}{2}$		a		$2a$		$+\infty$
y'	0	$-$	0		$+$		0		$-$		0
y	0	$\searrow$	$-\frac{a}{9}$	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	$-a$	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	0
			min.				*max.*				

Krzywa, którą tu podajemy, składa się z trzech gałęzi nieskończonych, przybierających za asymptoty $x = \frac{a}{2}$, $x = 2a$ i $y = 0$; jedna z tych gałęzi przechodzi przez punkt początkowy O; spółczynnik kątowy stycznej w tym punkcie równa się $y' = \frac{1}{2}$.

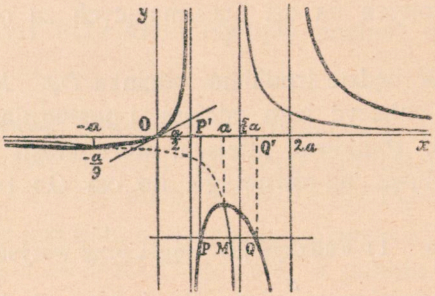
2) Dla wartości danej funkcyi y, odcięte punktów odpowiadających krzywej są pierwiastkami równania kwadratowego

$$2yx^2 - a(5y + a)x + 2a^2y = 0,$$

skąd

$$OP' \, . \, OQ' = \frac{2a^2 y}{2y} = a^2,$$

co istotnie dowodzi, że punkty P' i Q' są sprzężone harmoniczne względem punktów $-a$ i $+a$ osi Ox.



3) Odcięta punktu M—środka odcinka PQ równa się

$$x = \frac{OP' + OQ'}{2} = \frac{a(5y + a)}{4y},$$

tak że związek między odciętą i rzędną punktu M ma postać:

$$4xy - 5ay - a^2 = 0.$$

Jest to równanie hiperboli równobocznej o asymptotach $x = \frac{5a}{4}$ $y = 0$. Część przerywana tej hiperboli, zawarta między punktami maximum'a i minimum'a funkcyi y, odpowiada punktom P, Q sprzężonym urojonym.

164. Dane są dwie osie prostokątne OX i OY; zbudować krzywą C, przedstawiającą zachowanie się funkcyi

$$y = \frac{x^2 + 2x - m}{x^2},$$

gdzie x rośnie od $-\infty$ do $+\infty$, i m jest parametrem danym dodatnim lub równym zeru.

Uważajmy prostą T, styczną do krzywej C w punkcie, którego odcięta równa się x_1; wyrazić w zależności od x_1 rzędną punktu, położonego na stycznej T, którego odcięta równa się $\frac{3}{2} x_1$.

Uważajmy prostą Δ, równoległą do osi OY, której wszystkie punkty mają za odciętą wartość a, i inną prostą D, równoległą do osi OX i mającą za rzędną wartość y_1; prosta D przecina prostą Δ w punkcie P, a krzywą C — w punktach M', M''. Znaleźć zależność między y_1 i odciętą punktu Q, sprzężonego harmonicznie z punktem P względem punktów M' i M'', skąd wyprowadzić miejsce geometryczne punktu Q, gdy sieczna D przesuwa się równolegle do samej siebie. Zbadać przypadki szczególne, gdy a równa się m, zeru lub nieskończoności.

Rozwiązanie. Pochodna badanej funkcyi jest

$$y' = \frac{(2x+2)x^2 - (x^2+2x-m)2x}{x^4},$$

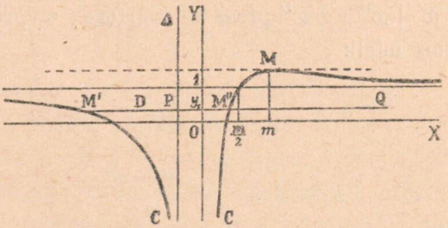
albo

$$y' = \frac{2x(m-x)}{x^4}.$$

Pochodna ta staje się zerem przy $x=0$ i przy wartości dodatniej $x=m$, skąd — następująca tablica zmian:

x	$-\infty$		0		m		$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$			
y	1	$\searrow$	$-\infty$	$\nearrow$	$1+\frac{1}{m}$	$\searrow$	1		
			min.		*max.*				

Krzywą, tu przedstawioną, stanowią więc dwie gałęzie nieskończone, mające za asymptoty oś OY i równoległą do osi OX prostą $y=1$;



dwie te gałęzie przecinają oś OX w dwóch punktach, których odcięte są pierwiastkami równania

$$x^2+2x-m=0;$$

gałęź druga przecina asymptotę $y=1$ w punkcie, którego odcięta równa się $x=\frac{m}{2}$.

Prosta T, styczna w punkcie (x_1, y_1) do krzywej C, ma za równanie

$$Y-y_1=y'_1(X-x_1);$$

zatem rzędna punktu tej prostej, którego odcięta jest $\frac{3}{2}x_1$, równa się

$$Y = y_1 + y'_1\left(\frac{3}{2}x_1 - x_1\right) = y_1 + \frac{x_1 y'_1}{2} =$$

$$= \frac{x_1^2 + 2x_1 - m}{x_1^2} + \frac{x_1^2(m - x_1)}{x_1^4}$$

$$= 1 + \frac{1}{x_1}.$$

Prosta D $(y = y_1)$ przecina krzywą C w dwóch punktach M', M'', których odcięte x', x'' są pierwiastkami równania

$$(1 - y_1)x^2 + 2x - m = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Aby wyrazić y_1 w funkcyi odciętej α punktu Q, napiszmy, że ten punkt i punkt P, o odciętej a, dzielą harmonicznie odcinek $M'M''$:

$$\frac{\overline{QM'}}{\overline{QM''}} = -\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM''}},$$

albo

$$\frac{\alpha - x'}{\alpha - x''} = -\frac{a - x'}{a - x''},$$

skąd, oswobodzając się od mianowników, po uproszczeniu, otrzymamy

$$2a\alpha - (a + \alpha)(x' + x'') + 2x'x'' = 0.$$

Zastępując $x' + x''$ i $x'x''$ przez ich wartości, wyprowadzone z równania (1), będziemy mieli:

$$a\alpha + \frac{a + \alpha}{1 - y_1} - \frac{m}{1 - y_1} = 0,$$

skąd

$$y_1 = 1 + \frac{1}{a} + \frac{a - m}{a\alpha}.$$

Ten związek między spółrzędnymi α i y_1 punktu Q jest stopnia drugiego; wnosimy stąd, że miejscem punktu Q, gdy zmienia się y_1, jest stożkowa. Stożkowa ta, przybierająca za asymptoty oś y-ów i prostą

$$y = 1 + \frac{1}{a},$$

równoległą do osi x-ów, jest hiperbolą równoboczną, przecinającą oś Ox w punkcie, którego odcięta

$$\alpha_0 = \frac{m - a}{1 + a}.$$

Wszystkie punkty Q, odpowiadające punktom rzeczywistym M', M'', są położone pod styczną poziomą $y = 1 + \frac{1}{m}$ do krzywej C.

Przypadki szczególne. $a = m$. Odcięta α punktu Q, odpowiadająca prostej D o rzędnej y_1, równa się w tym przypadku

$$\alpha = \frac{a - m}{a y_1 - a - 1} = 0;$$

miejscem punktów Q jest więc oś Oy.

$a = 0$. Mamy: $\alpha = m$, i miejscem punktu Q jest linia, równoległa do Oy, przechodząca przez punkt najwyższy M krzywej C. Te dwa przypadki pokazują, że gdy punkt P porusza się na prostej OY albo na prostej, równoległej do OY, poprowadzonej z punktu M, punkt Q zakreśla inną prostą, jak tego można było spodziewać się.

$a = \infty$. Równanie hiperboli — miejsca punktów Q, sprowadza się do równania

$$y_1 = 1 + \frac{1}{\alpha},$$

i przedstawia hiperbolę, mającą za asymptoty oś OY i asymptotę $y = 1$ krzywej C. Ponieważ punkt Q, sprzężony harmoniczny z punktem w nieskończoności P, jest środkiem odcinka $M'M''$, przeto hiperbola przechodzi przez punkt M o spółrzędnych, równych m i $1 + \frac{1}{m}$.

165. Zbadać przebieg zmienności funkcyi

$$y = \frac{x^2 + 3x + 5}{x^2 + 1}$$

i przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej.

Uważajmy prostą Δ, równoległą do osi Ox i przecinającą krzywą w punktach M i N; oznaczając przez P środek odcinka MN i spostrzegając, że odcięta tego punktu jednoznacznie zależy od jego rzędnej, znaleźć związek między nimi, i następnie zbudować miejsce geometryczne punktu P, gdy prosta Δ przesuwa się równolegle do samej siebie [1]).

166. Dane są dwie osie spółrzędnych Ox i Oy. Uważajmy punkt, którego spółrzędne są

$$x = 0, \quad y = 1,$$

i drugi punkt o spółrzędnych

---

[1]) Zadania 163, 164, 165, 166 i 167 wymagają wiadomości elementów geometryi analitycznej.

$$x=\frac{a\cos\theta}{1+\cos\theta},\quad y=\frac{a\sin\theta}{1+\cos\theta},$$

gdzie a oznacza liczbę dodatnią i θ—kąt, zawarty między o i π.

1) Znaleźć spółczynnik kątowy m prostej, łączącej te dwa punkty.

2) Zbadać przebieg zmienności tego spółczynnika, gdy kąt θ zmienia się od o do π, i zbudować odpowiadającą krzywą.

3) Wyznaczyć kąt θ tak, aby $m=-1$.

Rozwiązanie. 1) Prosta, której rzędna w punkcie początkowym równa się 1, a spółczynnik kątowy jest m, ma postać:

$$y=mx+1.$$

Zastępując spółrzędne bieżące x i y przez spółrzędne drugiego danego punktu, mamy:

$$\frac{a\sin\theta}{1+\cos\theta}=m\cdot\frac{a\cos\theta}{1+\cos\theta}+1,$$

skąd znajdujemy

$$m=\frac{a\sin\theta-\cos\theta-1}{a\cos\theta}.$$

2) Pochodna funkcyi m równa się

$$m'=\frac{(a\cos\theta+\sin\theta)\,a\cos\theta+a\sin\theta\,(a\sin\theta-\cos\theta-1)}{a^2\cos^2\theta},$$

albo

$$m'=\frac{a-\sin\theta}{a\cos^2\theta}.$$

Jeżeli $a>1$, wówczas pochodna m' jest zawsze dodatnia, gdy θ rośnie od 0 do π, i spółczynnik m stale rośnie, przechodząc przez nieskończoność przy $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Stąd—następująca tablica zmian:

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π
m	$-\frac{2}{a}$	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0

Jeżeli $0<a<1$, pochodna m' staje się zerem przy $\sin\theta=a$, czyli przy dwóch wartościach θ_1 i $\pi-\theta_1$ kąta θ, — i tablica zmian jest następująca:

θ	0		θ_1		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\theta_1$		π
$\sin\theta$	0		a		1		a		0
m'	1	$+$	0	$-$	∞	$-$	0	$+$	1
m	$-\frac{2}{a}$	$\nearrow$	m_1	$\searrow$	$\begin{cases}-\infty\\+\infty\end{cases}$	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	0
			max.				*min.*		

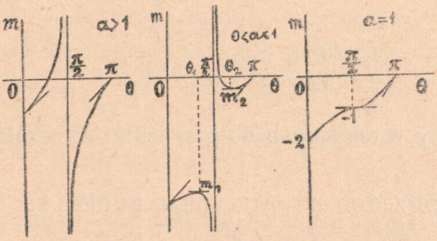
W przypadku szczególnym, gdy $a=1$, mamy $\theta_1 = \frac{\pi}{2} = \pi - \theta_1$, tak że tylko dwa końcowe przedziały tablicy powyższej mają miejsce w tym przypadku.

Wyrażenie m staje się nieoznaczonym przy $\theta = \frac{\pi}{2}$; skracając przez czynnik, który staje się zerem przy $\theta = \frac{\pi}{2}$, otrzymamy:

$$m = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}};$$

widzimy, że m rośnie od -2 do 0 w sposób ciągły, przybierając wartość $=-1$ przy $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Trzy przypadki dyskusyi powyższej są przedstawione przez jedną z trzech następujących krzywych:



Zauważmy, że maximum i minimum na rysunku drugim sprowadza się do punktu przegięcia na stycznej poziomej rysunku trzeciego.

3) Mamy:

$$\frac{a\sin\theta - \cos\theta - 1}{a\cos\theta} = -1,$$

albo

$$a\sin\theta + (a-1)\cos\theta = 1,$$

albo, wyrażając sin θ i cos θ w funkcyi tg $\frac{\theta}{2}$, otrzymamy:

$$2a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + (a-1)\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}\right) = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2},$$

albo

$$a \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} - 2a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + 2 - a = 0.$$

Ponieważ kąt θ jest zawarty między 0 i π, przeto $\frac{\theta}{2}$ zmienia się między 0 i $\frac{\pi}{2}$, i tg $\frac{\theta}{2}$ może przybierać wartości dodatnie dowolne.

Warunek rzeczywistości jest następujący:

$$a^2 - a(2-a) \geqslant 0,$$

skąd, skracając przez czynnik dodatni a, otrzymujemy

$$a \geqslant 1.$$

Jeżeli $1 \leqslant a < 2$, wówczas suma 2 i iloczyn $\frac{2-a}{a}$ wartości tg $\frac{\theta}{2}$ są dodatnie; istnieją wówczas dwie wartości dodatnie tg $\frac{\theta}{2}$, dające dwa kąty θ, zawarte między 0 i π.

Jeżeli $a > 2$,—jedna z wartości staje się ujemną, zatem możliwą jest tylko wartość największa.

Przy $a = 1$, dwie wartości tg $\frac{\theta}{2}$ równają się

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4},$$

skąd

$$\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} \quad \text{i} \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Dochodzimy w ten sposób do przypadku szczególnego dyskusyi powyższej.

167. Spółrzędne x i y pewnego punktu są:

$$x = mz^2 + z + 2m,$$
$$y = z^2 + mz,$$

gdzie m oznacza liczbę daną. Zbadać przebieg zmienności spółczynnika kątowego prostej, łączącej ten punkt z początkowym punktem układu, gdy z zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$. Rozpatrzyć różne przypadki w zależności od parametru m i podać przedstawienie graficzne.

Rozwiązanie. Spółczynnik kątowy prostej, łączącej punkt (x, y) z punktem początkowym, jest

$$u = \frac{y}{x} = \frac{z^2 + mz}{mz^2 + z + 2m}.$$

Funkcya ta ma przerwę przy dwóch wartościach z, które zamieniają na zero mianownik funkcyi:

$$mz^2 + z + 2m = 0.$$

Pierwiastki z' i z'' tego równania są rzeczywiste przy obecności warunku:

$$1 - 8m^2 \geqslant 0,$$

albo

$$-\frac{\sqrt{2}}{4} \leqslant m \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Biorąc pochodną funkcyi u, otrzymujemy

$$u' = \frac{(2z + m)(mz^2 + z + 2m) - (z^2 + mz)(2mz + 1)}{(mz^2 + z + 2m)^2}$$

albo

$$u' = \frac{(1 - m^2)^2 z^3 + 4mz + 2m^2}{(mz^2 + z + 2m)^2}.$$

Pochodna ta staje się zerem przy dwóch wartościach z pierwiastków równania

$$(1 - m^2) z^2 + 4mz + 2m^2 = 0;$$

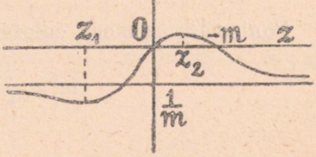
Ponieważ wyróżnik tego równania

$$4m^2 - (1 - m^2) 2m^2 = 2m^2 (1 + m)^2$$

jest zawsze liczbą dodatnią, przeto pierwiastki z_1 i z_2 są rzeczywiste. Przy każdej wartości z, położonej zewnątrz przedziału (z_1, z_2), pochodna u' ma znak spółczynnika $(1 - m^2)$ przy z, i jest znaku przeciwnego—przy każdej innej wartości z. W zależności od wartości parametru m względem czterech liczb $\pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ i ± 1, należy rozróżnić 5 głównych przypadków:

1) $m < -1$. Funkcya u jest ciągła; przebieg jej zmienności przedstawiają tablica i krzywa następujące:

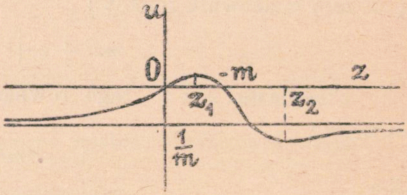
z	$-\infty$		z_1		z_2		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	0	$-$	
u	$\frac{1}{m}$	$\searrow$	u_1	$\nearrow$	u_2	$\searrow$	$\frac{1}{m}$
			min.		*max.*		



Przy $m=-1$ mamy $z_1=-\infty$ i $z_2=-\frac{m}{2}$; krzywa jest całkowicie położona ponad asymptotą.

2) $-1<m<-\frac{\sqrt{2}}{4}$. Mamy następującą tablicę zmian i krzywą:

z	$-\infty$		z_1		z_2		$+\infty$
u'		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$\frac{1}{m}$	↗	u_1	↘	u_2	↗	$\frac{1}{m}$
			max.		*min.*		



Przy $m=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ mamy $z'=z''=-\frac{1}{2m}=\sqrt{2}$, i $z_1=\frac{\sqrt{2}}{7}$, $=\sqrt{2}$. Ponieważ $z_2=z'$, przeto minimum u_2 staje się nieskończonym.

3) $-\frac{\sqrt{2}}{4}<m<+\frac{\sqrt{2}}{4}$. Aby uporządkować pierwiastki z' i z'' równania

$$mz^2+z+2m=0$$

względem pierwiastków z_1 i z_2 równania

$$f(z)=(1-m^2)z^2+4mz+2m^2=0,$$

zauważmy, że

$$f(z')f(z'')=[(1-m^2)z'^2+4mz'+2m^2]\,[(1-m^2)z''^2+4mz''+2m^2]$$

$$=\left[\frac{(m^2-1)(z'+2m)}{m}+4mz'+2m^2\right]\left[\frac{(m^2-1)(z''+2m)}{m}+\right.$$
$$\left.+4mz''+2m^2\right]$$

$$=\frac{[(5m^2-1)z'+2m(2m^2-1)]\,[(5m^2-1)z''+2m(2m^2-1)]}{m^2}$$

$$=\frac{(5m^2-1)^2z'z''+(5m^2-1)2m(2m^2-1)\,(z'+z'')+4m^2(2m^2-1)^2}{m^2};$$

albo, zastępując $z'z''$ przez 2, i $z'+z''$ przez $-\frac{1}{m}$,

$$f(z')f(z'')=\frac{4m^4(4m^2-1)+2(6m^2-1)}{m^2}.$$

Ponieważ, na mocy założenia

$$m^2<\frac{1}{8}<\frac{1}{6}<\frac{1}{4},$$

przeto mamy:

$$f(z')f(z'') < 0,$$

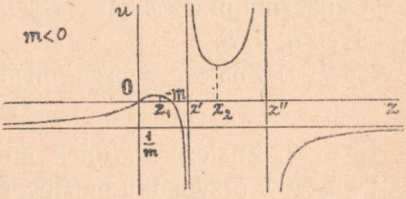
tak, że jeden z pierwiastków z', z'' jest położony w przedziale (z_1, z_2), a drugi — zewnątrz tego przedziału. Dalej, ponieważ $-m$ znajduje się zewnątrz z', z'' i między z_1, z_2, przeto mamy jedno z następujących uporządkowań:

$$m<0 \qquad 0<z_1<-m<z'<z_2<z'';$$

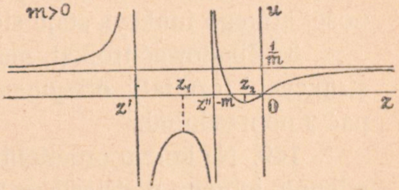
$$m>0 \qquad z'<z_1<z''<-m<z_2<0;$$

Tym dwóm uporządkowaniom odpowiadają tablice i krzywe poniższe:

$$\begin{array}{c|ccccccccccc} z & -\infty & z_1 & & z' & & z_2 & & z'' & & +\infty \\ \hline u' & & +\;0\;- & & & & -\;0\;+ & & + & & \\ u & \frac{1}{m} & \nearrow & u_1 & \searrow & \mp\infty & \searrow & u_2 & \nearrow & \pm\infty & \nearrow \frac{1}{m} \\ & & & max. & & & & min. & & & \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccccccccccc} z & -\infty & & z' & & z_1 & & z'' & & z_2 & +\infty \\ \hline u' & + & & + & & 0 & - & & - & 0 & + \\ u & \frac{1}{m} & \nearrow & \pm\infty & \nearrow & u_1 & \searrow & \pm\infty & \searrow & u_2 & \nearrow \frac{1}{m} \\ & & & & & max. & & & & min. & \end{array}$$



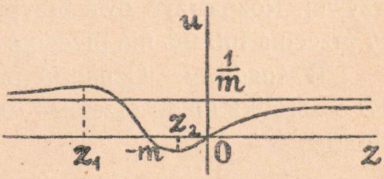
Przy $m=0$, mamy $u=z$; funkcya stale rośnie wraz z z; przedstawia ją dwusieczna kąta xOu.

Przy $m=\frac{\sqrt{2}}{4}$, mamy $z'=z''=-\frac{1}{2m}=-\sqrt{2}$ i $z_1=-\sqrt{2}$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{7}$.

Ponieważ $z_1=z'$, przeto maximum u_1 staje się nieskończonym.

4) $\frac{\sqrt{2}}{4}<m<1$. Mamy:

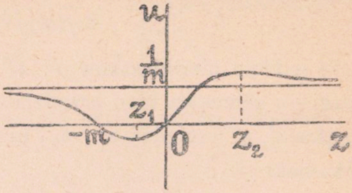
$$\begin{array}{c|ccccccc} z & -\infty & & z_1 & & z_2 & & +\infty \\ \hline u' & & + & 0 & - & 0 & + & \\ u & \frac{1}{m} & \nearrow & u_1 & \searrow & u_2 & \nearrow & \frac{1}{m} \\ & & & max. & & min. & & \end{array}$$



Przy $m=1$, mamy $z_1=-\infty$ i $z_2=-\frac{m}{2}$; krzywa jest w całości położona pod asymptotą.

5) $m>1$. Mamy:

z	$-\infty$		z_1		z_2		$+\infty$
u'		$-$	0	$+$	0	$-$	
u	$\frac{1}{m}$	$\searrow$	u_1	$\nearrow$	u_2	$\searrow$	$\frac{1}{m}$
			min.		*max.*		



Uwaga. Trzy ostatnie krzywe sprowadzają się do trzech pierwszych przez zwyczajny obrót. Można byłoby stwierdzić to natychmiast, spostrzegając, że zmiana m na $-m$ i z na $-z$ zamienia u na $-u$.

168. W trójkącie ABC dane są boki $BC=a$, $AC=b$ i pole S. Oznaczmy przez x kąt ABC i uważajmy go, jako funkcyę zmiennych a, b, S.

1) Znaleźć związek między x, a, b, S w postaci równania:

$$x=f(a, b, S).$$

2) Znaleźć warunek możliwości otrzymanej funkcyi, wykazać, że w przypadku możliwości ta funkcya posiada dwie wartości, związane zależnością $x_1+x_2=\pi$, i wskazać warunek, przy obecności którego funkcya staje się jednoznaczną.

3) Zbudować trójkąt, mając pole S i boki a, b, zbadać tę konstrukcyę, i rezultaty, otrzymane na drodze geometrycznej, porównać z poprzednimi.

169. Na kole o promieniu $=R$ opisany jest trójkąt równoramienny, którego podstawa $=2x$. Zbadać przebieg zmienności pola tego trójkąta, gdy zmienia się x, i zbudować odpowiadającą krzywą.

170. Dane jest koło o promieniu $=R$ i prosta xy, na której położony jest punkt stały P. Uważajmy cięciwę AB, równoległą do prostej xy, i następnie trójkąt ABP. Zakładając, że cięciwa AB przesuwa się równolegle do samej siebie, zbadać przebieg zmienności pola trójkąta ABP i przedstawić ten przebieg zapomocą krzywej. Rozpatrzyć dwa przypadki, zależne od tego, czy prosta xy przecina lub też nie przecina koła.

Wskazówka. Oznaczyć przez x odległość zmienną cięciwy AB od środka koła i przez a — odległość stałą środka koła od prostej xy.