

- 2.2. – mechanika ośrodków ciągłych
- 5.3. – plastyczność i lepkoplastyczność
- 5.52. – fizyczne i mechaniczne własności metali

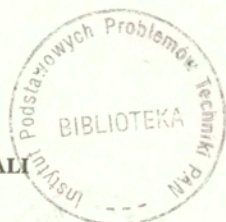
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN  
**BIBLIOTEKA GŁÓWNA**  
00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21

Ryszard B. Pęcherski

**OPIS DEFORMACJI PLASTYCZNEJ METALI  
Z EFEKTAMI MIKROPASM ŚCINANIA**

*(Praca habilitacyjna)*

2/1998



W A R S Z A W A 1 9 9 8

<http://rcin.org.pl>

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

**BIBLIOTEKA**

02-106 Warszawa, ul. Pawińskiego 5B

Tel. 22-826-74-10

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 lutego 1998 r.

Recenzent – Prof. dr hab. Wojciech K. Nowacki



56546



Praca habilitacyjna

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark. wyd. 6,25 Ark. druk. 8,00

Oddano do drukarni w lutym 1998r.

---

**ATOS** Poligrafia-Reklama, Warszawa, Stawki 14

<http://rcin.org.pl>

Ryszard B. Pęcherski

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Ośrodek Mechaniki i Informatyki Stosowanej

## OPIS DEFORMACJI PLASTYCZNEJ METALI Z EFEKTAMI MIKROPASM ŚCINANIA

### Streszczenie

Obserwacje doświadczalne wykazują, że deformacji plastycznej metali może towarzyszyć silna koncentracja odkształcenia postaciowego w formie cienkich transkryystalicznych warstewek o grubości rzędu  $0.1 \mu\text{m}$ , które nazywa się mikropasmami ścinania. Mikropasma ścinania mogą współdziałać z aktywnymi mechanizmami krystalograficznego poślizgu lub bliźniakowania, przejmując często kontrolę nad procesem plastycznego płynięcia. Zmiana mechanizmu deformacji przyczynia się do rozwoju anizotropii indukowanej odkształceniem plastycznym oraz powoduje zmianę mechanicznych własności materiału. Dlatego sformułowanie nowego opisu dużych deformacji plastycznych z uwzględnieniem makroskopowych efektów mikropasm ścinania jest decydujące dla poprawnego przewidywania zachowania się metalicznych ciał stałych. Jest to celem niniejszej rozprawy.

Na podstawie analizy aktualnego stanu badań na temat hierarchii procesów poślizgu, zlokalizowanych form odkształcenia plastycznego w monokryształach, fizycznej natury wielopoziomowej hierarchii pasm ścinania oraz ich efektów w polikryształach – przedstawiono motywację fizyczną i podstawy heurystyczne proponowanego opisu teoretycznego. Sformulowano nowe hipotezy: o rozszerzeniu pojęcia reprezentatywnego elementu objętości, o obwiedni stanów plastycznych z mikropasmami ścinania (obwiedni mikropasm ścinania), o efekcie naroża plastycznego. Analizując problem uwzględnienia efektów mikropasm ścinania w kontynualnym opisie odkształcenia plastycznego,



zaproponowano nowy model prędkości odkształcenia postaciowego generowanego przez mikropasma ścinania oraz określono makroskopowe miary gradientu prędkości, prędkości deformacji plastycznej oraz spinu plastycznego jako efekt uśrednienia po reprezentatywnym elemencie objętości przeciętym osobiwą powierzchnią ścięcia.

Zaproponowano nowy opis konstytutywny plastyczności z efektami mikropasm ścinania w postaci modelu materiału sprężysto–plastycznego z dwoma powierzchniami granicznymi. Pierwsza powierzchnia graniczna określa zakres sprężysty i związana jest z efektem wewnętrznych mikronaprężeń, których wpływ maleje ze wzrostem wartości ekwiwalentnego odkształcenia plastycznego. Makroskopowy efekt dominującego wtedy mechanizmu mikropasm ścinania opisano przy pomocy drugiej, zewnętrznej, powierzchni granicznej, która aproksymuje obwiednię mikropasm ścinania. Obwiednia mikropasm ścinania ma tę własność, że stan uplastycznienia elementarnej objętości polikryształu związany jest z określoną przestrzenną organizacją aktywnych mikropasm ścinania. Geometria mikropasm ścinania związana jest z postulowanymi powierzchniami niestowarzyszonych potencjałów plastycznych, które tworzą na zewnętrznej powierzchni granicznej naroże. Zależnie od udziału mikropasm ścinania w mechanizmie płynięcia plastycznego, można wyodrębnić w przestrzeni naprężeń obszar pełnej aktywności oddzielony od obszaru sprężystego przez całkowicie nieliniową strefę zwaną obszarem częściowej aktywności. W razie kontynuowania obciążenia z dopuszczalnym odchyleniem od obciążenia proporcjonalnego, które pozwala pozostać wewnątrz obszaru w pełni aktywnego, reakcja plastyczna opisana jest przyrostowo liniowym niestowarzyszonym prawem płynięcia. Zależności konstytutywne wyprowadzone dla obszaru częściowo aktywnego mają natomiast postać nowego niestowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego z nieliniową zależnością między tensorami prędkości odkształcenia i naprężenia. Makroskopowym efektem działania mikropasm ścinania jest zaburzenie współosiowości kierunków głównych tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia plastycznego.

Na zakończenie, przedstawiono przykład identyfikacji proponowanego modelu płynięcia plastycznego z udziałem mikropasm ścinania. Wykorzystując dostępne wyniki obserwacji doświadczalnych dla próby kanalikowej, wykonano obliczenia numeryczne tego problemu z zastosowaniem programu elementów skończonych ABAQUS. Otrzymano poszukiwaną zależność opisującą zmianę udziału mikropasm ścinania w prędkości odkształcenia postaciowego w czasie procesu deformacji plastycznej. Wyniki obliczeń numerycznych pokazują, że proponowany w pracy model plastyczności z efektami mikropasm ścinania prowadzi do znacznie lepszej zgodności z doświadczeniem w porównaniu ze stosowanym dotychczas stowarzyszonym prawem płynięcia.



## SPIS TREŚCI

1.	WPROWADZENIE	7
1.1.	Wstęp	7
1.2.	Cel i zakres pracy	8
1.3.	Omówienie aktualnego stanu badań	11
2.	MOTYWACJA FIZYCZNA	13
2.1.	Mechanizmy odkształcenia kryształów	14
2.1.1.	Poślizg plastyczny i bliźniakowanie	14
2.1.2.	Hierarchia procesów poślizgu	16
2.1.3.	Zlokalizowane formy odkształcenia plastycznego	19
2.1.4.	Fizyczna natura pasm ścinania	21
2.2.	Deformacja plastyczna w polikryształe	24
2.2.1.	Mechanizmy odkształcenia plastycznego i ewolucja wewnętrznych mikronaprzeżeń	24
2.2.2.	Hierarchia pasm ścinania i ich efekty makroskopowe	26
2.2.3.	Fizyczna natura mikropasm ścinania w polikryształach	29
2.2.4.	Uwagi o "adiabatywnych" pasmach ścinania	30
3.	PROBLEM UWZGLĘDNIENIA EFEKTÓW MIKROPASM ŚCINANIA W KONTYNUALNYM OPISIE ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNEGO METALI	32
3.1.	Opis odkształcenia plastycznego metali w ramach kontynualnej teorii materiałów	32
3.2.	Hipoteza o rozszerzeniu pojęcia reprezentatywnego elementu objętości	34
3.3.	Model prędkości odkształcenia postaciowego generowanego przez mikropasma ścinania	37
3.4.	Znaczenie pojęcia "uplastycznienie" w kontekście mechanizmu mikropasm ścinania	42
3.5.	Hipoteza o obwiedni mikropasm ścinania	44
4.	TEORETYCZNE PODSTAWY OPISU DUŻYCH DEFORMACJI PLASTYCZNYCH Z EFEKTAMI MIKROPASM ŚCINANIA	46
4.1.	Kontynualny opis deformacji metali	47
4.1.1.	Ruch ciała materialnego	47
4.1.2.	Przejsięcie od opisu mikroskopowego do makroskopowego	50
4.2.	Opis efektów mikropasm ścinania w ramach kontynualnej teorii materiałów	53
4.2.1.	Zastosowanie teorii powierzchni osobliwych do opisu efektów mikropasm ścinania – warstwa ścinania	53

4.2.2.	Określenie makroskopowej miary prędkości deformacji z uwzględnieniem wpływu mikropasm ścinania	58
4.2.3.	Dyskusja koncepcji warstwy ścinania w świetle znanych propozycji w literaturze	63
4.2.4.	Ciało materialne z wewnętrzną strukturą	64
4.2.5.	Podstawowe związki kinematyczne	65
5.	<b>MODEL PLASTYCZNOŚCI Z EFEKTAMI MIKROPASM ŚCINANIA</b>	69
5.1.	Model materiału z nieliniowym prawem kinematycznego wzmocnienia dla skończonych deformacji plastycznych	69
5.1.1.	Podstawowe równania modelu	69
5.1.2.	Model płynięcia plastycznego z nieliniowym prawem kinematycznego wzmocnienia	72
5.2.	Równania konstytutywne modelu plastycznego płynięcia z efektami mikropasm ścinania	75
5.2.1.	Zastosowanie modelu z dwoma powierzchniami granicznymi do aproksymacji obwiedni mikropasm ścinania	75
5.2.2.	Hipoteza o efekcie naroża plastycznego	77
5.2.3.	Postulat o niestowarzyszonych potencjałach plastycznych	78
5.2.4.	Wyprowadzenie prawa plastycznego płynięcia z efektami mikropasm ścinania	79
5.2.5.	Niestowarzyszone prawa płynięcia indukowane przez mikropasma ścinania	86
5.2.6.	Dyskusja proponowanego opisu konstytutywnego w świetle znanych modeli plastyczności	89
6.	<b>PRZYKŁAD IDENTYFIKACJI MODELU</b>	92
6.1.	Omówienie wyników obserwacji doświadczalnych dla próby kanalikowej	92
6.2.	Identyfikacja proponowanego modelu z zastosowaniem numerycznej analizy próby kanalikowej	94
7.	<b>PODSUMOWANIE</b>	100
7.1.	Wnioski końcowe	100
7.2.	Uwagi dotyczące dalszych badań	100
8.	<b>BIBLIOGRAFIA</b>	103

## 1. WPROWADZENIE

### 1.1. Wstęp

W technologicznych operacjach plastycznego kształtowania metali jakość produktu i koszt jego wytwarzania uzależnione są w dużym stopniu od pożądanego zachowania się materiału w czasie procesu deformacji plastycznej. W wielu procesach obróbki plastycznej ważną rolę odgrywa zjawisko lokalizacji odkształcenia polegające na tym, że w określonych warunkach odkształcenie plastyczne koncentruje się jedynie w pewnych strefach, osiągając tam duże wartości, podczas gdy w innych obszarach jest ono znacznie mniejsze. Uniemożliwia to często uzyskanie wymaganego kształtu wyrobu. Lokalizacja plastycznego odkształcenia poprzedza zwykle zniszczenie (rozdzielenie odkształcanego ciała na dwie lub więcej części). Wspomniane wyżej procesy można podzielić na dwie grupy. W pierwszej grupie należy wymienić te, w których staramy się uniknąć zjawisk lokalizacji i zniszczenia, na przykład procesy plastycznego kształtowania blach. Do drugiej grupy zaliczamy procesy, w których staramy się wykorzystać zjawiska lokalizacji i zniszczenia, jak np. procesy kształtowania brył ze sterowanym wymuszeniem pasm ścinania, procesy cięcia, przebijania i dynamicznej fragmentacji.

Skuteczne sterowanie i kontrola technologicznych procesów plastycznego kształtowania wymagają zdolności trafnego przewidywania, jak powstaje i rozwija się lokalizacja plastycznego odkształcenia, aż do końcowego zniszczenia. Przy obecnym rozwoju technik komputerowych można oczekiwać, że w niedalekiej przyszłości będzie możliwa numeryczna symulacja procesów technologicznych w czasie rzeczywistym w celu optymalnego doboru warunków i materiału. Zachowanie się metalu w czasie operacji obróbki plastycznej jest uwarunkowane fizycznymi mechanizmami plastycznego płynięcia i towarzyszącą ewolucją jego struktury. Aby odpowiedzieć na pytanie, czy możemy zmieniać operacje plastycznego kształtowania zgodnie z naszymi wymaganiami, musimy najpierw podjąć nowe badania podstawowe leżące na styku dwóch dyscyplin, nazywanych fizyką odkształcenia plastycznego i mechaniką ciała stałego. Celem tych badań powinno być sformułowanie adekwatnych modeli teoretycznych, które pozwolą poprawnie opisać i przewidywać, z zastosowaniem modelowania komputerowego, procesy dużych deformacji plastycznych z efektami anizotropii indukowanej odkształceniem plastycznym. Tak zdefiniowana potrzeba nowych badań interdyscyplinarnych stała się motywacją do określenia tematyki i przedmiotu rozważań niniejszej rozprawy.



## 1.2. Cel i zakres pracy

Niniejsza rozprawa stanowi podsumowanie wieloletnich badań autora, których przedmiotem były fizyczne i teoretyczne podstawy modeli konstytutywnych, opisujących zachowanie się materiałów metalicznych w zakresie skończonych deformacji plastycznych. Duże deformacje plastyczne, w szczególności w warunkach silnego skrępowania, jak na przykład w technologicznych operacjach plastycznego kształtowania lub w procesie przewężania poprzedzającym ciągłe zniszczenie, mogą prowadzić do silnej koncentracji odkształcenia postaciowego w formie cienkich transkystalicznych warstewek o grubości rzędu  $0.1 \mu\text{m}$ , zwanych mikropasmami ścinania. Tak określona lokalizacja odkształcenia plastycznego na poziomie mikroskopowym, może współdziałać z aktywnymi mechanizmami krystalograficznego poślizgu lub bliźniakowania, przejmując często kontrolę nad procesem plastycznego płynięcia. Zmiana mechanizmu deformacji przyczynia się do rozwoju anizotropii indukowanej odkształceniem plastycznym oraz powoduje zmianę mechanicznych własności materiału. Dlatego sformułowanie nowego opisu dużych deformacji plastycznych z uwzględnieniem makroskopowych efektów mikropasm ścinania jest decydujące dla poprawnego przewidywania zachowania się metali.

Celem rozprawy habilitacyjnej jest sformułowanie fenomenologicznego opisu płynięcia plastycznego metalicznych ciał stałych z uwzględnieniem wpływu makroskopowych efektów masowego rozwoju mikropasm ścinania. Jest to próba zintegrowanego opisu deformacji plastycznej metali, który ma połączyć wyniki najnowszych badań w zakresie fizyki plastycznego odkształcenia z nieliniową mechaniką skończonych deformacji ciał sprężysto–plastycznych. W pracy zawarto syntetyczne ujęcie nowych koncepcji, modeli teoretycznych i rezultatów, które powstały w wyniku własnych studiów, będących próbą uwzględnienia wpływu następujących efektów:

- wewnętrznych mikronapreżeń, które powstają w początkowej fazie procesu deformacji polikryształu w wyniku oddziaływania ziarn, niejednorodnego rozkładu poślizgów plastycznych w poszczególnych krystalitach i wynikających stąd spiętrzeń grup dyslokacji na granicach ziarn;
- rozwoju wielopoziomowej hierarchii aktywnych pasm ścinania, których przestrzenna organizacja i geometryczny układ przenosi się od skali mikroskopowej do makroskopowej;
- względnych obrotów sieci krystalicznej i spinu plastycznego.

Uwzględnienie tych efektów ma podstawowe znaczenie dla sformułowaniu odpowiednich modeli konstytutywnych. Dlatego w pracy zaproponowano, w szczególności:

1. Opis makroskopowych efektów wiązki (klastera) mikropasm ścinania w ramach kontynualnej teorii materiałów. Problem ten, według rozważań autora, jest nowy i nie był dotychczas podejmowany. W przedstawionym opisie zawarto szereg nowych koncepcji i modeli teoretycznych:
  - gruntownie zbadano doświadczalne i fizyczne podstawy zjawiska pod kątem fenomenologicznego opisu zachowania się materiału, formułując wnioski, spostrzeżenia i hipotezy, o rozszerzeniu pojęcia reprezentatywnego elementu objętości, o obwiedni stanów plastycznych z mikropasmami ścinania (obwiedni mikropasm ścinania), o efekcie naroża plastycznego;
  - zaproponowano nowy model, dzięki któremu można określić tę część prędkości plastycznego odkształcenia postaciowego, która jest makroskopowym efektem działania wielopoziomowej hierarchii pasm ścinania;
  - zastosowano teorię powierzchni osobliwych do opisu efektów wiązki (klastera) mikropasm ścinania w ramach kontynualnej teorii materiałów i wprowadzono koncepcję osobliwej powierzchni ścięcia (warstwy ścinania);
  - określono makroskopową miarę gradientu prędkości, prędkości deformacji plastycznej oraz spinu plastycznego z uwzględnieniem wpływu mikropasm ścinania jako efektu uśrednienia po reprezentatywnym elemencie objętości z osobliwą powierzchnią ścięcia.
2. Aby uzyskać opis zgodny z wynikami doświadczeń, które wykazują że mikropasma ścinania pojawiają się zazwyczaj po pewnym wstępnym odkształceniu – często w powiązaniu ze zmianą drogi odkształcenia, zaproponowano nowy model materiału sprężysto–plastycznego z dwoma powierzchniami granicznymi:
  - pierwszą powierzchnią graniczną określającą zakres sprężysty i związaną z efektem wewnętrznych mikronaprężeń, których wpływ maleje ze wzrostem wartości ekwiwalentnego odkształcenia plastycznego;
  - makroskopowy efekt dominującego wtedy mechanizmu mikropasm ścinania, opisano przy pomocy drugiej, zewnętrznej, gładkiej powierzchni granicznej, która aproksymuje obwiednię mikropasm ścinania oraz powierzchni niestowarzyszonych potencjałów plastycznych, tworzących na niej w punkcie obciążenia naroże.

Efekt wewnętrznych mikronaprężeń opisany jest nieliniowym modelem kinematycznego wzmocnienia rządzonego prawem Armstronga–Fredericka, które zostało zapisane dla skończonych deformacji. Zastosowano przy tym nową relację dla spinu plastycznego, niezbędną dla sformułowania obiektywnej pochodnej tensorów naprężenia i parametru wzmocnienia kinematycznego.



Teoretyczna analiza wpływu mikropasm ścinania w opisie płynięcia plastycznego doprowadziła do uzyskania nowych wyników i wykrycia nowych efektów:

- a) makroskopowym efektem działania aktywnych mikropasm ścinania jest zaburzenie współosiowości kierunków głównych tensora naprężenia i tensora prędkości odkształcenia plastycznego;
- b) uwzględnienie aktywnych mikropasm ścinania prowadzi do nowego modelu plastyczności z narożem, to znaczy:
  - stany plastyczne związane z inicjacją mikropasm ścinania odpowiadają pewnej granicznej powierzchni w przestrzeni naprężeń (obwiedni mikropasm ścinania), która ma tę własność, że stan uplastycznienia elementarnej objętości polikryształu, odpowiadający drodze obciążenia zbliżającej się do punktu na tej powierzchni, związany jest z określoną przestrzenną organizacją aktywnych mikropasm ścinania;
  - zależnie od udziału mikropasm ścinania w mechanizmie płynięcia plastycznego, można wyodrębnić w przestrzeni naprężeń obszar pełnej aktywności oddzielony od obszaru sprężystego przez całkowicie nieliniową strefę zwaną obszarem częściowej aktywności;
  - w razie kontynuowania obciążenia z dopuszczalnym odchyleniem od obciążenia proporcjonalnego, które pozwala pozostać wewnątrz obszaru w pełni aktywnego, reakcja plastyczna opisana jest przyrostowo liniowym niestowarzyszonym prawem płynięcia;
  - zależności konstytutywne wyprowadzone dla obszaru częściowo aktywnego mają postać nowego niestowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego z nieliniową zależnością między tensorami prędkości odkształcenia i naprężenia;
- c) otrzymano nową relację dla spinu plastycznego, który wynika z niewspółosiowości kierunków głównych tensorów naprężenia i prędkości odkształcenia plastycznego oraz z asymetrii podwójnego systemu mikropasm ścinania.

Na zakończenie, przedstawiono przykład identyfikacji proponowanego modelu płynięcia plastycznego z udziałem mikropasm ścinania. Wykorzystując dostępne wyniki obserwacji doświadczalnych dla próby kanalikowej (nieswobodnego ściskania w sztywnej matrycy), wykonano obliczenia numeryczne tego problemu z zastosowaniem programu elementów skończonych ABAQUS/Standard, w wyniku czego otrzymano poszukiwaną zależność opisującą zmianę udziału mikropasm ścinania w prędkości odkształcenia postaciowego w czasie procesu deformacji plastycznej. Dyskutowane w rozdziale 6 i punkcie 7.1 wyniki obliczeń numerycznych pokazują, że proponowany w pracy model plastyczności z efektami mikropasm ścinania prowadzi do znacznie lepszej zgodności z doświadczeniem w porównaniu ze stosowanymi dotychczas klasycznymi równaniami pla-



styczności. Przeprowadzona próba numerycznej analizy wykazuje, że wyżej wymieniony model może być dość łatwo włączony do znanych programów elementów skończonych i może znaleźć zastosowanie do analizy procesów kształtowania plastycznego metali.

### 1.3. Omówienie aktualnego stanu badań

Omawiany przedmiot badań mieści się w zakresie teorii skończonych deformacji plastycznych z efektami anizotropii indukowanej odkształceniem. Anizotropia ta może być spowodowana koncentracją mikronaprężeń na granicach ziarn, masową produkcją mikropasm ścinania oraz ewolucją tekstury w czasie procesu deformacji. W literaturze znane są różne modele skończonych deformacji plastycznych z efektami anizotropii indukowanej odkształceniem:

1. Fenomenologiczne teorie kinematycznego wzmocnienia (zob. np.: P.J. ARMSTRONG i C.O. FREDERICK [1966], B. RANIECKI [1984], Z. MRÓZ [1986], J.L. CHABOCHE [1986], R.B. PEÇHERSKI [1988], B. RANIECKI i S.K. SAMANTA [1989], M.K. DUSZEK i P. PERZYNA [1991], J.E. PAULUN i R.B. PEÇHERSKI [1992], J.F. BESSELING i E. VAN DER GIESSEN [1994] oraz A.S. KHAN i S. HUANG [1995]):
  - model Pragera–Zieglera z liniowym prawem kinematycznego wzmocnienia,
  - modele z dwoma lub wieloma powierzchniami granicznymi,
  - modele wielowarstwowe lub frakcyjne (*multilayer, fractional*),
  - model z prawem wzmocnienia opisanym nieliniowym równaniem ewolucji (model ARMSTRONGA – FREDERICKA),
  - modele z wieloma parametrami kinematycznego wzmocnienia.
2. Fenomenologiczne teorie plastyczności z narożem (por. np.: R. HILL [1967], J. CHRISTOFFERSEN i J.W. HUTCHINSON [1979], H. PETRYK [1988] oraz H. PETRYK i K. THERMANN [1997]).
3. Modele agregatów polikrystalicznych mające swoje podstawy w mikromechanice ciał sprężysto–plastycznych (por. np. A.S. KHAN i S. HUANG [1995]).
4. Modele fenomenologiczne uwzględniające wpływ makroskopowych efektów powstawania i geometrycznego rozkładu aktywnych mikropasm ścinania (R.B. PEÇHERSKI, [1991], [1992a], [1994], [1995], [1997],[1998a], N. RAMAKRISHNAN i S.N. ATLURI, [1994a], [1994b], N. RAMAKRISHNAN et al. [1994]).

Literatura na temat modeli wymienionych w punktach 1, 2 i 3 jest bardzo bogata. Cytowane powyżej prace zawierają wyczerpującą bibliografię przedmiotu. Tematyka wymieniona w punkcie 4 jest nowa. Była głównie przedmiotem studiów autora. Ostat-

nio znajduje jednak również zainteresowanie u innych badaczy. Dokładniejszą dyskusję rezultatów w wymienionych pracach: N. RAMAKRISHNAN i S.N. ATLURI [1994a], [1994b] oraz N. RAMAKRISHNAN et al. [1994], w odniesieniu do własnych wyników przedstawiono w punkcie 5.2.6.

W rozdziale drugim oraz w punkcie 3.1 trzeciego rozdziału omawiane są rezultaty znane z literatury. Sformułowane jednak wnioski i spostrzeżenia mają oryginalny charakter, stanowią ważną podstawę dla proponowanego opisu zachowania się materiału i dlatego zostały specjalnie wyodrębnione w tekście. Analiza dostępnych rezultatów obserwacji doświadczalnych oraz fizykalnych podstaw procesu plastycznej deformacji metali stały się przesłanką do postawienia nowych hipotez, które mają podstawowe znaczenie dla zbudowania modelu konstytutywnego. Zostały one również specjalnie wyodrębnione w tekście. Uwagi i komentarze zamieszczone na początku kolejnych rozdziałów mają charakter wstępny. Zawierają one również obszerne odniesienia bibliograficzne, które uzupełniają wymienioną powyżej dyskusję literatury przedmiotu. Pozostała część rozprawy zawiera wyniki własnych badań autora.

## 2. MOTYWACJA FIZYCZNA

Plastycznemu odkształceniu metalu towarzyszy ewolucja jego struktury. Tradycyjnie przyjmuje się, że przemiany strukturalne związane są zarówno z procesami mnożenia dyslokacji, procesami ich dynamicznej anihilacji, jak i podziału ziarn. Znane są w literaturze próby uwzględnienia wpływu tych przemian na zachowanie się materiału przez uzupełnienie równań konstytutywnych modelu mechanicznego lub termomechanicznego równaniami ewolucji dla parametrów wewnętrznych, które reprezentują zazwyczaj fenomenologiczne efekty równowagi między plastycznym umocnieniem, a osłabieniem spowodowanym odnową struktury (zdrowieniem). Oparte jest to na przesłance, że właśnie wspomniane przemiany odpowiedzialne są za zmianę globalnych własności mechanicznych materiału. Nie wyjaśnia to jednak wszystkich ważnych aspektów zachowania się materiału, np. schodkowego przebiegu krzywych umocnienia z kilkoma stanami nasycenia i ustalonego płynięcia, którym towarzyszą zaawansowane odkształcenia plastyczne (por. np. M. RICHERT [1995] oraz M. RICHERT i A. KORBEL [1995], [1997], gdzie oprócz wyników własnych badań autorzy przedstawili bogatą literaturę przedmiotu). Obecnie obserwuje się zmianę poglądów na ten temat. W ostatnich latach, w świetle licznych badań doświadczalnych i kompleksowych obserwacji metalograficznych, z zastosowaniem różnych technik dla różnych metali i stopów, ukształtowała się opinia, że w razie zaawansowanych odkształceń, jak i dla małych odkształceń poprzedzonych zmianą drogi odkształcenia lub schematu obciążenia, płynięcie plastyczne realizuje się przez hierarchię pasm poślizgu oraz pasm ścinania od skali mikroskopowej do poziomu makroskopowego. Mechanizm ten ma istotny wpływ na zmianę mechanicznych własności materiału. Okazuje się, że nie tylko uwzględnienie ewolucji gęstości dyslokacji oraz mechanizmu zdrowienia, ale wzięcie pod uwagę zmiany pewnych cech struktur dyslokacyjnych, które decydują o powstawaniu mikropasm ścinania ma podstawowe znaczenie dla poprawnego opisu zachowania się metali. Dotychczas takie podejście nie znajdowało zastosowania przy formułowaniu modeli konstytutywnych opisujących zaawansowane odkształcenia plastyczne. W pracy podjęto próbę uwzględnienia tylko niektórych efektów masowego rozwoju hierarchii pasm ścinania. Jak pokazuje dyskusja w rozdz. 6, pozwoliło to jednak sformułować makroskopowy opis deformacji plastycznej, który daje lepsze przybliżenie zachowania się materiału niż modele stosowane do tej pory.

Rozdział ten zawiera syntetyczne ujęcie wniosków i spostrzeżeń będących rezultatem interdyscyplinarnych studiów autora, poświęconych wyodrębnieniu z bogactwa dostępnych wyników doświadczalnych oraz związanych z nimi hipotez i



modeli fizycznych tych informacji, które okazały się przydatne do sformułowania fenomenologicznego opisu zachowania się materiału w czasie procesu deformacji plastycznej z efektami mikropasm ścinania. Spostrzeżenia te zostały specjalnie zaznaczone w tekście, jako że stanowią fizyczną motywację niezbędną do sformułowania proponowanego modelu teoretycznego. W szczególności przedstawiono, w postaci spostrzeżeń *S1-S6*, wyniki własnych dociekań, w których sprecyzowano heurystyczne podstawy teoretycznego opisu dużych deformacji plastycznych z efektami mikropasm ścinania.

## 2.1. Mechanizmy odkształcenia kryształów

### 2.1.1. Poślizg plastyczny i bliźniakowanie

Informacje dotyczące fizycznych podstaw deformacji plastycznej pojedynczych kryształów i polikryształów ciał metalicznych można znaleźć, np. w klasycznej monografii dotyczącej plastyczności kryształów E. SCHMIDA i W. BOASA [1935], w podręcznikach z dziedziny podstaw metalurgii i materiałoznawstwa G.E. DIETERA [1988] i R.W.K. HONEYCOMBE'a [1985] oraz w opracowaniach monograficznych R.J. ASARO [1983], H. NEUHÄUSERA [1986] oraz S.J. BASINSKI i Z.S. BASINSKIEGO [1982]. Z pozycji, które ukazały się w języku polskim, można wymienić: M.L. BERNSTEJN i W.A. ZAJMOWSKIJ [1973], A. KELLY i G.W. GROVES [1980], S. ERBEL et al. [1981] oraz S. KOCAŃDA [1985]. W świetle licznych wyników badań omawianych w tych pracach, odkształcenie plastyczne metali na zimno, tzn. w zakresie temperatur poniżej połowy temperatury topnienia, odbywa się przez poślizg lub bliźniakowanie. Mechanizm poślizgu rozumiany jest jako przemieszczenie jednej części kryształu względem drugiej, przy którym budowa krystaliczna obu części pozostaje niezmieniona. Również w obszarze poślizgu, sieć krystaliczna pozostaje taka sama jak w obu częściach kryształu, a każdy atom w tym obszarze przemieszcza się na jednakowe odległości stanowiące wielokrotność periodu identyczności sieci. Obszar poślizgu ogranicza się zazwyczaj do cienkiej warstwy o grubości rzędu wielkości średnicy jednego atomu węzłowego sieci krystalicznej. Warstwa ta jest równoległa do określonej płaszczyzny krystalograficznej, która nazywa się płaszczyzną poślizgu. Ponieważ poślizg następuje tylko po niektórych płaszczyznach krystalograficznych, odległych od siebie o określone odległości, odkształcenie przez poślizg ma w mikroskopowej skali charakter dyskretny i heterogeniczny. Mechanizm bliźniakowania polega także na przesunięciu wzdłuż określonych płaszczyzn i kierunków. Podczas bliźniakowania jednak części kryształu przemieszczają się tak, że są one lustrzanym

odbiciem względem wybranej płaszczyzny krystalograficznej, która przed odkształceniem nie była płaszczyzną symetrii. Często odkształcenie plastyczne jest wynikiem złożonego współdziałania obu tych mechanizmów. Nowoczesne studium, w którym analizuje się ścięcie bliźniacze kryształu z dyslokacjami oraz ścięcie poślizgowe kryształu z bliźniakami, można znaleźć w pracy M. SZCZERBY [1996].

Charakterystyczną cechą poślizgu jest to, że nie następuje on jednocześnie we wszystkich płaszczyznach i kierunkach krystalograficznych, lecz stopniowo do procesu poślizgu włączają się kolejno te płaszczyzny i kierunki krystalograficzne, które są najbardziej sprzyjająco zorientowane względem obciążeń zewnętrznych i w których maksymalne naprężenie styczne osiąga wielkość krytyczną. Znajduje to wyraz w znanym kryterium poślizgu Schmid'a, które w ogólnej postaci można wyrazić następująco (por. np. R. HILL [1966] lub R.J. ASARO [1983]):

$$(2.1) \quad \mathbf{b} \sigma \mathbf{n} = \tau_{cr},$$

gdzie  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{n}$  są jednostkowymi wektorami definiującymi odpowiednio kierunek poślizgu oraz normalną do powierzchni poślizgu,  $\sigma$  jest tensorem naprężenia Cauchy'ego, a  $\tau_{cr}$  oznacza krytyczną wartość naprężenia stycznego, dla którego w danym systemie nastąpi poślizg. Naprężenie styczne,  $\tau = \mathbf{b} \sigma \mathbf{n}$ , dla danego systemu poślizgu ( $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{n}$ ) nazywa się często w literaturze naprężeniem Schmid'a. W szczególności, dla rozciąganego monokryształu o przekroju  $A$  siłą  $P$ , kryterium poślizgu przyjmuje postać (por. np. G.E. DIETER [1988], str. 124):

$$(2.2) \quad \frac{P}{A} \cos \phi \cos \lambda = \tau_{cr},$$

gdzie  $\phi$  i  $\lambda$  są, odpowiednio, kątem nachylenia normalnej płaszczyzny poślizgu  $\mathbf{n}$  oraz kątem nachylenia kierunku poślizgu  $\mathbf{b}$ , względem osi rozciągania. Współczynnik orientacji  $\cos \phi \cos \lambda$  jest znany w literaturze jako współczynnik Schmid'a. Proces poślizgu jest anizotropowy. Oznacza to, że w pewnych krystalograficznych płaszczyznach i kierunkach zachodzi on przy mniejszych wartościach krytycznego naprężenia stycznego  $\tau_{cr}$  niż w innych. Wyróżniamy w ten sposób tzw. łatwe systemy poślizgu. Kierunki i płaszczyzny łatwych systemów poślizgu są zazwyczaj najęściej obsadzone przez atomy sieci. Jest to uwarunkowane tym, że dla sieci o wiązaniach metalicznych odległości między dwoma sąsiednimi płaszczyznami, które są najęściej obsadzone atomami, są większe niż między innymi płaszczyznami. Ze zwiększeniem odległości między atomami sąsiednich dwóch płaszczyzn, wzajemne oddziaływania między



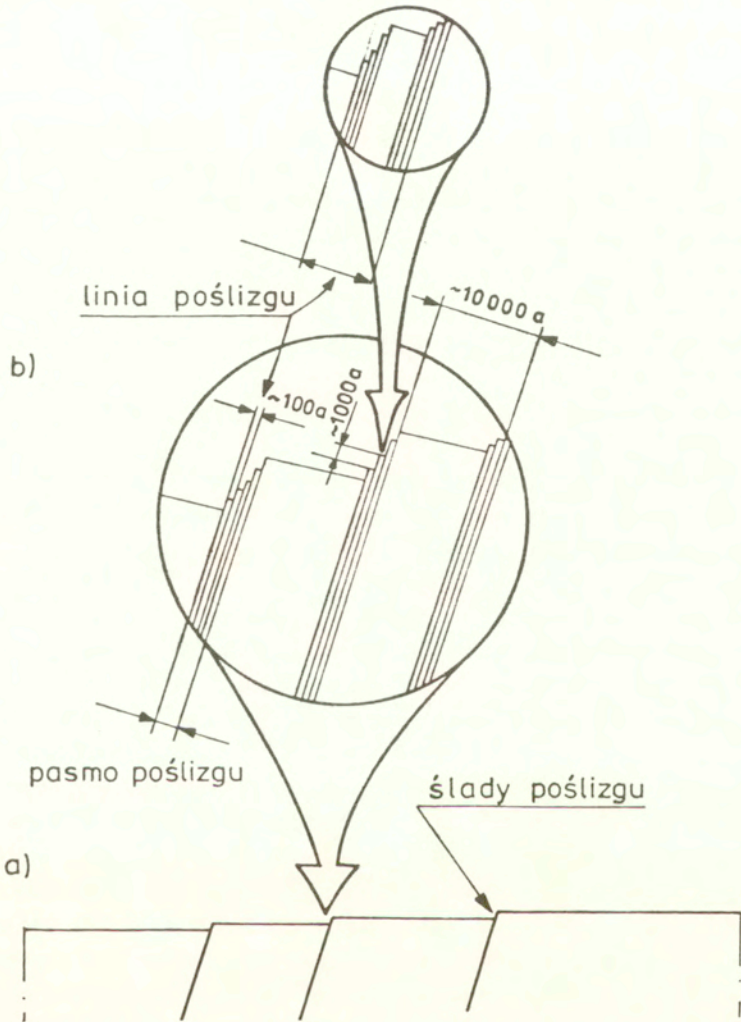
atomami maleją i wtedy poślizg wymaga pokonania mniejszych sił. Kierunki łatwego systemu poślizgu w kryształach są najkrótszymi odległościami, po których translacja przywraca wyjściową sieć krystaliczną w wyniku jednostkowego przesunięcia. Należy dodać, że w razie zaawansowanych odkształceń możliwe jest też wystąpienie poślizgów w innych płaszczyznach niż płaszczyzny łatwych systemów poślizgu. Może to nastąpić wtedy, gdy poślizgi w łatwych systemach ulegną zablokowaniu. Przykładem takiej sytuacji jest proces powstawania mikropasm ścinania, który będzie omówiony dokładniej w następnym punkcie. Termin "łatwe systemy poślizgu" został wprowadzony przez A. KORBLA dla podkreślenia faktu, że w pewnych warunkach, na przykład przy propagacji mikropasm ścinania, poślizgi mogą zachodzić również w innych systemach krystalograficznych, tzw. "trudnych systemach poślizgu", które potocznie określa się jako "niekrystalograficzne" (por. np. A. KORBEL [1990a], [1992b] oraz A. KORBEL i W. BOCHNIAK [1995]).

### 2.1.2. Hierarchia procesów poślizgu

Wynik poślizgów ujawnia się w zmianie kształtu kryształu oraz w zmianie własności mechanicznych odkształcanego metalu. Na odpowiednio wypolerowanej powierzchni próbki ukazują się charakterystyczne ślady w postaci uskoków (stopni), które w czasie obserwacji pod mikroskopem optycznym dają kontrast widoczny jako linie i pasma. Według rozeznania autora, pierwsze mikrograficzne obserwacje powierzchni odkształconego plastycznie metalu wykonali J.A. EWING i W. ROSENHAIN [1900], którzy ukuli również stosowane do tej pory terminy: "stopnie plastyczne", "linie poślizgu" oraz "pasma poślizgu". Obserwowane pod mikroskopem optycznym lub czasami nawet gołym okiem, pasma poślizgu świadczą o skupianiu się odkształceń plastycznych w cienkich warstewkach, między którymi znajdują się strefy słabo odkształconego metalu. Jak można sprawdzić pod bardzo dużym powiększeniem, z zastosowaniem mikroskopu elektronowego, te cienkie warstewki mają charakter dyskretny i są rezultatem poślizgów wywołanych produkcją i ruchem wielkiej liczby dyslokacji. W wyniku bardzo silnych oddziaływań dalekiego zasięgu podlegają one organizacji w przestrzeni i czasie, tworząc jakościowo nowy element w strukturze, który jest układem wysokoenergetycznym. Wysokoenergetyczne grupy dyslokacji ulegają przebudowie w układy dyslokacyjne o mniejszej energii wewnętrznej, które obserwuje się, z zastosowaniem prześwietleniowej mikroskopii elektronowej (TEM), w postaci złożonych struktur dyslokacyjnych, na przykład splotów dyslokacyjnych, pojedynczych lub podwójnych ścianek dyslokacyjnych będących elementami mikropasm, komórek lub podziarn.



c)



Rys. 1. Poglądowy obraz wieloskalowej hierarchii procesów plastycznego poślizgu: a) charakterystyczne ślady poślizgów w postaci stopni na hipotetycznym przekroju powierzchni kryształu; b) "powiększenie" obrazu pojedynczego stopnia, ilustrujące schemat budowy pasm poślizgu oraz nieodkształcone obszary między pasmami; c) "powiększenie" linii poślizgu obrazujące jej dyskretną strukturę.

Jeżeli przebudowa ta zachodzi w czasie odkształcenia plastycznego, to mamy do czynienia z procesem zdrowienia dynamicznego, który jest integralną częścią mechanizmu deformacji.

Dyslokacje, wychodząc na obserwowaną powierzchnię tworzą stopnie widoczne jako cienkie linie, które są wynikiem efektów grupowych w ruchu dyslokacji. Linie te są nazywane liniami poślizgu. Grubość poszczególnych linii poślizgu wynosi średnio około  $100a$ , natomiast średnia wartość przesunięcia wzdłuż płaszczyzny poślizgu jest rzędu  $1000a$ , gdzie  $a$  jest parametrem sieci (por. np. S. ERBEL et al. [1981], str. 36). Dla kryształów o sieci typu RSC – regularnego ściennie centrowanego – parametr  $a \approx (0.35-0.4)\text{nm}$  (wg. E. SCHMIDA i W. BOASA [1935], str. 323, Tabela XLI, w wyd. ang. z 1968 r). Hierarchiczną budowę śladów poślizgu zilustrowano schematycznie na rys. 1, gdzie pokazano dwa kolejne "powiększenia" profilu hipotetycznego przekroju powierzchni odkształconego kryształu. Rysunek ten jest pogładową syntezą:

- graficznej reprezentacji śladu poślizgu, rys. 1a, pokazanej przez J.A. EWINGA i W. ROSENHAINA [1900], rys. 15 (por. również R.J. ASARO [1983], rys. 1);
- schematu budowy pasma poślizgu, rys. 1b, zilustrowanego przez S. ERBLA et al. [1981] na rys. 1.18;
- schematycznego obrazu dyskretnej struktury linii poślizgu, rys. 1c, przedstawionego przez G.E. DIETERA [1988], rys. 4–13a.

Przy większych odkształceniach plastycznych wzrasta liczba linii poślizgu w poszczególnych pasmach oraz liczba pasm. Następuje wtedy często wypełnienie stref nieodkształconych, między wcześniej powstałymi pasmami, liniami poślizgu wtórnego. Są to poślizgi akomodacyjne wywołane mikronaprężeniami, które powstają, równoważąc reakcje więzów zewnętrznych. Narastające mikronaprężenia mogą powodować, że wartość naprężenia Schmid'a może osiągać wielkość krytyczną w systemach poślizgu o orientacji różnej od dominującego systemu pierwotnego i uruchamiać poślizgi plastyczne, które powodują między innymi to, że wywołane sprężystą reakcją więzów obroty sieci krystalicznej, stają się nieodwracalne. Z obserwacji przytoczonych przez H. NEUHÄUSERA [1986] wynika, że następuje wtedy organizacja linii oraz pasm poślizgu w pakiety o grubości kilkuset do kilku tysięcy parametrów sieci. Pakiety te są nazywane *grubymi pasmami poślizgu* (*coarse slip bands*). Wyniki obserwacji (por. np. M. RICHERT [1995]) prowadzą do następującego spostrzeżenia.

#### *Spostrzeżenie S1.*

*Grube pasma poślizgu wyróżniają się wśród innych niejednorodności strukturalnych następującymi cechami:*

- są zgodne ze śladami poślizgu,

- mogą rozwijać się w obszarze ograniczonym do całego monokryształu lub pojedynczego ziarna w polikryształach,
- poślizg skoncentrowany jest w grubych wiązkach (pakietach), które wyróżniają się na tle otaczającej struktury,
- zasięg propagacji jest znacznie dłuższy niż pasm poślizgu i następuje często przez całe ziarno lub monokryształ.

Grube pasma poślizgu oddzielone są od siebie strefami o szerokości rzędu od jednego do kilkuset mikrometrów, w których mogą zachodzić poślizgi akomodacyjne. Jest to typowa hierarchia procesów poślizgu w łatwych systemach, które obserwowane są zazwyczaj na powierzchni monokryształu lub pojedynczych ziarn deformowanego polikryształu w wyniku obciążenia monotonicznego. W wypadku obciążeń zmiennych, w szczególności cyklicznych, obserwuje się bardziej złożone struktury pasmowe (zob. np. S. KOCAŃDA [1985], rozdz. 2). Mikropasma oraz grube pasma poślizgu stanowią jakościowo nowy element wspomnianej hierarchii procesów poślizgu, reprezentujący jedną z form lokalizacji odkształcenia plastycznego.

### 2.1.3. Zlokalizowane formy odkształcenia plastycznego

Prawie równomierne, z makroskopowego punktu widzenia, rozłożenie linii poślizgu na długości pomiarowej próbki, które jest typowe dla drugiego, liniowego, stadium umocnienia ulega heterogenizacji przy przejściu do trzeciego, tak zwanego "parabolicznego" stadium umocnienia. Obserwuje się wtedy lokalizację odkształcenia plastycznego w postaci grubych pasm poślizgu. Dalsza deformacja kryształu może prowadzić do zlokalizowanych form odkształcenia plastycznego w postaci przewężania (szyjkowania) lub makroskopowych pasm ścinania. Forma lokalizacji odkształcenia może zależeć od rodzaju obciążenia, geometrii próbki i warunków jej zamocowania. Duże znaczenie może mieć także początkowa orientacja kryształu oraz takie własności materiału, jak wielkość energii błędu ułożenia oraz zdolność do plastycznego umocnienia. Na przykład kryształy czystych metali charakteryzują się dużym przewężeniem w próbie rozciągania, które rozwija się stopniowo i dopiero w końcowym etapie przechodzi w zlokalizowaną strefę ścinania, poprzedzającą rozdzielenie plastyczne przez ześlizg. Wskazują na to wczesne rezultaty G.I. TAYLORA i C.F. ELAM [1925] oraz K.E. PUTTICKA [1963] uzyskane dla Al, jak również wyniki doświadczenia otrzymane przez VON GÜLER i G. SACHSA [1929], a także S. SAIMOTO et al. [1965] dla monokryształów Cu oraz G. SACHSA i J. WEERTSA [1930] dla kryształów ze stopów Au–Ag. Natomiast kryształy stopów, które zostały umocnione, na przykład przez



strefy Guiniera—Prestona lub wydzielenia koherentne charakteryzują się tym, że makroskopowe pasma ścinania powstają bez widocznego przewężenia. W takim wypadku lokalizacja odkształcenia plastycznego w formie makroskopowego pasma ścinania prowadzi bezpośrednio do rozdzielania plastycznego przez ześlizg. Potwierdzają to, na przykład wczesne badania C.F. ELAM [1927], R. KARNOPA i G. SACHSA [1928], C.J. BEEVERSA i R.W.K. HONEYCOMBE'a [1959] oraz R.J. PRICE'a i A. KELLY'ego [1964], wykonane dla stopów Al. Efekty umocnienia w stopach kryształów Cu—Zn (mosiądzu  $\alpha$ ) oraz pionierskie badania wpływu sekwencyjności poślizgów na umocnienie plastyczne, lokalizację odkształcenia i plastyczne zniszczenie były przeprowadzone przez M. MASIMĘ i G. SACHSA [1928], a także VON GÖLER i G. SACHSA [1929]. Badania W.A. SPITZIGA [1981] i H.E. DÈVE et al. [1988], dla monokryształów stopów Fe—Ti—Mn oraz Fe—Ti, wskazują na silną zależność formy lokalizacji od początkowej orientacji kryształu, a w konsekwencji od geometrii aktywnych systemów poślizgu. Na przykład, kiedy w próbie monotonicznego rozciągania były preferowane aktywne systemy poślizgu prowadzące do płaskiego stanu odkształcenia, obserwowaną formą lokalizacji były makroskopowe pasma ścinania. Natomiast w sytuacji, kiedy początkowa orientacja kryształu nie prowadziła do płaskiego stanu odkształcenia, przeważającą formą lokalizacji było przewężenie z następującym rozdzieleniem plastycznym.

Lokalizacja w postaci makroskopowych pasm ścinania spotkała się z dużym zainteresowaniem specjalistów zajmujących się deformacją plastyczną metali zarówno z punktu widzenia materiałoznawstwa, jak mechaniki i stała się przedmiotem badań interdyscyplinarnych. Zauważono bowiem, że powstające w czasie procesu odkształcenia pasma ścinania są nie tylko prekursorem rozdzielania ciągłego materiału, lecz mogą stać się dominującym mechanizmem zaawansowanych odkształceń plastycznych. Dla wyjaśnienia złożonych mechanizmów powstawania pasm ścinania w polikryształach niezbędna jest wiedza o inicjacji i rozwoju pasm ścinania w monokryształach. Badania doświadczalne prowadzone na monokryształach poddanych różnym procesom odkształcenia — z zastosowaniem wielu technik obserwacji powierzchni próbki i jej wewnętrznej struktury przy pomocy mikroskopii optycznej, elektronowej oraz metod rentgenograficznych — mają udzielić odpowiedzi na pytanie jaka jest fizyczna natura pasm ścinania i jakie elementarne mechanizmy rządzą ich powstawaniem. Wyjaśnienie tego zagadnienia jest istotne zarówno z punktu widzenia poznawczego jak i praktycznego. Pasma ścinania tworzące się w rozciąganych monotonicznie monokryształach ze stopów Al—Cu badali, np.: Y.W. CHANG i R.J. ASARO [1981], M. SZCZERBA i A. KORBEL [1987] oraz A. KORBEL i M. SZCZERBA [1988]. Bogaty zestaw wyników obserwacji pasm

ścínania w rozciąganych monokryształach Mo–C został omówiony w monograficznej pracy A. LUFTA [1985], gdzie można znaleźć również bardzo obszerną bibliografię przedmiotu. Interesujące rezultaty badań dotyczące inicjacji i ewolucji pasm ścínania w rozciąganych monokryształach Cu przedstawili, np.: Ph. DUBOIS [1988], Ph. DUBOIS et al. [1988], S. YANG [1990] oraz S. YANG i C. REY [1993], [1994]. O ile w próbie rozciągania można obserwować mechanizm tworzenia się pojedynczego pasma ścínania lub układu dwóch krzyżujących się pasm ścínania, które w rzeczywistości zawsze mają charakter sekwencyjny, to w próbie walcowania oraz próbie kanalikowej (nieswobodnego ściskania) można badać zachowanie się materiału przy bardzo dużych odkształceniach plastycznych, kiedy pasma ścínania stają się dominującym mechanizmem. Wyniki badań kryształów poddanych procesowi walcowania przedstawili, na przykład dla Cu: A. KORBEL et al. [1986], W. BOCHNIAK [1988], [1989] i M. WRÓBEL et al. [1990], dla Al, M. RICHERT [1987] oraz M. RICHERT i A. KORBEL [1995], dla Cu–6%Al, J.D. EMBURY et al. [1984] i A. KORBEL et al. [1984], [1985] oraz dla monokryształów stali austenitycznej, M. WRÓBEL et al. [1995]. Natomiast rezultaty obserwacji pasm ścínania w monokryształach poddanych nieswobodnemu ściskaniu w próbie kanalikowej prezentowali, np. S.V. HARREN et al. [1988] dla Al–3%Cu oraz Z. JASIEŃSKI i A. PIĄTKOWSKI, [1988], [1993] dla Cu. Wspomnieć również należy o oryginalnej metodzie cyklicznego wyciskania–ściskającego – CWS, z zastosowaniem której zbadano strukturalne i mechaniczne skutki lokalizacji odkształcenia w monokryształach oraz polikryształach Al i AlMg5 w bardzo szerokim zakresie odkształceń, 0,2 – 60 odkształcenia rzeczywistego, które znacznie przekracza zakres konwencjonalny, A. KORBEL et al. [1981], M. RICHERT et al. [1988], M. RICHERT [1995] oraz M. RICHERT i A. KORBEL [1995], [1997].

#### 2.1.4. Fizyczna natura pasm ścínania

Rezultatem studiów autora i analizy mnogości informacji płynących ze wspomnianych prac doświadczalnych oraz interpretacji zawartych tam wyników obserwacji metalograficznych, z punktu widzenia fizyki i mechaniki deformacji plastycznej, jest koherentny obraz powstawania i ewolucji pasm ścínania w monokryształach. Strukturalne cechy tych form lokalizacji można ująć następująco.

##### *Spostrzeżenie S2.*

*Makroskopowe pasma ścínania w monokryształach są złożonymi i wielopoziomowymi, jeśli idzie o skalę obserwacji, strukturami powstającymi w wyniku organizacji w czasie i przestrzeni warstw prawie równoległe ułożonych stref ścínania, których działanie*



obserwuje się w skali makro- mezo- i mikroskopowej. Makroskopowe pasma ścinania nazywane dalej pasmami ścinania mają zasięg, odpowiadający obszarowi obejmującemu całą szerokość próbki. Podstawowym elementem takiej hierarchicznej struktury są aktywne mikropasma ścinania o stałej grubości rzędu  $0.1 \mu\text{m}$ .

**Mikropasma ścinania w monokryształach mają krystalograficzny charakter, to znaczy że** płynięcie plastyczne w mikropaśmie ścinania nadal zachodzi w łatwym systemie poślizgu. Cechuje je prostoliniowy przebieg przez istniejącą substrukturę i granice podziarn, na których – w miejscach przecięć – występują charakterystyczne uskoki wskazujące na znaczne odkształcenia postaciowe, w przedziale od 1 do 10.

Na ewolucję pasma ścinania składają się kolejne generacje aktywnych mikropasm ścinania, odległych od siebie o około  $0.5 \mu\text{m}$  i propagujących się na odległości rzędu  $50 \mu\text{m}$ , które dają swój wkład do całkowitego odkształcenia postaciowego i wzrostu aktywnej części pasma. Następnie ulegają one nasyceniu, pozostając za frontem rozszerzającego się pasma ścinania jako bierny element struktury odkształconego metalu. Potwierdzają to na przykład wyniki obserwacji *in situ* odkształcenia kryształu pod mikroskopem skaningowym (SEM) uzyskane przez S. YANGA i C. REY [1984].

Widoczne na powierzchni bocznej próbki ślady płaszczyzn ograniczających makroskopowe pasmo ścinania są zazwyczaj odchylone od śladów poślizgu. Odchylenie to może wynosić od kilku do kilkunastu stopni, zależnie od różnicy wielkości odkształcenia postaciowego w paśmie względem przyległego materiału i może się zmieniać w czasie rozwoju pasma. Badania H.E. DÈVE et al. [1988] wykazują, że w wypadku rozciąganego kryształu Fe-Ti-Mn, odkształcenie postaciowe w paśmie jest rzędu 3.0, a w otaczającym materiale wynosi około 0.1. Mimo tak dużych gradientów odkształcenia materiał zachowywał spójność. Obserwacje rentgenograficzne świadczą również o dezorientacji sieci krystalicznej wewnątrz pasma ścinania względem orientacji sieci w materiale na zewnątrz. Obrót sieci w paśmie rośnie ze wzrostem odkształcenia postaciowego, powodując, że płaszczyzny poślizgu ułożone są prawie równolegle do płaszczyzny ograniczającej aktywną część pasma ścinania. Potwierdza to hipotezę o krystalograficznym charakterze pasm ścinania. Oznacza to, że odkształcenie plastyczne w paśmie ścinania nadal zachodzi w łatwym systemie poślizgu, który jest znacznie bardziej intensywny w wyniku geometrycznego mięknięcia wywołanego odpowiednim obrotem płaszczyzny poślizgu powodującym lokalny wzrost współczynnika Schmid'a. Taka interpretacja jest możliwa tylko w warunkach, gdy mamy do czynienia z próbką o przekroju prostokątnym i tak zorientowaną, że płaszczyzny aktywnego systemu pierwotnego i wtórnego, jak również płaszczyzny pojedynczego pasma lub krzyżujących się pasm ścinania, są prostopadłe do obserwowanej powierzchni w części pomiarowej próbki. Odpowiada to



często obserwowanej sytuacji, kiedy kryształ jest deformowany w płaskim stanie odkształcenia. Powyższa dyskusja znajduje potwierdzenie w rezultatach obserwacji zawartych w pracach S.V. HARRENA et al. [1988] i H.E. DÈVE et al. [1988]. Należy dodać, że w czasie tak zaawansowanych odkształceń mogą uruchomić się również dodatkowe systemy poślizgu, które nie są widoczne na obserwowanej powierzchni próbki. Działanie tych systemów często przejawia się w tym, że obserwowane ślady granic pasm ścinania lub mikropasm ścinania ulegają lokalnie dodatkowym przesunięciom i obrotom, co zaciemnia, a czasami wręcz fałszuje informację o ich orientacji. Nie należy również przeceniać znaczenia geometrycznego mięknięcia spowodowanego obrotem sieci w paśmie ścinania. Istnieją bowiem obserwacje mikropasm ścinania, które wykazują bardzo silną niejednorodność orientacji sieci krystalicznej wzdłuż pasma (por. np. A. KORBEL [1985], rys. 5).

Powstaje pytanie, jaki jest mechanizm powstawania mikropasm ścinania w kryształach? Już w pierwszych pracach dotyczących obserwacji pasm ścinania w rozciąganych kryształach Al-Cu, R.J. PRICE i A. KELLY [1964] oraz Y.W. CHANG i R.J. ASARO [1981] zauważyli, że prekursorem mikropasm ścinania są grube pasma poślizgu. Brakowało jednak wtedy jasnego poglądu na temat konwersji grubych pasm poślizgu w mikropasma ścinania. Grube pasma poślizgu traktowano raczej jako pewną imperfekcję indukującą pasmo ścinania. Na ówczesnym etapie badań pasmo ścinania w kryształach interpretowano niezależnie od mechanizmu poślizgu w łatwym systemie, podkreślając widoczne na powierzchni próbki odchylenie śladów granicy pasma od śladów poślizgu, jako dowód niekrytalograficznego charakteru pasma ścinania. Brakowało jednak jasnego wytłumaczenia jaki jest fizyczny mechanizm, różny od krytalograficznego poślizgu, który byłby odpowiedzialny za bardzo duże odkształcenia postaciowe jakie obserwowano w paśmie ścinania. Nowsze badania, omówione powyżej, potwierdziły hipotezę o krytalograficznym charakterze mikropasm ścinania. Powstaje więc przypuszczenie, że mikropasma ścinania rozwinęły się z tych grubych pasm poślizgu, w których zaistniały sprzyjające warunki do powstania znacznie większych odkształceń postaciowych niż w pozostałych. Następujące odciążenie sprężyste na zewnątrz pasma może potęgować płynięcie plastyczne w paśmie, a reakcja więzów powoduje obrót całego pasma względem osi rozciągania i dezorientację sieci krystalicznej w paśmie. Może temu towarzyszyć sprężenie termomechaniczne oraz efekty adiabatyczne. Próbę analizy zjawiska lokalizacji odkształcenia plastycznego w kryształach w kontekście termodynamiki materiałów sprężysto-lepkoplastycznych z parametrami wewnętrznymi przedstawiono w pracach P. PERZYNY i K. KORBEL [1996] oraz P. PERZYNY [1998]. Podsumowując możemy stwierdzić, że mechanizm

inicjacji mikropasm ścinania w monokryształach jest bezpośrednio związany z powstawaniem i rozwojem grubych pasm poślizgu. Podobnie jest również dla polikryształów.

## 2.2. Deformacja plastyczna w polikryształe

### 2.2.1. Mechanizmy odkształcenia plastycznego i ewolucja wewnętrznych mikronaprężeń

Obserwowane pod mikroskopem optycznym, po uprzednim wypolerowaniu i wytrawieniu powierzchni próbki, ziarna odkształconego plastycznie polikryształu wykazują charakterystyczną topografię w postaci śladów prostych linii i pasm poślizgu, które mają podobną orientację w granicach jednego ziarna. W początkowej fazie procesu odkształcenia plastycznego można zaobserwować grupy prawie równoległych pasm poślizgu zaledwie w pojedynczych ziarnach, które są najbardziej sprzyjająco zorientowane względem przyłożonego obciążenia. W miarę wzrostu obciążenia pasma poślizgu pojawiają się w stale rosnącej liczbie ziarn. Przy jeszcze większym stopniu odkształcenia pojawiają się krzyżujące się pasma, wskazujące na uruchomienie nowych układów poślizgu. Jest również naruszana prostoliniowość tych pasm. Spowodowane jest to wzrostem defektów strukturalnych, jak też przechodzeniem od poślizgu w jednym układzie płaszczyzn do poślizgu w innym układzie. Pasma poślizgu dzielą ziarno na poszczególne części, które w miarę rozwoju odkształcenia obracają się razem z siecią krystaliczną względem ustalonego układu odniesienia i zmieniają swój kształt. Powoduje to uruchomienie nowych systemów poślizgu, podział ziarna na podziarna i zmianę kształtu oraz wymiarów ziarna. Najczęściej obserwuje się wtedy wydłużenie ziarn wzdłuż kierunku plastycznego płynięcia. Wielkość zmiany preferowanych orientacji, kształtu i wymiarów różnych ziarn deformowanego polikryształu jest różna z powodu różnej orientacji w stosunku do przyłożonego obciążenia. Efekty te określane są jako ewolucja tekstury, która może mieć charakter ewolucji preferowanych orientacji ziarn lub charakter tekstury morfologicznej wynikającej z kształtu i ułożenia ziarn. Podobnie jak to ma miejsce w razie deformacji plastycznej monokryształów, efekty lokalnych obrotów struktury materiału metalicznego (mikroobjętości polikryształu wraz z siecią krystaliczną) mają duży wpływ na powstawanie i ewolucję anizotropii indukowanej odkształceniem plastycznym.

Złożone procesy odkształcenia plastycznego w ziarnie są wynikiem działania przy-



łożonego do ciała obciążenia i zewnętrznych więzów, wynikających z warunków brzegowych oraz oddziaływania sąsiednich ziarn wskutek reakcji otaczającego materiału. Powstaje niejednorodność rozkładu odkształcenia plastycznego wewnątrz i w otoczeniu ziarn materiału polikrystalicznego. Niejednorodność ta jest przyczyną powstawania samorównoważących się mikronaprężeń, które pozostają po odciążeniu ciała. Mikronaprężenia zmieniają się w czasie procesu deformacji plastycznej. Zmienia się też ich wpływ na granicę plastyczności i umocnienie materiału. Makroskopowym efektem ewolucji mikronaprężeń, powstających w czasie deformacji plastycznej metali na zimno, jest zmiana zmagazynowanej energii, która pozostaje w odkształconym metalu, głównie w jego strukturach dyslokacyjnych. Jest to ta część energii mechanicznej procesu odkształcenia plastycznego, która nie jest rozpraszana w postaci ciepła. Zagadnieniem energii zmagazynowanej zajmowali się już G.I. TAYLOR i H. QUINNEY [1934], a obszernemu studium tej tematyki poświęcona jest monografia M.B. BEVERA et al. [1973], w której zawarto podstawy termodynamiczne, wyczerpujące omówienie metod pomiaru wraz z wszechstronną analizą wpływu różnych parametrów, popartą dyskusją modeli dyslokacyjnych oraz przedstawiono bogatą bibliografię przedmiotu. Znaczenie uwzględnienia energii zmagazynowanej dla opisu umocnienia plastycznego w ramach termoplastyczności podkreślał B. RANIECKI [1984]. Oryginalną metodę pomiaru i analizy zmiany energii zmagazynowanej w czasie procesu rozciągania próbki z zastosowaniem metody termowizyjnej przedstawili W. OLIFERUK et al. [1985]. Nowe rezultaty doświadczalne dotyczące zdolności magazynowania energii w odkształcanym metalu w połączeniu z obserwacjami metalograficznymi pod mikroskopem optycznym śladów poślizgu i mikropasm ścinania na powierzchni specjalnie wypolerowanych próbek przyniosły badania W. OLIFERUK [1995], oraz W. OLIFERUK et al. [1996], [1997]. Stwierdzono, że we wczesnym etapie płynięcia plastycznego, kiedy rosnącemu odkształceniu towarzyszy wzrost mikronaprężeń, rejestruje się również wzrost zdolności magazynowania energii. Obserwacje powierzchni próbek wykazują, że proces ten może zachodzić aż do uruchomienia się wtórnych systemów poślizgu i inicjacji mikropasm ścinania. Wykres zdolności magazynowania energii w funkcji odkształcenia osiąga wtedy maksimum. Dalszemu wzrostowi plastycznego odkształcenia towarzyszy wyraźny spadek zdolności magazynowania energii i wzrost emisji ciepła, które jest generowane przez dyssypacyjne procesy poślizgów i propagacji mikropasm ścinania. Następuje wtedy, w warunkach dynamicznego spiętrzenia dyslokacji na granicach ziarn, częściowa relaksacja mikronaprężeń i powstają sprzyjające warunki do propagacji mikropasm ścinania. W miarę wzrostu odkształcenia zdolność magazynowania energii spada, a masowy udział mikropasm ścinania jest coraz bardziej widoczny. Przytoczone rezultaty obserwacji doświadczalnych można podsumować w postaci następującego spostrzeżenia,



które będzie ważnym elementem fizycznej motywacji modelu teoretycznego.

### *Spostrzeżenie S3.*

*Dla określonej drogi obciążenia, mechanizmy masowego powstawania i propagacji mikropasm ścinania pozostają w korelacji z etapem nasycenia wzrostu mikronaprężeń, a następnie z ich częściową relaksacją.*

Zmiana drogi lub schematu obciążenia spowoduje, że wspomniany efekt nasycenia wystąpi dla innego stanu mikronaprężeń. Wiąże się to z tym, że stan mechaniczny, w którym następuje rozwój mikropasm ścinania zależy od drogi obciążenia. Sprawia to podstawową trudność w opisie wpływu efektów mikropasm ścinania na deformacje plastyczną metali.

### 2.2.2. Hierarchia pasm ścinania i ich efekty makroskopowe

Duże deformacje plastyczne polikrystalicznych metali i stopów, w szczególności w warunkach silnego skrupowania, jak na przykład w technologicznych procesach plastycznego kształtowania lub w procesie przewężania prowadzącym do ciągliwego zniszczenia, mogą prowadzić do silnych koncentracji odkształcenia w postaci warstw intensywnych ścień plastycznych zwanych pasmami ścinania. Podobnie jak w monokrystalach, badania doświadczalne polikrystalów wykazują, że pasma ścinania występują na różnych poziomach obserwacji: te – które pojawiają się w odpowiednio małych obszarach, ale obejmujących więcej niż kilka ziarn nazywane są mikropasmami ścinania, natomiast te – które występują w skali całej próbki określane są jako makroskopowe pasma ścinania.

Pierwsze wyniki mikroskopowych obserwacji odkształceń plastycznych z efektami pasm ścinania zostały opublikowane przez F. ADCOCKA [1922]. Stosując technikę metalografii optycznej do badania powierzchni bocznej próbki, wykonanej ze stopu Cu–20Ni i poddanej odkształceniu plastycznemu przez walcowanie do redukcji 50% przekroju porzecznego, F. ADCOCK zarejestrował ciemne wytrawione ślady w kształcie pasm, które zachowując swój początkowy kierunek przebiegają przez wiele ziarn i są nachylone do powierzchni walcowania pod kątem (25–40)<sup>o</sup>. Ślady takie zaobserwowano również w innych metalach i stopach. Z czasem, w literaturze nadano im wspólną nazwę pasm ścinania. Rezultaty późniejszych obserwacji pasm ścinania dla różnych metali i stopów zostały zebrane przez GILA J. SEVILLANO et al. [1982]. Wyczerpującą bibliografię i dużą liczbę wyników doświadczalnych, otrzymanych z zastosowaniem różnych technik dla różnych metali, można znaleźć również w pracach B.J. DUGGANA et al. [1978], M. HATHERLY'ego [1983], A.S. MALINA i M. HATHERLY'ego [1979],

M. HATHERLY'ego i A.S. MALINA [1984], A. KORBLA et al. [1986], A. KORBLA [1987], H.E. DÈVE i R.J. ASARO [1988], jak również W. BOCHNIAKA [1989], H. DYBCA et al. [1989], H. DYBCA [1991] i A. DZIADONIA [1992]. Z mnogości informacji ważnych dla specjalistów zajmujących się badaniami metalograficznymi, materiałoznawstwem, a w szczególności strukturalnymi przemianami towarzyszącymi dużemu odkształceniu plastycznemu metali, wybierzemy te, które będą istotne z punktu widzenia makroskopowego opisu wpływu efektów pasm ścinania na zmianę cech mechanicznych materiału. Wykorzystamy przy tym syntetyczne omówienie najważniejszych wyników doświadczalnych pod kątem zastosowania do fenomenologicznego opisu deformacji plastycznej metali z efektami pasm ścinania zawarte w pracach autora, R.B. PĘCHERSKI [1991], [1992a], [1993a].

Zgodnie z przyjętą w literaturze terminologią (por. np. M. HATHERLY [1983], A. KORBEL et al. [1986] oraz A. KORBEL i P. MARTIN [1988]):

*Mikropasma ścinania w polikryształach są rozumiane jako długie i cienkie warstewki materiału, o stałej grubości rzędu  $0.1 \mu\text{m}$ , które charakteryzują się skoncentrowanym postaciowym odkształceniem plastycznym. Warstwy te przecinają granice ziarn bez odchyień i tworzą przestrzennie zorganizowaną rodzinę o określonej geometrii względem osi głównych tensora odkształcenia. Mikropasma ścinania noszą bardzo duże odkształcenia postaciowe i leżą w płaszczyznach, które zazwyczaj nie pokrywają się z krystalograficznymi płaszczyznami łatwych systemów poślizgu w ziarnach, przez które przechodzą.*

Tak określone mikropasma ścinania są elementarnym, aktywnym, składnikiem makroskopowych pasm ścinania. Analiza ich cech strukturalnych i morfologicznych prowadzi do następującego spostrzeżenia.

*Spostrzeżenie S4.*

*Makroskopowe pasma ścinania w polikryształach, nazywane dalej pasmami ścinania, są hierarchicznymi strukturami powstającymi w wyniku organizacji w czasie i przestrzeni warstw prawie równoległe ułożonych stref ścinania, których działanie obserwuje się w skali makro- mezo- i mikroskopowej. Pasma ścinania mają zasięg odpowiadający makroskopowym obszarom, które obejmują zazwyczaj cały przekrój deformowanego ciała.*

Z badań M. RICHERT [1995] wynika, że zasięg propagacji pasm ścinania jest jedną z najważniejszych cech ze względu na ich wpływ na własności mechaniczne materiału. W związku z tym wyróżniono:

a) w odniesieniu do monokryształów:

- krótkozasięgowo pasma ścinania, przebiegające tylko przez niewielką część monokryształu;
- długozasięgowo pasma ścinania występujące w skali całego kryształu;



b) w odniesieniu do polikryształów:

- krótkozasięgowe pasma ścinania, przebiegające przez kilka ziarn lub obszar obejmujący niewielką część przekroju próbki;
- długozasięgowe pasma ścinania występujące w skali całej próbki.

Zauważono, że w zakresie wzrostu umocnienia stwierdza się występowanie krótkozasięgowych pasm ścinania, natomiast w zakresie nasycenia umocnienia plastycznego lub w razie widocznych spadków obciążenia, tworzą się długozasięgowe pasma ścinania.

Badania doświadczalne wykazują również, że mikropasma ścinania działają tylko raz, propagują się z bardzo dużą prędkością w obszarach obejmujących wiele ziarn, a potem nie wnoszą już aktywnego udziału do odkształcenia plastycznego, stając się biernym elementem struktury. Obserwacje wykazują również, że udział aktywnych mikropasm ścinania w całkowitym odkształceniu plastycznym rośnie na ogół ze wzrostem odkształcenia plastycznego, zmieniając się jednak w czasie procesu bardzo nieregularnie (por. np. B.J. DUGGAN et al. [1978], A.S. MALIN i M. HATHERLY [1979], M. HATHERLY i A.S. MALIN [1979], [1984] i W.Y. YEUNG i B.J. DUGGAN [1987] oraz A. DZIADOŃ [1993]). Również informacje na temat odkształcenia, przy którym obserwuje się pierwsze mikropasma ścinania są bardzo fragmentaryczne i niepełne. Potrzebne są dalsze systematyczne i kompleksowe badania doświadczalne połączone z mikroskopowymi obserwacjami śladów mikropasm ścinania na powierzchni próbek oraz pomiarem i analizą zmiany energii zmagazynowanej w odkształconym metalu, na przykład z zastosowaniem techniki termowizyjnej, W. OLIFERUK et al. [1996]. Również wyniki przedstawione niedawno przez E.A. PIECZYSKĄ et al. [1998] pokazują, że zastosowanie techniki termowizyjnej do pomiaru efektu piezokalorycznego, który posłużył autorom do opracowania metody wyznaczania granicy plastyczności, mogą dać obiecujące rezultaty. Warto także wspomnieć o możliwości wykorzystania metody identyfikacji mikropasm ścinania za pomocą emisji akustycznej, A. PAWELEK et al. [1996]. Sytuację komplikuje fakt, że inicjacja mikropasm ścinania zależy bardzo silnie od drogi odkształcenia lub schematu obciążenia. Dla obciążeń monotonicznych obserwuje się, że pierwsze mikropasma ścinania występują przy stosunkowo dużej wartości odkształcenia. Potwierdzają to na przykład wyniki próby kanalikowej (nieswobodnego ściskania w sztywnej matrycy) dla polikrystalicznej miedzi otrzymane przez C.A. BRONKHORSTA et al. [1992], L. ANANDA i S.R. KALIDINDI [1994] oraz H. PAULA et al. [1996]. Badania przeprowadzone w ostatnich latach przez A. KORBLĄ [1987], [1990a], [1990b], [1992a], W. BOCHNIAKA [1989] oraz A. KORBLĄ i W. BOCHNIAKA [1995] wykazują jednak, że mikropasma ścinania można generować praktycznie przy dowolnym odkształceniu przez odpowiednio sterowaną zmianę drogi



odkształcenia, co legło u podstaw nowych technologii kształtowania metali opracowanych przez tych autorów.

Analiza wyników doświadczalnych wykazuje, że aktywne mikropasma ścinania, np. przy walcowaniu, są odchylone średnio o około  $\pm 35^\circ$  względem płaszczyzny walcowania, a ich powierzchnie są prostopadłe do powierzchni bocznej próbki. Obserwuje się jednak, że wartości kąta odchylenia mogą się wahać w przedziale od  $15^\circ$  do  $50^\circ$  (por. np. M. HATHERLY i A.S. MALIN [1984] oraz A. KORBEL [1990a]). Warto podkreślić, że tak duży rozrzut może wynikać z niedokładności pomiaru tego kąta, ponieważ niełatwo jest odróżnić dopiero co utworzone mikropasma ścinania od śladów mikropasm wcześniejszych, które obracają się razem z materiałem w kierunku walcowania. Podobnie w procesie rozciągania lub ściskania, płaszczyzny mikropasm ścinania tworzą średnio kąt  $\pm(38\pm 2)^\circ$  względem osi maksymalnego naprężenia głównego (zob. L. ANAND i W.A. SPITZIG [1981]). Podsumowując ten punkt, możemy sformułować następujące spostrzeżenia, które będą stanowiły heurystyczną podstawę dla założeń i hipotez proponowanego modelu fenomenologicznego dużych deformacji plastycznych z efektami mikropasm ścinania.

#### *Spostrzeżenie S5.*

*W procesie plastycznego płynięcia mamy do czynienia z sekwencją kolejnych generacji aktywnych mikropasm ścinania, które konkurują z homogenicznymi, w skali mezoskopowej, mechanizmami poślizgu plastycznego w łatwych systemach i bliźniakowaniem.*

#### *Spostrzeżenie S6.*

*Charakterystyczną cechą mikropasm ścinania jest nachylenie płaszczyzny reprezentującej w skali makroskopowej uśrednioną orientację wszystkich mikropasm ścinania należących do jednego systemu ścinania. Płaszczyzna ta związana jest z płaszczyzną maksymalnych naprężeń stycznych i jest od niej odchylona o pewien stały kąt  $\beta$ , którego średnia wartość zawarta jest w przedziale  $(5 - 10)^\circ$ .*

Odchylenie to jest charakterystyczne dla mikropasm ścinania generowanych w czasie procesów deformacji, które zachodzą w warunkach bliskich warunkom izotermicznym.

### 2.2.3. Fizyczna natura mikropasm ścinania w polikryształach

Fizyczny mechanizm inicjacji mikropasma ścinania w polikryształach nie jest jeszcze w pełni wyjaśniony. Brakuje kompletnego modelu fizycznego, który mógłby w pełni wyjaśnić wszystkie aspekty zjawiska. Niemniej jednak, dyskutowane wcześniej wyniki obserwacji doświadczalnych wskazują, że mechanizm ten jest podobny do mechanizmu

tworzenia się mikropasma ścinania w monokryształach. Zgodnie ze wspomnianą hipotezą A. KORBLA, która znajduje potwierdzenie w rezultatach licznych badań doświadczalnych, mikropasma ścinania rozwijają się z grubych pasm poślizgu, ograniczonych do pojedynczego ziarna. Mają więc początek krystalograficzny i związane są z aktywacją oraz organizacją, w czasie i przestrzeni, poślizgów w łatwych systemach. Ich dalsza propagacja związana jest z relaksacją mikronaprężeń, generowanych przez spiętrzone na granicy ziarna w procesie dynamicznym grupy dyslokacji, które tworzą grube pasmo poślizgu. Relaksacja mikronaprężeń może spowodować uruchomienie w sąsiednim ziarnie łatwych systemów poślizgu lub, jeżeli dynamiczna koncentracja mikronaprężeń jest dostatecznie duża, aktywację poślizgów w jednym z trudnych systemów. Uruchomienie trudnych systemów w kilku sąsiadujących ze sobą ziarnach może sprzyjać koplanej propagacji poślizgów w postaci mikropasma ścinania (por. A. KORBEL [1985], [1990a], [1990b], [1992b]). Hipoteza ta może również wyjaśnić, moim zdaniem, odmienne zachowanie się tzw. "adiabatywnych" pasm ścinania.

#### 2.2.4. Uwagi o "adiabatywnych" pasmach ścinania

Dyskusja różnych form lokalizacji odkształcenia plastycznego w polikryształach byłaby niepełna, gdyby nie dodać, że obserwuje się również lokalizację w postaci pasm ścinania w warunkach, kiedy podstawową rolę odgrywają efekty termiczne i sprzężenia termomechaniczne. Charakterystyczną formą lokalizacji są wtedy tzw. "adiabatywnie" pasma ścinania. Należy podkreślić, że chodzi tu o efekty "adiabatywnie", które zachodzą w makroskopowych objętościach materiału. Istnieje na ten temat bogata literatura (zob. np. monografia Y. BAIA i B. DODDA [1992], gdzie można znaleźć obszerną listę referencji, oraz prace: M. DUSZEK i P. PERZYNY [1991b], H.V. NGUYENA i W.K. NOWACKIEGO [1995], [1997], P. PERZYNY [1994], T. ŁODYGOWSKIEGO i P. PERZYNY [1997a], [1997b], jak również T.W. WRIGHTA i G. RAVICHANDRANA [1997] oraz S.P. GADAJA et al. [1996]). Wyczerpujące informacje na temat wyników obserwacji strukturalnych cech "adiabatywnych" pasm ścinania można znaleźć w monografiach B. DODDA i Y. BAIA [1987] oraz M. A. MEYERSA [1994]. Pasma te charakteryzują się tym, że leżą w płaszczyźnie pokrywającej się w przybliżeniu z płaszczyzną maksymalnych naprężeń stycznych. Mamy, więc wtedy  $\beta = 0$ . Ta jakościowa różnica może być wytłumaczona, moim zdaniem, wpływem wewnętrznych mikronaprężeń, które – zgodnie z hipotezą A. KORBLA – mają podstawowe znaczenie dla tworzenia się i propagacji mikropasm ścinania. Mikronaprężenia zaburzają lokalnie stan naprężenia, który wynika z zewnętrznych



obciążeń. Wskutek tego, krytyczne pasmo grubego poślizgu rozwinię się w łatwym systemie poślizgu, który leży w płaszczyźnie odchylonej od płaszczyzny przyłożonych maksymalnych naprężeń stycznych, a dalej – będzie się propagować koplanarnie przez sąsiednie ziarna w trudnych systemach poślizgu, dając w efekcie "niekrytalograficzne" mikropasmo ścinania, leżące na płaszczyźnie odchylonej o kilka lub kilkanaście stopni od płaszczyzny maksymalnych naprężeń stycznych. W wypadku "adiabatycznych" pasm ścinania efekty termiczne mogą powodować, że wpływ mikronaprężeń będzie zanikał. Potwierdzają to, przynajmniej jakościowo, wyniki badań S.P. GADAJA et al. [1996].

### 3. PROBLEM UWZGLĘDNIENIA EFEKTÓW MIKROPASM ŚCINANIA W KONTYNUALNYM OPISIE ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNEGO METALI

W rozdziale tym przedstawiono następujące wyniki własnych badań autora:

- a) sprecyzowano mikromechaniczne podstawy teoretycznego opisu dużych deformacji plastycznych z uwzględnieniem efektów mikropasm ścinania w postaci spostrzeżenia *S7*. oraz hipotez *H1*. i *H2*.;
- b) zaproponowano nowy model, pozwalający określić tę część prędkości odkształcenia plastycznego, która jest makroskopowym efektem działania wielopoziomowej hierarchii mikropasm ścinania;
- c) wprowadzono nową koncepcję obwiedni stanów plastycznych z mikropasmami ścinania (obwiedni mikropasm ścinania), która odpowiada pewnej powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń i związana jest z masowym rozwojem mikropasm ścinania.

#### 3.1. Opis odkształcenia plastycznego metali w ramach kontynuualnej teorii materiałów

Zintegrowane studia fizyki i mechaniki deformacji plastycznej metali wymagają starannej analizy problemu uśredniania i makroskopowego opisu efektów mikroskopowych mechanizmów w ramach kontynuualnej teorii materiałów niesprężystych. Dyskutowana wcześniej organizacja grup dyslokacji, które poruszają się lawinowo w aktywnych systemach poślizgu oraz hierarchia poślizgów: od linii i pasm poślizgu do grubych pasm poślizgu, od mikropasm ścinania poprzez klasterzy mikropasm ścinania do makroskopowych pasm ścinania – wskazuje na to, że ciało krystaliczne poddane procesowi deformacji plastycznej jest złożonym, wielopoziomowym, hierarchicznie zorganizowanym systemem. Problem określenia najmniejszego *reprezentatywnego elementu objętości* (*REO*) wymaganego do uśrednienia wielkości potrzebnych do konstytutywnego opisu makroskopowego zachowania się materiałów niejednorodnych, jak również zagadnienia związane z samą procedurą uśredniania, podjęto w pracy J.F.W. BISHOPA i R. HILLA [1951], gdzie pojawiła się koncepcja "jednostkowej kostki" materiału. Następnie, R. HILL, [1956], [1963], [1967], [1984] oraz K.S. HAVNER [1973] poświęcili wiele uwagi sprecyzowaniu fizycznych podstaw koncepcji *REO*, a wyczerpujące omówienie rezultatów badań i bogatą literaturę przedmiotu przedstawiono w monografiach K.S.



HAVNERA [1992] oraz S. NEMAT-NASSERA i M. HORI [1993]. Szerszemu spojrzeniu na te zagadnienia, w kontekście materiałów niejednorodnych, jak np. kompozyty czy materiały wielofazowe, oraz głębszej dyskusji podstaw teoretycznych z punktu widzenia fizyki statystycznej – przyjęcie hipotezy ergodycznej – poświęcone są np. prace Z. HASHINA [1964], [1983], E. KRÖNERA [1985] oraz monografia S. NEMAT-NASSERA i M. HORI [1993] (zob. również opracowanie monograficzne B. RANIECKIEGO [1995], Cz. WOŹNIAKA i M. WOŹNIAK [1995] oraz książka K. SOBCZYKA [1996], w której można znaleźć podstawowe informacje o procesach ergodycznych). Pewne aspekty uśrednionego opisu płynięcia plastycznego, w kontekście mikropasm ścinania, były analizowane również we wcześniejszych pracach autora, R.B. PĘCHERSKI [1991], [1992a], [1997a].

W klasycznej teorii plastyczności materiałów krystalicznych, która zajmuje się różnymi aspektami opisu deformacji plastycznej realizowanej przez poślizgi w łatwych systemach, zagadnienie uśredniania miar naprężenia i odkształcenia na pewnym  $REO$  było przedmiotem zainteresowania i wszechstronnych badań wielu autorów. Zgodnie z rozważaniami K.S. HAVNERA [1973], [1974], [1992], zastosowanie kontynuального opisu skończonych deformacji metali ograniczone jest do pewnego minimalnego poziomu obserwacji, na którym mogą być jeszcze reprezentowane fizyczne cechy niesprężystego zachowania się materiałów. W sytuacji, kiedy możemy obserwować powierzchnię odkształconego metalu z dokładnością (rozdzielczością) do  $1\mu\text{m}$ , deformacja ziarn (o średnim wymiarze rzędu  $100\mu\text{m}$ ) w trwale odkształconym polikryształe jest względnie gładka. Na tym samym poziomie obserwacji, zwanym przez K.S. HAVNERA mikroskopowym, można rozróżnić linie poślizgu, które pojawiają się na powierzchni trwale odkształconego kryształu lub poszczególnych ziarn polikrystalicznej próbki. Z drugiej strony, w sytuacji kiedy zwiększymy dokładność obserwacji do rozdzielczości  $10^{-2}\mu\text{m}$ , co odpowiada wymiarowi fizycznemu rzędu  $100a$  i nazywane jest poziomem submikroskopowym, odkształcenie plastyczne każdego ziarna w polikryształe poddanym trwałym deformacjom charakteryzuje się silną niejednorodnością i nieciągłością. Obserwowane na mikroskopowym poziomie linie poślizgu jawią się dla obserwatora na poziomie submikroskopowym jako pasma poślizgu, lub pakiety linii poślizgu, o szerokości rzędu  $0.1\mu\text{m}$ , a między poszczególnymi warstwami występują poślizgi rzędu  $10^3a$  (por. rys. 1). W takim razie K.S. HAVNER [1973], str. 93, stwierdza: "Hence a continuum point-of-view at this second level would seem untenable". Tak więc, jeżeli chcemy przyjąć koncepcję opisu jednorodnie odkształconego kryształu w ramach matematycznych podstaw mechaniki kontinuum, fizyczny wymiar  $REO$ , który idealizowany jest jako "punkt materialny" kontinuum (ściślej mówiąc jego otoczenie), nie może być

mniejszy niż  $1\mu\text{m}$  (tj.  $> 10^3 a$ ). Tak określony, minimalny fizyczny wymiar jest zgodny z wnioskiem R. HILLA [1956], str. 8, który brzmi: "...the linear dimension of the smallest crystal whose behaviour can legitimately be considered from the standpoint of the theory of plasticity is probably of order  $10^{-3}\text{cm}$ ", co daje oszacowanie fizycznego wymiaru do wielkości rzędu  $10\mu\text{m}$ . Przy średnim wymiarze ziarna rzędu  $(10 \div 100)\mu\text{m}$ , zastosowanie mechaniki ośrodków ciągłych do opisu deformacji metali jest, zgodnie z powyższą dyskusją, fizycznie poprawne. Mając na uwadze diskutowane ograniczenie minimalnego poziomu obserwacji, możemy opisywać kinematykę deformacji kryształów. Jednym z najważniejszych fenomenologicznych aspektów globalnego zachowania się plastycznego metali jest względny ruch makroskopowego materiału w stosunku do jego struktury krystalicznej. Oznacza to, że materialne "linie" i "płaszczyzny" przemieszczają się i obracają względem uśrednionej orientacji sieci krystalicznej w objętościach o typowym wymiarze rzędu  $10\mu\text{m}$  (K.S. HAVNER [1992]). W rozważaniach tych określono więc średni fizyczny wymiar elementu objętości, który gwarantuje poprawność konstytutywnego opisu niesprężystej deformacji metali na poziomie mikroskopowym. Natomiast dla kontynuального opisu sprężysto–plastycznej deformacji w makroskopowej skali, wymiar taki powinien być znacznie większy od wielokrotności średniego wymiaru ziarna. K.S. HAVNER [1992] zakłada na przykład jednostkową kostkę polikryształu o boku 1 mm, która zawiera około 1000 ziarn. Wówczas teoria opisująca kinematykę i strukturę konstytutywną skończonych deformacji sprężysto–plastycznych jest poprawnie sformułowana i przejście od poziomu mikroskopowego do poziomu makroskopowego może być precyzyjnie określone (por. R. HILL [1956], [1967], [1972], K.S. HAVNER [1973], [1974], [1992], J. MANDEL [1971] oraz R. HILL i J. RICE [1972] i S. NEMAT–NASSER [1985]). W szczególności wykazano, że takie podstawowe cechy struktury opisu konstytutywnego, jak istnienie potencjału plastycznego i związana z tym zasada normalności oraz pewne nierówności konstytutywne są zachowane przy przejściu przez hierarchię poziomów obserwacji i dają się przenieść do modelu makroskopowego (zob. R. HILL [1967], [1972], [1984], [1985] i H. PETRYK [1989]).

### 3.2. Hipoteza o rozszerzeniu pojęcia reprezentatywnego elementu objętości

Sytuacja ulega zmianie, kiedy deformacja plastyczna może być realizowana przez nowy mechanizm mikropasm ścinania. Analiza przeprowadzona przez autora w pracy, R.B. PĘCHERSKI [1992a], [1997] oraz dyskusja i podsumowanie dostępnych rezultatów obserwacji doświadczalnych zamieszczone w rozdziale 2 prowadzą do następującego spostrzeżenia.



### Spostrzeżenie S7.

Mikropasma ścinania rozprzestrzeniają się na odległości co najmniej kilku średnic ziarn, tworząc często pakiety (klastery) o szerokości rzędu (10–100)  $\mu\text{m}$ . Pakiety te są cienkimi warstwami materiału, w których kolejne generacje elementarnych aktywnych mikropasm ścinania, o grubości rzędu 0.1  $\mu\text{m}$ , propagują się z bardzo dużą prędkością względem otoczenia.

Badania doświadczalne przeprowadzone przez M. ZHOU et al. [1996] dla wysokowytrzymałościowej stali (typu C-300) wykazują, że prędkość propagacji pasma ścinania w dynamicznie obciążonej próbce dochodziła do 1200  $\text{ms}^{-1}$ , co stanowiło około 40% prędkości dźwięku (poprzecznej fali sprężystej) w tym materiale. Biorąc pod uwagę fakt, że obserwowane pasmo ścinania składa się z klasterów mikropasm ścinania, należy przypuszczać, że prędkość propagacji pojedynczego mikropasma będzie znacznie większa (w ekstremalnych warunkach może być bliska prędkości dźwięku). Szerszą dyskusję na ten temat zamieszczono w pracy autora (R.B. PĘCHERSKI [1997]).

Z powyższego spostrzeżenia wynika, że udział mikropasm ścinania w deformacji plastycznej ujawnia się na innym poziomie obserwacji, niż udział poślizgów krystalograficznych w łatwych systemach poślizgu, który rozpatrywany jest na poziomie mikroskopowym. Idąc za uwagami K.S. HAVNERA [1973] na temat poziomu submikroskopowego, możemy stwierdzić przez analogię, że przyjęcie z punktu widzenia opisu kontynuального poziomu mikroskopowego o wymiarze fizycznym rzędu (1–10)  $\mu\text{m}$  prowadzi do tego, że deformacja każdego ziarna w polikryształe poddanym zaawansowanym odkształceniom z udziałem mikropasm ścinania cechuje się silną niejednorodnością pól przemieszczeń i odkształceń postaciowych. Jest to udziałem wielkiej liczby aktywnych mikropasm ścinania oraz rozprzestrzeniającej się nieciągłości mikroskopowego pola prędkości związanego z propagacją kolejnych aktywnych mikropasm ścinania. Ze spostrzeżenia S7. oraz powyższej dyskusji wynika więc, że odkształceniom plastycznym, które jest kontrolowane przez mikropasma ścinania towarzyszą:

- (a) nieciągłość składowej mikroskopowego pola prędkości, która jest styczna do płaszczyzny propagacji systemu aktywnych mikropasma ścinania;
- (b) dynamiczne procesy redystrybucji mikronaprężeń;
- (c) możliwe zmiany geometrii rozważanego *REO*.

Sprawia to podstawową trudność przy jednoczesnym traktowaniu efektów obu mechanizmów, próbie ich uśrednienia i teoretycznego przejścia do poziomu makroskopowego. Powstaje bowiem podstawowe pytanie o skalę obserwacji, jaką należy przyjąć aby uzyskać adekwatny opis kontynuacyjny i uwzględnić jednocześnie wpływ efektu wielopoziomowej hierarchii pasm ścinania na makroskopowe, mechaniczne, zachowanie się

materiału. Wymagania te są przeciwstawne. Zwiększanie skali fizycznego wymiaru elementu objętości, który można by było określić jako infitezymalne otoczenie "punktu materialnego" w opisie kontynualnym, powoduje jednocześnie "rozmycie" efektów mikropasm ścinania i pozbawia możliwości uwzględnienia wpływu ich dominujących cech na mechaniczne własności materiału. Przykładem jest zachowana na wszystkich poziomach obserwacji geometria pasm ścinania, która wpływa w zasadniczy sposób na indukowaną odkształceniem plastycznym anizotropię. Problem ten pozostaje otwarty i potrzebne są dalsze badania dla opracowania precyzyjnego połączenia teorii zachowania się materiału na mikroskopowym poziomie poślizgów w łatwych systemach, przez mezoskopowy poziom mikropasm ścinania, z makroskopową teorią płynięcia plastycznego. Przydatne mogą być przy tym wnioski i rezultaty z badań C. STOLZA [1990], dotyczące uśredniania efektów propagacji strefy zniszczenia w materiałach niesprężystych. Problem ten podjęto również we wcześniejszych pracach autora (R.B. PĘCHERSKI [1996a], [1997]), gdzie uwzględniono dominujący efekt mikropasm ścinania związany z wpływem nieciągłości pola prędkości i zaproponowano hipotezę o rozszerzeniu ogólnie przyjętej koncepcji  $R E O$ .

#### **Hipoteza H1.**

*Dla kontynualnego opisu deformacji sprężysto–plastycznej w makroskopowej skali, przyjmijmy  $R E O$  jako jednostkową objętość polikryształu o średnim wymiarze liniowym  $L_0$  rzędu 1mm. Aby uwzględnić wpływ wielopoziomowej hierarchii mikropasm ścinania, dopuścimy możliwość istnienia w  $R E O$  powierzchni nieciągłości mikroskopowego pola prędkości, na której składowa styczna prędkości doznaje skoku. Orientacja tej powierzchni będzie określona przez geometrię systemu aktywnych mikropasm ścinania.*

Przeprowadzona powyżej analiza i poczynione założenia pozwolą przedstawić w następnym rozdziale propozycję fenomenologicznego modelu, który opisuje zachowanie się sprężysto–plastycznego materiału w zakresie dużych odkształceń z uwzględnieniem wpływu najważniejszych, z punktu widzenia makroskopowego opisu, efektów mikropasm ścinania. Tak proponowane podejście wydaje się być adekwatne do stwierdzenia zawartego w monografii S. NEMAT–NASSERA i M. HORI [1993], str. 15, które mówi: *"Perhaps one of the most vital decisions that the analyst makes is the definition of the RVE (representative volume element). An optimum choice would be one that includes the most dominant features that have first–order influence on the overall properties of interest and, at the same time, yields the simplest model."*



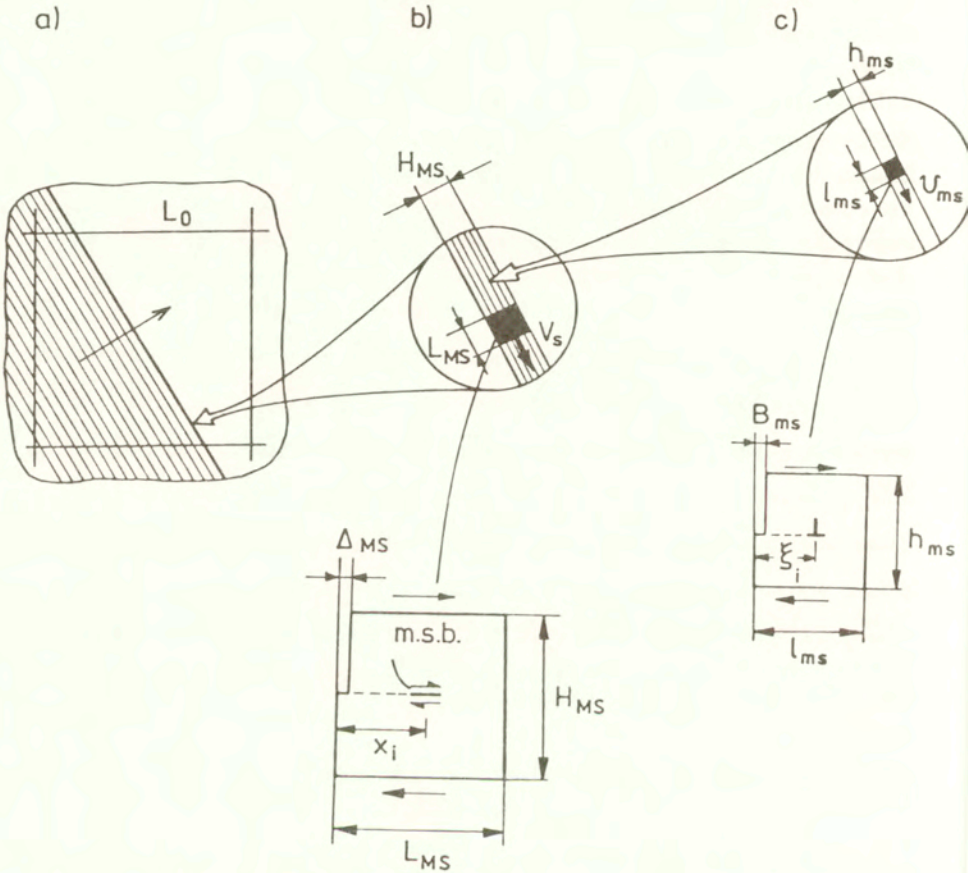
### 3.3. Model prędkości odkształcenia postaciowego generowanego przez mikropasma ścinania

Rozważmy dla ilustracji, zgodnie ze spostrzeżeniem *S7* i hipotezą *H1*, pewien *REO* zawierający obszar, w którym następuje masowy rozwój mikropasm ścinania. Zobrazowano to na rys. 2a, gdzie zaznaczono ślady kolejnych pakietów (klasterów) mikropasm ścinania. Strzałka wskazuje kierunek rozszerzania się strefy makroskopowego pasma ścinania. Na rys. 2 "przybliżono" także dwa kolejne "powiększenia" tej strefy i przedstawiono podstawowe mechanizmy odkształcenia postaciowego. Rys. 2b obrazuje "powiększenie" klastra mikropasm ścinania z aktywną strefą o grubości  $H_{ms}$  i długości  $L_{ms}$ , w której przejście dużej liczby aktywnych mikropasm ścinania powoduje lokalną perturbację  $\Delta_{ms}$  mikroskopowego pola przemieszczeń poruszającą się z prędkością  $V_s$  jako fala dystorsji. Drugi stopień "powiększenia" zobrazowano na rys. 2c, który reprezentuje aktywną strefę pojedynczego mikropasma ścinania o grubości  $h_{ms}$  i długości  $l_{ms}$ , powodującego lokalną perturbację  $B_{ms}$  mikroskopowego pola przemieszczeń poruszającą się na czole mikropasma jako fala dystorsji z prędkością  $v_{ms}$ . Na rys. 2c zilustrowano również schematycznie odkształcenie postaciowe wywołane przejściem dyslokacji krawędziowej. Zgodnie ze znaną koncepcją prezentowaną np. przez J.J. GILMANA [1960] i G.E. DIETERA [1988] mamy

$$(3.1) \quad \delta_i = \frac{\xi_i b}{l_{ms}}, \quad B_{ms} = \sum_i^n \delta_i = \frac{b}{l_{ms}} \sum_i^n \xi_i,$$

gdzie  $\delta_i$  jest przemieszczeniem "i"tej dyslokacji zajmującej położenie między  $\xi_i = 0$  i  $\xi_i = l_{ms}$ , podczas gdy  $B_{ms}$  odpowiada, zgodnie z rys. 2c, przemieszczeniu górnej części strefy aktywnej względem podstawy dla  $n$  dyslokacji. Odpowiadające odkształcenie postaciowe  $\gamma$  jest dane przez

$$(3.2) \quad \gamma = \frac{B_{ms}}{h_{ms}} = \frac{b n}{l_{ms} h_{ms}} \bar{\xi}, \quad \bar{\xi} = \frac{\sum_i^n \xi_i}{n},$$



Rys. 2. Schematyczna ilustracja wielopoziomowej hierarchii mikropasm ścinania:

- a) obraz *REO* o średnim wymiarze liniowym  $L_0$  ze strefą pasma ścinania rozszerzającą się w kierunku oznaczonym strzałką; b) "powiększenie" klastra mikropasm ścinania o szerokości  $H_{MS}$  i długości aktywnej strefy  $L_{MS}$  z ilustracją mechanizmu odkształcenia postaciowego w wyniku operujących w aktywnej strefie klastra mikropasm ścinania (m.s.b.); c) "powiększenie" aktywnej strefy pojedynczego mikropasma ścinania o grubości  $h_{ms}$  i długości  $l_{ms}$  z ilustracją dyslokacyjnego mechanizmu plastycznego ścięcia powodującego lokalną perturbację  $B_{ms}$  mikroskopowego pola przemieszczeń.



gdzie  $\bar{\xi}$  jest średnią odległością przebytą przez dyslokacje. Zakładając, że  $\bar{\xi}$  oraz  $n$  mogą zmieniać się w czasie trwania mikroskopowego procesu plastycznego ścinania, który oznaczymy jako zmienną  $\tau$ , możemy obliczyć mikroskopową prędkość odkształcenia postaciowego

$$(3.3) \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{b}{l_{ms} h_{ms}} \left( n v_d + \bar{\xi} \frac{dn}{d\tau} \right),$$

gdzie

$$(3.4) \quad v_d = \frac{d\bar{\xi}}{d\tau}$$

jest średnią prędkością dyslokacji. Tak więc, prędkość odkształcenia postaciowego generowana przez pojedyncze mikropasma ścinania może być wyrażona przez prędkość  $v_{ms}$ , która związana jest z propagacją aktywnej strefy poruszającej się na czole mikropasma

$$(3.5) \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = \frac{v_{ms}}{h_{ms}}, \quad v_{ms} = \frac{b}{l_{ms}} \left( n v_d + \bar{\xi} \frac{dn}{d\tau} \right).$$

Jak zauważono w punkcie 2.1.1, w razie propagacji mikropasm ścinania przez wiele ziarn, aktywowane mogą być również, tzw. "trudne systemy poślizgu" charakteryzujące się wysokimi wartościami naprężenia krytycznego. Wiąże się to z generacją nowych dyslokacji w strefie aktywnej i dlatego występowanie drugiego składnika w (3.5) jest w pełni uzasadnione. Jak zauważył jednak A. KORBEL [1974], trudno jest ustalić doświadczalnie wzajemne współdziałanie mechanizmów generacji i ruchu dyslokacji oraz ich udział w prędkości odkształcenia postaciowego. Dlatego przyjmujemy dla uproszczenia, że ścinanie plastyczne zależy od ruchu pewnej uśrednionej liczby dyslokacji, która nie zmienia się w czasie propagacji strefy aktywnej. Wtedy (3.5) upraszcza się do znanego związku Orowana

$$(3.6) \quad \frac{d\gamma}{d\tau} = b \rho v_d, \quad \rho = \frac{n}{l_{ms} h_{ms}},$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość dyslokacji.

Rozważmy pewną liczbę mikropasm ścinania  $N_{MS}$  podobnie zorientowanych i aktywnych w przedziale czasu  $\Delta\tau = \tau_f - \tau_i$ , który z punktu widzenia makroskopowego opisu płynięcia plastycznego jest tak mały, że można go uznać za "chwilę", a ściślej mówiąc za nieskończenie mały przyrost  $\delta t$  parametru "czasopodobnego". Zauważmy, że zachodzi tu podobieństwo do koncepcji reprezentatywnego przedziału czasu (*RPC*) wprowadzonej przez H. PETRYKA [1995]. W naszych rozważaniach *RPC* odpowiada przedziałowi  $\Delta\tau$ . Tak rozumiany klaster "jednocześnie" działających (uśrednionych po  $\Delta\tau$ ) mikropasm ścinania, pokazany na rys. 2b, jest odpowiedzialny za mikroskopowe odkształcenie postaciowe  $\gamma_{ms}$

$$(3.7) \quad \gamma_{ms} = \frac{\Delta_{MS}}{H_{MS}}, \quad \Delta_{MS} = \frac{\overline{B}_{ms} N_{MS}}{L_{MS}} \bar{x}_{MS},$$

gdzie  $\overline{B}_{ms}$  jest całkowitym przemieszczeniem produkowanym przez pojedyncze pasmo ścinania

$$(3.8) \quad \overline{B}_{ms} = h_{ms} \bar{\gamma} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} v_{ms} d\tau,$$

natomiast

$$(3.9) \quad \bar{x}_{MS} = \frac{\sum_i^k x_i}{k}, \quad k \equiv N_{MS},$$

oznacza średnią drogę, jaką przebyło  $N_{MS}$  mikropasm ścinania w czasie ich działania w aktywnej strefie klastera. Długość aktywnej strefy klastera  $L_{MS}$  może być określona jako średni zasięg mikropasm ścinania, poruszających się ze średnią prędkością  $v_{ms}$  w przedziale czasu  $\Delta\tau = \tau_f - \tau_i$ :

$$(3.10) \quad L_{MS} = v_{ms} \Delta\tau.$$

Dopuszczając możliwość zmiany  $\bar{x}_{MS}$  i  $N_{MS}$  w czasie propagacji aktywnej strefy klastera, mamy na podstawie (3.7)



$$(3.11) \quad \dot{\gamma}_{ms} = \frac{\bar{B}_{ms}}{L_{MS} H_{MS}} (N_{MS} \dot{\bar{x}}_{MS} + \bar{x}_{MS} \dot{N}_{MS}),$$

gdzie kropka oznacza różniczkowanie względem parametru "czasopodobnego"  $t$ . Zauważmy, że prędkość  $\dot{\bar{x}}_{MS}$  może być identyfikowana z prędkością propagacji czoła aktywnej strefy pojedynczego mikropasma ścinania,  $\dot{\bar{x}}_{MS} \equiv v_{ms}$ , przy upraszczającym założeniu, że  $v_{ms}$  ma taką samą wartość dla każdego mikropasma działającego w aktywnej strefie klastra. Wtedy prędkość propagacji  $V_S$  aktywnej strefy klastra  $N_{MS}$  mikropasm ścinania jest zadana następująco

$$(3.12) \quad V_S = \frac{\bar{B}_{ms}}{L_{MS}} (N_{MS} v_{ms} + \bar{x}_{MS} \dot{N}_{MS}),$$

a odpowiadająca prędkość odkształcenia postaciowego jest równa

$$(3.13) \quad \dot{\gamma}_{ms} = \frac{V_S}{H_{MS}}.$$

Z zależności (3.12) wynika, że potrzebne jest dodatkowe równanie ewolucji dla  $N_{MS}$ . Jest to otwarty problem, który wymaga dalszych studiów, teoretycznych i doświadczalnych, na temat rozwoju mikropasm ścinania w aktywnej strefie pojedynczego klastra. Jeżeli przyjmiemy, dla uproszczenia, że liczba mikropasm ścinania w czasie propagacji aktywnej strefy klastra jest w przybliżeniu stała, to związek (3.12) upraszcza się następująco

$$(3.14) \quad V_S = \frac{\bar{B}_{ms}}{L_{MS}} N_{MS} v_{ms},$$

a (3.13) przyjmuje postać podobną formalnie do wzoru Orowana (3.6)

$$(3.15) \quad \dot{\gamma}_{ms} = \bar{B}_{ms} \rho_{MS} v_{ms}, \quad \rho_{MS} = \frac{N_{MS}}{L_{MS} H_{MS}},$$

gdzie  $\rho_{MS}$  jest gęstością mikropasm ścinania działających w aktywnej strefie klastra. Jeżeli przyjmiemy, że  $N_{MS}$  jest rzędu 100, a grubość  $H_{MS}$  i szerokość  $L_{MS}$  aktywnej wynosi około  $100 \mu\text{m}$ , to gęstość  $\rho_{MS}$  będzie rzędu  $10^{10} (\text{m}^{-2})$ .

#### 3.4. Znaczenie pojęcia "uplastycznienie" w kontekście mechanizmu mikropasm ścinania

We wcześniejszych pracach autora, PĘCHERSKI [1992a], [1993a], [1997], zauważono, że w teorii plastyczności z efektami mikropasm ścinania znaczenie pojęcia "uplastycznienie" materiału polikrystalicznego jest nietrywialne i wymaga dokładniejszej analizy. Poglębione studia precyzyjnego związku nominalnych naprężeń uplastycznienia z wewnętrznymi własnościami materiału zostały przeprowadzone przez R. HILLA [1967], [1979]. Rozważmy *REO* polikryształu, który początkowo jest w stanie wolnym od naprężeń, a następnie poddany jest makroskopowo jednorodnym odkształceniom przez zadanie promieniowych dróg obciążenia w przestrzeni naprężeń, które odpowiadają procesom prostego obciążenia. Dla każdej takiej drogi obciążenia, *REO* jest obciążany poza reakcję sprężystą materiału, aż do osiągnięcia pewnego małego odkształcenia trwałego. Powtarzając taką procedurę wzdłuż różnych dróg obciążenia prostego i łącząc tak otrzymane punkty, możemy aproksymować powierzchnię, która jest miejscem geometrycznym granicy sprężystego zachowania się materiału. Jest to granica nominalna (umowna), która jest związana z pewną zadaną wartością odkształcenia trwałego, oznaczającego umownie początek uplastycznienia (płynięcia plastycznego). Pierwsza taka powierzchnia graniczna, związana ze stanem pierwotnym materiału – pozbawionym naprężeń wewnętrznych – nazywa się początkową powierzchnią uplastycznienia. Wszystkie następne powierzchnie graniczne nazywane są powierzchniami plastyczności lub powierzchniami płynięcia. Mogą one ulegać sztywnemu przesunięciu i zmieniać swój kształt, zależnie od zmiany historii deformacji plastycznej. Poparte jest to licznymi badaniami doświadczalnymi, które pokazują również, że zmiana kształtu powierzchni plastyczności zależy bardzo silnie od przyjętej wartości umownego odkształcenia trwałego służącego do wyznaczenia tej powierzchni (zob. np. S. S. HECKER [1976], K. IKEGAMI [1979] oraz W. SZCZEPIŃSKI et al. [1990], W. SZCZEPIŃSKI i J. MIASTKOWSKI [1994]).



Aby niezależnie się od przyjętego odkształcenia nominalnego przy wyznaczaniu powierzchni plastyczności, R. HILL [1979] zaproponował następującą procedurę. Obszar sprężysty w przestrzeni naprężeń można wyznaczyć przez próbne odciążenia aktualnego stanu naprężenia, które realizowane są przez sprężyste drogi naprężeń prowadzące do stanów, gdzie dalsze odkształcenie plastyczne jest zauważalne zaledwie w kilku ziarnach. Powierzchnia graniczna takiego obszaru została nazwana granicą sprężystości, a termin powierzchnia plastyczności został zarezerwowany dla miejsca geometrycznego punktów, które otrzymuje się przez dalsze odkształcenie plastyczne, wychodząc od punktu leżącego na granicy sprężystości przez przyłożenie rosnącego monotonicznie prostego obciążenia, aż do osiągnięcia stanu, w którym efekty dalszego umocnienia w każdym z aktywnych systemów poślizgu uplastycznionych ziarn wyczerpują się. Makroskopowe naprężenie będzie wzrastać ze wzrostem liczby uplastycznionych ziarn w *REO* polikrystalicznego agregatu, dążąc asymptotycznie do górnej granicy, która może być osiągnięta z dokładnością do odkształcenia rzędu około  $10^{-3}$ , które powstaje z powodu sprężystej reakcji więzów (oddziaływania sprężystego między deformowanymi ziarnami). Punkt uplastycznienia (granica plastyczności) może więc być otrzymany przez powrotną ekstrapolację danych, które zostały pomierzone dla odpowiedniego odcinka drogi obciążenia. Tak wyznaczona granica plastyczności zależy jedynie od krytycznych naprężeń poślizgu w potencjalnych systemach poślizgu w polikryształe, a jest niezależna, w odróżnieniu od granicy sprężystości, od rozkładu mikronaprężeń działających w aktualnym stanie obciążenia zewnętrznego. Aby podkreślić charakterystyczne własności tak określonej powierzchni plastyczności, R. HILL [1967], ukuł alternatywną nazwę "extremal surface", którą określimy jako – **obwiednia stanów plastycznych**. W pracy, R. HILLA [1967], idea *obwiedni stanów plastycznych* została powiązana z pojęciem form (modów) własnych odkształcenia, które rozumiane są następująco. Załóżmy, że *REO* polikryształu doprowadzony jest do takiego stanu odkształcenia, iż efekty umocnienia plastycznego w aktywnych systemach poślizgu uległy wyczerpaniu. Umocnienie geometryczne polikryształu pochodzące od więzów powoduje, że utrzymanie stałego obciążenia globalnego nie spowoduje, w ogólności, przyrostu makroskopowego odkształcenia plastycznego. Możliwe są jednak takie specjalne konfiguracje naprężeń wewnętrznych i naroży plastycznych powstałych w wyniku przecinających się powierzchni granicznych aktywnych systemów poślizgu, że dopuszczalne jest jedno lub więcej pól prędkości odkształcenia, dla zerowego przyrostu przyłożonego naprężenia zewnętrznego, R. HILL [1967]. Pola takie zostały nazwane wewnętrznymi formami własnymi odkształcenia, a odpowiednie pola naprężenia – wewnętrznymi stanami własnymi naprężeń (por. R. HILL [1983]).

### 3.5. Hipoteza o obwiedni mikropasm ścinania

Jeżeli mikropasma ścinania są rozumiane, zgodnie z dyskusją w p. 2.2.3, jako efekt działania specjalnej konfiguracji mikronaprężeń, które akumulują się na granicach ziarn, aż do momentu, kiedy efekt umocnienia w aktywnych systemach w danym ziarnie ulegnie wyczerpaniu, a następnie ulegają gwałtownej relaksacji, produkując przy ustalonym obciążeniu zewnętrznym samowzbudne pole prędkości deformacji plastycznej  $D_{MS}$ , możemy zauważyć pewne podobieństwo z dyskutowanymi formami własnymi odkształcenia. Generowane przez masowy rozwój mikropasm ścinania samowzbudne pola prędkości deformacji plastycznej  $D_{MS}$  mogą być interpretowane, zdaniem autora, jako szczególna postać rozważanych przez R. HILLA wewnętrznych form własnych pola odkształcenia, które wiążą się z odpowiednimi stanami na *obwiedni stanów plastycznych*. Podobieństwo to może zachodzić dla monotonicznie rosnących prostych dróg obciążenia. Należy ponadto dodać, że samowzbudne pole prędkości deformacji plastycznej  $D_{MS}$  może odpowiadać sytuacji, kiedy mamy do czynienia z krótkozasięgowymi mikropasmami ścinania. W razie powstawania pasm ścinania, które obejmują cały przekrój próbki, mogą się uwidocznić spadki obciążenia.

*Obwiednia stanów plastycznych*, jak podkreślono w pracy R. HILLA [1967], nie jest w rzeczywistości pojedynczą powierzchnią plastyczności, lecz jest raczej miejscem geometrycznym punktów uplastycznienia, które fizycznie odpowiadają różnym stanom *REO* polikryształu. Charakterystyczne jest to, że żaden z tych stanów nie może być osiągnięty z innego stanu, należącego do *obwiedni stanów plastycznych*, w procesie deformacji sprężystej. Analiza tego problemu w kontekście mikropasm ścinania prowadzi do postawienia następującej hipotezy o obwiedni mikropasm ścinania.

#### *Hipoteza H2.*

*Własności obwiedni stanów plastycznych odpowiadają mechanizmowi rozwoju mikropasm ścinania. Stan uplastycznienia REO polikryształu osiągnięty dla drogi obciążenia, która zbliża się do punktu na obwiedni stanów plastycznych związany jest z określoną organizacją przestrzenną i geometrycznym układem aktywnych mikropasm ścinania. Inny punkt należący do obwiedni stanów plastycznych związany jest zazwyczaj z inną organizacją przestrzenną i geometrią mikropasm ścinania. Tak rozumianą obwiednię stanów plastycznych nazwiemy obwiednią mikropasm ścinania.*



Przejście od jednego do drugiego stanu na wspomnianej *obwiedni mikropasm ścinania* nie jest możliwe przy pomocy czysto sprężystego procesu, jako że do utworzenia nowej rodziny mikropasm ścinania wymagana jest aktywacja nowych systemów poślizgu. Zmiana położenia punktów leżących na obwiedni w czasie procesu płynięcia zależy od historii odkształcenia.

#### 4. TEORETYCZNE PODSTAWY OPISU DUŻYCH DEFORMACJI PLASTYCZNYCH Z EFEKTAMI MIKROPASM ŚCINANIA

Rozważania zawarte w poprzednim rozdziale dają podstawy do teoretycznego opisu odkształcenia plastycznego metali z efektami mikropasm ścinania. Opis ten sformułowany jest w ramach teorii skończonych deformacji sprężysto–plastycznych. Obecnie istnieje bogata literatura, która reprezentuje różne kierunki rozwoju tej dziedziny. Wyczerpującą bibliografię oraz szerokie omówienie rezultatów prac, które ukazały się do połowy lat siedemdziesiątych można znaleźć, np. w monografiach M. ŻYCHKOWSKIEGO [1973] oraz P. PERZYNY [1978]. Nowsze rezultaty przynoszą: opracowanie monograficzne M. KLEIBERA i B. RANIECKIEGO [1985], książki J. CHAKRABARTY'ego [1987], LUBLINERA [1990], K.S. HAVNERA [1992], J.J. SKRZYPKA [1993], J.F. BESSELINGA i E. VAN DER GIESSENA [1994], jak również A.S. KHANA i S. HUANGA [1995] oraz zespołowa praca, wydana pod redakcją M. KLEIBERA [1995], zawierająca m.in. rozdziały dotyczące podstaw mechaniki ośrodków ciągłych, równań konstytutywnych i zagadnień plastyczności z punktu widzenia zastosowania metod komputerowych. Dla zachowania jasności i zwięzłości wywodu, przytoczymy tu jedynie najważniejsze pojęcia i zależności, które są potrzebne do dalszych rozważań związanych z modelem plastyczności opartym na koncepcji lokalnej izoklinicznej konfiguracji pośredniej. Omawiane wcześniej podstawy fizyczne opisu deformacji plastycznej metali w pełni uzasadniają takie podejście. Model ten był stosowany również we wcześniejszych studiach autora nad dużymi deformacjami plastycznymi z efektami względnych lokalnych obrotów sieci krystalicznej (R.B. PĘCHERSKI [1982], [1983], [1985], [1986]) oraz anizotropii indukowanej odkształceniem (R.B. PĘCHERSKI [1988a], [1988b], [1996a]). W rozdziale tym przedstawimy również rezultaty własnych badań, które były poświęcone opisowi efektów mikropasm ścinania w ramach kontynualnej teorii materiałów. W szczególności są to nowe rezultaty dotyczące:

- (a) zastosowania teorii powierzchni osobliwych do opisu makroskopowych efektów mikropasm ścinania – propozycja koncepcji  $REO$  z warstwą ścinania (powierzchnią ścięcia);
- (b) określenia makroskopowych miar gradientu prędkości, prędkości deformacji plastycznej i spinu plastycznego w procedurze uśredniania po  $REO$  z postulowaną powierzchnią ścięcia, pozwalającą przenieść charakterystyczną geometrię mikropasm ścinania poprzez wieloskalową hierarchię poziomów obserwacji do opisu makroskopowego;
- (c) wyprowadzenia, w ramach formalizmu Mandela, podstawowych związków



kinematycznych dla elementu materialnego z powierzchnią ścięcia.

Część tych wyników była publikowana w pracach autora (R.B. PĘCHERSKI [1996a], [1997], [1998a], [1998b]). W rozdziale tym zostały one jednak przedstawione obszerniej oraz w sposób bardziej systematyczny i kompletny.

#### 4.1. Kontynuálny opis deformacji metali

##### 4.1.1. Ruch ciała odkształcalnego

Podamy tu jedynie najważniejsze informacje z mechaniki ciał odkształcalnych, które będą niezbędne dla prezentacji własnych wyników w dalszej części pracy. Zgodnie z matematycznymi podstawami mechaniki ośrodków ciągłych, które można znaleźć w wielu monografiach i podręcznikach, zob. np. C. TRUESDELL i W. NOLL [1965], C. ERINGEN [1967], C. E. TRUESDELL [1991] oraz D.R. SMITH [1993]; a w języku polskim: J. RYCHLEWSKI [1974], P. PERZYNA, [1978], W. KOSIŃSKI [1981], Cz. WOŹNIAK, [1985], J.J. SKRZYPEK [1986], Cz. RYMARZ [1991] oraz J. OSTROWSKA – MACIEJEWSKA [1994], ciało materialne  $\mathcal{B}$  traktowane jest jako trójwymiarowa rozmaitość różniczkowalna. W każdej chwili  $t$ , ciało  $\mathcal{B}$  zajmuje pewien regularny obszar  $\mathcal{B}_t$  w trójwymiarowej punktowej przestrzeni euklidesowej  $\mathcal{E}^3$ .

Jedno–jednoznaczne odwzorowanie  $\chi$  ciała  $\mathcal{B}$  na obszar  $\mathcal{B}_t$  w przestrzeni  $\mathcal{E}^3$  określa konfigurację ciała  $\mathcal{B}$ . Wybraną konfigurację ciała  $\mathcal{B}$  w pewnej chwili  $t$ , do której odnosimy wszystko co się tyczy tego ciała i jego ruchu nazywamy konfiguracją odniesienia  $\kappa$  ciała  $\mathcal{B}$ . W konfiguracji  $\kappa$  każdej cząstce  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$  odpowiada punkt materialny  $X \in \mathcal{B}_\kappa \subset \mathcal{E}^3$ , który jest miejscem zajmowanym przez cząstkę  $\mathcal{P}$  w tej konfiguracji. Ruch ciała możemy rozpatrywać jako jednoparametrową rodzinę odwzorowań  $\chi_t$  obszaru  $\mathcal{B}_\kappa$  na obszar  $\mathcal{B}_t$  w  $\mathcal{E}^3$ , gdzie parametrem jest czas (zmienna "czasopodobna"  $t$ ). Oznacza to, że dla każdego punktu materialnego  $X \in \mathcal{B}_\kappa$  istnieje dokładnie jeden punkt  $z \in \mathcal{B}_t$  taki, że

$$(4.1) \quad z = \chi_t(X) = \chi(X, t), \quad X = \chi^{-1}(z, t).$$

Często wprowadza się notację wektorową i w tym celu zakłada się trójwymiarową przestrzeń euklidesową  $E^3$ , sprzężoną z trójwymiarową punktową przestrzenią euklidesową  $\mathcal{E}^3$ . Wybiera się wtedy pewien punkt  $O$ , będący punktem odniesienia w

$E^3$ , który może być wspólny dla  $\mathcal{S}_\kappa$  oraz  $\mathcal{S}_\tau$ , i przyporządkowuje się wektory  $\mathbf{X} = \overline{OX}$  oraz  $\mathbf{x} = \overline{Ox}$ , które są odpowiednio wektorami położenia punktu materialnego  $X \in \mathcal{S}_\kappa$  oraz punktu  $x \in \mathcal{S}_\tau$  i stanowią elementy wektorowej przestrzeni euklidesowej  $E^3$ . Równanie ruchu (4.1) przyjmuje wówczas postać

$$(4.2) \quad \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t).$$

Równanie ruchu (4.2), które określa rodzinę konfiguracji ciała  $\mathcal{B}$  w konfiguracji odniesienia  $\kappa \subset E^3$ , interpretuje się zazwyczaj jako rodzinę deformacji względem konfiguracji odniesienia  $\kappa$ . Zakłada się, że odwzorowania  $\chi$  i  $\chi^{-1}$  są jedno-jednoznaczne i posiadają ciągłe pochodne cząstkowe ze względu na swoje argumenty poza pewnymi punktami, krzywymi i powierzchniami (tzn. że w wyniku ruchu ciała każdy obszar przechodzi w obszar, każda powierzchnia w powierzchnię a każda krzywa w krzywą). Tak określona funkcja ruchu pozwala zdefiniować prędkość punktu materialnego  $\mathbf{X}$  jako prędkość zmiany jej położenia w przestrzeni fizycznej utożsamianej z  $E^3$

$$(4.3) \quad \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \dot{\chi}(\mathbf{X}, t),$$

w opisie materialnym (Lagrangea), gdzie  $\dot{\chi}$  jest pochodną materialną:

$$(4.4) \quad \dot{\chi}(\mathbf{X}, t) = \left. \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X} = \text{const}},$$

lub w opisie przestrzennym (Eulera)

$$(4.5) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\chi} \{ \chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t \},$$

zachodzi bowiem

$$(4.6) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v} \{ \chi(\mathbf{X}, t), t \} \equiv \mathbf{V}(\mathbf{X}, t).$$

Jeżeli  $d\mathbf{X}$  jest pewnym liniowym elementem w otoczeniu punktu materialnego  $X \in \mathcal{S}_\kappa \subset E^3$ , który możemy interpretować jako nieskończenie małe włókno materialne, to w wyniku ruchu ciała  $\mathcal{B}$  wektor  $d\mathbf{X}$  transformuje się w liniowy element  $d\mathbf{x}$  będący



liniowym elementem materialnym w otoczeniu punktu  $\mathbf{x}$  w konfiguracji aktualnej  $\mathcal{B}_{\mathbf{x}} \subset E^3$  składającym się z tych samych cząstek co  $d\mathbf{X}$ . Transformacja

$$(4.7) \quad d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$$

jest tensorem drugiego rzędu zwanym gradientem deformacji

$$(4.8) \quad \mathbf{F} = \text{Grad}\chi = \nabla\chi,$$

o którym założymy, że  $\det \mathbf{F} \neq 0$ . Operacja różniczkowania pewnego odpowiednio ciągłego pola wektorowego  $\mathbf{f}(\xi)$ , przy założeniu kartezjańskiej bazy  $\mathbf{k}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , zdefiniowana jest następująco:

$$(4.9) \quad \nabla \mathbf{f} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_j} \otimes \mathbf{k}_j = \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} \mathbf{k}_i \otimes \mathbf{k}_j.$$

Fakt różniczkowania funkcji ruchu  $\chi$  po zmiennej  $\xi \equiv \mathbf{X}$  z konfiguracji odniesienia zaznaczony jest przez "Grad". Podobnie określamy gradient prędkości

$$(4.10) \quad \mathbf{L} = \text{grad}\mathbf{v} = \nabla\mathbf{v},$$

gdzie fakt różniczkowania pola prędkości  $\mathbf{v}$  względem zmiennej przestrzennej  $\xi \equiv \mathbf{x}$  zaznacza się przez "grad". Różniczkowanie obustronne (4.8) po czasie, przy ustalonym  $\mathbf{X}$ , i uwzględnienie (4.2) oraz (4.5) prowadzi do następującej zależności

$$(4.11) \quad \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \text{Grad} \dot{\chi}(\mathbf{X}, t) = \text{grad}\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \text{Grad}\chi(\mathbf{X}, t),$$

lub zgodnie z (4.8) i (4.10)

$$(4.12) \quad \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}.$$

Dzięki tym abstrakcyjnym pojęciom matematycznym możemy opisywać i analizować zachowanie się pewnej wyodrębnionej objętości realnego ciała stałego, np. próbki z monokryształu lub polikryształu metalu, znajdującej się w fizycznej przestrzeni laboratorium. Ważne jest przy tym poprawne określenie *REO* oraz odpowiednio uśrednionych miar odkształcenia i naprężenia.

#### 4.1.2. Przejście od opisu mikroskopowego do makroskopowego

Opis deformacji metalicznego ciała stałego może być sformułowany na poziomie mikroskopowym lub makroskopowym. Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną w p. 3.1, w obu sytuacjach istotne jest określenie adekwatnej skali obserwacji, tak aby zastosowanie kontynualnych miar odkształcenia i naprężenia miało sens. W pierwszym wypadku, wystarczająco mały element objętości metalu może odpowiadać średniemu wymiarowi fizycznemu rzędu  $(1-10)\mu$ . Zakładamy, że na poziomie mikroskopowym materiał jest niejednorodny i jego reakcja opisywana w ramach mechaniki ośrodków ciągłych zmienia się w obszarze  $B_{\kappa}$ , zajmowanym przez ciało  $B$  w konfiguracji  $\kappa$ , przy przejściu od punktu do punktu. Zakłada się przy tym, że niejednorodności te są rozłożone w taki sposób, aby podobszary należące do  $B_{\kappa}$ , o objętości przekraczającej pewne charakterystyczne dla danego materiału minimum, miały porównywalne własności efektywne (reprezentatywne dla tych objętości). Identyfikuje to poziom makroskopowy, na którym pewna reprezentatywna próbka ( $REO$ ) polikrystalicznego metalu, odpowiadająca objętości  $V_0$  podobszaru należącego do  $B_{\kappa}$ , może być traktowana matematycznie tak, jakby była jednorodna. Najmniejszy z takich  $REO$  polikryształu, potrzebny do określenia uśrednionych makroskopowych miar naprężenia i odkształcenia, odpowiada otoczeniu punktu materialnego  $\mathcal{N}(X) \in \mathcal{E}_{\kappa}$ . W tym wypadku obszar  $\mathcal{E}_{\kappa}$  jest obszarem zajmowanym przez jednorodne ciało makroskopowe  $\mathcal{E}$  w konfiguracji  $\kappa$ . Częstka  $\mathcal{P} \in \mathcal{E}$  i punkt materialny  $X$ , a ściślej biorąc jego otoczenie  $\mathcal{N}(X) \in \mathcal{E}_{\kappa}$ , są matematyczną idealizacją pewnej bardzo małej, ale posiadającej skończony wymiar fizyczny, objętości metalu z całą złożonością mikrostruktury, niejednorodnymi polami mikronaprężeń i mikroodkształceń, które mogą podlegać ewolucji w czasie procesu. Zauważmy, że zachodzi tu pewien dualizm.  $REO$  polikryształu jest przedstawiany w skali mikroskopowej jako skończony element objętości  $V_0$  obszaru niejednorodnego ciała  $B_{\kappa}$ , a z drugiej strony na poziomie makroskopowym  $REO$  odpowiada (infinitesimalnemu) otoczeniu punktu  $X$ ,  $\mathcal{N}(X) \in \mathcal{E}_{\kappa}$  jednorodnego ciała  $\mathcal{E}$ . Punktem wyjścia w opisie konstytutywnym zachowania się materiałów jest więc pojęcie makroskopowego elementu materialnego, który może być określony następująco:

**Makroskopowy element materialny**  $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}_{\kappa}$ , jest pewnym (nieskończenie małym) otoczeniem punktu materialnego  $\mathcal{N}(X) \in \mathcal{E}_{\kappa}$ , takim że jego makroskopowe własności sprężysto-plastyczne są jednorodne w każdym punkcie należącym do tego otoczenia i pozostają jednorodne w każdej chwili procesu deformacji.



Ważnym problemem przy precyzyjnym połączeniu teorii zachowania się materiału na dwóch poziomach opisu jest, wg. R. HILLA [1972], [1984], [1985]:

(a) wymaganie, aby zmienne makroskopowe występujące w równaniach konstytutywnych miały tę cechę, że są zdefiniowane przez wielkości zadane, w sposób fizycznie uzasadniony, na powierzchni  $\partial V_0$  elementu objętości  $V_0$ ,

(b) określenie w jaki sposób, tak zdefiniowane zmienne makroskopowe są odniesione do formalnych uśrednień po objętości  $V_0$  ich mikroskopowych odpowiedników.

Założmy, że na elemencie objętości  $V_0$  określona jest pewna funkcja  $\Psi$ , która może reprezentować pole skalarne, wektorowe lub tensorowe, a jej średnią po objętości  $V_0$  w konfiguracji odniesienia oznaczmy przez

$$(4.13) \quad \{\Psi\} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \Psi \, dV_0.$$

Rozważmy, niejednorodne, mikroskopowe pola: ruchu  $\chi_{\mathbf{m}}$ , prędkości  $\mathbf{v}_{\mathbf{m}}$  oraz mikronaprężeń nominalnych  $\mathbf{s}_{\mathbf{m}}$  – określone na  $V_0$ , których średnie po objętości wyrażone są zgodnie z (4.13). W znanej procedurze uśredniania przedstawionej, np. przez HILLA [1972], [1984] i HAVNERA [1992], w ramach teorii skończonych odkształceń, ograniczamy się zazwyczaj do quasistatycznych procesów deformacji z pominięciem sił masowych, w których mikronaprężenia  $\mathbf{s}_{\mathbf{m}}$  oraz ich prędkości  $\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{m}}$  są zrównoważone:

$$(4.14) \quad \text{Div } \mathbf{s}_{\mathbf{m}} = 0, \quad \text{Div } \dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{m}} = 0 \quad \text{w } V_0$$

oraz przyjmujemy warunki brzegowe

$$(4.15) \quad \nu_0 \mathbf{s}_{\mathbf{m}} = \mathbf{t}_{\nu}, \quad \nu_0 \dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{m}} = \dot{\mathbf{t}}_{\nu} \quad \text{na } \partial V_0,$$

gdzie  $\nu_0$  jest jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni  $\partial V_0$  w konfiguracji odniesienia. Zastosowanie wspomnianej procedury uśredniania do wyznaczenia makroskopowej miary gradientu deformacji  $\mathbf{F}$  i jego prędkości  $\dot{\mathbf{F}}$ , z wykorzystaniem twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego o przejściu od całki objętościowej do całki powierzchniowej po zamkniętej powierzchni ograniczającej daną objętość, przy

założeniu odpowiednich warunków gładkości rozważanych pól (por. np. D.R. SMITH [1993]), prowadzi do następujących relacji

$$(4.16) \quad \mathbf{F} \equiv \{\mathbf{f}\} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \text{Grad} \chi_{\mathbf{m}} dV_0 = \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \mathbf{x}_{\mathbf{m}} \otimes \nu_0 dA_0,$$

$$(4.17) \quad \dot{\mathbf{F}} \equiv \{\dot{\mathbf{f}}\} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \text{Grad} \dot{\chi}_{\mathbf{m}} dV_0 = \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \dot{\chi}_{\mathbf{m}} \otimes \nu_0 dA_0.$$

Podobnie, zastosowanie procedury uśredniania dla pola mikronaprężeń  $\mathbf{s}_{\mathbf{m}}$  oraz jego prędkości  $\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{m}}$ , z wykorzystaniem twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego oraz warunków równowagi (4.14) z warunkami brzegowymi (4.15), prowadzi do następujących związków na makroskopową miarę naprężenia nominalnego  $\mathbf{S}$

$$(4.18) \quad \mathbf{S} \equiv \{\mathbf{s}_{\mathbf{m}}\} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \mathbf{s}_{\mathbf{m}} dV_0 = \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \mathbf{X}_{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{t}_{\nu} dA_0,$$

jego prędkości  $\dot{\mathbf{S}}$

$$(4.19) \quad \dot{\mathbf{S}} \equiv \{\dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{m}}\} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \dot{\mathbf{s}}_{\mathbf{m}} dV_0 = \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \dot{\mathbf{X}}_{\mathbf{m}} \otimes \dot{\mathbf{t}}_{\nu} dA_0$$

oraz dla tensora Kirchhoffa  $\boldsymbol{\tau}$

$$(4.20) \quad \boldsymbol{\tau} \equiv \{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}}\} = \{\mathbf{f} \mathbf{s}_{\mathbf{m}}\} = \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0} \mathbf{x}_{\mathbf{m}} \otimes \mathbf{t}_{\nu} dA_0.$$

Jak pokazał R. HILL [1972], można ustalić szereg ważnych powiązań między makroskopowymi miarami naprężenia i odkształcenia w polikrystalicznych metalach lub innych ośrodkach niejednorodnych, a mikroskopowymi polami zadanymi w pewnym elemencie objętości  $V_0$  bez odwoływania się do konkretnych własności konstytutywnych. Specjalną rolę odgrywa tu podstawowe twierdzenie o średniej iloczynu, którego postać dla prostego nasunięcia tensorów deformacji  $\mathbf{f}$  oraz naprężenia  $\mathbf{s}_{\mathbf{m}}$  jest następująca:



Jeżeli przyjmiemy quasistatyczne procesy deformacji z pominięciem sił masowych, w których mikronapężenia  $\mathbf{s}_m$  są zrównoważone i spełniony jest warunek

$$(4.21) \quad \frac{1}{V_0} \int_V \left( \mathbf{x}_m - \{\mathbf{f}\} \mathbf{X}_m \right) \left( \mathbf{s}_m - \{\mathbf{s}_m\} \right) \nu_0 \, dA_0 = \mathbf{0},$$

to zachodzi następująca równość

$$(4.22) \quad \{\mathbf{f} \mathbf{s}_m\} = \{\mathbf{f}\} \{\mathbf{s}_m\}.$$

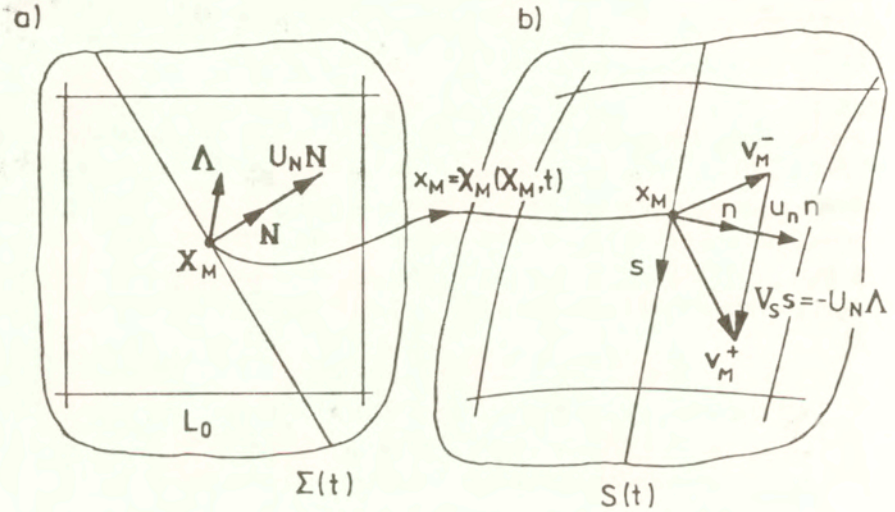
Podobne twierdzenie zostało sformułowane i udowodnione dla skończonych deformacji przez R. HILLA [1972], K.S. HAVNERA [1974], [1986] oraz J. MANDELA [1980]. Powyżej, podano ogólną jego postać, która należy do R. HILLA [1984], gdzie można znaleźć również dowód i wnikliwą analizę podstaw fizycznych. (W monografii S. NEMAT-NASSERA i M. HORI [1993] podano wyczerpującą bibliografię wcześniejszych prac dotyczących twierdzenia o średniej iloczynu dla małych odkształceń).

## 4.2. Opis efektów mikropasm ścinania w ramach kontynualnej teorii materiałów

### 4.2.1. Zastosowanie teorii powierzchni osobliwych do opisu efektów mikropasm ścinania – warstwa ścinania

Zbadajmy możliwość rozszerzenia omawianych procedur uśredniania i przejścia od poziomu mikroskopowego do makroskopowego, tak aby uwzględnić nowe efekty mikropasm ścinania. Z hipotezy *H1*. oraz modelu przedstawionego w p. 3.3. można przyjąć, że przejście mikropasm ścinania w aktywnej strefie pakietu mikropasm powoduje zaburzenie  $\Delta_{MS}$  mikroskopowego pola przemieszczenia,  $\mathbf{u}_m = \mathbf{x}_m - \mathbf{X}_m$  (por. rys. 2). Zaburzenie to porusza się z prędkością  $V_S$ , powodując nieciągłość mikroskopowego pola prędkości  $\mathbf{v}_m$  w *REO*. Tak więc aktywowanie się kolejnych klastrów mikropasm, prowadzące do rozszerzania się strefy ścinania, może być idealizowane matematycznie jako proces propagacji powierzchni osobliwej w *REO*. Niezbędne informacje z teorii powierzchni osobliwych można znaleźć, np. w monografiach C. TRUESDELLA i R. TOUPINA [1965], A.C. ERINGENA i E.S. SUHUBI [1974] oraz W. KOSIŃSKIEGO [1986]. Teoria ta pozwoli zidentyfikować postulowaną powierzchnię nieciągłości

mikroskopowego pola prędkości  $\mathbf{v}_M$  w  $REO$  jako powierzchnię osobiwą silnej nieciągłości o własnościach znanych dla powierzchni zawirowania.



Rys. 3. Dualna reprezentacja powierzchni silnej nieciągłości mikroskopowego pola prędkości  $\mathbf{v}_M$  w  $REO$ : a) w konfiguracji odniesienia, b) w konfiguracji aktualnej.

Rozważmy powierzchnię, poruszającą się w przestrzeni euklidesowej  $\mathcal{E}^3$  i zadaną równaniem  $\Sigma(t) : G(\mathbf{X}_M, t) = 0$ , gdzie dla każdej chwili  $t$  z otwartego przedziału  $I \subset \mathbb{R}$  powierzchnia  $\Sigma(t) \subset V_0$  należąca do konfiguracji odniesienia jest obrazem powierzchni  $S(t) \subset V$  w konfiguracji aktualnej, tzn. punkty materialne  $\mathbf{X}_M$  należące do  $\Sigma(t)$  zajmują miejsca  $\mathbf{x}_M$  na powierzchni  $S(t)$  w danej chwili  $t$ , gdzie  $S(t) : g(\mathbf{x}_M, t) = 0$ . Sytuacja ta

zilustrowana jest poglądowo na rys. 3. Zaznaczono na nim powierzchnię  $\Sigma(t) \subset V_0$  o normalnej  $N$  oraz powierzchnię  $S(t) \subset V$  o normalnej  $n$ , gdzie

$$(4.23) \quad N = \frac{\text{Grad}G(\mathbf{x}_M, t)}{|\text{Grad}G|}, \quad n = \frac{\text{grad}g(\mathbf{x}_M, t)}{|\text{grad}g|}.$$

Powierzchnie te mogą rozprzestrzeniać się z prędkościami o składowych normalnych  $U_N$  i  $u_n$ :

$$(4.24) \quad U_N = -\frac{\partial G/\partial t}{|\text{Grad}G|}, \quad u_n = -\frac{\partial g/\partial t}{|\text{grad}g|}.$$

Między składowymi normalnymi prędkościami  $U_N$  i  $u_n$  zachodzi związek

$$(4.25) \quad U_N = (u_n - n \cdot v_M) \frac{|\text{grad}g|}{|\text{Grad}G|},$$

gdzie  $\text{Grad}G = f \text{ grad}g$ . Jak wskazali C. TRUESDELL i R. TOUPIN [1960], str. 508,  $U_N$  jest prędkością pozorną, zależy bowiem od wyboru konfiguracji odniesienia. Może więc być nieskończenie wiele wartości  $U_N$ . W związku z tym, przyjmuje się często za konfigurację odniesienia aktualną konfigurację ciała w chwili  $t$ . Jeżeli wybierzemy aktualną konfigurację za konfigurację odniesienia i przyjmiemy  $t = 0$  za aktualną chwilę, to gradient deformacji  $f$  staje się względnym gradientem deformacji,  $f \equiv f_{(t)}(\theta)$ ,  $\theta \geq t$  (por. C. TRUESDELL i W. NOLL [1965], str. 42). Można wtedy, korzystając z  $f_{(t)}(t) = 1$  i (4.25), określić jednoznacznie prędkość  $U_N$ , która staje się lokalną prędkością propagacji  $U$  powierzchni osobliwej

$$(4.26) \quad U = u_n - n \cdot v_M.$$

Przyjmujemy, że powierzchnia osobliwa charakteryzuje się skokową nieciągłością pochodnych funkcji ruchu, mikroskopowego pola prędkości  $[\dot{\chi}_M] \neq 0$  oraz gradientu deformacji  $[f] \neq 0$



$$(4.27) \quad [\dot{\chi}_M] \equiv \dot{\chi}_M^+ - \dot{\chi}_M^- \neq 0, \quad [f] \equiv f^+ - f^- \neq 0,$$

które są z założenia gładkie w każdym punkcie obszaru  $V_o \times I$  poza powierzchnią osobliwą. (Matematycznie ścisłą definicję skokowej nieciągłości funkcji  $f$  na powierzchni osobliwej opartą na pojęciu gładkiego rozszerzania funkcji określonej na zbiorze nieotwartym można znaleźć u W. KOSIŃSKIEGO [1986].) Powierzchnia  $S(t)$  oraz jej dualny obraz  $\Sigma(t)$  w opisie materialnym jest powierzchnią osobliwą pierwszego rzędu (silnej nieciągłości) dla funkcji ruchu  $\chi_M$ . Z warunków zgodności na powierzchni osobliwej pierwszego rzędu dla pochodnych funkcji ruchu  $\chi_M$ , mamy następujące szczególne warunki określone w konfiguracji odniesienia dla funkcji  $\chi_M$  ciąglej na całym obszarze  $V_o$ , tzn. dla  $[\chi_M] = 0$  (por. A.C. ERINGEN i E.S. SUHUBI [1974], str. 96)

$$(4.28) \quad [f] = \Lambda \otimes N, \quad [\dot{\chi}_M] = -U_N \Lambda,$$

gdzie

$$(4.29) \quad \Lambda \equiv \left[ -\frac{\partial \chi_M}{\partial N} \right], \quad \frac{\partial \chi_M}{\partial N} \equiv \text{Grad} \chi_M N = f N$$

jest wektorem charakterystycznym powierzchni  $\Sigma(t)$ . Zauważmy za autorami, że wektor  $\Lambda$  zdefiniowany na dualnym obrazie powierzchni nieciągłości w opisie materialnym  $\Sigma(t)$ , jest równoległy do wektora skoku pola prędkości  $[\mathbf{v}_M]$  określonego na  $S(t)$  gdzie, zgodnie z (4.5),  $\mathbf{v}_M \equiv \dot{\chi}_M$  (por. rys. 3).

Istotną rolę w klasyfikacji powierzchni osobliwych pierwszego rzędu odgrywa charakter lokalnej prędkości  $U$ , zadanej przez (4.26), tj. składowej normalnej propagacji powierzchni względem ośrodka poruszającego się ruchem  $\chi_M$  z prędkością  $\mathbf{v}_m$ , dla której zachodzi w ogólności związek

$$(4.30) \quad [U] = -[\mathbf{v}_M] \cdot \mathbf{n}.$$

Jeżeli  $[U] \neq 0$ , to mamy do czynienia z falą uderzeniową, rozumianą jako nieciągłość składowej normalnej pola prędkości  $\mathbf{v}_M$ , co w naszych rozważaniach nie występuje. Jeśli

natomiast lokalna prędkość  $U$  jest ciągła, to zachodzą dwie możliwości:

$$(4.31) \quad [\mathbf{v}_M] = 0, \quad \text{lub} \quad [\mathbf{v}_M] \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{dla} \quad [\mathbf{v}_M] \neq 0.$$

W pierwszym wypadku, powierzchnia  $S(t)$  staje się, zgodnie z terminologią podaną przez W. KOSIŃSKIEGO [1981], str. 104, powierzchnią absolutnie (bezwzględnie) materialną. Natomiast w drugim wypadku, istnieje tylko niezerowa składowa styczna wektora skoku mikroskopowego pola prędkości

$$(4.32) \quad [\mathbf{v}_M] = a^\alpha \varphi_{,a}, \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie  $\varphi_{,a}$  są wektorami stycznymi w punkcie  $\mathbf{x}$  powierzchni osobliwej  $S(t)$  zadanej parametrycznie

$$(4.33) \quad S(t) : \mathbf{x}_M = \varphi(l^a, t), \quad \varphi_{,a} = \frac{\partial \varphi}{\partial l^a}, \quad a = 1, 2.$$

Zgodnie z terminologią W. KOSIŃSKIEGO [1981], str. 109, mamy wówczas do czynienia z niematerialną powierzchnią osobliwą pierwszego rzędu (nieabsolutnie materialną) zwaną: powierzchnią zawirowania, warstwą wirową (*vortex sheet*) lub powierzchnią nieciągłości kontaktowej. Stąd można wysnuć następujący wniosek:

#### **Wniosek 1.**

*Powierzchnia nieciągłości mikroskopowego pola prędkości  $\mathbf{v}_M$ , wymieniona w hipotezie H1., spełnia własności niematerialnej powierzchni zawirowania.*

Terminy powierzchnia zawirowania, warstwa wirowa lub powierzchnia nieciągłości kontaktowej pochodzą z mechaniki płynów. W naszych rozważaniach bardziej odpowiednia wydaje się nazwa *powierzchnia ścięcia* lub *warstwa ścinania*. Biorąc jednak pod uwagę fakt, że powstawaniu mikropasm ścinania towarzyszą również lokalne obroty sieci krystalicznej w przyległych objętościach materiału, klasyczny termin – powierzchnia zawirowania – nie jest sprzeczny z intuicyjnym pojmowaniem tego zjawiska.

Warunki zgodności dla osobliwej powierzchni silnej nieciągłości  $S(t)$  w konfiguracji aktualnej przyjmują postać (por. A.C. ERINGEN i E.S. SUHUBI [1974], str. 102)

$$(4.34) \quad [f] = \lambda \otimes n f, \quad [v_M] = -U \lambda,$$

gdzie

$$(4.35) \quad \lambda = \frac{\Lambda}{|n f|} = \frac{\Lambda}{(n B n)^{\frac{1}{2}}}.$$

Na podstawie hierarchicznego modelu prędkości odkształcenia postaciowego generowanego przez mikropasma ścinania, który był dyskutowany w p. 3.3, oraz zgodnie z warunkiem (4.34)<sub>2</sub> i relacją (4.32) można wyspecyfikować następujące warunki zgodności dla warstwy ścinania

$$(4.36) \quad [v_M] = a^a \varphi_{,a} = V_S s, \quad \lambda = -\frac{V_S}{U} s, \quad a = 1, 2,$$

$$(4.37) \quad [f] = -\frac{V_S}{U} s \otimes n f, \quad U \neq 0,$$

gdzie  $V_S$  jest prędkością propagacji czoła aktywnej strefy klastra mikropasm ścinania w kierunku wyznaczonym przez jednostkowy wektor styczny  $s = (a^a \varphi_{,a}) / |a^a \varphi_{,a}|$ , por. rys. 3. Podobnie dla obrazu powierzchni ścięcia  $\Sigma(t)$  w konfiguracji odniesienia mamy

$$(4.38) \quad [f] = -\frac{V_S}{U_M} s \otimes N, \quad [\dot{\chi}_M] = V_S s, \quad U_M \neq 0.$$

#### 4.2.2. Określenie makroskopowej miary prędkości deformacji z uwzględnieniem wpływu mikropasm ścinania

Zastosowanie uogólnionego twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego o całkowaniu gradientu mikroskopowego pola prędkości  $\dot{\chi}_M$ , które jest wystarczająco gładkie w każdym punkcie obszaru  $V_0 \times I$  poza powierzchnią osobliwą, posiadającą cechy warstwy ścinania o skoku prędkości  $[\dot{\chi}_M]$ , prowadzi do zależności (por. np. C. ERINGEN [1967],



str. 427 lub W. KOSIŃSKI [1986], str. 68)

$$(4.39) \quad \int_{V_0} \text{Grad} \dot{\chi}_M dV_0 = \int_{\partial V_0 - \Sigma(t)} \dot{\chi}_M \otimes \nu_0 dA_0 - \int_{\Sigma(t)} [\dot{\chi}_M] \otimes N dA_0.$$

Pozwala to uogólnić znaną procedurę uśredniania mikroskopowego pola prędkości  $\dot{\chi}_M$  na całkowanie po makroskopowym elemencie objętości  $V_0$  z powierzchnią osobliwą.

Makroskopowe miary gradientu deformacji  $\mathcal{F}$  i jego prędkość  $\dot{\mathcal{F}}$  można wtedy wyrazić przez wielkości zadane na powierzchni  $\partial V_0$

$$(4.40) \quad \mathcal{F} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0 - \Sigma(t)} \mathbf{x}_M \otimes \nu_0 dA_0,$$

Zauważmy, że dla  $V_S = 0$ ,  $\mathbf{x}_M = \mathbf{x}_m$  i zgodnie z (4.16),  $\mathcal{F} = \mathbf{F}$ , natomiast z (4.17) i

(4.38) wynika

$$(4.41) \quad \dot{\mathcal{F}} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0 - \Sigma(t)} \dot{\chi}_M \otimes \nu_0 dA_0 = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \text{Grad} \dot{\chi}_M dV_0 + \frac{1}{V_0} \int_{\Sigma(t)} [\dot{\chi}_M] \otimes N dA_0.$$

Podobnie, całkowanie pola naprężeń  $\mathbf{s}_M$  po objętości  $V_0$  makroskopowego elementu z powierzchnią osobliwą prowadzi do następującego wyrażenia na na makroskopową (uśrednioną) miarę naprężenia nominalnego

$$(4.42) \quad \mathbf{S} \equiv \frac{1}{V_0} \int_{\partial V_0 - \Sigma(t)} \mathbf{X} \otimes \mathbf{t}_\nu dA_0 = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \mathbf{s}_M dV_0 + \frac{1}{V_0} \int_{\Sigma(t)} \xi \otimes [\mathbf{t}_N] dA_0,$$

gdzie

$$(4.43) \quad \mathbf{t}_N = N \mathbf{s}_M(\xi), \quad \xi \in \Sigma(t).$$

Dynamiczny warunek zgodności dla skoku wektora naprężenia  $[\mathbf{t}_N]$  na powierzchni osobliwej w konfiguracji odniesienia  $\Sigma(t)$  (por. A.C. ERINGEN i E.S. SUHUBI [1974],

str. 34)

$$(4.44) \quad N[\mathbf{s}_M] = -\rho U_M \dot{X}_M,$$

można wyspecyfikować dla powierzchni ścięcia w następującej postaci (por. A.C. ERINGEN i E.S. SUHUBI [1974], str. 103)

$$(4.45) \quad n[\tau_M] s = -\rho U^2 \lambda = -\rho U_M V_S s,$$

która odpowiada konfiguracji aktualnej. Rozważmy procesy, w których skok sił inercyjnych na powierzchni osobliwej można pominąć. Będziemy mieli wtedy do czynienia z sytuacją, gdy ruch powierzchni osobliwej, będącej matematyczną idealizacją rozprzestrzeniającej się strefy lokalizacji, można aproksymować jako proces quasistatyczny. W takim razie  $U = U_M = 0$  i skok nieciągłości wektora naprężenia,  $[t_M] = 0$ , co powoduje znikanie całki po powierzchni  $\Sigma(t)$  w (4.41) i przywraca klasyczną formułę uśredniania (4.18) oraz twierdzenie o średniej iloczynu (4.22) (por. S. NEMAT-NASSER i M. HORI [1993], str. 37). Jak wskazano we wnioskach końcowych pracy (R.B. PĘCHERSKI [1997]), rozszerzenie tego twierdzenia dla warunków, kiedy mamy do czynienia z propagacją powierzchni osobliwej  $\Sigma(t)$  oraz właściwa jego interpretacja jest bardzo ważnym problemem, którego rozwiązanie jest niezbędne dla kompletnego i precyzyjnego sformułowania przejścia od opisu mikroskopowego do makroskopowego. Zadanie to jest jednak ciągle otwarte i wymaga dalszych studiów.

Zakładając, że powierzchnia osobliwa rzędu pierwszego ma własności powierzchni ścięcia ze skokiem prędkości  $V_S$  i uwzględniając w (4.39) wzór (4.38)<sub>2</sub> mamy

$$(4.46) \quad \dot{\mathcal{F}} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \text{Grad} \dot{X}_M dV_0 + \frac{1}{V_0} \int_{\Sigma(t)} V_S s \otimes N dA_0.$$

Jeżeli wybierzemy konfigurację aktualną makroskopowego elementu w chwili  $t$  jako konfigurację odniesienia, to prędkość gradientu deformacji  $\dot{\mathcal{F}}$  staje się wtedy prędkością względnego gradientu deformacji,  $\dot{\mathcal{F}}_{(t)}$  ( $t$ ), w chwili  $t$  (por. C. TRUESDELL i W. NOLL [1965], str. 54) i formuła uśredniania (4.46) przyjmie następującą postać

$$(4.47) \quad \mathcal{L} \equiv \frac{1}{V} \int_{\partial V - S(t)} \mathbf{v}_M \otimes \nu \, dA = \frac{1}{V} \int_V \text{grad} \mathbf{v}_M \, dV + \frac{1}{V} \int_{S(t)} V_S \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \, dA,$$

gdzie  $\mathcal{L}$  oznacza makroskopową miarę gradientu prędkości  $\mathcal{L} \equiv \dot{\mathcal{F}}_{(t)}^{-1}(t) = \dot{\mathcal{F}}(t) \mathcal{F}^{-1}(t)$ , uśrednioną po makroskopowym elemencie  $V$  przeciętym warstwą ścinania  $S(t)$ . Zauważmy, że dla  $V_S = 0$ ,  $\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_m$  i otrzymujemy znaną relację

$$(4.48) \quad \mathcal{L} = \mathbf{L} \equiv \{l\} = \frac{1}{V} \int_V \text{grad} \mathbf{v}_m \, dV,$$

gdzie  $l \equiv \dot{\mathbf{f}}_{(t)}^{-1}(t) = \dot{\mathbf{f}}(t) \mathbf{f}^{-1}(t)$  jest mikroskopowym gradientem prędkości  $l = \text{grad} \mathbf{v}_m$  określonym dla punktów  $\mathbf{x}_m \in V$ .

Zgodnie z (4.47) i (4.48), możemy uwzględnić wkład aktywnych mikropasm ścinania do makroskopowej miary gradientu prędkości  $\mathcal{L}$  w postaci

$$(4.49) \quad \mathcal{L} = \mathbf{L} + \mathbf{L}_{MS}, \quad \mathbf{L}_{MS} = \frac{1}{V} \int_{S(t)} V_S \mathbf{s} \otimes \mathbf{n} \, dA.$$

Jeśli założymy, że powierzchnia osobiwa  $S(t)$ , przecinająca element o objętości  $V$ , jest płaszczyzną o normalnej  $\mathbf{n}$  i leżącym na niej wektorze jednostkowym  $\mathbf{s}$ , to (4.49)<sub>2</sub> przyjmie postać

$$(4.50) \quad \mathbf{L}_{MS} = \dot{\gamma}_{MS} \mathbf{s} \otimes \mathbf{n},$$

gdzie makroskopowa miara prędkości odkształcenia postaciowego  $\dot{\gamma}_{MS}$  jest określona zgodnie z (3.13) i (3.14) jako uśrednienie po  $REO$  wielkości mikroskopowych

$$(4.51) \quad \dot{\gamma}_{MS} = \frac{1}{V} \int_{S(t)} H_{ms} \dot{\gamma}_{ms} \, dA = \frac{1}{V} \int_{S(t)} H_{ms} B_{ms} \rho_{ms} v_{ms} \, dA.$$

Zakładając dla uproszczenia, że parametr strukturalny  $B_{ms}$  oraz prędkość  $v_{ms}$  są stałe na powierzchni ściana  $S(t)$ , mamy



$$(4.52) \quad \dot{\gamma}_{MS} = B_{ms} v_{ms} \rho_{MS}, \quad \rho_{MS} = \frac{1}{V} \int_S H_{ms} \rho_{ms} dA.$$

Symbol  $\rho_{MS}$  oznacza makroskopową miarę gęstości mikropasm ścinania operujących w sekwencji klasterów, które tworzą rozprzestrzeniającą się w *REO* strefę ścinania. Gęstość  $\rho_{MS}$  może się zmieniać ze zmianą "czasopodobnego" parametru  $t$ , gdyż wielkości  $H_{ms}$  oraz  $\rho_{ms}$  mogą być różne przy przejściu od klastera do klastera. Jeżeli założymy średnią prędkość zmiany gęstości  $\dot{\rho}_{MS}$  jako wartość gęstości mikropasm ścinania  $\rho_{MS}$ , operujących w mikroskopowej skali w przedziale czasu  $\Delta\tau$ , który można przyjąć jako nieskończenie mały przyrost parametru "czasopodobnego" w opisie makroskopowym, to wtedy, zgodnie z (3.10), (4.52) można wyrazić równoważnie w postaci

$$(4.53) \quad \dot{\gamma}_{MS} = B_{ms} L_{ms} \dot{\rho}_{MS}.$$

Zakładając, że *REO* jest w szczególności jednostkowym sześcianem o boku  $L_0 \approx 1\text{mm}$ , a parametr strukturalny  $H_{ms}$  jest rzędu  $100\mu\text{m}$ , to dla danej gęstości  $\rho_{ms} \approx 10^{10} (\text{m}^{-2})$  można oszacować rząd wielkości  $\rho_{MS} \approx 10^9 (\text{m}^{-2})$ .

Wprowadzone równania są ważne dla pojedynczego systemu ścinania. Można je uogólnić dla układu dwóch systemów

$$(4.54) \quad \mathcal{L} = L + \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_{MS}^{(i)} s^{(i)} \otimes n^{(i)},$$

gdzie  $\dot{\gamma}_{MS}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , jest makroskopową miarą prędkości odkształcenia postaciowego, a  $s^{(i)}$ ,  $n^{(i)}$  są odpowiednimi wektorami jednostkowymi definiującymi "i"-ty układ ścinania. Warto podkreślić, że zależność (4.54) zachowuje jedynie ważność przy upraszczającym założeniu, że aktywne mikropasma ścinania operujące w obu systemach działają w takim przedziale czasu mierzonym w skali mikroskopowej (*RPC*), który może być przyjęty jako nieskończenie mały przyrost "czasopodobnego" parametru w opisie makroskopowym. W przeciwnym wypadku, należy uwzględnić sekwencję zdarzeń i wtedy wzór (4.54) przestaje obowiązywać. Powyższa analiza pozwala określić następujące miary prędkości odkształcenia plastycznego  $D_{MS}^P$  oraz spinu plastycznego

$W_{MS}^P$  generowane przez aktywne mikropasma ścinania

$$(4.55) \quad D_{MS}^P = \frac{1}{2} (L_{MS} + L_{MS}^T), \quad W_{MS}^P = \frac{1}{2} (L_{MS} - L_{MS}^T).$$

Dyskutowana procedura uśredniania po *REO* z postulowaną powierzchnią ścięcia pozwala przenieść charakterystyczną geometrię mikropasm ścinania poprzez wieloskalową hierarchię poziomów obserwacyjnych do opisu makroskopowego.

#### 4.2.3. Dyskusja koncepcji warstwy ścinania w świetle znanych propozycji w literaturze

Możliwość modelowania wąskiej strefy lokalizacji, jako powierzchni nieciągłości pola prędkości była sugerowana wcześniej przez T.Y. THOMASA [1961] i została zastosowana do analizy problemu lokalizacji odkształcenia plastycznego przez K.C. VALANISA [1989] i X.M. SU [1992], który zauważył, że koncentracja ruchu dyslokacji w równoległych płaszczyznach poślizgu – grubym paśmie poślizgu – powoduje gwałtowne zmiany mikroskopowego pola prędkości i może prowadzić także do nieciągłości pola prędkości w czasie płynięcia plastycznego w skali makroskopowej. Teoretyczny model, dyskutowanego w p. 2.2.4, "adiabatyicznego" pasma ścinania jako powierzchni nieciągłości dla pola prędkości oraz gradientów naprężenia i temperatury można znaleźć w pracy W.E. OLMSTEADA et. al [1994]. Zastosowano go do analizy jednowymiarowego problemu ścinania lepkoplastycznej płyty z uwzględnieniem sprzężenia termomechanicznego. Również w niedawnej pracy T.W. WRIGHTA i G. RAVICHANDRANA [1997] zaproponowano oryginalną matematyczną idealizację "adiabatyicznego" pasma ścinania jako powierzchni silnej nieciągłości, która została wyposażona w pewną kanoniczną strukturę. Ta kanoniczna struktura pozwala przewidywać reakcję materiału w paśmie na podstawie doświadczalnego pomiaru jego własności w otoczeniu pasma. Autorzy mówią o tym obrazowo w następujący sposób, str. 323: *"Thus, in spite of the extreme inhomogeneity of the temperature, velocity, and strain fields in the neighbourhood of an adiabatic shear band, the existence of these bands opens a possible window on material states that are not accessible through the ordinary techniques of laboratory testing"*.

Wprowadzona w p. 4.2.1 koncepcja warstwy ścinania ma podobną, do dyskutowanej powyżej, matematyczną strukturę powierzchni silnej nieciągłości. Różni się ona jednak zasadniczo interpretacją fizyczną, która znajduje swoje podstawy w omawianej wcześniej fizycznej naturze hierarchii mikropasm ścinania, w spostrzeżeniu *S7.*, oraz w



hipotezie **H.1.** o rozszerzeniu pojęcia *REO* i prowadzi do rezultatów, które według wiedzy autora nie były dotychczas znane. Na przykład w modelu prędkości odkształcenia postaciowego generowanego mikropasmami ścinania, przedstawionym p. 3.3, wyprowadzono zależność na prędkość propagacji aktywnej strefy klastera  $V_s$ , która pozwoliła wyspecyfikować warunki zgodności dla omawianej powierzchni nieciągłości – warstwy ścinania, podane równaniami (4.36–4.38). Została określona składowa styczna skoku mikroskopowego pola prędkości, co pozwoliło obliczyć makroskopową miarę prędkości deformacji z uwzględnieniem wpływu mikropasm ścinania. Model ten wyposaża powierzchnię osobliwą w pewną dodatkową strukturę, która podobnie jak wspomniana struktura kanoniczna T.W. WRIGHTA i G. RAVICHANDRANA [1997], pozwala przewidywać reakcję materiału w aktywnej strefie klastera mikropasm ścinania i otwiera możliwość sformułowania brakującego kryterium propagacji tej strefy (por. rys. 2b). Jest to otwarty problem, który wymaga dalszych studiów. Wyniki prezentowane przez B. RANIECKIEGO i H. TANAKĘ [1994] oraz B. RANIECKIEGO [1996], dotyczące zastosowania teorii powierzchni silnej nieciągłości oraz koncepcji termodynamicznej siły naporu do modelowania powierzchni międzyfazowych, mogą stanowić podstawę do rozwiązania tego problemu. Koncepcje powierzchni silnej nieciągłości oraz termodynamicznej siły naporu do modelowania ruchu granic ziarn zastosował P. DŁUŻEWSKI [1995].

#### 4.2.4. Ciało materialne z wewnętrzną strukturą

Własności sprężysto–plastyczne makroskopowego elementu materialnego są w ogólności anizotropowe i mogą ulegać zmianie w czasie procesu. Może to być anizotropia początkowa lub anizotropia indukowana odkształceniem plastycznym. Wynika to z niejednorodności mikrostruktury i pól mikronaprężeń w *REO* definiującym element materialny  $\mathcal{M}$ . Istotne będzie więc, dla adekwatnego opisu zachowania się elementu materialnego, wyposażenie go w trójkę ortonormalnych wektorów jednostkowych  $e_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , nazywaną reperem kierunków, które reprezentują osie anizotropii. Prowadzi to do określenia ciała materialnego z wewnętrzną strukturą:

*Ciało materialne z wewnętrzną strukturą jest to ciało materialne  $\mathcal{B}$ , w którym każdy element materialny  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_K$ , z dopuszczoną możliwością istnienia powierzchni ścicia, zaopatrzony jest w trójkę ortonormalnych wektorów jednostkowych – reper kierunków  $e_i$ , a ewolucja mikrostruktury oraz indukowanych mikronaprężeń w czasie procesu*



deformacji plastycznej opisana jest skończoną liczbą strukturalnych parametrów wewnętrznych  $A$ , które mogą być wielkościami skalarnymi, wektorowymi lub tensorowymi.

Związane jest to z podstawowym założeniem w opisie deformacji materiałów krystalicznych, że kinematykę kontinuum materialnego i reprezentowanej przez repery kierunków wewnętrznej struktury należy traktować rozłącznie. Znajduje to jasną interpretację w plastyczności monokryształów, gdzie odkształcenie plastyczne postrzegane jest jako płynięcie materiału względem sieci krystalicznej. Podejście takie prowadzi w sposób naturalny do koncepcji spinu plastycznego i obiektywnych prędkości tensora naprężenia i tensora parametrów wewnętrznych współobrotowych ze strukturą materiału.

Wyczerpujące omówienie idei, które dały podstawy do sformułowania teoretycznego opisu sprężysto–plastycznego zachowania się metali w oparciu o pojęcie reperu kierunków i lokalnej, izoklinicznej, konfiguracji pośredniej oraz wyniki badań wielu autorów, przedstawili MANDEL [1971], [1974], M. KLEIBER i B. RANIECKI [1985] oraz S. CLEJA–ȚIGOIU i E. SOŪS [1990]. Takie podejście do teorii dużych deformacji plastycznych nazywane jest często w literaturze koncepcją (formalizmem) MANDELA. Podobne koncepcje były proponowane wcześniej przez wielu autorów, zajmujących się fenomenologicznym opisem skończonych deformacji plastycznych ciał krystalicznych, który został zainicjowany przez J.F. BESSELINGA [1968], C. TEODOSIU [1970] oraz J. KRATOCHVILA [1971] i był rozwijany dalej przez B. LORET [1983] oraz Y.F. DAFALIASA [1985], [1987]. Nowsze rezultaty przedstawili B. RANIECKI i S.K. SAMANTA [1989] oraz B. RANIECKI i Z. MRÓZ [1990], jak również E. VAN DER GIESSEN [1991], [1992] oraz J.F. BESSELING i E. VAN DER GIESSEN [1994]. Szerszą dyskusję na temat zastosowania teorii parametrów wewnętrznych do opisu makroskopowych efektów ewolucji mikrostruktury materiałów można znaleźć, np. w monografii P. PERZYNY [1978].

#### 4.2.5. Podstawowe związki kinematyczne

Rozważmy element materialny  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_\kappa$  w pewnej ustalonej konfiguracji odniesienia  $\kappa$ . Pod wpływem przyłożonych obciążeń (oraz zmiany temperatury) element materialny  $\mathcal{M}$  znajdzie się w pewnej chwili  $t$ , w wyniku jednorodnego procesu mechanicznego (termomechanicznego), w "aktualnej" konfiguracji  $\psi$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}_\psi$ . Aby określić trwałą deformację sprężysto–plastycznego elementu materialnego wprowadza się pojęcie stanu naturalnego, który nazywany jest często chwilowym stanem naturalnym lub naturalnym stanem odniesienia oraz definiuje się izokliniczną konfigurację odciążoną elementu

materialnego.

*Naturalnym stanem odniesienia* ( $NSO$ ) elementu materialnego  $\mathcal{M}$  jest stan, który element materialny mógłby osiągnąć w danej chwili procesu gdyby obciążenia zewnętrzne zostały zredukowane do zera, a temperatura  $\vartheta$  osiągnęła poziom temperatury otoczenia  $\vartheta_0$ , bez zmiany wewnętrznej struktury elementu.

Konfiguracja  $\hat{\psi}$  elementu materialnego  $\mathcal{M}$ , będącego w  $NSO$  jest zwana lokalną konfiguracją pośrednią, zrelaksowaną, lub lokalną konfiguracją odciążoną. Dzięki temu, że każdy element materialny jest wyposażony w reper kierunków, który w lokalnej konfiguracji  $\hat{\psi}$  oznaczymy przez  $\hat{e}_i$ , w każdej chwili procesu deformacji określona jest jednoznacznie jego orientacja względem zadanego kartezjańskiego układu  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , związanego z laboratorium przy pomocy tensora ortogonalnego  $\hat{R} = \hat{e}_i \otimes k_i$ . Najprościej będzie przyjąć, że  $\hat{R} = \text{const}$  w każdej chwili procesu. Oznacza to, że element materialny w konfiguracji  $\hat{\psi}$  może się tak obracać w czasie procesu deformacji aby orientacja jego reperów kierunkowych  $\hat{e}_i$ , względem układu laboratorium  $k_i$  pozostała zachowana. Prowadzi to do jednego z podstawowych pojęć koncepcji MANDELA, jakim są konfiguracje izokliniczne.

*Konfiguracje izokliniczne elementu materialnego  $\mathcal{M}$  stanowią rodzinę lokalnych konfiguracji odciążonych  $\hat{\psi}$  elementu materialnego  $\mathcal{M}$ , w których jego repery kierunkowe  $\hat{e}_i$  zachowują stałą orientację względem zadanego układu laboratorium  $k_i$ , tzn. dla których zachodzi  $\hat{R} = \text{const}$ .*

Jednym z rezultatów zastosowania koncepcji MANDELA jest jednoznaczny rozkład tensora gradientu deformacji  $\mathcal{F}$  na część sprężystą  $\mathcal{E}$ , lub termosprężystą w wypadku kiedy dopuszczamy zmianę temperatury, oraz część plastyczną  $\mathcal{P}$ :

$$(4.56) \quad \mathcal{F} = \mathcal{E} \mathcal{P},$$

gdzie  $\mathcal{E}$  i  $\mathcal{P}$  są liniowymi transformacjami, które odwzorowują odpowiednio lokalne konfiguracje elementu materialnego  $\mathcal{M}$  z postulowaną powierzchnią ściecia:  $\psi \rightarrow \psi$  i  $\kappa \rightarrow \psi$ . Z (4.56) można wyprowadzić następujące podstawowe związki kinematyczne:

$$(4.57) \quad \mathcal{L} = \dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^{-1} + \mathcal{E} \dot{\mathcal{P}}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{E}^{-1}, \quad \mathcal{D} = \frac{1}{2}(\mathcal{L} + \mathcal{L}^T), \quad \mathcal{W} = \frac{1}{2}(\mathcal{L} - \mathcal{L}^T),$$

$$(4.58) \quad \mathcal{D}^e = \{\dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^{-1}\}_s, \quad \mathcal{D}^p = \{\mathcal{E} \dot{\mathcal{P}}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{E}^{-1}\}_s,$$

$$(4.59) \quad \mathcal{W}^e = \{\dot{\mathcal{E}}\mathcal{E}^{-1}\}_a, \quad \mathcal{W}^p = \{\mathcal{E} \dot{\mathcal{P}}\mathcal{P}^{-1}\mathcal{E}^{-1}\}_a,$$



$$(4.60) \quad \mathcal{L} = \mathcal{D} + \mathcal{V}, \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^e + \mathcal{D}^p, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}^e + \mathcal{V}^p,$$

gdzie  $\mathcal{L}$  jest gradientem prędkości, a tensory  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{D}^e$  i  $\mathcal{D}^p$  są, odpowiednio, całkowitą prędkością odkształcenia oraz prędkością odkształcenia sprężystego i plastycznego, natomiast symbol  $\mathcal{V}$  oznacza spin materialny, a  $\mathcal{V}^e$  i  $\mathcal{V}^p$  odpowiadają spinowi sprężystemu i plastycznemu. Symbole  $\{t\}_a$  i  $\{t\}_s$  posłużyły do oznaczenia antysymetrycznej i symetrycznej części tensora  $t$ . Wyprowadzenie makroskopowej miary gradientu prędkości  $\mathcal{L}$  z jego dekompozycją (4.49)<sub>1</sub>, dla  $REO$  z powierzchnią ścinania, daje możliwość uwzględnienia w sposób ścisły udziału mikropasm ścinania w opisie konstytutywnym płynięcia plastycznego. Z (4.49), (4.54) oraz (4.60) wynika bowiem

$$(4.61) \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^e + \mathcal{D}^p = \mathcal{D}^e + D^p + D_{MS}^p,$$

$$(4.62) \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}^e + \mathcal{V}^p = \mathcal{V}^e + W^p + W_{MS}^p,$$

gdzie  $D^p$  i  $W^p$  mogą być interpretowane odpowiednio jako prędkość deformacji plastycznej i spin plastyczny, które kontrolowane są przez mechanizm krystalograficznych poślizgów. Zauważmy, że jeżeli wkład mikropasm ścinania do płynięcia plastycznego można pominąć, to wówczas zgodnie z (4.49–4.51),  $D_{MS}^p = W_{MS}^p = 0$ , co implikuje  $\mathcal{D}^e = D^e$ ,  $\mathcal{D}^p = D^p$ ,  $\mathcal{V}^e = W^e$ ,  $\mathcal{V}^p = W^p$ , oraz  $\mathcal{D} = D$  i  $\mathcal{V} = W$ , gdzie

$$(4.63) \quad D = \frac{1}{2}(L + L^T), \quad W = \frac{1}{2}(L - L^T),$$

$$(4.64) \quad D = D^e + D^p, \quad W = W^e + W^p,$$

a gradient prędkości  $L$  zadany jest przez (4.48). Równania (4.57 – 4.60) przyjmują wtedy klasyczną postać znaną z literatury.

Dekompozycja podobna do (4.56) proponowana była wcześniej przez E.H. LEE i D.T. LIU [1967] oraz E.H. LEE [1969], w kontekście opisu skończonych deformacji sprężysto–plastycznych dla ciała materialnego bez definiowania żadnej dodatkowej struktury wewnętrznej w postaci reperów kierunkowych i konfiguracji izoklinicznej. Legła ona u podstaw alternatywnego sformułowania teorii skończonych deformacji plastycznych. Opis kinematyki skończonych deformacji sprężysto–plastycznych, oparty na dekompozycji (4.56), w połączeniu z formalizmem przestrzeni Riemanna oraz



pochoďnej Liego, proponowany na przykład w pracach P. PERZYNY [1993], [1994], M.K. DUSZEK–PERZYNY i P. PERZYNY [1998], oraz P. DŁUŹEWSKIEGO i P. PERZYNY [1998], otwiera moŹliwoŹci połączenia teorii plastycznoŹci z kontynuálną teorią dyslokacji w ujęciu nieliniowym. Próbe takiego połączenia wraz z dyskusją otwartych kwestii, które przy tym powstają, moŹna znaleźć na przykład w pracach K.C. LE i H. STUMPFA [1994] oraz P. DŁUŹEWSKIEGO [1996], gdzie zamieszczono takŹe wyczerpującą bibliografię kontynuálnej teorii dyslokacji.

## 5. MODEL PLASTYCZNOŚCI Z EFEKTAMI MIKROPASM ŚCINANIA

Sformułowanie modelu prędkości odkształcenia postaciowego kontrolowanego przez mikropasma ścinania oraz wyprowadzenie makroskopowej miary gradientu prędkości  $\mathcal{L}$  dla  $REO$  z osobliwą powierzchnią ścicia otwiera możliwość uwzględnienia w ścisły sposób efektu mikropasmin ścinania w kontynuualnej teorii deformacji plastycznej metali. W rozdziale tym przedstawimy wyniki własnych badań, które w szczególności dotyczą:

- opisu materiału z nieliniowym prawem kinematycznego wzmocnienia oraz z uwzględnieniem wpływu spinu plastycznego (R.B. PĘCHERSKI [1988a], [1988b]);
- opisu płynięcia plastycznego z efektami wewnętrznych mikronaprężeń oraz mikropasmin ścinania z zastosowaniem modelu plastyczności z dwoma powierzchniami granicznymi (R.B. PĘCHERSKI [1995], [1996a], [1996b], [1998a]);
- praw plastycznego płynięcia z efektami mikropasmin ścinania dla pełnego i częściowego zakresu obciążenia (R.B. PĘCHERSKI [1992a], [1998a]);
- niestowarzyszonego prawa plastycznego płynięcia indukowanego przez mikropasma ścinania (R.B. PĘCHERSKI [1994], [1998a], [1998b]).

Zastosowanie modelu z dwoma powierzchniami granicznymi posłużyło do aproksymacji proponowanej przez autora *obwiedni mikropasmin ścinania*. Podstawową rolę w przedstawionym opisie konstytutywnym odgrywa hipoteza o efekcie naroża plastycznego oraz postulat o niestowarzyszonych potencjałach plastycznych (zob. np. R.B. PĘCHERSKI [1992a], [1998a]). W niniejszym rozdziale, zagadnienia te zostały ujęte w sposób bardziej obszerny i systematyczny. Przedyskutowano zarówno perspektywę rozszerzenia proponowanego opisu konstytutywnego do bardziej ogólnego ujęcia w ramach teorii materiałów niesprężystych z parametrami wewnętrznymi, jak również możliwości wprowadzenia uproszczeń pod kątem praktycznych zastosowań, np. do numerycznej identyfikacji modelu lub symulacji procesów plastycznego kształtowania.

### 5.1. Model materiału z nieliniowym prawem kinematycznego wzmocnienia dla skończonych deformacji plastycznych

#### 5.1.1. Podstawowe równania modelu

Dla zachowania zwięzłości i prostoty wyводу, ograniczymy się w dalszych rozważaniach do procesów izotermicznych. Różne podejścia do ogólnego sformułowania termodynamicznej teorii materiałów niesprężystych można znaleźć, np. w pracach:

P. PERZYNY [1971], [1978], J. MANDELA [1974], B. RANIECKIEGO [1984], M. KLEIBERA i B. RANIECKIEGO [1985] oraz J.F. BESSELINGA i E. VAN DER GIESSENA [1994]. Załóżmy, że stan mechaniczny zdefiniowany jest przez zmienne  $(\boldsymbol{\pi}, \hat{\mathbf{A}})$ , określone na konfiguracji izoklinicznej, gdzie  $\boldsymbol{\pi}$  jest drugim tensorem naprężenia Pioli–Kirchhoffa, związanym z naprężeniem Cauchy’ego  $\boldsymbol{\sigma}$  zależnością:

$$(5.1) \quad \boldsymbol{\pi} = (\det \mathbf{E}) \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}^{-T},$$

natomiast  $\hat{\mathbf{A}}$  reprezentuje zbiór parametrów wewnętrznych. Tensor odkształcenia sprężystego Greena  $\Delta^e = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^T \mathbf{E} - \mathbf{1})$  może być obliczony z funkcji entalpii swobodnej  $H$ , wziętej na jednostkę masy:

$$(5.2) \quad \Delta^e = -\rho_k \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\pi}},$$

gdzie  $H = \Phi - \Delta^e : \frac{\boldsymbol{\pi}}{\rho_k}$  daje związek z funkcją energii swobodnej na jednostkę masy  $\Phi$ , która dla procesów izotermicznych może zależeć w następujący szczególny sposób od zmiennych stanu  $(\Delta^e, \hat{\mathbf{A}})$ :  $\Phi(\Delta^e, \hat{\mathbf{A}}) = \Phi_1(\Delta^e) + \Phi_2(\hat{\mathbf{A}})$ . Wyrażenie na prędkość odkształcenia sprężystego przyjmie wtedy postać:

$$(5.3) \quad \dot{\Delta}^e = -\rho_k \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\pi} \partial \boldsymbol{\pi}} : \dot{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{M} : \dot{\boldsymbol{\pi}},$$

gdzie  $\mathbf{M}$  jest tensorem czwartego rzędu reprezentującym podatność sprężystą, natomiast  $\rho_k$  jest gęstością materiału w konfiguracji izoklinicznej. Transformacja zależności (5.3) do konfiguracji aktualnej prowadzi do następującego prędkościowego równania sprężystości

$$(5.4) \quad \mathbf{D}^e = \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma},$$

gdzie  $\mathcal{M}_{ijkl} = (\det \mathbf{E}) E_{A_i}^{-1} E_{B_j}^{-1} E_{C_k}^{-1} E_{D_l}^{-1} \mathbf{M}_{ABCD}$  oraz

$$(5.5) \quad \boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{E}^{-T} \dot{\mathbf{E}} + \boldsymbol{\sigma} \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{E}} \mathbf{E}^{-1})$$

lub dla naprężenia Kirchhoffa  $\boldsymbol{\tau} = (\det \mathbf{E}) \boldsymbol{\sigma}$



$$(5.6) \quad \overset{\vee}{\tau} = \overset{\cdot}{\tau} - \mathcal{W}^e \tau + \tau \mathcal{W}^e - \mathcal{D}^e \tau - \tau \mathcal{D}^e,$$

gdzie spin  $\mathcal{W}^e$ , pochodzący od deformacji sprężystej i więzów geometrycznych nałożonych przez warunki brzegowe i warunki zgodności, jest określony zgodnie z (4.60)<sub>3</sub> jako  $\mathcal{W}^e = \mathcal{W} - \mathcal{W}^p$ . Wskazuje to na konieczność określenia równania dla spinu plastycznego przy zastosowaniu równań konstytutywnych typu prędkościowego do opisu deformacji sprężysto–plastycznej ciał ze strukturą wewnętrzną.

Zgodnie z dyskusją przeprowadzoną przez B. RANIECKIEGO i H.V. NGUYENA [1984], typowym zachowaniem dla metali jest, że sprężyste odkształcenia postaciowe pozostają małe dla dowolnych warunków obciążenia, podczas gdy mogą zachodzić znaczne zmiany dylatacji wtedy, kiedy ciało poddane jest dużemu ciśnieniu. Stosując wcześniejszy pomysł J.R. RICE'a [1975], który zauważył, że zastosowanie logarytmicznej miary odkształcenia sprężystego pozwala rozdzielić efekt zmian dylatacyjnych od odkształcenia postaciowego, autorzy ci wykazali, że tensor modułów sprężystych w opisie Eulera może być wyrażony równie prosto jak dla odkształceń infinitesimalnych jako odpowiednia pochodna energii swobodnej. Musi być przy tym spełniony warunek, że zastosujemy jako zmienną stanu logarytmiczną miarę odkształcenia sprężystego  $\varepsilon = \ln \mathbf{V}^e$  oraz że wartość stosunku rozciągnięć głównych symetrycznego tensora  $\mathbf{U}^e$ , pochodzącego z rozkładu polarnego  $\mathcal{E} = \mathbf{V}^e \mathbf{R}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{U}^e$ , należy do przedziału [5/6, 7/6]. W ten sposób, autorzy rozszerzyli wcześniejsze wyniki J.R. WILLISA [1969], [1975] otrzymane przy silniejszym założeniu, które mówi, że wielkość granicy plastyczności przy prostym ścinaniu jest dużo mniejsza od sprężystego modułu ścinania. W ten sposób B. RANIECKI i H.V. NGUYEN [1984] rozwinęli termomechaniczny model izotropowego ciała sprężysto–plastycznego dla małych postaciowych odkształceń sprężystych, lecz dowolnych sprężystych dylatacji. Model ten został następnie rozszerzony dla kinematycznego wzmocnienia w pracy autora (R.B. PĘCHERSKI [1988a]) oraz H.V. NGUYENA [1992]. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do założenia, że sprężyste odkształcenia postaciowe oraz zmiany dylatacyjne są infinitesimalne. Można wtedy otrzymać następujące aproksymacje, z dokładnością do  $O(|\varepsilon|^2)$ , gdzie  $\varepsilon$  jest dewiatorową częścią  $\varepsilon$  (por. B. RANIECKI i H.V. NGUYEN [1984] oraz H.V. NGUYEN [1992]):

$$(5.7) \quad \mathcal{D}^p = \mathbf{R}^e \{ \dot{\mathcal{P}} \mathcal{P}^{-1} \}_s \mathbf{R}^{eT}, \quad \mathcal{W}^p = \mathbf{R}^e \{ \dot{\mathcal{P}} \mathcal{P}^{-1} \}_a \mathbf{R}^{eT},$$

$$(5.8) \quad \overset{\circ}{\mathcal{D}}^e = \overset{\circ}{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \varepsilon \mathcal{W}^e - \mathcal{W}^e \varepsilon, \quad \mathcal{W}^e = \dot{\mathbf{R}}^e \mathbf{R}^{eT},$$

z równaniem sprężystości

$$(5.9) \quad \overset{\circ}{\tau} = \mathbf{C} : \mathcal{D}^e, \quad \mathbf{C} = \rho_k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon}, \quad \overset{\circ}{\tau} = \dot{\tau} - \mathcal{V}^e \tau + \tau \mathcal{V}^e$$

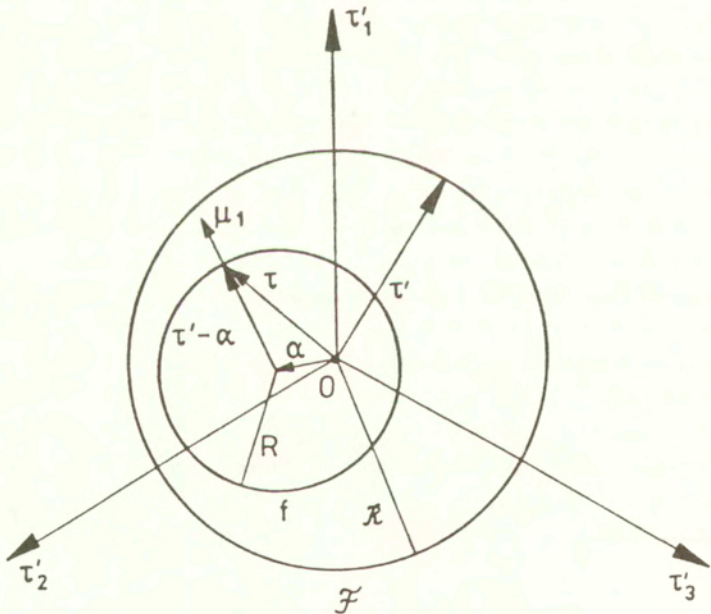
i tensorem modułów sprężystych  $\mathbf{C}$ .

### 5.1.2. Model płynięcia plastycznego z nieliniowym prawem kinematycznego wzmocnienia

Przyjmijmy model małych odkształceń sprężystych oraz skończonych deformacji plastycznych z parametrami wewnętrznymi

$$(5.10) \quad \hat{\mathbf{A}} = \{\hat{\alpha}, \hat{s}\}, \quad \mathbf{A} = \{\alpha, s\}, \quad \alpha = \mathbf{R}^e \hat{\alpha} \mathbf{R}^{eT}, \quad s = \hat{s},$$

które określone są odpowiednio na konfiguracji izoklinicznej i aktualnej.



Rys. 4. Ilustracja modelu z dwoma powierzchniami granicznymi na płaszczyźnie dewiatorowej.

Zmienna tensorowa  $\alpha$  jest odpowiedzialna za efekt kinematycznego wzmocnienia (przesunięcie środka śladu powierzchni plastyczności na płaszczyźnie dewiatorowej – rys. 4), natomiast zmienne skalarne  $s = \{\kappa, \mathcal{K}, \rho_{MS}^{(i)}\}$ ,  $i = 1, 2$ , reprezentują parametry izotropowego wzmocnienia  $\kappa$  i  $\mathcal{K}$  oraz makroskopową miarę gęstości mikropasm ścinania  $\rho_{MS}^{(i)}$  odpowiadającą "i"-temu systemowi ścinania.

Założymy, że kryterium Hubera–Misesa z efektem kinematycznego wzmocnienia aproksymuje wewnętrzną powierzchnię plastyczności  $f$  oraz przyjmiemy, że obowiązują następujące równania konstytutywne w punkcie obciążenia  $\tau'$  leżącym na granicy plastyczności:

$$(5.11) \quad f(\tau', \alpha, \kappa) = \frac{1}{2} (\tau' - \alpha) : (\tau' - \alpha) - \kappa^2 = 0,$$

$$(5.12) \quad D = D^e + D^p = (\mathbf{C}^{-1} + \frac{j}{2h} \mu_f \otimes \mu_f) : \tau, \quad \mu_f = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} (\tau' - \alpha),$$

$$(5.13) \quad \overset{\circ}{\alpha} = (\sqrt{2} c \mu_f - m \alpha) \dot{\gamma}, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \dot{\gamma} = (2D^p : D^p)^{1/2},$$

$$(5.14) \quad \dot{\kappa} = b(\kappa_s - \kappa) \dot{\gamma}_s, \quad \kappa(0) = \kappa_0,$$

gdzie  $\tau'$  jest dewiatorem naprężenia Kirchhoffa  $\tau$ , a  $\kappa_s$  jest stałą materiałową odpowiadającą wartości nasycenia parametru  $\kappa$ , podczas gdy  $b$  odpowiada stałej kontrolującej prędkość nasycenia wzmocnienia izotropowego. Parametr wewnętrzny  $\kappa$  określa "wymiar" powierzchni plastyczności (tzn.  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} R$ , gdzie  $R$  jest promieniem cylindra Hubera–Misesa, por. rys. 4). Moduł izotropowo–kinematycznego wzmocnienia  $h$  dany jest następująco:

$$(5.15) \quad h = h_i + h_a, \quad h_i = b(\kappa_s - \kappa), \quad h_a = c - \frac{1}{\sqrt{2}} m \mu_f : \alpha$$

Nieliniowe prawo kinematycznego wzmocnienia w postaci podanej w (5.13) zostało zaproponowane w ramach teorii małych odkształceń przez P.J. ARMSTRONGA i C.O. FREDERICKA [1966] i było stosowane w studiach nad cykliczną plastycznością (por. np. J.L. CHABOCHE [1986]). Stała materiałowa  $m$  związana jest z efektem



nasylenia wpływu naprężeń wewnętrznych, gdy skumulowane odkształcenia plastyczne wzrastają. Skalarny mnożnik  $j$  spełnia warunki  $j = 1$ , jeżeli  $\mu_f^{\circ} : \tau \geq 0$  oraz  $j = 0$ , jeżeli  $\mu_f^{\circ} < 0$ . Obiektywna pochodna tensora kinematycznego wzmocnienia  $\alpha$  zadana jest następująco:

$$(5.16) \quad \overset{\circ}{\alpha} = \dot{\alpha} - \mathbf{W}^e \alpha + \alpha \mathbf{W}^e, \quad \mathbf{W}^e = \mathbf{W} - \mathbf{W}^P.$$

Do określenia spinu  $\mathbf{W}^e$  potrzebne jest dodatkowe równanie konstytutywne dla spinu plastycznego  $\mathbf{W}^P$ . Równanie takie zostało wyprowadzone dla nieliniowego kinematycznego wzmocnienia w postaci (por. R.B. PĘCHERSKI [1995], [1998a]):

$$(5.17) \quad \mathbf{W}^P = \frac{3}{(c^2 + \sqrt{3} \bar{\alpha} c)^{\frac{1}{2}}} (\alpha \mathbf{D}^P - \mathbf{D}^P \alpha), \quad \bar{\alpha} = \left(\frac{1}{2} \alpha : \alpha\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zagadnienie spinu plastycznego ma bogatą literaturę. Szczegółowe studia na temat właściwego określenia równania dla spinu plastycznego w modelu plastyczności z prawem kinematycznego wzmocnienia (5.13), które obejmuje szczególną zależność dla  $m = 0$  znaną jako prawo Pragera-Zieglera, przeprowadzono we wspólnych pracach autora z J.E. PAULUNEM (J.E. PAULUN i R.B. PĘCHERSKI [1985], [1987], [1992a] [1992b]) oraz w publikacjach autora (R.B. PĘCHERSKI [1988a], [1988b]), gdzie można znaleźć także obszerne dane bibliograficzne. Dla zachowania zwięzłości wywodu, uzyskane w tych pracach rezultaty nie będą tu przedstawiane. Warto jedynie wspomnieć, że w pracy J.E. PAULUNA i R.B. PĘCHERSKIEGO [1992a] dokonano weryfikacji doświadczalnej proponowanego równania dla spinu plastycznego, porównując rozwiązanie problemu swobodnego skręcania cienkościennej rurki, w postaci zależności osiowego wydłużenia od plastycznego odkształcenia postaciowego, z wynikami doświadczalnymi M. STOUTA dla polikrystalicznej miedzi, cytowanymi w pracy S. HARRENA [1989], oraz z rozwiązaniami tego samego problemu pochodzącymi od innych autorów: C. FRESSENGEAS i A. MOLINARI [1983] dla  $m \neq 0$  oraz S. HARREN et al. [1989] dla agregatu polikrystalicznego i fenomenologicznego modelu plastyczności z narożem plastycznym. Zmianę długości rurki, skręcanej w zakresie plastycznym do dużych odkształceń postaciowych, zaobserwował dla różnych metali H.W. SWIFT [1947]. Stąd często używa się w literaturze nazwy – efekt Swifta. Zagadnieniem określenia odpowiedniego równania dla spinu plastycznego w fenomenologicznym opisie deformacji plastycznej z anizotropią indukowaną odkształceniem zajmowało się wielu autorów (por. np. Y.F. DAFALIAS [1983],

B. LORET [1983], B. RANIECKI i Z. MRÓZ [1990] jak również E. VAN DER GIESSEN [1991], [1992] oraz J.F. BESSELING i E. VAN DER GIESSEN [1994]). Szersze omówienie tego zagadnienia można znaleźć również w pracy autora (R.B. PĘCHERSKI [1996a]). Analizą wpływu efektów anizotropii oraz spinu plastycznego na lokalizację zajmowali się M.K. DUSZEK-PERZYNA i P. PERZYNA [1997], natomiast zagadnieniom spinu plastycznego w bardziej ogólnym kontekście termodynamiki materiałów poświęcona jest praca P. DŁUŻEWSKIEGO i P. PERZYNY [1998].

## 5.2. Równania konstytutywne modelu plastycznego płynięcia z efektami mikropasm ścinania

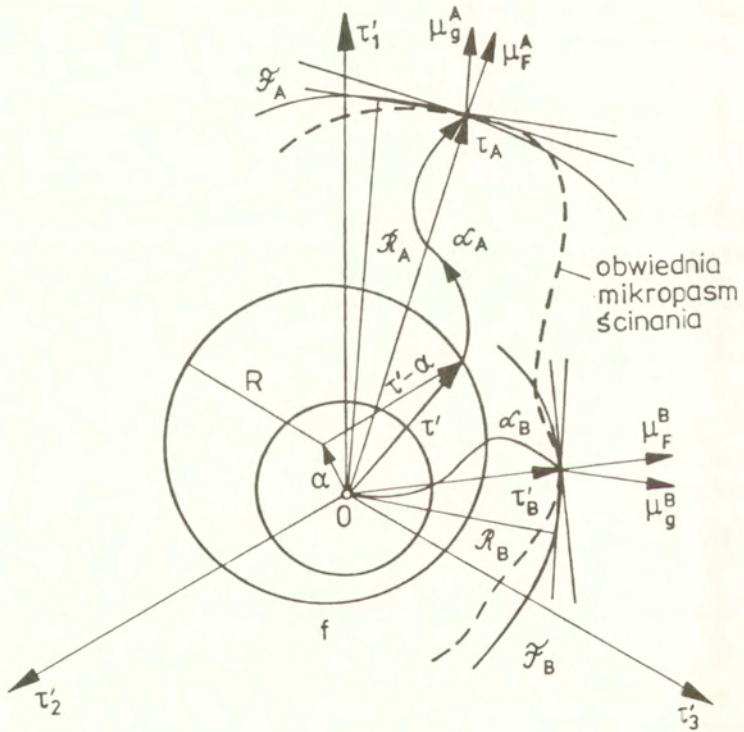
### 5.2.1. Zastosowanie modelu z dwoma powierzchniami granicznymi do aproksymacji obwiedni mikropasm ścinania

Zauważmy, że zastosowanie nieliniowego prawa wzmocnienia (5.13)<sub>1</sub> prowadzi do drugiej, zewnętrznej, powierzchni granicznej oznaczonej na rys. 4 przez  $\mathcal{F}$ . Stacjonarność  $\alpha$ , tzn. kiedy  $\dot{\alpha} = 0$ , implikuje bowiem równanie określające ślad powierzchni granicznej na płaszczyźnie dewiatorowej (rys. 4):

$$(5.18) \quad \mathcal{F}(\tau', \kappa) = \frac{1}{2} (\tau' : \tau') - \kappa^2 = 0, \quad \kappa = \kappa(\Gamma_{MS}) + \frac{c}{m},$$

gdzie  $\kappa$  określa "wymiar" powierzchni granicznej (tzn.  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{R}$ , gdzie  $\mathcal{R}$  jest promieniem cylindra odpowiadającego powierzchni zewnętrznej, por. rys. 4). Zgodnie ze spostrzeżeniem  $S1.$ , sformułowanym w p. 2.2.1, parametr  $\kappa$  jest w korelacji z masowym rozwojem mikropasm ścinania, który następuje po osiągnięciu pewnej wartości odkształcenia plastycznego  $\bar{\gamma}_S = \Gamma_{MS}$  skumulowanego wzdłuż zadanej drogi odkształcenia. Zakładając, że wewnętrzne mikronapężenia mogą być reprezentowane na makroskopowym poziomie przez tensor  $\alpha$ , możemy określić stałą materiałową  $m$ , która łączy efekt nasycenia wpływu wewnętrznych mikronapężeń z rozwojem mikropasm ścinania. Otrzymana w ten sposób powierzchnia graniczna  $\mathcal{F}$  o promieniu  $\mathcal{R}$  styka się w punkcie obciążenia z *obwiednią mikropasm ścinania*. Wyniki obserwacji doświadczalnych wykazują, że inicjacja mikropasm ścinania silnie zależy od zmiany schematu obciążenia i wynikającej stąd drogi odkształcenia (por. A. KORBEL [1990a], [1992a] oraz

A. KORBEL i W. BOCHNIAK [1995]). Dlatego należałoby rozważyć rodzinę zewnętrznych powierzchni granicznych określonych dla różnych historii obciążenia. Pokazuje to rys. 5, gdzie powierzchnie graniczne  $\mathcal{F}_A$  i  $\mathcal{F}_B$  stykają się z obwiednią mikropasm ścinania. Zaznaczono na nim również ślady styčných: do powierzchni granicznych  $\mathcal{F}_A$  i  $\mathcal{F}_B$ , z odpowiadającymi wektorami normalnymi  $\mu_F^A$  i  $\mu_F^B$ , oraz do obwiedni mikropasm ścinania, z wektorami normalnymi  $\mu_g^A$  i  $\mu_g^B$ . Punkty kontaktu odpowiadają stanom naprężenia  $\tau'_A$



Rys. 5. Ilustracja aproksymacji obwiedni mikropasm ścinania przy pomocy zewnętrznych powierzchni granicznych na płaszczyźnie dewiatorowej.



i  $\tau_B'$ , które zostały osiągnięte na różnych drogach obciążenia  $\mathcal{L}_A$  i  $\mathcal{L}_B$ . Aby więc określić rodzinę zewnętrznych powierzchni granicznych, które mogłyby lokalnie aproksymować *obwiednię mikropasm ścinania*, powinny być znane funkcjonały  $\Gamma_{MS} = G(\mathcal{L})$  i  $m = M(\mathcal{L})$ . Należy opracować program systematycznych badań doświadczalnych, aby uzyskać dokładniejsze informacje, jak zmieniają się wielkości  $\Gamma_{MS}$  i  $m$  dla różnych dróg obciążenia. Dla uproszczenia proponujemy następujące równanie ewolucji dla parametru  $\mathcal{K}$ :

$$(5.19) \quad \dot{\mathcal{K}} = B(\mathcal{K}_s - \mathcal{K})\dot{\gamma}_S, \quad \mathcal{K}(0) = \kappa(\Gamma_{MS}) + \frac{c}{m},$$

gdzie  $\mathcal{K}_s$  jest stałą materiałową odpowiadającą nasyceniu parametru  $\mathcal{K}$ , a  $B$  jest stałą kontrolującą prędkość procesu nasycenia. Wielkości te zależą w ogólności od zmiany drogi obciążenia. Określenie tej zależności wymaga dalszych badań doświadczalnych. Przede wszystkim należałoby zweryfikować upraszczającą hipotezę, która mówi, że jeżeli wyznaczmy stałe materiałowe dla zadanej drogi obciążenia  $\mathcal{L}_0$ , to mogą być one stosowane, przynajmniej w pewnym przybliżeniu, również dla tych dróg obciążenia, które są zawarte w odpowiednio zdefiniowanym otoczeniu  $\mathcal{L}_0$ . Dyskusja na temat doświadczalnej weryfikacji nieliniowych związków plastyczności, przeprowadzona przez V.D. KLYUSHNIKOVA [1994], może okazać się pomocna w rozwinięciu tego zagadnienia. Należy dodać, że powyższe rozważania obowiązują przy założeniu, że  $m \neq 0$ . W granicznym wypadku, dla którego  $m = 0$  – co odpowiada modelowi Pragera–Zieglera, promień zewnętrznej powierzchni granicznej  $\mathcal{F}$  zmierzałby do nieskończoności, co znaczyłoby, że następuje jedynie akumulacja efektu wewnętrznych mikronaprężeń, która blokuje uruchomienie mechanizmu powstawania mikropasm ścinania. Jest to mało realistyczne. Zauważmy ponadto, że naprężenie  $\tau'$ , osiągając zewnętrzną powierzchnię graniczną staje się współosiowe z tensorem  $\alpha$ , co implikuje zgodnie z (5.17), że zachodzi  $\mathbf{W}^P = 0$ .

### 5.2.2. Hipoteza o efekcie naroża plastycznego

Zgodnie z wynikami badań S.B. BATDORFA i B. BUDIANSKIEGO [1949], B. BUDIANSKIEGO [1959], W.T. KOITERA [1953], J.L. SANDERSA [1954] oraz R. HILLA [1967], które dotyczyły podstawowych cech struktury równań konstytutywnych dla polikryształów metali, jak również według podstaw teorii plastyczności z narożem

plastycznym u V.D. KLYUSHNIKOVA [1959], [1979], [1980], [1994], M.J. SEWELLA [1974], J. CHRISTOFFERSENA i J.W. HUTCHINSONA [1979], M. GOTOHA [1985] oraz H. PETRYKA [1989] i H. PETRYKA z K. THERMANNEM [1997], makroskopowe równania konstytutywne opisujące sprężysto–plastyczną deformację polikryształów mogą mieć postać quasiliniowych lub nieliniowych związków między prędkością (przyrostem) naprężenia i prędkością (przyrostem) odkształcenia. Zależnie od kierunku przyrostu obciążenia i wynikającego stąd stopnia aktywacji mechanizmów kontrolujących plastyczne płynięcie, możemy wydzielić w przestrzeni naprężeń obszar pełnej aktywności (całkowitego obciążenia), który jest oddzielony od obszaru sprężystego przez strefę częściowej aktywności (częściowego obciążenia). Zagadnienie to było analizowane w pracach autora (R.B. PĘCHERSKI [1992a], [1993a], [1994], [1998a]) w kontekście opisu efektów mikropasm ścinania i krystalograficznych poślizgów plastycznych. Jednym z rezultatów tej analizy było sformułowanie następującej hipotezy o efekcie naroża plastycznego.

### *Hipoteza H3.*

*W razie kontynuowania płynięcia plastycznego, dla przyrostów obciążenia z zakresu ograniczonego do wnętrza obszaru pełnej aktywności, przyrostowa reakcja plastyczna jest quasiliniowa, a zmiana kierunku obciążenia w tym obszarze nie powoduje zmiany przestrzennej organizacji mikropasm ścinania. Przestrzenna organizacja mikropasm ścinania ulega natomiast zmianie przy zmianie kierunku obciążenia w strefie przejściowej, tzn. w obszarze częściowej aktywności. Prowadzi to do nieliniowego związku między prędkością odkształcenia plastycznego i prędkością naprężenia w tym obszarze.*

Należy dodać, że przez termin "quasiliniowy" rozumiemy tu proporcjonalną zależność między prędkościami (przyrostami) naprężenia i odkształcenia. Związek ten nie jest jednak relacją liniową, gdyż w ogólności nie zachodzi addytywność, np. w razie obciążenia i następującego po nim odciążenia.

### 5.2.3. Postulat o niestowarzyszonych potencjałach plastycznych

Wyspecyfikowanie równania konstytutywnego wiążącego przyrost odkształcenia plastycznego z przyrostem obciążenia wymaga określenia związku, jaki zachodzi między obszarami pełnej i częściowej aktywności, a przestrzenną organizacją mikropasm ścinania. Bardzo przydatna okazuje się tu teoria niestowarzyszonej plastyczności z wieloma powierzchniami potencjalnymi, które tworzą naroże na gładkiej powierzchni płynięcia (w świetle dyskusji w p. 2.3.4 – na obwiedni stanów plastycznych), która została zaproponowana przez Z. MROZA [1963]. Analiza procesu płynięcia z mikro-



paszami ścinania prowadzi do następującego postulatu o niestowarzyszonych potencjałach plastycznych (R.B. PĘCHERSKI [1992a], [1998a]).

Zakłada się istnienie następujących potencjałów plastycznych:

- (i) potencjału plastycznego  $g_0$ , który reprezentuje na makroskopowym poziomie efekt działania łatwych poślizgów krystalograficznych i jest stowarzyszony z powierzchnią płynięcia Hubera–Misesa  $g_0 = \mathcal{F}$ .
- (ii) niestowarzyszonych potencjałów plastycznych  $g_1$  i  $g_2$ , które aproksymują w makroskopowej skali wielość funkcji potencjałów plastycznych związanych z poszczególnymi klasterami aktywnych mikropasm ścinania.

Funkcje potencjałów plastycznych  $g_1$  i  $g_2$  odzwierciedlają geometrię rozważanych systemów mikropasm ścinania i dają w efekcie dwie płaszczyzny w przestrzeni naprężeń głównych  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , które tworzą naroże w punkcie obciążenia na gładkiej powierzchni cylindra Hubera–Misesa  $\mathcal{F}$ . Płaszczyzny te zdefiniowane są przez normalne  $\mathbf{N}_i$ ,  $i = 1, 2$ , które można wyrazić przez wektory jednostkowe  $\mathbf{s}^{(i)}$ ,  $\mathbf{n}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , definiujące "i"-ty system (klaster) mikropasm ścinania

$$(5.20) \quad \mathbf{N}_i = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{s}^{(i)} \otimes \mathbf{n}^{(i)} + \mathbf{n}^{(i)} \otimes \mathbf{s}^{(i)}).$$

Rzut powierzchni Hubera–Misesa oraz płaszczyzn potencjałów plastycznych na płaszczyznę dewiatorową przedstawiono na rys. 6.

#### 5.2.4. Wyprowadzenie prawa plastycznego płynięcia z efektami mikropasm ścinania

Wektory normalne  $\mathbf{N}_i$ ,  $i = 1, 2$ , mogą być wyrażone w przestrzeni naprężeń przez jednostkowy wektor normalny  $\mu_F$  oraz jednostkowy wektor styczny  $\mathbf{T}$  do powierzchni granicznej  $\mathcal{F}(\tau', \mathcal{K})$  w punkcie obciążenia  $\tau'$  (rys. 6)

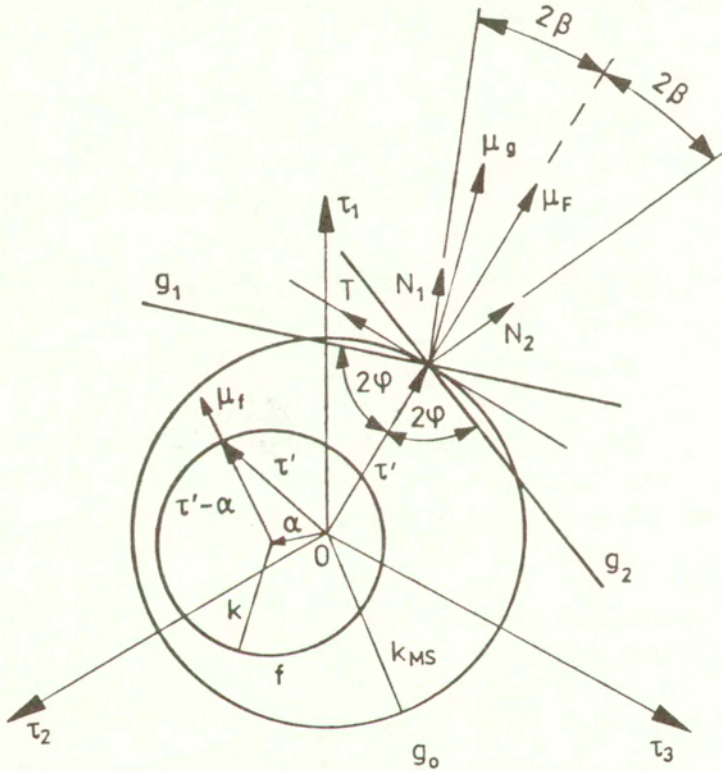
$$(5.21) \quad \mathbf{N}_1 = \cos 2\beta \mu_F + \sin 2\beta \mathbf{T}, \quad \mathbf{N}_2 = \cos 2\beta \mu_F - \sin 2\beta \mathbf{T},$$

gdzie  $\mu_F = \frac{1}{\sqrt{2}\mathcal{K}} \tau'$ . Zauważmy, że tensor  $\mathbf{T}$  można również wyrazić następująco:



$$(5.22) \quad \mathbf{T} = \mathcal{N} \bar{\tau} \left( \frac{\tau'}{\bar{\tau}} \right) = \mathcal{N} [\tau' - (\tau' : \mu_F) \mu_F], \quad \bar{\tau} = \left( \frac{1}{2} \tau' : \tau' \right)^{\frac{1}{2}},$$

gdzie dla cylindra Hubera–Misesa  $\mathcal{F}(\tau', \kappa)$  zachodzi  $\tau' : \mu_F = \tau : \mu_F$ , a  $\mathcal{N}$  jest czynnikiem normalizującym



Rys. 6. Rzut powierzchni granicznej Hubera–Misesa oraz płaszczyzn potencjałów plastycznych na płaszczyznę dewiatorową. Kąt  $\beta$  wyznacza stożek plastyczny.

$$(5.23) \quad M = \|\overset{\circ}{\tau}' - (\overset{\circ}{\tau}':\mu_F)\mu_F\|^{-1},$$

który zgodnie z

$$(5.24) \quad \|\overset{\circ}{\tau}' - (\overset{\circ}{\tau}':\mu_F)\mu_F\|^2 = \overset{\circ}{\tau}':\overset{\circ}{\tau}' - (\overset{\circ}{\tau}':\mu_F)^2, \quad \overset{\circ}{\tau}':\mu_F = \|\overset{\circ}{\tau}'\|\cos\delta$$

jest dany przez  $M = (\|\overset{\circ}{\tau}'\|\sin\delta)^{-1}$ . Na podstawie (4.54) i (4.61), relacja dla prędkości odkształcenia plastycznego przyjmie postać

$$(5.25) \quad \mathcal{D}^P = D^P + \sum_{i=1}^2 \dot{\gamma}_{MS}^{(i)} s^{(i)} \otimes n^{(i)}.$$

Zgodnie z postulatem o potencjalach plastycznych przyjmujemy, że prędkość deformacji plastycznej  $D^P$ , kontrolowanej przez krystalograficzne poślizgi, jest wyrażona według klasycznej teorii plastyczności ze stowarzyszonym prawem płynięcia (typu  $J_2$ )

$$(5.26) \quad D^P = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma} \mu_F, \quad \dot{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\overset{\circ}{\tau}':\mu_F}{h}.$$

Uwzględnienie (5.22) oraz (5.26) prowadzi do

$$(5.27) \quad \mathcal{D}^P = \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\gamma}^* \mu_F + \frac{\sqrt{2}}{2} \dot{\epsilon}_{MS} T,$$

gdzie

$$(5.28) \quad \dot{\gamma}^* = \dot{\gamma} + \dot{\gamma}_{MS}, \quad \dot{\gamma}_{MS} = \cos 2\beta(\dot{\gamma}_{MS}^{(1)} - \dot{\gamma}_{MS}^{(2)}), \quad \dot{\epsilon}_{MS} = \sin 2\beta(\dot{\gamma}_{MS}^{(1)} + \dot{\gamma}_{MS}^{(2)}).$$

Zilustrowano to na rys. 6 pokazującym stożek plastyczny, w którym zawarte są wszystkie możliwe wektory reprezentujące na płaszczyźnie dewiatorowej deformację plastyczną  $\mathcal{D}^P$ . Zauważmy, że tylko składowa normalna  $\mathcal{D}^P$  ma swój udział w zmianie promienia powierzchni granicznej  $\mathcal{F}(\tau, \kappa)$ , co przy uwzględnieniu warunku zgodności,  $\dot{\mathcal{F}} = 0$ , daje:

$$(5.29) \quad \dot{\gamma}^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sigma_T \cdot \mu_F}{H}, \quad H = B(\mathcal{K}_s - \mathcal{K}),$$

gdzie  $H$  jest modulem plastycznym wyznaczonym w procesie kontrolowanym przez rozwój mikropasm ścinania.

Wprowadzimy następujące udziały mikropasm ścinania,  $f_{MS}^{(1)}$ ,  $f_{MS}^{(2)}$ , w prędkości odkształcenia postaciowego  $\dot{\gamma}^*$ :

$$(5.30) \quad \dot{\gamma}_{MS}^{(1)} \cos 2\beta = f_{MS}^{(1)} \dot{\gamma}^*, \quad -\dot{\gamma}_{MS}^{(2)} \cos 2\beta = f_{MS}^{(2)} \dot{\gamma}^*,$$

dla których, zgodnie z (5.28)<sub>1</sub> oraz przy  $\dot{\gamma}^* > 0$ , zachodzą następujące ograniczenia

$$(5.31) \quad \frac{\dot{\gamma}_S}{\dot{\gamma}} + f_{MS}^{(1)} + f_{MS}^{(2)} = 1, \quad f_{MS}^{(1)} + f_{MS}^{(2)} \in [0, 1], \quad f_{MS}^{(1)}, f_{MS}^{(2)} \in [0, 1].$$

Opierając się na obserwacji, że mikropasma ścinania mogą być aktywne tylko w procesie płynięcia plastycznego, założymy, że dla  $\dot{\gamma}^* = 0$  zachodzi  $f_{MS}^{(1)} = f_{MS}^{(2)} = 0$ .

Wszystkie szczególne sytuacje, wynikające z warunków (5.31), były analizowane w pracy (R.B. PĘCHERSKI [1992a]). Wprowadzone udziały  $f_{MS}^{(1)}$ ,  $f_{MS}^{(2)}$  zmieniają się w czasie procesu deformacji plastycznej. Ich ewolucja może być opisana w ramach teorii materiałów niesprężystych z parametrami wewnętrznymi. W szczególności, uwzględnienie (4.52)<sub>1</sub> oraz (5.28) pozwala powiązać  $f_{MS}^{(i)}$  z odpowiednimi gęstościami mikropasm ścinania  $\rho_{MS}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ . Makroskopowa miara gęstości mikropasm ścinania  $\rho_{MS}^{(i)}$  operujących w "i"-tym systemie może być rozważana jako parametr wewnętrzny z ogólnym równaniem ewolucji

$$(5.32) \quad \dot{\rho}_{MS}^{(i)} = \Gamma^{(i)}(\tau, \kappa, \mathcal{K}, \alpha, \rho_{MS}^{(i)}) \dot{\gamma}^*, \quad \rho_{MS}^{(i)}(0) = \rho_o^{(i)},$$

co daje

$$(5.33) \quad f_{MS}^{(i)} = B \underset{ms}{L} \underset{ms}{\Gamma}^{(i)}(\tau, \kappa, \mathcal{K}, \alpha, \rho_{MS}^{(i)}).$$

Otrzymujemy w ten sposób interpretację powiązania fenomenologicznego opisu



makroskopowych udziałów efektu mikropasm ścinania w prędkości postaciowego odkształcenia plastycznego z modelem wielopoziomowej hierarchii pasm ścinania sformułowanym w rozdziale 3. Stwarza to perspektywę uogólnienia prezentowanego opisu konstytutywnego i sformułowania go w ramach termodynamicznej teorii materiałów niesprężystych z parametrami wewnętrznymi. Nietrywialnym i otwartym problemem pozostaje wtedy jednak zagadnienie uwzględnienia efektu lokalnych mikroskopowych niestabilności związanych z powstawaniem mikropasm ścinania, jak również analiza ich wpływu na dyssypację wewnętrzną. Wymagałoby to, zdaniem autora, nowego podejścia do termodynamiki materiałów niesprężystych, tak aby uwzględnić procesy dalekie od stanu równowagi. Podobne trudności, związane z termodynamicznym opisem plastycznego odkształcenia w ciałach krystalicznych, zostały zauważone w pracy H. PETRYKA [1995], gdzie zaproponowano, między innymi, uśrednianie mikroskopowych zmiennych wewnętrznych nie tylko po reprezentatywnym elemencie objętości, ale również po reprezentatywnym przedziale czasu. W naszych rozważaniach, podobnie uśrednionym parametrem wewnętrznym jest makroskopowa miara gęstości mikropasm ścinania  $\rho_{MS}^{(i)}$ . Następnym otwartym problemem, który wymaga dalszych studiów jest właściwa specyfikacja równania ewolucji (5.32). Omawiane wcześniej wyniki obserwacji doświadczalnych sugerują, zgodnie ze spostrzeżeniem S5, że mechanizm mikropasm ścinania może uczestniczyć w prędkości odkształcenia plastycznego jako sekwencja kolejnych generacji aktywnych mikropasm ścinania. Sugestię zastosowania logistycznego prawa wzrostu, które znane jest w dynamice populacji, do opisu ewolucji udziału mikropasm ścinania w procesie płynięcia plastycznego można znaleźć w pracy autora (R.B. PĘCHERSKI [1992b]).

Zgodnie z (5.22) i (5.25–5.28), równanie dla prędkości deformacji plastycznej może być wyrażona oddzielnie dla zakresu częściowej aktywności, tj. dla  $\delta \in (\delta_c, \frac{\pi}{2}]$  (rys. 7):

$$(5.34) \quad \mathcal{D}^P = \frac{\overset{\circ}{\tau} : \mu_F}{2H \mu_F} + \frac{\overset{\circ}{\tau} : \mu_F (f_{MS}^{(1)} - f_{MS}^{(2)}) \tan 2\beta}{\overset{\circ}{\|\tau'\|} \sin \delta} [\overset{\circ}{\tau}' - (\overset{\circ}{\tau} : \mu_F) \mu_F],$$

oraz dla zakresu pełnej aktywności, tj. dla  $\delta \in [0, \delta_c]$  (rys. 7):

$$(5.35) \quad \mathcal{D}^P = \frac{1}{2H} (\overset{\circ}{\tau} : \mu_F) \mu_F + \frac{1}{2H} \overset{\circ}{\tau}' - (\overset{\circ}{\tau} : \mu_F) \mu_F,$$

gdzie

$$(5.36) \quad \frac{1}{2H_1} = \frac{1}{2H} (f_{MS}^{(1)} - f_{MS}^{(2)}) \frac{\tan 2\beta}{\tan \delta_c}, \quad \delta = \cos^{-1} \left( \frac{\tau \cdot \mu_F}{\|\tau\|} \right).$$

Zauważmy, że drugi składnik w (5.35) jest odpowiedzialny za niewspółosiowość kierunków głównych tensora naprężenia oraz tensora prędkości odkształcenia plastycznego, a moduł plastyczny  $H_1$  odgrywa rolę modułu niewspółosiowości, który jest formalnie podobny do modułu Mandela–Spencera, który był wprowadzony wcześniej przez S. NEMAT–NASSERA [1986] i B. LORET [1986] w kontekście deformacji plastycznej kryształów oraz materiałów geologicznych. Problem ten był dyskutowany szerzej w pracy autora (R.B. PĘCHERSKI [1992a]). W pracy tej wyprowadzono również relację dla spinu plastycznego indukowanego przez aktywne mikropasma ścinania

$$(5.37) \quad \mathcal{V}^P = \frac{1}{2 \bar{\tau} \sin 2\beta} (\mathcal{D}^P \tau - \tau \mathcal{D}^P),$$

lub równoważnie, zgodnie z (5.35),

$$(5.38) \quad \mathcal{V}^P = \frac{(f_{MS}^{(1)} - f_{MS}^{(2)}) \chi(\delta)}{4 \bar{\tau} H \cos 2\beta} \begin{matrix} \circ & \circ \\ \tau \tau - \tau \tau \end{matrix}, \quad \chi(\delta) = \begin{cases} \tan \delta, & \delta \in (\delta_c, \frac{\pi}{2}] \\ \tan \delta_c, & \delta \in [0, \delta_c] \end{cases}.$$

Zauważmy, że  $\mathcal{V}^P = 0$  dla warunków proporcjonalnego obciążenia, lub gdy  $f_{MS}^{(1)} = f_{MS}^{(2)}$ . W obu wypadkach, efekt mikropasm ścinania,  $f_{MS}^{sym} = f_{MS}^{(1)} = f_{MS}^{(2)} \neq 0$ , występuje jedynie w składowej normalnej prędkości deformacji plastycznej  $\dot{\gamma}^*$  i jest ukryty, zgodnie z (5.22), w module plastycznym  $H$ . Biorąc pod uwagę (5.26), (5.28) i (5.30), możemy wyznaczyć zależność modułu  $H$  od  $f_{MS}^{sym}$

$$(5.39) \quad H = (1 - f_{MS}^{sym}) h, \quad f_{MS}^{sym} \in [0, 1).$$

Moduł plastyczny  $h$  należy wyznaczyć z charakterystyki materiału uzyskanej w niezależnej próbie, w której mechanizmem kontrolującym odkształcenie plastyczne jest krystalograficzny poślizg. Może to być na przykład test prostego rozciągania lub ściskania. (Nie można wykluczyć, że w takiej próbie wystąpią również mikropasma ścinania, zwłaszcza dla bardzo dużych wartości odkształcenia, niemniej jednak, jak pokazują liczne wyniki badań doświadczalnych, decydujące znaczenie będą odgrywały wtedy poślizgi w tzw. łatwych systemach krystalograficznych). Osobnego potraktowa-

nia wymaga graniczny warunek  $f_{MS}^{sym} = 1$ , dla którego  $H = 0$ . Odpowiada to sytuacji, w której odkształcenie plastyczne byłoby całkowicie kontrolowane przez mikropasma ścinania. Fizycznie taki proces jest nierealny, jednak uproszczony opis zachowania się materiału z zastosowaniem modelu idealnie plastycznego może być bardzo przydatny dla analizy wielu praktycznych problemów kształtowania metali.

Warto rozważyć również sytuację, kiedy działa tylko jeden system ścinania,  $f_{MS} = f_{MS}^{(1)}$ ,  $f_{MS}^{(2)} = 0$ ,  $f_{MS} \in [0, 1]$ . Zgodnie z powyższą dyskusją, równania dla prędkości odkształcenia plastycznego przyjmą wtedy, dla zakresu częściowej aktywności, tj. dla  $\delta \in (\delta_c, \frac{\pi}{2}]$  (rys. 7), następującą postać:

$$(5.40) \quad \mathcal{D}^P = \frac{\overset{\circ}{\tau} \cdot \mu_F}{2h(1-f_{MS})} \mu_F + \frac{\overset{\circ}{\tau} \cdot \mu_F}{2h(1-f_{MS})} \frac{f_{MS} \tan 2\beta}{\|\tau'\| \sin \delta} [\overset{\circ}{\tau}' - (\overset{\circ}{\tau} \cdot \mu_F) \mu_F],$$

oraz dla zakresu pełnej aktywności, tj. dla  $\delta \in [0, \delta_c]$  (rys. 7):

$$(5.41) \quad \mathcal{D}^P = \frac{\overset{\circ}{\tau} \cdot \mu_F}{2h(1-f_{MS})} \mu_F + \frac{1}{2H_1} [\overset{\circ}{\tau}' - (\overset{\circ}{\tau} \cdot \mu_F) \mu_F],$$

gdzie

$$(5.42) \quad \frac{1}{2H_1} = \frac{f_{MS} \tan 2\beta}{2h(1-f_{MS}) \tan \delta_c}, \quad \delta = \cos^{-1} \left( \frac{\overset{\circ}{\tau} \cdot \mu_F}{\|\tau\|} \right).$$

Równanie dla spinu plastycznego przyjmie wtedy postać:

$$(5.43) \quad \mathcal{W}^P = \frac{f_{MS} \chi(\delta)}{4 \overset{\circ}{\tau} h(1-f_{MS}) \cos 2\beta} (\overset{\circ}{\tau} \overset{\circ}{\tau} - \overset{\circ}{\tau} \overset{\circ}{\tau}), \quad \chi(\delta) = \begin{cases} \tan \delta, & \delta \in (\delta_c, \frac{\pi}{2}] \\ \tan \delta_c, & \delta \in [0, \delta_c] \end{cases}$$

Dla procesów proporcjonalnego obciążenia, prawo plastycznego płynięcia sprowadza się do prostej postaci stowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego



$$(5.44) \quad \mathcal{D}^p = \frac{\overset{\circ}{\tau} \cdot \mu_F}{2h(1-f_{MS})} \mu_F.$$

Podobne równanie będzie zastosowane do numerycznego rozwiązania problemu, który dotyczy nieswobodnego ściskania w próbie kanalikowej, rozważanego w następnym rozdziale. Równanie (5.44) różni się jedynie tym od znanego z literatury stowarzyszonego prawa płynięcia typu  $J_2$ , że w mianowniku występuje parametr  $f_{MS}$  odpowiedzialny za udział mikropasm ścinania. Problem wyznaczenia tego parametru jest omawiany w następnym rozdziale.

### 5.2.5. Niestowarzyszone prawo płynięcia indukowane przez mikropasma ścinania

W warunkach kiedy przyłożone naprężenie  $\tau$  osiąga powierzchnię graniczną  $\mathcal{F}(\tau, \kappa)$ , która, jak pokazano na rys. 7, aproksymuje lokalnie ogólną *obwiednię mikropasm ścinania*, prędkościowe równanie konstytutywne można zapisać w postaci następującego niestowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego:

$$(5.45) \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^e + \mathcal{D}^p = \left( \mathbf{C}^{-1} + \frac{i}{2H} \mu_g \otimes \mu_F \right) : \tau,$$

gdzie

$$(5.46) \mu_g = \begin{cases} (1 - \Delta f_{MS} \tan 2\beta \cot \delta) \mu_F + \frac{\Delta f_{MS} \tan 2\beta}{\sin \delta} \rho, & \delta \in (\delta_c, \frac{\pi}{2}] \\ (1 - \Delta f_{MS} \tan 2\beta \cot \delta_c) \mu_F + \frac{\Delta f_{MS} \tan 2\beta}{\sin \delta_c} \rho_c, & \delta \in [0, \delta_c] \end{cases}, \quad \rho = \frac{\overset{\circ}{\tau}}{\|\tau\|},$$

gdzie  $i = 1$  jeżeli  $\mu_F : \overset{\circ}{\tau} \geq 0$  oraz  $i = 0$  jeżeli  $\mu_F : \overset{\circ}{\tau} < 0$ , podczas gdy  $\rho_c$  jest takie, że  $\arccos(\rho_c : \mu_F) = \delta_c$ . Zauważmy, że równanie (5.46) w zakresie pełnej aktywności, tj. dla  $\delta \in [0, \delta_c]$ , jest liniowe względem prędkości naprężenia  $\overset{\circ}{\tau}$ . W takim razie istnieje zależność odwrotna

$$(5.47) \quad \overset{\circ}{\tau} = \left( \mathbf{C} - \frac{i_1 \mu_g \otimes \lambda_F}{2H + \mu_g : \lambda_F} \right) : \mathcal{D},$$

gdzie  $i_1 = 1$  jeżeli  $\lambda_F : \mathcal{D} \geq 0$  oraz  $i_1 = 0$  jeżeli  $\lambda_F : \mathcal{D} < 0$ ,  $\lambda_F = \mathbf{C} : \mu_F$ .

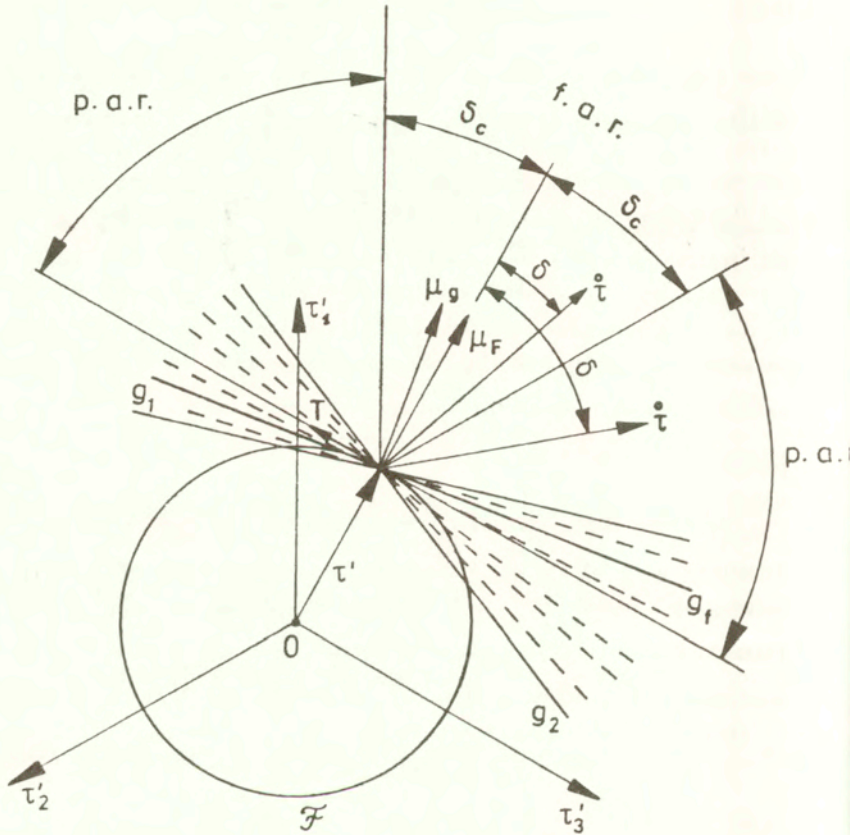
W zakresie częściowej aktywności, tj. dla  $\delta \in (\delta_c, \frac{\pi}{2}]$ , równanie konstytutywne (4.36)

jest nieliniowe ze względu na prędkość naprężenia  $\overset{\circ}{\tau}$ . Symbol  $\Delta f_{MS} = f_{MS}^{(1)} - f_{MS}^{(2)}$  oznacza wypadkowy udział aktywnych mikropasm ścinania w procesie płynięcia plastycznego. Należy tu się odwołać do dyskusji w p. 4.2.2 na temat znaczenia reprezentatywnego przedziału czasu  $\Delta t$  określającego skalę zmiennej "czasopodobnej"  $t$ , dla której założenie jednoczesności działania dwóch systemów ścinania, a zatem i parametr  $\Delta f_{MS}$ , mają sens. Zgodnie z (3.10), prowadzi to w sposób naturalny do określenia liniowego parametru skali, proporcjonalnego do  $L_{MS}$ , który jest charakterystyczny dla omawianego modelu plastyczności z efektem mikropasm ścinania.

Zgodnie z (5.46), normalna  $\mu_g$  definiuje wypadkową powierzchnię potencjalną  $g_f$ . zilustrowano to na rys. 7, gdzie przedstawiono wachlarz możliwych powierzchni potencjalnych określonych dla różnych wartości parametru  $\Delta f_{MS}$ . Udział  $\Delta f_{MS}$  jest parametrem kontrolującym niestowarzyszone prawo płynięcia. Jeżeli  $\Delta f_{MS} = 0$ , to część plastyczna w (5.45) transformuje się do znanego stowarzyszonego prawa płynięcia typu  $J_2$  (związki Prandtla–Reussa) i wtedy mamy

$$(5.48) \quad D = \left( \mathbf{C}^{-1} + \frac{i_1 \mu_F \otimes \mu_F}{2h} \right) : \tau, \quad \overset{\circ}{\tau} = \left( \mathbf{C} - \frac{i_1 \mu_F \otimes \lambda_F}{2h + \mu_F : \lambda_F} \right) : D.$$

Zgodnie z (5.28) i (5.30), wartość  $\Delta f_{MS}$  może wahać się, w czasie rozważanego procesu deformacji plastycznej, w przedziale,  $\Delta f_{MS} \in [-1, 1]$ . W powyższym sformułowaniu, moduł plastyczny  $H$  należy wyznaczyć w procesie kontrolowanym przez mechanizm mikropasm ścinania realizowany w dwóch systemach. Niezależnie, należy określić parametr  $\Delta f_{MS}$  i zbadać jego zmianę w czasie procesu deformacji. Przyjęcie pewnej stałej wartości  $\Delta f_{MS}$ , dla określonej z eksperymentu zmiany wartości modułu  $H$  w funkcji zredukowanego odkształcenia plastycznego, może być dobrą aproksymacją. Potrzebna jest tu odpowiednia identyfikacja połączona z doświadczalnym pomiarem  $H$  i numeryczną symulacją badanego procesu.



Rys. 7. Ilustracja różnych zakresów obciążenia oraz śladów powierzchni potencjalnych  $g_i$ , odpowiadających różnym wartościom parametru  $\Delta f_{MS}$ , na płaszczyźnie dewiatorowej, gdzie

*f. a. r.* – zakres całkowitego obciążenia (pełnej aktywności),

*p. a. r.* – zakres częściowego obciążenia (częściowej aktywności).

W warunkach, kiedy można dopuścić działanie tylko jednego systemu ścinania,  $f_{MS} = \Delta f_{MS} = f_{MS}^{(1)}$ ,  $f_{MS}^{(2)} = 0$ ,  $f_{MS} \in [0, 1]$ , niestowarzyszone prawo płynięcia indukowane przez aktywne mikropasma ścinania przyjmie postać:



$$(5.49) \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}^e + \mathcal{D}^p = \left( \mathbf{C}^{-1} + \frac{i}{2h(1-f_{MS})} \mu_g \otimes \mu_F \right) : \tau^{\circ},$$

gdzie

$$(5.50) \quad \mu_g = \begin{cases} (1-f_{MS} \tan 2\beta \cot \delta) \mu_F + \frac{f_{MS} \tan 2\beta}{\sin \delta} \rho, & \delta \in (\delta_c, \frac{\pi}{2}] \\ (1-f_{MS} \tan 2\beta \cot \delta_c) \mu_F + \frac{f_{MS} \tan 2\beta}{\sin \delta_c} \rho_c, & \delta \in [0, \delta_c] \end{cases}, \quad \rho = \frac{\tau^{\circ}}{\|\tau\|}$$

wraz z zależnością odwrotną dla zakresu pełnej aktywności

$$(5.51) \quad \tau^{\circ} = \left( \mathbf{C} - \frac{i \mu_g \otimes \lambda_F}{2h(1-f_{MS}) + \mu_g : \lambda_F} \right) : \mathcal{D}.$$

Zauważmy, że w warunkach, kiedy dopuszczalna jest aproksymacja opisu procesu odkształcenia plastycznego przez założenie jednego systemu ścinania, jedyną wielkością, którą należy dodatkowo wyznaczyć jest parametr udziału mikropasm ścinania w prędkości odkształcenia plastycznego  $f_{MS}$ . Sposób identyfikacji tego parametru, z wykorzystaniem dostępnych w literaturze wyników doświadczalnych, będzie przedstawiony w następnym rozdziale.

### 5.2.6. Dyskusja proponowanego opisu konstytutywnego w świetle znanych modeli plastyczności

Zauważmy, że równanie (5.35), ważne dla zakresu pełnej aktywności, jest formalnie podobne do prędkościowego sformułowania deformacyjnej teorii plastyczności, w postaci dyskutowanej przez B. BUDIANSKIEGO [1959], S. STÖRENA i J.R. RICE'a [1975] oraz J.W. RUDNICKIEGO i J.R. RICE'a [1975]. Również w książce J. CHAKRABARTY'ego [1987] można znaleźć dyskusję zakresu ważności teorii deformacyjnej dla dróg obciążenia znajdujących się w pewnym stożku wokół trajektorii proporcjonalnego obciążenia, natomiast M. ŻYCKOWSKI [1977] i J.J. SKRZYPEK [1993] przedstawili dyskusję zakresu praktycznych zastosowań teorii deformacyjnej popartą przykładami. Równanie (5.34) obowiązujące dla zakresu częściowej aktywności odpowiada szczególnej postaci nieliniowych równań plastycznego płynięcia, które były

analizowane przez wielu autorów we wczesnych latach kształtowania się teorii plastyczności (por. np.: V.D. KLYUSHNIKOV [1959], R. HILL [1959], A.A. ILYUSHIN [1963], Z. MRÓZ [1964] oraz W. OLSZAK, Z. MRÓZ i P. PERZYNA [1963] i M. ŻYCZKOWSKI [1973]). Równanie to, zapisane dla obiektywnej prędkości naprężenia, przyjmie postać:

$$(5.44) \quad \mathcal{D}^P = \frac{1}{K_1} (\overset{\circ}{r} : \mu_F) \mu_F + \frac{1}{K_2} (\overset{\circ}{r} : \mu_F) \frac{\overset{\circ}{r}}{\|\overset{\circ}{r}\|},$$

gdzie

$$(5.45) \quad \frac{1}{K_1} = \frac{1}{2H} [1 - \Delta f_{MS} \tan \delta \tan 2\beta]$$

$$(5.46) \quad \frac{1}{K_2} = \frac{1}{2H} \Delta f_{MS} \frac{\tan 2\beta}{\tan \delta}.$$

Moduły  $K_1$  i  $K_2$  mają w naszych rozważaniach jasną interpretację fizyczną. Widać, że nieliniowość związku konstytutywnego wynika tu z uwzględnienia nowego mechanizmu kontrolującego odkształcenie plastyczne, którym jest wieloskalowa hierarchia aktywnych mikropasm ścinania, z jej charakterystyczną geometrią reprezentowaną przez kąt  $\beta$ .

Warto tu również odnieść się do alternatywnego podejścia do opisu wpływu efektów pojedynczego systemu (klastra) mikropasm ścinania, jakie zastosowali N. RAMAKRISHNAN i S.N. ATLURI [1994a], [1994b] oraz N. RAMAKRISHNAN et al. [1994]. W pracach tych przyjęto model plastyczności ze stowarzyszonym prawem płynięcia, który jest kombinacją klasycznego prawa płynięcia typu  $J_2$  oraz prawa płynięcia stowarzyszonego z płaszczyzną uplastycznienia typu Treski. To drugie prawo reprezentuje efekt systemu mikropasm ścinania, który aktywuje się po przekroczeniu pewnego krytycznego naprężenia stycznego. Możliwość podobnego opisu plastycznego płynięcia z efektami dwóch systemów mikropasm ścinania przy pomocy stowarzyszonego prawa płynięcia z dwoma dodatkowymi płaszczyznami uplastycznienia, które przecinają się w punkcie obciążenia na powierzchni plastyczności Hubera–Misesa była proponowana wcześniej w pracy autora (R.B. PĘCHERSKI [1991]). Jakkolwiek wprowadzenie dodatkowej powierzchni plastyczności odpowiadającej systemowi mikropasm ścinania nie znajduje dobrego uzasadnienia fizycznego, jak wskazuje na to dyskusja w p. 3.4 o znaczeniu pojęcia "uplastycznienie", to można jednak taki model potraktować jako

pewne uproszczenie. Jest ono atrakcyjne ze względu na prostotę opisu konstytutywnego – stowarzyszone prawo płynięcia – oraz ze względu na związaną z tym łatwość aplikacji dostępnych programów elementów skończonych dla dużych deformacji sprężysto–plastycznych. N. RAMAKRISHNAN i S.N. ATLURI [1994a] oraz N. RAMAKRISHNAN et al. [1994] zastosowali omawiany model do numerycznego rozwiązania przykładu lokalizacji rozciąganego pasma. Prezentowane przez autorów porównanie wyników obliczeń dla klasycznego prawa płynięcia typu  $J_2$  oraz dla omawianego modelu z mikropasmami ścinania pokazuje, że nawet tak przybliżone uwzględnienie efektów mikropasm ścinania może mieć duży wpływ na poprawność opisu zjawiska makroskopowej lokalizacji odkształcenia plastycznego.



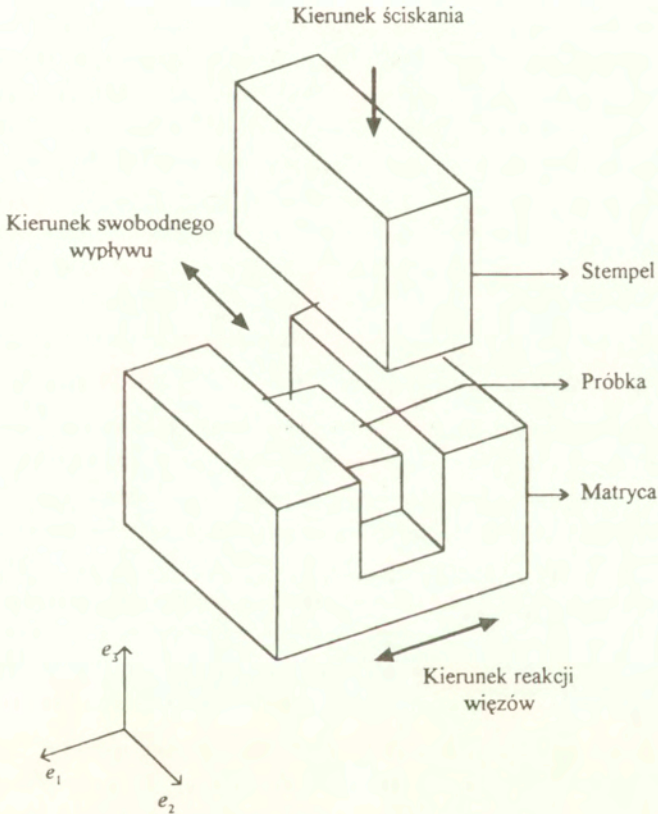
## 6. PRZYKŁAD IDENTYFIKACJI MODELU

### 6.1. Omówienie dostępnych wyników obserwacji doświadczalnych oraz obliczeń numerycznych dla próby kanalikowej

We wspomnianych pracach C.A. BRONKHORSTA et al. [1992] oraz L. ANANDA i S.R. KALIDINDI [1994], przedstawiono wyniki doświadczalne nieswobodnego ściskania w próbie kanalikowej przeprowadzone dla polikrystalicznej miedzi typu OFHC, która została poddana uprzednio procesowi wyżarzania w temperaturze  $800^{\circ}\text{C}$  przez jedną godzinę w obojętnej atmosferze. Badano ewolucję tekstury oraz rozwój mikropasm ścinania. W punkcie tym zajmiemy się jedynie obserwacjami dotyczącymi mikropasm ścinania. Kształt matrycy oraz schemat ilustrujący próbę kanalikową przedstawiono na rys. 8. Wymiary przyjętej do doświadczenia próbki są następujące (por. rys. 8): wysokość odpowiadająca kierunkowi ściskania ( $e_3$ ) – 6.35 mm, szerokość odpowiadająca kierunkowi swobodnego wypływu materiału ( $e_2$ ) – 9.53 mm, długość odpowiadająca kierunkowi reakcji ścianek matrycy ( $e_1$ ) – 14.73 mm. Zarówno próbka, jak i matryca były odpowiednio smarowane w celu zminimalizowania efektu tarcia. Skłoniło to autorów do tego, aby w symulacji numerycznej badanego procesu przyjąć upraszczające założenie, że efekt tarcia można pominąć. Wydaje się jednak, że przy tak dużych odkształceniach i towarzyszących im naciskach efekt ten może okazać się znaczący. Dlatego w oddzielnej pracy (R.B. PĘCHERSKI i Z. NOWAK [1998]), która jest obecnie w przygotowaniu, podjęto analizę zagadnienia próby kanalikowej z uwzględnieniem problemu kontaktu z tarcie.

Wykonano cztery serie doświadczeń nieswobodnego ściskania w matrycy, w których kolejne próbki zostały ściśnięte do poziomu:  $-0.21$ ,  $-0.52$ ,  $-1.0$  oraz  $-1.54$  logarytmicznej miary odkształcenia  $\varepsilon_{33}$ , z prędkością  $-0.001\text{ s}^{-1}$ . Na odkształconych próbkach wykonano następnie badania topograficzne odpowiednio przygotowanych powierzchni, które zostały poddane elektrolitycznemu polerowaniu oraz wytrawianiu w celu ujawnienia granic ziarn. Powierzchnie odkształconych próbek obserwowano w mikroskopie optycznym. Rezultaty tych badań zostały podsumowane w pracy ANANDA i S.R. KALIDINDI [1994], str. 234, w następujący sposób: *"... at a true strain of  $-0.21$ , the grains are still reasonably equiaxed. Figure 10a shows the microstructure at a true strain of  $-0.52$ . At this stage the grains have been flattened, and localized bands which are  $\sim 0.1-0.5\ \mu\text{m}$  in thickness and inclined at  $\sim \pm 30^{\circ}-40^{\circ}$  to the horizontal can be observed within individual grains. The initiation of such micro-shear*

bands occurs somewhere between true strain levels of  $-0.21$  and  $-0.52$ . The intensity of these micro-shear bands continues to increase as deformation progresses, and by a strain level of  $-1.00$  macro-shear bands which cross grain boundaries have formed."



Rys. 8. Schemat ilustrujący nieswobodne ściskanie w próbie kanalikowej

Omawiane rezultaty próby kanalikowej oraz towarzyszące badania rozwoju tekstury, których nie będziemy tu poruszać, stanowiły punkt odniesienia dla weryfikacji obliczeń numerycznych. C.A. BRONKHORST et al. [1992] oraz L. ANAND i

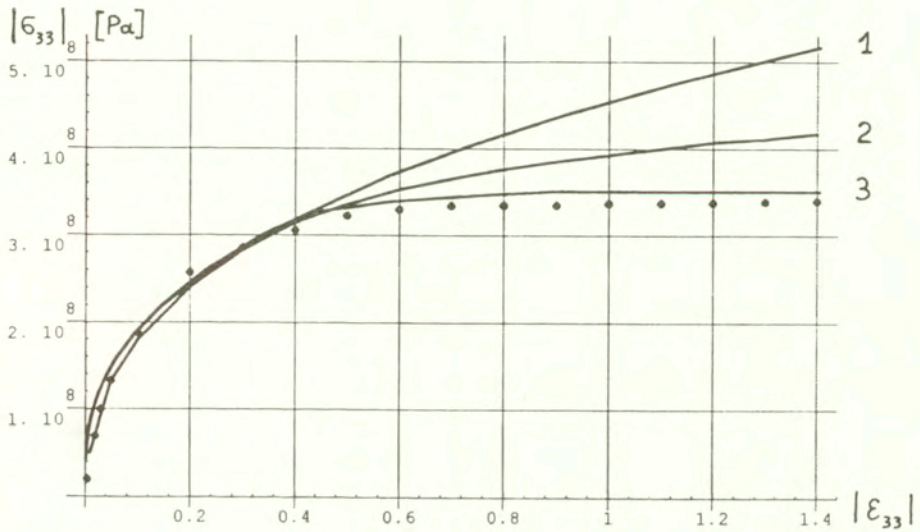
S.R. KALIDINDI [1994] wykonali numeryczną symulację podobnego procesu nieswobodnego ściskania, aproksymowanego płaskim stanem odkształcenia, dla polikrystalicznego agregatu z zastosowaniem programu metody elementów skończonych ABAQUS. Agregat składał się z dużej liczby ziarn o zadanym rozkładzie orientacji, w których dopuszcza się trówymiarową aktywację wszystkich dopuszczalnych systemów krystalograficznego poślizgu. Równania konstytutywne zostały sformułowane na poziomie pojedynczego kryształu. Jeden element skończony odpowiadał jednemu kryształowi lub jego części. Analizując omawiany problem nieswobodnego ściskania, C.A. BRONKHORST et al. [1992] przyjęli agregat złożony z 400 ziarn, który był reprezentowany w obliczeniach przy pomocy 400 kwadratowych, płaskich elementów czterowęzłowych, typu CPE4. Jak wspomniano powyżej, przyjęto dla uproszczenia i skrócenia czasu obliczeń brak tarcia między próbką a ściankami matrycy. Szczegółowe informacje na temat zastosowanego algorytmu i jego implementacji do programu elementów skończonych ABAQUS można znaleźć w pracy S.R. KALIDINDI et al. [1992]. Konfrontacje rezultatów obliczeń numerycznych z doświadczeniem przedstawiono na rys.9, który pokazuje zależność bezwzględnej wartości naprężenia ściskającego  $|\sigma_{33}|$  w funkcji bezwzględnej wartości składowej logarytmicznej miary odkształcenia  $|\epsilon_{33}|$ . Wyniki doświadczalne zaznaczone są przy pomocy punktów, które zostały przeniesione z krzywej doświadczalnej przedstawionej na wykresie w pracy C.A. BRONKHORSTA et al. [1992], na str. 457, gdzie również pokazano dla porównania rezultaty obliczeń numerycznych. Wyniki tych obliczeń reprezentowane są w naszej pracy na rys. 9 przez krzywą 2. Zauważmy, za autorami, że począwszy od wartości odkształcenia z przedziału 0.21–0.52, w którym zaobserwowano intensywny rozwój mikropasm ścinania, uwidoczni się rozbieżność między punktami doświadczalnymi a wynikami symulacji numerycznej. Różnica ta powiększa się ze wzrostem odkształcenia, dochodząc do około 22% dla wartości odkształcenia  $|\epsilon_{33}| = 1.4$ . Stwierdzoną rozbieżność autorzy przypisali pojawianiu się i narastaniu mikropasm ścinania w czasie procesu nieswobodnego ściskania. Konstytutywny model materiału zastosowany do numerycznej symulacji próby kanalikowej nie uwzględniał tego mechanizmu. Mogło to być, moim zdaniem, przyczyną wspomnianej rozbieżności.

## 6.2. Identyfikacja modelu z zastosowaniem numerycznej analizy próby kanalikowej

Opisane wyniki C.A. BRONKHORSTA et al. [1992] oraz L. ANANDA i S.R. KALIDINDI [1994] posłużyły za podstawę do identyfikacji proponowanego w



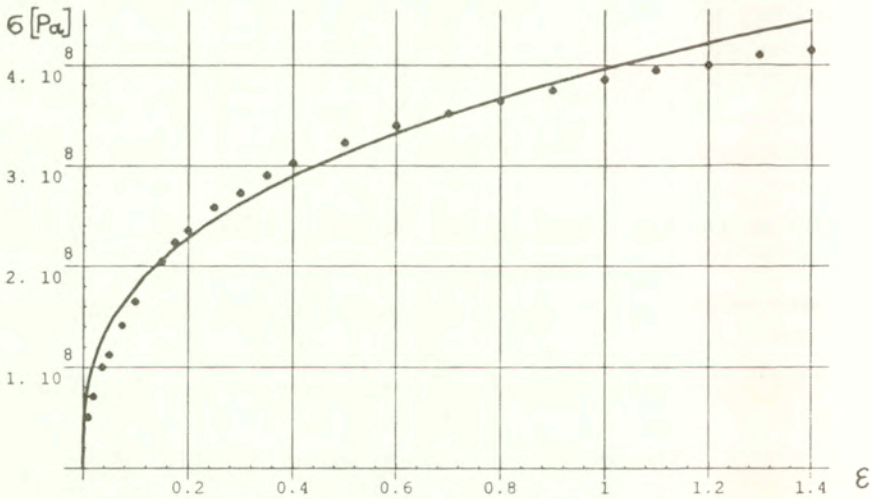
pracy prawa płynięcia plastycznego z efektami mikropasm ścinania. Stosując program elementów skończonych ABACUS/Standard [1996], wykonano numeryczne obliczenia procesu jednorodnego ściskania w płaskim stanie odkształcenia, który modeluje próbę kanalikową. Przyjęto ośmiowęzłowy płaski element – typu CPE8.



Rys.9. Wykresy bezwzględnej wartości naprężenia ściskającego  $|\sigma_{33}|$  w funkcji bezwzględnej wartości logarytmicznej miary odkształcenia  $|\epsilon_{33}|$  dla różnych modeli płynięcia plastycznego w porównaniu z doświadczalnymi rezultatami próby kanalikowej: wyniki doświadczalne C.A. BRONKHORSTA et al. [1992] – •, krzywa 1 – model Prandtla–Reussa; krzywa 2 – symulacja numeryczna C.A. BRONKHORSTA et al.[1992]; krzywa 3 – model płynięcia plastycznego wyrażony równaniem (5.44).

Wyniki obliczeń dla klasycznego modelu izotropowej sprężysto–plastyczności, charakteryzującej się związkami Prandtla–Reussa i wyrażonej równaniami (5.48), reprezentuje krzywa 1. Na uwagę zasługuje fakt bardzo dużej rozbieżności wyników przedstawionych krzywą 1, a punktami doświadczalnymi. Dla wartości odkształcenia

$|\varepsilon_{33}| = 1.4$  różnica ta dochodzi do 53%. Rezultaty dla proponowanego prawa płynięcia z efektami mikropasm ścinania, wyrażonego równaniem (5.44), przedstawiono na krzywej 3. Obliczenia prowadzące do krzywej 3 zostały wykonane dla takiej postaci funkcji  $F_{MS}(\varepsilon)$ , opisującej zależność udziału mikropasm ścinania od ekwiwalentnego odkształcenia  $\varepsilon$ , która zapewniła możliwie bliskie położenie krzywej 3 w stosunku do punktów doświadczalnych. W obliczeniach wykorzystano, przewidzianą w programie ABAQUS/Standard [1996], możliwość modyfikacji procedury materiałowej UMAT. Przyjęto model izotropowego materiału sprężysto–plastycznego z najprostszą postacią prawa plastycznego płynięcia dla zakresu pełnej aktywności, opisanego równaniem (5.44). We wspomnianej procedurze materiałowej UMAT, stosuje się prostą wersję znanego algorytmu odwzorowania powrotnego, tzw. algorytm PPP (powrotu po promieniu), który jest typowy dla całkowania równań konstytutywnych sprężysto–plastyczności z warunkiem Hubera–Misesa (zagadnienia te są omawiane szerzej np. przez M. KLEIBERA [1995], cz. II rozdz. 6).

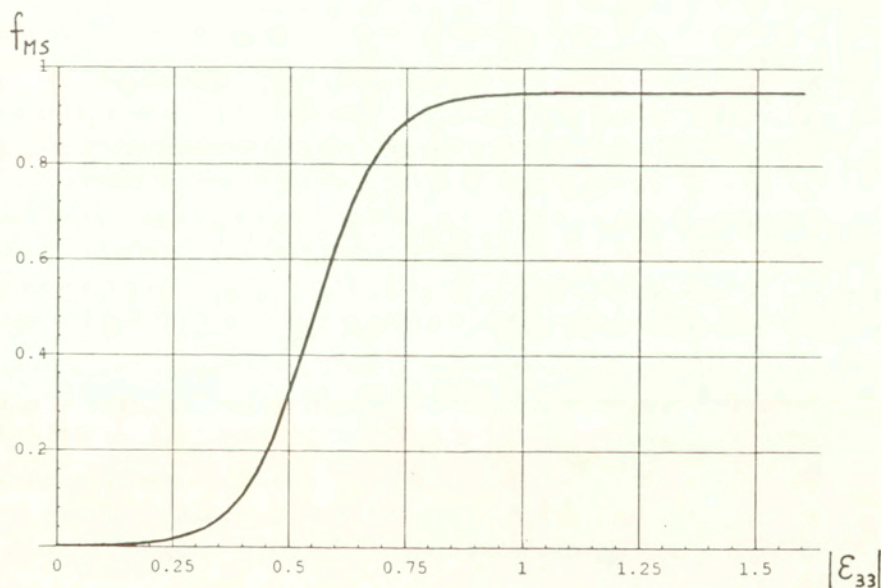


Rys.10. Aproksymacja krzywej umocnienia otrzymanej w próbie swobodnego ściskania przez C.A. BRONKHORSTA et al. [1992].

Obliczenia wykonano dla potęgowej aproksymacji charakterystyki materiału, otrzymanej doświadczalnie w próbie swobodnego ściskania wykonanej przez C.A. BRONKHORSTA et al. [1992] i przedstawionej na str. 450, rys. 2. Na rys. 10 przedstawiono porównanie przyjętej aproksymacji z punktami doświadczalnymi, które zostały przeniesione ze wspomnianego wykresu. Przyjęto następującą funkcję potęgową

$$(6.1) \quad \sigma = \sigma_Y \left( \frac{E}{\sigma_Y} \varepsilon \right)^{\frac{1}{m}},$$

gdzie granica plastyczności  $\sigma_Y = 0.02$  [GPa], moduł Younga  $E = 126$  [GPa],  $m = 2.93$ .



Rys.11. Wykres zależności udziału mikropasm ścinania  $f_{MS}$  od bezwzględnej wartości logarytmicznej miary odkształcenia w kierunku ściskania  $|\varepsilon_{33}|$ .



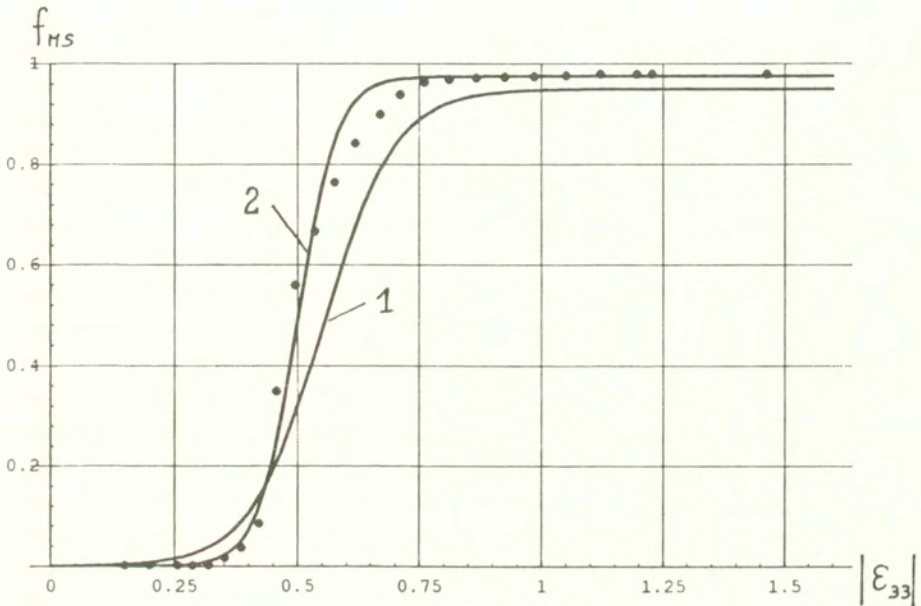
Postać poszukiwanej funkcji udziału mikropasm ścinania  $F_{MS}(\varepsilon)$ , która daje dopasowanie, z dokładnością około 3%, do punktów reprezentujących wyniki doświadczalne C.A. BRONKHORSTA et al. [1992], przedstawiono na rys. 11. Funkcja ta jest wyrażona równaniem

$$(6.2) \quad f_{MS} = F_{MS}(\varepsilon) = \frac{f_{MS_0}}{1 + \exp(a - b|\varepsilon_{33}|)},$$

gdzie  $f_{MS_0} = 0.95$ ,  $a = 7.5$ ,  $b = 13.6$ .

Dyskutowana metoda identyfikacji opiera się na intuicyjnym doborze funkcji  $F_{MS}(\varepsilon)$  i wymaga dużego nakładu pracy. Należy bowiem przeprowadzić serię obliczeń numerycznych, aby sprawdzić czy proponowana postać funkcji  $F_{MS}(\varepsilon)$  zapewnia wymaganą zgodność wyników obliczeń z wynikami doświadczalnymi. W naszym wypadku porównywane są obliczone wartości naprężenia ściskającego przedstawione na krzywej 3 z punktami wziętymi z eksperymentu C.A. BRONKHORSTA et al. [1992] (por. rys. 9). Procedurę tę można zautomatyzować, stosując metodę iteracyjną. Propozycję iteracyjnej metody numerycznej identyfikacji dyskutowanego modelu plastyczności z efektem mikropasm ścinania przedstawiono w pracy (R.B. PĘCHERSKI i Z. NOWAK [1998]). Metoda ta polega na tym, że na początku zakłada się pewną startową wartość udziału mikropasm ścinania  $f_{MS}^{start}$ , np.  $f_{MS}^{start} = 0.5$ , a następnie wykonuje się serię obliczeń omawianego problemu nieswobodnego ściskania. Na każdym kroku wyznaczonym przez przyrost odkształcenia sprawdza się czy wartości naprężenia ściskającego, obliczone dla różnych wielkości  $f_{MS} \in [0, 1]$ , leżą odpowiednio blisko wartości wziętych z krzywej eksperymentalnej. Iteracyjnie sprawdza się czy ich różnica jest mniejsza od zadanego błędu. Na rys. 12, ilustrującym wstępne rezultaty obliczeń, przedstawiono zbiór punktów odpowiadających obliczonym wartościom  $f_{MS}$ , które spełniają zadany warunek zgodności z wynikami doświadczalnymi. Pokazano także krzywą aproksymującą te punkty. Dla porównania, dołączono również wykres funkcji  $F_{MS}(\varepsilon)$ , przedstawiony na rys. 11, który został otrzymany w prostej identyfikacji opartej na doborze funkcji (6.2). Można zauważyć, że proponowana do identyfikacji funkcja niewiele odbiega od punktów uzyskanych w automatycznej metodzie identyfikacji. Rozbieżność może być spowodowana między innymi tym, że przyjęty zakres błędu, w którym może mieścić się różnica między wynikiem obliczeń, a odpowiednią wielkością

naprężenia ściskającego wziętą z krzywej doświadczalnej wynosi 5%. Próby zmniejszenia tej wielkości powodowały niestabilne zachowanie się procesu iteracyjnego. Wskazuje to na konieczność udoskonalenia przyjętego algorytmu iteracyjnej identyfikacji i dobrania właściwej metody optymalizacji błędu.



Rys.12. Porównanie wyników prostej identyfikacji z zadaną funkcją (6.2) – krzywa 1,  $a = 7.5$ ,  $b = 13.6$ ,  $f_{MS_0} = 0.95$ , z rezultatami automatycznej metody identyfikacji iteracyjnej – punkty odpowiadają wynikom obliczeń, a aproksymująca je krzywa 2 odpowiada funkcji (6.2) ze stałymi:  $a = 12.5$ ,  $b = 25$ ,  $f_{MS_0} = 0.975$ .

Tak zidentyfikowany model może być zastosowany do rozwiązywania problemów brzegowych opisujących procesy kształtowania metali. Dalszych badań wymaga określenie wpływu zmiany drogi obciążenia na postać wyznaczonej funkcji udziału mikropasm ścinania. Pozwoliłoby to wyznaczyć klasę procesów, dla których proponowany model może znaleźć zastosowanie.

## 7. PODSUMOWANIE

### 7.1. Wnioski końcowe

Przedstawiony w poprzednim rozdziale wynik rozwiązania prostego przykładu nieswobodnego ściskania pokazuje, że zastosowanie klasycznej teorii plastyczności z izotropowym wzmocnieniem, która jest opisana równaniami Prandtla–Reussa, prowadzi do bardzo dużych rozbieżności przewidywanej reakcji materiału w porównaniu z wynikami eksperymentu. W prezentowanym przykładzie różnica ta dochodzi do 53%. Również przyjęcie bardzo złożonego modelu polikrystalicznego agregatu o bardzo dużej liczbie ziarn, w którym C.A. BRONKHORST et al. [1992] oraz L. ANAND i S.R. KALIDINDI [1994] zastosowali najnowsze rezultaty mikromechaniki materiałów sprężysto–plastycznych nie daje dobrej zgodności z eksperymentem. W naszym przykładzie różnica ta dochodzi do 22%. Stwarza to poważne trudności w poprawnym modelowaniu procesów plastycznego kształtowania. W niniejszej pracy pokazano, że zastosowanie nowego modelu plastyczności z efektami mikropasm ścinania daje możliwość lepszego przewidywania reakcji materiału. Pełne wykorzystanie tego modelu do komputerowej symulacji złożonych procesów technologicznych obróbki plastycznej wymaga systematycznych badań doświadczalnych dla różnych stanów naprężenia, z uwzględnieniem wpływu zmiany drogi obciążenia, w połączeniu z numerycznym rozwiązywaniem zadania identyfikacji w celu ustalenia odpowiadających funkcji udziału mikropasm ścinania od odkształcenia plastycznego  $F_{MS}(\epsilon)$ . Pozwoli to oszacować wpływ zmiany drogi obciążenia na postać funkcji  $F_{MS}(\epsilon)$ . Ważne przy tym jest opracowanie zautomatyzowanych metod iteracyjnej identyfikacji numerycznej. Przykład takiej identyfikacji był omawiany w poprzednim rozdziale. Wstępne rezultaty doświadczalne oraz wynikające z nich wnioski, które wskazują na możliwość wykonania takich systematycznych badań w połączeniu z metalograficznymi obserwacjami powstawania mikropasm ścinania zawarte są w pracach F. GROSMANA [1997] oraz J. PAWLICKIEGO i F. GROSMANA [1997].

### 7.2. Uwagi dotyczące dalszych badań

Omawiany temat opisu deformacji plastycznych z efektami wieloskalowej hierarchii mikropasm ścinania jest bardzo złożony i otwiera wiele nowych możliwości dla badań podstawowych. W pracy ograniczyliśmy się do tych zagadnień, których rozwiązanie może prowadzić bezpośrednio do rezultatów o charakterze aplikacyjnym.



Chodziło przede wszystkim o uzyskanie możliwie prostego opisu zachowania się metali w czasie procesów plastycznego kształtowania. Ważny jest jednak również aspekt poznawczy. Dotychczasowe badania generują bardzo interesujące zagadnienia teoretyczne. Jednym z nich jest problem niestabilności płynięcia plastycznego typu flatter. Możliwość wystąpienia tego efektu, w kontekście warunków propagacji fal przyśpieszenia wyrażonych przez tensor akustyczny oraz interpretacji zjawiska lokalizacji odkształcenia plastycznego jako "stacjonarnej nieciągłości" (osobliwej powierzchni materialnej drugiego rzędu) – kiedy prędkość propagacji fali przyśpieszenia znika, została zauważona przez J. RICE'a [1986], a następnie studiowana w pracach B. LORET [1993] oraz D. BIGONIEGO [1993], [1994]. Zastosowanie modelu plastyczności z efektem mikropasm ścinania w postaci niestowarzyszonego prawa płynięcia, które zostało przedstawione w p. 5.2.5, może prowadzić do niesymetrycznej postaci tensora akustycznego oraz urojonych wartości prędkości propagacji. Budzi to podejrzenie występowania zjawiska niestabilności typu flatter, które może być spowodowane masowym rozwojem klasterów mikropasm ścinania. Dyskutowany w p. 3.3 hierarchiczny model udziału mikropasm ścinania w prędkości odkształcenia postaciowego mógłby dać możliwość nowej interpretacji fizycznej tego zjawiska. Zagadnienia te zostały podjęte w nowej pracy autora, która jest obecnie w przygotowaniu (R.B. PĘCHERSKI [1998c]).

Jak wielokrotnie podkreślano w pracy, inicjacja mikropasm ścinania zależy od drogi obciążenia. Co więcej, mikropasma ścinania można generować praktycznie przy dowolnym odkształceniu przez odpowiednio sterowaną zmianę schematu obciążenia, co legło u podstaw opracowania nowoczesnych technologii kształtowania metali (por. np. A. KORBEL i W. BOCHNIAK [1995]). Proponowany w pracy fenomenologiczny model plastyczności z efektami mikropasm ścinania daje możliwość uwzględnienia w sposób bardzo przybliżony wpływu drogi obciążenia na reakcję materiału. Nie jesteśmy jednak w stanie poprawnie przewidywać wpływu sterowanej zmiany drogi obciążenia na płynięcie plastyczne z generacją mikropasm ścinania. Uwzględnienie tego efektu wymaga opracowania nowych mikromechanicznych podstaw modelu plastyczności metali, który opíše zmianę struktury dyslokacyjnej w czasie procesu odkształcenia – interakcje między dyslokacjami, ich udział i dystrybucję w poszczególnych systemach – poda warunki utraty stabilności tej struktury i formowania się mikropasm ścinania z uwzględnieniem efektów geometrycznych deformacji. Powstaje w związku z tym potrzeba nowego opisu umocnienia plastycznego w ziarnie polikryształu. Nowy model powinien opierać się na podstawowych mechanizmach dyslokacyjnych, uwzględniać umocnienie utajone i związaną z tym sekwencyjność poślizgów oraz efekty więzów od

otaczającego materiału i warunków brzegowych. Pewne wskazówki, wstępne wyniki oraz jakościową analizę, które wytyczają wspomniane powyżej nowe kierunki badań można znaleźć w pracach A. KORBLA et al. [1997], [1998], R.B. PĘCHERSKIEGO et al. [1998] oraz A. KORBLA [1998]. Wykraczają one jednak poza przyjęty zakres habilitacji, która zawiera rezultaty wcześniejszych badań autora. Omawiane zagadnienia wiążą się ściśle z potrzebą opracowania metod przejścia od opisu mikroskopowego do makroskopowego oraz określania efektywnych modułów wzmocnienia plastycznego. Poświęcona jest temu niedawna praca H. PETRYKA [1998], gdzie można znaleźć także dyskusję wcześniejszych rezultatów znanych z literatury. Rozwiązanie wymienionych powyżej otwartych problemów jest bardzo ważne ze względów poznawczych oraz aplikacyjnych. Stawia to zupełnie nowe wyzwania dla fizyki odkształcenia plastycznego i mikromechaniki materiałów sprężysto–plastycznych.

## 8. BIBLIOGRAFIA

1. ABAQUS/Standard (1996), Reference Manuals, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Providence.
2. ADCOCK F. (1922), The internal mechanism of cold-work and recrystallization in Cupro-Nickel, *J. Institute of Metals*, 27, 73–92.
3. ANAND L. i SPITZIG W.A. (1980), Initiation of localized shear bands in plane strain, *J Mech Phys Solids* 28, 113–128.
4. ANAND L. i KALIDINDI S.R. (1994), The process of shear band formation in plane strain compression of fcc metals: Effects of crystallographic texture, *Mech. Materials* 17, 223–243.
5. ARMSTRONG P.J. i FREDERICK C.O. (1966), A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect, G.E.G.B. Report RD/B/N 731.
6. ASARO R.J. (1983), Micromechanics of crystals and polycrystals, *Adv. Appl. Mech.*, 23, 1–115.
7. BAI Y. i DODD B. (1992), *Adiabatic Shear Localization*, Pergamon Press, Oxford.
8. BASINSKI S.J. i BASINSKI Z.S. (1979), Plastic Deformation and Work Hardening, *Dislocations in Solids*, vol. 4, F.R.N. Nabarro (ed.), 261–362.
9. BATDORF S.B. i BUDIANSKY B (1949), A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, NACA TN, No. 1871.
10. BERNSTEJN M.L. i ZAJMOWSKIJ W.A. (1973), *Struktura i własności mechaniczne metali*, WNT, Warszawa.
11. BESSELING J.F. (1968), A thermodynamic approach to rheology, in *Proceeding, IUTAM Symp on Irreversible Aspects of Continuum Mechanics*, Vienna 1966, H. Parkus and L.I. Sedov (eds.), Springer-Verlag, Viena, 16–53.



12. BESSELING J.F. i VAN DER GIESSEN E. (1994), *Mathematical Modelling of Inelastic Deformation*, Chapman & Hall, London.
13. BEVER M.B., HOLT D.L., TITCHENER A.L. (1973), The stored energy of coldwork, *Prog. Mater. Sci.*, **17**, 5–192.
14. BEVERS C.J. i HONEYCOMBE R.W.K. (1959), Ductile fracture of single crystals, *Fracture*, B.L. Averbach et. al. (eds.), J. Wiley & Sons, New York, 474–492.
15. BIGONI D. i ZACCARIA D. (1993), On strain localization analysis of elastoplastic materials at finite strains, *Int. J. Plasticity* **9**, 21–33.
16. BIGONI D. (1994), On flutter instability in elastoplastic constitutive models, *Int. J. Solids Structures*, **32**, 3167–3189.
17. BISHOP J.F.W. i HILL R. (1951), A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centered metal, *Phil Mag* **42**, 1298–1307.
18. BOCHNIAK W. (1988), Strong localization of deformation in copper single crystals deformed at different temperatures, *Arch. Metall.* **33**, 419–454.
19. BOCHNIAK W. (1989), Lokalizacja odkształcenia. Mechaniczne i strukturalne aspekty niestatecznego plastycznego płynięcia mono- i polikrystalicznej miedzi przy różnych temperaturach. Nadplastyczność w warunkach wysokotemperaturowego wymuszania zmiany drogi odkształcenia, *Zeszyty Naukowe AGH, Nr. 122, Kraków*.
20. BOCHNIAK W. i KORBEL A. (1994), Strain softening effects during cross-rolling of aluminum, *Proceedings of the 4th International Conference on Aluminum Alloys*, Atlanta, USA, 283–288.
21. BRONKHORST C.A., KALIDINDI S.R. i ANAND L. (1992), Polycrystalline plasticity and the evolution of texture in FCC metals, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* **A341**, 443–477.
22. BUDIANSKY B (1959), A reassessment of deformation theories of plasticity, *ASME J. Appl. Mech.*, **26**, 259–264.

23. CLEJA-ȚIGOIU S. i SOÓS E. (1990), Elastoviscoplastic models with relaxed configurations and internal state variables, *Appl. Mech. Rev.*, **43**, 131–151.
24. CHABOCHE J.L. (1986), Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity, *Int. J. Plasticity*, **2**, 149–188.
25. CHAKRABARTY J. (1987), *Theory of Plasticity*, McGraw-Hill, New York.
26. CHANG Y.W. i ASARO R.J. (1981), An experimental study of shear localization in aluminum-copper single crystals, *Acta Metall.* **29**, 241–257.
27. CHRISTOFFERSEN J. i HUTCHINSON J.W. (1979), A class of phenomenological corner theories of plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, **27**, 465–487.
28. DAFALIAS Y.F. (1983), A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations, *Plasticity Today, Modelling, Methods and Applications*, A. Sawczuk and G. Bianchi (eds), *Proc Int Symposium on Current Trends and Results in Plasticity*, CISM, Udine, June 1983, Esvier Appl Sci, London-N York, 1985, 135–151.
29. DAFALIAS Y.F. (1987), Issues on the constitutive formulation at large elastoplastic deformations, Part I: Kinematics, *Acta Mechanica*, **69**, 119–138.
30. DÈVE H.E., HARREN S., McCULLOUGH i ASARO R.J. (1988), Micro and macroscopic aspects of shear band formation in internally nitrided single crystals of Fe-Ti-Mn Alloys, *Acta Metall.* **36**, 341–365.
31. DÈVE H.E. i ASARO R.J. (1989), The development of plastic failure modes in crystalline materials: Shear bands in fcc polycrystals, *Metall. Trans.* **20A**, 579–593.
32. DIETER G.E. (1988), *Mechanical Metallurgy*. SI Metric Edition – adapted by D. Bacon, McGraw-Hill, London.
33. DŁUŻEWSKI P. (1995), On geometry and continuum thermodynamics of movement of structural defects, *Mech. Materials*, **22**, 23–41.

34. DŁUŻEWSKI P. (1996), Kontynuacja teorii dyslokacji jako teorii konstytutywnego modelowania skończonych, sprężysto–plastycznych deformacji, Prace IPPT PAN 13/1996.
35. DŁUŻEWSKI P. i PERZYNA P. (1998), Dissipative plastic spin. Thermodynamic description, Proc. R. Soc. Lond. A – praca zgłoszona do publikacji.
36. DODD B. i BAI Y. (1987), Ductile Fracture and Ductility with Applications to Metalworking, Academic Press, London.
37. DUBOIS Ph. (1988), Etude cristallographique de l'initiation et de la propagation de bandes de cisaillement dans les métaux purs, Thèse présentée à l'Université Paris–Nord pour obtenir le grade de Docteur, Juin 1988.
38. DUBOIS Ph., GASPERINI M., REY C. i ZAOUI A. (1988), Crystallographic analysis of shear bands initiation and propagation in pure metals. Part II. Initiation and propagation of shear bands in pure ductile rolled polycrystals, Arch. Mech. 40, 35–40.
39. DUGGAN B.J., HATHERLY M., HUTCHINSON W.B. i WAKEFIELD P.T. (1978), Deformation structures and textures in cold–rolled 70:30 brass, Metal Sci., 12, 343–351.
40. DUSZEK M.K. i PERZYNA P. (1991a), On combined isotropic and kinematic hardening effects in plastic flow processes, Int. J. Plasticity, 7, 351–363.
41. DUSZEK M.K. i PERZYNA P. (1991b), The localization of plastic deformation in thermoplastic solids, Int. J. Solids Structures, 27, 1419–1443.
42. DUSZEK–PERZYNA M.K. i PERZYNA P. (1997), Analysis of anisotropy and plastic spin effects on localization phenomena, Arch. Appl. Mech. – w druku.
43. DYBIEC H., RDZAWSKI Z. i RICHERT M. (1989), Flow stress and structure of age–hardened Cu–0.4wt%Cr alloy after large deformation, Mat. Sci. Eng. A108, 97–104.
44. DYBIEC H. (1991), Wysokotemperaturowe odkształcenie stopu AlMg 4,5.



Eksperymentalne studium lokalizacji odkształcenia i mechanizmów deformacji w próbie rozciągania, *Zeszyty Naukowe AGH*, Nr. 136, Kraków.

45. DZIADOŃ A. (1993), Rola lokalizacji odkształcenia w zjawisku dynamicznego starzenia polikrystalicznego tytanu alfa, *Metalurgia i Odlewnictwo*, *Zeszyty Naukowe AGH*, Nr. 146, Kraków.
46. ELAM C.F. (1927), Tensile tests on alloy crystals, *Proc. R. Soc.* **115A**, 133–169.
47. EMBURY J.D., KORBEL A., RAGHUNATHAN V.S. i RYS J. (1984), Shear band formation in cold rolled Cu–6% Al single crystals, *Acta Metall.*, **32**, 1883–1894.
48. EWING J.A. i ROSENHAIN W. (1900), The crystalline structure of metals, *Phil. Trans. R. Soc. London*, **193**, 353–375.
49. ERBEL S., KUCZYŃSKI K. i MARCINIAK Z. (1981), *Obróbka plastyczna*, PWN, Warszawa.
50. ERINGEN C. (1967), *Mechanics of Continua*, Wiley, New York.
51. ERINGEN A.C. i SUHUBI E.S. (1974), *Elastodynamics*, Vol I. Finite Motions, Academic Press, New York.
52. FRESSENGEAS C i MOLINARI A. (1983), Représentation du comportement plastique anisotrope aux grandes déformations, *Arch. Mech.*, **36**, 483–498.
53. GADAJ S.P., NOWACKI W.K. i PIECZYSKA E.A. (1996), Changes of temperature during the simple shear test of stainless steel, *Arch. Mech.*, **48**, 779–788.
54. GIL SEVILLANO J., VAN HOUTTE P. i AERNOUDT E (1982), Large strain work hardening and textures, *Progress in Materials Science* **25**, 69–412.
55. GILMAN J.J. (1960), Physical nature of plastic flow and fracture, *Plasticity*, *Proc. of the Second Symp. on Naval Structural Mechanics*, E.H. Lee and P.S. Symonds (eds.), Pergamon Press, 43–99.

56. Frhr. VON GÖLER i G. SACHS (1929), Zugversuche an Kristallen aus Kupfer und  $\alpha$ -Messing, *Z. Phys.*, **55**, 581–620.
57. GROSMAN F. (1997), Kryteria doboru i klasyfikacja funkcji naprężenia uplastyczniającego stosowanych w komputerowej symulacji procesów przeróbki plastycznej, *Rudy i Metale*, **R 42**, 496–498.
58. HARREN S.V., DÈVE H.E. i ASARO R.J. (1988), Shear band formation in plane strain compression, *Acta Metall.*, **36**, 2435–2480.
59. HARREN S.V., LOWE T.C., ASARO R.J. i NEEDLEMAN A (1989), Analysis of large-strain shear in rate-dependent fcc polycrystals: Correlation of micro and macromechanics, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **A328**, 443–500.
60. HASHIN Z. (1964), Theory of mechanical behavior of heterogeneous media, *Appl. Mech. Rev.*, **17**, 1–9.
61. HASHIN Z. (1983), Analysis of composite materials – A survey, *J. Appl. Mech.* **50**, 481–505.
62. HATHERLY M. (1983), Deformation at high strains, *Strength of Metals and Alloys*, Proceedings of the 6th International Conference, ICSMA 6, R C Gifkins (ed), Pergamon Press, Oxford, 1181–1195.
63. HATHERLY M. i MALIN A.S. (1979), Deformation of copper and low stacking-fault energy, copper base alloys, *Metals Technology*, **6**, 308–319.
64. HATHERLY M. i MALIN A.S. (1984), Shear bands in deformed metals, *Scripta Metall.*, **18**, 449–454.
65. HAVNER K.S. (1973), On the mechanics of crystalline solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **21**, 383–394.
66. HAVNER K.S. (1974), Aspects of theoretical plasticity at finite deformation and large pressure, *ZAMP*, **25**, 765–781.
67. HAVNER K.S. (1992), Finite Plastic Deformation of Crystalline Solids,

Cambridge University Press, Cambridge, U.K.

68. HECKER S.S. (1976), Experimental studies of yield phenomena in biaxially loaded metals, *Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects*, J. A. Stricklin, K. J. Saczalski (eds.), ASME, AMD – Vol. 20, 1–33.
69. HILL R. (1956), The mechanics of quasi-static plastic deformation in metals, in: *Surveys in Mechanics*, G. K. Batchelor, R. M. Davies (eds.), Cambridge, 7–31.
70. HILL R. (1959), Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time, *J. Mech. Phys. Sol.*, **7**, 209–225.
71. HILL, R. (1963), Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles, *J. Mech. Phys. Solids*, **11**, 357–372.
72. HILL, R. (1966), Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip, *J. Mech. Phys. Solids*, **14**, 95–102.
73. HILL R. (1967), The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, **15**, 779–95.
74. HILL R. (1972), On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain, *Proc. R. Soc. Lond. A* **326**, 131–147.
75. HILL R. (1979), Theoretical plasticity of textured aggregates, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **85**, 179–191.
76. HILL R. (1983), On intrinsic eigenstates in plasticity with generalized variables, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **93**, 177–189.
77. HILL R. (1984), On the micro-to-macro transition in constitutive analyses of elastoplastic response at finite strain, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **95**, 481–494.
78. HILL R. (1985), On macroscopic effects of heterogeneity in elastoplastic media at finite strain, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **98**, 579–590.
79. HILL R. i RICE J.R. (1972), Constitutive analysis of elastic-plastic crystals at



arbitrary strain, *J. Mech. Phys. Solids*, **20**, 401–413.

80. HILL R. (1979), Theoretical plasticity of textured aggregates, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **85**, 179–191.
81. HONEYCOMBE R.W.K. (1984), *The Plastic Deformation of Metals*, 2nd ed. Edward Arnold, London.
82. IKEGAMI K. (1982), Experimental plasticity on the anisotropy of metals, *Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids*, Proc. of the Euromech Colloquium 115, Villard-de-Lans, June 19–22, 1979, J. P. Boehler (ed.), Martinus Nijhoff, 201–242.
83. ILYUSHIN A.A. (1963), *Plasticity* (in Russian), Izd. Akad. Nauk., Moscow.
84. JASIEŃSKI Z. i PIĄTKOWSKI A. (1988), Shear bands formation in copper single crystals during plane-strain compression, in *Strength of Metals and Alloys*, Proceedings of the 8th International Conference ICSMA 8, P.O. Kettunen et al. (eds), Tampere, Pergamon Press, Oxford, 367–372.
85. JASIEŃSKI Z. i PIĄTKOWSKI A. (1993), Nature de bandes de cisaillement macroscopiques dans les monocristaux de cuivre sollicités en compression plane, *Arch. Metall.* **38**, 279–301.
86. KALIDINDI S.R., BRONKHORST C.A. i ANAND L. (1992), Crystallographic texture evolution in bulk processing of FCC metals, *J. Mech. Phys. Solids*, **40**, 537–579.
87. KARNOP R. i SACHS G. (1928), Festigkeitseigenschaften von Kristallen einer veredelbaren Aluminiumlegierung, *Z. f. Physik*, **49**, 480–497.
88. KELLY A. i GROVES G.W. (1980), *Krystalografia i defekty kryształów*, PWN, Warszawa.
89. KHAN A.S. i HUANG S. (1995), *Continuum Theory of Plasticity*, J. Wiley & Sons, New York.

90. KLEIBER M. i RANIECKI B. (1985), Elastic-plastic materials at finite strains, *Plasticity Today, Modelling, Methods and Applications*, A. Sawczuk and G. Bianchi (eds.), Elsevier, London, 3-46.
91. KLEIBER M. (1995), Komputerowe metody mechaniki ciała stałego, *Mechanika Techniczna*, tom XI, M. Kleiber (ed.), Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
92. KLYUSHNIKOV V.D. (1959), on a possible way of formulating physical relations in plasticity [in Russian], *Prikl. Math. Mekh.*, 23, 282-291.
93. KLYUSHNIKOV V.D. (1979), *Mathematical Theory of Plasticity* [in Russian], Izd. Moskovskogo Universiteta, Moscow.
94. KLYUSHNIKOV V.D. (1980), *Stability of Elastic-Plastic Systems* [in Russian], Izd. Nauka, Moscow.
95. KLYUSHNIKOV V.D. (1994), *Physical and Mathematical Foundations of Strength and Plasticity* [in Russian], Izd. Moskovskogo Universiteta, Moscow.
96. KNETS I.V. (1971), *Basic Recent Trends in Mathematical Theory of Plasticity* [in Russian], Izd. Zinatne, Riga.
97. KOCAŃDA S. (1985), *Zmęczeniowe pękanie metali*, wyd. 3, WNT, Warszawa.
98. KOITER W.T. (1953), Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface, *Quart. Appl. Math.*, 11, 350-353.
99. KORBEL A., (1974), Analiza zjawiska niejednorodnego odkształcenia w roztworach substytucyjnych, *Metalurgia i Odlewnictwo*, Zeszyty Naukowe AGH, Nr. 65, Kraków.
100. KORBEL A. (1985), The real nature of shear bands-plastons?, in *Plastic Instability, Proceedings of the Int Symp on Plastic Instability, Considere Memorial (1841-1914)*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees, Paris, 325-335.

101. KORBEL A. (1987), Structural and mechanical aspects of localized deformation in Al-Mg alloy, *Arch Metall.*, **32**, 377-392.
102. KORBEL A. (1990a), The mechanism of strain localization in metals, *Arch Metall.*, **35**, 177-203.
103. KORBEL A. (1990b), The model of microshear banding in metals, *Scripta Metall.*, **24**, 1229-1231.
104. KORBEL A. (1992a), Perspectives of the control of mechanical performance of metals during forming operations, *J. Matl. Proces. Technol.* **34**, 41-50.
105. KORBEL A. (1992b), Mechanical instability of metal substructure - catastrophic plastic flow in single and polycrystals, *Advances in Crystal Plasticity*, eds. D.S. Wilkinson and J.D. Embury, Canadian Institute of Mining and Metallurgy, 42-86.
106. KORBEL A. (1998), Structural and mechanical aspects of homogeneous and non-homogeneous deformation in solids, *CISM Lectures*, September 1997, Udine, Springer - in print.
107. KORBEL A. i MARTIN P. (1986), Microscopic versus macroscopic aspect of shear bands deformation, *Acta Metall.*, **34**, 1905-1909.
108. KORBEL A. i MARTIN P. (1988), Microstructural events of macroscopic strain localization in prestrained tensile specimens, *Acta Metall* **36**, 2575-2593.
109. KORBEL A., EMBURY J.D., HATHERLY M., MARTIN P.L. i ERBSLOH H.W. (1986), Microstructural aspects of strain localization in Al-Mg Alloys, *Acta Metall* **34**, 1999-2009.
110. KORBEL A. i BOCHNIAK W. (1995), The structure based design of metal forming operations, *J. Matl. Proces. Technol.*, **53**, 229-236.
111. A. KORBEL, RICHERT M. i RICHERT J. (1981), The effects of very high cumulative deformation on structure and mechanical properties of aluminium, *Proc. of the 2nd Riso Internat. Symp. on Metallurgy and Mater. Sci.*, Riso, September 14-18, 1981, 445-450.



112. KORBEL A. i SZCZERBA M. (1988), Selfinduced change of deformation path in Cu–Al single crystals, *Rev. Phys. Appl.* **23**, 706–711.
113. KORBEL A., PĘCHERSKI R.B. i KORBEL K. (1997), Sekwencyjność poślizgów w opisie deformacji plastycznej kryształów, *Rudy i Metale*, **R42**, 458–461.
114. KORBEL A., KORBEL K. i PĘCHERSKI R.B. (1998), Catastrophic slip phenomena in crystalline materials, *Damage Mechanics in Engineering Materials, Proc. of the McNU '97 Symposium on Damage Mechanics in Engineering Materials*, June 28 – July 2, 1997, Evanston, G.Z. Voyiadjis, J.W. Ju and J–L. Chaboche (eds.), Elsevier, New York – w druku.
115. KOSIŃSKI W. (1986), *Field Singularities and Wave Analysis in Continuum Mechanics*, PWN, Warszawa i Ellis Horwood, Chichester; rozszerzona wersja polskiego wydania: *Wstęp do teorii osobliwości pola i analizy fal*, PWN, Warszawa, 1981.
116. KRATOCHVIL J (1971), Finite–strain theory of crystalline elastic–inelastic materials, *J. Appl. Phys.* **42**, 1104–1108.
117. KRÖNER E. (1986), The statistical basis of polycrystal plasticity, *Large Deformations of Solids. Physical Basis and Mathematical Modelling*, J. Gittus et. al. (eds), Elsevier, London and New York, 27–40.
118. KUŚNIERZ J. (1992), Localization of strain and fracture in anisotropic metal sheets with face centered cubic lattice, *Arch. Metall.* **37**, 203–281.
119. LAMMERING R. PĘCHERSKI R.B. i STEIN E. (1990), Theoretical and computational aspects of large plastic deformations involving strain–induced anisotropy and developing voids, *Arch. Mech.* **42**, 347–375.
120. LE K.C. i STUMPF H. (1994), Finite elastoplasticity with microstructure, *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik*, Nr. 92, Ruhr–Universität Bochum.
121. LEE E.H. i Liu D.T. (1967), Finite–strain elastic–plastic theory with application to plane–wave analysis, *J. Appl. Phys.* **38**, 19–27.

122. LEE E.H. (1969), Elastic-plastic deformation at finite strains, *J.Appl.Mech.*, **36**, 1-6.
123. LORET B (1983), On the effects of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials, *Mech. Materials*, **2**, 287-304.
124. LORET B. (1986), Some macroscopic consequences of the granular structure of sand, *Large Deformations of Solids: Physical basis and Mathematical Modelling*, J. Gittus, J. Zarka and S. Nemat-Nasser (eds.), Elsevier, London, 477-496.
125. LORET B. (1992), Does deviation from deviatoric associativity lead to the onset of flutter instability?, *J. Mech. Phys. Solids*, **40**, 1363-1375.
126. LUBLINER J. (1990), *Plasticity Theory*, Macmillan, New York.
127. LUFT A. (1991), Microstructural processes of plastic instabilities in strengthened metals, *Progress in Materials Science* **35**, 91-207 (1991).
128. ŁODYGOWSKI T. i PERZYNA P. (1997a), Numerical modelling of localized fracture of inelastic solids in dynamic loading processes, *Int. J. Num. Engn.*, **40**, 4137-4158.
129. ŁODYGOWSKI T. i PERZYNA P. (1997b), Localized fracture in inelastic polycrystalline solids under dynamic loading processes, *Int. J. Damage Mechanics*, **6**, 364-407.
130. MALIN A.S. i HATHERLY M. (1979), Microstructure of cold-rolled copper, *Metal Sci.*, **13**, 463-472.
131. MANDEL J. (1971), *Plasticité classique et viscoplasticité*, C.I.S.M., Udine, Springer Verlag.
132. MANDEL J. (1974), Thermodynamics and plasticity, in: *Foundations of Continuum Thermodynamics*, J.J. Delgado Domingos et al (eds), McMillan, London, 283-304.
133. MANDEL J. (1980), *Mécanique des Solides anélastiques.- Généralisation dans R<sup>9</sup>*

de la règle du potentiel plastique pour un élément polycristallin, C. R. Acad. Sc. Paris, 290 B, 481–484.

134. MARTIN P., BAUDELET B., ESPERANCE G.L., KORBEL A. i SCHMITT J.H. (1988), Macroscopic strain localization: Role of microstructural instabilities, in Strength of Metals and Alloys, Proceedings of the 8th International Conference ICSMA 8, P.O. Kettunen et al (eds), Tampere, Pergamon Press, Oxford, 403–408.
135. MASIMA M. i SACHS G. (1928), Mechanische Eigenschaften von Messing kristallen, Z. Phys., 50, 161–186.
136. MEYERS M.A. (1994), Dynamic Behavior of Materials, J. Wiley & Sons, New York.
137. MRÓZ Z. (1963), Non-associated flow laws in plasticity, J. de Mécanique, 2, 21–42.
138. MRÓZ Z. (1964), On non-linear flow laws in the theory of plasticity, Bull. Acad. Polon. Sci., 12, 531–539.
139. MRÓZ Z. (1986), Phenomenological constitutive models for metals, Modelling Small Deformations of Polycrystals, J. Gittus i J. Zarka (eds.), Elsevier, London, 293–344.
140. NEMAT-NASSER S. i HORI M. (1993), Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials, North-Holland, Amsterdam.
141. NEMAT-NASSER S. (1986), Generalization of the Mandel–Spencer double-slip model, Large Deformations of Solids: Physical Basis and Mathematical Modelling, J. Gittus, J. Zarka and S. Nemat-Nasser (eds.), Elsevier, London, 269–282.
142. NEUHÄUSER H. (1983), Slip-line formation and collective dislocation motion, Dislocation in Solids, vol. 6, F.R.N. Nabarro (ed.), 319–440.
143. NGUYEN HUU VIEM (1992), Constitutive equations for finite deformations of elastic-plastic metallic solids with induced anisotropy, Arch. Mech., 44, 585–594.



144. NGUYEN HUU VIEM i NOWACKI W.K. (1997), Dynamic simple shear of metal sheets, *Arch. Mech.*, **49**, 369–384.
145. NOWACKI W.K. i NGUYEN HUU VIEM, (1995), Dynamic simple shear test. Experiment and numerical investigation, *Proc. 9th DYMAT Technical Conference*, Munich, October 10–11th, 1995.
146. OLIFERUK W, ŚWIĄTNICKI W.A. i GRABSKI M.W. (1995), Effect of the grain size on the rate of energy storage during the tensile deformation of an austenitic steel, *Mater. Sci. Eng.*, **A 197**, 49–58.
147. OLIFERUK W. (1995), Bilans energii a ewolucja mikrostruktury podczas jednoosiowego rozciągania stali austenitycznej, *Rudy i Metale*, **40**, 438–441.
148. OLIFERUK W., KORBEL A. i GRABSKI M.W. (1996), Mode of deformation and the rate of energy storage during uniaxial tensile deformation of austenitic steel, *Mat. Sci. Eng.*, **A220**, 121–128.
149. OLIFERUK W., KORBEL A. i GRABSKI M.W. (1997), Slip behaviour and energy storage process during uniaxial tensile deformation of austenitic steel, *Mat. Sci. Eng.*, **A234–236**, 1122–1125.
150. OLMSTEAD W.E., NEMAT-NASSER S. i NI L. (1994), Shear bands as surface of discontinuity, *J. Mech. Phys. Solids*, **42**, 697–709.
151. OLSZAK W., MRÓZ Z. i PERZYNA P. (1963), *Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity*, Pergamon Press–PWN, Warszawa.
152. OSTROWSKA-MACIEJEWSKA J. (1994), *Mechanika ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa.
153. PAWELEK A, JASIEŃSKI Z., PIĄTKOWSKI A., LITWORA A. i PAUL H. (1996), Acoustic emission and strain localization in shear bands during channel-die compression, *Arch. Metall.*, **41**, 324–335.
154. PAWLICKI J. i GROSMAN F. (1997), Wpływ zmiany orientacji osi głównych stanu naprężenia na wartość naprężenia uplastyczniającego, *Rudy i Metale*, **R42**, 501–503.

155. PAUL H., JASIEŃSKI Z., PIĄTKOWSKI A., LITWORA A. i PAWEŁEK A. (1996), Crystallographic nature of shear bands in polycrystalline copper, *Arch. Metall.*, **41**, 337–353.
156. PAULUN J.E. i PEŁCHERSKI R.B. (1985), Study of corotational rates for kinematic hardening in finite deformation plasticity, *Arch. Mech.*, **37**, 661–677.
157. PAULUN J.E. i PEŁCHERSKI R.B. (1987), On the application of the plastic spin concept for the description of anisotropic hardening in finite deformation plasticity, *Int. J. Plasticity*, **3**, 303–314.
158. PAULUN J.E. i PEŁCHERSKI R.B. (1992a), On the relation for plastic spin, *Arch. Appl. Mech.*, **62**, 386–393.
159. PAULUN J.E. i PEŁCHERSKI R.B. (1992b), On the relation for plastic spin. A new physical motivation, *ZAMM*, **72**, T 185–T 190.
160. PERZYNA P. (1971), Thermodynamic theory of viscoplasticity, *Advances in Applied Mechanics*, **11**, Academic Press, New York, 313–354.
161. PERZYNA P. (1978), *Termodynamika materiałów niesprężystych*, PWN, Warszawa.
162. PERZYNA P. (1993), Interactions of elastic–viscoplastic waves and localization phenomena in solids, IUTAM Symposium on Nonlinear Waves in Solids, August 15–20, 1993, Victoria, Canada; Wegener J. L. i Norwood F.R. (eds.) *Proc. ASME Book No. AMR 137*, 114–121, 1995.
163. PERZYNA P. (1994), Instability phenomena and adiabatic shear band localization in thermoplastic flow processes, *Acta Mechanica*, **106**, 173–205.
164. PERZYNA P. (1998), Thermodynamics of crystal viscoplasticity and instability phenomena, *Material Instabilities in Solids*, R. De Borst i E. Van Der Giessen (eds.), J. Wiley, Chichester, New–York – w druku.
165. PERZYNA P. i KORBEL K. (1996), Analysis of the influence of the substructure of a crystal on shear band localization phenomena of plastic deformation, *Mech.*

Materials, **24**, 141–158.

166. PETRYK H. (1989), On constitutive inequalities and bifurcation in elastic–plastic solids with a yield–surface vertex, *J. Mech. Phys. Solids*, **37**, 265–291.
167. PETRYK H. (1995), Thermodynamic stability of equilibrium in plasticity, *J. Non–Equilib. Thermodyn.*, **20**, 132–149.
168. PETRYK H. (1998), On the micro–macro transition and hardening moduli in plasticity, *Proc. IUTAM Symposium, August 1997, Bochum – w druku*.
169. PETRYK H. i K. THERMANN (1997), A yield–vertex modification of two–surface models of metal plasticity, *Arch. Mech.*, **49**, 847–863.
170. PEŁCHERSKI R.B. (1982), Constitutive modelling for advanced deformations and localisation of viscoplastic materials, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, J.F.T. Pitman, R.D. Wood, J.M. Alexander and O.C. Zienkiewicz (eds.), Pineridge Press, Swansea, 449–459.
171. PEŁCHERSKI R.B. (1983), Relation of microscopic observations to constitutive modelling for advanced deformations and fracture initiation of viscoplastic materials, *Arch. Mech.*, **35**, 257–277.
172. PEŁCHERSKI R.B. (1985), Discussion of sufficient condition for plastic flow localization, *Engn. Fracture Mechanics*, **21**, 767–779.
173. PEŁCHERSKI R.B. (1986), The disturbed plastic spin concept and its consequences in plastic instability, *Proc. of NUBIFORM '86, Numerical Methods in Industrial Forming Processes*, K. Mattiasson et. al. (eds.), Balkema, Rotterdam/Boston, 145–150.
174. PEŁCHERSKI R.B. (1988a), The plastic spin concept and the theory of finite plastic deformations with induced anisotropy, *Arch. Mech.*, **40**, 807–818.
175. PEŁCHERSKI R.B. (1988b), Constitutive description and numerical approach in modelling for metal forming processes, in *Modelling of Metal Forming Processes*, J.L. Chenot and E. Onate (eds.), Kluwer Academic Publ., 11–18.



176. PEÇHERSKI R.B. (1991), Physical and theoretical aspects of large plastic deformations involving shear banding, *Finite Inelastic Deformations. Theory and Applications*, Proc. IUTAM Symposium Hannover, Germany 1991, D. Besdo and E. Stein (eds.), Springer Verlag, 1992, 167–178.
177. PEÇHERSKI R.B. (1992a), Modelling of large plastic deformations based on the mechanism of micro–shear banding. Physical foundations and theoretical description in plane strain, *Arch. Mech.*, **44**, 563–584.
178. PEÇHERSKI R.B. (1992b), A model of plastic flow with an account of micro–shear banding, *ZAMM*, **72**, T 246–T 250.
179. PEÇHERSKI R.B. (1993a), Theoretical description of plastic flow accounting for micro–shear bands, *Arch. Metall.*, **38**, 205–219.
180. PEÇHERSKI R.B. (1993b), A model of plastic flow accounting for micro–shear bands idealized by means of double–shearing system, *ZAMM*, **73**, T 339–T 343.
181. PEÇHERSKI R.B. (1994), Model of shear banding based on the idea of potential surfaces forming a vertex on the extremal surface, *ZAMM*, **74**, T 190–T 192.
182. PEÇHERSKI R.B. (1995), Model of plastic flow accounting for the effects of shear banding and kinematic hardening, *ZAMM*, **75**, 203–204.
183. PEÇHERSKI R.B. (1996a), Finite deformation plasticity with strain induced anisotropy and shear banding, *J. Materials Process. Technol.*, **60**, 35–44.
184. PEÇHERSKI R.B. (1996b), Constitutive modelling of plastic flow accounting for micro–shear banding, *Proc. of the 3rd Asia–Pacific Symposium on Advances in Engineering Plasticity and Its Applications – AEPA'96*, T. Abe & T. Tsuta (eds.), 21–24 August 1996, Hiroshima, Pergamon, Amsterdam, 123–128.
185. PEÇHERSKI R.B. (1997), Macroscopic measure of the rate of deformation produced by micro–shear banding, *Arch. Mech.*, **49**, 385–401.
186. PEÇHERSKI R.B. (1998a), Macroscopic effects of micro–shear banding in plasticity of metals, *Acta Mechanica – w druku*.

187. PĘCHERSKI R.B. (1998b), Macromechanical description of micro-shear banding, Proc. of the McNU '97 Symposium on Damage Mechanics in Engineering Materials, June 28 – July 2, 1997, Evanston, G.Z. Voyiadjis, J.W. Ju and J-L. Chaboche (eds.), Elsevier, New York, 1997 – w druku.
188. PĘCHERSKI R.B. (1998c), Does micro-shear banding lead to flutter instability? – praca w przygotowaniu.
189. PĘCHERSKI R.B. i NOWAK Z. (1998), Numerical analysis of metal forming operations accounting for micro-shear banding – praca w przygotowaniu.
190. PĘCHERSKI R.B., KORBEL K. i KORBEL A. (1998), Plastic strain in metals produced by sequential slip, Journal de Physique – praca wysłana do publikacji.
191. PIECZYSKA E.A., GADAJ S.P. i NOWACKI W.K. (1998), Experimental investigation of thermomechanical coupling in an austenitic steel subjected to consecutive tensile deformation, Int. J. Plasticity – w druku.
192. PRICE R.J. i KELLY A. (1964), Deformation of age-hardened aluminium alloy crystals-II. Fracture, Acta Metall 12, 979–992.
193. PUTTICK K.E. (1963), Necking and fracture in aluminium crystals, Acta Metall. 11, 986–989.
194. RAMAKRISHNAN N. i ATLURI S.N. (1994a), Simulation of shear band formation in plane strain tension and compression using FEM, Mechanics of Materials, 17, 307–317.
195. RAMAKRISHNAN N. i ATLURI S.N. (1994b), On shear band formation: I. Constitutive relationship for a dual yield model, Int. J. Plasticity, 10, 499–520.
196. RAMAKRISHNAN N., OKADA H. i ATLURI S.N. (1994), On shear band formation: II. Simulation using finite element method, Int. J. Plasticity, 10, 521–534.
197. RANIECKI B. (1984), Thermodynamic aspects of cyclic and monotone plasticity, The Constitutive Law in Thermoplasticity, Th. Lehmann (ed.), CISM Courses and

Lectures No. 281, Springer-Verlag, Wien-New York, 251-321.

198. RANIECKI B. (1996), Termomechanika pseudosprężystości materiałów z pamięcią kształtu, Podstawy termomechaniki materiałów z pamięcią kształtu, Seria Współczesne Trendy w Mechanice Materiałów, tom 1., W.K. Nowacki (ed.), Ośrodek Mechaniki IPPT PAN, Warszawa, 55-136.
199. RANIECKI B. i MRÓZ Z. (1990), On the strain-induced anisotropy and texture in rigid-plastic solids, in: Inelastic Solids and Structures. A. Sawczuk Memorial Volume, M. Kleiber and A. König (eds.), Pineridge Press, Swansea, 13-32.
200. RANIECKI B. i NGUYEN HUU VIEM (1984), Isotropic elastic-plastic solids at finite strain and arbitrary pressure, Arch. Mech., **36**, 687-704.
201. RANIECKI B. i SAMANTA S.K. (1989), The thermodynamic model of rigid - plastic solid with kinematic hardening, plastic spin and orientation variables, Arch. Mech. **41**, 747-758.
202. RICE J.R. (1975), Continuum mechanics and thermodynamics of plasticity in relation to microscale deformation mechanics, in: Constitutive Equations in Plasticity, A.S. A.S.Argon (ed.), MIT Press, 23-79.
203. RICE J.R. (1976), The localization of deformation, Theoretical and Applied Mechanics, Proc. of the 14th IUTAM Congress, Delft, W.T. Koiter (ed.), North-Holland, Amsterdam, 207-220.
204. RICHERT M. (1995), Strukturalne i mechaniczne skutki lokalizacji odkształcenia w Al<sub>99,992</sub> i AlMg<sub>5</sub> w zakresie dużych odkształceń, Wydawnictwa AGH, Rozprawy Monografie 23, Kraków.
205. RICHERT M i KORBEL A. (1995), The effect of strain localization on mechanical properties of Al 99,992 in the range of large deformations, J. Matl. Proces. Technol., **53**, 331-340.
206. RICHERT M. i KORBEL A. (1997), The effect of alloying on the mechanical performance and substructure of aluminum and large strains, Materials Science and Engineering.



207. RICHERT M., RICHERT J., ZASADZIŃSKI J. i DYBIEC H. (1988), The boundary strain hardening of Aluminium with unlimited cumulation of large deformation, *Z. Metall.*, **79**, 741–745.
208. RUDNICKI J.W. i RICE J.R. (1975), Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, 371–394.
209. RYCHLEWSKI J., *Nieliniowa mechanika kontinuum*, Wykłady, IPPT PAN, 1974.
210. RYMARZ Cz. (1993), *Mechanika ośrodków ciągłych*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
211. SACHS G. i WEERTS J. (1930), Zugversuche an Gold-Silberkristallen, *Z. Phys.*, **62**, 473–493.
212. SAIMOTO S, HOSFORD W.F. Jr. i BACKOFEN W.A. (1965), Ductile fracture in copper single crystals, *Phil. Mag.* **12**, 319–333.
213. SANDERS J.L (1954), Plastic stress-strain relations based on linear loading functions, *Proc. 2nd. U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, ASME, Ann Arbor, 455–460.
214. SCHMID E. i BOAS W. (1935), *Kristallplastizität*, Springer, Berlin; wyd. w j. ang.: *Plasticity of Crystals with Special Reference to Metals*, Chapman & Hall, London, 1968.
215. SEWELL M.J. (1974), A plastic flow at a yield vertex, *J. Mech. Phys. Solids*, **22**, 469–490.
216. SKRZYPEK J. (1993), *Plasticity and Creep, Theory, Examples, and Problems*, R. Hetnarski (ed.), CRC Press, Boca Raton, Florida; rozszerzona wersja polskiego wydania: *Plastyczność i pełzanie: teoria, zastosowania, zadania*, PWN, Warszawa 1986.
217. SMITH D.R. (1993), *An Introduction to Continuum Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

218. SOBCZYK K. (1996), *Stochastyczne równania różniczkowe, teoria i zastosowania*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
219. SPITZIG W.A. (1981), Deformation behavior of nitrogenated Fe-Ti-Mn and Fe-Ti single crystals, *Acta Metall.*, **29**, 1359-1377.
220. STOLZ C. (1990), On relationship between micro and macro scales for particular cases of nonlinear behaviour of heterogeneous media, *Proc. of IUTAM/ICM Symposium on Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids*, J.-P. Boehler (ed.), Mechanical Engineering Publications, London.
221. STÖREN S. i RICE J.R. (1975), Localized necking in thin sheets, *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, 421-441.
222. SU X.M. (1992), Localized banding with strong velocity jumps, *Arch. Appl. Mech.*, **62**, 172-180.
223. SWIFT H.W. (1947), Length changes in metals under torsional overstrain, *Engineering*, **163**, 253-257.
224. SZCZEPIŃSKI W., DIETRICH L. i MIASTKOWSKI J. (1990), Plastic properties of metals, in *Experimental Methods in Mechanics of Solids*, W Szczepinski (ed.), Polish Scientific Publishers, Warszawa; Elsevier, Amsterdam, 1990, 3-132.
225. SZCZEPIŃSKI W. i J. MIASTKOWSKI (1994), On experimental studies of yield surfaces of metals; a more general approach, *Arch. Mech.* **46**, 151-176.
226. SZCZERBA, M. (1996), Transformacje dyslokacji podczas bliźniakowania w kryształach regularnych, *Wydawnictwa AGH, Rozprawy Monografie 49*, Kraków.
227. SZCZERBA M. i KORBEL A. (1987), Strain softening and instability of plastic flow in Cu-Al single crystals, *Acta Metall.*, **35**, 1129-1135.
228. TAYLOR G.I. i C.F. ELAM (1925), The plastic extension and fracture of aluminium crystals, *Proc. Roy. Soc. A108*, 28-51, także w: *The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor*, vol. I, *Mechanics of Solids*, G.K. Batchelor, F.R.S., Cambridge, 1958, 109-129.

229. TAYLOR G.I. i QUINNEY H. (1934), The latent energy remaining in a metal after cold working, Proc. Roy. Soc., A143, 307–326, także w: The Scientific Papers of Sir Geoffrey Ingram Taylor, vol. I, Mechanics of Solids, G.K. Batchelor, F.R.S., Cambridge, 1958, 310–328.
230. TEODOSIU C. (1970), A dynamic theory of dislocations and its applications to the theory of the elastic–plastic continuum, Fundamental Aspects of Dislocation Theory, A. Simmons et al. (eds.) Nat Bur Stand Spec Publ, 317, II, 837–875.
231. THOMAS T.Y. (1961), Plastic Flow and Fracture in Solids, Academic Press, New York and London.
232. TRUESDELL C. i TOUPIN R.A. (1960), The Classical Field Theories, Encyclopaedia of Physics, III/1, ed. S. Flügge, Springer–Verlag, Berlin.
233. TRUESDELL C. i NOLL W. (1965), The Non–linear Field Theories of Mechanics, Encyclopaedia of Physics, III/3, ed. S. Flügge, Springer–Verlag, Berlin.
234. VALANIS K.C. (1989), Banding and stability in plastic materials, Acta Mech., 79, 113–141.
235. VAN DER GIESSEN E. (1991), Micromechanical and thermodynamic aspects of the plastic spin, Int. J. Plasticity 7, 365–386.
236. VAN DER GIESSEN E. (1992), Some aspects of the macroscopic plastic spin during texture development in polycrystalline metals, Microstructural Characterization in Constitutive Modelling of Metals and Granular Media, G.Z. Voyiadjis (ed.) MD–Vol 32, ASME, New York.
237. WILLIS J.R. (1969), Some constitutive equations applicable to problems of large dynamic plastic deformation, J. Mech. Phys. Solids, 17, 359–369.
238. WILLIS J.R. (1975), Finite deformation solution of a dynamic problem of combined compressive and shear loading of combined compressive and shear loading for an elastic–plastic half–space, J. Mech. Phys. Solids 23, 405–419.
239. WOŹNIAK Cz. (1985), Mechanika ośrodków ciągłych, Mechanika Techniczna, tom



I, Podstawy Mechaniki, H. Zorski (ed.), PWN, Warszawa.

240. WOŹNIAK Cz. i WOŹNIAK M. (1995), Modelowanie w dynamice kompozytów. Teoria i zastosowania, Prace IPPT PAN, 25/1995.
241. WRIGHT T.W. i RAVICHANDRAN G. (1997), Canonical aspects of adiabatic shear bands, *Int. J. Plasticity*, **13**, 309–325.
242. WRÓBEL M., DYMEK S., Blicharski M. (1990), Microstructure of rolled copper single crystals, *Arch. Mech.*, **35**, 245–258.
243. WRÓBEL M., DYMEK S., Blicharski M. i DRIVER J. (1995), Microstructural changes due to rolling of austenitic stainless steel single crystals with initial orientation (110)[001] and (110)[ $\bar{1}10$ ], *Scripta Metall. Mater.*, **32**, 1985–1991.
244. YANG S., (1990), Etude experimentale et theoretique de l'initiation de de deformation plastique en bande de cisaillement dans les materiaux metalliques, These présentée a l'Université Paris-Nord pour obtenir le grade de Docteur, Novembre 1990.
245. YANG S. i REY C. (1994), Shear band postbifurcation in oriented copper single crystals, *Acta Metall.*, **42**, 2763–2774.
246. YANG S. i REY C. (1993), Analysis of deformation by shear banding: A two-dimensional post-bifurcation model, in MECAMAT'91, C. Teodosiu et al. (eds.) Balkema, Rotterdam, 229–237.
247. YEUNG W.Y. i DUGGAN B.J. (1987), On the plastic strain carried by shear bands in cold-rolled  $\alpha$ -brass, *Scripta Metall.* **21**, 485–490.
248. ŻYCZKOWSKI M. (1973), Obciążenia złożone w teorii plastyczności, PWN, Warszawa; rozszerzone wydanie w j. ang., Combined Loading in the Theory of Plasticity, PWN, Warszawa, 1981.

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

00-049 Warszawa, ul. Świętokrzyska 21

<http://rcin.org.pl>