

INSTYTUT  
TECHNOLOGII  
MATERIAŁÓW  
ELEKTRONICZNYCH

# PRACE ITME

## NIEOKREŚLONOŚĆ W NIEKTÓRYCH METODACH ILOŚCIOWEJ ANALIZY METALOGRAFICZNEJ

1990

<http://rcin.org.pl>

Zeszyt 31



**INSTYTUT TECHNOLOGII  
MATERIAŁÓW ELEKTRONICZNYCH**

**Andrzej GŁADKI**

**NIEOKREŚLONOŚĆ  
W NIEKTÓRYCH METODACH  
ILOŚCIOWEJ ANALIZY METALOGRAFICZNEJ**



KOLEGIUM REDAKCYJNE

**Wiesław MARCINIAK** (redaktor naczelny), **Andrzej JAKUBOWSKI**, **Andrzej JELEŃSKI** (z-ca redaktora naczelnego), **Jan KOWALCZYK**, **Zdzisław LIBRANT**, **Bohdan PASZKOWSKI**, **Andrzej SZYMAŃSKI**, **Romuald WADAS**, **Władysław K. WŁOSIŃSKI**, **Eleonora JABRZEMSKA** (sekretarz redakcji)

Adres Redakcji

**INSTYTUT TECHNOLOGII MATERIAŁÓW ELEKTRONICZNYCH**  
**ul. Wólczyńska 133, 01-919 Warszawa**

Telefony

34 86 10 — redaktor naczelny,  
35 30 11 w. 105, 456 — z-ca redaktora naczelnego,  
35 30 11 w. 108 — sekretarz redakcji

PL ISSN 0209-0066



Andrzej GŁADKI: "Nieokreśloności niektórych metod metalografii ilościowej"

Liczna grupa metod ilościowej metalografii jest stosowalna tylko dla specjalnej klasy obiektów strukturalnych tj. tworów wypukłych.

Powyższa teza i jej dowód są przedmiotem pierwszej części pracy. W drugiej przedstawiona została, wyrastająca z termodynamicznego obrazu zjawisk fizycznych, koncepcja analizy kształtu.

Proponowana teoria, korzeniami sięgająca metalografii, dodaje do zbioru tworów strukturalnych obiekty wklęsłe. W ten sposób przestrzeń kształtów staje się matematycznie zwarta. Fakt ten w połączeniu z termodynamiczną strzałką czasu umożliwia ciągłe w czasie obserwacje zmian strukturalnych.

Andrzej GŁADKI: "Undefinitness of some methods of quantitative metallography"

Some kinds of quantitative metallography methods are defined only form the particular class of structural objects i.e. convex bodies.

The above thesis, its proof, are displayed in the first part of the work. In second part, theory of shape analysis, resulting from thermodynamical potentials has been presented.

Proposed theory, with its bases, arising form typical metallographic methods, extends the class of structural objects by concave bodies. In this way the space of shapes becomes compact in mathematical sense. This fact connected with thermodynamical time vector enables observations of structural changes in time.

Андрей ГЛАДКИ: "Неопределённости некоторых методов количественной металлографии"

Многочисленная группа методов количественной металлографии определяется только для специфического класса структурных объектов т.е. выпуклых элементов.

Вышеуказанный тезис, его довод, являются предметом первой части работы. Во второй представлена, вырастающая из термодинамического образа физических явлений, концепция анализа формы.

Предлагаемая теория, корнями восходящая к металлографии, добавляет к множеству структурных элементов объекты вогнутые. Таким образом пространство форм становится математически плотным. Этот факт в связи с термодинамическим вектором времени включает в себе постоянные во времени наблюдения структурных изменений.





Lord Kelvin:

"Często powtarzam, że jeżeli potraficie zmierzyć to, o czym mówicie oraz wyrazić to w liczbach, wówczas wiecie o czym mówicie; lecz jeżeli nie potraficie tego zmierzyć, jeżeli nie potraficie wyrazić tego w liczbach, to wiedza wasza jest niewystarczająca i jałowa."

Cytat za: A. Piekara, "Mechanika ogólna", PWN, Warszawa, 1961, 14.

W dzisiejszej nauce obserwuje się dwie przeciwstawne tendencje. Pierwsza to specjalizacja, druga to tęsknota za syntezą, za uogólnieniem praw. Pierwsza z tendencji nie ominęła metalografii ilościowej tworząc z niej bardzo specyficzną gałąź wiedzy zaliczaną do tzw. metod pomiarowych. Proces specjalizacji trwa i jest wspomagany bardzo szybkim rozwojem urządzeń pomiarowych. Trudno - na podstawie bardzo skąpej obecnie literatury - sądzić, który ostatecznie kierunek rozwoju urządzeń pomiarowych zdominuje pozostałe. Dziś najbardziej burzliwy rozwój przeżywają systemy analizy obrazów. W systemach tych bardzo szybko komputery potrafią analizować i przetwarzać dane w ciągu kilku sekund z jednego obrazu próbki. Dodatkowo, jeżeli wziąć pod uwagę zupełnie nowe klasy mikroskopów SEM i TEM, precyzyjnych urządzeń do cięcia, polerowania i napyłania próbek, to analiza obrazów wprowadzona do metalografii ilościowej ma największe szanse stać się najdokładniejszą i najefektywniejszą z metod pomiarowych. Specyfiką nowych analizatorów obrazu jest to, że mogą one praktycznie zmierzyć pełną gamę parametrów geometrycznych obiektu dowolnie wybranego do pomiarów. Kłopot jednak w tym, że brakuje teorii, recepty na zinterpretowanie bogactwa zbioru danych. Dlatego myśl lorda Kelvina należałoby poszerzyć dodając do niej kwestię interpretacji pomiaru. Tak rozumiana forma pomiaru stawia doświadczenie w roli teorii naukowej. Teoria naukowa to przecież nic innego, jak tylko: umiejętne chwytywanie wielu pomiarów pozwalające na ustalenie relacji pomiędzy zjawiskami i przedstawienie tych zjawisk w postaci matematycznych funkcji. Funkcja, przedłużenie zjawiska w obszar przypuszczeń, wychodzi z kręgu tautologii matematycznej tylko w drodze pomiaru. Koło się zamyka. Pomiar stanowi pierwszy etap naukowej twórczości. Pierwszy, ale i ostatni. Dlatego, szczególnie dziś, kiedy parametry a nawet poszczególne metody ilościowej metalografii są zamknięte w klikunastu kostkach pamięci komputera, nieporozumieniem byłoby dalsze sprawozdanie jej do roli zbioru metod pomiarowych.

Koncepcja napisania niniejszej pracy powstała po wielu latach praktycznego stosowania metod metalografii ilościowej. Na ostateczną wersję, szczególnie części pierwszej, miały wpływ następujące ogólne spostrzeżenia:

- w piśmiennictwie polskim i w dostępnej literaturze zagranicznej trudno dostrzec publikacje, które by w sposób jasny i bezpośredni omawiały zakres zastosowań metod ilościowej metalografii,
- znakomita większość praktyków inżynierii materiałowej bezkrytycznie ufa wynikom, jakie dają metody metalografii ilościowej. Ufność tę kształtują i podtrzymują publikacje, często zaliczane do klasyki światowej [4, 6, 8, 9], w których bardzo mało



miejsca poświęcono wyjściowym założeniom konstrukcji metod na tak podstawowym poziomie, jakim jest definicja obiektu strukturalnego analizy metalograficznej;

- liczne problemy interpretacyjne częściej są utożsamiane ze złym wykonawstwem badań niż np. z całkowitym brakiem korelacji pomiędzy geometriami przestrzeni - fizycznego procesu i metody jego pomiaru. Prawie w ogóle nie dostrzega się błędów interpretacyjnych będących rezultatem złamania założeń metody analizy tj. wejściem w obszar całkowicie dla metody badawczej nieokreślony.

Merytoryczny cel pracy można sprowadzić do odpowiedzi na następujące pytanie zasadnicze:

czy podstawowe grupy metod metalografii ilościowej są określone dla dowolnych w kształcie, rzeczywistych struktur?

i jego implikację warunkową:

jeżeli nie, to co należy uczynić by opis rzeczywistych struktur był możliwy?

Tak sprecyzowany cel oraz ewentualni adresaci pracy zdecydowali o podziale tekstu na dwie spójne, ale pojęciowo i rytmicznie różne części.

Adresatami pierwszej części, którą stanowią rozdziały I i II, są ci wszyscy, którzy nie zajmują się profesjonalnie metalografią ilościową, są natomiast odbiorcami jej rezultatów np. technolodzy. Stąd, między innymi, forma eseju i zmniejszony do niezbędnego minimum aparat matematyczny. W części tej szczególną uwagę zwrócono na praktyczne podejście do metalografii ilościowej. Wskazano np. jak należy traktować i czego oczekiwać od metalograficznych metod struktur zarówno litych, jak i proszkowych. Syntetyczne wnioski na końcu rozdziału II tworzą zbiór elementarnych zasad korzystania z metod metalografii ilościowej. W lekturze tej części pracy szczególnie pomocne mogą być następujące pozycje literaturowe:

- Penrose R.: Techniques of Differential Topology in Relativity. Philadelphia 1972,
- Sieklucki K.: Geometria i topologia, Warszawa, PWN, 1978
- Underwood E.E.: Quantitative Stereology, Addison-Walley, N.Y. 1970,
- Herdan G.W.: Small Particle Statistics, Butterworths, London 2nd edn. 1960.

Druga część niniejszej pracy jest przeznaczona dla specjalistów z zakresu metalografii ilościowej oraz wszystkich tych, którzy są zainteresowani fizyczną interpretacją ewolucji strukturalnej. Jest odpowiedzią na implikację warunkową, postawionego wcześniej pytania zasadniczego; stanowi fragment, którego korzenie wyrastają z nieokreśloności metod metalografii ilościowej. Część ta składa się z dwóch rozdziałów - III i IV.

W punkcie III.1 przedstawiono podstawowe definicje topologii zbiorów w przestrzeni euklidesowej  $E^2$ , jako elementy wyjściowe algebraicznej postaci funkcji i przestrzeni kształtów, omówionych w punkcie III.2. Fizyczna, wielowymiarowa przestrzeń kształtów - jako arena ewolucji rzeczywistych twórców strukturalnych - została opisana w punkcie III.3. Wprowadzono śladowy - w postaci definicji - aparat współczesnej geometrii różniczkowej przybliżający pojęcie pola kształtów, jego struktury i ewolucji obiektów realnych przemieszczających się w tym polu.

W IV, ostatnim rozdziale zinterpretowano, zgodnie ze strukturą pola kształtów, obserwowane doświadczalnie zjawiska ewolucji obiektu swobodnego oraz proces prasowania agregatów proszków tlenku glinu. <http://rcin.org.pl>



Drugiej części nie kończą żadne wnioski. Pochopne byłoby jakiegokolwiek wnioskowanie na podstawie, zawężonego do dwóch różnych substancji i procesów fizycznych, materiału doświadczalnego z rozdziału IV. Badania potwierdzające prezentowaną w pracy ideę analizy kształtu nigdy nie zostały, z różnych przyczyn, zrealizowane do końca. Nie istnieją też, przynajmniej obecnie, żadne realne szanse na kontynuowanie badań doświadczalnych. Pozostaje jedynie najtańsza, niezależna od wszelkich koniunktur rynkowych, forma badań teoretycznych. W tym miejscu warto wspomnieć o wyjątkowo mocno rozwijanych, głównie w USA, badaniach nad tzw. różniczkami  $R^4$  - jestestwem wszystkich zjawisk fizycznych. Zapoczątkowane w 1980 roku zaowocowały dwoma Medalami Fieldsa (odpowiedniki Nagród Nobla w matematyce). Z tymi badaniami współczesna fizyka teoretyczna i doświadczalna wiąże największe, pretendujące do rangi przełomu, nadzieje.

Dla części drugiej jest bardzo ciężko rekomendować publikacje, których przeczytanie byłoby łatwe a przede wszystkim szybko przyswajalne. Współczesna geometria różniczkowa pojęciowo i symbolicznie niewiele ma wspólnego z powszechnie stosowanym aparatem różniczkowym funkcji jednej zmiennej. Drogę pojęciową jaką należy przebyć od klasycznej do współczesnej geometrii różniczkowej należy rozpocząć od gruntownego poznania ogólnych właściwości przestrzeni. Wyczerpujące wiadomości o różnych rodzajach przestrzeni znaleźć można w cytowanej już książce K. Siekluckiego "Geometria i topologia", mającej tę zaletę, że wykład jest prowadzony w prostej symbolice matematycznej. Inne publikacje godne polecenia to:

- Sikorski R.: Rachunek różniczkowy i całkowy, PWN, Warszawa 1967,
- Maurin K.: Analiza matematyczna, cz. I i II, skrypt UW 1968,
- Goncarzewicz J.: Geometria różniczkowa, PWN, Warszawa 1987,
- Trautman A.: Differential Geometry for Physicist, Stony Brook Lectures, Bibliopolis, Napoli 1984,
- Heller M.: Teoretyczne podstawy kosmologii, PIW, Warszawa 1988.

Obie części publikacji mają tematycznie ogólny charakter. Dlatego bibliografia nie stanowi zbioru wysoce wyspecjalizowanych, monotematycznych opracowań. Wyboru prac dokonano kierując się ich treścią merytoryczną i zasobem odnośników źródłowych. We wszystkich pozycjach, zamieszczonych w spisie literatury, znajdują się obszerne wykazy najważniejszych publikacji w danej dziedzinie.

Wersja pierwotna niniejszej pracy różniła się nieznacznie od przedstawionej poniżej. Na ostateczny kształt publikacji miały istotny wpływ uwagi doc. dra inż.

T. Postupolskiego, któremu choć szczególnie podziękować za gruntowną analizę całego tekstu.

W tym miejscu chcę przede wszystkim bardzo serdecznie podziękować doc. dr hab.

Z. Librantowi za to, że pierwszy z ufnością, spojrział na jakże niespójną wówczas teorię, włączając ją do swoich badań.



## I. NIEOKREŚLONOŚĆ METOD METALOGRAFII IŁOŚCIOWEJ

Rozdział niniejszy podzielono na trzy części. W pierwszej z nich przeprowadzono ścisły, matematyczny dowód cech nieokreśloności. Taka forma dowodowa wydała się bardziej spójną i logiczną niż wielowątkowa analiza założeń poszczególnych metod ilościowej metalografii. Wszędzie tam, gdzie było to możliwe dla przejrzystości opisów i dowodów, posłużono się przykładami i rysunkami.

W drugiej części zgrupowano, opatrując komentarzem, te metody ilościowej metalografii, które noszą znamię wyróżnionej cechy nieokreśloności.

Trzecia część stanowi zbiór przesłanek do konstrukcji ogólniejszej przestrzeni analizy form strukturalnych. Jest punktem wyjścia jednej z dróg analizy kształtu.

W istocie tytuł niniejszej części jest tezą, która w sensie matematycznym stanowi zarzut pod adresem licznej grupy powszechnie stosowanych metod metalografii ilościowej. Jak każda teza wymaga dowodu, który należy rozpocząć od zdefiniowania matematycznego pojęcia nieokreśloności.

Nieokreśloność, tak jak w znaczeniu potocznym, matematycznie oznacza brak sensu. Jest to jednak szczególna forma wyrażania "nieufności" w stosunku do relacji zdaniowych matematyki. Wyraża "bezradność" wobec przyjętych aksjomatów. Cudzysłów oznacza niepejoratywne znaczenie obu słów.

Najczęściej nieokreśloność matematyczna jest utożsamiana wyłącznie z tzw. osobliwością w wyrażeniu matematycznym. Np. funkcja  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  posiada osobliwość w punktach  $x = \{1, -1\}$  należących do zbioru liczb rzeczywistych  $R$ . Więcej, to samo wyrażenie jest nieokreślone na zewnątrz przedziału otwartego  $x \in (-1, 1) \subset R$ , co wynika z parzystości funkcji kwadratowej - ujemna wartość podpierwiastkowa. Zauważyć należy jednak, że rozpatrywana funkcja odniesiona do ciała liczb zespolonych  $C$  traci osobliwość i staje się w pełni określona. Osobliwości i przytoczony rodzaj nieokreśloności znajdują swoje źródło w wewnętrznej strukturze tzw. rozpinającej przestrzeni bazowej  $R, C$ .

Klasa nieokreśloności jest jeszcze szersza. Nie istnieje np. pojęcie objętości w przestrzeni płaskiej. Jest to intuicyjnie trywialne spostrzeżenie: istotnie, pojęcie objętości traci sens w przestrzeni płaskiej. Objętość na płaszczyźnie staje się nieokreślona. Matematycznie fakt ten wyraża twierdzenie:

nie istnieje dyfeomorfizm  $\phi$  odwzorowujący podzbiór otwarty  $G_0$  przestrzeni euklidesowej w przestrzeń euklidesową o mniejszej liczbie wymiarów, tj.

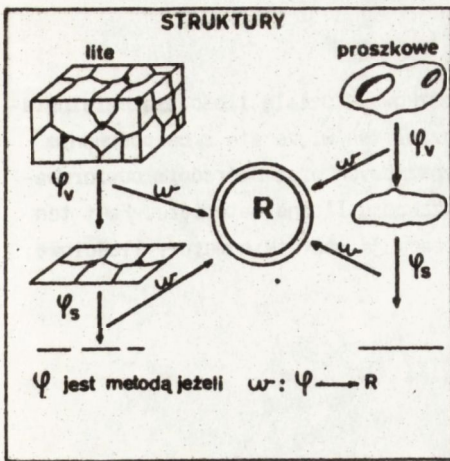
$$\phi : G_0 \longrightarrow E^k ; \quad G_0 \subset E^1, \quad 1 > k.$$

Dowodzi się, że takie odwzorowanie jest wieloznaczne. Nie istnieje zatem odwzorowanie odwrotne  $\phi^{-1}$ . Brak odwzorowania odwrotnego należy do klasy nieokreśloności.

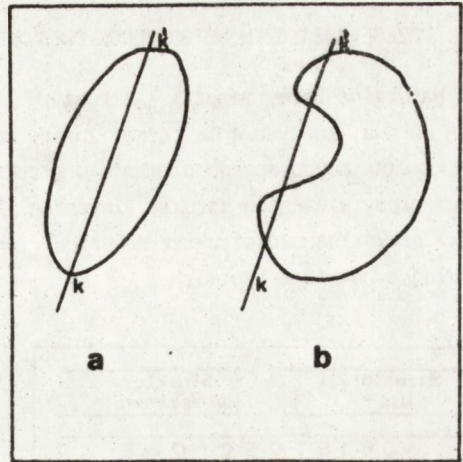
Przytoczone wyżej nieokreśloności są wystarczające do udowodnienia tezy postawionej w podtytule.

Ogólnie, metody ilościowej metalografii tworzą zbiór  $M_{et}$  (rys. 1) przekształceń  $\varphi$  odwzorowujących przestrzeń euklidesową  $\varphi : E^1 \rightarrow R^1$  w przestrzeń liczb rzeczywistych  $R^1$ . Ścisłej, odwzorowania dotyczą nie całej przestrzeni  $E^1$ , ale zbiorów  $K^1 \subset E^1$ . Przestrzeń  $E^1$  ( $1 = 1, 2, 3$  - przypadek metalografii ilościowej) sama w sobie ma tę





Rys. 1. Matematyczny obraz metod ilościowej metalografii



Rys. 2. Prosta  $kk'$  w zbiorach:  
a - wypukłym  
b - wklęsłym

własność (struktura przestrzeni  $E$ ), że preferuje szczególną klasę zbiorów mających odwzorowania jednoznacznie określone. Własność ta wynika z twierdzenia o prostej przechodzącej przez dwa punkty  $a, b \in E^1$ ;  $a \neq b$ . Dowodzi się, że istnieje dokładnie jedna prosta euklidesowa przechodząca przez punkty  $a$  i  $b$ . Składa się ona z punktów postaci  $(1-r)a + rb$ , gdzie  $r \in R$ . Istnieje twierdzenie odwrotne, które mówi, że jednej wartości liczby rzeczywistej  $r \in R$  odpowiada dokładnie jedna prosta euklidesowa. Z obu twierdzeń wynika, że prosta euklidesowa posiada naturalne  $\varphi$  i odwrotne  $\varphi^{-1}$  odwzorowania takie, że:

$$\varphi : E^m \rightarrow R; \quad \varphi^{-1} : R \rightarrow E^m$$

Stąd prosta euklidesowa jest określona.

Określoność prostej euklidesowej przenosi się tylko na pewną klasę zbiorów  $K^1 \subset E^1$ . Zbiorem wypukłym -  $\text{conv } K^1$  - nazywamy taki obiekt w  $E^1$ , w którym dla każdej pary punktów  $k, k' \in K$  odcinek  $\overline{kk'}$  zawiera się całkowicie w  $\text{conv } K^1$  (rys. 2a). Zbiór nie posiadający tej cechy nazywa się wklęsłym -  $\text{conc } K^1$  (rys. 2b).

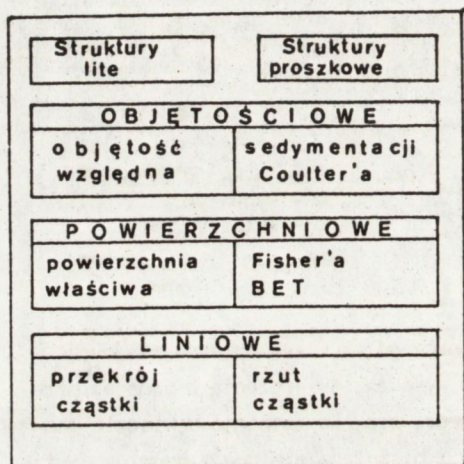
Odcinek jest skończonym zbiorem na prostej. Przysługuje mu zatem ta sama własność co prostej. Ponieważ w przestrzeni euklidesowej tylko zbiór wypukły daje się pokryć odcinkami całkowicie w nim leżącymi, to jedynie klasa zbiorów wypukłych ma cechę określoności. Natomiast wszystkie zbiory wklęsłe są nieokreślone.

Metody metalografii ilościowej badające struktury fizyczne w naturalnej przestrzeni  $E^1$  ( $1 = 1, 2, 3$ ) są określone tylko dla zbiorów wypukłych. Zdanie to kończy dowód postawionej tezy.



## II. PRZEGLĄD ZAŁOŻEŃ METOD ILOŚCIOWEJ METALOGRAFII

Naturalne formy materii - struktury lite i proszkowe - dzielą ilościową metalografię na dwa, zdecydowanie różne, zbiory metod. Podział ten wiąże się z bezpośrednim dostępem do pojedynczego elementu w strukturach proszkowych oraz pośrednim odwzorowaniem grupy elementów strukturalnych na płaskim przekroju litego materiału. Fakt ten oraz przynależność struktur do przestrzeni  $E^3$  porządkują wszystkie metody ilościowe według schematu z rys. 3.



Rys. 3. Schemat metod metalografii ilościowej w funkcji przestrzeni E

Podział ten jest poprawny dotąd, dokąd uznajemy za pewnik, że:

każdy element proszku jest fragmentem monokrystalicznym lub nie interesuje nas subtelna struktura elementów proszku.

Odrzucenie powyższego założenia praktycznie powinno zredukować wszystkie metody analizy proszków do grupy metod struktur litych. Forma nakazowa ostatniego zdania ma swoje uzasadnienie w nieokreśloności metod metalografii ilościowej proszków. Fakt ten zostanie podkreślony w dalszej części tekstu (II.2).

### II.1. Struktury lite

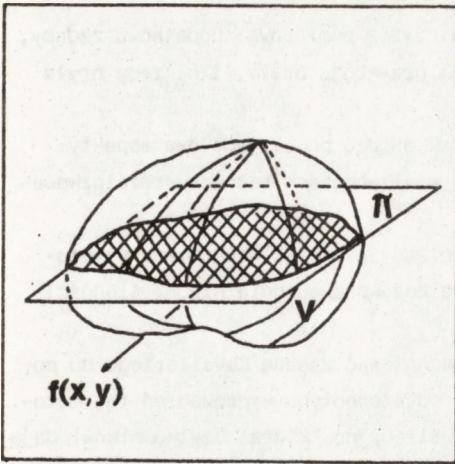
#### A. Metody określające objętości struktur

Każda struktura w  $E^3$  stanowi zbiór ograniczony  $K^3$  oddzielony od pozostałej części przestrzeni powierzchnią mającą postać analityczną  $f(x, y, z)$ . Objętość struktury jest wyrażona zależnością:

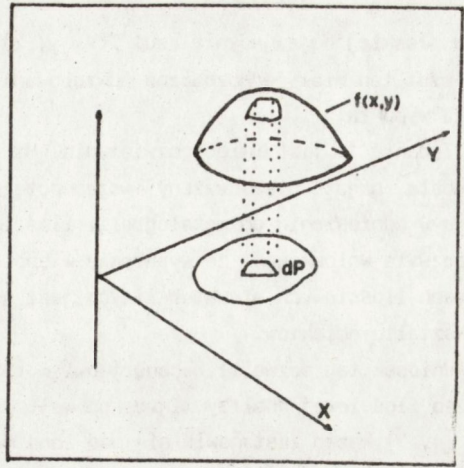
$$|V| = \iiint_V f(x, y, z) dV \quad (1)$$

Inne postaci, tj. całki podwójne i pojedyncze na określenie objętości, są tylko szczególnymi przypadkami zależności (1).

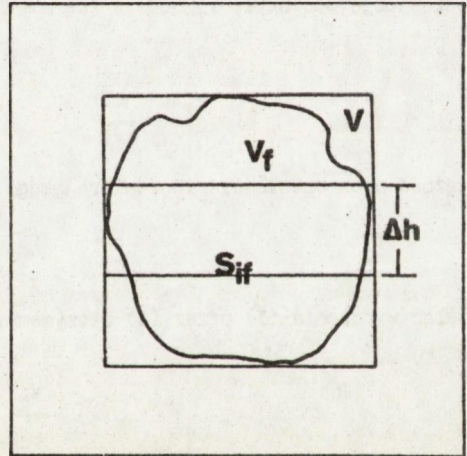
Jedynym obszarem mierzalnym struktury litej jest przekrój bryły V dowolną płaszczyzną  $\pi$  (rys. 4). Obraz bryły V na płaszczyźnie  $\pi$  jest obszarem płaskim. Ponieważ,



Rys. 4. Bryła w pomiarach ilościowej metalografii



Rys. 5. Odzorowanie  $f(x,y) \rightarrow xy$



Rys. 6. Ilustracja do obliczeń objętości względnej

co już udowodniono poprzednio, nie istnieje miara objętości w przestrzeni  $E^2$ , zatem objętość wyrazi się całką:

$$V = \iint_P f(x, y) dP \quad (2)$$

gdzie:  $f(x, y)$  - płaszczyzna ograniczająca bryłę  $V$ ,

$dP$  - element powierzchni przekroju bryły mający jednoznaczne odwzorowanie z płaszczyzną  $f(x, y)$  (rys. 5).

Chcąc zatem określić objętość bryły  $V$  z płaskiego jej przekroju należy a priori określić  $f(x, y)$ . Jest to równoznaczne z wprowadzeniem nieokreśloności w obszar kształtu bryły. Wynika to z oczywistego faktu: skoro  $f(x, y, z)$  w zależności (1) jest nieznanne - zewnętrzne spojrzenie na strukturę przestrzenną - to wejście w strukturę w for-



mie płaskiej daje jedynie rzut  $f(x, y, z)$  na płaszczyznę pomiarową. Dodatkowo żądamy, by rzut ten miał jednoznaczne odwzorowanie z polem przekroju bryły, tzn. żeby bryła była wypukła.

Zadanie to jest niedo rozwiązania. Ma ono jednak bardzo pouczające dwa aspekty:

- obala, często niezauważany, wszechpotężny mit o możliwościach rachunku różniczkowego w odniesieniu do metalografii ilościowej,
- pozwala wnioskować, że wyrażenie w sposób bezwzględny jakiegokolwiek miary w metodach ilościowych struktur litych jest niemożliwe bez wprowadzenia nieokreśloności kształtu obiektów.

Wniosek ten pozwolił Hacquet'owi w 1929 roku adaptować zasadę Cavalieriego do potrzeb ilościowej analizy mikroskopowej. Odchodząc od stereotypu wyprowadzeń tej metody [4, 5] warto zastanowić się nad inną wersją ilustracyjną, która użytkownikowi daje najwięcej informacji:

niech figura  $V_f$  zamknięta będzie w prostopadłościannie o podstawie  $S$  i wysokości  $h$ .

Poprowadźmy  $n$  płaszczyzn równoległych odległych od siebie o  $\Delta h$  przecinających figurę  $V_f$  (rys. 6).

Wówczas objętość bryły  $V_f$  będzie równa:

$$V_f = \sum_{i=1}^n S_{if} \cdot \Delta h = \Delta h \sum_{i=1}^n S_{if} \quad (3)$$

Objętość prostopadłościannie zawierającego bryłę  $V_g$  wynosi:

$$V = S \cdot h \quad (4)$$

Dzieląc wyrażenia (3) przez (4) otrzymamy:

$$\frac{V_f}{V} = \frac{\Delta h \cdot \sum_{i=1}^n S_{if}}{S \cdot h} \quad (5)$$

ponieważ  $\frac{h}{\Delta h} = n$ , stąd:

$$\frac{V_f}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n S_{if}}{n \cdot S} = \frac{\bar{S}_f}{S} \quad (6)$$

gdzie:  $\bar{S}_f = \frac{\sum_{i=1}^n S_{if}}{n}$  - średnia wielkość pola przekroju bryły  $V_f$ .

Jeżeli  $S$  będzie jednostkowym polem przekroju struktury, to wyrażenie (6) będzie przedstawiać średnią zawartość fazy  $f$  w jednostce objętości materiału litego. Naturalnie w jednostce objętości materiału mamy zazwyczaj więcej niż jeden obiekt strukturalny. Dlatego we wzorze (6) sumowanie należy rozciągnąć również na inne obiekty tej samej fazy.



$$\frac{V_f}{V} = \frac{\sum_j V_{fj}}{V} = \frac{\sum_j \sum_i S_{ijf} \cdot \Delta h}{h \cdot S} = \frac{\sum_j \sum_i S_{ijf}}{n \cdot s} = \frac{\bar{S}_f}{S} \quad (7)$$

Należy zauważyć, że wyrażeniu (7) explicite nigdzie nie występuje ani kształt bryły, ani kształt jej płaskiego przekroju. Wyrażenie (7) jest całkowicie określone ze względu na kształt oraz bardzo proste w sensie wykonawczym - wystarczy zmierzyć pola przekrojów danej fazy na jednostce powierzchni materiału, by otrzymać poprawny wynik w przestrzeni  $E^3$  struktury. Naturalnie ten zaskakujący fakt należy łączyć jedynie z brakiem wymiaru w wyrażeniu (7). Względny, bezwymiarowy - miara zero - współczynnik (7), tzw. objętość względna fazy, jest niezmiennikiem każdej transformacji przestrzeni  $\varphi : E^n \rightarrow E^1$ ;  $n > 1$  i  $\varphi^{-1} : E^1 \rightarrow E^n$ . Jest zatem bardzo prostym, wygodnym uniwersalnym sposobem oceny objętości struktury.

W wyrażeniu (7) jest zawarta istotna wskazówka wykonawcza. Istnienie wartości średniej wskazuje, że pomiar ma charakter statystyczny. Poziom ufności dla wyniku będzie zależał od reprezentatywności pomiaru. Ten z kolei wiąże się z liczbą próbek, liczbą pól analizowanych dla jednej próbki. Nie można podać żadnej konkretnej liczby ani próbek, ani też pól widzenia. Zasady, jakimi powinien kierować się technolog są następujące:

Należy ustalić wielkości reprezentatywnego obszaru pomiarowego na próbce. Obszary reprezentatywne nie muszą odpowiadać polom pomiarowym, są to powierzchnie, na których rozkłady statystyczne danej cechy, np. objętości względnej, przyjmują te same wartości. Jeżeli w 3÷5 obszarach test statystyczny nie wskaże istotnych różnic dla średnich i ich odchyżeń, to można uznać obszar za reprezentatywny.

Nadto, jeżeli w losowo wybranych 3÷5 próbkach przeanalizowane obszary reprezentatywne nie wykażą istotnych różnic, to można uznać, że próbki są reprezentatywne, a wyniki powtarzalne.

## B. Metody określające powierzchnie graniczne składników mikrostruktury

Podobnie jak dla pomiaru objętości, tak i dla powierzchni granicznych, można udowodnić, że pomiar jej bezwzględnej wartości będzie określony z dokładnością do funkcji przyjętej jako jej równanie. Można też obrać nieco inną drogę.

W pracy [5] czytamy:

" Wielkość granicznych powierzchni ziarn stopu jednofazowego określona w jednostkach powierzchni i odniesiona do jednostki objętości stopu nazywa się powierzchnią właściwą ziarn. [...] W stopach jednofazowych powierzchnia właściwa ziarn, a w stopach wielofazowych powierzchnia właściwa określonej grupy mikrocząsteczek zależy od średnich rozmiarów ziarn lub mikrocząstek, od ich kształtu i stopnia zmienności rozmiarów. Czynniki te winny być uwzględnione przy określaniu wielkości powierzchni właściwej.

Uniwersalną metodą pomiaru powierzchni właściwej jest metoda siecznych przypadkowych opracowana w 1945 r. przez S.A. Sałtykowa. [...].



Metoda siecznych przypadkowych polega na przeprowadzeniu bezpośredniego pomiaru na płaskim zglądzie. Nie wymaga ona, w odróżnieniu od innych metod, żadnych dodatkowych założeń odnośnie kształtu ziarn" (podkr. autora).

Zacytowane słowa, a w szczególności niezależność metody od kształtu elementów struktury, nie znajdują potwierdzenia w dalszej części pracy [4].

Metoda pomiaru powierzchni właściwej wiąże się z tzw. zadaniem Buffona o igle: na płaszczyznę pokrytą układem  $n$  równoległych linii położonych w odległości  $d$  jedna od drugiej rzucamy odcinek prostoliniowy o długości  $l < d$ . Obliczamy prawdopodobieństwo przecięcia lub zetknięcia się z jedną z linii.

Dalsza komplikacja zadania Buffona polega na rzucaniu nie odcinka, ale wielokąta wypukłego na siatkę linii.

Odcinek prosty, podobnie jak wielokąt wypukły, jest zbiorem wypukłym. Jednoznaczne rozwiązanie zadania Buffona bez założenia wypukłości zbiorów byłoby niemożliwe. Prawdopodobieństwo przecięcia zbioru innego niż wypukły linią prostą byłoby niemożliwe do określenia. Tylko bowiem zbiór wypukły ma dwa punkty przecięcia z prostą przechodzącą przez jego granice. Nieokreśloność ze względu na przyjęte kryteria jest oczywista.

Nie ma więc sensu całej metody omawiać. Więcej szczegółów dotyczących tej metody można znaleźć w pracach [6, 7].

Dopóki będziemy analizować twory wypukłe, dopóty błąd pomiaru powierzchni właściwej będzie natury statystycznej (patrz punkt II.1.A). Dla tworów wklęsłych nie należałoby tego rodzaju pomiaru przeprowadzać w ogóle. Natomiast wszelkie tłumaczenia w stylu:

- bardzo rzadko spotykamy w praktyce struktury wklęsłe; lub, co gorsze,
- błąd wprowadzony przez zastosowanie metody dla tworów wklęsłych jest do zaniedbania, są naukową demagogią.

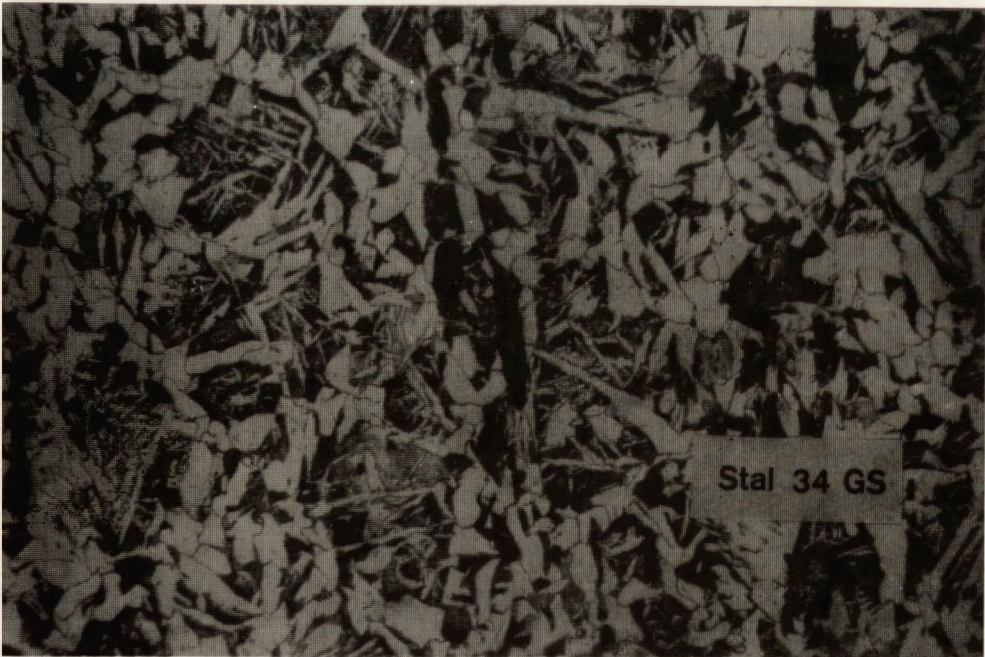
Po pierwsze, struktury wklęsłe są częściej spotykane w przyrodzie niż wypukłe (rys. 7). W dalszej części zagadnienie to omówione zostanie szerzej. Po drugie nieokreśloność sama w sobie nie pozwala ocenić błędu, jaki wprowadza.

Istnieje tylko jeden przypadek, dla którego nieokreśloność można świadomie tolerować. Załóżmy, że grupa parametrów technologicznych  $PT$ , dla których materiał uznajemy za użytkowo dobry, przedział  $\Delta PT$ . Metoda " $M_{et}$ " obciążona nieokreślonością jest tą najprostszą w zastosowaniu kontrolnym, tj.  $M_{et} = f(PT)$ . Stosując tę metodę określamy zbiór danych  $D_{M_{et}} = F(\Delta PT)$ , dla których materiał nosił cechy użytkowo pozytywne. Następnie odwracamy sytuację. Kontrolujemy jakość materiału mierząc  $D_{M_{et}}$ . Jeżeli  $D_{M_{et}}$  mieści się w zbiorze danych przyjętych za wzorzec, to wszystko jest w porządku. Jeżeli  $D_{M_{et}}$  nie należy do zbioru danych wzorcowych, to materiał jest zły. Ale postawienie pytania o przyczynę jest bezsensowne, ponieważ nie istnieje funkcja odwrotna  $PT = f^{-1}(M_{et})$ . Jest to cena nieokreśloności.

C. Metody określające średnicę cząstek oraz ich liczbę w jednostce objętości materiału

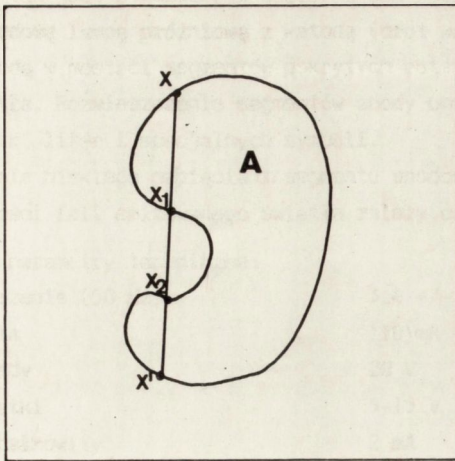
Liczba rozmaitych średnic, jakie można przypisać pojedynczemu obiektowi struktury, jest nieskończona. Wyróżnia się kilka typów zasadniczych [4, 6]. Z definicji średnicy [3] wynika, że jest to odcinek, który należy do zbioru do struktury. Wcześniej, definiując zbiór wypukły, skorzystano z odcinka jako atrybutu przynależności w całości do





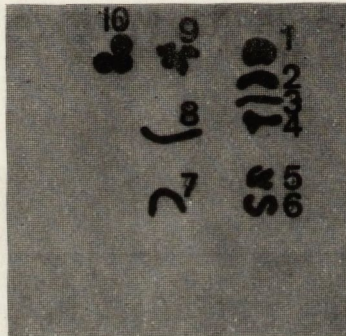
Rys. 7. Przykłady litych struktur wklęsłych



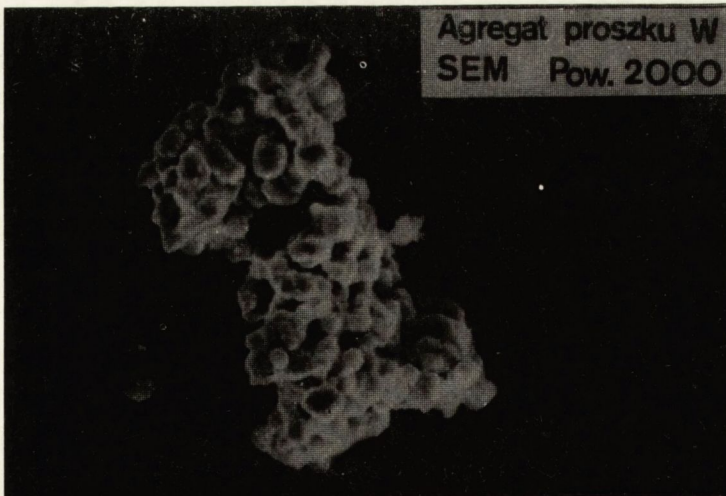


Rys. 8. Obraz niespójnej średnicy.

1 ÷ 8  
 Częstki proszku Ag  
 9 — Cu  
 10 — PbSn



Mikroskopia optyczna  
 Pow.  $\times 50$



Rys. 9. Obrazy wklęsłych obiektów proszków.

tej kategorii tworów. Stąd, każdy zbiór wklęsły będzie wyróżniał pewną grupę średnic niespójnych, rozpadających się na dwie lub więcej składowych (rys. 8). W tych przypadkach nieokreśloność wynika wprost z przyjętej definicji zbioru wypukłego, a mianowicie:

$$\text{diam } A = \sup \varphi(x, x'); \quad x, x' \in A \implies \text{def. średnicy} \quad (8)$$

$$\text{diam } A = x_1x_2 + x_1x_2' + x_2x_2' = xx' \quad (9)$$

ponieważ  $x_1x_2 \notin A$ , to:

$$\text{diam } A \neq xx'$$

Stąd średnica nie może być jednoznaczny odwzorowaniem zbioru wklęsłego. Jest obarczona nieokreślonością.

Praktyczne zastosowanie tej metody wymaga postępowania podobnego jak w punkcie II.1.8.

#### D. Metody określające liczbę cząstek w objętości materiału

Opis samej metody pomiaru liczby cząstek w objętości struktury można znaleźć w wielu publikacjach [4, 5, 6, 7]. Szczegółowe przeanalizowanie istnienia nieokreśloności tej metody byłoby powtórzeniem całego rozumowania, wszystkiego co do tej pory napisano. Zamiast tego wystarczy przytoczyć cytaty z pracy [5], który w podobnej formie istnieje w innych opracowaniach [4, 6, 7].

"...Rozpatrzmy teraz grupę mikrocząstek przedstawiającą figury wypukłe, dowolnego kształtu, o dowolnej orientacji statystycznie równomiernie rozłożone w przestrzeni..."

Cytat powyższy, stanowiący założenie wyjściowe pomiaru liczby cząstek w objętości struktury, a priori ogranicza kształt do cząstek wypukłych. Tym samym wprowadza omawianą nieokreśloność dla cząstek wklęsłych. Dalsze dowodzenie jest zbyteczne.

Reasumując przegląd założeń metod ilościowej metalografii struktur litych, należy podkreślić raz jeszcze najistotniejszy fakt:

jedyną metodą dającą w pełni określone wyniki ilościowe jest pomiar objętości względnej składnika struktury. Wszystkie pozostałe metody są nieokreślone ze względu na kształt wklęsły składników struktury. Nie mogą zatem spełniać innej niż kontrolna, w sensie opisanym w punkcie II.1.8, roli pomiarowej. Nie mogą być metodami naukowymi dla struktur innych niż wypukłe.

## II.2. Struktury proszkowe

Proszki, obrazy ich cząstek, są najbardziej spektakularnymi dowodami istnienia wklęsłych zbiorów struktur materialnych (rys. 9). Wspomniano już, że proszki, jako zasadniczo różniące się w budowie od struktur litych, mogą być badane odrębnymi metodami, jeżeli tylko nie jest interesująca ich wewnętrzna, subtelna struktura. Podobnie jak dla struktur litych, wyróżnia się trzy zasadnicze klasy metod: objętościowe, powierzchniowe i liniowe. Na tym jednak formalne podobieństwa metod badań proszków i struktur litych kończą się. Celem przeważającej klasy metod analizy proszków jest ok-



reślenie wielkości - średnicy - pojedynczych obiektów proszku. Celowo użyto też słowa obiekt. Twory proszku mają tak skomplikowaną budowę, że mylące byłoby użycie określeń (w rodzaju: cząstka, agregat, aglomerat) bez podania ich właściwej definicji:

- cząstka - najmniejsza dająca się wyodrębnić część materiału sypkiego, której kształt zależy od procesu formowania i charakteru występujących sił wewnątrzcząsteczkowych;
- agregat - zespół cząstek połączonych wspólnie silnymi między- lub wewnątrzcząsteczkowymi atomowymi siłami spójności;
- aglomerat - grupy cząstek, agregatów połączone słabymi siłami spójności, np. elektrycznej.

Podział obiektów proszku na trzy rodzaje nie jest trywialny. Średnica, jako miara liniowa obiektu, może odnosić się do każdego z trzech tworów indywidualnie lub być miarą wspólną ich mieszaniny. W części dotyczącej struktur litych udowodniono, że średnica zbioru jest ściśle określona jedynie dla obiektów wypukłych. Proszki, średnice ich obiektów, nie stanowią w tym przypadku żadnego wyjątku. Paradoxem jest natomiast to, że dla struktur litych czyni się tyle zabiegów, by określić pośrednio objętość lub powierzchnię struktur. Dla proszków, precyzyjne, bezpośrednie pomiary objętości czy powierzchni służą głównie określaniu średnicy ich obiektów. Ponadto całość wysiłku budowy aparatu analitycznego dla proszków jest skupiona na znalezieniu sposobu porównania wyników dla średnic otrzymanych różnymi metodami badań [8, 9]. Żeby zrozumieć ogrom nieokreśloności, jaki wynika z metod granulometrycznych proszków, wystarczy prześledzić proste założenia tych metod.

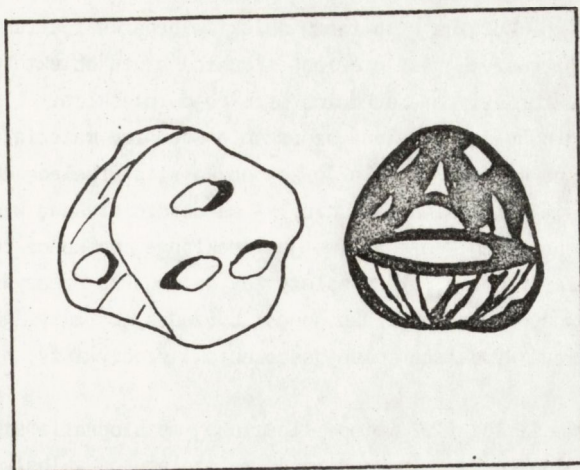
#### A. Metody objętościowe

Reprezentantami najpowszechniej stosowanymi są licznik Coulter'a i metody sedymentacyjne.

W liczniku Coulter'a obiekt proszku przemieszczając się przez obszar jednorodnego pola elektrostatycznego wywołuje zaburzenie, którego impuls elektryczny jest proporcjonalny do objętości obiektu. Analizując reprezentatywną próbkę proszku uzyskuje się widmo, rozkład liczby obiektów w zależności od ich objętości. Do tego momentu nieokreśloność, jakkolwiek istnieje, nie jest oczywista. Dotyczy bowiem obiektów wklęsłych szczególnego typu, tzw. obiektów dziurawych będących, z elektrycznego punktu widzenia, dielektrykiem niejednorodnym (rys. 10). Jednakże nieokreśloność gwałtownie wzrasta, kiedy każdą z objętości przyrównujemy kształtem do kuli i wyliczamy liniową średnicę. Wszystkie kształty skupiamy w jeden punkt przestrzeni kształtów, tj. kulę. Wykonywany jest zabieg matematyczny, szczegółowo omówiony w dalszej części, zupełnie nieokreślony dla tworów wklęsłych.

W metodzie sedymentacji, wykorzystując prawo Stokes'a słuszne dla kuli, zakładamy a priori istnienie kulistych obiektów proszku. Wprowadzamy zatem tę samą nieokreśloność, co dla licznika Coulter'a. Bywają przy tym wielce pouczające zdarzenia. Piszącemu te słowa zarzucano wiele lat wstecz, że wyniki mikroskopowej analizy proszków przeczą prawu grawitacji. W celu zawężenia widma proszków poddano je sedymentacji.





Rys. 10. Struktury nieokreślone  
w pomiarach proszków

Do analizy mikroskopowej przekazano próbki najdrobniejszej frakcji. Zadziwiające było to, że najdrobniejsza frakcja była jedną z najgrubszych. Przyczyna tkwiła w kształcie obiektów proszku. Był to proszek stanowiący mieszaninę obiektów prawie kulistych i tzw. płatkowych. Płatki opadały znacznie wolniej niż drobne cząstki sferyczne. Stąd odwrotny efekt grawitacyjny i segregacja kształtów, a nie wielkości obiektów.

#### B. Metody pomiaru powierzchni właściwej

Do najczęściej stosowanych są zaliczane metody Fisher'a oraz BET. W metodzie Fisher'a spadek ciśnienia gazu przepływającego przez warstwę proszku jest proporcjonalny do powierzchni materiału sypkiego. W metodzie BET ilość adsorbowanego przez materiał gazu o grubości warstwy atomowej jest zależny od powierzchni proszku.

I jakkolwiek istnieją różnice pomiędzy tymi metodami w pomiarze powierzchni tego samego proszku (np.  $WO_3$  metodą Fisher'a -  $0,35 \text{ m}^2/\text{g}$ ; BET -  $4,6 \text{ m}^2/\text{g}$ ), to niewątpliwie mierzona jest jego rzeczywista powierzchnia, z wyjątkiem tworów o porowatości zamkniętej. Sam więc pomiar jest obarczony nieoznaczonością w klasie tworów o zamkniętej fazie wewnętrznej. Jeżeli obiekty proszku nie są porowate, to nieokreśloność dotyczy przekształcenia: dowolny kształt  $\rightarrow$  kula (przyp. licznik Coulter'a). Dla tworów porowatych autor nie widzi sensownego przykładu ilustrującego klasę nieokreśloności. Istnieją co prawda nomogramy transformacji typu: powierzchnia  $\rightarrow$  kształt  $\rightarrow$  średnica [8, 9], ale dość skomplikowane i mało przekonywujące ze względu na samą ocenę kształtu obiektów proszku.

#### C. Metody liniowe

Do tej kategorii należy zaliczyć przede wszystkim metody mikroskopowe i sianie.

Metody mikroskopowe struktur litych i proszków praktycznie nie różnią się. Określenie średnicy obiektu tą metodą wprowadza znaczną i dyskusowaną już nieokreśloność



dla kształtów wklęsłych. Różnica w pomiarze obiektów proszku i struktur litych polega na tym, że dla tych pierwszych jest mierzona średnica rzutu obiektu na płaszczyznę pomiarową, a dla struktur litych - średnice przekrojów płaskich.

Przesianie - bodaj najstarsza metoda oznaczania średnicy materiałów sypkich, nieokreślona ze względu na kształt w ogóle (przez oczka sita przelecają obiekty o dowolnym kształcie, ale tej samej minimalnej średnicy) - ma bardzo ciekawą własność. Abstrahując od trudności wykonawczych - niemożliwe jest dokładne, do końca, rozszanie materiału - metoda ta określa średnicę, która należy tak do wnętrza rzeczywistego obiektu proszku, jak i do pewnego tworzywa abstrakcyjnego. Uprzedzając fakty, jest to również minimalna średnica tworzywa wypukłego opisującego obiekt rzeczywisty, niekoniecznie wypukły.

Omówione w punktach II.1 i II.2 metody ilościowej metalografii struktur litych i sypkich wykazują wspólną cechę: nieokreśloność ze względu na wklęsły kształt obiektów analizy.

Mając na uwadze powszechne występowanie w rozmaitych materiałach tworów wklęsłych, należy właściwie ocenić rolę ilościowych metod metalograficznych. Dyskutowana niejednoznaczność metod metalograficznych musi być wyraźnie zaakcentowana i właściwie zrozumiana; szczególnie dziś, kiedy wytwarzanie subtelnie różniących się strukturą, a znacznie właściwościami, materiałów jest naturalnym zjawiskiem.

Właściwy sposób korzystania z metod metalografii ilościowej można przedstawić w kilku punktach.

### II.3. Wnioski aplikacyjne

Należy kierować się następującą generalną zasadą:  
wyniki badań metalografii ilościowej bezpiecznie dają się porównywać tylko w obrębie jednej metody

#### A. Zasady dla struktur litych

Zasada ta, jako pierwsza umieszczona w tym miejscu, nie należy tematycznie do poruszanych problemów. Jednak, ze względu na znaczenie warto ją przytoczyć:

1. Bezpośrednio nie można porównywać wyników badań z dwóch diametralnie różnych płaszczyzn pomiarowych jakimi są powierzchnie: szlifowana i przełamana.
2. Wszystkie metody określające tzw. parametry względne są wolne od wszelkich nieokreśloności i dlatego zakres ich stosowania rozciąga się na wszystkie rodzaje struktur.
3. Wszystkie metody ilościowej metalografii są skuteczne w kontroli zmian konkretnych parametrów strukturalnych, doświadczalnie ustalonych za pomocą tych metod (patrz pkt.II.1.B).
4. Analiza porównawcza wyników badań tego samego materiału, uzyskanych różnymi metodami, powinna być bardzo ostrożna i uwzględniać między innymi:
  - różne wymiary przestrzeni pomiarowych (np. przełom i zgląd),
  - porównywalne obszary pomiarowe (zbliżone wielkości powierzchni),
  - porównywalne liczby pojedynczych pomiarów cechy badanej w każdej z metod.



## B. Zasady dla struktur proszkowych

1. Proszek należy oceniać metodami, wśród których jedna - np. mikroskopowa - powinna dawać obraz kształtu cząstek lub agregatów.
2. Szczególną uwagę należy zwrócić na korelacje pomiędzy stosowaną metodą a oczekiwanym wynikiem analizy. Nieporozumieniem byłaby np. ocena powierzchni właściwej proszku z pomiarów sedimentacyjnych, kiedy istnieje metoda bezpośredniego pomiaru, np. BET.
3. Im większy wymiar przestrzeni analizy, tym większa możliwość wystąpienia poważnych błędów w ocenie średnicy obiektów proszku. Średnica liczona np. z metody sedimentacji ( $E^3$ ) dla nieporowatych obiektów proszku będzie obarczona większym błędem niż zmierzona metodą BET - ( $E^2$ ).
4. Metoda zastosowana do badań powinna być w całkowitej zgodzie z parametrem, który dominuje w procesie przetwarzania badanego proszku. Jeżeli np. w paście, w której skład wchodzi proszek, wielkość powierzchni krycia cząstkami proszku ma istotne znaczenie, to parametr taki jak średnica proszku powinien być wyznaczany również metodą powierzchniową.

## III. Ilościowa analiza kształtu

Powyższe uwagi miały charakter praktyczny. Aktualne pozostaje nadal zagadnienie nieokreśloności metod ilościowej analizy obiektów wklęsłych. Chcąc rozszerzyć analizę metalograficzną na obiekty dowolne, należy wziąć pod uwagę tylko te działania, które zniosą status omawianej nieokreśloności metod.

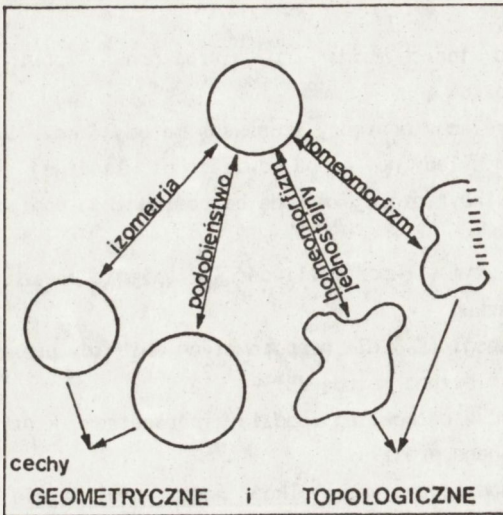
Jedynie wskazówki, co do modelu przyszłej metody, dają:

- pomiar objętości względnej - wolny od nieokreśloności,
- przesiewanie - średnica należąca do tworu wklęsłego i wypukłego.

Rozszerzając myśli wypowiedziane powyżej należy przyjąć, że tylko parametry względne, bezwymiarowe mogą być wolne od nieokreśloności oraz, że nie można analizować tworów wklęsłych bez ich wypukłych dopełnień.

Pozostałe przesłanki można wydedukować jedynie na podstawie topologii. Istotnie, w definicji metalografii ilościowej wyraźnie deklaruje się badanie geometrycznych cech struktury. Dowodzi się, że do cech geometrycznych należą grupy przekształceń, jakimi są izometrie i podobieństwa (rys. 11). Pozostałe przekształcenia - homeomorfizmy - należą do topologii. Rys. 11 dość wyraźnie ilustruje zarysowany problem nieokreśloności. Geometria jest zbyt wąskim obszarem poszukiwań dla ilościowej metalografii.





Rys. 11. Przekształcenia zbiorów

### III. 1. Podstawowe definicje topologii zbiorów w przestrzeni $E^2$

Prezentowana metoda ilościowej analizy kształtu dotyczy struktur płaskich, tj. przekrojów (struktury lite) i rzutów obiektów (struktury proszkowe). Przestrzeń  $E^2$  jest łatwiejsza niż  $E^3$  w przedstawieniu metody. Nie wymaga wprowadzania skomplikowanych, nie dla wszystkich przyswajalnych, pojęć topologicznych. Pozwala bardziej intuicyjnie zrozumieć samą przestrzeń kształtów oraz wnioski co do dalszego rozwoju ilościowej analizy kształtów. Łączy w sposób oczywisty najistotniejsze parametry dotychczas stosowane w ilościowej metalografii.

W przestrzeni  $E^2$  będą rozpatrywane tylko zbiory domknięte; matematyczny odpowiednik realnych tworów strukturalnych.

Niech  $B(a, r) = \{x \in R^2; \rho(x, a) < r\}$  będzie otwartą kulą dwuwymiarową o środku  $a$  i promieniu  $r$ .

Niech  $A \in X$  (rys. 12).

Dla każdego  $a \in A$  zachodzi:

albo  $B(a, r) \subset A$ , wtedy  $a$  należy do wnętrza zbioru  $A$  oznaczanego  $\text{int } A$ ;

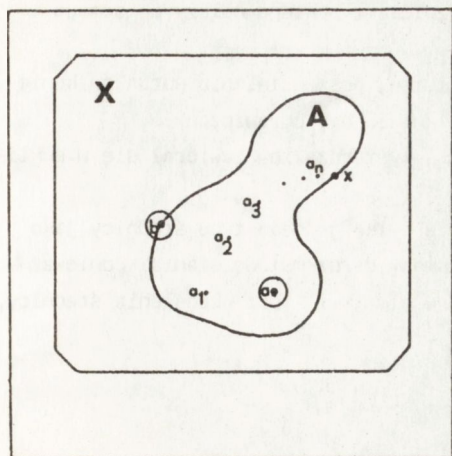
albo  $B(a, r)$  przecina dopełnienie  $X/A$  i wtedy punkt  $a$  jest punktem brzegu  $\text{bd } A$ .

Jeżeli  $A \in X$  i  $\lim a_n = x$ ,  $a_n \in A$ , to  $x$  jest punktem granicznym zbioru  $A$ . Zbiór punktów granicznych zbioru  $A$  nazywamy jego domknięciem w  $X$  i oznaczamy  $\text{cl } A$ . Jeżeli zbiór  $A$  zawiera wszystkie swoje punkty graniczne, to jest zbiorem domkniętym w  $X$ . Zachodzą przy tym relacje:

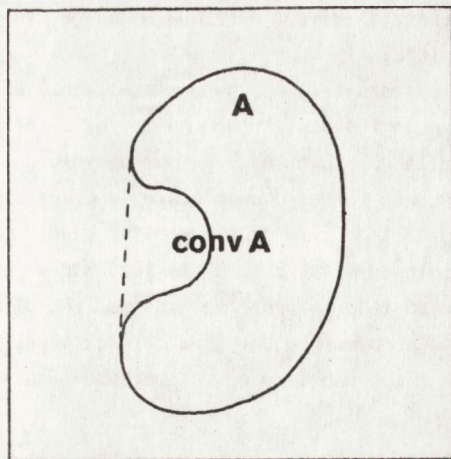
$$\text{int } A = A/\text{bd } A,$$

$$\text{cl } A = A \cup \text{bd } A.$$

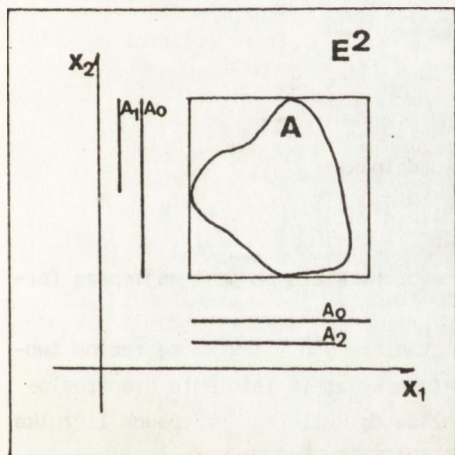
Podsumowując powyższe definicje pod hasłem "obiekt analizy kształtu" należy rozumieć część przestrzeni  $E^2$  ograniczoną brzegiem, wziętą łącznie z tym brzegiem. Przy czym brzeg należy do obiektu, ale ma ze względu na wnętrze obiektu miarę zero.



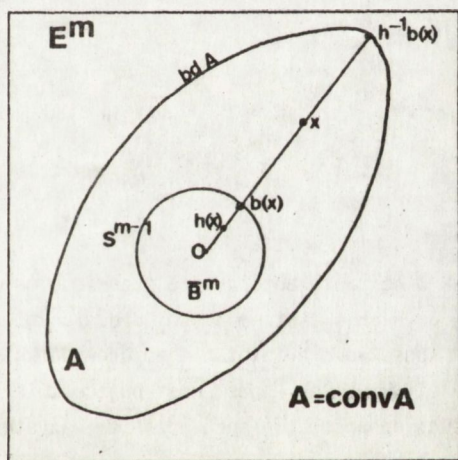
Rys. 12. Ilustracja definicji topologicznych



Rys. 13. Zbiór wklęsły i opisany na nim zbiór wypukły



Rys. 14. Ograniczony w  $E^2$  zbiór A



Rys. 15. Odwzorowanie zbioru conv A w kulę  $\bar{B}$

Bardzo istotne znaczenie, z punktu widzenia operacji na brzegach zbioru (czytaj np. granice ziaren), ma następujące stwierdzenie:

$bd A$  - ograniczenie zbioru A w X składa się z punktów brzegowych A i dopełnienia  $X/A$ . Fakt ten uzasadnia, przedstawione w dalszej części, podwójne sumowanie granic obiektów.

Zbiorem wypukłym  $conv A$  nazywamy najmniejszy zbiór wypukły zawierający A (rys. 13). Średnicą zbioru nazywamy liczbę rzeczywistą

$$diam A = \sup \left\{ \rho(a, a') : a, a' \in A \right\} \quad (10)$$

$$\inf$$

przy czym:

$$diam conv A = diam A$$



Ostatnia relacja wyraźnie wskazuje, że średnica zbioru wypukłego należy do samego zbioru.

Bardzo istotne, z punktu widzenia analizy kształtu, jest ustalenie warunków koniecznego i dostatecznego na to, by zbiór w przestrzeni  $E^3$  był ograniczony: na to, by zbiór  $A \in E^3$  był ograniczony potrzeba i wystarcza, by zawierał się w euklidesowej kostce dwuwymiarowej w przestrzeni  $E^2$ .

Dowód tego twierdzenia w pełni uzasadnia przyjęcie tylko jednego typu średnicy jako liniowej miary zbioru, takiego który jest preferowany przez metodę siania. Ponieważ dowód tego twierdzenia nie jest skomplikowany, a w nim tkwi klucz określenia średnicy, poniżej prezentujemy go w całości (rys. 14).

Niech  $p$  będzie operatorem rzutowania, tzn.

$$A_i = p_i(A)$$

wiadomo, że

$$\text{diam } A_i \leq \text{diam } A < \infty$$

$$A_0 = \bigcup_{i=1}^m A_i$$

niech  $A_0 = \inf A$ ,  $a_0 = \sup A$ , stąd

$$A_0 \in \langle a_0, b_0 \rangle - \text{odcinek}$$

$$A \in \langle a_0, b_0 \rangle^2 - \text{kostka.}$$

Tak więc rzutowanie zbioru płaskiego na dowolnie wybrany kierunek jest najlepszą formą uzyskania ekstremalnych średnic zbioru.

Konsekwencją istnienia zbiorów domkniętych i ograniczonych - takimi są realne twory strukturalne - jest następujące twierdzenie, które wyjaśnia istnienie nieokreśloności spowodowanej sprowadzeniem wszystkich kształtów do kuli (np. przypadek licznika Coulter'a):

Jeżeli  $A$  jest podprzestrzenią zwartą i wypukłą przestrzeni euklidesowej  $E^2$  oraz wewnątrz zbioru  $A$  w  $E^2$  jest niepuste, to istnieje homeomorfizm  $h: A \rightarrow \bar{B}^2$ , przy czym  $h(\text{bd } A) = S^1$  (rys. 15).

Na to, by podprzestrzeń  $A \subset E^2$  była zwarta, potrzeba i wystarcza, by  $A$  był ograniczony i domknięty w  $E^2$ . Z powyższego wynika, że jedynie jednoznaczne, określone odwzorowanie  $h$  w kulę  $\bar{B}^2$ , a brzegu  $\text{bd } A$  w sferę  $S^1$  mają tylko zbiory wypukłe, ograniczone i domknięte. Tak więc, każda redukcja dowolnego wklęsłego kształtu do kuli jest nieokreślona.

Przekładając topologię zbiorów na język metalografii ilościowej, jako punkt wyjścia budowy ilościowej analizy kształtów, należy przyjąć następujące postulaty:

a) dowolny kształt wklęsły nie może być analizowany bez jego kształtu wypukłego,

b) w dowolnym obiekcie płaskim wyróżniamy pole obiektu  $A$  tożsamy z  $\text{int } A$  oraz obwód

$$p \equiv \text{bd } A,$$

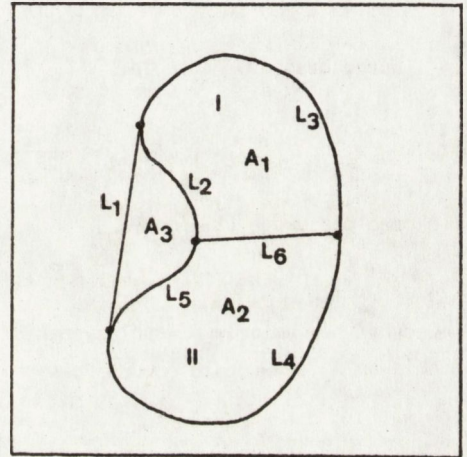
c) sensowną średnicą, która należy do zbioru wypukłego opisującego zbiór wklęsły, jest rzut obiektu na dowolnie wybrany kierunek: w metalografii nazywa się ona średnicą Feret'a.

Z przeprowadzonej analizy nieokreśloności wiadomo, że:

d) należy tworzyć tylko parametry względne, które są wolne od nieokreśloności omawianego rodzaju.

### III.2. Funkcja kształtu

Rozpatrzmy dowolny obiekt wklęsły wraz z jego obrazem wypukłym. Żeby nie rozpatrywać szczególnych przypadków założmy, że składa się on z dwóch (I, II) faz jakościowo różnych (rys. 16).



Rys. 16. Podstawowy zbiór w analizie kształtu

Całkowite pole obiektu wypukłego A wynosi:

$$A_C = A_1 + A_2 + A_3 \quad (11)$$

gdzie:  $\text{int } A_3$  - dopełnienie zbiorów  $\text{int } A_1 \cup \text{int } A_2$  do zbioru  $\text{int } A_C$ , może być trzecią fazą lub drugim składnikiem faz I lub II.

Niech:

$$D_i = \frac{A_i}{A_C} \quad (12)$$

Na podstawie równań (11) i (12):

$$\sum D_i = 1. \quad (13)$$



Z rys. 16 wynika, że  
 obwód wypukły  
 obwody faz lub składników

$$\begin{aligned} P_C &= L_1 + L_3 + L_4 \\ P_1 &= L_2 + L_3 + L_6 \\ P_2 &= L_4 + L_5 + L_6 \\ P_3 &= L_1 + L_2 + L_5 \end{aligned} \quad (14)$$

stąd  $P_C + P_1 + P_2 + P_3 = 2(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6)$

Oznaczając:  
 otrzymujemy:

$$P_t = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 \quad (15)$$

lub  $P_C + P_1 + P_2 + P_3 = 2P_t$  } omawiane podwójnie (16)

$\Sigma P_i + P_C = 2P_t$  } sumowanie granic (17)

Wprowadzając oznaczenia:

$$I_i = \frac{P_i}{2P_t}, \quad I_C = \frac{P_C}{2P_t}; \quad (18)$$

biorąc pod uwagę (17) mamy:

$$\Sigma I_i + I_C = 1. \quad (19)$$

Jedynym bezwymiarowym współczynnikiem łączącym int  $A_i$  i bd  $A_i$  jest iloraz  $K_i$  pola obiektu  $A_i$  i kwadratu obwodu  $P_i$

$$K_i = \frac{A_i}{P_i^2}. \quad (20)$$

Z zależności (12) oraz (18) otrzymujemy:

$$A_i = D_i \cdot A_C \quad (21)$$

$$\frac{I_i}{P_i} = \frac{I_C}{P_C} \Rightarrow P_i = \frac{I_i P_C}{I_C}. \quad (22)$$

Wstawiając (21) i (22) do (20) otrzymujemy:

$$K_i = \frac{A_C D_i I_C^2}{P_C^2 I_i^2}. \quad (23)$$

Ponieważ  $A_C$  i  $P_C$  są odpowiednio polem i obwodem obiektu wypukłego, w którego skład wchodzi analizowane fazy, to:

$$K_C = \frac{A_C}{P_C^2}, \quad (24)$$

$$K_i = K_C D_i \frac{I_C^2}{I_i^2} . \quad (25)$$

Wielkości składające się na równanie (25) nazywamy:

- $K_i$  - współczynnikiem kształtu fazy i składników obiektu wklęsłego lub kształtem wklęsłym.
- $K_C$  - współczynnikiem kształtu obiektu wypukłego lub kształtem wypukłym.
- $D_i$  - wypełnieniem składnika, fazy obiektu wypukłego,
- $I_i, I_C$  - nieregularnością składnika, fazy.

Równanie (25) spełnia stawiane przed ilościową analizą kształtu postulaty; w szczególności w oczywisty sposób spełnia pierwsze dwa postulaty. Należy udowodnić jego zgodność z dwoma pozostałymi postulatami. Odwracając kolejność, najpierw rozpatrzymy postulat d). Istotnie, gdyby  $P_i, I_i, I_C$  były funkcją kształtu, to operacji dzielenia

$$\frac{A_i}{A_C}, \frac{P_i}{P_L}, \frac{P_C}{P_L}$$

nie można byłoby wykonać dla pewnej grupy kształtów. Operacje takie można wykonać, jeżeli wielkości  $A_i, A_C, P_i, P_C, P_L$  należą do zbioru liczb rzeczywistych. W rzeczywistości wymienione wielkości są miarą zbiorów. Miara jest oczywiście liczbą rzeczywistą. Zatem operacja dzielenia jest dozwolona bez względu na kształt, dla wszystkich wymienionych parametrów. Należy zauważyć, że wielkości  $D_i$  i  $I_i$  są bezwymiarowe, a użyte w ilorazach miary należą do tego samego wymiaru.

Nieco inaczej jest z wielkością  $K_C = A_C/P_C^2$ . Jest ona bezwymiarowa, ale użyte parametry  $A_C$  i  $P_C$  mają różne miary. Dwuwymiarowe jest pole, jednowymiarowy obwód. Jedynie zabieg matematyczny podniesienia do kwadratu  $P_C$  uwalnia iloraz  $K_C$  od wymiaru. Ale ślad niejednorodności miar musi zaistnieć w postaci funkcyjnej.

Kształt wypukły  $K_C$  jest tą wielkością, która spełnia postulat c). Istotnie, wartość  $K_C$  dla koła wynosi:

$$K_{Ck} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2\pi r)^2} = \frac{1}{4\pi} .$$

Bardziej elegancką formę kształtu kuli, koherentną z polem określoności  $D_i$  i  $I_i$ , uzyskamy po normowaniu wartości jej kształtu wielkością  $4\pi$ , tj.

$$K_C' = 4\pi K_{Ck} = 1$$

Z tzw. problemu izoperymetrycznego rozwiązanego przez Eulera wiadomo, że koło jest tą figurą ze zbioru figur płaskich o jednakowym polu, która ma najmniejszy obwód. Stąd wartość  $K_C' = 1$  dla koła jest maksymalną w zbiorze wszystkich figur płaskich. Koło jest szczególnym przypadkiem elipsy o polu  $A = \pi ab$  ( $a, b$  - osie elipsy) i przybliżonym obwodzie  $P = \pi [1,5(a+b) - \sqrt{ab}]$ . Ścisłą wartość obwodu oblicza się z całek



eliptycznych, których konstrukcja funkcji podcałkowej strukturalnie przypomina przybliżoną wartość obwodu. Żeby wykazać jednak ufunkcyjnienie  $K_C$  elipsy, wygodniej jest posłużyć się relacją przybliżoną. Tak więc  $K_C$  elipsy wynosi:

$$K_C = \frac{\pi ab}{\pi^2 [1,5(a+b) - \sqrt{ab}]^2}, \quad (26)$$

po unormowaniu:

$$K_E = \frac{4ab}{[1,5(a+b) - \sqrt{ab}]^2}; \quad (27)$$

$2a, 2b$  - osie elipsy są jednocześnie minimalną i maksymalną średnicą Fereta. Niech  $b < a$  oraz  $w = b/a$  będzie wydłużeniem względnym. Wówczas relację (27) można zapisać:

$$K_E = \frac{4w}{[1,5(1+w) - \sqrt{w}]^2}; \quad w \in [0,1] \quad (28)$$

Figurą płaską, która ogranicza z dołu zbiór wszystkich płaskich figur wypukłych jest trójkąt. Równanie  $K_C$  dla trójkątów otrzymuje się analizując obwiednię rodziny trójkątów o wspólnej podstawie, dla których suma dwóch pozostałych boków jest stała. Rozwiązanie tego problemu jest analitycznie dość proste, ale bardzo obszerne, stąd poniżej podana została tylko ostateczna jego forma:

$$K_{T_T} = \frac{2\pi w}{[1 + \sqrt{4w^2 + 1}]^2}; \quad w \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}]. \quad (29)$$

Z relacji (28) i (29) wynika, że są one funkcjami wydłużenia względnego będącego ilorazem średnic Fereta. Zatem dla  $K_C$  spełnia postulat c).

Reasumując, wprowadzone do analizy kształtu wielkości  $D, I, K$  spełniają wstępne postulaty a) ÷ d).

Mając określone związki (28) i (29) można skonstruować przestrzeń kształtów wypukłych.

Przedział określoności wydłużenia względnego  $w$  wynosi dla okręgu  $w \in [0,1]$ , stąd  $K_E \in [0,1]$ .

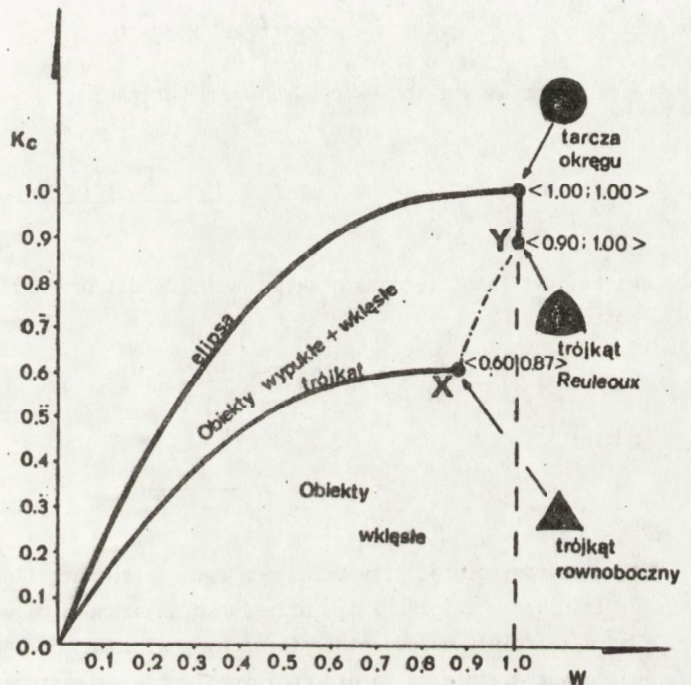
Dla trójkąta  $w \in [0, \sqrt{3}/2]$ ;  $K_T \in [0, \frac{\pi\sqrt{3}}{9}]$ .

Koło należy do klasy figur płaskich o stałej szerokości mających największe pole i obwód  $\lambda\pi$ . Ten sam obwód, średnicę  $\lambda$ , a najmniejsze pole ma trójkąt Reuleouxa. Stąd dla  $w = 1$  mamy  $K_{TR} \in [1; 0,89]$ .

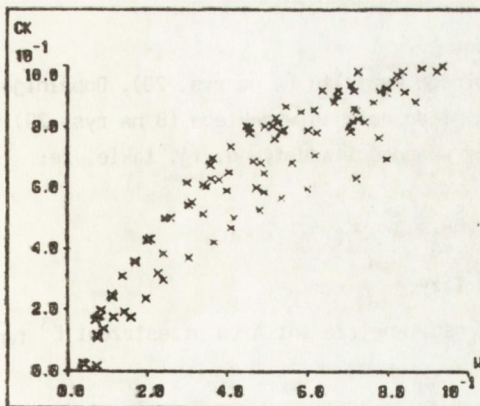
Na rys. 17 przedstawiono wykresy funkcji (28) i (29) oraz przedział zmian dla figur o stałej szerokości. Piszącemu nie udało się rozwiązać ograniczenia przestrzeni kształtów pomiędzy punktami X i Y na rys. 17. Jest to zapewne homeomorfizm  $h$ : trójkąt równoboczny  $\rightarrow$  trójkąt Reuleouxa przy warunku  $1 : w = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow w = 1$ . Funkcja zamykająca obszar zmian kształtów wypukłych od punktu X do Y przechodzi przez kształty owalne. Prawopodobna funkcja domknięcia obszaru może mieć charakter przedstawiony na rys. 17 linią przerywaną.

Na rys. 18 przedstawiono doświadczalne dane, określające przestrzeń kształtów wypukłych, uzyskane na analizatorze obrazu Videoplan 2A. Całkowicie potwierdzają one dane uzyskane z rozwiązań analitycznych, przedstawione na rys. 17.

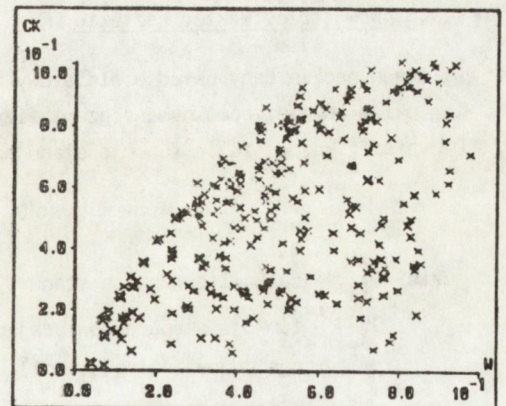
Na rys. 19 przedstawiono doświadczalne dane dla dowolnych obiektów wklęsłych. Łatwo zauważyć, że pokrywają one praktycznie cały obszar pod funkcją graniczną dla elipsy i prostą poprowadzoną przez punkty  $(K = 0; w = 1)$  oraz  $(K = 1; w = 1)$ . Nakrywają



Rys. 17. Obszar określoności współczynników kształtu zewnętrznego



Rys. 18. Przestrzeń kształtów wypukłych mierzonych VIDEOPLANEM



Rys. 19. Przestrzeń różnych kształtów



tym samym przestrzeń kształtów wypukłych sugerując niejednoznaczność, a więc nieokreśloność rozwiązania. Zjawisko to ma jednak swoje matematycznie jednoznaczne uzasadnienie.

Ze względu na założenie wyrażone przez relację (11), każdy kształt wypukły jest sumą skończonej liczby składowych. Mogą one być tak wklęsłe, jak i wypukłe. A mianowicie: ponieważ  $A_C = \sum_{i=1}^n A_i$  składa się z n składników, to przekształcając (2) otrzymujemy:

$$K_C I_C^2 = K_i I_i^2 / D_i . \quad (26)$$

Sumując po wszystkich składowych mamy wartość

$$K_C = \frac{1}{n} \frac{\sum K_i I_i^2 / D_i}{I_C^2} , \quad (27)$$

która jest istotnie sumą n składowych. Jeżeli przekształcimy (27) do następującej postaci:

$$K_C = \sum_{i=1}^n K_i R_i \quad (28)$$

gdzie:

$$R_i = \frac{I_i^2}{n D_i I_C^2} ,$$

to otrzymamy postać przypominającą swoją strukturą iloczyn wektorowy.

Istnieje w związku z tym przesłanka wskazująca na wektorową reprezentację kształtu. Jednakże ścisły dowód istnienia cechy wektorowej nie jest możliwy do przeprowadzenia bez odwołania się do bardzo ogólnych twórców matematycznych. Dlatego, przenosząc wyjaśnienie tego aspektu analizy kształtu do ostatniej części wywodów teoretycznych, zostanie rozpatrzone wcześniej istnienie termodynamicznego obrazu kształtu.

### III.3. Wewnętrzny wektor kształtu

Niech będzie dany układ wielofazowy dowolnego kształtu (A na rys. 20). Dopełnijmy ten układ również dowolnymi fazami fizycznymi do obiektu wypukłego (B na rys. 20). Przypiszmy każdej fazie funkcje stanu mające własności addytywne, tj. takie, że:

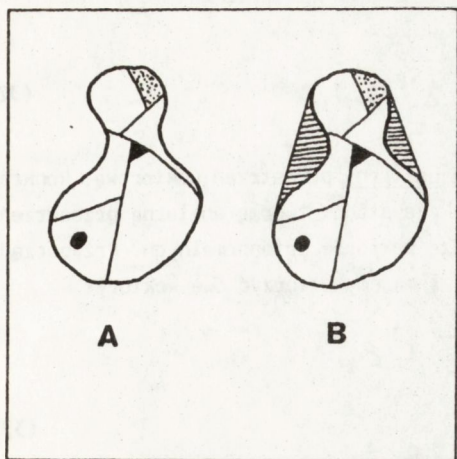
$$G_i = G_{A_i} + G_{P_i}$$

gdzie:  $G_i$  - całkowita funkcja stanu i-tej fazy,

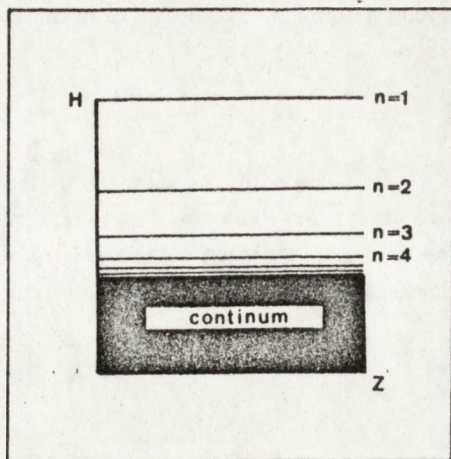
$G_{A_i}$  - funkcja stanu odpowiadająca części wnętrza int A (w przestrzeni  $E^3$  funkcja odpowiada objętości),

$G_{P_i}$  - funkcja stanu odpowiadająca części ograniczenia bd A (w  $E^3$  - funkcja powierzchni rozdziału faz).

Fizycznie funkcji stanu odpowiada na przykład każdy potencjał termodynamiczny.



Rys. 20. Twór wielofazowy A z dopełnieniem do zbioru wypukłego B



Rys. 21. Fazowa przestrzeń kształtów z podprzestrznią stanów ekstremalnych

Średnie wartości funkcji przypadające na jednostkę int A lub bd A wynoszą odpowiednio:

$$g_{A_i} = \frac{G_{A_i}}{A_i},$$

$$g_{P_i} = \frac{G_{P_i}}{P_i}.$$
(29)

Średnie wartości funkcji stanów dla obu części układu wielofazowego będą odpowiednio równe:

$$g_A = \frac{\sum_i g_{A_i} A_i}{\sum_i A_i} = \frac{\sum_i g_{A_i} A_i}{A_C},$$

$$g_P = \frac{\sum_i g_{P_i} P_i}{\sum_i P_i} = \frac{2 \sum_i g_{P_i} P_i}{2P_t}.$$
(30)

Z uwagi na (12) i (18) otrzymujemy:

$$g_A = \sum_i g_{A_i} D_i,$$

$$g_P = \sum_i g_{P_i} I_i.$$
(31)



Średnia funkcja stanu będzie natomiast równa:

$$g = \sum_i g_{A_i} D_i + \sum_i g_{P_i} I_i. \quad (32)$$

Łatwo udowodnić, że wartości  $D_i$  i  $I_i$  tworzą unitarną przestrzeń wektorową, konkretnie przestrzeń Hilberta. Podobnie, średnie funkcje stanów tworzą unitarną przestrzeń wektorową. Przestrzeń unitarna ma naturalną bazę wektorów ortonormalnych. Przyporządkowując części int A wersor  $T_i$ , a bd A wersor  $Z_i$  możemy utworzyć dwa wektory:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \sum_i D_i T_i + \sum_i I_i Z_i, \\ \vec{G} &= \sum_i g_{A_i} T_i + \sum_i g_{P_i} Z_i. \end{aligned} \quad (33)$$

Wówczas z uwagi na (32):

$$g = \vec{H} \cdot \vec{G} \quad (34)$$

będzie iloczynem skalarnym wektorów  $\vec{H} \cdot \vec{G}$ , gdzie:

$\vec{H}$  - wektor kształtu wewnętrznego układu,

$\vec{G}$  - wektor funkcji stanów.

Z fizycznego punktu widzenia reprezentacja wektorowa (34) ma oczywiste korzyści. Wektor kształtu  $H$  ma określoną długość  $\|H\|$ ,

$$\|H\| = \sqrt{\sum_i^n D_i^2 + \sum_i^n I_i^2}, \quad (35)$$

która osiąga wartość ekstremalną dla przypadku  $n$  identycznych faz.

Wtedy:

$$\|H\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{2}{n}}. \quad (36)$$

stąd dla  $n = 1$   $\|H\| = \sqrt{2}$ ,

$n \rightarrow \infty$   $\|H\| = 0$ .

Z poprzedniego wiadomo, że każdemu z kształtów wypukłych możemy przyporządkować ogólnie nieskończoną liczbę składowych tak wklęsłych, jak i wypukłych. Przestrzeń kształtów wklęsłych jest dokładnie określona wielkościami  $K_C$  i  $w$ . Jeżeli  $K_C$  i  $w$  przyjmiemy za składowe wektora kształtu zewnętrznego  $Z$ , to jego ekstremalne wartości wyniosą:

$$\begin{aligned} \|Z\| &= \sqrt{K_C^2 + w^2}, \\ \|Z\| &= \sqrt{2} \quad - \text{okrąg}, \\ \|Z\| &= 0 \quad - \text{elipsa skrajnie wydłużona}. \end{aligned} \quad (37)$$

<http://rcin.org.pl>

Mając ekstremalne wartości  $\|H\|$  i  $\|Z\|$  otrzymujemy fazową przestrzeń ewolucji kształtów "S" (rys. 21).

Warto zwrócić uwagę, że przestrzeń ewolucji kształtów  $S = [H, Z]$  (obejmująca stany ekstremalne  $S_E \equiv [H_{eks}^i, Z]$ ,  $S_E \in S$ ) dla dostatecznie dużych  $n$  tworzy continuum, tzn. różnica między stanami ekstremalnymi i pośrednimi jest nieistotna. Dla małych  $n$  podprzestrzeń stanów ekstremalnych  $S_E$  staje się dyskretną.

Dla potencjałów termodynamicznych będących funkcjami stanu, z wyłączeniem entropii, istnieje generalnie jedna postać równań.

Niech  $G(1)$  oznacza funkcję stanu dla układu w stanie wyjściowym,  $G(2)$  w stanie końcowym. Wówczas:

$$G(2) - G(1) \leq W_{el} \quad (38)$$

gdzie:  $W_{el}$  - jakakolwiek praca procesu elementarnego nie będąca wyrażeniem Pfaffa,  
 $W_{el}$  - wyrażenie Pfaffa dla przemian quasistatycznych (przemiana quasistatyczna - temperatura i siły zewnętrzne są nieskończenie mało różne od temperatury i sił własnych układu).

Należy w sposób szczególny podkreślić fakt, że powyższe równanie ogólne ma matematycznie formę bezwzględną. Rozumieć należy przez to, że niezależnie od tego czy praca jest wykonywana przez układ, czy nad układem, jest ono słuszne. Jednakże należy je dokładnie odczytywać kojarząc z matematycznym warunkiem bezwzględności w następujący sposób: "jeżeli wykonujemy pracę nad układem (znak "+" dla pracy), to praca ta jest większa niż zmiany funkcji stanu;

Jeżeli praca jest wykonywana przez układ (znak "-" dla pracy, to będzie jej mniej niż świadczyłby o tym ubytek związany z różnicą w funkcjach stanu".

Podobna relacja jak (38) dotyczy potencjałów średnich, tj.

$$g(2) - g(1) \leq \overline{W_{el}} \quad (39)$$

i w ślad za tym (33)

$$H(2) \cdot G(2) - H(1) \cdot G(1) < \overline{W_{el}},$$

a stąd:

$$H(2) - H(1) \leq \overline{H_{W_{el}}}. \quad (40)$$

Jeżeli  $\overline{W_{el}} = 0$ , to

$$H(2) - H(1) \leq 0. \quad (41)$$

Podsumowując zagadnienia wektorowej reprezentacji kształtu należy zwrócić uwagę na dwa istotne jej elementy:

- funkcja kształtu (25) spełnia postulowane prawo sumowania kształtów, które mówi [11]: "Jeżeli zsumujemy dwa lub więcej kształtów, to kształt wynikowy nie może być bardziej kształtny niż okrąg".
- w praktyce metalograficznej ekstremalna wartość wektora kształtu  $H$  nie może być większa niż  $\sqrt{1,5}$ , a więc nie osiąga  $\sqrt{2}$ .



Istotnie, np. dla okręgu:

$$D_i = 1; P_i = P_C \quad I_i = 0,5 = I_C.$$

Stąd z (35) mamy:

$$D_i^2 + I_i^2 + I_C^2 = 1 + 2(0,5)^2 = 1,5.$$

Wartość  $\|H\| = \sqrt{2}$  jest zarezerwowana dla obiektów nie mających odzwierciedlenia metalograficznego, tj. kiedy  $P_i \gg P_C$ ; wówczas  $I_i \rightarrow 1$ ;  $I_C \rightarrow 0$  i sama powierzchnia tworzy fazę obiektu. Można taki przypadek, w płaskim sensie, wyobrazić sobie jako ciasno nawiniętą spiralnie nić (rys. 22) lub ciasno upakowaną funkcję wychodzącą ze wspólnego kątka.

Obiekty fizyczne o tych właściwościach istnieją, lecz w sensie metalograficznym są do zaniedbania.

W dalszej części będą omawiane jedynie te obiekty strukturalne (zwane klasycznymi) dla których  $\|H\| = \sqrt{1,5}$ .

Klasyczne podejście do analizy kształtu, prezentowanej powyżej jego reprezentacji wektorowej, nosi znamiona sztucznych zabiegów mających na celu ubarwienie, uwiarygodnienie proponowanych rozwiązań. Z zarzutami takimi pisał się w trakcie seminariów, na których była przedstawiana powyższa koncepcja kształtu.

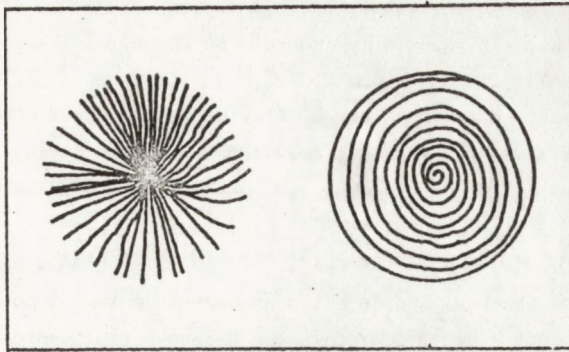
Zwłaszcza krytycznie podchodzono do problemu przestrzeni wielowymiarowych, nawet rzeczywistych  $R^n$ . Zakorzeniony, klasyczny obraz wektora w przestrzeni  $E$ , jako tworzu stricte fizycznego jak siła, prędkość itp., nie pozwalał często na znalezienie wspólnego języka w trakcie dyskusji.

Wszelka argumentacja, która niszczy klasyczne proste obrazy, jest trudna. Problem bowiem w tym, że argumenty leżą zazwyczaj w zasobach ogólniejszych teorii, rzadziej stosowanych i przez to utożsamianych z mało praktycznymi.

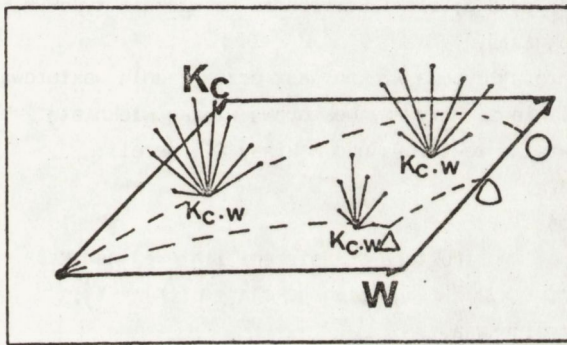
W trakcie różnych dyskusji wyłonił się pewien prosty obraz przestrzeni kształtów, dobrze modelujący wyobraźnię, pozwalający zaakceptować wektorową reprezentację kształtów. Mianowicie: weźmy dowolny kształt wypukły, podzielmy go na skończoną liczbę składników mających dowolne kształty. Tym samym jednemu punktowi przestrzeni kształtów  $(K_C, w)$  został przyporządkowany ogólnie nieskończony zbiór kształtów dowolnych. Wiadomo, że zbiór  $(K_C, w)$  jest również nieskończony. Tak więc jednemu z punktów przestrzeni nieskończonej jest przyporządkowany zbiór nieskończony. Można to sobie wyobrazić w sposób przedstawiony na rys. 23, gdzie z jednego punktu  $(K_C, w)$  wyrasta nieskończenie liczba linii, których zakończenia wskazują współrzędne kształtów będących składnikami jednego kształtu wypukłego. Przejście od linii do wektorów jest teraz prostsze.

Jednakże obraz ten nie pozwala zarejestrować układu współrzędnych zaczepionego w punkcie  $(K_C, w)$ , jego natury szczególnej. Przybliżyła tylko pewne pojęcie, znane w nieklasycznej geometrii różniczkowej, a mianowicie - wiązki wektorowej.

Wiązki wektorowe dają najbardziej elegancką reprezentację kształtów. Pozwalają na wnikliwą analizę zjawisk fizycznych. Jednakże dość szeroki zakres pojęciowy takiej wykładni geometrii różniczkowej jest nietypowy dla powszechnych kursów wyższej matematyki. Fakt ten skłonił piszącego do ograniczonej prezentacji rozwiązań w tych katego-



Rys. 22. Nieklasyczne twory przestrzeni kształtów



Rys. 23. Przybliżony obraz wektorowej przestrzeni kształtów

riach. Zrezygnowano ze wszystkich informacji płynących z teorii koneksji liniowych w przestrzeniach włóknistych głównych. Przedstawiono w formie kolejnych definicji pewien szkielet logiczny usprawiedliwiający dedukcyjną formę dalszych rozwiązań dla doświadczalnie obserwowanych zachowań cząstki materii swobodnej, czy zespołu związanych cząstek materialnych. Pomocne, dla zainteresowanych współczesną geometrią różniczkową, mogą być najnowsze prace [12, 13] lub w dziedzinie zastosowań - praca [14] (z ogromną bibliografią).

Obszarem egzystencji wiązek włóknistych, czy wektorowych wiązek włóknistych, jest bardzo ogólny twór zwany przestrzenią topologiczną. Jeżeli istnieje odwzorowanie tej przestrzeni w ciało liczb rzeczywistych bądź zespolonych, to przestrzeń taka nazywa się rozmaiutością. Rozmaiutość może mieć konkretną strukturę metryczną. Na rozmaiutości można określać funkcje i porównywać je.

Mówimy, że funkcje mają ten sam kiełek w punkcie należącym do rozmaiutości, jeżeli istnieje takie otoczenie tego punktu, na którym te funkcje są identyczne. Określenie funkcji "na" punkcie, a nie "w" punkcie ma swoje głębokie uzasadnienie w strukturze rozmaiutości i nie jest błędem stylistycznym.



Dwie krzywe przechodzące przez punkt wspólny nazywamy wzajemnie stycznymi w tym punkcie, jeżeli ich wektory styczne w tym punkcie są równe.

Niech  $M$  będzie rozmaitością  $C^k$ , a punkt  $p \in M$ .

Niech  $T_p(M)$  będzie zbiorem krzywych klasy  $C^1$  przechodzących przez punkt  $p$  oraz niech " $\sim$ " oznacza relację wzajemnej styczności rozumianej w sensie kielka.

Przestrzeń ilorazowa  $T_p(M)/\sim$ , liniowa, jest przestrzenią styczną do  $M$  w  $p$  i oznaczamy ją przez  $T_p(M)$ .

Jeżeli  $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$  będzie sumą rozłączną, to  $T(M)$  jest wiązką styczną nad  $M$ .

Układ trzech elementów  $(E, B, \mathcal{T})$ , gdzie  $E$  i  $B$  są przestrzeniami topologicznymi,  $\mathcal{T}: E \rightarrow B$  - ciągłym surjektywnym odwzorowaniem nazwanym rzutowaniem, nazywamy wiązką.

Wiązka włóknista jest to układ złożony z pięciu elementów  $E(B) \equiv (E, B, \mathcal{T}, G, F)$ , gdzie  $(E, B, \mathcal{T})$  jest wiązką;  $E$  - przestrzenią wiązki,  $B$  - przestrzenią bazową, zbiór  $\mathcal{T}^{-1}(x) \equiv F_x$ ;  $x \in B$ , nazywa się włóknem nad  $x$ .

Układ  $E(B)$ , dla którego  $G$  działa lewostronnie na włóknie typowym  $F$  oraz  $F = G$  nazywamy główną wiązką włóknistą.

Wiązkę włóknistą, której typowe włókno jest przestrzenią wektorową, a grupa strukturalna  $G$  jest grupą liniową, nazywamy wektorową wiązką włóknistą.

Mówimy, że  $E$  jest wiązką wektorową nad  $M$  klasy  $C^\infty$ , jeżeli:

$E$  jest  $C^\infty$  rozmaitością,

jest określona surjekcja  $\mathcal{T}: E \rightarrow M$ ,

każde włókno  $E_p = \mathcal{T}^{-1}\{p\}$  ma strukturę przestrzeni liniowej nad  $\mathbb{R}$ .

injekcja =  $\{x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\}$ ; surjekcja =  $\{f(X) = Y\}$ ;

surjekcja + injekcja = bijekcja.

Polem wektorowym określonym na podzbiorze  $A \in M$  nazywamy odwzorowanie

$X: A \rightarrow T(M)$  takie, że złożenie odwzorowań  $\mathcal{T} \circ X \rightarrow \text{id}_A$ .

Cięciem wiązki wektorowej  $E$  nad  $M$  nazywamy każde odwzorowanie  $V: M \rightarrow E$  takie, że  $\mathcal{T} \circ V \rightarrow \text{id}_M$ ; jeżeli  $E = T(M)$ , to są one polami wektorowymi nad  $M$ .

Przedstawione powyżej definicje i określenia można krótko streścić następującym przepisem postępowania:

jeżeli stworzymy dowolną klasę tworów abstrakcyjnych wyposażonych w pewną topologię (dodawanie, mnożenie mnogościowe i istnienie "zera" - zbiór pusty) oraz znajdziemy dla niej odzwierciedlenie w zbiorach liczb rzeczywistych bądź zespolonych, to możemy tę klasę abstrakcji mierzyć. Nadto sama klasa abstrakcji może być wyposażona w pole określające np. zjawiska fizyczne. Jest to największy pożytek, jaki daje taka wykładnia geometrii różniczkowej.

W tym miejscu warto oszacować drogę pomiędzy typowymi metodami metalografii ilościowej a proponowaną jej strukturą. I tak, z przestrzeni  $E^3$  metalografii ilościowej przechodzimy do rozmaitości z odwzorowaniem w  $\mathbb{R}^n$ . Odrzywamy się od przestrzeni  $E^3$ . Rozmaitość nie jest bowiem nawet zanurzeniem w  $E^n$ . Istnieje szansa określenia pola wektorowego zjawisk fizycznych związanych z transformacją kształtu. Pole, jako ciągły nośnik informacji, pozwala przewidywać. Stąd zamiast metody pomiarowej, uzyskuje się teorię.

Z kształtem jest związane pole. Można przekonać się o tym natychmiast przyjmując, że rozmierność tworzą punkty  $K_C$

$$K_C = \frac{K_i}{I_C^2} \frac{I_i^2}{D_i},$$

a wiązkę wektorową o włóknie  $E_P$  punkty

$$K_C = \frac{1}{2} \frac{K_i I_i}{I_C^2 D_i}$$

odwzorowanie  $\mathcal{T}$  jest tożsamy z  $\int K_C \cdot dI_i$ .

Włókno  $E_P$  ma strukturę liniową nad  $R$  z dodawaniem wektorów, mnożeniem przez skalar i metryką daną przez iloczyn wektorowy.

Istnieje cięcie wiązki wektorowej  $E$  będące polem wektorowym nad  $K_C$ , ponieważ:

$$\frac{dK_C}{dI_i} = 1/2 \frac{K_i I_i}{I_C^2 D_i}. \quad (42)$$

Stąd odwzorowanie  $V$  utożsamiamy z operatorem różniczkowania  $d/dI$ .

Nadto  $\int (d/dI)dI = id_{K_C}$ , jako złożenie daje identyczność na  $K_C$ .

Przestrzeń styczna  $T(K_C)$  jest zbiorem krzywych o równaniu:

$$I_i = \alpha \cdot D_i \quad (43)$$

tj. krzywych klasy  $C^1$ .

W myśl przytoczonych definicji, istnieje pole wektorowe nad  $K_C$ , w którym egzystuje wektor kształtu wewnętrznego o składowych  $[I_i, D_i]$ . Ponieważ, co wykazano, wiąże się on z funkcją stanu mającą w termodynamice postać energii, to otrzymane pole jest energetycznym polem kształtów.

Z wektorem kształtu wewnętrznego jest związany potencjał tego pola:

$$\varphi = \sum D_i I_i. \quad (44)$$

Istotnie, różniczkując  $\varphi$  po składowych  $D_i; I_i$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I_i} = D_i; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial D_i} = I_i$$

otrzymujemy składowe wektora kształtu wewnętrznego.

Wektorowa reprezentacja kształtu uzasadnia obserwowane pokrycie przestrzeni kształtów wypukłych kształtami dowolnymi. Są to mianowicie rzuty wektorów kształtu wewnętrznego na rozmierność  $K_C$  styczne w punktach  $(K_C, w)$ .



Najistotniejszy wniosek, jaki daje reprezentacja wektorowej wiązki kształtu jest następujący: z kształtem jest związane potencjalne pole energetyczne.

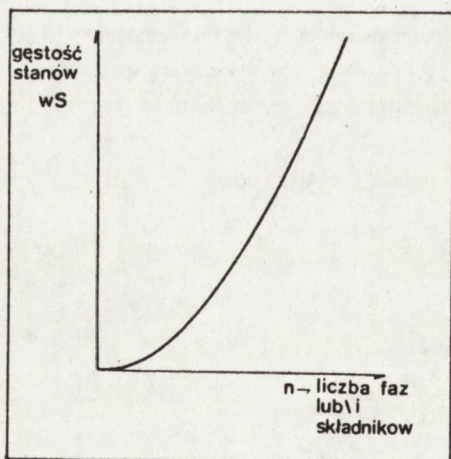
Przedstawione powyżej rozwiązania w teorii wektorowych wiązek włóknistych stanowią, o czym wspomniano, tylko pewien aparat pojęciowy mający zwrócić uwagę na istnienie pola kształtów. Szczytowym osiągnięciem takiej teorii byłoby podanie równań pola. Prace teoretyczne prowadzone przez autora są zakończone, ale przed opublikowaniem wymagają szczegółowej konsultacji z fizykami teoretykami.

Nie znając równań pola kształtów możemy jednak sporo powiedzieć o jego strukturze. Wystarczy przeanalizować wielokrotnie powtarzane w tej pracy zdanie:

"jeden kształt wypukły daje podzielić się na dostatecznie dużą liczbę składowych o różnych (nie dowolnych) kształtach"

i skojarzyć je z istnieniem ekstremalnej wartości wektora kształtu wewnętrznego H.

Wiadomo, że wektor H uzyskuje wartość ekstremalną dla  $n$  jednakowych składników. Łatwo przekonać się, że jest to minimum (ekstremum funkcji  $f = \sqrt{\sum X_i^2}$ , przy warunku  $\sum X_i = 1$ ). Tak więc, z całej przestrzeni kształtów  $S$  możemy wyodrębnić podprzestrzeń kształtów spełniających warunek minimum. Ale z faktu, że każdy obiekt wypukły możemy podzielić na różne kształty nie wynika, że wszystkie one będą jednakowe. Przeciwnie, nie każdy kształt daje się podzielić na  $n$  jednakowych elementów. A zatem w przestrzeni kształtów minimalnych muszą istnieć stany kształtów wzbronionych. Oznaczamy je  $wS_n^i$ , gdzie  $n$  jest numeratorem liczby składników, faz;  $i$  - numeratorem kształtu wypukłego w przestrzeni  $S$ . Stany możliwe oznaczamy  $mS_n^i$  (rys. 24). Stany wzbronione istnieją w całej przestrzeni kształtów  $S$ . Inaczej byłyby realizowane pokrycia zbiorów wypukłych dowolną, a nie tylną różną klasą podzbiorów mających rozłączne sumy.



Rys. 24. Ilustracja zmian gęstości stanów wzbronionych

Ponadto podprzestrzeń  $S_e \subset S$  oraz istnieje homeomorfizm  $h : S \rightarrow S_e$ . Stąd własność topologiczna (istnienie stanów  $mS$  i  $wS$ ) przenosi się na całą przestrzeń  $S$ .



Gęstość stanów wzbronionych wzrasta wraz z liczbą składników.

Można dowieść, że:

jeżeli liczba składników wzrasta o jeden  $n \rightarrow n + 1$ , to liczba stanów wzbronionych wzrasta nie mniej niż o  $K-1$ ; gdzie  $K$  jest liczbą wszystkich możliwych kształtów wchodzących w skład rozłącznego pokrycia obiektu wypukłego.

Zatem liczba stanów wzbronionych rośnie odwrotnie proporcjonalnie do wartości wektora  $H$ .

Podobnie można udowodnić, że dla danego  $n = \text{const.}$  gęstość stanów wzbronionych jest względnie stała w kierunku zmian wektora  $Z$ . Konkretnie, jest ona funkcją wolno-zmienną w porównaniu z funkcją zmian gęstości  $wS$  w kierunku działania wektora  $H$ .

Reasumując powyższe:

"poczawszy od pewnego  $n \gg 1$ , liczba stanów wzbronionych staje się na tyle duża, że prawdopodobieństwo znalezienia się układu w stanie możliwym dąży do zera".

Oznacza to, że dla dostatecznie dużych  $n$  odległości pomiędzy stanami wzbronionymi są tak małe, że wymuszają pewną drogę ewolucji kształtu układu.

$Z$  wektorem kształtu wewnętrznego jest związana funkcja stanu. Tym samym stanom  $mS$  i  $wS$  można nadać sens energetyczny.

Wiadomo, że ze wszystkich stanów energetycznych układ fizyczny wybiera ten, w którym funkcja stanu osiąga minimum. Jest nim układ  $n$  jednolitych faz i składników. Wobec tego, z całej przestrzeni kształtów układ będzie preferować te, dla których  $H \rightarrow H_{\min}$ . Preferować będzie przestrzeń stanów ekstremalnych  $S_E$  dążąc, zgodnie z zadaniem określonym np. relacją (39), od  $H_{\min}(n+1) \rightarrow H_{\min}(n)$ . W  $H_{\min}(n)$  lub wcześniej może się znaleźć w stanie  $mS$  lub w otoczeniu stanu  $wS$ . Stan  $mS$  niczym szczególnym się nie wyróżnia; układ może go osiągnąć i kontynuować drogę. Stan  $wS$  jest rodzajem pułapki. Jeżeli układ znajdzie się w jego otoczeniu, to posiada z topologicznego punktu widzenia, dwie drogi wyjścia:

- Może przerywać granicę pomiędzy składnikami, zmieniając tym samym składowe  $D_i$  i  $I_i$ . W ten sposób układ wychodzi z podprzestrzeni  $S_E$  wchodząc w  $S$ . Oddala się od podprzestrzeni stanów minimalnych, do której znów nieuchronnie musi dążyć. Zmienia liczbę składników z  $n + 1 \rightarrow n$ .
- Może wygenerować granicę, która w skrajnych przypadkach doprowadzi do rozpadu układu na dwie lub więcej makroskładowych.

Generacja granicy skończonej, leżącej w obrębie kształtu  $K_C$ , może być obserwowana np. jako pęknięcie. Zmienia ona również  $D_i$  i  $I_i$ . Wytworzenie granicy nieskończonej doprowadza do rozpadu układu na makroskładowe. Tak układ w sposób nieciągły może osiągnąć gwałtowne przesunięcie w obszarze przestrzeni  $S$ .

Formy topologicznych rozwiązań z przestrzeni  $S$  dają się obserwować doświadczalnie.

#### IV. DOŚWIADCZALNY ASPEKT WEKTOROWEJ ANALIZY KSZTAŁTÓW

##### IV.1. Cząstka swobodna

Przyjęto następującą definicję cząstki swobodnej:

"Cząstką swobodną jest obiekt o dowolnym kształcie, składający się z fazy, która nie



ma żadnych granic z fazą identyczną. Składniki stanowiące ewentualne dopełnienie kształtu cząstki do obiektu wypukłego stanowią taką rodzajowo fazę, że przepływ materii przez granicę faz cząstki i składnika dopełnienia do kształtu wypukłego jest prawie niemożliwy".

Ta przydługa nieco definicja jest w gruncie rzeczy bardzo prosta. Każdy składający się z jednego kawałka (bez granic w środku) fragment materii jest wtedy cząstką swobodną, kiedy nie styka się z podobnymi materiałami.

Obserwacje cząstek swobodnych prowadzono na kształtach wykonanych ze stopu Wooda. Płynny stop wlewano do alkoholu etylowego uzyskując w ten sposób cienkie folie o różnych kształtach. Następnie cząstki te umieszczano w komorze uprzednio nagrzanej do temperatury  $T \gg T_{\text{Top}}$  stopu. Podłoże stanowiło szkło kwarcowe powleczone cienką warstwą kalafonii, nanoszoną z roztworu. Warstwa ta wydatnie zmniejszała adhezję stopu do podłoża. Proces topnienia filmowano z szybkością 30 klatek/s. Do analizy kształtu wybrano co trzydziestą klatkę, tj: obraz co 1 sek. Dla jednej cząstki analizowano średnio 8-10 obrazów. Badano  $K_C = f(w)$  oraz kształty poszczególnych składników i fazy głównej  $K_i = f(w)$ ,  $D_i$ ,  $I_i$ .

Wstępnie, teoretycznie określono rodzaj toru, po jakim poruszać się będzie we współrzędnych  $(K_C, w)$  kształt cząstki, zmieniający się pod wpływem napięcia powierzchniowego.

Jest to trywialne zagadnienie rachunku wariacyjnego: znaleźć równanie krzywej, po której cząstka poruszająca się z prędkością będącą działaniem określonej siły przemieści się w najkrótszym czasie.

Ogólnym rozwiązaniem była parabola o równaniu:

$$K_C = \alpha \cdot w^2 + \beta \quad \alpha, \beta \neq \text{const.}$$

Tak więc, pod wpływem dominującej w tym doświadczeniu siły napięcia powierzchniowego, cząstka powinna dryfować we współrzędnych  $[K_C, w]$  po torze parabolicznym. Należy zauważyć, że rozwiązanie powyższe nie przewiduje rozpadu cząstki. Parabola jest krzywą ciągłą.

Na przebadanych 30 cząstek, 8 uległo rozpadowi, pozostałe, w sposób ciągły, przedryfowały do sfery. Na rys. 25 są przedstawione krzywe dróg cząstki rozpadającej - SHAPSPYD oraz cząstki ewoluującej w sposób ciągły - SHAPSPND. Tylko w przypadku ewolucji ciągłej tor cząstki we współrzędnych  $[K_C, w]$  jest parabolą. Świadczy o tym kolejność punktów pomiarowych. Dla cząstki rozpadającej się ogólna krzywa nie jest parabolą. Najpierw kształt dryfuje od punktu 1 do punktu 5. Następuje zmiana składnika o 1 i układ znajduje się w punkcie 6. Po dojściu do punktu 7, rozpada się na dwa elementy 8 i 9 zdążające do kul 10 i 11.

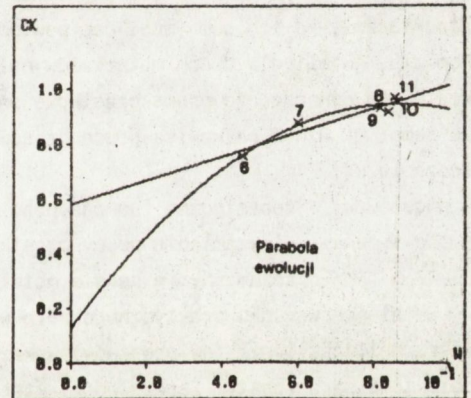
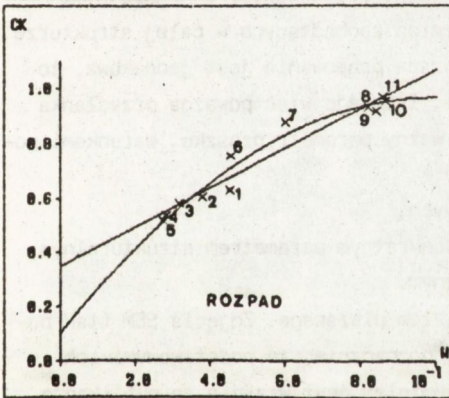
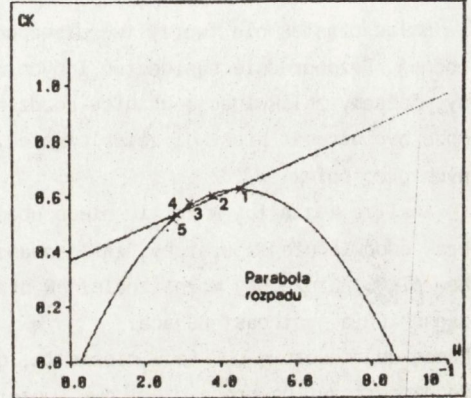
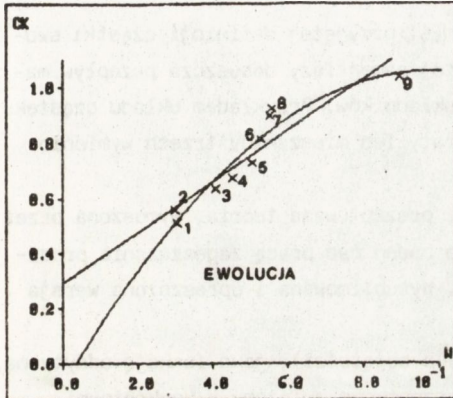
Na rys. 26 pokazano ten sam rozpad w rozbiciu na dwie parabole o przeciwnych kierunkach przemieszczania się cząstki przed i po rozpadzie.

Rys. 27 ilustruje kształty  $K_i = f(w)$  składników dopełnienia i fazy cząstki wyjściowej w punkcie zbliżonym do  $wS$ , w obszarze  $H_{\text{min}}$ , tj. tuż przed rozpadem oraz kształty produktów rozpadu. Rozproszone w punkcie wyjściowym kształty składników i fazy (I obszar) cząstki skupiają się w obszarze  $H_{\text{min}}$ , którego w konkretnej konfiguracji kształtu



składowych nie osiągną (II obszar). Następuje rozpad i powstają dwie cząstki tej samej fazy o kształtach kulistych (III obszar).

Wszystkie ciągłe transformacje kształtów były obserwowane dla  $n \leq 3$  składowych kształtu wypukłego. Dla  $n \geq 4$  obserwowano jedynie rozpad. Fakt ten koresponduje z gęstością stanów wzbronionych. Charakter transformacji ciągłych lub rozpadów, w 38 badanych przypadkach, był zawsze taki sam, jak w przedstawionym wyżej przykładzie.

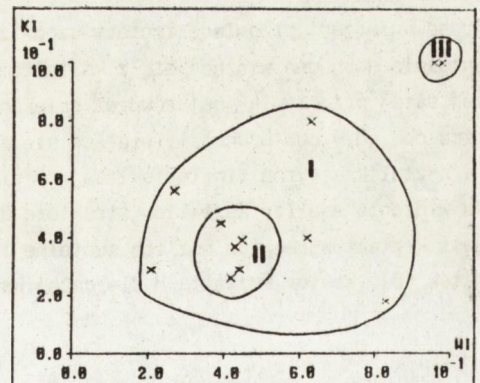


Rys. 25. Cząstka swobodna

Rys. 26. Cząstka swobodna

- I kształty począł.
- II w otoczeniu pkt.  $S_E$
- III koncowe

Rys. 27. Dryf kształtu składników cząstki swobodnej do  $S_E$



<http://rcin.org.pl>



Reasumując:

- Klasyczne rozwiązanie toru cząstki swobodnej we współrzędnych kształtu, poddanej działaniom sił napięcia powierzchniowego, nie przewiduje rozpadu cząstki.
- Obserwowany doświadczalnie rozpad wynika z istniejącego obrazu przestrzeni kształtów ekstremalnych.

#### IV.2. Układ cząstek

Układ cząstek nie tworzy tworu swobodnego w myśl przyjętej definicji cząstki swobodnej. Bezpośrednie sąsiedztwo innych cząstek tej samej fazy dopuszcza przepływ masy, tożsamy z likwidacją granicy rozdziału obu składników. Przykładem układu cząstek może być agregat proszku, zbiór cząstek, aglomeraty lub mieszaniny trzech wymienionych grup obiektów.

Analiza kształtu, w formie nieco uboższej niż prezentowana teoria, wymuszona przez brak odpowiedniej aparatury, zastosowana była do badań nad pracą zagęszczania proszków  $Al_2O_3$ . Szczegóły można znaleźć w pracy [16]. Wysublimowana i uproszczona wersja zagadnienia jest następująca:

Pracę objętościową  $p dV$  ( $p$  - ciśnienie;  $dV$  - zmiana objętości), jako funkcję addytywną, można rozłożyć na prace cząstkowe. Jeżeli prace cząstkowe zwiążemy z konkretnymi strukturami, to ich suma musi dać pewien obraz zmian zachodzących w całej strukturze. Ponadto, jeżeli dla dwóch materiałów całkowita praca prasowania jest jednakowa, to wcale nie oznacza, że prace cząstkowe są podobne. Istnieje więc poważna przesłanka ku temu, by uznać całkowitą pracę prasowania za ważny parametr proszku. Warunkami powodzenia są:

- podstawowy - teoretyczne funkcje prac cząstkowych,
- praktyczny - uotożsamienie pracy cząstkowej z konkretnym parametrem strukturalnym, rozumianym w sensie metalograficznym.

Ustalenie warunku praktycznego było współudziałem piszącego. Zdjęcia SEM (tak powierzchni, jak i szlifów proszków) wskazywały jednoznacznie, że podstawowymi ich obiektami są agregaty. Ze względów, których przedmiotem jest właśnie ta publikacja, tylko kształt mógł być poszukiwanym parametrem strukturalnym.

Dodatkowo za kształtem, jako parametrem strukturalnym, przemawiał następujący tok rozumowania:

Prasowanie jest przemianą izotermiczno-izobaryczną, dla której funkcją stanu  $G$  jest entalpia swobodna wiążąca się z kształtem równaniami (39-40). Procesem podlegającym tej samej przemianie jest również spiekanie. Istnieje doświadczalnie sprawdzona różnica pomiędzy obu procesami wiążąca się z reprezentacją kształtu.

Kształtka, wyrób finalny składający się w formie wyjściowej z agregatów, ma z punktu widzenia analizy kształtów strukturę dwoistą. Oddaje to w pełni rys. 28. Wyróżniony jest kształt agregatów bez ich subtelnej struktury (A) oraz wewnętrzna struktura agregatów (B). Wektor kształtu  $H$  dla całej kształtki będzie sumą dwóch wektorów:

$$H = H_{Agr} + H_{Sub} \quad (45)$$



gdzie:  $H_{Agr}$  - wektor kształtu wewnętrznego dla kształtki, bez struktury wewnętrznej agregatów;

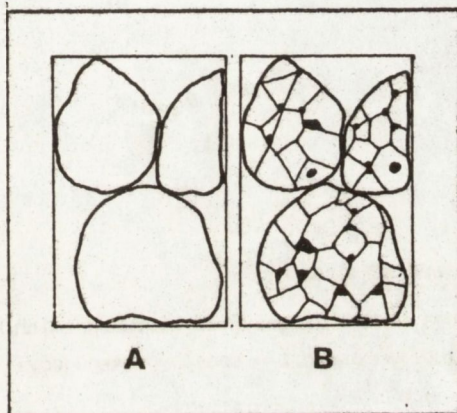
$H_{Sub}$  - wektor kształtu struktury wewnętrznej agregatu.

Jeżeli obszar pomiarowy  $H_{Agr}$  i  $H_{Sub}$  jest ten sam, to:

$$H_{Agr} > H_{Sub} \quad (46)$$

(biorąc pod uwagę rys. 28 -  $H_{Agr}$  - dotyczy 4 obiektów,

$H_{Sub}$  - dotyczy  $n$  obiektów wnętrza).



Rys. 28. Dwoista natura agregatów.

Wspomniana doświadczalna różnica polega na tym, że proces prasowania rozpoczyna się od zmiany  $H_{Agr}$ , a proces spiekania od zmian  $H_{Sub}$ . Ważne jest przy tym, że w obu procesach kierunek reakcji termodynamicznej jest dokładnie taki sam: do układu jest dostarczana energia

- w prasowaniu na sposób pracy mechanicznej,
- w spiekaniu na sposób ciepła.

Dlatego istotne, z punktu widzenia analizy kształtu, staje się wyjaśnienie różnych punktów startu procesów prasowania i spiekania przy identycznych kierunkach reakcji termodynamicznej.

Ustalmy (jako dodatni) kierunek przepływu zwiększający energię wewnętrzną układu. W prasowaniu jest wykonywana praca objętościowa  $W_V$  równa:

$$W_V = p dV = p(V_k - V_p) \quad (47)$$

Ponieważ  $V_k < V_p$  - kompresja układu, to  $dV < 0$  i

$$W_V = -pdV \quad (48)$$

jest ujemna.



Praca objętościowa prasowania, przy zadanym kierunku reakcji termodynamicznej, jest wolna od bezwzględnej postaci funkcji stanu.

Relacja (47) ma określony sens metryczny o strukturze operatorowej typu:

$$\begin{aligned} W &= \lambda \cdot p dV, \\ \lambda &= -1. \end{aligned} \quad (49)$$

Fakt ten należy uwzględnić analizując bezwzględną formę relacji (46).

$$H_{Agr} > H_{Sub} / \lambda \implies H_{Agr} < H_{Sub}.$$

Dla procesów spiekania wartość energii dostarczanej do układu w postaci ciepła jest określona tylko kierunkiem przepływu. Dlatego ( $Q_{el}$  - ciepło elementarne;  $Q_{pob}$  - ciepło pobrane):

$$\begin{aligned} Q_{el} &= \lambda \cdot Q_{pob}, \\ \lambda &= +1, \end{aligned}$$

Stąd:

$$H_{Agr} > H_{Sub} / \lambda$$

nie zmienia względnych wartości wektorów H.

Omawiając cząstkę swobodną, można zauważyć że kierunek zmian kształtu został przy-  
porządkowany kierunkowi przepływu energii w sposób następujący:

$$\text{otoczenie} \xrightarrow{+ \text{energia}} \text{układ} \implies H_p < H_k$$

W układzie pobierającym energię z otoczenia dryf kształtu w przestrzeni S odbywa się od

mniejszej do większej wartości wektora H. Uwzględniając istnienie potencjału kształt  $\varphi = \sum_i^n D_i I_i$ , poniższe sformułowanie staje się zbliżone do fizycznych definicji:

"Jeżeli układ pobiera energię, to jego kształt w formie bezwzględnej zmienia się od potencjału niższego do wyższego".

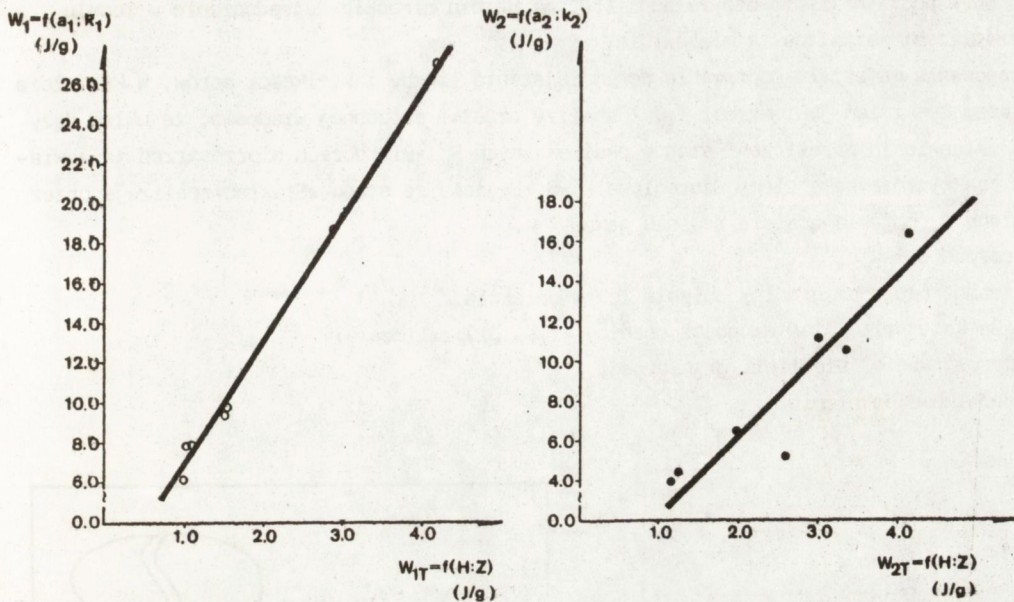
W eksperymentalnej ocenie proszków  $Al_2O_3$ , drogą określania prac cząstkowych w procesie ich prasowania, relacja (45) ma kapitalne znaczenie. Mianowicie, jest logiczne rozbitcie procesu prasowania przynajmniej na dwa etapy związane z pracami objętościowymi:

- zagęszczania agregatów -  $W_{Agr}$ ,
- zagęszczania w obrębie subtelnych struktur agregatów -  $W_{Sub}$ .

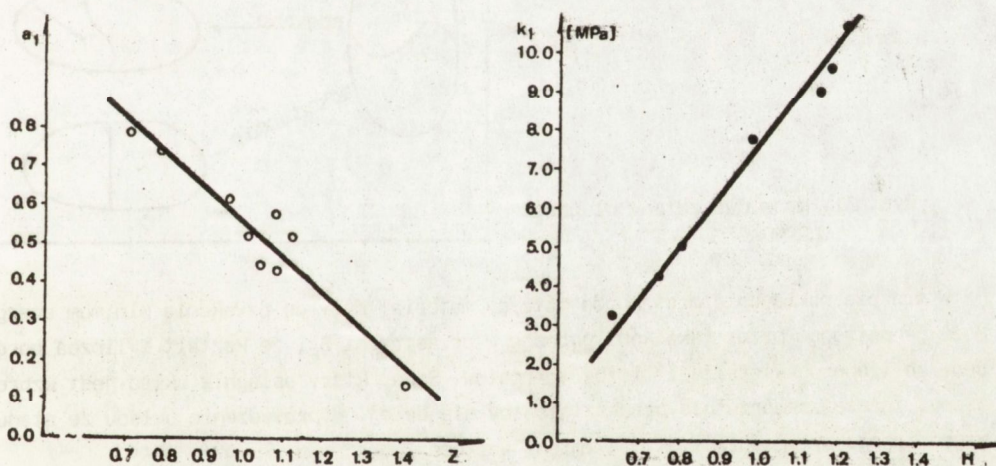
Funkcyjnie powyższym etapom będą odpowiadać  $H_{Agr}$  i  $H_{Sub}$ .

Ze względu na addytywność prac i związków (39-40) funkcje  $W_{Agr} = f(H_{Agr})$  i  $W_{Sub} = f(H_{Sub})$  powinny być liniowe.

Ostatnie zdanie jest traktowane jako teza. Poniżej, w formie wykresów, jest prezentowany jej dowód (rys. 29). Otrzymane dane doświadczalne całkowicie potwierdzają liniową zależność prac cząstkowych i odpowiadających im wektorów kształtu.



Rys. 29. Zależności funkcyjne pomiędzy doświadczalnymi  $[W_1; W_2]$  i teoretycznymi  $[W_{1T}; W_{2T}]$  pracami zagęszczania  $Al_2O_3$



Rys. 30. Zależności funkcyjne pomiędzy stałymi  $(a_1; k_1)$  statycznego równania zagęszczania a wektorami kształtu  $Z; H$  dla struktury A (rys. 28) proszków  $Al_2O_3$

Więcej, podejście pomiarowe wymusza relacje funkcyjne pomiędzy (rys. 29):

$$\begin{aligned} \psi_1 &: a_1 \wedge K_1 \rightarrow H_{Agr}, \\ \psi_2 &: a_2 \wedge K_2 \rightarrow H_{Sub}, \end{aligned} \quad (50)$$

gdzie:  $a_i, K_i$  - stałe statycznego równania prasowania (rys. 30)

$$f(V) = \sum e^{-a_i/K_i} \quad (51)$$



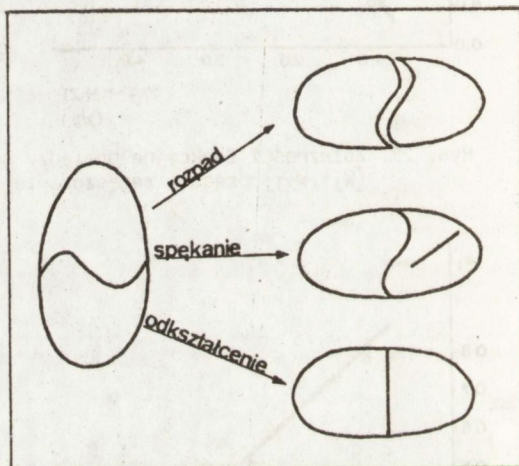
Doświadczalna liniowość relacji (50) ma bardzo głębokie uzasadnienie w modelu przestrzeni kształtów. A mianowicie:

Prasowanie materiału doprowadza do zmniejszenia liczby i wielkości porów. W kształcie śladem tym zmian jest wzrost  $I_1$ . Z analizy cząstki swobodnej wiadomo, że układ dąży do osiągnięcia przestrzeni stanów ekstremalnych  $S_E$ . Dla dużych  $n$  przestrzeni ta zawiera praktycznie same stany wzbronione - wS. Wyjście ze stanu wS układ realizuje przez zmianę  $I_1$  objawiającą się realnie jako:

- rozpad obiektu,
- zmiana długości granicy obiektu lub w obiekcie.

Do kategorii zmian długości granicy (rys. 31) zaliczamy:

- "prostowanie" się linii granicznej,
- dodatkowe pęknięcie.



Rys. 31. Modelowe zmiany długości granic

W trakcie nakładania proszku do matrycy materiał dąży do uzyskania minimum energii. Może je osiągnąć przez taką konfigurację w przestrzeni  $S_E$ , że kształt i liczba porów będą zbliżone do kształtu i liczby agregatów. Stan, który osiągnie układ jest wzbroniony, inaczej samorzutnie przekształcałby się dalej. Wyprowadzenie układu ze stanu wzbronionego wymaga pracy, która zmieni wartość  $I_1$ .

W rozbiciu na etapy procesu prasowania nie można odrzucić żadnej z dróg  $I_1$ . Można jedynie określić prawdopodobieństwo zajęcia jednego z aktów zmiany  $I_1$ . I tak:

- W pierwszym etapie praca jest zużyta w sposób ciągły na likwidację porów międzyagregatowych. Towarzyszy temu wzajemne przemieszczanie się agregatów z jednoczesnym odrywaniem najbardziej zewnętrznych, pojedynczych składników agregatów. Dominują efekty rozpadów na niewielkich płaszczyznach. Przeobrażając się układ wraca ponownie do przestrzeni  $S_E$ , powoli osiągając otoczenie stanu wS, w którym kształt i liczba porów między agregatami zbliża się do kształtu i liczby między składnikami.

Następuje drugi etap prasowania. Lawinowo narastają spekania wewnątrz agregatów idące po granicach między składnikami.

Układ wchodzi w kolejny stan wzbroniony dla  $S_E$ .



- W trzecim etapie dalsza redukcja porów może odbywać się przez spękania samych składników lub deformację ich granic.

W każdym punkcie aktu prasowania można pracę całkowitą rozbić na dwie składowe, tj. pracę objętościową  $pdV$  i inną pracę elementarną  $W_{el}(i)$ ; gdzie  $i$  oznacza etap prasowania.

Ponieważ w każdym ze stanów wzbronionych  $W_S$  &  $S_E$  dominuje inny efekt, to logicznym wydaje się wprowadzenie zależności:

$$\beta(i) = \frac{W_{el}(i)}{-pdV}$$

Mając wyrażenie na pracę całkowitą procesu prasowania w postaci

$$W_C = -pdV + W_{el}$$

można tą samą pracę przedstawić wyłącznie w funkcji pracy objętościowej

$$W_C = -pdV (1 + \beta(i)).$$

Ponieważ  $\beta(i)$  jest zmienne głównie w otoczeniu stanów  $S_E$ , to muszą być zauważalne załamania krzywych obrazujących pracę objętościową. Fakt ten stwierdzono doświadczalnie wykorzystując go do obliczenia stałych  $a_i$  i  $K_i$  statycznego równania zagęszczania.

Efekt załamania krzywych dla pracy objętościowej daje się przewidzieć z równań pola kształtów. Okazuje się, że w otoczeniu stanu wzbronionego  $W_S$  &  $S_E$  geodetyka (najkrótsza linia łącząca dwa punkty przestrzeni) gwałtownie zmienia swoją wartość. Konkretnie w punkcie  $W_S$  &  $S_E$  wartość jej staje się nieoznaczona. W punktach  $W_S$  &  $S/S_E$  wartości geodetyki prawdopodobnie rosną, ale nie stają się nieokreślone. Do końca jednak tego zagadnienia nie rozwiązano.

Analiza kształtu cząstki swobodnej i układu cząstek poddanych prasowaniu była zrealizowana najpełniej. Z szerszego grona zagadnień, szczególnie tych, które dotyczyły prac nad prasowaniem proszku  $Al_2O_3$ , dla jasności związków fizycznych z polem kształtu wybrano tylko niektóre. Pozostałe zagadnienia (jak np. związki kształtu z gęstościami: nasypową proszku, po prasowaniu i spiekaniu) znajdują się, wraz z omówieniem, w pracy [16].

Zaproponowany model analizy kształtu, szczególnie aspekt polowy oraz sama przestrzeń kształtów, dobrze opisują dwa sprawdzone doświadczalnie procesy:

- zmiana kształtu cząstki swobodnej pod wpływem siły napięcia powierzchniowego,
- prasowanie agregatów  $Al_2O_3$ .

Wyodrębniona w naturalny sposób z funkcji stanów opisujących procesy termodynamiczne, postać wektora kształtu wewnętrznego wiąże parametry typowej analizy metalograficznej, a mianowicie: pole, obwód i średnicę (odpowiedniki objętości, powierzchni i średnicy tworów materialnych).

Proponowana teoria nie odrzuca starych koncepcji. Przeciwnie, obejmuje je stając się bardziej ogólną. Ogólność swoją uzyskuje uwzględniając klasy nieokreśloności szczegółowych, geometrycznych metod ilościowej analizy metalograficznej.



Wektorowa reprezentacja kształtu pozwoliła uzyskać obraz pola kształtów. Połączenie równań pola z potencjałem kształtów daje szansę uzyskania rozwiązań dotyczących zachowania się struktury w różnych stanach energetycznych.

Brak aparatury i środków wstrzymuje prace doświadczalne. Nie oznacza to jednak rezygnacji z badań teoretycznych, które są prowadzone nadal. Między innymi wykonano komputerowe analizy symulacyjne procesu spiekania dla  $n = 200$  składników mających różne kształty i rozkłady wielkości. Uzyskano ciekawe rezultaty dotyczące szybkości spiekania w zależności od rodzaju rozkładu statystycznego, wielkości i struktury subtelnej składników.

Istnieją również prace, w których stosowano śladowo analizę kształtów. Do opracowań, które wniosły wkład w budowę teorii analizy kształtów zaliczyć należy szczególnie dwa:

- "Badanie kształtu i rekonstrukcja przestrzena wybranych zredukowanych proszków metali" (A. Gładki, Sprawozdanie z pracy badawczej ITME),
- "Opracowanie technologii proszków wolframu i molibdenu do past metalicznych stosowanych w złączach ceramika-metal" (z którego materiały zamieszczono w [17]).

Pierwsza z nich była punktem startu całej teorii. Z perspektywy ponad dziesięciu lat wydaje się być ogromnie niedoskonałą. Dała jednak pierwszy doświadczalny dowód na to, że kształt jest parametrem strukturalnym, na którym można budować teorię.

Druga praca dawała najwięcej szans doświadczalnego sprawdzenia równań pola kształtów. Była nadzieją weryfikacji teorii w procesach spiekania zagregowanej i niezagregowanej struktury, a także szansa oceny zmian pola kształtów w czasie oraz w punktach przemian fazowych. Los zrzucił, że w owym czasie ITME nie posiadał ani przyzwoitego mikroskopu skaningowego, ani analizatora obrazu. Przysłany na miesiąc, w celu przetestowania do Zakładu Badań Strukturalnych ITME, analizator Magiscan 2A musiał służyć przede wszystkim badaniom technologicznym.

## V. BIBLIOGRAFIA

- [1] Penrose R.: *Techniques of Differential Topology in Relativity*. Philadelphia 1972
- [2] Sikorski R.: *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Warszawa, PWN, 1967
- [3] Sieklucki K.: *Geometria i topologia*, Warszawa, PWN, 1978
- [4] Underwood E.E.: *Quantitative Stereology*, New York, Addison-Waley, 1970
- [5] Ryś J.: *Wstęp do metalografii ilościowej*, Katowice, Śląsk, 1970
- [6] De Hoff R.T., Rhines F.N.: *Quantitative Microscopy*, New York, Mc Graw Hill, 1968
- [7] Ambratsumian R., Weil W.: *Stochastic Geometry, Geometric Statistics, Stereology, Proceedings of a Conference held at Oberwolfach*, 1983
- [8] Irani R.R.: *Particle Size. Measurement Interpretation and Application*. New York, J. Willey and Sons Inc, 1963
- [9] Herdan G.W.: *Small Particle Statistics*, 2nd edn. London, Butterworths, 1960
- [10] Beddow J.K., Vetter A.F., Sisson K.: *Powder Metallurgy Review*. 9, part I, II, *Powder Metallurgy International*, 1976, Vol 8, No 2, 3
- [11] Beddow J.K., Philip G.: *On the Use of a Furier Analysis Technique for Describing the Shape of Individual Particles*
- [12] Goncarzewicz J.: *Geometria różniczkowa*. Warszawa, PWN, 1986
- [13] Wojtyński W.: *Grupy i algebry Liego*. Warszawa, PWN, 1986
- [14] Trautman A.: *Differential Geometry for Physicists*, Napoli, Stony Brook Lectures, Bibliopolis, 1984
- [15] Gumiński K.: *Termodynamika*, Warszawa, PWN, 1982
- [16] Gładki A., Librant Z.: *Badania nad mikrostrukturą proszków  $Al_2O_3$  i relacją tej mikrostruktury do przebiegu zagęszczania przy prasowaniu i spiekaniu*. ITME 1983, sprawozdanie z pracy badawczej
- [17] Gładki A., Muszkat W., Olesińska W.: *Wpływ mikrostruktury proszku wolframu na właściwości wielowarstwowych spleków ceramika-metal*. *Materiały Elektroniczne* 4, 1988



## SPIS TREŚCI

Wstęp .....	5
I. Nieokreśloność metod metalografii ilościowej .....	8
II. Przegląd założeń metod ilościowej metalografii .....	10
II.1. Struktury lite .....	10
A. Metody określające objętości struktur .....	10
B. Metody określające powierzchnie graniczne składników mikrostruktury .....	13
C. Metody określające średnice cząstek oraz ich liczbę w jednostce objętości materiału .....	14
D. Metody określające liczbę cząstek w jednostce materiału .....	15
II.2. Struktury proszkowe .....	15
A. Metody objętościowe .....	16
B. Metody pomiaru powierzchni właściwej .....	17
C. Metody liniowe .....	17
II.3. Wnioski aplikacyjne .....	18
A. Zasady dla struktur litych .....	18
B. Zasady dla struktur proszkowych .....	19
III. Ilościowa analiza kształtu .....	19
III.1. Podstawowe definicje topologii zbiorów w przestrzeni $E^2$ .....	20
III.2. Funkcja kształtu .....	23
III.3. Wewnętrzny wektor kształtu .....	28
IV. Doświadczalny aspekt wektorowej analizy kształtów .....	37
IV.1. Cząstka swobodna .....	37
IV.2. Układ cząstek .....	40
V. Bibliografia .....	47





