O TWIERDZENIU WROŃSKIEGO

przez professora CAYLEY'A

(*Tłomaczenie z* QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, *N° 47, zeszyt kwietniowy*, 1873 *r*.)

(*Tłomaczenie z angielskiego* (*))

Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa Nauk Ścisłych, d. 6 Marca 1873 r

To twierdzenie, uważane przez autora jako odpowiedź na pytanie « En quoi consistent les Mathématiques? N'y aurait-il pas moyen d'embrasser par un seul problème tous les problèmes de ces sciences et de résoudre généralement ce problème universel? » jest podane bez dowodzenia w jego *Réfutation de la Théorie de Fonctions Analitiques de Lagrange*, Paryż, r. 1812, str. 30, i znów powtórzoném (z dowodzeniem, jak sądzę) w *Philosophie de la Technie*, Paryż, r. 1815; również jest podane i dowiedzione w *Supplément à la Réforme de la Philosophie*, Paryż, 1847, str. CIX i nast.; toż twierdzenie, lecz bez dowodzenia, znajduje się w *Encyclopédie Mathématique de Montferrier* (Paryż, bez daty), t. III, str. 398.

Twierdzenie to daje rozwinięcie funkcyi Fx pierwiastku równania

$$0 = fx + x_1 f_1 x + x_2 f_2 x + \text{etc.},$$

lecz w rzeczywistości ogólność jego nie przechodzi po za szczególny przypadek $0 = fx + x_1 f_1 x$; to jest kiedy równanie jest $0 = \varphi x + \lambda f x$ (**). Wziąwszy więc pod uwagę to równanie

$$\varphi x + \lambda f x = 0,$$

(*) Artykuł ten jednego z najznakomitszych dzisiejszych angielskich matematyków, podajemy w tłomaczeniu najwierniejszém, bez żadnych zmian w znakowaniu i w formie; posłuży on za dowód że w zawiłych i zaciemnionych często utworach Wrońskiego, znajdują się rzeczy mogące zwrócić na siebie uwagę pierwszorzędnych uczonych i niepozwalające wydawać zbyt pospiesznego potępiającego sądu o pracach matematycznych naszego współziomka.

(Przyp. tłomacza.)

(**) W saméj rzeczy, w wypadku danym w tekście, zamiast λfx napisawszy $x_1 f_1 x + x_2 f_2 x +$ etc., następnie rozwinąwszy różne potęgi téj ilości, każdy wyznacznik będzie zastąpionym przez summę wyznaczników tego samego rzędu i będziemy mieli rozwinięcie Fx podług potęg $x_1, x_2 \ldots$ (Przyp. CAYLEY'A.)

niech a będzie pierwiastkiem równania $\varphi x = 0$; twierdzenie jest następujące:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}x = {} & \mathrm{F} \\
& - \frac{\lambda}{1}\frac{1}{\varphi'}\left|\left(\int f\mathrm{F}'\right)'\right| \\
& + \frac{\lambda^2}{1.2}\frac{1}{\varphi'^3}\left|\begin{matrix} \left(\varphi', \int f^2\mathrm{F}'\right)' \\ \left(\varphi'', \int f^2\mathrm{F}'\right)'' \end{matrix}\right|\frac{1}{1} \\
& - \frac{\lambda^3}{1.2.3}\frac{1}{\varphi'^6}\left|\begin{matrix} \varphi', & (\varphi^2)', & \left(\int f^3\mathrm{F}'\right)' \\ \varphi'', & (\varphi^2)'', & \left(\int f^3\mathrm{F}'\right)'' \\ \varphi''', & (\varphi^2)''', & \left(\int f^3\mathrm{F}'\right)''' \end{matrix}\right|\frac{1}{1.1.2} \\
& + \text{i t. d.}
\end{aligned}$$

gdzie F, f, F', etc. oznaczają $\mathrm{F}a$, fa, $\mathrm{F}'a$, etc. a kréski oznaczają różniczkowanie względem a; znak całkowy $\int$ jest napisanym zamiast $\int_a$; wprowadzonym jest zresztą jedynie dla symetryi i widocznie znika; w saméj rzeczy możemy równie dobrze napisać:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}x = {} & \mathrm{F} \\
& - \frac{\lambda}{1}\frac{1}{\varphi'}f\mathrm{F}' \\
& + \frac{\lambda^2}{1.2}\frac{1}{\varphi'^3}\left|\begin{matrix} \varphi', & f^2\mathrm{F}' \\ \varphi'', & (f^2\mathrm{F}')' \end{matrix}\right|\frac{1}{1} \\
& - \frac{\lambda^3}{1.2.3}\frac{1}{\varphi'^6}\left|\begin{matrix} \varphi', & (\varphi^2)', & f^3\mathrm{F}' \\ \varphi'', & (\varphi^2)'', & (f^3\mathrm{F}')' \\ \varphi''', & (\varphi^2)''', & (f^3\mathrm{F}')'' \end{matrix}\right|\frac{1}{1.1.2} \\
& + \text{i t. d.}
\end{aligned}$$

Zatrzymuję się na chwilę, by zauważyć że twierdzenie Laplace'a jest w rzeczywistości równoważném z twierdzeniem Lagrange'a; mamy bowiem w pierwszém z tych twierdzeń $x = \varphi(a + \lambda f x)$, to jest $\varphi^{-1}x = a + \lambda f\varphi.\varphi^{-1}x$, zaś $\mathrm{F}x = \mathrm{F}\varphi.\varphi^{-1}x$, według twierdzenia Lagrange'a

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F}\varphi + \frac{\lambda}{1}\mathrm{F}\varphi'.f\varphi + \frac{\lambda^2}{1.2}[\mathrm{F}\varphi'.(f\varphi)^2]' + \text{etc.}$$

gdzie po prawéj stronie $\mathrm{F}\varphi$ i $f\varphi$ są oboje uważane za symbol, argumentem jest zawsze a i kréski oznaczają różniczkowanie względem a, tak, że $\mathrm{F}\varphi'$ jest

$$d_a.\mathrm{F}\varphi a = \mathrm{F}'\varphi a.\varphi a', \text{ etc.}$$

co znaczy twierdzenie Laplace'a.

Przypuśćmy w twierdzeniu Wrońskiego $\varphi x = x - a$; to jest niech równanie będzie następujące

$$x - a + \lambda\varphi x = 0,$$

wtedy każdy wyznacznik zostaje sprowadzonym do pojedynczego wyrazu: tak, wyznacznik trzeciego rzędu będzie

$$\begin{vmatrix} (x-a)', & [(x-a)^2]', & f^3F' \\ (x-a)'', & [(x-a)^2]'', & (f^3F')' \\ (x-a)''', & [(x-a)^2]''', & (f^3F')'' \end{vmatrix},$$

gdzie w pierwszéj i drugiéj kolumnie kréski oznaczają różniczkowanie względem x, która to zmienna późniéj zakłada się $= a$; wyznacznik staje się

$$= \begin{vmatrix} 1, & *, & * \\ 0, & 1.2, & * \\ 0, & 0, & (f^3F')'' \end{vmatrix},$$

to jest mamy go

$$= 1.1.2\,(f^3F')'',$$

i podobnie w innych przypadkach; wzór staje się zatém

$$Fx = F - \frac{\lambda}{1} fF' + \frac{\lambda^2}{1.2}(f^2F')' - \frac{\lambda^3}{1.2.3}(f^3F')'' + \text{etc.}$$

zgodnie z twierdzeniem Lagrange'a.

Przypuśćmy w ogólności $\varphi x = (x-a)\,\psi x$, czyli załóżmy równanie

$$(x-a)\,\psi x + \lambda f x = 0,$$

czyli

$$x - a + \lambda\frac{fx}{\psi x} = 0,$$

mamy wtedy za pomocą twierdzenia Lagrange'a

$$Fx = F - \frac{\lambda}{1} F'\frac{f}{\psi} + \frac{\lambda^2}{1.2}\left\{F'\left(\frac{f}{\psi}\right)^2\right\}' - \frac{\lambda^3}{1.2.3}\left\{F'\left(\frac{f}{\psi}\right)^3\right\}'' + \text{etc.}$$

Weźmy naprzykład pod uwagę wyraz $\left\{F'\left(\frac{f}{\psi}\right)\right\}''$; to jest

$$= \left\{F'x.\,\frac{(x-a)^3\,(fx)^3}{(\varphi x)^3}\right\}'',$$

kréski oznaczają różniczkowanie względem x, a x ostatecznie ma być założoném $= a$; lub, co na jedno wychodzi,

$$= \left(\frac{d}{d\theta}\right)^2 \left[F'(a+\theta)\,\frac{\theta^3\,[f(a+\theta)]^3}{[\varphi(a+\theta)]^3}\right].$$

gdzie kréski oznaczają już różniczkowanie względem θ, które to θ ma być ostatecznie założoném $= 0$, To jest

$$\left(\frac{d}{d\theta}\right)^2 \left[\mathrm{F}'(a+\theta) \frac{[f(a+\theta)]^3}{\left(\varphi' a + \frac{\theta}{1.2}\varphi'' a + \ldots\right)^3} \right]''.$$

Co może być napisaném $\left(\mathrm{F}' f^3 \frac{1}{\mathrm{A}^3}\right)''$, gdzie

$$\mathrm{A} = \varphi' + \tfrac{1}{2}\theta\varphi'' + \tfrac{1}{6}\theta^2\varphi''' + \ldots,$$

gdzie rozumie się że co się tyczy $\mathrm{F}'f^3$, które jest wyrażoném jako funkcya samego a (θ tymczasem zostało założoném $=0$), kréski zewnętrzne oznaczają różniczkowanie względem a, co się zaś tyczy A, $=\varphi' + \frac{1}{2}\theta\varphi'' +$ etc. oznaczają one różniczkowanie względem θ, które później ma być założoném $=0$. Twierdzenie zaś będzie teraz

$$\mathrm{F}x = \mathrm{F} - \frac{\lambda}{1}\left(\mathrm{F}'f.\frac{1}{\mathrm{A}}\right) + \frac{\lambda^2}{1.2}\left(\mathrm{F}'f^2.\frac{1}{\mathrm{A}^2}\right)' - \frac{\lambda^3}{1.2.3}\left(\mathrm{F}'f^3.\frac{1}{\mathrm{A}^3}\right)'' + \text{etc.}$$

To musi być równoważném z twierdzeniem Wrońskiego, choć przedstawia się w bardzo odmiennym i, jak sądzę, dogodniejszym kształcie; lecz wypadki otrzymane z porównania są bardzo godne uwagi: zajmiemy się teraz tém porównaniem.

Wziąwszy pod uwagę powyższy spółczynnik $\left(\mathrm{F}'f^3\frac{1}{\mathrm{A}^3}\right)''$, spółczynnik ten musi być równym wyrazowi Wrońskiego

$$\frac{1}{1.1.2}\frac{1}{\varphi'^6}\begin{vmatrix} \varphi', & (\varphi^2)', & f^3\mathrm{F}' \\ \varphi'', & (\varphi^2)'', & (f^3\mathrm{F}')' \\ \varphi''', & (\varphi^2)''', & (f^3\mathrm{F}')'' \end{vmatrix};$$

lub, co wychodzi na to samo, wyznacznik ma być

$$= 1.1.2\varphi'^6\left(\frac{1}{\mathrm{A}^3}f^3\mathrm{F}'\right)''$$

$$= 1.1.2\varphi'^6\left\{f^3\mathrm{F}'\left(\frac{1}{\mathrm{A}^3}\right)'' + 2\,(f^3\mathrm{F}')'\left(\frac{1}{\mathrm{A}^3}\right)' + (f^3\mathrm{F}')''\frac{1}{\mathrm{A}^3}\right\},$$

to jest wartości

$$1.1.2\varphi'^6\frac{1}{\mathrm{A}^3},\quad 1.1.2\varphi'^6 2\left(\frac{1}{\mathrm{A}^3}\right)',\quad 1.1.2\varphi'^6\left(\frac{1}{\mathrm{A}^3}\right)''$$

muszą być odpowiednio

$$= \varphi'(\varphi^2)'' - \varphi''(\varphi^2)',\quad \varphi'''(\varphi^2)' - \varphi'(\varphi^2)''',\quad \varphi''(\varphi^2)''' - \varphi'''(\varphi^2)''.$$

Lecz, co wychodzi na jedno, jeżeli

$$\frac{1}{\left(\varphi' + \frac{\theta}{2}\varphi'' + \frac{\theta^2}{2.3}\varphi''' + \ldots\right)^3} = \mathrm{A}_0 + \frac{1}{1}\mathrm{A}_1\theta + \frac{1}{1.2}\mathrm{A}_2\theta^2 + \ldots,$$

te powyższe funkcye muszą być

$$1.1.2\varphi'^6 A_0,\ 1.1.2\varphi'^6 2A_1,\ 1.1.2\varphi'^6 A_2,$$

mamy

$$A_0 = \frac{1}{\varphi'^3},\quad A_1 = -\frac{3}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'^4},\quad A_2 = -\frac{\varphi'''}{\varphi'^4} + \frac{3\varphi''^2}{\varphi'^5},$$

tożsamości zaś są następujące

$$\begin{aligned}
2\varphi'^3 &= \varphi'(\varphi^2)'' - \varphi''(\varphi^2)',\\
&= \varphi'(2\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2) - \varphi''.2\varphi\varphi',\\
-6\varphi''\varphi'^2 &= \varphi'''(\varphi^2)' - \varphi'(\varphi^2)''',\\
&= \varphi'''.2\varphi\varphi' - \varphi'(2\varphi\varphi''' + 6\varphi'\varphi''),\\
+6\varphi''^2\varphi' - 2\varphi'''\varphi'^2 &= \varphi''(\varphi^2)''' - \varphi'''(\varphi^2)'',\\
&= \varphi''(2\varphi\varphi''' + 6\varphi'\varphi'') - \varphi'''(2\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2),
\end{aligned}$$

co w saméj rzeczy ma miejsce. I w podobny sposób, dla sprawdzenia spółczynników λ^4, mielibyśmy do porównania, pierwsze cztery wyrazy rozwinięcia

$$\frac{1}{\left(\varphi' + \frac{\theta}{2}\varphi'' + \frac{\theta^2}{2.3}\varphi''' + \ldots\right)^4},$$

z wyznacznikami utworzonymi z pierwowzoru (matrix)

$$\left|\begin{matrix} \varphi', & \varphi'', & \varphi''', & \varphi'''' \\ (\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)''', & (\varphi^2)'''' \\ (\varphi^3)', & (\varphi^3)'', & (\varphi^3)''', & (\varphi^3)'''' \end{matrix}\right|.$$

Szereg równań może być przedstawionym jak następuje, pisząc jak powyżéj A dla oznaczenia funkcyi

$$\varphi' + \frac{\theta}{2}\varphi'' + \frac{\theta^2}{2.3}\varphi''' + \ldots,$$

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\varphi'}.1,$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{-1}{\varphi'^3}\left|\begin{matrix} \theta, & 1 \\ \varphi', & \varphi'' \end{matrix}\right|.\frac{1}{1},$$

$$\frac{1}{A^3} = \frac{+1}{\varphi'^6}\left|\begin{matrix} \frac{1}{2}\theta^2, & \frac{1}{2}\theta, & 1 \\ \varphi', & \varphi'', & \varphi''' \\ (\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)''' \end{matrix}\right|.\frac{1}{1.1.2},$$

$$\frac{1}{A^4} = \frac{-1}{\varphi'^{10}}\left|\begin{matrix} \frac{1}{6}\theta, & \frac{1}{6}\theta^2, & \frac{1}{3}\theta, & 1 \\ \varphi', & \varphi'', & \varphi''', & \varphi'''' \\ (\varphi^2)', & (\varphi^2)'', & (\varphi^2)''', & (\varphi^2)'''' \\ (\varphi^3)', & (\varphi^3)'', & (\varphi^3)''', & (\varphi^3)'''' \end{matrix}\right|.\frac{1}{1.1.2.1.2.3},$$

i t. d.

gdzie w każdym przypadku funkcya po lewéj stronie ma być rozwiniętą tylko do téj potęgi jaka zachodzi w wyznaczniku : spółczynniki liczebne pierwszych wierszy poziomych różnych wyznaczników, są odwróceniami liczb

$$n(n-1)\ldots 2.1,\quad n(n-1)\ldots 2,\quad n(n-1),\ n,\ 1,$$

gdzie n jest wskaźnikiem najwyższéj potęgi θ. A zatém dowód twierdzenia Wrońskiego polega ostatecznie na postawieniu powyższych równań. Jako sprawdzenie, w czwartym wzorze, napiszmy $\varphi = \varepsilon^{a}$ $(a=0)$; mamy

$$\left(\frac{\theta}{e^{\theta}-1}\right)^4 \text{ lub } \frac{1}{(1+\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{6}\theta^2+\frac{1}{24}\theta^3+\ldots)^4} = -\tfrac{1}{12}\begin{vmatrix} \frac{1}{6}\theta^3, & \frac{1}{6}\theta^2, & \frac{1}{3}\theta, & 1 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \\ 2, & 4, & 8, & 16 \\ 3, & 9, & 27, & 81 \end{vmatrix},$$

gdzie wyrażenie po prawéj stronie jest

$$\begin{aligned} &= -\tfrac{1}{12}(-1.12+\tfrac{1}{3}\theta.72-\tfrac{1}{6}\theta^2.132+\tfrac{1}{6}\theta^3.72) \\ &= \qquad 1-2\theta+\tfrac{11}{6}\theta^2+\theta^3, \end{aligned}$$

a rozwinąwszy lewą stronę aż do trzeciéj potęgi θ,

$$\begin{array}{llr} = & 1 & =1 \\ - & 4\,(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{6}\theta^2+\frac{1}{24}\theta^3) & -2\theta-\frac{2}{3}\theta^2-\frac{1}{6}\theta^3 \\ + & 10\,(\qquad \frac{1}{4}\theta^3+\frac{1}{6}\theta^3) & +\frac{5}{2}\theta^2+\frac{5}{3}\theta^3 \\ - & 20\,(\qquad\qquad \frac{1}{8}\theta^3) & -\frac{5}{2}\theta^3 \\ \hline & & 1-2\theta+\frac{11}{6}\theta-\theta^3 \end{array}$$

co się zgadza.

Wracając do powyższego równania i rozwijając różne wyrazy $(\varphi^2)' = 2\varphi\varphi'$, $(\varphi^2)'' = 2\varphi\varphi'' + 2\varphi'^2$, etc. a zatém, ponieważ w każdym przypadku lewa strona zawiera φ', φ'', φ''', etc. lecz nie zawiera φ, widoczném jest iż po prawéj ręce wyrazy zawierające φ znoszą się nawzajem; przypuściwszy że tak jest, równania przybierają najprostszą formę otrzymaną przez założenie $\varphi=0$, to jest mamy w ten sposób $(\varphi^2)'=0$, $(\varphi^2)''=2\varphi'^2$, etc. W celu uproszczenia wzorów, zastąpmy φ', $\frac{1}{2}\varphi''$, $\frac{1}{6}\varphi'''$, $\frac{1}{24}\varphi''''$, etc. przez b, c, d, e, etc. znajdziemy następujące proste kształty : napisawszy dla skrócenia

$$\Theta = b + c\theta + d\theta^2 + e\theta^3 + \text{etc.}$$

będziemy mieli

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{b}\cdot 1,$$

$$\frac{1}{\Theta^2} = -\frac{2}{b^3}\begin{vmatrix} \theta, & \frac{1}{2} \\ b, & c \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{\Theta^3} = -\frac{3}{b^6}\begin{vmatrix} \theta^2, & \frac{1}{2}\theta, & \frac{1}{3} \\ b, & c, & d \\ & b^2, & 2bc \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{\Theta^4} = -\frac{4}{b^{10}}\begin{vmatrix} \theta^3, & \frac{1}{2}\theta^2, & \frac{1}{3}\theta, & \frac{1}{4} \\ b, & c, & d, & e \\ & b^2, & 2bc, & 2bd+c^2 \\ & & b^3, & 3b^2c \end{vmatrix},$$

to jest dla Θ^{-n} prawa strona daje rozwinięcia dochodzące do θ^{n-1}. Zauważyć należy, że w wyznacznikach różne wiersze poziome są spółczynnikami rozwinięć Θ, Θ^2, Θ^3, etc. odpowiednio.

Dowodzenie jest bardzo łatwe; dość jest wziąść pod uwagę równanie dla $\frac{1}{\Theta^4}$. Załóżmy

$$\frac{1}{\Theta^4} = \ldots r\theta^6 + q\theta^5 + p\theta^4 + \beta\theta^3 + \tfrac{1}{2}\gamma\theta^2 + \tfrac{1}{3}\delta\theta + \tfrac{1}{4}\varepsilon.$$

gdzie widocznie $\varepsilon = \frac{4}{b^4}$, i napiszmy

$$\begin{aligned}
\Theta &= B_1 + C_1\theta + D_1\theta^2 + E_1\theta^3 + \ldots,\\
\Theta^2 &= \phantom{B_1 + {}} B_2 + C_2\theta + D_2\theta^2 + \ldots,\\
\Theta^3 &= \phantom{B_1 + C_1\theta + {}} B_3 + C_3\theta + \ldots,
\end{aligned}$$

gdzie $B_1 = b$, $B_2 = b^2$, $B_3 = b^3$; chcemy pokazać że

$$\begin{aligned}
\beta B_1 + \gamma C_1 + \delta D_1 + \varepsilon E_1 &= 0,\\
\gamma B_2 + \delta C_2 + \varepsilon D_2 &= 0,\\
\delta B_3 + \varepsilon C_3 &= 0,
\end{aligned}$$

bo gdy to ma miejsce, opuszczając wyrazy zawierające θ^4, θ^5, etc. i pisząc

$$\beta\theta^3 + \tfrac{1}{2}\gamma\theta^2 + \tfrac{2}{3}\delta\theta + \varepsilon\left(\tfrac{1}{4} - \frac{1}{\varepsilon\Theta^4}\right) = 0,$$

następnie rugując β, γ, δ, ε, mamy

$$\begin{vmatrix}
\theta^3, & \tfrac{1}{2}\theta^2, & \tfrac{1}{3}\theta, & \tfrac{1}{4} - \frac{1}{\varepsilon\Theta^4}\\
B_1, & C_1, & D_1, & E_1\\
 & B_2, & C_2, & D_2\\
 & & B_3, & C_3
\end{vmatrix} = 0,$$

w którém to równaniu wyraz zawierający

$$\frac{1}{\Theta^4} \text{ jest } + \frac{1}{\varepsilon} B_1 B_2 B_3 \frac{1}{\Theta^4}, = \tfrac{1}{4} b^{10} \frac{1}{\Theta^4};$$

a tak równanie jest $\frac{1}{\Theta^4} = -\frac{4}{b^{10}}$ w wyznaczniku bez wyrazu o którym mowa (to jest z wyrazem narożnym sprowadzonym do $\frac{1}{4}$).

Na dowód tego pomocniczego twierdzenia pomnóżmy wyrażenie na $\frac{1}{\Theta^4}$ przez $\frac{1}{\theta^4}$, i zróżniczkujmy względem θ, otrzymamy:

$$\frac{4(\theta\Theta)'}{(\theta\Theta)^5} = \ldots - 2r\theta - q + \frac{\beta}{\theta^2} + \frac{\gamma}{\theta^3} + \frac{\delta}{\theta^4} + \frac{\varepsilon}{\theta^6}.$$

Pomnożywszy przez

$$\theta\Theta = B_1\theta + C_1\theta^2 + D_1\theta^3 + E_1\theta^4,$$

widzimy że $B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta + E_1\varepsilon$ jest spółczynnikiem $\frac{1}{\theta}$ w $\frac{4(\theta\Theta)'}{(\Theta\vartheta)^4}$, i w podobny sposób $B_2\gamma + C_2\delta + E_2\varepsilon$ jest spółczynnikiém $\frac{1}{\theta}$ w $\frac{4\,(\theta\Theta)'}{(\theta\Theta)^3}$, zaś $B_3\delta + C_3\varepsilon$ spółczynnikiém $\frac{1}{\theta}$ w $\frac{4\,(\theta\Theta)'}{(\theta\Theta)^2}$. Niech będzie teraz m całkowitą dodatnę, $\frac{1}{(\Theta\vartheta)^m}$ rozwinięte podług zwiększających się potęg θ, zawiera potęgi θ, dodatne i odjemne, lecz nie zawiera wyrazu logarytmowego: zróżniczkowawszy więc podług θ, $\frac{(\Theta\vartheta)'}{(\Theta\vartheta)^{m+1}}$ nie zawiera wyrazu mającego $\frac{1}{\theta}$ (*); a więc wyrażenia o których mowa są każde z nich $= 0$; co dopełnia dowodzenia.

Powyższe wzory dające rozwinięcie $\frac{1}{\Theta^n}$ aż do θ^{n-1} w wyrazach mających spółczynniki w rozwinięciu Θ, Θ^2, Θ^{n-1} są, sądzę, godnymi uwagi.

(*) Sposób ten jest znanym sposobem używanym przez Jacobi'ego i Murphy'ego. (Przyp. Cayley'a.)