

**M. Kleiber, T.D. Hien**

25 / 1980

**DYNAX-L — DYNAMICZNA ANALIZA  
OSIOWOSYMETRYCZNYCH CIAŁ  
I POWŁOK SPRĘŻYSTYCH  
PODDANYCH DOWOLNEMU OBCIĄŻENIU  
METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH**

**Teoria oraz opis i instrukcja  
użytkowania programu**



WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 czerwca 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 25/1980



57148



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 190 egz. Ark.wyd. 3 . Ark. druk. 4,5.

Oddano do drukarni w lipcu 1980 r. :

Nr zamówienia 498/0/80

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8



Michał Kleiber, Tran Duong Hien

Zakład Teorii Konstrukcji

DYNAM L - DYNAMICZNA ANALIZA OSIOWOSYMETRYCZNYCH CIAŁ  
I POWŁOK SPRĘŻYSTYCH  
PODDANYCH DOWOLNEMU OBCIĄŻENIU METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Teoria oraz opis i instrukcja użytkowania programu

## 1. Wstęp

W pracy przedstawiono podstawy numerycznej analizy złożonych konstrukcji osiowosymetrycznych poddanych dowolnemu, niekoniecznie osiowosymetrycznemu, obciążeniu typu statycznego lub dynamicznego.

Założono, że analizę konstrukcji przeprowadzać się będzie w ramach modelu liniowego /ortotropowy materiał liniowo-sprężysty, małe przemieszczenia/. W analizie uwzględniono trzy typy osiowosymetrycznych elementów skończonych: toroidalne elementy o radialnym przekroju trójkątnym i czworokątnym oraz element cienkiej powłoki w kształcie stożka ściętego. Modelując rozpatrywany układ rzeczywisty, elementy te można dowolnie łączyć ze sobą. Dobór elementów umożliwia analizę skomplikowanych problemów inżynierskich takich jak badanie drgań własnych i wymuszonych w dowolnych konstrukcjach osiowosymetrycznych, czy też badanie współdziałania takich konstrukcji z podłożem w warunkach złożonych obciążeń dynamicznych.

Praca stanowi pierwszy etap badań, które są kontynuowane w kierunku uwzględnienia dużych przemieszczeń oraz niesprężystego modelu materiału. Skomplikowane zagadnienia drgań nieliniowych, będące ostatecznym celem badań, wpłynęły na wybór względnie prostych elementów skończonych. Elementy te przyjęto kierując się potrzebą maksymalnej oszczędności pa-

mięci maszyny cyfrowej w aspekcie dalszych planów rozbudowy programu. Uwzględnienie bardziej złożonych elementów skończonych /np. powłokowych w postaci opisanej w [4] / nie powinno przedstawiać żadnych formalnych trudności. Przedstawione poniżej rozważania jak również organizacja programu numerycznego wzorowane są w dużej mierze na pierwszej z opublikowanych prac dotyczących zagadnień osiowosymetrycznych tj. pracy [10].

Aby umożliwić analizę zagadnień z niesymetrycznym /względem osi symetrii konstrukcji/ obciążeniem zewnętrznym, zastosowano w pracy koncepcję rozwinięcia poszczególnych funkcji w szeregi Fouriera. Dla stałych /wzdłuż obwodu/ własności materiału i grubości konstrukcji prowadzi to do rozprężenia się poszczególnych wyrazów rozwinięcia.

Całkowania równań ruchu dokonuje się alternatywnie dwoma metodami:

- a/ metodą bezpośredniego całkowania,
- b/ metodą superpozycji modalnej.

Program napisany jest w języku FORTRAN-IV. W trakcie jego uruchamiania korzystano z maszyny cyfrowej CDC-6600, na której też policzono wszystkie zamieszczone w pracy przykłady.



## 2. Metoda otrzymywania równań ruchu:

Równania ruchu otrzymano w pracy z następującej całkowitej zasady wariacyjnej /zasady Hamiltona/, wyprowadzanej wprost z zasady prac wirtualnych dla zagadnień dynamicznych, [3].

Wśród wszystkich dopuszczalnych pól przemieszczeń  $\underline{u}(x)$  spełniających zadane warunki geometryczne na brzegu oraz zadane warunki w chwilach  $t = t_1$ ,  $t = t_2$ , rzeczywiste rozwiązanie problemu teorii sprężystości minimalizuje funkcjo-

$$/2.1./ \quad \int_{t_1}^{t_2} [T - E - \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{t} \, d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{b} \, d\Omega] \, dt$$

w którym  $\Omega$  i  $\partial\Omega$  oznaczają odpowiednio rozpatrywany obszar i jego brzeg,  $\underline{t}$  jest wektorem obciążeń brzegu ciała,  $\underline{b}$  wektorem sił masowych zaś  $T$  i  $E$  przedstawiają energię kinetyczną oraz energię odkształceń sprężystych układu. Wyrażając wszystkie wielkości występujące w wyrażeniu /2.1/ w funkcji współrzędnych uogólnionych  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  zasada powyższa prowadzi do tzw. równań Eulera postaci

$$/2.2/ \quad \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

gdzie:

$$/2.3/ \quad L = T - E - \int_{\partial\Omega} \underline{u}^T \underline{t} \, d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{b} \, d\Omega$$

Równania /2.2/ są poszukiwanymi równaniami ruchu układu opisanego wektorem współrzędnych uogólnionych  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  /Zaznaczmy, że powyższa zasada obowiązuje również w przypadku dużych przemieszczeń/.

Do znalezienia jawnej postaci równań ruchu należy więc podać jawne zależności od zmiennych  $q_i$  następujących funkcji:

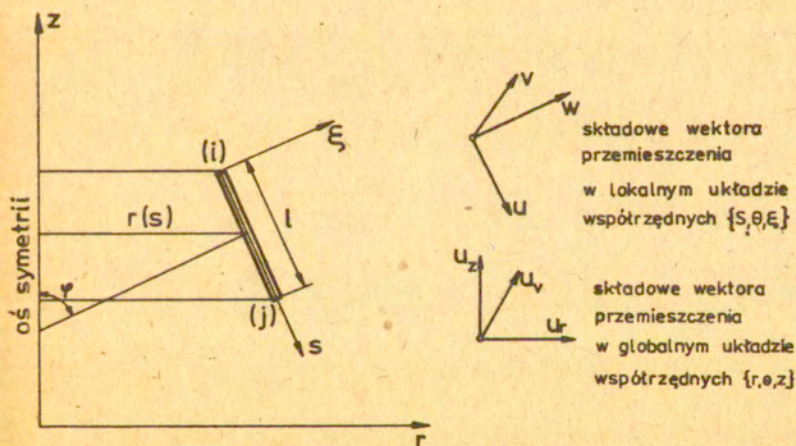
- a/ - energii kinetycznej  $T$ ,
- b/ - energii odkształceń sprężystych  $E$ ,
- c/ - pracy sił zewnętrznych  $W$ .



### 3. Element powłoki osiowosymetrycznej

Powłokę osiowosymetryczną idealizować będziemy za pomocą elementów będących stożkami ściętymi, rys. 1.

Wprowadźmy lokalny ortogonalny układ współrzędnych  $(s, \theta, \xi)$ , rys. 1, w którym współrzędna  $s$



Rys. 1

mierzona jest wzdłuż tworzącej, współrzędna kątowa  $\theta$  wokół osi symetrii zaś współrzędna  $\xi$  w kierunku normalnym do tworzącej oraz oznaczymy symbolem  $\underline{u} = \{u, v, w\}$

składowe stanu przemieszczenia w dowolnym punkcie powierzchni środkowej elementu powłoki.

Rozwińmy składowe stanu przemieszczenia w szeregi Fouriera względem kąta  $\theta$

$$/3.1/ \quad \underline{u}(s, \theta) = \sum_{n=0}^N \underline{\theta}_n(\theta) \underline{u}_n(s)$$

gdzie

$$\underline{u}(s, \theta) = \left\{ u(s, \theta) \quad v(s, \theta) \quad w(s, \theta) \right\}$$

$$\underline{u}_n(s) = \left\{ \tilde{u}_n(s) \quad \hat{u}_n(s) \right\}$$

$$\tilde{u}_n(s) = \left\{ \tilde{u}_n(s) \quad \tilde{v}_n(s) \quad \tilde{w}_n(s) \right\}$$

$$/3.2/ \quad \hat{u}_n(s) = \left\{ \hat{u}_n(s) \quad \hat{v}_n(s) \quad \hat{w}_n(s) \right\}$$

$$\underline{\theta}_n(\theta) = \beta \begin{bmatrix} C_n & 0 & 0 & S_n & 0 & 0 \\ 0 & S_n & 0 & 0 & C_n & 0 \\ 0 & 0 & C_n & 0 & 0 & S_n \end{bmatrix}$$

$$C_n = \cos n\theta \quad , \quad S_n = \sin n\theta$$

$$\beta = \begin{cases} 1/2 & \text{dla } n=0 \\ 1 & \text{dla } n \neq 0 \end{cases}$$

Wprowadźmy obecnie funkcje interpolacyjne metody elementów skończonych /funkcje kształtu/, za pomocą których wyrażać będziemy przemieszczenia dowolnego punktu powierzchni środkowej elementu łączącego węzły (i), (j) w funkcji uogólnionych przemieszczeń tych węzłów, rys. 1;

Przyjmijmy za uogólnione przemieszczenia węzłów elementu (i) - (j) następujące wielkości



$$\underline{u}_n^N = \left\{ \begin{array}{cc} \underline{\tilde{u}}_n^N & \underline{\hat{u}}_n^N \\ \text{16x1} & \text{2x1} \quad \text{2x1} \end{array} \right\}$$

13.3/

gdzie

$$\underline{\tilde{u}}_n^N = \left\{ \begin{array}{cccccc} \tilde{u}_n^{(0)} & \tilde{w}_n^{(0)} & \tilde{v}_n^{(0)} & \tilde{u}_n^{(1)} & \tilde{w}_n^{(1)} & \tilde{v}_n^{(1)} & \frac{\partial \tilde{w}_n^{(1)}}{\partial s} & \frac{\partial \tilde{w}_n^{(1)}}{\partial s} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\hat{u}}_n^N = \left\{ \begin{array}{cccccc} \hat{u}_n^{(0)} & \hat{w}_n^{(0)} & \hat{v}_n^{(0)} & \hat{u}_n^{(1)} & \hat{w}_n^{(1)} & \hat{v}_n^{(1)} & \frac{\partial \hat{w}_n^{(1)}}{\partial s} & \frac{\partial \hat{w}_n^{(1)}}{\partial s} \end{array} \right\}$$

oraz założymy /dla  $0 \leq s \leq 1$ / funkcje interpolacyjne dla  $\underline{u}_n(s)$  /we wzorze 13.2/ / jako

$$\underline{u}_n(s) = \underline{\tilde{A}}(s) \underline{\alpha}$$

13.4/

gdzie

$$\underline{\tilde{A}}(s) = \begin{bmatrix} \underline{q}(s) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{q}(s) \end{bmatrix}$$

$$\underline{q}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\alpha} = \left\{ \begin{array}{cc} \underline{\tilde{\alpha}} & \underline{\hat{\alpha}} \\ \text{16x1} & \text{2x1} \quad \text{2x1} \end{array} \right\}$$

$$\underline{\tilde{\alpha}} = \{ \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_8 \}, \quad \underline{\hat{\alpha}} = \{ \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_8 \}$$

Wykorzystując 13.4/ można zapisać 13.3/ jako:

$$\underline{u}_n^N = \underline{\tilde{\Psi}} \underline{\alpha}$$

gdzie

$$\underline{\tilde{\Psi}} = \begin{bmatrix} \underline{\psi} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\psi} \end{bmatrix}$$

skąd wynika, że





Uwzględniając /3.1/, /3.6/ i /3.8/ otrzymamy:

$$\underline{d} = \underline{\Phi} \underline{\Gamma}^N$$

$$/3.9/ \quad \underline{u}_n(s) = \underline{\Lambda}(s) \underline{\Phi} \underline{\Gamma}^N$$

gdzie

$$\underline{\Phi} = \underline{\Psi}^{-1} \underline{G} = \begin{bmatrix} \varphi & 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \varphi \\ 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial s} \end{bmatrix}$$

zaś macierz  $\underline{\Psi}$  podana jest w Dod. 1.

Liniowe równania geometryczne powłoki Love'a - Kirchhoffa zapisać można w postaci:

$$/3.10/ \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}^0 + \xi \underline{\alpha}^0$$

gdzie:

$$/3.11/ \quad \underline{\xi}^0 = \begin{bmatrix} \xi_s^0 \\ \xi_\theta^0 \\ 2\xi_{s\theta}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \cos \varphi + w \sin \varphi \right) \\ \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \cos \varphi \right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{\alpha}^0 = \begin{bmatrix} \alpha_s^0 \\ \alpha_\theta^0 \\ 2\alpha_{s\theta}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \varphi - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \cos \varphi \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{1}{r^2} v \cos \varphi \right) \sin \varphi \end{bmatrix}$$

przy czym  $u=u(s, \theta)$ ,  $v=v(s, \theta)$ ,  $w=w(s, \theta)$  zaś znaczenie zmiennych  $r$  i  $\varphi$  podano na rys. 1.

Wykorzystując /3.1/ i /3.11/ otrzymamy

$$/3.12/ \quad \xi^0(s, \theta) = \sum_{n=0}^N \bar{\theta}_n \int_{s_0}^{s_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \underline{\xi}_{2n}$$

$$\alpha^0(s, \theta) = \sum_{n=0}^N \bar{\theta}_n \int_{s_0}^{s_1} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \underline{\alpha}_{2n}$$

gdzie  $\bar{Q}_n = \beta \begin{bmatrix} C_n & 0 & 0 & S_n & 0 & 0 \\ 0 & C_n & 0 & 0 & S_n & 0 \\ 0 & 0 & S_n & 0 & 0 & C_n \end{bmatrix}$

13.13/  $\underline{L}_{21n} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{21n} & 0 \\ 0 & \hat{L}_{21n} \end{bmatrix}$  ,  $\underline{L}_{22n} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{22n} & 0 \\ 0 & \hat{L}_{22n} \end{bmatrix}$

$\underline{S}_{21n} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{S}_{21n} & \hat{S}_{21n} \\ S_{21} & S_{21} \end{matrix} \right\}$  ,  $\underline{S}_{22n} = \left\{ \begin{matrix} \tilde{S}_{22n} & \hat{S}_{22n} \\ S_{21} & S_{21} \end{matrix} \right\}$

$\tilde{S}_{21n} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial s} & \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial s} & \frac{\tilde{u}_n}{r} & \frac{\tilde{v}_n}{r} & \frac{\tilde{w}_n}{r} \end{matrix} \right\}$

$\hat{S}_{21n} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} & \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial s} & \frac{\hat{u}_n}{r} & \frac{\hat{v}_n}{r} & \frac{\hat{w}_n}{r} \end{matrix} \right\}$

$\tilde{S}_{22n} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 \tilde{w}_n}{\partial s^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial s} & \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial s} & \frac{\tilde{v}_n}{r^2} & \frac{\tilde{w}_n}{r^2} \end{matrix} \right\}$

$\hat{S}_{22n} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial^2 \hat{w}_n}{\partial s^2} & \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}_n}{\partial s} & \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}_n}{\partial s} & \frac{\hat{v}_n}{r^2} & \frac{\hat{w}_n}{r^2} \end{matrix} \right\}$

zaś macierze  $\tilde{L}_{21n}$ ,  $\hat{L}_{21n}$ ,  $\tilde{L}_{22n}$  i  $\hat{L}_{22n}$  podane są w Dod.1.

Wprowadzając do wzoru /3.12/ zależność /3.4/ oraz /3.9/ otrzymamy ostatecznie wyrażenia na odkształcenia i zmiany krzywizny powierzchni środkowej w funkcji składowych stanu przemieszczenia, odniesionych do globalnego układu współrzędnych jako

13.14/  $\underline{\mathcal{E}}^0(s, \theta) = \sum_{n=0}^N \bar{Q}_n(\theta) \underline{L}_{21n} \underline{X}_1(s) \underline{\Phi} \underline{r}_{21n}^{p,n}$

$\underline{\mathcal{E}}^0(s, \theta) = \sum_{n=0}^N \bar{Q}_n(\theta) \underline{L}_{22n} \underline{X}_2(s) \underline{\Phi} \underline{r}_{22n}^{p,n}$

gdzie  $\underline{X}_1(s) = \begin{bmatrix} \underline{X}_1 & 0 \\ \tilde{X}_{21} & \hat{X}_{21} \end{bmatrix}$  ,  $\underline{X}_2(s) = \begin{bmatrix} \underline{X}_2 & 0 \\ 0 & \underline{X}_2 \\ \tilde{X}_{22} & \hat{X}_{22} \end{bmatrix}$

zaś macierze  $\underline{X}_1$  i  $\underline{X}_2$  podano w Dod.1.



Założmy, że rozpatrywany materiał sprężysty jest ortotropowy, a więc jego macierz konstytutywną dla trójwymiarowego stanu deformacji zapisać można jako:

$$/3.15/ \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & \rho & & \\ G_{33} & C_{23} & C_{33} & & C_{44} & \\ & \rho & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

W macierzy  $\underline{C}$  mamy 9 niezależnych stałych materiałowych. Przyjmować będziemy, że płaszczyzny symetrii materiału pokrywają się odpowiednio z płaszczyznami  $s=0$ ,  $\xi=0$  i  $\theta=0$ , rys. 1. Zakładamy ponadto, że  $\sigma_{33} = 0$ .

Definiując siły wewnętrzne w rozpatrywanym przypadku osiowosymetrycznej powłoki o grubości  $h$  wzorami

$$/3.16/ \quad N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} d\xi, \quad M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \xi d\xi$$

$$\alpha, \beta = s, \theta$$

otrzymamy związki konstytutywne:

$$/3.17/ \quad \underline{N}_{3 \times 1} = h \underline{C}_{3 \times 3}^n \underline{\varepsilon}_0$$

$$\underline{M}_{3 \times 1} = h^3 \underline{D}_{3 \times 3} \underline{\varepsilon}_0 = \frac{h^3}{12} \underline{C}_{3 \times 3}^n \underline{\varepsilon}_0$$

gdzie

$$\underline{N}_{3 \times 1} = \{ N_s \quad N_\theta \quad -N_{s\theta} \}$$

$$\underline{M}_{3 \times 1} = \{ M_s \quad M_\theta \quad M_{s\theta} \}$$

$$\underline{C}_{3 \times 3}^n = \begin{bmatrix} C_{11}^n & C_{12}^n & 0 \\ C_{12}^n & C_{22}^n & 0 \\ 0 & 0 & C_{44}^n \end{bmatrix}$$

$$C_{11}^* = C_{11} - C_0^2/C_{33} \quad , \quad C_{12}^* = C_{12} - C_0 C_{23}/C_{33}$$

$$C_{22}^* = C_{22} - C_3^2/C_{33} \quad , \quad C_{44}^* = C_{44}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}}_{3 \times 1}^0 = \left\{ \epsilon_3^0 \quad \epsilon_0^0 \quad 2\epsilon_{30}^0 \right\}$$

$$\underline{\underline{\alpha}}_{3 \times 1}^0 = \left\{ \alpha_3^0 \quad \alpha_0^0 \quad 2\alpha_{30}^0 \right\}$$

Utwórzmy wyrażenie na energię kinetyczną elementu powłoki w postaci

/3.18/

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_{-h(\theta)/2}^{h(\theta)/2} \rho \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{u}} \, ds \, r \, d\theta \, ds$$

w którym kropka oznacza różniczkowanie względem czasu. Wykorzystując w powyższym wyrażeniu te same co poprzednio aproksymacje składowych stanu przemieszczenia otrzymamy:

/3.19/

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \dot{\underline{\underline{r}}}_n^T \underline{\underline{m}}_{nm} \dot{\underline{\underline{r}}}_m^N = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \dot{\underline{\underline{r}}}_n^T \underline{\underline{m}}_{nn} \dot{\underline{\underline{r}}}_n^N + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{m=0 \\ n \neq m}}^N \dot{\underline{\underline{r}}}_n^T \underline{\underline{m}}_{nm} \dot{\underline{\underline{r}}}_m^N \end{aligned}$$

gdzie

$$\underline{\underline{m}}_{nm} = \rho \underline{\underline{\Phi}}_{16 \times 16}^T \left[ \int_0^l \underline{\underline{A}}^T \left( \int_0^{2\pi} \underline{\underline{\theta}}_m^T \theta_m h(\theta) d\theta \right) \underline{\underline{A}} r ds \right] \underline{\underline{\Phi}}_{16 \times 16}$$

Macierz  $\underline{\underline{m}}_{nm}$  nazywamy macierzą mas. Ze względu na ortogonalność funkcji trygonometrycznych na przedziale  $[0, 2\pi]$ , w przypadku stałej wzdłuż obwodu grubości powłoki,  $h(\theta) = h = \text{const}$ , drugi składnik po prawej stronie wzoru /3.19/ jest równy zeru. Mamy wtedy:



$$/3.20/ \quad T = \sum_{n=0}^N \bar{T}_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \int_{1x16}^{\hat{N}} \bar{m}_{nn} \int_{16x1}^{\hat{N}}$$

a ponadto

$$/3.21/ \quad \int_0^{2\pi} \theta_n^T \theta_n h d\theta = \beta^2 h \text{diag} [\xi_1, \xi_2, \xi_1, \xi_2, \xi_1, \xi_2]$$

$$\xi_1 = \int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{dla } n=0 \\ \pi & \text{dla } n \neq 0 \end{cases}$$

$$\xi_2 = \int_0^{2\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{dla } n=0 \\ \pi & \text{dla } n \neq 0 \end{cases}$$

Macierz mas może być przedstawiona w postaci

$$/3.22/ \quad \bar{m}_{nn} = \begin{bmatrix} \tilde{m}_n & 0 \\ 0 & \hat{m}_n \end{bmatrix}$$

gdzie  $\tilde{m}_n$  i  $\hat{m}_n$  podano w Dod. 1.

Aby otrzymać macierz sztywności konstytutywnej elementu utworzymy wyrażenie na energię jego odkształcenia w postaci

$$/3.23/ \quad E = \frac{1}{2} \int_0^{12\pi} \int_0^{h(\theta)/2} \int_0^{-h(\theta)/2} (\alpha_s \epsilon_s + \alpha_\theta \epsilon_\theta + 2\alpha_{s\theta} \epsilon_{s\theta}) d\epsilon_r r d\theta ds,$$

którą łatwo doprowadzić do wyrażenia

$$/3.24/ \quad E = \frac{1}{2} \int_0^{12\pi} \int_0^0 (\epsilon^o T N + \alpha^o T M) r d\theta ds.$$

Podstawiając w /3.24/ równanie konstytutywne /3.17/, a następnie związki /3.14/, otrzymamy

$$/3.25/ \quad E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \underline{r}_n^{N^T} \underline{k}_{nn} \underline{r}_n^N + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \underline{r}_n^{N^T} \underline{k}_{nm} \underline{r}_m^N,$$

gdzie

$$\underline{k}_{nm} = \underline{\Phi}_{16 \times 16}^T \left( \int_0^l (\underline{X}_1^T \underline{E}_{nm} \underline{X}_1 + \underline{X}_2^T \underline{F}_{nm} \underline{X}_2) r ds \right) \underline{\Phi}_{16 \times 16},$$

$$\underline{E}_{nm} = \underline{L}_{10 \times 6}^T \left( \int_0^{2\pi} \underline{\bar{\Theta}}_n^T \underline{C} \underline{\bar{\Theta}}_m h(\theta) d\theta \right) \underline{L}_{6 \times 10},$$

$$\underline{F}_{nm} = \underline{L}_{10 \times 6}^T \left( \int_0^{2\pi} \underline{\bar{\Theta}}_n^T \underline{D} \underline{\bar{\Theta}}_m h^3(\theta) d\theta \right) \underline{L}_{6 \times 10}.$$

Dla  $h(\theta) = \text{const}$  zachodzi, przy  $m \neq n$ ,  $\int_0^{2\pi} \underline{\bar{\Theta}}_n^T \underline{C} \underline{\bar{\Theta}}_m d\theta = 0$  ze względu na ortogonalność funkcji trygonometrycznych na przedziale  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Mamy wtedy

$$/3.26/ \quad \underline{E}_{nn} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{e}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\hat{e}} \end{bmatrix}, \quad \underline{F}_{nn} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{f}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\hat{f}} \end{bmatrix},$$

gdzie  $\underline{\tilde{e}}$ ,  $\underline{\hat{e}}$ ,  $\underline{\tilde{f}}$  i  $\underline{\hat{f}}$  podano w Dod. 1.

Tym samym  $\underline{k}_{nm} = 0$  dla  $n \neq m$ , a więc poszczególne wyrazy rozwinięcia Fouriera nie są sprzężone.

Założmy, że praca wykonywana przez siły masowe i powierzchniowe działające na powłokę /patrz /2.1// może być doprowadzona do postaci

$$/3.27/ \quad W = \int_{\Gamma} \underline{u}^T \underline{t} d\Gamma + \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Gamma} \underline{u}^T \underline{b} ds d\Gamma = \int_{\Gamma} \underline{u}^T \underline{q} d\Gamma$$

gdzie  $\Gamma$  jest powierzchnią środkową elementu. Wprowadzone



powyżej obciążenie zastępcze  $\underline{q}$  rozwinieamy w szereg Fouriera:

$$/3.28/ \quad \underline{q} = \sum_{n=0}^N \theta_n \underline{q}_n$$

gdzie

$$\underline{q} = \{ q_a \quad q_b \quad q_w \}$$

$$\underline{q}_n = \{ \tilde{q}_{an} \quad \tilde{q}_{bn} \quad \tilde{q}_{wn} \quad \hat{q}_{an} \quad \hat{q}_{bn} \quad \hat{q}_{wn} \}$$

zaś  $\theta_n$  zdefiniowano we wzorze /3.1/.

Wyrażenie na pracę sił zewnętrznych przyjmie postać

$$W = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \underline{r}_n^T \underline{\Phi}^T \int_0^1 \underline{A}^T \int_0^{2\pi} \theta_n^T \theta_m d\theta r ds \underline{q}_m$$

równą zero dla  $m \neq n$  a więc

$$/3.29/ \quad W = \sum_{n=0}^N \underline{r}_n^T \underline{\Phi}^T \int_0^1 \underline{A}^T \underline{\Delta}_n r ds \underline{q}_n = \sum_{n=0}^N \underline{r}_n^T \underline{\rho}_n$$

gdzie, por. /3.21/

$$\underline{\Delta}_n = \beta^2 \text{diag} [ \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_1 \quad \xi_2 ]$$

zaś

$$\underline{\rho}_n = \underline{\Phi}^T \int_0^1 \underline{A} \underline{\Delta}_n r ds \underline{q}_n$$

Równania ruchu otrzymamy wykorzystując wzór /2.2/ i podstawiając w nim wyrażenie /2.3/, gdzie energia kinetyczna  $T$  dana jest w postaci /3.19/, energia odkształceń w postaci /3.25/, zaś praca obciążeń zewnętrznych w postaci /3.29/.

Dla  $j$ -tego elementu mamy

$$/3.30/ \quad L_j = \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{2} \underline{r}_n^T \omega_{nn} \dot{\underline{r}}_n + \frac{1}{2} \sum_{m \neq n} \underline{r}_n^T \omega_{nm} \dot{\underline{r}}_m + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \underline{r}_n^T k_{nn} \underline{r}_n - \frac{1}{2} \sum_{m \neq n} \underline{r}_n^T k_{nm} \underline{r}_m + \underline{r}_n^T \underline{\rho}_n \right)$$

gdzie  $\underline{m}_{nn}$  oraz  $\underline{k}_{nn}$  są elementowymi macierzami masy i sztywności konstytutywnej  $n$ -tego wyrazu rozwinięcia Fouriera, zaś  $\underline{m}_{nm}$  i  $\underline{k}_{nm}$  są efektem sprzężenia różnych wyrazów rozwinięcia powstającego w wyniku zmiennej grubości powłoki w kierunku obwodowym. Dla układu  $M$  elementów otrzymujemy

$$/3.31/ \quad L = \sum_{j=1}^M L_j = \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{2} \underline{\dot{R}}_n^T \underline{M}_{nn} \underline{\dot{R}}_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^N \underline{\dot{R}}_n^T \underline{M}_{nm} \underline{\dot{R}}_m + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \underline{R}_n^T \underline{K}_{nn} \underline{R}_n - \frac{1}{2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^N \underline{R}_n^T \underline{K}_{nm} \underline{R}_m + \underline{R}_n^T \underline{P}_n \right)$$

gdzie  $\underline{R}_n$  jest globalnym wektorem uogólnionych przemieszczeń układu, zaś  $\underline{M}_{nn}$ ,  $\underline{M}_{nm}$ ,  $\underline{K}_{nn}$ ,  $\underline{K}_{nm}$  globalnymi macierzami masy i sztywności konstytutywnej, otrzymanymi w wyniku procesu sumowania /agregacji/ odpowiednich macierzy elementowych. Powyższe wyrażenia odpowiadają oczywiście odpowiednim wyrazom rozwinięcia Fouriera.

Wykorzystując /2.2/ oraz otrzymaną wyżej postać funkcji Lagrange'a otrzymamy ostatecznie równania ruchu dla poszczególnych harmonik, w postaci

$$/3.32/ \quad \underline{M}_{nn} \ddot{\underline{R}}_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^N \underline{M}_{nm} \ddot{\underline{R}}_m + \underline{K}_{nn} \underline{R}_n + \frac{1}{2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^N \underline{K}_{nm} \underline{R}_m = \underline{P}_n \\ ,, = \overline{0, N}$$

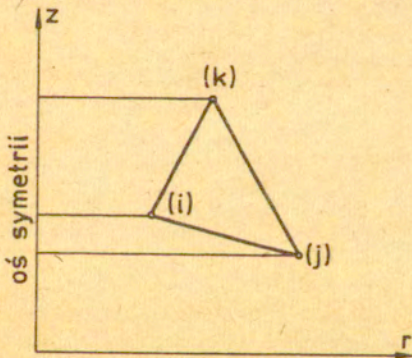
Zakładając  $h(\theta) = \text{const}$ , równanie powyższe zapiszemy w prostszej postaci jako

$$/3.33/ \quad \underline{M}_n \ddot{\underline{R}}_n + \underline{K}_n \underline{R}_n = \underline{P}_n \quad , \quad n = \overline{0, N}$$



#### 4. Toroidalne elementy trójwymiarowe

Rozpatrzmy element o przekroju radialnym w kształcie trójkąta, rys. 2. Rozwińmy w szereg Fouriera składowe stanu przemieszczenia jako



Rys. 2

/4.1/

$$\underline{U}_{3n1} = \sum_{n=0}^N \theta_n \underline{U}_{6n1}$$

gdzie

$$\underline{U} = \{ U_r(r, z, \theta) \quad U_z(r, z, \theta) \quad U_\theta(r, z, \theta) \}$$

$$\underline{U}_n = \{ \underline{\tilde{U}}_n \quad \underline{\hat{U}}_n \}$$

/4.2/

$$\underline{\tilde{U}}_n = \{ \tilde{U}_{rn}(r, z) \quad \tilde{U}_{zn}(r, z) \quad \tilde{U}_{\theta n}(r, z) \}$$

$$\underline{\hat{U}}_n = \{ \hat{U}_{rn}(r, z) \quad \hat{U}_{zn}(r, z) \quad \hat{U}_{\theta n}(r, z) \}$$

$$\underline{\theta}_n = \beta \begin{bmatrix} C_n & 0 & 0 & S_n & 0 & 0 \\ 0 & C_n & 0 & 0 & S_n & 0 \\ 0 & 0 & S_n & 0 & 0 & C_n \end{bmatrix}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \text{ dla } n=0, \beta=1 \text{ dla } n \neq 0$$

$$C_n = \cos n\theta, \quad S_n = \sin n\theta$$

Funkcje  $U_{rn}$ ,  $U_{zn}$  i  $U_{\theta n}$ , aproksymujące stan przemieszczenia wewnątrz elementu trójkątnego przyjmujemy w postaci funkcji liniowych względem zmiennych przestrzennych  $r, z$  tj:

$$/4.3/ \quad \underline{U}_n = \underline{\Phi}(r, z) \underline{\alpha}_n$$

gdzie:

$$\underline{\Phi} = \text{diag} [ \underline{\Psi} \quad \underline{\Psi} \quad \underline{\Psi} \quad \underline{\Psi} \quad \underline{\Psi} \quad \underline{\Psi} ]$$

$$\underline{\Psi} = [ 1 \quad r \quad z ]$$

/4.4/

$$\underline{\alpha}_n = \{ \underline{\tilde{\alpha}}_n \quad \underline{\hat{\alpha}}_n \}$$

$$\underline{\tilde{\alpha}}_n = \{ \tilde{\alpha}_{1n} \quad \tilde{\alpha}_{2n} \dots \tilde{\alpha}_{9n} \}$$

$$\underline{\hat{\alpha}}_n = \{ \hat{\alpha}_{1n} \quad \hat{\alpha}_{2n} \dots \hat{\alpha}_{9n} \}$$

Obliczając /4.3/ w poszczególnych punktach węzłowych elementu (i)-(j)-(k), rys. 2, uogólnione współrzędne wyrazić możemy w funkcji przemieszczeń węzłów .



$$/4.5/ \quad \underline{U}_n^N = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\tilde{U}}_n^N \\ \underline{\hat{U}}_n^N \end{array} \right\}$$

$$\underline{\tilde{U}}_n^N = \left\{ \omega \underline{\tilde{U}}_{rn}^N \quad \psi \underline{\tilde{U}}_{rn}^N \quad \omega \underline{\tilde{U}}_{rn}^N \quad \omega \underline{\tilde{U}}_{zn}^N \quad \psi \underline{\tilde{U}}_{zn}^N \quad \omega \underline{\tilde{U}}_{zn}^N \quad \omega \underline{\tilde{U}}_{\theta n}^N \quad \psi \underline{\tilde{U}}_{\theta n}^N \quad \omega \underline{\tilde{U}}_{\theta n}^N \right\}$$

$$\underline{\hat{U}}_n^N = \left\{ \omega \underline{\hat{U}}_{rn}^N \quad \psi \underline{\hat{U}}_{rn}^N \quad \omega \underline{\hat{U}}_{rn}^N \quad \omega \underline{\hat{U}}_{zn}^N \quad \psi \underline{\hat{U}}_{zn}^N \quad \omega \underline{\hat{U}}_{zn}^N \quad \omega \underline{\hat{U}}_{\theta n}^N \quad \psi \underline{\hat{U}}_{\theta n}^N \quad \omega \underline{\hat{U}}_{\theta n}^N \right\}$$

w następującej postaci:

$$/4.6/ \quad \underline{\sigma}_n = \underline{\Phi}_\rho^{-1} \underline{U}_n^N$$

gdzie  $\underline{\Phi}_\rho^{-1}$  podano w Dod. 2.

Wykorzystując /4.3/ i /4.6/ rozwinięcia, /4.1/ zapisać można jako:

$$/4.7/ \quad \underline{U} = \sum_{n=0}^N \int_{\theta=0}^{\theta} \underline{\Phi}_n(\theta) \underline{\Phi}(r,z) \underline{\Phi}_\rho^{-1} \underline{U}_n^N$$

Liniowe równania geometryczne we współrzędnych walcowych mają postać

$$/4.8/ \quad \underline{\epsilon} = \left[ \begin{array}{l} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ 2\epsilon_{rz} \\ 2\epsilon_{r\theta} \\ 2\epsilon_{z\theta} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{1}{r} (\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r) \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} (\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \end{array} \right]$$

co, wykorzystując poprzednie zależności, zapisać można jako

$$/4.9/ \quad \underline{\epsilon} = \sum_{n=0}^N \int_{\theta=0}^{\theta} \underline{\tilde{\Phi}}_n(\theta) \underline{\tilde{\Phi}}_n'(r,z) \underline{\tilde{\Phi}}_n^{-1} \underline{U}_n^N,$$

gdzie

$$\underline{\tilde{\Phi}}_n = \left[ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\Phi}}_n \\ \underline{\hat{\Phi}}_n \end{array} \right],$$

$$\underline{\tilde{\Phi}}_n' = \left[ \begin{array}{l} \underline{\tilde{\Phi}}_n' \\ \underline{\hat{\Phi}}_n' \end{array} \right],$$

zaś  $\tilde{\theta}_n$ ,  $\hat{\theta}_n$ ,  $\tilde{\Phi}_n$  i  $\hat{\Phi}_n$  podano w Dod. 2.

Utwórzmy wyrażenie na energię kinetyczną rozpatrywanego elementu w postaci /por. /3.18//

$$/4.10/ \quad T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A \rho \dot{u}^T \dot{u} r d\theta dA,$$

gdzie A oznacza odpowiednie pole przekroju, rys. 2. Korzystając ze wzoru /4.3/, /4.7/ otrzymamy

$$/4.11/ \quad T = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A \rho \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \dot{z}_n^T \Phi_n^T \theta_m^T \theta_m \Phi_m \dot{z}_m r d\theta dA.$$

Wykonując całkowanie względem zmiennej  $\theta$  oraz wykorzystując własność ortogonalności funkcji trygonometrycznych na przedziale  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  otrzymamy

$$/4.12/ \quad T = \frac{1}{2} \pi \rho \sum_{n=0}^N \dot{z}_n^T \left( \int_A \mathcal{V} dA \right) \dot{z}_n$$

gdzie

$$\mathcal{V} = \beta \text{diag} \left[ \begin{matrix} \xi_1 \psi & & & & \\ & \xi_2 \psi & & & \\ & & \xi_2 \psi & & \\ & & & \xi_2 \psi & \\ & & & & \xi_2 \psi & \\ & & & & & \xi_2 \psi \end{matrix} \right]$$

$$\xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 0 \quad \text{dla } n=0$$

$$\xi_1 = \xi_2 = 1 \quad \text{dla } n \neq 0$$

$$\psi = \begin{bmatrix} r & r^2 & rz \\ r^2 & r^3 & r^2z \\ rz & r^2z & rz^2 \end{bmatrix}.$$

Wykorzystując /4.7/, wyrażenie /4.12/ doprowadzimy do postaci

$$/4.13/ \quad T = \frac{1}{2} \pi \rho \sum_{n=0}^N \dot{u}_n^N \Phi_n^{-1T} \mathcal{J} \Phi_n^{-1} \dot{u}_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \dot{u}_n^N \underline{m}_n \dot{u}_n$$

gdzie

$$\mathcal{J} = \int_A \mathcal{V} dA, \quad \underline{m}_n = \pi \rho \Phi_n^{-1T} \mathcal{J} \Phi_n^{-1}$$



Macierz  $\underline{m}_n$  nazwiemy macierzą masy rozpatrywanego elementu osiowosymetrycznego.

Utwórzmy następnie wyrażenie na energię odkształcenia sprężystego w elemencie jako:

/4.14/

$$E = \frac{1}{2} \iint_A \int_0^{2\pi} \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} r d\theta dA = \frac{1}{2} \iint_A \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \underline{\alpha}_n^T \underline{\Phi}_n^T \underline{\sigma} \underline{\Phi}_m \underline{\alpha}_m r d\theta dA.$$

1x19 19x12 12x12 12x6 6x6 6x12 12x19 19x1

Oznaczając  $\underline{G}_n = \int_0^{2\pi} \underline{\Phi}_n^T \underline{\sigma}^T \underline{C} \underline{\sigma} \underline{\Phi}_m d\theta$

19x19 19x12 12x12 6x6 6x12 12x19

i biorąc pod uwagę, że

$$\int_0^{2\pi} \underline{\Phi}_n^T \underline{C} \underline{\Phi}_m d\theta = 0 \quad \text{dla } m \neq n$$

otrzymamy:

/4.15/  $E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \underline{\alpha}_n^T \left( \int_A r \underline{G}_n dA \right) \underline{\alpha}_n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \underline{U}_n^T \underline{\Phi}_n^T \underline{S}_n \underline{\Phi}_n \underline{U}_n$

1x19 19x19 19x12 12x12 12x19 19x1

gdzie

$$\underline{S}_n = \int_A r \underline{G}_n dA = \begin{bmatrix} \underline{\hat{S}}_n & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\hat{S}}_n \end{bmatrix}$$

Macierz  $\underline{S}_n$  jest macierzą sztywności elementu we współrzędnych uogólnionych, podaną w Dod. 2.

Kładąc

/4.16/  $\underline{k}_n = \underline{\Phi}_n^T \underline{S}_n \underline{\Phi}_n$

19x19 19x19 19x19 19x19

otrzymamy

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N \underline{U}_n^T \underline{k}_n \underline{U}_n$$

1x19 19x19 19x19 19x1

zaś macierz  $\underline{k}_n$  nazwiemy macierzą sztywności elementu.

Praca zewnętrzna wykonywana przez obciążenia masowe  $\underline{b}$  i obciążenia powierzchniowe na brzegu  $\underline{t}$  dana jest wzorem

/4.18/  $W = \int_{\partial\Omega} \underline{u}^T \underline{t} d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \underline{u}^T \underline{b} d\Omega$

gdzie  $\Omega$  i  $\partial\Omega$  są objętością i powierzchnią brzegu rozpatrywanego elementu toroidalnego. Niech

$$/4.19/ \quad \underline{t} = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{\alpha=6 \\ \beta=1}} \theta_n \underline{t}_n$$

$$\underline{b} = \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{\alpha=6 \\ \beta=1}} \theta_n \underline{b}_n$$

gdzie

$$\underline{t}_{\substack{\alpha \\ \beta}} = \{ t_r \ t_z \ t_\theta \} \quad , \quad \underline{t}_n = \{ \tilde{t}_{rn} \ \tilde{t}_{zn} \ \tilde{t}_{\theta n} \ \hat{t}_{rn} \ \hat{t}_{zn} \ \hat{t}_{\theta n} \}$$

$$\underline{b}_{\substack{\alpha \\ \beta}} = \{ b_r \ b_z \ b_\theta \} \quad , \quad \underline{b}_n = \{ \tilde{b}_{rn} \ \tilde{b}_{zn} \ \tilde{b}_{\theta n} \ \hat{b}_{rn} \ \hat{b}_{zn} \ \hat{b}_{\theta n} \}$$

zaś  $\theta_n$  zdefiniowano poprzednio wzorem /4.2/.

Wstawiając /4.19/ do /4.18/ oraz wykorzystując poprzednie równania otrzymamy

$$/4.20/ \quad W = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \underline{u}_n^m \underline{\Phi}^m \underline{\Phi}^{mT} \left( \int_{\partial\Omega} \underline{\Phi}^T \theta_n^T \theta_m \underline{t}_m d(\partial\Omega) + \int_{\Omega} \underline{\Phi}^T \theta_n^T \theta_m \underline{b}_m d\Omega \right)$$

Ze względu na ortogonalność funkcji trygonometrycznych na przedziale  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , różne od zera w wyrażeniu /4.20/ są jedynie składniki dla których  $n = m$ . Tak więc

$$/4.21/ \quad W = \sum_{n=0}^N \left( \underline{u}_n^m \underline{\bar{t}}_n + \underline{u}_n^m \underline{\bar{b}}_n \right)$$

gdzie

$$\underline{\bar{t}}_n = \underline{\Phi}^{nT} \int_{\partial\Omega} \underline{\Phi}^T \theta_n^T \theta_n \underline{t}_n d(\partial\Omega)$$

$$\underline{\bar{b}}_n = \underline{\Phi}^{nT} \int_{\Omega} \underline{\Phi}^T \theta_n^T \theta_n \underline{b}_n d\Omega$$

Równania ruchu

Otrzymaliśmy poprzednio wyrażenia na energię kinetyczną, energię odkształceń sprężystych oraz pracę sił zewnętrznych. Wykorzystując te wyrażenia z równania /2.2/ otrzymamy równania ruchu układu  $M$  elementów. Funkcja  $L$ , por. /2.3/, dla jednego,  $j$ -tego elementu wyraża się wzorem



/4.22/

$$L_j = \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{2} \dot{u}_n^T \underline{M}_n \dot{u}_n - \frac{1}{2} \underline{u}_n^T \underline{K}_n \underline{u}_n + \underline{u}_n^T \underline{F}_n + \underline{u}_n^T \underline{B}_n \right)$$

co zsumowane po wszystkich elementach prowadzi do

/4.23/

$$L = \sum_{j=1}^M L_j = \sum_{n=0}^N \left( \frac{1}{2} \dot{r}_n^T \underline{M}_n \dot{r}_n - \frac{1}{2} r_n^T \underline{K}_n r_n + r_n^T (\underline{I}_n + \underline{B}_n) \right),$$

gdzie  $r_n^N$  jest wektorem reprezentującym dla n-tego wyrazu rozwinięcia Fouriera wszystkie stopnie swobody układu, zaś  $\underline{M}_n$ ,  $\underline{K}_n$  są globalnymi macierzami mas i sztywności.

Stosując wzór /2.2/, otrzymamy równanie

/4.24 /

$$\underline{M}_n \ddot{r}_n^N + \underline{K}_n r_n^N = R_n^N,$$

gdzie

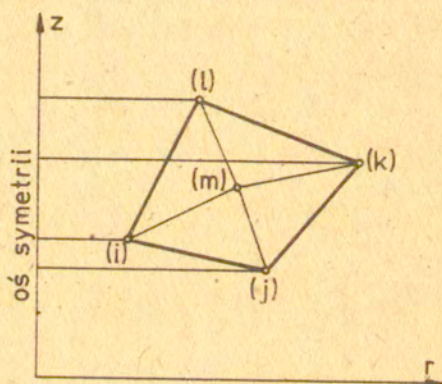
$$R_n^N = \underline{I}_n + \underline{B}_n, \quad n = \overline{0, N}$$

które jest ostatecznym równaniem ruchu rozpatrywanego układu osiowosymetrycznego.

Elementy o przekroju radialnym w kształcie dowolnego czworokąta tworzyć będziemy jako superelementy złożone z czterech elementów "trójkątnych", rys. 3. Równanie równowagi elementu "czworokątnego" zapisać można jako

/4.25/

$$\sum_{n=0}^N \begin{bmatrix} \underline{K}_n^{11} & \underline{K}_n^{12} \\ 24 \times 24 & 24 \times 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_n^N \\ \underline{u}_n^{Ns} \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^N \begin{bmatrix} R_n^N \\ 0 \end{bmatrix},$$



Rys. 3

gdzie  $\underline{U}_n^N$ ,  $\underline{U}_{nsr}^N$  są odpowiednio wektorami przemieszczeń węzłów (i), (j), (k), (l) i węzła środkowego (m) zaś  $\underline{R}_n^N$  siłami węzłowymi dla n-tego wyrazu rozwinięcia Fouriera.

Wykorzystując /4.25/, otrzymamy

$$\underline{U}_{nsr}^N = -k_n^{22} k_n^{21} \underline{U}_n^N$$

$6 \times 1$                        $6 \times 6$      $6 \times 24$      $24 \times 1$



/4.26/ oraz

$$\underset{24 \times 24}{\underline{k}_n} \underset{26 \times 1}{\underline{u}_n^N} = \underset{24 \times 1}{\underline{R}_n^N}$$

gdzie

$$\underset{24 \times 24}{\underline{k}_n} = \underset{24 \times 24}{\underline{k}_n^{11}} - \underset{24 \times 6}{\underline{k}_n^{12}} \underset{6 \times 6}{\underline{k}_n^{22-1}} \underset{6 \times 24}{\underline{k}_n^{21}}$$

Aby otrzymać równanie ruchu układu, w którym występują oba typy elementów /tj. powłokowy i przestrzenny/, należy w sposób sztuczny zwiększyć liczbę stopni swobody z trzech do czterech w węźle elementu przestrzennego, wspólnym z elementem powłokowym. Powoduje to brak zgodności przemieszczeń normalnych do płaszczyzny połączenia elementów różnych typów, zapewniając zgodność w pozostałych dwu kierunkach.

## 5. Podstawy analizy numerycznej

Analiza dynamiki ciał liniowo-sprężystych w ramach klasycznych założeń metody elementów skończonych polega na rozwiązywaniu układu równań ruchu w postaci:

$$/5.1/ \quad M \ddot{r}(t) + C \dot{r}(t) + K r(t) = R(t).$$

Znaczenie oraz sposób otrzymywania wszystkich wielkości występujących w /5.1/ (za wyjątkiem macierzy tłumienia  $C$ ) omówiono w poprzednich rozdziałach. Obecnie zajmiemy się metodami rozwiązywania układów równań ruchu postaci /5.1/.

Istnieją tu dwa zasadnicze podejścia. Pierwsze z nich polega na bezpośrednim całkowaniu równań metodą "krok po kroku", drugie zaś wykorzystuje rozwiązanie układu równań opisujących drgania swobodne analizowanej konstrukcji, tj. jednorodnego układu /5.1/. Rozpocznijmy od krótkiego przedstawienia tego drugiego podejścia.

### 5.1. Metoda superpozycji modalnej /MSM/

W metodzie tej rozwiązujemy równanie drgań swobodnych układu, a następnie dokonujemy odpowiedniej transformacji wektora uogólnionych współrzędnych tak, aby otrzymać rozprężone równania ruchu, które rozwiązywać można niezależnie od siebie. Główną zaletą MSM jest fakt, że w większości przypadków praktycznych wystarczy ograniczyć się do analizy kilku pierwszych postaci drgań. W ten sposób, często, dostatecznie dobre wyniki otrzymać można już dla kilku tylko uogólnionych współrzędnych, podczas gdy w metodzie całkowania bezpośredniego /MCB/ uwzględnia się zawsze wszystkie współrzędne. Z drugiej strony, w MSM konieczne jest rozwiązanie zagadnienia drgań własnych oraz odpowiednia transformacja układu równań, co nie jest potrzebne w MCB. Ponadto MSM stosowana może być zasadniczo tylko do zagadnień liniowych,



podczas gdy w MCB nie ma żadnych ograniczeń tego rodzaju.

Ze względu na powyższe - tak różne od siebie charakterystyki obu metod, należy rozwijać oba podejścia i w konkretnym zagadnieniu dokonywać uzasadnionego wyboru.

Równania ruchu opisujące nietłumione, swobodne drgania układu mają postać

$$/5.2/ \quad \underline{M} \ddot{\underline{r}} + \underline{K} \underline{r} = \underline{0} .$$

Ponieważ drgania swobodne mają charakter harmoniczny, przyjmując można

$$/5.3/ \quad \underline{r} = \underline{\psi} e^{i\omega t}$$

gdzie  $\underline{\psi}$  jest wektorem amplitudy przemieszczeń, zaś  $\omega$  częstotnością drgań. Z /5.2/ i /5.3/ otrzymujemy

$$/5.4/ \quad (\underline{K} - \omega^2 \underline{M}) \underline{\psi} = \underline{0}$$

Równanie to ma różne od zera rozwiązanie  $\underline{\psi}$ , gdy

$$/5.5/ \quad | \underline{K} - \omega^2 \underline{M} | = 0 .$$

Równanie /5.5/, z którego policzyć można częstotści drgań swobodnych, nazywa się równaniem charakterystycznym. Dla każdej wartości własnej  $\omega$ , będącej rozwiązaniem równania /5.5/, istnieje wektor własny  $\underline{\psi}_r$  określony z dokładnością do dowolnego skalaru  $\gamma_r$ . Mamy więc, dla każdego  $\omega_r$ , rozwiązanie w postaci

$$/5.6/ \quad \underline{r}_r = \underline{\psi}_r \gamma_r e^{i\omega_r t} .$$

Ze względu na liniowość równania /5.2/, ogólne je<sup>80</sup> rozwiązanie otrzymać można poprzez superpozycję.

$$/5.7/ \quad \underline{r} = \sum_{r=1}^M \underline{\psi}_r e^{i\omega_r t} \gamma_r = \underline{\Phi} \underline{\gamma} ,$$

gdzie  $\underline{\Phi} = [\underline{\psi}_1 \ \underline{\psi}_2 \ \dots \ \underline{\psi}_M]$  zaś  $M$  jest liczbą postaci drgań. Łatwo wykazać, że dla  $\omega_r \neq \omega_s$  zachodzą związki:

$$/5.8/ \quad \underline{\varphi}_r^T \underline{M} \underline{\varphi}_s = 0 \quad , \quad \underline{\varphi}_r^T \underline{K} \underline{\varphi}_s = 0$$

Stosując do równania /5.1/ transformację współrzędnych zdefiniowaną w /5.7/ otrzymujemy /

$$/5.9/ \quad \underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} \ddot{\underline{Y}} + \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi} \dot{\underline{Y}} + \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} \underline{Y} = \underline{\Phi}^T \underline{R}$$

zaś z /5,8/ wynika, że

$$/5.10/ \quad \underline{M}^* = \underline{\Phi}^T \underline{M} \underline{\Phi} \quad , \quad \underline{K}^* = \underline{\Phi}^T \underline{K} \underline{\Phi} = \omega^2 \underline{M}^*$$

są macierzami diagonalnymi. Zakładając macierz tłumienia w postaci

$$/5.11/ \quad \underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$$

otrzymamy diagonalną macierz  $\underline{C}^*$  jako

$$/5.12/ \quad \underline{C}^* = \underline{\Phi}^T \underline{C} \underline{\Phi} = \alpha \underline{M}^* + \beta \underline{K}^* = (\alpha + \beta \omega^2) \underline{M}^*$$

Zakładając ponadto

$$/5.13/ \quad C_{ii}^* = 2 \lambda_i \omega_i M_{ii}^* \quad ,$$

gdzie  $\lambda_i$  jest współczynnikiem tłumienia i-tej postaci drgań, otrzymamy

$$/5.14/ \quad \lambda_i = \frac{1}{2} (\alpha / \omega_i + \beta \omega_i) \quad ,$$

zaś równanie /5.9/ rozprzęga się do postaci

$$/5.15/ \quad \ddot{Y}_i + 2 \lambda_i \omega_i \dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = R_i^* \quad , \quad i = \overline{1, M}$$

gdzie  $R_i^* = \underline{\varphi}_i^T \underline{R}(\omega) / M_{ii}^*$

Powyższy układ niezależnych od siebie równań może być rozwiązany za pomocą procedur całkowania krok po kroku, por. rozdz. 5.2.

Po znalezieniu wektora uogólnionych współrzędnych  $\underline{Y}$ , przemieszczenia uogólnione  $\underline{l}$  otrzymujemy z /5.7/. Odpowiednią



metodę całkowania przedstawiono w Dod. 3.

### 5.2. Metoda całkowania bezpośredniego /MCB/

Rozpocznijmy od podania paru uwag dotyczących określania macierzy tłumienia. Dla większości konstrukcji macierz ta jest nieznana. Ponieważ wpływ jej na istotne cechy rozwiązania problemu dynamicznego jest często niewielki, usprawnia to wprowadzenie pewnej przybliżonej metody jej określania. Z punktu widzenia algorytmu numerycznego wykonywanego w MCB, nie istnieją żadne ograniczenia co do przyjmowania postaci macierzy  $\underline{C}$ . Kierując się oszczędnością pamięci komputera przyjmuje się często zależność

$$/5.16/ \quad \underline{C} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$$

Doświadczalne obserwacje tłumienia dotyczą przeważnie pojedynczych postaci i częstości drgań układu /tzw. tłumienie modalne/, dlatego też spóbowujemy uzależnić stałe  $\alpha$  i  $\beta$  w /5.14/ od odpowiednich równoważnych tłumień modalnych. Dla danych wartości  $\alpha$  i  $\beta$ , częstość  $\bar{\omega}$  prowadząca do minimalnej wartości współczynnika tłumienia  $\bar{\lambda}$  dana jest jako

$$/5.17/ \quad \bar{\omega} = \sqrt{\alpha/\beta}$$

Dla danych  $\bar{\lambda}$  oraz  $\bar{\omega}$ , współczynniki  $\alpha$  i  $\beta$  określa się ze wzorów

$$/5.18/ \quad \alpha = \bar{\lambda} \bar{\omega} \quad , \quad \beta = \bar{\lambda} / \bar{\omega} .$$

Równanie /5.14/ napisać można w postaci:

$$\lambda_i = (\tau_i / \bar{T} + \bar{T} / \tau_i) \bar{\lambda} / 2$$

gdzie  $\tau_i, \bar{T}$  są odpowiednimi okresami drgań.

Do całkowania równań ruchu zastosowano w pracy metodę  $\theta$ -Wilsona dla  $\theta=2$ , kiedy to przyjmujemy

$$\begin{aligned}
 /5.19/ \quad \underline{r}(t+\Delta t) &= \underline{r}(t-\Delta t) + 2\Delta t \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) + \frac{4\Delta t^2}{2!} \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t) + \frac{8\Delta t^3}{3!} \dddot{\underline{r}}(t-\Delta t), \\
 \dot{\underline{r}}(t+\Delta t) &= \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) + 2\Delta t \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t) + \frac{4\Delta t^2}{2!} \dddot{\underline{r}}(t-\Delta t), \\
 \ddot{\underline{r}}(t+\Delta t) &= \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t) + 2\Delta t \dddot{\underline{r}}(t-\Delta t).
 \end{aligned}$$

Eliminując  $\ddot{\underline{r}}(t-\Delta t)$  otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 /5.20/ \quad \dot{\underline{r}}(t+\Delta t) &= \frac{3}{2\Delta t} (\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t-\Delta t)) - 2\dot{\underline{r}}(t-\Delta t) - \Delta t \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t), \\
 \ddot{\underline{r}}(t+\Delta t) &= \frac{3}{2\Delta t^2} (\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t-\Delta t)) - \frac{3}{\Delta t} \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) - 2\ddot{\underline{r}}(t-\Delta t).
 \end{aligned}$$

Równanie ruchu w chwili  $t+\Delta t$  ma postać

$$/5.21/ \quad \underline{M} \ddot{\underline{r}}(t+\Delta t) + \underline{C} \dot{\underline{r}}(t+\Delta t) + \underline{K} \underline{r}(t+\Delta t) = \underline{R}(t+\Delta t).$$

Podstawiając w nim  $\dot{\underline{r}}(t+\Delta t)$ ,  $\ddot{\underline{r}}(t+\Delta t)$  z /5.20/, otrzymamy

$$/5.22/ \quad \tilde{\underline{K}} \tilde{\underline{r}}(t+\Delta t) = \tilde{\underline{R}}(t+\Delta t),$$

gdzie

$$\tilde{\underline{K}} = \underline{K} + a_0 \underline{M},$$

$$\tilde{\underline{r}}(t+\Delta t) = (1 + 1,5\beta/\Delta t) \underline{r}(t+\Delta t) - 3\beta/2\Delta t \underline{r}(t-\Delta t) - 2\beta \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) - \Delta t \beta \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t),$$

$$\tilde{\underline{R}}(t+\Delta t) = \underline{R}(t+\Delta t) + \underline{M} (a_1 \underline{r}(t-\Delta t) + a_2 \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) + a_3 \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t)),$$

zaś stałe  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  oraz algorytm obliczeń opisany jest w Dod. 4.



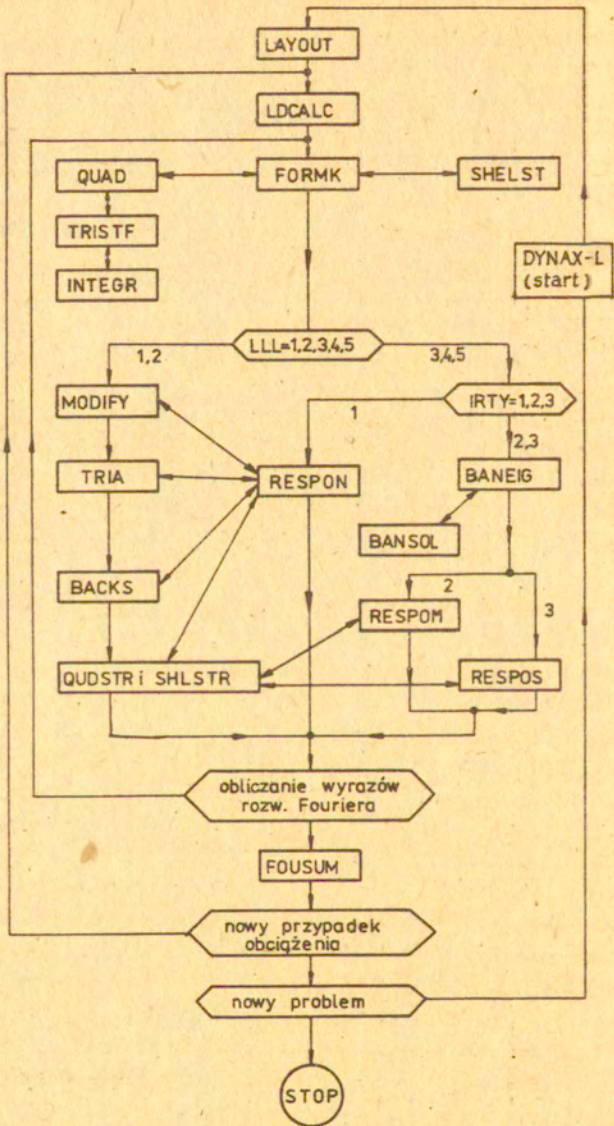
## 6. Opis programu DYNAX-L

W oparciu o podaną powyżej teorię napisano program, którego budowę ilustruje schematycznie rys. 4. Program DYNAX-L składa się z głównego programu i z 18 podprogramów. W programie uwzględniono 5 przypadków obciążeń:

1. siły masowe /LLL=1/
2. dowolne obciążenie statyczne /LLL=2/
3. dowolne obciążenie dynamiczne /LLL=3/
- 4.5. obciążenie spowodowane przez  
poziomą i pionową składową  
trzęsienia ziemi /LLL=4,5/

Wprowadzania danych kontrolnych problemu, danych materiałowych, węzłowych i elementowych dokonuje się w programie LAYOUT, w którym określa się również warunki brzegowe i szerokość pasma macierzy sztywności. Następny podprogram LDCAL wczytuje dane dotyczące statycznych obciążeń węzłowych, dokonuje całkowań powierzchniowych dla elementów powłokowych oraz określa macierz mas /wektor sił masowych w przypadku zagadnień statyki/. Podprogram FORMK jest podprogramem w którym, za pośrednictwem SHELST oraz QUAD, TRISTF i INTEGR tworzy się macierze sztywności sprężystej kolejnych elementów w lokalnym układzie współrzędnych oraz składa się je w globalną macierz sztywności konstrukcji. Układ równań  $Kr = R$  rozwiązuje się za pomocą podprogramów MODIFY /modyfikacja symetrycznej macierzy K w postaci pasmowej/ oraz TRIA i BACKS /metoda eliminacji Gaussa/. Odkształcenia, naprężenia /siły wewnętrzne dla powłok/ wyznaczone zostają przez podprogramy QUDSTR /dla elementów przestrzennych/ i SHLSTR /dla elementów powłokowych/ dla każdego wyrazu rozwinięcia Fouriera. Zależnie od decyzji użytkownika programu, wyniki te mogą być wydrukowane.

W przypadku analizy dynamicznej, układ równań różniczkowych ruchu rozwiązywany jest w podprogramie RESPON /IRTY=1, rys. 4/ w oparciu o metodę całkowania bezpośredniego /metoda krok po kroku/. W trakcie <sup>jego</sup> wykonywania, MODIFY, TRIA, BACKS,



Rys.4 Schemat blokowy DYNAX-L



QUDSTR i SHLSTR traktuje się jako podprogramy. Gdy IRTY = 2, BANEIG z jego podprogramem BANSOL rozwiązuje problem wartości własnych, zaś RESPOM jest realizacją metody superpóźycji modalnej. W przypadku IRTY = 3 podprogram RESPOS /analizuje dynamiczne zachowanie się konstrukcji metodą prędkości spektralnych/ zostanie uruchomiony w następnym etapie badań, kontynuowanych w kierunku uwzględnienia działania pionowej i poziomej składowej prędkości pochodzących od trzęsienia ziemi. W obydwóch podprogramach RESPOM i RESPOS, QUDSTR i SHLSTR wykorzystano jako ich podprogramy. Parametry kontrolne dla zagadnień dynamiki wczytywane są w czasie wykonania tych podprogramów.

Ostatni podprogram FOCUSUM dokonuje sumowania /akumulacji/ otrzymanych poprzednio wyników po wyrazach rozwinięcia Fouriera.

## 7. Instrukcja wprowadzania danych.

Poniżej podano sposób przygotowania danych do programu DYNAX-L. Do opisu pól na kartach perforowanych przyjęto następujące oznaczenia:

- A - transmisja ciągu znaków alfanumerycznych
- I - transmisja wartości typu INTEGER
- F - transmisja wartości typu REAL
- L - transmisja wartości typu LOGICAL
- X - kolumny bez perforacji.

### I. Karta startu /A5/

Karta ta jest pomijana, jeśli rozwiązujemy tylko jeden problem. Karta zaczyna wprowadzanie danych drugiego i następnym problemów.

Kol. 1-5 Słowo START

### II. Karta tytułowa /13A6/

Kol. 1-78 Informacja alfanumeryczna służąca do identyfikacji problemu.

III. Karty kontrolne problemu.

/A/ /4I5, 2L5/

- Kol. 1-5 NUMNP Liczba węzłów.  
6-10 NUMEL Liczba elementów.  
11-15 NUMMAT Liczba różnych rodzajów materiału.  
16-20 NANGLE Liczba kątów wzdłuż obwodu dla wydrukowania przemieszczeń i naprężeń.  
21-25 ISTA Litera T - analiza statyczna.  
26-30 IDYN Litera T - analiza dynamiczna.

/B/ /2I5, F10.0, 2L5/

- Kol. 1-5 NUMPC Liczba kart ciśnienia dla obciążenia statycznego.  
6-10 NFOUST Liczba wyrazów rozwinięcia Fouriera dla obciążenia statycznego.  
11-20 ACLZ Przyspieszenie  $g$  w kierunku osi  $z$ .  
21-25 IDLOAD Litera T - analiza zagadnień z obciążeniem masowym.  
26-30 IAPLD Litera T - analiza zagadnień z obciążeniem statycznym.

/C/ /2I5, 2L5, 4X, I1, I5/

- Kol. 1-5 NMODE Liczba rozpatrywanych postaci drgań.  
6-10 NFOUDY Liczba wyrazów rozwinięcia Fouriera dla obciążenia dynamicznego.  
11-15 IEIGEN Litera T - analiza problemu wartości własnych.  
16-20 IRESP Litera T - analiza dynamicznego zachowania się konstrukcji.  
25 IRTY Liczba 1 - metoda całkowania bezpośredniego  
Liczba 2 - metoda superpozycji modalnej.  
26-30 IDYLD Litera T - analiza zagadnień z obciążeniem dynamicznym.



/D/ Wydruk dla każdego wyrazu rozwinięcia Fouriera /14L2/.

Kol. 2 IHDP	Litera T - wydruk przemieszczeń.
4 IHRA	Litera T - wydruk przyspieszeń względnych.
8 IHFR	Litera T - wydruk naprężeń.
10 IEDP	Litera T - wydruk max. przemieszczeń.
12 IERA	Litera T - wydruk max. przyspieszeń względnych.
16 IEFR	Litera T - wydruk max. naprężeń.
18 IPDP	Litera T - perforowanie przemieszczeń na kartach.
20 IPRA	Litera T - perforowanie przyspieszeń względnych.
24 IPPR	Litera T - perforowanie naprężeń.
26 IPOU	Litera T - wydruk wyników analizy dynamicznej dla każdego wyrazu rozwinięcia Fouriera.
28 IESF	Litera T - wydruk sił wewnętrznych elementów powłokowych.

/E/ /I5/

Kol. 1-5 NACP Liczba punktów węzłowych, w których  
uwzględniono przyspieszenia względne.

#### IV. Karty danych materiałowych.

Następne karty podać należy dla każdego rodzaju  
materiału /por. NUMMAT, kol. 11-15, p. III /A/ /

/A/ /I5, F10.0, 10A6/

Kol. 1-5 MTYPE	Numer identyfikacyjny materiału.
6-15 RO	Gęstość materiału.
16-75 HED2	Oznaczenie alfanumeryczne identyfikujące materiał.

/B/ /A9/

Kol. 1-9 XXM Słowo ISOTROPIC dla materiału izotropowego, dowolna informacja alfanumeryczna dla materiału ortotropowego.

/C/a/ Dla materiału izotropowego /2F10.0/

Karta jest pomijana gdy materiał jest ortotropowy.

Kol. 1-10 XNU Liczba Poissona

11-20 YMOD Moduł Younga E

b/ Dla materiału ortotropowego /6F10.0/

Karta ta jest pomijana gdy materiał jest izotropowy.

	element przestrzenny	element powłokowy	wartość izotropowa
Kol. 1-10	$C_{rr}$	$C_{ss}$	$\lambda + 2\mu$
11-20	$C_{rz}$	$C_{se}$	$\lambda$
21-30	$C_{re}$	$C_{sw}$	$\lambda$
31-40	$C_{zz}$	$C_{ee}$	$\lambda + 2\mu$
41-50	$C_{ze}$	$C_{ew}$	$\lambda$
51-60	$C_{se}$	$C_{ww}$	$\lambda + 2\mu$

/D/ /3F10.0/

Karta ta jest pomijana gdy materiał jest izotropowy.

Kol. 1-10	$G_{rz}$	$G_{se}$	$\mu$
11-20	$G_{re}$	-	$\mu$
21-30	$G_{ze}$	-	$\mu$

gdzie  $\lambda$  i  $\mu$  są stałymi Lamé'go. W zależności od modułu sprężystego E i współczynnika Poissona  $\nu$ , stałe  $\lambda$  i  $\mu$  zapisać można jako

$$\lambda = \frac{\nu E}{1-2\nu}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



V. Karty dla punktów węzłowych /I3, F11.0, 3F10.0, I5/

Jedna karta dla punktu węzłowego.

Kol.	1-3	N	Numer węzła.
	11		Liczba 1 jeśli podparcie w kierunku R, Liczba 0 w przeciwnym przypadku.
	12		Liczba 1 jeśli podparcie w kierunku Z, liczba 0 w przeciwnym przypadku.
	13		Liczba 1 jeśli podparcie w kierunku $\theta$ , liczba 0 w przeciwnym przypadku.
	14		Liczba 1 jeśli obrót w płaszczyźnie RZ jest równy zeru, liczba 0 w przeciwnym przypadku.
	21-30	R(N)	Współrzędna R w globalnym układzie współrzędnych.
	31-40	Z(N)	Współrzędna Z w globalnym układzie współrzędnych.
	41-50	TH(N)	Grubość elementu powłokowego w danym punkcie węzłowym /liczba 0.0 lub kolu- mny zestawione bez perforacji dla elementu przestrzennego/.
	51-55	NS	Parametr generacji.

Na pierwszej i ostatniej karcie zbioru kart węzłowych wprowadzane są dane odpowiednio pierwszego i ostatniego węzła. Pozostałe karty niekoniecznie muszą być wprowadzone zgodnie z rosnącą numeracją, tj. kolejność jest dowolna. Dane szeregu następujących węzłów.

$$[ N1, N1 + 1 * NS2, N1 + 2 * NS2, \dots, N2 ]$$

mogą być generowane na podstawie informacji dwóch kolejnych kart

karta 1 N1, CODE(N1), R(N1), Z(N1), TH(N1), NS1

karta 2 N2, CODE(N2), R(N2), Z(N2), TH(N2), NS2

Dla węzłów pośrednich numery, współrzędne i grubości elementu powłokowego interpolowane są liniowo z krokiem /parametrem/ generacji dziurkowanym na drugiej karcie, tj. NS2. Np. po pierwszej generacji mamy

$$N1 + NS2$$

$$R(N1 + NS2) = R(N1) + (R(N2) - R(N1)) / ((N2 - N1) / NS2)$$

i analogicznie dla  $Z(N1+NS2)$  i  $TH(N1+NS2)$ .

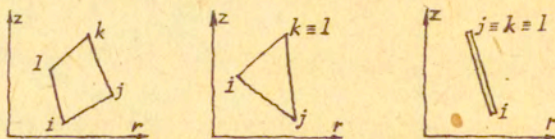
Warunki brzegowe pośrednich węzłów między  $N1$  a  $N2$  odpowiadają warunkowi brzegowemu podanemu na pierwszej karcie /CODE(N1)/.

#### VI. Karty elementowe /7I5/

Jedną kartę dla elementu.

Kol. 1-5	M	Numer elementu
6-10	IX(M,1)	Numer węzła I
11-15	IX(M,2)	Numer węzła J
16-20	IX(M,3)	Numer węzła K
21-25	IX(M,4)	Numer węzła L
26-30	IX(M,5)	Numer rodzaju materiału.
31-35	NS	Parametr generacji.

Dla prawoskrętnego układu współrzędnych, rys.5, punkty węzłowe I,J,K,L zdefiniowane są w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara.



Rys. 5. Identyfikacja dla elementów.



Element "trójkątny" identyfikowany jest powtórzeniem numeru ostatniego węzła, tj. I J K K, zaś dla elementu powłokowego - I J J J, rys. 5.

Wymienione karty muszą być wprowadzone zgodnie z rosnącą numeracją elementów.

Dla pominiętych elementów, numery węzłów są generowane w równych odstępach drogą interpolacji liniowej. Np. dane szeregu następujących elementów

$$[ M1 , M1+1 , M1+2 , \dots , M2 ]$$

mogą być generowane na podstawie informacji dwóch kolejnych kart:

karta 1 M1, (IX(M1,I), I = 1,5), NS1

karta 2 M2, (IX(M2,I), I = 1,5), NS2 .

Po pierwszej generacji mamy

M1 + 1

$$IX(M1+1, I) = IX(M1, I) + NS2 \quad ; \quad I = \overline{1,4}$$

gdzie parametr generacji NS2 jest numerem ostatniego generowanego elementu. Numery rodzaju materiału pośrednich elementów,brane są zgodnie z danymi z pierwszej karty, tzn.

$$IX(M1+1, 5) = IX(M1, 5)$$

VII. Karty kątów, dla których mają być drukowane obliczone wyniki /8F10.0/.

Karty te są pomijane, gdy liczba kątów dla wydrukowania przemieszczeń i naprężeń jest równa zero

/NANGLE = 0, por. kol. 16-20 p. III/A// . W przeciwnym razie podać należy w formacie 8F10.0 kąty  $\theta$  wzdłuż obwodu, dla których otrzymane przemieszczenia i naprężenia mają być drukowane po zsumowaniu wyrazów rozwinięcia Fouriera.

### VIII. Karty współczynników Fouriera /8F10.0/

Segment ten jest pomijany w przypadku obciążenia masowego /IDLOAD:=T, kol. 21-25, p. III/B//.

W przeciwnym razie w formacie 8F10.0 podać należy  $A_0$ ,  $A_1, \dots, A_{n-1}$  gdzie  $n = NFOUST$  dla analizy statycznej /zob. kol. 6-10 p. III/B// lub  $n = NFOUDY$  dla analizy dynamicznej /zob. kol. 6-10 p. III/C// gdzie  $A_1$  występujące w wyrażeniu na obciążenie

$$P(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos n\theta$$

wyznaczone są następująco

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Dla analizy z obciążeniem statycznym należy powtórzyć karty podane poniżej w p.p. IX i X dla każdego różnego od zera wyrazu rozwinięcia Fouriera /por.kol.6-10 p.III/B/ oraz p. VIII/.

### IX. Karty dla obciążeń węzłowych.

Karty te są pomijane, gdy analizanie dotyczy obciążenia statycznego, tj. IAPLD:=FALSE /por.kol. 26-30 p. III/B//.

/A/ /I5/

Kol. 1-5 NUMCL liczba węzłów poddanych obciążeniu.

/B/ /I5, 5X, 4F10.0/

Segment ten jest pomijany jeżeli NUMCL = 0 /por.kol. 1-5 p. IX/A//.

Jedna karta dla każdego obciążonego węzła. Obciążenia brane są na jednostkę długości obwodu konstrukcji.

Kol. 1-5 Numer węzła



11-20	Obciążenie w kierunku R
21-30	Obciążenie w kierunku Z
31-40	Obciążenie w kierunku $\theta$
41-50	Moment w płaszczyźnie R-Z /dla powłok/.

### X. Karty ciśnień /2I5, 6F10.0/

Segment ten jest pomijany, gdy liczba kart ciśnień NUMPC= 0 /por. kol. 1-5 p. III/B//.

Jedna karta dla każdego obciążonego obszaru /por.NUMPC/.

Kol. 1-5	Numer węzła I
6-10	Numer węzła J
11-20	Intensywność obciążenia normalnego w węźle I
21-30	Intensywność obciążenia normalnego w węźle J
31-40	Intensywność obciążenia południkowego w węźle I
41-50	Intensywność obciążenia południkowego w węźle J
51-60	Intensywność obciążenia obwodowego w węźle I
61-70	Intensywność obciążenia obwodowego w węźle J.

Obciążony obszar zdefiniowany jest powierzchnią między węzłami I a J / J musi być większe od I/.

J jest niekoniecznie równe /I + 1/. W tym przypadku pośrednie węzły leżą na jednej prostej w płaszczyźnie R-Z, a intensywności ich obciążenia wynikają z liniowej zmienności pomiędzy I i J.

Zagadnienie z obciążeniem dynamicznym, tj. dynamiczne zachowanie się konstrukcji analizowano alternatywnie dwiema metodami /IRTY = 1 lub IRTY = 2, por.kol.25 p. III/C//. Następujący plik kart jest pomijany, gdy IDYN:=FALSE /kol. 26-30 p. III/A// oraz IDYLD:=FALSE /kol. 26-30 p. III/C//. W przeciwnym razie powtórzyć należy ten plik kart dla każdego różnego od zera wyrazu rozwinięcia Fouriera /por. kol. 6-10 p.III/C/ oraz

p. VIII/.

① Metoda całkowania bezpośredniego

Segment ten jest pomijany, jeśli IRTY  $\neq 1$  /por. kol. 25 p. III/C//. W przeciwnym przypadku podać należy informacje przedstawione poniżej w p.p. XI, XII, XIII i XIV

XI. Karty kontrolne dla analizy dynamicznego zachowania się konstrukcji /X5, F10.0, 2I5, 4X, I1/.

Kol.	6-15	DT	Przyrost czasu
	16-20	NDT	Liczba przyrostów czasu
	21-35	NPRINT	Liczba kroków /przyrostów/ po czasie między dwoma kolejnymi wydrukami przemieszczeń i naprężeń.
	30	ISTR5	Liczba 1 oznacza, że nie chcemy drukować naprężeń.

XII. Karta współczynników tłumienia /2F10.0/ występujących w zależności  $\underline{Q} = \alpha \underline{M} + \beta \underline{K}$

Kol.	1-10	ALFA	alfa / $\alpha$ /
	11-20	BETA	beta / $\beta$ /

XIII. Karty dla węzłów, dla których mają być drukowane obliczone przyspieszenia /16I5/.

Segment ten jest pomijany, gdy NACP = 0 /por. kol. 1-5 p. III/E//. W przeciwnym razie podać należy w formacie /16I5/ numery węzłów, dla których wartości przyspieszeń względnych mają być drukowane.

XIV. Karty dla dynamicznych obciążeń węzłowych.

Segment ten jest pomijany, gdy IDYLD:=FALSE /por. kol. 26-30 p. III/C//.



/A/ /13A6/

Kol. 1-78 HED2 Alfnumeryczna informacja identyfikująca obciążenie dynamiczne.

/B/ /I5/

Kol. 1-5 NUMCL Liczba obciążonych węzłów

/C/ Następujący zbiór kart powtórzyć należy /NDT+1/ razy /zob. kol. 16-20 p. XI/.

(1) /F10.0/

Kol. 1-10 TD czas

(2) /I5, 5X, 4F10.0/

Jedna karta dla każdego obciążonego węzła.  
Obciążenia brane są na jednostkę długości obwodu.

Kol. 1-5 Numer węzła

11-20 Obciążenie w kierunku R

21-30 Obciążenie w kierunku Z

31-40 Obciążenie w kierunku  $\theta$

41-50 Moment w płaszczyźnie R-Z (dla powłok).

② Metoda superpozycji modalnej

Segment ten jest pomijany, gdy IRTY  $\neq$  2 /por.kol. 25 p. III/C//. W przeciwnym razie podać należy informacje przedstawione poniżej w p.p. XV, XVI, XVII, XVIII.

XV. Karty kontrolne dla analizy dynamicznego zachowania się konstrukcji /X5, F10.0, 2I5, 4X, I1/.

Kol. 6-15 DT Przyrost czasu

16-20 NDT Liczba przyrostów /kroków/ czasu

21-25 NPRINT Liczba przyrostów czasu między dwoma kolejnymi wydrukami przemieszczeń i naprężeń.

30 ISTRS Liczba 1 oznacza, że nie chcemy drukować naprężeń.

XVI. Karty współczynników tłumienia /8F10.0/

Dane wprowadzone są w formacie /8F10.0/ dla wszystkich rozpatrywanych postaci drgań /por. NMODE, kol. 1-5, p. III/C//.

XVII. Karty dla węzłów, dla których obliczone przyspieszenia mają być drukowane /16I5/.

Segment ten jest pomijany, gdy NACP = 0 /por. kol. 1-5, p. III/E//. W przeciwnym przypadku podać należy w formacie /16I5/ numery węzłów, dla których wartości przemieszczeń względnych mają być drukowane.

XVIII. Karty dla dynamicznych obciążeń węzłowych.

Segment ten jest pomijany, gdy IDYLD=FALSE /por. kol. 26-30 p. III/C//.

/A/ /13A6/

Kol. 1-78 HED2 Alfanumeryczna informacja identyfikująca obciążenie dynamiczne.

/B/ /I5/

Kol. 1-5 NUMCL Liczba obciążonych węzłów.

/C/ Następujący zbiór kart należy powtórzyć /NDT + 1/ razy /por. kol. 16-20 p. XV/.

(1) /F10.0/

Kol. 1-10 TD czas

(2) /I5, 5X, 4F10.0/

Jedna karta dla każdego obciążonego węzła. Obciążenia brane są na jednostkę długości obwodu konstrukcji.

Kol. 1-5 Numer węzła

11-20 Obciążenie w kierunku R

21-30 Obciążenie w kierunku Z

31-40 Obciążenie w kierunku  $\theta$

41-50 Moment w płaszczyźnie R-Z /dla powłok/.



## 8. Przykłady

Korzystając z programu DYNAX-L policzono na maszynie CYBER-72 szereg przykładów ilustrujących zastosowanie przedstawionej powyżej metody.

### 1. Analiza powłoki walcowej.

Na rys.6 podano wyniki liniowej analizy walcowej powłoki sprężystej, podpartej przegubowo na obu końcach i równomiernie obciążonej na środkowym obwodzie. Obliczone przemieszczenia radialne  $U_r$  w punktach wzdłuż tworzącej, rys.6a, określają postać odkształconej powierzchni środkowej powłoki. Na rys.6b, 6c pokazano przemieszczenia  $U_z$  i momenty zginające  $M_z$ . Całkowity czas obliczeń /wraz z wydrukami/ wyniósł 163 sek. Radialne przemieszczenia  $U_r(t)$  w środkowym punkcie A powłoki poddanej działaniu nagle przyłożonego obciążenia /por.rys.7/ policzono obydwoma metodami całkowania układu równań różniczkowych ruchu /MCB i MSM/ dla 100 przyrostów czasu /  $\Delta t = 10^{-5}$  sek./ i przedstawiono na rys.7.

Otrzymane przemieszczenia porównano z wynikami analitycznymi w oparciu o klasyczne równania powłok, [5]. Wpływ tłumienia w tym przypadku pominięto. Czas obliczeń wyniósł 259 sek. dla MCB i 358 sek. (16 postaci drgań własnych), 421 sek (24 p.d.w.) dla MSM.

### 2. Drgania własne powłoki walcowej.

Jako drugi przykład policzono drgania własne powłoki walcowej o utwierdzonych brzegach, pokazanej na rys.8. Na rysunku tym podano także odpowiednie dane geometryczne i materiałowe charakteryzujące powłokę. Macierz mas przyjęto w postaci diagonalnej. Na rys.8, 9 pokazano odpowiednio 6 pierwszych postaci drgań obwodowych i osiowych. <sup>oraz 2 inne możliwe postacie drgań osiowych</sup> Zaś w tab.1 przedstawiono otrzymane wyniki i porównano je z wynikami eksperymentalnymi podanymi w [8] oraz z wynikami analitycznymi uzyskanymi w oparciu o klasyczne równania powłok podanymi

w [9]. Analizę przeprowadzono dzieląc powłokę na 10 pierścieniowych elementów skończonych.

### 3. Statyczna i dynamiczna analiza czaszy kulistej.

W przykładzie niniejszym analizowano sprężystą czaszę kulistą utwierdzoną na obwodzie, poddaną obciążeniu skupionemu w wierzchołku. Obciążenie to zastąpiono równomiernie rozłożonym obciążeniem węzłowym, działającym na pewnym małym obwodzie  $r = 0.0445$  in/ wokół wierzchołka czaszy. Wykresy przemieszczenia  $U_r$  oraz momentów  $M_r$  i  $M_\theta$  dla problemu statycznego pokazano na rys. 10. Czas obliczeń wyniósł 155 sek.

Na rys. 11 pokazano zachowanie się konstrukcji w przypadku obciążenia dynamicznego, które przyłożono w sposób nagły w chwili  $t = 0$  i pozostawiono niezmienione do końca analizy. Całkowania równań ruchu dokonano metodą bezpośrednią dla 100 przyrostów czasu, przy czym  $\Delta t = 3 \cdot 10^{-6}$  sek. W porównaniu z rozwiązaniami podanymi w pracy [6], otrzymane wyniki wykazują dobrą zgodność postaci drgań i ich okresu oraz nieco gorszą zgodność w odniesieniu do amplitudy drgań. Czas obliczeń wyniósł 218 sek.

### 4. Analiza płyty kołowej.

Za pomocą programu DYNAX-L przeprowadzono analizę konstrukcji o postaci pokazanej na rys. 12. Na rysunku tym podano również odpowiednie dane geometryczne i materiałowe oraz nieosiowosymetryczne obciążenie  $P$ . Uwzględniono 4 wyrazy rozwinięcia Fouriera. Konstrukcję podzielono na 13 toroidalnych elementów o radialnym przekroju prostokątnym.

Analiza przemieszczeń  $U_z$ , rys. 13, wykazuje znaczne zmiany przemieszczeń  $U_z$  wzdłuż promienia w punktach na górnej powierzchni płyty, odpowiadających różnym wartościom kąta  $\theta$  oraz zgodność otrzymanych wyników z rozwiązaniami analitycznymi podanymi w [7]. Na rys. 14, 15, 16, 17 i 18 podano odpowiednio wykresy



przemieszczeń  $U_r$ ,  $U_\theta$  oraz wykresy naprężeń  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  i  $\sigma_{z\theta}$  w środkowych punktach radialnego przekroju elementów. Czas obliczeń wyniósł 190 sek.

Tab.1

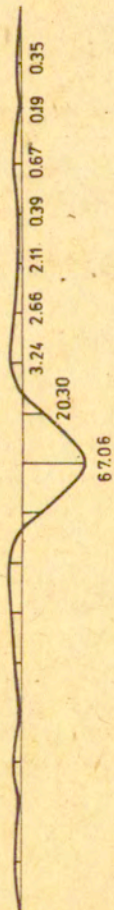
m \ n		1	2	3	4	5	6	7
0	A			1025	700	559	525	587
	B	3427	1918	1145	765	580	530	597
	C	3426	1922	1160	769	581	534	589
1	A				1620	1210	980	875
	B	6423	3905	2538	1753	1287	1022	907
	C	6404	3912	2553	1770	1303	1034	912
2	A						1650	1395
	B		5844	4054	2921	2192	1720	1431
	C	8194	5839	4075	2953	2227	1754	1458
3	A							1960
	B		7303	5447	4104	3168	2516	2076
	C		7245	5451	4144	3222	2578	2133
4	A							
	B							
	C		8120	6550	5222	4197	3430	2867

A - wg [8] , wartości doświadczalne

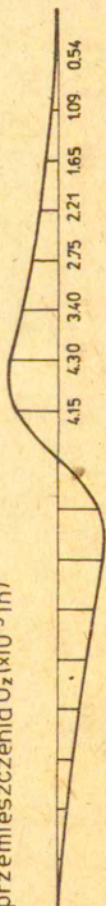
B - wg [9] , wartości analityczne

C - DYNAX-L , metoda elementów skończonych

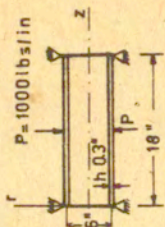
a) przemieszczenia  $U_r (\times 10^{-5} \text{ in})$



b) przemieszczenia  $U_z (\times 10^{-5} \text{ in})$



c) momenty zginające  $M_z (\text{lb. in})$



$E = 3 \times 10^7 \text{ lbs/in}$

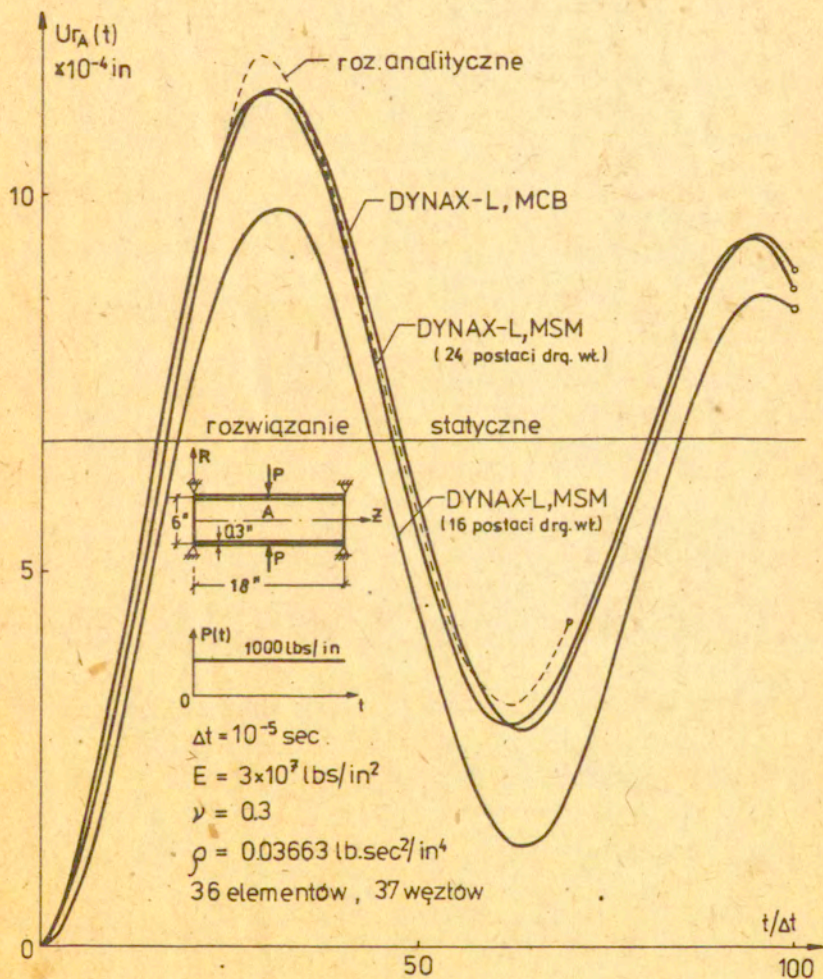
$\nu = 0.3$

36 elementów

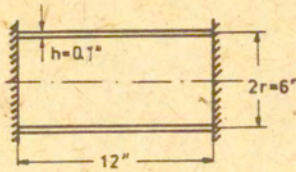
37 węzłów

Rys 6 - Statyczna analiza powłoki walcowej





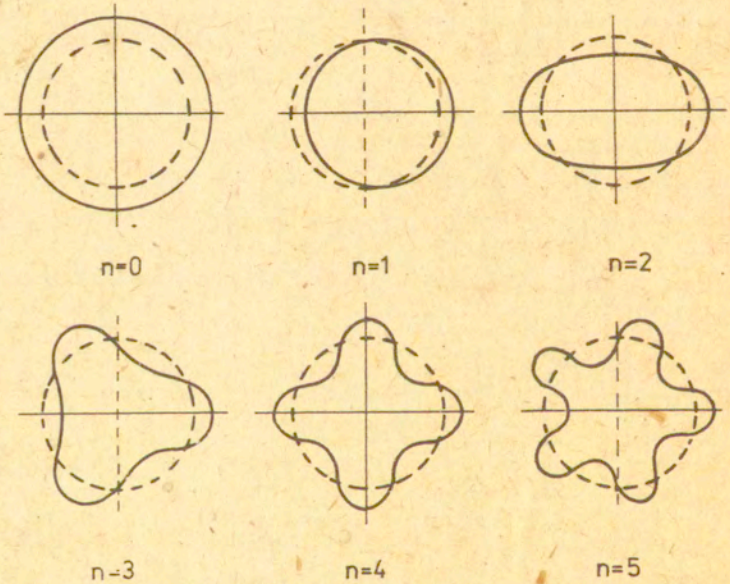
Rys 7. Dynamiczna analiza powłoki walcowej  
 Radialne przemieszczenia  $U_r(t)$  w punkcie A



$$E = 29.6 \times 10^6 \text{ lbs/in}^2$$

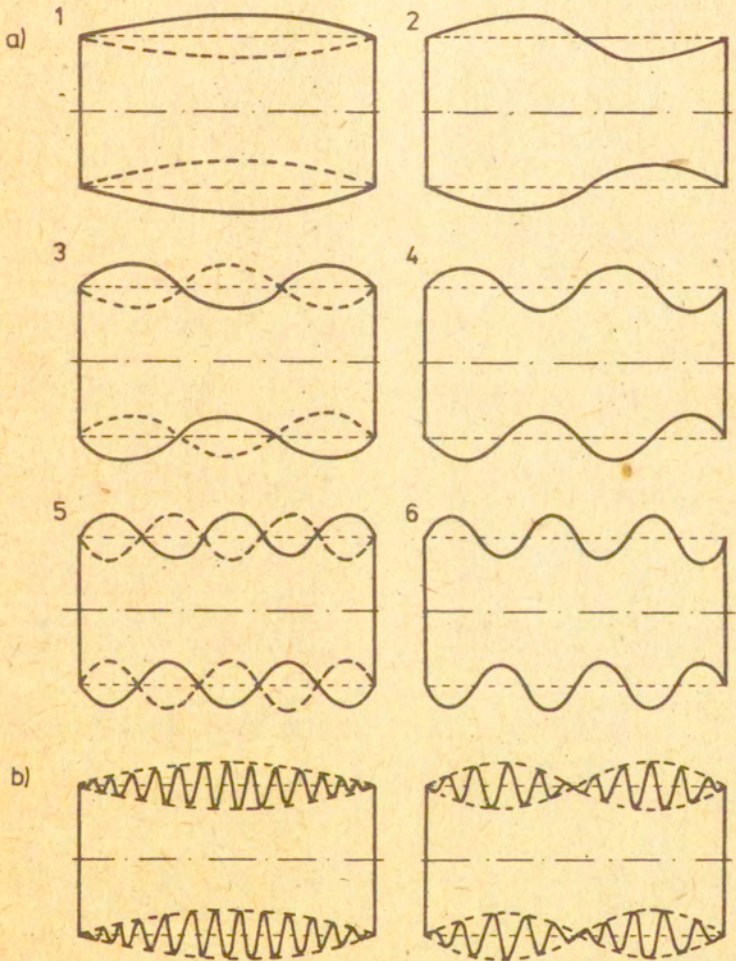
$$\nu = 0.29$$

$$\rho = 0.000733 \text{ lbs} \times \text{sec}^2 / \text{in}^4$$

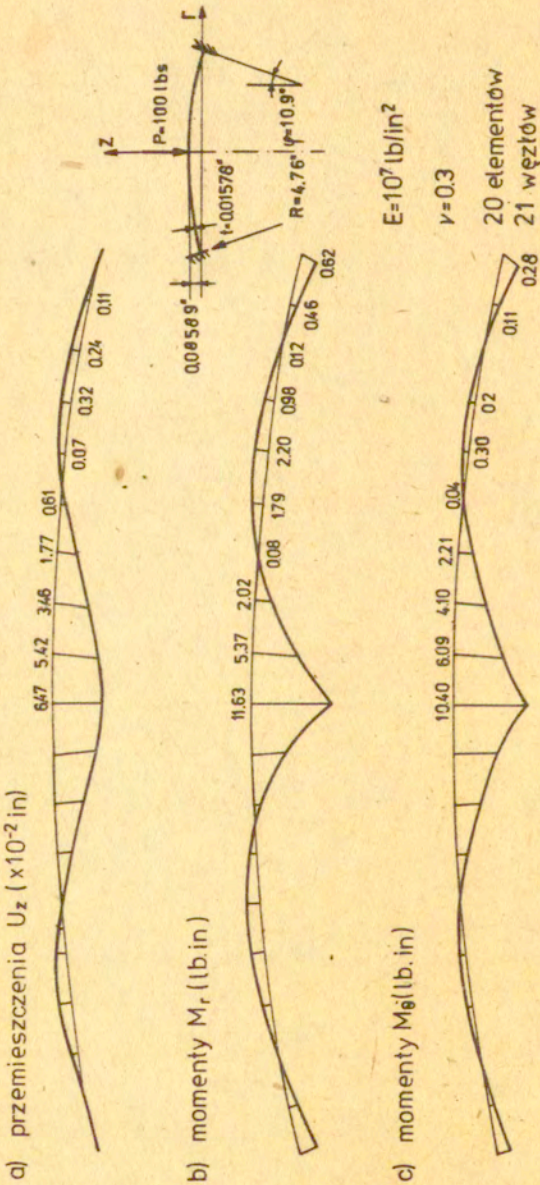


Rys. 8. Postacie drgań obwodowych  
powłoki walcowej



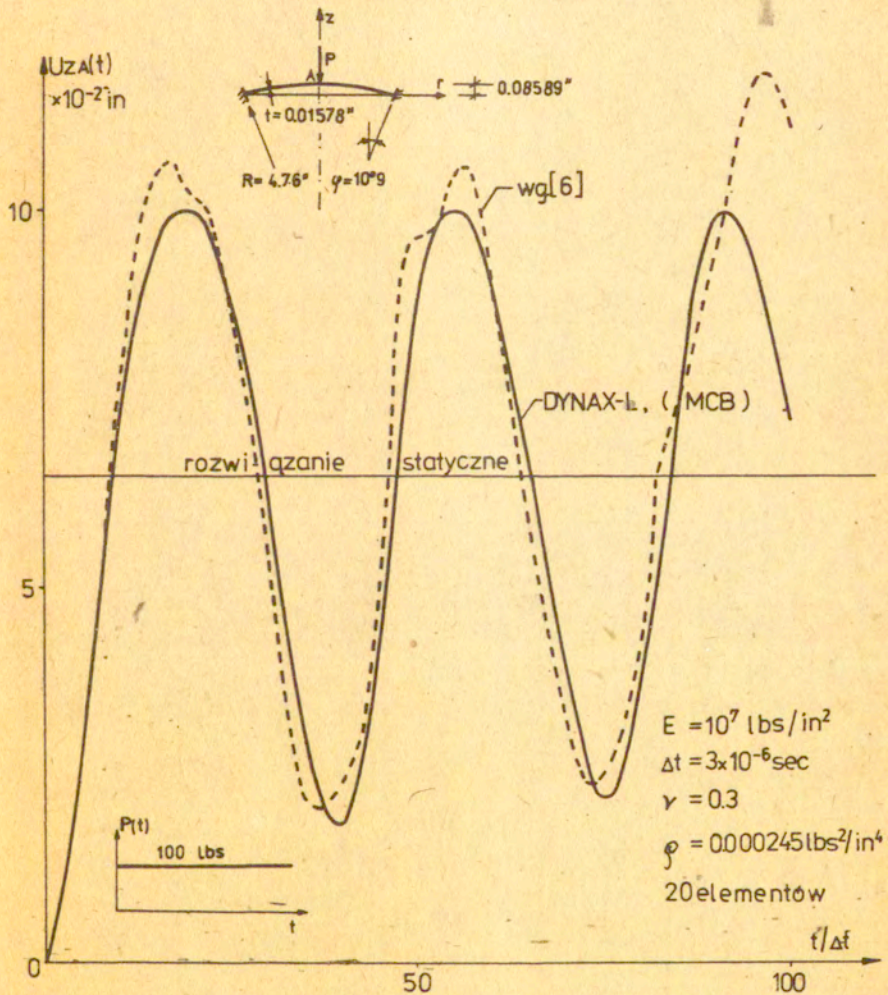


Rys. 9 . Postacie drgań osiowych  
powłoki walcowej



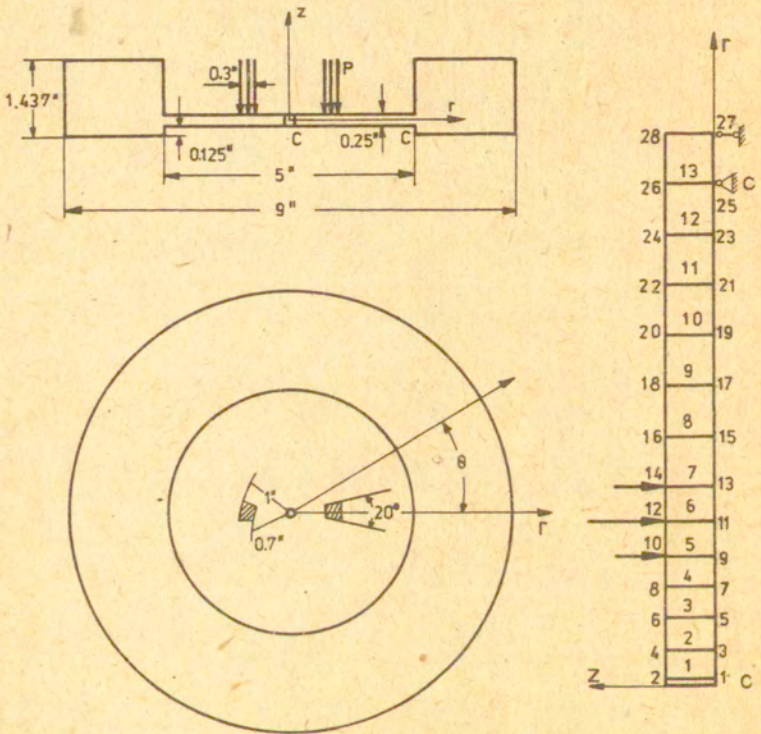
Rys.10. Statyczna analiza czaszy kulistej





Rys.11 Dynamiczna analiza czaszy kulistej

Pionowe przemieszczenia  $U_z(t)$  w wierzchołkowym punkcie



$$E = 10^7 \text{ lbs/in}^2$$

$$P = 4000 \text{ lbs}$$

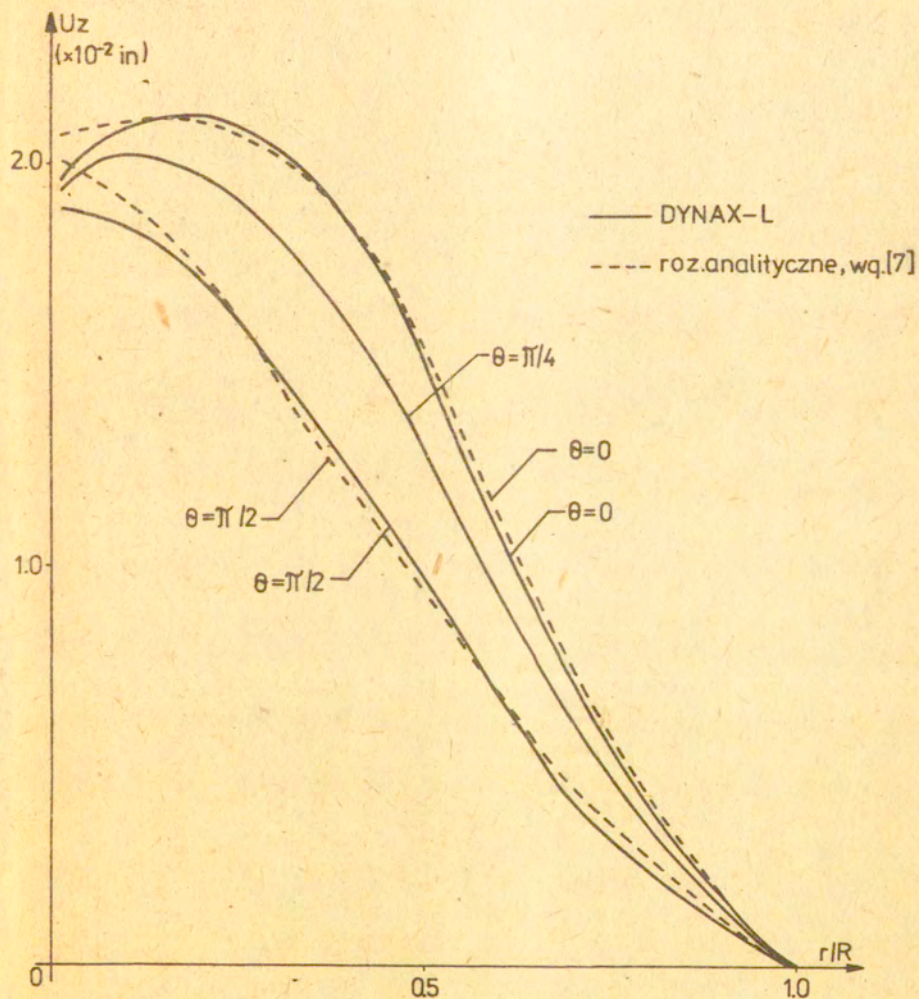
$$\nu = 0.3$$

13 elementów, 28 węzłów

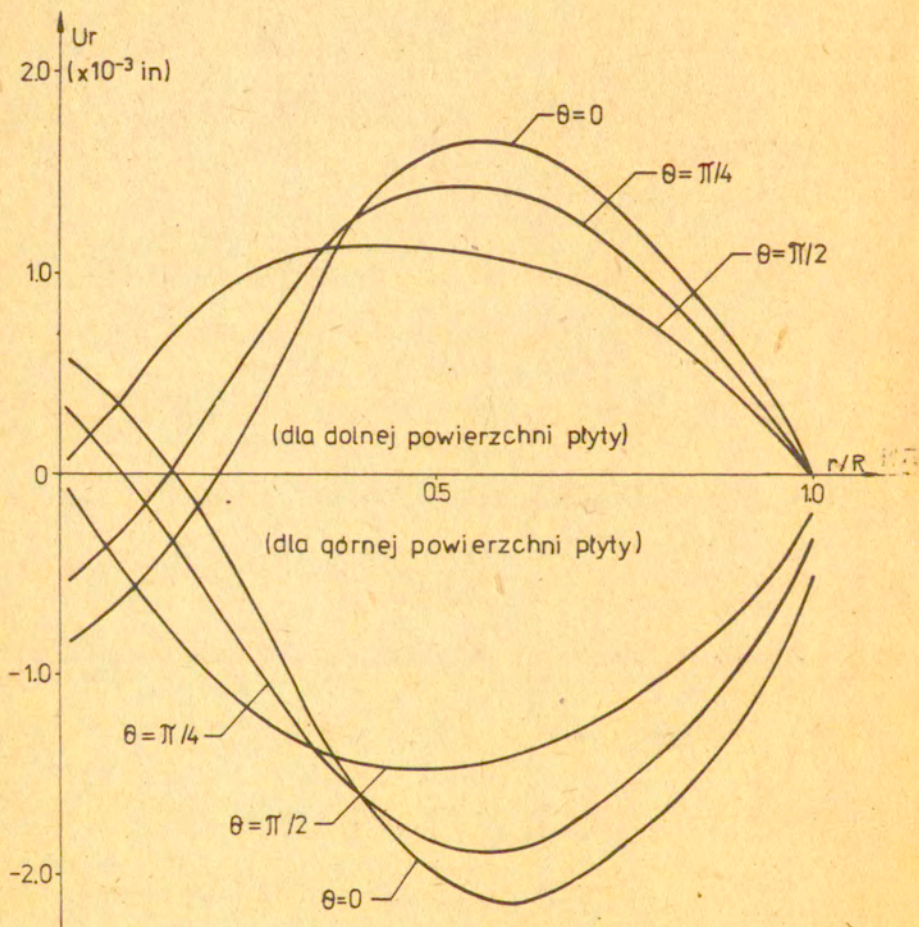
liczba wyrazów rozwinięcia Fouriera  $n = 4$

Rys. 12 Płyta poddana nieosiowosymetrycznemu obciążeniu i schemat obliczeniowy



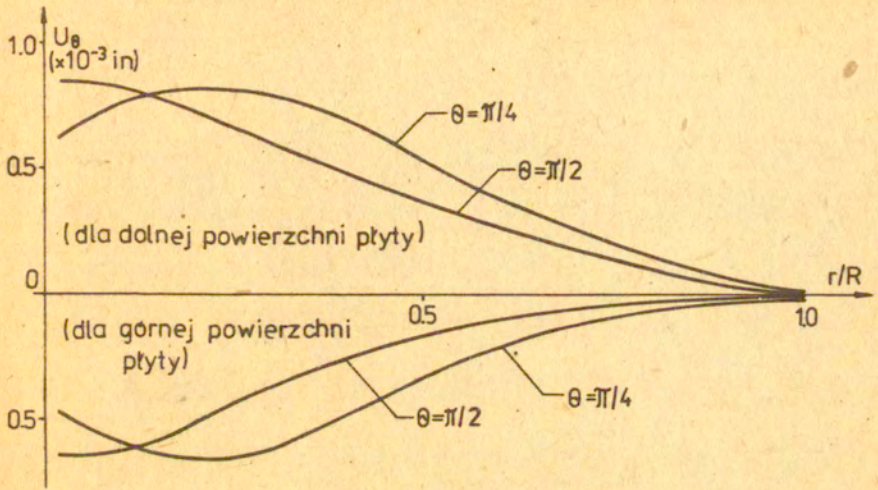


Rys.13. Zmiany przemieszczeń  $U_z$  wzdłuż promienia górnej powierzchni płyty dla różnych kątów  $\theta$ .

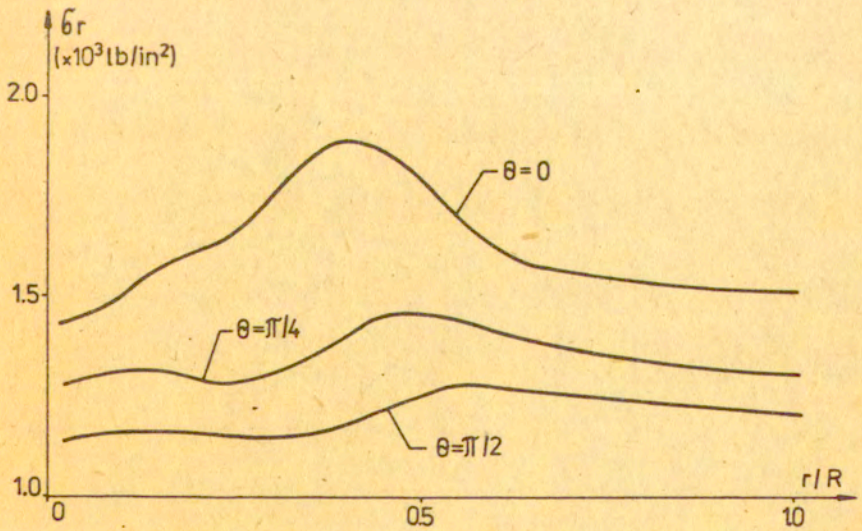


Rys 14 Zmiany przemieszczeń  $U_r$  wzdłuż promienia dla różnych wartości kąta  $\theta$ .

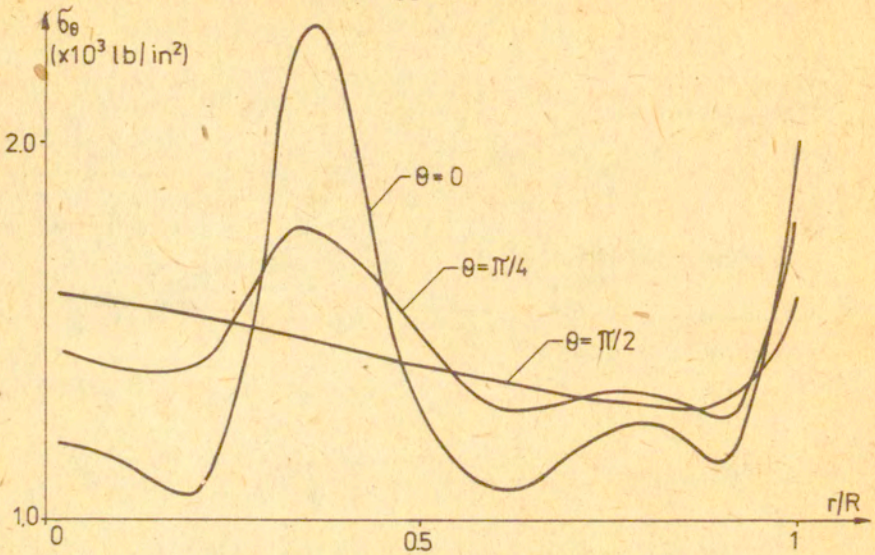




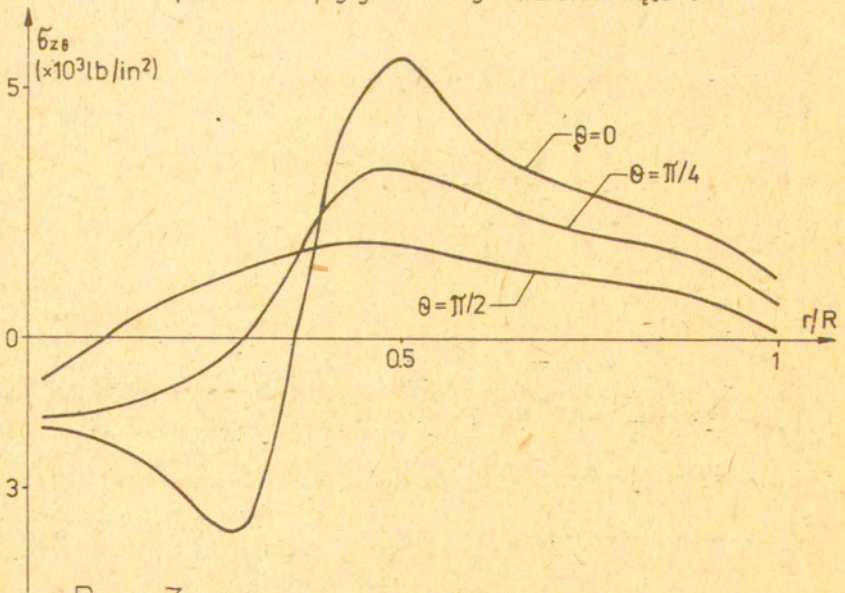
Rys.15 Zmiany przemieszczeń  $U_\theta$  wzdłuż promienia dla różnych wartości kąta  $\theta$



Rys.16 Zmiany naprężeń  $\sigma_r$  wzdłuż promienia (na górnej powierzchni) dla różnych  $\theta$



Rys.17 Zmiany naprężeń  $\sigma_\theta$  wzdłuż promienia na górnej powierzchni płyty dla różnych wartości kąta  $\theta$



Rys.18 Zmiany naprężeń  $\sigma_{z\theta}$  wzdłuż promienia na górnej powierzchni płyty dla różnych  $\theta$ .



B i b l i o g r a f i a

1. Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method, Mc Graw-Hill, London 1977.
2. Bathe, K.J., Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis. Prentice-Hall, New Jersey 1976.
3. Washizu, K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press. Oxford 1968.
4. Kleiber, M., SHELAX - Analiza dużych deformacji cienkich osiowosymetrycznych powłok sprężysto-plastycznych metodą elementów skończonych. Prace IPPT PAN 49/1977.
5. Bathe, K.J., Wilson, E.L., Peterson, SAP.IV - A structural analysis program for static and dynamic response of linear system. University of California-Berkeley 1974.
6. Kleiber, M., Nieliniowa, statyczna i dynamiczna analiza powłok metodą elementów skończonych. Ref.Prob.II Konf. Konstrukcji powłokowych. Gołun 1978.
7. Witmer E.A., Kotanchik, Progress report on discrete element elastic and elastic-plastic analyses of shell of revolution subjected to axisymmetric and asymmetric loading. Proc. 2nd. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech. Wright-Patterson A.F. Base, Ohio 1968.
8. Koval, R.L., Cranch, E.T., On the free vibrations of thin cylindrical shells subjected to initial torque, Proc. US National Congress of Appl.Mech. 11-18, 1962.
9. Smith, B.L., Haft, E.E., Natural frequencies of clamped cylindrical shells. J. Amer.Inst.Aeron. Astron. 6, April 1968.
10. Wilson, E.L., Structural Analysis of Axisymmetric Solids, AIAA J 3, 2669-2274, 1965.

Dodatek 1

$$\underbrace{\Psi}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 0 & 1 & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2l & 3l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\Psi^{-1}}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{l^2} & 0 & 0 & \frac{3}{l^2} & 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{2}{l} \\ 0 & \frac{2}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{2}{l^3} & 0 & \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$



$$\tilde{\varphi}_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} \frac{a}{l} & \frac{b}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{l^2} & -\frac{b}{l^2} & 0 & \frac{a}{l^2} & \frac{b}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{b}{l} & \frac{a}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3b}{l^3} & -\frac{3a}{l^3} & 0 & -\frac{3b}{l^3} & \frac{3a}{l^3} & 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{2}{l} \\ -\frac{2b}{l^4} & \frac{2a}{l^4} & 0 & \frac{2b}{l^4} & -\frac{2a}{l^4} & 0 & \frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}$$

gdzie  $a = r^{(j)} - r^{(i)}$ ,  $b = z^{(j)} - z^{(i)}$

$$\tilde{m}_{8 \times 8} = \beta^2 \rho \varphi^T h \int_0^l \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 s & & & & & & \\ \xi_1 s & \xi_1 s^2 & & & & & 0 & \\ & \xi_2 & \xi_2 s & & & & & \\ & \xi_2 s & \xi_2 s^2 & & & & & \\ & & & \xi_1 & \xi_1 s & \xi_1 s^2 & \xi_1 s^3 & \\ & & & \xi_1 s & \xi_1 s^2 & \xi_1 s^3 & \xi_1 s^4 & \\ & & & \xi_1 s^2 & \xi_1 s^3 & \xi_1 s^4 & \xi_1 s^5 & \\ & & & \xi_1 s^3 & \xi_1 s^4 & \xi_1 s^5 & \xi_1 s^6 & \end{bmatrix} \text{rds)} \varphi$$

Macierz  $\tilde{m}_n$  wyraża się analogicznie przy czym  $\xi_1$  zastąpić należy  $\xi_2$  i odwrotnie

$$\hat{\underline{L}}_{1n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & n & \sin\varphi \\ 0 & 1 & -n & -\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} ; \quad \hat{\underline{L}}_{1n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -n & \sin\varphi \\ 0 & 1 & n & -\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{L}}_{2n} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\varphi & n\sin\varphi & n^2 \\ 0 & \sin\varphi & n & -\cos\varphi\sin\varphi & -n\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{L}}_{2n} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\varphi & -n\sin\varphi & n^2 \\ 0 & \sin\varphi & -n & -\cos\varphi\sin\varphi & n\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{s}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & \frac{s}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & \frac{s}{r} & \frac{s^2}{r} & \frac{s^3}{r} \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6s \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & \frac{2s}{r} & \frac{3s^2}{r} \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & \frac{s}{r^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & \frac{s}{r^2} & \frac{s^2}{r^2} & \frac{s^3}{r^2} \end{bmatrix}$$



$$\tilde{c}_n = h^3 \beta^2 \begin{array}{l} 5 \times 5 \\ \left[ \begin{array}{cccc} C_{11}^* \xi_1 & 0 & C_{12}^* \xi_1 c^{\varphi} & n C_{22}^* \xi_1 & C_{22}^* \xi_1 s^{\varphi} \\ & C_{44}^* \xi_2 & -n C_{44}^* \xi_2 & -C_{44}^* \xi_2 c^{\varphi} & 0 \\ & & C_{22}^* \xi_1 c^2 \varphi + n^2 C_{44}^* \xi_2 & n(C_{22}^* \xi_1 + C_{44}^* \xi_2) c^{\varphi} & C_{22}^* \xi_1 c^{\varphi} s^{\varphi} \\ \text{sym.} & & & n^2 C_{22}^* \xi_1 + C_{44}^* \xi_2 c^2 \varphi & n C_{22}^* \xi_1 s^{\varphi} \\ & & & & C_{22}^* \xi_1 s^2 \varphi \end{array} \right] \end{array}$$

Macierz  $\hat{c}_n$  wyraża się analogicznie przy czym  $\xi_1$ ,  $n$  zastąpić należy  $\xi_2$ ,  $-n$  i odwrotnie

$$\tilde{f}_n = h^3 \beta^2 \begin{array}{l} 5 \times 5 \\ \left[ \begin{array}{cccc} D_{11} \xi_1 & 0 & D_{12} \xi_1 c^{\varphi} & -n D_{12} \xi_1 s^{\varphi} & -n^2 D_{12} \xi_1 \\ & D_{44} \xi_2 s^2 \varphi & n D_{44} \xi_2 s^{\varphi} & -D_{44} \xi_2 c^{\varphi} s^2 \varphi & -n D_{44} \xi_2 c^{\varphi} s^{\varphi} \\ & & D_{22} \xi_1 c^2 \varphi + n^2 D_{44} \xi_2 & -n(D_{22} \xi_1 + D_{44} \xi_2) c^{\varphi} s^{\varphi} & -n^2(D_{22} \xi_1 + D_{44} \xi_2) c^{\varphi} \\ \text{sym.} & & & (n^2 D_{22} \xi_1 + D_{44} \xi_2 c^2 \varphi) s^2 \varphi & n(n^2 D_{22} \xi_1 + D_{44} \xi_2 c^2 \varphi) s^{\varphi} \\ & & & & n^2(n^2 D_{22} \xi_1 + D_{44} \xi_2 c^2 \varphi) \end{array} \right] \end{array}$$

Macierz  $\tilde{f}_n$  wyraża się analogicznie, przy czym  $\xi_1$ ,  $n$  zastąpić należy  $\xi_2$ ,  $-n$  i odwrotnie

$$\text{gdzie} \quad c^{\varphi} = \cos \varphi \quad s^{\varphi} = \sin \varphi \\ c^2 \varphi = \cos^2 \varphi \quad s^2 \varphi = \sin^2 \varphi$$

Dodatek 2.

$$\tilde{\Phi}_0^{-1} = \text{diag} \left[ \underline{\varphi}_0^{-1} \quad \underline{\varphi}_0^{-1} \quad \underline{\varphi}_0^{-1} \quad \underline{\varphi}_0^{-1} \quad \underline{\varphi}_0^{-1} \quad \underline{\varphi}_0^{-1} \right]$$

18x18

$$\underline{\varphi}_0^{-1} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} r_j z_k - r_k z_j & r_k z_i - r_i z_k & r_i z_j - r_j z_i \\ z_j - z_k & z_k - z_i & z_i - z_j \\ r_k - r_j & r_i - r_k & r_j - r_i \end{bmatrix}$$

3x3

$$d = \det \underline{\varphi}_0$$

$$\underline{\varphi}_0 = \begin{bmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{bmatrix}$$

3x3

$$\tilde{\Theta}_n = \beta \text{diag} [ C_n \quad C_n \quad C_n \quad C_n \quad S_n \quad S_n ]$$

$$\hat{\Theta}_n = \beta \text{diag} [ S_n \quad S_n \quad S_n \quad S_n \quad C_n \quad C_n ]$$

$$C_n = \cos n\theta \quad , \quad S_n = \sin n\theta$$

$\tilde{\Phi}_n$   
6x9

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 1 & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 0 & \frac{n}{r} & n & \frac{nz}{r} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n}{r} & -n & -\frac{nz}{r} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{z}{r} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{r} & -n & -\frac{nz}{r} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz  $\hat{\Phi}_n$  wyraża się analogicznie przy czym  $n$  zastąpić należy  $-n$  i odwrotnie.



$$\tilde{S}_n = \beta^T \xi_1 \begin{bmatrix} S_{11n} & S_{12n} & S_{13n} \\ & S_{22n} & S_{23n} \\ \text{sym.} & & S_{33n} \end{bmatrix} ; \hat{S}_n = \beta^T \xi_2 \begin{bmatrix} S_{11n} & S_{12n} & -S_{13n} \\ & S_{22n} & -S_{23n} \\ \text{sym.} & & S_{33n} \end{bmatrix}$$

$$S_{11n} = \begin{bmatrix} (C_{33} + n^2 C_{55}) I_3 & (C_{13} + C_{33} + n^2 C_{55}) I_2 & (C_{33} + n^2 C_{55}) I_5 \\ & (C_{11} + 2C_{13} + C_{33} + n^2 C_{55}) I_1 & (C_{13} + C_{33} + n^2 C_{55}) I_4 \\ \text{sym.} & & (C_{33} + n^2 C_{55}) I_6 + C_{44} I_1 \end{bmatrix}$$

$$S_{12n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{33} I_2 \\ 0 & 0 & (C_{42} + C_{23}) I_1 \\ 0 & C_{44} I_1 & C_{23} I_4 \end{bmatrix}$$

$$S_{13n} = n \begin{bmatrix} (C_{33} + C_{55}) I_3 & C_{33} I_2 & (C_{33} + C_{55}) I_5 \\ (C_{13} + C_{33}) I_2 & (C_{13} + C_{33}) I_1 & (C_{13} + C_{33} + C_{55}) I_4 \\ (C_{33} + C_{55}) I_5 & C_{33} I_4 & (C_{33} + C_{55}) I_6 \end{bmatrix}$$

$$S_{22n} = \begin{bmatrix} n^2 C_{66} I_3 & n^2 C_{66} I_2 & n^2 C_{66} I_5 \\ & (C_{44} + n^2 C_{66}) I_1 & n^2 C_{66} I_4 \\ \text{sym.} & & C_{22} I_1 + n^2 C_{66} I_6 \end{bmatrix}$$

$$S_{23n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -n C_{66} I_2 \\ 0 & 0 & -n C_{66} I_1 \\ n C_{23} I_2 & n C_{23} I_1 & n (C_{23} - C_{66}) I_4 \end{bmatrix}$$

$$S_{33n} = \begin{bmatrix} (n^2 C_{33} + C_{55}) I_3 & n^2 C_{33} I_2 & (n^2 C_{33} + C_{55}) I_5 \\ & n^2 C_{33} I_1 & n^2 C_{33} I_4 \\ \text{sym.} & & (n^2 C_{33} + C_{55}) I_6 + C_{66} I_1 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \int_A r dA, \quad I_2 = \int_A dA, \quad I_3 = \int_A \frac{1}{r} dA$$

$$I_4 = \int_A z dA, \quad I_5 = \int_A \frac{z}{r} dA, \quad I_6 = \int_A \frac{z^2}{r} dA$$

D O D A T E K 3

Obliczenia początkowe:

- a/ utwórz macierze  $\underline{K}$ ,  $\underline{M}$   
b/ znajdź wartości własne  $\omega_i$  i wektory własne  $\underline{\phi}$   
/czyli także macierz  $\underline{\Phi}$  /  
c/ oblicz stałe

$$c_1 = 2\Delta t$$

$$c_2 = \frac{4}{3}\Delta t^2$$

$$c_3 = \frac{1}{2}\Delta t$$

$$c_4 = \frac{1}{3}\Delta t^2$$

$$c_5 = \frac{1}{6}\Delta t^2$$

$$d_i = 2\lambda_i \omega_i$$

$$e_i = \omega_i^2$$

$$i = 1, 2, \dots, M$$

$$f_i = 1 + d_i \Delta t + e_i \frac{c_2}{2}$$

Obliczenia na każdym kroku.

- a/ oblicz stałe

$$a_i = \dot{Y}_i(t-\Delta t) + \Delta t \ddot{Y}_i(t-\Delta t)$$

$$b_i = Y_i(t-\Delta t) + C_1 \dot{Y}_i(t-\Delta t) + C_2 \ddot{Y}_i(t-\Delta t)$$

- b/ utwórz zmodyfikowany wektor obciążenia

$$\tilde{R}_i(t+\Delta t) = \underline{\Phi}_i^T R_i(t+\Delta t) \cdot \frac{1}{M_{ii}^*} - d_i a_i - e_i b_i$$

- c/ znajdź przyspieszenie  $\ddot{Y}_i(t+\Delta t)$  dla  $i = 1, 2, \dots, M$

$$\ddot{Y}_i(t+\Delta t) = \frac{1}{f_i} \tilde{R}_i(t+\Delta t)$$



d/ znajdź przyspieszenie  $\ddot{Y}_i(t)$  jako:

$$\ddot{Y}_i(t) = \frac{1}{2} [\ddot{Y}_i(t+\Delta t) + \ddot{Y}_i(t-\Delta t)] \quad , \quad i = 1, 2, \dots, M$$

e/ znajdź prędkość  $\dot{Y}_i(t)$  oraz przemieszczenie  $Y_i(t)$

$$\dot{Y}_i(t) = \dot{Y}_i(t-\Delta t) + c_3 [\ddot{Y}_i(t-\Delta t) + \ddot{Y}_i(t)]$$

$$Y_i(t) = Y_i(t-\Delta t) + \Delta t \dot{Y}_i(t-\Delta t) + c_4 \ddot{Y}_i(t-\Delta t) + c_5 \ddot{Y}_i(t)$$

D O D A T E K 4

Obliczenia wstępne:

a/ utwórz macierze  $\underline{K}$ ,  $\underline{M}$

b/ oblicz następujące stałe:

$$a_0 = \frac{3 + 3\alpha \Delta t}{2\Delta t^2 + 3\beta \Delta t}$$

$$a_1 = \frac{3}{2\Delta t^2} + \frac{3}{2\Delta t} (\alpha - \beta a_0)$$

$$a_2 = \frac{3}{\Delta t} + 2(\alpha - \beta a_0)$$

$$a_3 = 2 + \Delta t (\alpha - \beta a_0)$$

$$a_4 = \frac{3}{\Delta t (4\Delta t + 6\beta)}$$

$$a_5 = \frac{3}{2\Delta t} (\beta a_4 - \frac{1}{2\Delta t})$$

$$a_6 = 2\beta a_4 - \frac{3}{2\Delta t}$$

$$a_7 = \beta a_4 \Delta t - \frac{1}{2}$$

$$a_8 = \frac{\Delta t}{2}$$

$$a_9 = \frac{\Delta t^2}{3}$$

$$a_{10} = \frac{\Delta t^3}{6}$$

c/ utwórz zmodyfikowaną macierz sztywności:

$$\tilde{\underline{K}} = \underline{K} + a_0 \underline{M}$$

d/ dokonaj triangularyzacji  $\tilde{\underline{K}}$



Obliczenia na każdym kroku

a/ utwórz zmodyfikowany wektor obciążenia

$$\underline{\tilde{R}}(t+\Delta t) = \underline{R}(t+\Delta t) + \underline{M} [a_1 \underline{r}(t-\Delta t) + a_2 \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) + a_3 \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t)]$$

b/ rozwiąż względem zmodyfikowanych przemieszczeń  $\underline{\tilde{F}}(t+\Delta t)$

$$\underline{\tilde{K}} \underline{\tilde{F}}(t+\Delta t) = \underline{\tilde{R}}(t+\Delta t)$$

c/ oblicz przyspieszenia, prędkości i przemieszczenia w chwili  $t$

$$\ddot{\underline{r}}(t) = a_4 \ddot{\underline{r}}(t+\Delta t) + a_5 \underline{r}(t-\Delta t) + a_6 \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) + a_7 \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t)$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) + a_8 [\ddot{\underline{r}}(t-\Delta t) + \ddot{\underline{r}}(t)]$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(t-\Delta t) + \Delta t \dot{\underline{r}}(t-\Delta t) + a_9 \ddot{\underline{r}}(t-\Delta t) + a_{10} \ddot{\underline{r}}(t)$$

d/ oblicz naprężenia /jeśli potrzebne/

e/ następny krok czasowy.

## Spis treści

1. Wstęp
2. Metoda otrzymywania równań ruchu
3. Element powłoki osiowosymetrycznej
4. Toroidalne elementy trójwymiarowe
5. Podstawy analizy numerycznej
6. Opis programu DYNAX-L
7. Wprowadzanie danych
8. Przykłady
9. Dodatki