# TEORYA

# CIŚNIENIA CIECZY

## NA ŚCIANY PŁASKIE I NA ŚCIANY KRZYWE.

PRZEZ

A. MARTYNOWSKIEGO

*Inżyniera, byłego ucznia Szkoły Dróg i Mostów w Paryżu.*

Przedstawione na posiedzeniu Towarzystwa dnia 7 Listopada 1872 roku.

## ROZDZIAŁ II.

## TEORYA CIŚNIENIA CIECZY NA ŚCIANY KRZYWE.

STRESZCZENIE : Sprowadzenie ciśnień na ścianę krzywą do najprostszego systemu sił. — Fundamentalne twierdzenie ścian krzywych. — Ciśnienie cieczy ważkiej na wszystkie ściany zawierającego ją naczynia. — Ściany walcowe : pionowe i poziome. — Ściany stożkowe. — Dyskussya otrzymanych wypadków. — Hydrostatyczny paradoks. — Zastosowanie do znalezienia wypadkowego ciśnienia na powierzchnie obrotowe. — Ściany sferyczne : pionowe i poziome. — Ogólna dyskussya twierdzenia dającego wypadkowe ciśnienie na wszystkie ściany naczynia.

**83. Sprowadzenie cisnień na ścianę krzywą do najprostszego systemu sił.** Znając ciśnienie wywierane przez ciecz ważką na każdy punkt *ściany płaskiej*, wiemy jak można wyznaczyć *jednę siłę*, równowartą zbiorowi wszystkich ciśnień cząstkowych. Gdyby spoczynek cieczy miał miejsce przy działaniu innej zewnętrznej siły jak siła ciężkości, ciśnienia na rozmaite elementa ściany płaskiej zawsze mogłyby być zastąpione *jedną* tylko wypadkową, albowiem, będąc normalne do ściany, tworzą one system sił równoległych. Różnica między dwoma przypadkami byłaby tylko ta, że w razie *siły ciężkości*, ciśnienie na jedność powierzchni ma za wyrażenie : $p = \Pi h$; przy *sile* zaś *jakiejkolwiek*, wyraziłoby się ono wzorem ogólnym : $p = \int \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$.

Dla *ścian krzywych* rzecz się ma inaczej. Z powodu że ciśnienie cieczy jest normalne do ściany w każdym jej punkcie, ciśnienia na ścianę krzywą nie będą do siebie równoległe, i w ogólności, dla dwóch jakichkolwiek jej punktów nie znajdują się nawet one w jednej płaszczyźnie. Dla ścian krzywych równoległość ciśnień może więc być stosowaną tylko do nieskończenie małej ich powierzchni, to jest do elementu płaszczyzny stycznej do ściany w danym punkcie; na takiej tylko przestrzeni może być użyty wzór: $dP = \Sigma p d\omega$ (powierzchnie walcowe, stożkowe), lub $dP = p\omega$, jeżeli $p$ może być uważane za stałe dla wszystkich punktów elementu $\omega$; dla złożenia zaś wszystkich cząstkowych ciśnień wywieranych na rozmaite elementa $\omega$, $\omega'$,... ściany krzywej musimy się udać do metody składania sił jakichkolwiek.

W najogólniejszym przypadku ściany krzywej dowolnej i sił zewnętrznie na ciecz działających jakichkolwiek, najprostszym systemem do jakiego mogą być zredukowane wszystkie elementarne ciśnienia jest jeden z trzech następujących:

1) Jedna siła wypadkowa i jedna para;

2) Dwie siły wypadkowe nie znajdujące się w jednej płaszczyźnie;

3) Trzy siły równoległe do trzech spółrzędnych osi.

**86.** Zważywszy że ściany naczynia nie ulegające odkształceniu (déformation) stanowią system sztywny (rigide), elementarne ciśnienia na rozmaite punkta ściany mogą być złożone za pomocą metody składania sił działających na ciało *stałe* (solide invariable). Otóż, wiadomo z Mechaniki że każda taka siła MF, przyczepiona w punkcie M, może być zastąpioną przez: 1) siłę AF tego samego natężenia, kierunku i strony, przyczepioną w punkcie A dowolnie w ciele obranym i *stale* z punktem M połączonym; 2) parę sił utworzoną z danej siły MF i z siły: — AF, położoną w płaszczyźnie poprowadzonej przez AF i przez punkt M, i mającą za natężenie $Ff$, oznaczając przez $f$ odległość punktu M od prostej AF.

Zachowawszy raz obrany punkt A dla wszystkich innych sił: F′, F″,... system sił danych, jakkolwiek byłby on skomplikowany, zastąpionym zostanie systemem mu równowartym składającym się: 1) ze wszystkich danych sił przeniesionych ruchem postępowym od rzeczywistych ich punktów przyczepienia: M′, M″,... do punktu A; 2) z tylu par ile sił działa na ciało. Wszystkie siły przyczepione w punkcie A mogą być złożone w jedną wypadkową R; wszystkie pary położone w rozmaitych płaszczyznach przechodzących przez punkt A dadzą jedną parę wypadkową C, i możemy ją zawsze uważać jako położoną na płaszczyźnie przez tenże punkt A poprowadzonej.

Punkt A zowie się często *środkiem redukowania* sił (centre de réduction).

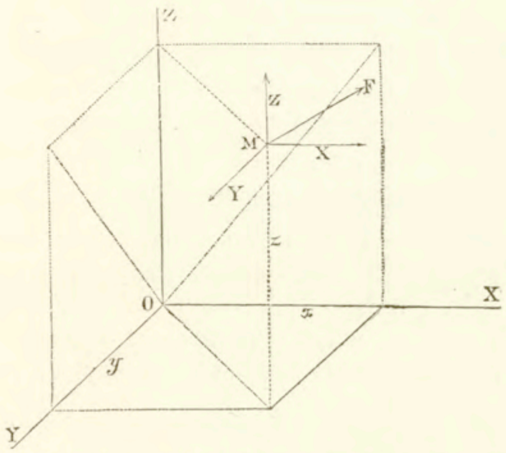
Niezmienność natężenia, kierunku i strony sił w ruchu jaki tym siłom nadajemy dla sprowadzenia ich do systemu prostszego, pociąga za sobą *stałość* wypadkowej R dla każdego środka redukowania; zmieniać się będzie tylko natężenie pary wypadkowej, czyli jej moment: gdyż ze zmianą punktu A odległość punktów M, M′,... od nowego środka redukowania będzie inna, a zatem inne będą momenta wszystkich par składowych.

Systemy równowarte danemu systemowi sił będą się więc różnić pomiędzy sobą samą tylko parą. Systemów tych będzie tyle ile możemy wziąć punktów A, A′, A″... *stale* z punktami przyczepienia sił: M, M′ M″,... połączonych.

**87.** Odnosząc, dla analitycznego traktowania kwestyi, cały system do trzech prostokątnych osi, najwłaściwiej jest obrać ich początek O w punkcie należącym do systemu i wziąć punkt O za środek redukowania. Wszystkie siły, będąc wyrażone przez swe składowe równoległe do spółrzędnych osi, zredukują się do trzech sił przyczepionych w punkcie O i skierowanych wzdłuż tych osi, i do trzech par położonych w trzech płaszczyznach spółrzędnych i przedstawionych długościami odciętemi na spółrzędnych osiach (axe réprésentatif du couple) : będziemy więc mieli wyrażenia na sześć składowych, a ztąd wyznaczymy analitycznie siłę wypadkową R i parę wypadkową C.

I tak, niech (fig. 77) X, Y, Z będą składowe siły F przyczepionej w punkcie M($y$, $x$, $z$). Siła X może być zastąpioną : 1) przez siłę jej równą działającą wedle osi OX i przyczepioną w punkcie O, i 2) przez parę położoną w płaszczyznie (M, OX). Ta para może być rozłożoną na dwie, z których jedna, położona w płaszczyznie XY, ma za moment : — X$y$; a druga leżąca w płaszczyznie ZX, ma : + X$z$. Podobnież, zamiast siły Y możemy uważać : 1) siłę Y przyczepioną w punkcie O; 2) dwie pary położone w płaszczyznach XY i ZY i mające odpowiednio za swe momenta : + Y$x$ i — Y$z$. Nareszcie siłę Z możemy zastąpić : 1) siłą Z przyczepioną w punkcie O ; 2) dwiema parami leżącemi w płaszczyzniach ZX i ZY i mającemi na momenta : — Z$x$ i + Z$y$. Będziemy więc mieli w każdej z trzech płaszczyzn spółrzędnych po dwie pary, które złożone być mogą w jednę, mającą za moment algebraiczną summę momentów par składowych. Wskutek tego, zamiast siły F działającej w punkcie M, otrzymamy :

Fig. 77.




1) Trzy siły : X, Y, Z przyczepione w punkcie O i skierowane wzdłuż trzech osi;

2) Trzy pary, położone na trzech płaszczyznach spółrzędnych, mające za swe osie trzy osie spółrzędne, a za momenta następujące wyrażenia :

1° Moment pary położonej na płaszczyznie YZ będzie : $y$Z — $z$Y, a jej oś skierowaną wzdłuż osi OX;

2° » » » ZX » : $z$X — $x$Z, » » » OY ;

3° » » » XY » : $x$Y — $y$X, » » » OZ ;

Rozkładając w podobny sposób wszystkie inne siły : F′, F″,... działające w punktach M′, M″,... system równowarty danemu systemowi sił będzie się składać :

1) Z trzech sił wypadkowych : $X = \Sigma X = \Sigma F \cos(F,X)$; $Y = \Sigma Y = \Sigma F \cos(F,Y)$; $Z = \Sigma Z = \Sigma F \cos(F,Z)$;

2) Z trzech par wypadkowych : $L = \Sigma(yZ - zY)$; $M = \Sigma(zX - xZ)$; $N = \Sigma(xY - yX)$; i może on być zawsze sprowadzony do jednej siły :

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \tag{1}$$

przyczepionej w punkcie O i wyznaczonej co do kierunku przez trzy dostawy :

$$\cos\alpha \frac{X}{R}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{R}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R};$$

i do jednej pary :

(2) $$C = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

położonej w płaszczyznie prostopadłej do kierunku prostej, czyniącej z trzema osiami kąty $\lambda, \mu, \nu$ takie że :

$$\text{dos}\lambda = \frac{L}{C}\ , \quad \text{dos}\mu = \frac{M}{C}\ , \quad \text{dos}\nu = \frac{N}{C}\ .$$

**88**. Sprowadzając dany system sił do jednej siły i jednej pary, zastępujemy takowy *trzema* siłami, z których dwie są sobie równe, równoległe i przeciwnego kierunku. Trzy te siły nie są, w ogólności, położone w jednej płaszczyznie; lecz w każdym razie mogą one zawsze być zredukowane do *dwóch* tylko sił, przenosząc płaszczyznę pary C tak, żeby punkt przyczepienia jednej ze składowych pary znajdował się w punkcie przyczepienia wypadkowej R. Dwie siły, otrzymane w skutek złożenia wypadkowej R ze składową pary C, nie będąc położone w jednej płaszczyznie, nie mogą być zastąpione jedną siłą : stanowią one zatem najprostszy system do jakiego dane siły mogą być zredukowane.

Szczególny przypadek, kiedy dwie siły o których mówimy znajdą się na jednej płaszczyznie, a zatem kiedy dany system może być zredukowany do *jednej* tylko siły, zdarzy się wtedy gdy płaszczyzna pary wypadkowej C będzie równoległą do kierunku wypadkowej R : w takim albowiem razie będziemy mogli przenieść płaszczyznę pary w sposób ażeby ona zawierała w sobie siłę R, a ztąd otrzymamy ostateczną wypadkowę $R_1$. Warunek tej równoległości jest konieczny a zarazem wystarczający i, jak wiadomo, wyraża się on analitycznie następującym związkiem :

($a$) $$XL + YM + ZN = 0,$$

pokazującym że dostawa kąta jaki czyni wypadkowa R z osią pary C jest zerem, czyli że oś pary jest prostopadłą do tej wypadkowej. Warunkowi ($a$) musi towarzyszyć zastrzeżenie że :

($b$) $$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} > 0,$$

to jest że siła R istnieje. Zastrzeżenie ($b$) jest konieczne ażeby zadośćuczynienie warunkowi ($a$) zapewniało istnienie *jednej siły* $R_1$ równowartej danemu systemowi; albowiem, gdyby R było zerem, mielibyśmy wtedy : $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; warunek ($a$) byłby sprawdzonym, ale system zredukowałby się nie do siły, lecz do pary.

Przypadki w których system sił może być sprowadzony do jednej siły $R_1$ są następujące :

1° Przypadek sił równoległych do pewnego kierunku ;

2° » zbiegających się w jednym i tym samym punkcie ;

3° » położonych na jednej płaszczyznie.

Pierwszy przypadek ma miejsce dla ciśnień na ścianę płaską; warunek ($a$) zostaje sprawdzonym wyrażeniami :

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad N = 0,$$

które otrzymujemy biorąc kierunek sił za oś Z.

Przypadek sił zbiegających się w jednym punkcie (co np. się zdarzy dla ciśnień na ścianę sferyczną, lub też dla ciśnień wywieranych na punkta znajdujące się na jednym i tym samym równoleżniku ściany stożkowej lub walcowej) również zadowalnia warunek ($a$), gdyż biorąc ten punkt za początek spółrzędnych, mamy :

$$L=0, \qquad M=0, \qquad N=0,$$

co zarazem pokazuje że siła wypadkowa $R_1$ przechodzi przez punkt spólny wszystkim siłom.

W razie sił położonych w jednej płaszczyznie (ciśnienia na równoleżnik ściany walcowej), będziemy mieli biorąc ją za płaszczyznę XY :

$$L=0, \qquad M=0 \qquad Z=0,$$

i siła wypadkowa będzie się znajdować w płaszczyznie sił danych.

Ztąd wynika, że jeżeli kształt ściany krzywej pociąga za sobą istnienie jednego z dwóch ostatnich przypadków, ciśnienia wywierane na rozmaite jej punkta mogą być, podobnie jak dla ścian płaskich, sprowadzone do jednej siły $R_1$, z tą jednak różnicą, że o normalności wypadkowego ciśnienia twierdzić tu nie możemy.

89. Zastąpieniem wszystkich ciśnień elementarnych siłą i parą rozwiązujemy teoryczne założone zadanie i pokazujemy, że dla ściany krzywej, pewna jej część, albo też i ściana całkowita, ponosi jednocześnie dwa działania : *napór* (poussée) i *skręcanie* (torsion), równoważone reakcyą innych ścian naczynia, z któremi ściana uważana jest stale połączoną i stanowi system sztywny. Uwydatnienie sposobu w jaki pracują ściany naczynia stanowi całą zaletę takiej metody redukowania ciśnień. Jest jednak inna metoda, zwykle w praktycznem zastosowaniu używana, i przedstawiająca tę dogodność, że sprowadza ona system sił jakichkolwiek do systemu sił równoległych, i powierzchnię jakąkolwiek do powierzchni płaskiej. Metoda ta jest następująca.

Zamiast zastąpić każdę siłę zosobna siłą przyczepioną w jednym raz obranym punkcie i odpowiednią parą, rozkładamy, w kierunku trzech osi, siłę F działającą w danym punkcie M ciała na trzy składowe : X, Y, Z w tym samym punkcie M przyczepione. Jeżeli podobny rozkład sił wykonamy w każdym punkcie $M'$, $M''$, ... system sił danych zamienimy na trzy systemy sił równoległych do trzech spółrzędnych osi ; a że każdy z nich może być zredukowanym do jednej siły, więc trzy siły równoległe do trzech osi stanowić będą system równowarty wszystkim siłom działającym na ciało.

Ażeby zastosować tę metodę do złożenia ciśnień wywieranych na ścianę krzywą, przyjmujemy że ciśnienie $p$ na jedność powierzchni, znalezione w jakimkolwiek punkcie M, będzie takie samo, co do natężenia i kierunku, jeszcze i we wszystkich punktach nieskończenie małej powierzchni $\omega$, wziętej naokoło punktu M, i mogącej być uważaną za element płaszczyzny stycznej do ściany w tym punkcie. Takim sposobem zbiór wszystkich ciśnień zastępujemy systemem sił : $p\omega$, $p'\omega'$,... przyczepionych w punktach M, $M'$,... uważanych jako środki elementów $\omega$, $\omega'$ ... Przyjmując ten system za równowarty ciśnieniom, popełniamy błąd tem mniejszy im mniejsze będziemy rozpatrywać elementa, i znajdziemy się w warunkach rzeczywistości przy granicy.

Rozkładając w każdym punkcie M siłę $p\omega$ na trzy składowe X, Y, Z, na jedno wyjdzie, jeśli zamiast wszystkich ciśnień wywieranych na ścianę, będziemy rozpatrywać wszystkie X, wszystkie Y i wszystkie Z ; otrzymane ztąd trzy grupy sił zredukują się każda do jednej tylko siły, której kierunek będzie kierunkiem jednej z trzech osi, natężenie — algebraiczna summa składowych tę grupę stanowiących, a punkt przyczepienia — środek sił równoległych w uważaną grupę wchodzących. Więc ostatecznie, system równowarty wszystkim ciśnieniom będzie się składać z trzech sił : $P'_x$, $P''_y$, $P'''_z$, których natężenie wyrazi się :

$$P'_x = \Sigma X, \qquad P''_y = \Sigma Y, \qquad P'''_z = \Sigma Z;$$

a punkta ich przyczepienia : Q', Q'', Q''', wyznaczą się za pomocą wzorów :

$$x' = \frac{\Sigma Xx}{\Sigma X}, \qquad y' = \frac{\Sigma Xy}{\Sigma X}, \qquad z' = \frac{\Sigma Xz}{\Sigma X}, \quad \text{dla siły } P'_x;$$

$$x'' = \frac{\Sigma Yx}{\Sigma Y}, \qquad y'' = \frac{\Sigma Yy}{\Sigma Y}, \qquad z'' = \frac{\Sigma Yz}{\Sigma Y}, \quad \text{» } P''_y;$$

$$x''' = \frac{\Sigma Zx}{\Sigma Z}, \qquad y''' = \frac{\Sigma Zy}{\Sigma Z}, \qquad z''' = \frac{\Sigma Zz}{\Sigma Z}, \quad \text{» } P'''_z;$$

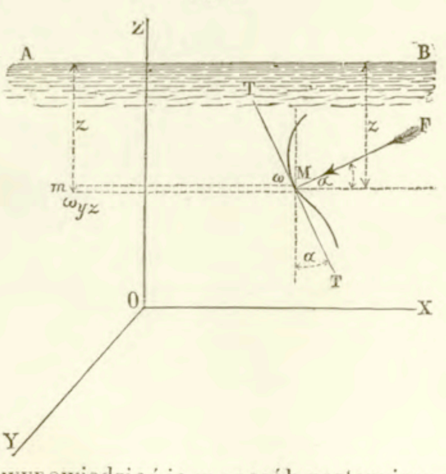
Położenie punktów Q', Q'', Q''' będzie zależeć od kształtu ściany; w ogólności trzy te punkta będą różne, i trzy siły: $P'_x$, $P''_y$, $P'''_z$, przyczepione w rozmaitych punktach, stanowić będą najprostszy system do jakiego zredukują się wszystkie ciśnienia na ścianę krzywą. Może jednak się zdarzyć że dwie, albo i wszystkie trzy siły sprowadzą się do zera ; w takim szczególnym przypadku ciśnienia będą mieć jednę wypadkowę : jeżeli np. $P'_x = 0$ i $P''_y = 0$, wypadkową ciśnień będzie siła równoległa do osi Z ; w razie zaś kiedy $P'_x = 0$, $P''_y = 0$ i $P'''_z = 0$, wypadkowa sprowadzi się do zera. Warunki przy jakich to będzie mieć miejsce rozpatrzymy poniżej.

**90. Fundamentalne twierdzenie ścian krzywych.** Szukanie trzech sił wypadkowych : $P'_x$, $P''_y$, $P'''_z$, z których każda przedstawia algebraiczną summę rzutów, na jednę z trzech osi, wszystkich elementarnych ciśnień, nastręcza nam twierdzenie, nadzwyczaj w zastosowaniach pożyteczne, i stanowiące fundamentalne twierdzenie ścian krzywych. Jest ono następujące :

*Rzut, na oś jakąkolwiek, ciśnienia wywieranego na element ściany krzywej, dany punkt otaczający, równa się ciśnieniu jakieby ponosił w tym punkcie rzut rozpatrywanego elementu na płaszczyznę do tej osi prostopadłą.*

Istotnie, uważajmy na ścianie (fig. 78) jakikolwiek punkt M $(x, y, z)$, i niech ciśnienie w nim na jedność powierzchni będzie $p$, a kąt jaki czyni z osią rzutów X normalna w punkcie M, podług której skierowanem jest to ciśnienie, niech będzie $\alpha$; kąt $\alpha$ będzie zarazem kątem płaszczyzny stycznej do ściany z płaszczyzną YZ prostopadłą do osi X. Nieskończenie mały element ściany $\omega$, wzięty naokoło punktu M, ponosić będzie ciśnienie $F = p\omega$, nachylone do osi X pod kątem $\alpha$. Więc składowa $F_x$ według tej osi ciśnienia F wyrazi się :

Fig. 78.




$$(1) \qquad F_x = X = (p\omega)_x = (p\omega)\cos\alpha = p(\omega\cos\alpha) = p\omega_{yz},$$

gdzie oznaczamy przez $(p\omega)_x$ rzut ciśnienia F na oś X, a przez $\omega_{yz}$ rzut elementu $\omega$ na płaszczyznę YZ.

Twierdzenie jest więc dowiedzione, i możemy jeszcze wypowiedzieć je w sposób następujący : *ażeby otrzymać składowę, w danym kierunku, ciśnienia wywieranego na element ściany krzywej, dosyć jest zamiast tego elementu uważać rzut jego na płaszczyznę do danego kierunku prostopadłą.*

Z powyższego wzoru wypada że :

(2) $$\Sigma F_x = \Sigma X = P'_x = \Sigma p\omega_{yz},$$

to jest : *summa rzutów, na jakąkolwiek oś, ciśnień wywieranych na ścianę krzywą* (czyli wypadkowa ciśnień według pewnego kierunku uważanych) *równą jest algebraicznej summie iloczynów z rzutów rozmaitych elementów ściany na płaszczyznę do uważanej osi prostopadłą, przez odpowiednie każdemu elementowi ciśnienie.* Czyli inaczej :

*Ażeby mieć wypadkową ciśnień w pewnym kierunku, dosyć jest rzucić ścianę krzywą na płaszczyznę do tego kierunku prostopadłą, i uważać że każdy punkt otrzymanego rzutu jest ciśniony normalnie ciśnieniem odpowiedniego mu punktu na ścianie krzywej.*

Rozpatrywanie ciśnienia na ścianę krzywą sprowadza się więc do uważania ścian płaskich, i zastosowując wyprowadzone twierdzenie do trzech spółrzędnych osi OX, OY, OZ, otrzymujemy wyrażenia :

(3) $$\begin{cases} P'_x = \Sigma X = \Sigma p\omega_{yz}, \\ P''_y = \Sigma Y = \Sigma p\omega_{xz}, \\ P'''_z = \Sigma Z = \Sigma p\omega_{yx}, \end{cases}$$

na znalezieniu których polega cała teorya ścian krzywych.

**91.** Z powyższego twierdzenia wypływają pewne wnioski, upraszczające w wielu razach zadanie wypadkowego ciśnienia na ściany krzywe, i tyczące się : 1) gazów oddanych samej tylko sile sprężystości ; 2) cieczy zostających pod działaniem siły ciężkości. Wnioski te są następujące :

Wniosek I. Wiemy z § 3 że dla gazów, ciśnienie wywierane w skutek ich siły sprężystości na ściany naczynia jest we wszystkich punktach jedno i to samo; w tym więc przypadku wzór (2) zamieni się na :

$$\Sigma X = P'_x = \Sigma p\omega_{yz} = p\Omega_{yz},$$

gdzie $\Omega_{yz}$ oznacza powierzchnię rzutu uważanej ściany na płaszczyznę YZ. Otóż, ilość $p$ może być wyprowadzoną przed znak $\Sigma$ niezależnie od kierunku osi rzutów ; wypada zatem, że dla gazów *summa rzutów, na jakąkolwiek oś, elementarnych ciśnień równa się ciśnieniu na jedność powierzchni pomnożonemu przez rzut ściany na płaszczyznę do tej osi prostopadłą.*

Wnioski tyczące się cieczy ważkich w spoczynku mają na celu wypadkowe *poziome* : $P'_x$ i $P''_y$, i sprowadzają szukanie tych sił do zadania ścian płaskich. I tak :

Wniosek II. Jeżeli oś rzutu OX jest *pozioma*, linje proste rzucające element $\omega$ na płaszczyznę YZ będą również poziomemi, a zatem wszystkie punkta rzutu $\omega_{yz}$ będą zostawać pod takiem samem ciśnieniem jak odpowiednie im punkta elementu $\omega$; a że te punkta są, z przypuszczenia, ciśnione jednostajnie ciśnieniem $p$, więc $p\omega_{yz}$ będzie wyrażać ciśnienie cieczy na rzut $\omega_{yz}$; w skutek tego powiadamy :

Dla cieczy ważkich *rzut, na oś poziomą jakąkolwiek, ciśnienia wywieranego na element ściany krzywej równa się ciśnieniu na rzut elementu na płaszczyznę do tej osi prostopadłą* (płaszczyznę pionową).

Oznaczając odległość elementu $\omega$ od powierzchni wolnej AB przez $z$, a ciężar gatunkowy cieczy przez $\Pi$, mamy $p = \Pi z$ ; więc :

$$X = p\omega_{yz} = \Pi z\omega_{yz},$$

a ztąd :

$$P'_x = \Sigma X = \Sigma \Pi z \omega_{yz} = \Pi \Sigma z \omega_{yz}.$$

Ponieważ element $\omega$ jest rzucony poziomo, $z$ będzie zarazem odległością od powierzchni wolnej elementu $\omega_{yz}$, a zatem iloczyn $z\omega_{yz}$ wyrażać będzie moment elementu $\omega_{yz}$ względem płaszczyzny AB; jeśli więc $\Omega_{yz}$ oznacza rzut ściany krzywej, a $z_1$ odległość od powierzchni wolnej środka ciężkości tego rzutu, to wartość na $P'_x$ przybierze postać :

$$P'_x = \Pi z_1 \Omega_{yz}.$$

Otóż, $\Pi z_1$ wyraża ciśnienie wywierane w środku ciężkości powierzchni $\Omega_{yz}$; wypada ztąd że :

*Summa rzutów, na oś poziomą jakąkolwiek, elementarnych ciśnień wywieranych na ścianę krzywą, przez ciecz ważką w spoczynku, równa jest rzutowi tej ściany na płaszczyznę do uważanej osi prostopadłą pomnożonemu przez ciśnienie na jedność powierzchni wywierane w środku ciężkości otrzymanego rzutu;* czyli (§ 42) : *ażeby mieć wypadkową ciśnień poziomych, dosyć jest szukać wypadkowego ciśnienia na ścianę płaską, powstałą z rzutu ściany krzywej na płaszczyznę do uważanego kierunku ciśnień prostopadłą.*

Uwaga. Jeżeli górna powierzchnia cieczy AB zostaje pod ciśnieniem atmosferycznem, a w ogólności, jeżeli punkta cieczy ponoszą inne ciśnienie stałe $p_0$, niezależne od działania na nią siły ciężkości, wyrażenia na X i $P'_x$ będą :

$$X = (p_0 + p)\omega_{yz} = (p_0 + \Pi z)\omega_{yz},$$

$$P'_x = \Sigma X = p_0 \Sigma \omega_{yz} + \Pi \Sigma z \omega_{yz} = (p_0 + \Pi z_1)\Omega_{yz};$$

poprzednie wysłowienie wzoru na $P'_x$ pozostanie bez żadnej zmiany, gdyż ciśnienie w środku ciężkości powierzchni $\Omega_{yz}$ będzie teraz : $p_0 + \Pi z$.

Jeżeli uważana ciecz jest takiej natury, że wyraz $\Pi z_1$ może być zaniechany w porównaniu z wartością $p_0$, wtedy :

$$P'_x = p_0 \Omega_{yz}.$$

Ta uwaga ma swe zastosowanie przy rozpatrywaniu gazów niezajmujących wielkiej przestrzeni, (gdzie zatem $z_1$ nie przybiera znacznej wartości); ich ciężar gatunkowy $\Pi$ zwykle jest bardzo mały, i ciśnienie gazu jest prawie jedno i to samo we wszystkich punktach; możemy więc, bez popełnienia znacznego błędu, zastosować do gazów naturalnych prawidło, podane pod Wnios. I dla gazów oddanych samej tylko sile sprężystości.

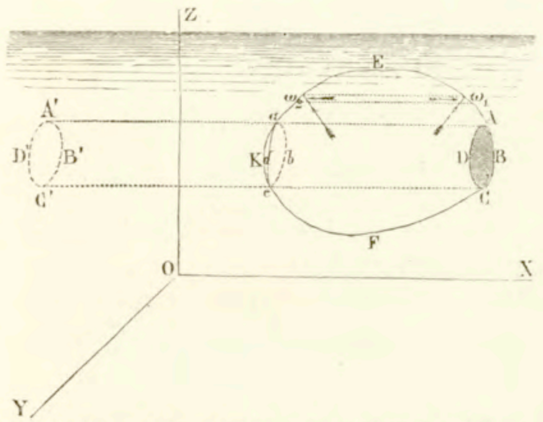
Wniosek III. Ponieważ ciśnienie cieczy jest wywieranem od jej wnętrza ku ścianie naczynia, składowe X, Y, Z elementarnych ciśnień mogą być skierowane tak w stronę dodatną jak też i odjemną spółrzędnych osi ; szukanie wyrażeń : $\Sigma X$, $\Sigma Y$, $\Sigma Z$, zostanie uproszczonem jeżeli się zdarzy, że niektóre ze składowych będą sobie równe i przeciwnego kierunku : w tym albowiem razie rozpatrywanie ich może być z góry zaniechanem, gdyż nie wejdą one w skład trzech summ : $P'_x$, $P''_y$, $P'''_z$. Uproszczenie to zależy od kształtu ściany i stosuje się do składowych poziomych — w razie cieczy ważkich ; do składowych we wszelkim kierunku — dla gazów.

I tak, jeżeli naprzykład ściana ma kształt powierzchni AEKFC (fig. 79) ograniczonej krzywą ABCD, łatwo jest się przekonać, że dla znalezienia wypadkowej poziomej np. $P_x'$, możemy zaniechać rozpatrywanie ciśnień wywieranych na części ściany : AE$a$A, CF$c$C, zostające poza obrębem walca

ABCD$abcd$, rzucającego kontur ABCD na płaszczyznę równoległą do YZ; i że w tym celu dosyć będzie szukać ciśnienia na ścianę płaską A'B'C'D', ograniczoną rzutem samego tylko konturu ABCD.

Istotnie, uważając jakikolwiek element ściany $\omega_1$, wzięty poza obrębem walca ABCD$abcd$, widzimy że walec, rzucający ten element na płaszczyznę prostopadłą do OX, spotka ścianę po raz drugi i wyznaczy na niej inny element $\omega_2$, którego rzut będzie taki sam jak i rzut elementu $\omega_1$, albowiem te dwa rzuty wzajemnie się zakrywają; będziemy więc mieli: $\omega_{1yz} = \omega_{2yz}$. Otóż, w razie cieczy ważkich ciśnienie $p$ na elementa $\omega_1$ i $\omega_2$ jest jedno i to samo; rzut na oś OX ciśnienia wywieranego na element $\omega_1$ będzie $X_1 = +p\omega_{1yz}$, a na element $\omega_2$: $X_2 = -p\omega_{2yz}$; więc $X_1 + X_2 = 0$. To samo znajdziemy dla wszystkich innych elementów, na zewnątrz walca ABCD$abcd$ położonych: wzięte po dwa dadzą one składowe X równe i przeciwnego kierunku. Wypadkowa $P'_x$ będzie zatem summą rzutów na oś OX ciśnień wywieranych tylko na powierzchnię $a$K$cdb$ ograniczoną krzywą $abcd$, podług której walec opisany na konturze ABCD spotyka daną nam ścianę.

Fig. 79.




Gdybyśmy szukali wypadkowej $P''_y = \Sigma Y$, widocznem jest że dosyć byłoby uważać ścianę płaską ograniczoną rzutem konturu ABCD na płaszczyznę równoległą do płaszczyzny ZX.

Uwaga I. Jeżeli kontur ABCD sprowadza się do jednego punktu, to jest, jeżeli ściana staje się powierzchnią zamkniętą, powierzchnia $a$K$cdb$ istnieć przestaje i uproszczenie wyrażeń $P'_x$ i $P''_y$ dosięga swej granicy, gdyż wtedy mieć będziemy: $P'_x = \Sigma X = 0$ i $P''_y = \Sigma Y = 0$.

Uwaga II. W razie powierzchni zamkniętej i gazów zajmujących niewielką przestrzeń, wszystkie trzy wypadkowe: $P'_x$, $P''_y$, $P'''_z$ sprowadzają się do zera; gdyż ciśnienie gazu może być uważane za stałe dla wszystkich punktów ściany, i to co było powiedzianem o składowych poziomych będzie się tu stosować również i do składowych pionowych. Wypada ztąd następujące twierdzenie:

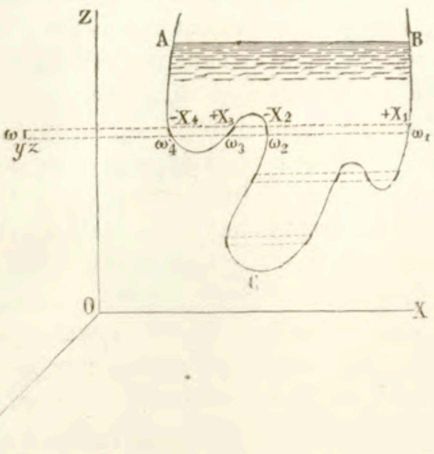
*Summa rzutów na oś jakakolwiek wszystkich ciśnień wywieranych przez gaz na powierzchnię zamkniętą równą jest zeru*, czyli że ciśnienia takie wzajemnie się równoważą i nie dają żadnej wypadkowej.

**92. Ciśnienie cieczy ważkiej na wszystkie ściany zawierającego ją naczynia.** Metoda szukania wypadkowego ciśnienia na ściany krzywe polega na znalezieniu trzech summ: $\Sigma X$, $\Sigma Y$, $\Sigma Z$ i, jeśli można, na sprowadzeniu trzech sił: $P'_x$, $P''_y$, $P'''_z$ do najprostszego wyrażenia. Symetrya ścian, zazwyczaj w praktyce używanych, ułatwia zadanie i często daje możność zastąpienia wszystkich ciśnień jedną tylko siłą. Jeżeli zaś będziemy uważać ciśnienia nie na pewną część naczynia, lecz na całą jego powierzchnię, wtedy, jakikolwiekby był kształt naczynia, zbiór ciśnień wywieranych w rozmaitych jego punktach może być zawsze zastąpiony jedną siłą wypadkową. Twierdzenie dowodzące tej własności, i przewidywane już w skutek uwag podanych wyżej, jest następujące:

*Jakikolwiekby był kształt naczynia zawierającego ciecz ważką w spoczynku, zbiór ciśnień wywieranych przez nią na wszystkie ściany zawsze ma jednę tylko wypadkowę: jest ona siłą pionową, równą co do natężenia, ciężarowi cieczy w naczyniu zawartej, skierowaną z góry do dołu i przyczepioną w środku ciężkości objętości tej cieczy.*

Niech więc (fig. 80) ACB będzie naczynie formy dowolnej, a AB powierzchnią zawartej w niem cieczy. Osie poziome OX, OY mogą mieć jakiekolwiek nachylenie na płaszczyznie XY; główną tu jest rzeczą ażeby oś OZ była pionową. Jeżeli wszystkie trzy osie są prostokątne, to system sił równowartych ciśnieniom na wszystkie elementa ścian naczynia, od jego dołu aż do AB, wyrazi się jak wiemy :

Fig. 80.




$$P'_x = \Sigma X = \Sigma p\omega_{yz},$$

$$P''_y = \Sigma Y = \Sigma p\omega_{xz},$$

$$P'''_z = \Sigma Z = \Sigma p\omega_{xy}.$$

Mamy dowieść, że składowe poziome ciśnień wzajemnie się równoważą, to jest że $P'_x = 0$ i $P''_y = 0$; tak, że wypadkowa ostateczna wszystkich ciśnień będzie wypadkową $P'''_z$ samych tylko składowych pionowych Z.

W tym celu wypadnie nam powtórzyć rozumowanie § 91, wnios. 3, i ponieważ stosuje się ono do wszelkiej osi poziomej, bez względu na jej kierunek, dosyć będzie ograniczyć się rozpatrywaniem składowych podług jednej z tych osi, np. podług osi OX.

Uważajmy zatem, że dla otrzymania $\Sigma X$ potrzeba rzucić wszystkie elementa ściany na płaszczyznę YZ, pomnożyć każdy z rzutów przez ciśnienie na jedność powierzchni wywierane na odpowiedni mu element ściany, nadać iloczynowi znak jaki mu przystoi, i wziąć algebraiczną summę z tak otrzymanych ilości. Otóż, walec poziomy, rzucający na płaszczyznę YZ jakikolwiek element $\omega_1$, musi z konieczności spotkać ścianę po raz drugi, a ogólniej przetnie on naczynie $2k$ razy, gdzie $k$ jest liczbą całkowitą, której najmniejsza wartość jest $k=1$. Rozpatrując więc składowe X ciśnień wywieranych na otrzymane elementa : $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$, widzimy najprzód że ich samoista wartość jest jedna i ta sama, albowiem : 1) te elementa mają rzut spólny $\omega_{yz}$, 2) ciśnienie $p$ jest to samo dla wszystkich punktów jednej i tejże płaszczyzny poziomej; tak że :

$$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = p\omega_{yz};$$

uważając zaś te składowe z właściwym im znakiem i biorąc ich summę, znajdziemy, jak to pokazuje figura, że :

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 0.$$

Wyobrażając rozmaite walce poziome, położone jedne przy drugich bez żadnej między nimi przerwy, i rzucające wszystkie elementa ścian naczynia na płaszczyznę YZ, każdy z tych elementarnych walców da zero na cząstkową summę składowych X; więc ich summa całkowita również będzie zerem, to jest że :

$$P'_x = \Sigma X = 0.$$

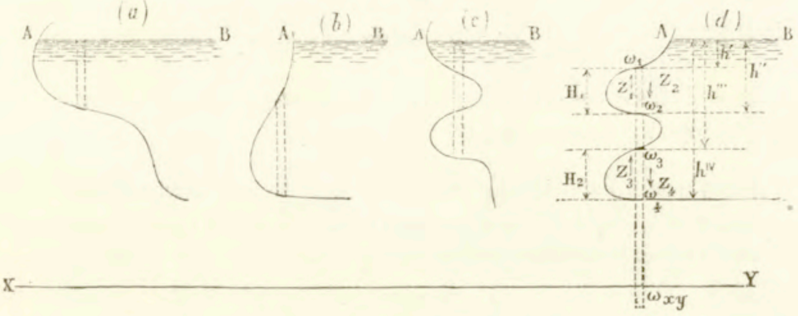
Dla otrzymania $\Sigma Y$ rozumowanie będzie identycznem i przyprowadzi do podobnegoż wypadku; będziemy więc mieli :

$$P''_y = \Sigma Y = 0.$$

Pozostaje znaleźć wypadkowę $P'''_z$ składowych pionowych.

Walce pionowe rzucające rozmaite elementa na płaszczyznę XY, mogą przecinać naczynie jakąkolwiek liczbę razy : parzystą lub nieparzystą, jak pokazuje fig. 81 ; ale w żadnym razie składowe Z,

Fig. 81.



odpowiadające elementom odciętym na ścianach jednym i tym samym walcem, nie sprowadzają się do zera ; albowiem, chociaż rzuty elementów $\omega_1$, $\omega_2$... na płaszczyznę XY wzajemnie się zakrywają, wartości $p$, przez jakie mamy pomnożyć spólny wszystkim powierzchniom $\omega_1$, $\omega_2$ ... rzut $\omega_{xy}$, będą dla każdej z nich różne, gdyż ciśnienie zmieniać się będzie ze zmianą odległości elementu od powierzchni wolnej AB. Absolutne wartości rozmaitych Z, odpowiadających jednemu i temuż samemu walcowi pionowemu, będą więc różne; znaleźć je zawsze potrafimy, mając odległość elementu od powierzchni wolnej ; a znak, jaki potrzeba będzie nadać każdej z tych składowych ażeby mieć ich summę, wyznaczy się bez trudności, wiedząc że ciśnienie $p$ jest normalnem do ściany i skierowanem ku niej od wnętrza cieczy. I tak, naprzykład, biorąc przypadek naczynia przedstawionego figurą ($d$), będziemy mieć dla walca $mn$, odcinającego na jego ścianach elementa : $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ i $\omega_4$, na odpowiednie tym powierzchniom wartości Z, wyrażenia następujące :

$$Z_1 = \omega_{xy} \times (+\Pi h'),$$

$$Z_2 = \omega_{xy} \times (-\Pi h''),$$

$$Z_3 = \omega_{xy} \times (+\Pi h'''),$$

$$Z_4 = \omega_{xy} \times (-\Pi h^{\text{IV}});$$

zkąd : $Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \Pi\omega_{xy}(h' - h'' + h''' - h^{\text{IV}}) = -\Pi\omega_{xy}\,[(h'' - h') + (h^{\text{IV}} - h''')]$;

jest to więc siła pionowa skierowana z góry do dołu i mająca absolutną wartość :

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \Pi\omega_{xy}(\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2) = \Pi(\omega_{xy}\mathrm{H}_1 + \omega_{xy}\mathrm{H}_2).$$

Otóż $\omega_{xy}$ jest przecięcie proste walca $mn$ płaszczyzną XY, a pionowe $\mathrm{H}_1$ i $\mathrm{H}_2$ mogą być uważane jako linje łączące środki ciężkości elementów $\omega_1$ i $\omega_2$, $\omega_3$ i $\omega_4$ ; więc $\omega_{xy}\mathrm{H}_1$ i $\omega_{xy}\mathrm{H}_2$ wyrażają objętości dwóch walców, a cała druga część równania przedstawia zatem ciężar cieczy zawartej w naczyniu na przestrzeni odpowiadającej walcowi $mn$ ; tak że oznaczając ten ciężar przez $c$, mamy ;

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = c.$$

Podobny rezultat znaleźlibyśmy dla każdego innego pionowego walca ; więc uważając szereg walców rzucających wszystkie elementa ścian na płaszczyznę XY, otrzymamy na $\Sigma Z$ system sił równoległych, skierowanych z góry do dołu i proporcyonalnych do massy cieczy ; mogą one zatem być złożone w jednę siłę pionową, skierowaną również do dołu, mającą za natężenie summę wszystkich ciężarów cząstkowych, to jest ciężar C cieczy zawartej w całem znaczeniu, i przyczepioną w środku ciężkości tej cieczy (a właściwie działającą na punkt w którym kierunek wypadkowej spotyka ścianę naczynia). Wypadkowa ciśnień wywieranych przez ciecz ważką na wszystkie ściany naczynia wyrazi się zatem :

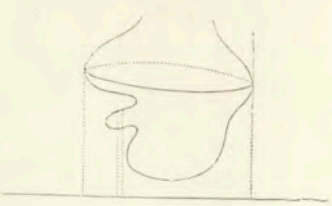
$$R = P'''_z = \Sigma Z = \Sigma c = C,$$

co było do okazania. Możemy nadmienić że dowodzenie nasze stosuje się tak do cieczy jednorodnej, jak też do cieczy złożonych (superposées) (*).

UWAGA I. W powyższem twierdzeniu przypuszczamy że na powierzchnię AB cieczy nie wywiera się żadnego ciśnienia, czyli że ciecz zawarta w naczyniu ma powierzchnię wolną. To twierdzenie będzie mieć miejsce przy wszelkich rozmiarach powierzchni AB ; tak że zmieniając ściany naczynia w sposób, ażeby powierzchnia AB stała się jednym punktem, a ciecz napełniała naczynie ze wszystkich stron teraz zamknięte, powiemy : *wypadkowa ostateczna wszystkich elementarnych ciśnień, na wszystkie ściany zamkniętego zewszad naczynia, jest siła pionowa równa ciężarowi cieczy je napełniającej.*

UWAGA II. Szereg walców rzucających rozmaite elementa ścian na jednę z trzech spółrzędnych płaszczyzn utworzy walec opisany na naczyniu równolegle do jednej z trzech osi. Krzywa zetknięcia powierzchni walcowej z powierzchnią naczynia rozdzieli tę ostatnią na dwie części : przednią i tylną, lub górną i dolną, rzuty których będą się wzajemnie zakrywać na każdej płaszczyznie, jeśli naczynie jest zamknięte ze wszystkich stron, lub też tylko na płaszczyznach YZ i XZ, w razie naczynia odkrytego (oprócz tego, mogą się zakrywać, przy szczególnym kształcie naczynia, rzuty elementów należących do jednej i tej samej jego części, jak to pokazuje fig. 82). Zamiast rozpatrywać wszystkie elementa ściany spotykane jednym i tym samym walcem, moglibyśmy uważać najprzód elementa leżące po jednej stronie krzywej zetknięcia, a następnie, elementa położone po drugiej stronie tej krzywej; tak że każda z trzech sił : $P'_x$, $P''_y$, $P'''_z$ byłaby wtedy wypadkową dwóch sił odpowiadających dwom częściom naczynia. Każda z tych dwóch sił byłaby znalezioną, uważając *odrazu* cały rzut jednej z dwóch części naczynia, i nadając (§ 90) każdemu punktowi otrzymanego rzutu takie ciśnienie, jakie w rzeczywistości istnieje w odpowiednim mu punkcie na ścianie; więc wystawiając na rzucie figurę ograniczoną taką powierzchnią, żeby długość jej rzędnych, normalnie do płaszczyzny rzutu prowadzonych, przedstawiała natężenie ciśnienia $p$ w odpowiednich punktach ściany, znalezienie wypadkowych $P'_x$, $P''_y$, $P'''_z$ sprowadzi się do szukania objętości tej figury i stanowić będzie zadanie geometryi. To *geometryczne* rozwiązanie kwestyi ciśnienia na ściany krzywe zastosujemy do rozmaitych niżej podanych przykładów.

Fig. 82.



(*) Że wypadkowa ciśnień wywieranych na wszystkie ściany naczynia równa się ciężarowi w niem zawartej cieczy, to może być przewidzianem *a priori*; gdyż działająca na ciecz siła ciężkości wywołuje w niej dążność do przyjęcia ruchu odpowiedniego tej sile. Gdyby więc ciecz była *wolną* od wszelkich zewnętrznych związków, dążność ta byłaby jawnie uwydatnioną, to jest ciecz *padałaby swobodnie* ku środkowi ziemi ; w razie zaś istnienia przeszkody tamującej taki ruch cieczy, dążność do rzeczywistego przyjęcia należnego jej ruchu objawia się *ciśnieniem* cieczy na tę przeszkodę (wszystkie ściany naczynia), które widocznie musi mieć kierunek i natężenie siły na ciecz działającej, a to ostatnie stanowi właśnie *ciężar* cieczy.

**93.** Z twierdzenia tyczącego się wypadkowego ciśnienia na wszystkie ściany jakiegokolwiek naczynia możemy wyprowadzić pewne wnioski, których ogólność jaśniej się przedstawi, jeśli przedtem rozpatrzymy ściany formy szczególnej. Przechodzimy więc teraz do wyznaczenia ciśnienia na ściany krzywe, najczęściej w praktycznem zastosowaniu używane, i w tym celu uważać będziemy następujące trzy rodzaje ścian :

1° Ściany walcowe,

2° Ściany stożkowe,

3° Ściany sferyczne.

Przy ścianach walcowych i sferycznych odróżniać będziemy dwa ich położenia : pionowe i poziome.

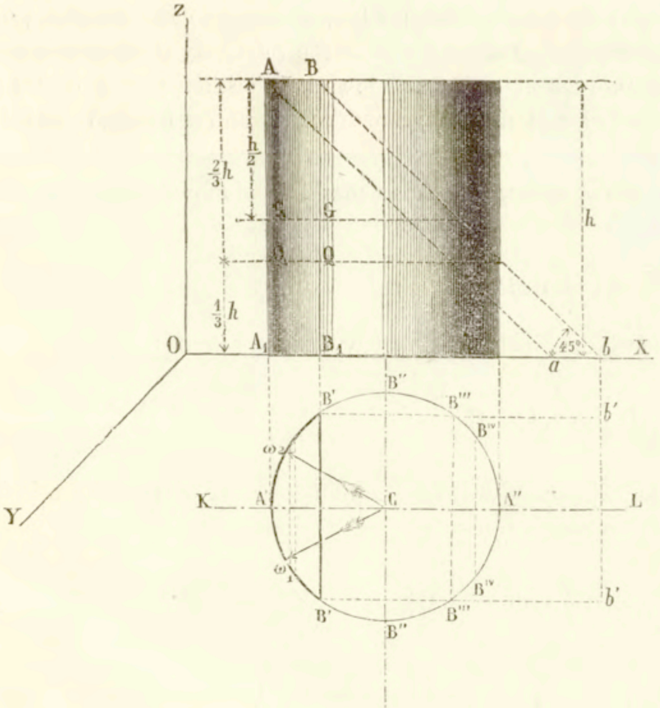
---

## I. — ŚCIANY WALCOWE.

Rozpatrzmy najprzód przykłady na ściany walcowe pionowe.

I Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na ścianę walcową obrotową, mającą za podstawę łuk** B'A'B' **położony na płasczyźnie poziomej** XY (fig. 83), **a linje równoległe do osi** OZ **za rodzące.**

Fig. 83.




Zadaniem naszem jest znalezienie trzech ciśnień : $P'_x$, $P''_y$ i $P'''_z$.

Ponieważ ciśnienia w rozmaitych punktach ściany są do niej normalne, (skierowane więc ku osi walca rzucającej się w punkcie C) a zatem poziome, nie dadzą one składowych pionowych; zkąd wypada że $P'''_z = \Sigma Z = 0$. Pozostaną więc dwie siły : $P''_y$ i $P'_x$. Otóż $P''_y = \Sigma Y = 0$, gdyż powierzchnia nasza będąc symetryczną względem płasczyzny KL, każdy punkt uważany z jednej jej strony ma swój odpowiedni po drugiej stronie tej płasczyzny, i wszystkie walce poziome, rzucające na płasczyznę ZX rozmaite elementa ściany, przecinają ją *dwa* razy. Więc ostateczna wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na walcową powierzchnię sprowadzi się tylko do $P'_x$. Otóż, wiemy że :

$$P'_x = \Sigma X = \Sigma p\omega_{yz} = \Pi z_1 \Omega_{yz},$$

gdzie $\Omega_{yz}$ oznacza rzut ściany B'A'B' na płaszczyznę YZ, to jest powierzchnię prostokąta mającego za podstawy cięciwę B'B', a za dwa inne boki dwie rodzące powierzchni walcowej przechodzące przez punkta B', B'; zaś $z_1$ wyraża odległość od powierzchni wolnej AB środka ciężkości tak otrzymanego prostokąta. Jeśli więc wysokość $AA_1$ walca oznaczymy przez $h$, a cięciwę B'B' przez $c$, to z powyższego wzoru otrzymamy :

$$P'_x = \Pi \frac{h}{2} \cdot hc = \Pi \frac{h^2}{2} c;$$

to jest, *ostateczna wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na ścianę walcową* B'A'B' *równa się całkowitemu ciśnieniu* (§ 59) *na prostokąt* ($BB_1$, B'B'), *powstały z rzutu ściany na płaszczyznę* YZ.

Zastosowując uwagę § 91, wypadłoby nam, dla znalezienia $P'_x$, uważać objętość pryzmy (B'B'$b'b'$, $BB_1b$), mającej za podstawę trójkąt $BB_1b$, a za wysokość cięciwę B'B'; albowiem powierzchnia, której rzędne wyrażać będą natężenie ciśnienia w rozmaitych punktach ściany walcowej B'A'B', jest tu płaszczyzną B$b$, nachyloną do horyzontu pod kątem 45°. Ztąd na mocy § 68 wnosimy że : *ciśnienie wypadkowe na powierzchnię walcową jest siłą poziomą do niej normalną i położoną w płaszczyźnie symetryi* KL; *kierunek tej siły przebija ścianę w punkcie* Q *znajdującym się na* $\frac{2}{3}$ *wysokości rodzącej* ($AA_1$, A'), *licząc od powierzchni wolnej*.

**94.** Natężenie wypadkowej $P'_x$ i jej punkt przyczepienia mogą być znalezionemi bezpośrednio za pomocą rachunku i wzorów wyprowadzonych dla ścian płaskich. I tak, uważając ścianę walcową jako pryzmę o nieskończenie małych bokach, ciśnienie całkowite wywierane na każdy elementarny prostokąt będzie natychmiast znanem ; pozostanie zatem wziąć składowe tych ciśnień podług osi OX, a następnie znaleźć ich summę. Zajmiemy się więc teraz analitycznem rozwiązaniem naszego zadania.

*Obrachowanie natężenia wypadkowej* $P'_x$. Wzór ogólny dla ścian płaskich pionowych jest jak wiadomo (§ 42) :

$$P = \Pi z_1 \Omega;$$

ciśnienie elementarne wywierane na nieskończenie mały prostokąt wyrazi się zatem :

$$dP = \Pi \frac{h}{2}(ds \times h) = \Pi \frac{h^2}{2} ds;$$

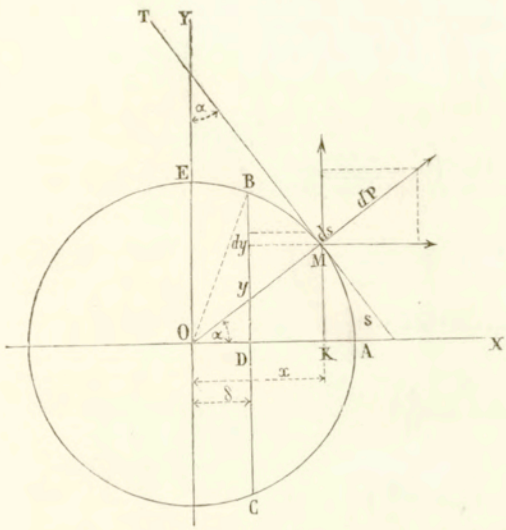
jeśli więc $\alpha$ oznacza kąt, jaki normalna do powierzchni walcowej w punkcie M (fig. 84) czyni z osią X, to składowa, podług tej osi, ciśnienia $dP$ ma za wyrażenie :

$$(dP)_x = X = \Pi \frac{h^2}{2} ds \operatorname{dos} \alpha = \Pi \frac{h^2}{2} dy;$$

i będzie ona przyczepioną w punkcie leżącym na $\frac{2}{3}$ wysokości prostokąta. Jeżeli zatem na tej wysokości przetniemy walcową powierzchnię płaszczyzną równoległą do XY, wszystkie składowe X będą położone w tak poprowadzonej płaszczyźnie (bierzemy ją za płaszczyznę papieru) i przyczepione w rozmaitych punktach łuku BAC. Oznaczając cięciwę BC przez $c$ i biorąc summę składowych wszystkich cisnień na łuk BAC działających, otrzymujemy :

(1) $$\Sigma(dP)_x = \Sigma X = P'_x = \Pi\frac{h}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{c}{2}} dy = \Pi\frac{h^2}{2}c = \Pi\frac{h}{2}(hc),$$

Fig. 84.




co wyraża natężenie wypadkowej ciśnień normalnie na prostokąt $(hc)$ wywieranych.

Gdybyśmy chcieli wyrazić $y$ przez $x$, należałoby różniczkować równanie koła :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

w skutek czego otrzymalibyśmy :

$$xdx + ydy = 0;$$

zkąd :

$$dy = -\frac{xdx}{y} = \frac{-xdx}{\pm\sqrt{R - x^2}}.$$

Dla części AB łuku BAC, gdzie $dy$ jest dodatne, należy wziąć $\sqrt{\phantom{x}}$ ze znakiem — ; dla części AC, $dy$ jest odjemne, $\sqrt{\phantom{x}}$ będzie więc ze znakiem +.

Rozpatrując część AB i oznaczając $OD = \delta$, będziemy mieli :

$$(P'_x)_{AB} = (\Sigma X)_{AB} = -\frac{\Pi h^2}{2}\int_\delta^R \frac{-xdx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{\Pi h^2}{2}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)_\delta^R = \frac{\Pi h^2}{2}(R^2 - \delta^2) = \frac{\Pi h^2}{2}.BD = \frac{\Pi h^2}{2}\cdot\frac{c}{2};$$

zaś dla części AC napiszemy :

$$(P'_x)_{AC} = (\Sigma X)_{AC} = \frac{\Pi h^2}{2}\int_{\delta}^{R} \frac{-xdx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \frac{\Pi h^2}{2}\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)_\delta^R = -\frac{\Pi h^2}{2}\cdot\frac{c}{2}.$$

A że znak linij DB i DC jest dla nas rzeczą obojętną, więc :

(1') $$P'_x = (P'_x)_{AB} + (P'_x)_{AC} = \frac{\Pi h^2}{2}c;$$

co było wyprowadzonem wyżej.

*Wyznaczenie punktu przyczepienia* $(x', y', z')$ *wypadkowego ciśnienia*. Ponieważ wszystkie składowe X znajdują się na jednej i tej samej płaszczyznie poziomej, poprowadzonej na odległości $= \frac{2}{3}h$ od powierzchni wolnej, ich wypadkowa $P'_x$ również będzie położoną w tej płaszczyznie, a zatem $z' = \frac{2}{3}h$(*). Nad-

(*) Gdybyśmy chcieli szukać wartości $z'$ rachunkiem, należałoby wziąć momenta wszystkich sił względem górnej lub dolnej podstawy walca; jeżeli za płaszczyznę momentów weźmiemy dolną jego podstawę wtedy, zważywszy że to, z symetryi ściany względem płaszczyzny pionowej poprowadzonej przez oś OX wynika, że siła $P'_x$ skierowaną będzie według tej osi; więc $y'=0$. Pozostaje zatem znaleźć wartość na $x'$.

Obróćmy w tym celu siły X około ich punktów przyczepienia tak, ażeby one stały się pionowemi; przez to punkt przyczepienia wypadkowej $P'_x$ się nie zmieni, i możemy teraz wziąć momenta wszystkich sił względem osi OY. Szukana spółrzędna $x'$ wyznaczy się z równania:

$$x'P'_x=\int (dP)_x x=\int\left(\frac{\Pi h^2}{2}dy\right)x,$$

które, na mocy poprzedniej uwagi, może być zamienionem na:

$$x'P'_x=2\int_\delta^R \frac{\Pi h^2}{2}x.\frac{-xdx}{-\sqrt{R^2-x^2}}=\Pi h^2\int_\delta^R\frac{x^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

Otóż:

$$\int_\delta^R\frac{x^2dx}{\sqrt{R^2-x^2}}=\left[-\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}+\frac{1}{2}R^2\,\text{łuk wst}\frac{x}{R}\right]_\delta^R$$

$$=\frac{\delta c}{4}+\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{2}-\text{łuk wst}\frac{\delta}{R}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\delta c}{2}+R^2\left(\frac{\pi}{2}-\text{łuk wst}\frac{\delta}{R}\right)\right];$$

więc:

$$x'=\frac{\Pi\frac{h^2}{2}\left[\frac{\delta c}{2}+R^2\left(\frac{\pi}{2}-\text{łuk wst}\frac{\delta}{R}\right)\right]}{\Pi\frac{h^2}{2}c}=\frac{\delta}{2}+\frac{R^2}{c}\left(\frac{\pi}{2}-\text{łuk wst}\frac{\delta}{R}\right).$$

Wyrażeniu temu możemy nadać inną formę zważywszy że:

$$R\frac{\pi}{2}=\text{łuk AE},$$

$$R\,\text{łuk wst}\frac{\delta}{R}=\text{łuk EB};$$

---

wszystkie składowe X są od niej odległe na $\frac{1}{3}h$, będziemy mieli:

$$z'P'_x=\int(dP)_z z=\int\frac{\Pi h^2}{2}dy\,\frac{h}{3}=\frac{\Pi h^3}{6}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}dy=\frac{\Pi h^3}{3}\int_0^{\frac{c}{2}}dy=\frac{\Pi h^3}{6}c$$

więc:

$$z'=\frac{\frac{1}{6}\Pi h^3c}{\frac{1}{2}\Pi h^2c}=\frac{1}{3}h.$$

jeżeli więc oznaczymy długość łuku BAC przez $l$, to znajdziemy :

$$x' = \frac{\delta}{2} + \frac{R}{c} \times \text{łuk AB} = \frac{\delta}{2} + \frac{R}{c} \cdot \frac{l}{2};$$

czyli :

(2) $$x' = \frac{1}{2}\left(\frac{lR}{c} + \delta\right).$$

Do tego samego wypadku moglibyśmy przyjść jeszcze inną drogą, używając wprost wyrażenia :

$$(dP)_x = X = \frac{\Pi h^2}{2} ds . \operatorname{dos} \alpha,$$

w skutek czego równanie momentów przybrałoby postać :

$$x'P'_x = \frac{\Pi h^2}{2} \int x ds . \operatorname{dos} \alpha.$$

Otóż, oznaczając łuk AM przez $s$, będziemy mieli :

$$\operatorname{dos} \alpha = \operatorname{dos} \frac{s}{R},$$

$$x = OK = OM \operatorname{dos} \alpha = R \operatorname{dos} \frac{s}{R},$$

$$ds = R d . \frac{s}{R};$$

a zatem :

$$x'P'_x = \frac{\Pi h^2}{2} \int R \operatorname{dos} \frac{s}{R} R d . \frac{s}{R} \operatorname{dos} \frac{s}{R} = \frac{\Pi h^2}{2} R^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \operatorname{dos}^2 \frac{s}{R} d \frac{s}{R}.$$

Dla znalezienia tej całki możemy użyć jednego z dwóch wzorów :

$$\int \operatorname{dos}^2 x \, dx = \frac{x + \operatorname{wst} x \operatorname{dos} x}{2},$$

$$\int \operatorname{wst}^2 x \, dx = \frac{x - \operatorname{wst} x \operatorname{dos} x}{2};$$

Zastosowując pierwszy z nich znajdujemy :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \operatorname{dos}^2 \frac{s}{R} d \frac{s}{R} = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{R} + \operatorname{wst} \frac{s}{R} \operatorname{dos} \frac{s}{R}\right]_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{2R} + \operatorname{wst} \frac{l}{2R} \operatorname{dos} \frac{l}{2R} - \left(\frac{-l}{2R} + \operatorname{wst} \frac{-l}{2R} \operatorname{dos} \frac{-l}{2R}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{l}{R} + 2\operatorname{wst} \frac{\frac{1}{2}l}{R} \operatorname{dos} \frac{\frac{1}{2}l}{R}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{l}{R} + 2\operatorname{wst} \frac{AB}{R} \operatorname{dos} \frac{AB}{R}\right].$$

Otóż :

$$\text{wst}\,\frac{\text{AB}}{\text{R}}=\text{wst BOA}=\frac{\text{BD}}{\text{R}}=\frac{c}{2\text{R}},$$

$$\text{dos}\,\frac{\text{AB}}{\text{R}}=\text{dos BOA}=\frac{\text{OD}}{\text{R}}=\frac{\delta}{\text{R}};$$

zatem :

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}}\text{dos}^2\,\frac{s}{\text{R}}\,d\,\frac{s}{\text{R}}=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\text{R}}+\frac{c\delta}{\text{R}^2}\right);$$

więc :

$$x'=\frac{\frac{\Pi h^2}{2}\cdot\frac{\text{R}^2}{2}\left(\frac{l}{\text{R}}+\frac{c\delta}{\text{R}^2}\right)}{\frac{\Pi h^2}{2}}=\frac{\text{R}^2}{2c}\left(\frac{l}{\text{R}}+\frac{c\delta}{\text{R}^2}\right)=\frac{\text{R}l}{2c}+\frac{c\delta}{2c},$$

czyli ostatecznie :

(2') $$x'=\frac{1}{2}\left(\frac{l\text{R}}{c}+\delta\right).$$

Zauważmy, że $\delta=\sqrt{\text{R}^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4\text{R}^2-c^2}$; więc ażeby wartość $x'$ była rzeczywistą, potrzeba mieć :

$$\frac{c}{2}<\text{R},\qquad \text{czyli}\qquad c<2\text{R};$$

to jest cięciwa powinna być mniejszą od średnicy koła ; a ten warunek jest zawsze sam przez się wypełniony.

Uwaga. Porównajmy wzór na $x'$, wyznaczający punkt przyczepienia wypadkowego ciśnienia na ścianę walcową, ze wzorem na $x_1$ dającym środek ciężkości jednorodnego łuku. Wzory te dla łuku BAC będą :

$$x_1=\frac{c\text{R}}{l},$$

$$x'=\frac{1}{2}\left(\frac{l\text{R}}{c}+\delta\right).$$

Jeżeli $l$ się zmniejsza i staje się zerem, wtedy $c$ również będzie zerem, zatem $\delta=\text{R}$; wartości $x_1$ i $x'$ przybierają postać $\frac{0}{0}$.

Jeżeli $l$ się powiększa i dosięga półokręgu, to jest jeżeli $l=\frac{2\pi\text{R}}{2}$, wtedy $c=2\text{R}$, $\delta=0$; a wartości na $x_1$ i $x'$ stają się:

$$x_1 = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2}{\pi} R,$$

$$x' = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi R^2}{2R}\right) = \frac{\pi}{4} R;$$

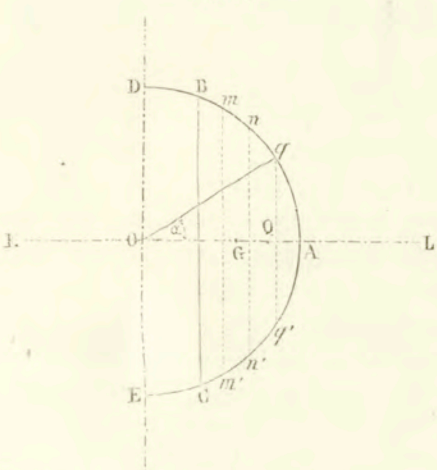
ztąd wnosimy że $x' > x_1$; dotykalniej to się okaże przedstawiając wartości $x_1$ i $x'$ liczebnie; znajdziemy:

$$x_1 = 0{,}637R,$$

$$x' = 0{,}785R.$$

Wynik ten łatwo może być wytłomaczonym. W razie działania na łuk BAC (fig. 85) siły ciężkości, wszystkie jego punkta zostają pod wpływem jednej i tej samej siły; tak że wypadkowa dwóch sił działających na punkta $m$ i $m'$ będzie mieć to samo natężenie, jak wypadkowa sił przyczepionych w punktach $n$ i $n'$, $q$ i $q'$... Rozpatrując zaś ciśnienia X wywierane na ten sam łuk BAC, widzimy że nie będą one stałe, gdyż X jest proporcyonalne do $\cos\alpha$; wartość tego ciśnienia będzie zatem największa w punkcie A, gdzie $\cos\alpha = 1$, i malejąc w miarę zbliżania się do punktów B i C, sprowadza się ona do zera dla punktów D i E leżących na średnicy koła. Wypadkowa więc ciśnień wywieranych w $q$ i $q'$ będzie większa jak wypadkowa dla punktów $n$ i $n'$, a ta ostatnia większa od wypadkowej dla punktów $m$ i $m'$; wszystkie zatem cząstkowe wypadkowe, przyczepione w rozmaitych punktach osi symetryi KL, dadzą siłę ostateczną $P'_x$, której punkt przyczepienia Q będzie oczywiście bliżej położonym względem punktu A, aniżeli punkt przyczepienia G wypadkowej sił ciężkości; czyli że $x' > x_1$.

Fig. 85.




**95.** Wracając do fig. 83 widzimy, że ciśnienie wypadkowe na ścianę walcową będzie się zwiększać w miarę powiększania się łuku B'A'B', i dojdzie do swego *maximum* dla łuku B''A'B''; gdyż rzut ściany walcowej będzie wtedy prostokątem mającym za podstawę średnicę B''B'' koła. Gdy przejdziemy po prawą stronę tej średnicy, ciśnienie będzie się zmniejszać; tak np. dla ściany mającej za podstawę łuk B'''B'A'B'B''' większy od półokręgu będzie ono takie samo, jak dla ściany której podstawą jest łuk B'A'B', równy łukowi B'''A''B'''; a wynika to ztąd, że dla łuku B'''B'A'B'B''' zjawia się nowa oś symetryi B'B', i wszystkie zatem walce, równoległe do osi OX, rzucające na płaszczyznę YZ elementa ściany, spotykają ją *dwa* razy na całej przestrzeni łuku B'''B''B', tak po jednej jak po drugiej stronie płaszczyzny KL; w skutek czego cząstkowa $\Sigma X$ odpowiadająca łukom B''B''B' sprowadza się do zera. Wnosimy ztąd że *ciśnienie wypadkowe na ścianę walcową pionową równem jest wypadkowemu ciśnieniu na prostokąt zawarty między dwiema skrajnemi rodzącemi walca, bez względu na część obrotu jaką obejmuje powierzchnia walcowa;* czyli że to *ciśnienie na powierzchnię większą od półobrotu równem jest ciśnieniu na ścianę mniejszą od półobrotu, dopełniającą daną powierzchnię do całego walca.*

Tak więc dla ściany mającej za podstawę łuk $B^{IV}B''A'B''B^{IV}$, ciśnienie wypadkowe wyrazi się ciśnieniem na prostokąt wystawiony na cięciwie $B^{IV}B^{IV}$; w miarę zwiększania się powierzchni walcowej, to jest w miarę zbliżania się punktów $B^{IV}$ do punktu A'', ciśnienie wypadkowe $P'_x$ będzie się zmniejszać, i stanie się zerem dla powierzchni walcowej o całym obrocie; powiadamy zatem : *ostateczna wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na ścianę walcową zamkniętą jest zero.*

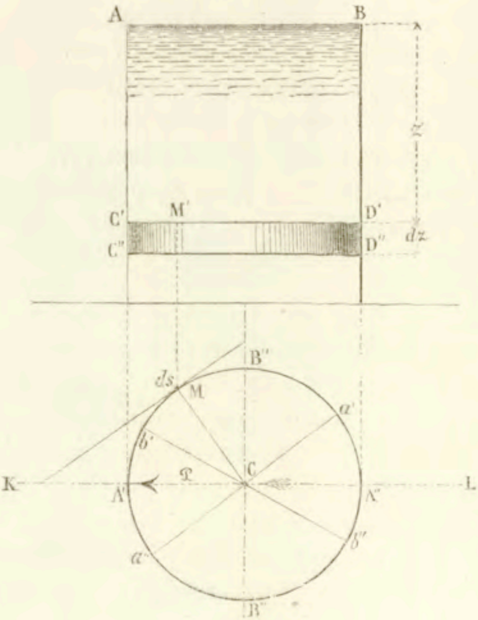
Wypadek taki był do przewidzenia, gdyż wiemy (§ 91, uw. I) że dla powierzchni zamkniętej jakiejkolwiek $P'_x = \Sigma X = 0$ i $P''_y = \Sigma Y = 0$; w razie zaś ściany walcowej, mamy nadto $P''_z = \Sigma Z = 0$ samo przez się, gdyż wszystkie ciśnienia są poziome.

Wniosek. Jeżeli na ciśnienie cieczy jest wystawioną wypukła czyli zewnętrzna strona walcowej powierzchni, wypadkowe na nią ciśnienie będzie takie samo jak na jej stronę wewnętrzną, to jest równe ciśnieniu na prostokąt zawarty między skrajnemi rodzącemi walcowej ściany.

**96.** W zastosowaniach do konstrukcyi naczyń walcowych rozpatruje się ciśnienie wypadkowe nie na całą ich powierzchnię, lecz na część ściany najwięcej fatygowaną, to jest wystawioną na największe ciśnienie, a zatem najgłębiej w cieczy zanurzoną; gdyż jeżeli np. naczynie ma być metaliczne, oczywistem jest że gruboścm etalu powinna być obrachowaną mając na widoku największe usiłowania na jakie on będze wystawiony. Jeżeli wysokość naczynia przechodzi pewną granicę, walcowa powierzchnia składa się z kilku walcowych obrączek spojonych z sobą za pomocą nitowania, i grubość blachy będzie się zmieniać stosownie do ciśnienia wywieranego na najniższe punkta każdej obrączki.

Do tej uwagi należy dodać jeszcze inną. Ponieważ ściana obrotowa jest symetryczną względem wszelkiej płaszczyzny przeprowadzonej przez oś obrotu, natężenie wypadkowego ciśnienia na części ściany leżące po obu stronach takiej płaszczyzny nie tylko że będzie jednakowe (§ 95), ale jeszcze będzie ono mieć wartość większą jak dla każdej innej części ściany. Naturalnem więc jest uważać przy rachunku to ciśnienie maximum, i ograniczyć się zatem rozpatrywaniem jednej połowy walcowej powierzchni (*). Jeśli więc idzie o znalezienie ciśnienia wywieranego na punkta obrączki znajdujące się na wysokości $z$ (fig. 86), uważamy nieskończenie cienką warstwę, zawartą między dwiema płaszczyznami poziomemi C'D' i C''D'' odległemi na $dz$, i obejmującą półobrotu, dla której, przypuszczając ciśnienie $p$ na jedność powierzchni jednakowe we wszystkich punktach (**), a ciśnienie wypadkowe oznaczając przez $\mathfrak{P}$, będziemy mieli na mocy poprzedniego :

Fig. 86.




$$(1) \qquad \mathfrak{P} = p(B''B''' \times dz) = p.\,Ddz,$$

gdzie D wyraża średnicę koła. Co zaś do kierunku tej siły, wiemy że będzie ona poziomą, normalną do ściany, i leżącą w płaszczyznie symetryi KL, na odległości równej $\frac{1}{3}dz$ od płaszczyzny C''D''.

(*) Jeżeli ciśnienia wywierane na powierzchnię walcową zamkniętą sprowadzają się do zera, to tylko z punktu widzenia *analitycznego*, i jedynie w skutek przyjętej ugody odróżniania znakiem + i — ciśnień wywieranych w przeciwnym sobie kierunku. Z punktu zaś widzenia *fizycznego* znaki — i + nie istnieją, to jest ściana wytrzymuje zawsze

Przy rachunku, zwyczajem jest rozpatrywanie usiłowań wywieranych w pewnej płaszczyźnie jaką przecinamy dany system. Przypuszcza się wtedy, że ciśnienie $p$ na jedność powierzchni jest jedno i to samo we wszystkich punktach warstwy zawartej między płaszczyzną przecięcia i płaszczyzną do niej równoległą i poprowadzoną na odległości równej *jedności*. Kładąc więc $dz=1$, wzór (1) staje się wzorem praktycznym :

$$\mathfrak{P} = p\mathrm{D}, \tag{2}$$

i wyraża się poprostu, że *ciśnienie wypadkowe wszystkich ciśnień wywieranych na półokrąg* B″A′B″ *równem jest ciśnieniu $p$ na jedność powierzchni pomnożonemu przez średnicę* B″B″.

Ale teraz ciśnienie na jedność powierzchni $p$ może być nazwane innem nazwiskiem. I tak wiemy (§ 33) że :

$$p = \frac{\mathrm{P}}{a \times b}\ ; \text{ więc jeżeli } b=1, \text{ to } p = \frac{\mathrm{P}}{a} = \frac{\text{siła}}{\text{długość}}\ ;$$

przy tych warunkach wyrażenie : *ciśnienie na jedność powierzchni* może więc być zastąpione *ciśnieniem na jedność długości* uważanego łuku.

**97.** Wzoru (2) możemy dowieść niezależnie, rozkładając wprost każde indywidualne ciśnienie $p$ wywierane na łuk B″A′B″ na dwa ciśnienia : jedno prostopadłe do średnicy B″B″, drugie do niej równoległe; ponieważ profil kołowy jest powszechnie używany przy konstrukcyi kotłów parowych, przy rezerwóarach, rurach wodociągowych, i t. p. dobrze będzie rozpatrzyć tę kwestyę zosobna.

Niech okrąg A′B″A″B″ przedstawia przecięcie walcowej powierzchni naczynia płaszczyzną poziomą C′D′. Ciśnienie na jedność powierzchni w każdym punkcie okręgu jest jedno i to samo : $p=\Pi z$; wszystkie ciśnienia znajdują się w płaszczyźnie C′D′ i kierunek ich przechodzi przez środek C. Przypuszczając, że po przeprowadzeniu innej płaszczyzny poziomej C″D″ odległej od pierwszej na $dz$, ciśnienie na jedność powierzchni będzie stałe na przestrzeni obrączki C′D′C″D″, wypadkowe ciśnienie na tę część ściany $\Omega$, uważane w kierunku jednej z trzech osi, otrzymamy za pomocą trzech wzorów :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}'_x &= \Sigma\mathrm{X} = \Sigma p\omega_{yz} = p\Sigma\omega_{yz} = p\Omega_{yz}\,,\\
\mathrm{P}''_y &= \Sigma\mathrm{Y} \qquad\qquad\qquad\qquad = p\Omega_{xz},\\
\mathrm{P}'''_z &= \Sigma\mathrm{Z} \qquad\qquad\qquad\qquad = p\Omega_{xy} = 0;
\end{aligned}$$

istnienie ostatniego równania wynika bądź z tego, że rzut obrączki nie daje żadnej powierzchni czyli że $\Omega_{xy}=0$, bądź też dla tego że ciśnienia są siłami poziomemi.

---

we wszystkich swych punktach pewne ciśnienie, mające wartość *absolutną*, niezależną od nazwiska jakie jej dowolnie nadajemy. I tak ściany B″A′B″ (fig. 86) i B″A″B″ ponosić będą to samo ciśnienie absolutne; tylko dla nas jedno ciśnienie będzie *dodatne*, a drugie *odjemne*. I w ogólności, uważana figura będąc symetryczną względem wszelkiej płaszczyzny pionowej przeprowadzonej przez środek koła C, własności tyczące się ścian B″A′B″ i B″A″B″ stosują się i do każdej innej części, jak np. $b'a'b''$ i $b'a''b''$; i t. p.

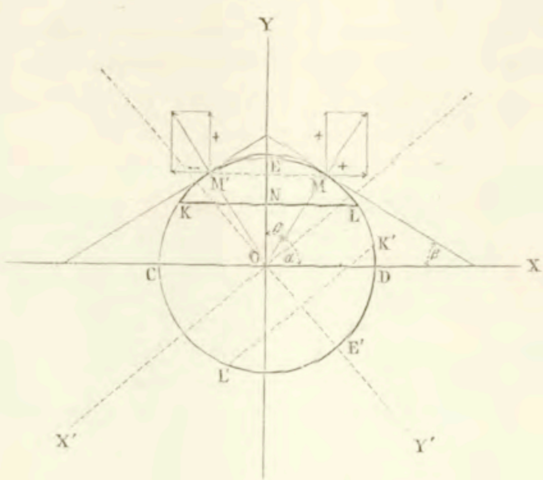
(**) W rzeczywistości, ciśnienie w C′D′ będzie $p'$, a w C″D″ będzie ono $p''$, i różnica między dwoma ciśnieniami wyrazi się przez : $p''-p' = \Pi(z+dz) - \Pi z = \Pi dz$. Hypoteza więc równego ciśnienia na obrączkę C′D′C″D″ tem mniej będzie się różnić od warunków rzeczywistych, im mniejszy będzie iloczyn $\Pi dz$; tak że dla dwóch różnych cieczy możemy mieć *jednakowe przybliżenie*, biorąc $z$ mniejsze dla cieczy, której $\Pi$ jest większe, i odwrotnie; więc dla gazów możemy wziąć $dz$ daleko większe jak np. dla wody; w skutek tego i przypuszcza się, że jeżeli massa gazu nie zajmuje wielkiej przestrzeni, ciśnienie w każdym jej punkcie może być uważane za stałe.

Weźmy teraz jakikolwiek punkt M′ ściany leżący na C′D′ lub C″D″, i poprowadźmy przez niego płaszczyznę styczną do powierzchni C′D′C″D″; możemy uważać nieskończenie mały łuk $ds$, wzięty bo obu stronach tego punktu, jako element *prostej*, stycznej do koła B″A′B″A″, tak że $dsdz$ będzie wyrażać element płaski obrączki, na który ciśnienie całkowite jest: $pdsdz$; uważając szereg punktów $M'_1, M'_2$... otrzymamy szereg elementów płaskich $dsdz$, stanowiących przy granicy daną nam obrączkową powierzchnię.

Zauważmy następnie, że jakikolwiek byłby system sił, biorąc na ich kierunku, zamiast rzeczywistego natężenia sił, natężenia proporcyonalne, ale wszystkie w jednym i tym samym stosunku, otrzymana ztąd wypadkowa zmieni się, co do jej natężenia, w tymże samym stosunku i rzeczywista jej wielkość otrzyma się z pomnożenia znalezionej wartości przez ten stały stosunek. Zamiast więc wszystkich normalnych sił: $pdsdz$ (gdzie $dz$ jest stałe) możemy rozpatrywać siły do nich proporcyonalne: $pds$, z warunkiem że wypadkowę tych ostatnich pomnożymy przez $dz$; i gdyby, w przypadku szczególnym $dz$ było równem *jedności linijnej*, wypadkowa otrzymana ze złożenia $pds$ musiałaby być pomnożoną przez tę *jedność*. Z punktu widzenia geometrycznego zamieniamy, w każdym razie, złożenie sił $pdsdz$ działających na *powierzchnię* C′D′C″D″ na złożenie sił $pds$ działających na punkta okręgu A′B″A″B″; tak że zgodziwszy się nazywać teraz ilość $p$, (która ma sens rzeczywisty tylko przy rozpatrywaniu powierzchni) *ciśnieniem linjowem na jedność długości*, zadanie zostanie postawionem w sposób następujący:

*Znając że ciśnienie p na jedność długości jest stałe we wszystkich punktach okręgu i do niego normalne, znaleźć ciśnienie wypadkowe na pewną część tego okręgu.*

Fig. 87.




1° Niech, na pierwszem miejscu, idzie o znalezienie wypadkowego ciśnienia na łuk KEL (fig. 87) którego cięciwa jest równoległą do osi OX.

Oznaczając $\alpha$ i $\beta$ kąty jakie normalna w jakimkolwiek punkcie M łuku czyni z osiami OX i OY, i rozkładając całkowite ciśnienie $pds$ wywierane normalnie na element $ds$ stycznej, przez punkt M poprowadzonej, na dwa ciśnienia składowe, równoległe do osi, będziemy mieć:

$$X = (pds)\cos\alpha = p(ds.\cos\alpha) = pdy,$$

$$Y = (pds)\cos\beta = p(ds.\cos\beta) = pdx;$$

zkąd:

$$P'_x = \Sigma X = \Sigma pdy = p\Sigma dy,$$

$$P''_y = \Sigma Y = \Sigma pdx = p\Sigma dx.$$

Otóż, $\Sigma dy$ oznacza rzut na oś OY dwóch części łuku: EML i EM′K; te rzuty wzajemnie się zakrywają, stanowiąc każdy zosobna linję EN; ztąd wnosimy że $P'_x = 0$; jaśniej jednak rzecz przedstawimy rozumując w sposób następujący: jakibyśmy nie wzięli punkt M na części EL łuku, gdzie składowa X jest skierowaną ku stronie + osi, znajdziemy zawsze na drugiej jego części EK punkt M′, symetryczny punktowi M, gdzie składowa X′ będzie mieć to samo natężenie co X, tylko skierowaną ona będzie ku stronie — osi OX. Otóż X i X′ są przyczepione do punktów *krzywej stałej* (courbe fixe); a wiemy z Mechaniki, że jeżeli dwie siły, równe i sobie przeciwne, są przyczepione w dwóch różnych punktach ciała stałego, i działają wedle prostej te punkta łączącej, siły takie wzajemnie się równoważą (*); więc $(\Sigma X)_1$ i $(\Sigma X)_2$, odpowiadające częściom EL i EK, równe i przeciwnego sobie kierunku, wzajemnie się równoważą; a zatem $P'_x = (\Sigma X)_1 + (\Sigma X)_2 = 0$. Wypadkowa ostateczna wszystkich normalnych ciśnień *pds* wywieranych na łuk KEL będzie to więc siła $P''_y = p\Sigma dx = p.\mathrm{KL}$ (gdyż $\Sigma dx$ wyraża rzut łuku KEL na oś OX); i z powodu symetryi wszystkich składowych Y względem osi OY, wypadkowa $P''_y$ będzie działać na łuk dany według tej osi, to jest jej kierunek przebija łuk KEL w punkcie E. W skutek tego powiadamy :

*Ciśnienie wypadkowe wszystkich ciśnień normalnych działających na łuk* KEL, *z natężeniem stałem we wszystkich jego punktach i równem p na jedność długości, równa się iloczynowi z p przez długość* KL *cięciwy łuk dany podpasującej; jest ono normalnem do cięciwy i przechodzi przez jej środek* N.

Oczywiście że to prawidło stosuje się nie tylko do łuku którego cięciwa KL jest równoległą do osi OX, ale i do wszelkiego innego łuku K'E'L'; albowiem biorąc w tym razie OX' i OY' za spółrzędne osie, znajdziemy się w przypadku dopiero co rozpatrzonym ; tak że ciśnienie wypadkowe na łuk K'E'L' wyrazi się :

$$\mathfrak{P} = d \times \text{cięciwę K'L'}.$$

2° Szukajmy teraz wypadkowego ciśnienia na łuk CED równy półokręgowi. Widocznem jest że poprzednie warunki w niczem się nie zmieniły. Rozmaite składowe X dla części ELD będą równe i przeciwnego znaku odpowiednim X uważanym na części EKC ; co zaś do składowych Y, wszystkie one będą skierowane ku stronie dodatnej osi OY ; nie powtarzając więc poprzednich rozumowań, możemy napisać odrazu :

$$P''_y = p\Sigma dx = p\,.\,\mathrm{CD}.$$

Jeśli teraz oznaczymy ciśnienie wypadkowe $P''_y$ przez $\mathfrak{P}$, a promień i średnicę koła przez R i D, będziemy mieć wzór (**) :

(2) $$\mathfrak{P} = p\,.\,2\mathrm{R} = p\mathrm{D},$$

---

(*) Delaunay : *Mécanique Rationnelle*, str. 313.

(**) Wzór (2) nadzwyczaj łatwo wyprowadzony być może rachunkiem. I tak, wracając do ogólnych wzorów :

$$P'_x = p\Sigma dy = p\int dy\,,$$

$$P''_y = p\Sigma dx = p\int dx\;;$$

zauważywszy że dla półokręgu całki powinny być wzięte między granicami : $x = -\mathrm{R}$ i $x = +\mathrm{R}$; i że równanie koła daje :

$$dy = \frac{-x dx}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}}\,,$$

będziemy mieli :

$$P'_x = p\int dy = p\int_{-\mathrm{R}}^{+\mathrm{R}} \frac{-x dx}{\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}} = p\left(\sqrt{\mathrm{R}^2 - x^2}\right)_{-\mathrm{R}}^{+\mathrm{R}} = 0\,;$$

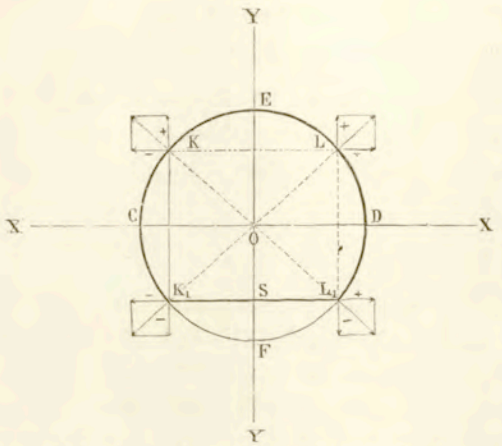
$$P''_y = p\int_{-\mathrm{R}}^{+\mathrm{R}} dx = p.2\mathrm{R} = p\mathrm{D}.$$

nadzwyczaj często w praktycznych zastosowaniach używany. Przypuszcza on że $dz = 1$; jeżeli $dz$ jest różnem od jedności, wtedy wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na połowę obrączki $C'D'C''D''$ wyrazi się :

$$P''_y = p.2Rdz = pDdz.$$

3° Rozpatrzmy następnie ten przypadek kiedy łuk $K_1CEDL_1$ (fig. 88), na który mamy znaleźć ciśnienie wypadkowe, jest większy od półokręgu.

Fig. 88.




Oczywiście będziemy mieli zawsze $P'_x = \Sigma X = 0$. Co zaś do $P''_y = \Sigma Y$, widzimy, że wyprowadziwszy z punktów $K_1$ i $L_1$ prostopadłe $K_1K$ i $L_1L$ do osi OX, łuk $K_1C$ jest symetryczny łukowi CK, a $L_1D$ łukowi DL; uważając na tych łukach punkta symetryczne względem osi $0X_1$ znajdujemy że wartości składowej Y, odpowiadające takim punktom, będą sobie równe i skierowane w przeciwną stronę; tak że dla części $K_1CK$ i $L_1DL$ nie tylko składowe X, ale nadto i składowe Y wzajemnie się równoważą. Więc wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na łuk $K_1CKELDL_1$ będzie taka sama jak i na łuk KEL, albo, co na jedno wyjdzie, na łuk mu równy $K_1FL_1$ (mając na względzie tylko samo natężenie ciśnienia, nie zaś jego kierunek), dopełniający łuk dany do całego okręgu. Szukana więc wypadkowa ostateczna $P''_y = \Sigma Y$ będzie siłą prostopadłą do cięciwy $K_1L_1$ w jej środku S, skierowaną ku stronie dodatnej osi OY i mającą za natężenie :

$$P''_y = \Sigma Y = p\,.\,K_1L_1.$$

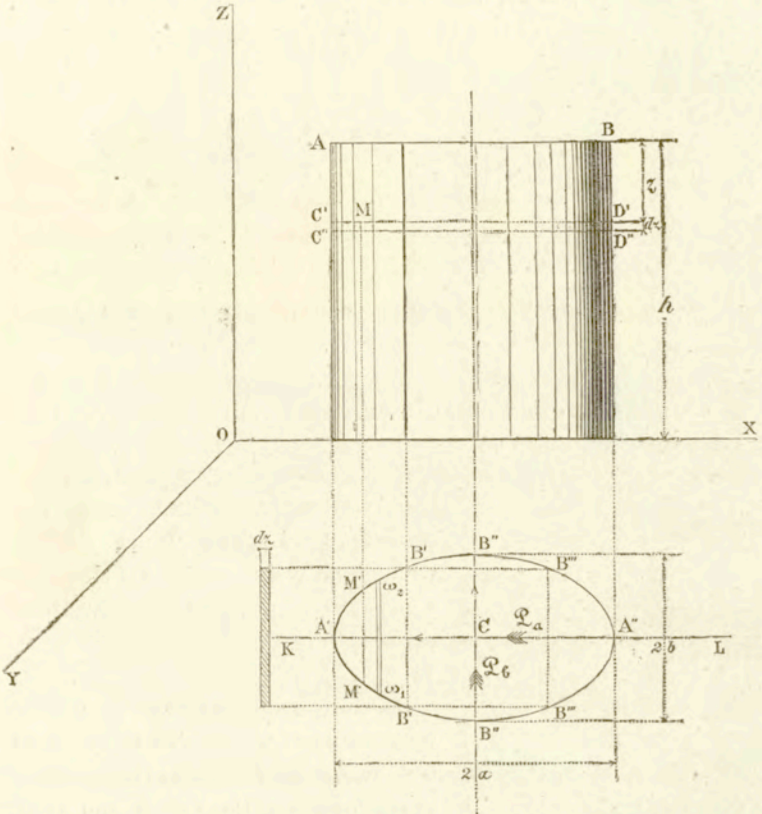
4° Gdybyśmy nareszcie uważali ciśnienie wypadkowe na cały okrąg, zobaczylibyśmy z łatwością że takowe sprowadza się do zera, to jest że *wszystkie elementarne ciśnienia wzajemnie się równoważą*. Istotnie, ciśnienie wypadkowe na łuk $K_1CEDL_1$ jest $= p.K_1L_1$ i ma znak +; ciśnienie na łuk $K_1FL_1$ jest takie samo, tylko ma znak — ; te dwa ciśnienia są skierowane podług osi OY; wypadkową ich będzie więc ich summa ; a ta ostatnia staje się zerem.

Uwaga. Rezultaty, do jakich przyprowadza nas szukanie ciśnienia wypadkowego wszystkich ciśnień normalnych i stałych, na jedność długości, dla wszystkich punktów *okręgu*, są ogólne, to jest stosują się, jak to później zobaczymy, i do krzywej płaskiej jakiejkolwiek; nadto będą one mieć miejsce bez względu czy ciśnienia (normalne i stałe) są wywierane na wewnętrzną stronę krzywej, czy też na jej stronę zewnętrzną.

**98.** II Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na ścianę prostą elliptyczną, której kierownica znajduje się na płasczyznie poziomej** XY (fig. 89). Ciśnienie w każdym punkcie ściany będzie prostopadłem do rodzącej walca przez niego przechodzącej, gdyż znajdzie się ona w płasczyznie stycznej do ściany w tym punkcie ; wszystkie więc elementarne ciśnienia będą *poziome*, i kierunek każdego z nich otrzymamy, prowadząc w danym punkcie M normalnę do ellipsy, powstałej z przecięcia ściany płasczyzną poziomą C'D' przez ten punkt poprowadzoną. Ciśnienia będąc poziomemi, mamy natychmiast dla całej ściany : $P''' = \Sigma Z = 0$.

Uważajmy teraz pewną część B'A'B' powierzchni walcowej, ograniczoną płasczyzną B'B' równoległą do płasczyzny YZ, i szukajmy wypadkowego ciśnienia na powierzchnię B'A'B', to jest szukajmy wyrażenia na $P''_y$ i $P'_x$. Otóż, z powodu symetryi tej powierzchni względem płaszczyzny KL, mamy $P''_y = \Sigma Y = 0$; tak że ciśnienie wypadkowe wszystkich ciśnień na uważaną powierzchnię wywieranych będzie siłą poziomą mającą za natężenie :

Fig. 89.




$$P'_x = \Sigma X = \Sigma p\omega_{yz} = \Sigma p(B'B'.\,dz)$$
$$= \Pi z_1(B'B'.h),$$

gdzie $z_1$ oznacza odległość od powierzchni wolnej AB, środka ciężkości prostokąta, mającego za podstawę $B'B'$, a za wysokość $h$.

Ograniczmy się na rozpatrzeniu ciśnienia wypadkowego $\mathfrak{P}$ na część obrączki $B'A'B'$, zawartej między płaszczyznami $C'D'$ i $C''D''$ odległemi od siebie na $dz$. Oznaczając przez $p$ ciśnienie na jedność powierzchni w jakimkolwiek punkcie tej obrączki, będziemy mieli :

$$\mathfrak{P} = p(B'B'.dz);$$

wartość $\mathfrak{P}$ dojdzie do swego maximum, gdy $B'B'$ stanie się $B''B''$; maleje ona w miarę zwiększania się łuku, i staje się zerem gdy dojdziemy do punktu $A''$, to jest dla całej obrączki. Jeśli osie ellipsy $B''B''$ i $A'A''$ oznaczymy przez $2b$ i $2a$, $dz$ weźmiemy za *jedność* (to jest przypuścimy że ciśnienie $p$ jest stałe we wszystkich punktach obrączki mającej *jedność* za wysokość), a ciśnienie wypadkowe wywierane równolegle do osi OX, czyli do wielkiej osi ellipsy, na połowę obwodu $B''A'B''$ ellipsy, nazwiemy $\mathfrak{P}_a$, to otrzymamy :

(1)
$$\mathfrak{P}_a = p\,.\,2b;$$

kierunek tego ciśnienia spotyka ścianę w punkcie $A'$.

Zauważmy że gdybyśmy, zamiast ciśnień wywieranych na połowę $B''A'B''$, rozpatrywali ciśnienia na inną połowę $A'B''A''$ tejże ellipsy, tobyśmy mieli $P'_x = \Sigma X = 0$; tak że oznaczając przez $\mathfrak{P}_b$ ciśnienie wypadkowe, wywierane równolegle do małej osi ellipsy na połowę $A'B''A''$, mamy :

(2)
$$\mathfrak{P}_b = p\,.\,2a.$$

Otoż, ponieważ $a > b$, więc $\mathfrak{P}_b > \mathfrak{P}_a$; zatem :

*Przy ścianach walcowych, o profilu elliptycznym, ciśnienie wypadkowe, przy równym obwodzie, jest większe w kierunku mniejszej osi ellipsy, aniżeli w kierunku większej jej osi*; czyli że *ciśnienie poprzeczne jest większe od ciśnienia podłużnego.*

Różnica tych ciśnień :

$$\mathfrak{P}_b - \mathfrak{P}_a = 2p\,(a - b),$$

będąc proporcyonalną do $a-b$, tem jest wiekszą, im ellipsa ma większy mimośród; więc im więcej powierzchnia elliptyczna będzie się różnić od ściany walcowej obrotowej, tem większem będzie ze strony cieczy usiłowanie do nadania ścianie elliptycznej tej ostatniej formy.

Dla profilu kołowego mamy: $a=b$; zkąd $\mathfrak{P}_a=\mathfrak{P}_b$; to jest: że ciśnienie wypadkowe na ścianę walcową obrotową jest jedno i to samo dla każdego kierunku średnicy, podług której ciśnienie to jest uważane.

Ze wzorów (1) i (2) wypada stosunek:

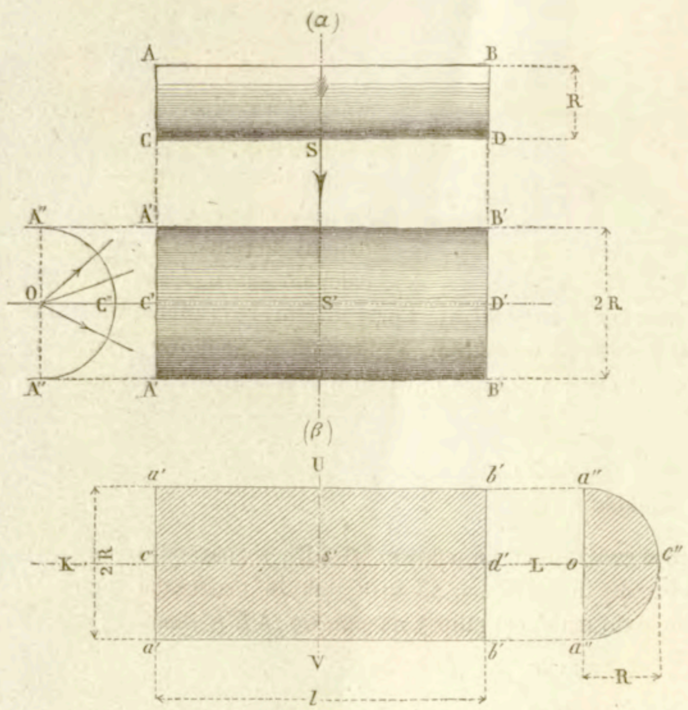
$$(3) \qquad \frac{\mathfrak{P}_a}{\mathfrak{P}_b}=\frac{b}{a}; \quad \text{zkąd} \quad \mathfrak{P}_a=\frac{b}{a}\mathfrak{P}_b; \quad \mathfrak{P}_b=\frac{a}{b}\mathfrak{P}_a.$$

co pokazuje że: *ciśnienia wywierane podług dwóch osi ellipsy są w stosunku odwrotnym do długości tych osi.*

**99.** Przejdźmy teraz do ścian walcowych poziomych, i w tym przypadku rozpatrzmy następujący przykład:

III Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na ścianę walcową obrotową której oś jest poziomą, równoległą do płasczyzny** XY (fig. 90).

Fig. 90.




Przypuśćmy że uważana ściana jest równą połowie całego walca, i że powierzchnia wolna cieczy AB zlewa się z płasczyzną poziomą poprowadzoną przez jego oś O.

Boczne ściany naczynia, spojone wzdłuż łuków A′C′A′ i B′D′B′ ze ścianą walcową, mogą być płaskie lub krzywe; w tym ostatnim razie mają one zwykle formę $\frac{1}{4}$ powierzchni sferycznej, promienia równego promieniowi R ściany walcowej, albo też $\frac{1}{2}$ odcinka sferycznego, wziętego na sferze innego jakiegokolwiek promienia R′ większego od R. Ale mając na celu znalezienie ciśnienia wywieranego tylko na część walcową naczynia, bocznych ścian jego rozpatrywać nie będziemy; czyli będziemy uważać daną nam powierzchnię jako zawartą między dwiema pionowemi płasczyznami poprowadzonemi przez A′A′ i B′B′ na odległości od siebie równéj $l$.

Elementarne ciśnienia w rozmaitych punktach powierzchni walcowej, będąc wszystkie zawarte w płasczyznach prostopadłych do osi obrotu O, to jest równoległych do płasczyzny ZY, nie dadzą składowych X; zatem $P'_x=\Sigma X=0$ sama przez się; będziemy mieli nadto $P''_y=\Sigma Y=0$; więc ostateczna wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na scianę będzie siłą pionową mającą za natężenie:

$$P_z''' = \Sigma Z = \Sigma p\omega_{xy} = \Pi \Sigma z\omega_{xy}\,.$$

Wartość tego natężenia znajdziemy rzucając ścianę na płaszczyznę XY, wystawiając (fig. 6) na rzucie $a'b'b'a'$ powierzchnię, której rzędne wyrażałyby w każdym punkcie rzutu ciśnienie istniejące w odpowiednim mu punkcie na danej ścianie, i szukając następnie objętości tak otrzymanej figury. Widocznem jest że tą figurą będzie dany walec, tylko obrócony stroną CD do góry; albowiem dla wszystkich punktów leżących na prostych $a'b'$ ciśnienie jest 0; dla punktów linji $c'd'$ jest ono $\Pi R$; a dla punktów zawartych między $a'b'$ i $c'd'$, ciśnienie to wyrazi się przez odpowiednie im rzędne łuku $a''c''a''$. Natężenie szukanej wypadkowej $P_z'''$ będzie więc równem ciężarowi cieczy zawartej w danym walcu ABCD, czyli:

$$P_z''' = \Pi \frac{\pi R^2 l}{2}\,;$$

punkt zaś przyczepienia tej siły znajdzie się na prostej $c''o$, wynikłej z przecięcia się dwóch płaszczyzn symetryi KL i UV; tak że kierunek wypadkowej $P_z'''$ przebija ścianę w punkcie (S, S').

Uwaga. W przypuszczeniu że od stron (AC, A'C'A') i (BD, B'D'B'), ściana walcowa jest ograniczoną dwiema ścianami płaskiemi i pionowemi, ciśnienie wypadkowe na wszystkie ściany tak utworzonego naczynia będzie takie same, jak ciśnienie wypadkowe na samą tylko powierzchnię walcową; albowiem ciśnienia elementarne na każdą ze ścian bocznych, będąc równoległemi do osi OX, dadzą dla każdej z nich jednę wypadkowę; summa tych dwóch wypadkowych sprowadzi się do zera, gdyż będą one sobie równe i przeciwnego kierunku.

---

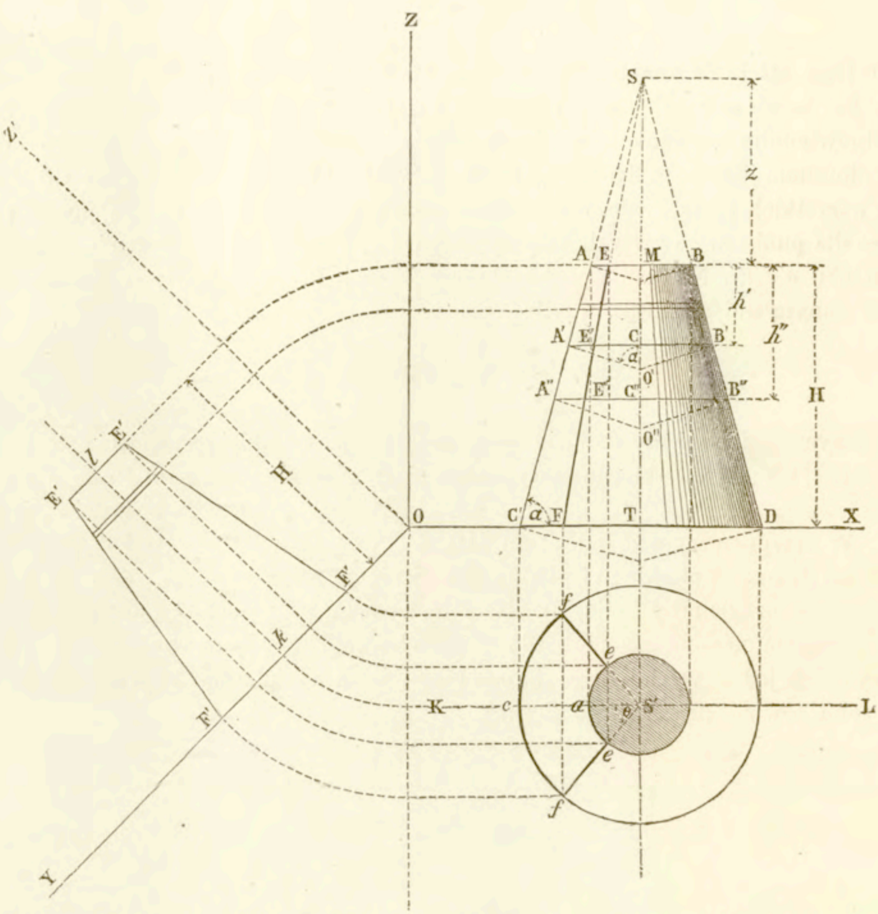
## II. ŚCIANY STOŻKOWE.

100. I Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na ścianę stożkową obrotową, której dolną podstawą jest większe koło, a górną — mniejsze.**

Niech naczynie ma kształt ściętego stożka ABCD (fig. 91), i niech AB będzie powierzchnią wolną zawartej w niem cieczy. Idzie o znalezienie ciśnienia wypadkowego na część ściany: (AECF *cfeaefc*) utworzoną obrotem, około osi pionowej (ST, S'), pod kątem $=\theta$, boku AC trapezu AMCT.

Ponieważ ciśnienia wywierane przez ciecz na rozmaite punkta ściany są do niej normalne, ich kierunek przecina oś obrotu pod kątem $\alpha$, równym kątowi jaki czyni rodząca AC z płaszczyzną poziomą. Normalne te, uważane dla punktów jednego i tegoż równoleżnika, np. A′B′, utworzą stożek

Fig. 91.




obrotowy A′B′O′, mający równoleżnik A′B′ za podstawę, a za wierzchołek punkt O′, znajdujący się na osi ST i wyznaczony związkiem :

$$C'O' = A'C' \frac{1}{\operatorname{stycz}\alpha}.$$

Rodzące wszystkich stożków otrzymanych dla rozmaitych równoleżników czynią z osią obrotu (ST, S′) kąt stały $\alpha$; wszystkie więc stożki utworzone normalnemi do ściany będą do siebie podobne (*).

---

(*) Wiemy że ciśnienie w danym punkcie zależy od jego wysokości względem powierzchni wolnej AB; we wszystkich więc punktach jednego i tegoż samego równoleżnika ciśnienie na jedność powierzchni będzie jednakowe, tak że dla każdego równoleżnika rozpatrywanego z osobna, długość normalnej zawarta między ścianą a osią obrotu (jak np. długość A′O′) może być uważaną za *proporcyonalną* do ciśnienia pod jakiem się znajdują rozmaite jego punkta (wyjąwszy równoleżnik AB leżący na powierzchni wolnej, gdzie ciśnienie jest zero). Ale przechodząc od jednego równoleżnika A′B′ do innego jakiegokolwiek A″B″, *skala* musiałaby być zmienioną; gdyż długości A′O′ i A″O″, odniesione do jednej i tejże samej skali, nie są proporcyonalne do ciśnienia wywieranego na równoleżnikach A′B′ i A″B″, albowiem nie są one proporcyonalne do wysokości $h'$ i $h''$.

Zadanie nasze polega na znalezieniu trzech sił : $P'_x$, $P''_y$ i $P'''_z$.

Otóż, widzimy natychmiast że $P''_y = \Sigma Y = 0$, albowiem ściana jest symetryczną względem płasczyzny KL prostopadłej do osi 0Y, i rozmaite walce rzucające, równolegle do tej osi, elementa ściany na

---

I rzeczywiście, mamy najprzód :

$$A'C' = A'O' \,\mathrm{wst}\,\alpha; \quad A''C'' = A''O'' \,\mathrm{wst}\,\alpha;$$

zkąd, oznaczając :

$$A'C' = r', \quad A'O' = N'; \quad A''C'' = r'', \quad A''O'' = N'',$$

otrzymujemy :

(1) $$\frac{N'}{N''} = \frac{r'}{r''}.$$

Otóż, stosunek $\frac{r'}{r''}$ nie jest równy stosunkowi $\frac{h'}{h''}$, gdyż trójkąty $SA'C'$ i $SA''C''$ dają :

(2) $$\frac{r'}{r''} = \frac{z + h'}{z + h''};$$

a więc długości normalnych nie są proporcyonalne do wysokości odpowiednich im równoleżników.

Gdybyśmy chcieli wyrazić stosunek $\frac{h'}{h''}$ w funkcyi promieni równoleżników $A'B'$ i $A''B''$, mielibyśmy z trójkątów $AA'E'$ i $AA''E''$ :

$$\frac{AE'}{AE''} = \frac{A'E'}{A''E''};$$

zkąd, kładąc $AM = r$, wyprowadzamy :

(3) $$\frac{h'}{h''} = \frac{r' - r}{r'' - r}.$$

Uwaga. Stosunek $\frac{r'}{r''}$ może być przedstawiony pod inną formą, wyrażając $z$ w funkcyi promieni górnej i dolnej podstawy ściany i jej wysokości H. Oznaczając $AM = r$, $CT = R$, będziemy mieli :

$$\frac{z}{z + H} = \frac{r}{R},$$

zkąd znajdziemy :

$$z = \frac{Hr}{R - r}.$$

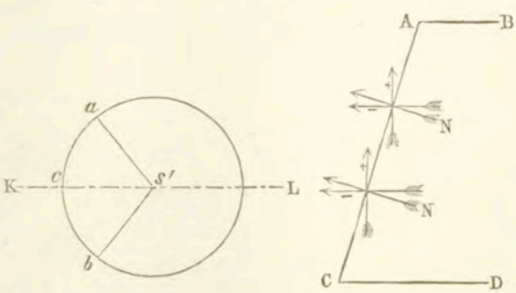
Po wstawieniu tej wartości w wyrażenie (2), otrzymujemy :

$$\frac{N'}{N''} = \frac{r'}{r''} = \frac{\frac{Hr}{R-r} + h'}{\frac{Hr}{R-r} + h''} = \frac{\left(\frac{h'}{h''} + \frac{Hr}{h''(R-r)}\right)h''}{\left(1 + \frac{Hr}{h''(R-r)}\right)h''} = \frac{\frac{h'}{h''}\left(1 + \frac{Hr}{h''(R-r)} \cdot \frac{h''}{h'}\right)}{1 + \frac{Hr}{h''(R-r)}} = \frac{h'}{h''} \cdot \frac{1 + \frac{Hr}{h''(R-r)} \cdot \frac{h''}{h'}}{1 + \frac{Hr}{h''(R-r)}};$$

co pokazuje, że stosunek $\frac{N'}{N''}$ będzie równy stosunkowi $\frac{h'}{h''}$, jeżeli $h' = h''$; a ten warunek pociąga za sobą, na mocy (2), równość promieni : $r' = r''$, co przy ścianach stożkowych istnieć nie może.

płaszczyznę ZX, przecinają uważaną powierzchnię dwa razy; tak że rzuty przedniej i tylnej jej części zupełnie się zakrywają na tej płaszczyznie i stanowią jednę figurę AECF.

Fig. 92.




Zresztą, moglibyśmy się przekonać wprost że $P_y''=0$, rozkładając ciśnienie wywierane na rozmaite punkta jakiegokolwiek równoleżnika A″B″ na trzy ciśnienia składowe podług trzech osi; zobaczylibyśmy wtedy, że dla wszystkich punktów łuku (fig. 92) zawartych między $a$ i $c$, składowa Y jest ze znakiem —; dla punktów położonych między $b$ i $c$, Y ma znak +; zaś w punkcie $c$, leżącym w płaszczyznie symetryi KL, Y będzie 0. Co się tyczy składowych równoległych do osi OX, wszystkie one są skierowane ku odjemnej stronie tej osi, tak że $P'_x=\Sigma X$ będzie miało znak —; składowe zaś równoległe do osi OZ wszystkie są skierowane w górę, to jest $P'''_z=\Sigma Z$ będzie ze znakiem +.

Pozostaje znaleźć natężenie dwóch sił : $P'_x$ i $P'''_z$. Zacznijmy od siły poziomej $P'_x$.

Wiemy z § 91 że natężenie składowej, podług osi OX, ciśnienia całkowitego wywieranego na powierzchnię krzywą, równem jest całkowitemu ciśnieniu na ścianę płaską pionową, powstałą z rzutu ściany krzywej na płaszczyznę YZ. Szukana więc siła $P'_x$ będzie, co do natężenia, równą wypadkowemu ciśnieniu na trapez EE′F′F″ (fig. 91), które wyznaczonem być może: bądź za pomocą wzoru podanego w § 58, bądź też sposobem geometrycznym, uważając objętość wielościanu, mającego za dolną podstawę trapez E′E′F′F′, za dwie boczne ściany — dwa trójkąty prostokątne wystawione na E′F″ (jednym bokiem trójkąta będzie bok trapezu E′F′, drugim — prostopadła F′F″ do trapezu wystawiona w punkcie F′ i równa wysokości H, nareszcie trzecim bokiem będzie prosta łącząca punkt E′ z punktem F″), ograniczonego od strony F′F′ prostokątem prostopadłym do płaszczyzny trapezu, i mającym F′F′ za podstawę, a H za wysokość; nareszcie górną podstawą wielościanu będzie trapez, rzucający się na płaszczyznę papieru podług trapezu E′E′F′F′, i którego jeden bok zlewa się z bokiem E′E′, a drugi, do niego równoległy, będzie linją łączącą punkta F″, położone na odległości H od dolnej podstawy wielościanu. Widocznem jest że siła $P'_x$ będzie się znajdować w płaszczyznie symetryi KL, i że jej kierunek przebije ścianę stożkową w punkcie leżącym na linji AC.

Przechodząc do wartości siły pionowej: $P'''_z=\Sigma Z=p\omega_{xy}$, która również będzie położoną w płaszczyznie KL, dostatecznem będzie powiedzieć że siłę $P'''_z$ otrzymamy, uważając rzut powierzchni stożkowej na płaszczyznę XY, i wyprowadzając w każdym punkcie rzutu prostopadłę, którejby długość

---

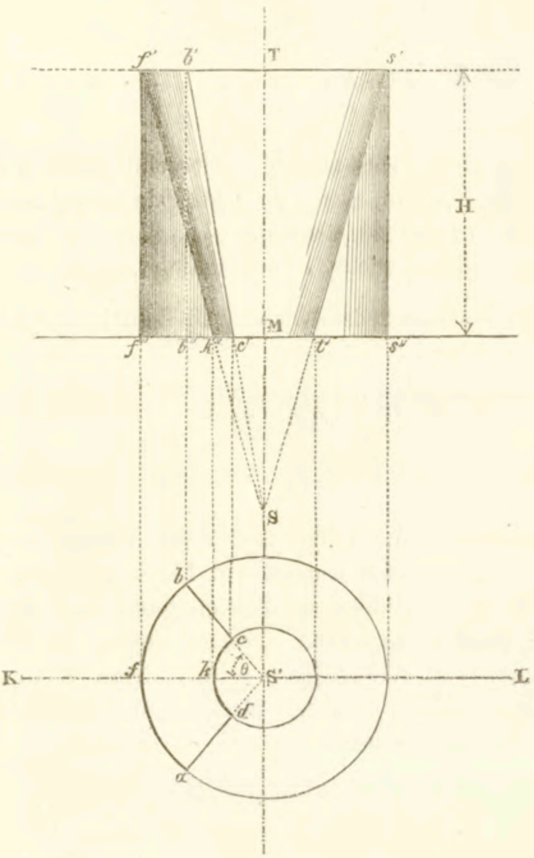
Ale, biorąc pod uwagę wyrażenie :

$$\frac{N'}{N''}=\frac{r'}{r''}=\frac{\dfrac{h'}{h''}+\dfrac{Hr}{h''(R-r)}}{1+\dfrac{Hr}{h(R-r)}},$$

widzimy natychmiast, że równość stosunków $\frac{N'}{N''}$ i $\frac{h'}{h''}$ będzie mieć miejsce, jeżeli $\frac{Hr}{h''(R-r)}=0$, co wymaga żeby $r=0$; więc długość normalnych będzie proporcyonalną do ciśnienia w odpowiednich im punktach wtedy, jeżeli powierzchnia wolna cieczy sprowadza się do jednego punktu S, to jest jeśli ciecz będzie całkiem napełniać naczynie stożkowe. Taki wypadek był do przewidzenia z podobieństwa trójkątów SA′C′ i SA″C″.

wyrażała ciśnienie w odpowiednich punktach ściany. Wypadnie zatem uważać objętość figury wystawionej na trapezie kołowym *abcd* (fig. 93), i utworzonej z powierzchni walca prostego mającego łuk *ab* za kierownicę i H za wysokość; z dwóch prostokątnych trójkątów $b'b''c'$ tejże samej wysokości H, — których podstawy będą odpowiednio proste *ad* i *bc*; a ich boki — dwie rodzące skrajne $b'b''$ powierzchni walcowej, rzucające się w punktach *a* i *b*; nareszcie powierzchnia zamykająca naszą figurę będzie to powierzchnia stożkowa utworzona obiegiem prostej ($f'k'$, $fk$) po łuku ($afb$, $f'b'$)— to jest po górnej podstawie powierzchni walcowej — i po łuku ($dkc$, $k'c'$), leżącym na płaszczyźnie poziomej. Przecięcia tej powierzchni płaszczyznami poziomemi dadzą szereg łuków mających środek w punkcie S', i przedstawiających miejsce geometryczne punktów jednakowego ciśnienia na danej ściani; a ciężar cieczy zawartej w objętości otrzymanej figury wyrażać będzie natężenie siły $P_z'''$.

Fig. 93.



Gdybyśmy, zamiast ciśnienia wypadkowego na część ściany stożkowej odpowiadającej kątowi $\theta$, szukali ciśnienia na całą powierzchnię stożka, to jest uważali zupełny obrót trapezu AMCT (fig. 91), łatwobyśmy zobaczyli, że oprócz $P_y''=0$, mielibyśmy jeszcze $P'_x=0$; gdyż tak dla $P_y''$ jako też i dla $P'_x$, rzuty ściany stożkowej na płaszczyznę XZ lub YZ wzajemnie się zakrywają. Pozostałaby więc jedna tylko siła pionowa $P_z'''$, która wyraziłaby ciśnienie wypadkowe ostateczne na taką ścianę.

Otóż, ponieważ wszystkie składowe Z są skierowane z dołu do góry, ich wypadkowa $P_z'''=\Sigma Z$ również będzie miała ten kierunek, i jej punkt przyczepienia będzie się znajdował na osi symetryi (ST, S'). Co zaś do natężenia tej siły, nie trudno jest widzieć że wyrazi się ono ciężarem cieczy zawartej w objętości V równej różnicy dwóch objętości (fig. 93) :

1) *Objętości* V' *walca obrotowego* $f's'f''s''$, mającego za podstawę — dolną podstawę danej nam ściany stożkowej, a za wysokość — wysokość H tej ściany ;

2) *Objętości* V'' *ściętego stóżka* $f's'k't'$ *obrotowego*, tejże samej wysokości H. Stożek ten jest nic innego jak stożek fig. 91, tylko obrócony górną swą podstawą AB do dołu ; tak że na fig. 93 mamy :

$$k'M = AM = r; \quad f'T = CT = R.$$

Natężenie więc wypadkowej $P_z'''$ może być wyrażonem w funkcyi ilości : $r$, R, H i ciężaru gatunkowego $\Pi$ cieczy jaką uważamy.

I tak, ponieważ objętość walca jest :

$$V' = \pi R^2 H,$$

a objętość ściętego stożka :

$$V'' = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr);$$

zatem, wartość ciśnienia wypadkowego na ścianę stożkową zamkniętą będzie :

$$(\alpha) \qquad P_z''' = \Pi V = \Pi . \pi R^2 H - \Pi . \frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr).$$

Uwaga. Jeżeli, zostawiając R stałem, będziemy powiększać $r$, to jest zbliżać powierzchnię stożkową do powierzchni walcowej, nawias we wzorze ($\alpha$) będzie się zwiększać, a więc $P_z'''$ będzie się zmniejszać; tak że w granicy, kiedy $r = R$, otrzymamy : $P_z''' = 0$; to jest że ciśnienie wypadkowe na całą boczną ścianę naczynia walcowego sprowadza się do zera, co już wiemy z poprzedniego.

Jeżeli $r > R$, to jest jeżeli górna podstawa stóżkowego naczynia będzie większą od dolnej, wartość na $P_z'''$ staje się odjemną; tak np. kładąc $r = R + a$, znajdujemy :

$$P_z''' = \Pi . \pi R^2 H - \Pi . \frac{1}{3}\pi H (3R^2 + 3Ra + a^2) = - \Pi . \frac{1}{3}\pi H (3Ra + a^2).$$

Przypadek takiej ściany będzie rozpatrzonym niżej.

**101**. Kwestya wypadkowego ciśnienia na ściany stożkowe może być traktowaną analitycznie, w sposób podobny temu, jakiegośmy używali w § 94 przy ścianach walcowych. I tak, prowadząc przez oś stożka szereg płasczyzn, podzielimy powierzchnię stożkową na nieskończenie małe powierzchnie trapezowe, których wysokość może być uważaną za równą rodzącej stożka, zaś ich podstawy będą $dS$ i $ds$, — gdzie $dS$ oznaczać będzie element łuku stanowiącego dolną podstawę ściany, a $ds$ — element górnej jej podstawy. Tym sposobem powierzchnię stożkową zastąpimy powierzchnią piramidy i sprowadzimy zadanie do szukania ciśnienia na ściany płaskie.

Wzory dające ciśnienie wypadkowe i punkt jego przyczepienia w razie ściany płaskiej trapezowej, której górna podstawa znajduje się na powierzchni wolnej cieczy są, jak wiadomo z § 58, następujące :

$$P = \Pi w \sin\alpha \frac{1}{6} h^2 (a + 2b),$$

$$x' = \frac{1}{2} h \frac{a + 3b}{a + 2b};$$

w których : $a$ oznacza górną podstawę trapezu,

$b$ » dolną » »,

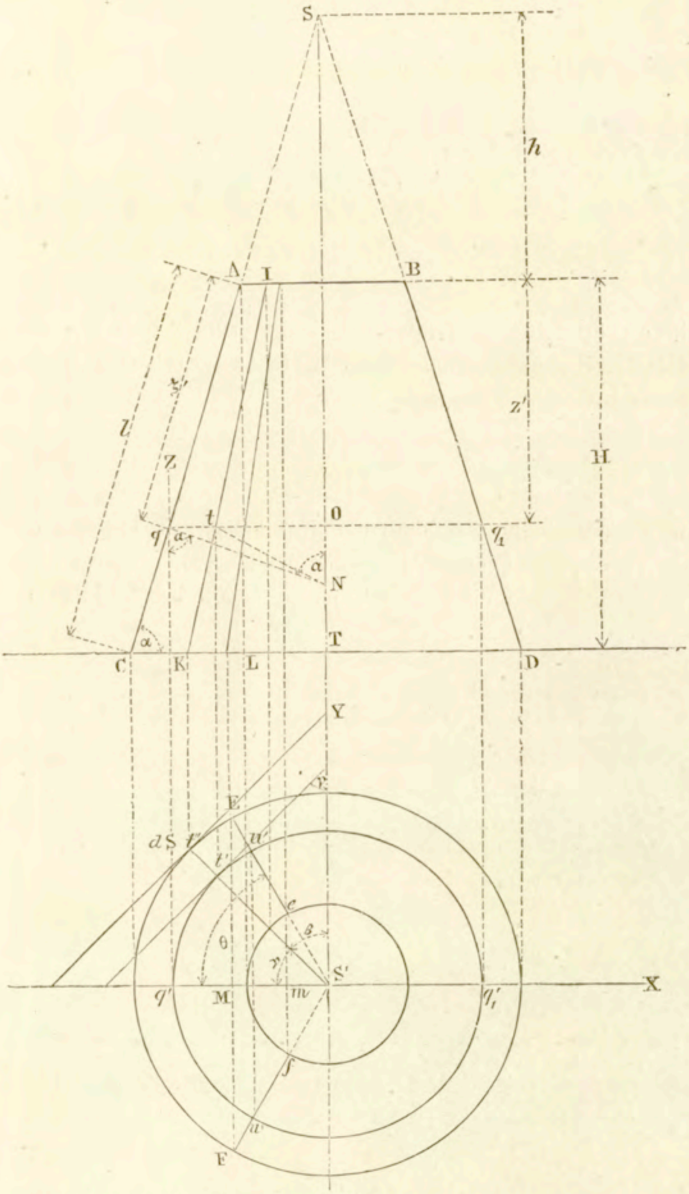
$h$ » wysokość trapezu,

$\alpha$ » kąt jaki płasczyzna trapezu czyni z poziomem,

$x'$ » odciętę środka ciśnienia, liczoną od powierzchni wolnej, prostopadle do podstawy $a$.

Uważając jeden z elementarnych trapezów na które ściana stożkowa została podzieloną, możemy do niego zastosować wzory tyczące się trapezu płaskiego; oznaczając zatem przez $dP$ całkowite ciśnienie wywierane na element ściany stożkowej, przez $l$ długość jej rodzącej, a przez $\zeta' = Aq$ odległość od powierzchni wolnej AB (fig. 94) punktu przyczepienia $q$ ciśnienia $dP$, będziemy mieli :

Fig. 94.



$$dP = \Pi \,\mathrm{wst}\,\alpha\, \frac{1}{6} l^2 (ds + 2dS)\,,$$

$$\zeta' = \frac{1}{2} l \frac{ds + 3dS}{ds + 2dS}\,;$$

Te wzory mogą być przekształcone, wyrażając $ds$ w funkcyi promieni górnej i dolnej podstawy stożka ; i tak z proporcyi :

$$ds : dS = r : R,$$

mamy :

$$ds = dS \frac{r}{R}\,;$$

w skutek czego powyższe wyrażenia zamienią się na :

$$(1) \qquad dP = \Pi\,\mathrm{wst}\,\alpha\, \frac{1}{6} l^2 dS \frac{r + 2R}{R}\,,$$

$$(2) \qquad \zeta' = \frac{1}{2} l \frac{r + 3R}{r + 2R}\,.$$

Uważając elementarny trapez wystawiony na rodzącej IK, ciśnienie $dP$, jakie ten trapez ponosi, będzie przyczepionem w punkcie $(t, t')$ równoleżnika $(qq_1, q'q'_1)$ i skierowanem wedle normalnej $(tN, t'S')$. Ażeby mieć składowe : $(dP)_x$, $(dP)_y$ i $(dP)_z$ tego ciśnienia, rozkładamy $dP$ najprzód na dwie składowe : jednę pionową $(dP)_z$, skierowaną podług osi Z, a drugą poziomą $(dP)_0$, skierowaną według promienia równoleżnika $qq_1$ i mającą za swe rzuty $t'O$ i $t'S'$ ; poczem tę ostatnią składową rozłożymy na dwie inne, skierowane podług osi Y i X. Otrzymamy zatem :

$$(a) \qquad (dP)_z = dP \,\mathrm{dos}\,\alpha,$$

$$(dP)_0 = dP \,\mathrm{wst}\,\alpha.$$

Natężenie składowej $(dP)_0$ jest proporcyonalnem do długości $t's'$. Oznaczając kąty linji $t'S'$ z osiami Y i X przez $\beta$ i $\gamma$, będziemy mieli :

$$(b) \qquad (dP)_y = (dP)_0 \,\mathrm{dos}\,\beta = dP\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\beta,$$

$$(c) \qquad (dP)_x = (dP)_0 \,\mathrm{dos}\,\gamma = dP\,\mathrm{wst}\,\alpha\,\mathrm{dos}\,\gamma.$$

1° Rozpatrzmy najprzód składowe równoległe do osi X, to jest szukajmy wartości $P_x' = \Sigma X$.

Po wstawieniu (1) w wyrażenie ($c$), mamy:

$$(dP)_x = X = \Pi \mathrm{wst}^2 \alpha \frac{1}{6} l^2 dS \frac{r + 2R}{R} \cos\gamma;$$

a że :

$$l \,\mathrm{wst} \alpha = H,$$

zatem :

$$(dP)_x = X = \Pi \frac{1}{6} H^2 \frac{r + 2R}{R} dS \cos\gamma.$$

Otóż $\gamma$ jest to kąt jaki styczna w punkcie $t''$ do dolnej podstawy CD stożka czyni z osią Y; więc $dS\cos\gamma$ będzie rzutem na tę oś dolnej podstawy $dS$ elementarnego trapezu IK; wskutek tego, oznaczając przez $X$ i $Y$ spółrzędne rozmaitych punktów koła CD, mamy :

$$(dP)_x = X = \Pi \frac{1}{6} H^2 \frac{r + 2R}{R} dY.$$

Wszystkie składowe $(dP)_x$ są przyczepione w rozmaitych punktach równoleżnika $(qq_1, q'q_1')$; jeśli więc ograniczymy się rozpatrywaniem stożkowej powierzchni zawartej w kącie $ES'F = 2\theta$, a cięciwy EF i $ef$ jej podstaw oznaczymy przez C i $c$, to wypadkowe ciśnienie $P'_x$ na tę ścianę będzie miało za wyrażenie (§94) :

$$P'_x = \Sigma X = \Sigma (dP)_x = \Pi \frac{1}{6} H^2 \frac{r + 2R}{R} C.$$

Otóż, stosunek $\frac{r+2R}{R}$ może być zastąpiony innym wyrazem. W samej rzeczy, mamy :

$$\frac{EM}{R} = \frac{em}{r} = \mathrm{wst}\theta,$$

zkąd :

$$2EM : 2em = R : r;$$

czyli :

$$C : c = R : r,$$

a to nam daje :

$$\frac{2C + c}{C} = \frac{2R + r}{R}.$$

Po wstawieniu tej wartości w wyrażenie na $P'_x$, to ostatnie przyjmie postać :

$$P'_x = \Sigma X = \Pi \frac{1}{6} H^2 (c + 2C); \qquad \text{(A)}$$

co pokazuje że ciśnienie wypadkowe na ścianę stożkową, uważane w kierunku osi X, równem jest całkowitemu ciśnieniu wywieranemu na pionowy trapez, powstały z rzutu ściany stożkowej na płaszczyznę YZ.

Więc, bez posiłkowania się fundamentalnem twierdzeniem ścian krzywych, podanem w § 90, otrzymaliśmy drogą analityczną wypadek, o którym była już mowa poprzednio.

Szukajmy teraz punktu przyczepienia siły $P'_x$.

Jak powiedzieliśmy, ciśnienia na elementa ściany stożkowej są wszystkie położone w płasczyznie równoleżnika $(qq_1, q'q'_1)$, i przyczepione w rozmaitych punktach łuku $u't'q'u'$, którego promień $\rho$ wyznaczy się z proporcyi :

$$\rho^2 : r^2 = (h + z')^2 : h^2;$$

gdzie :

$$h = \mathrm{H}\frac{r}{\mathrm{R} - r},$$

$$z' = \zeta' \operatorname{wst}\alpha = \frac{1}{2} l \operatorname{wst}\alpha \frac{r + 3\mathrm{R}}{r + 2\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\mathrm{H}\frac{r + 3\mathrm{R}}{r + 2\mathrm{R}}.$$

Jeżeli oznaczymy przez $d\sigma$ element łuku $u't'q'u'$, zawarty między płasczyznami poprowadzonemi przez oś (ST, S') pod kątem $d\theta$, i odcinającemi na podstawach stożka łuki $ds$ i $d\mathrm{S}$, to składowa $(d\mathrm{P})_x$ ciśnienia na trapez IK może być przedstawioną pod inną formą, używając proporcyi :

$$d\sigma : d\mathrm{S} = \rho : \mathrm{R},$$

z której znajdujemy :

$$d\mathrm{S} = d\sigma\frac{\mathrm{R}}{\rho},$$

i wskutek czego otrzymamy :

$$(c') \qquad (d\mathrm{P})_x = \Pi\frac{1}{6}\mathrm{H}^2\frac{r + 2\mathrm{R}}{\rho}d\sigma \operatorname{dos}\gamma.$$

Biorąc płasczyznę równoleżnika $(qq_1, q'q'_1)$ za płasczyznę XY, i oznaczając spółrzędne rozmaitych jego punktów przez $\zeta$ i $\eta$, mielibyśmy :

$$d\sigma \operatorname{dos}\gamma = d\eta;$$

różniczkując równanie :

$$\zeta^2 + \eta^2 = \rho^2,$$

i biorąc moment ciśnienia $(d\mathrm{P})_x$ względem osi S'Y, otrzymalibyśmy wyrażenie :

$$\mathfrak{M}_y(d\mathrm{P})_x = \Pi\frac{1}{6}\mathrm{H}^2\frac{r + 2\mathrm{R}}{\rho}\zeta \cdot \frac{-\zeta d\zeta}{\pm\sqrt{\rho^2 - \zeta^2}} = \Pi\frac{1}{6}\mathrm{H}^2\frac{r + 2\mathrm{R}}{\rho}\cdot\frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{\rho^2 - \zeta^2}},$$

z którego należałoby wziąć całkę na przestrzeni łuku $u'q'u'$; to jest oznaczając przez $\lambda$ długość łuku $u'q'u'$ wypadłoby zcałkować to wyrażenie między granicami :

$$-\frac{\lambda}{2} \text{ i } +\frac{\lambda}{2}.$$

Ale summę momentów ciśnień składowych $(d\mathrm{P})_x$ możemy otrzymać inną drogą, której używaliśmy już przy ścianach walcowych, i gdzie $\sqrt{\ }$ wchodzić nie będzie. I tak, zakładając łuk $q't' = \sigma$, będziemy mieli (§ 94):

$$\zeta = \rho \operatorname{dos} \frac{\sigma}{\rho},$$

$$d\sigma = \rho d \frac{\sigma}{\rho},$$

$$\operatorname{dos}\gamma = \operatorname{dos} \frac{\sigma}{\rho};$$

w skutek czego moment, względem osi S′Y, elementarnego ciśnienia ($c'$) wyrazi ę:

$$\mathfrak{M}_y(dP)_x = \Pi \frac{1}{6} H^2 \frac{r+2R}{\rho} \rho d \frac{\sigma}{\rho} \operatorname{dos} \frac{\sigma}{\rho} \cdot \rho \operatorname{dos} \frac{\sigma}{\rho} = \Pi \frac{1}{6} H^2 (r + 2R) \rho \operatorname{dos}^2 \frac{\sigma}{\rho} d \frac{\sigma}{\rho};$$

więc, oznaczając przez $x'$ odciętę punktu przyczepienia ciśnienia wypadkowego $P'_x = \Sigma (dP)_x$, będziemy mieli:

$$x'P'_x = \Sigma \mathfrak{M}_y(dP)_x = \Pi \frac{1}{6} H^2 (r+2R) \rho \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \operatorname{dos}^2 \frac{\sigma}{\rho} \cdot d \frac{\sigma}{\rho}.$$

Otóż jeśli cięciwę $u'u'$ łuku $u'q'u'$ nazwiemy literą $\chi$, a jej odległość od osi S′Y literą $\delta$, to z § 94, gdzie podobna całka była już rozpatrzoną, znajdziemy że:

$$\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \operatorname{dos}^2 \frac{\sigma}{\rho} d \frac{\sigma}{\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\chi\delta}{\rho^2} \right);$$

zatem:

$$x' = \frac{\Pi \frac{1}{6} H^2 (r + 2R) \rho \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\chi\delta}{\rho^2} \right)}{\Pi \frac{1}{6} H^2 \frac{r+2R}{R} C};$$

mianownik może być przekształcony, zważywszy że:

$$C : \chi = R : \rho,$$

zkąd:

$$C = \frac{\chi R}{\rho};$$

i poprzednie wyrażenie zamieni się na:

$$x' = \frac{\Pi \frac{1}{6} H^2 (r + 2R) \rho \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\chi\delta}{\rho^2} \right)}{\Pi \frac{1}{6} H \frac{r+2R}{R} \frac{\chi R}{\rho}}$$

$$= \frac{\rho^2}{2\chi} \left( \frac{\lambda}{\rho} + \frac{\chi\delta}{\rho^2} \right)$$

$$= \frac{\rho\lambda}{2\chi} + \frac{\delta}{2};$$

tak że ostatecznie :

(A) $$x' = \frac{1}{2}\left[\delta + \frac{\rho\lambda}{\chi}\right].$$

wyrażenie takie same jak to któreśmy otrzymali przy ścianach walcowych.

Znajomość wartości $x'$ wyznacza najzupełniej punkt przyczepienia siły $P'_x$, gdyż wiadomem jest *a priori* że $y' = 0$, to jest że ta siła będzie skierowaną podług osi X, czyli podług prostej $q'S'$.

2°. Przechodzimy do szukania wartości $P'''_z = \Sigma Z = \Sigma(dP)_z$ i punktu przyczepienia tej siły.

Jeżeli weźmiemy wzór na $dP$ nieprzekształcony :

$$dP = \Pi w st\alpha \frac{1}{6} l^2 (ds + 2dS),$$

to składowa $(dP)_z$ wyrazi się :

$$(dP)_z = dP \operatorname{dos}\alpha = \Pi w st\alpha \frac{1}{6} l^2(ds + 2dS)\operatorname{dos}\alpha = \Pi w st\alpha \frac{1}{3} l \cdot \frac{1}{2} l \operatorname{dos}\alpha (ds + 2dS);$$

a zważywszy że :

$$l w st\alpha = H,$$

$$l \operatorname{dos}\alpha = CL = R - r,$$

będziemy mogli napisać :

$$(dP)_z = \frac{1}{3}\Pi H \frac{1}{2}(R - r)(ds + dS + dS) = \frac{1}{3}\Pi H^2 \frac{1}{2}(R - r)(ds + dS) + \frac{1}{3}\Pi H \frac{1}{2}(R - r)dS;$$

zkąd, biorąc summę tych składowych dla całej ściany, wypadnie :

$$P_z''' = \Sigma(dP)_z = \frac{1}{3}\Pi H^2 \frac{1}{2}(R - r)\Sigma(ds + dS) + \frac{1}{3}\Pi H \frac{1}{2}(R - r)\Sigma dS.$$

Otóż $\Sigma ds =$ łukowi $ef = l'$, a $\Sigma dS =$ łukowi $EF = L'$; więc :

$$P_z''' = \Sigma(dP)_z = \frac{1}{3}\Pi H\left[\frac{1}{2}(R - r)(L' + l')\right] + \frac{1}{3}\Pi H \frac{1}{2}(R - r)L';$$

wyrażenie w którem $\frac{1}{2}(R - r)(L' + l')$ przedstawia powierzchnię trapezu kołowego $EefF$, to jest rzut ściany stożkowej na płaszczyznę XY.

Oznaczając, jak poprzednio, kąt $q'S'E = \theta$, wartość na $P_z'''$ może być wyrażoną w funkcyi $\theta$, gdyż :

$$L' = 2\theta R, \quad \text{a} \quad l' = 2\theta r;$$

zatem :

$$P_z''' = \frac{1}{3}\Pi H \frac{1}{2}(R - r)2\theta(R + r) + \frac{1}{3}\Pi H \frac{1}{2} 2\theta R(R - r) = \frac{1}{3}\Pi H\theta(2R^2 - Rr - r^2) \text{ (*)};$$

---

(*) Ponieważ z geometrycznego traktowania naszej kwestyi wiemy, że natężenie wypadkowej $P_z'''$ równem jest cięwzór ten zostanie przekształcony napisawszy go pod formą :

$$P_z''' = \Pi H \theta \left[\frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{3}Rr - \frac{1}{3}r^2 + \frac{1}{3}R^2 - \frac{1}{3}R^2\right];$$

tak że ostateczne wyrażenie na $P_z'''$ będzie następujące :

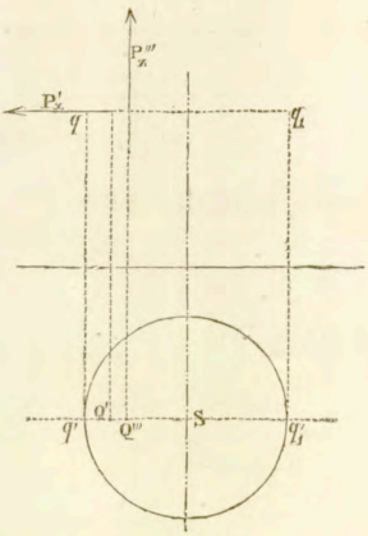
$$\text{(B)} \qquad P_z''' = \Sigma Z = \Pi H \theta \left[R^2 - \frac{1}{3}(R^2 + Rr + r^2)\right].$$

Szukajmy teraz punktu przyczepienia siły $P_z'''$. Widzimy najprzód, że punkt ten będzie się znajdował na osi symetryi $q'S'$ równoleżnika $(qq_1, q'q'_1)$; uważamy następnie, że natężenie składowej $(dP)_z$ jest *stałe* dla wszystkich punktów łuku $u'q'u'$; ztąd wnosimy że punkt przyczepienia wypadkowej $P_z'''$ znajduje się w środku ciężkości tego łuku. Jeśli więc odciętę szukanego punktu oznaczymy przez $\xi'''$, to

$$\text{(B')} \qquad \xi''' = \frac{\chi\rho}{\lambda}.$$

W streszczeniu, wszystkie ciśnienia wywierane na daną nam ścianę stożkową mogą być zastąpione dwiema siłami (wiemy *a priori* że $P_y'' = 0$) : siłą poziomą $P'_x$ i siłą pionową $P_z'''$. Natężenie każdej z tych sił jest wyznaczone wzorami (A) i (B); zaś punkta ich przyczepienia $Q'$ i $Q'''$ są położone na prostej $qq_1$ (fig. 95), wynikłej z przecięcia płaszczyzny symetryi płaszczyzną równoleżnika $(qq_1, q'q'_1)$, poprowadzonego na odległości $z'$ od powierzchni wolnej AB; ta odległość wyraża się w funkcyi ilości danych $r$, R i H następującym związkiem :

Fig. 95.




$$z' = \frac{1}{2}H\frac{r + 3R}{r + 2R};$$

jest ona widocznie większą od $\frac{1}{2}$ H, i staje się równą $\frac{2}{3}$ H dla $r = R$, to jest dla ścian walcowych.

Z dyskussyi wzorów (A') i (B') wypada (§ 94), że punkt przyczepienia siły $P'_x$ jest dalej położonym względem środka $S'$, aniżeli punkt przyczepienia siły $P_z'''$, jak pokazuje figura 95. Uważając ciecz zostającą w spoczynku jako ciało stałe, możemy przenieść punkt $Q'$ wzdłuż prostej $q'S'$ do zlania się jego z punktem $Q'''$, i dwie siły $P'_x$ i $P_z'''$ sprowadzić do jednej wypadkowej $\mathfrak{P}$.

---

żarowi cieczy zawartej w objętości, utworzonej z powierzchni walcowej wystawionej na łuku $(bfa, f''b'')$, (fig. 93 z dwóch trójkątów $b'b''k'$ rzucających się podług prostych $bc$ i $ad$, i z powierzchni stożkowej powstałej z obiegu linji prostej po górnej podstawie $(f'b', bfa)$ walca i po łuku $(ckd, k'c)$, — analityczne rozwiązanie tejże kwestyi daje nam wyrażenie na tak utworzoną objętość. Więc mając trapez kołowy $bckdafb$, którego boki $bc$ i $da$ czynią z sobą kąt $bS'a = \Psi$, objętość V wystawiona na tym trapezie w wyżej powiedziany sposób otrzyma się kładąc w wyrazeniu na $P_z'''$ kąt $\theta = \frac{\Psi}{2}$; w skutek czego :

$$V = \frac{1}{6}H\Psi(2R^2 - Rr - r^2).$$

Uwaga. Jeżelibyśmy szukali wypadkowego ciśnienia nie na część ściany zawartą w kącie $ESF = 2\theta$, (fig. 94) lecz na powierzchnię stożkową zamkniętą, należałoby wtedy we wzorze (B) położyć $\theta = \pi$; w skutek czego otrzymalibyśmy wyrażenie znalezione w § 100, to jest $P_z'''$ miałoby wartość ciężaru cieczy zawartej w objętości równej różnicy między objętością walca wystawionego na dolnej podstawie CD ściany stożkowej i objętością danego nam ściętego stóżka. Siła $P_z'''$ przedstawiałaby ostateczną wypadkowę wszystkich ciśnień, albowiem dla powierzchni zamkniętych inne dwie siły $P'_x$ i $P_y''$ sprowadzają się do zera.

**102. Dyskussya wzoru wyrażającego ciśnienie na ściany stożkowe. — Hydrostatyczny paradoks.** Wzór dający ciśnienie wypadkowe na powierzchnię stożkową zamkniętą, jest jak wiadomo:

$$P_z''' = \Pi\pi R^2 H - \Pi \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr). \tag{1}$$

Wiemy nadto, że ciśnienie wypadkowe wywierane przez ciecz na ścianę płaską poziomą jest:

$$P = \Pi\Omega H,$$

gdzie $\Omega$ wyraża powierzchnię ściany, a $H$ wysokość nad nią powierzchni wolnej.

Przypuszczając więc że powierzchnia stożkowa jest zamkniętą zdołu dnem płaskiem, i oznaczając ciśnienie wypadkowe na to dno przez $P_d$, mamy:

$$P_d = \Pi\pi R^2 H; \tag{2}$$

siła $P_d$ zawsze ma znak —, gdyż zawsze jest ona skierowaną z góry do dołu.

Jeśli teraz *ciężar* cieczy zawartej w stożkowem naczyniu oznaczymy przez $C$, to:

$$C = \Pi \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr), \tag{3}$$

i ta siła również będzie miała zawsze znak —.

Nazywając $P_b = P_z'''$ wypadkowe ciśnienie wywierane na boczną ścianę naszego naczynia, otrzymamy ze wzorów (1), (2) i (3) następujące związki:

$$P_b = P_d - C, \tag{1'}$$

$$P_d = C + P_b, \tag{1''}$$

$$C = P_d - P_b. \tag{1'''}$$

Zamiarem naszym jest bliższe ich rozpatrzenie.

1°. Ponieważ we wzorze (1), $P'''_z = P_b$ wyraża wartość *absolutną* ciśnienia na boczne ściany naczynia, a wyrazy:

$$\Pi\pi R^2 H \quad \text{i} \quad \Pi \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr)$$

przedstawiają wartości *absolutne* ciśnienia na dno i ciężaru cieczy, więc we wzorze (1') ilości: $P_b$, $P_d$ i $C$ nie mają żadnego ukrytego znaku, czyli że są wartościami *samoistemi*. Wypada ztąd, że jeśli wiemy zgóry, iż absolutna wartość $P_d$ jest większą od absolutnej wartości $C$, wtedy wartość $P_b$

będzie *dodatną*, to jest *ciśnienie wypadkowe na boczne ściany naczynia skierowanem będzie zdołu do góry*; jeżeli zaś $P_d < C$, wartość $P_b$ będzie *odjemną*, skierowaną zatem *zgóry do dołu*; nareszcie, w przypadku szczególnym kiedy $P_b = C$, (co ma miejsce w naczyniu walcowem prostem, o podstawie jakiejkolwiek) wtedy $P_b = 0$, to jest wypadkowe ciśnienie na boczne ściany naczynia jest zerem.

2° Tenże sam wzór pokazuje że przeciwnie, jeżeli wiemy iż wartość $P_b$ jest *dodatną*, to jest ciśnienie wypadkowe na całą boczną ścianę skierowanem jest *zdołu do góry*, wtedy $P_d - C > 0$, czyli absolutna wartość $P_d$ będzie większą od absolutnej wartości C; i na odwrót, wiedząc że $P_b$ ma znak —, wiemy w skutek tego że $P_d < C$. Widzimy zatem *że ciśnienie wypadkowe na dno naczynia może być większe od ciężaru w niem zawartej cieczy lub też mniejsze, stosownie do tego czy ciśnienie wypadkowe na boczne ściany naczynia jest + lub —, to jest czy jest ono skierowanem z dołu do góry, czy też z góry na dół;* a ta okoliczność zależy od sposobu nachylenia ścian do poziomu. Ciśnienie na dno będzie równem ciężarowi cieczy tylko wtedy kiedy $P_b = 0$.

3° Nareszcie wzór (1''), w którym $P_b$ jest wartością absolutną czyli mającą znak +, pokazuje, że jeżeli ciśnienie na boczne ściany jest skierowanem z dołu do góry, wtedy absolutna wartość ciężaru cieczy równa się *różnicy* absolutnych wartości $P_d$ i $P_b$; zaś ze wzoru (1') wypada, że jeżeli $P_b$ jest odjemnem, to jest skierowanem w dół, wtedy $P_d - C$ będzie też odjemne, ale absolutne wartości: $P_b$ i $C - P_d$ będą sobie równe; czyli że w takim razie absolutna wartość ciężaru cieczy będzie równą *summie* absolutnych wartości: $P_d$ i $P_b$. Tak, że nie okazując jawnie znaku jaki ma wartość $P_b$, możemy napisać:

$$C = P_d + P_b, \tag{$\alpha$}$$

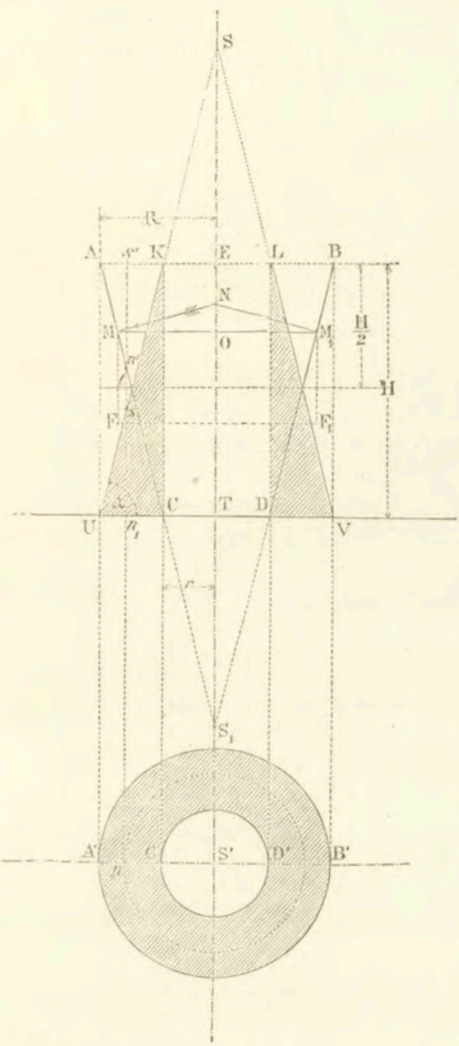
i powiedzieć że: *ciężar cieczy zawartej w naczyniu równa się summie algebraicznej wypadkowych ciśnień wywieranych na dno naczynia i na jego boczne ściany*; albo inaczej: *ciężar cieczy równa się ostatecznej wypadkowej wszystkich ciśnień na wszystkie ściany naczynia;* zkąd nawzajem: ostateczna wypadkowa ciśnień na wszystkie ściany naczynia równą jest ciężarowi w niem zawartej cieczy.

Uwaga. Z dyskussyi powyższych wzorów widzimy, że jeżeli $P_d$ bywa $> C$, lub też $P_d < C$, to dla tego, że C jest wypadkową z tej właśnie siły $P_d$, i oprócz niej, z innej jeszcze siły $P_b$; tak że $P_d$ przechodzi albo nie dosięga C, stosownie do kierunku w jakim siła $P_b$ działa względem siły $P_d$: jeżeli $P_b$ i $P_d$ działają w tymże samym kierunku, wtedy $P_d < C$, albowiem $C = P_d + P_b$; jeżeli zaś działania tych sił są w kierunku sobie przeciwnym, w takim razie $P_d > C$, gdyż $C = P_d - P_b$. Co zaś do znaku wartości $P_b$, zależy on jedynie od formy i nachylenia bocznych ścian naczynia, tak że ostateczne wyrażenie: $P_d \gtreqless C$ jest ścisle związanem z kształtem ścian bocznych. Paradoks hydrostatyczny jest więc tylko sprzecznością pozorną, którą natychmiast się usuwa wprowadzeniem w rachubę wszystkich ciśnień wywieranych na wszystkie ściany naczynia.

**103.** II Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na ścianę stożkową obrotową, której dolną podstawą jest mniejsze koło, a górną większe** (fig. 96).

Niech ABCD będzie naczynie stożkowe, którego dolna podstawa CD znajduje się na płaszczyznie poziomej, a górna AB zlewa się z powierzchnią wolną cieczy. Jeżeli weźmiemy promień $CT = r$, $AE = R$, a wysokość stożka równą H, to ABCD będzie nic innego jak naczynie rozpatrzone w przykładzie poprzednim, tylko przewrócone; wierzchołek stożka, który na fig. 91 znajdował się *nad* dnem naczynia i na odległości $h = SE = H\dfrac{r}{R - r}$ od powierzchni wolnej, będzie tutaj położonym *pod* dnem naczynia w odległości $TS_1 = SE$ od dna CD. Przykład ten będąc odwrotnym przykładowi pierwszemu, przewidujemy że w teraźniejszym przypadku rzecz będzie się miała odwrotnie; tak że nie wchodząc w szczegóły traktowane poprzednio, dostatecznem będzie streszczenie wypadków do jakich rozpatrywanie takiego naczynia nas przyprowadza.

Fig. 96.




Niech zadaniem naszem będzie znalezienie wypadkowego ciśnienia na całą boczną ścianę stożka. Wiemy że w takim razie $P'_x = \Sigma X = 0$ i $P''_y = \Sigma Y = 0$; pozostanie zatem znaleźć jednę tylko siłę pionową $P'''_z = \Sigma Z$.

Uważając jakikolwiek równoleżnik $(MM_1)$, widzimy że kierunek normalnych, to jest kierunek ciśnień na ten równoleżnik wywieranych, utworzy stożek obrotowy mający $MM_1$ za podstawę, a za wierzchołek punkt N leżący *nad* równoleżnikiem. Rozkładając elementarne ciśnienie w jakimkolwiek punkcie M na trzy składowe, znajdziemy że wszędzie składowa Z będzie *odjemna*, to jest skierowaną *z góry do dołu*, i jeżeli natężenie tej składowej w punkcie M wyrazimy długością MF, szereg składowych Z, dla wszystkich punktów równoleżnika poprowadzonego przez M, utworzy powierzchnię walcową $MM_1FF_1$, mającą za podstawę równoleżnik $MM_1$, a za wysokość MF; albowiem we wszystkich punktach równoleżnika Z będzie miało jednakowe natężenie. Wypadkowa ciśnień Z wywieranych na $MM_1$ będzie więc przyczepioną w punkcie O; a ostateczna wypadkowa $P'''_z = \Sigma Z$ wszystkich ciśnień na całą boczną ścianę stożka skierowaną będzie wzdłuż osi ST i *z góry do dołu*, to jest $P'''_z$ będzie ze znakiem —.

Idzie teraz o znalezienie natężenia siły:

$$P'''_z = \Sigma Z = \Sigma p \omega_{xy}.$$

Wiemy że składowe ciśnienie $P'''_z$ równem jest całkowitemu ciśnieniu jakie byłoby wywartem na rzut poziomy naszej ściany (to jest na powierzchnię zawartą między okręgami A'B' i C'D'), gdyby każdy punkt rzutu był ciśniony tak, jak w rzeczywistości ciśnionym jest odpowiedni mu punkt na samej ścianie. A że geometrycznem miejscem punktów ściany znajdujących się pod jednakowem ciśnieniem są równoleżniki powierzchni stożkowej, zatem punkta rzutu, które powinny zostawać pod tem samem ciśnieniem, stanowić będą okręgi mające punkt S' za wspólny im środek; czyli, wyrażając się inaczej, figura jaką mamy wystawić na rzucie ściany winna być taką, ażeby jej przecięcia płaszczyznami poziomemi przedstawiały okręgi spółśrodkowe z okręgami A'B' i C'D'. Zważywszy zaś, że ciśnienie na ścianę jest największe na równoleżniku CD, a najmniejsze na powierzchni wolnej AB, łatwo jest widzieć, że ciśnienie wypadkowe $P'''_z$ na całą boczną ścianę stożka ACDB wyrazi się ciężarem cieczy zawartej w objętości ściętego stożka KUVL (*), zmniejszonej objętością walca KCDL; albo też, co

(*) Każdy punkt *n*, wzięty na rzucie ściany na płaszczyznę XY, powinien zostawać pod takiem właśnie ciśnieniem, wychodzi na jedno, natężenie $P_z'''$ wyrazi się ciężarem cieczy zawartej w danem nam naczyniu ABCD, zmniejszonym o ciężar cieczy zawartej w objętości walca CDKL, wystawionego na dnie tego naczynia (**).

Oznaczmy ciśnienie wypadkowe $P_z'''$ na całą boczną ścianę naczynia ABCD przez $P_b'$ ; ciśnienie na dno CD przez $P_d'$, a ciężar cieczy zawartej w naczyniu przez $C'$. Będziemy mieli :

$$P_b' = \Pi \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr) - \Pi\pi r^2 H. \tag{1}$$

a że :

$$\Pi \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr) = C',$$

$$\Pi\pi r^2 H = P_d',$$

więc wzór (1) przybiera postać :

$$P_b' = C' - P_d',$$

gdzie $P_b'$, $C'$ i $P_d'$ oznaczają wartości absolutne, t. j. niezależne od znaku. Wypadnie ztąd że :

$$C' = P_d' + P_b'.$$

Otóż, w razie naczynia stożkowego rozpatrzonego w przykładzie I mieliśmy :

$$C = P_d - P_b ;$$

więc, ponieważ w obydwu przykładach uważamy jedno i to samo, co do jego objętości, naczynie, a zatem :

$$C' = C,$$

wypada że :

$$P_d' + P_b' = P_d - P_b,$$

---

pod jakiem się znajduje odpowiedni mu punkt $n'$ na samej ścianie. Otóż wysokość wyrażająca ciśnienie w tym ostatnim punkcie jest $n's'$ ; więc wysokość $n_1s$, przedstawiająca ciśnienie w punkcie $n$, powinna być równą wysokości $n's'$. Ten warunek jest widocznie wypełniony, gdyż widzimy z figury że :

$$s't = tn_1, \text{ i } n't = ts;$$

zkąd :

$$s't - n't = tn_1 - ts.$$

(**) Łatwo jednak moglibyśmy wpaść w błąd gdybyśmy nie zastanowiwszy się nad sposobem w jaki winna być utworzoną powierzchnia stożkowa, ograniczająca objętość wyrażającą siłę $P_z'''$, pospieszyli — z prostego tylko wejrzenia na figurę i z równości trójkątów, jaką na niej spostrzegamy — powiedzieć, że ciśnienie $P_z'''$ może być jeszcze uważane jako równe różnicy dwóch ciężarów : 1° cieczy zawartej w walcu ABUV, wystawionym na większej podstawie naczynia $UV = AB$, i 2° cieczy zawartej w samem naczyniu ABCD : coby znaczyło że $P_z'''$ będzie tu miało taką samą absolutną wartość, jaką miało $P_z'''$ w przykładzie pierwszym, tylko że tam $P_z'''$ było +, a tutaj —. Oczywiście rozumowanie takie byłoby fałszywem, albowiem w przykładzie pierwszym wysokość H stosowała się do wielkiego okręgu, a wysokość 0 do małego ; wtedy gdy w naszym przypadku mamy odwrotnie : H stosuje się do okręgu małego, a 0 do wielkiego ; a to zmienia postać rzeczy, i formuły jakie podajemy niżej widoczniej nam okażą tę różnicę.

czyli :

$$P_d - P'_d = P_b + P'_b.$$

Wiemy że $P'_d$ i $P_d$ zawsze są skierowane *z góry do dołu*, czyli mają znak —; widzieliśmy nadto, że $P_b$ jest ze znakiem +, a zaś $P'_b$ ze znakiem —; ale we wzorze wszystkie wartości są samoiste.

Figury 91 i 96 pokazują, że $P_d$ wyraża się objętością walca ABUV (fig. 96), a $P_d'$ objętością KLCD; więc $P_b + P_b'$ będzie miało za miarę objętość utworzoną obrotem około osi ST prostokąta AKVC; pierwsza z sił, $P_b$ wyrazi się objętością powstałą z obrotu około tej osi trójkąta AUC, którego bok AC spotyka oś obrotu w punkcie S'; zaś siła $P'_b$ wyrazi się objętością utworzoną obrotem około tejże osi trójkąta KUC czyli, co wyjdzie na jedno, trójkąta AKC. Otóż wiadomo jest z twierdzenia Guldin'a, że objętość utworzona obrotem danej powierzchni około pewnej osi, równa się tej powierzchni pomnożonej przez łuk opisany jej środkiem ciężkości. Więc, ponieważ środek ciężkości trójkąta AUC jest bardziej oddalonym od osi ST, aniżeli środek ciężkości trójkąta AKC (*), wypada ztąd że objętość AUC jest większą od

---

(*) Istotnie, oznaczając (fig. 96) środek ciężkości trójkąta AUC przez G, a trójkąta AKC przez G'; odległości zaś punktów G i G' od osi obrotu ST przez $\delta$ i $\delta'$; łatwo jest zobaczyć że :

$$\delta = \frac{2}{3}(R - r) + r = \frac{1}{3}(r + 2R),$$

$$\delta' = \frac{1}{3}(R - r) + r = \frac{1}{3}(R + 2r);$$

a ponieważ $R > r$, zatem $R - r$ jest ilością dodatną, i $\delta > \delta'$.

Oznaczając przez V i V' objętości odpowiadające trójkątom AUC i AKC, i zważywszy że powierzchnia każdego z tych trójkątów równą jest : $\frac{1}{2}(R - r)H$, mieć będziemy :

$$V = \frac{1}{2}(R - r)H \cdot 2\pi\delta = \frac{1}{3}\pi H(R - r)(r + 2R) = \frac{1}{3}\pi H(2R^2 - r^2 - Rr),$$

$$V' = \frac{1}{2}(R - r)H \cdot 2\pi\delta' = \frac{1}{3}\pi H(R - r)(R + 2r) = \frac{1}{3}\pi H(R^2 - 2r^2 + Rr);$$

zatem :

$$P_b = \frac{1}{3}\Pi\pi H(2R^2 - r^2 - Rr),$$

$$P'_b = \frac{1}{3}\Pi\pi H(R^2 - 2r^2 + Rr);$$

a ztąd znajdziemy że :

$$P_b - P'_b = \frac{1}{3}\Pi\pi H(R - r)^2,$$

więc :

$$P_b > P'_b.$$

Widzimy, że różnica $P_b - P'_b$ będzie tem mniejsza, im mniejszą będzie różnica $R - r$. W ogóle zaś *różnica ciśnień $P_b$ i $P_b'$ równą jest ciężarowi cieczy zawartej w $\frac{1}{3}$ objętości walca wystawionego na kole, którego promień jest różnicą promieni podstaw stożkowego naczynia.*

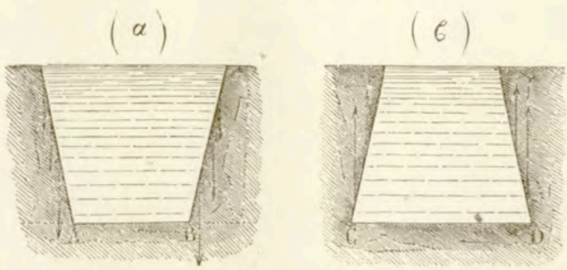
Zauważmy jeszcze, że znalezione wyrażenia na $P_b$ i $P'_b$ mogą być przekształcone i sprowadzone do formy pod jaką objętości AKC, czyli że:

$$P_b > P'_b;$$

z innej zaś strony $P_a > P'_a$, gdyż $R > r$; więc, *uważając dwa równe sobie naczynia stożkowe przewrócone w sposób ażeby dno jednego było większą podstawą stożka, a dno drugiego mniejszą,—absolutna wartość ciśnienia na boczną ścianę będzie większą w tém naczyniu, dla którego ciśnienie na dno jest większe.*

Wniosek. Używając naczynia stożkowego może się nastręczyć pytanie: z jakiej strony dogodniej będzie wstawić dno, ażeby w skutek ciśnienia cieczy ściany naczynia pracowały w jak najlepszych warunkach. Rozwiązanie takiego zadania przedstawia się samo przez się: wynika ono bądź z natury samych ścian, bądź też z użytku do jakiego naczynie ma być przeznaczone. I tak, naprzykład, gdyby chodziło o wykopanie w ziemi jamy stożkowej (fig. 97), mającej służyć dla zebrania i przechowania w niej pewnej ilości wody (zbiorniki), widoczną wtedy jest rzeczą, że tak z punktu samego wykonania roboty, jak też pod innym jeszcze ważniejszym względem, wypada nadać naczyniu kształt (α); albowiem w takim razie ciśnienie wody na boczną ścianę będzie, jak wiemy, skierowanem z góry do dołu, i każda z sił starających się nadać rodzącej stożka położenie poziome, obracając takowę około punktów A, B..., (czyli dążących do *obniżenia* każdego równoleżnika ściany) zostanie zrównoważoną przez wytrzymałość samego gruntu. Wtedy gdy w naczyniu (6), prócz niedogodności praktycznego wykonania, spotykamy jeszcze tę wielką wadę, że siła ciężkości dąży ciągle do osunięcia ściany bocznej ku dnu naczynia CD, i jeżeli ciśnienia boczne, skierowone tutaj z dołu do góry, wywierają wpływ przeciwny sile ciężkości, niemniej jednak taki kierunek ciśnienia jest szkodliwym, gdyż w każdym razie dąży on do otwarcia stawów (joints) muru jakim często ściany są otoczone.

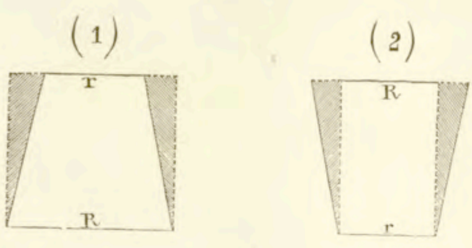
Fig. 77.




Poprzeczne przecięcie kanałów przedstawia formę (α), tak dla powyżej wymienionych powodów, jak też dla użytku do jakiego kanały są przeznaczone.

Uwaga. Zważając na związek zachodzący pomiędzy wartościami $P'''_z$, otrzymanemi dla naczyń stożkowych, — które mogą być tylko dwóch typów (1) i (2), (fig. 98) — możemy, za pomocą pewnej ugody, sprowadzić wszystkie możliwe formy naczyń stożkowych obrotowych tylko do jednego przypadku. I tak, jeżeli *dopełnienie* ściany stożkowej do ściany walcowej, wystawionej na dnie naczynia, będziemy uważać za *dodatne* wtedy, gdy walec ten jest *zewnętrznym* względem naczynia, jak (1) (albowiem tu rzeczywiście dodajemy do naczynia pewną objętość) — co ma miej-

Fig. 98.




pierwotnie były one wyprowadzone; i tak możemy napisać:

$$P_b = \Pi\pi H\left[\frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}Rr + \frac{1}{3}R^2 - \frac{1}{3}R^2\right] = \Pi\pi H\left[R^2 - \frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\right],$$

$$P'_b = \Pi\pi H\left[\frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{3}r^2 + \frac{1}{3}Rr + \frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}r^2\right] = \Pi\pi H\left[\frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - r^2\right].$$

sce gdy dolna jego podstawa jest większą od górnej; — a za *odjemne*, kiedy walec wystawiony na dnie naczynia jest względem niego *wewnętrznym* jak w (2), (gdzie od naczynia odejmujemy pewną objętość) to jest kiedy dno stożka jest mniejszem od górnej jego podstawy; — to raz przyjąwszy tę ugodę, możemy wyrazić nietylko *natężenie* (wartość samoistą) ale jeszcze i *kierunek* (znak) ciśnienia na boczną ścianę jakiegokolwiek naczynia stożkowego następującem wysłowieniem:

*Ciśnienie wypadkowe na całą boczną ścianę wszelkiego naczynia stożkowego obrotowego, i o dnie poziomem, ma za miarę ciężar cieczy zawartej w objętości dopełniającej dane naczynie do objętości walca wystawionego na dnie tego naczynia.*

I tak na fig. (1) dopełnienie objętości naczynia do objętości walca będąc *dodatnem*, $P_b$ będzie miało znak $+$, czyli skierowanem będzie z dołu do góry; zaś na fig. (2) gdzie dopełnienie jest *odjemne*, $P_b'$ będzie ze znakiem $-$, to jest skierowanem z góry do dołu. Co się tyczy wartości absolutnej tych ciśnień, wyrażą się one w skutek powyższego wysłowienia tak:

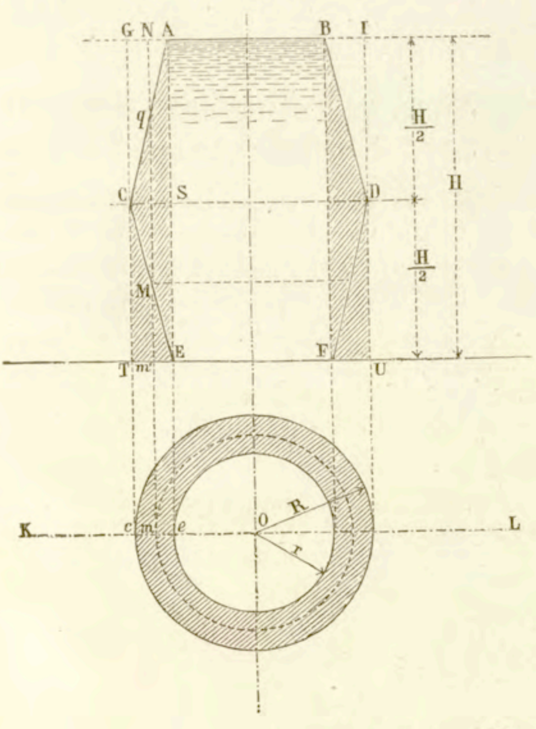
$$P_b = \Pi\left[\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)\right] = \Pi\pi H\left[R^2 - \frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\right],$$

$$P'_b = \Pi\left[\frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2 H\right] = \Pi\pi H\left[\frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - r^2\right].$$

**104.** Przejdźmy teraz do ścian stożkowych złożonych i rozpatrzmy następujący przykład:

III PRZYKŁAD. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na boczną ścianę naczynia utworzonego z dwóch równych ściętych stożków, mających spólną podstawę na połowie wysokości naczynia** (fig. 99.).

Fig. 99.




Niech będzie R promień koła CD spólnego dwóm stożkom, $r$ promień dna EF; H wysokość naczynia, a zarazem wysokość powierzchni wolnej AB cieczy nad dnem poziomem EF.

Zadanie nasze, również jak i wszystkie inne doń podobne, mogłoby być wprost rozwiązanem za pomocą twierdzenia podanego w § 92, z którego wiemy, że wypadkowa ostateczna ciśnień wywieranych na wszystkie ściany naczynia równą jest ciężarowi w niem zawartej cieczy. Oznaczając więc przez C ciężar cieczy napełniającej naczynie ABEF, przez $P_d$ ciśnienie na dno jego, a przez $P_b$ ciśnienie na całą boczną ścianę, będziemy mieli:

$$C = \Pi\frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr),$$

$$P_d = \Pi\pi r^2 H;$$

a że C jest summą algebraiczną ilości $P_d$ i $P_b$, zatem:

$$P_b = C - P_d;$$

zkąd :

$$(1)\qquad P_b = \Pi \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr) - \Pi\pi r^2 H = \Pi\frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr - 2r^2).$$

Ale ponieważ mamy na widoku traktowanie tej kwestyi w sposób niezależny od twierdzenia § 92, będziemy szukać wartości na $P_b$ opierając się jedynie na tem, co poprzednio było powiedzianem przy naczyniach stożkowych *prostych*.

I tak, widocznem jest że $P_b$ może być uważane jako wypadkowa dwóch ciśnień : ciśnienia $P_b'$ wywieranego na ścianę boczną ACDB, i ciśnienia $P_b''$ na ścianę CEFD. Idzie zatem o znalezienie wartości : $P_b'$ i $P_b''$.

Co się tyczy pierwszej wartości, jej znalezienie nie przedstawia najmniejszej trudności, gdyż wiemy z poprzedniego, że jest ona równą ciężarowi cieczy zawartej w objętości dopełniającej objętość stożka ABCD do objętości walca CDGI. Ciśnienie $P_b'$ będzie zatem ze znakiem +, a jego natężenie wyrazi się :

$$(a')\qquad P'_b = \Pi\left[\pi R^2\frac{H}{2} - \frac{1}{3}\pi\frac{H}{2}(R^2 + r^2 + Rr)\right] = \Pi\frac{1}{3}\pi\frac{H}{2}(2R^2 - r^2 - Rr).$$

Co do ciśnienia $P''_b$ wywieranego na ścianę CEFD wiemy, że będzie ono równem wypadkowemu ciśnieniu na rzut tej ściany na płaszczyznę poziomą, z warunkiem, aby każdy punkt rzutu zostawał pod ciśnieniem odpowiedniego mu punktu na ścianie CEFD. Otóż w najwyższym punkcie C ściany, wysokość wyrażająca ciśnienie pod jakiem ten punkt zostaje jest $\frac{H}{2}$ ; ciśnienie w innym jakimkolwiek jej punkcie M wyrazi się wysokością MN, i t. p. ; powierzchnia jaką mamy wystawić na rzucie obrączkowym : $\pi(R^2 - r^2)$ ściany CEFD powinna więc być taką, żeby jej rzędna wyprowadzona z punktu $m$ była równa wysokości MN ; rzędne wyprowadzone z punktów $c$ i $e$ miały odpowiednio za wysokość $CG = \frac{H}{2}$, i $EA = H$ ; i t. p. Zważywszy, że geometrycznem miejscem punktów jednakowego ciśnienia są równoleżniki naszej ściany, łatwo jest się przekonać, że warunkom o których mowa zadość uczynimy, wystawiając na okręgu zewnętrznym O$c$ rzutu powierzchnię walcową CDTU, mającą $\frac{H}{2}$ za wysokość ; zaś na okręgu wewnętrznym O$c$ powierzchnię walcową AEFB o wysokości $EA = H$ ; nareszcie zamykając te dwie powierzchnie powierzchnią stożkową ACBD, utworzoną obrotem około osi naczynia prostej AC, opierającej się ciągle w tym obiegu końcami C i A na górnych podstawach CD i AB dwóch powierzchni walcowych. W tych okolicznościach wysokość przedstawiająca ciśnienie (idealne) w jakimkolwiek punkcie $m$ obrączki wyrazi się rzędną $m'q$, która jest widocznie równą wysokości MN wyrażającej rzeczywiste ciśnienie w punkcie M danej ściany.

W skutek tego widzimy, że ciśnienie wypadkowe $P_b''$ na boczną ścianę CEFD będzie równem ciężarowi cieczy zawartej w dwóch objętościach :

1) w objętości walcowej V′ powstałej z obrotu, około osi naczynia, prostokąta CSTE,

2) » stożkowej V″ » » trójkąta ACS ;

otóż :

$$V' = \pi(R^2 - r^2)\frac{H}{2},$$

$$V'' = \frac{1}{3}\pi\frac{H}{2}(R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2\frac{H}{2};$$

więc :

$$P''_b = \Pi \left[ \pi \frac{H}{2}(R^2 - r^2) + \frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr) - \pi \frac{H}{2} r^2 \right];$$

zkąd, po uproszczeniu, otrzymamy :

$$(a'') \qquad P''_b = \Pi \frac{1}{3} \pi \frac{H}{2} (4R^2 - 5r^2 + Rr)$$

Wiemy że ciśnienie $P'_b$ na ścianę ABCD działa z dołu do góry czyli jest ze znakiem +, a ciśnienie $P''_b$ na ścianę CEFD wywieranem jest w kierunku przeciwnym, to jest ma znak —; tak że biorąc różnicę absolutnych wartości znalezionych w $(a')$ i $(a'')$ na $P'_b$ i $P''_b$, otrzymamy absolutną wartość ciśnienia wypadkowego $P_b$ na całą boczną ścianę naczynia ABEF. Będziemy zatem mieli :

$$P_b = P''_b - P'_b = \Pi \frac{1}{3} \pi \frac{H}{2} \left[ 4R^2 - 5r^2 + Rr - (2R^2 - r^2 - Rr) \right],$$

ztąd znajdziemy :

$$(1') \qquad P_b = \Pi \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr - 2r^2).$$

Ciśnienie wypadkowe $P_b$ jest skierowanem z góry do dołu, gdyż $P''_b > P'_b$ (*); więc w naszym przykładzie C, $P_d$ i $P_b$ są jednakowego znaku.

Wyrażenie (1') jest takie same jak (1) znalezione inną drogą.

Kładąc w (1') $R = r$, naczynie stanie się walcowem; wzory $(a')$, $(a'')$ i (1') dają wtedy :

$$P'_b = 0, \qquad P''_b = 0, \qquad P_b = 0;$$

to jest że ciśnienie wypadkowe na całą boczną ścianę walca jest zerem ; co wiemy.

Uwaga. Jeżeli naczyniu przedstawionemu na figurze 99 nadamy profil ciągły zamiast profilu łamanego, naczynie będzie miało kształt beczki. Uważając boczną ścianę beczki (fig. 100) jako utworzoną obrotem, około osi SS, łuku przechodzącego przez trzy punkta A, C i E, widocznem jest że otrzymana ztąd objętość będzie większą od objętości : $\frac{1}{3}\pi H (R^2 + r^2 + Rr)$; dla znalezienia rzeczywistej jej wartości, dosyćby było wyznaczyć wartość powierzchni płaskiej AIKECA, i jej środek

(*) Istotnie, ażeby $P''_b$ było $> P'_b$ potrzeba żeby :

$$4R^2 - 5r^2 + Rr > 2R^2 - r^2 - Rr,$$

czyli :

$$R^2 + Rr > 2r^2.$$

Otóż, ponieważ :

$$R > r, \quad \text{więc} \quad R^2 > r^2 \quad \text{i} \quad Rr > r^2,$$

powyższy warunek jest zatem zadowolniony.

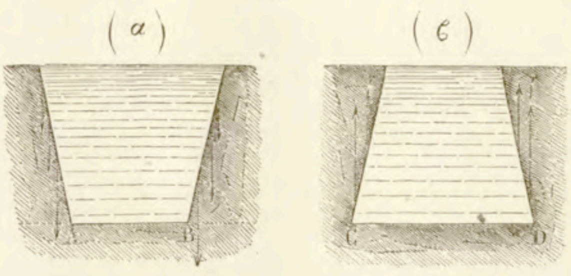
objętości AKC, czyli że:

$$P_b > P'_b;$$

z innej zaś strony $P_a > P'_a$, gdyż $R > r$; więc, *uważając dwa równe sobie naczynia stożkowe przewrócone w sposób ażeby dno jednego było większą podstawą stożka, a dno drugiego mniejszą,—absolutna wartość ciśnienia na boczną ścianę będzie większą w tém naczyniu, dla którego ciśnienie na dno jest większe.*

Wniosek. Używając naczynia stożkowego może się nastręczyć pytanie: z jakiej strony dogodniej będzie wstawić dno, ażeby w skutek ciśnienia cieczy ściany naczynia pracowały w jak najlepszych warunkach. Rozwiązanie takiego zadania przedstawia się samo przez się: wynika ono bądź z natury samych ścian, bądź też z użytku do jakiego naczynie ma być przeznaczone. I tak, naprzykład, gdyby chodziło o wykopanie w ziemi jamy stożkowej (fig. 97), mającej służyć dla zebrania i przechowania w niej pewnej ilości wody (zbiorniki), widoczną wtedy jest rzeczą, że tak z punktu samego wykonania roboty, jak też pod innym jeszcze ważniejszym względem, wypada nadać naczyniu kształt (α); albowiem w takim razie ciśnienie wody na boczną ścianę będzie, jak wiemy, skierowanem z góry do dołu, i każda z sił starających się nadać rodzącej stożka położenie poziome, obracając takowę około punktów A, B..., (czyli dążących do *obniżenia* każdego równoleżnika ściany) zostanie zrównoważoną przez wytrzymałość samego gruntu. Wtedy gdy w naczyniu (б), prócz niedogodności praktycznego wykonania, spotykamy jeszcze tę wielką wadę, że siła ciężkości dąży ciągle do osunięcia ściany bocznej ku dnu naczynia CD, i jeżeli ciśnienia boczne, skierowone tutaj z dołu do góry, wywierają wpływ przeciwny sile ciężkości, niemniej jednak taki kierunek ciśnienia jest szkodliwym, gdyż w każdym razie dąży on do otwarcia stawów (joints) muru jakim często ściany są otoczone.

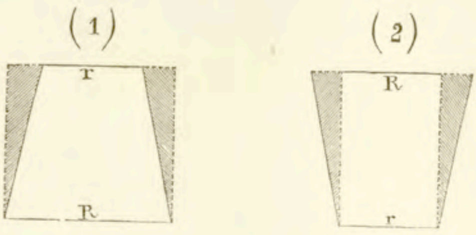
Fig. 77.




Poprzeczne przecięcie kanałów przedstawia formę (α), tak dla powyżej wymienionych powodów, jak też dla użytku do jakiego kanały są przeznaczone.

Uwaga. Zważając na związek zachodzący pomiędzy wartościami $P'''_z$, otrzymanemi dla naczyń stożkowych, — które mogą być tylko dwóch typów (1) i (2), (fig. 98) — możemy, za pomocą pewnej ugody, sprowadzić wszystkie możliwe formy naczyń stożkowych obrotowych tylko do jednego przypadku. I tak, jeżeli *dopełnienie* ściany stożkowej do ściany walcowej, wystawionej na dnie naczynia, będziemy uważać za *dodatne* wtedy, gdy walec ten jest *zewnętrznym* względem naczynia, jak (1) (albowiem tu rzeczywiście dodajemy do naczynia pewną objętość) — co ma miej-

Fig. 98.




---

pierwotnie były one wyprowadzone; i tak możemy napisać:

$$P_b = \Pi\pi H\left[\frac{2}{3}R^2 - \frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}Rr + \frac{1}{3}R^2 - \frac{1}{3}R^2\right] = \Pi\pi H\left[R^2 - \frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\right],$$

$$P'_b = \Pi\pi H\left[\frac{1}{3}R^2 - \frac{2}{3}r^2 + \frac{1}{3}Rr + \frac{1}{3}r^2 - \frac{1}{3}r^2\right] = \Pi\pi H\left[\frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - r^2\right].$$

sce gdy dolna jego podstawa jest większą od górnej; — a za *odjemne*, kiedy walec wystawiony na dnie naczynia jest względem niego *wewnętrznym* jak w (2), (gdzie od naczynia odejmujemy pewną objętość) to jest kiedy dno stożka jest mniejszem od górnej jego podstawy; — to raz przyjąwszy tę ugodę, możemy wyrazić nietylko *natężenie* (wartość samoistą) ale jeszcze i *kierunek* (znak) ciśnienia na boczną ścianę jakiegokolwiek naczynia stożkowego następującem wysłowieniem :

*Ciśnienie wypadkowe na całą boczną ścianę wszelkiego naczynia stożkowego obrotowego, i o dnie poziomem, ma za miarę ciężar cieczy zawartej w objętości dopełniającej dane naczynie do objętości walca wystawionego na dnie tego naczynia.*

I tak na fig. (1) dopełnienie objętości naczynia do objętości walca będąc *dodatnem*, $P_b$ będzie miało znak $+$, czyli skierowanem będzie z dołu do góry; zaś na fig. (2) gdzie dopełnienie jest *odjemne*, $P_b'$ będzie ze znakiem —, to jest skierowanem z góry do dołu. Co się tyczy wartości absolutnej tych ciśnień, wyrażą się one w skutek powyższego wysłowienia tak :

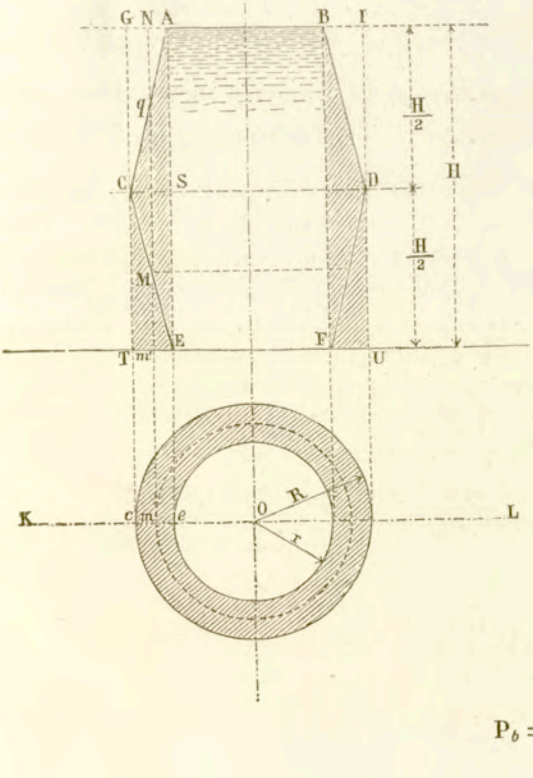
$$P_b = \Pi\left[\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr)\right] = \Pi\pi H\left[R^2 - \frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr)\right],$$

$$P'_b = \Pi\left[\frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr) - \pi r^2 H\right] = \Pi\pi H\left[\frac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr) - r^2\right].$$

**104.** Przejdźmy teraz do ścian stożkowych złożonych i rozpatrzmy następujący przykład :

III Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na boczną ścianę naczynia utworzonego z dwóch równych ściętych stożków, mających spólną podstawę na połowie wysokości naczynia** (fig. 99.).

Fig. 99.




Niech będzie R promień koła CD spólnego dwóm stożkom, $r$ promień dna EF; H wysokość naczynia, a zarazem wysokość powierzchni wolnej AB cieczy nad dnem poziomem EF.

Zadanie nasze, również jak i wszystkie inne doń podobne, mogłoby być wprost rozwiązanem za pomocą twierdzenia podanego w § 92, z którego wiemy, że wypadkowa ostateczna ciśnień wywieranych na wszystkie ściany naczynia równą jest ciężarowi w niem zawartej cieczy. Oznaczając więc przez C ciężar cieczy napełniającej naczynie ABEF, przez $P_d$ ciśnienie na dno jego, a przez $P_b$ ciśnienie na całą boczną ścianę, będziemy mieli :

$$C = \Pi\frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + Rr),$$

$$P_d = \Pi\pi r^2 H;$$

a że C jest summą algebraiczną ilości $P_d$ i $P_b$, zatem :

$$P_b = C - P_d;$$

Oznaczając (fig. 101) przez $h', h'' \ldots h^{VI}$ wysokości tych powierzchni;

» $P', P'' \ldots P^{VI}$ odpowiednie tym powierzchniom ciśnienia;

cząstkowe wypadkowe: $P', P'', \ldots P^{VI}$ znajdziemy, stosując własności ścian stożkowych lub walcowych, i mając wzgląd na wysokość płaszczyzny parcia AB nad rozmaitymi punktami uważanych powierzchni. Znak, jaki przystoi nadać każdej z tych wypadkowych, znajdziemy bez trudności, a geometryczne przedstawienie ich absolutnych wartości znanym nam sposobem pozwoli natychmiast wyrazić natężenie sił $P', P'' \ldots P^{VI}$ formułą analityczną.

Pomijając szczegóły, które mogłyby być zbytecznymi, ograniczamy się (fig. 102) na geometrycznem przedstawieniu dwóch tylko wartości: $P'''$ i $P^{VI}$, i piszemy wprost natężenia wszystkich sił $P', P'' \ldots P^{VI}$, stawiając w nawiasie znak wyrażający ich kierunek. Znajdziemy następujący szereg wartości:

$$(+)\ P' = \pi h' r^2_2 - v'$$

$$(-)\ P'' = \pi h'(r^2_2 - r^2_3) + (v'' - \pi r^2_3 h'')$$

$$(-)\ P''' = \pi(h' + h'')(r^2_3 - r^2_4) + (v''' - \pi r^2_4 h''')$$

$$P^{IV} = 0 \quad \text{, albowiem powierzchnia EF jest walcową.}$$

$$(+)\ P^{V} = \pi(h' + h'' + h''' + h^{IV})(r^2_6 - r^2_5) + (\pi r^2_6 h^{V} - v^{V})$$

$$(-)\ P^{VI} = \pi(h' + h'' + h''' + h^{IV} + h^{V})(r^2_6 - r^2_7) + (v^{VI} - \pi r^2_7 h^{VI}).$$

A że wypadkowa ostateczna $P'''_z = \Sigma P$, (gdzie $\Sigma$ oznacza summę algebraiczną) dodajmy do siebie wartości otrzymane na $P, P'' \ldots P^{VI}$, biorąc znak + dla cząstkowych wypadkowych $P'$ i $P^{V}$, a znak — dla wszystkich innych.

Znajdziemy:

$$\begin{aligned} P_z''' = \Sigma P = P' - P'' - P''' + P^{V} - P^{VI} = {} & \pi h' r^2_2 - v' - \pi h'(r^2_2 - r^2_3) - v'' + \pi r^2_3 h'' - \pi(h' + h'')(r^2_3 - r^2_4) \\ & - v''' + \pi r^2_4 h''' + \pi(h' + h'' + h''' + h^{IV})(r^2_6 - r^2_5) + \pi r^2_6 h^{V} - v^{V} \\ & - \pi(h' + h'' + h''' + h^{IV} + h^{V})(r^2_6 - r^2_7) - v^{VI} + \pi r^2_7 h^{VI}. \end{aligned}$$

Zkąd, po uproszczeniu, przychodzimy do wyrażenia:

$$\begin{aligned} P_z''' = {} & -(v' + v'' + v''' + v^{V} + v^{VI}) + \pi r^2_7 (h' + h'' + h''' + h^{IV} + h^{V} + h^{IV}) \\ & + \pi r^2_4 (h' + h'' + h''') - \pi r^2_5 (h' + h'' + h''' + h^{IV}). \end{aligned}$$

Ponieważ powierzchnia EF jest walcową, mamy że $r_5 = r_4$; zatem:

$$-\pi r^2_5 (h' + h'' + h''' + h^{IV}) = -\pi r^2_4 (h' + h'' + h''') - \pi r^2_4 h^{IV};$$

więc drugi wiersz poprzedniego wyrażenia sprowadza się do: $-\pi r^2_4 h^{IV}$, co wyzaża objętość: $-v^{IV}$; tak że:

$$P_z''' = -(v' + v'' + v''' + v^{IV} + v^{V} + v^{VI}) + \pi r^2_7 (h' + h'' + h''' + h^{IV} + h^{V} + h^{VI}).$$

Otóż, pierwszy nawias wyraża objętość V całego naszego naczynia, a drugi wysokość H nad dnem jego KL powierzchni wolnej AB; więc:

$$P_z''' = -V + \pi r^2_7 H.$$

Wprowadzając ciężar gatunkowy cieczy, istotna wartość ciśnienia wypadkowego $P_z'''$ wyrazi się:

$$P_z''' = -\Pi V + \Pi \pi r^2_7 H.$$

Pierwszy wyraz drugiej części, wzięty bez znaku, oznacza absolutną wartość ciężaru C cieczy zawartej w naczyniu, zaś drugi ciśnienie na dno jego, to jest $P_d$; więc:

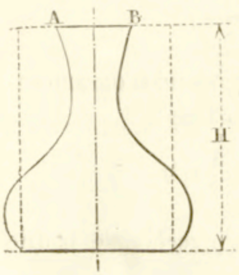
$$P_z''' = -C + P_d,$$

czyli, zamieniając $P_z'''$ na $P_b$, mamy ostatecznie:

$$P_b = -(C - P_d), \tag{1}$$

to jest, absolutna wartość wypadkowego ciśnienia na boczne ściany naczynia równą jest różnicy absolutnych wartości: ciężaru w niem zawartej cieczy i ciśnienia na dno naczynia. Jeżeli $C > P_d$, jak to ma miejsce przy naczyniu, fig. 101, wtedy $P_b$ jest odjemnem, skierowanem zatem z góry do dołu; tak że w tym razie wszystkie trzy wartości: $P_b$, $P_d$ i C są jednakowego znaku; gdybyśmy zaś szukali ciśnienia $P_z''' = P_b$ dla naczynia przedstawionego na fig. 103, gdzie $C < P_d$, otrzymalibyśmy dla tego przypadku $P_b$ ze znakiem $+$.

Fig. 103.




Uważając we wzorze (1) absolutną wartość $P_b$, będziemy mieli:

$$P_b = C - P_d,$$

zkąd:

$$C = P_d + P_b;$$

dla fig. 103, znalezlibyśmy:

$$P_b = P_d - C,$$

zkąd:

$$C = P_d - P_b;$$

te dwa przypadki mogą być objęte jednym wzorem:

$$P_d \pm P_b = C,$$

który pokazuje że ostateczna wypadkowa wszystkich ciśnień na wszystkie ściany naczynia równą jest ciężarowi w niem zawartej cieczy. Tym sposobem przychodzimy do twierdzenia wyprowadzonego w § 92.

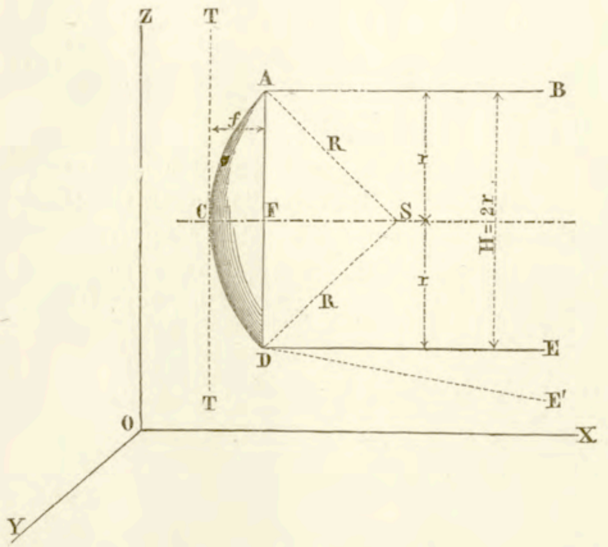
---

## III. ŚCIANY SFERYCZNE.

**106.** Przechodząc do ścian sferycznych, rozpatrzymy najprzód ściany tego rodzaju pionowe, a następnie poziome. Nazywamy ścianami sferycznemi pionowemi lub poziomemi takie ściany, dla których płaszczyzna styczna w ich wierzchołku jest płaszczyzną pionową lub też poziomą. Weźmy zatem następujący przykład:

I PRZYKŁAD. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na powierzchnię odcinka sferycznego ACD** (fig. 104).

Niech łuk ACD będzie profilem ściany na płaszczyznę ZX; przypuszczamy że oś symetryi ściany jest linją poziomą, równoległą do płaszczyzny XY; płaszczyzna TT styczna w punkcie C, wierzchołku odcinka, będzie więc płaszczyzną pionową, równoległą do ZY. Ażeby nasza ściana była zupełnie wyznaczoną, potrzebujemy mieć cięciwę łuku AD i jego strzałę CF; jeżeli więc będzie nam danem :




$$AF = \frac{AD}{2} = r,$$

$$CF = f,$$

wtedy promień $DS = R$ powierzchni sferycznej, na której wziętym jest odcinek ACD, otrzyma się ze wzoru :

$$R = \frac{r^2 + f^2}{2f} \; ;$$

a objętość V zawarta w odcinku ograniczonym płaszczyzną AD wyrazi się :

$$V = \frac{1}{6}\pi f^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 f.$$

Jak wiadomo, kierunek ciśnień wywieranych w rozmaitych punktach odcinka przechodzić będzie przez środek sfery S.

Przypuszczając że powierzchnia wolna cieczy jest AB, wysokość płaszczyzny parcia nad najniższym punktem D ściany będzie $H = 2r$, i dla wyznaczenia ciśnienia wywieranego na odcinek ACD, kształt i położenie dolnej ściany DE jest rzeczą zupełnie obojętną : może ona być poziomą jak DE, lub pochyłą jak DE' i t. p ; dlatego też ścianę tę zostawiamy dowolną.

Dla rozwiązania zadania potrzebujemy znaleźć trzy wartości : $P'_x = \Sigma X$, $P_y'' = \Sigma Y$ i $P_z''' = \Sigma Z$.

Otóż widzimy najprzód że $P_y'' = 0$, albowiem walce rzucające rozmaite elementa ściany na płaszczyznę ZX będąc poziomemi, elementa spotykane każdym z takich walców zostają pod ciśnieniem tego samego natężenia, ale przeciwnego kierunku, względem płaszczyzny symetryi ściany, to jest względem płaszczyzny pionowej poprowadzonej przez łuk ACD; a że dla całej powierzchni odcinka, rzuty przedniej i tylnej jej części wzajemnie się zakrywają na płaszczyźnie ZX, zatem $\Sigma Y = P_y'' = 0$(*).

(*) Moglibyśmy przyjść do tego samego wypadku, a zarazem zdać sobie sprawę jak się zmieniają znaki innych dwóch składowych X i Z elementarnych ciśnień w rozmaitych punktach odcinka, nadając trzem spółrzędnym płaszczyznom taki ruch postępowy, ażeby, w każdym danym razie, początek ich znajdował się w punkcie którego uważamy ciśnienie. Rozkładając wtedy ciśnienie to podług trzech osi, zobaczymy w jaką ich stronę skierowane będą składowe X, Y, Z i jak się zmienia znak tych ostatnich, przechodząc od połowy ściany leżącej przed płaszczyzną symetryi KL (fig. 105), do drugiej jej połowy, położonej po drugiej stronie tej płaszczyzny. Figura 106 przedstawia znaki składowych, otrzymane rozkładając ciśnienia :

α) dla punktów łuku ACD położonego w płaszczyźnie symetryi KL, równoległej do płaszczyzny ZX;

β) » » » *acd* (którego naturalna wielkość EC'C''F jest przedstawioną na figurze 105), leżącego w płaszczyźnie pionowej PQ, poprowadzonej przez środek sfery pod kątem θ względem płaszczyzny KL;

γ) » » » *a'c'd'* znajdującym się w płaszczyźnie pionowej P'Q', poprowadzonej jak poprzednio i pod tym samym, względem płaszczyzny KL, kątem.

Wszystkie ciśnienia wywierane na odcinek sferyczny sprowadzają się zatem do dwóch tylko sił :

---

Z figury 106 widzimy :

1) Że wszystkie ciśnienia położone w pionowej płasczyznie symetryi KL nie dają składowej Y, tak że $\Sigma Y$ odpowiadająca łukowi ACD jest sama przez się zerem; co i być powinno, gdyż płasczyzna KL jest prostopadłą do osi OY.

Fig. 105.

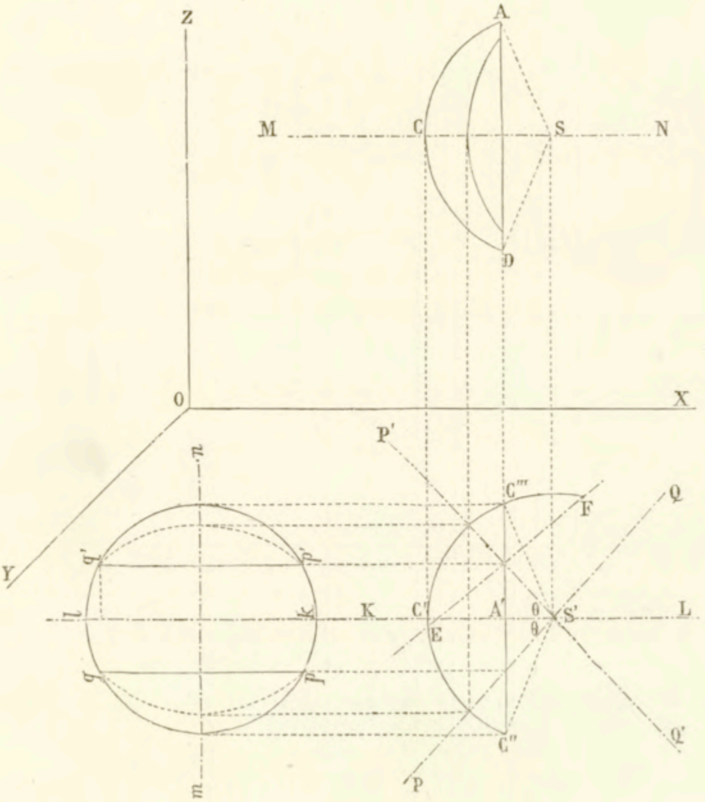
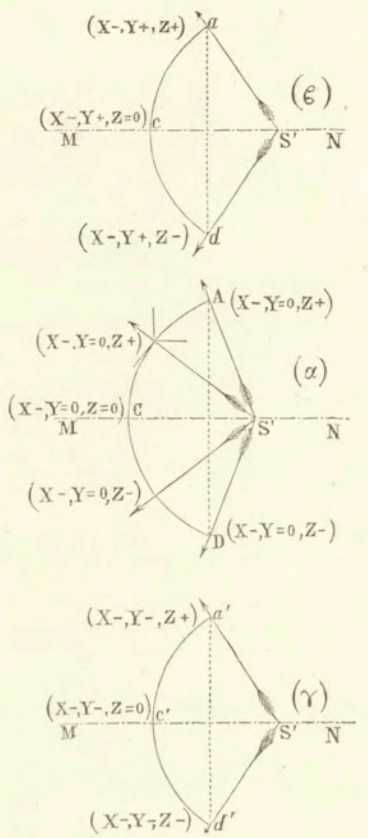



Fig. 106.




Dla punktu A (fig. α) napisaliśmy znaki trzech składowych X, Y, Z, tak jak te znaki przedstawiają się *geometrycznie* z kierunku S'A; wiemy jednak że punkt ten znajduje się na powierzchni wolnej AB, i że ciśnienie w nim będzie zero, to jest że: $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$.

2) Dla wszystkich punktów C, c i c' znajdujących się w poziomej płasczyznie symetryi MN danej ściany, składowa Z jest również zerem; co też było do przewidzenia, gdyż ciśnienia w punktach położonych w płasczyznie MN znajdują się całkiem w tej płasczyznie, która jest właśnie prostopadłą do osi OZ.

3) Nakoniec z figur (α), (ε) i (γ) wypada że :

*Co do składowych* X, wszystkie one są odjemne na całej przestrzeni naszej ściany;

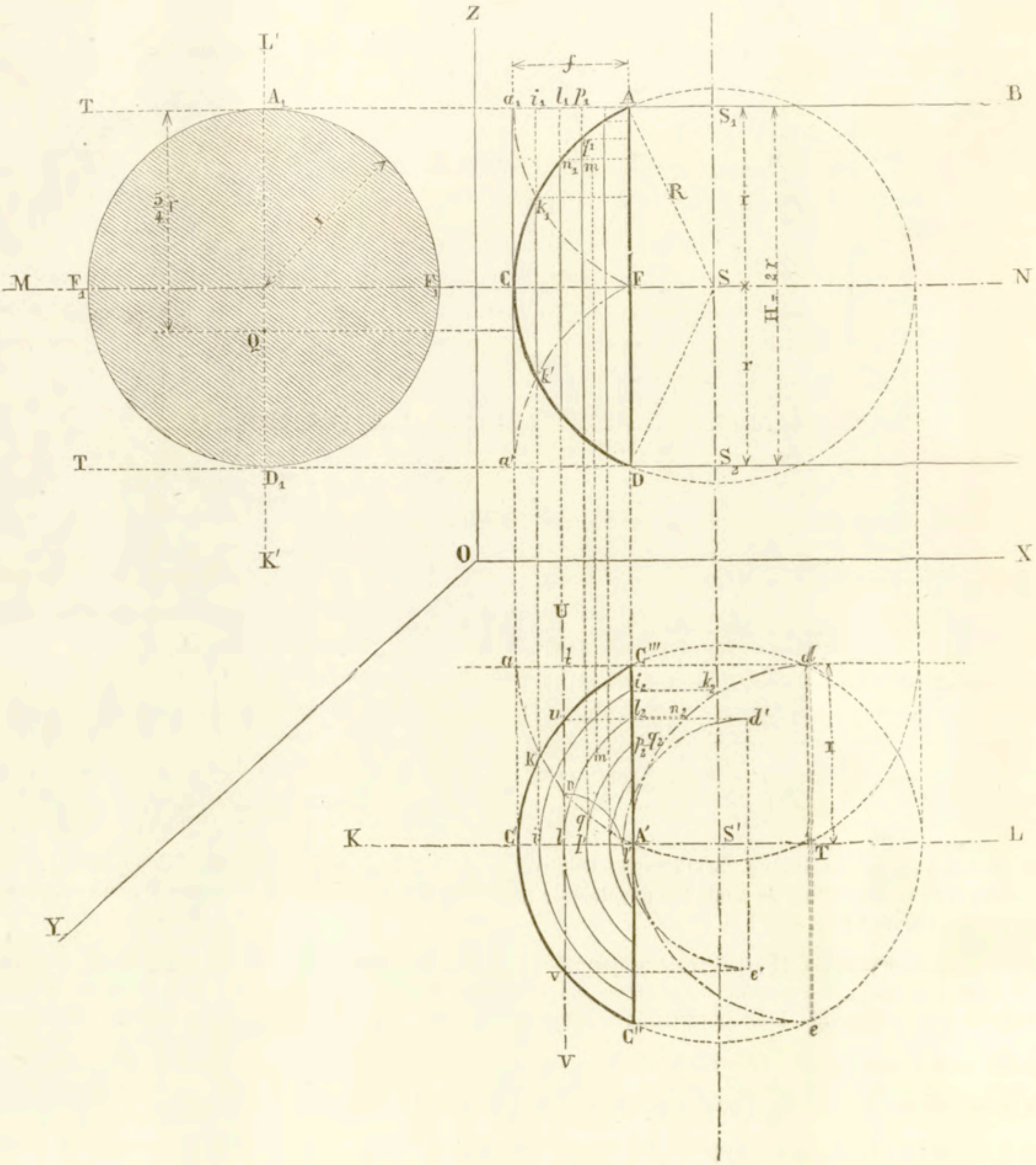
*Co do składowych* Y, płasczyzna symetryi KL dzieli ścianę na dwie połowy, z których jedna, położona przed płasczyzną KL, wszędzie ma Y z +, a zaś druga, leżąca z tyłu tej płasczyzny, wszędzie ma Y z —; na samej zaś płasczyznie KL, jak już nadmieniliśmy, $Y = 0$. Podobnie możemy powiedzieć

*O składowych* Z; dla tych składowych przedziałem służy płasczyzna symetryi pozioma MN; nad tą płasczyzną wszystkie punkta ściany mają Z ze znakiem —; pod nią zaś Z jest +; a na samej płasczyznie MN mamy wszędzie $Z = 0$.

siły $P'_x$ równoległej do osi OX, i siły $P_2'''$ równoległej do OZ. Szukajmy naprzód natężenia siły poziomej.

Wiemy że siła $P'_x$ będzie równą całkowitemu ciśnieniu wywieranemu na rzut powierzchni ACD

Fig. 107.




(fig. 107) na płasczyznę ZY, z warunkiem ażeby każdy punkt jego ponosił ciśnienie odpowiedniego mu punktu na ścianie ACD. Otóż, ponieważ płasczyzna podstawy odcinka AFD jest równoległą do płasczyzny ZY, koło $A_1F_1D_1E_1$ będzie szukanym rzutem odcinka ACD, i w położeniu AFD wszystkie punkta koła będą, co do ciśnienia pod jakiem one zostają, zadość czynić wyżej podanym warunkom;

siła więc $P'_x$ będzie równą wypadkowemu ciśnieniu na koło pionowe $A_1F_1D_1E_1$, zawarte między dwiema stycznemi poziomemi $A_1T$ i $D_1T$, z których pierwsza znajduje się na powierzchni wolnej AB, a druga na odległości $H = 2r$ od tej powierzchni. Owoż, ciśnienie wypadkowe na koło może być wyznaczone bądź sposobem analitycznym (§ 47), bądź geometrycznie (§ 70): wyraża się ono, dla koła którego płaszczyzna jest nachyloną do poziomu pod kątem $\alpha$, następującym wzorem:

$$P = H w s t \alpha \pi R^3;$$

więc, zważywszy że w naszym przypadku promień koła jest $r$, a $wst\alpha = 1$, będziemy mieli:

$$(1) \qquad P'_x = \Sigma X = H\pi r^3.$$

Ciśnienie $P'_x$ skierowanem będzie ku stronie odjemnej osi OX, a kierunek jego przebija powierzchnię odcinka ACD w punkcie położonym w pionowej płaszczyznie symetryi (KL, K'L'), i znajdującym się na odległości $\frac{5}{4} r$ od powierzchni wolnej AB.

Przechodząc do szukania wartości siły pionowej $P_z'''$ uważamy najprzód, że dla połowy ściany położonej nad poziomą płaszczyzną symetryi MN wszystkie składowe Z będą ze znakiem $+$; a dla połowy znajdującej się pod tą płaszczyzną, składowe Z będą miały znak $-$; tak że $P_z'''$ będzie wypadkową dwóch sił: $P'$ odpowiadającej górnej części ściany, i $P''$ odpowiadającej dolnej jej części.

I) Zaczniemy od szukania wartości na $P'$.

Na mocy fundamentalnego twierdzenia ścian krzywych, mamy:

$$P' = \Sigma Z = \Sigma p \omega_{xy},$$

gdzie znaki $\Sigma$ i $\omega$ rozciągają się tylko do powierzchni AC, położonej nad płaszczyzną MN.

Niech więc $C'C''A'C'''$ będzie rzutem na płaszczyznę XY połowy ściany ACF; $A'$ oznacza rzut punktu A, a łuk $C'''C'C''$ rzut równoleżnika przechodzącego przez punt C. Ażeby z tego rzutu przejść do znalezienia wartości $P'$, powinniśmy na płaszczyznie odcinka kołowego $C'''C'C''A'C'''$ wystawić figurę ograniczoną z góry taką powierzchnią, żeby długość prostopadłej, w każdym punkcie $m'$, do płaszczyzny odcinka, zawarta między tą płaszczyzną a szukaną powierzchnią, wyrażała wysokość płaszczyzny ciśnienia AB nad punktem ściany $m$, odpowiadającym punktowi $m'$ na rzucie.

Otóż wyobraźmy płaszczyznę pionową poprowadzoną najprzód przez $A'C'$, i obracając takowę około prostej $A'C'$, przedstawmy ją w kładzie na płaszczyznę poziomą (płaszczyznę papieru). Jeżeli na linji $A'C'$ weźmiemy rozmaite punkta: $C'$, $i$, $l$, $p$, ... $A'$ i wyprowadzimy z nich prostopadłe do $A'C'$: $C'a$, $ik$, $ln$, ... takiej długości żeby było:

$$C'a = Ca_1, \qquad ik = k_1 i_1, \qquad ln = n_1 l_1, \ \ldots \qquad A' = A = 0;$$

wysokości: $C'a$, $ik$, ... $A' = 0$, wyrażać będą ciśnienie pod jakiem się znajdują odpowiednie punktom: $C'$, $i$, $l$, ... $A'$, rzutu, punkta C, $k_1$, $n_1$, ... A, na danej nam ścianie; końce tych prostopadłych: $a$, $k$, $n$, ... $A'$, będą więc się znajdować na szukanej powierzchni, tak że krzywa $akn$ ... $A'$, łącząca te końce będzie nam przedstawiać przecięcie szukanej powierzchni płaszczyzną pionową, poprowadzoną przez $A'C'$. Otóż, widocznem jest że krzywa $akn$ ... $A'$, będzie niczem innem jak łukiem $An_1k_1C$ naszej ściany, wziętym w położeniu $a_1k_1F$; posuwając prostę CF do zlania się jej z linją $a_1A$, łuk $akn$ ... $A'$ $= a_1k_1F$ przyjmie położenie symetryczne łukowi $Ak_1C$ względem prostej $a_1A$.

Poprowadźmy teraz przez punkta: $i$, $l$, $p$, .. łuki $ii_2$, $ll_2$, $pp_2$, ... spółśrodkowe z łukiem $C''C'C''$; będą one przedstawiać rozmaite równoleżniki naszej ściany, a zatem wszystkie punkta każdego z łuków uważanego zosobna, winny się znajdować pod jednakowem ciśnieniem : ciśnienie to zmniejsza się z promieniem łuku i dochodzi do swego minimum w punkcie A', gdzie staje się ono zerem. Wyobraziwszy więc płaszczyznę pionową, poprowadzoną przez A'C''', jej przecięcie się z szukaną powierzchnią powinno być miejscem geometrycznem końców prostopadłych do płaszczyzny poziomej, wystawionych wzdłuż linji A'C', i równych odpowiednio :

$$C'''d = C'a = Ca_1,$$

$$i_2k_2 = ik = k_1i_1,$$

$$l_2n_2 = ln = n_1l_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$A' = A = 0.$$

Otóż znajdziemy że tem miejscem geometrycznem będzie $\frac{1}{4}$ okręgu zakreślonego z punktu T promieniem $TA' = C''d = C'a = r$, to jest promieniem podstawy AD odcinka sferycznego. Łuk $A'n_2k_2d$ będzie stycznym w punktach A' i $d$ do prostych A'C''' i C''$d$.

Widocznem jest, że to cośmy znaleźli dla części A'C'C''' rzutu, położonej nad KL, stosuje się najzupełniej do części symetrycznej A'C'C'', znajdującej się pod KL ; tak że płaszczyzna pionowa poprowadzona przez C'''C'' przetnie szukaną powierzchnię, odpowiadającą części A'C'C'', podług $\frac{1}{4}$ okręgu A'$e$ tegoż samego promienia $r$, jak to jest przedstawionem na kładzie.

Z powiedzianego wyżej łatwo jest widzieć, że powierzchnia ograniczająca z góry figurę wystawioną na odcinku kołowym C''C'C'A'C''' jest taka że :

1° Płaszczyzna *pozioma*, poprowadzona na wysokości $C'a = r$ nad płaszczyzną odcinka C''C'C'A'C''', przecina tę powierzchnię podług łuku rzucającego się w C'''C'C'', i mającego za promień R, to jest promień danej nam sferycznej ściany;

2° Płaszczyzna *pionowa* poprowadzona przez cięciwę C'''C'' przecina szukaną powierzchnię podług półokręgu $d$A'$e$, stycznego w punkcie A' do płaszczyzny odcinka C'''C'C''A'C''', i mającego za promień $r$, to jest promień podstawy AD naszej ściany;

3° Płaszczyzna *pionowa*, wystawiona w punkcie C' równolegle do płaszczyzny C'''C'', będzie zawierać jeden tylko punkt $a$ powierzchni o której mowa ; będzie ona styczną w punkcie $a$ do tej powierzchni, gdyż zawiera ona : 1) styczną pionową $a$C' do łuku $a$A', należącego do szukanej powierzchni ; 2) styczną poziomą do łuku C'''C'C'' uważanego na wysokości $C'a = r$ nad płaszczyzną C'''C'C''A'C''', to jest poprowadzonego poziomo przez punkt $a$.

4° Powierzchnia walcowa prosta, wystawiona na łuku C'''C'C'' leżącym na płaszczyznie podstawy naszej figury, jest styczną do powierzchni szukanej wzdłuż takiegoż samego łuku poziomego, uważanego na wysokości $C'a = r$ nad płaszczyzną podstawy.

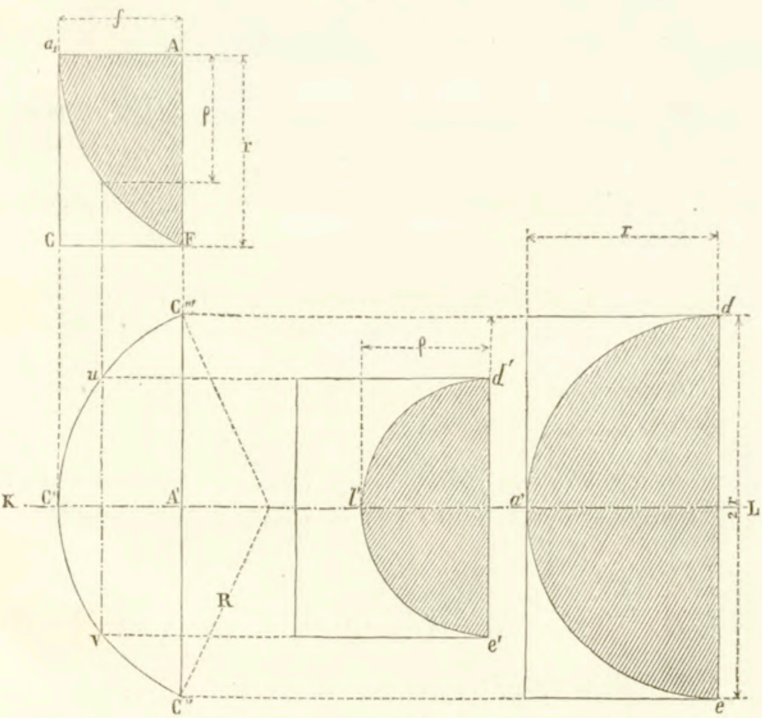
Ażeby mieć dokładniejsze pojęcie o kształcie szukanej powierzchni, uważajmy jej przecięcia płaszczyznami poziomemi i pionowemi. W tym celu zauważymy najprzód, że ponieważ wszystkie punkta jakiegokolwiek łuku $ll_2$, wziętego na rzucie C'''C'C''A'C''', zostają pod jednakowem ciśnieniem, wyrażonem wysokością $ln = n_1l_1$, górna podstawa prostego walca, mającego tę wysokość $ln$ i wystawionego na łuku $ll_2$, będzie się znajdować zarazem na płaszczyźnie poziomej i na szukanej powierzchni; więc *powierzchnia nasza jest taką, że jej przecięcia płaszczyznami poziomemi dają łuki spółśrodkowe z łukiem* C‴C′C″.

Uważając teraz płaszczyznę pionową UV, poprowadzoną równolegle do płaszczyzny C‴C″ przez jakikolwiek punkt $l$, spostrzegamy że punkt wynikający z przecięcia się szukanej powierzchni z płaszczyznami UV i KL, będzie punktem najniżej położonym względem płaszczyzny odcinka kołowego C‴C′C″A′C″; gdyż wysokość $ln$, wyrażająca ciśnienie w punkcie $l$ wziętym na KL, będzie mniejszą od wysokości wyrażającej ciśnienie we wszystkich innych punktach rzutu, uważanych na prostej UV. Punkta szukanej powierzchni położone w płaszczyźnie UV wznosząc się więc coraz bardziej po jednej i po drugiej stronie płaszczyzny symetryi KL, ich wzniesienie maximum odpowiadać będzie punktom $u$ i $v$, położonym na łuku C″C′C″, i tam gdzie wysokość wyrażająca ciśnienie równą jest promieniowi $r = C'a$. Zobaczylibyśmy bez trudności, że przecięcie szukanej powierzchni płaszczyzną UV jest półokręgiem $d'l'e'$, mającym za promień $lu = lt - ln = r - ln$; przedstawiamy go w kładzie na płaszczyznę papieru: odległość $ll' = ln$, a $ud' = C'a$. Prowadząc równolegle do C‴C″ inne płaszczyzny pionowe, otrzymalibyśmy na ich przecięcia się z szukaną powierzchnią *szereg półokręgów*, których środki znajdowałyby się wszystkie na osi KL, a promienie zmniejszałyby się od $r$ do 0; promień $r$ odpowiadać będzie płaszczyźnie pionowej C‴C″, promień 0 — płaszczyźnie stycznej poprowadzonej przez punkt C′.

Wnosimy ztąd że szukana powierzchnia jest *powierzchnią sferyczną*, i że jej część jedynie nam potrzebna dla znalezienia P′, będzie nic innego jak powierzchnia połowy sferycznego odcinka, tego samego promienia R i tejże samej strzały $f$ co i dana nam ściana ACD, — mającego zatem za swą podstawę koło o promieniu $r$.

Możemy więc teraz wyrazić analitycznie natężenie siły P′. W tym celu dosyć jest znaleźć ciężar cieczy zawartej w objętości V′ równej różnicy dwóch objętości:

Fig. 108.




1) Objętości $V_1$ prostego walca $CFa_1A$ (fig. 108) wystawionego na łuku C‴C′C″, i mającego odcinek C‴C′C″ za podstawę, a $Ca_1 = r$ za wysokość.

2) Objętości $V_2$ połowy odcinka sferycznego $a_1FA$, którego podstawą jest koło o promieniu $r$, a wysokością $a_1A = f$. Jeżeli zatem długość łuku C‴C′C″ oznaczymy przez $l$, to będziemy mieli:

$$V_1 = \left[\frac{lR}{2} - (R - f)r\right]r,$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\pi f^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 f\right);$$

zkąd:

$$P' = \Pi V' = \Pi\left[\left(\frac{lR}{2} - (R - f)r\right)r - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\pi f^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 f\right)\right]; \tag{1}$$

i jak widzieliśmy wyżej, siła $P'$ będzie miała znak $+$, czyli skierowaną ona będzie z dołu do góry.

II) Dla otrzymania wypadkowej ostatecznej $P_z'''$, pozostaje nam jeszcze znaleźć $P''$, to jest ciśnienie wywierane na drugą połowę CFD (fig. 107) ściany, położoną pod płaszczyzną symetryi MN.

Rzut na płaszczyznę poziomą części CFD naszej ściany, przedstawi się tą samą figurą $C'''C'C''A'C'''$ co i poprzednio, tylko teraz punkt $A'$ wyrażać będzie rzut punktu D najbardziej ciśnionego, albowiem wysokość nad nim płaszczyzny ciśnienia AB jest $=2r$; co zaś do łuku $C'''C'C''$, będzie on jak przedtem rzutem równoleżnika ściany poprowadzonego przez punkt C, i dla którego ciśnienie we wszystkich jego punktach wyraża się wysokością $r$.

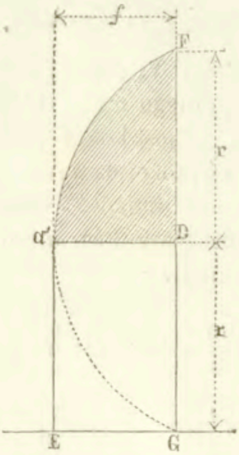
Objętość, której ciężar wyrażać będzie natężenie siły $P''$, znajdziemy bez trudności; pomijając zatem szczegółowe rozpatrywanie tego przypadku, ograniczamy się streszczeniem rezultatów jakie w tym razie otrzymujemy.

I tak, możemy dla połowy CFD danej nam ściany uważać płaszczyznę CF za płaszczyznę ciśnienia, to jest, przyjąć że ciśnienie na równoleżniku ($C$, $C''C'C''$) jest zerem, a że w punkcie ($D$, $A'$) wyraża się ono wysokością $DF=r$, z warunkiem tylko abyśmy później dodali do ciśnienia, znalezionego w skutek takiego przypuszczenia, ciśnienie stałe zależne od wysokości $FA=r$. Tym sposobem nie zmienimy rzeczywistej wysokości powierzchni wolnej AB nad rozmaitymi punktami ściany CFD, i dwa ciśnienia cząstkowe do siebie dodane dadzą ciśnienie rzetelne. Łatwo wtedy możemy obaczyć, że łuk $A'ka=$ łukowi $Fk_1a_1$, otrzymany dla górnej połowy ACF ściany, zamieni się dla dolnej jej połowy CFD na łuk $Fk'a'$ zakreślony z punktu $S_2$ promieniem R, i że ten łuk $Fk'a'$ wyrażać będzie w naszym przypadku przecięcie powierzchni, ograniczającej objętość dającą $P''$, płaszczyzną pionową poprowadzoną przez oś symetryi KL. Idąc za rozumowaniem powyżej używanem, przychodzimy do następującego wniosku:

Objętość $V''$, której ciężar wyraża natężenie siły $P''$, będzie równą summie dwóch objętości:

1) objętości $V_1$ walca $EGa'D$ (fig. 109), wystawionego jak poprzednio na łuku $C''C'C''$ i mającego $r$ za wysokość:

Fig. 109.




2) objętości $V_2$ połowy odcinka sferycznego $Fa'D$, dopełniającej objętość $a_1AF$ uważaną na fig. 108 całego odcinka. W skutek tego otrzymujemy:

$$(2)\qquad P''=\Pi V''=\Pi\left[\left(\frac{l R}{2}-(R-f)r\right)r+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\pi f^3+\frac{1}{2}\pi r^2 f\right)\right].$$

Siła $P''$ skierowaną będzie z góry do dołu, to jest powinna być wziętą ze znakiem $-$.

Ażeby otrzymać absolutną wartość ostatecznej wypadkowej pionowej $P_z'''$, dosyć jest wziąć różnicę wyrażeń (2) i (1); prościej jednak będzie napisać tak:

$$(3)\quad P_z'''=P''-P'=\Pi\left[(V_1+V_2)-(V_1-V_2)\right]=\Pi 2V_2=\Pi\left(\frac{1}{6}\pi f^3+\frac{1}{2}\pi r^2 f\right).$$

Siła wypadkowa $P_z'''$ ma znak $-$, a jej natężenie jest, jak widzimy, równem ciężarowi cieczy zawartej w objętości odcinka sferycznego stanowiącego daną nam ścianę, w przypuszczeniu że powierzchnia odcinka jest zamknięta płaszczyzną AD, to jest jego podstawą.

Uwaga. Gdyby płaszczyzna AD, zamiast być ścianą geometryczną, była ścianą rzeczywistą, utworzyłaby ona razem z powierzchnią sferyczną ACD (fig. 107) naczynie zamknięte, i wypadkowa ostateczna ciśnień na wszystkie ściany tego naczynia powinnaby być równą (§ 92) ciężarowi w niem zawartej cieczy. Tak też będzie istotnie, albowiem do sił: $P'_x$ i $P_z''$, znalezionych dla ściany sferycznej, przybędzie teraz inna siła $\mathfrak{P}_x$, wyrażająca wypadkowe ciśnienie na podstawę odcinka AD; otóż dwie siły $P'_x$ i $\mathfrak{P}_x$ wzajemnie się równoważą, gdyż są one równego natężenia, a działają w przeciwnym sobie kierunku. Pozostanie więc jedna tylko wypadkowa $P_z''$, której wyrażenie (3) zgadza się najzupełniej z twierdzeniem § 92.

Wniosek. W szczególnym przypadku kiedy $r=R$, to jest gdy odcinek sferyczny staje się połową sfery, mamy $f=R$; tak że dla ściany półsferycznej znajdujemy z poprzednich wzorów na ciśnienia $P_x'$ i $P_z'''$ następujące wyrażenia:

$$P'_x = \Pi \pi R^3,$$

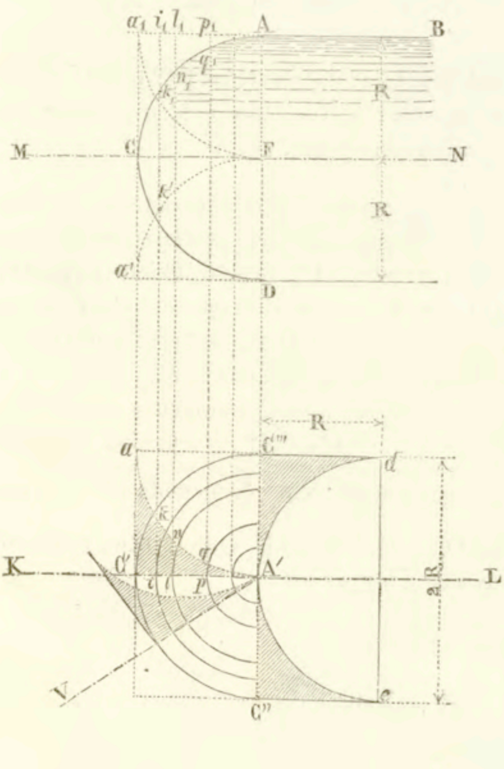
$$P'''_z = \Pi\left(\frac{1}{6}\pi R^3 + \frac{1}{2}\pi R^3\right) = \Pi \frac{2}{3}\pi R^3;$$

siła $P_z'''$ równą jest wtedy ciężarowi cieczy zawartej w objętości połowy sfery.

Otrzymalibyśmy ten sam rezultat, traktując wprost przypadek ściany półsferycznej. Zadanie takie rozwiązuje się bardzo łatwo, z powodu że w tym razie rodzaj powierzchni ograniczającej objętość, służącą do wyznaczenia wartości na $P_z'''$, staje się widocznym sam przez się. Niech więc będzie:

**107.** II Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na ścianę półsferyczną ACD której promień jest R (fig. 110).**

Fig. 110.




Wiemy że $P_y''=\Sigma Y=0$, a wartość na $P'_x=\Sigma X$ otrzymamy z rzutu ściany ACD na płaszczyznę ZY; otóż tym rzutem jest koło o promieniu R; ciśnienie wypadkowe na połowę powierzchni sferycznej, uważane w kierunku osi poziomej X, wyrazi się zatem:

$$P'_x = \Pi\pi R^3,$$

i będzie ono ze znakiem — .

Pozostaje znaleźć wypadkowe ciśnienie w kierunku osi pionowej Z.

Uważając siłę $P_z'''=\Sigma Z$ za wypadkową dwóch sił: $P'$, czyli ciśnienia na górną połowę ACF ściany, i $P''$, to jest ciśnienia na jej połowę dolną CFD, zaczniemy od szukania pierwszej siły $P'$.

Niech $C'''C'C''$ będzie rzutem na płaszczyznę poziomą górnej połowy ściany. Ciśnienie w punkcie A' będzie zero, a we wszystkich punktach łuku $C'''C'C''$ wyrazi się ono wysokością FA=R; prowadząc przez punkta: $i, l, p$ ... szereg łuków spółśrodkowych z łukiem $C'''C'C''$, ciśnienie w rozmaitych ich punktach przedstawionem będzie odpowiednio wysokościami :

$$ik = k_1 i; \qquad ln = n_1 l_1; \qquad pq = q_1 p_1; \ldots \; A' = A = 0;$$

tak że przecięcie powierzchni ciśnienia (to jest powierzchni ograniczającej figurę wystawioną na półkole $C'''C'C'$, i z objętości której znajdziemy siłę $P'$) płaszczyzną pionową poprowadzoną przez $A'C'$ będzie $\frac{1}{4}$ okręgu $A'a =$ łukowi $AC$. Ponieważ $A'C' = A'C'' = A'C''', \ldots$ widocznem jest że powierzchnia ciśnienia będzie powierzchnią sferyczną, mającą za promień $R$, i utworzoną obrotem około punktu $A'$ na $180°$ trójkąta krzywolinijnego $A'C'a$, położonego w płaszczyznie pionowej, a mającego swą podstawę $A'C'$ na płaszczyznie koła $C'''C'C''$. Górną więc powierzchnią szukanej figury będzie $\frac{1}{4}$ powierzchni sferycznej tego samego co i dana ściana promienia; zaś jej powierzchnią boczną będzie powierzchnia prostego walca wystawionego na łuku $C'''C'C''$ i mającego $R$ za wysokość.

Powierzchnia sferyczna będzie styczną do powierzchni walcowej wzdłuż jej górnéj podstawy.

Fig. 111.

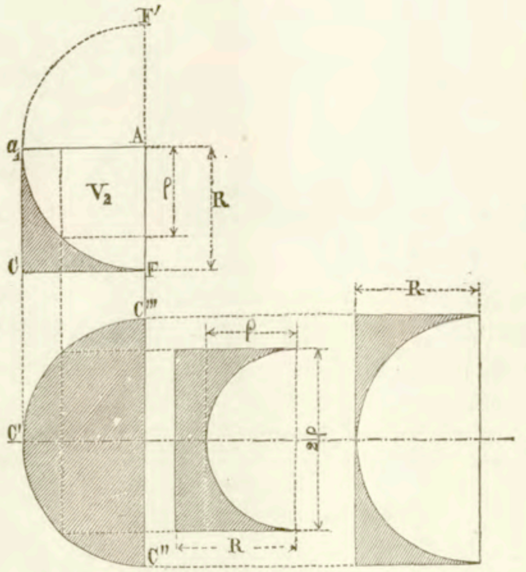
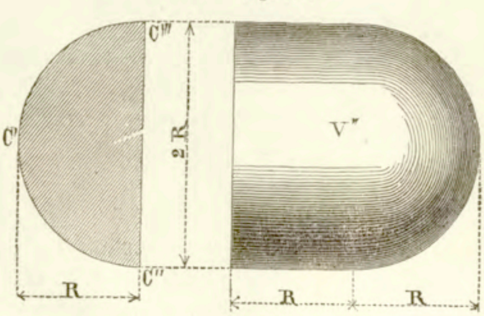


Fig. 112.



Oznaczając objętość połowy walca $C'''C'C''$ (fig. 111) przez $V_1$, a objętość $\frac{1}{4}$ sfery przez $V_2$, szukana objętość $V'$ wyrazi się ich różnicą :

$$V' = V_1 - V_2 = \frac{1}{2}\pi R^2 . R - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$

i wartość $P'$ będzie :

$$P' = \Pi V' = \Pi \frac{1}{6}\pi R^3.$$

Przejdźmy teraz do wartości $P''$, to jest do wypadkowego ciśnienia na połowę ściany leżącą pod płaszczyzną symetryi $MN$.

Powtarzając rozumowania poprzedniego § zobaczymy (fig. 110) że przecięcie powierzchni ciśnienia płaszczyzną symetryi $KL$ będzie łukiem $Fk'a' =$ łukowi $CD$, i że $P''$ wyrazi się ciężarem cieczy zawartej w objętości $V''$ (fig. 112), równej summie dwóch objętości $V_1$ i $V_2$ uważanych wyżej; albowiem $V''$ będzie tutaj niczem innem jak objętością walca wystawionego na rzucie $C'''C'C''$, zwiększoną objętością $\frac{1}{4}$ sfery mającej względem górnej podstawy $a_1A$ walca (fig. 111) położenie $Aa_1F'$ symetryczne położeniu $Aa_1F$ uważanemu przy $P'$.

Będziemy więc mieli :

$$V'' = V_1 + V_2 = \frac{1}{2}\pi R^3 + \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{5}{6}\pi R^3;$$

zkąd :

$$P'' = \Pi V'' = \Pi \frac{5}{6} \pi R^3.$$

Wiemy że P' jest ze znakiem +, zaś P'' ze znakiem — ; ponieważ P'' > P', natężenie wypadkowej ostatecznej $P_z'''$ będzie :

$$P_z''' = P'' - P' = \Pi \frac{2}{3} \pi R^3; \tag{3}$$

to jest ciśnienie wypadkowe na ścianę półsferyczną, uważane w kierunku pionowym, równem jest ciężarowi cieczy zawartej w objętości połowy tej sfery.

Wypadkowa $P_z'''$ będzie mieć znak — , co i być powinno, gdyż siła ciężkości jest właśnie z tym znakiem.

**108.** Rozpatrzywszy ciśnienie na ściany sferyczne mniejsze od połowy sfery i równe połowie sfery, przejdźmy do przypadku kiedy ściana przewyższać będzie tę połowę. Na wstępie do takiego zadania należy nam zrobić następującą uwagę.

Przy szukaniu wypadkowych ciśnień $P_x' = \Sigma X$ i $P_y'' = \Sigma Y$ kierowaliśmy się ciągle tą własnością, że dla cieczy zostającej w spoczynku pod działaniem siły ciężkości, wszystkie jej punkta leżące na tej samej płaszczyznie poziomej ponoszą, na jedność powierzchni, jednakowe ciśnienie. Własność ta wynika z całkowania wzoru : $dp = \int (Xdx + Ydy + Zdz)$, zastosowanego do cieczy ważkich (§ 29). Otóż, ponieważ rozległość granic całkowania tego wzoru zależy od przestrzeni na jakiej ciecz jest ciągłą (§ 24) — to jest od obszaru na jakim od jakiegokolwiek jej punktu M możemy przejść do innego M' przez nieprzerwany szereg *samych tylko* cząsteczek tej cieczy, i bez względu na drogę jaką chcielibyśmy obrać, — wypada ztąd że własność jednakowego ciśnienia punktów znajdujących się na płaszczyznie poziomej nie może być stosowaną *à priori* do punktów po za granicami takiej przestrzeni położonych; tak że w przypadku, gdzie od jednego punktu M nie możemy przejść do innego M', położonego na tejże co i punkt M płaszczyznie poziomej, jak tylko : 1) bądź wychodząc z samej cieczy, 2) bądź też z płaszczyzny poziomej MM', nie możemy twierdzić *a priori* że ciśnienie w punktach M i M' będzie jednakowe, i podobna kwestya potrzebuje zatem szczególnego roztrząśnienia.

Po tej uwadze rozpatrzmy następujący przykład :

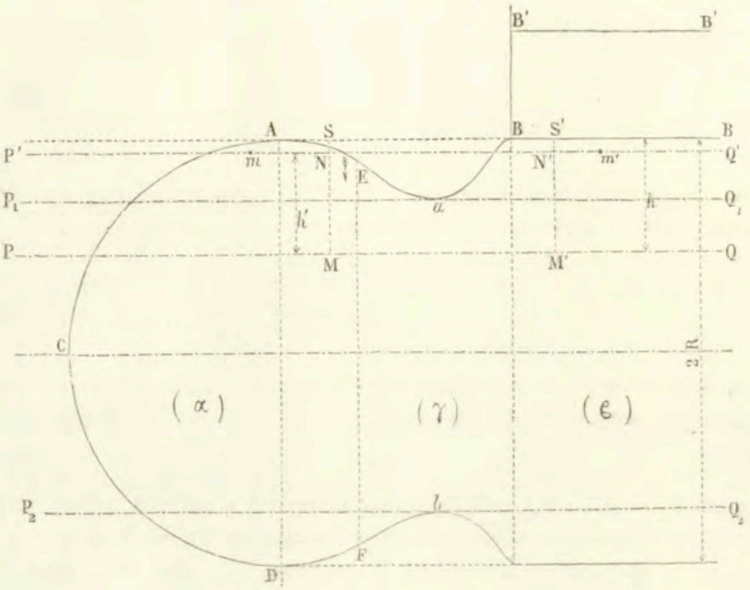
III Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na ścianę sferyczną** EACDF, **przewyższającą połowę powierzchni sfery** (fig. 113).

Niech łuk EACDF będzie profilem na płaszczyznę ZX danej nam ściany. Powierzchnia ta może być rozmaicie połączona z innemi ścianami naczynia ; ale ważniejszą dla nas jest kwestyą wiedzieć jaka jest wysokość, względem płaszczyzny stycznej w punkcie A do sfery, powierzchni wolnej cieczy zawartej w naczyniu (β), z którem komunikuje się naczynie sferyczne (α) za pomocą kanału (γ). Otóż, ponieważ z założenia ciecz wywiera ciśnienie na *całą ścianę* EACDF, możliwych przypadków będzie tylko dwa : 1) powierzchnia wolna BB może zlewać się z płaszczyzną styczną ABB ; 2) powierzchnia wolna cieczy w naczyniu (β) może być po nad płaszczyzną styczną, np. mieć położenie B'B' na pewnej wysokości B'B, nad płaszczyzną AB.

Rozpatrzmy najprzód przypadek pierwszy.

Wiadomo że ciśnienia w rozmaitych punktach naczynia (ϵ), leżących na tej samej płaszczyznie poziomej, będą jednakowe i będą miały za miarę ich natężenia odległość tej płasczyzny od powierzchni

Fig. 113.




wolnej BB; ale nie wiemy *a priori*, czy na przestrzeni zawartej między płasczyzną ABB i płasczyzną poziomą $P_1Q_1$, poprowadzoną przez najniższy punkt $a$ kanału (γ), ciśnienia w rozmaitych punktach uważanych w naczyniu (α) będą takie same jak i w naczyniu (ϵ), dla jednej i tej samej płasczyzny poziomej przecinającej oba naczynia; gdyż np. od punktu $m$ położonego w naczyniu (α) na płasczyznie P'Q' nie możemy, chcąc zawsze pozostawać w cieczy, przejść do punktu $m'$, znajdującego się na tejże płasczyznie P'Q' w naczyniu (ϵ), jak tylko wychodząc z tej płasczyzny. Łatwo jednak będzie się przekonać że ciśnienia w punktach $m$ i $m'$ będą jednakowe.

Istotnie, uważając jakąkolwiek płasczyznę poziomą PQ poprowadzoną pod płasczyzną $P_1Q_1$, ciśnienia w rozmaitych punktach płasczyzny PQ będą jednakowe, tak dla naczynia (ϵ) jak też dla (α); albowiem warunki, o których wyżej była mowa, są tu dopełnione. Ciśnienie na jedność powierzchni będzie, dla obu naczyń, miało za miarę wysokość $h$ płasczyzny ciśnienia BB nad płaszczyzną PQ, a za natężenie $\Pi h$; gdyby więc naczynie (α) było odkrytem w górnej jego części, ciecz w (α) podniosłaby się do wysokości $h$ nad płasczyzną PQ, i powierzchnią równowagi byłaby płasczyzna pozioma przechodząca przez punkt A; gdyż przy tej wysokości ciecz zawarta w naczyniu (α), wywierając *swobodnie* ciśnienie $\Pi h$ na wszystkie punkta leżące w płasczyznie PQ, równoważyłaby dążność tych punktów do wzniesienia się po nad płasczyznę PQ w skutek ciśnienia wywieranego na nie przez ciecz zawartą w naczyniu (ϵ). Więc przy wysokościach cieczy w naczyniu (α) różnych od $h$, równowagi któraby się ustaliła *swobodnie*, *sama przez się*, być nie może, i jeżeli otrzymujemy takową, to jedynie kosztem nowych sił zewnętrznych wprowadzonych do uważanego systemu.

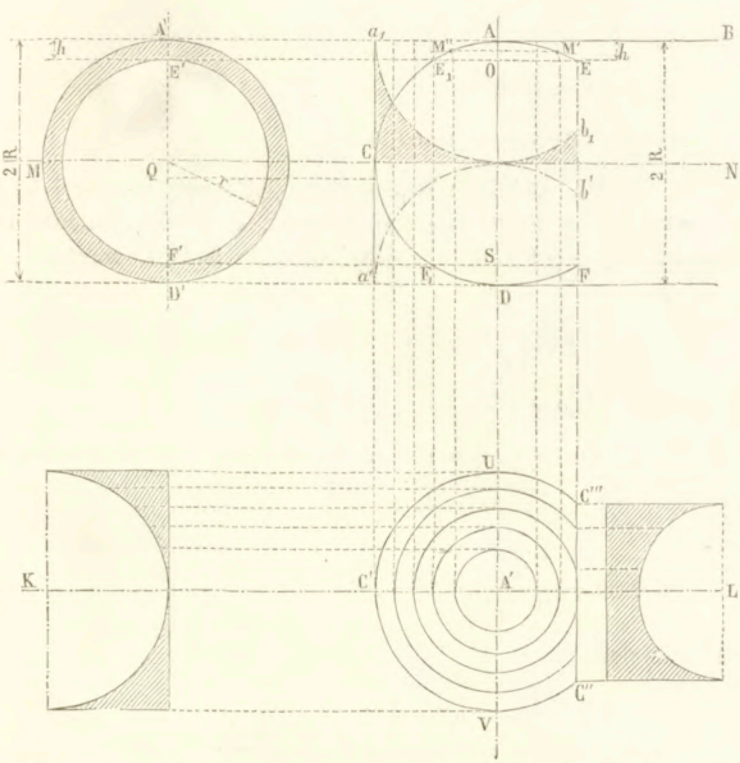
Przy warunkach w jakich się znajdujemy, powierzchnia wolna cieczy dla naczynia (α) sprowadza się do jednego tylko punktu A, gdyż wzniesieniu się innych punktów cieczy do wysokości $h$ przeszkadza ściana AE, która zniewala ciecz do przyjęcia takiej formy jaką posiada naczynie (α). Punkt A będzie zatem jedynym punktem ściany wolnym od wszelkiego zewnętrznego ciśnienia.

Uważajmy teraz jakikolwiek punkt M wzięty na płasczyznie PQ w naczyniu (α); wysokość wyrażająca ciśnienie w tym punkcie musi być równą $h$, to jest wysokości kolumny cieczy zawartej między punktem M' a powierzchnią wolną BB. Otóż, w naczyniu (α) wysokość cieczy nad punktem M jest tylko $MN = h'$; więc reakcya punktu N ściany wywiera na punkt M taki sam wpływ, jakiby wywarła kolumna cieczy wzniesionej nad punktem N na wysokość $h - h' = NS$, równą odległości punktu N od płaszczyzny stycznej do ściany w punkcie A. Więc punkt N cieczy w naczyniu $(\alpha)$ znajduje się pod ciśnieniem wyrażonem wysokością $h - h'$, czyli pod takiem samem ciśnieniem, jakie wytrzymuje w naczyniu $(\beta)$ punkt N' wzięty na płaszczyznie poziomej poprowadzonej przez punkt N. A że ciśnienie we wszystkich punktach płaszczyzny P'N w naczyniu $(\alpha)$ jest takie samo jak ciśnienie punktu N; podobnież jak dla naczynia $(\beta)$, wszystkie punkta płaszczyzny NQ' znajdują się pod ciśnieniem punktu N', wypada ztąd że *wzdłuż płaszczyzny poziomej* P'Q' *ciśnienia na jedność powierzchni w naczyniu* $(\alpha)$ *i w naczyniu* $(\beta)$ *będą jednakowe;* i to samo możemy powiedzieć o wszelkiej innej poziomej płaszczyznie przecinającej oba naczynia.

Zobaczylibyśmy z łatwością, że ciśnienie byłoby jednakowe dla wszystkich punktów położonych na tej samej płaszczyznie poziomej jeszcze i w tym przypadku, kiedy powierzchnia wolna w naczyniu $(\beta)$ znajdowałaby się na pewnej wysokości B'B nad płaszczyzną styczną do sfery w punkcie A, — którego ciśnienie byłoby w takim razie różnem od zera, i miałoby za miarę wysokość B'B.

**109.** Przypuszczając że powierzchnia wolna AB cieczy jest płaszczyzną styczną w punkcie A do powierzchni EACDF (fig. 114), szukajmy wypadkowego cisnienia na tę ścianę. Wiedząc że, bez względu na sposób w jaki ściana dana jest połączoną z innemi ścianami naczynia, ciśnienie na jednej i tej samej płaszczyznie poziomej jest we wszystkich punktach jednakowe, mamy natychmiast:

Fig. 114.




$$P_y'' = \Sigma Y = 0.$$

Ażeby znaleźć $P'_x = \Sigma X$, moglibyśmy się posiłkować wnioskiem III § 91, albo też rozpatrywać wprost rzut całej ściany na płaszczyznę ZY. Otoż rzut ten będzie się składać z dwóch części:

1) Z koła o promieniu R, otrzymanego rzucając na płaszczyznę ZY przednią część ACD naszej ściany;

2) Z obrączki kołowej $(R - r)$, powstałej z rzutu na tęż płaszczyznę części AE, DE ściany, zawartej między dwiema płaszczyznami AD i EF równoległemi do płaszczyzny ZY.

Owoż, obrączka $(R - r)$ zakrywa zupełnie na płaszczyznie ZY równą jej obrączkę należącą do rzutu przedniej części ściany; nadto na całej przestrzeni zawartej między powierzchniami walcowemi rzucającemi okręgi AD i EF, ciśnienie w punktach M' i M'' ściany, symetrycznie położonych względem płaszczyzny pionowej AD, będą równego natężenia i przeciwnego kierunku; więc obrączek powstałych z rzutu części: $AE_1$ i AE, $DF_1$ i DF ściany EACDF uważać nie mamy potrzeby, albowiem odpowiadająca im cząstkowa $\Sigma X$ sprowadza się do zera. Wypadkowa $P'_x$ wszystkich cisnień wywieranych na daną ścianę, równolegle do osi X, będzie wypadkową ciśnień wywieranych w kierunku tej osi tylko na część ściany $E_1CF_1$ mniejszą od połowy sfery; czyli że siła $P'_x$ równą będzie wypadkowemu ciśnieniu na koło (EF, E'F'), jeżeli każdy jego punkt będzie ciśniony ciśnieniem odpowiedniego punktu wziętego na ścianie $E_1CF_1$. Otrzymamy więc natężenie tej siły, uważając całkowite cisnienie na koło F'F' położone na płasczyznie prostopadłej do powierzchni wolnej AB, którego górna styczna, poprowadzona w punkcie E' najmniej cisnionym, znajduje się na odległości :

$$AO = h = R - r$$

od powierzchni AB, a dolna, przechodząca przez punkt F' najbardziej ciśniony, jest odległą od tejże powierzchni AB na : $AS = 2R - h = R + r$.

Otoż, zastosowując wzór ogólny dla ścian płaskich jakichkolwiek :

$$P = \Pi \operatorname{wst}\alpha\, x_1 \Omega,$$

będziemy mieli w naszym przypadku do podstawienia :

$$\operatorname{wst}\alpha = 1, \qquad x_1 = R, \qquad \Omega = \pi r^2;$$

zatem natężenie wypadkowej $P'_x$ wyrazi się :

$$P'_x = \Sigma X = \Pi \pi R r^2,$$

a jej znak będzie — , gdyż skierowaną jest ona ku stronie odjemnej osi X.

Ażeby mieć punkt w którym kierunek siły $P'_x$ (położonej w płasczyznie pionowej symetryi KL) przebija ścianę EACDF, dosyć jest zwrócić się do wzoru dającego odległość $x'$ środka ciśnienia Q na koło E'F' od jego stycznej przeprowadzonej przez punkt E'. Otóż, wiemy z §. 53 że wartość $x'$ ma za wyrażenie :

$$x' = \rho \frac{\delta + \frac{5}{4}\rho}{\delta + \rho};$$

więc odległość E'Q otrzymamy, kładąc w tym wzorze : $\rho = r$, $\delta = h = R - r$; w skutek czego znajdziemy :

$$E'Q = \frac{Rr + \frac{1}{4}r^2}{R};$$

a chcąc mieć odległość A'Q, powinniśmy wziąć :

$$A'Q = E'Q + h = R - r + \frac{Rr + \frac{1}{4}r^2}{R} = \frac{R^2 + \frac{1}{4}r^2}{R} = \frac{4R^2 + r^2}{4R}.$$

Ale tę wartość możemy otrzymać drogą prostszą, opierając się na tej własności ścian płaskich (§ 44), że odległość ich środka ciśnienia od poziomej, według której ściana przecina się z powierzchnią wolną cieczy, równą jest *długości wahania* ściany względem tej poziomej. Używając więc wzoru :

$$l = A'Q = x_1 + \frac{k^2_G}{x_1},$$

w którym mamy do podstawienia:

$$x_1 = \mathrm{R}, \qquad \text{a} \qquad k^2_{\mathrm{G}} = \frac{1}{4} r^2,$$

znajdujemy natychmiast:

$$\mathrm{A'Q} = \mathrm{R} + \frac{\frac{1}{4} r^2}{\mathrm{R}} = \frac{4\mathrm{R}^2 + r^2}{4\mathrm{R}}.$$

Jeżeli położymy $h = 0$, co będzie znaczyć że $r = \mathrm{R}$, czyli że ściana jest równą połowie sfery, wtedy z powyższych wzorów otrzymujemy:

$$\mathrm{P'}_x = \Pi\pi\mathrm{R}^3; \qquad \mathrm{A'Q} = \frac{5}{4}\mathrm{R};$$

jeżeli zaś $h = \mathrm{R}$, przez co $r$ staje się $= 0$, a ściana zupełną sferą, to:

$$\mathrm{P'}_x = 0; \qquad \mathrm{A'Q} = \mathrm{R}.$$

Wniosek. Nazywając koło EF podstawą sferycznej ściany, i streszczając wypadki otrzymane na $\mathrm{P'}_x$ w rozpatrzonych wyżej przykładach, wyprowadzamy następujący wniosek: *jeżeli podstawa ściany sferycznej jest płaszczyzną pionową, wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na ścianę w kierunku prostopadłym do jej podstawy równą jest zawsze całkowitemu na tę podstawę ciśnieniu, bez względu czy ściana jest mniejszą, równą lub większą od połowy sfery.*

Możemy jeszcze wyrazić się inaczej: *wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na ścianę sferyczną w kierunku prostopadłym do jej pionowej podstawy równą jest wypadkowej ciśnień, wywieranych w tymże kierunku, na ścianę dopełniającą ścianę daną do całej sfery.*

Pozostaje nam teraz znaleźć wypadkowę pionową $\mathrm{P}_z''' = \Sigma\mathrm{Z}$.

Natężenie tej siły otrzymamy bez żadnej trudności, za pomocą tejże samej metody jakiej używaliśmy w poprzednio rozpatrzonych przykładach. Ograniczamy się więc przedstawieniem na fig. 114 dwóch przecięć powierzchni ciśnienia płaszczyzną symetryi KL: łuk $a_1 b_1$, który jest niczem innem jak łukiem CAE, oznacza przecięcie płaszczyzną KL powierzchni z której otrzymujemy wartość na P', stosującą się do połowy ściany leżącej nad płaszczyzną symetryi MN; łuk zaś $a'b'$ identyczny z dwoma poprzednimi łukami przedstawia przecięcie powierzchni dającej P'', to jest ciśnienie na drugą połowę ściany, położoną pod płaszczyzną MN. Łatwo jest przewidzieć, że wypadkowa $\mathrm{P}_z'''$ z dwóch sił P' i P'' wyrazi się ciężarem cieczy zawartej w objętości, ograniczonej z jednej strony powierzchnią danej nam ściany EACDF, a z drugiej płaszczyzną EF; siła $\mathrm{P}_z'''$ będzie mieć znak —, a punkt jej przyczepienia znajduje się w środku ciężkości tej objętości.

Prócz przecięć figury, z objętości której znajdziemy P', płaszczyzną KL, podajemy jeszcze jej przecięcia dwiema płaszczyznami pionowemi UV i C''C''. Sposób utworzenia tej objętości jest zanadto znany, abyśmy mogli pominąć dalsze w tym względzie wyjaśnienia.

Przy granicy, kiedy $h = \mathrm{R}$, to jest gdy ściana stanie się całą sferą, wypadkowe poziome: $\mathrm{P'}_x = 0$ i $\mathrm{P}_y'' = 0$; tak że ostateczną wypadkową wszystkich ciśnień wywieranych na wewnętrzną powierzchnię sfery będzie siła pionowa, równa ciężarowi zawartej w sferze cieczy, i przyczepiona w jej środku ciężkości.

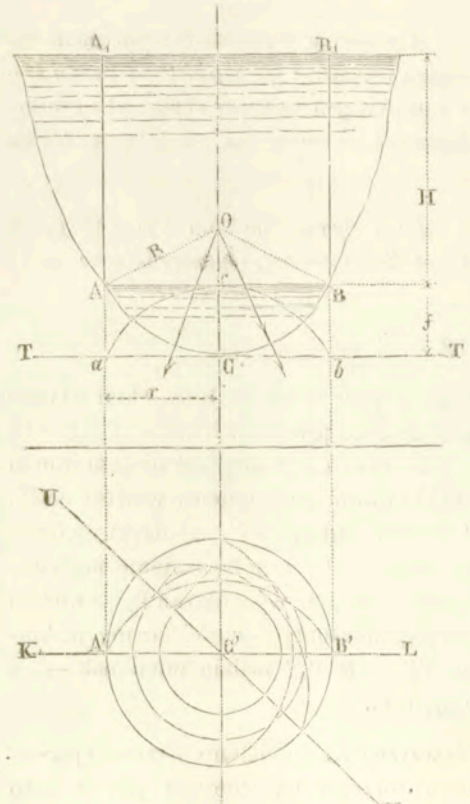
Uwaga. Gdyby powierzchnia wolna cieczy (fig. 113) znajdowała się w B′B′, nad płaszczyzną styczną poprowadzoną przez punkt A ściany, metoda szukania wartości $P'_x$, $P_y''$, $P_z'''$ pozostałaby tą samą; cała różnica takiego przypadku od dotychczas rozpatrywanych byłaby tylko ta, że ciśnienie wszystkich punktów ściany powiększyłoby się o ilość *stałą*; przyrostek ciśnienia, na jedność powierzchni, dla każdego punktu miałby za miarę wysokość powierzchni wolnej B′B′ nad płaszczyzną styczną w punkcie A; a całkowity przyrost ciśnienia na całą ścianę wyraziłby się ciężarem prostego walca o podstawach równoległych.

**110.** Przechodząc do ścian sferycznych *poziomych*, to jest do ścian gdzie płaszczyzna styczna w ich wierzchołku jest płaszczyzną poziomą, uważać będziemy dwa przypadki: 1) kiedy ściana jest mniejszą od połowy sfery, 2) kiedy jest ona większą od tej połowy. Rozpatrzymy je w następującym przykładzie.

IV Przykład. **Znaleźć ciśnienie wypadkowe na ścianę sferyczną poziomą.**

I. Niech odcinek sferyczny ACB (fig. 115) przedstawia dno naczynia zawarte między dwiema płaszczyznami poziomemi: AB, stanowiącą podstawę odcinka, i $TT_1$—płaszczyzną styczną do ściany w najniższym jej punkcie C. Bocznej ściany naczynia uważać nie będziemy, i przypuścimy że płaszczyzna AB jest powierzchnią wolną cieczy. Gdyby ta powierzchnia znajdowała się w $A_1B_1$, przejście od AB do $A_1B_1$ byłoby bardzo proste.

Fig. 115.




Odcinek ACB będzie wyznaczonym, znając dwie jakiekolwiek wartości z pomiędzy trzech ilości wchodzących w związek:

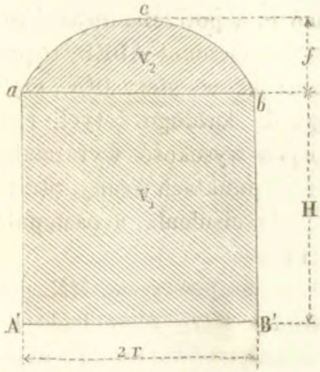
$$R = \frac{r^2 + f^2}{2f};$$

a ciśnienie wypadkowe na taką ścianę otrzyma się natychmiast stosując ogólne twierdzenie § 92. Ale zadaniem naszem jest znalezienie ciśnień wypadkowych $P'_x$, $P_y''$, $P_z'''$ jedynie z zastosowania fundamentalnego twierdzenia ścian krzywych, podanego w § 90.

Otóż, widzimy odrazu że $P'_x = 0$ i $P_y'' = 0$, tak że wypadkowa ostateczna wszystkich ciśnień będzie wypadkową samych tylko ciśnień pionowych. Ażeby znaleźć wartość na $P_z'''$, dosyć jest wystawić na kole A′B′, rzucie danej ściany na płaszczyznę XY, taką powierzchnię żeby jej rzędne, liczone od płaszczyzny koła A′B′, wyrażały ciśnienie w tych punktach ściany ACB, z rzutów których te rzędne są wyprowadzone. Uważając że punkta leżące na okręgu AB są najmniej ciśnione (albowiem ciśnienie w nich jest zerem), punkt zaś C zostaje pod ciśnieniem maximum, wyrażonem wysokością $f$, łatwo jest widzieć, że przecięcie szukanej powierzchni płaszczyzną pionową KL będzie łukiem *acb*; przecinając zaś tę powierzchnię innemi płaszczyznami, jak np. UV, zobaczymy, że powierzchnia ciśnienia będzie niczem innem jak powierzchnią odcinka sferycznego ACB, obróconego podstawą swoją AB ku płaszczyznie koła A′B′. Zkąd wnosimy, że jeżeli podstawa AB ściany sferycznej ACB jest powierzchnią wolną cieczy, wypadkowe ciśnienie na taką ścianę jest siłą pionową, równą co do natężenia ciężarowi cieczy zawartej w ACB, skierowaną do dołu i przyczepioną w środku ciężkości objętości sferycznego odcinka; kierunek zatem tego ciśnienia spotyka ścianę w jej wierzchołku (C, C').

Uwaga. Jeżeli powierzchnia wolna znajduje się w $A_1B_1$, na wysokości H nad podstawą AB, ciśnienie w każdym punkcie ściany ACB zostałoby zwiększonem o ilość stałą, równą (na jedność powierzchni) iloczynowi ΠH; kierunek zaś ciśnienia przechodziłby zawsze przez środek sfery O. Rzędna $z$ powierzchni ciśnienia stałaby się teraz $z+H$; jej wartość minimum byłaby H, a maximum $f+H$; i bez względu na kształt bocznych ścian naczynia ponad ACB, ciśnienie wypadkowe na ścianę ACB otrzymamy, wystawiając na kole A'B' powierzchnię walcową o wysokości H (fig. 116) i ograniczając górną podstawę walca powierzchnią sferyczną *acb*, równą danej nam powierzchni ACB. Ciśnienie wypadkowe ostateczne na sferyczną ścianę ACB wyrazi się wtedy przez :

Fig. 116.




$$(1) \qquad P_z''' = \Pi\left[\pi r^2 H + \left(\frac{1}{6}\pi f^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 f\right)\right].$$

Nadmieńmy że forma naczynia $A_1ACBB_1$ często jest używaną przy rezerwoarach służących do zasilania wodą lokomotyw. Część sferyczna ACB jest spojoną z powierzchnią walcową za pomocą nitowania. Przy obliczaniu grubości blachy, jak również średnicy nitów, rozkłada się siłę $P_z'''$, przebijającą ścianę sferyczną w punkcie C, na szereg sił pionowych przyczepionych w rozmaitych punktach okręgu AB; a następnie każdę z takich sił rozkłada się na dwie inne, z których jedna jest styczną do ściany ACB, a druga ma kierunek poziomy.

Jeżeli na figurze 115 założymy $f=R$, to jest promieniowi sfery, którego odcinek stanowił naszą ścianę, w takim razie $r$ staje się równem R, a odcinek ACB połową sfery. Wzór (1) daje nam dla tego przypadku :

$$P_z''' = \Pi\left(\pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3\right);$$

kładąc nadto $H=0$, to jest przypuszczając że powierzchnia wolna cieczy zlewa się z podstawą półsferycznej ściany, mamy :

$$P_z''' = \Pi \frac{2}{3}\pi R^3.$$

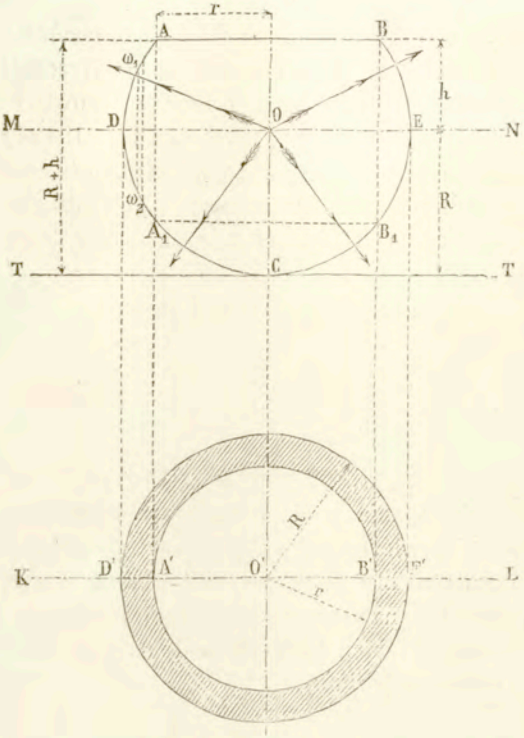
II. Rozpatrzmy teraz przypadek powierzchni sferycznej większej od połowy sfery.

Niech ADCEB (fig. 117) będzie daną nam ścianą, i AB powierzchnią wolną. Będziemy mieli $P'_x=0$, $P_y''=0$; zostanie więc do znalezienia jedna tylko siła $P_z'''$.

Uważajmy, że rzut na płaszczyznę poziomą XY, części ADEB ściany zakryje zupełnie rzut na tęż płaszczyznę części $DA_1B_1E$ jej symetrycznej, położonej pod płaszczyzną MN; ale, ponieważ walce rzucające rozmaite elementa ściany są tutaj *pionowe*, elementa $\omega_1$ i $\omega_2$ spotykane jednym i tym samym walcem, będą zostawać pod różnemi ciśnieniami, wyrażonemi odległością $h_1$ i $h_2$ tych elementów od powierzchni wolnej AB; w skutek czego wypadkowe ciśnienie na część ściany $ADA_1B_1EB$ nie będzie zerem. Widzimy zatem że szukana wypadkowa $P_z''' = \Sigma Z = \Sigma p\omega_{xy}$ będzie summą algebraiczną dwóch wartości :

1) Wypadkowego ciśnienia P′ wywieranego na ścianę ADEB, dla której punkta najmniej ciśnione są punktami równoleżnika AB, gdzie $p=0$; a punkta najwięcej ciśnione znajdują się na równoleżniku DE, odległym na $h$ od powierzchni wolnej AB.

Fig. 117.



2) Wypadkowego ciśnienia P″ na połowę sferycznej powierzchni DCE, gdzie ciśnienie minimum będzie w punktach okręgu DE, dla których $p=\Pi h$; a ciśnienie zaś maximum, wywierane w najniższym punkcie ściany C, mieć będzie za natężenie :

$$p=\Pi(R+h).$$

Ażeby więc otrzymać $P_2'''$, potrzeba uważać zosobna dwa rzuty : rzut powierzchni ADEB, to jest obrączkę $(R-r)$, i rzut połowy sfery DCE, czyli koło D′E′. Wystawiając do każdego z tych rzutów prostopadłe, których wysokość wyrażałaby ciśnienie w odpowiednich punktach ściany, otrzymamy ztąd powierzchnie ciśnienia, a następnie szukane wartości : P′ i P″.

W tym celu zauważmy że płaszczyzna MN, poprowadzona przez środek sfery równolegle do płaszczyzny XY, dzieli ścianę na dwie części : w jednej z nich, ADEB, ciśnienia $p$ są skierowane od środka O w górę nad płaszczyzną MN ; zaś w drugiej, DCE, ciśnienia są skierowane w dół względem tej płaszczyzny.

Moglibyśmy więc odrazu uważać ciśnienie $p$ skierowane w górę za dodatne, a w dół — za odjemne ; przez co mielibyśmy dla P′ znak +, a dla P″ — ; ale ściślej będzie, jeżeli ciśnienie na jedność powierzchni $p$, wywierane w rozmaitych południkach, rozłożymy na trzy składowe : X, Y, Z. Otóż, ograniczając się rozpatrywaniem składowej Z, która jedynie wchodzi w wyrażenie na P′ i P″, zobaczylibyśmy, że dla wszystkich punktów ściany położonych nad płaszczyzną MN, składowa Z jest skierowaną z dołu do góry, to jest będzie miała znak + ; dla punktów leżących na okręgu DE znajdziemy $Z=0$ (albowiem ciśnienia na rozmaite punkta tego okręgu będą wszystkie położone w płaszczyznie poziomej MN) ; zaś dla punktów położonych pod płaszczyzną MN, Z będzie ze znakiem —. Wskutek tego $P'=\Sigma Z'$ będzie miało znak +, a $P''=\Sigma Z''$ będzie miało znak — .

Nie mamy potrzeby wchodzić w szczegóły tyczące się sposobu otrzymania objętości z których się znajdzie natężenie sił P′ i P″ ; dostatecznem będzie, przy podanej obok figurze 118, powiedzieć że :

1) Natężenie wypadkowej P′ (fig. 118, α) wyrazi się ciężarem cieczy zawartej w objętości utworzonej : z obrączki kołowej $(R-r)$; z powierzchni walcowej mającej za podstawę okrąg promienia R, a za wysokość $h$ ; nareszcie z powierzchni sferycznej (czyli powierzchni ciśnienia) powstałej z obrotu, około osi pionowej rzucającej się w punkcie O′, łuku $a'd'$ jednakiego z łukiem AD na fig. 117. Jeżeli tę objętość oznaczymy przez $V_1$, to :

$$P'=\Pi V_1. \tag{1}$$

2) Co zaś do natężenia wypadkowej P″ (fig. 118, б) będzie ono równem ciężarowi cieczy zawartej

w dwóch objętościach : *a*) objętości $V_2$ walca $d'd''e'e''$ wystawionego na kole R i mającego za wysokość $h$ ; *b*) objętości $V_3$ połowy sfery $d'c'e'$ ; tak że :

(2) $$P'' = \Pi (V_2 + V_3) ;$$

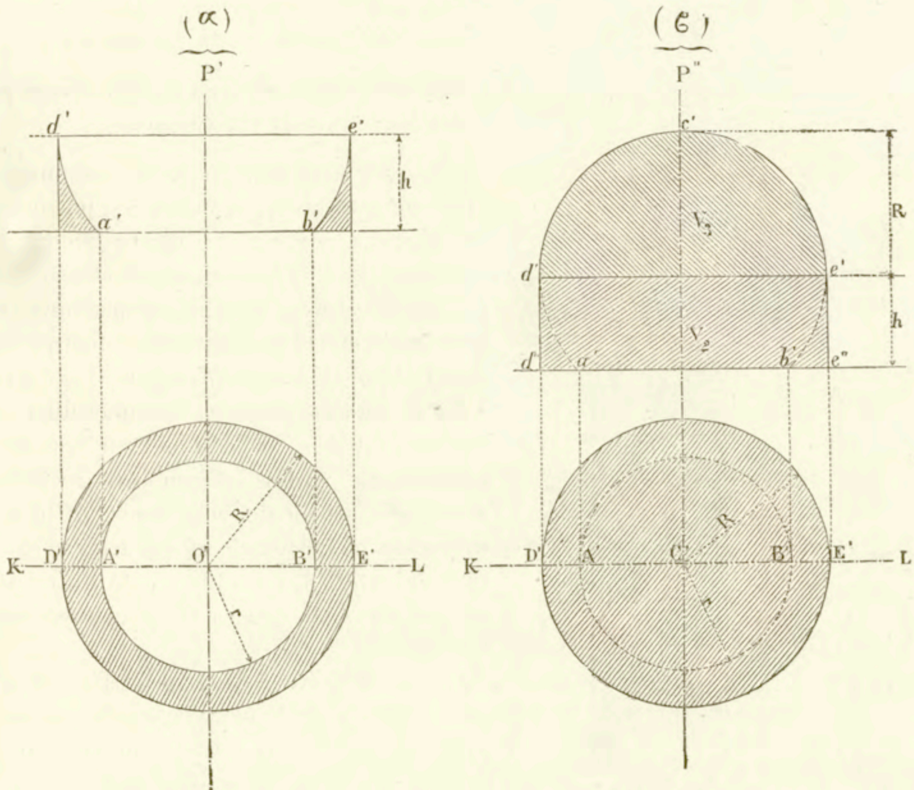
A że absolutna wartość wypadkowej ostatecznej $P_z'''$ jest $P'' - P'$, więc :

$$P_z''' = P'' - P' = \Pi (V_2 + V_3 - V_1) = \Pi [V_3 + (V_2 - V_1)].$$

Znak zaś siły $P_z'''$ będzie — .

Otóż (fig. 6) pokazuje że $V_2 - V_1$ jest objętością pasa sferycznego $d'a'b'e'$ ; zatem cały nawias [ ] wyrażać będzie objętość $a'd'c'e'b'$, która jest niczem innem jak objętością utworzoną z danej nam sferycznej ściany ADCEB (fig. 117) i z płaszczyzny poziomej AB. Widzimy więc że wypadkowa ostateczna

Fig. 118.




wszystkich ciśnień na powierzchnię sferyczną, której podstawa AB jest powierzchnią wolną cieczy, równą jest ciężarowi cieczy zawartej w danem sferycznem naczyniu. Taki wypadek był wiadomym z góry, na mocy ogólnego twierdzenia § 92.

Przy granicy, kiedy powierzchnia wolna AB staje się jednym punktem, ściana będzie zewsząd zamkniętą i powierzchnia ciśniona staje się powierzchnią całej sfery. Wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych na wewnętrzną powierzchnię sfery równą więc będzie ciężarowi zawartej w sferze cieczy.

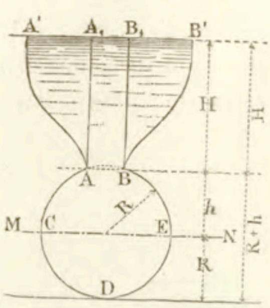
**112.** Na przykład, kiedy powierzchnia wolna A'B' znajduje się nad płaszczyzną AB, weźmy naczynie przedstawione na fig. 119. Część naczynia ACDEB jest powierzchnią sferyczną, zaś ściana

$A'ABB'$ może być kształtu jakiegokolwiek. Szukajmy wypadkowego ciśnienia tylko na część sferyczną ACDEB.

Oznaczając, jak poprzednio, przez $P'$ ciśnienie wypadkowe na część ściany ACEB położoną nad płaszczyzną MN, a przez $P''$ na część CDE leżącą pod tą płaszczyzną, wiemy że $P'$ będzie miało znak $+$, a $P''$ znak $-$, i wartość ciśnienia ostatecznego $P_z'''$ będzie $P_z''' = P'' - P'$.

Punkta ściany sferycznej znajdujące się na równoleżniku AB zostawać będą pod ciśnieniem wyrażonem wysokością H; dla punktów równoleżnika CE ciśnienie to wyrazi się wysokością $H + h$; nareszcie dla najniższego punktu ściany D wysokość ciśnienia będzie: $H + h + R$.

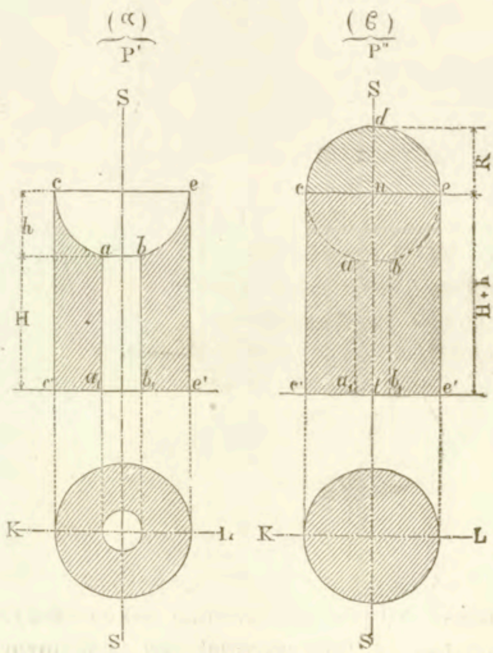
Fig. 119.



Objętości, z ciężarów których znajdziemy wartości $P'$ i $P''$, są przedstawione w planie i przecięciu na figurze 120; figura ($\alpha$) da wartość na $P'$, a ($\beta$) na $P''$.

Sposób otrzymania tych figur jest nam znany i nie potrzebuje żadnego wyjaśnienia.

Fg. 120.



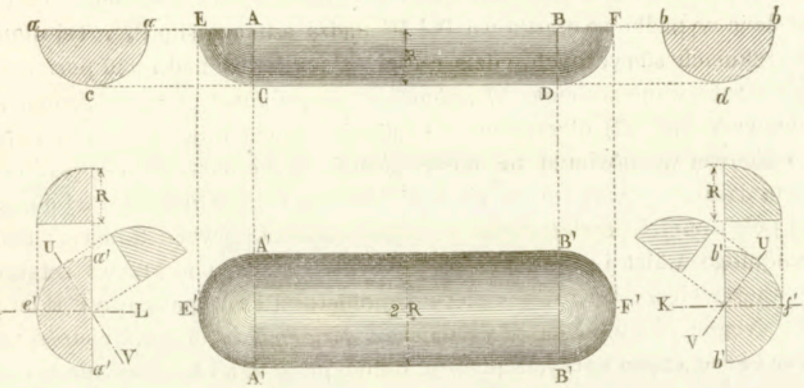
Widzimy z figur ($\alpha$) i ($\beta$) że odejmując objętość utworzoną obrotem, około osi SS, powierzchni $cac'a_1$ od objętości powstałej z obrotu około tejże osi powierzchni $cdntc'c$, otrzymamy objętość $a_1acdebb_1$, której ciężar wyrazi szukaną wypadkowę $P_z''$. Otóż, ta ostatnia objętość jest summą objętości sferycznej części ACDEB danego naczynia, i objętości walca $AA_1B_1B$ wystawionego na równoleżniku AB; zkąd wnosimy, że bez względu na kształt ścian $AA'$, $BB'$, połączonych wzdłuż okręgu AB ze sferyczną powierzchnią, ciśnienie wypadkowe na tę ostatnią równem jest ciężarowi cieczy zawartej w naczyniu sferycznem ACDEB i w walcu $ABA_1B_1$, wystawionym na podstawie AB danej sferycznej powierzchni.

Uwaga. Wiemy z § 95, że przy ścianach walcowych pionowych, wypadkowa wszystkich ciśnień wywieranych *na całą* boczną powierzchnię takich ścian jest zerem; albowiem dla powierzchni zamkniętej jakiejkolwiek mamy: $P'_x = 0$ i $P_y' = 0$, a przy ścianach walcowych będziemy mieli nadto $P_z''' = 0$, gdyż wszystkie elementarne ciśnienia są tutaj poziome. Wypada ztąd, że jeżeli naczynie ma kształt $A_1ACDEBB_1$ (fig. 119), wypadkowa ciśnień na wszystkie jego ściany równą jest wypadkowej ciśnień wywieranych tylko na część ACDEB. Twierdzenie § 92 jest tu sprawdzonem, gdyż wypadkowe ciśnienie na część ACDEB naczynia równem jest właśnie ciężarowi cieczy zawartej w całem naczyniu $A_1ACDEBB_1$.

Jeżeli będziemy uważać naczynie kształtu $A'ACDEBB'$, to z § 92 wiemy że wypadkowa ostateczna ciśnień na wszystkie jego ściany wywieranych, równą będzie ciężarowi cieczy zawartej w całem naczyniu. Otóż, wypadkowe ciśnienie na część ACDEB równem jest ciężarowi cieczy $A_1ACDEBB_1$; więc wypadkowe ciśnienie na pozostałą ścianę A′ABB′ wyrazi się ciężarem cieczy zawartej w objętości równej różnicy między objętością A′ABB′ i objętością walca $A_1ABB_1$. Co być powinno, albowiem ciężar całej objętości A′ABB′ przedstawia natężenie wypadkowego ciśnienia na boczną ścianę A′ABB′ naczynia i na jego dno AB; więc ażeby mieć wypadkowę ciśnień na samą tylko boczną ścianę, potrzeba od całkowitego ciśnienia odjąć ciśnienie na dno, to jest od całej objętości A′ABB′ odjąć objętość walca $A_1ABB_1$.

**113.** Na zakończenie przykładów tyczących się ścian sferycznych wróćmy do § 99, i przypuśćmy że ściana walcowa pozioma ACDB (fig. 121) jest ograniczoną z obu stron A′A′ i B′B′ ścianami sferycznemi

Fig. 121.




promienia R, równego promieniowi powierzchni walcowej. Naczynie będzie wtedy miało kształt przedstawiony na fig. 121, i wypadkowe ciśnienie na wszystkie jego ściany będzie wypadkową z siły $P_z'''$, znalezionej w § 99 dla powierzchni walcowej, i z trzech nowych sił: $P'_x$, $P_y''$ i $\mathfrak{P}_z'''$ odpowiadających ścianom sferycznym AEC i BFD.

Uważając jednę ze ścian sferycznych, np. AEC, będziemy mieli dla niej:

$(P'_x)_1 = \Sigma X =$ ciśnieniu na rzut ściany AEC na płaszczyznę ZY, to jest ciśnieniu na półkole *aca*;

$(P_y'')_1 = \Sigma Y = 0$;

$(\mathfrak{P}_z''')_1 = \Sigma Z_1 =$ ciśnieniu na rzut $a'e'a'$ ściany na płaszczyznę XY; wyrazi się ono ciężarem cieczy zawartej w $\frac{1}{4}$ objętości sfery promienia R, to jest ciężarem objętości utworzonej z danej sferycznej ściany AEC, ograniczonej dwiema płaszczyznami AE i AC. Oczywiście, wypadkowa $(P'_x)_1$ będzie miała znak —; a $(\mathfrak{P}_z''')_1$ będzie skierowaną z góry do dołu.

Dla drugiej ściany BFD wypadkowa $(P'_x)_2$ będzie równą $(P'_x)_1$, tylko ma ona znak +; $(P_y'')_2 = 0$, a $(\mathfrak{P}_z''')_2 = (\mathfrak{P}_z''')_1$ tak co do natężenia jako też co do znaku. Więc dla dwóch ścian AEC i BFD będziemy mieli:

$P'_x = (P'_x)_1 + (P'_x)_2 = 0$;   $P_y'' = 0$;   $\mathfrak{P}_z''' = (\mathfrak{P}_z''')_1 + (\mathfrak{P}_z''')_2 =$ ciężarowi cieczy zawartej w obu naczyniach sferycznych. Wypadkowa ostateczna $\mathfrak{P}$ ciśnień wywieranych na ścianę walcową i na dwie ściany sferyczne, czyli na wszystkie ściany naczynia ECDF, będzie więc równą summie: $P_z''' + \mathfrak{P}_z'''$, to jest wyrazi się ona ciężarem cieczy zawartej w całem naczyniu.

**114. Ogólna dyskussya twierdzenia dającego ciśnienie wypadkowe na wszystkie ściany naczynia.**

Twierdzenie § 92, tyczące się wypadkowego ciśnienia cieczy ważkiej w spoczynku na wszystkie ściany jakiegokolwiek naczynia, stanowi ogólne twierdzenie ścian krzywych. Sprawdzenie jego widzieliśmy na rozmaitych przykładach, powyżej rozpatrzonych. Obecnym naszym zamiarem jest bliższa dyskussya tego twierdzenia, i uogólnienie wypadków otrzymanych dla ścian formy szczególnej.

1° W uwadze II, § 92 wskazanem było, jak szukanie wypadkowego ciśnienia na ścianę krzywą może być sprowadzonem do zadania geometryi, i jak np. wypadkowa pionowa $P_z'''$ zostanie znalezioną, opisując na danem naczyniu powierzchnię walcową, prostopadłą do płaszczyzny XY, i uważając rzuty na tę płaszczyznę części ściany położonych nad i pod krzywą zetknięcia walca z naczyniem. Otrzymane ztąd dwie wypadkowe cząstkowe P' i P'' dadzą szukaną siłę $P_z'''$. Tej metody używaliśmy już przy powierzchniach sferycznych, gdzie części ściany leżące nad i pod poziomą płaszczyzną symetryi MN były rozpatrywane zosobna. W ogólności, wypadkowę pionową ciśnień wywieranych na naczynie jakiekolwiek (fig. 82) otrzymamy z uważania dwóch objętości : 1) objętości utworzonej z powierzchni walcowej wystawionej na rzucie górnej części naczynia (to jest części leżącej nad krzywą zetknięcia naczynia z walcem do niego opisanym) i z powierzchni tej górnej części, obróconej do dołu i połączonej z powierzchnią walcową wzdłuż krzywej zetknięcia; 2) objętości utworzonej z poprzedniego walca i z dolnej części naczynia, leżącej pod krzywą zetknięcia i obróconej tylko do góry. Ciężar cieczy zawartej w pierwszej objętości da wypadkowę P' skierowaną *z dołu do góry;* ciężar zaś drugiej objętości da P'' działającą *z góry do dołu.* Jeżeli objętość walca oznaczymy przez $w$, objętość górnej części naczynia przez $g$, dolnej przez $d$, a objętość całego naczynia przez V, to będziemy mieli :

$$P' = \Pi (w - g),$$

$$P'' = \Pi (w + d);$$

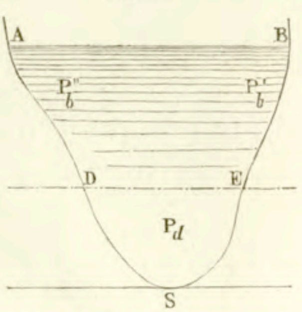
zkąd :

$$P_z''' = P'' - P' = \Pi (d + g) = \Pi V = C,$$

gdzie C wyraża ciężar cieczy zawartej w całem naczyniu.

2° Przecinając naczynie jakąkolwiek płaszczyzną poziomą DE (fig. 122), otrzymamy dwie ściany : ADEB i DSE; wypadkowe ciśnienie na każdą z nich będzię siłą *pionową*, albowiem ΣX i ΣY sprowadzają się do zera. Jeżeli nazwiemy *dnem* jakiegokolwiek naczynia, o ścianach krzywych, część jego powierzchni zawartą między najniższym punktem S i płaszczyzną poziomą DE, poprowadzoną na dowolnej od punktu S odległości; a *boczną* ścianą naczynia — powierzchnię pozostałą ADEB, — to oznaczając przez $P_b$ wypadkowe ciśnienie na ścianę ADEB, a przez $P_d$ ciśnienie na ścianę DSE, mamy dla wszelkiego naczynia następujący związek :

Fig. 122.




$$P_d \pm P_b = C;$$

piszemy przed $P_b$ dwa znaki ±, gdyż wypadkowa $P_b$ może być skierowaną bądź w tęż samą stronę co i $P_d$, bądź też w stronę przeciwną. Jeżeli $P_b$ jest skierowanem do góry, czyli ma znak +, należy wziąć w powyższem wyrażeniu znak — ; jeżeli zaś do dołu, to jest jeżeli

$P_b$ jest ze znakiem —, weźmiemy wtedy znak +. Otrzymujemy ztąd :

$$P_d = C \mp P_b,$$

gdzie znak — służy dla $P_b$ —, a + dla $P_b$ +; będziemy mieli również :

$$P_b = \pm (C - P_d),$$

gdzie + weźmiemy dla $P_b$ —, a — dla $P_b$ +.

We wszystkich wzorach litery $P_d$, $P_b$ i C wyrażają wartości *absolutne;* dyskussya ich przeprowadzoną była w §§ 102 i 103.

3° Jeżeli wyznaczymy ciśnienie wypadkowe *pionowe* $P'_b$ na pewną część BE *bocznej* ściany naczynia, ciśnienie pionowe $P''_b$ na pozostałą część AD tej ściany będzie natychmiast nam znanem, albowiem ze wzoru : $P_b + P_d = C$ mamy : $P_b = C - P_d$; a że $P_b = P'_b + P''_b$ zatem :

$$P''_b = C - (P_d + P'_b);$$

i gdyby się zdarzyło że pewna część ściany bocznej nie ma wcale wypadkowej pionowej (np. gdyby część BE była powierzchnią prostego walca lub prostej pryzmy) czyli że $P'_b = 0$, wtedy $P_b$ sprowadziłoby się tylko do ciśnienia $P''_b$ wywieranego na ścianę AD, i otrzymałoby się ze związku : $P''_b = C - P_d$.

Gdybyśmy mieli jednocześnie $P'_b = 0$ i $P''_b = 0$, to jest gdyby cała boczna ściana ADBE naczynia była powierzchnią walcową prostą, wtedy poprzednie wyrażenie dałoby :

$$C - P_d = 0,$$

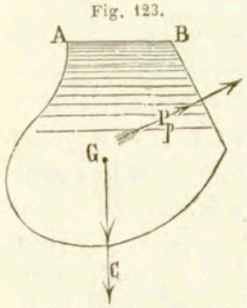
zkąd :

$$P_d = C.$$

więc *ciężar cieczy zawartej w całem naczyniu* ADSEB *przedstawia całkowite ciśnienie na dno* SDE *naczynia tylko wtedy, kiedy boczna ściana* ADEB *ponad dnem położona jest powierzchnią prostego walca lub prostej pryzmy.* W każdym innym przypadku $P_d$ nie jest równem C, i może ono być od niego większe lub mniejsze. Odwrotnie, jeżeli ponad dnem naczynia wystawimy powierzchnię walcową prostą, wypadkowe ciśnienie na to dno równem będzie ciężarowi cieczy zawartej w całem tak utworzonem naczyniu. Podobny przypadek był rozpatrzonym w § 112 na figurze 119.

4° Jeżeli powierzchnia naczynia ma jednę ścianę *płaską* (fig. 123), wypadkowe na nią ciśnienie $P_p$ łatwo może być wyznaczonem, a ztąd znajdziemy wypadkowe ciśnienie $P_k$ na pozostałą ścianę krzywą; albowiem wypadkowa tych dwóch wypadkowych : $P_p$ i $P_k$ stanowi cięża cieczy C zawartej w naczyniu, który przypuszczamy że jest znany. Jeżeli ściana płaska stanowi *dno* naczynia, wypadkowa na powierzchnię krzywą wyrazi się :

Fig. 123.




$$P_k = C - P_p.$$

5° Ponieważ składowe *poziome* ciśnień na elementa ściany spotykane jednym i tym samym poziomym walcem wzajemnie się równoważą (§ 91, wniosek III), wynika ztąd że przecinając naczynie dwiema poziomemi płaszczyznami, poprowadzonemi na dowolnej od siebie odległości, i uważając zawartą między niemi powierzchnię naczynia, wypadkowe *poziome* ciśnienie na jedną część tak otrzymanej obrączkowej powierzchni będzie równem wypadkowemu ciśnieniu (uważanemu podług tejże poziomej osi) na jej część pozostałą, dopełniającą część pierwszą do całej obrączki; dwa te ciśnienia będą tylko działać w przeciwnym sobie kierunku. I w ogólności, wypadkowe ciśnienie *poziome* wywierane przez ciecz ważką na jakąkolwiek część obrączki będzie równem wypadkowemu poziomemu ciśnieniu na wszelką inną powierzchnię, płaską lub krzywą, zawartą między temiż dwiema poziomemi płaszczyznami co i część uważana, i stanowiącą z tą ostatnią powierzchnię *zamkniętą*. W przypadku szczególnym, kiedy boczna powierzchnia naczynia składa się ze ściany krzywej i ze ściany płaskiej, ciśnienie *poziome* na ścianę płaską będzie zarazem przedstawiać natężenie wypadkowego poziomego ciśnienia na ścianę krzywą; w skutek czego szukanie poziomego ciśnienia na ścianę krzywą sprowadza się do szukania takiego ciśnienia na ścianę płaską zamykającą ścianę krzywą. Sprawdzenie tego wniosku widzieliśmy na przykładach tyczących się ścian walcowych i sferycznych.

**115.** Przejdźmy teraz do rozpatrzenia przypadku, gdzie ciśnienie na jedność powierzchni jest *stałe* we wszystkich punktach naczynia.

1° Wiemy, że w razie cieczy ważkich składowe poziome elementarnych ciśnień $p\omega$ równoważą się dlatego, że ciśnienie na jedność powierzchni $p$ jest to samo dla wszystkich punktów ściany leżących na jednej i tejże płaszczyźnie poziomej; w skutek czego mamy jednocześnie : $\Sigma X = 0$ i $\Sigma Y = 0$; a że ta własność dla punktów położonych na linji pionowej nie istnieje, powstaje ztąd wypadkowa $P_z'''$ różna od zera. Gdybyśmy więc przypuścili że ciśnienie $p$ (zawsze normalne do ściany) zamiast zmieniać się z poziomem punktu jest od niej niezależne, czyli że natężenie jego jest *stałe* we wszystkich punktach naczynia (co ma miejsce, naprzykład, w razie gazu poddanego samej tylko sile sprężystości lub, przez przybliżenie, dla gazu zostającego w warunkach naturalnych, to jest pod działaniem siły ciężkości, ale nie zajmującego wielkiej przestrzeni), własność składowych poziomych stosowałaby się również do składowych pionowych, i w razie naczynia ze wszystkich stron zamkniętego, oprócz $P_x' = \Sigma X = 0$ i $P_y'' = \Sigma Y = 0$, mielibyśmy jeszcze i $P_z''' = \Sigma Z = 0$; albowiem walce rzucające pionowo na płaszczyznę XY rozmaite elementa ściany muszą, każdy zosobna, spotkać powierzchnię naczynia *dwa* razy, a w ogólności liczbę razy *parzystą*.

Ponieważ każda z trzech sił : $P_x'$, $P_y''$, $P_z'''$ wyraża się przez rzut ciśnionej powierzchni na jednę z trzech płaszczyzn spółrzędnych, zatem ciśnienia wypadkowe będą miały tę samą wartość, bez względu czy ściana jest wystawioną na ciśnienie swą powierzchnią wewnętrzną, czy też zewnętrzną. Hypotezę jednakowego we wszystkich punktach ciśnienia, i wniosek jaki z niej wypływa, wyrazimy więc następującem twierdzeniem, dopełniającem uwagę II § 91 :

*Jeżeli jakakolwiek powierzchnia, ze wszystkich stron zamknięta, jest we wszystkich swych punktach ciśniona jednostajnie siłami normalnemi, skierowanemi bądź ku jej stronie wewnętrznej, bądź ku stronie zewnętrznej* (jakakolwiekby zresztą była natura tych sił i przyczyna takiego ich na ścianach układu), *wypadkowa ostateczna wszystkich takich działań na całą powierzchnię wywieranych jest zerem.*

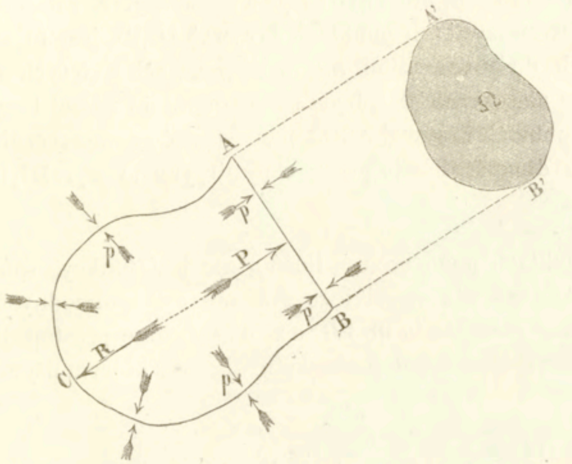
Twierdzenie to pociąga za sobą następujące wnioski :

2° Przecinając powierzchnię o której mowa jakąkolwiek płaszczyzną, a w ogólności jakąkolwiek powierzchnią krzywą, rozdzielimy powierzchnię daną na dwie części; wypadkowa wszystkich ciśnień na jedną część, będzie równą wypadkowej na drugą część powierzchni, gdyż te dwie wypadkowe muszą się sprowadzić do zera. Ztąd wynika że jeżeli powierzchnia, zadość czyniąca warunkom wymienionym w naszem twierdzeniu, składa się z powierzchni *krzywej* i z powierzchni *płaskiej*, wypadkowa na ścianę płaską będzie równą wypadkowej na ścianę krzywą. Zważywszy zaś że ciśnienie jest wszędzie do ścian normalnem, i stałego natężenia $p$ we wszystkich punktach ściany krzywej jako też i ściany płaskiej, wnosimy że :

*Jeżeli jakakolwiek powierzchnia krzywa* NIEZAMKNIĘTA *jest ciśniona normalnie* (na wewnątrz lub na zewnątrz) *i jednostajnie we wszystkich swych punktach, i jeżeli nadto, ściana płaska może* ZUPEŁNIE *zamk-*

*nąć tę powierzchnię, ostateczna wypadkowa ciśnień wywieranych na powierzchnię krzywą jest równą wypadkowej wszystkich elementarnych ciśnień (wywieranych normalnie i z temże samem, na jedność powierzchni, natężeniem p) na ścianę płaską któraby zamykała zupełnie daną powierzchnię krzywą.*

Fig. 124.

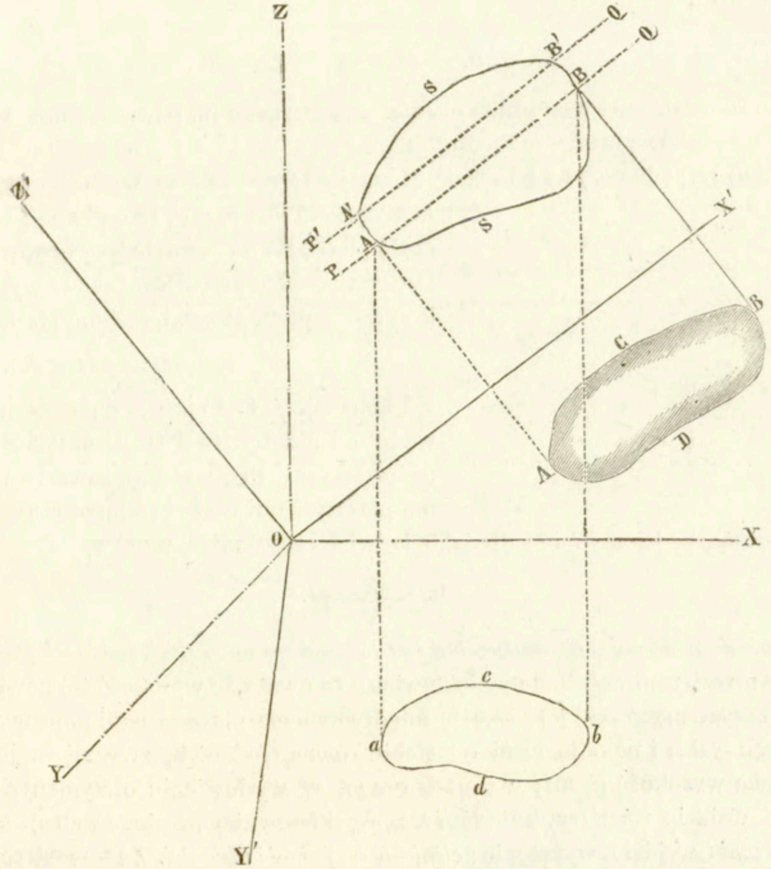



Tak np., oznaczając (fig. 124) szukaną wypadkowę na powierzchnię krzywą niezamkniętą ACB przez R, powierzchnię płaską AB ją zamykającą przez $\Omega$, a ciśnienie na jedność powierzchni dla ściany krzywej przez $p$, będziemy mieli:

$$R = p\Omega = P.$$

Widocznie że gdyby ściana płaska AB istniała sama przez się, to jest gdyby ona zamykała *rzeczywiście* daną powierzchnię krzywą ACB, wypadkowa wszystkich ciśnień na całą powierzchnię ACBA sprowadziłaby się do zera, gdyż przypadek

Fig. 125.




taki stanowi właśnie treść naszego twierdzenia.

3° Uważając zawsze powierzchnię zamkniętą SS (fig. 125) i jednostajnie ciśnioną siłami normalnemi, przetnijmy ją jakąkolwiek płaszczyzną PQ, i ograniczmy się jedynie rozpatrywaniem wynikłej z tego przecięcia krzywej ACBD, która, z konieczności, musi być krzywą *zamknięta*. Z założenia ciśnienie $p$, na jedność powierzchni, wywierane we wszystkich punktach krzywej ACBD, jest to samo, a kierunek jego jest kierunkiem normalnych do powierzchni SS, w jej punktach wziętych na linji ACBD; wszystkie te normalne, położone na płaszczyznie PQ, będą normalnemi do naszej krzywej. Gdybyśmy chcieli ciśnienie w rozmaitych punktach krzywej ACBD przedstawić geometrycznie, dosyćby było odciąć na jej normalnych tę samą długość, i linje proste ztąd otrzymane wyrażałyby zarazem natężenie ciśnienia i jego kierunek.

Ponieważ ciśnienie jest stałe we wszystkich punktach powierzchni, ilość $p$ nie jest funkcyą spółrzędnych $x$, $y$, $z$, i jej wyrażenie pozostanie bez zmiany dla wszelkiego systemu osi spółrzędnych; biorąc więc (fig. 125) za płaszczyznę X′Y′ płaszczyznę równoległą do PQ, a za oś OZ′ linję prostopadłą do płaszczyzny X′Y′, utworzymy w przestrzeni system spółrzędnych prostokątnych, przy którym używając wzorów:

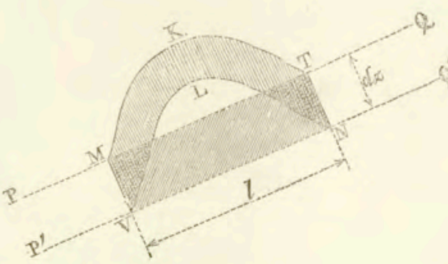
$$X' = (p\omega) \cos\alpha, \qquad Y' = (p\omega)\cos\beta, \qquad Z' = (p\omega)\cos\gamma,$$

i rozpatrując zawartą między dwiema równoległemi płaszczyznami PQ i P′Q′ nieskończenie cienką warstwę ABA′B′, mogącą przez to być uważaną za powierzchnię walcową prostopadłą do płaszczyzny X′Y′, będziemy mieli:

$$\Sigma X' = 0, \qquad \Sigma Y' = 0, \qquad \Sigma Z' = 0;$$

to jest: wypadkowa ostateczna wszystkich ciśnień wywieranych na powierzchnię ABA′B′ jest zerem. Wynika ztąd, że wypadkowa ciśnień na jednę jakąkolwiek część tej powierzchni jest równą (tylko przeciwnego znaku) wypadkowej na pozostałą drugą jej część; tak że wypadkowa na powierzchnię krzywą MKTNLVM (fig. 126) równą jest wypadkowej na część płaską MTNV, zamykającą tę powierzchnię krzywą. Oznaczając więc przez R ciśnienie wypadkowe na część krzywą, a przez $\Omega$ powierzchnię płaską MTNV, mamy:

Fig. 126.




$$R = p\Omega = p\,(l \times dz).$$

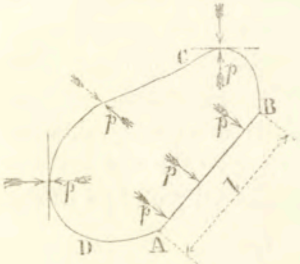
Kładąc $dz = 1$, to jest przypuszczając że po przeprowadzeniu płaszczyzny P′Q′ na odległości równej *jedności* od płaszczyzny PQ, warstwa zawarta między temi dwiema płaszczyznami może być jeszcze uważaną za powierzchnię walcową *prostą*, będziemy mieli dla jakiejkolwiek części takiej warstwy:

$$R_1 = \mathfrak{P} = pl. \tag{1}$$

Otóż, *jeżeli ciśnienie p na jedność powierzchni jest to samo we wszystkich punktach powierzchni walcowej* (mogącej mieć w przestrzeni położenie jakiekolwiek), to uważając wysokość tej powierzchni za równą *jedności* (to jest, rozpatrując część jej zawartą między dwiema płaszczyznami poprowadzonemi prostopadle do rodzących walca i na odległości od siebie równej *jedności*), zwyczajem jest, *dla skrócenia mowy*, pomijać taką wysokość (§ 96); w skutek czego, w wysłowieniu otrzymanych rezultatów, zamiast *powierzchni* wejdzie rozpatrywanie *linji krzywej* (kierownicy prostego walca), a zamiast *ciśnienia na jedność powierzchni* wejdzie wyrażenie: *ciśnienie na jedność długości*. Z tem zastrzeżeniem, wniosek jaki się wyprowadza ze wzoru (1) może być określony w sposób następujący:

*Jeżeli na jakąkolwiek krzywę płaską niezamkniętą* ADCB (fig. 127) (której płaszczyzna może mieć w przestrzeni kierunek jakikolwiek) *wywierane są ciśnienia* (na wewnątrz lub na zewnątrz tej krzywej) *normalne do niej we wszystkich jej punktach i stałego natężenia p na jedność długości, wypadkowa wszystkich takich ciśnień na linję krzywą będzie taka sama, jak wypadkowa ciśnień wywieranych normalnie, i z temże samem na jedność długości natężeniem p, na linję prostą* AB *którąby z linją krzywą* ADCB *stanowiła kontur zamknięty;* tak że oznaczając długość prostej AB przez $l$, a natężenie wypadkowego ciśnienia na linję krzywą ADCB przez $\mathfrak{P}$, będzie :

Fig. 127.



(2) $$\mathfrak{P} = p \,.\, AB = pl.$$

Oczywiście, jeżeli krzywa ADCB zamyka się sama przez się, to jest jeżeli punkt A zlewa się z punktem B, wszystkie ciśnienia na kontur płaski zamknięty wzajemnie się równoważą, czyli dadzą zero na ich wypadkowę.

Uwaga. Aby módz zastosować wzór (2) do cieczy ważkich w spoczynku, potrzeba : 1) ażeby płaszczyzna krzywej ABCD była płaszczyzną *poziomą ;* 2) ażeby wysokość walca wzięta za *jedność* była dostatecznie małą. Gdy ten ostatni warunek nie jest dopełniony, wyrażenie na $\mathfrak{P}$ otrzymane z (2) nie może być uważane za wypadkowę ciśnień wywieranych na powierzchnię walca : gdyż dla znacznej jego wysokości, różnica ciśnień w rozmaitych punktach powierzchni może być za nadto wielką.

4° Widocznem jest że pomiędzy rozmaitemi powierzchniami, a w szczególności pomiędzy rozmaitemi płaszczyznami, jakiemi możemy przecinać powierzchnię zamkniętą SS (fig. 125), musi istnieć przynajmniej jedna płaszczyzna, która dzieli daną powierzchnię SS na takie części, że wypadkowa ciśnień wywieranych na każdą z nich zosobna jest *maximum.* Tak samo, uważając krzywę ACBD (fig. 128) powstałą z przecięcia powierzchni SS płaszczyzną PQ, musi istnieć na płaszczyźnie tej krzywej przynajmniej jeden kierunek prostej MN taki, że ciśnienie wypadkowe jest *maximum* na każdą część ACB, BDA krzywej. Więc przy zastosowaniach, chcąc wiedzieć największą pracę na jaką ściany mogą być wystawione, powinniśmy właśnie uważać przecięcie naczynia tą *płaszczyzną maximum*, lub tą *prostą maximum;* gdyż jest widocznem, że maximum obwodu wziętego na krzywej nie daje bynajmniej maximum ciśnienia. Owoż, naczynia zazwyczaj używane w praktyce mają przynajmniej jednę płaszczyznę symetryi : płaszczyzny symetryi dla powierzchni, a osie symetryi dla linij krzywych, są właśnie płaszczyznami lub prostemi dającemi ciśnienie maximum albo minimum (fig. 129). I tak naprzykład, dla powierzchni walcowej obrotowej, płaszczyzną ciśnienia maximum jest płaszczyzna przechodząca przez oś obrotu; dla powierzchni sferycznej — płaszczyzna wielkiego koła sfery; dla okręgu — linją ciśnienia maximum jest jego średnica; dla ellipsy — jej dwie osie i t. p. W ogólności położenie *płaszczyzny maximum*, lub *prostej maximum*, zależy od kształtu naczynia i bywa często samo przez się widocznem.

Fig. 128.

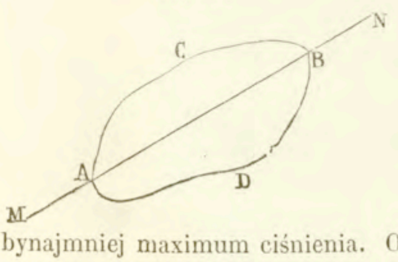
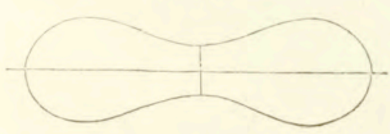
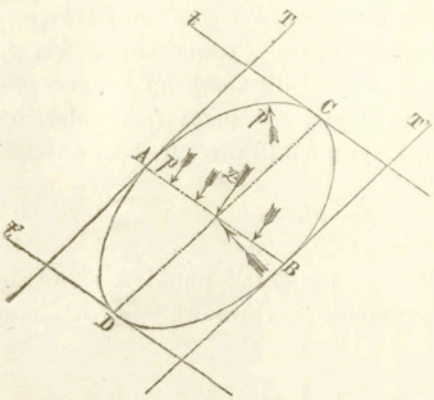



Fig. 129.



Zdarza się że kierunek płaszczyzny lub prostej, dzielącej daną powierzchnię lub linję krzywą na dwie części, wynika z samego zadania. I tak naprzykład, gdyby potrzeba nam było znaleźć wypadkowe ciśnienie na część ellipsy ACB (fig. 130) zawartą między dwiema do siebie równoległemi stycznemi T i T′ (rozumiejąc że ciśnienie jest normalnem do ellipsy w każdym jej punkcie, i że jego natężenie $p$ na *jedność długości* jest stałe we wszystkich punktach) wtedy linją prostą, na którą wypadłoby nam szukać ciśnienia, byłaby średnica ellipsy $AB = D$, łącząca dwa punkta zetknięcia A i B, i zamykająca krzywę ACB; szukana więc wypadkowa byłaby normalną do prostej AB, i jej natężenie $\mathfrak{P}$ wyraziłoby się wzorem:

Fig. 130.




$$\mathfrak{P} = p \,.\, AB = pD.$$

Gdyby chodziło o znalezienie wypadkowego ciśnienia na część ellipsy DAC lub CBD, zawartą między stycznemi równoległemi $t$ i $t'$, szukalibyśmy wtedy wypadkowego ciśnienia na średnicę $CD = D'$, łączącą punkta C i D i sprzężoną ze średnicą AB; ciśnienie to byłoby normalnem do prostej CD i natężenie jego $\mathfrak{P}'$ wyraziłoby się iloczynem z ciśnienia stałego na jedność długości $p$, przez długość $D'$.

Paryż, 17 listopada 1873 roku.