

Wiktor Gambin

**MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU
Z OSOBLIWYM
GRADIENTEM FUNKCJI KSZTAŁTU**

64 / 1979

p. 269



WARSZAWA 1979

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 9 września 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 64/1979



57182



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd. 0,5. Ark. druk. 1 .

Oddano do drukarni w grudniu 1979 r.

Nr zamówienia 783/07

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Sniadeckich 8

Wiktor Gambin

Zakład Mechaniki Ośrodków Ciągłych

MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU
Z OSOBLIWYM GRADIENTEM FUNKCJI KSZTAŁTU

1. Wstęp.

Przy zastosowaniu metody elementów skończonych do zadań mechaniki zniszczenia pojawia się potrzeba wprowadzenia elementów z osobliwymi gradientami funkcji kształtu.

W pracach [1] i [2] wykazano, że dla płaskich stanów naprężenia i odkształcenia, w ośrodku sprężysto-plastycznym ze wzmocnieniem izotropowym opisanym prawem potęgowym $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}^n$ (por. [1] i [2]) o wykładniku $n / 0 < n < 1/$, pola naprężeń i odkształceń wokół wierzchołka szczeliny mają, odpowiednio, osobliwości typu $r^{-\frac{n}{1+n}}$ oraz $r^{-\frac{1}{1+n}}$. Odpowiadają za ten stan rzeczy, wyrażenia w polu przemieszczeń typu $r^{\frac{n}{1+n}}$. Przez r oznaczono tu odległość od wierzchołka szczeliny.

Warto zwrócić uwagę, że materiał opisany powyższym prawem dla $n=0$, staje się materiałem sprężysto-idealnie plastycznym, a dla $n=1$ - materiałem sprężystym. Występują też materiały o charakterystyce zadanej parametrem $n > 1$. W dalszym ciągu przedmiotem naszych zainteresowań będzie aproksymacja pola przemieszczeń zawierającego wyrażenia typu $r^\lambda / \lambda = \frac{n}{1+n}$, $0 < \lambda < 1/$, w ramach najprostszego modelu metody elementów skończonych.

Oznaczmy przez $\{x, y\}$ globalny, kartezjański układ współrzędnych, a przez $\{\alpha, \beta\}$ lokalny układ współrzędnych, opisujący geometrię elementu związkami:

$$/1/ \quad \begin{cases} x = x(\alpha, \beta) \\ y = y(\alpha, \beta) \end{cases} ,$$

dla $0 < \alpha < 1$ oraz $0 < \beta < 1$.

Ponieważ funkcje kształtu, aproksymujące pole przemieszczeń $\underline{u} = \underline{u}(x, y)$, przyjmowane są jako funkcje lokalnego układu współrzędnych:

$$/2/ \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}(\alpha, \beta),$$

rysują się dwie drogi opisu pola zawierającego wyrażenie r^λ . Pierwsza z nich, to wprowadzenie odpowiedniej transformacji równań /1/, przy niezmiennych funkcjach kształtu /2/.

W pracach [3] i [4] uzyskano to przez przyjęcie elementów izoparametrycznych z węzłami krawędziowymi, przy wierzchołku szczeliny, przesuniętych ze środka krawędzi do jednej czwartej odległości od wierzchołka. Drugi sposób, to przyjęcie wyrażeń typu r^λ , bezpośrednio w równaniach /2/, w miejsce, funkcji liniowo zmiennych wzdłuż krawędzi, tak jak to zrobiono w pracy [5].

Głębsza analiza, przeprowadzona w [6], wykazała, że dla każdego z powyższych opisów najbardziej przydatne są elementy trójkątne. W obu przypadkach macierz sztywności otrzymuje się drogą numerycznego całkowania. Stanowi to poważne utrudnienie przy opracowywaniu programów dla maszyny cyfrowej, a także wydłuża czas obliczeń.

W niniejszej pracy podamy sposób takiego opisu pola przemieszczeń, który pozwoli na uzyskanie macierzy sztywności, bez korzystania z procedur numerycznego całkowania.

Punktem wyjścia będzie drugi z omówionych sposobów, przedstawiony w pracy [5], z tym, że wyrażenie r^λ , dla funkcji kształtu, nie będzie przyjęte w miejsce funkcji standardowej, lecz jako wyrażenie dodatkowe. Ostateczna funkcja kształtu będzie zatem, superpozycją wyrażenia standardowego i wyrażenia zawierającego człon r^λ . Tego typu podejście zastosowano w pracy [7] otrzymując bardzo dobre wyniki. Dodatkową korzyścią, jaką przy tym uzyskujemy, jest możliwość opisu jednorodnych deformacji elementu, a zatem również deformacji, na które składają się sztywne obroty najbliższego otoczenia wierzchołka szczeliny. Elementy używane w pracach [3] - [5] nie mogły ich opisywać.

Obiektem naszych rozważań będzie najprostszy element trójkątny otrzymany z elementu czworokątnego przez degenerację jednej

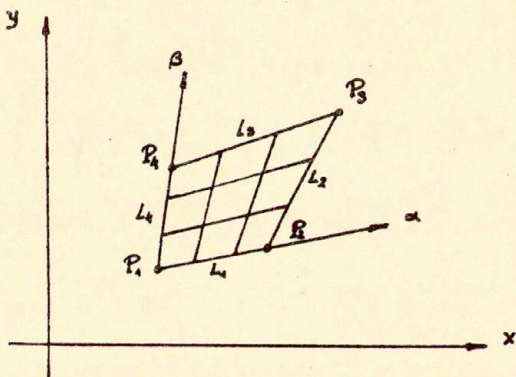
z jego krawędzi. Zwracamy uwagę na pełną analogię pomiędzy opisem geometrii elementu i wprowadzeniem pola przemieszczeń. Dodanie członu r^{λ} , prowadzącego do powstania osobliwego gradientu tego pola, pojawia się tu w sposób całkiem naturalny. Prosta forma macierzy odkształceń umożliwia podanie macierzy sztywności osobliwego elementu trójkątnego w postaci zamkniętej.

2. Geometria elementu.

Związki /1/ dla najprostszego elementu czworokątnego mają postać:

$$/3/ \quad \begin{cases} x = x_{00}(1-\alpha)(1-\beta) + x_{10}\alpha(1-\beta) + x_{11}\alpha\beta + x_{01}(1-\alpha)\beta, \\ y = y_{00}(1-\alpha)(1-\beta) + y_{10}\alpha(1-\beta) + y_{11}\alpha\beta + y_{01}(1-\alpha)\beta. \end{cases}$$

Cztery wierzchołki tego czworokąta: P_1, P_2, P_3, P_4 mają współrzędne: $/x_{00}, y_{00}/, /x_{10}, y_{10}/, /x_{11}, y_{11}/, /x_{01}, y_{01}/$, a jego prostoliniowe krawędzie: L_1, L_2, L_3, L_4 opisują linie parametryczne: $\beta=0, \alpha=1, \beta=1, \alpha=0$. Zwracamy uwagę, że związki /3/ nie są równaniami liniowymi.



Rys. 1.

Założmy dalej, że wierzchołki P_1 i P_4 pokrywają się, a łącząca je krawędź L_4 znika. Otrzymamy wówczas trójkąt, którego geometrię

opisują w dalszym ciągu związki /3/ przy założeniu, że:

$$/4/ \quad \begin{cases} x_{01} = x_{00}, \\ y_{01} = y_{00}. \end{cases}$$

Otrzymujemy zatem:

$$/5/ \quad \begin{cases} x = x_{00} + (x_{10} - x_{00})\alpha + (x_{11} - x_{10})\alpha\beta, \\ y = y_{00} + (y_{10} - y_{00})\alpha + (y_{11} - y_{10})\alpha\beta. \end{cases}$$

Trójkąt rozpięliśmy na wektorach: $\overrightarrow{P_1 P_2} = \underline{a} = /a_x, a_y/$ oraz $\overrightarrow{P_2 P_3} = \underline{b} = /b_x, b_y/$. Współrzędne tych wektorów, razem ze współrzędnymi punktu $P_1, /x_1, y_1/$, ustalają jednoznacznie położenie punktów trójkąta na płaszczyźnie $\{x, y\}$:

$$/6/ \quad \begin{cases} x = x_{00} + a_x \alpha + b_x \alpha \beta, \\ y = y_{00} + a_y \alpha + b_y \alpha \beta. \end{cases}$$

Jakobian tego odwzorowania jest następujący:

$$/7/ \quad J \equiv \begin{vmatrix} x_{,\alpha} & x_{,\beta} \\ y_{,\alpha} & y_{,\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x + b_x \beta & b_x \alpha \\ a_y + b_y \beta & b_y \alpha \end{vmatrix}.$$

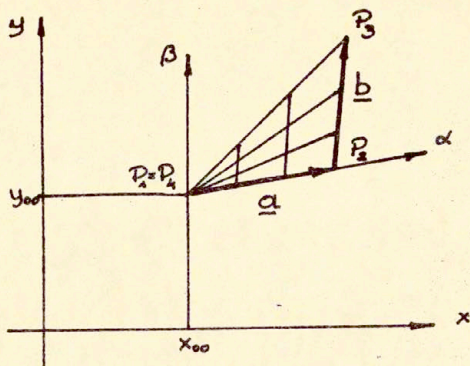
Wyznacznik jacobianu:

$$/8/ \quad \text{Det } J = (a_x b_y - a_y b_x) \cdot \alpha \equiv d \cdot \alpha,$$

zeruje się w wierzchołku $P_1 = P_4$, co jest konsekwencją degeneracji krawędzi L_4 do jednego punktu.

Do dalszych rozważań potrzebne będą elementy macierzy, która jest odwrotnością jacobianu:

$$/9/ \quad J^{-1} = \begin{vmatrix} \alpha_{,x} & \alpha_{,y} \\ \beta_{,x} & \beta_{,y} \end{vmatrix} = \frac{1}{\text{Det } J} \begin{vmatrix} y_{,\beta} & -x_{,\beta} \\ -y_{,\alpha} & x_{,\alpha} \end{vmatrix} = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} b_y & -b_x \\ -\frac{1}{\alpha}(a_y + b_y \beta), & \frac{1}{\alpha}(a_x + b_x \beta) \end{vmatrix}.$$



Rys. 2.

3. Funkcje kształtu i macierz odkształceń.

Wróćmy do rozważanego na początku elementu czworokątnego. Pole przemieszczeń $\underline{u} = \{u_x, u_y\}^T$, przy zastosowaniu takiego elementu, opisywane jest przez wartości przemieszczeń u_x i u_y , w wierzchołkach elementu, oznaczane przez $\delta_1^x, \delta_1^y, \dots, \delta_4^x, \delta_4^y$ oraz przez, przyporządkowane czterem wierzchołkom, funkcje kształtu:

$$/10/ \quad \begin{cases} N_1 = (1-\alpha)(1-\beta), \\ N_2 = \alpha(1-\beta), \\ N_3 = \alpha\beta, \\ N_4 = (1-\alpha)\beta. \end{cases}$$

Pole to zatem, ma postać:

$$/11/ \quad \underline{u}_\square = \begin{bmatrix} (1-\alpha)(1-\beta) & 0 & \alpha(1-\beta) & 0 & \alpha\beta & 0 & (1-\alpha)\beta & 0 \\ 0 & (1-\alpha)(1-\beta) & 0 & \alpha(1-\beta) & 0 & \alpha\beta & 0 & (1-\alpha)\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^x \\ \delta_1^y \\ \delta_2^x \\ \delta_2^y \\ \delta_3^x \\ \delta_3^y \\ \delta_4^x \\ \delta_4^y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & | & N_2 & | & N_3 & | & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta \}.$$

Każda z wyodrębnionych podmacierzy: N_1, \dots, N_4 zależy tylko od jednej funkcji kształtu, a każdy z podwektorów $\delta_1, \dots, \delta_4$ od wartości przemieszczeń, w przyporządkowanym tej funkcji, wierzchołku.

Aby otrzymać analogiczny opis pola przemieszczeń dla trójkąta, wystarczy w wyrażeniu /11/ przyjąć:

$$/12/ \quad \begin{cases} \delta_4^x = \delta_1^x, \\ \delta_4^y = \delta_1^y, \end{cases}$$

co jest naturalną konsekwencją pokrywania się wierzchołków P_1 i P_4 .

Otrzymamy zatem:

$$/13/ \quad \underline{u}_\Delta = \begin{bmatrix} 1-\alpha, & 0 & | & \alpha(1-\beta), & 0 & | & \alpha\beta, & 0 \\ 0, & 1-\alpha & | & 0, & \alpha(1-\beta) & | & 0, & \alpha\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1^x \\ \delta_1^y \\ \vdots \\ \delta_3^x \\ \delta_3^y \end{Bmatrix} = \\ \equiv [N_1 | N_2 | N_3] \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} \equiv [N] \{ \delta \}.$$

Przyporządkowane trzem wierzchołkom funkcje kształtu są więc, następujące:

$$/14/ \quad \begin{cases} N_1 = 1-\alpha, \\ N_2 = \alpha(1-\beta), \\ N_3 = (1-\alpha)\beta. \end{cases}$$

Przyjmijmy dalej, że pole przemieszczeń jest takie, że prowadzi do powstania osobliwości pól odkształceń i naprężeń w wierzchołku P_4 . Założymy, że pole to jest sumą pola \underline{u}_Δ oraz pola \underline{u}_s o następujące funkcje kształtu:

$$/15/ \quad N_s = 1 - \alpha^\lambda.$$

Mamy zatem:

$$/16/ \quad \underline{u}_{\Delta s} = \underline{u}_\alpha + \underline{u}_\beta$$

To znaczy:

$$/17/ \quad \underline{u}_{\Delta s} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1-\alpha & 0 & \alpha(1-\beta) & 0 & \alpha\beta & 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & \alpha(1-\beta) & 0 & \alpha\beta & 0 & 1-\alpha \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1^x \\ \delta_2^x \\ \vdots \\ \delta_5^x \\ \delta_1^y \\ \delta_2^y \\ \vdots \\ \delta_5^y \end{array} \right\} =$$

$$\equiv [N_1 | N_2 | N_3 | N_5] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_5 \end{array} \right\} = [N] \{ \delta \}.$$

Przejdziemy teraz do opisu osobliwego pola odkształcenia $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \delta_{xy}\}$. Pole to określone jest przez funkcje:

$$/18/ \quad \begin{cases} \beta_{i,x} \equiv N_{i,\alpha} \cdot \alpha_{,x} + N_{i,\beta} \cdot \beta_{,x} \\ \beta_{i,y} \equiv N_{i,\alpha} \cdot \alpha_{,y} + N_{i,\beta} \cdot \beta_{,y} \end{cases}, \quad \text{dla } i = 1, 2, 3, 5,$$

w następujący sposób:

$$/19/ \quad \underline{\varepsilon} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \beta_{1,x} & 0 & \beta_{2,x} & 0 & \beta_{3,x} & 0 & \beta_{5,x} & 0 \\ 0 & \beta_{1,y} & 0 & \beta_{2,y} & 0 & \beta_{3,y} & 0 & \beta_{5,y} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1^x \\ \delta_2^x \\ \vdots \\ \delta_5^x \\ \delta_1^y \\ \delta_2^y \\ \vdots \\ \delta_5^y \end{array} \right\} =$$

$$\equiv [B_1 | B_2 | B_3 | B_5] \left\{ \begin{array}{c} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_5 \end{array} \right\} = [B] \{ \delta \}.$$

Podstawiając /9/ do /18/ otrzymujemy:

$$/20/ \quad \begin{cases} B_1^x = -\frac{b_y}{d}, & B_2^x = \frac{a_y + b_y}{d}, & B_3^x = -\frac{a_y}{d}, & B_5^x = -\lambda \alpha^{\lambda-1} \frac{b_y}{d}, \\ B_1^y = \frac{b_x}{d}, & B_2^y = -\frac{a_x + b_x}{d}, & B_3^y = \frac{a_x}{d}, & B_5^y = \lambda \alpha^{\lambda-1} \frac{b_x}{d}. \end{cases}$$

Zatem:

$$/21/ \quad B_1 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -b_y & , & 0 \\ 0 & , & b_x \\ b_x & , & -b_y \end{bmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} a_y + b_y & , & 0 \\ 0 & , & -(a_x + b_x) \\ -(a_x + b_x) & , & a_y + b_y \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -a_y & , & 0 \\ 0 & , & a_x \\ a_x & , & -a_y \end{bmatrix}, \quad B_5 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} -b_y & , & 0 \\ 0 & , & b_x \\ b_x & , & -b_y \end{bmatrix} = \lambda \alpha^{\lambda-1} B_1.$$

Tak więc, dla elementu trójkątnego, macierz osobliwych odkształceń ma postać:

$$/22/ \quad B = [B_1 \mid B_2 \mid B_3 \mid \lambda \alpha^{\lambda-1} B_1],$$

gdzie macierze B_1, B_2, B_3 dane są wzorami /21/.

Zwracamy uwagę, że macierze te nie zależą od współrzędnych α, β . Fakt ten umożliwia efektywne obliczenie macierzy sztywności.

4. Macierz sztywności.

Dla dowolnego elementu, macierz sztywności dana jest wzorem ([8]):

$$/23/ \quad K = \iint_{\Omega} B^T D B (\det J) d\alpha d\beta,$$

gdzie D jest symetryczną, dodatnio określoną, macierzą konstytutywną, której elementy zadane są poprzez stałe materiałowe:

/24/

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ & d_{22} & d_{23} \\ \text{SYM} & & d_{33} \end{bmatrix}$$

Niektóre algorytmy obliczeń metody elementów skończonych posługują się wyłącznie stałą macierzą D, przyjmowaną zwykle jako macierz sprężystości. Dla płaskiego stanu naprężenia macierz ta ma postać:

/25/

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1, & \nu, & 0 \\ & 1, & 0 \\ \text{SYM} & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Dla płaskiego stanu odkształcenia mamy:

/26/

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu, & \nu, & 0 \\ & 1-\nu, & 0 \\ \text{SYM} & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Podstawiając /8/ i /22/ do /23/ otrzymujemy:

$$/27/ \quad K = d \int_0^1 \int_0^1 [B_1; B_2; B_3; \lambda \alpha^{2M} B_4]^T [D] [B_1; B_2; B_3; \lambda \alpha^{2M} B_4] \alpha d\alpha d\beta \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{35} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{55} \end{bmatrix}$$

gdzie:

$$/28/ \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{ij} = d \int \int \int_0^1 B_i^T D B_j \alpha d\alpha d\beta = \frac{1}{2} d B_i^T D B_j, \\ K_{is} = d \int \int \int_0^1 B_i^T D B_s \lambda \alpha^2 d\alpha d\beta = \frac{\lambda}{1+\lambda} d B_i^T D B_s, \\ K_{ss} = d \int \int \int_0^1 B_s^T D B_s \lambda^2 \alpha^{2\lambda-1} d\alpha d\beta = \frac{\lambda}{2} d B_s^T D B_s, \\ K_{ji} = K_{ij}^T, \\ K_{si} = K_{is}^T, \quad \text{dla } i=1,2,3. \end{array} \right.$$

Wzory /21/ oraz /24/-/28/ podają efektywne wyrażenia potrzebne do obliczenia macierzy sztywności. Ze wzorów tych wynika, że macierz sztywności jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną jeżeli $\lambda > 0$. Ponieważ $\lambda = \frac{n}{1+n}$, gdzie n jest wykładnikiem potęgi w potęgowym prawie wzmocnienia $(n > 0)$, interesować nas będą wartości λ z przedziału: $0 < \lambda < 1$. Gdy $\lambda = 0$, znikają macierze K_{is} i K_{ss} .

Nie jesteśmy więc w stanie opisać, w ramach przedstawionego modelu, zachowania się materiału sprężysto-idealnie plastycznego, ponieważ model nasz zakładał ciągłość pola przemieszczeń w całym elemencie.

Jak wykazano w [9], dla tego typu materiału pojawia się nieciągłość pola przemieszczeń w wierzchołku szczeliny. W pracy [9] zaproponowano, dla tego przypadku, model trójkąta z polem przemieszczeń opisanym wzorem /11/, ale bez założeń /12/, o jednoznaczności przemieszczeń w wierzchołku P_1 . Dla $\lambda = 0.5$ mamy do czynienia z materiałem sprężystym. Wówczas:

$$/29/ \quad \begin{array}{l} K_{is} = \frac{2}{3} K_{i1}, \quad \text{dla } i=2,3, \\ K_{ss} = \frac{1}{2} K_{44}. \end{array}$$

Jeżeli $0.5 < \lambda < 1$ rozpatrywany materiał jest materiałem zwiększającym swoją sztywność pod wpływem przyłożonych obciążeń. Jak to widać ze wzorów /28/, udział członów osobliwych w macierzy sztywności jest, w tym przypadku, znacznie większy niż dla materiałów sprężysto-plastycznych.

5. Literatura.

1. J.R. Rice, G.F. Rosengren, Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 1-12, 1968.
2. J.W. Hutchinson, Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phys. Solids*, 16, 13-31, 1968.
3. R.S. Barsum, On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 10, 25-37, 1976.
4. R.S. Barsum, Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 11, 85-98, 1977.
5. D.M. Tracey, T.S. Cook, analysis of power type singularities using finite elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 11, 1225-1233, 1977.
6. H.D. Hibbit, Some properties of singular isoparametric elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 11, 180-184, 1977.
7. R.O. Foschi, J.D. Barrett, Stress intensity factors in anisotropic plates using singular isoparametric elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 10, 1281-1287, 1976.
8. O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, third edition, Mc Graw-Hill, London, 1977.
9. J.C. Rice, *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*, *Fracture*, 2, Academic Press, New York, 1968.