

40 / 1979

Marek Matczyński

STACJONARNE ZAGADNIENIA SZCZELIN  
W OŚRODKACH SPRĘŻYSTYCH.  
ZASTOSOWANIE METODY WIENERA-HOPFA

Praca habilitacyjna

P. 269a

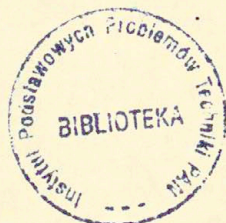


WARSZAWA 1979

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 8 sierpnia 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 40/1979



57211



Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd. 11 . Ark.druk. 16 .

Oddano do drukarni w sierpniu 1979 r.

Nr zamówienia 529/0/79

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8



MAREK MATCZYŃSKI

Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych  
IPPT PAN

STACJONARNE ZAGADNIENIA SZCZELIN  
W OŚRODKACH SPRĘŻYSTYCH.  
ZASTOSOWANIE METODY WIENERA-HOPFA

W S T Ę P

Jak wiadomo, problematyka pęknięcia ciał stałych i zniszczenia konstrukcji znajduje się w centrum zainteresowania wielu ośrodków naukowych całego świata, w tym również - choć w niedostatecznym zapewne stopniu - w szeregu polskich instytutów naukowych i naukowo-technicznych. Problematyka ta charakteryzuje się wielką różnorodnością podejść i stosowanych metod badawczych, a to z uwagi na wielkie znaczenie techniczne i poznawcze problemu, złożoność zjawisk fizycznych towarzyszących pękaniu i zniszczeniu oraz różnorodność przebiegu samego procesu pęknięcia; charakter tego procesu zmienia się bowiem zasadniczo w zależności od rodzaju rozpatrywanego materiału, sposobu przyłożenia obciążeń oraz od konkretnych warunków fizycznych w jakich proces pęknięcia przebiega. Różnie przebiegają też poszczególne fazy rozpatrywanego procesu: innymi prawami rządzi się np. proces zarodkowania i formowania się mikro-szczelin, innymi proces ich łączenia się prowadzący do powstania makroszczelin, a jeszcze innymi proces rozprzestrzeniania się tych makroszczelin; określamy tym mianem defekty, których wymiary geometryczne przewyższają o kilka rzędów wielkości rozmiary podstawowych elementów składowych /kryształy, ziarna itp./ badanego materiału.

W tej sytuacji prace badawcze prowadzone w poszczególnych ośrodkach muszą z konieczności skupiać się na pewnych, wybranych aspektach problematyki pęknięcia. Podobny charakter ma i niniejsza rozprawa. Przedmiotem jej jest analiza stanu prze-

mieszczeń i naprężeń w dwuwymiarowych obszarach idealnie sprężystych zawierających szczeliny płaskie. Szczeliny te, a ściślej mówiąc ich wierzchołki, są albo nieruchome, albo poruszają się ze stałą prędkością w swych płaszczyznach; w tym przypadku jednak zakłada się zawsze, że geometria rozważanego układu i warunki jego obciążenia i podparcia są takie, by zapewnić ustalony /stacjonarny/ charakter procesu. To samo dotyczy przypadków drgań układów zawierających nieruchome szczeliny; są to procesy drgań ustalonych.

W tym sensie przedmiotem rozważań rozprawy nie są bezpośrednio problemy pęknięcia, gdyż teoria propagacji szczelin w przedstawionym ujęciu stanowi dziedzinę fenomenologicznej teorii sprężystości, elastodynamiki. Wiadomo jednak z klasycznych już prac Griffitha i Irwina, że istnieje pewna klasa procesów pęknięcia określanymi jako kruche lub quasi-kruche, w których często sprężysta analiza ośrodka ze szczelinami poparta prostą hipotezą energetyczną pozwala z dużą dokładnością ocenić odporność konstrukcji na pęknięcie i przewidzieć charakter dalszego rozwoju tego procesu. Dlatego też rozprawa, mimo czysto elastodynamicznego podejścia do zagadnienia analizy stanu naprężenia w materiale sprężystym, stanowić może przyczynek do określenia fenomenologicznych podstaw teorii pęknięcia materiałów sprężysto-kruchych.

Rozważane w pracy układy charakteryzują się ponadto pewną szczególną geometrią: są to pasma lub warstwy nieskończone zawierające jedną lub szereg późnieskończonych szczelin płaskich typu pasmowego. Wybór tego rodzaju geometrii podyktowany został z jednej strony szeroką klasą zagadnień technicznych, w których tego rodzaju model może być z powodzeniem stosowany. Z drugiej zaś strony, taki dobór zagadnień stwarza możliwość przedstawienia i wykorzystania jednolitego podejścia matematycznego opartego na teorii równań całkowitych Wienera-Hopfa. Metoda ta, jak wykazały prace prowadzone w naszym ośrodku od blisko dwudziestu lat, jest niezwykle dogodna w zagadnieniach tego rodzaju i, co bardzo istotne, prowadzi ona w wielu przypadkach do efektywnych rozwiązań nadających się do bezpośredniego zastosowania w problemach pęknięcia; chodzi tu przede wszystkim o możliwość wyznaczania podstawowego parametru cha-



rakteryzującego wpływ szczelin, a mianowicie współczynnika intensywności naprężeń. W przypadkach bardziej złożonych udało się z powodzeniem zastosować technikę obliczeń numerycznych.

Rozprawa poprzedzona została, ograniczonym do koniecznego minimum, wstępem dotyczącym matematycznej teorii szczelin i podstaw teorii pękania materiałów sprężystych oraz podstawowych metod matematycznych stosowanych w pracy, a w szczególności całkowitej transformacji Fouriera i równania Wienera-Hopfa wraz z techniką ścisłej i przybliżonej faktoryzacji.

Autor pragnie w tym miejscu podziękować osobom i instytucjom, które przyczyniły się do przygotowania niniejszej rozprawy w obecnej postaci: Prof.dr.M.Sokołowskiemu, który zainicjował na naszym terenie badania w tej dziedzinie i służył mi wielokrotnie radą i pomocą przy analizie i interpretacji otrzymywanych wyników; Doc.dr.G.Kuhnowi za owocną współpracę w latach 1972-1973, które spędziłem dzięki stypendium Fundacji im. Alexandra von Humboldta w Uniwersytecie Technicznym w Monachium; kierownictwu Katedry Mechaniki A tego uniwersytetu, które umożliwiło mi wykorzystanie Centrum Obliczeniowego im. H.Leibniza Bawarskiej Akademii Nauk; a wreszcie kierownictwu i zespołowi Zakładu Teorii Ośrodków Ciągłych IPPT PAN za stworzenie mi warunków do przygotowania rozprawy.

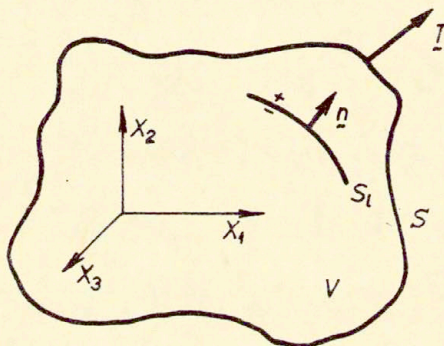


## 1. PODSTAWY MATEMATYCZNEJ TEORII SZCZELIN W OŚRODKU SPRĘŻYSTYM

### 1.1. Matematyczny model szczeliny

Z matematycznego punktu widzenia szczeliną nazywać będziemy specjalny rodzaj defektu powierzchniowego w ośrodku ciągłym. W ogólności [1], defektem powierzchniowym w ośrodku ciągłym nazywamy otwartą lub zamkniętą, skończoną lub nieskończoną powierzchnię, na której mogą pojawić się nieciągłości wektora przemieszczenia i naprężenia przy czym powierzchnia ta może się poruszać, zaś nieciągłości wektora przemieszczenia i naprężenia mogą zmieniać się w czasie.

Przyjmijmy, że w prostokątnym układzie współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$  dane jest ciało sprężyste o objętości  $V$  ograniczone powierzchnią  $S+S_1$ . Wprowadźmy jednostkowy wektor normalny  $\underline{n}$  do powierzchni  $S_1$  jak na Rys.1 i wyróżnijmy dwie strony powierz-



Rys.1

chni  $S_1$  oznaczając je odpowiednio symbolami  $S_1^\pm$ . W dalszych rozważaniach strony  $S_1^\pm$  powierzchni  $S_1$  nazywać będziemy odpowiednio górną i dolną powierzchnią rozważanego defektu.

Nieciągłości dowolnej funkcji  $h(x_i, t)$  ( $i=1,2,3$ ) na powierzchni  $S_1$  oznaczać będziemy symbolem  $[[h]]$ , który zdefiniowany będzie zależnością:

$$[[h]] = h^+ - h^-$$

gdzie  $h^{\pm}$  są wartościami granicznymi funkcji  $h(x_i, t)$  na różnych stronach powierzchni  $S_i$ .

Zgodnie z ogólną definicją defektu powierzchniowego, matematycznym modelem szczeliny w ciele sprężystym  $V$  nazywać będziemy cięcie - powierzchnię  $S_i$ , na której pojawia się nieciągłość wektora przemieszczenia  $u$  wymuszona działaniem obciążenia  $T$  przyłożonego w punktach wewnętrznych ciała względnie na powierzchni  $S+S_i$ , przy czym wektor naprężenia pozostaje na powierzchni  $S_i$  funkcją ciągłą.

W myśl tej definicji, w przypadku gdy rozważane ciało podane jest działaniu wymuszającego obciążenia  $T$

$$[u_i] \neq 0 \quad [\sigma_{ij} n_j] = 0 \quad \text{na } S_i, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

gdzie  $u_i$  i  $\sigma_{ij}$  są składowymi wektora przemieszczenia i tensora naprężenia.

Dodatkowo żądamy, aby na powierzchni  $S_i$  spełniony był warunek:

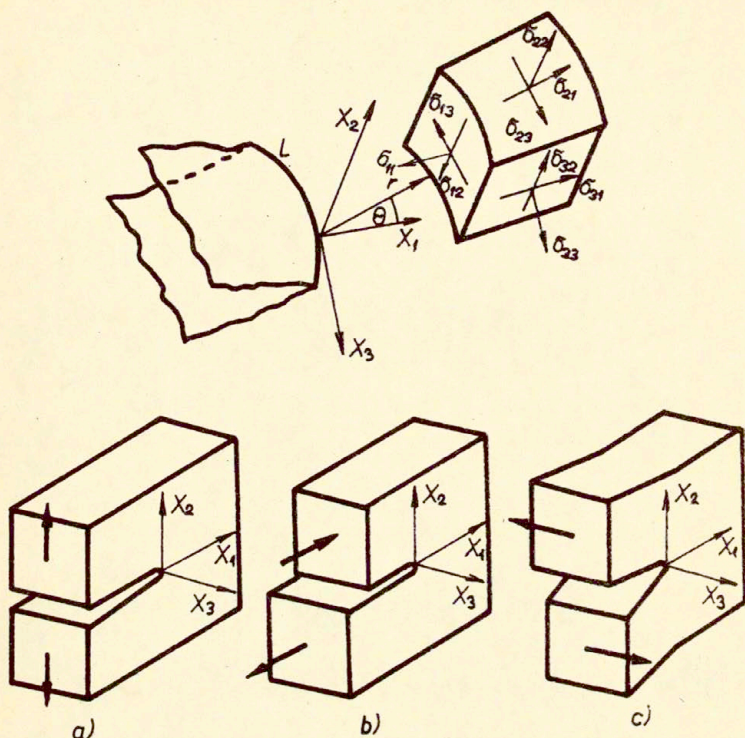
$$[u_i] n_i \geq 0,$$

który zapewnia nam nieprzenikanie się wzajemne cząsteczek ośrodka z różnych stron powierzchni  $S_i$ .

Traktując szczelinę jako powierzchnię nieciągłości wektora przemieszczenia, Irwin [2] zauważył, że istnieją trzy kinematycznie niezależne ruchy górnej i dolnej powierzchni szczeliny względem siebie. Te trzy typy odkształceń powierzchni szczeliny pokazano na Rys.2, przedstawiającym lokalne przemieszczenia w bezpośrednim otoczeniu krzywej gładkiej  $L$ , którą nazywać będziemy krawędzią rozważanej szczeliny. Wprowadzony tutaj lokalny, prostokątny układ współrzędnych  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) zaczepiony jest w dowolnym punkcie krawędzi szczeliny, oś  $x_1$  jest prostopadła do krawędzi szczeliny, oś  $x_2$  jest prostopadła do płaszczyzny, w której usytuowana jest szczelina, zaś oś  $x_3$  jest styczna do krawędzi szczeliny w początku wprowadzonego układu współrzędnych.

W pierwszym typie odkształcenia powierzchni szczeliny jedynie normalna składowa wektora przemieszczenia doznaje skoku na jej powierzchni /Rys.2a/. Typ ten nazywać będziemy typem





Rys.2

normalnego rozwarcia szczeliny, względnje Typem I.

W drugim typie odkształcenia powierzchni szczeliny jedynie styczna składowa wektora przemieszczenia o kierunku osi  $x_1$ , doznaje skoku na powierzchni szczeliny /Rys.2b/. Typ ten nazywać będziemy typem ścinania poprzecznego szczeliny lub Typem II.

W trzecim typie odkształcenia powierzchni szczeliny jedynie składowa wektora przemieszczenia o kierunku osi  $x_3$ , doznaje skoku na jej powierzchni /Rys.2c/. Typ ten nazywać będziemy typem ścinania podłużnego lub Typem III.



Rozwiązania omówionych powyżej typów odkształcenia powierzchni szczeliny są konieczne i wystarczające do opisanie wszystkich możliwych ruchów szczeliny znajdującej się w polu działania najogólniejszych obciążeń wymuszających [3].

Każdy z tych podstawowych typów odkształcenia powierzchni szczelin związany jest z charakterystycznym rozkładem naprężeń w otoczeniu krawędzi szczeliny. Wprowadzając biegunowy układ współrzędnych  $(r, \theta)$  o początku w dowolnym punkcie krawędzi szczeliny /Rys.2/, wykazuje się, że w otoczeniu krawędzi szczeliny składowe tensora naprężenia są osobliwe i z dokładnością do ich części regularnej w punkcie  $r=0$ , można je przedstawić w postaci:

$$/1.1/ \quad \sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad \text{dla } r \rightarrow 0.$$

Wielkość  $K$  nazywamy współczynnikiem intensywności naprężenia w odpowiednim punkcie krawędzi szczeliny. Z uwagi na bezwymiarowość funkcji  $f_{ij}(\theta)$ , współczynnik intensywności naprężenia  $K$  ma wymiar [naprężenie  $\times \sqrt{\text{długość}}$ ].

Współczynnik intensywności naprężenia  $K$  zależy w ogólności od kształtu ciała, w którym znajduje się szczelina, stałych materiałowych, obciążenia wymuszającego, wymiarów szczeliny, kształtu krawędzi szczeliny oraz prędkości propagacji szczeliny.

Z zależności /1.1/ wynika, że współczynnik intensywności naprężenia można traktować jako miarę lokalnych naprężeń w bezpośrednim otoczeniu punktów krawędzi szczeliny i w związku z tym spełnia on podstawową rolę w opisie procesów pęknięcia materiałów sprężystych.

Współczynniki intensywności naprężenia dla poszczególnych typów odkształcenia powierzchni szczeliny można, zgodnie z zależnością /1.1/ oraz oznaczeniami z Rys.2, zdefiniować formalnie jako granice następujących wielkości:

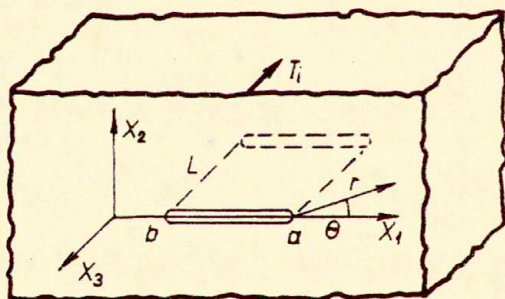
$$\text{Typ I: } K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, 0),$$

$$/1.2/ \quad \text{Typ II: } K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, 0),$$

$$\text{Typ III: } K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(r, 0).$$

Analityczne wyznaczenie pola naprężeń w ciele ze szczeliną, współczynników intensywności naprężenia jak i wielkość skoków składowych wektora przemieszczenia na powierzchniach szczelin jest zadaniem matematycznej teorii sprężystości.

Rozpatrując w dalszych rozważaniach konkretne zagadnienie szczelin, zakładając będziemy zazwyczaj, że szczelina znajduje się w izotropowym i jednorodnym ciele sprężystym, w którym spełnione są warunki płaskiego względnie antypłaskiego stanu odkształcenia. Założenie to oznacza między innymi, że rozpatrywać będziemy tylko te zagadnienia, w których składowe wektora przemieszczenia i tensora naprężenia są funkcjami jedynie czasu  $t$  i współrzędnych prostokątnych  $(x_1, x_2)$ , /Rys.3/.



Rys. 3



Dodatkowo, istotne będzie założenie o prostoliniowości szczeliny. Rozważać będziemy mianowicie jedynie tzw. szczeliny pasmowe przyjmując, że powierzchnią nieciągłości wektora przemieszczenia jest usytuowane w płaszczyźnie  $(x_1, x_3)$  prostoliniowe i nieskończone w kierunku osi  $x_3$  cięcie, które w płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$  ma postać odcinka lub półprostej /Rys.3/. W pierwszym przypadku cięcie takie nazywać będziemy szczeliną o skończonej długości, zaś w drugim szczeliną półnieskończoną.

Z przyjętych założeń wynika, że pola przemieszczeń i naprężeń na powierzchniach szczeliny jak i w jej otoczeniu są jednakowe w dowolnej płaszczyźnie prostopadłej do osi  $x_3$ . Badając wobec tego rozkład przemieszczeń i naprężeń w otoczeniu krawędzi szczeliny wystarczy ograniczyć się do badania rozkładu tych wielkości w otoczeniu punktów  $(b, 0, 0)$  i  $(a, 0, 0)$  w przyjętym przez nas układzie współrzędnych /Rys.3/. Punkty te nazywać będziemy wierzchołkami szczeliny.

Z założeń tych wynika również, że zgodnie z klasyfikacją Irwina, dwa pierwsze typy odkształceń powierzchni szczeliny /Typ I i II/ odpowiadać będą zagadnieniom, w których spełnione są globalnie warunki zapewniające istnienie w ciele ze szczeliną płaskiego stanu odkształcenia, zaś ostatni typ odkształcenia powierzchni szczeliny /Typ III/ odpowiadać będzie zagadnieniom, w których spełnione są warunki antypłaskiego stanu odkształcenia.

Wprowadzając biegunowy układ współrzędnych  $(r, \theta)$  o początku w prawym wierzchołku szczeliny /Rys.3/ oraz wykorzystując założenie o istnieniu w ciele płaskiego względnie antypłaskiego stanu odkształcenia można wykazać, że dla dowolnych obciążeń wymuszających, w statycznym zagadnieniu szczeliny o swobodnych powierzchniach rozkład przemieszczeń i naprężeń w bezpośrednim otoczeniu prawego wierzchołka szczeliny - dla odpowiednich typów odkształcenia powierzchni szczeliny - opisany będzie następującymi zależnościami [2-5]:



Typ I:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta/2) [\alpha - 1 + 2\sin^2(\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) [\alpha + 1 - 2\cos^2(\theta/2)] \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{array} \right\} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \left\{ \begin{array}{l} 1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ 1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2) \end{array} \right\},$$

/1.3/

Typ II:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ u_2 \end{array} \right\} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left\{ \begin{array}{l} \sin(\theta/2) [\alpha + 1 + 2\cos^2(\theta/2)] \\ -\cos(\theta/2) [\alpha - 1 - 2\sin^2(\theta/2)] \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{array} \right\} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] \\ \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \end{array} \right\},$$

Typ III:

$$u_3 = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin(\theta/2),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{array} \right\} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \left\{ \begin{array}{l} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{array} \right\},$$

gúzie

$$/1.4/ \quad \chi = \begin{cases} 3-4\nu & \text{— dla płaskiego stanu odkształcenia,} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{— dla płaskiego stanu naprężenia,} \end{cases}$$

przy czym w przypadku płaskiego stanu odkształcenia  $u_3 = 0$  i  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ , zaś w przypadku płaskiego stanu naprężenia  $\sigma_{33} = 0$ . Szeroki przegląd rozwiązań dotyczących współczynników intensywności naprężenia otrzymanych na gruncie dwuwymiarowej teorii sprężystości dla różnych konfiguracji ciał sprężystych ze szczelinami podany jest w opracowaniach [6-10].

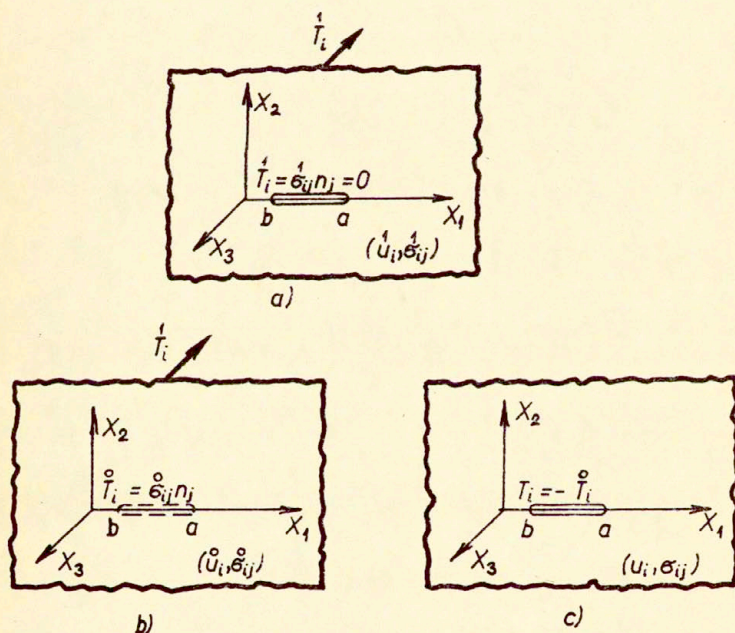
Przyjęcie założenia o istnieniu w ciele ze szczeliną płaskiego względnie antypłaskiego stanu odkształcenia pozwala z jednej strony uzyskiwać efektywne rozwiązania stosunkowo szerokiej klasy zagadnień, zaś z drugiej strony w istotny sposób je zawęża. Okazuje się jednak [2,11,16], że rozwiązania uzyskane na gruncie dwuwymiarowej teorii sprężystości są - z punktu widzenia teorii pękania ciał sprężystych - wystarczająco dobrym przybliżeniem rozwiązań zagadnień, w których przemieszczenia i naprężenia są funkcjami wszystkich trzech współrzędnych  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ). W cytowanych powyżej pracach wykazano, że w przypadku zagadnień trójwymiarowych, rozwiązanie opisujące rozkład przemieszczeń i naprężeń w otoczeniu krawędzi szczeliny odpowiada rozwiązaniu dla płaskiego stanu odkształcenia nałożonemu na rozwiązanie dla antypłaskiego stanu odkształcenia.



### 1.2. Statyczne zagadnienie szczeliny pasmowej w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Rozważmy nieograniczony ośrodek sprężysty osłabiony szczeliną pasmową  $b \ll x_1 \ll a$ ,  $x_2=0$ ,  $|x_3| < \infty$  /Rys.3/. Zakładamy, że powierzchnie szczeliny są swobodne od obciążeń, zaś sama szczelina znajduje się w polu działania dowolnych obciążeń wymuszających  $\hat{T}_i$  przyłożonych w punktach nie leżących na jej powierzchniach.

Rozwiązanie tego typu zagadnień /Rys.4a/ najwygodniej jest, wykorzystując zasadę superpozycji, przedstawić w postaci rozwiązania dla ośrodka ciągłego bez szczeliny /Rys.4b/ i rozwiązania dla ośrodka ze szczeliną, na której powierzchniach zadane są, otrzymane z rozwiązania poprzedniego zagadnienia, odpowiednie składowe wektora naprężenia wzięte z odwrotnym znakiem /Rys.4c/.



Rys.4



Traktując rozwiązanie dla ośrodka ciągłego jako znane, zajmować się będziemy jedynie tym drugim zagadnieniem.

Poszukiwanie rozwiązania tego ostatniego problemu jest zadaniem matematycznej teorii szczelin. Podstawowymi metodami używanymi przy rozwiązywaniu tego rodzaju problemów są w zależności od kształtu ciała względnie kształtu szczeliny, metody funkcji zmiennej zespolonej [3,5,17,18], metody transformacji całkowych [15,19] względnie metody teorii potencjału. Stosując tę ostatnią metodę, tzn. wykorzystując odpowiednie własności potencjałów harmonicznych, podamy - nie wdając się w szczegóły - zależności opisujące rozkład przemieszczeń i naprężeń w statycznym zagadnieniu szczeliny pasmowej w nieograniczonym ośrodku sprężystym, przy czym zgodnie z klasyfikacją Irwina rozpatrzmy wszystkie trzy możliwe typy odkształceń powierzchni szczeliny.

#### 1.2.1. Normalne rozwarcie powierzchni szczeliny - Typ I

Niesch nieograniczony, izotropowy i jednorodny ośrodek sprężysty osłabiony będzie szczeliną pasmową  $b \ll x_1 \ll a$ ,  $x_2 = 0$ ,  $|x_3| < \infty$  mogącą rozwierać się jedynie w kierunku osi  $x_2$  przyjętego przez nas układu współrzędnych prostokątnych /Rys.4c/. Można wykazać [20], że przy założeniu istnienia nieciągłości składowych wektora przemieszczenia na szczelinie jedynie w tym kierunku, na powierzchniach szczeliny muszą być spełnione następujące warunki brzegowe:

$$\sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0) = -f_1(x_1) \quad \text{dla} \quad b < x_1 < a,$$

$$\sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad b < x_1 < a,$$

gdzie  $f_1(x_1)$  jest znaną funkcją, zaś symbol  $h^{\pm} = h^{\pm}(x_1, 0) = \lim_{x_2 \rightarrow \pm 0} h(x_1, x_2)$  zgodnie z wprowadzonym wcześniej oznaczeniem, określać będzie teraz nie tylko wartości graniczne na powierzchniach szczeliny lecz również wartości graniczne funkcji  $h(x_1, x_2)$  w całej płaszczyźnie, w której usytuowana jest szczelina.

Zakładając dodatkowo, że przemieszczenie  $u_2$  w wierzchołkach szczeliny znika, tzn.  $u_2(b,0) = u_2(a,0) = 0$  oraz przyjmując, że składowe tensora naprężenia znikają w nieskończoności, pole przemieszczeń i naprężeń w dowolnym punkcie ośrodka ze szczeliną opisane będzie zależnościami [20]:

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\mu} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right] ,$$

$$u_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi\mu} \left[ 2(1-\nu)\psi - x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right] ,$$

$$/1.5/ \quad \sigma_{11}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} \right)$$

$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} x_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} ,$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) ,$$

gdzie  $\mu$  - stała Lamégo,  $\nu$  - współczynnik Poissona.

Występujące w tych wyrażeniach potencjały harmoniczne  $\psi(x_1, x_2)$  i  $\psi(x_1, x_2)$  określone są zależnościami:

$$/1.6/ \quad \psi(x_1, x_2) = \int_b^a \rho(\xi) \ln \frac{c}{r} d\xi ,$$



$$/1.6/ \quad \psi(x_1, x_2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -x_2 \int_b^a \frac{q(\xi)}{r^2} d\xi, \quad ,$$

gdzie

$$q(x) = \int_b^x \frac{F_1(\xi)}{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}} d\xi, \quad ,$$

/1.7/

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}}{\xi-x} f_1(\xi) d\xi, \quad ,$$

$$r^2 = (x_1 - \xi)^2 + x_2^2, \quad ,$$

C - dowolna stała o wymiarze długości.

Zależności /1.5/ zostały wyprowadzone przy założeniu istnienia w ciele płaskiego stanu odkształcenia co oznacza, że w tym przypadku dodatkowo  $u_3(x_1, x_2) = 0$  i  $\sigma_{33}(x_1, x_2) = -\frac{2\nu}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ . Zastępując we wzorach /1.5/ współczynnik Poissona  $\nu$  wyrażeniem  $\nu/(1+\nu)$  i przyjmując, że  $\sigma_{33}(x_1, x_2) = 0$ , otrzymamy zależności opisujące pole przemieszczeń i naprężeń w ośrodku ze szczeliną w przypadku istnienia w ciele płaskiego stanu naprężenia.

Przechodząc w zależnościach /1.5/ do granicy z  $x_2 \rightarrow \pm 0$  oraz wykorzystując zależności /1.6/ i odpowiednie własności potencjałów  $\varphi$  i  $\psi$ , otrzymamy wyrażenia opisujące rozkład przemieszczeń i naprężeń na powierzchniach szczeliny i na jej przedłużeniu. Zależności te mają w ogólnym przypadku następu-

jącą postać [20]:

$$u_1^\pm(x_1, 0) = \frac{\alpha - 1}{4\pi\mu} \int_b^a \frac{g(\xi)}{\xi - x_1} d\xi \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$u_2^\pm(x_1, 0) = \pm \frac{\alpha + 1}{4\mu} \begin{cases} g(x_1) & \text{dla } b \leq x_1 \leq a, \\ 0 & \text{dla } x_1 < b \\ & \text{lub } x_1 > a, \end{cases}$$

$$\sigma_{12}^\pm(x_1, 0) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

/1.8/

$$\sigma_{11}^\pm(x_1, 0) = \sigma_{22}^\pm(x_1, 0) = \begin{cases} \frac{F_1(x_1)}{\sqrt{(x_1 - b)(x_1 - a)}} & \text{dla } x_1 > a, \\ f_1(x_1) & \text{dla } b < x_1 < a, \\ -\frac{F_1(x_1)}{\sqrt{(b - x_1)(a - x_1)}} & \text{dla } x_1 < b, \end{cases}$$

gdzie  $\alpha$  określone jest wzorem /1.4/ przy czym w przypadku płaskiego stanu odkształcenia  $u_3^\pm(x_1, 0) = 0$  i  $\sigma_{33}^\pm(x_1, 0) = 2\nu\sigma_{22}^\pm(x_1, 0)$ .

Wykorzystując następnie definicję /1.2/ oraz przechodząc w wyrażeniach /1.8/ do granicy z  $x_1 \rightarrow b$  i  $x_1 \rightarrow a$  odpowiednio w





$$/1.10/ \quad \delta_{22}^{\pm}(x_1, 0) = \begin{cases} \frac{K_I^{(b)}}{\sqrt{2\pi(b-x_1)}} - f_1(b) + O[(b-x_1)^{1/2}] & \text{dla } x_1 \rightarrow b, \\ \frac{K_I^{(a)}}{\sqrt{2\pi(x_1-a)}} - f_1(a) + O[(x_1-a)^{1/2}] & \text{dla } x_1 \rightarrow a. \end{cases}$$

W przypadku, gdy szczelina usytuowana jest symetrycznie względem osi  $x_2$ , wyrażenia /1.9/ przyjmą postać:

$$K_I^{(-a)} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{a-\xi}{\xi+a}} f_1(\xi) d\xi,$$

/1.11/

$$K_I^{(a)} = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \int_{-a}^a \sqrt{\frac{\xi+a}{a-\xi}} f_1(\xi) d\xi,$$

zaś w przypadku szczeliny półnieskończonej o wierzchołku w początku układu współrzędnych:

$$/1.12/ \quad K_I = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{-\xi}} f_1(\xi) d\xi.$$



### 1.2.2. Poprzeczne ścinanie powierzchni szczeliny - Typ II

Przyjmijmy teraz, że funkcją nieciągłą na powierzchni szczeliny jest jedynie składowa wektora przemieszczenia w kierunku osi  $x_1$ , /Rys.4c/. Wówczas na powierzchniach szczeliny muszą być spełnione warunki [20]:

$$\bar{\sigma}_{22}^{\pm}(x_1, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad b < x_1 < a,$$

$$\bar{\sigma}_{12}^{\pm}(x_1, 0) = -f_2(x_1) \quad \text{dla} \quad b < x_1 < a,$$

gdzie  $f_2(x_1)$  jest znaną funkcją.

Zakładając, że przemieszczenie  $u_1$  znika w wierzchołkach szczeliny, tzn.  $u_1(b, 0) = u_1(a, 0) = 0$  oraz przyjmując, że składowe tensora naprężenia znikają w nieskończoności, pole przemieszczeń i naprężeń w dowolnym punkcie ośrodka ze szczeliną opisane będzie zależnościami [20]:

$$u_1(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi\mu} \left[ 2(1-\nu)\psi + x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \right],$$

$$u_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi\mu} \left[ (1-2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \right],$$

/1.13/

$$\bar{\sigma}_{11}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi} \left( 2 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right),$$

$$\bar{\sigma}_{12}(x_1, x_2) = -\frac{1}{\pi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right),$$

$$\bar{\sigma}_{22}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} x_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2},$$

gdzie potencjały  $\varphi$  i  $\psi$  określone są związkami /1.6/ oraz

$$\varphi(x) = \int_b^x \frac{F_2(\xi)}{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}} d\xi,$$

/1.14/

$$F_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}}{\xi-x} f_2(\xi) d\xi.$$

Podobnie jak poprzednio, wzory /1.13/ są słuszne dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia i wobec tego należy je uzupełnić zależnościami:  $u_3(x_1, x_2) = 0$  i  $\epsilon_{33}(x_1, x_2) = -\frac{2\nu}{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ .

Zastępując natomiast w zależnościami /1.13/ współczynnik Poissona  $\nu$  wyrażeniem  $\nu/(1+\nu)$  oraz przyjmując, że  $\epsilon_{33}(x_1, x_2) = 0$  otrzymamy rozwiązanie słuszne dla płaskiego stanu naprężenia.

Przechodząc w zależnościami /1.13/ do granicy z  $x_2 \rightarrow \pm 0$  oraz wykorzystując odpowiednie własności potencjałów  $\varphi$  i  $\psi$  jak i zależność /1.14/, stan przemieszczeń i naprężeń na powierzchniach szczeliny i na jej przedłużeniu opisany będzie zależnościami [20]:

$$u_1^\pm(x_1, 0) = \pm \frac{x+1}{4\mu} \begin{cases} \varphi(x_1) & \text{dla } b \leq x_1 \leq a, \\ 0 & \text{dla } x_1 < b \\ & \text{lub } x_1 > a, \end{cases}$$

/1.15/

$$u_2^\pm(x_1, 0) = -\frac{x+1}{4\pi\mu} \int_b^a \frac{\varphi(\xi)}{\xi-x_1} d\xi \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$



$$\sigma_{11}^{\pm}(x_1, 0) = \pm 2 \begin{cases} \frac{F_2(x_1)}{\sqrt{(x_1-b)(a-x_1)}} & \text{dla } b < x_1 < a, \\ 0 & \text{dla } x_1 < b \\ & \text{lub } x_1 > a, \end{cases}$$

$$/1.15/ \quad \sigma_{12}^{\pm}(x_1, 0) = - \begin{cases} \frac{F_2(x_1)}{\sqrt{(x_1-b)(x_1-a)}} & \text{dla } x_1 > a, \\ f_2(x_1) & \text{dla } b < x_1 < a, \\ -\frac{F_2(x_1)}{\sqrt{(b-x_1)(a-x_1)}} & \text{dla } x_1 < b, \end{cases}$$

$$\sigma_{22}^{\pm}(x_1, 0) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

gdzie  $\lambda$  określone jest wzorem /1.4/ zaś w przypadku płaskiego stanu odkształcenia:  $u_3(x_1, 0) = 0$  i  $\sigma_{33}^{\pm}(x_1, 0) = 2 \nu \sigma_{11}^{\pm}(x_1, 0)$

Z analizy zależności /1.15/ oraz definicji /1.2/ wynika, że współczynniki intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczeliny, w przypadku poprzecznego ścinania powierzchni szczeliny, opisane będą wyrażeniami identycznymi jak w przypadku normalnego rozwarcia powierzchni szczeliny, tzn.:

$$/1.16/ \quad K_{II}^{(b)} = \sqrt{\frac{2}{\pi(a-b)}} \int_b^a \sqrt{\frac{a-\xi}{\xi-b}} f_2(\xi) d\xi,$$

$$K_{II}^{(a)} = \sqrt{\frac{2}{\pi(a-b)}} \int_b^a \sqrt{\frac{\xi-b}{a-\xi}} f_2(\xi) d\xi,$$

przy czym rozkład przemieszczenia  $u_1$  i naprężenia  $\sigma_{12}$  w płaszczyźnie szczeliny w otoczeniu jej wierzchołków dany będzie związkami:

$$/1.17/ \quad u_1^\pm(x_1, 0) = \pm \frac{\alpha + 1}{2\mu} \left\{ \begin{array}{l} K_{II}^{(b)} \sqrt{\frac{x_1 - b}{2\pi}} + O[(x_1 - b)^{3/2}] \\ \text{dla } x_1 \rightarrow b, \\ K_{II}^{(a)} \sqrt{\frac{a - x_1}{2\pi}} + O[(a - x_1)^{3/2}] \\ \text{dla } x_1 \rightarrow a, \end{array} \right.$$

$$\sigma_{12}^\pm(x_1, 0) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{K_{II}^{(b)}}{\sqrt{2\pi(b-x_1)}} - f_2(b) + O[(b-x_1)^{1/2}] \\ \text{dla } x_1 \rightarrow b, \\ \frac{K_{II}^{(a)}}{\sqrt{2\pi(x_1-a)}} - f_2(a) + O[(x_1-a)^{1/2}] \\ \text{dla } x_1 \rightarrow a. \end{array} \right.$$



### 1.2.3. Podłużne ścinanie powierzchni szczeliny - Typ III

Przyjmijmy, że funkcją nieciągłą na powierzchni szczeliny jest jedynie składowa wektora przemieszczenia w kierunku osi  $x_3$ , /Rys.4c/ oraz założmy istnienie w ciele antypłaskiego stanu odkształcenia charakteryzującego się tym, że jedyną nieznikającą składową wektora przemieszczenia jest przemieszczenie  $u_3(x_1, x_2)$  skierowane wzdłuż osi  $x_3$  przyjętego przez nas układu współrzędnych. Przyjęcie tych założeń oznacza, że jedynymi nieznikającymi tożsamościowo składowymi tensora naprężenia są naprężenia  $\sigma_{13}(x_1, x_2)$  i  $\sigma_{23}(x_1, x_2)$ , zaś na powierzchniach szczeliny spełniony jest warunek:

$$\sigma_{23}^{\pm}(x_1, 0) = -f_3(x_1) \quad \text{dla} \quad b < x_1 < a,$$

gdzie  $f_3(x_1)$  jest znaną funkcją.

Zakładając, że przemieszczenie  $u_3$  znika w wierzchołkach szczeliny, tzn.  $u_3(b, 0) = u_3(a, 0) = 0$  oraz przyjmując, że składowe tensora naprężenia znikają w nieskończoności, przemieszczenie  $u_3$  i naprężenia  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  w dowolnym punkcie ośrodka ze szczeliną opisane będą zależnościami [20]:

$$u_3(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\mu} \psi,$$

/1.18/

$$\sigma_{13}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial x_2},$$

gdzie potencjał  $\psi$  określony jest związkiem /1.6/2 oraz

$$\vartheta(x) = \int_b^x \frac{F_3(\xi)}{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}} d\xi, \quad /1.19/$$

$$F_3(x) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}}{\xi-x} f_3(\xi) d\xi.$$

Przechodząc w zależnościach /1.18/ do granicy z  $x_2 \rightarrow \pm 0$ , oraz wykorzystując zależności /1.19/, przemieszczenie  $u_3$  i naprężenia  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  na powierzchniach szczeliny i na jej przedłużeniu przyjmą postać [20]:

$$u_3^\pm(x_1, 0) = \pm \frac{1}{4} \begin{cases} \vartheta(x_1) & \text{dla } b \leq x_1 \leq a, \\ 0 & \text{dla } x_1 < b \\ & \text{lub } x_1 > a, \end{cases}$$

$$\sigma_{13}^\pm(x_1, 0) = \pm \begin{cases} \frac{F_3(x_1)}{\sqrt{(x_1-b)(a-x_1)}} & \text{dla } b < x_1 < a, \\ 0 & \text{dla } x_1 < b \\ & \text{lub } x_1 > a, \end{cases} \quad /1.20/$$

$$\sigma_{23}^\pm(x_1, 0) = - \begin{cases} \frac{F_3(x_1)}{\sqrt{(x_1-b)(x_1-a)}} & \text{dla } x_1 > a, \\ f_3(x_1) & \text{dla } b < x_1 < a, \\ -\frac{F_3(x_1)}{\sqrt{(b-x_1)(a-x_1)}} & \text{dla } x_1 < b, \end{cases}$$



Z zależności /1.20/ oraz definicji /1.2/ wynika, że współczynniki intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczeliny wyrażają się, w przypadku podłużnego ścinania powierzchni szczeliny, zależnościami identycznymi jak w poprzednich przypadkach, tzn.:

$$K_{III}^{(b)} = \sqrt{\frac{2}{\pi(a-b)}} \int_b^a \sqrt{\frac{a-\xi}{\xi-b}} f_3(\xi) d\xi,$$

/1.21/

$$K_{III}^{(a)} = \sqrt{\frac{2}{\pi(a-b)}} \int_b^a \sqrt{\frac{\xi-b}{a-\xi}} f_3(\xi) d\xi,$$

zaś rozkład przemieszczenia  $u_3$  i naprężenia  $\sigma_{23}$  w płaszczyźnie szczeliny w otoczeniu jej wierzchołków opisany będzie związkami:

$$/1.22/ \quad \sigma_{23}^{\pm}(x_1, 0) = \begin{cases} \frac{K_{III}^{(b)}}{\sqrt{2\pi(b-x_1)}} - f_3(b) + O[(b-x_1)^{1/2}] \\ \quad \text{dla } x_1 \rightarrow b, \\ \frac{K_{III}^{(a)}}{\sqrt{2\pi(x_1-a)}} - f_3(a) + O[(x_1-a)^{1/2}] \\ \quad \text{dla } x_1 \rightarrow a, \end{cases}$$

$$u_3^{\pm}(x_1, 0) = \pm \frac{2}{\sqrt{4}} \begin{cases} K_{III}^{(b)} \sqrt{\frac{x_1-b}{2\pi}} + O[(x_1-b)^{3/2}] \\ \quad \text{dla } x_1 \rightarrow b, \\ K_{III}^{(a)} \sqrt{\frac{a-x_1}{2\pi}} + O[(a-x_1)^{3/2}] \\ \quad \text{dla } x_1 \rightarrow a, \end{cases}$$

### 1.3. Stacjonarne zagadnienie ruchu szczeliny pasmowej w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Rozważmy nieograniczony ośrodek sprężysty osłabiony szczeliną pasmową  $b \ll x_1 \ll a$ ,  $x_2 = 0$ ,  $|x_3| < \infty$  znajdującą się w polu działania dowolnych obciążeń wymuszających. Zakładamy, że powierzchnie szczeliny swobodne są od obciążeń oraz, że szczelina porusza się wraz z układem sił wymuszających ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x_1$ , przyjętego przez nas nieruchomego układu współrzędnych  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ), /Rys.4/.

Wprowadzenie do rozważań ruchomego układu współrzędnych prostokątnych  $(x,y,z)$ , który zdefiniujemy zależnościami:

$$/1.23/ \quad X_1 = X + vt, \quad X_2 = Y, \quad X_3 = Z,$$

pozwala na zastosowanie do rozwiązywania tego typu zagadnień, metod używanych przy rozwiązywaniu statycznych zagadnień szczelin [21-26].

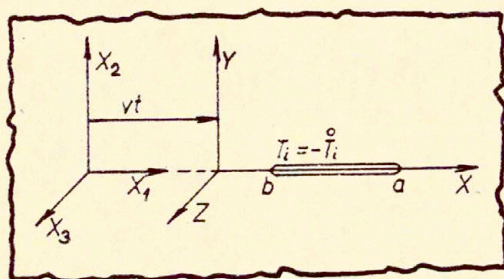
Wiążąc ruchomy układ współrzędnych /1.23/ ze szczeliną oraz stosując zasadę superpozycji, rozwiązanie naszego zagadnienia - zapisane w ruchomym układzie współrzędnych - przedstawimy, podobnie jak w zagadnieniu statycznym, w postaci sumy rozwiązania dla ośrodka ciągłego i rozwiązania dla ośrodka ze szczeliną, na powierzchniach której zadane są odpowiednie obciążenia.

Wykorzystując własności potencjałów harmonicznych występujących w stacjonarnych zagadnieniach teorii sprężystości podamy rozwiązania opisujące rozkład przemieszczeń i naprężeń w omawianym problemie szczeliny pasmowej poruszającej się ze stałą prędkością, przy czym podobnie jak w zagadnieniu statycznym, rozpatrzemy wszystkie trzy typy odkształceń powierzchni szczeliny.



1.3.1. Normalne rozwarcie powierzchni szczeliny - Typ I

Niech nieograniczony, izotropowy i jednorodny ośrodek sprężysty osłabiony będzie szczeliną pasmową  $b \leq x \leq a$ ,  $y = 0$ ,  $|z| < \infty$  mogąca rozwierać się jedynie w kierunku osi  $y$  przyjętego przez nas ruchomego układu współrzędnych prostokątnych /1.23/, /Rys.5/.



Rys.5

Mozna wykazać [27], że podobnie jak w zagadnieniu statycznym, na powierzchniach szczeliny muszą być w tym przypadku spełnione warunki:

$$\sigma_{22}^{\pm}(x, 0) = -f_1(x) \quad \text{dla} \quad b < x < a,$$

$$\sigma_{12}^{\pm}(x, 0) = 0 \quad \text{dla} \quad b < x < a,$$

gdzie funkcja  $f_1(x)$  jest znana.

Zakładając, że przemieszczenie  $u_2$  w wierzchołkach szczeliny znika oraz przyjmując, że składowe tensora naprężenia znikają w nieskończoności, pole przemieszczeń i naprężeń w dowolnym punkcie ośrodka ze szczeliną poruszającą się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$ , opisane będzie - w ruchomym układzie współrzędnych /1.23/ - zależnościami [27]:

$$u_1(x,y) = \frac{\beta_1}{\pi \mu R(v)} \frac{\partial}{\partial x} [(1+\beta_2^2)\psi_1 - 2\beta_2^2\psi_2],$$

$$u_2(x,y) = \frac{\beta_1}{\pi \mu R(v)} [(1+\beta_2^2)\psi_1 - 2\psi_2],$$

/1.24/

$$\sigma_{11}(x,y) = -\frac{1}{\pi \beta_1 R(v)} \frac{\partial}{\partial y} [(1+\beta_2^2)(1+2\beta_1^2-\beta_2^2)\psi_1 - 4\beta_2^2\psi_2],$$

$$\sigma_{12}(x,y) = \frac{2\beta_1(1+\beta_2^2)}{\pi R(v)} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 - \psi_2),$$

$$\sigma_{22}(x,y) = \frac{1}{\pi \beta_1 R(v)} \frac{\partial}{\partial y} [(1+\beta_2^2)^2\psi_1 - 4\beta_1^2\psi_2].$$

Występujące w tych związkach potencjały harmoniczne  $\varphi_i$  i  $\psi_i$  ( $i=1,2$ ) określone są wyrażeniami:

/1.25/

$$\varphi_i(x,y) = \frac{1}{\beta_i} \int_b^a \varrho(\xi) \ln \frac{c}{r_i} d\xi,$$

$$\psi_i(x,y) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = -y\beta_i \int_b^a \frac{\varrho(\xi)}{r_i^2} d\xi,$$



gdzie

$$\vartheta(x) = \int_b^x \frac{F_1(\xi)}{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}} d\xi,$$

/1.26/

$$F_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}}{\xi-x} f_1(\xi) d\xi,$$

przy czym

$$r_i^2 = (x - \xi)^2 + \beta_i^2 y^2,$$

$$\beta_i^2 = 1 - \frac{v^2}{C_i^2},$$

/1.27/

$$R(v) = 4\beta_1\beta_2 - (1 + \beta_2^2)^2,$$

$$C_1 = C_2 \sqrt{\frac{2(1-v)}{1-2v}} \quad \text{— prędkość propagacji sprężystej fali podłużnej,}$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{U}{\varrho}} \quad \text{— prędkość propagacji sprężystej fali poprzecznej,}$$

$C$  - dowolna stała o wymiarze długości,

$\varrho$  - gęstość materiału.

Wzory /1.24/ otrzymano przy założeniu, że spełnione są warunki płaskiego stanu odkształcenia co oznacza, że w tym przypadku związki /1.24/ należy uzupełnić zależnościami:

$$u_3(x, y) = 0 ,$$

$$\sigma_{33}(x, y) = - \frac{2\nu(1+\beta_2^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)}{\pi\beta_1 R(\nu)} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} .$$

Zastępując współczynnik Poissona  $\nu$  wyrażeniem  $\nu/(1+\nu)$  oraz przyjmując, że  $\sigma_{33}(x, y) = 0$ , otrzymamy rozwiązanie słuszne dla płaskiego stanu naprężenia.

Przechodząc w wyrażeniach /1.24/ do granicy z  $y \rightarrow \pm 0$  oraz wykorzystując odpowiednie własności potencjałów /1.25/ i związki /1.26/, zależności opisujące rozkład przemieszczeń i naprężeń na powierzchniach szczeliny i na jej przedłużeniu przyjmą ostatecznie postać [27]:

$$u_1^\pm(x, 0) = \frac{1+\beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2}{\pi\beta_1 R(\nu)} \int_b^a \frac{g(\xi)}{\xi-x} d\xi \quad \text{dla } |x| < \infty ,$$

$$/1.28/ \quad u_2(x, 0) = \pm \frac{\beta_1(1-\beta_2^2)}{\beta_1 R(\nu)} \begin{cases} g(x) & \text{dla } b \leq x \leq a, \\ 0 & \text{dla } x < b \\ & \text{lub } x > a, \end{cases}$$

$$\sigma_{11}^\pm(x, 0) = \frac{2(1+\beta_2^2)(\beta_1^2 - \beta_2^2) - R(\nu)}{R(\nu)} \sigma_{22}^\pm(x, 0) \quad \text{dla } |x| < \infty ,$$



$$\sigma_{12}^{\pm}(x, 0) = 0 \quad \text{dla } |x| < \infty,$$

$$/1.28/ \quad \sigma_{22}^{\pm}(x, 0) = - \begin{cases} \frac{F_1(x)}{\sqrt{(x-b)(x-a)}} & \text{dla } x > a, \\ f_1(x) & \text{dla } b < x < a, \\ -\frac{F_1(x)}{\sqrt{(b-x)(a-x)}} & \text{dla } x < b, \end{cases}$$

przy czym w tym przypadku, dodatkowo

$$\sigma_{33}^{\pm}(x, 0) = \frac{2\nu(1+\beta_2^2)(\beta_1^2-\beta_2^2)}{R(\nu)} \sigma_{22}^{\pm}(x, 0),$$

$$u_3^{\pm}(x, 0) = 0 \quad \text{dla } |x| < \infty.$$

Z analizy wyrażeń /1.28/ oraz definicji /1.2/ wynika, że w zagadnieniu szczeliny pasmowej poruszającej się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$  w nieograniczonym, izotropowym i jednorodnym ośrodku sprężystym, współczynnik intensywności naprężenia  $K_I$  w obu wierzchołkach szczeliny opisany jest - tak jak w zagadnieniu statycznym - zależnościami /1.9/, przy czym rozkład przemieszczenia  $u_2$  i naprężenia  $\sigma_{22}$  w płaszczyźnie szczeliny w otoczeniu jej wierzchołków dany będzie związkami:

$$/1.29/ \quad u_2^{\pm}(x, 0) = \pm \frac{2\beta_1(1-\beta_2^2)}{4R(\nu)} \begin{cases} K_I^{(b)} \sqrt{\frac{x-b}{2\pi}} + O[(x-b)^{3/2}] & \text{dla } x \rightarrow b, \\ K_I^{(a)} \sqrt{\frac{a-x}{2\pi}} + O[(a-x)^{3/2}] & \text{dla } x \rightarrow a, \end{cases}$$

$$/1.29/ \quad \sigma_{22}^{\pm}(x,0) = \begin{cases} \frac{K_I^{(b)}}{\sqrt{2\pi(b-x)}} - f_1(b) + O[(b-x)^{1/2}] & \text{dla } x \rightarrow b, \\ \frac{K_I^{(a)}}{\sqrt{2\pi(x-a)}} - f_1(a) + O[(x-a)^{1/2}] & \text{dla } x \rightarrow a. \end{cases}$$

### 1.3.2. Poprzeczne ścinanie powierzchni szczeliny - Typ II

Przyjmując, że funkcją nieciągłą na powierzchni szczeliny jest jedynie składowa wektora przemieszczenia w kierunku osi  $x$  ruchomego układu współrzędnych /1.25/, można wykazać [27], że na powierzchniach szczeliny muszą być spełnione warunki:

$$\begin{aligned} \sigma_{22}^{\pm}(x,0) &= 0 & \text{dla } b < x < a, \\ \sigma_{12}^{\pm}(x,0) &= -f_2(x) & \text{dla } b < x < a, \end{aligned}$$

gdzie  $f_2(x)$  jest znaną funkcją.

Zakładając, że przemieszczenie  $u_1$  znika w wierzchołkach szczeliny oraz, że składowe tensora naprężenia znikają w nieskończoności, pole przemieszczeń i naprężeń w dowolnym punkcie ośrodka ze szczeliną poruszającą się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$ , opisane będzie - w ruchomym układzie współrzędnych /1.25/ - zależnościami [27]:

$$/1.30/ \quad u_1(x,y) = -\frac{\beta_2}{\pi \mu R(v)} [2\psi_1 - (1 + \beta_2^2)\psi_2],$$



$$u_2(x,y) = \frac{\beta_2}{\pi \mu R(v)} \frac{\partial}{\partial x} [2\beta_1^2 \psi_1 - (1+\beta_2^2) \psi_2],$$

$$\sigma_{11}(x,y) = -\frac{2\beta_2}{\pi R(v)} \frac{\partial}{\partial x} [(1+2\beta_1^2-\beta_2^2)\psi_1 - (1+\beta_2^2)\psi_2],$$

/1.30/

$$\sigma_{12}(x,y) = -\frac{1}{\pi \beta_2 R(v)} \frac{\partial}{\partial y} [4\beta_2^2 \psi_1 - (1+\beta_2^2) \psi_2],$$

$$\sigma_{22}(x,y) = \frac{2\beta_2(1+\beta_2^2)}{\pi R(v)} \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1 - \psi_2),$$

gdzie potencjały  $\psi_1$  i  $\psi_2$  określone są związkami /1.25/,  
zaś

/1.31/

$$g(x) = \int_b^x \frac{F_2(\xi)}{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}} d\xi,$$

$$F_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}}{\xi-x} f_2(\xi) d\xi.$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, wzory /1.30/ są słuszne dla płaskiego stanu odkształcenia i w związku z tym należy je uzupełnić zależnościami:

$$u_3(x,y) = 0, \quad \sigma_{33}(x,y) = -\frac{4\nu\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}{\pi R(\nu)} \frac{\partial \psi_4}{\partial x}.$$

Zastępując w zależnościach /1.30/ współczynnik Poissona  $\nu$  wielkością  $\nu/(1+\nu)$  oraz przyjmując, że  $\sigma_{33}^\pm(x,y) = 0$ , otrzymamy rozwiązanie słuszne dla płaskiego stanu naprężenia.

Przechodząc w zależnościach /1.30/ do granicy z  $y \rightarrow \pm 0$  i wykorzystując odpowiednie własności potencjałów /1.25/ oraz związku /1.31/, stan przemieszczeń i naprężeń na powierzchniach szczeliny i na jej przedłużeniu opisany będzie ostatecznie zależnościami [27]:

$$u_1^\pm(x,0) = \pm \frac{\beta_2(1-\beta_2^2)}{4R(\nu)} \begin{cases} 0 & \text{dla } x < b \text{ lub } x > a, \\ \varrho(x) & \text{dla } b \leq x \leq a, \end{cases}$$

$$/1.32/ \quad u_2^\pm(x,0) = -\frac{1+\beta_2^2-2\beta_1\beta_2}{\pi 4R(\nu)} \int_b^a \frac{\varrho(\xi)}{\xi-x} d\xi \quad \text{dla } |x| < \infty,$$

$$\sigma_{11}^\pm(x,0) = \pm \frac{4\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}{R(\nu)} \begin{cases} \frac{F_2(x)}{\sqrt{(x-b)(a-x)}} & \text{dla } b < x < a, \\ 0 & \text{dla } x < b \\ & \text{lub } x > a, \end{cases}$$



$$/1.32/ \quad \sigma_{12}^{\pm}(x,0) = - \begin{cases} \frac{F_2(x)}{\sqrt{(x-b)(x-a)}} & \text{dla } x > a, \\ f_2(x) & \text{dla } b < x < a, \\ -\frac{F_2(x)}{\sqrt{(b-x)(a-x)}} & \text{dla } x < b, \end{cases}$$

$$\sigma_{22}^{\pm}(x,0) = 0 \quad \text{dla } |x| < \infty,$$

przy czym dodatkowo  $u_3^{\pm}(x,0) \doteq 0$  i  $\sigma_{33}^{\pm}(x,0) = \nu \sigma_{11}^{\pm}(x,0)$  dla  $|x| < \infty$

Z zależności /1.32/ oraz definicji /1.2/ wynika, że w rozpatrywanym zagadnieniu, dynamiczny współczynnik intensywności naprężenia  $K_{II}$  w obu wierzchołkach szczeliny opisany jest, podobnie jak w poprzednim przypadku, zależnościami składowymi dla odpowiedniego zagadnienia statycznego czyli zależnościami /1.16/, przy czym rozkład przemieszczenia  $u_1$  i naprężenia  $\sigma_{12}$  w płaszczyźnie szczeliny w otoczeniu jej wierzchołków dany jest związkami:

$$/1.33/ \quad u_1^{\pm}(x,0) = \pm \frac{2\beta_2(1-\beta_2^2)}{\mu R(\nu)} \begin{cases} K_{II}^{(b)} \sqrt{\frac{x-b}{2l}} + O[(x-b)^{3/2}] & \text{dla } x \rightarrow b, \\ K_{II}^{(a)} \sqrt{\frac{a-x}{2l}} + O[(a-x)^{3/2}] & \text{dla } x \rightarrow a, \end{cases}$$

$$/1.33/ \quad G_{12}^{\pm}(x,0) = \begin{cases} \frac{K_{II}^{(b)}}{\sqrt{2\pi(b-x)}} - f_2(b) + O[(b-x)^{1/2}] \\ \text{dla } x \rightarrow b, \\ \frac{K_{II}^{(a)}}{\sqrt{2\pi(x-a)}} - f_2(a) + O[(x-a)^{1/2}] \\ \text{dla } x \rightarrow a. \end{cases}$$

Z analizy zależności /1.26/ i /1.32/ wynika, że zarówno w zagadnieniu normalnego rozwarcie jak i poprzecznego ścinania powierzchni szczeliny /Typ I i II/ w przypadku gdy  $R(v) = 0$ , tzn. w przypadku gdy prędkość propagacji szczeliny osiąga wartość prędkości sprężystej fali powierzchniowej Rayleigha ( $v = v_R < c_2$ ), składowe wektora przemieszczenia oraz niektóre składowe tensora naprężenia dążą do nieskończoności. Z punktu widzenia teorii sprężystości fakt ten oznacza, że prędkość sprężystej fali powierzchniowej Rayleigh'a jest dla obu tych przypadków graniczną prędkością propagacji szczeliny w ośrodku sprężystym [22,23]:

### 1.3.3. Podłużne ścinanie powierzchni szczeliny - Typ III

Przyjmując, że funkcją nieciągłą na powierzchni szczeliny jest jedynie składowa wektora przemieszczenia w kierunku osi z ruchomego układu współrzędnych /1.23/ oraz zakładając istnienie w ciele antypłaskiego stanu odkształcenia, na powierzchniach szczeliny spełniony musi być warunek [27]:

$$G_{23}^{\pm}(x,0) = -f_3(x) \quad \text{dla } b < x < a,$$

gdzie  $f_3(x)$  jest znaną funkcją.



Zakładając, że przemieszczenie  $u_3$  znika w wierzchołkach szczeliny oraz, że naprężenia  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  znikają w nieskończoności, pole przemieszczeń i naprężeń w dowolnym punkcie ośrodka ze szczeliną poruszającą się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$  opisane będzie - w ruchomym układzie współrzędnych /1.23/ - zależnościami [27]:

$$u_3(x, y) = - \frac{1}{\pi \mu \beta_2} \psi_2,$$

/1.34/

$$\sigma_{13}(x, y) = - \frac{1}{\pi \beta_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial x},$$

$$\sigma_{23}(x, y) = - \frac{1}{\pi \beta_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial y},$$

gdzie potencjał  $\psi_2$  określony jest związkiem /1.25/ oraz

$$\vartheta(x) = \int_b^x \frac{F_3(\xi)}{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}} d\xi,$$

/1.35/

$$F_3(x) = \frac{1}{\pi} \int_b^a \frac{\sqrt{(\xi-b)(a-\xi)}}{\xi-x} f_3(\xi) d\xi.$$

Przechodząc w związkach /1.34/ do granicy z  $y \rightarrow \pm 0$  oraz wykorzystując odpowiednie własności potencjału  $\psi_2$  oraz związku /1.35/, przemieszczenie  $u_3$  i naprężenia  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  na powierzchniach szczeliny i na jej przedłużeniu przyjmują ostatecz-

nie postać [27]:

$$u_3^\pm(x,0) = \pm \frac{1}{\mu \beta_2} \begin{cases} \varrho(x) & \text{dla } b \leq x \leq a, \\ 0 & \text{dla } x < b \\ & \text{lub } x > a, \end{cases}$$

$$\sigma_{13}^\pm(x,0) = \pm \frac{1}{\beta_2} \begin{cases} \frac{F_3(x)}{\sqrt{(x-b)(a-x)}} & \text{dla } b < x < a, \\ 0 & \text{dla } x < b \\ & \text{lub } x > a, \end{cases}$$

/1.36/

$$\sigma_{23}^\pm(x,0) = - \begin{cases} \frac{F_3(x)}{\sqrt{(x-b)(x-a)}} & \text{dla } x > a, \\ f_3(x) & \text{dla } b < x < a, \\ -\frac{F_3(x)}{\sqrt{(b-x)(a-x)}} & \text{dla } x < b. \end{cases}$$

Z otrzymanych zależności oraz definicji /1.2/ wynika, że w rozważanym zagadnieniu, dynamiczny współczynnik intensywności naprężenia  $K_{III}$  w obu wierzchołkach szczeliny, opisany jest tak jak w poprzednich przypadkach, zależnościami słusznymi dla odpowiedniego zagadnienia statycznego czyli związkami /1.21/, przy czym rozkład przemieszczenia  $u_3$  i naprężenia  $\sigma_{23}$  w płaszczyźnie szczeliny w otoczeniu jej wierzchołków dany jest zależnościami:



$$/1.37/ \quad u_3^\pm(x,0) = \pm \frac{2}{4\beta_2} \begin{cases} K_{III}^{(b)} \sqrt{\frac{x-b}{2\pi}} + O[(x-b)^{3/2}] & \text{dla } x \rightarrow b, \\ K_{III}^{(a)} \sqrt{\frac{a-x}{2\pi}} + O[(a-x)^{3/2}] & \text{dla } x \rightarrow a, \end{cases}$$

$$\sigma_{23}^\pm(x,0) = \begin{cases} \frac{K_{III}^{(b)}}{\sqrt{2\pi(b-x)}} - f_3(b) + O[(b-x)^{1/2}] & \text{dla } x \rightarrow b, \\ \frac{K_{III}^{(a)}}{\sqrt{2\pi(x-a)}} - f_3(a) + O[(x-a)^{1/2}] & \text{dla } x \rightarrow a. \end{cases}$$

Z zależności /1.36/ wynika dodatkowo, że w przypadku zagadnienia podłużnego ścinania powierzchni szczeliny, prędkością graniczną propagacji szczeliny w ośrodku sprężystym - z punktu widzenia teorii sprężystości - jest prędkość sprężystej fali poprzecznej  $c_2$ , [23].

Na zakończenie rozważań dotyczących ustalonego ruchu szczeliny nadmienić należy, że wzory /1.29/, /1.33/ i /1.37/ zachowują swoją postać dla dowolnej konfiguracji ciała i szczeliny. Tak jak w zagadnieniu statycznym, brzeg rozpatrywanego ciała jak i kształt powierzchni szczeliny mają wpływ jedynie na postać odpowiednich współczynników intensywności naprężenia.

Związki opisujące stan odkształceń i naprężeń w otoczeniu krawędzi szczeliny, w biegunowym układzie współrzędnych  $(r, \theta)$  o początku w jednym z wierzchołków poruszającej się ze stałą prędkością szczeliny, są dla przypadku normalnego rozwarcia powierzchni szczeliny podane w pracach [5,9].

## 2. PODSTAWY TEORII KRUCHEGO PĘKANIA

Kontynuacja teorii zniszczenia ciał stałych oparta jest na założeniu, że w ośrodku ciągłym znajdują się, zdefiniowane w poprzednim rozdziale szczeliny /powierzchnie nieciągłości wektora przemieszczenia/, które pod wpływem przyłożonych w ciele obciążeń mogą zwiększać swoje rozmiary poprzez częściowe lub całkowite rozzerwanie się materiału.

Proces powiększania się powierzchni tych szczelin nazywamy procesem pęknięcia, zaś nowo utworzone w trakcie tego procesu powierzchnie nazywać będziemy pęknięciami.

W trakcie procesu pęknięcia naruszony zostaje postulat ciągłości ośrodka i wobec tego do opisu tego procesu w ramach teorii mechaniki ośrodków ciągłych oprócz odpowiedniego prawa stanu, warunków brzegowych i początkowych charakteryzujących odpowiednie zagadnienie szczeliny w danym ośrodku, konieczne jest przyjęcie dodatkowego warunku umożliwiającego określenie ewentualnego pojawienia się w ciele pęknięcia. Warunek taki nazywamy kryterium pęknięcia, zaś sposób przejścia elementów ośrodka ze stanu ciągłego do rozzerwanego w trakcie procesu pęknięcia nazywać będziemy modelem pęknięcia.

Model, w którym przyjmuje się, że pękający materiał od momentu rozpoczęcia się procesu pęknięcia do jego ukończenia jest i pozostaje liniowo sprężysty - nazywamy modelem idealnie kruchego pęknięcia.

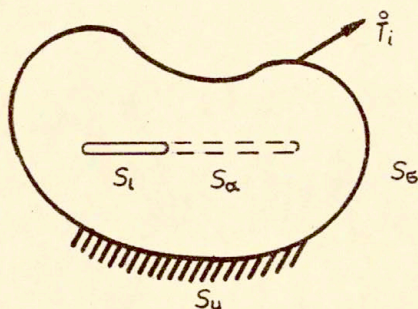
### 2.1. Kryterium kruchego pęknięcia Griffitha

Klasyczne podejście do procesu zniszczenia ciał stałych zostało podane przez A.A.Griffitha w pracy [28]. Podejście to dotyczy modelu idealnie kruchego pęknięcia materiałów sprężystych i oparte jest na zasadach energetycznych.

W celu sformułowania hipotezy Griffitha rozważmy liniowo sprężyste ciało o objętości  $V$  ograniczone powierzchnią  $S_0 = S_g + S_u$  przyjmując, że ciało to zawiera szczelinę o wymiarze długości  $l$ , której powierzchnia  $S_l$  jest swobodna od



obciążeń. Zakładamy, że rozważane ciało znajduje się w polu działania sił masowych  $F_i$ , na powierzchni  $S_G$  działają znane obciążenia powierzchniowe  $T_i$ , a na powierzchni  $S_u$  dane są przemieszczenia  $u_i$  /Rys.6/.



Rys.6

Przyjmijmy, że pod wpływem działających obciążeń powierzchniowych wzrastających stopniowo od zera do ich końcowej stałej wartości  $T_i$ , szczelina o powierzchni  $S_l$  powiększyła swoje rozmiary o infinitesimalne pęknięcie, którego powierzchnię oznaczmy przez  $S_\alpha$  /Rys.6/, przy czym założymy dodatkowo, że powierzchnia ta swobodna jest od jakichkolwiek obciążeń. Zakładamy, że proces powiększania się powierzchni szczeliny  $S_l$  do rozmiarów  $S_l + S_\alpha$  nie wywołuje żadnych efektów dynamicznych oraz, że energia dysypowana w trakcie tego procesu zużyta zostaje jedynie na utworzenie się pęknięcia  $S_\alpha$ , tzn. nie występuje w tym procesie dysypacja energii związana np. z ogrzaniem ciała, uplastycznieniem itp.

Przy tych założeniach, hipoteza Griffitha o utworzeniu się infinitesimalnego pęknięcia o powierzchni  $S_\alpha = \delta S_l$  orzeka, że spośród wszystkich geometrycznie dopuszczalnych układów przemieszczeń  $u_i$  i dodatkowych powierzchni  $\delta S_l$ , układem energetycznie uprzywilejowanym jest układ, który sprowadza do minimum wartości funkcjonału [29]:

$$/2.1/ \quad \mathcal{Y}^* = \mathcal{Y} + D$$

gdzie

$$\mathcal{Y} = U - A - \mathcal{F} \quad - \text{energia potencjalna odkształcenia ciała ze szczeliną } S_i,$$

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad - \text{energia wewnętrzna odkształcenia ciała ze szczeliną } S_i,$$

$$/2.2/ \quad \frac{1}{2} A = \frac{1}{2} \int_{S_\sigma} \tilde{T}_i u_i ds \quad - \text{praca obciążeń powierzchniowych } \tilde{T}_i,$$

$$\frac{1}{2} \mathcal{F} = \frac{1}{2} \int_V F_i u_i dV \quad - \text{praca sił masowych } F_i,$$

$$D = \gamma S_i \quad - \text{energia powierzchniowa szczeliny } S_i,$$

zaś  $\gamma$  jest jednostkowa energią powierzchniową ciała stałego traktowana tutaj jako dodatkowa stała materiałowa o wymiarze [siła] [długość]<sup>-1</sup>.

Osiągnięty w ten sposób stan szczeliny jest stateczny, jeśli powiększenie się szczeliny  $S_i$  o pęknięcie  $S_\infty = \delta S_i$  nie prowadzi do dalszego zmniejszania się wartości funkcjonału /2.1/. Znikanie wariacji funkcjonału /2.1/ odpowiadającej małym przyrostom powierzchni  $S_i$

$$/2.3/ \quad \delta \mathcal{Y}^* = 0 \quad \text{dla} \quad \delta S_i > 0$$

nazywamy kryterium kruchego pęknięcia Griffitha.

Kryterium to opisuje stan krytyczny układu ze szczeliną określając jego krytyczne parametry takie jak obciążenie lub rozmiary szczeliny, osiągnięcie których prowadzi do utraty stateczności szczeliny.

Rodzaj równowagi szczeliny zależy będzie od zachowania się wariacji funkcjonału /2.1/ przy czym:



1. jeśli  $\delta \mathcal{V}^* > 0$  dla  $\delta S_l > 0$  to szczelina jest stateczna i nie przejawia tendencji do powiększania się,
2. jeśli  $\delta \mathcal{V}^* = 0$  dla  $\delta S_l > 0$  to równowaga układu ze szczeliną jest chwiejna i jeśli:
  - a.  $\delta^2 \mathcal{V}^* > 0$  to dalsze powiększanie się szczeliny jest możliwe jedynie przy zwiększaniu obciążenia,
  - b.  $\delta^2 \mathcal{V}^* \leq 0$  to dalszy wzrost obciążenia doprowadzi do gwałtownej propagacji pęknięcia,
3. jeśli  $\delta \mathcal{V}^* < 0$  dla  $\delta S_l > 0$  to szczelina jest niestateczna i następuje propagacja pęknięcia aż do zniszczenia materiału względnie ustalenia się nowego położenia równowagi.

Hipoteza Griffitha, aczkolwiek operuje pojęciami globalnymi, takimi jak energia wewnętrzna odkształcenia, praca sił zewnętrznych, jest w istocie hipotezą lokalną w tym sensie, że do jej stosowania wystarczająca jest znajomość stanu ciała w bezpośrednim otoczeniu krawędzi szczeliny. Na fakt ten zwrócił uwagę Irwin, który stosując tzw. podejście siłowe, sformułował równoważne energetycznemu kryterium Griffitha, lokalne kryterium pęknięcia oparte na znajomości współczynników intensywności naprężenia w wierzchołkach szczeliny.

## 2.2. Kryterium kruchego pęknięcia Irwina

Kryterium kruchego pęknięcia Griffitha zdefiniowane jako znikanie wariacji funkcjonału /2.1/ dla małych przyrostów powierzchni  $S_\alpha = \delta S_l$  można sformułować w następującej równoważnej postaci:

$$/2.4/ \quad -\Delta \mathcal{V} = D \quad \text{dla} \quad S_\alpha \rightarrow 0.$$

Tak sformułowane kryterium Griffitha orzeka, że ubytek energii potencjalnej  $\mathcal{V}$  ciała ze szczeliną o powierzchni  $S_l$  powstały w trakcie procesu tworzenia się pęknięcia o powierzchni  $S_\alpha$  jest równy energii powierzchniowej  $D = \gamma S_\alpha$  zużytej na utworzenie się pęknięcia  $S_\alpha$  /Rys.6/.

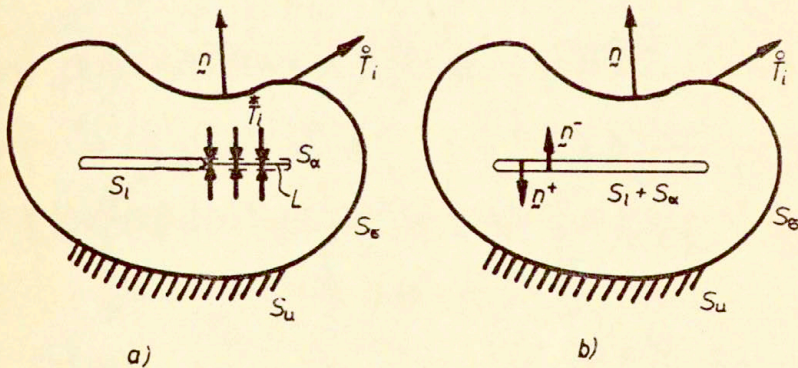
W celu sformułowania kryterium kruchego pęknięcia w ujęciu

Irwina, rozważmy ponownie liniowo sprężyste ciało o objętości  $V$  ograniczone powierzchnią  $S_0 = S_G + S_u$  przyjmując jednocześnie, że ciało to osłabione jest szczeliną o wymiarze długości  $l$  i swobodnej od obciążeń powierzchni  $S_l$ . Zakładamy, tak jak to uczyniliśmy przy formułowaniu hipotezy Griffitha, że rozważane ciało znajduje się w polu działania sił masowych  $F_i$ , na części powierzchni ograniczającej ciało  $S_G$  dane są stałe obciążenia powierzchniowe  $\bar{T}_i = \bar{\sigma}_{ij} n_j$ , zaś na pozostałej części powierzchni ograniczającej ciało  $S_u$  dane są przemieszczenia  $\bar{u}_i$ , /Rys.7a/.

Powstałe w ciele przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia oznaczymy odpowiednio przez  $\bar{u}_i$ ,  $\bar{\epsilon}_{ij}$  i  $\bar{\sigma}_{ij}$ . Przy tak przyjętych oznaczeniach energia potencjalna odkształcenia układu I opisana będzie zależnością:

$$/2.5/ \quad \mathcal{V}_I = \frac{1}{2} \int_V \bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dV - \int_{S_G} \bar{T}_i \bar{u}_i ds - \int_V F_i \bar{u}_i dV.$$

Rozważmy teraz układ II przedstawiony na Rys.7b. Zakładamy, że rozważane ciało ma takie same wymiary i jest tak samo obciążone i podparte jak w zagadnieniu I, a różni się od niego tylko powierzchnią szczeliny, która powiększyła się w stosunku do szczeliny w zagadnieniu I o swobodne od obciążeń pęknięcie o powierzchni  $S_\alpha$ .



Rys.7



Przyjmijmy, że przejście z układu I do układu II osiągnęliśmy poprzez powolne powiększanie hipotetycznego cięcia L do rozmiarów  $S_\infty$  /Rys.7a/ zakładając jednocześnie, że tworzona w trakcie tego procesu powierzchnia pęknięcia  $S_\infty$  jest swobodna od obciążeń. Powiększanie powierzchni szczeliny  $S_1$  o wielkość  $S_\infty$  jak i zmniejszanie naprężeń na tej dodatkowej powierzchni od wartości  $\bar{T}_i$  do zera powoduje powstanie w ciele przemieszczeń  $u_i$ , odkształceń  $\epsilon_{ij}$  i naprężeń  $\sigma_{ij}$ .

Przy tych oznaczeniach oraz przy założeniu, że w trakcie procesu powiększania powierzchni szczeliny  $S_1$  nie zmienia się objętość ciała w stosunku do zagadnienia I, energia potencjalna odkształcenia układu II opisana będzie zależnością:

$$/2.6/ \quad \Psi_2 = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV - \int_{S_\infty} \bar{T}_i u_i ds - \int_V F_i u_i dV.$$

Ubytek energii potencjalnej odkształcenia -  $\Delta \Psi = \Psi_1 - \Psi_2$  przy przejściu z układu I do układu II przyjmie na mocy zależności /2.5/ i /2.6/ postać:

$$/2.7/ \quad -\Delta \Psi = \frac{1}{2} \int_V (\bar{\sigma}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} - \sigma_{ij} \epsilon_{ij}) dV - \int_{S_\infty} \bar{T}_i (\bar{u}_i - u_i) ds - \int_V F_i (\bar{u}_i - u_i) dV.$$

Wielkości charakteryzujące stan przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w układzie I doznają odpowiednich przyrostów i wprowadzając wobec tego oznaczenia:

$$/2.8/ \quad u_i = \bar{u}_i + \Delta u_i, \quad \epsilon_{ij} = \bar{\epsilon}_{ij} + \Delta \epsilon_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \Delta \sigma_{ij},$$

oraz wykorzystując tożsamość  $\bar{\sigma}_{ij} \Delta \epsilon_{ij} = \Delta \sigma_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}$  wyrażeniu /2.7/ możemy nadać postać:

$$-\Delta \mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_V \Delta \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V \sigma_{ij} \Delta \varepsilon_{ij} dV - \\ + \int_{S_\sigma} \bar{T}_i \Delta u_i ds + \int_V F_i \Delta u_i dV.$$

Zastępując w tym związku wyrażenia podcałkowe w dwóch pierwszych całkach odpowiednio wyrażeniami  $(\Delta \sigma_{ij} \Delta u_i)_{,j} - \Delta \sigma_{ij,j} \Delta u_i$  i  $(\sigma_{ij} \Delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \Delta u_i$  oraz wykorzystując wzory Greena-Gaussa i równanie równowagi  $\sigma_{ij,j} + F_i = 0$  otrzymamy

$$/2.9/ \quad -\Delta \mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_S \Delta \sigma_{ij} \Delta u_i n_j ds - \int_S \sigma_{ij} \Delta u_i n_j ds + \\ + \int_{S_\sigma} \bar{T}_i \Delta u_i ds$$

gdzie  $S = S_\sigma + S_l + S_\alpha$ .

Zgodnie z przyjętymi przez nas warunkami brzegowymi i oznaczeniami /2.8/

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \bar{\sigma}_{ij} & \text{na } S_\sigma, \\ 0 & \text{na } S_l, \\ 0 & \text{na } S_\alpha, \end{cases} \quad \Delta \sigma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{na } S_\sigma, \\ 0 & \text{na } S_l, \\ -\bar{\sigma}_{ij} & \text{na } S_\alpha, \end{cases}$$

$$\Delta u_i = 0 \quad \text{na } S_u$$

i wobec tego wyrażenie /2.9/ przyjmie postać:

$$/2.10/ \quad -\Delta \mathcal{V} = -\frac{1}{2} \int_{S_\alpha} \bar{T}_i^* \Delta u_i ds,$$

gdzie  $\bar{T}_i^* = \bar{\sigma}_{ij} n_j$ .

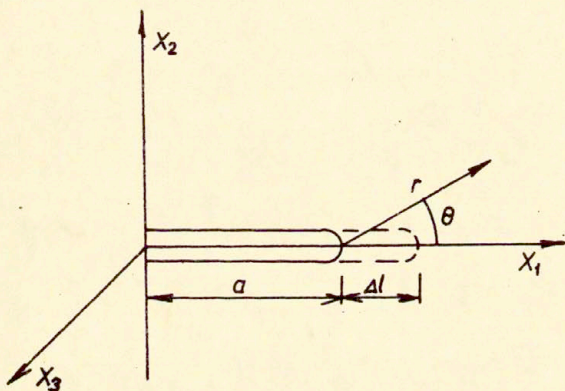
Przyjmijmy teraz, że rozważana przez nas szczelina o powierzchni  $S_l$  jest określoną w poprzednim rozdziale i usytuowaną w płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$  szczeliną pasmową o długości  $l$ , której wierzchołki są punktami  $(b, 0, 0)$  i  $(a, 0, 0)$ , /Rys.3/. Rozważając prawy wierzchołek tej szczeliny oraz zakładając, że powierzchnia szczeliny  $S_l$  zwiększy się w kierunku osi  $x_1$  o pęknięcie  $S_l$  o długości  $\Delta l$ , ubytek energii potencjalnej od-



kształcenia w trakcie procesu wydłużania się szczeliny  $S_1$  opisany będzie na mocy zależności /2.10/ następującymi wyrażeniem:

$$/2.11/ \quad -\Delta \gamma = \frac{1}{2} \int_a^{a+\Delta l} \sigma_{2i}(x_1, 0; a) [u_i(x_1, 0; a+\Delta l)] dx_1,$$

gdzie użyty zapis wskazuje na fakt, że naprężenia  $\sigma_{2i}(x_1, 0; a)$  odpowiadają naprężeniom dla szczeliny o wierzchołku w punkcie  $(a, 0)$  zaś przemieszczenia  $u_i(x_1, 0; a+\Delta l)$  odpowiadają przemieszczeniom powierzchni szczeliny w punkcie  $(a+\Delta l, 0)$ , /Rys.8/.



Rys.8

Jeśli założyć, że wydłużenie szczeliny  $\Delta l$  jest dostatecznie małe, to w miejsce występujących we wzorze /2.11/ ścisłych wartości naprężeń  $\sigma_{2i}$  i przemieszczeń  $u_i$  można podstawić ich asymptotyczne wartości, które dla poszczególnych typów odkształceń powierzchni szczeliny opisane są zależnościami /1.3/ względnie związkami /1.10/, /1.17/ i /1.22/ przy czym korzystając z zależności /1.3/ należy przyjąć dla naprężeń, że

$r = s = x - a$ ,  $\theta = 0$  zaś dla przemieszczeń, że  $r = \Delta l - s$ ,  
 $\theta = \pi$ .

Przyjmując, że jedynie składowa wektora przemieszczenia w kierunku osi  $x_2$  jest funkcją nieciągłą na powierzchni szczeliny  $S_l$  i powierzchni pęknięcia  $S_\alpha$  o długości  $\Delta l$ , na mocy zależności /1.3/ i /2.11/

$$-\Delta \gamma = \frac{\alpha + 1}{4\pi\mu} K_I^2 \int_0^{\Delta l} \sqrt{\frac{\Delta l - s}{s}} ds.$$

Po wykonaniu całkowania otrzymamy ostatecznie, że w przypadku typu normalnego rozwarcia powierzchni szczeliny, ubytek energii potencjalnej odkształcenia w trakcie tworzenia się infinitezimalnego pęknięcia o długości  $\Delta l$  opisany będzie zależnością:

$$/2.12/ \quad -\Delta \gamma = \frac{\alpha + 1}{8\mu} K_I^2 \Delta l,$$

gdzie  $\alpha$  określone jest wzorem /1.4/ zaś  $K_I$  jest współczynnikiem intensywności naprężenia w odpowiednim wierzchołku szczeliny.

Przyjmując, że jedynie składowe wektora przemieszczenia w kierunku osi  $x_1$  lub  $x_3$  są funkcjami nieciągłymi na powierzchni  $S_l$  i odcinku  $\Delta l$ , ubytek energii potencjalnej odkształcenia w trakcie tworzenia się pęknięcia o długości  $\Delta l$  w przypadku poprzecznego i podłużnego ścinania powierzchni szczeliny opisany będzie na mocy zależności /1.3/ i /2.11/ odpowiednio zależnościami:

$$/2.13/ \quad -\Delta \gamma = \frac{\alpha + 1}{8\mu} K_{II}^2 \Delta l,$$

$$-\Delta \gamma = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \Delta l,$$



gdzie  $K_{II}$  i  $K_{III}$  są współczynnikami intensywności naprężenia w odpowiednim wierzchołku szczeliny.

Fakt, że ubytek energii potencjalnej odkształcenia w trakcie procesu pęknięcia można określić za pomocą związków opisujących lokalny rozkład naprężeń wokół wierzchołka szczeliny lub, inaczej mówiąc, za pomocą odpowiednich współczynników intensywności naprężenia, wykorzystany został przez Irwina w nadaniu energetycznemu kryterium pęknięcia Griffitha innej, bardziej dogodnej w zastosowaniach postaci [2].

Jeśli rozważyć typ normalnego rozwarcia powierzchni szczeliny pasmowej i założyć powstanie nieskończenie małego pęknięcia  $S_{\alpha}$  o długości  $\Delta l$  w jednym wierzchołku szczeliny, to na podstawie energetycznego kryterium Griffitha opisanego zależnością /2.4/ otrzymamy:

$$-\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \gamma}{\Delta l} = 2\gamma.$$

Zależność ta po wykorzystaniu związku /2.12/ przyjmie postać:

$$K_I^2 = \frac{16\mu\gamma}{\alpha + 1},$$

zaś otrzymaną stąd wartość współczynnika  $K_I$  traktować będziemy za Irwinem jako nową stałą materiałową i nazywać krytyczną wartością współczynnika intensywności naprężenia; w przypadku istnienia w ciele płaskiego stanu odkształcenia oznaczać ją będziemy przez  $K_{IC}$ , zaś w przypadku płaskiego stanu naprężenia przez  $K_C$ .

Sformułowany przez Irwina warunek równowagi chwiejnej szczeliny stwierdza, że rozstrzygnięcie czy szczelina jest statyczna zależy od wielkości współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny.

Szczelina o powierzchni  $S_I$  osiąga stan równowagi chwiejnej w momencie gdy wyznaczony dla konkretnego zagadnienia współczynnik intensywności naprężenia  $K_I$  osiąga wartość krytyczną  $K_{IC}$ , lub  $K_C$ , czyli gdy

$$/2.14/ \quad K_I = \begin{cases} K_{Ic} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{1-\nu^2}} & \text{— dla płaskiego stanu} \\ & \text{odkształcenia} \\ K_c = \sqrt{2E\gamma} & \text{— dla płaskiego stanu} \\ & \text{naprężenia.} \end{cases}$$

Jeśli  $K_I < K_{Ic}$  lub  $K_I < K_c$  to szczelina nie przejawia tendencji do propagowania się i wreszcie gdy  $K_I > K_{Ic}$  lub  $K_I > K_c$  to wzrost szczeliny jest niestateczny.

Krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężenia  $K_{Ic}$  charakteryzuje tzw. odporność materiału na pękanie i jest wyznaczalna doświadczalnie. Szeroki przegląd metod znajdowania wartości współczynnika  $K_{Ic}$  jak i odpowiednie dane liczbowe podane są między innymi w opracowaniach [9, 30].

Formułując lokalne kryterium pękania, Irwin wprowadził pojęcie tzw. współczynnika wyzwalań energii potencjalnej odkształcenia, który reprezentuje ubytek tej energii w trakcie procesu pękania ciała stałego [2].

Biorąc ponownie pod uwagę wierzchołek rozważanej przez nas szczeliny pasmowej  $S_1$ , współczynnikiem wyzwalań energii potencjalnej odkształcenia w trakcie procesu powiększania się szczeliny  $S_1$  o pęknięcie  $S_\alpha$  o długość  $\Delta l$  w kierunku osi  $x_1$ , nazywać będziemy za Irwinem - na podstawie zależności /2.11/ - następujące wyrażenie:

$$/2.15/ \quad \begin{aligned} \gamma &= - \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{P}}{\Delta l} = \\ &= \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_a^{a+\Delta l} \delta_{2i}(x_1, 0; a) [u_i(x_1, 0; a + \Delta l)] dx_1. \end{aligned}$$

Wykorzystując definicję /2.15/ oraz zależności /2.12/ i /2.13/ współczynniki wyzwalań energii potencjalnej odkształcenia dla poszczególnych typów odkształceń powierzchni szczeliny przyjmą postać:



$$\zeta_I = \frac{\alpha+1}{8\mu} K_I^2,$$

/2.16/ 
$$\zeta_{II} = \frac{\alpha+1}{8\mu} K_{II}^2,$$

$$\zeta_{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2,$$

zaś w ogólnym przypadku, gdy składowe wektora przemieszczenia są funkcjami nieciągłymi na powierzchni szczeliny we wszystkich trzech kierunkach  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ), współczynnik ten opisany będzie zależnością:

/2.17/ 
$$\zeta = \frac{\alpha+1}{8\mu} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu} K_{III}^2.$$

Kryterium kruchego pęknięcia Irwina sformułowane jako kryterium o krytycznej wartości współczynnika intensywności naprężenia często bywa zastępowane z uwagi na zależności /2.16/ za pomocą kryterium o krytycznej wartości współczynnika wyzwiania energii potencjalnej odkształcenia [30,31].

Korzystając z pojęcia współczynnika wyzwiania energii potencjalnej odkształcenia, energetyczne kryterium kruchego pęknięcia Griffitha orzekające o powiększaniu się powierzchni szczeliny  $S_i$  o pęknięcie  $S_\alpha$  o długość  $\Delta l$  można sformułować teraz w postaci:

1. jeśli  $\zeta < 2\gamma$ , to szczelina jest stateczna i nie przejawia tendencji do wydłużania się,
2. jeśli  $\zeta = 2\gamma$ , to równowaga układu ze szczeliną jest chwiejna i jeśli:
  - a.  $\frac{\partial \zeta}{\partial l} < 0$  to dalsze wydłużanie się szczeliny jest możliwe jedynie przy zwiększaniu obciążenia,
  - b.  $\frac{\partial \zeta}{\partial l} \gg 0$  to dalszy wzrost obciążenia doprowadzi do gwałtownej propagacji pęknięcia,
3. jeśli  $\zeta > 2\gamma$ , to szczelina jest niestateczna i propaguje się aż do zniszczenia materiału lub ustalenia się nowego położenia równowagi.

### 2.3. Uogólnienie kryterium Griffitha-Irwina. Prędkość zmiany współczynnika wyzwalania energii

Sformułowanie kryterium kruchego pęknięcia w dynamicznym procesie pęknięcia ciał stałych oparte jest, tak jak w procesie quasi-statycznym, na zasadzie zachowania energii odkształcalnego ciała [9,32-40].

W celu uogólnienia kryterium Griffitha-Irwina na przypadek dynamicznego procesu pęknięcia, rozważmy liniowo sprężyste ciało o objętości  $V$  ograniczone powierzchnią  $S_0 = S_G + S_u$ .

Dla prostoty dalszych rozważań przyjmijmy, że ciało zawiera, usytuowaną w płaszczyźnie  $(x_1, x_3)$  nieruchomego układu współrzędnych prostokątnych  $x_i$ , ( $i=1,2,3$ ), szczelinę pasmową o wymiarze długości  $l$ , której powierzchnia  $S_l$  swobodna jest od obciążeń.

Zakładamy, że rozważane ciało znajduje się w polu działania sił masowych  $F_i$ , na powierzchni  $S_G$  działają obciążenia powierzchniowe  $\tilde{T}_i$ , a na powierzchni  $S_u$  dane są przemieszczenia  $\tilde{u}_i$ , które wywołują reakcje podporowe  $\tilde{T}_i$ , /Rys.9/.

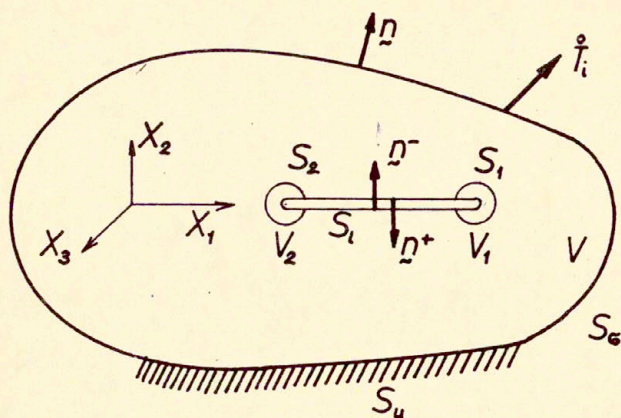
Dodatkowo zakładamy, że szczelina o powierzchni  $S_l$  rozprzeszczerzenia się w swojej płaszczyźnie /w kierunku osi  $x_1$ / zakładając jednocześnie, że w trakcie tego procesu powierzchnia jej pozostaje swobodna od obciążeń.

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań, wydzielimy z naszego ciała walcowe elementy objętościowe  $V_\alpha$  o powierzchni  $S_\alpha$  ( $\alpha = 1,2$ ) zawierające krawędzie /wierzchołki/ szczeliny  $S_l$  i założmy, że elementy te poruszają się wraz z wierzchołkami szczeliny.

Zasada zachowania energii w dynamicznym procesie pęknięcia materiału stwierdza [9,35,38], że moc obciążeń zewnętrznych  $P$  działających na rozważane ciało jest równa sumie prędkości zmiany energii potencjalnej  $U$  /energii wewnętrznej odkształcenia/, energii kinetycznej  $K$  i energii  $D$  dysypowanej w trakcie procesu rozprzeszczerzenia się szczeliny.

Wprowadzając oznaczenia:





Rys.9

$$P = \int_{S_\sigma} T_i \dot{u}_i ds + \lim_{V_\epsilon \rightarrow 0} \int_{V-V_\epsilon} F_i \dot{u}_i dV \quad - \text{ moc obciążeń zewnętrznych,}$$

$$U = \lim_{V_\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{V-V_\epsilon} \delta_{ij} \mathcal{E}_{ij} dV \quad - \text{ energia wewnętrzna odkształcenia ciała ze szczeliną } S_l,$$

/2.18/

$$K = \lim_{V_\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{V-V_\epsilon} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad - \text{ energia kinetyczna ciała ze szczeliną } S_l,$$

$$T_i = \begin{cases} \overset{\circ}{T}_i & \text{na } S_\sigma, \\ \tilde{T}_i & \text{na } S_u, \end{cases}$$

$$V_\epsilon = V_1 + V_2$$

sformułowana uprzednio zasada zachowania energii prowadzi do wzoru:

$$/2.19/ \quad P = \frac{d}{dt} (U + K + D),$$

gdzie symbol  $\frac{d}{dt}$  oznacza pochodną materialną.

Po wprowadzeniu oznaczenia:

$$/2.20/ \quad G = P - \frac{d}{dt} (U + K),$$

zależność /2.19/ przyjmie postać:

$$/2.21/ \quad G = \frac{dD}{dt}.$$

Występująca w tym wyrażeniu wielkość  $G$  określa prędkość zmiany współczynnika wyzwalań energii [36,38], zaś samo wyrażenie /2.21/ przedstawia sobą, uogólnione na przypadek dynamiczny, kryterium Griffitha-Irwin. Kryterium to orzeka, że prędkość zmiany współczynnika wyzwalań energii w dynamicznym procesie kruchego pęknięcia jest równa prędkości dysypacji energii w trakcie tego procesu.

Z uwagi na fakt, że powierzchnia  $S_0$  ograniczająca rozważane ciało pozostaje w spoczynku, zaś wydzielone elementy objętościowe  $V_\alpha$  poruszają się wraz z wierzchołkami szczeliny, prędkości zmiany energii potencjalnej i kinetycznej dane będą wzorami:

$$/2.22/ \quad \frac{dU}{dt} = \lim_{V_E \rightarrow 0} \int_{V-V_E} \delta_{ij} \dot{u}_{ij} dV + \\ + \lim_{S_E \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{S_E} \delta_{ij} u_{i,j} u_k n_k ds,$$



$$/2.22/ \quad \frac{dK}{dt} = \lim_{V \rightarrow V_\epsilon} \int_{V-V_\epsilon} g \dot{u}_i \ddot{u}_i dV + \\ + \lim_{S_\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{S_\epsilon} g \dot{u}_i \dot{u}_i v_k n_k ds ,$$

gdzie symbol  $v_k$  oznacza składowe prędkości punktu powierzchni  $S_\alpha$  w kierunku  $n_k$  / $n$  - wektor normalny do powierzchni  $S_\alpha$ /, zaś  $S_\epsilon = S_1 + S_2$ .

Zastępując wyrażenie  $\sigma_{ij} \dot{u}_{ij}$  związkiem  $(\sigma_{ij} \dot{u}_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \dot{u}_i$  oraz wykorzystując wzory Greena-Gaussa i równanie ruchu  $\sigma_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i$ , prędkość zmiany sumy energii potencjalnej i kinetycznej, na mocy zależności /2.22/ i /2.18/, przyjmie postać:

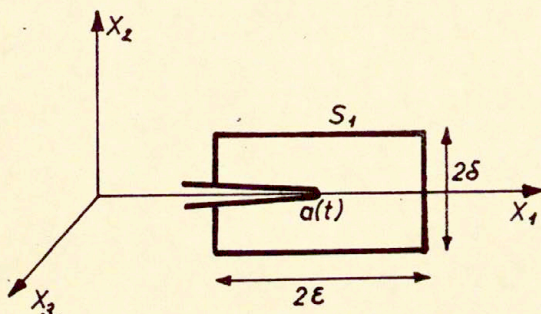
$$/2.23/ \quad \frac{d}{dt} (U+K) = P + \lim_{S_\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} [ \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j + \\ + \frac{1}{2} ( \sigma_{ij} u_{i,j} + \dot{u}_i \dot{u}_i ) v_k n_k ] ds .$$

Wykorzystując następnie zależności /2.20/ i /2.23/, prędkość zmiany współczynnika wyzwalań energii dana będzie ostatecznie zależnością, [38]:

$$/2.24/ \quad G = - \lim_{S_\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} [ \sigma_{ij} \dot{u}_i n_j + \\ + \frac{1}{2} ( \sigma_{ij} u_{i,j} + \dot{u}_i \dot{u}_i ) v_k n_k ] ds .$$

W pracach [36,38] wykazano, że tak określona wartość prędkości zmiany współczynnika wyzwalania energii w trakcie propagowania się szczeliny nie zależy od wyboru kształtu powierzchni  $S_\alpha$ .

Przyjmijmy teraz, że jedynie prawy wierzchołek szczeliny  $S_1$  o współrzędnych  $(a(t), 0, 0)$  propaguje się w dodatnim kierunku osi  $x_1$ , nieruchomego układu współrzędnych  $x_i$ , /Rys.9/. Korzystając z faktu, że prędkość zmiany współczynnika wyzwalania energii  $G$  nie zależy od kształtu powierzchni  $S_\alpha$ , kontur całkowania w płaszczyźnie  $(x_1, x_2)$  wybierzemy w postaci prostokąta  $|x_1 - a(t)| = \xi$ ,  $|x_2| = \delta$ , /Rys.10/.



Rys.10

Przy przejściu do granicy z  $\delta \rightarrow 0$ , odpowiednie całki wzdłuż pionowych odcinków wybranego przez nas konturu całkowania znikają, zaś na poziomych odcinkach tego konturu  $\mathbf{U}_k \mathbf{n}_k = 0$  i stąd prędkość zmiany współczynnika wyzwalania energii w trakcie propagowania się jednego wierzchołka szczeliny dana będzie ostatecznie wzorem, [37,38]:

$$/2.25/ \quad G = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{a(t)-\xi}^{a(t)+\xi} \delta_{2i}(x_1, 0, t) [\dot{u}_i(x_1, 0, t)] dx_1.$$



Z uwagi na fakt, że powierzchnia szczeliny  $S_1$  jest swobodna od obciążeń czyli  $\sigma_{2i}(x_1, 0, t) = 0$  dla  $x_1 < a(t)$ , zaś prędkości odkształceń są funkcjami ciągłymi w punktach nie leżących na powierzchni szczeliny czyli  $[\dot{u}_i(x_1, 0, t)] = 0$  dla  $x_1 > a(t)$ , do wyznaczenia prędkości zmiany współczynnika wyzwalań energii wystarcza znajomość rozkładu naprężeń i prędkości odkształceń w otoczeniu wierzchołka szczeliny.

Zakładając, że prawy wierzchołek szczeliny  $S_1$  propaguje się w dodatnim kierunku osi  $x_1$  ze stałą prędkością  $v$  oraz prowadząc ruchomy układ współrzędnych prostokątnych /1.23/, prędkość zmiany współczynnika wyzwalań energii podczas ustalonego procesu rozprzestrzeniania się szczeliny opisana będzie zależnością:

$$/2.26/ \quad G = -v \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \sigma_{2i}(x, 0) \left[ \frac{\partial u_2(x, 0)}{\partial x} \right] dx.$$

W przypadku gdy jedynie składowa wektora przemieszczenia w kierunku osi  $x_2$  jest funkcją nieciągłą na powierzchni  $S_1$ , wyrażenie /2.26/, na mocy zależności /1.23/ i /2.26/, przyjmie postać:

$$G_I = \frac{v \beta_1 (1 - \beta_2^2) K_I^2}{\pi \mu R(v)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{H(\xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{H(-\xi)}{\sqrt{-\xi}} d\xi,$$

gdzie funkcja  $H(x)$  jest funkcją Heavisidea.

Z uwagi na fakt, że [38]:

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{H(\xi)}{\sqrt{\xi}} \frac{H(-\xi)}{\sqrt{-\xi}} d\xi = \frac{\pi}{2},$$

prędkość zmiany współczynnika wyzwalań energii w przypadku normalnego rozwarcia powierzchni szczeliny /Typ I/ dana będzie ostatecznie wzorem:

$$/2.27/ \quad G_I = \frac{v\beta_1(1-\beta_2^2)}{2\mu R(v)} K_I^2.$$

Przyjmując, że jedynie składowe wektora przemieszczenia w kierunku osi  $x_1$  lub  $x_3$  są funkcjami nieciągłymi na powierzchni szczeliny  $S_1$ , prędkości zmiany współczynników wyzwala energii w przypadku poprzecznego i podłużnego ścinania powierzchni szczeliny /Typ II i III/, na mocy zależności /1.33/, /1.37/ i /2.26/, dane będą wzorami:

$$/2.28/ \quad G_{II} = \frac{v\beta_2(1-\beta_2^2)}{2\mu R(v)} K_{II}^2,$$

$$G_{III} = \frac{v}{2\mu\beta_2} K_{III}^2.$$

W ogólnym przypadku gdy wektor przemieszczenia jest funkcją nieciągłą na powierzchni szczeliny we wszystkich trzech kierunkach  $x_i$  ( $i=1,2,3$ ), zaś prawy wierzchołek szczeliny  $S_1$  propaguje się w dodatnim kierunku osi  $x_1$  ze stałą prędkością  $v$ , prędkość zmiany współczynnika wyzwala energii, na mocy zależności /2.27/ i /2.28/, przyjmie ostatecznie postać:

$$/2.29/ \quad G = \frac{v(1-\beta_2^2)}{2\mu R(v)} (\beta_1 K_I^2 + \beta_2 K_{II}^2) + \frac{v}{2\mu\beta_2} K_{III}^2.$$

Przyjmując, że energia  $D$  dysypowana jest jedynie na ruchomej powierzchni szczeliny  $S_1$ , prędkość zmiany tej energii w przypadku procesu kruchego pęknięcia, można przedstawić w postaci [39]:

$$/2.30/ \quad \frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dS_1} \frac{dS_1}{dt} = \gamma \frac{dS_1}{dt},$$



gdzie  $\gamma$  jest jednostkową energią powierzchniową ciała stałego. Zakładając następnie, że prawy wierzchołek szczeliny  $S_1$  propaguje się ze stałą prędkością  $v$  czyli, że  $dS_1 = 2v dt$ , uogólnione na przypadek dynamicznego procesu pęknięcia kryterium Griffitha-Irwina zdefiniowane zależnością /2.21/, na mocy zależności /2.29/ i /2.30/, przyjmie ostatecznie postać:

$$/2.31/ \quad \frac{1-\beta_2^2}{2\mu R(v)} (\beta_1 K_I^2 + \beta_2 K_{II}^2) + \frac{1}{2\mu\beta_2} K_{III}^2 = 2\gamma.$$

Otrzymana zależność określa warunki jakim muszą odpowiadać współczynniki intensywności naprężenia w konkretnym zagadnieniu aby szczelina poruszała się ze stałą prędkością  $v$ .

Przechodząc w zależności /2.31/ do granicy z  $v \rightarrow 0$  otrzymamy kryterium kruchego pęknięcia Irwina sformułowane jako kryterium o krytycznej wartości współczynnika wyzwalań energii potencjalnej odkształcenia.

### 3. PODSTAWY MATEMATYCZNE

Rozpatrywane w dalszych częściach pracy zagadnienia szczególnej natury - z matematycznego punktu widzenia - problemu poszukiwania rozwiązań specjalnego typu równań całkowych, a mianowicie równania całkowego Wienera-Hopfa [41-44].

Metoda rozwiązywania równania całkowego tego typu oparta jest na stosowaniu uogólnionej na płaszczyznę zmiennej zespolonej, transformacji całkowej Fouriera [19,41,45]. W rozdziale tym przytoczymy definicję oraz podstawowe własności tej transformacji, wybrane określenia i twierdzenia teorii funkcji zmiennej zespolonej stosowane przy rozwiązywaniu równania Wienera-Hopfa jak i naszkicujemy sposób rozwiązywania tego równania.

#### 3.1. Transformacja całkowa Fouriera

Z teorii całki Fouriera wiadomo [19,41], że jeśli funkcja  $f(x)$  zmiennej rzeczywistej  $x$  jest odcinkami ciągła i różniczkowalna w przedziale  $(-\infty, +\infty)$  oraz jest w tym przedziale absolutnie całkowalna, to prawdziwy jest wzór całkowy Fouriera:

$$/3.1/ \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\sigma} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi.$$

Jeśli przyjąć, że

$$/3.2/ \quad F(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$$

i jeśli funkcja  $f(x)$  spełnia przyjęte powyżej założenia, to w każdym punkcie ciągłości tej funkcji



$$/3.3/ \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma) e^{-ix\sigma} dx.$$

Funkcję  $F(\sigma)$  określoną zależnością /3.2/ nazywa się transformacją Fouriera funkcji  $f(x)$ .

Uogólnieniem wzoru całkowego Fouriera /3.1/ na płaszczyznę zmiennej zespolonej jest następujące twierdzenie [19,41, 43,44]:

**Twierdzenie 1**

Niech dana będzie funkcja  $f(x)$  zmiennej rzeczywistej  $x$  taka, że  $|f(x)| < A \exp(\tau_- x)$  dla  $x \rightarrow +\infty$  i  $|f(x)| < B \exp(\tau_+ x)$  dla  $x \rightarrow -\infty$ , przy czym  $\tau_- < \tau_+$  oraz  $A$  i  $B$  są dowolnymi rzeczywistymi stałymi. Wówczas funkcja  $F(\alpha)$  określona wzorem

$$/3.4/ \quad F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx$$

jest analityczną funkcją zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$ , regularną<sup>\*/</sup> w pasmie  $\Omega : \{\tau_- < \text{Im } \alpha < \tau_+, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  i dla dowolnego  $\tau_0 \in (\tau_-, \tau_+)$  zachodzi równość:

$$/3.5/ \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau_0}^{+\infty + i\tau_0} F(\alpha) e^{-ix\alpha} d\alpha.$$

Zależności /3.4/ i /3.5/ określają, uogólnioną na płaszczyznę zmiennej zespolonej transformację całkową Fouriera.

Transformatę Fouriera  $F(\alpha)$  funkcji  $f(x)$  określoną wzorem /3.4/ wygodnie jest w wielu przypadkach przedstawić w postaci:

$$/3.6/ \quad F(\alpha) = F^-(\alpha) + F^+(\alpha),$$

<sup>\*/</sup> Funkcją regularną w danym obszarze nazywamy funkcję analityczną w każdym punkcie tego obszaru.

gdzie jednostronne transformaty Fouriera  $F^-(\alpha)$  i  $F^+(\alpha)$  wyrażają się wzorami:

$$/3.7/ \quad F^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\alpha x} dx,$$

$$F^+(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx.$$

W przypadku, gdy spełnione są założenia Tw.1, funkcje  $F^-(\alpha)$  i  $F^+(\alpha)$  są funkcjami regularnymi odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^- : \{ \text{Im } \alpha < \tau_+ \}$  i  $\Omega^+ : \{ \text{Im } \alpha > \tau_- \}$ , zaś wspólny obszar regularności tych funkcji wyznacza pasmo regularności funkcji  $F(\alpha)$ , [41,43,44].

W przypadku, gdy nie jest spełnione założenie uczynione w Tw.1, że  $\tau_- < \tau_+$  to słuszne jest następujące twierdzenie o uogólnionych całkach Fouriera [41]:

#### Twierdzenie 2

Jeśli funkcje  $F^-(\alpha)$  i  $F^+(\alpha)$  zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$  określone zależnościami /3.7/ istnieją odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^- : \{ \text{Im } \alpha < a \}$  i  $\Omega^+ : \{ \text{Im } \alpha > b \}$  i  $a < b$ , to

$$/3.8/ \quad f(x) = f^-(x) + f^+(x),$$

gdzie

$$/3.9/ \quad f^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty + i\tau_1}^{+\infty + i\tau_1} F^-(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$



$$/3.9/ \quad f^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_2}^{+\infty+i\tau_1} F^+(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

przy czym  $\tau_1 < a$  i  $\tau_2 > b$  oraz  $f^-(x) = 0$  dla  $x > 0$  i  $f^+(x) = 0$  dla  $x < 0$ .

Z teorii transformacji całkowej Fouriera wiadomo [19,41,45], że zachowanie się funkcji  $f(x)$  dla  $x \rightarrow 0$  lub  $|x| \rightarrow \infty$  można określić na podstawie zachowania się jej transformaty Fouriera  $F(\alpha)$  dla  $|\alpha| \rightarrow \infty$  lub  $\alpha \rightarrow 0$ . Z faktu tego będziemy często korzystać opierając się na twierdzeniu typu Taubera [43,45]:

**Twierdzenie 3**

A. Niech dana będzie transformata Fouriera  $F^-(\alpha)$  funkcji  $f(x)$ . Jeśli

$$/3.10/ \quad F^-(\alpha) \sim B\alpha^{-3/2} \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ lub } \alpha \rightarrow (-0),$$

przy czym  $\alpha$  znajduje się w półpłaszczyźnie  $\Omega^-: \{\text{Im } \alpha < \tau_+\}$  zaś  $B$  jest dowolną stałą to

$$/3.11/ \quad f(x) \sim 2\sqrt{2} B e^{-i\pi/4} (-x)^{1/2} \quad \text{dla } x \rightarrow (-0) \\ \text{lub } x \rightarrow -\infty,$$

B. Niech dana będzie transformata Fouriera  $F^+(\alpha)$  funkcji  $f(x)$ . Jeśli

$$/3.12/ \quad F^+(\alpha) \sim B\alpha^{-1/2} \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ lub } \alpha \rightarrow (+0),$$

lub

$$/3.13/ \quad F^+(\alpha) \sim B\alpha^{-3/2} \quad \text{dla } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ lub } \alpha \rightarrow (+0)$$

przy czym  $\alpha$  znajduje się w półpłaszczyźnie  $\Omega^+ : \{ \text{Im } \alpha > \tau_- \}$   
zaś  $B$  jest dowolną stałą to odpowiednio:

$$13.14/ f(x) \sim \sqrt{2} B e^{i3\pi/4} \cdot x^{-1/2} \text{ dla } x \rightarrow (+0) \text{ lub } x \rightarrow +\infty$$

lub

$$13.15/ f(x) \sim 2\sqrt{2} B e^{i\pi/4} \cdot x^{1/2} \text{ dla } x \rightarrow (+0) \text{ lub } x \rightarrow +\infty.$$

Sposób rozwiązywania równania całkowego Wienera-Hopfa oparty jest przede wszystkim na wykorzystaniu specjalnych twierdzeń dotyczących możliwości przedstawienia funkcji zmiennej zespolonej w postaci różnicy względnie ilorazu funkcji regularnych w ściśle określonych obszarach, pojęcia przedłużenia analitycznego oraz uogólnionego twierdzenia Liouville'a [41,43,44].

#### Twierdzenie 4

Niech dana będzie analityczna funkcja  $E(\alpha)$  zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$  i niech funkcja ta będzie regularna w pewnym pasmie  $\Omega : \{ \tau_- < \text{Im } \alpha < \tau_+, |\text{Re } \alpha| < \infty \}$ .

Jeśli  $|E(\alpha)| < A|\sigma|^{-p}$  dla  $|\sigma| \rightarrow \infty$  i  $p > 0$  dla każdego  $\alpha$  należącego do wnętrza pasma  $\Omega$ , to dla każdego  $\alpha$  należącego do pasma  $\Omega_1 : \{ \tau_- < \tau_0 < \text{Im } \alpha < \tau_+, |\text{Re } \alpha| < \infty \}$  funkcję  $E(\alpha)$  można przedstawić w postaci:

$$13.16/ E(\alpha) = E^+(\alpha) - E^-(\alpha),$$

gdzie

$$13.17/ E^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\tau_0}^{+\infty + i\tau_0} \frac{E(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi,$$



$$/3.17/ \quad E^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_1}^{+\infty+i\tau_1} \frac{E(\xi)}{\xi-\alpha} d\xi,$$

przy czym tak określone funkcje  $E^+(\alpha)$  i  $E^-(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^+ : \{ \operatorname{Im} \alpha > \tau_- \}$  i  $\Omega^- : \{ \operatorname{Im} \alpha < \tau_+ \}$ .

**Twierdzenie 5**

Niech dana będzie analityczna funkcja  $H(\alpha)$  zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$ , która jest regularna i nie ma miejsc zerowych w pasmie  $\Omega : \{ \tau_- < \operatorname{Im} \alpha < \tau_+, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty \}$ .  
Jeśli  $H(\alpha) \rightarrow 1$  gdy  $|\sigma| \rightarrow \infty$  dla każdego  $\alpha$  należącego do wnętrza pasma  $\Omega_1 : \{ \tau_- < \tau_0 < \operatorname{Im} \alpha < \tau_1 < \tau_+, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty \}$  to funkcję  $H(\alpha)$  można przedstawić w postaci:

$$/3.18/ \quad H(\alpha) = \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

gdzie

$$/3.19/ \quad \ln H^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_0}^{+\infty+i\tau_0} \frac{\ln H(\xi)}{\xi-\alpha} d\xi,$$

$$\ln H^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_1}^{+\infty+i\tau_1} \frac{\ln H(\xi)}{\xi-\alpha} d\xi,$$

przy czym funkcje  $H^+(\alpha)$  i  $H^-(\alpha)$  są regularne i nie mają miejsc zerowych odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^+ : \{ \operatorname{Im} \alpha > \tau_- \}$  i  $\Omega^- : \{ \operatorname{Im} \alpha < \tau_+ \}$ .

Twierdzenie to może być uogólnione na przypadek gdy funkcja  $H(\alpha)$  ma w swoim pasmie regularności  $\Omega$  skończoną liczbę miejsc zerowych [41,43].

Twierdzenie 6

Niech funkcja  $H(\alpha)$  spełnia założenia Tw.5 w pasmie  $\Omega : \{ |\operatorname{Im} \alpha| < a, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty \}$ . Jeśli funkcja  $H(\alpha)$  jest parzystą funkcją zmiennej  $\alpha$  i dodatkowo  $H(0) = 1$  to  $H^+(0) = -H^-(0) = 1$  i  $\frac{dH^+(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dH^-(\alpha)}{d\alpha} = 0$  dla  $\alpha = 0$ .

Twierdzenie 7 /Liouville'a/

Jeżeli funkcja  $L(\alpha)$  zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$  jest regularna w każdym skończonym obszarze płaszczyzny  $\alpha$  i  $|L(\alpha)| < A|\alpha|^k$  dla  $|\alpha| \rightarrow \infty$  gdzie  $A$  jest dowolną stałą, zaś  $k$  nieujemną liczbą całkowitą, to funkcja  $L(\alpha)$  jest wielomianem  $P_n(\alpha)$  stopnia nie wyższego niż  $k$ .

### 3.2. Równanie całkowe Wienera-Hopfa. Metoda Wienera-Hopfa

Niejednorodnym równaniem całkowym Wienera-Hopfa nazywamy równanie

$$/3.20/ \quad \psi(x) = \int_0^{\infty} \psi(\xi) k(\xi - x) d\xi + g(x),$$

które jest określone dla  $x > 0$ , zaś poszukiwaną wielkością jest funkcja  $\psi(x)$ . Równanie tego typu rozwiązuje się stosując zespoloną transformację całkową Fouriera [41,42,44].

Założmy, że równanie /3.20/ jest słuszne dla  $|x| < \infty$  oraz wprowadźmy oznaczenia:

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi^+(x) & \text{dla } x > 0 \text{ i } \psi^+(x) = 0 \text{ dla } x < 0, \\ \psi^-(x) & \text{dla } x < 0 \text{ i } \psi^-(x) = 0 \text{ dla } x > 0. \end{cases}$$

Równanie /3.20/ przyjmie wówczas postać:



$$/3.21/ \quad \varphi^-(x) + \psi^+(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^+(\xi) k(\xi - x) d\xi + g(x),$$

gdzie poszukiwanymi wielkościami są teraz funkcje  $\varphi^-(x)$  i  $\psi^+(x)$ .

Jeśli istnieją transformaty Fouriera funkcji występujących w równaniu /3.21/ oraz możliwe jest stosowanie twierdzenia o transformacji Fouriera splotu funkcji  $\psi^+(x)$  i  $k(x)$  to równanie /3.21/ na mocy Tw.1 lub Tw.2, przyjmie postać następującego równania funkcyjnego [41,44]:

$$/3.22/ \quad \bar{\Phi}(\alpha) + [1 - \sqrt{2\pi} K(\alpha)] \Psi^+(\alpha) + G(\alpha) = 0,$$

które jest określone w pewnym pasmie  $\Omega: \{\tau_- < \text{Im } \alpha < \tau_+, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  płaszczyzny zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$ . Wszystkie funkcje występujące w równaniu /3.22/ są funkcjami regularnymi w pasmie  $\Omega$ , zaś nieznanne funkcje  $\bar{\Phi}(\alpha)$  i  $\Psi^+(\alpha)$  są funkcjami regularnymi dodatkowo w półpłaszczyznach

$$\Omega^-: \{\text{Im } \alpha < \tau_+\} \text{ i } \Omega^+: \{\text{Im } \alpha > \tau_-\}.$$

Istnienie wspólnego pasma regularności  $\Omega$  dla wszystkich funkcji występujących w równaniu funkcyjnym /3.22/ stanowi podstawę metody rozwiązywania tego równania.

Rozpatrując zagadnienia, których rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania równania całkowego typu /3.20/ w większości przypadków postępuje się w ten sposób, że wykonując zespoloną transformację całkową Fouriera na odpowiednim równaniu różniczkowym oraz wykorzystując warunki brzegowe rozważanego zagadnienia, otrzymujemy bezpośrednio równanie funkcyjne /3.22/. Ten tok postępowania spowodowany jest nieznaną postacią, a w wielu przypadkach niemożliwością określenia, jądra równania /3.20/ czyli funkcji  $k(x)$ , która jest funkcją Greena rozważanego problemu. Przykładem ilustrującym równoważność obu sposobów jest np. zagadnienie rozważane w pracy [46].

Rozważając w dalszych częściach pracy konkretne zagadnienia szczelin, omijać będziemy problem konstruowania równania całkowego typu /3.20/ i rozwiązanie odpowiedniego zagadnienia sprowadzać będziemy bezpośrednio do rozwiązania równania funkcyjnego postaci /3.22/.

W celu opisanía metody rozwiązywania równania funkcyjnego /3.22/, którą nazywa się często techniką Wienera-Hopfa, rozważmy następujące równanie funkcyjne [43]:

$$/3.23/ \quad A(\alpha) \Psi^+(\alpha) + B(\alpha) \Phi^-(\alpha) + C(\alpha) = 0$$

określone w pewnym pasmie  $\Omega : \{ \tau_- < \text{Im } \alpha < \tau_+, |\text{Re } \alpha| < \infty \}$  płaszczyzny zmiennej zespolonej  $\alpha$ . Zakładamy, że nieznanne funkcje  $\Phi^-(\alpha)$  i  $\Psi^+(\alpha)$  są funkcjami regularnymi odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^- : \{ \text{Im } \alpha < \tau_+ \}$  i  $\Omega^+ : \{ \text{Im } \alpha > \tau_- \}$  zaś funkcje  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  i  $C(\alpha)$  są danymi i regularnymi funkcjami w pasmie  $\Omega$ . Dodatkowo dla prostoty dalszych rozważań zakładamy, że funkcje  $A(\alpha)$ ,  $B(\alpha)$  i  $C(\alpha)$  nie mają zer w pasmie  $\Omega$ .

Celem metody Wienera-Hopfa jest przedstawienie równania /3.23/ w postaci równości dwóch funkcji, które byłyby równe sobie w pasmie  $\Omega$  i analityczne w półpłaszczyznach  $\Omega^-$  i  $\Omega^+$ . Przedstawmy w tym celu równanie /3.23/ w postaci:

$$/3.24/ \quad \Phi^-(\alpha) + H(\alpha) \Psi^+(\alpha) + G(\alpha) = 0.$$

Podstawową czynnością w metodzie Wienera-Hopfa jest tzw. faktoryzacja funkcji  $H(\alpha)$  polegająca na przedstawieniu tej funkcji w postaci:

$$/3.25/ \quad H(\alpha) = \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$



przy czym żąda się aby funkcje  $H^+(\alpha)$  i  $H^-(\alpha)$  nie miały zer odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^+$  i  $\Omega^-$  oraz były w nich regularne z wyjątkiem być może punktu w nieskończoności.

W zależności od postaci funkcji  $H(\alpha)$ , przedstawienie /3.25/ uzyskuje się na drodze elementarnych przekształceń względnie wykorzystuje się Tw.5.

Po wykorzystaniu zależności /3.25/ równanie /3.24/ przyjmie postać:

$$/3.26/ \quad H^-(\alpha) \Phi^-(\alpha) + H^+(\alpha) \Psi^+(\alpha) + E(\alpha) = 0,$$

gdzie

$$/3.27/ \quad E(\alpha) = H^-(\alpha) G(\alpha).$$

Jeśli funkcja  $E(\alpha)$  jest funkcją regularną w pasmie  $\Omega$  oraz spełnia założenia Tw.4, to można przedstawić ją w postaci:

$$/3.28/ \quad E(\alpha) = E^+(\alpha) - E^-(\alpha)$$

gdzie funkcje  $E^+(\alpha)$  i  $E^-(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^+$  i  $\Omega^-$ .

Zakładając słuszność przedstawienia funkcji  $E(\alpha)$  w postaci /3.28/, równanie /3.26/ możemy przedstawić w postaci:

$$/3.29/ \quad H^-(\alpha) \Phi^-(\alpha) + E^-(\alpha) = -H^+(\alpha) \Psi^+(\alpha) - E^+(\alpha) = L(\alpha).$$

Lewa i prawa strona tego równania przedstawiają sobą dwie funkcje, równe sobie w pasmie  $\Omega$  oraz regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^-$  i  $\Omega^+$  z wyjątkiem być może punktu w nieskończoności. Wynika stąd, że funkcja określona prawą stroną równania /3.29/ jest analitycznym przedłużeniem funkcji określonej lewą stroną równania /3.29/ co oznacza, że określona została funkcja  $L(\alpha)$  regularna w dowolnym skończonym obszarze płaszczyzny zmiennej zespolonej  $\alpha$ .

Jeśli przyjmiemy następnie, że

$$|H^-(\alpha) \Phi^-(\alpha) + E^-(\alpha)| < |\alpha|^p \text{ dla } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^-,$$

$$|H^+(\alpha) \Psi^+(\alpha) + E^+(\alpha)| < |\alpha|^q \text{ dla } |\alpha| \rightarrow \infty \text{ i } \alpha \in \Omega^+$$

to na mocy uogólnionego twierdzenia Liouvilléa /Tw.7/, funkcja  $L(\alpha)$  jest wielomianem  $P(\alpha)$  stopnia  $n$  nie wyższego niż całkowita część  $\min(p, q)$  i wówczas zgodnie z zależnością /3.29/

$$H^-(\alpha) \Phi^-(\alpha) + E^-(\alpha) = P(\alpha),$$

$$H^+(\alpha) \Psi^+(\alpha) + E^+(\alpha) = -P(\alpha).$$

Ostatecznie nieznanne funkcje  $\Phi^-(\alpha)$  i  $\Psi^+(\alpha)$  dane będą związkami:

$$\Phi^-(\alpha) = - \frac{E^-(\alpha) - P(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

/3.30/

$$\Psi^+(\alpha) = - \frac{E^+(\alpha) + P(\alpha)}{H^+(\alpha)},$$

przy czym funkcje  $\Phi^-(\alpha)$  i  $\Psi^+(\alpha)$  są określone z dokładnością do  $n$  stałych, które należy wyznaczyć z dodatkowych warunków jakim odpowiada wyjściowe zagadnienie.

Funkcje  $\Phi^-(\alpha)$  i  $\Psi^+(\alpha)$  opisane związkami /3.30/ są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^-$  i  $\Omega^+$ , a tym samym w pasmie  $\Omega$  i wobec tego na mocy Tw.1

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{+\infty+i\tau_0} \Phi^-(\alpha) e^{-ix\alpha} d\alpha \quad \text{dla } x < 0,$$

/3.31/



$$/3.31/ \quad \psi^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+i\tau_0}^{+\infty+i\tau_0} \Psi^+(\alpha) e^{-ix\alpha} d\alpha \quad \text{dla } x > 0,$$

gdzie  $\tau_0 \in (\tau_-, \tau_+)$  zaś funkcja  $\psi^+(x)$  jest rozwiązaniem odpowiedniego równania całkowego Wienera-Hopfa typu /3.20/.

W większości zagadnień matematycznej teorii szczelin dających się sprowadzić do problemu rozwiązywania równania funkcyjnego /3.23/, ścisła faktoryzacja funkcji  $H(\alpha)$  prowadzi jedynie do formalnego określenia funkcji  $H^\pm(\alpha)$  a tym samym do formalnego rozwiązania równania /3.23/. Jednym ze sposobów uzyskania rozwiązań nadających się zarówno do jakościowej jak i ilościowej analizy rozważanego zagadnienia jest przybliżona faktoryzacja funkcji  $H(\alpha)$ , [43]. W zagadnieniach, w których niemożliwe będzie przedstawienie w sposób ścisły funkcji  $H(\alpha)$  w postaci /3.25/ tak, aby funkcje  $H^\pm(\alpha)$  dane były w zamkniętej postaci, stosować będziemy metodę faktoryzacji funkcji  $H(\alpha)$  zaproponowaną przez W.T.Koitera [47,48].

Rozważane przez nas zagadnienia szczelin sprowadzają się do rozwiązywania równania funkcyjnego typu /3.23/ określonego w pasmie  $\Omega : \{-\tau_0 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  gdzie  $\tau_0$  jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą. W celu omówienia wspomnianej metody Koitera faktoryzacji funkcji  $H(\alpha)$ , rozpatrzyć należy przypadek gdy funkcja  $H(\alpha)$  jest regularna w pasmie

$\Omega_1 : \{|\text{Im } \alpha| < a, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  lub w pasmie  $\Omega_2 : \{-a < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$ , gdzie  $a \gg \tau_0$ , przy czym dla ułatwienia dalszych rozważań przyjmiemy dodatkowo, że funkcja  $H(\alpha)$  nie posiada miejsc zerowych w swoim pasmie regularności.

Idea Koitera, sformułowana w pracy [47] dla przypadku gdy funkcja  $H(\alpha)$  jest regularna w pasmie  $\Omega_1$ , polega na przedstawieniu tej funkcji w pewnym pasmie  $\Omega_0 \subset \Omega_1$  w postaci:

$$/3.32/ \quad H(\alpha) = \bar{H}(\alpha) H_1(\alpha),$$

gdzie funkcja  $\bar{H}(\alpha)$  jest daną w jawnej postaci funkcją, dającą się faktoryzować w elementarny sposób, przy czym żąda się, aby funkcje  $\bar{H}(\alpha)$  i  $H_1(\alpha)$  spełniały następujące warunki:

1. funkcja  $H_1(\alpha)$  jest parzystą funkcją zmiennej  $\alpha$ ,  
 $H_1(\alpha) = H_1(-\alpha)$ ,
2. funkcja  $H_1(\alpha)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w pasmie  $\Omega_0: \{ |\operatorname{Im} \alpha| < \varepsilon_0, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty \}$  gdzie  $\varepsilon_0 \leq a$  i  $\varepsilon_0 \ll 1$ ,
- 13.33/ 3. funkcja  $\bar{H}(\alpha)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w pasmie  $\Omega_0$ ,
4.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{H}(\alpha)/H(\alpha) = 1$  w pasmie  $\Omega_0$ ,
5.  $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \bar{H}(\alpha)/H(\alpha) = 1$  w pasmie  $\Omega_0$ ,
6.  $\bar{H}(\sigma) = H(\sigma)$  dla  $|\sigma| < \infty$  gdzie  $\sigma = \operatorname{Re} \alpha$ .

Z ostatnich czterech warunków wynika, że w pasmie  $\Omega_0$  funkcję  $H(\alpha)$  możemy zastąpić funkcją  $\bar{H}(\alpha)$  a tym samym przyjmując, że  $H(\alpha) = \bar{H}(\alpha)$  w pasmie  $\Omega_*: \{ -\varepsilon < \operatorname{Im} \alpha < 0, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty \}$  gdzie  $\varepsilon = \min(\varepsilon_0, \tau_0)$ ; pasmo  $\Omega_*$  jest jednocześnie obszarem określoności rozważanego przez nas równania funkcyjnego.

Z własności tak określonych funkcji  $\bar{H}(\alpha)$  i  $H(\alpha)$  wynika dodatkowo, że funkcję  $H_1(\alpha)$  można na mocy Tw.5, przedstawić w pasmie  $\Omega_0$  w postaci

$$13.34/ \quad H_1(\alpha) = \frac{H_1^+(\alpha)}{H_1^-(\alpha)},$$

gdzie funkcje  $H^+(\alpha)$  i  $H^-(\alpha)$  są regularne i nie mają miejsc zerowych odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+: \{ \operatorname{Im} \alpha > -\varepsilon_0 \}$  i  $\Omega_0^-: \{ \operatorname{Im} \alpha < \varepsilon_0 \}$ .

Zakładamy następnie, że funkcję  $\bar{H}(\alpha)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_0$  w postaci:

$$13.35/ \quad \bar{H}(\alpha) = \frac{\bar{H}^+(\alpha)}{\bar{H}^-(\alpha)},$$



gdzie funkcje  $\bar{H}^+(\alpha)$  i  $\bar{H}^-(\alpha)$  nie mają miejsc zerowych i są regularne, z wyjątkiem być może punktu w nieskończoności, odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+$  i  $\Omega_0^-$ .

Ostatecznie, wykorzystując zależności /3.32/, /3.34/ i /3.35/, funkcję  $H(\alpha)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_0$  w postaci /3.25/, gdzie

$$H^+(\alpha) = \bar{H}^+(\alpha) H_1^+(\alpha),$$

/3.36/

$$H^-(\alpha) = \bar{H}^-(\alpha) H_1^-(\alpha),$$

przy czym funkcje  $H^+(\alpha)$  i  $H^-(\alpha)$  nie mają miejsc zerowych i są regularne, z wyjątkiem być może punktu w nieskończoności, odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+$  i  $\Omega_0^-$ .

Konstruując funkcję  $\bar{H}(\alpha)$  w przypadku gdy funkcja  $H(\alpha)$  jest regularna w pasmie  $\Omega_0$ , postępujemy podobnie jak poprzednio, z tym że należy teraz dodatkowo uwzględnić punkty osobliwe i ewentualne miejsca zerowe funkcji  $H(\alpha)$  na osi rzeczywistej  $\mathcal{G} = \text{Re } \alpha$  płaszczyzny zmiennej zespolonej  $\alpha$ .

W rozważanym przypadku żąda się aby funkcje  $H_1(\alpha)$  i  $\bar{H}(\alpha)$  spełniały następujące warunki:

1. funkcja  $H_1(\alpha)$  jest parzystą funkcją zmiennej  $\alpha$ ,
2. funkcja  $H_1(\alpha)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w pasmie  $\Omega_0$ ,
3. funkcja  $\bar{H}(\alpha)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w pasmie  $\Omega_0$ , z wyjątkiem punktów leżących na osi rzeczywistej  $\mathcal{G} = \text{Re } \alpha$ , na której może mieć skończoną liczbę punktów osobliwych i miejsc zerowych,
4. funkcje  $\bar{H}(\alpha)$  i  $H(\alpha)$  mają te same punkty osobliwe i miejsca zerowe na osi rzeczywistej  $\mathcal{G} = \text{Re } \alpha$ ,
5.  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{H}(\alpha) / H(\alpha) = 1$  w pasmie  $\Omega_0$ ,
6.  $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \bar{H}(\alpha) / H(\alpha) = 1$  w pasmie  $\Omega_0$ ,
7.  $\bar{H}(\mathcal{G}) \approx H(\mathcal{G})$  dla  $|\mathcal{G}| < \infty$  gdzie  $\mathcal{G} = \text{Re } \alpha$ .

/3.37/

Powtarzając przytoczone poprzednio rozumowanie, funkcję  $H(\alpha)$  możemy zastąpić funkcją  $\bar{H}(\alpha)$  w pasmie  $\Omega_0$ , a tym samym możemy przyjąć, że  $\bar{H}(\alpha) = H(\alpha)$  w pasmie  $\Omega_*$ .

Podobnie jak poprzednio, funkcja  $H_1(\alpha)$  spełnia w pasmie  $\Omega_0$  założenia Tw.5 i można ją wobec tego przedstawić w postaci /3.34/. Załóżmy następnie, że możliwe jest przedstawienie funkcji  $\bar{H}(\alpha)$  w pasmie  $\Omega_0$  w postaci /3.35/ gdzie funkcje  $\bar{H}^\pm(\alpha)$  nie mają miejsc zerowych i są regularne, z wyjątkiem być może punktu w nieskończoności, odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+$  i

$$\Omega_*^-: \{ \text{Im } \alpha < 0 \}.$$

Ostatecznie funkcję  $H(\alpha)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_0$ , a tym samym w pasmie  $\Omega_*$  w postaci /3.25/ gdzie funkcje  $H^\pm(\alpha)$ , określone zależnościami /3.36/, nie mają miejsc zerowych i są regularne, z wyjątkiem być może punktu w nieskończoności, odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+$  i  $\Omega_*^-$ .

Przyjęcie w równaniu /3.24/ funkcji  $H(\alpha)$  w postaci /3.32/ prowadzi oczywiście w dalszym ciągu do uzyskania jedynie formalnego rozwiązania równania /3.24/, gdyż funkcja  $H_1(\alpha)$  jest nieznaną. Jeśli jednak jesteśmy zainteresowani w znalezieniu asymptotycznych wartości funkcji  $\bar{\Phi}(\alpha)$  i  $\bar{\Psi}(\alpha)$  dla  $\alpha \rightarrow 0$  lub  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , to ze względu na to, że funkcja  $H_1(\alpha)$  spełnia założenia Tw.6, wartości te w pewnych przypadkach - zależy to od postaci funkcji  $E(\alpha)$  występującej w równaniu /3.26/ - określone są w sposób ścisły. Z faktu tego będziemy często korzystali przy określaniu współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny. Przyjmując, że  $H_1(\alpha) \cong 1$ , czyli zastępując w równaniu /3.24/ funkcję  $H(\alpha)$  funkcją  $\bar{H}(\alpha)$  otrzymamy przybliżone rozwiązanie równania /3.23/, przy czym błąd tego rozwiązania jest według Koitera rzędu błędów przybliżenia funkcji  $H(\alpha)$  funkcją  $\bar{H}(\alpha)$ , [47].



#### 4. PODSTAWOWE ZWIĄZKI DWUWYMIAROWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Rozpatrując konkretne zagadnienia szczelin ograniczać się będziemy zasadniczo do rozpatrywania jednorodnego i izotropowego ośrodka sprężystego, w którym spełnione są założenia płaskiego i antypłaskiego stanu odkształcenia. Zebrane w tym rozdziale podstawowe związki teorii sprężystości dotyczą stacjonarnych zagadnień teorii sprężystości, tzn. zagadnień związanych z ustalonym ruchem względnie z ustalonymi drganiami ośrodka sprężystego.

##### 4.1. Płaski stan odkształcenia

Rozważając płaski stan odkształcenia zachodzący w płaszczyźnie prostopadłej do osi  $x_3$  przyjętego przez nas nieruchomego układu współrzędnych prostokątnych  $(x_1, x_2, x_3)$ , /Rys.3/, wektor sprężystego przemieszczenia  $\underline{u}$  przyjmie postać [49]:

$$\underline{u} = \underline{u} [u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), 0],$$

gdzie składowe  $u_i$  są przemieszczeniami punktu materialnego odpowiednio w kierunku osi  $x_1$  i  $x_2$  przyjętego układu współrzędnych. Zaniedbując działanie sił masowych  $\underline{F}$ , równania ruchu ośrodka sprężystego redukują się do dwóch równań:

$$/4.1/ \quad \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i, \quad (i, j = 1, 2),$$

gdzie  $\mu$  i  $\lambda$  są stałymi sprężystymi Lamégo, zaś  $\rho$  jest gęstością ośrodka.

Jeśli przemieszczenia  $u_i$  wyrazić przy pomocy skalarnego i wektorowego potencjału  $\varphi(x_1, x_2, t)$  i  $\psi(x_1, x_2, t)$  w postaci:

$$u_1(x_1, x_2, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2},$$

/4.2/

$$u_2(x_1, x_2, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

to równania /4.1/ można zastąpić następującymi równaniami falowymi:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_1^2} \ddot{\varphi} &= 0, \\ /4.3/ \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \ddot{\psi} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie operator  $\nabla^2$  jest dwuwymiarowym operatorem Laplacea, zaś  $c_1$  i  $c_2$  są prędkościami propagacji sprężystej fali podłużnej i poprzecznej określonymi zależnościami /1.27/.

#### 4.1.1. Równania ośrodka sprężystego w ruchomym układzie współrzędnych

Wprowadzając do rozważań ruchomy układ współrzędnych prostokątnych  $(x, y, z)$  zdefiniowany zależnościami /1.23/, /Rys.5/, przy założeniu, że  $v < c_2$ , układ równań /4.3/ przyjmie postać:

$$\begin{aligned} \beta_1^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} &= 0, \\ /4.4/ \quad \beta_2^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= 0, \end{aligned}$$

gdzie wielkości  $\beta_j$  ( $j=1,2$ ) określone są zależnością /1.27/<sub>2</sub> i  $v < c_2 < c_1$ .

Wykorzystując zależności /4.2/ oraz prawo Hookea

$$/4.5/ \quad \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk},$$

stan przemieszczeń i naprężeń w ciele sprężystym, opisany w ruchomym układzie współrzędnych /1.25/, określony będzie zależnościami:



$$u_1(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$u_2(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$/4.6/ \quad \sigma_{11}(x,y) = \mu [(1+2\beta_1^2-\beta_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}],$$

$$\sigma_{12}(x,y) = \mu [2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - (1+\beta_2^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}],$$

$$\sigma_{22}(x,y) = -\mu [(1+\beta_2^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}].$$

Jeśli założymy, że przebieg zmienności przemieszczeń i naprężeń jak i charakter warunków brzegowych rozważanego problemu pozwalają na stosowanie w dalszych rozważaniach transformacji całkowej Fouriera /3.4/, to po wykonaniu jej na równaniach /4.3/ otrzymamy następujące dwa równania różniczkowe zwyczajne:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \beta_1^2 \alpha^2 \right) \Phi(\alpha, y) = 0,$$

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - \beta_2^2 \alpha^2 \right) \Psi(\alpha, y) = 0,$$

gdzie funkcje  $\Phi$  i  $\Psi$  są transformacjami Fouriera funkcji  $\varphi(x,y)$  i  $\psi(x,y)$ ,  $\alpha$  jest zespolonym parametrem transformacji Fouriera.

Przedstawiając rozwiązania tych równań w postaci:

$$\Phi(\alpha, y) = C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_1 y + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_1 y, \quad /4.7/$$

$$\Psi(\alpha, y) = C_3(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_2 y + C_4(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_2 y,$$

oraz wykonując transformację Fouriera /3.4/ na związkach /4.6/, wyrażenia opisujące transformaty Fouriera przemieszczeń i naprężeń, przyjmą, po uprzednim wykorzystaniu zależności /4.7/, następującą postać:

$$U_1(\alpha, y) = -i\alpha \{ C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_1 y + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_1 y + \\ + i\beta_2 [ C_3(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_2 y + C_4(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_2 y ] \},$$

$$U_2(\alpha, y) = \alpha \{ \beta_1 [ C_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_1 y + C_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_1 y ] + \\ + i [ C_3(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_2 y + C_4(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_2 y ] \}, \quad /4.8/$$

$$\Sigma_{11}(\alpha, y) = -\mu \alpha^2 \{ (1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) [ C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_1 y + \\ + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_1 y ] + 2i\beta_2 [ C_3(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_2 y + \\ + C_4(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_2 y ] \};$$



$$\Sigma_{12}(\alpha, y) = -i\mu\alpha^2 \{ 2\beta_1 [ C_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha\beta_1 y + C_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha\beta_1 y ] + \\ + i(1 + \beta_2^2) [ C_3(\alpha) \operatorname{sh} \alpha\beta_2 y + C_4(\alpha) \operatorname{ch} \alpha\beta_2 y ] \},$$

/4.8/

$$\Sigma_{22}(\alpha, y) = \mu\alpha^2 \{ (1 + \beta_2^2) [ C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha\beta_1 y + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha\beta_1 y ] + \\ + 2i\beta_2 [ C_3(\alpha) \operatorname{ch} \alpha\beta_2 y + C_4(\alpha) \operatorname{sh} \alpha\beta_2 y ] \}.$$

W celu uzyskania ostatecznego rozwiązania rozważonego problemu należy, po uprzednim wyznaczeniu funkcji  $C_j(\alpha)$  z odpowiednich warunków brzegowych problemu, wykonać na związkach /4.8/ odwrotną transformację całkową Fouriera /3.5/.

#### 4.1.2. Drgania harmoniczne

Rozważając zagadnienie, w którym przemieszczenia i naprężenia zmieniają się w sposób harmoniczny w czasie, stosować będziemy standardową metodę rozdzielania zmiennych przedstawiając wszystkie interesujące nas wielkości w postaci:

$$/4.9/ \quad f(x_1, x_2, t) = \overset{*}{f}(x_1, x_2) \exp(i\omega t),$$

gdzie  $\omega$  jest częstością drgań harmonicznych.

Wykorzystując tę transformację, równania /4.3/ przyjmą postać:

$$/4.10/ \quad (\nabla^2 + \nu_1^2) \overset{*}{\phi}(x_1, x_2) = 0,$$

$$(\nabla^2 + \nu_2^2) \overset{*}{\psi}(x_1, x_2) = 0,$$

zaś związki opisujące amplitudy przemieszczeń i naprężeń opi-

sane będą na podstawie zależności /4.2/, /4.5/ i transformacji /4.9/ następującymi wzorami:

$$\dot{U}_1^*(x_1, x_2) = \frac{\partial \dot{\phi}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{\psi}^*}{\partial x_2},$$

$$\dot{U}_2^*(x_1, x_2) = \frac{\partial \dot{\phi}^*}{\partial x_2} - \frac{\partial \dot{\psi}^*}{\partial x_1},$$

$$/4.11/ \quad \dot{b}_{11}^*(x_1, x_2) = \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 \dot{\phi}^*}{\partial x_1^2} - (v_2^2 - 2v_1^2) \dot{\phi}^* + 2 \frac{\partial^2 \dot{\psi}^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right],$$

$$\dot{b}_{12}^*(x_1, x_2) = \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 \dot{\phi}^*}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{\partial^2 \dot{\psi}^*}{\partial x_1^2} - v_2^2 \dot{\psi}^* \right],$$

$$\dot{b}_{22}^*(x_1, x_2) = \mu \left[ 2 \frac{\partial^2 \dot{\phi}^*}{\partial x_2^2} - (v_2^2 - 2v_1^2) \dot{\phi}^* - 2 \frac{\partial^2 \dot{\psi}^*}{\partial x_1 \partial x_2} \right],$$

gdzie

$$/4.12/ \quad v_j = \frac{\omega}{c_j}, \quad (j=1,2).$$

Zakładając, że dozwolone jest stosowanie w dalszych rozważaniach transformacji całkowej Fouriera /3.4/, podstawowy układ równań /4.10/, po uprzednim wykonaniu na nim tej transformacji, przyjmie postać:

$$\left[ \frac{d^2}{dx_2^2} - (\alpha^2 - v_1^2) \right] \dot{\Phi}^*(\alpha, x_2) = 0,$$

$$\left[ \frac{d^2}{dx_2^2} - (\alpha^2 - v_2^2) \right] \dot{\Psi}^*(\alpha, x_2) = 0,$$



gdzie funkcje  $\overset{*}{\Phi}$  i  $\overset{*}{\Psi}$  są transformacjami Fouriera funkcji  $\overset{*}{\phi}(x_1, x_2)$  i  $\overset{*}{\psi}(x_1, x_2)$ .

Przyjmując rozwiązania tych równań w postaci:

$$\overset{*}{\Phi}(\alpha, x_2) = C_1(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} + C_2(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2},$$

/4.13/

$$\overset{*}{\Psi}(\alpha, x_2) = C_3(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_4(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2},$$

oraz wykonując na związkach /4.11/ transformację /3.4/, transformaty Fouriera amplitud przemieszczeń i naprężeń, po uprzednim wykorzystaniu zależności /4.13/, przyjmują ostatecznie postać:

$$\begin{aligned} \overset{*}{U}_1(\alpha, x_2) = & -i \{ \alpha [ C_1(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} + C_2(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} ] + \\ & + i \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} [ C_3(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_4(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} ] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} /4.14/ \quad \overset{*}{U}_2(\alpha, x_2) = & \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} \{ C_1(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} + C_2(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} \} + \\ & + i \alpha [ C_3(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_4(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} ], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{*}{\Sigma}_{1,1}(\alpha, x_2) = & -\mu \{ (2\alpha^2 - v_2^2 - 2v_1^2) [ C_1(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} + \\ & + C_2(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} ] + 2i\alpha \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} \times \\ & \times [ C_3(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_4(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} ] \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{12}^*(\alpha, x_2) = & -i \underline{u} \{ 2\alpha \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} [C_1(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} + C_2(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2}] + \\ & + i(2\alpha^2 - v_2^2) [C_3(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_4(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2}] \}, \end{aligned}$$

/4.14/

$$\begin{aligned} \Sigma_{22}^*(\alpha, x_2) = & \underline{u} \{ (2\alpha^2 - v_2^2) [C_1(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2} + C_2(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_1^2}] + \\ & + 2i\alpha \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} [C_3(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_4(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2}] \}, \end{aligned}$$

przy czym występujące w tych wyrażeniach nieznanne funkcje  $C_j(\alpha)$  należy wyznaczyć z odpowiednich warunków brzegowych rozpatrywanego problemu, a następnie w celu otrzymania ostatecznego rozwiązania należy na związkach /4.14/ wykonać odwrotną transformację całkową Fouriera /3.5/.

## 4.2. Antypłaski stan odkształcenia

Jak wiadomo [49], w antypłaskim stanie odkształcenia przyjmuje się, że jedyną nieznikającą tożsamościowo składową wektora sprężystego przemieszczenia  $\underline{u}$  jest przemieszczenie np. w kierunku osi  $x_3$  przyjętego przez nas układu współrzędnych prostokątnych  $(x_1, x_2, x_3)$ . Dodatkowo zakłada się, że przemieszczenie to jest w tym przypadku funkcją jedynie dwóch zmiennych przestrzennych  $x_1$  i  $x_2$  oraz czasu  $t$  i wobec tego wektor sprężystego przemieszczenia  $\underline{u}$  możemy przedstawić w postaci:

$$\underline{u} = \underline{u} [0, 0, u_3(x_1, x_2, t)].$$

Z przyjętych założeń wynika, że zaniedbując działanie sił masowych  $\underline{F}$  równania ruchu ośrodka sprężystego redukują się w tym przypadku do równania falowego:



$$/4.15/ \quad \nabla^2 u_3 - \frac{1}{c_2^2} \ddot{u}_3 = 0,$$

zaś jedynymi nieznikającymi tożsamościowo składowymi tensora naprężenia są naprężenia  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$ , które na podstawie prawa Hooke'a /4.5/ opisane będą zależnościami:

$$/4.16/ \quad \sigma_{13}(x_1, x_2, t) = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_1},$$

$$\sigma_{23}(x_1, x_2, t) = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2}.$$

#### 4.2.1. Równania ośrodka w ruchomym układzie współrzędnych

Wprowadzając do rozważań ruchomy układ współrzędnych prostokątnych /1.23/, przy założeniu, że  $v < c_2$ , równanie ruchu /4.15/ zapisane w tym układzie współrzędnych, przyjmie postać:

$$/4.17/ \quad \beta_2^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0,$$

zaś naprężenia  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  określone będą związkami:

$$/4.18/ \quad \sigma_{13}(x, y) = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x},$$

$$\sigma_{23}(x, y) = \mu \frac{\partial u_3}{\partial y}.$$

Jeśli założymy, że przebieg zmienności przemieszczenia  $u_3$  oraz naprężeń  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  jak i charakter warunków brzegowych rozpatrywanego zagadnienia pozwalają na stosowanie transformacji całkowitej Fouriera /3.4/, to po wykonaniu jej na równaniu

/4.17/ otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne postaci:

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha^2 \beta_2^2\right) U_3(\alpha, x_2) = 0,$$

gdzie funkcja  $U_3$  jest transformatą Fouriera przemieszczenia  $u_3(x, y)$ .

Przyjmując rozwiązanie tego równania w postaci:

$$/4.19/ \quad U_3(\alpha, y) = C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_2 y + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_2 y$$

oraz wykonując transformację /3.4/ na związkach /4.18/, transformaty Fouriera naprężeń  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$ , po uprzednim wykorzystaniu zależności /4.19/, przyjmą postać:

$$\Sigma'_{13}(\alpha, y) = -i \mu \alpha [C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_2 y + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_2 y],$$

/4.20/

$$\Sigma_{23}(\alpha, y) = \mu \alpha \beta_2 [C_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha \beta_2 y + C_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha \beta_2 y]$$

Wyznaczając nieznanne funkcje  $C_j(\alpha)$  z odpowiednich warunków brzegowych rozważanego zagadnienia oraz wykonując transformację odwrotną Fouriera /3.5/ na związkach /4.19/ i /4.20/, otrzymamy ostateczne rozwiązanie rozpatrywanego problemu.

#### 4.2.2. Drgania harmoniczne

Rozważając zagadnienia, w których przemieszczenie  $u_3$  jak i naprężenia  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  są funkcjami zmieniającymi się harmonicznie w czasie, równanie ruchu /4.15/ po wykonaniu na nim transformacji /4.9/ przyjmie postać:

$$/4.21/ \quad (\nabla^2 + \nu_2^2) \dot{U}_3^*(x_1, x_2) = 0$$

zaś amplitudy naprężeń /4.16/ opisane będą zależnościami:



$$\sigma_{13}^*(x_1, x_2) = \mu \frac{\partial \dot{u}_3^*}{\partial x_1},$$

$$/4.22/ \quad \sigma_{23}^*(x_1, x_2) = \mu \frac{\partial \dot{u}_3^*}{\partial x_2}.$$

Zakładając, że dozwolone jest stosowanie transformacji całkowej Fouriera /3.4/, równanie /4.21/, po wykonaniu na nim tej transformacji, przyjmie postać:

$$/4.23/ \quad \left[ \frac{d^2}{dx_2^2} - (\alpha^2 - v_2^2) \right] \dot{U}_3^*(\alpha, x_2) = 0,$$

gdzie funkcja  $\dot{U}_3^*$  jest transformatą Fouriera amplitudy przemieszczenia  $u_3(x_1, x_2, t)$ .

Przyjmując rozwiązanie równania /4.23/ w postaci:

$$/4.24/ \quad \dot{U}_3^*(\alpha, x_2) = C_1(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_2(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2}$$

transformaty Fouriera amplitud naprężeń  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  opisane będą na podstawie związków /4.22/ następującymi zależnościami:

$$\dot{\Sigma}_{13}^*(\alpha, x_2) = -i\mu\alpha [C_1(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_2(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2}],$$

/4.25/

$$\dot{\Sigma}_{23}^*(\alpha, x_2) = \mu \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} [C_1(\alpha) \operatorname{ch} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2} + C_2(\alpha) \operatorname{sh} x_2 \sqrt{\alpha^2 - v_2^2}].$$

Po wyznaczeniu z odpowiednich warunków brzegowych rozpatrywanego zagadnienia funkcji  $C_j(\alpha)$  oraz po wykonaniu na związkach /4.24/ i /4.25/ odwrotnej transformacji Fouriera /3.5/ otrzymamy ostateczne rozwiązanie interesującego nas problemu.

## 5. STACJONARNE ZAGADNIENIA SZCZELIN W PASMIE SPRĘŻYSTYM. PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

W rozdziale tym podamy rozwiązania pewnych stacjonarnych zagadnień matematycznej teorii szczelin. Rozważane zagadnienia dotyczą jednostajnego i prostoliniowego ruchu późnieskończonej szczeliny pasmowej w pasmie sprężystym /p.5.1 i 5.2/ oraz problemu drgań harmoniczných w pasmie osłabionym późnieskończoną szczeliną /p.5.3 i 5.4/. Drgania te mogą być wymaszone w sposób dynamiczny lub kinematyczny.

Przedstawione tu rozwiązania stanowią mogą podstawę do analizy bardziej złożonych zagadnień: pęknięcia ośrodków sprężysto-kruchoch oraz powstawania pęknięć zmęczeniowych.

### 5.1. Stacjonarny ruch szczeliny w pasmie ze swobodnym brzegiem

Rozważmy nieskończone i jednorodne pasmo sprężyste o szerokości  $2h$ , które jest osłabione w środkowej płaszczyźnie późnieskończoną szczeliną. Przyjmijmy, że brzegi pasma są swobodne od obciążeń, zaś powierzchnie szczeliny obciążone są dwiema jednakowymi lecz przeciwie skierowanymi siłami skupionymi. Rozważać będziemy przypadek, gdy siły te działają w kierunku normalnym lub stycznym do powierzchni szczeliny przyjmując jednocześnie, że punkty zaczepienia tych sił są jednakowo odległe od wierzchołka szczeliny /Rys.11/.

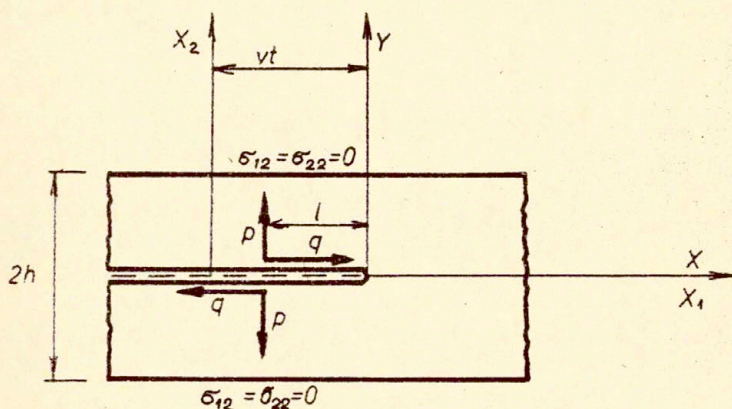
Zakładamy, że szczelina jak i zadane obciążenia poruszają się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$  w płaszczyźnie środkowej pasma. Dodatkowo przyjmujemy, że prędkość poruszania się układu "obciążenie-szczelina" jest mniejsza od prędkości propagacji sprężystej fali powierzchniowej Rayleigha  $V_R$ .

Wykorzystując założenie o prostoliniowym ruchu szczeliny ze stałą prędkością  $v$ , wprowadźmy do rozważań, zdefiniowany zależnością /1.23/, ruchomy układ współrzędnych prostokątnych  $(x,y)$  przyjmując, że początek tego układu znajduje się w wierzchołku szczeliny, /Rys.11/.

Z uwagi na możliwość zastosowania zasady superpozycji, przypadki obciążeń normalnych i stycznych do powierzchni szczeliny



rozważać będziemy oddzielnie. Rozwiązanie tak sformułowanych zagadnień podane zostało w pracy [50], zaś ich wersja statyczna - w pracy [51].



Rys.11

#### 5.1.1. Szczelina z obciążeniem skupionym, normalnym do jej powierzchni

Sformułowane uprzednio zagadnienie ruchu szczeliny, z uwagi na jego symetrię względem płaszczyzny środkowej pasma, redukuje się do problemu nieskończonego pasma sprężystego z mieszanymi warunkami brzegowymi. Warunki te, zapisane w ruchomym układzie współrzędnych prostokątnych  $(x, y)$ , w przypadku obciążeń normalnych do powierzchni szczeliny mają postać:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{12}(x, h) &= \sigma_{22}(x, h) = 0 & \text{dla } |x| < \infty, \\
 \sigma_{12}(x, 0) &= 0 & \text{dla } |x| < \infty, \\
 \sigma_{22}(x, 0) &= -p \delta(x+l) & \text{dla } x < 0, \\
 u_2(x, 0) &= 0 & \text{dla } x > 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.1/}$$

gdzie  $\delta(x)$  jest funkcją Diraca, zaś  $p$  jest stałą intensywnością zadanej siły skupionej.

Po wykonaniu na związkach /5.1/ zespolonej transformacji całkowej Fouriera określonej zależnością /3.4/ otrzymamy następujące związki:

$$\Sigma_{1,2}(\alpha, h) = \Sigma_{2,2}(\alpha, h) = \Sigma_{1,2}(\alpha, 0) = 0,$$

$$/5.2/ \quad \Sigma_{2,2}(\alpha, 0) = \Sigma_{2,2}^-(\alpha) + \Sigma_{2,2}^+(\alpha),$$

$$U_2(\alpha, 0) = U_2^-(\alpha),$$

gdzie zgodnie z zależnością /3.6/:

$$\Sigma_{2,2}^-(\alpha) = \Sigma_{2,2}^-(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \delta_{2,2}(x, 0) e^{i\alpha x} dx,$$

$$/5.3/ \quad \Sigma_{2,2}^+(\alpha) = \Sigma_{2,2}^+(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \delta_{2,2}(x, 0) e^{i\alpha x} dx,$$

$$U_2^-(\alpha) = U_2^-(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u_2(x, 0) e^{i\alpha x} dx.$$

Zakładamy tu, że funkcja  $\Sigma_{2,2}^+(\alpha)$  jest regularna w półpłaszczyźnie  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$  gdzie  $\tau_0 > 0$ , zaś funkcje  $\Sigma_{2,2}^-(\alpha)$  i  $U_2^-(\alpha)$  są regularne w półpłaszczyźnie  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ .

Wykorzystując związki /5.2/ do wyznaczenia występujących w zależnościach /4.8/ nieznanymi funkcji  $C_j(\alpha)$ , otrzymamy następujące równanie funkcyjne, [50].



$$/5.4/ \quad U_2^-(z) = -\frac{\gamma h}{4 \mu \beta_2} H(z) [\Sigma_{22}^+(z) + \Sigma_{22}^-(z)],$$

gdzie

$$H(z) = \frac{(1 - \beta_2^2) \operatorname{ch} z \beta_1 \operatorname{ch} z \beta_2}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{z \beta_1}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{z \beta_2}{2}} \frac{S_1(z)}{z S_1(\frac{z}{2}) S_2(\frac{z}{2})},$$

$$S_1(z) = \operatorname{th} z \beta_2 - \gamma \operatorname{th} z \beta_1,$$

$$/5.5/ \quad S_2(z) = \operatorname{th} z \beta_1 - \gamma \operatorname{th} z \beta_2,$$

$$\Sigma_{22}^-(z) = -\frac{p}{\sqrt{2\pi}} e^{-il^*z},$$

$$\gamma = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1+\beta_2^2)^2}, \quad z = k + is = \alpha h, \quad l^* = l/h.$$

W celu wyznaczenia obszaru regularności równania /5.4/ za-  
uważmy, że funkcja  $H(z)$  jest parzystą funkcją zmiennej zespolo-  
nej  $z = k + is$  oraz jest regularna i nie ma miejsc zerowych w  
pasmach  $\Omega_1: \{-a < \operatorname{Im} z < 0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  lub  $\Omega_2: \{0 < \operatorname{Im} z < a, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  gdzie  $a$  jest pewną dodatnią liczbą rzeczywistą.  
Funkcje  $U_2^-(z)$  i  $\Sigma_{22}^-(z)$  są z założenia regularne w półpłaszc-  
czyźnie  $\{\operatorname{Im} z < 0\}$  zaś funkcja  $\Sigma_{22}^+(z)$  jest regularna w półpłaszc-  
czyźnie  $\{\operatorname{Im} z > -b\}$  gdzie  $b$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą.  
Wynika stąd, że istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista  
 $s_0 = \min(a, b)$ , że wszystkie funkcje występujące w równaniu /5.4/  
są regularne w pasmie  $\Omega: \{-s_0 < \operatorname{Im} z < 0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$ , które  
tym samym jest obszarem określoności równania funkcyjnego /5.4/.

Równanie funkcyjne /5.4/ rozwiążemy metodą Wienera-Hopfa,  
przy czym funkcję  $H(z)$  - ze względu na jej złożoną postać -  
faktoryzować będziemy metodą Koitera, tzn. przedstawimy ją w  
pewnym pasmie  $\Omega_x \subset \Omega$  w postaci:

$$/5.6/ \quad H(z) = \bar{H}(z) H_1(z)$$

żądając jednocześnie, aby funkcje  $\bar{H}(z)$  i  $H(z)$  spełniały warunki /3.37/. Przed przystąpieniem do konstruowania funkcji  $\bar{H}(z)$  zbadać należy zachowanie się funkcji  $H(z)$  na osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$ .

W pracy [50] wykazano, że w przypadku gdy prędkość poruszania się szczeliny  $v$  jest mniejsza od prędkości propagacji powierzchniowej fali Rayleigha  $v_R$ , funkcja  $H(z)$  nie ma miejsc zerowych na osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$ , natomiast ma podwójny biegun w punkcie  $z = 0$  i dwa pojedyncze bieguny w punktach  $z = \pm k_1$ . Punkty  $z = \pm k_1$  są rzeczywistymi rozwiązaniami równania  $S_2(k/2) = 0$ , które jest równaniem opisującym antysymetryczne drgania własne nieskończonego pasma sprężystego o szerokości  $h$ . Wartość pierwiastka  $k_1$  równania  $S_2(k/2) = 0$  jest funkcją prędkości poruszania się szczeliny. Ze wzrostem prędkości  $v$  od zera do prędkości powierzchniowej fali Rayleigha  $v_R$ , wartość pierwiastka  $k_1$  wzrasta monotonicznie od zera do nieskończoności. Badając następnie zachowanie się funkcji  $H(z)$  w pasmie  $\Omega_0 : \{ |\text{Im } z| < \varepsilon_0, |\text{Re } z| < \infty \}$ , ( $\varepsilon_0 \ll a$ ) dla  $z \rightarrow 0$  i  $|z| \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$H(z) \approx - \frac{(1 + \beta_2^2)^2}{\beta_1(1 - \beta_2^2)^2} \frac{1}{z^2} \quad \text{dla } z \rightarrow 0,$$

$$H(z) \approx \frac{1 - \beta_2^2}{\beta_1 - 1} \frac{1}{|z|} \quad \text{dla } |z| \rightarrow \infty.$$

Z uwag tych wynika, że funkcję  $\bar{H}(z)$  można w pasmie  $\Omega_0$  przedstawić w postaci

$$/5.7/ \quad \bar{H}(z) = \frac{1 - \beta_2^2}{\beta_1 - 1} \frac{(z^2 + B^2) \sqrt{z^2 + A^2}}{z^2(z^2 - k_1^2)},$$



gdzie

$$k_1^2 = \frac{3\beta_1(1-\beta_2^2)^2}{2(\gamma-1)} g(v), \quad g(0) = 1,$$

/5.8/

$$AB^2 = \frac{3}{2} (1+\beta_2^2)^2 g(v),$$

przy czym nieznaną funkcję  $g(v)$  należy wyznaczyć z równania  $S_2(k/2) = 0$ .

Przyjęcie funkcji  $\bar{H}(z)$  w postaci /5.7/ oznacza, że spełnione są jednocześnie warunki /3.37/ dotyczące występującej w zależności /5.6/, nieznannej funkcji  $H_1(z)$ . Funkcja  $H_1(z)$  spełnia dodatkowo założenia Tw.5 /p.3.1/ i wobec tego dla każdego z należącego do wnętrza pasma  $\Omega_0: \{-\epsilon_0 < -\epsilon, < \text{Im } z < \epsilon_2 < \epsilon_0, |\text{Re } z| < \infty\}$  można ją przedstawić w postaci /5.18/, gdzie

$$\ln H_1^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\epsilon_1}^{+\infty - i\epsilon_1} \frac{\ln H_1(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

/5.9/

$$\ln H_1^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\epsilon_2}^{+\infty + i\epsilon_2} \frac{\ln H_1(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

przy czym funkcje  $H_1^\pm(z)$  są regularne i nie mają miejsc zerowych odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+ : \{\text{Im } z > -\epsilon_0\}$  i  $\Omega_0^- : \{\text{Im } z < \epsilon_0\}$ .

Ostatecznie po wykorzystaniu zależności /5.6/, /5.7/ i /5.18/ funkcję  $H(z)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_0$ , a tym samym w pasmie  $\Omega_* : \{-\epsilon < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$ , gdzie  $\epsilon = \min(\epsilon_0, \epsilon_0)$ ,

w postaci:

$$/5.10/ \quad H(z) = \frac{1 - \beta_2^2}{\beta - 1} \frac{H^+(z)}{H^-(z)},$$

gdzie

$$H^+(z) = (z + iB)T^+(z)H_1^+(z),$$

$$/5.11/ \quad H^-(z) = \frac{z^2(z^2 - k_1^2)H_1^-(z)}{(z - iB)T^-(z)},$$

$$T^\pm(z) = \sqrt{z \pm iA}.$$

Funkcje  $H^\pm(z)$  nie mają miejsc zerowych i są regularne z wyjątkiem punktu w nieskończoności odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+$  i  $\Omega_*^- : \{\text{Im } z < 0\}$ .

Wykorzystując zależność /5.10/, równanie /5.4/ przyjmie ostatecznie postać:

$$/5.12/ \quad U_2^-(z) = - \frac{h\beta_1(1-\beta_2^2)}{\mu R(v)} \frac{H^+(z)}{H^-(z)} [\Sigma_{22}^+(z) + \Sigma_{22}^-(z)],$$

gdzie funkcja  $R(v)$  określona jest zależnością /1.27/<sub>3</sub>, zaś obszarem regularności tego równania jest pasmo  $\Omega_*$ .

Równanie /5.12/ możemy teraz przedstawić w postaci:

$$- \frac{\mu R(v)}{h\beta_1(1-\beta_2^2)} H^-(z)U_2^-(z) = H^+(z) \Sigma_{22}^+(z) + E(z),$$

gdzie

$$/5.13/ \quad E(z) = H^+(z) \Sigma_{22}^-(z).$$



Funkcja  $E(z)$  jest regularna w pasmie  $\Omega_0$  z wyjątkiem punktu w nieskończoności. Wynika stąd, że bezpośrednie zastosowanie Tw.4 /p.3.1/ w celu przedstawienia funkcji  $E(z)$  w postaci /3.28/ jest niemożliwe. Trudności w przedstawieniu funkcji  $E(z)$  w postaci /3.28/ znikają, jeśli potraktować funkcję  $\Sigma_{22}^-(z)$  jako wartość graniczną transformaty Fouriera pewnej odpowiednio gładkiej funkcji aproksymującej funkcję Diraca. Przyjmując, np. [45], że  $\delta(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta(x; \lambda)$  gdzie  $\delta(x; \lambda) = (\lambda/2)\exp(-|\lambda x|)$  można pokazać, że

$$\Sigma_{22}^-(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Sigma_{22}^-(z; \eta),$$

gdzie

$$\Sigma_{22}^-(z; \eta) = -\frac{\rho}{\sqrt{2\pi}} \frac{\eta^2}{z^2 + \eta^2} e^{-i\eta^* z}.$$

Funkcja  $\Sigma_{22}^-(z; \eta)$  jest regularna w pasmie  $\{|\operatorname{Im} z| < \eta, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$ . Z zależności /5.13/ wynika, że

$$E(z) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} E(z; \eta),$$

gdzie

$$E(z; \eta) = H^+(z) \Sigma_{22}^-(z; \eta).$$

Tak określona funkcja  $E(z; \eta)$  jest dla  $\eta \gg \epsilon_0$  funkcją regularną w pasmie  $\Omega_0$  i w pasmie tym  $|E(z; \eta)| < A|k|^{-1/2}$  dla  $|k| \rightarrow \infty$ . Wobec tego, dla każdego z należącego do pasma  $\{|\operatorname{Im} z| < c < \epsilon_0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$ , funkcję  $E(z)$  można przedstawić w postaci:

$$/5.14/ \quad E(z) = E^+(z) - E^-(z),$$

gdzie

$$/5.15/ \quad E^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \epsilon_0 i c}^{+\infty + \epsilon_0 i c} \frac{E(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

przy czym określone w ten sposób funkcje  $E(z)$  i  $E^{\pm}(z)$  należy traktować jako wartości graniczne funkcji  $E(z; \eta)$  i  $E^{\pm}(z; \eta)$  dla  $\eta \rightarrow \infty$ . Funkcje  $E^{\pm}(z)$  są w myśl Tw.4 /p.3.1/ funkcjami regularnymi odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+$  i  $\Omega_0^-$ .

Stosując procedurę opisaną w p.3.2, rozwiązanie równania /5.4/ opisane będzie ostatecznie następującymi zależnościami:

$$/5.16/ \quad U_2^-(z) = - \frac{h\beta_1(1-\beta_2^2)}{\mu R(v)} \frac{a_0 + a_1 z - E^-(z)}{H^-(z)},$$

$$\Sigma_{22}^+(z) = \frac{a_0 + a_1 z - E^+(z)}{H^+(z)},$$

gdzie  $a_0$  i  $a_1$  są dowolnymi stałymi, zaś funkcje  $U_2^-(z)$  i  $\Sigma_{22}^+(z)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_{*}^{\pm} : \{ \text{Im } z < 0 \}$  i  $\Omega_{*}^{\pm} : \{ \text{Im } z > -\xi \}$ .

Nieznane stałe  $a_0$  i  $a_1$  wyznaczymy z warunku równowagi sił zewnętrznych i momentów względem wierzchołka szczeliny, które w naszym przypadku mają postać:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{22}(x, 0) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x \sigma_{22}(x, 0) dx = 0.$$

Zgodnie z oznaczeniami /5.3/, warunki te są równoważne warunkom:

$$/5.17/ \quad \Sigma_{22}(\alpha) = \Sigma_{22}^-(\alpha) + \Sigma_{22}^+(\alpha) = 0 \quad \text{dla } \alpha = 0,$$

$$\Sigma'_{22}(\alpha) = \Sigma'^{-}_{22}(\alpha) + \Sigma'^{+}_{22}(\alpha) = 0 \quad \text{dla } \alpha = 0,$$

gdzie przecinek oznacza pochodną względem zmiennej  $\alpha$ .

Wykorzystując zależności /5.13/, /5.14/, /5.16/ oraz fakt, że na mocy Tw.6 /p.3.1/,  $H_1^{\pm}(0) = 1$  i  $H^{\pm}(0) = 0$ , z warunków równowagi /5.17/ otrzymamy stałe  $a_0$  i  $a_1$ :



$$/5.18/ \quad a_0 = E^-(0) \quad , \quad a_1 = E^+(0)$$

przy czym funkcja  $E^-(z)$  określona jest związkami /5.15/.

Wykonując na zależnościach /5.16/ odwrotną transformację Fouriera /3.5/, otrzymamy zależności opisujące rozkład przemieszczenia  $u_2$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu. Otrzymane w ten sposób rozwiązanie ma jednak jedynie formalny charakter i z praktycznego punktu widzenia jest ono dla nas mało przydatne. Z drugiej strony, zależności /5.16/ pozwalają, po uprzednim wykorzystaniu Tw.3 /p.3.1/, wyznaczyć w sposób ścisły najbardziej interesującą nas wielkość, a mianowicie współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny.

Wykonując w tym celu odpowiednie przejście graniczne w zależnościach /5.16/ otrzymamy, że dla  $|\alpha| = |z/h| \rightarrow \infty$

$$U_2^-(\alpha) = - \frac{\beta_1(1-\beta_2^2)N}{i\sqrt{2i} \mu R(\nu)} \frac{1}{\alpha\sqrt{\alpha}} \quad ,$$

$$\Sigma_{22}^+(\alpha) = \frac{N}{i\sqrt{2i}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \quad ,$$

gdzie

$$/5.19/ \quad N = i\sqrt{\frac{2i}{h}} a_1 \quad .$$

Stąd, na mocy wzorów /3.10/ i /3.11/ oraz /3.12/ i /3.14/, rozkład przemieszczenia  $u_2(x,0) = u_2(x)$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}(x,0) = \sigma_{22}(x)$  na przedłużeniu szczeliny w otoczeniu jej wierzchołka opisany będzie, zgodnie z zależnościami /1.29/, następującymi związkami:

$$u_2(x) = \frac{2\beta_1(1-\beta_2^2)}{\mu R(\nu)} K_I \sqrt{-\frac{x}{2\pi}} \quad \text{dla } x \rightarrow (-0),$$

$$G_{22}(x) = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{dla } x \rightarrow (+0).$$

Współczynnik intensywności naprężenia  $K_I = \sqrt{2\pi} N$ , na mocy definicji /1.2/ oraz zależności /5.18/ i /5.19/, przyjmie ostatecznie postać:

$$/5.20/ \quad K_I = \sqrt{\frac{i}{\pi h}} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{E(z)}{z^2} dz,$$

gdzie funkcja  $E(z)$  określona jest zależnością /5.13/.

Dla ilustracji otrzymanego rozwiązania wyznaczmy wartości współczynnika intensywności naprężenia w przypadku, gdy stosunek odległości punktu zaczepienia siły skupionej od wierzchołka szczeliny do połowy szerokości pasma dąży do zera lub nieskończoności.

Na początek rozważmy przypadek, gdy  $h \gg 1$ . Zauważmy, że zależność /5.20/ można przedstawić w postaci:

$$/5.21/ \quad K_I = -p \sqrt{\frac{i}{\pi h}} f(l^*),$$

gdzie

$$/5.22/ \quad f(l^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{H^+(z)}{z^2} e^{-il^*z} dz.$$

Funkcję  $f(l^*)$ , określoną dla dodatnich wartości  $l^*$ , można traktować jako odwrotną transformatę Fouriera funkcji  $F^+(z) = H^+(z)/z^2$  regularnej w półpłaszczyźnie  $\{\text{Im } z > 0\}$ , i z zachowania się funkcji  $F^+(z)$  dla  $z \rightarrow \infty$  można, na podstawie Tw.3, /p.3.1/, wyznaczyć wartość funkcji  $f(l^*)$  dla  $l^* \rightarrow 0$ .

Korzystając z faktu, że  $H_1^+(\infty) = 1$ , rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji  $F^+(z)$  dla dużych wartości  $z$  będzie postaci:



$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} \left[ 1 + \frac{i(A+2B)}{2z} \right] + O(z^{-5/2}) \quad \text{dla } z \rightarrow \infty.$$

Wykorzystując wzory /3.12/ i /3.14/ oraz /3.13/ i /3.15/, współczynnik intensywności naprężenia dla małych  $l^*$  /dużych wartości  $h$ /, na mocy związków /5.21/ i /5.22/, opisany będzie zależnością:

$$/5.23/ \quad K_I = p \sqrt{\frac{2}{\pi l}} [1 + (A+2B)l^*] + O[(l^*)^2].$$

W celu wyznaczenia współczynnika intensywności naprężenia  $K_I$  dla małych wartości  $h$ , przedstawmy zależność /2.20/ w postaci:

$$K_I = \frac{2i\sqrt{i\pi}}{\sqrt{h}} [E^{'+}(0) - E'(0)].$$

Wykorzystując związki /5.13/ i /5.15/ otrzymujemy współczynnik  $K_I$ :

$$K_I = pB \sqrt{\frac{2A}{h}} \left( l^* + \frac{2A+B}{2AB} \right) + \frac{2i\sqrt{i\pi}}{\sqrt{h}} E^{'+}(0),$$

gdzie

$$E^{'+}(0) = -\frac{\rho(\gamma-1)}{\sqrt{2\pi}(1-\beta_2^2)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} \frac{H^-(z)H(z)}{z^2} e^{-it^*z} dz.$$

Z ostatniej zależności wynika, że

$$E^{'+}(0) = \frac{\rho(\gamma-1)}{\sqrt{2\pi}(1-\beta_2^2)} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Res} \left[ \frac{H^-(z)H(z)}{z^2} e^{-it^*z} \right]_{z=z_n},$$

gdzie  $z_n$  są biegunami funkcji  $H(z)$  i  $\text{Im } z_n < -c$ .

W przypadku, gdy  $l^* \rightarrow \infty$ , funkcja  $B^{*+}(0)$  wykładniczo maleje do zera i wobec tego współczynnik intensywności naprężenia  $K_I$  dla dużych wartości  $l^*$  /małych wartości  $h$ / opisany będzie wzorem:

$$/5.24/ \quad K_I = pB \sqrt{\frac{2A}{h}} \left( l^* + \frac{2A+B}{2AB} \right) + o(e^{-il^*z_1}),$$

gdzie  $z_1$  jest najbliższym osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$  biegunem funkcji  $H(z)$ .

Wyznaczenie ścisłych wartości współczynnika  $K_I$  dla dowolnych wartości parametru  $l^*$  jest niemożliwe ze względu na nieznaną postać występującej w wyrażeniu /5.20/ funkcji  $H_1^+(z)$ . Przyjmując, że  $H_1^+(z) \equiv 1$ , współczynnik  $K_I$  można przedstawić w zamkniętej postaci, przy czym błąd tak otrzymanego rozwiązania będzie rzędu błędu przybliżenia funkcji  $H(z)$  funkcją  $\bar{H}(z)$ , [47]. Zakładając, że  $H_1^+(z) = 1$ , na mocy zależności /5.20/

$$K_I = pB \sqrt{\frac{2A}{h}} \left( l^* + \frac{2A+B}{2AB} \right) - \frac{p\sqrt{i}}{\pi\sqrt{2h}} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} \frac{(z+iB)\sqrt{z+iA}}{z^2} e^{-il^*z} dz,$$

skąd po wykonaniu całkowania, przybliżone wartości współczynnika intensywności naprężenia dane będą ostatecznie wzorem:

$$/5.25/ \quad K_I = p \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi l}} (1 + Bl^*) e^{-Al^*} + \sqrt{\frac{2A}{h}} \left( \frac{2A+B}{2A} + Bl^* \right) \text{erf}(\sqrt{Al^*}) \right].$$

Wykonując w tej zależności przejście graniczne z  $l^* \rightarrow 0$  lub  $l^* \rightarrow \infty$  otrzymamy wzory /5.23/ i /5.24/.

W pracy [50], funkcja  $\bar{H}(z)$  została określona z dokładnością do jednej stałej  $A = \frac{3}{2}(1 + \beta_2^2)^2 g(v)$ . Rolę stałej  $A$ , w pracy [50], spełnia tutaj iloczyn dwóch stałych  $AB^2 = 3/2(1 + \beta_2^2)^2 g(v)$ . Porównując główne człony rozwiązań /3.5/ i /3.9/ podanych w pracy [50] z odpowiednimi członami rozwiązań /5.23/ i /5.24/ otrzymamy całkowitą zgodność obu rozwiązań.



Przechodząc w zależnościach /5.8/, /5.23/, /5.24/ i /5.25/ do granicy z  $v \rightarrow 0$  otrzymamy współczynnik intensywności naprężenia  $K_I$  dla zagadnienia statycznego. Z zależności /5.8/ wynika, że w tym przypadku stałe A i B muszą być tak dobrane aby  $AB^2 = 6$ .

### 5.1.2. Szczelina z obciążeniem skupionym, stycznym do jej powierzchni

Założmy, że brzegi szczeliny poddane są działaniu dwóch sił skupionych o stałej intensywności  $q$ , działających w płaszczyźnie szczeliny, /Rys.11/.

Zagadnienie to redukuje się do problemu nieskończonego pasma sprężystego z mieszanymi warunkami brzegowymi, które w ruchomym układzie współrzędnych  $(x, y)$  mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(x, h) = \sigma_{22}(x, h) &= 0 & \text{dla } |x| < \infty, \\ \sigma_{22}(x, 0) &= 0 & \text{dla } |x| < \infty, \\ \sigma_{12}(x, 0) &= -q \delta(x+l) & \text{dla } x < 0, \\ u_1(x, 0) &= 0 & \text{dla } x > 0. \end{aligned}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} \Sigma_{12}^-(\alpha) = \Sigma_{12}^-(\alpha, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \sigma_{12}(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \\ \Sigma_{12}^+(\alpha) = \Sigma_{12}^+(\alpha, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sigma_{12}(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \\ U_1^-(\alpha) = U_1^-(\alpha, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u_1(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \end{aligned}$$

i założmy, że funkcja  $\Sigma_{12}^+(\alpha)$  jest regularna w półpłaszczyźnie  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$ , gdzie  $\tau_0 > 0$ , zaś funkcje  $\Sigma_{12}^-(\alpha)$  i  $U_1^-(\alpha)$  są regularne w półpłaszczyźnie  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ . Wykorzystując warunki brzegowe oraz odpowiednie zależności /4.8/, rozwiązanie naszego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania następującego równania funkcyjnego [50]:

$$/5.26/ \quad U_1^-(z) = - \frac{\gamma h}{4 \beta_1} H(z) [\Sigma_{12}^+(z) + \Sigma_{12}^-(z)],$$

gdzie

$$H(z) = \frac{(1-\beta_2^2) \operatorname{ch} z \beta_1 \operatorname{ch} z \beta_2}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{z \beta_1}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{z \beta_2}{2}} \frac{S_2(z)}{z S_1(\frac{z}{2}) S_2(\frac{z}{2})},$$

/5.27/

$$\Sigma_{12}^-(z) = - \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-il^*z}, \quad z = \alpha h, \quad l^* = l/h.$$

Funkcje  $S_1(z)$  i  $S_2(z)$  określone są zależnościami /5.5/2 i /5.5/3, zaś obszarem regularności równania /5.26/ jest pasmo  $\Omega: \{-s_0 < \operatorname{Im} z < 0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  gdzie  $s_0 > 0$ .

W rozważanym przez nas przypadku ( $v < v_n$ ) funkcja  $H(z)$  ma na osi rzeczywistej  $k = \operatorname{Re} z$  dwa miejsca zerowe w punktach  $z = \pm k_1$ , podwójny biegun w punkcie  $z = 0$  i dwa pojedyncze bieguny w punktach  $z = \pm k_2 = \pm 2k_1$ . Punkty  $z = \pm k_1$  są rzeczywistymi rozwiązaniami równania  $S_2(k) = 0$ , zaś punkty  $z = \pm k_2$  rozwiązaniami równania  $S_2(k/2) = 0$ .

Powtarzając przeprowadzone w poprzednim punkcie rozumowanie, funkcję  $\bar{H}(z)$  można, w pasmie  $\Omega_0: \{|\operatorname{Im} z| < \varepsilon_0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon_0 > 0$ , przedstawić w postaci [50]:

$$\bar{H}(z) = \frac{1-\beta_2^2}{\gamma-1} \frac{\sqrt{z^2+A^2}}{z^2} \frac{z^2-k_1^2}{z^2-k_2^2},$$

gdzie

$$/5.28/ \quad A = \frac{\gamma-1}{\gamma\beta_1-\beta_2} \cdot \frac{k_2^2}{k_1^2} = \frac{4(\gamma-1)}{\gamma\beta_1-\beta_2}.$$

Funkcję  $H(z)$  możemy więc przedstawić w pasmie  $\Omega_*: \{-\varepsilon < \operatorname{Im} z < 0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon = \min(s_0, \varepsilon_0)$  w postaci /5.10/, przy czym



$$H^+(z) = T^+(z) H_1^+(z),$$

$$/5.29/ \quad H^-(z) = \frac{z^2(z^2 - k_1^2) H_1^-(z)}{(z^2 - k_2^2) T^-(z)},$$

$$T^\pm(z) = \sqrt{z \pm iA}$$

Funkcje  $H^\pm(z)$  nie mają miejsc zerowych i są regularne z wyjątkiem punktu w nieskończoności odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+ : \{ \text{Im } z > -\varepsilon_0 \}$  i  $\Omega_*^- : \{ \text{Im } z < 0 \}$ , zaś funkcje  $H_1^\pm(z)$  określone są zależnościami /5.9/.

Zależność /5.10/ pozwala przedstawić równanie /5.26/ w postaci:

$$U_1^-(z) = - \frac{h\beta_2(1-\beta_2^2)}{\mu R(v)} \frac{H^+(z)}{H^-(z)} [\Sigma_{12}^+(z) + \Sigma_{12}^-(z)].$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy

$$/5.30/ \quad U_1^-(z) = - \frac{h\beta_2(1-\beta_2^2) [a_0 - E^+(z)]}{\mu R(v) H^-(z)},$$

$$\Sigma_{12}^+(z) = \frac{a_0 - E^+(z)}{H^+(z)},$$

gdzie  $a_0$  jest dowolną stałą, zaś funkcje  $U_1^-(z)$  i  $\Sigma_{12}^+(z)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_*^- : \{ \text{Im } z < 0 \}$  i

$$\Omega_0^+ : \{ \text{Im } z > -\varepsilon \}$$

Występujące we wzorach /5.30/ funkcje  $E^\pm(z)$  określone są zależnościami /5.15/, przy czym  $E(z) = H^+(z) \Sigma_{12}^-(z)$ . Funkcje te należy traktować, tak jak i w poprzednim punkcie, jako wartości graniczne funkcji  $E(z; \eta)$  i  $E^\pm(z; \eta)$  dla  $\eta \rightarrow \infty$ .

Z warunku równowagi sił zewnętrznych ( $\Sigma_{12}(0) = 0$ ) wynika, że  $a_0 = E^-(0)$ .

Stosując opisaną poprzednio procedurę, rozkład przemieszczenia  $u_1(x,0) = u_1(x)$  i naprężenia  $\sigma_{12}(x,0) = \sigma_{12}(x)$  w otoczeniu wierzchołka szczeliny opisany będzie - zgodnie z zależnością /1.33/ - następującymi związkami:

$$u_1(x) = \frac{2\beta_2(1-\beta_2^2)}{\mu R(v)} K_{II} \sqrt{-\frac{x}{2\pi}} \quad \text{dla } x \rightarrow (-0),$$

$$\sigma_{12}(x) = K_{II} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{dla } x \rightarrow (+0).$$

Współczynnik intensywności naprężenia  $K_{II}$  ma postać:

$$/5.31/ \quad K_{II} = \sqrt{\frac{i}{\pi h}} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{E(z)}{z} dz,$$

gdzie  $E(z) = H^+(z)\Sigma_{12}^-(z)$ , zaś funkcje  $H^+(z)$  i  $\Sigma_{12}^-(z)$  określone są zależnościami /5.27/2 i /5.29/4.

Współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dla małych wartości  $l^*$  /dużych wartości  $h$ / wyraża się wzorem

$$/5.32/ \quad K_{II} = q \sqrt{\frac{2}{\pi l}} (1 + Al^*) + O[(l^*)^2],$$

zaś dla dużych wartości  $l^*$  /małych wartości  $h$ / - wzorem:

$$/5.33/ \quad K_{II} = q \sqrt{\frac{2A}{h}} + o(e^{-il^*z_1}),$$

gdzie  $z_1$  jest najbliższym osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$  biegunem funkcji  $H(z)$ .

W celu wyznaczenia przybliżonych wartości współczynnika  $K_{II}$  dla pośrednich wartości parametru  $l^*$  przyjmijmy, że  $H_1^+(z) = 1$



i wówczas na mocy zależności /5.31/ współczynnik  $K_{II}$  dany będzie ostatecznie wzorem:

$$/5.34/ \quad K_{II} = q \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi l}} e^{-At^*} + \sqrt{\frac{2A}{h}} \operatorname{erf}(\sqrt{At^*}) \right].$$

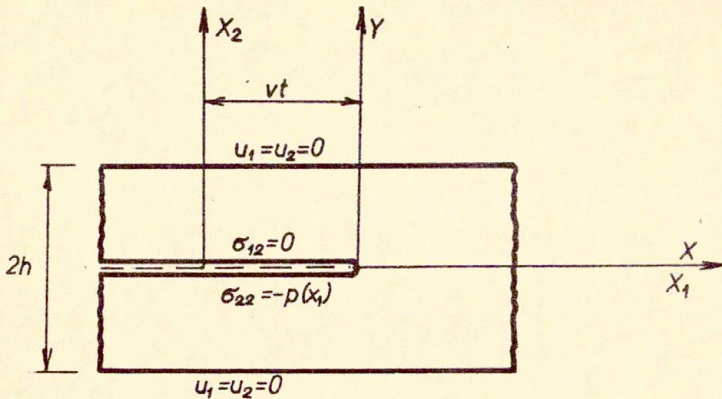
Przechodząc w zależności /5.34/ do granicy z  $t^* \rightarrow 0$  lub  $t^* \rightarrow \infty$  otrzymamy wzory /5.32/ i /5.33/.

Przechodząc w zależnościach /5.28/, /5.32/, /5.33/ i /5.34/ do granicy z  $v \rightarrow 0$ , otrzymamy wzory na współczynnik intensywności naprężenia  $K_{II}$  dla zagadnienia statycznego. Z zależności /5.28/ wynika, że w tym przypadku  $A = 2$  i otrzymane w ten sposób rozwiązania są identyczne z rozwiązaniami podanymi w pracy [51].

## 5.2. Stacjonarny ruch szczeliny w pasmie z utwierdzonym brzegiem

Rozważmy nieskończone i jednorodne pasmo sprężyste o szerokości  $2h$  osłabione w jego środkowej płaszczyźnie półnieskończoną szczeliną. Brzegi pasma są sztywno zamocowane, zaś na powierzchniach szczeliny dane są dowolne obciążenia działające w kierunku normalnym do tych powierzchni. Zakładamy, że szczelina i dane obciążenia poruszają się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$  w płaszczyźnie środkowej pasma /Rys.12/. Dodatkowo przyjmujemy, że prędkość poruszania się układu "szczelina-obciążenia" jest mniejsza od prędkości propagacji fali powierzchniowej Rayleigha  $v_R$ .

Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia, dla przypadku stałego obciążenia powierzchni szczeliny, podane zostało w pracach [52-54], zaś rozwiązanie statycznej wersji tego zagadnienia - w pracach [55,56]. W pracach [52,53] ograniczono się do wyznaczenia współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny. W pracy [54], której wyniki tu podamy, oprócz wyznaczenia współczynnika intensywności naprężenia dla dowolnego rozkładu obciążenia na powierzchniach szczeliny,



Rys.12

określono również rozkład przemieszczenia  $u_2$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu oraz wyznaczono na drodze obliczeń numerycznych rozkład przemieszczeń i naprężeń wewnątrz pasma w przypadku, gdy obciążenia powierzchni szczeliny są stałe.

Wykorzystując symetrię rozważanego zagadnienia względem płaszczyzny środkowej pasma, problem nasz sprowadzamy do zagadnienia nieskończonego pasma sprężystego z mieszanymi warunkami brzegowymi, które w ruchomym układzie współrzędnych  $(x, y)$  mają postać:

$$\begin{aligned}
 u_1(x, h) = u_2(x, h) &= 0 & \text{dla } |x| < \infty, \\
 \sigma_{12}(x, 0) &= 0 & \text{dla } |x| < \infty, \\
 \sigma_{22}(x, 0) &= -p(x) & \text{dla } x < 0, \\
 u_2(x, 0) &= 0 & \text{dla } x > 0.
 \end{aligned}$$

Wykonanie na tych związkach transformacji całkowej Fouriera /3.4/, wyeliminowanie z zależności /4.8/ funkcji  $C_j(\alpha)$  oraz założenie, że określone związkami /5.3/ funkcje  $\Sigma_{22}^+(\alpha)$  oraz  $\Sigma_{22}^-(\alpha)$  i  $U_2^-(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$



oraz  $\{\text{Im } \alpha < \tau_1\}$  i  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ , prowadzi do uzyskania, regularnego w pasmie  $\Omega : \{-s_0 < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$ , równania funkcyjnego postaci /5.4/, w którym [54]:

$$H(z) = (1 - \beta_2^2) \text{ch } \beta_1 z \text{ ch } z \beta_2 \frac{P(z)}{z S(z)},$$

$$/5.35/ \quad P(z) = \text{th } z \beta_2 - \beta_1 \beta_2 \text{th } z \beta_1,$$

$$S(z) = (\gamma + \beta_1 \beta_2) \text{ch } z \beta_1 \text{ch } z \beta_2 - (1 + \gamma \beta_1 \beta_2) \text{sh } z \beta_1 \text{sh } z \beta_2 - \gamma (1 + \beta_2^2).$$

Funkcja  $H(z)$  jest parzystą funkcją zmiennej zespolonej  $z = \alpha h$  oraz jest regularna i nie ma miejsc zerowych w pasmie

$$\Omega_1 : \{|\text{Im } z| < a, |\text{Re } z| < \infty\}.$$

W celu przedstawienia funkcji  $H(z)$  w postaci /5.6/, przyjmijmy, że w pasmie  $\Omega_0 : \{|\text{Im } z| < \varepsilon_0, |\text{Re } z| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon_0 \ll a$ , funkcja  $\bar{H}(z)$  ma postać:

$$\bar{H}(z) = \bar{H}_0(z) \bar{\bar{H}}_0(z),$$

gdzie

$$\bar{H}_0(z) = \frac{1 - \beta_2^2}{\gamma - 1} \frac{1}{\sqrt{z^2 + A^2}},$$

/5.36/

$$\bar{\bar{H}}_0(z) = \frac{z^4 + 2\sqrt{k_0^2} z^2 + k_0^4}{z^4 + k_0^4},$$

$$A = \frac{\beta_1 (1 - \beta_2^2)^2}{(1 - \beta_1^2) R(v)}$$

Wielkości  $k_0$  i  $\psi$  są funkcjami prędkości propagacji szczeliny określonymi w ten sposób, że  $k_0$  jest liczbą rzeczywistą, dla której wyrażenie  $|H(k) - \bar{H}_0(k)|$  osiąga na osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$  wartość maksymalną, zaś  $\psi = [H(k_0) - \bar{H}(k_0)] / \bar{H}(k_0)$ . W przypadku gdy współczynnik Poissona  $\nu = 0.25$ , przybliżone wartości parametrów  $k_0$  i  $\psi$  dane są wzorami:

$$k_0(v) = 2.5 + 5(v/c_2)^4$$

$$\psi(v) = 0.2 - 0.0211(v/c_2)^2 + 0.5345(v/c_2)^4 - 0.2279(v/c_2)^6 + 0.9494(v/c_2)^8.$$

Przebieg zmienności funkcji  $H(k)$  i  $\bar{H}(k)$  określonych na osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$  oraz błąd względny przybliżenia  $\Delta F = [(H - \bar{H})/H] 100\%$  podane są w Tabeli 1.

Tabela 1

z=k	v/c <sub>2</sub> =0.2		v/c <sub>2</sub> =0.4		v/c <sub>2</sub> =0.6		v/c <sub>2</sub> =0.8	
	H(z)	ΔF(%)	H(z)	ΔF(%)	H(z)	ΔF(%)	H(z)	ΔF(%)
0	1.29	0	1.16	0	0.96	0	0.70	0
1	1.27	1.23	1.16	1.32	0.98	1.74	0.74	2.34
2	1.14	-0.81	1.08	-0.21	0.97	0.99	0.82	4.55
3	0.93	-0.83	0.91	-0.24	0.88	-1.03	0.89	3.52
5	0.60	0.38	0.59	1.00	0.61	-0.52	0.79	-2.23
10	0.30	0.15	0.30	0.36	0.31	-0.10	0.42	-2.49
50	0.06	0.01	0.06	0.02	0.06	0.000	0.08	-0.09
	0	0	0	0	0	0	0	0

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$M(z) = M^-(z)M^+(z) = z^4 + 2\psi k_0^2 z^2 + k_0^4,$$

$$L(z) = L^-(z)L^+(z) = z^4 + k_0^4,$$

$$T(z) = T^-(z)T^+(z) = \sqrt{z^2 + A^2},$$

gdzie



$$M^-(z) = (z - z_1^M)(z - z_2^M), \quad L^-(z) = (z - z_1^L)(z - z_2^L),$$

$$/5.37/ \quad M^+(z) = (z - \bar{z}_1^M)(z - \bar{z}_2^M), \quad L^+(z) = (z - \bar{z}_1^L)(z - \bar{z}_2^L),$$

$$T^\pm(z) = \sqrt{z \pm iA}.$$

Miejsca zerowe funkcji  $M^\pm(z)$  określone są wzorami:

$$/5.38/ \quad z_1^M = \frac{k_0}{\sqrt{2}} (\sqrt{1-\vartheta} + i\sqrt{1+\vartheta}), \quad \bar{z}_1^M = \frac{k_0}{\sqrt{2}} (\sqrt{1-\vartheta} - i\sqrt{1+\vartheta}),$$

$$z_2^M = -\frac{k_0}{\sqrt{2}} (\sqrt{1-\vartheta} - i\sqrt{1+\vartheta}), \quad \bar{z}_2^M = -\frac{k_0}{\sqrt{2}} (\sqrt{1-\vartheta} + i\sqrt{1+\vartheta}),$$

zaś miejsca zerowe funkcji  $L^\pm(z)$  - wzorami:

$$z_1^L = \frac{k_0}{\sqrt{2}} (1+i), \quad \bar{z}_1^L = \frac{k_0}{\sqrt{2}} (1-i),$$

/5.39/

$$z_2^L = -\frac{k_0}{\sqrt{2}} (1-i), \quad \bar{z}_2^L = -\frac{k_0}{\sqrt{2}} (1+i).$$

Wykorzystując przytoczone oznaczenia, funkcję  $H(z)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_*: \{-\varepsilon < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon = \min(\varepsilon_0, s_0)$  w postaci /5.10/. Odpowiadające rozważanemu przez nas problemowi równanie funkcyjne jest regularne w pasmie  $\Omega_*$  i przyjmie ostatecznie postać /5.12/, gdzie

$$/5.40/ \quad H^\pm(z) = \frac{M^\pm(z) H_1^\pm(z)}{T^\pm(z) L^\pm(z)},$$

$$/5.40/ \quad H^-(z) = \frac{T(z)L(z)H_4^-(z)}{M^-(z)}$$

Funkcja  $H^+(z)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^+ : \{\text{Im } z > -\xi_0\}$ , funkcja  $H^-(z)$  nie ma miejsc zerowych w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^- : \{\text{Im } z < \xi_0\}$  i jest w niej regularna z wyjątkiem punktu w nieskończoności, zaś funkcje  $H_4^\pm(z)$  określone są zależnościami /5.9/.

Zakładając, że istnieje pasmo  $\Omega_1 : \{-\varepsilon < \text{Im } z < s_*, |\text{Re } z| < \infty\}$ , w którym funkcję  $E(z)$  określoną zależnością /5.13/ można przedstawić w postaci /5.14/, gdzie funkcje  $E^\pm(z)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\{\text{Im } z > -\varepsilon\}$  i  $\{\text{Im } z < s_*\}$ , rozwiązanie równania /5.12/ w rozważanym tutaj przypadku ma postać

$$U_2^-(z) = \frac{h\beta_1(1-\beta_2^2)}{y R(v)} \frac{E^-(z)}{H^-(z)},$$

/5.41/

$$\Sigma_{22}^+(z) = - \frac{E^+(z)}{H^+(z)}$$

Funkcje  $U_2^-(z)$  i  $\Sigma_{22}^+(z)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_*^- : \{\text{Im } z < 0\}$  i  $\Omega_*^+ : \{\text{Im } z > -\varepsilon\}$ .

Przed przystąpieniem do wyznaczania współczynnika intensywności naprężenia zauważmy, że jeśli funkcja  $E(z)$  określona zależnością /5.13/ jest regularna w pasmie  $\Omega_1$  i spełnia założenia Tw.4, /p.3.1/, to funkcje  $E^\pm(z)$  można dla każdego  $z$  należącego do pasma  $\{-\varepsilon < -c < \text{Im } z < d < s_*, |\text{Re } z| < \infty\}$  przedstawić w postaci:

$$E^+(z) = - \frac{1}{z} \left[ B + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} \frac{\xi E(\xi)}{\xi - z} d\xi \right],$$



$$E^-(z) = -\frac{1}{z} \left[ B + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+id}^{+\infty+id} \frac{\xi E(\xi)}{\xi - z} d\xi \right],$$

gdzie

$$/5.42/ \quad B = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} E(z) dz.$$

Przechodząc wobec tego w zależnościach /5.41/ do granicy z  $|\alpha| = |z/h| \rightarrow \infty$  otrzymamy

$$U_2^-(z) = -\frac{\beta_1(1-\beta_2^2)N}{i\sqrt{2i} \mu R(v)} \frac{1}{\alpha \sqrt{\alpha}},$$

$$\Sigma_{22}^+(z) = \frac{N}{i\sqrt{2i}} \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

gdzie

$$/5.43/ \quad N = i\sqrt{\frac{2i}{h}} B,$$

przy czym wielkość B określona jest zależnością /5.42/.

Wykorzystując następnie wzory /3.10/ i /3.11/ oraz /3.12/ i /3.14/, rozkład przemieszczenia  $u_2(x,0) = u_2(x)$  i naprężenia  $\sigma_{22}(x,0) = \sigma_{22}(x)$  w otoczeniu wierzchołka szczeliny opisany będzie, zgodnie z zależnościami /1.29/, następującymi związkami:

$$u_2(x) = \frac{2\beta_1(1-\beta_2^2)}{\mu R(v)} K_1 \sqrt{-\frac{x}{2\pi}} \quad \text{dla } x \rightarrow (-0),$$

$$\sigma_{22}(x) = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{dla } x \rightarrow (+0),$$

przy czym współczynnik intensywności naprężenia  $K_I = \sqrt{2\pi} N$ ,  
na mocy zależności /5.43/ i /5.42/, ma postać:

$$/5.44/ \quad K_I = \sqrt{\frac{i}{\pi h}} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} E(z) dz,$$

gdzie funkcja  $E(z)$  dana jest wzorem /5.13/, zaś funkcje  
 $\Sigma_{22}^-(z)$  i  $H^+(z)$  określone są związkami /5.3/, i /5.40/.

Zależności /5.41/ umożliwiają nam również wyznaczenie występujących w związkach /4.8/ nieznanymi funkcji  $C_j(\alpha)$ , które w naszym przypadku dla  $z = \alpha h$  mają postać:

$$C_1(z) = h C_1^*(z) U_2^-(z), \quad C_2(z) = h C_2^*(z) U_2^-(z),$$

$$C_3(z) = -ih C_3^*(z) U_2^-(z), \quad C_4(z) = -ih C_4^*(z) U_2^-(z),$$

gdzie

$$C_1^*(z) = -\frac{1 + \beta_2^2}{\beta_1(1 - \beta_2^2)} \frac{1}{z}, \quad C_4^*(z) = \frac{2}{1 - \beta_2^2} \frac{1}{z},$$

$$/5.45/ \quad C_2^*(z) = -\frac{2\beta_2}{1 - \beta_2^2} \frac{1}{z D(z)} \left[ (1 + \beta_2^2) \operatorname{ch} z\beta_1 - 2 \operatorname{ch} z\beta_2 + \frac{2(1 - \beta_2^2) \operatorname{sh} z\beta_2}{\beta_1 z H(z)} \right],$$

$$C_3^*(z) = \frac{1 + \beta_2^2}{1 - \beta_2^2} \frac{1}{z D(z)} \left[ (1 + \beta_2^2) \operatorname{ch} z\beta_1 - 2 \operatorname{ch} z\beta_2 + \frac{(1 - \beta_2^4) \operatorname{sh} z\beta_1}{z H(z)} \right],$$

$$D(z) = (1 + \beta_2^2) \operatorname{sh} z\beta_2 - 2\beta_1\beta_2 \operatorname{sh} z\beta_1,$$



zaś funkcja  $H(z)$  określona jest zależnościami /5.36/.  
 Podstawiając  $C_j(z)$  do związków /4.8/ i wykonując na tych związkach odwrotną transformację całkową Fouriera /3.5/, rozkład przemieszczeń i naprężeń w dowolnym punkcie pasma, po uprzednim wprowadzeniu bezwymiarowych zmiennych  $\xi = x/h$  i  $\eta = y/h$ , opisany będzie zależnościami:

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{i}{h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} Z_1(z, \eta) U_2^-(z) e^{-i\xi z} dz,$$

$$/5.46/ \quad u_2(\xi, \eta) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} Z_2(z, \eta) U_2^-(z) e^{-i\xi z} dz,$$

$$\sigma_{11}(\xi, \eta) = \frac{U}{h^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} Z_{11}(z, \eta) U_2^-(z) e^{-i\xi z} dz,$$

$$\sigma_{12}(\xi, \eta) = \frac{iU}{h^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} Z_{12}(z, \eta) U_2^-(z) e^{-i\xi z} dz,$$

$$\sigma_{22}(\xi, \eta) = \frac{U}{h^2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} Z_{22}(z, \eta) U_2^-(z) e^{-i\xi z} dz,$$

gdzie

$$Z_1(z, \eta) = -z \{ C_1^*(z) \operatorname{sh} z\beta_1\eta + C_2^*(z) \operatorname{ch} z\beta_1\eta + \\ + \beta_2 [ C_3^*(z) \operatorname{ch} z\beta_2\eta + C_4^*(z) \operatorname{sh} z\beta_2\eta ] \},$$

$$Z_2(z, \eta) = z \{ \beta_1 [ C_1^*(z) \operatorname{ch} z\beta_1\eta + C_2^*(z) \operatorname{sh} z\beta_1\eta ] + \\ + C_3^*(z) \operatorname{sh} z\beta_2\eta + C_4^*(z) \operatorname{ch} z\beta_2\eta \},$$

/5.47/

$$Z_{11}(z, \eta) = -z^2 \{ (1 + 2\beta_1^2 - \beta_2^2) [ C_1^*(z) \operatorname{sh} z\beta_1\eta + C_2^*(z) \times \\ \times \operatorname{ch} z\beta_2\eta ] + 2\beta_2 [ C_3^*(z) \operatorname{ch} z\beta_2\eta + C_4^*(z) \operatorname{sh} z\beta_2\eta ] \},$$

$$Z_{12}(z, \eta) = -z^2 \{ 2\beta_1 [ C_1^*(z) \operatorname{ch} z\beta_1\eta + C_2^*(z) \operatorname{sh} z\beta_1\eta ] + \\ + (1 + \beta_2^2) [ C_3^*(z) \operatorname{sh} z\beta_2\eta + C_4^*(z) \operatorname{ch} z\beta_2\eta ] \},$$

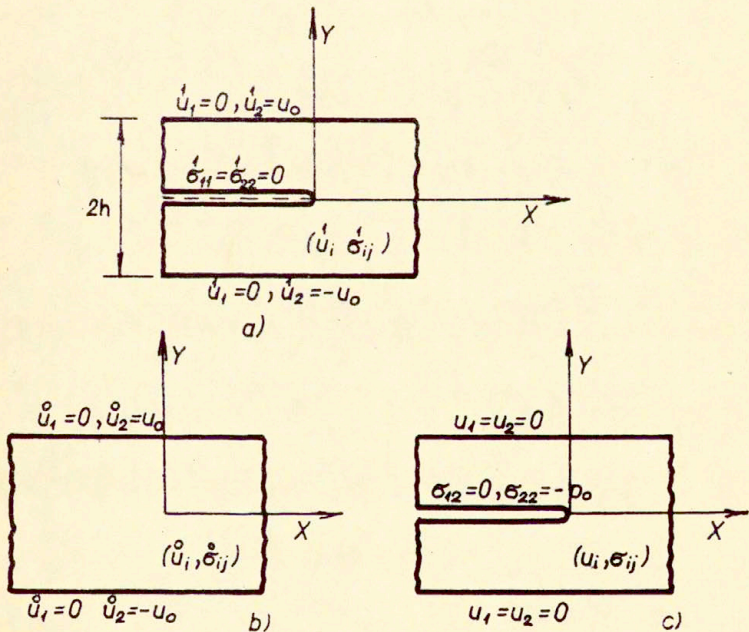
$$Z_{22}(z, \eta) = z^2 \{ (1 + \beta_2^2) [ C_1^*(z) \operatorname{sh} z\beta_1\eta + C_2^*(z) \operatorname{ch} z\beta_1\eta ] + \\ + 2\beta_2 [ C_3^*(z) \operatorname{ch} z\beta_2\eta + C_4^*(z) \operatorname{sh} z\beta_2\eta ] \},$$

zaś funkcje  $C_j^*(z)$  określone są związkami /5.45/.



5.2.1. Przykład

Otrzymane rezultaty zilustrujemy na przykładzie zagadnienia będącego przedmiotem rozważań w pracach [52-54]. Rozważmy mianowicie zagadnienie nieskończonego pasma sprężystego o szerokości  $2h$  osłabionego półnieskończoną szczeliną, której powierzchnie swobodne są od obciążeń. Zakładamy, że na brzegach pasma dane są przemieszczenia, przy czym przemieszczenia w kierunku poziomym znikają, zaś przemieszczenia w kierunku normalnym do brzegów pasma są stałe, równe co do bezwzględnej wartości lecz przeciwnie skierowane na górnym i dolnym brzegu pasma /Rys.13a/. Dodatkowo zakładamy, że szczelina porusza się ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$  w płaszczyźnie środkowej pasma oraz, że prędkość poruszania się szczeliny jest mniejsza od prędkości propagacji sprężystej fali powierzchniowej Rayleigha.



Rys.13

Wykorzystując zasadę superpozycji, rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia możemy przedstawić w ruchomym układzie współrzędnych  $(x,y)$  jako sumę elementarnego rozwiązania dla pasma bez szczeliny /Rys.13b/ i dla pasma ze szczeliną /Rys. 13c/.

Rozkład przemieszczeń i naprężeń w zagadnieniu przedstawianym na Rys.13b opisany jest zależnościami:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{u}_1(x,y) &= 0, & \overset{\circ}{u}_2(x,y) &= \frac{u_0 y}{h}, \\ /5.48/ \quad \overset{\circ}{\sigma}_{11}(x,y) &= \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \frac{u_0}{h}, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{12}(x,y) &= 0, \\ \overset{\circ}{\sigma}_{22}(x,y) &= \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{u_0}{h}. \end{aligned}$$

W zagadnieniu przedstawionym na Rys.13c, brzegi pasma są utwierdzone, a na powierzchniach szczeliny dane jest działające w kierunku normalnym do tych powierzchni, stałe obciążenie

$$/5.49/ \quad p_0 = \sigma_{22}(x,0) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{u_0}{h}.$$

#### 5.2.1a. Współczynnik intensywności naprężenia

Wykorzystując zależności /5.3/ oraz fakt, że w naszym przypadku  $p(x) = p_0$ , funkcja  $E(z)$ , określona zależnością /5.13/ przyjmie postać:

$$/5.50/ \quad E(z) = \frac{ih p_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{H^*(z)}{z},$$

gdzie funkcja  $H^*(z)$  dana jest wzorem /5.40/.



Tak określona funkcja  $E(z)$  jest regularna w pasmie

$\{-\varepsilon_0 < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$  i spełnia w nim warunki umożliwiające przedstawienie jej w postaci /5.14/ co oznacza, że w rozważanym przez nas przypadku można korzystać z rozwiązania /5.41/. Wykorzystując wobec tego zależność /5.44/ i /5.49/ oraz fakt, że  $H_1^+(0) = 1$ , ściśle wartości dynamicznego współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dane będą wzorem, [54]:

$$/5.51/ \quad K_I = 2\mu u_0 \sqrt{\frac{(1-\nu) R(\nu)}{h\beta_1(1-2\nu)(1-\beta_2^2)}} ,$$

zaś w przypadku statycznym ( $\nu \rightarrow 0$ ):

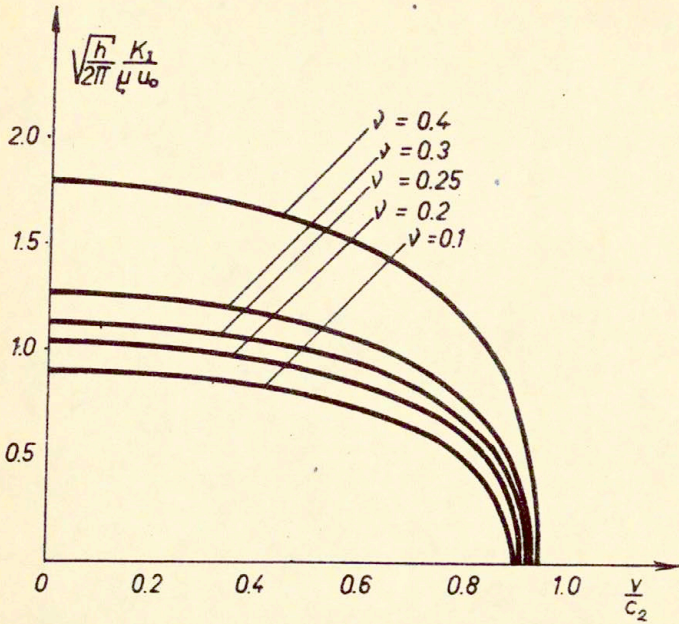
$$K_I^s = \frac{2\mu u_0}{\sqrt{h(1-2\nu)}} .$$

Z zależności /5.51/ wynika, że w rozważanym przez nas przykładzie, ze wzrostem prędkości poruszania się szczeliny  $v$  lub ze wzrostem szerokości pasma  $h$ , współczynnik intensywności naprężenia maleje i dla prędkości szczeliny równej prędkości propagacji sprężystej fali Rayleigha współczynnik ten znika. Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia jako funkcji prędkości propagacji szczeliny dla różnych wartości współczynnika Poissona pokazany jest na Rys.14.

#### 5.2.1b. Przemieszczenie $u_2$ i naprężenie $\sigma_{22}$ w płaszczyźnie szczeliny

Przystępując do wyznaczania rozkładu przemieszczenia  $u_2$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu w zagadnieniu przedstawionym na Rys.13c, należy uprzednio wyznaczyć funkcje  $E^\pm(z)$ .

W rozważanym przykładzie wygodniej jest nie stosować wzorów /5.15/ gdyż funkcje  $E^\pm(z)$  można wyznaczyć w sposób elementarny. Na mocy zależności /5.50/, funkcję  $E(z)$  możemy przedsta-



Rys.14

wić w postaci:

$$/5.52/ \quad E(z) = \frac{ihp_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z} [H^+(z) - H^+(0)] + \frac{ihp_0 H^+(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z}$$

i stąd

$$E^+(z) = \frac{ihp_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z} [H^+(z) - H^-(0)],$$

/5.53/

$$E^-(z) = - \frac{ihp_0 H^+(0)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z},$$



przy czym funkcje  $E^{\pm}(z)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_0^+$  i  $\Omega_*^-$ .

Na mocy zależności /5.49/, związki /5.41/ przyjmą ostatecznie postać:

$$U_2^-(z) = \frac{h u_0 \sqrt{A'}}{i \sqrt{2\pi i}} \frac{1}{z H^-(z)},$$

/5.54/

$$\Sigma_{22}^+(z) = \frac{h p_0}{i \sqrt{2\pi}} \frac{1}{z} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{i A'} H^+(z)} \right].$$

Po wykonaniu na tych związkach odwrotnej transformacji całkowej Fouriera /3.5/, względnie po wykorzystaniu odpowiednich zależności /5.46/, przybliżony rozkład przemieszczenia  $u_2$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu - po uprzednim przyjęciu, że  $H_1(z) \equiv 1$  - opisany będzie zależnościami:

$$u_2(\xi, 0) = u_0 \sqrt{-i A'} \{ R(\xi; 0) - i \alpha_1 [R(\xi; z_1^+) - R(\xi; z_2^+)] \}$$

dla  $\xi < 0$ ,

/5.55/

$$\sigma_{22}(\xi, 0) = - \frac{p_0}{\sqrt{i A'}} \{ Q_0(\xi) - i \alpha_2 [Q(\xi; \bar{z}_1^m) - Q(\xi; \bar{z}_2^m)] \}$$

dla  $\xi > 0$ ,

gdzie wielkości  $\bar{z}_j^m$  i  $z_j^+$  dane są zależnościami /5.38/ i /5.39/,

$$\alpha_1 = \sqrt{1 + \psi} - 1, \quad \alpha_2 = \alpha_1 / \sqrt{1 - \psi},$$

zaś funkcje  $R(\xi; z_j)$ ,  $Q(\xi; z_j)$  i  $Q_0(\xi)$  mają postać

$$Q(\xi; z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} \frac{\sqrt{z+iA}}{z-z_j} e^{-i\xi z} dz = -\sqrt{i} \left\{ \frac{e^{-A\xi}}{\sqrt{\pi\xi}} + \sqrt{A-iz_j} e^{-iz_j\xi} \operatorname{erf}[\sqrt{\xi(A-iz_j)}] \right\}$$

dla  $\xi > 0$ ,

$$/5.57/ \quad Q_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} \frac{\sqrt{z+iA}}{z} e^{-i\xi z} dz = -\sqrt{i} \left[ \frac{e^{-A\xi}}{\sqrt{\pi\xi}} - \sqrt{A} \operatorname{erfc}(\sqrt{A\xi}) \right] \quad \text{dla } \xi > 0,$$

$$R(\xi; z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} \frac{e^{-i\xi z}}{(z-z_j)\sqrt{z-iA}} dz = \frac{e^{-i\xi z_j}}{\sqrt{-i} \sqrt{A+iz_j}} \times$$

$\times \operatorname{erf}[\sqrt{-\xi(A+iz_j)}] \quad \text{dla } \xi < 0.$

Wykorzystując zależności /5.48/, /5.55/ i /5.57/, przybliżony rozkład przemieszczenia  $\dot{u}_2$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu w naszym zagadnieniu wyjściowym /Rys.13a/, opisany będzie ostatecznie zależnościami:



$$\dot{U}_2(\xi, 0) = \begin{cases} u_0 [\operatorname{erf}(\sqrt{-A\xi}) + b_1(\xi; A)] & \text{dla } \xi < 0 \\ 0 & \text{dla } \xi > 0, \end{cases}$$

/5.58/

$$\dot{U}_{22}(\xi, 0) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \xi < 0, \\ \frac{p_0}{\sqrt{A}} \left[ \frac{e^{-A\xi}}{\sqrt{\pi\xi}} + A \operatorname{erf}(\sqrt{A\xi}) + b_2(\xi; A) \right] & \text{dla } \xi > 0, \end{cases}$$

gdzie

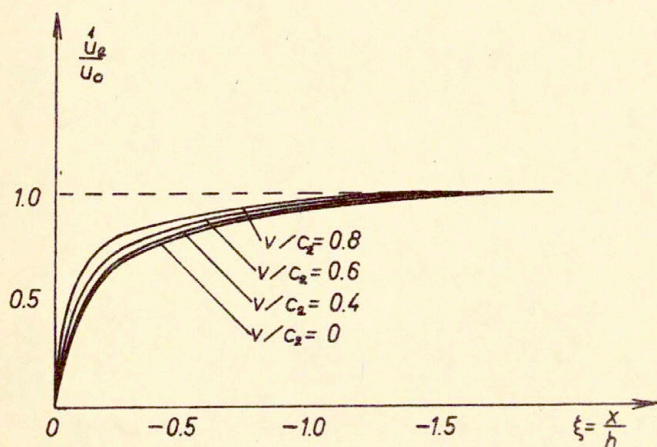
$$b_1(\xi; A) = i\alpha_1 \sqrt{A} \left\{ \frac{e^{-iz_1^L \xi}}{\sqrt{A + iz_1^L}} \operatorname{erf}[\sqrt{-\xi(A + iz_1^L)}] - \frac{e^{-iz_2^L \xi}}{\sqrt{A + iz_2^L}} \operatorname{erf}[\sqrt{-\xi(A + iz_2^L)}] \right\},$$

/5.59/

$$b_2(\xi; A) = i\alpha_2 \left\{ \sqrt{A - iz_1^M} e^{-iz_1^M \xi} \operatorname{erf}[\sqrt{\xi(A - iz_1^M)}] - \sqrt{A - iz_2^M} e^{-iz_2^M \xi} \operatorname{erf}[\sqrt{\xi(A - iz_2^M)}] \right\}.$$

zaś wielkości  $A$  i  $p_0$  dane są związkami /5.37/ i /5.43/.

Przebieg zmienności przemieszczenia  $\dot{u}_2(\xi, 0)$  dla różnych wartości prędkości propagacji szczeliny i ustalonej wartości współczynnika Poissona  $\nu = 0.25$  pokazany jest na Rys.15, zaś przebieg zmienności naprężenia  $\sigma_{22}(\xi, 0)$  dla prędkości propagacji szczeliny  $\nu = 0.8c_2$  i  $\nu = 0.25$  pokazany jest na Rys.18.



Rys.15

### 5.2.1c. Przemieszczenia i naprężenia wewnątrz pasma

Przyjmując  $H_1(z) \equiv 1$  oraz podstawiając wyrażenie /5.54/, do zależności /5.46/ wyznaczamy przybliżony rozkład przemieszczeń  $u_i$  i naprężeń  $\sigma_{ij}$  w dowolnym punkcie pasma w zagadnieniu przedstawionym na Rys.13c.

Wyznaczenie na drodze analitycznej całek występujących w zależnościach /5.46/ jest ze względu na skomplikowaną postać wyrażeń podcałkowych niemożliwe. Całki te wyznaczymy numerycznie, przy czym całkowanie przeprowadzimy wzdłuż osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$ .



Przechodząc we wzorach /5.46/ do granicy  $\text{Im } z \rightarrow (-0)$ , zauważmy że funkcje  $Z_i(k, \eta)$  i  $Z_{ij}(k, \eta)$ , określone zależnościami /5.47/ są rzeczywistymi funkcjami zmiennej rzeczywistej  $k$  oraz nie mają punktów osobliwych na osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$ . Z zależności /5.54/, wynika, że wyrażenie

$$U_2^-(z) e^{-i\xi z} = \frac{h u_0 \sqrt{A}}{i\sqrt{2\pi i}} \frac{e^{-i\xi z}}{z H^-(z)}$$

jest przy przejściu do granicy  $\text{Im } z \rightarrow (-0)$ , zespoloną funkcją zmiennej rzeczywistej  $k$  i posiada osobliwość w punkcie  $k = 0$ . Wykorzystując fakt, że [57]:

$$\lim_{s \rightarrow (-0)} \frac{1}{z} = \frac{1}{k - i0} = \frac{1}{k} + i\pi \delta(k),$$

gdzie  $\delta(k)$  jest funkcją Diraca, wartość graniczną wyrażenia  $U_2^-(z) \exp(-i\xi z)$  dla  $\text{Im } z \rightarrow (-0)$  można przedstawić w postaci:

$$/5.60/ \quad U_2^-(k) e^{-i\xi k} = \frac{h u_0}{\sqrt{2\pi i}} [X_0(k; A) \delta(k) + X(k; A) - iY(k; A)],$$

gdzie

$$X_0(k; A) = \frac{\pi \sqrt{A} e^{-i\xi k}}{\sqrt{A + ik}} \frac{M^-(k)}{L^-(k)},$$

$$X(k; A) - iY(k; A) = -\frac{i\sqrt{A} e^{-i\xi k}}{\sqrt{A + ik}} \frac{M^-(k)}{L^-(k)} \frac{1}{k},$$

/5.61/

$$X(k; A) = f(k; A) \cos k\xi + g(k; A) \sin k\xi,$$

$$Y(k; A) = f(k; A) \sin k\xi - g(k; A) \cos k\xi,$$

$$f(k;A) = h(k;A)[(\sqrt{\xi+k} - \sqrt{\xi-k})G(k) + (\sqrt{\xi+k} + \sqrt{\xi-k})S(k)],$$

$$g(k;A) = h(k;A)[(\sqrt{\xi+k} + \sqrt{\xi-k})G(k) - (\sqrt{\xi+k} - \sqrt{\xi-k})S(k)],$$

$$15.61/ \quad h(k;A) = - \frac{\sqrt{A}}{2\xi(k^2 + k_0^2)},$$

$$G(k) = \frac{1}{k} [(k^2 - k_0^2)^2 + 2k_0^2 k^2 \sqrt{1+\psi}],$$

$$S(k) = \alpha k \sqrt{2}(k^2 - k_0^2),$$

$$\xi = \xi(k;A) = \sqrt{k^2 + A^2}.$$

Przechodząc w wyrażeniach /5.46/ do granicy z  $\text{Im } z \rightarrow (-0)$ , wykorzystując zależność /5.60/ i fakt, że  $X(k) = X(-k)$  i  $Y(k) = -Y(-k)$  oraz dodając do siebie wyrażenia /5.46/ i /5.48/, otrzymujemy przybliżony rozkład przemieszczeń  $\dot{u}_1(\xi, \eta)$  i naprężeń  $\dot{\epsilon}_{ij}(\xi, \eta)$  w zagadnieniu wyjściowym /Rys.13a/:

$$15.62/ \quad \dot{u}_1(\xi, \eta) = \frac{U_0}{2\pi} \int_0^{\infty} Z_1(k, \eta) Y(k;A) dk,$$

$$\dot{u}_2(\xi, \eta) = \frac{U_0}{2\pi} [\pi(1+\eta) + \int_0^{\infty} Z_2(k, \eta) X(k;A) dk],$$



$$\sigma_{11}^1(\xi, \eta) = \frac{\mu u_0}{2\pi h} \left[ \frac{2\pi\nu}{1-2\nu} + \int_0^\infty Z_{11}(k, \eta) X(k, A) dk \right],$$

/5.62/

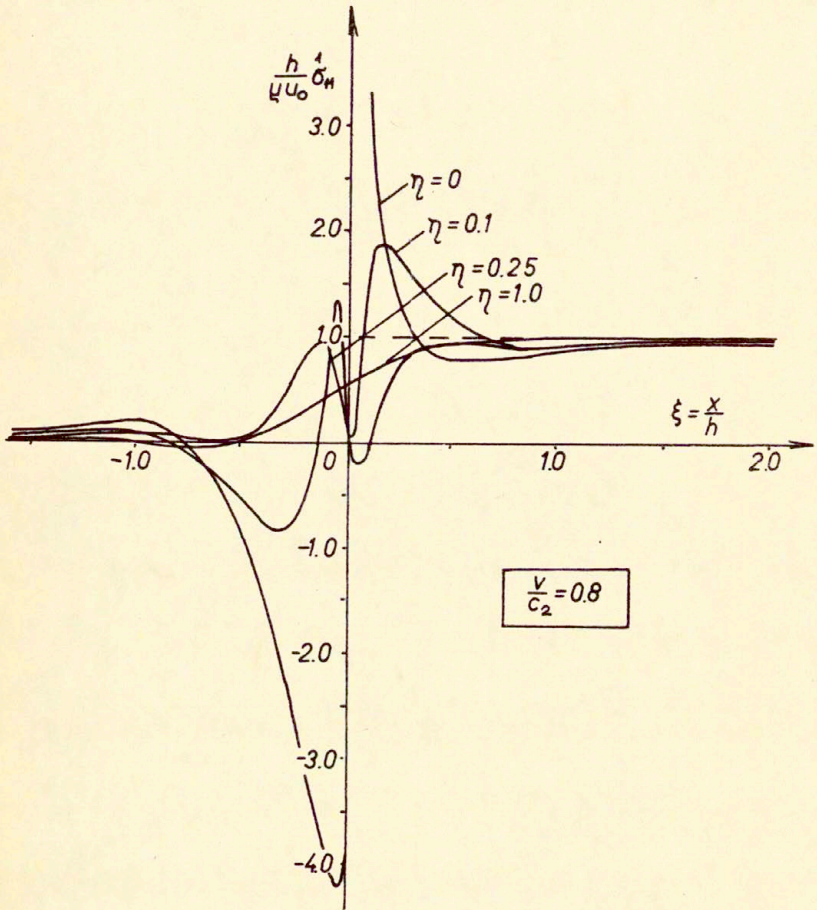
$$\sigma_{12}^1(\xi, \eta) = \frac{\mu u_0}{2\pi h} \int_0^\infty Z_{12}(k, \eta) Y(k, A) dk,$$

$$\sigma_{22}^1(\xi, \eta) = \frac{\mu u_0}{2\pi h} \left[ \frac{2\pi(1-\nu)}{1-2\nu} + \int_0^\infty Z_{22}(k, \eta) X(k, A) dk \right],$$

gdzie funkcje  $Z_i$ ,  $Z_{ij}$ ,  $X$  i  $Y$  określone są odpowiednio związkami /5.47/ i /5.61/.

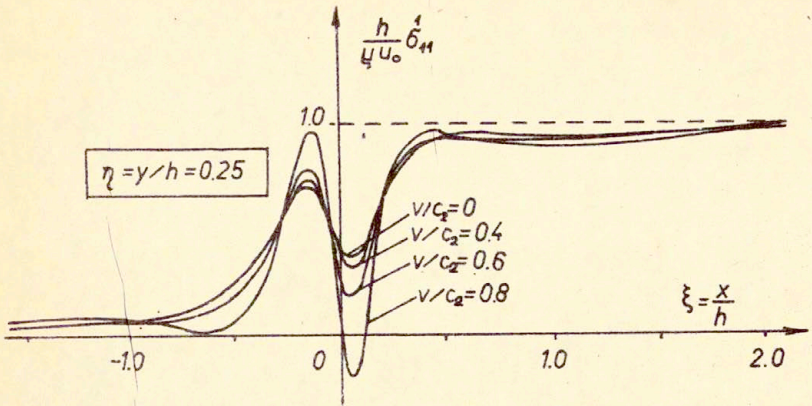
Przechodząc w zależnościach /5.47/ do granicy z  $\nu \rightarrow 0$  oraz zastępując we wzorach /5.58/ i /5.62/ wielkość  $A$  wielkością  $A_s = 2(1-\nu)^2/(1-2\nu)$  otrzymamy rozkład przemieszczeń i naprężeń w statycznej wersji rozważanego przykładu.

Przebieg zmienności naprężeń  $\sigma_{ij}^1$  określonych związkami /5.62/ w różnych przekrojach podłużnych pasma przy ustalonej prędkości propagacji szczeliny w przypadku gdy  $\nu = 0.25$  pokazany jest na Rys.16, 18 i 20. Natomiast przebieg zmienności naprężeń  $\sigma_{ij}^1$  w przypadku ustalonego przekroju pasma dla różnych prędkości propagacji szczeliny i dla  $\nu = 0.25$  pokazany jest na Rys.17, 19 i 21.

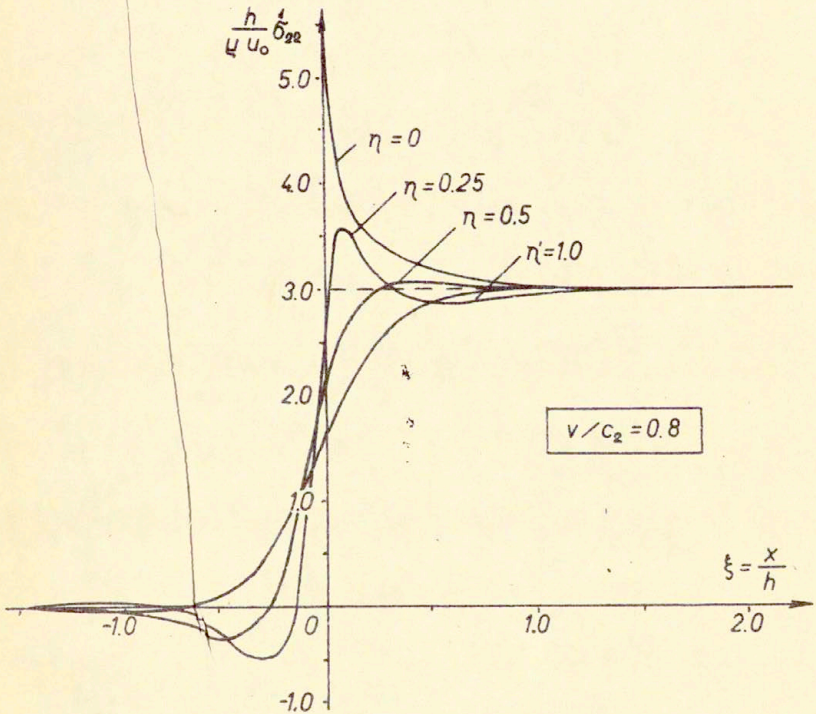


Rys.16

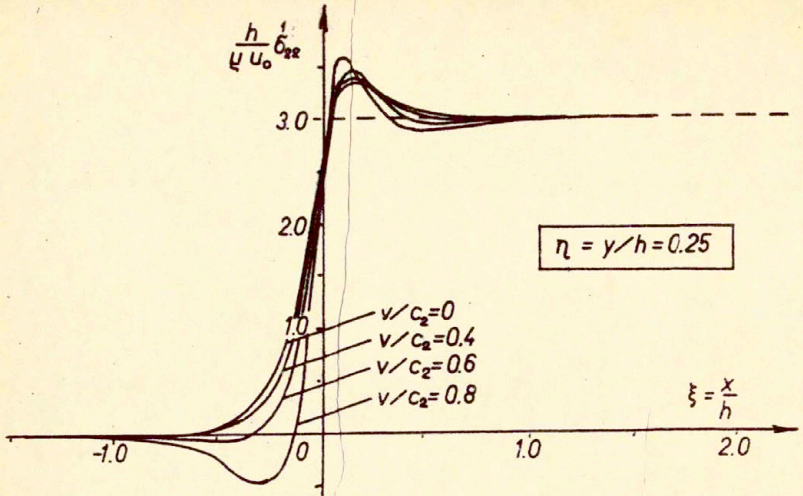




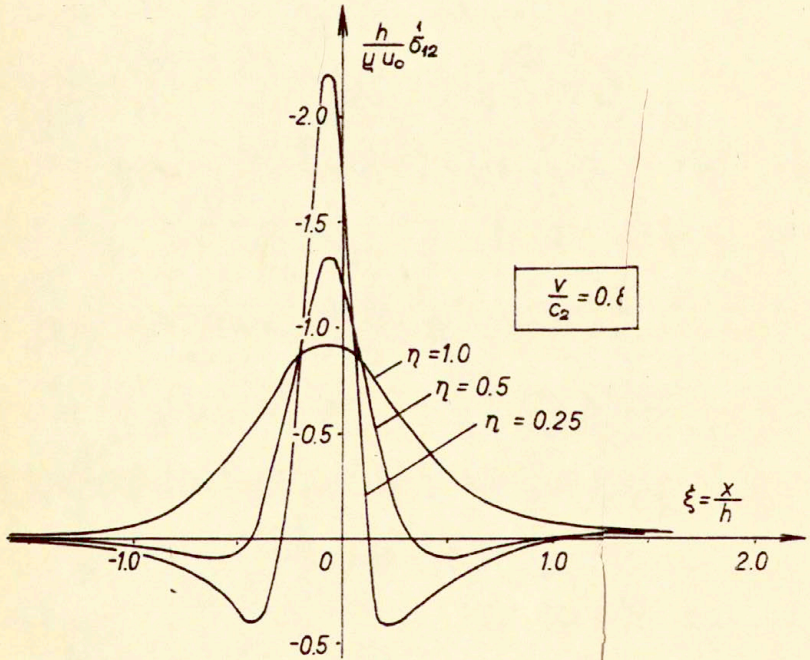
Rys. 17



Rys. 18

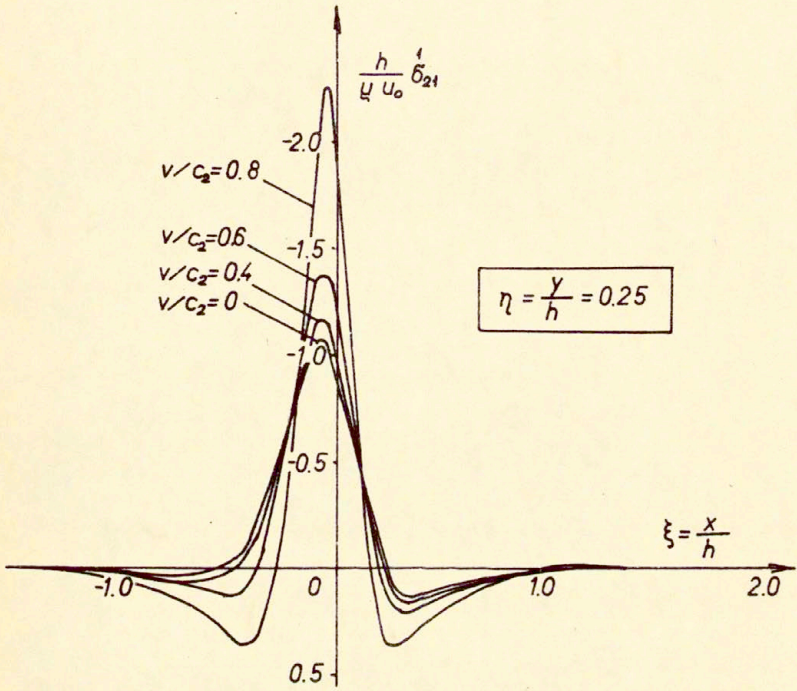


Rys. 19



Rys. 20

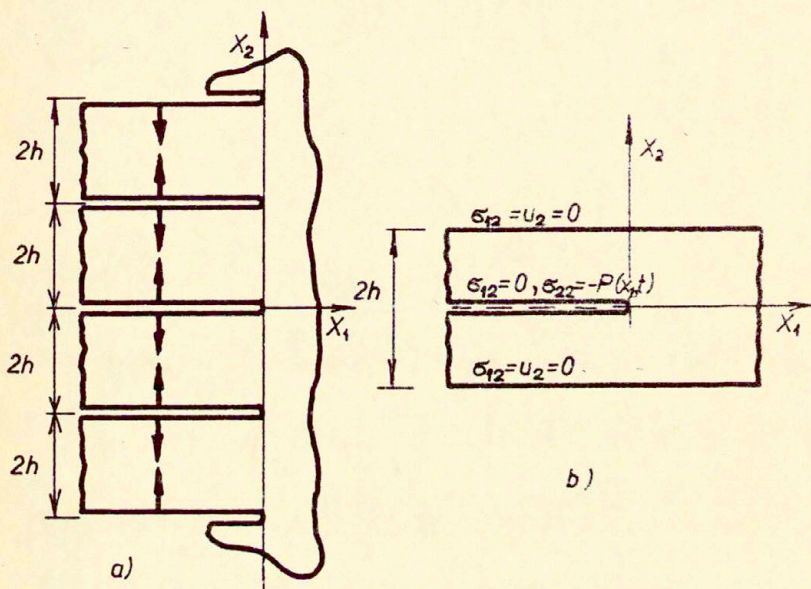




Rys. 21

### 5.3. Drgania harmoniczne w ośrodku sprężystym ze szczelinami

Rozważmy nieograniczony i jednorodny ośrodek sprężysty osłabiony nieskończoną liczbą prostoliniowych i równooddalonych od siebie półnieskończonych szczelin. Zakładamy, że na powierzchniach każdej szczeliny dane są zmieniające się w sposób harmoniczny w czasie, jednakowe i samorzównoważone obciążenia działające w kierunku normalnym do powierzchni szczeliny (Rys. 22a). Rozwiązanie tego zagadnienia zostało podane w pracy [58].



Rys.22

Zakładając, że dane na powierzchniach szczelin obciążenie ma postać:

$$15.63/ \quad P(x_1, t) = p_0(x_1) + p_1(x_1) \cos \omega t,$$



gdzie  $|p_0(x_1)| > |p_1(x_1)|$  i  $\omega$  jest ustaloną częstotliwością drgań harmoniczných, rozważane przez nas zagadnienie rozdzielimy na zagadnienie statyczne i dynamiczne. Zgodnie z tą procedurą, ostateczne rozwiązanie opisujące rozkład przemieszczeń i naprężeń w rozważanym zagadnieniu przyjmie postać:

$$u_i(x_1, x_2, t) = u_i^s(x_1, x_2) + \dot{u}_i^*(x_1, x_2) \cos \omega t,$$

/5.64/

$$\sigma_{ij}(x_1, x_2, t) = \sigma_{ij}^s(x_1, x_2) + \dot{\sigma}_{ij}^*(x_1, x_2) \cos \omega t,$$

gdzie wielkości oznaczone indeksem s określają statyczną część rozwiązania zagadnienia.

W dalszych rozważaniach zajmować się będziemy jedynie dynamiczną częścią rozwiązania naszego zagadnienia, zaś rozwiązanie statycznej wersji wyznaczać będziemy z odpowiedniego rozwiązania zagadnienia dynamicznego przechodząc w nim do granicy z  $\omega \rightarrow 0$ .

Układ przedstawiony schematycznie na Rys.22a sprowadza się do nieskończonego pasma sprężystego o szerokości  $2h$  osłabionego w jego środkowej płaszczyźnie późnieskończoną szczeliną /Rys. 22b/. Rozważając dynamiczną część zagadnienia i wykorzystując symetrię względem płaszczyzny środkowej pasma, zagadnienie nasze sprowadza się ostatecznie do problemu nieskończonego pasma sprężystego z mieszanyimi warunkami brzegowymi, które zgodnie z transformacją /4.9/ mają postać:

$$\dot{u}_2^*(x_1, h) = \dot{\sigma}_{12}^*(x_1, h) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\dot{\sigma}_{12}^*(x_1, 0) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\dot{\sigma}_{22}^*(x_1, 0) = -p_1(x_1) \quad \text{dla } x < 0,$$

$$\dot{u}_2^*(x_1, 0) = 0 \quad \text{dla } x > 0.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\tilde{\Sigma}_{22}^{*-}(\alpha) = \tilde{\Sigma}_{22}^{*-}(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \tilde{\sigma}_{22}^*(x_1, 0) e^{i\alpha x_1} dx_1,$$

15.65/

$$\tilde{\Sigma}_{22}^{*+}(\alpha) = \tilde{\Sigma}_{22}^{*+}(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{\sigma}_{22}^*(x_1, 0) e^{i\alpha x_1} dx_1,$$

$$\tilde{U}_2^-(\alpha) = \tilde{U}_2^-(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \tilde{u}_2^*(x_1, 0) e^{i\alpha x_1} dx_1,$$

i załóżmy, że funkcje  $\tilde{\Sigma}_{22}^{*+}(\alpha)$  oraz  $\tilde{\Sigma}_{22}^{*-}(\alpha)$  i  $\tilde{U}_2^-(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$  oraz  $\{\text{Im } \alpha < \tau_1\}$  i  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ .

Wykorzystując warunki brzegowe naszego zagadnienia oraz eliminując występujące w wyrażeniach /4.14/ stałe  $C_j(\alpha)$ , rozwiązanie naszego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania, regularnego w pasmie  $\Omega : \{-s_0 < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$  gdzie  $s_0 > 0$ , równania funkcyjnego postaci [58]:

15.66/ 
$$\tilde{U}_2^-(z) = -\frac{h}{y} H(z) [\tilde{\Sigma}_{22}^{*+}(z) + \tilde{\Sigma}_{22}^{*-}(z)],$$

gdzie

15.67/ 
$$H(z) = \frac{\sigma_2^2 \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} \text{th} \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} \text{th} \sqrt{z^2 - \sigma_2^2}}{4 z^2 \sqrt{(z^2 - \sigma_1^2)(z^2 - \sigma_2^2)} \text{th} \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} - (2z^2 - \sigma_2^2)^2 \text{th} \sqrt{z^2 - \sigma_2^2}},$$

$$z = \alpha h, \quad \sigma_1 = h\omega / c_1, \quad \sigma_2 = h\omega / c_2.$$



Funkcja  $H(z)$  jest parzystą funkcją zmiennej zespolonej  $z = k + is$  i ma na osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$  dwa miejsca zerowe w punktach  $z = \pm \sigma_1$ , oraz, jak to wykazano w pracy [59], dwa rzeczywiste i pojedyncze bieguny w punktach  $z = \pm k_1$ . W pracy [59] wykazano, że  $k_1 \in (\sigma_1, \sigma_2 \sqrt{2})$  oraz, że  $k_1 \approx \sigma_2 \sqrt{(1-\nu)/2}$ .

W celu przedstawienia funkcji  $H(z)$  w postaci /5.6/ tak, aby spełnione były warunki /3.37/ przyjmijmy, że w pasmie  $\Omega_0: \{ | \text{Im } z | < \varepsilon_0, | \text{Re } z | < \infty \}$ , funkcja  $\bar{H}(z)$  ma postać:

$$\bar{H}(z) = (1-\nu) \frac{z^2 - \sigma_1^2}{(z^2 - k_1^2) \sqrt{z^2 + A^2}},$$

gdzie

$$k_1 = \sigma_2 g(\omega) \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}, \quad g(0) = 1,$$

/5.68/

$$A = \frac{\sigma_1 \sigma_2^2 (1-\nu)}{k_1^2 \text{tg } \delta_1} = \frac{2\sigma_1}{[g(\omega)]^2 \text{tg } \delta_1}.$$

Ostatecznie funkcję  $H(z)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_*: \{-\varepsilon < \text{Im } z < 0, | \text{Re } z | < \infty\}$ , gdzie  $\varepsilon = \min(\varepsilon_0, s_0)$  w postaci:

$$/5.69/ \quad H(z) = (1-\nu) \frac{H^+(z)}{H^-(z)},$$

przy czym

$$/5.70/ \quad H^+(z) = \frac{H_1^+(z)}{T^+(z)},$$

$$H(z) = \frac{(z^2 - k_1^2) T^-(z) H_1^-(z)}{z^2 - \sigma_1^2},$$

/5.70/

$$T^\pm(z) = \sqrt{z \pm iA}.$$

Funkcja  $H^+(z)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^+ : \{\text{Im } z > -\epsilon_0\}$ , funkcja  $H^-(z)$  nie ma miejsc zerowych w półpłaszczyźnie  $\Omega_*^- : \{\text{Im } z < 0\}$  i jest w niej regularna z wyjątkiem punktu w nieskończoności, zaś funkcje  $H_1^\pm(z)$  określone są zależnościami /5.9/.

Na mocy zależności /5.69/ równanie funkcyjne /5.66/ przyjmie postać:

$$/5.71/ \quad \check{U}_2^-(z) = - \frac{h(1-\nu)}{\mu} \frac{H^+(z)}{H^-(z)} \left[ \check{\Sigma}_{22}^+(z) + \check{\Sigma}_{22}^-(z) \right],$$

zaś obszarem regularności tego równania będzie pasmo  $\Omega_*$ . Zakładając, że funkcję  $E(z)$  określoną zależnością

$$/5.72/ \quad E(z) = H^+(z) \check{\Sigma}_{22}^-(z)$$

można przedstawić w postaci /5.14/, gdzie funkcje  $E^\pm(z)$  dane są związkami typu /5.15/, rozwiązanie równania /5.66/ przyjmie postać:

$$/5.73/ \quad \check{U}_2^-(z) = \frac{h(1-\nu)}{\mu} \frac{E^-(z)}{H^-(z)},$$

$$\check{\Sigma}_{22}^+(z) = - \frac{E^+(z)}{H^+(z)},$$



przy czym funkcje  $\bar{U}_2^*(z)$  i  $\bar{\Sigma}_{22}^+(z)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_*^-: \{\text{Im } z < 0\}$  i  $\Omega_*^+: \{\text{Im } z > -\varepsilon\}$

Stosując procedurę użytą w poprzednim punkcie, rozkład przemieszczenia  $u_2(x_1, 0, t) = u_2(x_1, t)$  i naprężenia  $\sigma_{22}(x_1, 0, t) = \sigma_{22}(x_1, t)$  w otoczeniu wierzchołka szczeliny opisany będzie, na mocy zależności /5.73/, następującymi wyrażeniami:

$$/5.74/ \quad u_2(x_1, t) = \frac{2(1-\nu)}{E} K_I \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}} \quad \text{dla } x_1 \rightarrow (-0),$$

$$\sigma_{22}(x_1, t) = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi|x_1|}} \quad \text{dla } x_1 \rightarrow (+0),$$

gdzie

$$K_I = K_I^S + K_I^* \cos \omega t,$$

$$/5.75/ \quad K_I^* = \sqrt{\frac{i}{\pi h}} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} E(z) dz,$$

$$K_I^S = \lim_{\omega \rightarrow 0} K_I^*,$$

zaś funkcja  $E(z)$  określona jest zależnością /5.72/.

Otrzymane rezultaty zilustrujemy dwoma przykładami rozważanymi w pracy [58].

### 5.3.1. Szczelina z obciążeniem skupionym

Przyjmijmy, że na powierzchniach szczeliny dane jest obciążenie

$$P(x_1, t) = (p_0 + p_1 \cos \omega t) \delta(x+l),$$

gdzie  $p_0$  i  $p_1$  są stałymi i  $|p_1/p_0| < 1$ .

Rozważając statyczne i dynamiczne zagadnienie oddzielnie, na mocy zależności /5.65/, i /5.72/, funkcja  $E(z)$  przyjmie postać:

$$E(z) = -\frac{p_1}{\sqrt{2\pi}} H^+(z) e^{-il^*z} \quad \text{gdzie} \quad l^* = l/h.$$

Funkcja  $E(z)$  jest regularna w pasmie  $\Omega_0$  i spełnia w nim warunki umożliwiające przedstawienie jej w postaci /5.14/ co oznacza, że w rozważanym przykładzie dozwolone jest korzystanie z rozwiązania /5.73/.

Na mocy zależności /5.75/<sub>3</sub>, amplitudę współczynnika intensywności naprężenia w zagadnieniu dynamicznym, można przedstawić w postaci:

$$K_I = -p_1 \sqrt{\frac{i}{\pi h}} f(l^*),$$

gdzie

$$f(l^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} H^+(z) e^{-il^*z} dz.$$

Stosując procedurę opisaną w p.5.1, współczynnik  $K_I^*$  dla małych wartości parametru  $l^*$  /dużych wartości  $h$ / dany jest wzorem

$$K_I^* = p_1 \sqrt{\frac{2}{\pi l}} (1 - A(l^*) + O[(l^*)^2]),$$

zaś w przypadku gdy  $l^* \rightarrow \infty$ , można wykazać, że

$$K_I^* = o(e^{-il^*z_1})$$

gdzie  $z_1$  jest najbliższym osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$  biegunem funkcji  $H(z)$ .



Przyjmując, że  $H_1^+(z) = 1$ , przybliżone wartości współczynnika  $\bar{K}_I$  dla pośrednich wartości parametru  $l^*$ , na mocy zależności /5.75/<sub>2</sub> dane będą ostatecznie wzorem:

$$/5.76/ \quad K_I^* = p_1 \sqrt{\frac{2}{\pi l}} e^{-Al^*},$$

gdzie wielkość  $A$  określona jest zależnością /5.68/<sub>3</sub>.

Przechodząc w zależnościach /5.76/ do granicy z  $\omega \rightarrow 0$ , współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w przypadku statycznym przyjmie postać:

$$/5.77/ \quad K_I^S = p_0 \sqrt{\frac{2}{\pi l}} e^{-2l^*}.$$

Ostatecznie, przybliżone wartości współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w naszym zagadnieniu wyjściowym dane są wzorem /5.75/, gdzie  $K_I^S$  i  $\bar{K}_I$  określone są zależnościami /5.76/ i /5.77/.

Przebieg zmienności wyrażenia

$$K_I^M = p_0 \sqrt{\frac{2}{\pi l}} (e^{-2l^*} + \frac{p_1}{p_0} e^{-Al^*})$$

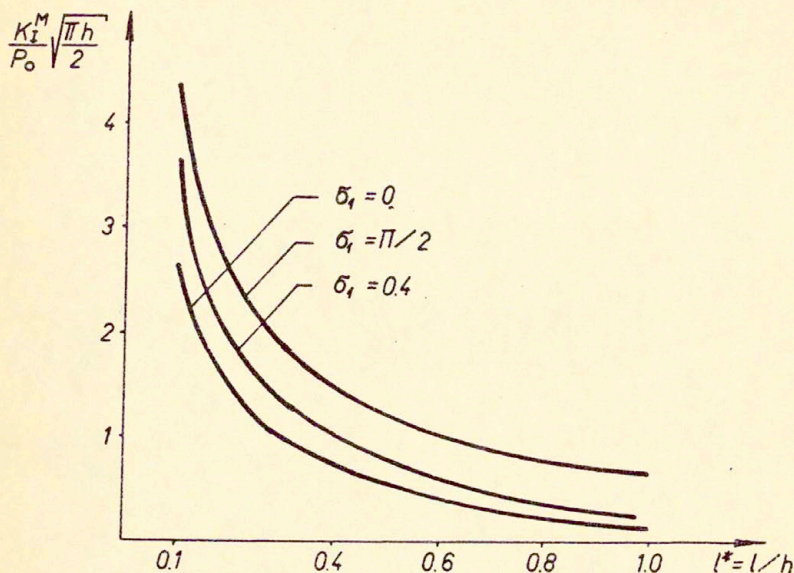
reprezentującego maksymalną wartość współczynnika intensywności naprężenia, jako funkcji parametru  $l^*$  dla różnych wartości częstości  $\omega$  i dla  $p_1/p_0 = 0.5$  oraz  $g(\omega) = 1$ , pokazany jest na Rys.23.

### 5.3.2. Szczelina z równomiernie rozłożonym obciążeniem

Przyjmijmy, że na powierzchniach szczeliny dla  $|x_1| < \infty$  dane jest obciążenie

$$P(x_1, t) = p_0 + p_1 \cos \omega t \quad \text{gdzie } |p_1/p_0| < 1.$$

Postępując, podobnie jak poprzednio, na mocy zależności /5.72/ i /5.65/<sub>1</sub>, funkcja  $E(z)$  przyjmie postać:



Rys.23

$$/5.78/ \quad E(z) = \frac{ihp_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{H^*(z)}{z} .$$

Tak określona funkcja  $E(z)$  jest regularna w pasmie  $\{-\varepsilon_0 < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$  i spełnia warunki umożliwiające przedstawienie jej w tym pasmie w postaci /5.14/.

Wykorzystując wobec tego zależność /5.75/ oraz wykonując odpowiednie całkowanie i korzystając z faktu, iż  $H_1^*(0) = 1$ , otrzymujemy ścisłe wartości amplitudy współczynnika intensywności naprężenia w zagadnieniu dynamicznym,

$$/5.79/ \quad K_I^* = p_1 \sqrt{\frac{2h}{A}} ,$$



gdzie wielkość  $A$  określona jest zależnością /5.68/.

Przechodząc we wzorze /5.79/ do granicy z  $\omega \rightarrow 0$ , współczynnik intensywności naprężenia w zagadnieniu statycznym przyjmie postać:

$$/5.80/ \quad K_I^S = p_0 \sqrt{h} .$$

Ostatecznie, ściśle wartości współczynnika intensywności naprężenia w rozważanym przykładzie opisane będą zależnością /5.75/, gdzie wielkości  $K_I^S$  i  $K_I^*$  są określone wyrażeniami /5.80/ i /5.79/.

Przebieg zmienności maksymalnych wartości współczynnika intensywności naprężenia  $K_I$

$$K_I^M = p_0 \sqrt{h} \left( 1 + \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\frac{2}{A}} \right)$$

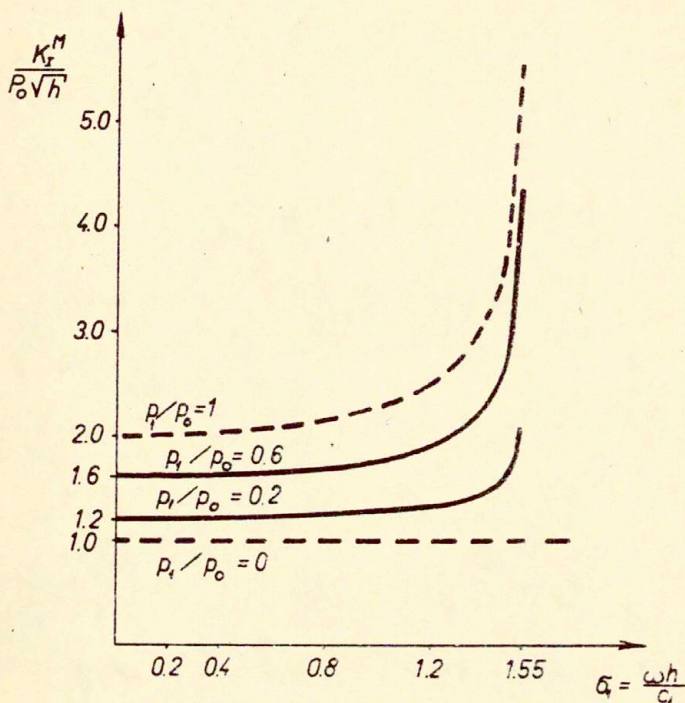
dla różnych wartości częstości  $\omega$  i stosunku  $p_1/p_0$  oraz  $g(\omega) = 1$  pokazano na Rys.24.

Wykonując na zależnościach /5.73/ odwrotną transformację całkową Fouriera, otrzymamy wyrażenia opisujące rozkład amplitud przemieszczenia  $u_2$  na powierzchni szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu w dynamicznej części rozwiązania naszego zagadnienia.

Przed przystąpieniem do wyznaczenia tych wielkości należy określić funkcje  $E^\pm(z)$ , które, tak jak w poprzednim punkcie, wyznaczymy w sposób elementarny. Przedstawiając wyrażenie /5.78/ w postaci /5.52/, funkcje  $E^\pm(z)$  opisane będą zależnościami postaci /5.53/ i wobec tego związku /5.73/ przyjmą ostatecznie postać:

$$/5.81/ \quad \bar{U}_2^*(z) = \frac{p_1 h^2 (1-\nu)}{i\sqrt{2\pi} A} \frac{1}{z H^*(z)} ,$$

$$\bar{\Sigma}_{22}^*(z) = \frac{p_1 h}{i\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z} \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1A} H^*(z)} \right] .$$



Rys.24

Wykonując na tych zależnościach odwrotną transformację całkową Fouriera /3.5/ oraz przyjmując, że  $H_1(z) \equiv 1$ , otrzymamy następujące wyrażenia:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_2(\xi, 0) = \frac{P_1 h (1-\nu)}{\mu \sqrt{iA}} \left\{ \frac{\sigma_1^2}{k_1^2} R(\xi; 0) - \frac{\sigma_1^2 - k_1^2}{2k_1^2} [R(\xi; k_1) + \right. \\
 \left. + R(\xi; -k_1)] \right\} \quad \text{dla } \xi < 0,
 \end{aligned}$$



$$\bar{\sigma}_{22}^*(\xi, 0) = -\frac{p_1}{\sqrt{iA}} Q_0(\xi) \quad \text{dla } \xi > 0,$$

gdzie  $\xi = x_1/h$ , zaś funkcje  $R(\xi; z_j)$  i  $Q_0(\xi)$  określone są związkami /5.56/.

Ostatecznie, na mocy zależności /5.64/, przybliżony rozkład przemieszczenia  $u_2$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu w naszym zagadnieniu wyjściowym dany będzie zależnościami:

$$u_2(\xi, 0, t) = u_2^s(\xi, 0) + \bar{u}_2^*(\xi, 0) \cos \omega t \quad \text{dla } \xi < 0,$$

$$\sigma_{22}(\xi, 0, t) = \sigma_{22}^s(\xi, 0) + \bar{\sigma}_{22}^*(\xi, 0) \cos \omega t \quad \text{dla } \xi > 0,$$

gdzie

$$u_2^s(\xi, 0) = \frac{hp_0(1-\nu)}{2\mu} \operatorname{erf}(\sqrt{-2\xi}),$$

$$\sigma_{22}^s(\xi, 0) = p_0 \left[ \frac{e^{-2\xi}}{\sqrt{2\pi\xi}} - \operatorname{erfc}(\sqrt{2\xi}) \right],$$

$$\bar{u}_2^*(\xi, 0) = \frac{hp_1(1-\nu)}{\mu A} \left[ \frac{\sigma_1^2}{k_1^2} \operatorname{erf}(\sqrt{-A\xi}) + b(\xi; A) \right],$$

$$\bar{\sigma}_{22}^*(\xi, 0) = p_1 \left[ \frac{e^{-A\xi}}{\sqrt{\pi A\xi}} - \operatorname{erfc}(\sqrt{A\xi}) \right],$$

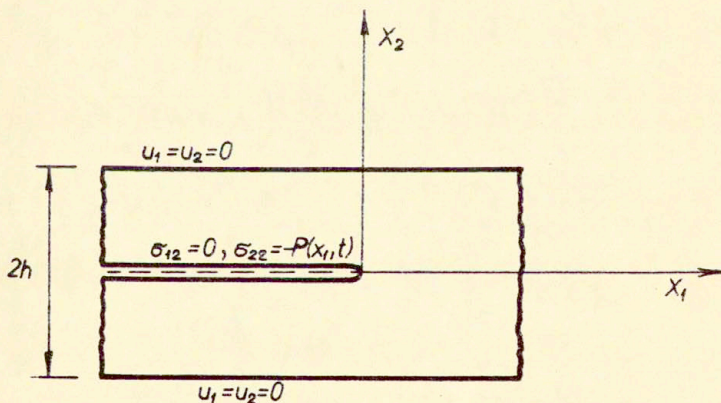
$$b(\xi; A) = \frac{(k_1^2 - \sigma_1^2) \sqrt{A}}{2k_1^2} \left\{ \frac{e^{-ik_1 \xi}}{\sqrt{A + ik_1}} \operatorname{erf}[\sqrt{-\xi(A + ik_1)}] + \right. \\ \left. + \frac{e^{ik_1 \xi}}{\sqrt{A - ik_1}} \operatorname{erf}[\sqrt{-\xi(A - ik_1)}] \right\},$$

przy czym wielkość  $A$  określona jest związkiem /5.68/.

#### 5.4. Drgania harmoniczne w pasmie ze szczeliną

Rozważmy nieskończone i jednorodne pasmo sprężyste o szerokości  $2h$  osłabione w jego środkowej płaszczyźnie półnieskończoną szczeliną.

Zakładamy, że brzegi pasma są sztywno zamocowane, zaś na powierzchniach szczeliny dane jest dowolne i zmieniające się w czasie w sposób harmoniczny obciążenie działające w kierunku normalnym do powierzchni szczeliny /Rys.25/. Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia podane zostało w pracach [60, 61].



Rys.25



Zakładając, że dane na powierzchniach szczeliny obciążenie  $P(x_1, t)$  ma postać /5.63/, rozważać będziemy, podobnie jak w p.5.3, jedynie dynamiczną część tego zagadnienia; statyczne rozwiązanie otrzymamy z rozwiązania dynamicznego przechodząc w nim do granicy  $\omega \rightarrow 0$ .

Dynamiczna część naszego zagadnienia redukuje się do problemu nieskończonego pasma sprężystego z mieszanymi warunkami brzegowymi, które zgodnie z transformacją /4.9/, mają postać:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1^*(x_1, h) = \dot{U}_2^*(x_1, h) = 0 & \quad \text{dla } |x_1| < \infty, \\ \dot{\delta}_{12}^*(x_1, 0) = 0 & \quad \text{dla } |x_1| < \infty, \\ \dot{\delta}_{22}^*(x_1, 0) = -p_1(x_1) & \quad \text{dla } x_1 < 0, \\ \dot{U}_2^*(x_1, 0) = 0 & \quad \text{dla } x_1 > 0. \end{aligned}$$

Po wykorzystaniu warunków brzegowych, wyeliminowaniu z odpowiednich zależności /4.14/ funkcji  $C_j(\alpha)$  oraz założeniu, że określone związkami /5.65/ funkcje  $\dot{\Sigma}_{22}^+(\alpha)$ ,  $\dot{\Sigma}_{22}^-(\alpha)$  i  $\dot{U}_2^-(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$ ,  $\{\text{Im } \alpha < \tau_1\}$  i  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ , rozwiązanie naszego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania, regularnego w pasmie

$\Omega : \{-s_0 < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$ , gdzie  $s_0 > 0$ , równania funkcyjnego postaci /5.66/, w którym [60]:

$$H(z) = \frac{G(z)}{S(z)},$$

/5.82/

$$\begin{aligned} G(z) = \delta_2^2 \sqrt{z^2 - \delta_1^2} [ z^2 \text{sh} \sqrt{z^2 - \delta_2^2} \text{ch} \sqrt{z^2 - \delta_1^2} - \\ - \sqrt{(z^2 - \delta_1^2)(z^2 - \delta_2^2)} \text{sh} \sqrt{z^2 - \delta_1^2} \text{ch} \sqrt{z^2 - \delta_2^2} ], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(z) &= [4z^4 + (2z^2 - \sigma_2^2)^2] \sqrt{(z^2 - \sigma_1^2)(z^2 - \sigma_2^2)} \operatorname{ch} \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} \times \\
 &\times \operatorname{ch} \sqrt{z^2 - \sigma_2^2} - z^2 [(2z^2 - \sigma_2^2)^2 + 4(z^2 - \sigma_1^2)(z^2 - \sigma_2^2)] \times \\
 /5.82/ & \\
 &\times \operatorname{sh} \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} \operatorname{sh} \sqrt{z^2 - \sigma_2^2} - 4z^2 (2z^2 - \sigma_2^2) \sqrt{(z^2 - \sigma_1^2)(z^2 - \sigma_2^2)},
 \end{aligned}$$

$$z = \alpha h, \quad \sigma_1 = h\omega/c_1, \quad \sigma_2 = h\omega/c_2.$$

W przypadku najbardziej interesującym z praktycznego punktu widzenia, gdy  $\sigma_1 < \pi/2$  i współczynnik Poissona  $\nu < 0.4$ , można wykazać, że gdy  $\sigma_2 < \pi/2$  to funkcja  $H(z)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w pewnym pasmie  $\Omega_1: \{|\operatorname{Im} z| < a, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  gdzie  $a > 0$ , zaś gdy  $\sigma_2 > \pi/2$  to funkcja  $H(z)$  ma na osi rzeczywistej  $k = \operatorname{Re} z$  dwa miejsca zerowe  $z = \pm k_1$ , i dwa pojedyncze bieguny w punktach  $z = \pm k_2$ . Wielkości  $k_1$  i  $k_2$  są funkcjami częstości drgań harmonicznycych  $\omega$  i ze względu na postać równań  $G(k) = 0$  i  $S(k) = 0$ , określenie ich możliwe jest jedynie na drodze obliczeń numerycznych.

W celu przedstawienia funkcji  $H(z)$  w postaci /5.6/ tak, aby aby spełnione były warunki /3.37/, przyjmijmy, że w pasmie  $\Omega_0: \{|\operatorname{Im} z| < \varepsilon_0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon_0 \leq a$ , funkcja  $\bar{H}(z)$  ma postać [60]:

$$\bar{H}(z) = \bar{H}_0(z) \bar{\bar{H}}_0(z).$$

We wzorze tym

$$\bar{H}_0(z) = \frac{1 - \nu}{\sqrt{z^2 + A^2}} \frac{z^2 - k_1^2}{z^2 - k_2^2}$$

/5.83/

$$A = m^2 A_0, \quad m = k_1/k_2,$$

$$A_0 = \frac{\sigma_2^2(1-\nu)}{\sigma_1 \operatorname{tg} \sigma_1} = \frac{2(1-\nu)^2}{1-2\nu} \frac{\sigma_1}{\operatorname{tg} \sigma_1},$$



zaś funkcja  $\bar{H}_0(z)$  określona jest związkami /5.36/ przy czym w przypadku gdy  $\varphi_2 < \pi/2$  przyjmować będziemy, że  $k_1 = k_2$ . Występujące w zależności /5.36/ wielkości  $k_0$  i  $\nu$  są w rozważanym tutaj zagadnieniu funkcjami częstości  $\omega$ , przy czym przybliżone ich wartości określone są numerycznie w sposób podany w punkcie 5.2.

Przebieg zmienności funkcji  $H(k)$  i  $\bar{H}(k)$  na osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$  oraz błąd względny przybliżenia  $\Delta F = [(H - \bar{H})/\bar{H}] \cdot 100\%$  w przypadku gdy  $\nu = 0.25$  podany jest w Tabeli 2.

Tabela 2

z=k	$\omega = 0.2c_1/h$		$\omega = 0.6c_1/h$		$\omega = 1.0c_1/h$		$\omega = 1.4c_1/h$	
	H(z)	$\Delta F(\%)$	H(z)	$\Delta F(\%)$	H(z)	$\Delta F(\%)$	H(z)	$\Delta F(\%)$
0	0.338	0	0.378	0	0.508	0	1.210	0
0.5	0.337	0.85	0.378	1.11	0.524	1.92	1.233	5.32
1.0	0.332	1.85	0.372	2.18	0.502	2.99	1.181	3.50
2.0	0.295	0.43	0.324	0.32	0.415	0.09	0.803	0.16
3.0	0.236	0.24	0.253	0.38	0.296	0.71	0.418	-1.85
5.0	0.150	0.77	0.154	0.74	0.164	0.27	0.182	-5.10
10.0	0.075	0.25	0.076	0.15	0.077	-0.20	0.078	-2.43
	0	0	0	0	0	0	0	0

Ostatecznie funkcję  $H(z)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_*$ :  $\{-\epsilon < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$  gdzie  $\epsilon = \min(\epsilon_0, \epsilon_1)$  w postaci /5.69/, zaś odpowiadające rozważanemu przez nas problemowi równanie funkcyjne przyjmie postać /5.71/ gdzie

$$/5.84/ \quad H^+(z) = \frac{M^+(z) H_1^+(z)}{T^+(z) L^+(z)},$$

$$H^-(z) = \frac{z^2 - k_2^2}{z^2 - k_1^2} \frac{T^-(z) L^-(z) H_1^-(z)}{M^-(z)},$$

Funkcja  $H^+(z)$  jest regularna i nie ma zer w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^+ : \{\text{Im } z > -\varepsilon_0\}$ , funkcja  $H^-(z)$  nie ma zer w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^- : \{\text{Im } z < 0\}$  i jest w niej regularna z wyjątkiem punktu w nieskończoności; funkcje  $M^\pm(z)$ ,  $L^\pm(z)$ ,  $T^\pm(z)$ ,  $H^\pm(z)$  określone są odpowiednio zależnościami /5.37-5.39/ i /5.9/ zaś wielkość  $A$  - wyrażeniem /5.83/.

Postępując identycznie jak w p.5.3, ostateczne rozwiązanie interesującego nas równania funkcyjnego przyjmie postać /5.73/, zaś współczynnik intensywności naprężenia w naszym zagadnieniu wyjściowym dany będzie, zgodnie z zależnościami /5.64/, wyrażeniami /5.75/ przy czym występująca w nich funkcja  $H^+(z)$  określona jest teraz wyrażeniem /5.84/.

Znając funkcje  $\tilde{U}_2^*(z)$  i  $\tilde{\Sigma}_{22}^+(z)$  określone zależnościami /5.73/ można wyznaczyć występujące w zależnościach /4.14/ funkcje  $C_j(\alpha)$ , które dla  $z = \alpha h$  mają postać:

$$C_1(z) = h C_1^*(z) \tilde{U}_2^-(z), \quad C_2(z) = h C_2^*(z) \tilde{U}_2^-(z),$$

$$C_3(z) = -ih C_3^*(z) \tilde{U}_2^-(z), \quad C_4(z) = -ih C_4^*(z) \tilde{U}_2^-(z),$$

gdzie

$$C_1^*(z) = -\frac{2z^2 - \sigma_2^2}{\sigma_2^2 \sqrt{z^2 - \sigma_1^2}}, \quad C_2^*(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)},$$

$$C_3^*(z) = -\frac{\sqrt{z^2 - \sigma_2^2} G_2(z)}{G(z)}, \quad C_4^*(z) = \frac{2z}{\sigma_2^2},$$

$$G_1(z) = z^2(2z^2 - \sigma_2^2) \text{sh} \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} \text{sh} \sqrt{z^2 - \sigma_2^2} -$$

$$- \sqrt{(z^2 - \sigma_1^2)(z^2 - \sigma_2^2)} [(2z^2 - \sigma_2^2) \text{ch} \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} \text{ch} \sqrt{z^2 - \sigma_2^2} + 2z^2],$$

/5.85/

$$G_2(z) = z [2z^2 \text{ch} \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} \text{ch} \sqrt{z^2 - \sigma_2^2} -$$

$$- 2\sqrt{(z^2 - \sigma_1^2)(z^2 - \sigma_2^2)} \text{sh} \sqrt{z^2 - \sigma_1^2} \text{sh} \sqrt{z^2 - \sigma_2^2} - 2z^2 + \sigma_2^2],$$



zaś funkcja  $G(z)$  określona jest zależnością /5.82/₂.  
 Podstawiając  $C_j(z)$  do związków /4.14/ i wykonując na nich odwrotną transformację całkową Fouriera, amplitudy przemieszczenia i naprężeń w dynamicznym zagadnieniu, określone dla dowolnego punktu pasma, opisane będą wzorami /5.46/, w których:

$$Z_1(z, \eta) = -\{z[C_1^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2} + C_2^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2}] + \\ + \sqrt{z^2 - \delta_2^2} [C_3^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2} + C_4^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2}]\},$$

$$Z_2(z, \eta) = \sqrt{z^2 - \delta_1^2} [C_1^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2} + C_2^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2}] + \\ /5.86/ \quad + z [C_3^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2} + C_4^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2}],$$

$$Z_{11}(z, \eta) = -\{(2z^2 + \delta_2^2 - 2\delta_1^2)[C_1^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2} + C_2^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2}] + \\ + 2z \sqrt{z^2 - \delta_2^2} [C_3^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2} + C_4^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2}]\},$$

$$Z_{12}(z, \eta) = -\{2z \sqrt{z^2 - \delta_1^2} [C_1^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2} + C_2^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2}] + \\ + (2z^2 - \delta_2^2) [C_3^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2} + C_4^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2}]\},$$

$$Z_{22}(z, \eta) = \{(2z^2 - \delta_2^2) [C_1^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2} + C_2^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_1^2}] + \\ + 2z \sqrt{z^2 - \delta_2^2} [C_3^*(z) \operatorname{ch} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2} + C_4^*(z) \operatorname{sh} \eta \sqrt{z^2 - \delta_2^2}]\},$$

zaś funkcje  $C_j(z)$  określone są związkami /5.85/.

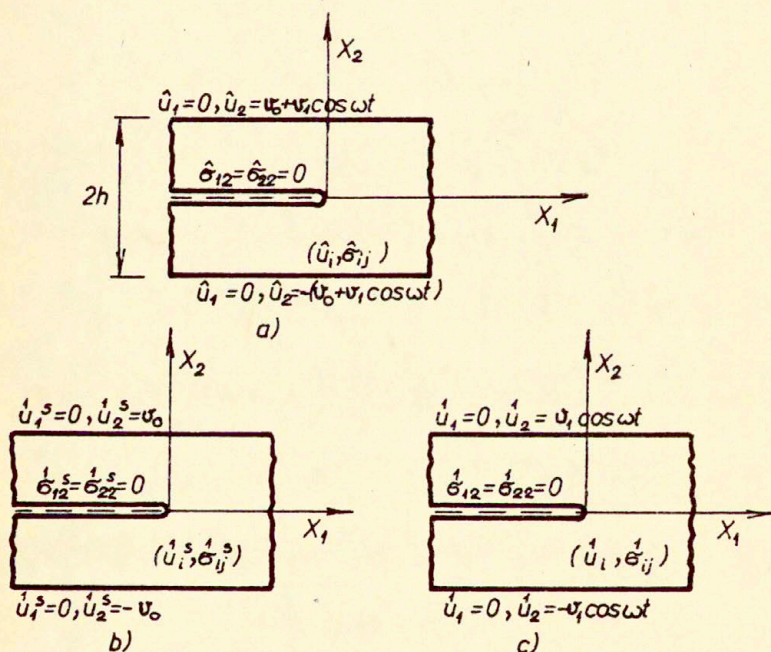
5.4.1. Przykład

Rozważmy nieskończone pasmo sprężyste o szerokości  $2h$  osłabione w środkowej płaszczyźnie półnieskończoną szczeliną, której powierzchnie są swobodne od obciążeń. Zakładamy, że na górnym i dolnym brzegu pasma dane są przemieszczenia, przy czym:

$$\hat{u}_1(x_1, \pm h, t) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\hat{u}_2(x_1, \pm h, t) = \pm(v_0 + v_1 \cos \omega t) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

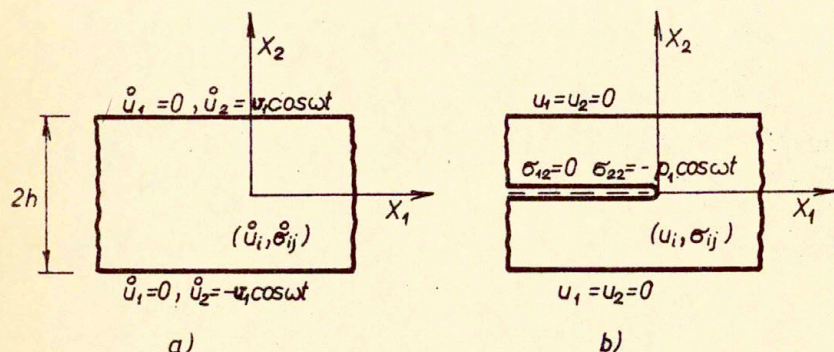
gdzie  $v_0$  i  $v_1$  są stałe i  $|v_0/v_1| < 1$  zaś  $\omega$  jest ustaloną częstością drgań harmoniczných.



Rys.26



Rozdzielając nasze zagadnienie na część statyczną i dynamiczną, rozważać będziemy jedynie zagadnienie dynamiczne przedstawione schematycznie na Rys.26c. Korzystając z zasady superpozycji, rozwiązanie tego zagadnienia przedstawimy w postaci sumy rozwiązań dla pasma ciągłego /Rys.27a/ i pasma ze szczeliną /Rys.27b/.



Rys.27

Rozkład przemieszczeń i naprężeń w zagadnieniu przedstawionym na Rys.27a opisany jest zależnościami:

$$\overset{\circ}{u}_1(x_1, x_2, t) = 0,$$

$$\overset{\circ}{u}_2(x_1, x_2, t) = \frac{v_1 \sin v_1 x_2}{\sin \delta_1} \cos \omega t,$$

$$15.87/ \overset{\circ}{\sigma}_{11}(x_1, x_2, t) = \frac{2\mu v v_1}{h(1-2\nu)} \frac{\delta_1 \cos v_1 x_2}{\sin \delta_1} \cos \omega t,$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{12}(x_1, x_2, t) = 0,$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{22}(x_1, x_2, t) = \frac{2\mu(1-\nu)v_1}{h(1-2\nu)} \frac{\delta_1 \cos v_1 x_2}{\sin \delta_1} \cos \omega t,$$

gdzie  $V_1 = \omega / C_1$ .

Z zależności /5.87/<sub>5</sub> wynika, że amplituda przyjętego na powierzchni szczeliny obciążenia w zagadnieniu przedstawionym na Rys.27b, dana jest wzorem:

$$/5.88/ \quad p_1 = \frac{2\mu(1-\nu)\nu_1\delta_1}{h(1-2\nu)\sin\delta_1}$$

#### 5.4.1a. Współczynnik intensywności naprężenia

Jak łatwo sprawdzić, funkcja  $E(z)$  określona zależnością /5.78/ spełnia w naszym przypadku warunki umożliwiające przedstawienie jej w postaci /5.14/. Wykorzystując wobec tego zależności /5.75/<sub>2</sub> i /5.88/ oraz fakt, że  $H_1^+(0) = 1$ , ściśle wartości amplitudy dynamicznego współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny opisane będą zależnością [60]:

$$/5.89/ \quad K_I^* = \frac{2\mu\nu_1}{\sqrt{h(1-2\nu)}} \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2\delta_1}{\sin 2\delta_1}}$$

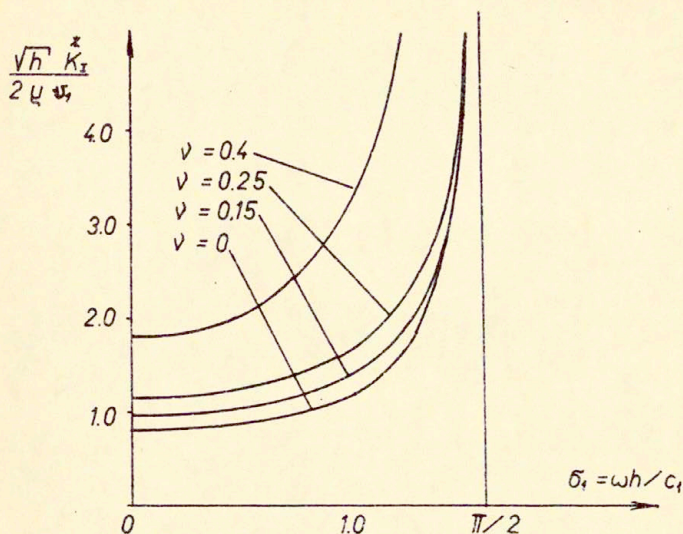
Otrzymany wynik jest dla przypadku gdy  $m = 1$  identyczny z rozwiązaniem podanym w pracy [62].

Przechodząc w zależności /5.89/ do granicy z  $\omega \rightarrow 0$ , współczynnik intensywności naprężenia w statycznej wersji naszego przykładu przyjmie znaną postać:

$$/5.90/ \quad K_I^S = \frac{2\mu\nu_0}{\sqrt{h(1-2\nu)}}$$

Ostatecznie ściśle wartości współczynnika intensywności naprężenia w naszym zagadnieniu wyjściowym /Rys.27a/ obliczamy ze wzoru /5.75/, w którym współczynniki  $K_I^S$  i  $K_I^*$  określone są wzorami /5.90/ i /5.89/. Przebieg zmienności amplitudy  $K_I^*$  dynamicznego współczynnika intensywności naprężenia dla różnych wartości współczynnika Poissona pokazany jest na Rys.28.





Rys.28

5.4.1b. Przeszyczenie  $u_2$  i naprężenia  $\sigma_{22}$  w płaszczynie szczeliny

W rozważanym przez nas przykładzie transformaty Fouriera amplitud przemieszczenia  $u_2$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu opisane są zależnościami /5.81/, gdzie funkcje  $H^\pm(z)$  określone są związkami /5.84/. Przyjmując, że  $H_1(z) \cong 1$  oraz wykonując odwrotną transformację całkową Fouriera /3.5/ na związkach /5.81/ lub wykorzystując odpowiednie zależności /5.46/ i /5.86/, przybliżony rozkład amplitud przemieszczenia  $u_2$  na powierzchni szczeliny i naprężenia  $\sigma_{22}$  na jej przedłużeniu w zagadnieniu przedstawionym na Rys.27b, opisany będzie zależnościami [60]:

$$/5.91/ \quad \bar{u}_2^*(\xi, \eta) = \frac{v_1}{\cos \delta_1} \left[ \operatorname{erf}(\sqrt{-A\xi'}) + \frac{1}{m^2} d_1(\xi; A) \right] \quad \text{dla } \xi < 0,$$

$$/5.91/ \quad \bar{b}_{22}^*(\xi, \eta) = \frac{2\mu v_1}{hm\sqrt{1-2\nu}} \sqrt{\frac{b_1}{\sin 2b_1}} \left[ \frac{e^{-A\xi}}{\sqrt{\pi\xi}} - \right. \\ \left. - \sqrt{A} \operatorname{erfc}(\sqrt{A\xi}) + b_2(\xi; A) \right] \quad \text{dla } \xi > 0$$

gdzie

$$d_1(\xi; A) = i\alpha_1 \sqrt{A} \left[ \frac{k_1^2 - (z_1^L)^2}{k_2^2 - (z_2^L)^2} R(\xi; z_1^L) - \right. \\ \left. - \frac{k_1^2 - (z_2^L)^2}{k_2^2 - (z_2^L)^2} R(\xi; z_2^L) \right] + \frac{(k_1^2 - k_2^2)\sqrt{A}}{2k_2} \left\{ \left[ \frac{1}{k_2} - \right. \right.$$

/5.92/

$$\left. - \frac{i\alpha_1(z_1^L - z_2^L)}{(k_2 - z_1^L)(k_2 - z_2^L)} \right] R(\xi; k_2) + \left[ \frac{1}{k_2} + \right. \\ \left. + \frac{i\alpha_1(z_1^L - z_2^L)}{(k_2 + z_1^L)(k_2 + z_2^L)} \right] R(\xi; -k_2) \left. \right\},$$

zaś funkcje  $R(\xi; z_j)$ ,  $b_2(\xi; A)$  oraz wielkości  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i  $A$  określone są odpowiednio zależnościami /5.57/, /5.59/<sub>2</sub>, /5.56/ i /5.83/<sub>2</sub>.



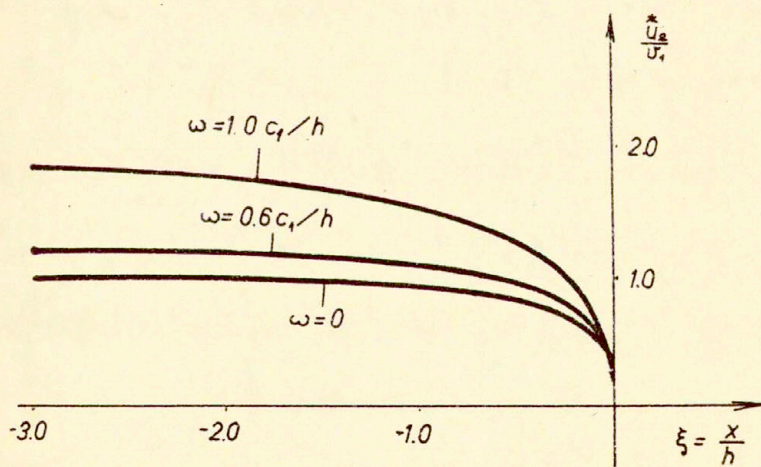
W przypadku gdy  $\sigma_1 < \pi/2$  i  $\sigma_2 < \pi/2$  tzn.  $m = 1$ , wyrażenia /5.91/ znacznie się upraszczają i wówczas

$$/5.93/ \quad \dot{U}_2(\xi, 0) = \frac{v_1}{\cos \sigma_1} [\operatorname{erf}(\sqrt{-A_0 \xi}) + b_1(\xi; A_0)] \quad \text{dla } \xi < 0,$$

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{22}^*(\xi, 0) = & \frac{2\mu v_1}{h\sqrt{1-2\nu}} \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sin 2\sigma_1}} \left[ \frac{e^{-A_0 \xi}}{\sqrt{\pi \xi}} - \right. \\ & \left. - \sqrt{A_0} \operatorname{erfc}(\sqrt{A_0 \xi}) + b_2(\xi; A_0) \right] \quad \text{dla } \xi > 0, \end{aligned}$$

gdzie funkcja  $b_1(\xi; A_0)$  i wielkość  $A_0$  określone są odpowiednio zależnościami /5.59/ i /5.83/.

Przebieg zmienności amplitudy przemieszczenia  $u_2$  na powierzchniach szczeliny dla różnych wartości częstości  $\omega$  i współczynnika Poissona  $\nu = 0.25$  pokazany jest na Rys.29, zaś



Rys.29

przebieg zmienności amplitudy naprężenia  $\sigma_{22}$  na przedłużeniu szczeliny w przypadku  $\omega = 0.6 c_1/h$  i  $\nu = 0.25$  pokazany jest na Rys.32.

5.4.1c. Przemieszczenia  $u_i$  i naprężenia  $\sigma_{ij}$  wewnątrz pasma

Przyjmując, że  $H_1(z) \equiv 1$  oraz podstawiając wyrażenie /5.81/ do związków /5.46/, w których funkcje  $Z_i(z, \eta)$  i  $Z_{ij}(z, \eta)$  określone są teraz zależnościami /5.86/, otrzymamy przybliżony rozkład amplitud przemieszczeń i naprężeń w zagadnieniu przedstawionym na Rys.27b.

Postępując podobnie jak w p.5.2, rozwiązań tych poszukiwać będziemy na drodze obliczeń numerycznych wykonując odpowiednie całkowanie w wyrażeniach /5.46/ wzdłuż osi rzeczywistej  $k = \text{Re } z$ . Opisane zależnościami /5.86/ funkcje  $Z_i(z, \eta)$  i  $Z_{ij}(z, \eta)$  po przejściu do granicy  $\text{Im } z \rightarrow (-0)$  są rzeczywistymi funkcjami zmiennej rzeczywistej  $k$ , zaś jak to wynika z zależności /5.81/ i /5.84/ wyrażenie:

$$\begin{aligned} \bar{U}_2^*(z) e^{-i\xi z} = & \frac{h\nu_1}{i\sqrt{2\pi i}} \frac{\sqrt{A} M^-(z) e^{-i\xi z}}{m^2 \cos \delta_1 T^-(z) L^-(z)} \left[ \frac{m^2}{2} - \right. \\ & \left. - \frac{m^2-1}{2} \left( \frac{1}{z-k_2} + \frac{1}{z+k_2} \right) \right] \end{aligned}$$

jest przy przejściu do granicy  $\text{Im } z \rightarrow (-0)$  zespoloną funkcją zmiennej rzeczywistej  $k$  i ma osobliwości w punktach  $k = 0$  i  $k = \pm k_2$ .

Wykorzystując fakt, że [57]:

$$\lim_{s \rightarrow (-0)} \frac{1}{z - k_j} = \frac{1}{(k - k_j) - i0} = \frac{1}{k - k_j} + i\pi \delta(k - k_j),$$

wartość graniczną wyrażenia  $\bar{U}_2^*(z) \exp(-i\xi z)$  dla  $\text{Im } z \rightarrow (-0)$  można przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} /5.94/ \quad \bar{U}_2^*(k) e^{-i\xi k} = & \frac{h\nu_1}{\sqrt{2\pi} \cos \delta_1} [ \bar{X}_0^*(k; A) \Theta(k) + \bar{X}^*(k; A, m) - \\ & - i \bar{Y}^*(k; A, m) ], \end{aligned}$$



gdzie

$$\Theta(k) = m^2 \delta(k) - \frac{m^2 - 1}{2} [\delta(k - k_2) + \delta(k + k_2)],$$

$$\dot{X}_0^*(k; A) = \frac{\pi \sqrt{A} e^{-i\xi k}}{m^2 \sqrt{A + ik}} \frac{M^-(k)}{L^-(k)},$$

$$\dot{X}^*(k; A, m) - i \dot{Y}^*(k; A, m) = \frac{\sqrt{A} e^{-i\xi k}}{i m^2 \sqrt{A + ik}} \frac{M^-(k)}{L^-(k)} \frac{k^2 - k_1^2}{k(k^2 - k_2^2)},$$

$$15.95/ \quad \dot{X}^*(k; A, m) = f(k; A, m) \cos k\xi + g(k; A, m) \sin k\xi,$$

$$\dot{Y}^*(k; A, m) = f(k; A, m) \sin k\xi + g(k; A, m) \cos k\xi,$$

$$f(k; A, m) = h(k; A, m) [(\sqrt{\xi + k} - \sqrt{\xi - k}) G(k) + (\sqrt{\xi + k} + \sqrt{\xi - k}) S(k)],$$

$$g(k; A, m) = h(k; A, m) [(\sqrt{\xi + k} + \sqrt{\xi - k}) G(k) - (\sqrt{\xi + k} - \sqrt{\xi - k}) S(k)],$$

$$h(k; A, m) = - \frac{\sqrt{A}}{2\xi(k^4 + k_0^4)} \frac{1 - (k/k_1)^2}{1 - (k/k_2)^2},$$

$$G(k) = \frac{1}{k} [(k^2 - k_0^2)^2 + 2\sqrt{1 + \nu} k_0^2 k^2],$$

$$S(k) = x_{k_0} \sqrt{2(k^2 - k_0^2)}, \quad \xi = \xi(k; A) = \sqrt{k^2 + A^2},$$

zaś wielkość  $A$  dana jest wzorem 15.83/2.

Przechodząc w wyrażeniach /5.46/ do granicy z  $\text{Im } z \rightarrow (-0)$  oraz wykorzystując zależności /5.94/ i fakt, że  $\check{X}(k;A,m) = \check{X}^*(-k;A,m)$  i  $\check{Y}(k;A,m) = -\check{Y}^*(-k;A,m)$ , przybliżony rozkład amplitud przemieszczeń  $u_i(\xi, \eta)$  i naprężeń  $\sigma_{ij}(\xi, \eta)$  dany jest ostatecznie następującymi zależnościami:

$$\check{u}_1(\xi, \eta) = \frac{v_1}{\cos \sigma_1} \left[ \frac{k_2(m^2-1)}{2m^2} Z_1(k_2, \eta) \check{X}^*(k_2; A, 1) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Z_1(k, \eta) \check{Y}^*(k; A, m) dk \right],$$

$$\check{u}_2(\xi, \eta) = \frac{v_1}{\cos \sigma_1} \left[ \frac{1}{2} Z_2(0, \eta) - \frac{k_2(m^2-1)}{2m^2} Z_2(k_2, \eta) \times \check{Y}^*(k_2; A, 1) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Z_2(k, \eta) \check{X}^*(k; A, m) dk \right],$$

/5.96/

$$\sigma_{11}(\xi, \eta) = \frac{\mu v_1}{h \cos \sigma_1} \left[ \frac{1}{2} Z_{11}(0, \eta) - \frac{k_2(m^2-1)}{2m^2} Z_{11}(k_2, \eta) \times \check{Y}^*(k_2; A, 1) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Z_{11}(k, \eta) \check{X}^*(k; A, m) dk \right],$$

$$\sigma_{12}(\xi, \eta) = \frac{\mu v_1}{h \cos \sigma_1} \left[ \frac{k_2(m^2-1)}{2m^2} Z_{12}(k_2, \eta) \check{X}^*(k_2; A, 1) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Z_{12}(k, \eta) \check{Y}^*(k; A, m) dk \right],$$

$$\sigma_{22}(\xi, \eta) = \frac{\mu v_1}{h \cos \sigma_1} \left[ \frac{1}{2} Z_{22}(0, \eta) - \frac{k_2(m^2-1)}{2m^2} Z_{22}(k_2, \eta) \times \check{Y}^*(k_2; A, 1) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Z_{22}(k, \eta) \check{X}^*(k; A, m) dk \right],$$



gdzie

$$Z_2(0, \eta) = \cos \eta \delta_1 - \frac{\sin \eta \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_1},$$

$$/5.97/ \quad Z_{11}(0, \eta) = \frac{2\delta_1^2 - \delta_2^2}{\delta_1} \left( \sin \eta \delta_1 + \frac{\cos \eta \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_1} \right),$$

$$Z_{22}(0, \eta) = -\frac{\delta_2^2}{\delta_1} \left( \sin \eta \delta_1 + \frac{\cos \eta \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_1} \right).$$

w przypadku gdy  $\delta_1 < \pi/2$  i  $\delta_2 < \pi/2$ , wzory /5.96/ znacznie się upraszczają i wówczas

$$\dot{u}_1^*(\xi, \eta) = \frac{u_1}{\pi \cos \delta_1} \int_0^{\infty} Z_1(k, \eta) \dot{Y}^*(k; A_0, 1) dk,$$

$$\dot{u}_2^*(\xi, \eta) = \frac{u_1}{\pi \cos \delta_1} \left[ \frac{\pi}{2} Z_2(0, \eta) + \int_0^{\infty} Z_2(k, \eta) \dot{X}^*(k; A_0, 1) dk \right],$$

$$/5.98/ \quad \dot{\delta}_{11}^*(\xi, \eta) = \frac{u_1}{\pi h \cos \delta_1} \left[ \frac{\pi}{2} Z_{11}(0, \eta) + \int_0^{\infty} Z_{11}(k, \eta) \dot{X}^*(k; A_0, 1) dk \right],$$

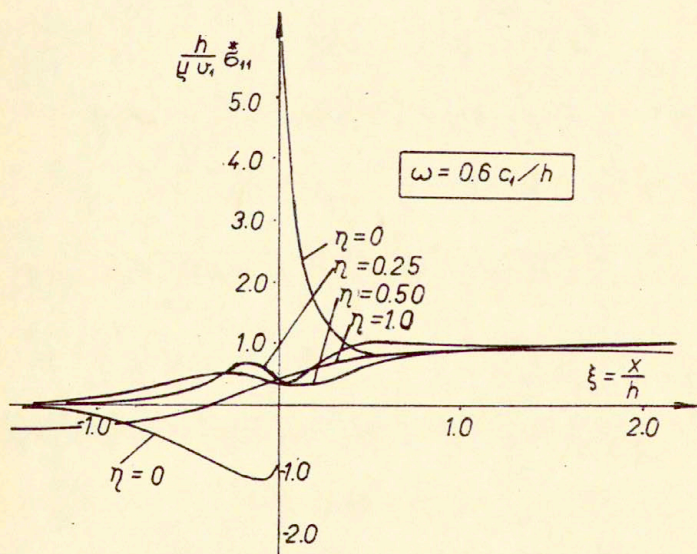
$$\dot{\delta}_{12}^*(\xi, \eta) = \frac{u_1}{\pi h \cos \delta_1} \int_0^{\infty} Z_{12}(k, \eta) \dot{Y}^*(k; A_0, 1) dk,$$

$$\dot{\delta}_{22}^*(\xi, \eta) = \frac{u_1}{\pi h \cos \delta_1} \left[ \frac{\pi}{2} Z_{22}(0, \eta) + \int_0^{\infty} Z_{22}(k, \eta) \dot{X}^*(k; A_0, 1) dk \right],$$

gdzie wielkość  $A_0$  określona jest wzorem /5.83/.

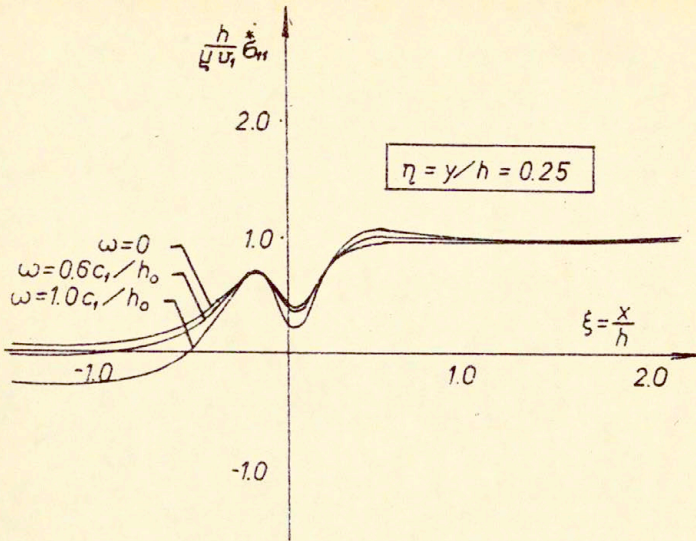
Przechodząc w zależnościach /5.86/, /5.97/ i /5.98/ do granicy z  $\omega \rightarrow 0$  oraz zastępując wielkość  $A_0$  wielkością  $A_s = 2(1-\nu)^2 / (1-2\nu)$  otrzymamy przybliżony rozkład przemieszczeń i naprężeń w statycznej wersji rozważanego przykładu /Rys.26b/.

Przebieg zmienności amplitud naprężenia  $\sigma_{ij}$  w zagadnieniu dynamicznym /Rys.27b/ w różnych przekrojach podłużnych pasma dla ustalonej częstości drgań harmonicznycch  $\omega = 0.6 c_1/h$  pokazany jest na Rys.31, 33 i 35. Przebieg zmienności amplitud naprężenia  $\sigma_{ij}$  w przypadku ustalonego przekroju pasma dla przypadku statycznego i dla częstości  $\omega = 0.6 c_1/h$  pokazano na Rys.30, 32 i 34.

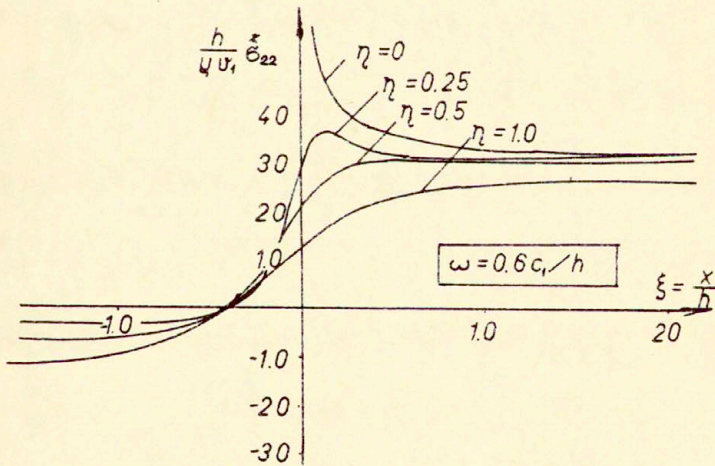


Rys.30

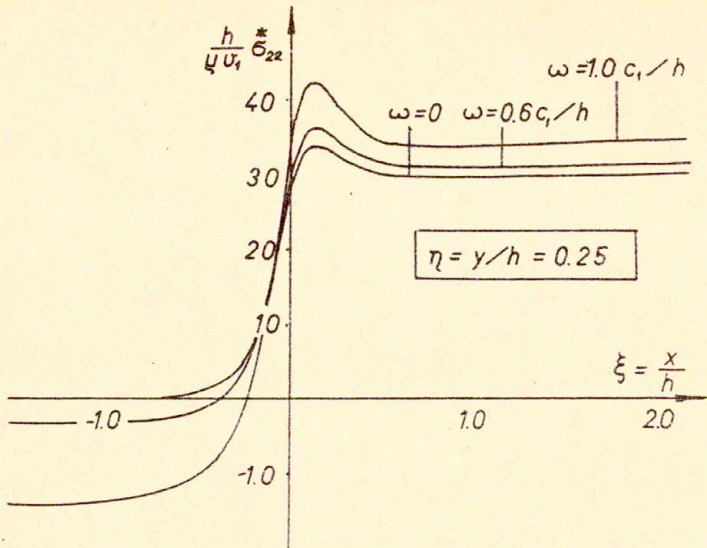




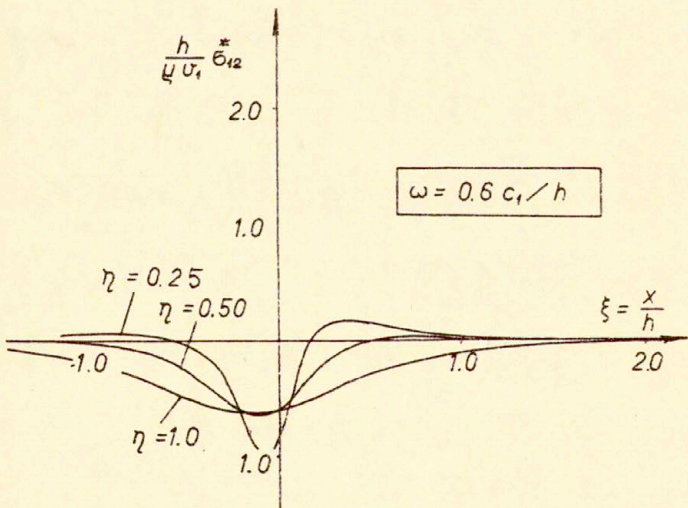
Rys. 31



Rys. 32

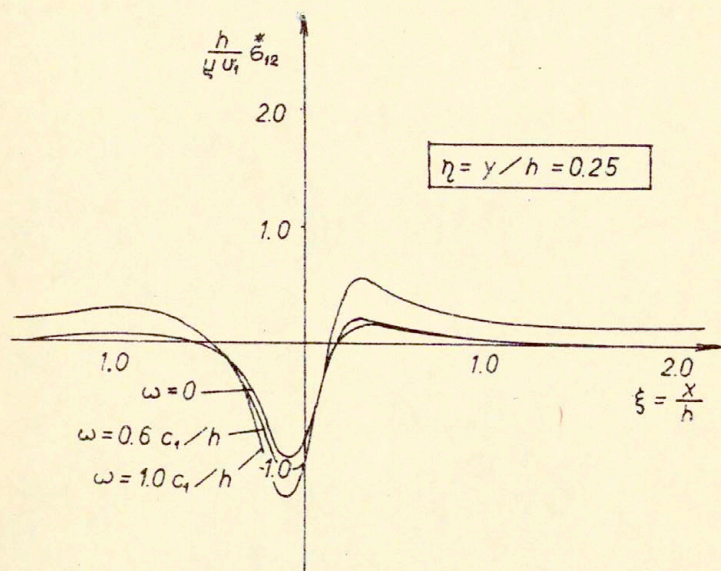


Rys. 33



Rys. 34





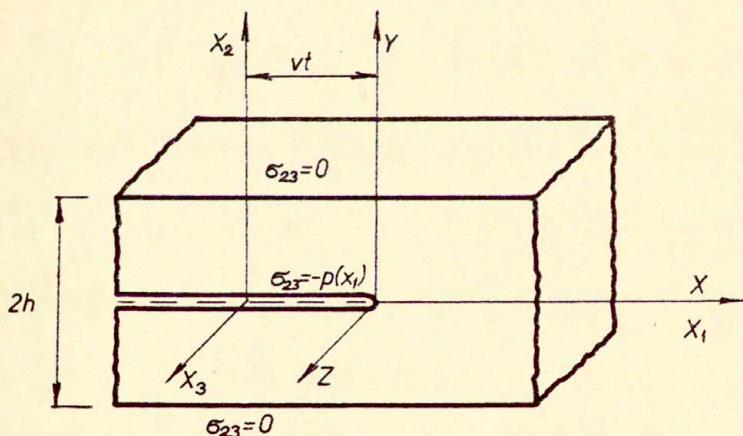
Rys.35

## 6. STACJONARNE ZAGADNIENIA SZCELIN W WARSTWIE SPRĘŻYSTEJ. ANTYPŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

W rozdziale tym rozważymy zagadnienia stacjonarnego ruchu półnieskończonej szczeliny w jednorodnej i niejednorodnej warstwie sprężystej /p.6.1, 6.2 i 6.3/ oraz problem drgań harmonicznym w jednorodnej i niejednorodnej warstwie sprężystej osłabionej półnieskończoną szczeliną /p.6.4 i 6.5/. Rozważania przeprowadzać będziemy zakładając, że spełnione są warunki antypłaskiego stanu odkształcenia.

### 6.1. Stacjonarny ruch szczeliny w jednorodnej warstwie ze swobodnymi brzegami

Rozważmy nieskończoną i jednorodną warstwę sprężystą osłabioną w środkowej płaszczyźnie półnieskończoną szczeliną. Brzegi warstwy są swobodne od obciążeń, zaś na powierzchniach szczeliny dane jest dowolne obciążenie działające w kierunku osi  $x_3$  nieruchomego układu  $(x_1, x_2, x_3)$ , Rys.36. Zakładamy, że szczelina porusza się wraz z zadanyim obciążeniem ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$  w płaszczyźnie środkowej warstwy przyjmując jednocześnie, że prędkość układu "szczelina-obciążenie"



Rys.36



jest mniejsza od prędkości propagacji sprężystej fali poprzecznej  $c_2$ .

Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia podane zostało w pracy [63].

Wykorzystując symetrię zagadnienia względem płaszczyzny środkowej warstwy, problem nasz redukuje się do zagadnienia nieskończonej warstwy sprężystej z mieszanymi warunkami brzegowymi, które w ruchomym układzie współrzędnych prostokątnych /1.23/ o początku w wierzchołku szczeliny, mają postać:

$$\begin{aligned} \sigma_{23}(x, h) &= 0 & \text{dla } |x| < \infty, \\ \sigma_{23}(x, 0) &= -p(x) & \text{dla } x < 0, \\ u_3(x, 0) &= 0 & \text{dla } x > 0. \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$\begin{aligned} \Sigma_{23}^-(\alpha) &= \Sigma_{23}^-(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \sigma_{23}(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \\ /6.1/ \quad \Sigma_{23}^+(\alpha) &= \Sigma_{23}^+(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sigma_{23}(x, 0) e^{i\alpha x} dx, \\ U_3^-(\alpha) &= U_3^-(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u_3(x, 0) e^{i\alpha x} dx \end{aligned}$$

i założymy, że funkcje  $\Sigma_{23}^+(\alpha)$ ,  $\Sigma_{23}^-(\alpha)$  i  $U_3^-(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$ ,  $\{\text{Im } \alpha < \tau_1\}$  i  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ .

Po wykorzystaniu warunków brzegowych oraz wyeliminowaniu z zależności /4.19/ i /4.20/ funkcji  $G_j(\alpha)$ , rozwiązanie naszego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania, regularnego w pasmie

$\Omega: \{-\delta_0 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  gdzie  $\delta_0 = \min(\tau_0, \pi/2h\beta_2)$   
 równania funkcyjnego postaci [63]:

$$/6.2/ \quad U_3^-(\alpha) = -\frac{1}{\mu\beta_2} H(\alpha) [\Sigma_{23}^+(\alpha) + \Sigma_{23}^-(\alpha)]$$

gdzie

$$H(\alpha) = \frac{\text{cth } \alpha h \beta_2}{\alpha}.$$

Funkcja  $H(\alpha)$  jest regularna w pasmie  $\Omega_1: \{-\pi/2h\beta_2 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  i można ją przedstawić w postaci:

$$/6.3/ \quad H(\alpha) = \frac{\pi}{h\beta_2} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

gdzie

$$H^+(\alpha) = \frac{\Gamma(1 - \frac{i\alpha h \beta_2}{\pi})}{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{i\alpha h \beta_2}{\pi})},$$

/6.4/

$$H^-(\alpha) = \frac{\alpha^2}{H^+(-\alpha)},$$

Funkcje  $H^+(\alpha)$  i  $H^-(\alpha)$  nie mają miejsc zerowych odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_1^+: \{\text{Im } \alpha > -\pi/2h\beta_2\}$  i  $\Omega_1^-: \{\text{Im } \alpha < 0\}$  i są w nich regularne z wyjątkiem punktu w nieskończoności. Po wykorzystaniu zależności /6.3/ równanie funkcyjne /6.2/ przyjmie postać:

$$U_3^-(\alpha) = -\frac{\pi}{\mu h \beta_2^2} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)} [\Sigma_{23}^+(\alpha) + \Sigma_{23}^-(\alpha)].$$



Zakładając istnienie pasma  $\{-\delta_0 < -c < \text{Im } \alpha < d < \tau_*$ ,  
 $|\text{Re } \alpha| < \infty\}$  i  $\tau_* \gg 0$ , w którym funkcję  $E(\alpha)$  daną wyrażeniem

$$/6.5/ \quad E(\alpha) = H^+(\alpha) \Sigma_{23}^-(\alpha)$$

można przedstawić w postaci /3.16/, gdzie funkcje  $E^\pm(\alpha)$  określone są zależnościami:

$$E^+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} \frac{E(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi,$$

/6.6/

$$E^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + id}^{+\infty + id} \frac{E(\xi)}{\xi - \alpha} d\xi,$$

rozwiązanie równania /6.2/ przyjmie postać:

$$U_3^-(\alpha) = -\frac{\pi}{4h\beta_2^2} \frac{a_0 - E^-(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

/6.7/

$$\Sigma_{23}^+(\alpha) = \frac{a_0 - E^+(\alpha)}{H^+(\alpha)}.$$

Funkcje  $U_3^-(\alpha)$  i  $\Sigma_{23}^+(\alpha)$  są regularne odpowiednio w pół-  
 płaszczyznach  $\Omega^-: \{\text{Im } \alpha < 0\}$  i  $\Omega^+: \{\text{Im } \alpha > -\delta_0\}$   
 zaś  $a_0$  jest stałą, która wyznaczona z warunku równowagi sił  
 zewnętrznych ( $\Sigma_{23}(0) = 0$ ) dana jest wzorem:

$$/6.8/ \quad a_0 = E^-(0),$$

gdzie funkcja  $E^-(\alpha)$  określona jest zależnością /6.6/.

Rozkład przemieszczenia  $u_3(x, 0) = u_3(x)$  i naprężenia  $\sigma_{23}(x, 0) = \sigma_{23}(x)$  w otoczeniu wierzchołka szczeliny, na mocy zależności /6.7/ i Tw.3 /p.3.1/, opisany będzie, zgodnie z zależnościami /1.37/, następującymi związkami:

$$/6.9/ \quad u_3(x) = \frac{2K_{III}}{4\beta_2} \sqrt{-\frac{x}{2\pi}} \quad \text{dla } x \rightarrow (-0),$$

$$\sigma_{23}(x) = K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{dla } x \rightarrow (+0),$$

gdzie współczynnik intensywności naprężenia  $K_{III}$  dany jest wzorem:

$$/6.10/ \quad K_{III} = \frac{1}{i\sqrt{h}\beta_2} \int_{-\infty-id}^{+\infty+id} \frac{E(\alpha)}{\alpha} d\alpha,$$

zaś funkcja  $E(\alpha)$  określona jest związkiem /6.5/.  
Otrzymany rezultat zilustrujemy dwoma przykładami.

#### 6.1.1. Szczelina z obciążeniem skupionym

Założmy, że powierzchnie szczeliny obciążone są dwiema jednakowymi lecz przeciwnie skierowanymi siłami skupionymi o stałej intensywności  $p$ , które przyłożone są w jednakowych odległościach  $l$  od wierzchołka szczeliny. Przy tych założeniach  $p(x) = p \delta(x+l)$  i na mocy zależności /6.1/<sub>2</sub> i /6.5/ funkcja  $E(\alpha)$  przyjmie postać:

$$/6.11/ \quad E(\alpha) = -\frac{p}{\sqrt{2\pi}} H^+(\alpha) e^{-i\alpha l},$$

gdzie funkcja  $H^+(\alpha)$  dana jest wzorem /6.4/<sub>1</sub>.

Powtarzając rozumowanie przytoczone w p.5.1, można wykazać, że traktując funkcję  $\Sigma_{23}^-(\alpha)$  jako wartość graniczną transformaty



Fouriera funkcji aproksymującej funkcję Diraca, funkcję  $E(\alpha)$  można przedstawić w pasmie  $\{|\operatorname{Im} \alpha| < \pi/2h\beta_2, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty\}$  w postaci /3.16/; oznacza to, że w rozważanym przykładzie można korzystać ze wzoru /6.10/ przyjmując, że  $0 < d < \pi/2h\beta_2$ . Wykorzystując wobec tego zależności /6.10/ i /6.11/

$$K_{III} = p \sqrt{\frac{2h\beta_2}{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha h\beta_2}{\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha h\beta_2}{\pi}\right)} e^{i\alpha} d\alpha,$$

skąd po wykonaniu całkowania [64], współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dany będzie ostatecznie wzorem [63]:

$$/6.12/ \quad K_{III} = p \sqrt{\frac{2}{h\beta_2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \exp(-\pi l/h\beta_2)}}.$$

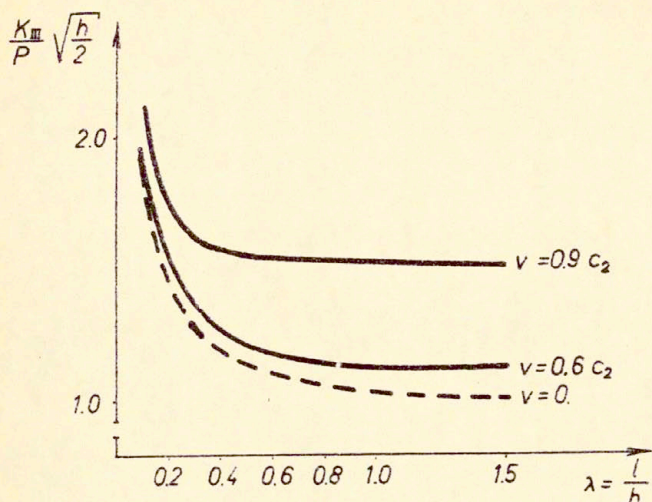
Przechodząc w tej zależności do granicy z  $h \rightarrow \infty$ , otrzymamy znane rozwiązanie dla nieograniczonego ośrodka sprężystego z półnieskończoną szczeliną:

$$K_{III} = p \sqrt{\frac{2}{\pi l}}$$

Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia danego wzorem /6.12/ dla różnych prędkości propagacji szczeliny pokazany jest na Rys.37.

### 6.1.2. Szczelina z dowolnie rozłożonym obciążeniem

Traktując zależność /6.12/ jako funkcję Greena, współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w przypadku dowolnego obciążenia powierzchni szczeliny dany będzie wzorem:



Rys.37

$$/6.13/ \quad K_{III} = \sqrt{\frac{2}{h\beta_2}} \int_0^{\infty} \frac{p(x)}{\sqrt{1 - \exp(-\pi x/h\beta_2)}} dx.$$

W przypadku gąy na powierzchniach szczeliny dane jest stałe obciążenie  $p(x) = p_0$  rozłożone równomiernie na odcinku  $-l_1 < x < -l_0$ , współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dany będzie na mocy zależności /6.13/, wzorem [63]:

$$K_{III} = \frac{P_0}{\pi} \sqrt{2h\beta_2} \ln \frac{[1 - \sqrt{1 - \exp(-\lambda_0)}][1 + \sqrt{1 - \exp(-\lambda_1)}]}{[1 + \sqrt{1 - \exp(-\lambda_0)}][1 - \sqrt{1 - \exp(-\lambda_1)}]},$$

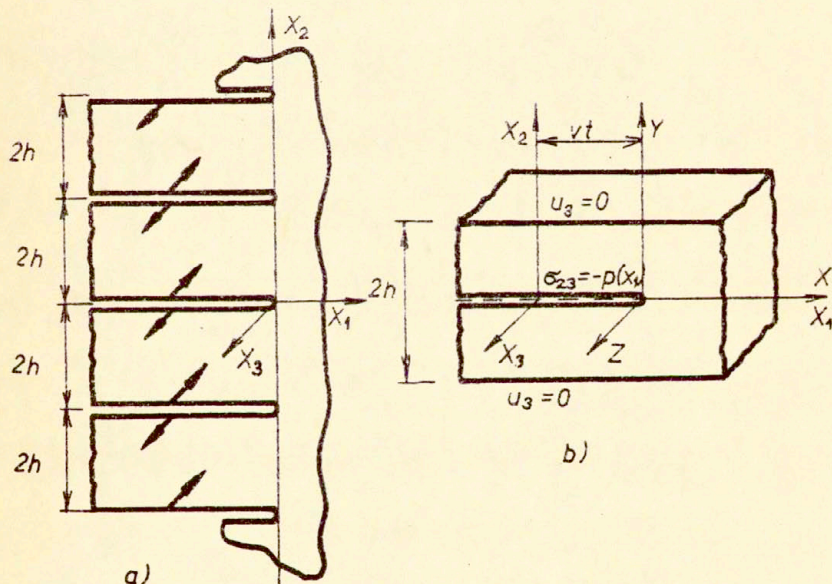
gdzie  $\lambda_0 = \pi l_0/h\beta_2$ ,  $\lambda_1 = \pi l_1/h\beta_2$ .



W celu otrzymania rozwiązań odpowiednich zagadnień statycznych należy we wszystkich podanych tutaj zależnościach przyjąć, że  $\beta_2 = 1$ .

### 6.2. Stacjonarny ruch szczelin w nieograniczonym ośrodku sprężystym

Rozważmy nieograniczony ośrodek sprężysty osłabiony nieskończoną liczbą prostoliniowych i równooddalonych od siebie półnieskończonych szczelin. Na powierzchniach szczelin dane są jednakowe i samozrównoważone obciążenia działające w kierunku osi  $x_3$  nieruchomego układu współrzędnych prostokątnych  $(x_1, x_2, x_3)$ , Rys.38a. Zakładamy, że szczeliny poruszają się w swoich płaszczyznach wraz z zadanymi obciążeniami ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością w przyjmując jednocześnie, że prędkość układu "szczelina-obciążenie" jest mniejsza od prę-



Rys.38

kości propagacji sprężystej fali poprzecznej  $c_2$ . Rozwiązanie tego zagadnienia podane zostało w pracy [65].

Układ przedstawiony schematycznie na Rys.38a sprowadza się do nieskończonej warstwy sprężystej o grubości  $2h$  osłabionej w jej środkowej płaszczyźnie półnieskończoną szczeliną /Rys.38b/. Wykorzystując następnie symetrię względem płaszczyzny środkowej warstwy, zagadnienie nasze redukuje się ostatecznie do problemu nieskończonej warstwy sprężystej z mieszanymi warunkami brzegowymi, które w ruchomym układzie współrzędnych /1.23/ o początku w wierzchołku szczeliny mają postać:

$$\begin{aligned} u_3(x,h) &= 0 & \text{dla } |x| < \infty, \\ \sigma_{23}(x,0) &= -p(x) & \text{dla } x < 0, \\ u_3(x,0) &= 0 & \text{dla } x > 0. \end{aligned}$$

Postępując identycznie jak w poprzednim punkcie, rozwiązanie tego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania, regularnego w pasmie  $\Omega: \{-\delta_0 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$ , równania funkcyjnego postaci /6.2/, w którym [65]:

$$H(\alpha) = \frac{th\alpha h\beta_2}{\alpha}.$$

Funkcja  $H(\alpha)$  jest regularna w pasmie  $\Omega_1: \{|\text{Im } \alpha| < \pi/2h\beta_2, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  i można przedstawić ją w postaci:

$$/6.14/ \quad H(\alpha) = \frac{h\beta_2}{\pi} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

gdzie

$$/6.15/ \quad H^+(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{i\alpha h\beta_2}{\pi}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{i\alpha h\beta_2}{\pi}\right)},$$

$$H^-(\alpha) = \frac{1}{H^*(-\alpha)}.$$



Funkcja  $H^+(\alpha)$  jest regularna i nie ma zer w półpłaszczyźnie  $\Omega_1^+ : \{\text{Im } \alpha > -\pi/2h\beta_2\}$ , zaś funkcja  $H^-(\alpha)$  nie ma zer w półpłaszczyźnie  $\Omega_1^- : \{\text{Im } \alpha < \pi/2h\beta_2\}$  i jest w niej regularna z wyjątkiem punktu w nieskończoności.

Po wykorzystaniu zależności /6.14/, równanie /6.2/ przyjmie postać:

$$U_3^-(\alpha) = -\frac{h}{\pi h} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)} [\Sigma_{23}^+(\alpha) + \Sigma_{23}^-(\alpha)].$$

Zakładając następnie możliwość przedstawienia funkcji  $E(\alpha)$  danej zależnością /6.5/ w postaci /3.16/, rozwiązanie naszego równania funkcyjnego opisane będzie ostatecznie zależnościami [65]:

$$U_3^-(\alpha) = \frac{h}{\pi h} \frac{E^-(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

/6.16/

$$\Sigma_{23}^+(\alpha) = -\frac{E^+(\alpha)}{H^+(\alpha)},$$

gdzie funkcje  $E^\pm(\alpha)$  dane są zależnościami /6.6/, zaś funkcje  $U_3^-(\alpha)$  i  $\Sigma_{23}^+(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^- : \{\text{Im } \alpha < 0\}$  i  $\Omega^+ : \{\text{Im } \alpha > -\delta_0\}$

Stosując procedurę użytą w p.5.2, rozkład przemieszczenia  $u_3(x,0) = u_3(x)$  i naprężenia  $\sigma_{23}(x,0) = \sigma_{23}(x)$  w otoczeniu wierzchołka szczeliny opisany będzie, zgodnie z zależnościami /1.37/, wyrażeniami /6.3/.

Współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dany będzie w tym przypadku wyrażeniem [65]:

$$/6.17/ \quad K_{III} = \frac{\sqrt{h\beta_2}}{\pi} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} E(\alpha) d\alpha$$

gdzie funkcja  $E(\alpha)$  określona jest zależnością /6.5/ przy czym funkcja  $H^+(\alpha)$  dana jest wyrażeniem /6.15/.

Otrzymany rezultat zilustrujemy kilkoma przykładami.

### 6.2.1. Szczelina z obciążeniem skupionym

Przyjmijmy, że na powierzchniach szczeliny w odległości 1 od jej wierzchołka przyłożone są dwie przeciwie skierowane i działające w kierunku osi z ruchomego układu współrzędnych prostokątnych  $(x, y, z)$  siły skupione o intensywności  $p$ , tzn.  $p(x) = p \delta(x+1)$ .

W rozważanym przykładzie funkcja  $E(\alpha)$  określona zależnością /6.11/, gdzie funkcja  $H^+(\alpha)$  dana jest wzorem /6.15/, jest regularna w pasmie  $\Omega_1$  i spełnia w nim założenia Tw.4 /p.3.1/. Fakt ten oznacza, że dozwolone jest stosowanie rozwiązania danego zależnością /6.17/ i w tym przypadku:

$$K_{III} = p \sqrt{\frac{2\pi}{h\beta_2}} e^{\frac{\pi}{2h\beta_2}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(\frac{1}{2}+p)} e^{\frac{-\pi p}{h\beta_2}} dp, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2}$$

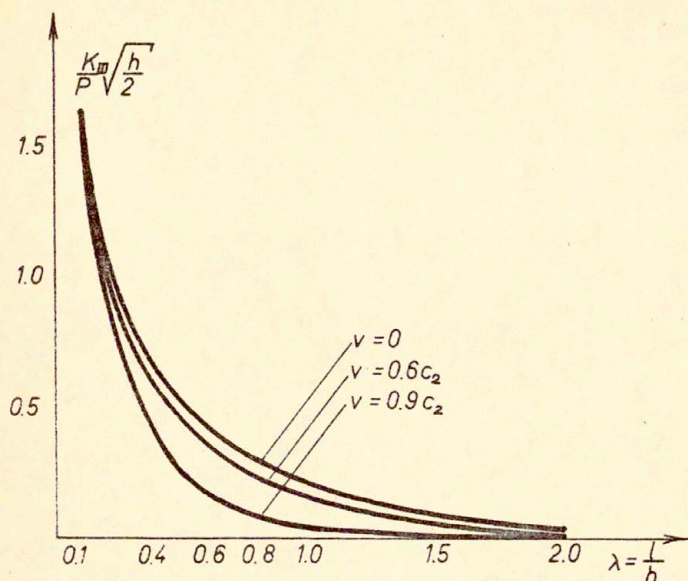
Po wykonaniu całkowania [64], współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny przyjmie ostatecznie postać [65]:

$$/6.18/ \quad K_{III} = p \sqrt{\frac{2}{h\beta_2}} \frac{1}{\sqrt{\exp(\pi l / h\beta_2) - 1}}$$

Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia  $K_{III}$  dla różnych prędkości propagacji szczeliny pokazany jest na Rys.39.

Interesujące jest porównanie wniosków wynikających z zależności /6.18/ i /6.12/. Okazuje się, że w miarę wzrostu prędkości propagacji szczeliny współczynnik intensywności naprężenia w warstwie o utwierdzonych brzegach - w odróżnieniu od współczynnika intensywności naprężenia w warstwie o swobodnym brzegu - maleje.





Rys.39

Podobny efekt można zaobserwować w przypadku, gdy maleje grubość pasma. W zagadnieniu warstwy ze swobodnym brzegami współczynnik intensywności naprężenia wzrasta, zaś w warstwie z utwierdzonymi brzegami współczynnik ten maleje.

Przechodząc w zależności /6.18/ do granicy z  $h \rightarrow \infty$  otrzymamy, tak jak poprzednio, znane rozwiązanie dla nieograniczonego ośrodka sprężystego z półnieskończoną szczeliną.

### 6.2.2. Szczelina z dowolnie rozłożonym obciążeniem

Traktując zależność /6.18/ jako funkcję Greena, współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w przypadku dowolnie obciążonych powierzchni szczeliny dany będzie wzorem:

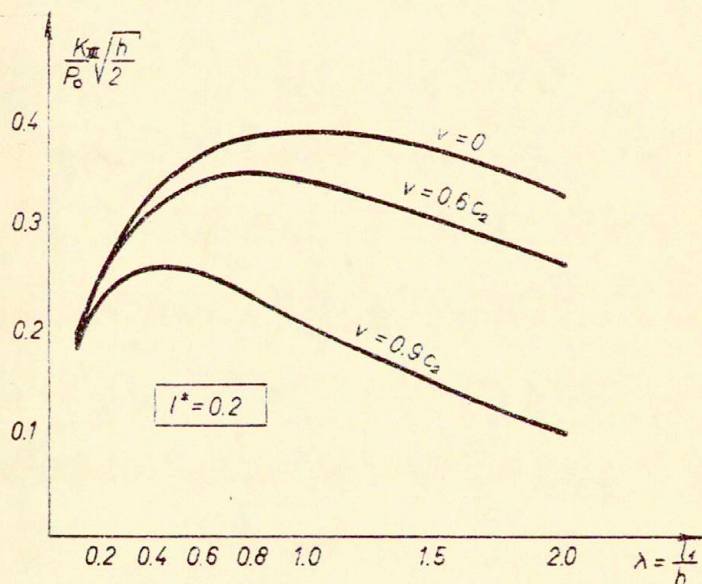
$$/6.19/ \quad K_{III} = \sqrt{\frac{2}{h\beta_2}} \int_0^{\infty} \frac{p(x)}{\sqrt{\exp(\pi x / h\beta_2) - 1}} dx.$$

Jeśli na przykład na powierzchniach szczeliny dane jest stałe obciążenie  $p(x) = p_0$  rozłożone równomiernie na odcinku  $-l_1 < x < -l_0$  to

$$/6.20/ \quad K_{III} = \frac{2p_0}{\pi} \sqrt{2h\beta_2} \left[ \text{arc tg} (\sqrt{\exp(\lambda_1) - 1}) - \text{arc tg} (\sqrt{\exp(\lambda_0) - 1}) \right],$$

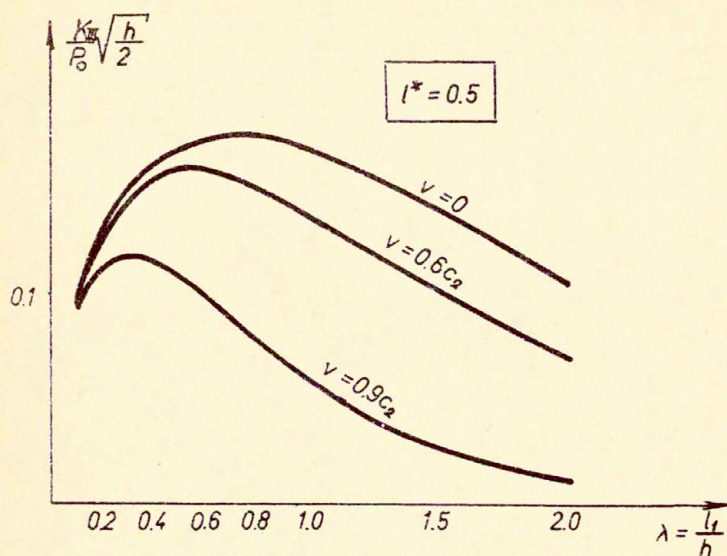
gdzie  $\lambda_0 = \pi l_0/h\beta_2$  ,  $\lambda_1 = \pi l_1/h\beta_2$

Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia danego wzorem /6.20/ dla różnych prędkości propagacji szczeliny i różnych wartości parametru  $l^* = l_0/l_1$ , pokazany jest na Rys. 40 i 41.



Rys.40





Rys.41

### 6.2.3. Szczelina ze stałym obciążeniem

Przyjmując w wyrażeniu /6.19/  $p(x) = p_0$  lub przechodząc we wzorze /6.20/ do granicy z  $\lambda_0 \rightarrow 0$  i  $\lambda_1 \rightarrow \infty$  otrzymamy współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dla przypadku gdy powierzchnie szczeliny na całej swej długości poddane są równomiernemu obciążeniu i wówczas

$$/6.21/ \quad K_{III} = p_0 \sqrt{2h\beta_2} .$$

W przykładzie tym możemy z łatwością znaleźć ścisłe rozwiązanie opisujące rozkład przemieszczenia  $u_3$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{23}$  na jej przedłużeniu.

Funkcja  $E(\alpha)$  mająca w tym przypadku postać

$$E(\alpha) = \frac{ip_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{H^+(\alpha)}{\alpha},$$

gdzie funkcja  $H^+(\alpha)$  określona jest zależnością /6.15/, jest funkcją regularną w pasmie  $\{-\pi/2h\beta_2 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$ . Stosując procedurę użytą w p.5.2, funkcje  $E^\pm(\alpha)$  dane będą wyrażeniami:

$$E^+(\alpha) = \frac{ip_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\alpha} [H^+(\alpha) - H^+(0)],$$

$$E^-(\alpha) = -\frac{ip_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{H^+(0)}{\alpha},$$

przy czym funkcje te są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_1^+$  i  $\Omega^-$ . Podstawiając otrzymane zależności do wyrażeń /6.16/ i wykonując na nich odwrotną transformację całkową Fouriera /3.5/ otrzymamy następujące związki:

$$u_3(x,0) = \frac{hp_0}{y\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} \frac{e^{-ix\alpha}}{\alpha H^+(\alpha)} d\alpha \quad \text{dla } x < 0,$$

$$\sigma_{23}(x,0) = \frac{p_0\sqrt{\pi}}{2\pi i} \int_{-\infty+ic}^{+\infty+ic} \frac{e^{-ix\alpha}}{\alpha H^+(\alpha)} d\alpha \quad \text{dla } x > 0.$$

Po wykonaniu całkowania [64], rozkład przemieszczenia  $u_3$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\sigma_{23}$  na jej przedłużeniu opisany będzie ostatecznie następującymi zależnościami [65]:



$$u_3(x,0) = \frac{2hp_0}{\pi \mu} \operatorname{arc} \cos [\exp(\pi x / 2h\beta_2)]$$

dla  $x < 0$ ,

/6.22/

$$\sigma_{23}(x,0) = p_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \exp(-\pi x / h\beta_2)}} - 1 \right]$$

dla  $x > 0$ .

#### 6.2.4. Szczelina o swobodnych powierzchniach

Rozważmy nieskończoną warstwę sprężystą o grubości  $2h$  osłabioną w środkowej płaszczyźnie półnieskończoną szczeliną. Załóżmy, że powierzchnie szczeliny są swobodne od obciążeń, zaś na górnym i dolnym brzegu warstwy dane są stałe i równe co do bezwzględnej wartości lecz przeciwie skierowane przemieszczenia  $u_3$ , /Rys.42a/.

Korzystając z zasady superpozycji, rozwiązanie naszego zagadnienia, zapisane w ruchomym układzie współrzędnych  $(x,y,z)$ , przedstawimy w postaci sumy elementarnego rozwiązania dla warstwy bez szczeliny /Rys.42b/ i dla warstwy ze szczeliną /Rys.42c/.

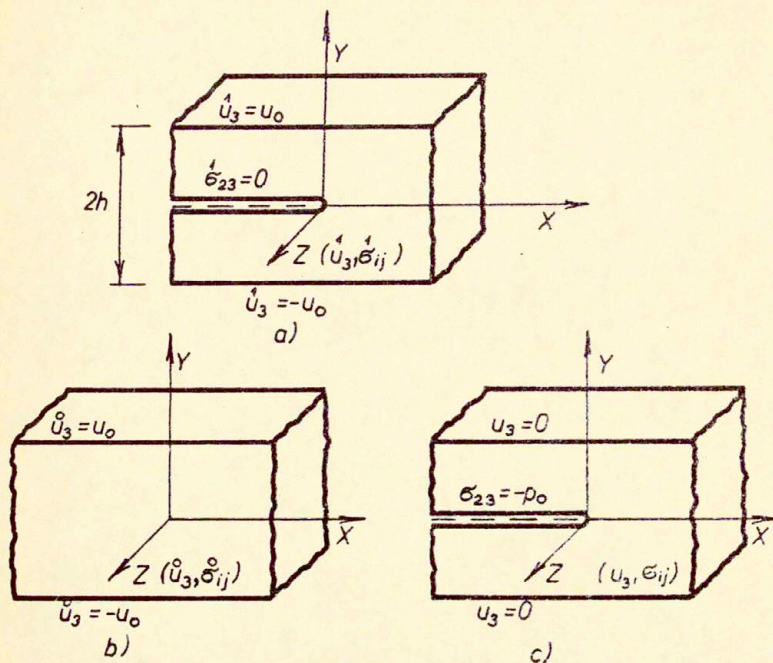
Przemieszczenie  $\overset{\circ}{u}_3$  i naprężenia  $\overset{\circ}{\sigma}_{13}$  oraz  $\overset{\circ}{\sigma}_{23}$  w zagadnieniu przedstawionym na Rys.42b dane są zależnościami:

$$\overset{\circ}{u}_3(x,y) = \frac{u_0 y}{h} ,$$

/6.23/  $\overset{\circ}{\sigma}_{13}(x,y) = 0$  ,

$$\overset{\circ}{\sigma}_{23}(x,y) = \mu \frac{u_0}{h} .$$

Dodając do siebie zależności /6.22/ i /6.23/ oraz przyjmując, że  $p_0 = \mu u_0 / h$ , rozkład przemieszczenia  $\overset{\circ}{u}_3$  na powierzchniach szczeliny i naprężenia  $\overset{\circ}{\sigma}_{23}$  na jej przedłużeniu w zagadnieniu wyjściowym /Rys.42a/ dany będzie ostatecznie zależnościami:



Rys. 42

$$u_3^1(x,y) = \begin{cases} \frac{2u_0}{\pi} \arccos[\exp(\pi x / 2h\beta_2)] & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

/6.24/

$$\sigma_{23}^1(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0, \\ \frac{\mu u_0}{h\sqrt{1 - \exp(-\pi x / h\beta_2)}} & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$



Wykorzystując zależności /6.21/ i /6.23/ względnie przechodząc w zależności /6.24/ do granicy z  $x \rightarrow 0$ , otrzymamy współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny:

$$/6.25/ \quad K_{II} = \mu u_0 \sqrt{\frac{2\beta_2}{h}} .$$

Z zależności tej wynika, że - w odróżnieniu od zagadnienia rozważanego w poprzednim przykładzie - w miarę zmniejszania się grubości warstwy, współczynnik intensywności naprężenia rośnie.

W celu otrzymania rozwiązań odpowiednich zagadnień statycznych należy we wszystkich przytoczonych tutaj związkach przyjąć, że  $\beta_2 = 1$ .

### 6.3. Stacjonarny ruch szczeliny w niejednorodnej warstwie

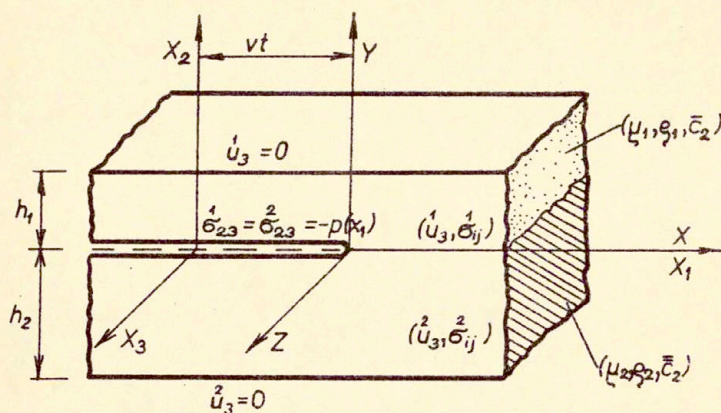
Rozważmy nieskończoną, niejednorodną i utwierdzoną na brzegach warstwę składającą się z dwóch, niejednakowej grubości, warstw różnych materiałów sprężystych. Niech w płaszczyźnie rozdzielającej te dwie warstwy znajduje się półnieskończona szczelina, na powierzchniach której dane są dowolne obciążenia działające w kierunku osi  $x_3$  nieruchomego układu współrzędnych prostokątnych  $(x_1, x_2, x_3)$ , Rys.43.

Zakładamy, że szczelina jak i dane obciążenie poruszają się w płaszczyźnie kontaktu dwóch warstw ruchem prostoliniowym ze stałą prędkością  $v$ . Oznaczając przez  $\bar{c}_2$  i  $\bar{c}_2$  prędkości propagacji sprężystych fal poprzecznych w poszczególnych warstwach, założymy dodatkowo, że prędkość ruchu układu "szczelina-obciążenie" jest mniejsza od  $\min(\bar{c}_2, \bar{c}_2)$ .

Rozwiązanie tego zagadnienia podane zostało w pracy [66].

Sformułowane powyżej zagadnienie sprowadza się do zagadnienia dwóch nieskończonych warstw sprężystych o nieciągłych warunkach brzegowych, które w ruchomym układzie współrzędnych /1.23/ o początku w wierzchołku szczeliny, mają postać:

$$/6.26/ \quad \dot{u}_3(x, h_i) = 0 \quad \text{dla} \quad |x| < \infty,$$



Rys.43

$$\begin{aligned}
 & \bar{\sigma}_{23}^1(x, 0) = -p(x) && \text{dla } x < 0, \\
 & \dot{u}_3^1(x, -h_2) = 0 && \text{dla } |x| < \infty, \\
 & \bar{\sigma}_{23}^2(x, 0) = -p(x) && \text{dla } x < 0, \\
 & \dot{u}_3^1(x, 0) = \dot{u}_3^2(x, 0) && \text{dla } x > 0, \\
 & \bar{\sigma}_{23}^1(x, 0) = \bar{\sigma}_{23}^2(x, 0) && \text{dla } x > 0,
 \end{aligned}$$

gdzie górne indeksy  $j=1,2$  wyróżniają przemieszczenia i naprężenia odpowiednio w górnej i dolnej warstwie /Rys.43/.

Wykorzystując cztery pierwsze warunki brzegowe /6.26/ oraz eliminując z zależności /4.19/ i /4.20/ funkcje  $C_j(\alpha)$ , rozwiązanie naszego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań funkcyjnych [66]:

$$16.27/ \quad \dot{U}_3(\alpha, 0) = -\frac{th \alpha h_1 \sqrt{\beta_2}}{\mu_1 \beta_2 \alpha} \sum_{23}^1(\alpha, 0),$$



$$/6.27/ \quad \dot{U}_3(\alpha, 0) = - \frac{th \alpha h_2 \bar{\beta}_2}{\mu_2 \bar{\beta}_2 \alpha} \sum_{23}^2(\alpha, 0),$$

gdzie

$$/6.28/ \quad \bar{\beta}_2^2 = 1 - v^2 / \bar{c}_2^2, \quad \bar{\beta}_2^2 = 1 - v^2 / \bar{c}_2^2,$$

zaś  $\mu_1$  i  $\mu_2$  są stałymi Lamégo odpowiednio w górnej i dolnej warstwie.

Wprowadzając oznaczenia:

$$/6.29/ \quad \begin{aligned} \dot{U}_3^-(\alpha, 0) - \dot{U}_3^+(\alpha, 0) &= U^-(\alpha), \\ \sum_{23}^-(\alpha, 0) + \sum_{23}^+(\alpha, 0) &= \Sigma_{23}^-(\alpha) + \Sigma_{23}^+(\alpha), \end{aligned}$$

oraz zakładając, że funkcje  $\dot{\Sigma}_{23}^+(\alpha)$ ,  $\dot{\Sigma}_{23}^-(\alpha)$  i  $\dot{U}_3^-(\alpha)$  dane zależnościami typu /6.1/, są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$ ,  $\{\text{Im } \alpha < \tau_1\}$  i  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ , układ równań /6.27/, po wykorzystaniu dwóch ostatnich warunków brzegowych /6.26/, redukuje się do jednego równania funkcyjnego postaci [66]:

$$/6.30/ \quad U^-(\alpha) = -H(\alpha) [ \Sigma_{23}^+(\alpha) + \Sigma_{23}^-(\alpha) ],$$

gdzie

$$/6.31/ \quad H(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{th \alpha h_1 \bar{\beta}_2}{\mu_1 \bar{\beta}_2} + \frac{th \alpha h_2 \bar{\beta}_2}{\mu_2 \bar{\beta}_2} \right),$$

przy czym obszarem regularności równania /6.30/ jest pasmo  $\Omega: \{-\delta_0 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  gdzie  $\delta_0 = \min(\tau_0, \pi/2h_1\bar{\beta}_2, \pi/2h_2\bar{\beta}_2)$ .

Wykonanie ścisłej faktoryzacji funkcji  $H(\alpha)$  danej wyrażeniem /6.31/ jest ze względu na jej złożoną postać niemożliwe. W celu przedstawienia funkcji  $H(\alpha)$  w postaci /5.6/ tak aby spełnione były postulaty przybliżonej metody faktoryzacji Koitera zauważmy, że funkcja  $H(\alpha)$  jest regularna w pasmie  $\Omega_1: \{|\operatorname{Im} \alpha| < a, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty\}$ , gdzie  $a = \min(\pi/2h_1\bar{\beta}_2, \pi/2h_2\bar{\beta}_1)$ . Spełniając wobec tego warunki /3.36/, funkcję  $\bar{H}(\alpha)$  możemy przedstawić w pasmie  $\Omega_0: \{|\operatorname{Im} \alpha| < \varepsilon_0, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty\}$ , gdzie  $\varepsilon_0 < a$  w postaci [66]:

$$/6.32/ \quad \bar{H}(\alpha) = \frac{1 + \beta^*}{\psi_1 \bar{\beta}_2} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + A^2}},$$

gdzie

$$/6.33/ \quad A = \frac{1 + \beta^*}{h_2 \bar{\beta}_2 (h^* + \psi^*)},$$

$$h^* = h_1 / h_2, \quad \psi^* = \psi_1 / \psi_2, \quad \beta^* = \psi^* \bar{\beta}_2 / \bar{\beta}_1.$$

Ostatecznie funkcję  $H(\alpha)$  można przedstawić, w pasmie  $\Omega_*: \{-\varepsilon < \operatorname{Im} \alpha < 0, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon = \min(\delta_0, \varepsilon_0)$ , w postaci:

$$/6.34/ \quad H(\alpha) = \frac{1 + \beta^*}{\psi_1 \bar{\beta}_2} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

gdzie

$$H^+(\alpha) = \frac{H_1^+(\alpha)}{T^+(\alpha)},$$

/6.35/

$$H^-(\alpha) = T^-(\alpha) H_1^-(\alpha),$$

$$T^\pm(\alpha) = \sqrt{\alpha \pm iA}.$$



Funkcja  $H^+(\alpha)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^+ : \{\text{Im } \alpha > -\varepsilon_0\}$ , funkcja  $H^-(\alpha)$  nie ma miejsc zerowych w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^- : \{\text{Im } \alpha < \varepsilon_0\}$  i jest w niej regularna z wyjątkiem punktu w nieskończoności, zaś funkcje  $H_1^\pm(\alpha)$  określone są zależnościami typu /5.9/.

Na mocy zależności /6.34/ równanie /6.31/ przyjmie postać:

$$U^-(\alpha) = -\frac{1+\beta^*}{\mu_1 \bar{\beta}_2} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)} [\Sigma_{23}^+(\alpha) + \Sigma_{23}^-(\alpha)],$$

zas obszarem jego regularności będzie pasmo  $\Omega_*$ .

Zakładając możliwość przedstawienia funkcji  $E(\alpha)$  danej zależnością /6.5/ w postaci /3.16/, rozwiązanie równania /6.30/ opisane będzie ostatecznie wyrażeniami:

$$U^-(\alpha) = \frac{1+\beta^*}{\mu_1 \bar{\beta}_2} \frac{E^-(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

$$\Sigma_{23}^+(\alpha) = -\frac{E^+(\alpha)}{H^+(\alpha)},$$

przy czym funkcje  $E^\pm(\alpha)$  określone są zależnościami typu /6.6/, zaś funkcje  $U^-(\alpha)$  i  $\Sigma_{23}^-(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_*^- : \{\text{Im } \alpha < 0\}$  i  $\Omega_*^+ : \{\text{Im } \alpha > -\varepsilon\}$ .

Stosując procedurę użytą w p.5.2, rozkład różnicy przemieszczeń  $\dot{u}_3(x, 0) - \ddot{u}_3(x, 0) = \dot{u}_3(x) - \ddot{u}_3(x)$  i naprężenia

$\sigma_{23}(x, 0) = \sigma_{23}(x)$  w otoczeniu wierzchołka szczeliny opisany będzie zależnościami:

$$\dot{u}_3(x) - \ddot{u}_3(x) = \frac{2(1+\beta^*)}{\mu_1 \bar{\beta}_2} K_{III} \sqrt{-\frac{x}{2\pi}} \quad \text{dla } x \rightarrow (-0),$$

$$\sigma_{23}(x) = K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad \text{dla } x \rightarrow (+0).$$

Współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dany jest w tym przypadku wzorem:

$$/6.36/ \quad K_{III} = \sqrt{\frac{i}{\pi}} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} E(\alpha) d\alpha,$$

przy czym funkcja  $E(\alpha)$  określona jest zależnością /6.5/ gdzie funkcja  $H^+(\alpha)$  dana jest wzorem /6.35/.

Otrzymane rezultaty zilustrujemy następującymi dwoma przykładami.

### 6.3.1. Szczelina ze stałym obciążeniem

Przyjmijmy, że powierzchnie szczeliny na całej ich długości poddane są działaniu stałego obciążenia  $p(x) = p_0$ . Na mocy zależności /6.1/ i /6.5/ funkcja

$$/6.37/ \quad E(\alpha) = \frac{i p_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{H^+(\alpha)}{\alpha},$$

gdzie funkcja  $H^+(\alpha)$  dana jest wzorem /6.35/, jest regularna w pasmie  $\{-a < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  i spełnia w nim warunki umożliwiające przedstawienie jej w postaci /3.16/ co oznacza, że w rozważanym przez nas przykładzie można korzystać z rozwiązania danego wzorem /6.36/.

Podstawiając wyrażenie /6.37/ do związku /6.36/ i wykorzystując fakt, że  $H_1^+(0) = 1$ , ściśle wartości współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dane będą wzorem:

$$/6.38/ \quad K_{III} = p_0 \sqrt{\frac{2h_2\beta_2(h^* + u^*)}{1 + \beta^*}}.$$

Z zależności tej wynika, że w miarę wzrostu prędkości propagacji szczeliny jak i w miarę zmniejszania się grubości poszczególnych warstw współczynnik intensywności naprężenia maleje.

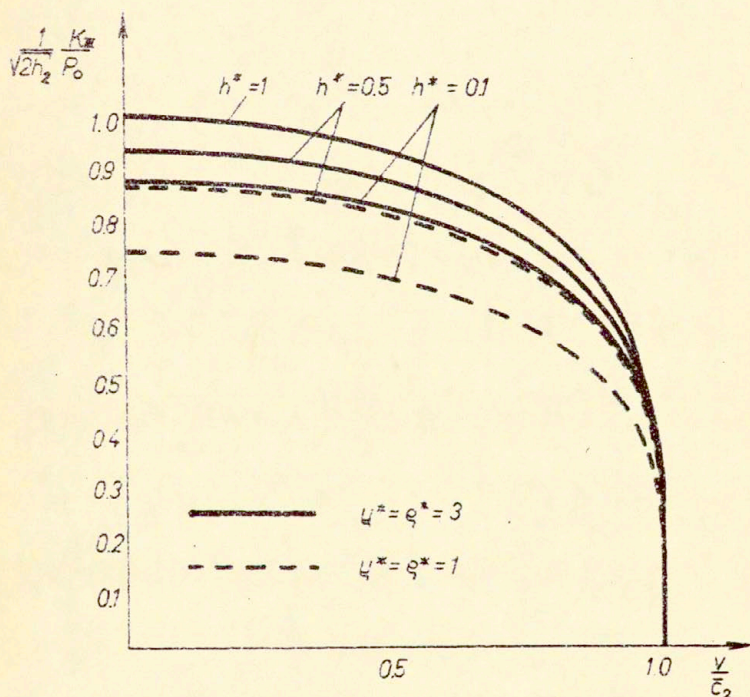


W przypadku warstwy jednorodnej ( $\mu^* = 1$ ), współczynnik intensywności naprężenia nie zależy od stosunku grubości poszczególnych warstw; wartości współczynnika intensywności naprężenia są w tym przypadku takie same jak w zagadnieniu jednorodnej warstwy z symetrycznie usytuowaną szczeliną i dane są wzorem /6.21/.

Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia danego wzorem /6.38/ jako funkcji prędkości propagacji szczeliny dla różnych wartości parametrów  $h^* = h_1/h_2$ ,  $\mu^* = \mu_1/\mu_2$  i

$\varrho^* = \varrho_1/\varrho_2$  pokazany jest na Rys.44. Wartości parametrów

$\mu^* = \varrho^* = 3$  odpowiadają w przybliżeniu kombinacji stal-aluminium.



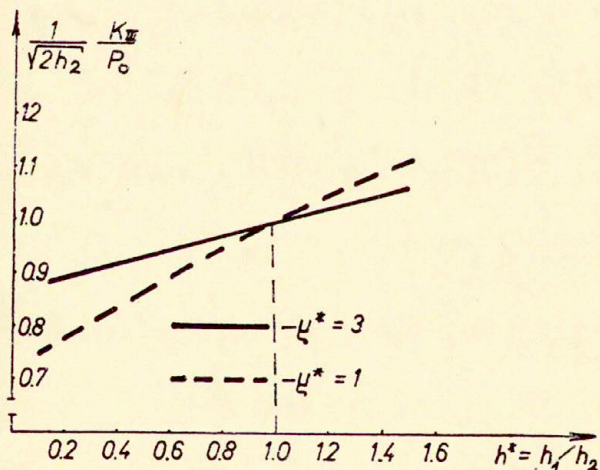
Rys.44

Przechodząc w zależności /6.38/ do granicy z  $v \rightarrow 0$ , otrzymamy rozwiązanie dla zagadnienia statycznego i wówczas

$$/6.39/ \quad K_{III}^S = p_0 \sqrt{\frac{2h_2(h^* + \mu^*)}{1 + \mu^*}}$$

Z zależności tej wynika, że w przypadku gdy warstwa jest jednorodna ( $\mu^* = 1$ ) i szczelina nie leży w płaszczyźnie środkowej warstwy ( $h^* \neq 1$ ) lub gdy warstwa jest niejednorodna ( $\mu^* \neq 1$ ) lecz szczelina leży w jej płaszczyźnie środkowej ( $h^* = 1$ ) to współczynnik intensywności naprężenia, w zagadnieniu statycznym, nie zależy od stałych materiałowych i od stosunku grubości poszczególnych warstw. Wartości współczynnika intensywności naprężenia są wówczas takie same jak w statycznym zagadnieniu warstwy jednorodnej z symetrycznie usytuowaną szczeliną i wówczas  $K_{III}^S = p_0 \sqrt{2h}$  gdzie  $2h = h_1 + h_2$ .

Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia danego wzorem /6.39/ pokazano na Rys.45.

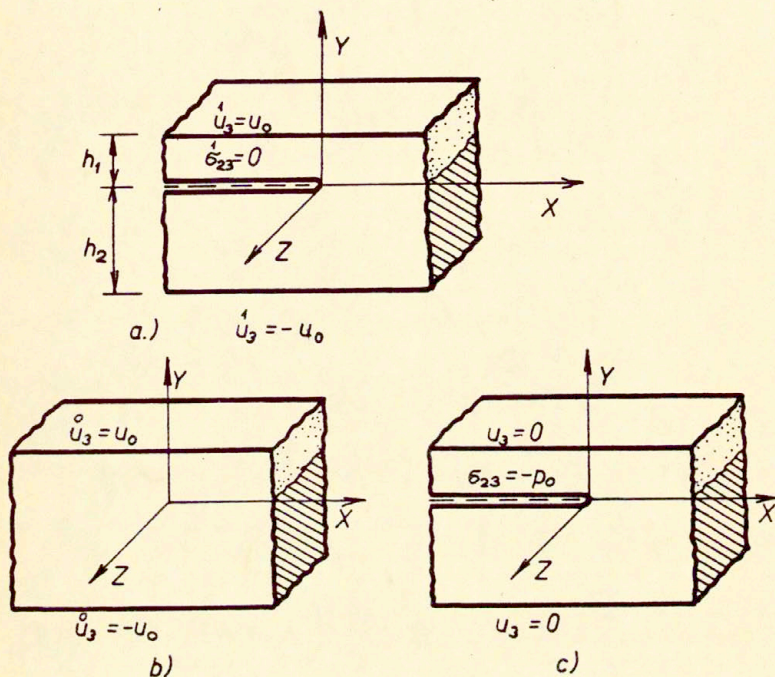


Rys.45



### 6.3.2. Szczelina o swobodnych powierzchniach

Przyjmijmy, że powierzchnie szczeliny są swobodne od obciążeń, zaś na brzegach warstwy  $x_2 = y = h_1$  i  $x_2 = y = -h_2$  dane są stałe i równe co do bezwzględnej wartości lecz przeciwnie skierowane przemieszczenia  $u_3 = \pm u_0$ , /Rys.46/.



Rys.46

Wykorzystując zasadę superpozycji, rozwiązanie tego zagadnienia /Rys.46a/ przedstawimy jako sumę rozwiązań dla warstwy bez szczeliny /Rys.46b/ i dla warstwy ze szczeliną /Rys.46c/. Rozkład przemieszczenia  $u_3$  oraz naprężeń  $\sigma_{13}$  i  $\sigma_{23}$  w zagadnieniu przedstawionym na Rys.46b dany jest zależnościami:

$$\dot{u}_3(x,y) = u_0 \begin{cases} 1 - \frac{2(h_1 - y)}{h_2(h^* + \mu^*)} & \text{dla } 0 \leq y \leq h_1, |x| < \infty, \\ -1 + \frac{2\mu^*(h_2 + y)}{h_2(h^* + \mu^*)} & \text{dla } -h_2 \leq y \leq 0, |x| < \infty, \end{cases}$$

$$/6.40/ \quad \ddot{\sigma}_{13}(x,y) = 0 \quad \text{dla } -h_2 \leq y \leq h_1, |x| < \infty,$$

$$\ddot{\sigma}_{23}(x,y) = \frac{2\mu_1 u_0}{h_2(h^* + \mu^*)} \quad \text{dla } -h_2 \leq y \leq h_1, |x| < \infty.$$

Przyjmując, że przyjęte na powierzchniach szczeliny obciążenie  $p_0$  w zagadnieniu przedstawionym na Rys.46c dane jest wzorem:

$$p_0 = \frac{2\mu_1 u_0}{h_2(h^* + \mu^*)},$$

ściślej wartości współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w naszym zagadnieniu wyjściowym /Rys.46a/ dane będą, na mocy zależności /6.38/, wzorem:

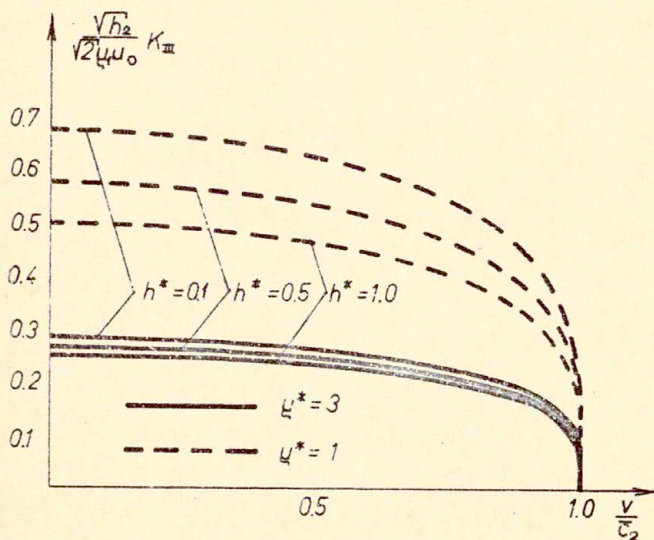
$$/6.41/ \quad K_{III} = 2\mu_1 u_0 \sqrt{\frac{2\bar{\beta}_2}{h_2(h^* + \mu^*)(1 + \beta^*)}}.$$

Z otrzymanej zależności wynika, że podobnie jak w poprzednim przykładzie, w miarę zwiększania się prędkości propagacji szczeliny wartości współczynnika intensywności naprężenia maleją, natomiast odwrotnie niż w poprzednim przykładzie, w miarę zmniejszania się grubości poszczególnych warstw, współczynnik ten rośnie.

W przypadku warstwy jednorodnej ( $\mu^* = 1$ ), współczynnik intensywności naprężenia nie zależy od stosunku grubości poszczególnych warstw; wartości współczynnika intensywności naprężenia są takie same jak w zagadnieniu jednorodnej warstwy z symetrycznie usytuowaną szczeliną i dane są zależnością /6.25/.



Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia danego wzorem /6.41/ dla różnych wartości parametrów  $h^*$ ,  $\psi^*$  i  $\xi^*$  pokazany jest na Rys.47.



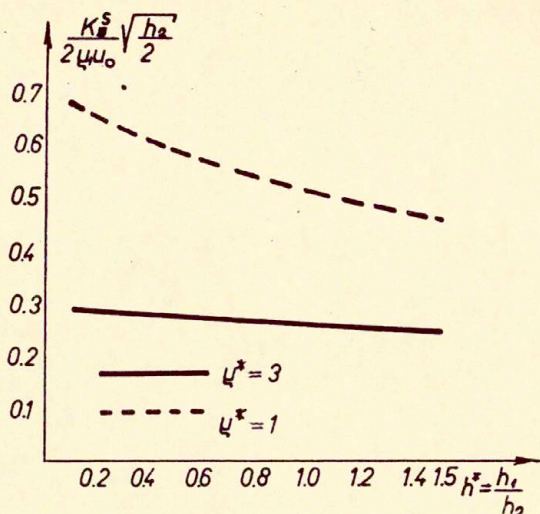
Rys.47

Przechodząc w zależności /6.41/ do granicy z  $v \rightarrow 0$ , otrzymamy ściśle wartości współczynnika intensywności naprężenia dla zagadnienia statycznego i wówczas

$$/6.42/ \quad K_{III}^S = 2\psi_1 u_0 \sqrt{\frac{2}{h_2(h^* + \psi^*)(1 + \psi^*)}}$$

Z zależności tej wynika, że w przypadku warstwy jednorodnej ( $\psi^* = 1$ ), współczynnik intensywności naprężenia  $K_{III}^S$  nie zależy od stosunku grubości poszczególnych warstw i jest taki sam jak w warstwie jednorodnej z symetrycznie usytuowaną szczeliną.

Przebieg zmienności współczynnika intensywności naprężenia  $K_{III}^S$  jako funkcji parametru  $h^*$  pokazano na Rys.48.



Rys.48

#### 6.4. Drgania harmoniczne w ośrodku sprężystym ze szczelinami

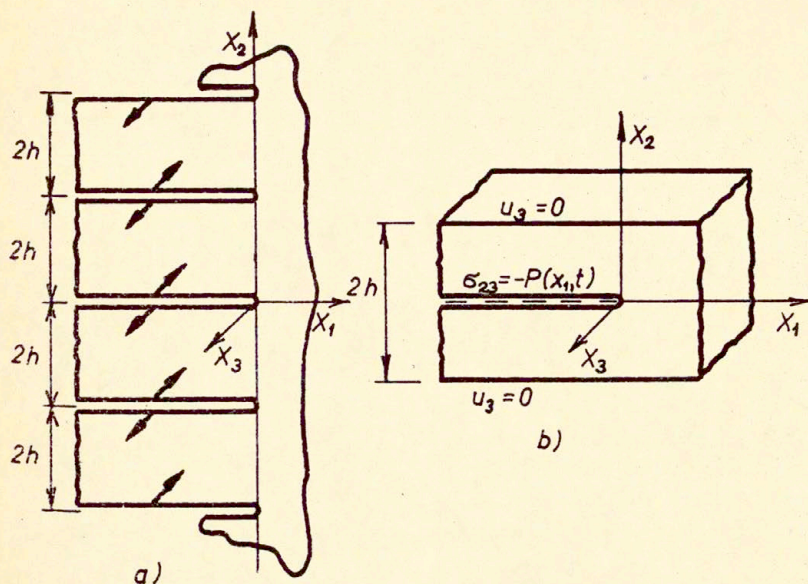
Rozważmy nieograniczony ośrodek sprężysty osłabiony nieskończoną liczbą prostoliniowych i równooddalonych od siebie półnieskończonych szczelin. Zakładamy, że powierzchnie szczelin obciążone są jednakowymi siłami zmieniającymi się w sposób harmoniczny w czasie /Rys.49a/.

Rozwiązanie tego zagadnienia podane zostało w pracy [67].

Układ przedstawiony schematycznie na Rys.49a sprowadza się do nieskończonej warstwy sprężystej o grubości  $2h$  osłabionej w jej środkowej płaszczyźnie półnieskończoną szczeliną, na powierzchni której dane jest obciążenie postaci /5.63/.

Postępując identycznie jak w p.5.3, przemieszczenie  $u_3(x_1, x_2, t)$  i naprężenia  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, t)$  przedstawimy w postaci /5.64/. Rozważając następnie jedynie dynamiczną część zagadnienia i wykorzystując symetrię względem płaszczyzny środkowej warstwy, zagadnienie przedstawione na Rys.49b sprowadza się





Rys.49

ostatecznie do problemu nieskończonej warstwy sprężystej z mieszanymi warunkami brzegowymi, które zgodnie z transformacją /4.9/ są postaci:

$$\begin{aligned} \bar{U}_3^*(x_1, h) &= 0 & \text{dla } |x_1| < \infty, \\ \bar{\sigma}_{23}^*(x_1, 0) &= -p_1(x_1) & \text{dla } x_1 < 0, \\ \bar{U}_3^*(x_1, 0) &= 0 & \text{dla } x_1 > 0. \end{aligned}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia

$$/6.43/ \quad \bar{\Sigma}_{23}^*(\alpha) = \bar{\Sigma}_{23}^*(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \bar{\sigma}_{23}^*(x_1, 0) e^{i\alpha x_1} dx_1,$$

$$\sum_{23}^{*+}(\alpha) = \sum_{23}^{*+}(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \delta_{23}^*(x_1, 0) e^{i\alpha x_1} dx_1,$$

/6.43/

$$\sum_{3}^{*-}(\alpha) = \sum_{3}^{*-}(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \delta_3^*(x_1, 0) e^{i\alpha x_1} dx_1,$$

oraz założymy, że funkcje  $\sum_{23}^{*+}(\alpha)$ ,  $\sum_{23}^{*-}(\alpha)$  i  $\sum_3^{*-}(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$ ,  $\{\text{Im } \alpha < \tau_1\}$  i  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ .

Wykorzystując warunki brzegowe naszego zagadnienia oraz eliminując z zależności /4.24/ i /4.25/ funkcje  $C_j(\alpha)$ , rozwiązanie rozważanego problemu sprowadza się do rozwiązania równania funkcyjnego postaci [67]:

$$/6.44/ \quad \sum_3^{*-}(\alpha) = -\frac{1}{4} H(\alpha) [\sum_{23}^{*+}(\alpha) + \sum_{23}^{*-}(\alpha)],$$

gdzie

$$/6.45/ \quad H(\alpha) = \frac{th h \sqrt{\alpha^2 - v_2^2}}{\sqrt{\alpha^2 - v_2^2}}, \quad v_2 = \omega / c_2.$$

Zakładając dodatkowo, że częstość drgań harmonicznyc

$\omega < \pi c_2 / 2h$ , równanie /6.44/ jest regularne w pasmie

$\Omega : \{-\delta_0 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  gdzie  $\delta_0 = \min(\tau_0, \sqrt{\pi^2 / 4h^2 - v_2^2})$ .

Z uwagi na fakt, że funkcja  $H(\alpha)$  jest regularna w pasmie

$\{\text{Im } \alpha < \sqrt{\pi^2 / 4h^2 - v_2^2}, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  możemy przyjąć, spełniając

postulaty przybliżonej metody faktoryzacji Koitera /3.36/, że

funkcja  $\bar{H}(\alpha)$ , regularna w pasmie  $\Omega_0 : \{|\text{Im } \alpha| < \varepsilon_0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$

gdzie  $\varepsilon_0 < \sqrt{\pi^2 / 4h^2 - v_2^2}$ , ma postać:



$$\bar{H}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + A^2}},$$

gdzie

$$/6.46/ \quad A = \frac{v_2}{\operatorname{tg} \theta_2}, \quad \theta_2 = h v_2.$$

Ostatecznie funkcję  $H(\alpha)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_*: \{-\varepsilon < \operatorname{Im} \alpha < 0, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon = \min(\delta_0, \varepsilon_0)$ , w postaci:

$$/6.47/ \quad H(\alpha) = \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

gdzie

$$H^+(\alpha) = \frac{H_1^+(\alpha)}{T^+(\alpha)},$$

$$/6.48/ \quad H^-(\alpha) = T^-(\alpha) H_1^-(\alpha),$$

$$T^\pm(\alpha) = \sqrt{\alpha \pm iA}.$$

Funkcja  $H^+(\alpha)$  jest regularna i nie ma miejsc zerowych w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^+ : \{\operatorname{Im} \alpha > -\varepsilon_0\}$ , funkcja  $H^-(\alpha)$  nie ma miejsc zerowych w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^- : \{\operatorname{Im} \alpha < \varepsilon_0\}$  i jest w niej regularna z wyjątkiem punktu w nieskończoności, zaś funkcje  $H_1^\pm(\alpha)$  określone są zależnościami typu /5.9/.

Na mocy zależności /6.47/, równanie /6.44/ przyjmie teraz postać:

$$\bar{U}_3^-(\alpha) = -\frac{1}{\psi} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)} \left[ \sum_{23}^{*+}(\alpha) + \sum_{23}^{*-}(\alpha) \right],$$

zaś obszarem regularności tego równania będzie pasmo  $\Omega_*$ .

Zakładając, że funkcję  $E(\alpha)$  określoną zależnością:

$$/6.49/ \quad E(\alpha) = H^+(\alpha) \Sigma_{23}^*(\alpha),$$

gdzie funkcja  $H^+(\alpha)$  dana jest wzorem /6.48/, można przedstawić w postaci /3.16/, rozwiązanie równania /6.44/ przyjmie postać:

$$/6.50/ \quad \bar{U}_3^-(\alpha) = \frac{1}{\mu} \frac{E^-(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

$$\Sigma_{23}^+(\alpha) = -\frac{E^+(\alpha)}{H^+(\alpha)},$$

przy czym funkcje  $E^\pm(\alpha)$  określone są zależnościami typu /6.6/, a funkcje  $\bar{U}_3^-(\alpha)$  i  $\Sigma_{23}^+(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_x^-: \{\text{Im } \alpha < 0\}$  i  $\Omega_x^+: \{\text{Im } \alpha > -\varepsilon\}$ .

Stosując procedurę użytą w p.5.2 i 5.3, rozkład przemieszczenia  $u_3(x_1, 0, t) = u_3(x_1, t)$  i naprężenia  $\sigma_{23}(x_1, 0, t) = \sigma_{23}(x_1, t)$  w otoczeniu wierzchołka szczeliny opisany będzie, na mocy zależności /6.50/, następującymi wyrażeniami:

$$/6.51/ \quad u_3(x_1, t) = \frac{2}{\mu} K_{III} \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}} \quad \text{dla } x_1 \rightarrow (-0),$$

$$\sigma_{23}(x_1, t) = K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} \quad \text{dla } x_1 \rightarrow (+0),$$

gdzie

$$K_{III} = K_{III}^s + K_{III}^* \cos \omega t,$$

$$/6.52/ \quad K_{III}^* = \sqrt{\frac{i}{\pi}} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} E(\alpha) d\alpha,$$



$$/6.52/ \quad K_{III}^S = \lim_{\omega \rightarrow 0} K_{III}^*$$

zaś funkcja  $E(\alpha)$  dana jest wzorem /6.49/.

Otrzymane rezultaty zilustrujemy następującymi dwoma przykładami.

#### 6.4.1. Szczelina z równomiernie rozłożonym obciążeniem

Przyjmijmy, że na powierzchniach szczeliny dane jest obciążenie:

$$P(x, t) = p_0 + p_1 \cos \omega t.$$

Rozważając jedynie dynamiczną część zagadnienia, zauważmy że funkcja  $E(\alpha)$  określona zależnością /6.49/ jest w rozważanym przypadku regularna w pasmie  $\{-\epsilon_0 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  i daje się w nim przedstawić w postaci /3.16/.

Wykorzystując wobec tego zależność /6.52/, współczynnik  $K_{III}^*$  przyjmie postać

$$K_{III}^* = \frac{p_1 \sqrt{2i}}{2\pi i} \int_{-\infty - i\epsilon}^{+\infty - i\epsilon} \frac{H_1^+(\alpha)}{\alpha \sqrt{\alpha + iA}} d\alpha.$$

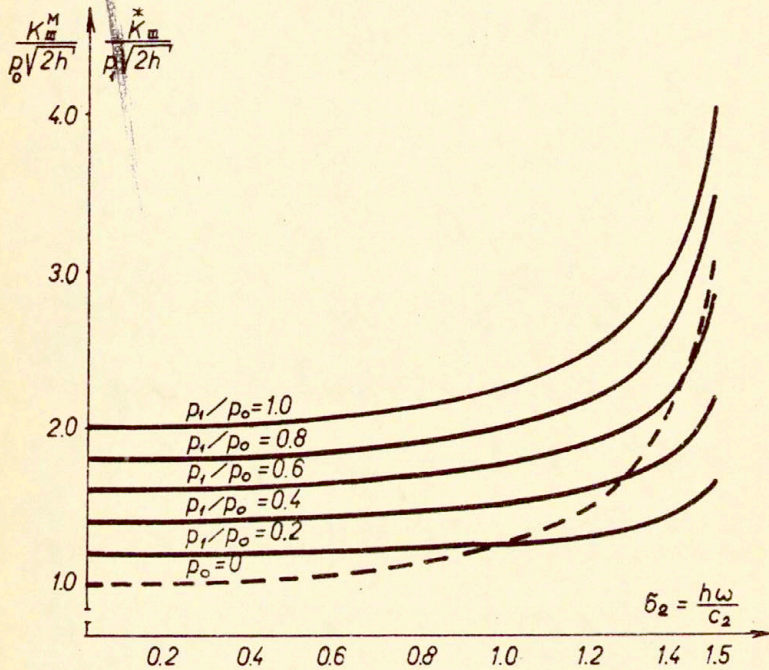
Wykonując całkowanie i wykorzystując zależność /6.46/ oraz fakt, że  $H_1^+(0) = 1$

$$/6.53/ \quad K_{III}^* = p_1 \sqrt{\frac{2h \operatorname{tg} \delta_2}{\delta_2}}$$

Ostatecznie, na mocy zależności /6.52/, i /6.53/, ściśle wartości współczynnika intensywności naprężenia w rozważanym przykładzie dane będą wzorem:

$$/6.54/ \quad K_{III} = p_0 \sqrt{2h} \left( 1 + \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\delta_2}} \cos \omega t \right).$$

Z otrzymanej zależności wynika, że w miarę zmniejszania się grubości warstwy maleje również - przy ustalonej częstotliwości drgań  $\omega$  - współczynnik intensywności naprężenia.



Rys.50

Przebieg zmienności maksymalnych wartości współczynnika intensywności naprężenia określonych zależnością:



$$K_{III}^m = p_0 \sqrt{2h} \left( 1 + \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \delta_2}{\delta_2}} \right)$$

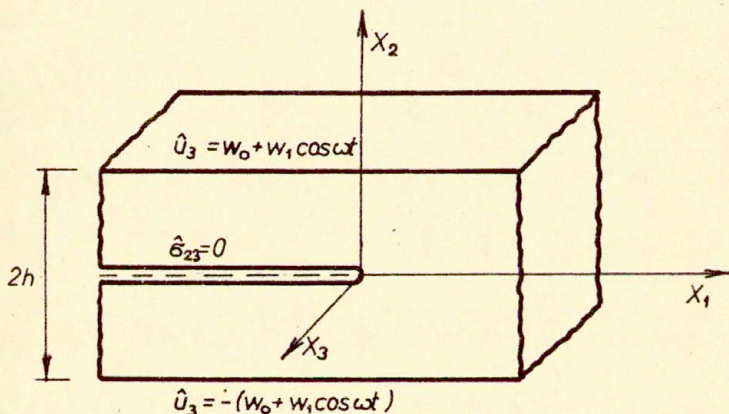
dla różnych wartości częstości  $\omega$  i stosunku  $p_1/p_0$  pokazano na Rys.50.

#### 6.4.2. Szczelina o swobodnych powierzchniach

Rozważmy nieskończoną warstwę sprężystą o grubości  $2h$  osłabioną w środkowej płaszczyźnie półnieskończoną szczeliną, której powierzchnie swobodne są od obciążeń. Przyjmijmy, że na górnym i dolnym brzegu warstwy dane jest przemieszczenie:

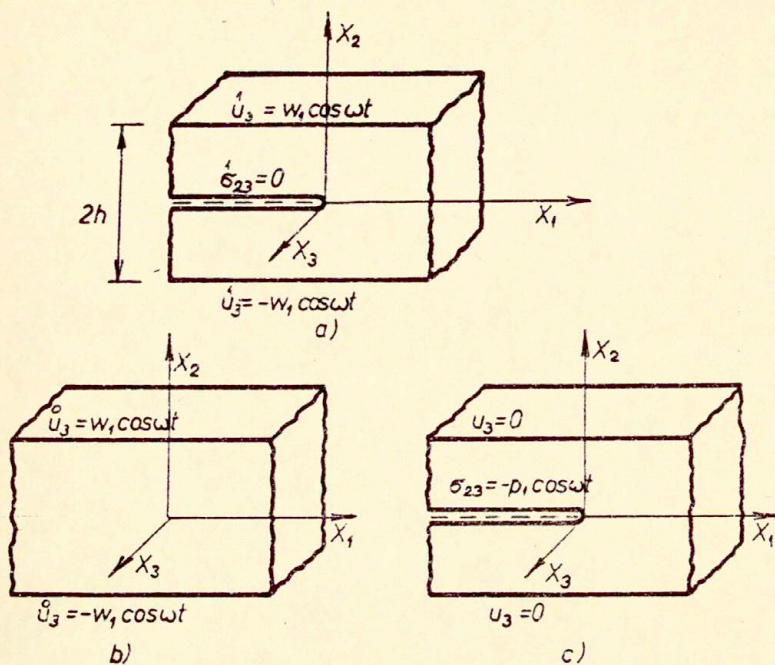
$$\hat{U}_3(x_1, \pm h, t) = \pm (w_0 + w_1 \cos \omega t) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

gdzie  $w_0$  i  $w_1$  są stałe, /Rys.51/.



Rys.51

Rozdzielając nasze zagadnienie na część statyczną i dynamiczną, rozważać będziemy jedynie zagadnienie przedstawione na Rys.52a. Rozwiązanie tego zagadnienia, korzystając z zasady superpozycji, przedstawimy w postaci sumy rozwiązań dla warstwy bez szczeliny /Rys.52b/ i warstwy ze szczeliną /Rys.52c/.



Rys.52

Rozkład przemieszczenia  $\overset{\circ}{u}_3$  i naprężeń  $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$  w zagadnieniu przedstawionym na Rys.52b ma postać:

$$\overset{\circ}{u}_3(x_1, x_2, t) = w_1 \frac{\sin \frac{1}{2} x_2}{\sin \bar{\sigma}_2} \cos \omega t,$$

16.55/

$$\overset{\circ}{\sigma}_{13}(x_1, x_2, t) = 0,$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{23}(x_1, x_2, t) = \frac{\mu w_1}{h} \frac{\bar{\sigma}_2 \cos \frac{1}{2} x_2}{\sin \bar{\sigma}_2} \cos \omega t.$$



Z zależności /6.55/ wynika, że amplituda przyjętego na powierzchniach szczeliny obciążenia w zagadnieniu przedstawionym na Rys.52c dana będzie wzorem:

$$/6.56/ \quad p_1 = \frac{\mu W_1}{h} \frac{\sigma_2}{\sin \sigma_2} .$$

Wykorzystując następnie zależność /6.53/ i /6.54/, amplituda współczynnika intensywności naprężenia w zagadnieniu przedstawionym na Rys.52a dana będzie wyrażeniem:

$$/6.57/ \quad K_{III}^* = 2\mu W_1 \sqrt{\frac{\sigma_2}{h \sin 2\sigma_2}} .$$

Przechodząc w wyrażeniu /6.57/ do granicy z  $\omega \rightarrow 0$ , współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w statycznej wersji zagadnienia przedstawionego na Rys.52a, przyjmie postać:

$$/6.58/ \quad K_{III}^s = \mu W_0 \sqrt{\frac{2}{h}} .$$

Ostatecznie, ścisłe wartości współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w naszym zagadnieniu wyjściowym /Rys.51/ dane będą, na mocy zależności /6.52/, /6.58/ i /6.57/, wzorem:

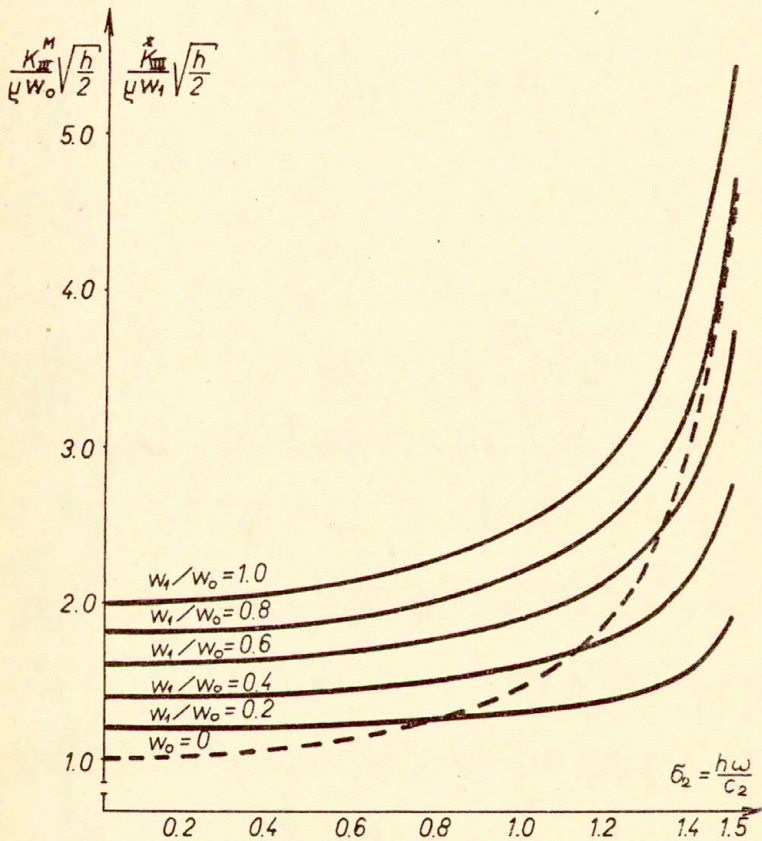
$$/6.59/ \quad K_{III} = \mu W_0 \sqrt{\frac{2}{h}} \left[ 1 + \frac{W_1}{W_0} \sqrt{\frac{2\sigma_2}{\sin 2\sigma_2}} \cos \omega t \right] .$$

Z zależności tej wynika, że przy ustalonej częstotliwości drgań  $\omega$ , w miarę zmniejszania się grubości warstwy, współczynnik intensywności naprężenia rośnie.

Przebieg zmienności maksymalnych wartości współczynnika intensywności naprężenia określonych zależnościami:

$$K_{II}^M = \mu w_0 \sqrt{\frac{2}{h}} \left( 1 + \frac{w_1}{w_0} \sqrt{\frac{2\sigma_2}{\sin 2\sigma_2}} \right)$$

pokazany jest na Rys.53.

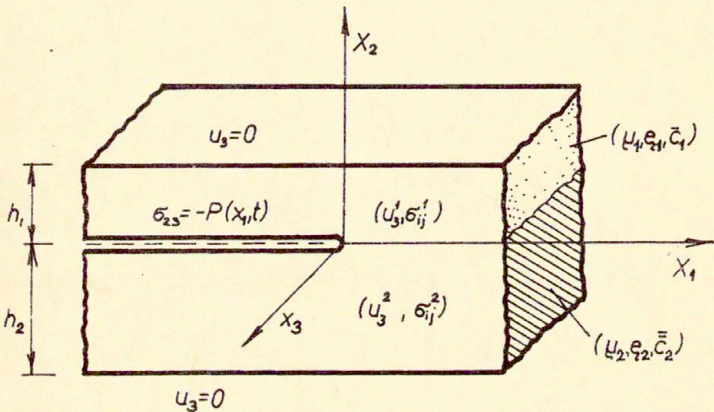


Rys.53



### 6.5. Drgania harmoniczne w niejednorodnej warstwie sprężystej osłabionej szczeliną

Rozważmy nieskończoną, niejednorodną i utwierdzoną na brzegach warstwę składającą się z dwóch, niejednakowej grubości, warstw różnych materiałów sprężystych. W płaszczyźnie rozdzielającej te dwie warstwy znajduje się półnieskończona szczelina, na powierzchni której dane jest dowolne, zmieniające się w sposób harmoniczny w czasie obciążenie działające w kierunku osi  $x_3$  nieruchomego układu współrzędnych  $(x_1, x_2, x_3)$ , /Rys.54/. Rozwiązanie tego zagadnienia podane zostało w pracy [66].



Rys.54

Zakładając, że dane na powierzchniach szczeliny obciążenie ma postać /5.63/, rozważane zagadnienia rozdzielimy na zagadnienie statyczne i dynamiczne, przyjmując że rozkład przemieszczenia  $u_3$  i naprężeń  $\sigma_{ij}$  opisany jest zależnościami /5.64/. Rozważając jedynie dynamiczną część naszego zagadnienia, rozwiązanie problemu przedstawionego na Rys.54 sprowadza się do zagadnienia dwóch nieskończonych warstw sprężystych o nieciągłych warunkach brzegowych, które zgodnie z transformacją

/4.9/ mają postać:

$$\dot{U}_3^*(x_1, h_1) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\bar{\sigma}_{23}^{*1}(x_1, 0) = -p_1(x_1) \quad \text{dla } x_1 < 0,$$

/6.60/  $\dot{U}_3^*(x_1, -h_2) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$

$$\bar{\sigma}_{23}^{*2}(x_1, 0) = -p_1(x_1) \quad \text{dla } x_1 < 0,$$

$$\dot{U}_3^*(x_1, 0) = \dot{U}_3^{*2}(x_1, 0) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

$$\bar{\sigma}_{23}^{*1}(x_1, 0) = \bar{\sigma}_{23}^{*2}(x_1, 0) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

gdzie górne indeksy  $j=1,2$  wyróżniają przemieszczenia i naprężenia odpowiednio w górnej i dolnej warstwie /Rys.54/.

Wykorzystując cztery pierwsze warunki brzegowe /6.60/ oraz eliminując z zależności /4.24/ i /4.25/ stałe  $C_j(\alpha)$ , rozwiązanie naszego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania następującego układu równań funkcyjnych [66]:

/6.61/ 
$$\dot{U}_3^*(\alpha, 0) = -\frac{th h_1 \sqrt{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}}{\mu_1 \sqrt{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}} \sum_{23}^{*1}(\alpha, 0),$$

$$\dot{U}_3^*(\alpha, 0) = \frac{th h_2 \sqrt{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}}{\mu_2 \sqrt{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}} \sum_{23}^{*2}(\alpha, 0),$$

gdzie

/6.62/ 
$$\bar{v}_2 = \frac{\omega}{C_2} \quad \bar{v} = \frac{\omega}{C_2}.$$



Po wykorzystaniu dwóch ostatnich warunków brzegowych /6.60/ i wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{aligned}
 \bar{U}^-(\alpha) &= \bar{U}_3^+(\alpha, 0) - \bar{U}_3^-(\alpha, 0), \\
 /6.63/ \quad \bar{\Sigma}_{23}^{*-}(\alpha) + \bar{\Sigma}_{23}^{*+}(\alpha) &= \bar{\Sigma}_{23}^{*1}(\alpha, 0),
 \end{aligned}$$

oraz założeniu, że funkcje  $\bar{\Sigma}_{23}^{*+}(\alpha)$ ,  $\bar{\Sigma}_{23}^{*-}(\alpha)$  i  $\bar{U}^-(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\{\text{Im } \alpha > -\tau_0\}$ ,  $\{\text{Im } \alpha < \tau_1\}$  i  $\{\text{Im } \alpha < 0\}$ , układ równań /6.61/ sprowadza się do jednego równania funkcyjnego postaci [66]:

$$/6.64/ \quad \bar{U}^-(\alpha) = -H(\alpha) [ \bar{\Sigma}_{23}^{*+}(\alpha) + \bar{\Sigma}_{23}^{*-}(\alpha) ],$$

gdzie

$$/6.65/ \quad H(\alpha) = \frac{\text{th } h_1 \sqrt{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}}{\zeta_1 \sqrt{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}} + \frac{\text{th } h_2 \sqrt{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}}{\zeta_2 \sqrt{\alpha^2 - \bar{v}_2^2}}.$$

Zakładając dodatkowo, że częstość drgań harmoniczných  $\omega < \min(\pi \bar{c}_2 / 2h_1, \pi \bar{c}_2 / 2h_2)$ , obszarem regularności tego równania jest pasmo  $\Omega : \{-\delta_0 < \text{Im } \alpha < 0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  gdzie

$$\delta_0 = \min(\tau_0, \sqrt{\pi^2 / 4h_1^2 - \bar{v}_2^2}, \sqrt{\pi^2 / 4h_2^2 - \bar{v}_2^2}).$$

Spełniając postulaty przybliżonej metody faktoryzacji Koitera - z uwagi na fakt, że funkcja  $H(\alpha)$  jest regularna i nie ma zer w pasmie  $\Omega_1 : \{|\text{Im } \alpha| < a, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  gdzie

$a = \min(\sqrt{\pi^2 / 4h_1^2 - \bar{v}_2^2}, \sqrt{\pi^2 / 4h_2^2 - \bar{v}_2^2})$  - możemy przyjąć, że w pasmie  $\Omega_0 : \{|\text{Im } \alpha| < \varepsilon_0, |\text{Re } \alpha| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon_0 < a$ , funkcja  $\bar{H}(\alpha)$  ma postać:

$$\bar{H}(\alpha) = \frac{1 + \zeta^*}{\zeta_1} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + A^2}},$$

gdzie

$$A = \frac{\bar{\delta}_2 (1 + \underline{\mu}^*)}{h_1 (\operatorname{tg} \bar{\delta}_2 + \underline{\alpha}^* \operatorname{tg} \bar{\delta}_2)},$$

/6.66/

$$\underline{\mu}^* = \underline{\mu}_1 / \underline{\mu}_2, \quad \bar{\delta}_2 = \omega h_1 / \bar{c}_2, \quad \bar{\delta}_2 = \omega h_2 / \bar{c}_2,$$

$$\underline{\alpha}^* = \underline{\mu}^* \bar{c}_2 / \bar{c}_2 = \sqrt{\underline{\mu}^* \underline{g}_1 / \underline{g}_2}.$$

Ostatecznie funkcję  $H(\alpha)$  można przedstawić w pasmie  $\Omega_*$ :  $\{-\varepsilon < \operatorname{Im} \alpha < 0, |\operatorname{Re} \alpha| < \infty\}$  gdzie  $\varepsilon = \min(\delta_0, \varepsilon_0)$  w postaci:

/6.67/ 
$$H(\alpha) = \frac{1 + \underline{\mu}^*}{\underline{\mu}_1} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

gdzie

$$H^+(\alpha) = \frac{H_1^+(\alpha)}{T^+(\alpha)},$$

/6.68/

$$H^-(\alpha) = T^-(\alpha) H_1^-(\alpha),$$

$$T^\pm(\alpha) = \sqrt{\alpha \pm iA}.$$

Funkcja  $H^+(\alpha)$  jest regularna i nie ma zer w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^+ : \{\operatorname{Im} \alpha > -\varepsilon_0\}$ , funkcja  $H^-(\alpha)$  nie ma zer w półpłaszczyźnie  $\Omega_0^- : \{\operatorname{Im} \alpha < \varepsilon_0\}$  i jest w niej regularna z wyjątkiem punktu w nieskończoności, zaś funkcje  $H_1^\pm(\alpha)$  są określone zależnościami typu /5.9/.

Na mocy zależności /6.67/, równanie funkcyjne /6.64/ przyjmie teraz postać:

$$\underline{U}^*(\alpha) = -\frac{1 + \underline{\mu}^*}{\underline{\mu}_1} \frac{H^+(\alpha)}{H^-(\alpha)} [\sum_{23}^{*+}(\alpha) + \sum_{23}^{*-}(\alpha)],$$

zaś obszarem jego regularności będzie pasmo  $\Omega_*$ .



Powtarzając przytoczone w poprzednim punkcie rozumowanie, rozwiązanie równania /6.64/ dane będzie zależnościami:

$$/6.69/ \quad \ddot{U}^-(\alpha) = \frac{1+U^*}{U_1} \frac{E^-(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

$$\ddot{\Sigma}_{23}^+(\alpha) = -\frac{E^+(\alpha)}{H^-(\alpha)},$$

gdzie funkcje  $E^\pm(\alpha)$  określone są zależnościami typu /6.6/, funkcja  $E(\alpha)$  - zależnością /6.50/, zaś funkcje  $H_1^\pm(\alpha)$  - zależnościami /6.68/; funkcje  $\ddot{U}^-(\alpha)$  i  $\ddot{\Sigma}_{23}^+(\alpha)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_{\times}^- : \{\text{Im } \alpha < 0\}$  i  $\Omega_{\times}^+ : \{\text{Im } \alpha > -\xi\}$

Stosując procedurę użytą w p.5.2 i 5.3, rozkład różnicy przemieszczeń  $u_3^1(x_1, 0, t) - u_3^2(x_1, 0, t) = u_3^1(x_1, t) - u_3^2(x_1, t)$  i naprężenia  $\sigma_{23}(x_1, 0, t) = \sigma_{23}(x_1, t)$  w otoczeniu wierzchołka szczeliny - zgodnie z zależnościami /5.64/ - opisany będzie wyrażeniami:

$$/6.70/ \quad u_3^1(x_1, t) - u_3^2(x_1, t) = \frac{2(1+U^*)}{U_1} K_{III} \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}} \quad \text{dla } x_1 \longrightarrow (-0),$$

$$\sigma_{23}(x_1, t) = K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi x_1}} \quad \text{dla } x_1 \longrightarrow (+0).$$

Współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny  $K_{III}$  dany jest zależnościami /6.53/ przy czym funkcja  $E(\alpha)$  określona jest związkami /6.50/, gdzie funkcja  $H^+(\alpha)$  dana jest wzorem /6.68/.

Otrzymane rezultaty zilustrujemy następującymi przykładami.

### 6.5.1. Szczelina z równomiernie rozłożonym obciążeniem

Przyjmijmy, że na powierzchniach szczeliny dane jest obciążenie  $P(x_1, t) = p_0 + p_1 \cos \omega t$ .

Powtarzając rozumowanie przytoczone w p.6.4, ściśle wartości

amplitudy dynamicznego współczynnika intensywności naprężenia  $K_{III}^*$ , na mocy zależności /6.53/, /6.68/ i /6.44/, dane będą ostatecznie wzorem:

$$/6.71/ \quad K_{III}^* = p_1 \sqrt{2h_2} \sqrt{\frac{h^*(\operatorname{tg} \bar{\alpha}_2 + \chi^* \operatorname{tg} \delta^* \bar{\alpha}_2)}{\bar{\alpha}_2 (1 + \mu^*)}}$$

gdzie  $\delta^* = \mu^* / h^* \chi^*$ .

Przechodząc w zależności /6.71/ do granicy z  $\omega \rightarrow 0$  otrzymamy ścisłą wartość współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w statycznej wersji zagadnienia daną wzorem /6.39/.

Ostatecznie na mocy zależności /6.52/, /6.71/ i /6.39/ ścisła wartość współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny dana będzie wzorem:

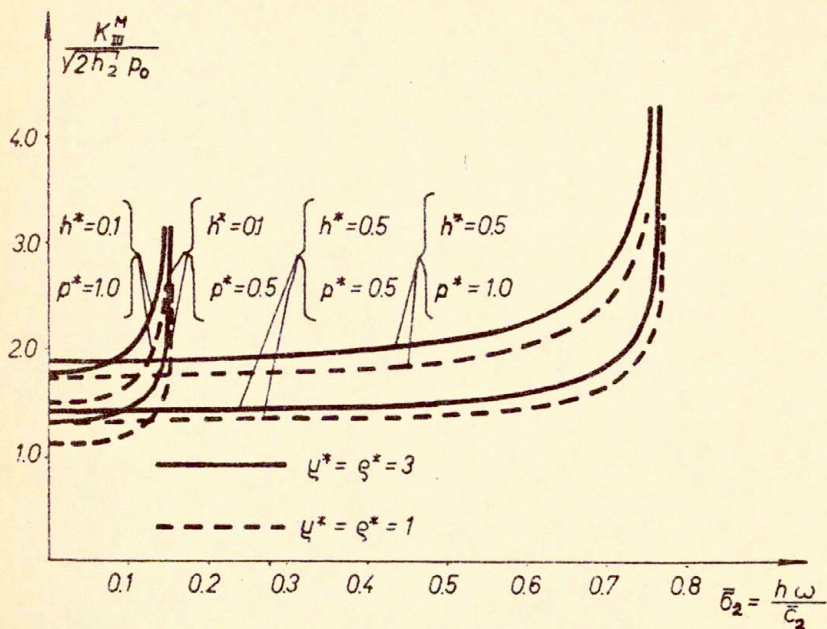
$$/6.72/ \quad K_{III} = p_0 \sqrt{\frac{2h_2}{1 + \mu^*}} \left[ \sqrt{h^* + \mu^*} + \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\frac{h^*(\operatorname{tg} \bar{\alpha}_2 + \chi^* \operatorname{tg} \delta^* \bar{\alpha}_2)}{\bar{\alpha}_2}} \cos \omega t \right].$$

Z otrzymanej zależności wynika, że w przypadku gdy częstość drgań harmonicznym  $\omega \rightarrow \min(\pi \bar{\alpha}_2 / 2h_1, \pi \bar{\alpha}_2 / 2h_2)$ , to przy dowolnie małej składowej obciążenia  $p_1$  współczynnik intensywności naprężenia  $K_{III} \rightarrow \infty$ .

Z zależności /6.72/ wynika również, że przy ustalonej wartości drgań  $\omega$ , w miarę zmniejszania się grubości poszczególnych warstw, maleje również współczynnik intensywności naprężenia. Przebieg zmienności maksymalnych wartości współczynnika  $K_{III}$  określonych zależnością:

$$K_{III}^M = p_0 \sqrt{\frac{2h_2}{1 + \mu^*}} \left[ \sqrt{h^* + \mu^*} + \frac{p_1}{p_0} \sqrt{\frac{h^*(\operatorname{tg} \bar{\alpha}_2 + \chi^* \operatorname{tg} \delta^* \bar{\alpha}_2)}{\bar{\alpha}_2}} \right]$$





Rys.55

dla różnych wartości parametrów  $\mu^*$ ,  $h^*$  i  $\rho^* = p_1/p_0$  pokazany jest na Rys.55.

Przyjmując w zależności /6.72/  $\mu^* = h^* = \rho^* = 1$  otrzymamy wyrażenie opisujące współczynnik intensywności naprężenia w zagadnieniu jednorodnej warstwy z symetrycznie usytuowaną szczeliną dany wzorem /6.55/.

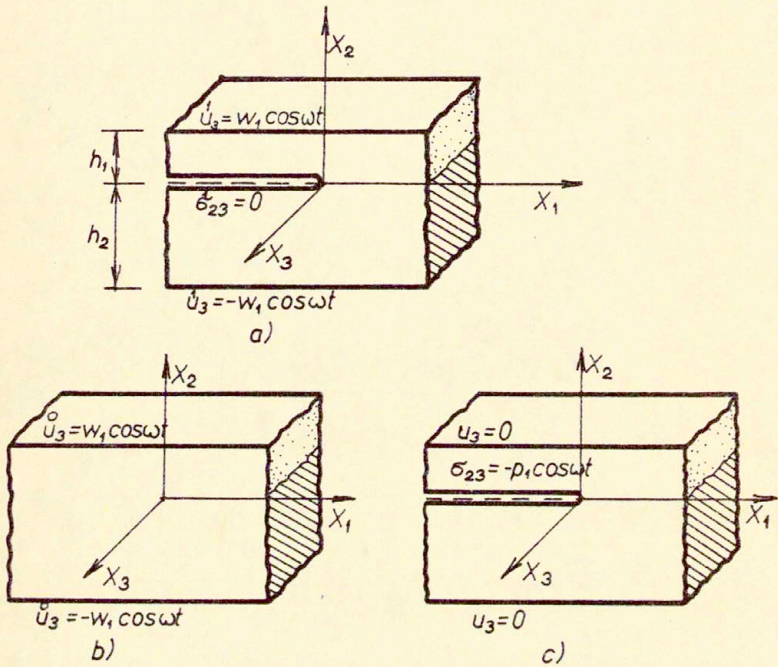
### 6.5.2. Szczelina o swobodnych powierzchniach

Rozważmy nieskończoną i niejednorodną warstwę sprężystą o grubości  $2h$  przyjmując, że powierzchnie szczeliny swobodne są od obciążeń. Zakładamy, że na brzegach warstwy dane są przemieszczenia, przy czym

$$\hat{u}_3(x_1, h_1, t) = -\hat{u}_3(x_1, -h_2, t) = w_0 + w_1 \cos \omega t \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

gdzie  $w_0$  i  $w_1$  są stałe.

Rozdzielając nasze zagadnienie na część statyczną i dynamiczną, rozważać będziemy jedynie zagadnienie dynamiczne przedstawione na Rys.56a. Korzystając następnie z zasady superpozycji rozwiązanie tego zagadnienia przedstawimy w postaci sumy rozwiązań dla warstwy bez szczeliny /Rys.56b/ i warstwy ze szczeliną /Rys.56c/.



Rys.56

Rozkład przemieszczenia  $\overset{\circ}{u}_3$  i naprężeń  $\overset{\circ}{\epsilon}_{13}$  i  $\overset{\circ}{\epsilon}_{23}$  w zagadnieniu przedstawionym na Rys.56b opisany jest zależnościami:



$$\dot{u}_3(x_1, x_2, t) = w_1 \cos \omega t \begin{cases} f(\omega) \sin \bar{v}_2 x_2 - g(\omega) \cos \bar{v}_2 x_2 \\ \text{dla } 0 \leq x_2 \leq h_1, \\ x^* f(\omega) \sin \bar{v}_2 x_2 - g(\omega) \cos \bar{v}_2 x_2 \\ \text{dla } -h_2 \leq x_2 \leq 0, \end{cases}$$

/6.73/

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{13}(x_1, x_2, t) &= 0 && \text{dla } -h_2 \leq x_2 \leq h_1, \\ \ddot{\sigma}_{23}(x_1, x_2, t) &= w_1 \cos \omega t \begin{cases} \psi_1 \bar{v}_2 [g(\omega) \sin \bar{v}_2 x_2 + f(\omega) \cos \bar{v}_2 x_2] \\ \text{dla } 0 \leq x_2 \leq h_1, \\ \psi_2 \bar{v}_2 [g(\omega) \sin \bar{v}_2 x_2 + f(\omega) \cos \bar{v}_2 x_2] \\ \text{dla } -h_2 \leq x_2 \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

gdzie

$$f(\omega) = \frac{\cos \bar{\sigma}_2 + \cos \delta^* \bar{\sigma}_2}{\cos \bar{\sigma}_2 \cos \delta^* \bar{\sigma}_2 (\operatorname{tg} \bar{\sigma}_2 + x^* \operatorname{tg} \delta^* \bar{\sigma}_2)},$$

/6.74/

$$g(\omega) = \frac{\sin \bar{\sigma}_2 - x^* \sin \delta^* \bar{\sigma}_2}{\cos \bar{\sigma}_2 \cos \delta^* \bar{\sigma}_2 (\operatorname{tg} \bar{\sigma}_2 + x^* \operatorname{tg} \delta^* \bar{\sigma}_2)}$$

Na mocy zależności /6.73/₃, amplituda przyjętego na powierzchniach szczeliny obciążenia w zagadnieniu dynamicznym /Rys.56c/, dana będzie wzorem:

$$/6.75/ \quad p_1 = \frac{\psi_1 w_1}{h_1} \frac{\bar{\sigma}_2 (\cos \bar{\sigma}_2 + \cos \delta^* \bar{\sigma}_2)}{\cos \bar{\sigma}_2 \cos \delta^* \bar{\sigma}_2 (\operatorname{tg} \bar{\sigma}_2 + x^* \operatorname{tg} \delta^* \bar{\sigma}_2)}$$

Przechodząc w zależności /6.75/ do granicy z  $\omega \rightarrow 0$  otrzymamy obciążenie powierzchni szczeliny w wersji statycznej rozważanego zagadnienia i zgodnie z zależnością /6.41/ dane ono będzie wzorem:

$$/6.76/ \quad p_0 = \frac{2 \mu_1 w_0}{h_2 (h^* + \mu^*)}$$

Podstawiając zależności /6.75/ i /6.76/ do wzoru /6.72/, współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołku szczeliny w naszym zagadnieniu wyjściowym opisany będzie ostatecznie wzorem:

$$/6.77/ \quad K_{III} = \frac{2\sqrt{2} \mu_1 w_0}{\sqrt{h_2 (1 + \mu^*)}} \left[ \frac{1}{\sqrt{h^* + \mu^*}} + \frac{w_1}{w_0} m(\omega) \cos \omega t \right],$$

gdzie

$$/6.78/ \quad m(\omega) = \frac{\cos \bar{\alpha}_2 + \cos \delta^* \bar{\alpha}_2}{2 \cos \bar{\alpha}_2 \cos \delta^* \bar{\alpha}_2} \sqrt{\frac{\bar{\alpha}_2}{h^* (\operatorname{tg} \bar{\alpha}_2 + \alpha^* \operatorname{tg} \delta^* \bar{\alpha}_2)}}$$

Z zależności /6.77/ wynika, że podobnie jak w poprzednim przykładzie, w przypadku gdy  $\omega \rightarrow \min(\pi \bar{\alpha}_2 / 2h_1, \pi \bar{\alpha}_2 / 2h_2)$  to  $K_{III} \rightarrow \infty$ .

W odróżnieniu od poprzedniego przykładu, w miarę zmniejszania się grubości poszczególnych warstw, współczynnik intensywności naprężenia, przy ustalonej częstotliwości drgań  $\omega$ , rośnie.

Przyjmując w zależności /6.77/ i /6.78/,  $\mu^* = h^* = \alpha^* = 1$ , otrzymamy wyrażenie opisujące współczynnik intensywności naprężenia w zagadnieniu jednorodnej warstwy z symetrycznie usytuowaną szczeliną dany wzorem /6.60/.



## 7. STATYCZNE ZAGADNIENIA NIEJEDNORODNEJ WARSTWY SPRĘŻYSTEJ OSŁABIONEJ DWIEMA SZCZELINAMI. ANTYPŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA

W rozdziale tym podamy rozwiązania dwóch statycznych zagadnień niejednorodnej warstwy sprężystej osłabionej dwiema późnieskończonymi szczelinami zakładając, że spełnione są założenia antypłaskiego stanu odkształcenia.

W przypadku statycznym, transformaty Fouriera przemieszczenia  $u_3(x_1, x_2)$  i naprężeń  $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$  na mocy zależności /4.19/ i /4.20/ względnie /4.24/ i /4.25/ po uprzednim przejściu w nich do granicy odpowiednio z  $v \rightarrow 0$  lub  $\omega \rightarrow 0$  opisane będą następującymi zależnościami:

$$U_3(\alpha, x_2) = C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha x_2 + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha x_2,$$

/7.1/

$$\Sigma_{13}(\alpha, x_2) = -i\alpha \mu [C_1(\alpha) \operatorname{sh} \alpha x_2 + C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha x_2],$$

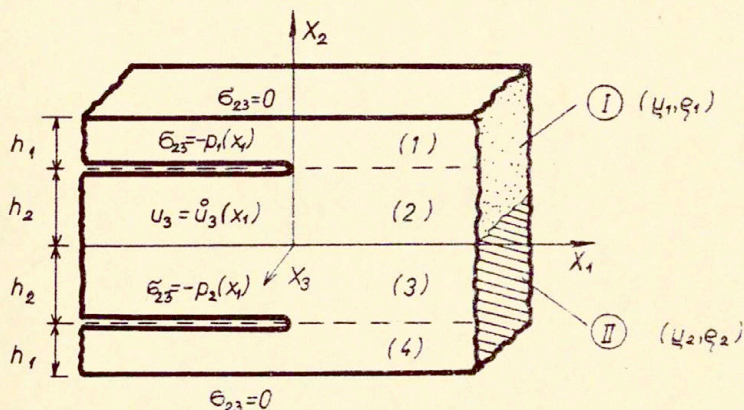
$$\Sigma_{23}(\alpha, x_2) = \mu \alpha [C_1(\alpha) \operatorname{ch} \alpha x_2 + C_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha x_2],$$

gdzie nieznanne funkcje  $C_j(\alpha)$  należy wyznaczyć z warunków brzegowych rozpatrywanego zagadnienia.

### 7.1. Zagadnienie dwóch szczelin w warstwie ze swobodnym brzegiem

Rozważmy nieskończoną warstwę sprężystą o grubości  $2h$  przyjmując, że jej płaszczyzna środkowa jest powierzchnią graniczną między dwiema nieskończonymi i jednorodnymi warstwami sprężystymi o różnych własnościach sprężystych. Zakładamy, że każda z tych warstw osłabiona jest półnieskończoną szczeliną, przy czym szczeliny te usytuowane są symetrycznie względem

powierzchni rozdzielającej wspomniane warstwy. Dodatkowo przyjmijmy, że zewnętrzne brzegi warstwy swobodne są od obciążeń, zaś na powierzchniach szczelin dane są dowolne obciążenia /Rys.57/.



Rys.57

W celu rozwiązania tak sformułowanego zagadnienia, rozdzielmy naszą warstwę wzdłuż płaszczyzny kontaktu pomiędzy dwoma różnymi materiałami, przyjmując jednocześnie, że na powstałych w ten sposób nowych powierzchni nieznane przemieszczenie  $u_3(x_1, 0) = \dot{u}_3(x_1)$  traktować będziemy jako wielkość daną. W wyniku tej operacji, rozwiązanie naszego zagadnienia wyjściowego sprowadza się do rozwiązania zagadnień I i II, które dotyczą problemu jednorodnych warstw sprężystych osłabionych pojedynczymi szczelinami /Rys.57/.

Warunki brzegowe zagadnień I i II uzupełnione odpowiednimi warunkami ciągłości wektorów przemieszczenia i naprężenia przyjmą następującą postać:



Zagadnienie I:

$$\sigma_{23}(x_1, h) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\sigma_{23}(x_1, 0) = -p_1(x_1) \quad \text{dla } x_1 < 0,$$

$$u_3(x_1, 0) = \dot{u}_3(x_1) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$[[u_3(x_1, h_2)]] = 0 \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

$$[[\sigma_{23}(x_1, h_2)]] = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty.$$

Zagadnienie II:

$$\sigma_{23}(x_1, -h) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\sigma_{23}(x_1, -h_2) = -p_2(x_1) \quad \text{dla } x_1 < 0,$$

$$u_3(x_1, 0) = \dot{u}_3(x_1) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$[[u_3(x_1, -h_2)]] = 0 \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

$$[[\sigma_{23}(x_1, -h_2)]] = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty.$$

Dodatkowo żądamy aby w płaszczyźnie kontaktu dwóch warstw spełniony był warunek ciągłości wektora naprężenia:

$$[[\sigma_{23}(x_1, 0)]] = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty.$$

Stosując standardową metodę rozwiązywania tego rodzaju problemów, zagadnienia I i II sprowadzają się do zagadnień nieskończonych warstw sprężystych z następującymi warunkami brzegowymi:

Zagadnienie I:

$$\overset{1}{\sigma}_{23}(x_1, h) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\overset{2}{u}_3(x_1, 0) = \overset{0}{u}_3(x_1) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$/7.2/ \quad \overset{1}{\sigma}_{23}(x_1, h_2) = \overset{2}{\sigma}_{23}(x_1, h_2) = -p_1(x_1) \quad \text{dla } x_1 < 0,$$

$$\overset{1}{u}_3(x_1, h_2) = \overset{2}{u}_3(x_1, h_2) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

$$\overset{1}{\sigma}_{23}(x_1, h_2) = \overset{2}{\sigma}_{23}(x_1, h_2) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

Zagadnienie II:

$$\overset{3}{u}_3(x_1, 0) = \overset{0}{u}_3(x_1) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\overset{4}{\sigma}_{23}(x_1, -h) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$/7.3/ \quad \overset{3}{\sigma}_{23}(x_1, -h_2) = \overset{4}{\sigma}_{23}(x_1, -h_2) = -p_2(x_1) \quad \text{dla } x_1 < 0,$$

$$\overset{3}{u}_3(x_1, -h_2) = \overset{4}{u}_3(x_1, -h_2) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

$$\overset{3}{\sigma}_{23}(x_1, -h_2) = \overset{4}{\sigma}_{23}(x_1, -h_2) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

oraz

$$/7.4/ \quad \overset{2}{\sigma}_{23}(x_1, 0) = \overset{3}{\sigma}_{23}(x_1, 0) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

gdzie górne indeksy (j=1,2,3,4) wyróżniają przemieszczenie  $u_3$  i naprężenie  $\sigma_{23}$  odpowiednio w warstwach (1) - (4), /Rys.57/. Po wykorzystaniu trzech pierwszych warunków brzegowych /7.2/ i /7.3/ oraz wyeliminowaniu stałych  $C_j(\alpha)$  w zależnościach



/7.1/ otrzymamy następujące wyrażenia:

$$\overset{1}{U}_3(\alpha, h_2) = - \frac{cth \alpha h_1}{\mu_1 \alpha} \overset{1}{\Sigma}_{23}(\alpha, h_2),$$

/7.5/

$$\overset{2}{U}_3(\alpha, h_2) = \frac{th \alpha h_2}{\mu_1 \alpha} \overset{2}{\Sigma}_{23}(\alpha, h_2) + \frac{\overset{\circ}{U}_3(\alpha)}{ch \alpha h_2},$$

$$\overset{3}{U}_3(\alpha, -h_2) = - \frac{th \alpha h_2}{\mu_2 \alpha} \overset{3}{\Sigma}_{23}(\alpha, -h_2) + \frac{\overset{\circ}{U}_3(\alpha)}{ch \alpha h_2},$$

$$\overset{4}{U}_3(\alpha, -h_2) = \frac{cth \alpha h_1}{\mu_2 \alpha} \overset{4}{\Sigma}_{23}(\alpha, -h_2),$$

przy czym

/7.6/

$$\overset{2}{\Sigma}_{23}(\alpha, 0) = \frac{1}{ch \alpha h_2} \overset{2}{\Sigma}_{23}(\alpha, h_2) - \mu_1 \alpha \overset{\circ}{U}_3(\alpha) th \alpha h_2,$$

$$\overset{3}{\Sigma}_{23}(\alpha, 0) = \frac{1}{ch \alpha h_2} \overset{3}{\Sigma}_{23}(\alpha, -h_2) + \mu_2 \alpha \overset{\circ}{U}_3(\alpha) th \alpha h_2.$$

Po odjęciu od siebie dwóch pierwszych i dwóch ostatnich związków występujących w zależnościach /7.5/ oraz po wyznaczeniu na mocy związku /7.4/ funkcji  $\overset{\circ}{U}_3(\alpha)$  z zależności /7.6/ otrzymamy układ równań, który po wykorzystaniu warunków ciągłości wektora przemieszczenia i naprężenia w poszczególnych przekrojach warstw przyjmie ostatecznie postać:

$$U^-(z, h^*) = -\frac{h \operatorname{ch} z}{\mu_1 z \operatorname{ch} z h^* \operatorname{sh} z (1-h^*)} \Sigma_{23}^-(z, h^*) - \frac{\dot{U}_3(z)}{\operatorname{ch} z h^*},$$

$$/7.7/ \quad U^-(z, -h^*) = -\frac{h \operatorname{ch} z}{\mu_2 z \operatorname{ch} z h^* \operatorname{sh} z (1-h^*)} \Sigma_{23}^-(z, -h^*) + \frac{\dot{U}_3(z)}{\operatorname{ch} z h^*},$$

$$\dot{U}_3(z) = \frac{h}{(\mu_1 + \mu_2) z \operatorname{sh} z h^*} [\Sigma_{23}^-(z, h^*) - \Sigma_{23}^-(z, -h^*)],$$

gdzie

$$U^-(z, h^*) = \dot{U}_3^-(z, h^*) - \dot{U}_3^-(z, h^*),$$

$$/7.8/ \quad U^-(z, -h^*) = \dot{U}_3^-(z, -h^*) - \dot{U}_3^-(z, -h^*),$$

$$z = \alpha h, \quad h^* = h_2 / h, \quad h = h_1 + h_2.$$

Układ równań /7.7/ po wyeliminowaniu funkcji  $\dot{U}_3(\alpha)$  oraz przeprowadzeniu pewnych algebraicznych przekształceń sprowadza się do dwóch pojedynczych równań funkcyjnych postaci:

$$\Phi^-(z) = -H(z) [\Phi^+(z) + S_1^-(z)],$$

/7.9/

$$\Psi^-(z) = -K(z) [\Psi^+(z) + S_2^-(z)],$$

gdzie

$$/7.10/ \quad H(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{z \operatorname{ch} z h^* \operatorname{sh} z (1-h^*)},$$



$$/7.10/ \quad K(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{z \operatorname{sh} z h^* \operatorname{sh} z (1-h^*)}.$$

Nieznane funkcje  $\Phi^\pm(z)$  i  $\Psi^\pm(z)$  określone są zależnościami:

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{h} [U^-(z, h^*) + U^-(z, -h^*)],$$

$$/7.11/ \quad \Psi^-(z) = \frac{1}{h} [\mu_1 U^-(z, h^*) - \mu_2 U^-(z, -h^*)],$$

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\mu_1} \Sigma_{23}^+(z, h^*) + \frac{1}{\mu_2} \Sigma_{23}^+(z, -h^*),$$

$$\Psi^+(z) = \Sigma_{23}^+(z, h^*) - \Sigma_{23}^+(z, -h^*),$$

zaś znane funkcje  $S_j^-(z)$ , ( $j=1,2$ ) - zależnościami:

$$/7.12/ \quad S_1^-(z) = \frac{1}{\mu_1} \Sigma_{23}^-(z, h^*) + \frac{1}{\mu_2} \Sigma_{23}^-(z, -h^*),$$

$$S_2^-(z) = \Sigma_{23}^-(z, h^*) - \Sigma_{23}^-(z, -h^*).$$

W celu określenia obszarów regularności równań /7.9/, zauważmy, że funkcja  $H(z)$  dana zależnością /7.10/1 jest regularna w pasmie  $\Omega_1: \{-\delta_1 < \operatorname{Im} z < 0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  lub

$\Omega_2: \{0 < \operatorname{Im} z < \delta_1, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$ , zaś funkcja  $K(z)$  dana zależnością /7.10/2 jest regularna w pasmie  $\Omega_3: \{-\delta_2 < \operatorname{Im} z < 0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  lub  $\Omega_4: \{0 < \operatorname{Im} z < \delta_2, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  gdzie:

$$\delta_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{1-h^*} & \text{dla } 0 \leq h^* \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{\pi}{2h^*} & \text{dla } \frac{1}{3} \leq h^* < 1, \end{cases} \quad \delta_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{1-h^*} & \text{dla } 0 \leq h^* \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{h^*} & \text{dla } \frac{1}{2} \leq h^* < 1. \end{cases}$$

Na mocy kryterium stosowalności transformacji całkowej Fouriera /3.5/ oraz z rozważań fizycznych wynika, że istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista  $s_0 < \delta_1$ , że funkcje  $\Phi^-(z)$ ,  $\Psi^-(z)$  i  $S_j^-(z)$  oraz  $\Phi^+(z)$ ,  $\Psi^+(z)$  i  $S_j^+(z)$  są regularne we wspólnych obszarach, którymi są odpowiednie półpłaszczyzny  $\{\text{Im } z < 0\}$  i  $\{\text{Im } z > -s_0\}$ . Stąd i na podstawie poprzedniej uwagi dotyczącej obszaru regularności funkcji  $H(z)$  i  $K(z)$  możemy przyjąć, że wspólnym obszarem regularności obu równań /7.9/ jest pasmo  $\Omega : \{-s_0 < \text{Im } z < 0, |\text{Re } z| < \infty\}$ .

Przystępując do rozwiązania równań /7.9/ zauważmy, że funkcje  $H(z)$  i  $K(z)$  dane zależnościami /7.10/ można przedstawić w postaci:

$$H(z) = \frac{1}{1-h^*} \frac{H^+(z)}{H^-(z)},$$

/7.13/

$$K(z) = \frac{1}{h^*(1-h^*)} \frac{K^+(z)}{K^-(z)},$$

gdzie

$$H^+(z) = \frac{\Gamma\left[1 - \frac{iz(1-h^*)}{\pi}\right] \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{izh^*}{\pi}\right) e^{\frac{i\beta z}{\pi}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{iz}{\pi}\right)},$$

/7.14/

$$H^-(z) = \frac{z^2}{H^+(-z)}, \quad K^-(z) = \frac{z^2}{K^+(-z)},$$



$$K^+(z) = \frac{\Gamma\left[1 - \frac{iz(1-h^*)}{\pi}\right] \Gamma\left(1 - \frac{izh^*}{\pi}\right) e^{\frac{iz\beta}{\pi}}}{\Gamma\left(1 - \frac{iz}{\pi}\right)},$$

/7.14/

$$\beta = \ln [(h^*)^{h^*} (1-h^*)^{1-h^*}].$$

Funkcje  $H^-(z)$  i  $K^-(z)$  nie mają zer i są regularne w półpłaszczyźnie  $\Omega^-: \{\text{Im } z < 0\}$  z wyjątkiem punktu w nieskończoności, zaś funkcje  $H^+(z)$  i  $K^+(z)$  nie mają zer i są regularne w półpłaszczyźnie  $\Omega^+: \{\text{Im } z > -s_0\}$  z wyjątkiem punktu w nieskończoności.

Wykorzystując zależności /7.13/, równania /7.9/ przyjmą postać:

$$\Phi^-(z) = -\frac{1}{1-h^*} \frac{H^+(z)}{H^-(z)} [\Phi^+(z) + S_1^-(z)],$$

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{h^*(1-h^*)} \frac{K^+(z)}{K^-(z)} [\Psi^+(z) + S_2^-(z)].$$

Zakładając istnienie pasma  $\Omega_*: \{-s_0 < -c < \text{Im } z < d < s_*, |\text{Re } z| < \infty\}$  gdzie  $s_* \gg 0$ , w którym funkcje  $E_j(\alpha)$  dane wyrażeniami

$$E_1(z) = H^+(z) S_1^-(z),$$

/7.15/

$$E_2(z) = K^+(z) S_2^-(z),$$

można przedstawić w postaci /3.16/, gdzie funkcje  $E_j^\pm(z)$  określone są zależnościami typu /6.6/, rozwiązanie równań funkcyjnych /7.9/ przyjmie ostatecznie postać:

$$\Phi^-(z) = -\frac{1}{1-h^*} \frac{a_0 - E_1^-(z)}{H^-(z)},$$

$$\Phi^+(z) = \frac{a_0 - E_1^+(z)}{H^+(z)},$$

/7.16/

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{h^*(1-h^*)} \frac{b_0 - E_2^-(z)}{K^-(z)},$$

$$\Psi^+(z) = \frac{b_0 - E_2^+(z)}{K^+(z)}.$$

Funkcje  $\Phi^-(z)$  i  $\Psi^-(z)$  oraz  $\Phi^+(z)$  i  $\Psi^+(z)$  są regularne odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^-: \{\text{Im } z < 0\}$  i  $\Omega^+: \{\text{Im } z > -s_0\}$  zaś  $a_0$  i  $b_0$  są pewnymi stałymi, które wyznaczymy z warunku równowagi sił zewnętrznych.

W rozważanym zagadnieniu warstwy ze swobodnymi brzegami, warunek równowagi sił zewnętrznych ma postać:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_{23}(x_n \pm h_2) dx_1 = 0,$$

który równoważny jest warunkowi

$$\Sigma_{23}(0, \pm h^*) = 0.$$

Wykorzystując zależności /7.1/ i /7.12/ warunek równowagi sił zewnętrznych przyjmie ostatecznie postać:

$$\Phi^+(0) + S_1^-(0) = 0,$$

/7.17/

$$\Psi^+(0) + S_2^-(0) = 0.$$

Z własności funkcji  $\Phi^+(z)$  i  $\Psi^+(z)$  oraz określenia funkcji  $S_1^-(z)$  wynika, że warunkiem określoności wyrażeń /7.17/ jest



aby  $s_* > 0$ , tzn. aby punkt  $z = 0$  należał do obszaru  $\Omega_*$ .  
 Z fizycznego punktu widzenia warunek ten oznacza, że spełnienie warunku równowagi sił zewnętrznych /7.17/ wyklucza w rozpatrywanym przez nas zagadnieniu możliwość równomiernego obciążenia powierzchni szczelin  $p(x) = \text{const.}$  dla  $x < 0$ .

Wykorzystując zależności /7.16/2 i /7.16/4 oraz fakt, że  $H^+(0) = K^+(0) = 1$ , stałe  $a_0$  i  $b_0$ , na mocy zależności /7.15/ i /3.16/, dane będą wyrażeniami:

$$/7.18/ \quad a_0 = E_1^-(0), \quad b_0 = E_2^-(0).$$

gdzie funkcje  $E_j^\pm(z)$  opisane są zależnościami typu /6.6/.

Znając funkcje  $\Phi^\pm(z)$  i  $\Psi^\pm(z)$  możemy wyznaczyć transformaty Fouriera skoków przemieszczenia  $u_3$  na powierzchniach szczelin oraz transformaty naprężenia  $\sigma_{23}$  na ich przedłużeniach. W ogólnym przypadku, wielkości te na podstawie zależności /7.11/ i /7.12/ przyjmą następującą postać:

$$U(z, h^*) = \frac{h \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left[ \Phi^-(z) + \frac{1}{\mu_2} \Psi^-(z) \right],$$

$$/7.19/ \quad U^-(z, -h^*) = \frac{h \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \left[ \Phi^-(z) - \frac{1}{\mu_1} \Psi^-(z) \right],$$

$$\Sigma_{23}^+(z, h^*) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left[ \Phi^+(z) + \frac{1}{\mu_2} \Psi^+(z) \right],$$

$$\Sigma_{23}^+(z, -h^*) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left[ \Phi^+(z) - \frac{1}{\mu_1} \Psi^+(z) \right],$$

gdzie funkcje  $\Phi^{\pm}(z)$  i  $\Psi^{\pm}(z)$  dane są związkami /7.16/.

Stosując procedurę użytą w poprzednich częściach pracy, rozwarcie powierzchni szczelin oraz rozkład naprężenia w otoczeniu wierzchołków poszczególnych szczelin opisane będą związkami:

$$[u_3(x_1, h^*)] = \frac{4K_{III}^{(1)}}{\zeta_1} \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}} \quad \text{dla } x_1 \rightarrow (-0),$$

$$[u_3(x_1, -h^*)] = \frac{4K_{III}^{(2)}}{\zeta_2} \sqrt{-\frac{x_1}{2\pi}} \quad \text{dla } x_1 \rightarrow (-0),$$

/7.20/ 
$$\sigma_{23}(x_1, h^*) = K_{III}^{(1)} \frac{1}{\sqrt{2\pi} x_2} \quad \text{dla } x_1 \rightarrow (+0),$$

$$\sigma_{23}(x_1, -h^*) = K_{III}^{(2)} \frac{1}{\sqrt{2\pi} x_2} \quad \text{dla } x_1 \rightarrow (+0),$$

gdzie współczynniki intensywności naprężenia  $K_{III}^{(1)}$  i  $K_{III}^{(2)}$  w wierzchołku górnej i dolnej szczeliny dane są wzorami:

$$K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)} = \sqrt{\frac{2\pi}{h(1-h^*)}} \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2} \left( 2a_0 + \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{\zeta_1 \zeta_2 \sqrt{h^*}} b_0 \right),$$

/7.21/

$$K_{III}^{(1)} - K_{III}^{(2)} = \sqrt{\frac{2\pi}{hh^*(1-h^*)}} b_0,$$

przy czym stałe  $a_0$  i  $b_0$  określone są zależnościami /7.18/.

Z otrzymanych rezultatów wynika, że możliwe jest określenie obciążeń powierzchni szczelin, dla których wartości współczynników intensywności naprężenia są w z góry zadany względem siebie stosunku.

1°. W przypadku gdy obciążenia powierzchni szczelin są tego rodzaju, że spełniony jest warunek

/7.22/ 
$$b_0 = 0,$$



to współczynniki intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczelin są jednakowe i dla warstwy niejednorodnej

$$/7.23/ \quad K_{III} = K_{III}^{(1)} = K_{III}^{(2)} = \sqrt{\frac{2\pi}{h(1-h^*)}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \sigma_0,$$

zaś dla warstwy jednorodnej

$$/7.24/ \quad \bar{K}_{III} = \bar{K}_{III}^{(1)} = \bar{K}_{III}^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2h(1-h^*)}} \bar{\sigma}_0,$$

gdzie

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+id}^{+\infty+id} \frac{1}{z} H^+(z) \bar{S}_1^-(z) dz,$$

/7.25/

$$\bar{S}_1^-(z) = \Sigma_{23}^-(z, h^*) + \Sigma_{23}^+(z, h^*).$$

Sytuacja taka ma miejsce między innymi w przypadku gdy obciążenia powierzchni obu szczelin są jednakowe, gdyż wówczas  $S_2^-(z) = 0$ , co jak wynika z zależności /3.15/, jest warunkiem zanikania stałej  $b_0$ .

Przyjmując, że  $p_1(x_1) = p_2(x_2)$ , z zależności /7.23/ i /7.24/ wynika, że w przypadku warstwy niejednorodnej, współczynnik intensywności naprężenia  $K_{III}$  nie zależy od stałych materiałowych i jest równy współczynnikowi intensywności naprężenia  $\bar{K}_{III}$  w warstwie jednorodnej.

Wartości współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołkach szczelin dane są wówczas wzorem:

$$/7.26/ \quad K_{III} = \bar{K}_{III} = \sqrt{\frac{2\pi}{h(1-h^*)}} \bar{a}_0,$$

gdzie

$$/7.27/ \quad \bar{a}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+id}^{+\infty+id} \frac{1}{z} H^+(z) \Sigma_{23}^-(z h^*) dz.$$

2°. Jeżeli obciążenia powierzchni szczelin są tego rodzaju, że spełniony jest warunek:

$$/7.28/ \quad a_0 = 0,$$

to współczynniki intensywności naprężenia dla warstwy niejednorodnej dane są wzorami:

$$/7.29/ \quad K_{III}^{(1)} = \sqrt{\frac{2\pi}{hh^*(1-h^*)}} \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2} b_0,$$

$$K_{III}^{(2)} = -\frac{\psi_2}{\psi_1} K_{III}^{(1)},$$

zaś dla warstwy jednorodnej - wzorami:

$$/7.30/ \quad \bar{K}_{III}^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2hh^*(1-h^*)}} b_0,$$

$$\bar{K}_{III}^{(2)} = -\bar{K}_{III}^{(1)}.$$



Warunek /7.28/ spełniony jest między innymi w przypadku gdy  $p_1(x_1)/p_2(x_1) = -\mu_1/\mu_2$

3°. Jeśli obciążenia powierzchni szczelin są tego rodzaju, że spełniony jest warunek

$$/7.31/ \quad a_0 = -\frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_1\mu_2\sqrt{h^*}} b_0,$$

to współczynniki intensywności naprężenia dla warstwy niejednorodnej dane są wzorami:

$$/7.32/ \quad K_{III}^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2hh^*(1-h^*)}} b_0,$$

$$K_{III}^{(2)} = -K_{III}^{(1)}.$$

4°. Jeśli obciążenie powierzchni szczelin jest tego rodzaju, że spełniony jest warunek

$$/7.33/ \quad a_0 = -\frac{b_0}{\mu_2\sqrt{h^*}},$$

lub

$$/7.34/ \quad a_0 = \frac{b_0}{\mu_1\sqrt{h^*}},$$

to jeden ze współczynników intensywności naprężenia znika i wówczas odpowiednio:

$$/7.35/ \quad K_{III}^{(1)} = 0,$$

$$/7.35/ \quad K_{\text{III}}^{(2)} = - \sqrt{\frac{2\pi}{hh^*(1-h^*)}} b_0,$$

lub

$$K_{\text{III}}^{(1)} = \sqrt{\frac{2\pi}{hh^*(1-h^*)}} b_0,$$

/7.36/

$$K_{\text{III}}^{(2)} = 0.$$

#### 7.1.1. Przykład

Dla ilustracji otrzymanych wyników przyjmijmy, że na powierzchniach szczelin dane są następujące obciążenia:

$$/7.37/ \quad \begin{aligned} p_1(x_1) &= p_1 \exp(\lambda_1 x_1) && \text{dla } x_1 < 0, \\ p_2(x_1) &= p_2 \exp(\lambda_2 x_1) && \text{dla } x_1 < 0, \end{aligned}$$

gdzie  $p_j = \text{const.}$ ,  $\lambda_j > 0$ , ( $j=1,2$ ).

Wykonanie na zależnościach /7.37/ transformacji całkowej Fouriera /3.5/ prowadzi do związków:

$$\Sigma_{23}^-(z, h^*) = \frac{ihp_1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z - i\lambda_1^*},$$

$$\Sigma_{23}^-(z, -h^*) = \frac{ihp_2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{z - i\lambda_2^*},$$



i stąd na mocy zależności /7.12/

$$S_1^-(z) = \frac{ih}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{p_1}{\psi_1} \frac{1}{z - i\lambda_1^*} + \frac{p_2}{\psi_2} \frac{1}{z - i\lambda_2^*} \right],$$

/7.38/

$$S_2^-(z) = \frac{ih}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{p_1}{z - i\lambda_1^*} - \frac{p_2}{z - i\lambda_2^*} \right],$$

gdzie  $\lambda_j^* = h\lambda_j$ .

W rozpatrywanym przez nas przypadku  $s_* = \min(\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ ; funkcje  $E_j(z)$  określone zależnością /7.15/ spełniają w pasmie  $\Omega_*$  założenia Tw.4 /p.3.1/ i wobec tego na mocy zależności /6.6/, /7.18/ i /7.21/ współczynniki intensywności naprężenia w wierzchołkach szczelin opisane będą ostatecznie wzorami:

$$K_{III}^{(1)} = \frac{K^+(i\lambda_1^*)}{\lambda_1^*(1+\psi^*)} \sqrt{\frac{h}{h^*(1-h^*)}} \left\{ p_1[\psi^* + g(i\lambda_1^*)] - p_2\alpha\psi^*[1 - g(i\lambda_2^*)] \right\},$$

/7.39/

$$K_{III}^{(2)} = \frac{K^+(i\lambda_2^*)}{\lambda_2^*(1+\psi^*)} \sqrt{\frac{h}{h^*(1-h^*)}} \left\{ p_2\alpha[1 + \psi^*g(i\lambda_2^*)] - p_1[1 - g(i\lambda_1^*)] \right\},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\lambda_1^* K^+(i\lambda_2^*)}{\lambda_2^* K^+(i\lambda_1^*)}, \quad \psi^* = \psi_1 / \psi_2,$$

/7.40/

$$g(i\lambda^*) = \frac{\sqrt{h^*} H^+(i\lambda^*)}{K^+(i\lambda^*)},$$

przy czym  $0 < g(i\lambda^*) < 1$  dla  $-\lambda^* > 0$ , zaś funkcje  $H^+(i\lambda^*)$  i  $K^+(i\lambda^*)$  dane są zależnościami /7.14/.

W przypadku gdy parametry  $p_j$  i  $\lambda_j$ , charakteryzujące obciążenia powierzchni szczelin są tak dobrane, że

$$\frac{p_1}{p_2} = \alpha \varrho^* \frac{1 - g(i\lambda_2^*)}{\varrho^* + g(i\lambda_1^*)},$$

lub

$$\frac{p_1}{p_2} = \alpha \frac{1 + \varrho^* g(i\lambda_2^*)}{1 - g(i\lambda_1^*)},$$

to spełniony jest wówczas warunek /7.33/ lub /7.34/ i na mocy zależności /7.35/ lub /7.36/

$$K_{III}^{(1)} = 0,$$

/7.41/

$$K_{III}^{(2)} = \frac{p_2 K^+(i\lambda_2^*)}{\lambda_2^*} \sqrt{\frac{h}{h^*(1-h^*)}} \frac{g(i\lambda_1^*) + \varrho^* g(i\lambda_2^*)}{\varrho^* + g(i\lambda_1^*)},$$

lub

$$K_{III}^{(1)} = \frac{p_1 K^+(i\lambda_1^*)}{\lambda_1^*} \sqrt{\frac{h}{h^*(1-h^*)}} \frac{g(i\lambda_1^*) + \varrho^* g(i\lambda_2^*)}{1 + \varrho^* g(i\lambda_2^*)},$$

/7.42/

$$K_{III}^{(2)} = 0.$$



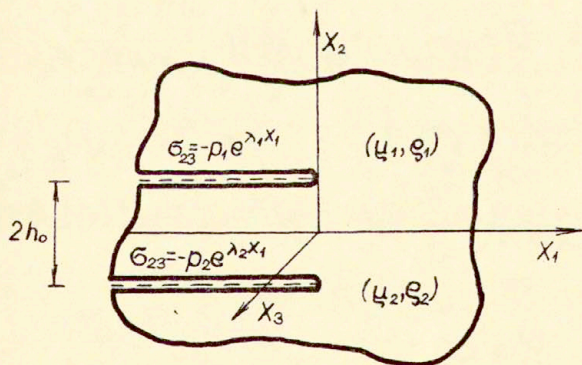
Jeśli natomiast parametry  $p_j$  i  $\lambda_j$  są tak dobrane, że  $p_1/p_2 = \alpha$  gdzie wielkość  $\alpha$  dana jest wzorem /7.41/, to spełniony jest wówczas warunek /7.22/; współczynniki intensywności naprężenia w wierzchołkach szczelin są jednakowe i na mocy zależności /7.23/

$$/7.43/ \quad K_{III} = \frac{p_2}{1 + \psi^*} \sqrt{\frac{h}{1-h^*}} \left[ \frac{\alpha}{\lambda_1^*} H^+(i\lambda_1^*) + \frac{\psi^*}{\lambda_2^*} H^+(i\lambda_2^*) \right].$$

Warunek /7.23/ jest spełniony również w przypadku, gdy powierzchnie szczelin poddane są działaniu jednakowych obciążeń. Zakładając, że  $p_1(x_1) = p_2(x_1) = p \exp(\lambda x_1)$  dla  $x_1 < 0$ , na mocy zależności /7.26/ /względnie przyjmując w zależności /7.43/  $\alpha = 1$ /, współczynnik intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczeliny dany będzie wzorem:

$$/7.44/ \quad K_{III} = \frac{p}{\lambda^*} \sqrt{\frac{h}{1-h^*}} H^+(i\lambda^*),$$

gdzie  $\lambda^* = h\lambda$ .



Rys.58

Otrzymane rezultaty możemy wykorzystać w celu określenia współczynników intensywności naprężenia w zagadnieniu nieograniczonej tarczy osłabionej dwiema szczelinami, /Rys.58/.

Przechodząc w zależnościach /7.39/ do granicy z  $h \rightarrow \infty$  oraz przyjmując, że  $h_2 = h_0$ , współczynniki intensywności naprężenia w zagadnieniu przedstawionym schematycznie na Rys. 58 przyjmą postać:

$$K_{III}^{(1)} = \frac{K_0^+(i\lambda_1)}{\lambda_1(1+\mu^*)\sqrt{h_0}} \left\{ p_1[\mu^* + g_0(i\lambda_1)] - p_2 \alpha_0 \mu^* [1 - g_0(i\lambda_2)] \right\},$$

/7.45/

$$K_{III}^{(2)} = \frac{K_0^+(i\lambda_1)}{\lambda_1(1+\mu^*)\sqrt{h_0}} \left\{ p_2 \alpha_0 [1 + \mu^* g_0(i\lambda_2)] - p_1 [1 - g_0(i\lambda_1)] \right\},$$

gdzie

$$g_0(i\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda h_0}{\pi}} \frac{H_0^+(i\lambda)}{K_0^+(i\lambda)},$$

/7.46/

$$\alpha_0 = \frac{\lambda_1 K_0^+(i\lambda_2)}{\lambda_2 K_0^+(i\lambda_1)},$$

$$H_0^+(i\lambda) = e^{-\frac{\lambda h_0}{\pi} (1 - \ln \frac{\lambda h_0}{\pi})} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda h_0}{\pi}\right),$$



$$17.46/ \quad K_0^+(i\lambda) = e^{\frac{\lambda h_0}{\pi}(1 - \ln \frac{\lambda h_0}{\pi})} \Gamma\left(1 + \frac{\lambda h_0}{\pi}\right).$$

W przypadku gdy wielkości  $p_j$  i  $\lambda_j$  są tak dobrane, że

$$\frac{p_1}{p_2} = \alpha_0 \mu^* \frac{1 - g_0(i\lambda_2)}{\mu^* + g_0(i\lambda_1)},$$

lub

$$\frac{p_1}{p_2} = \alpha_0 \frac{1 + \mu^* g_0(i\lambda_2)}{1 - g_0(i\lambda_1)},$$

to współczynniki intensywności naprężenia w wierzchołkach szczelin dane będą odpowiednio wzorami:

$$K_{II}^{(1)} = 0,$$

$$K_{II}^{(2)} = \frac{p_2 K_0^+(i\lambda_2)}{\lambda_2} \frac{g_0(i\lambda_1) + \mu^* g_0(i\lambda_2)}{\mu^* + g_0(i\lambda_1)},$$

lub

$$K_{II}^{(1)} = \frac{p_1 K_0^+(i\lambda_1)}{\lambda_1} \frac{g_0(i\lambda_1) + \mu^* g_0(i\lambda_2)}{1 + \mu^* g_0(i\lambda_2)},$$

$$K_{II}^{(2)} = 0.$$

Jeśli  $p_1/p_2 = \alpha_0$  gdzie wielkość  $\alpha_0$  dana jest wzorem /7.46/, to współczynniki intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczelin są jednakowe i w tym przypadku

$$/7.47/ \quad \overset{\circ}{K}_{III} = \frac{P_2}{(1+\mu^*)\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\alpha_0}{\sqrt{\lambda_1}} H_0^+(i\lambda_1) + \frac{\mu^*}{\sqrt{\lambda_2}} H_0^+(i\lambda_2) \right],$$

przy czym funkcja  $H_0^+(i\lambda)$  określona jest zależnością /7.46/.

W przypadku gdy powierzchnie obu szczelin obciążone są jednakowymi siłami, czyli gdy  $\sigma_{23}(x, \pm h_0) = -p \exp(\lambda x)$ , to na mocy zależności /7.47/, współczynnik intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczeliny dany będzie wzorem:

$$\overset{\circ}{K}_{III} = \frac{P}{\sqrt{\pi\lambda}} H_0^+(i\lambda).$$

## 7.2. Zagadnienie dwóch szczelin w warstwie z utwierdzonym brzegiem

Przyjmijmy, że brzegi niejednorodnej warstwy sprężystej o grubości  $2h$  są utwierdzone i powierzchnie szczelin poddane są działaniu obciążeń  $p_1(x_1)$  i  $p_2(x_2)$ , /Rys.59/.

Rozwiązanie tego zagadnienia podane zostało w pracy [68].

Postępując identycznie jak w poprzednim punkcie, rozwiązanie naszego zagadnienia sprowadza się do rozwiązania zagadnień I i II, dla których warunki brzegowe, uzupełnione odpowiednimi warunkami ciągłości przemieszczenia i naprężenia, mają postać:

Zagadnienie I:

$$\overset{1}{u}_3(x_1, h) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\overset{2}{u}_3(x_1, 0) = \overset{0}{u}_3(x_1) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$



$$\overset{1}{\sigma}_{23}(x_1, 0) = \overset{2}{\sigma}_{23}(x_1, 0) = -p_1(x_1) \quad \text{dla } x_1 < 0,$$

$$\overset{1}{u}_3(x_1, h_2) = \overset{2}{u}_3(x_1, h_2) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

$$\overset{1}{\sigma}_{23}(x_1, h_2) = \overset{2}{\sigma}_{23}(x_1, h_2) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

Zagadnienie II:

$$\overset{3}{u}_3(x_1, 0) = \overset{0}{u}_3(x_1) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\overset{4}{u}_3(x_1, -h) = 0 \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

$$\overset{3}{\sigma}_{23}(x_1, -h_2) = \overset{4}{\sigma}_{23}(x_1, -h_2) = -p_2(x_1) \quad \text{dla } x_1 < 0,$$

$$\overset{3}{u}_3(x_1, -h_2) = \overset{4}{u}_3(x_1, -h_2) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

$$\overset{3}{\sigma}_{23}(x_1, -h_2) = \overset{4}{\sigma}_{23}(x_1, -h_2) \quad \text{dla } x_1 > 0,$$

oraz

$$\overset{2}{\sigma}_{23}(x_1, 0) = \overset{3}{\sigma}_{23}(x_1, 0) \quad \text{dla } |x_1| < \infty,$$

przy czym górne indeksy ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) wyróżniają przemieszczenie  $u_3$  i naprężenia  $\sigma_{ij}$  odpowiednio w warstwach (1) - (4), /Rys.57/.

Rozpatrywane przez nas zagadnienie sprowadza się do rozwiązania dwóch równań funkcyjnych postaci /7.9/, przy czym występujące w nich funkcje  $H(z)$  i  $K(z)$  określone są zależnościami:

$$/7.48/ \quad H(z) = \frac{sh z}{z ch z h^* ch z (1 - h^*)},$$

$$/7.48/ \quad K(z) = \frac{ch z}{z sh z h^* ch z (1-h^*)},$$

zaś funkcje  $\Phi^\pm(z)$  i  $\Psi^\pm(z)$  oraz funkcje  $S_j^\pm(z)$  dane są związkami /7.11/ i /7.12/.

Funkcja  $H(z)$  dana zależnością /7.48/, jest regularna w pasmie  $\Omega_1: \{|\operatorname{Im} z| < \delta_1, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$ , zaś funkcja  $K(z)$  dana zależnością /7.48/2 jest regularna w pasmie  $\Omega_2: \{-\delta_2 < \operatorname{Im} z < 0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  lub  $\Omega_3: \{0 < \operatorname{Im} z < \delta_2, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$  gdzie:

$$\delta_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{2(1-h^*)} & \text{dla } 0 < h^* \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{2h^*} & \text{dla } \frac{1}{2} \leq h^* < 1, \end{cases} \quad \delta_2 = \begin{cases} \frac{\pi}{2(1-h^*)} & \text{dla } 0 < h^* \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{\pi}{h^*} & \text{dla } \frac{2}{3} \leq h^* < 1, \end{cases}$$

Na mocy kryterium stosowalności transformacji całkowej Fouriera /3.5/ oraz z rozważań fizycznych możemy przyjąć, że wspólnym obszarem regularności obu równań /7.9/ jest pasmo

$\Omega: \{-s_0 < \operatorname{Im} z < 0, |\operatorname{Re} z| < \infty\}$ , gdzie  $s_0 < \delta_1$ .

Przystępując do rozwiązywania równań /7.9/ zauważmy, że funkcje dane zależnością /7.48/ można przedstawić w postaci:

$$/7.49/ \quad H(z) = \frac{1}{\pi^2} \frac{H^+(z)}{H^-(z)},$$

$$K(z) = \frac{1}{h^*} \frac{K^+(z)}{K^-(z)},$$

gdzie

$$/7.50/ \quad H^\pm(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{iz(1-h^*)}{\pi}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{izh^*}{\pi}\right) e^{\frac{i\beta z}{\pi}}}{\Gamma\left(1 - \frac{iz}{\pi}\right)},$$



$$K^+(z) = \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2} - \frac{iz(1-h^*)}{\pi}\right] \Gamma\left(1 - \frac{izh^*}{\pi}\right) e^{\frac{i\beta z}{\pi}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{iz}{\pi}\right)},$$

/7.50/

$$H^-(z) = \frac{1}{H^+(-z)}, \quad K^-(z) = \frac{z^2}{K^+(-z)},$$

$$\beta = \ln [(h^*)^{h^*} (1-h^*)^{1-h^*}].$$

Funkcje  $H^\pm(z)$  są regularne i nie mają miejsc zerowych odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega_1^+ : \{\text{Im } z > -\delta_1\}$  i  $\Omega_1^- : \{\text{Im } z < \delta_1\}$ ; funkcja  $K^+(z)$  nie ma zer w półpłaszczyźnie  $\Omega_2^+ : \{\text{Im } z > -\delta_2\}$  i jest w niej regularna z wyjątkiem punktu w nieskończoności, zaś funkcja  $K^-(z)$  jest regularna i nie ma zer w półpłaszczyźnie  $\Omega^- : \{\text{Im } z < 0\}$ .

Wykorzystując zależności /7.49/, równania /7.9/ przyjmą teraz postać:

$$\Phi^-(z) = -\frac{1}{\pi^2} \frac{H^+(z)}{H^-(z)} [\Phi^+(z) + S_1^-(z)],$$

/7.51/

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{h^*} \frac{K^+(z)}{K^-(z)} [\Psi^+(z) + S_2^-(z)].$$

Zakładając istnienie pasma  $\Omega_* : \{-s_0 < -c < \text{Im } z < d < s_*$ ,  $|\text{Re } z| < \infty\}$  gdzie  $s_* \gg 0$ , w którym funkcje  $E_j(z)$  dane związkami /7.15/ można przedstawić w postaci /3.6/, rozwiązanie równań funkcyjnych /7.51/ przyjmie ostatecznie postać:

$$\Phi^-(z) = \frac{1}{\pi^2} \frac{E_1^-(z)}{H^-(z)},$$

$$\Phi^+(z) = -\frac{E_1^+(z)}{H^+(z)},$$

17.52/

$$\Psi^-(z) = -\frac{1}{h^*} \frac{b_0 - E_2^-(z)}{K^-(z)},$$

$$\Psi^+(z) = \frac{b_0 - E_2^+(z)}{K^+(z)},$$

gdzie funkcje  $E_j^\pm(z)$  dane są wzorami:

$$17.53/ \quad E_j^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} \frac{E_j(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

$$E_j^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + id}^{+\infty + id} \frac{E_j(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Funkcje  $\Phi^-(z)$  i  $\Psi^-(z)$  oraz  $\Phi^+(z)$  i  $\Psi^+(z)$  są funkcjami regularnymi odpowiednio w półpłaszczyznach  $\Omega^-: \{\text{Im } z < 0\}$  i  $\Omega^+: \{\text{Im } z > -s_0\}$  zaś  $b_0$  jest stałą, którą wyznaczymy z warunku równowagi sił zewnętrznych.

W rozważanym przez nas zagadnieniu warstwy z utwierdzoneymi brzegami, warunek równowagi sił zewnętrznych ma postać:

$$17.54/ \quad \Sigma_{23}(0, h) - \Sigma_{23}(0, -h) = 0.$$

Z drugiej strony, wykorzystując zależności /7.1/, można pokazać, że w naszym przypadku



$$\Sigma_{23}(\alpha, \pm h) = \frac{\Sigma_{23}(\alpha, \pm h_2)}{ch \alpha (h - h_2)}$$

i wówczas warunek równowagi /7.54/ przyjmie postać:

$$/7.55/ \quad \Sigma_{23}(0, h^*) - \Sigma_{23}(0, -h^*) = 0.$$

Wykorzystując następnie zależności /7.11/₄ i /7.12/₂, warunek równowagi sił zewnętrznych, na mocy zależności /7.55/, dany będzie ostatecznie związkiem:

$$/7.56/ \quad \Psi^+(0) + S_2^-(0) = 0.$$

Jeśli obciążenia powierzchni szczeliny są tego rodzaju, że punkt  $z = 0$  należy do pasma  $\Omega_*$ , czyli gdy  $s_* > 0$ , z własności funkcji  $\Psi^+(z)$  i  $S_2^-(z)$  wynika, że wyrażenie /7.56/ ma sens i nie jest konieczne przyjmowanie dodatkowych założeń dotyczących obciążeń powierzchni szczelin.

Natomiast w przypadku gdy obciążenia powierzchni szczelin są tego rodzaju, że punkt  $z = 0$  nie należy do pasma  $\Omega_*$ , czyli gdy  $s_* = 0$ , to aby wyrażenie /7.56/ miało sens należy przyjąć, że wartość funkcji  $S_2^-(z)$  w punkcie  $z = 0$  jest skończona. Założenie to, na mocy definicji transformacji całkowej Fouriera /3.5/, prowadzi do dodatkowego żądania odnośnie obciążeń powierzchni szczeliny, a mianowicie do żądania zbieżności następującej całki:

$$\int_{-\infty}^0 [\sigma_{23}(x_1, h_2) - \sigma_{23}(x_1, -h_2)] dx_1.$$

Wykorzystując zależności /7.52/₄ i /7.56/ oraz fakt, że  $K(0) = 1$ , w ogólnym przypadku

$$/7.57/ \quad b_0 = E_2^+(0) - S_2^-(0); \quad (s_* \geq 0),$$

zaś w przypadku gdy  $s_* > 0$ , to na mocy zależności /7.15/ i /6.6/, stała  $b_0$  dana będzie wzorem:

$$/7.58/ \quad b_0 = E_2^-(0), \quad (s_* = 0).$$

Znajomość funkcji  $\Phi^\pm(z)$  i  $\Psi^\pm(z)$  danych zależnościami /7.52/ pozwala wyznaczyć transformaty Fouriera skoków przemieszczenia  $u_3$  na powierzchniach szczelin oraz transformaty naprężenia  $\sigma_{23}$  na ich przedłużeniu; wielkości te opisane są związkami /7.19/.

Stosując procedurę użytą w p.5.2, rozwarcie powierzchni szczelin oraz rozkład naprężenia  $\sigma_{23}$  w otoczeniu wierzchołków poszczególnych szczelin opisane będą zależnościami /7.22/, gdzie współczynniki intensywności naprężenia w wierzchołkach szczelin dane są związkami:

$$/7.59/ \quad K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} = -\sqrt{\frac{2\pi}{h}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \left[ \frac{2iB}{\pi} - \frac{\psi_1 - \psi_2}{\psi_1 \psi_2 \sqrt{h^*}} b_0 \right],$$

$$K_{II}^{(1)} - K_{II}^{(2)} = \sqrt{\frac{2\pi}{h h^*}} b_0,$$

przy czym stała  $b_0$  dana jest wzorem /7.57/ lub /7.58/, zaś

$$/7.60/ \quad B = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} E_1(z) dz.$$

Podobnie jak w poprzednim punkcie, możliwe jest określenie takich obciążeń powierzchni szczeliny aby wartości współczynników intensywności naprężenia pozostawały w z góry zadany względem siebie stosunku.

1°. W przypadku gdy obciążenia powierzchni szczelin są tego rodzaju, że spełniony jest warunek



$$/7.61/ \quad b_0 = 0,$$

to współczynniki intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczelin są jednakowe i w przypadku warstwy niejednorodnej:

$$/7.62/ \quad K_{\text{II}} = K_{\text{III}}^{(1)} = K_{\text{III}}^{(2)} = -\sqrt{\frac{2}{\pi h}} \frac{\psi_1 \psi_2}{\psi_1 + \psi_2} i B,$$

zaś w przypadku warstwy jednorodnej:

$$/7.63/ \quad \bar{K}_{\text{II}} = \bar{K}_{\text{III}}^{(1)} = \bar{K}_{\text{III}}^{(2)} = -\frac{i \bar{B}}{\sqrt{2\pi h}},$$

gdzie

$$\bar{B} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - ic}^{+\infty - ic} H^+(z) \bar{S}_1^-(z) dz,$$

/7.64/

$$\bar{S}_1^-(z) = \Sigma_{23}^-(z, h^*) + \Sigma_{23}^-(z, -h^*).$$

Sytuacja taka ma miejsce między innymi w przypadku jednakowych obciążeń powierzchni szczelin. Przyjmując, że  $p_1(x_1) = p_2(x_1)$  otrzymamy, że w przypadku niejednorodnej warstwy, współczynnik intensywności naprężenia  $K_{\text{II}}$  nie zależy od stałych materiałowych i jest równy współczynnikowi intensywności naprężenia  $\bar{K}_{\text{II}}$  w warstwie jednorodnej; wartości współczynnika intensywności naprężenia dane są wówczas wzorem:

$$/7.65/ \quad K_{\text{II}} = \bar{K}_{\text{II}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi h}} i \bar{B}$$

gdzie

$$/7.66/ \quad \bar{B} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-ic}^{+\infty-ic} H^+(z) \Sigma_{23}^-(z, h^*) dz.$$

2°. Jeśli obciążenia powierzchni szczelin są tego rodzaju, że

$$/7.67/ \quad B = 0,$$

to współczynniki intensywności naprężenia w przypadku warstwy niejednorodnej dane są wzorami:

$$/7.68/ \quad K_{III}^{(1)} = \sqrt{\frac{2\pi}{hh^*}} \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2} b_0,$$

$$K_{III}^{(2)} = -\frac{\psi_2}{\psi_1} K_{III}^{(1)},$$

zaś w przypadku warstwy jednorodnej:

$$/7.69/ \quad \bar{K}_{III}^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2hh^*}} b_0,$$

$$\bar{K}_{III}^{(2)} = -\bar{K}_{III}^{(1)}.$$

3°. Jeśli obciążenia powierzchni szczelin są tego rodzaju, że spełniony jest warunek

$$/7.70/ \quad \frac{iB}{\pi} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{2\psi_1\psi_2\sqrt{h^*}} b_0,$$

to w przypadku warstwy niejednorodnej współczynniki intensywności naprężenia dane są wzorami:



$$K_{III}^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2hh^*}} b_0 ,$$

/7.71/

$$K_{III}^{(2)} = -K_{III}^{(1)} .$$

4°. Jeśli obciążenia powierzchni szczelin są tego rodzaju, że spełniony jest warunek

$$/7.72/ \quad \frac{iB}{\pi} = \frac{b_0}{\mu_2 \sqrt{h^*}}$$

lub

$$/7.73/ \quad \frac{iB}{\pi} = - \frac{b_0}{\mu_1 \sqrt{h^*}}$$

to jeden ze współczynników intensywności naprężenia znika i wówczas, odpowiednio:

$$/7.74/ \quad K_{III}^{(1)} = 0 ,$$

$$K_{III}^{(2)} = - \sqrt{\frac{2\pi}{hh^*}} b_0 ,$$

lub

$$K_{III}^{(1)} = \sqrt{\frac{2\pi}{hh^*}} b_0 ,$$

/7.75/

$$K_{III}^{(2)} = 0 .$$

7.2.1. Przykład

Dla ilustracji otrzymanych wyników przyjmijmy, że na powierzchniach szczelin dane są obciążenia określone zależnością /7.57/.

W rozważanym przypadku, współczynniki intensywności naprężenia w wierzchołkach szczelin opisane będą na podstawie zależności /7.58/, /7.59/ i /5.60/ następującymi wyrażeniami:

$$K_{III}^{(1)} = \frac{K^+(i\lambda_1^*)}{\lambda_1^*(1+\psi^*)} \sqrt{\frac{h}{h^*}} \left\{ p_1 [\psi^* + g(i\lambda_1^*)] - p_2 \alpha \psi^* [1 - g(i\lambda_2^*)] \right\},$$

/7.76/

$$K_{III}^{(2)} = \frac{K^+(i\lambda_2^*)}{\lambda_2^*(1+\psi^*)} \sqrt{\frac{h}{h^*}} \left\{ p_2 \alpha [1 + \psi^* g(i\lambda_2^*)] - p_1 [1 - g(i\lambda_1^*)] \right\},$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\lambda_1^* K^+(i\lambda_2^*)}{\lambda_2^* K^+(i\lambda_1^*)},$$

/7.77/

$$g(i\lambda_j^*) = \frac{\lambda_j^* \sqrt{h^*} H^+(i\lambda_j^*)}{\pi K^+(i\lambda_j^*)},$$

$$\psi^* = \psi_1 / \psi_2, \quad \lambda_j^* = h \lambda_j,$$



przy czym  $0 < g(i\lambda_j^*) < 1$  dla  $\lambda_j^* > 0$ , zaś funkcje  $H^+(i\lambda_j^*)$  i  $K^+(i\lambda_j^*)$  dane są zależnościami /7.50/.

W przypadku gdy parametry  $p_j$  i  $\lambda_j$ , charakteryzujące obciążenie powierzchni szczelin, są tak dobrane, że

$$\frac{p_1}{p_2} = \alpha \mu^* \frac{1 - g(i\lambda_2^*)}{\mu^* + g(i\lambda_1^*)}$$

lub

$$\frac{p_1}{p_2} = \alpha \frac{1 + \mu^* g(i\lambda_2^*)}{1 - g(i\lambda_1^*)},$$

to spełniony jest wówczas warunek /7.72/ lub /7.73/ i na mocy zależności /7.74/ lub /7.75/

$$K_{III}^{(1)} = 0,$$

$$K_{III}^{(2)} = \frac{p_2 K^+(i\lambda_2^*)}{\lambda_2^*} \sqrt{\frac{h}{h^*}} \frac{g(i\lambda_1^*) + \mu^* g(i\lambda_2^*)}{\mu^* + g(i\lambda_1^*)},$$

lub

$$K_{III}^{(1)} = \frac{p_1 K^+(i\lambda_1^*)}{\lambda_1^*} \sqrt{\frac{h}{h^*}} \frac{g(i\lambda_1^*) + \mu^* g(i\lambda_2^*)}{1 + \mu^* g(i\lambda_2^*)},$$

$$K_{III}^{(2)} = 0.$$

Jeśli natomiast  $p_1/p_2 = \alpha$ , gdzie wielkość  $\alpha$  dana jest związkiem /7.77/, to spełniony jest wówczas warunek /7.61/ i współczynnik intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczelin dany będzie wzorem:

$$/7.78/ \quad K_{III} = \frac{p_2 \sqrt{h}}{\pi (1 + \zeta^*)} [\alpha H^+(i\lambda_1^*) + \zeta^* H^+(i\lambda_2^*)].$$

Warunek /7.61/ spełniony jest również w przypadku gdy powierzchnie obu szczelin poddane są działaniu jednakowych obciążeń. Zakładając, że  $p_1(x_1) = p_2(x_1) = p \exp(\lambda x_1)$  dla  $x_1 < 0$ , na mocy zależności /7.65/ względnie zależności /7.78/ w której przyjęto, że  $\alpha = 1$ , współczynnik intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczeliny dany będzie wzorem:

$$/7.79/ \quad K_{III} = \frac{p \sqrt{h}}{\pi} H^+(i\lambda^*)$$

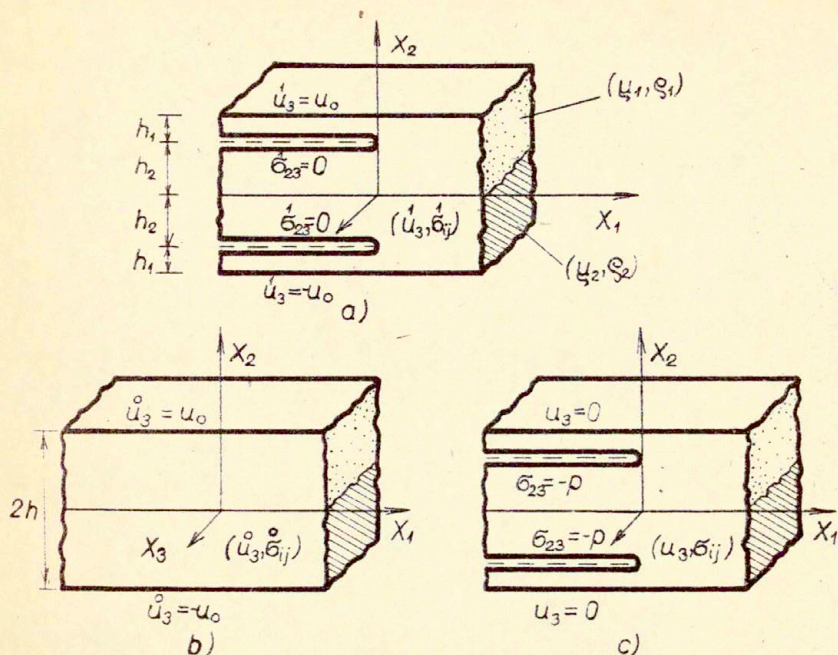
gdzie  $\lambda^* = h\lambda$ .

W przypadku gdy powierzchnie obu szczelin poddane są działaniu jednakowych lecz stałych obciążeń, tzn. jeśli  $p_1(x_1) = p_2(x_1) = p$  dla  $x_1 < 0$ , to wówczas  $s_* = 0$  i na mocy zależności /7.65/ względnie po przyjęciu w zależności /7.79/  $\lambda^* = 0$ , współczynnik intensywności naprężenia w obu wierzchołkach szczelin przyjmie postać:

$$/7.80/ \quad K_{III} = p \sqrt{h}.$$

Ostatni rezultat wykorzystamy do określenia współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołkach szczelin w przypadku niejednorodnej warstwy sprężystej, na brzegach której zadane są stałe przemieszczenia  $u_2(x_1, \pm h) = \pm u_0$ , zaś powierzchnie szczelin są swobodne od obciążeń, /Rys.59/.





Rys.59

Wykorzystując zasadę superpozycji, rozwiązanie tego zagadnienia /Rys.59a/ przedstawimy w postaci sumy rozwiązań dla ciągłej warstwy, na brzegach której dane są przemieszczenia  $\dot{u}_3(x_1, \pm h) = \pm u_0$  /Rys.59b/ i rozwiązania dla osłabionej dwiema szczelinami warstwy, której brzegi są utwierdzone, zaś na powierzchniach szczelin dane są naprężenia  $\sigma_{23}(x_1, \pm h_2) = -\rho$  /Rys.59c/.

Rozwiązanie zagadnienia przedstawionego na Rys.59b ma postać:

$$\dot{u}_3(x_1, x_2) = \frac{u_0(\psi_1 - \psi_2)}{\psi_1 + \psi_2} - \frac{2u_0}{\psi_1 + \psi_2} \frac{x_2}{h} \cdot \begin{cases} \psi_2 & \text{dla } 0 \leq x_2 \leq h, \\ \psi_1 & \text{dla } -h \leq x_2 \leq 0, \end{cases}$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{13}(x_1, x_2) = 0,$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{23}(x_1, x_2) = \frac{2 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{u_0}{h},$$

i stąd

$$/7.81/ \quad \rho = \frac{2 \mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{u_0}{h}.$$

Podstawiając zależność /7.81/ do wzoru /7.80/, współczynnik intensywności naprężenia w wierzchołkach obu szczelin w wyjściowym zagadnieniu /Rys.59a/, przyjmie ostatecznie postać:

$$K_{III} = \frac{2 \mu_1 u_0}{\sqrt{h} (1 + \mu^*)}.$$



LITERATURA

- [1] Zorski H., Theory of Discrete Defects, Arch.of Mechanics, 18,3,1966.
- [2] Irwin G.R., Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, J.Appl.Mech., 24,3,1957.
- [3] Sih G.C., Liebowitz H., Mathematical Theories of Brittle Fracture, /w:/ H.Liebowitz ed., Fracture, t.II, Academic Press, New York-London, 1968.
- [4] Williams M.L., On the Stress Distribution at the Base of a Stationary Crack, J.Appl.Mech., 24,1,1957.
- [5] Rice J.R., Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture, /w:/ H.Liebowitz ed., Fracture, t.II, Academic Press, New York-London, 1968.
- [6] Sih G.C., Handbook of Stress Intensity Factors, Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, 1973.
- [7] Tada H., Paris P.C., Irwin G.R., The Stress Analysis of Cracks, Handbook, Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973.
- [8] Rooke D.P., Cartwright D.J., Compedium of Stress Intensity Factors, London, Her Majesty's Stationary Office, 1974.
- [9] Черепанов Г.П., Механика хрупкого разрушения, Изд.Наука, Москва, 1974.
- [10] Hahn H.G., Bruchmechanik, B.G.Teubner, 1976.
- [11] Kassir M.K., Sih G.C., Three Dimensional Stress Distribution Around and Elliptical Crack under arbitrary loadings, J.Appl.Mech., 33,3,1966.
- [12] Kassir M.K., Sih G.C., Griffith's theory of brittle fracture in three dimensions, Int.J.Eng.Sci., 5,12,1967.
- [13] Kassir M.K., Sih G.C., External Elliptical Crack in Elastic Solid, Int.J.Fract.Mech., 4,4,1968.
- [14] Панасюк В.В., Предельное равновесие хрупких тел с трещинами, Изд.Наукова Думка, Киев, 1968.
- [15] Sneddon J.N., Lowengrub M., Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity, John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1969.
- [16] Панасюк В.В., Саврук М.П., Данцышин А.П., Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках, Изд.Наукова Думка, Киев, 1976.

- [17] Мусхелишвили Н.И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд.Наука, Москва, 1966.
- [18] England A.H., Complex Variable Methods in Elasticity, John Wiley and Sons Ltd., London, New York, Sydney, Toronto, 1971.
- [19] Sneddon I.N., The Use of Integral Transforms, McGraw Hill Inc., 1972.
- [20] Matczyński M., The Static Problem of a Crack in Elastic Medium, Arch.of Mechanics, 22,4,1970.
- [21] Галин Л.А., Контактные задачи теории упругости, Москва, 1953.
- [22] Yoffe E.M., The Moving Griffith Crack, Phil.Mag., 42,1951.
- [23] Bilby B.A., Bullough R., The Formation of Twins by a moving crack, Phil.Mag., 45,1954.
- [24] Radok J.R.M., On the Solution of Problems of Dynamic Plane Elasticity, Quart.Appl.Math., 14,3,1956.
- [25] Craggs J.W., On the Propagation of a Crack in an Elastic-Brittle Material, J.Mech.Phys.Solids, 8,1960.
- [26] McClintock F.A., Sukhatme E., Travelling Cracks in Elastic Materials under Longitudinal Shear, J.Mech.Phys.Solids, 8,1960.
- [27] Matczyński M., The Quasistatic Problem of Crack in an Elastic Medium, Arch.of Mechanics, 22,2,1970.
- [28] Griffith A.A., The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Phil.Trans.Roy.Soc., London, A221, 1920.
- [29] Sokołowski M., Teoria pęknięcia a elastostatyka klasyczna, /w:/ Praca zbiorowa, Mechanika zniszczenia, teoria i zastosowania, Ossolineum, 1976.
- [30] Fracture Toughness Testing and its Application, ASTM Special Technical Publication No.381, 1964.
- [31] Averbach B.L., Some Physical Aspects of Fracture, /w:/ H.Liebowitz ed., Fracture, t.I, Academic Press, New York-London, 1968.
- [32] Sanders J.L., On the Griffith-Irwin Fracture Theory, J.Appl.Mech., 27,2,1960.
- [33] Костров Б.В., Осесимметрическая задача о распространении трещины нормального разрыва, ПММ., 28,4,1964.
- [34] Костров Б.В., Автомодельные задачи о распространении трещин касательного разрыва, ПММ., 28,5,1964.



- [35] Erdogan F., Crack Propagation Theories, /w:/ H.Liebowitz ed., Fracture, t.II, Academic Press, New York-London, 1968.
- [36] Atkinson C., Eshelby J.D., The Flow of Energy into the Tip of a Moving Crack, J.Fracture Mech., 4,1,1968.
- [37] Achenbach J.D., Extension of a Crack by a Shear Wave, ZAMP, 21,6,1970.
- [38] Freund L.B., Energy Flux into the Tip of an Extending Crack in an Elastic Solid, J.Elasticity, 2,4,1972.
- [39] Achenbach J.D., Brock L.M., On Quasi-static and Dynamic Fracture, /w:/ G.C.Sih ed., Dynamic Crack Propagation, Noordhoff International Publishing- Leyden, 1973.
- [40] Freund L.B., Clifton R.J., On the Uniqueness of Plane Elastodynamic Solutions for Running Cracks, J.Elasticity, 4,4,1974.
- [41] Titchmarsh E.C., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Oxford Univ. Press, 1948.
- [42] Paley R., Wiener N., Fourier Transforms in the Complex Domain, American Mathematical Society, New York, 1934.
- [43] Noble B., Methods Based on the Wiener-Hopf Technique, Pergamon Press, London, New York, Paris, Los Angeles, 1958.
- [44] Morse P.M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics, Part I, McGraw Hill Inc., 1953.
- [45] Van der Pol B., Bremer H., Operational Calculus Based on the Two-Sided Laplace Integral, Cambridge, 1950.
- [46] Sokołowski M., Some Problems of a Plate Strip with Discontinuous Boundary Conditions, Arch.of Mechanics, 13,2,1961.
- [47] Koiter W.T., Approximate Solution of Wiener-Hopf Type Integral Equations with Applications, Part I and IIA, Koninkl. Nederl.Akademie van Wetenschappen - Amsterdam, Series B, 57,5,1954.
- [48] Koiter W.T., On the Flexural Rigidity of a Beam, Weakened by Transverse Saw Cuts, Part I and II, Koninkl.Nederl.Akademie van Wetenschappen - Amsterdam, Series B, 59,4,1956.
- [49] Nowacki W., Teoria sprężystości, PWN, 1970.
- [50] Гольдштейн Р.В., Матчинский М., О стационарном движении трещин в полосе, Инж.ж.Механика Твердого Тела, 4, 1967.
- [51] Ентов В.М., Салганик Р.Л., О бочном приближении в теории трещин, Изд. АН СССР, Механика, 5, 1965.
- [52] Nilsson F., Dynamic Stress-Intensity Factors for Finite Strip Problems, Intern.Journ.Fract.Mech., 8,4,1972.

- [53] Кулев В.Д., Стационарное движение трещины в полосе, ПММ., 37,3,1973.
- [54] Kuhn G., Matczyński M., A Dynamic Problem of a Crack in a Plate Strip, Rozpr.Inż., 22,3,1974.
- [55] Knauss W.G., Stresses in an Infinite Strip Containing a Semi Infinite Crack, J.Appl.Mech., 33,2,1966.
- [56] Rice J.R., Comment to "Stresses in an Infinite Strip Containing a Semi Infinite Crack" by W.G.Knauss, J.Appl.Mech., 34,1,1967.
- [57] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Обобщенные функции и действия над ними, Том I, Москва, 1959.
- [58] Matczyński M., Sokołowski M., On a Certain Case of Equilibrium Cracks under Harmonic Loads, Bull.Acad.Polon., Sci. sér.tech., 16,1,1968.
- [59] Matczyński M., Sokołowski M., Quasi-static Problem of a Rigidly Clamped Elastic Layer, Arch.of Mechanics, 19,6,1967.
- [60] Kuhn G., Matczyński M., Elastic Strip with a Crack under Periodic Loading, Arch.of Mechanics, 27,3,1975.
- [61] Kuhn G., Matczyński M., Analytische Ermittlung des dynamischen Spannungsintensitätsfaktors eines ebenen Rissproblems unter periodischer Belastung, ZAMM, 55, Sonderheft, 1975.
- [62] Nilsson F., A Path-Independent Integral for Transient Crack Problems, Int.J.Solids Structures, 9,1973.
- [63] Matczyński M., Sokołowski M., A Note on the Propagation of Cracks in Antiplane State of Strain, Arch.of Mechanics, 23,6,1971.
- [64] Bateman H., Tables of Integral Transforms, t.1, McGraw Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London, 1954.
- [65] Matczyński M., Motion of a Crack in Antiplane State of Strain of an Elastic Strip, Arch.of Mechanics, 25,5,1973.
- [66] Matczyński M., Quasistatic Problem of a Non-Homogeneous Elastic Layer Containing a Crack, Acta Mechanica, 19,1974.
- [67] Matczyński M., Quasi-static Problem of a Crack in an Elastic Strip Subject to Antiplane State of Strain, Arch. of Mechanics, 25,5,1973.
- [68] Matczyński M., Stress Concentration in Non-homogeneous Elastic Layer Weakened by Cracks, Rozpr.Inż., 27,4,1979, /w druku/.



## SPIS TREŚCI

WSTĘP		3
1. PODSTAWY MATEMATYCZNE TEORII SZCZELIN W OŚRODKU SPRĘŻYSTYM		6
1.1. Matematyczny model szczeliny		6
1.2. Statyczne zagadnienie szczeliny pasmowej w nieograniczonym ośrodku sprężystym		14
1.2.1. Normalne rozwarście powierzchni szczeliny - Typ I		15
1.2.2. Poprzeczne ścinanie powierzchni szczeliny - Typ II		21
1.2.3. Podłużne ścinanie powierzchni szczeliny - Typ III		25
1.3. Stacjonarne zagadnienie ruchu szczeliny pasmowej w nieograniczonym ośrodku sprężystym		28
1.3.1. Normalne rozwarście powierzchni szczeliny - Typ I		29
1.3.2. Poprzeczne ścinanie powierzchni szczeliny - Typ II		34
1.3.3. Podłużne ścinanie powierzchni szczeliny - Typ III		38
2. PODSTAWY TEORII KRUCHEGO PĘKANIA		42
2.1. Kryterium kruchego pęknięcia Griffitha		42
2.2. Kryterium kruchego pęknięcia Irwina		45
2.3. Uogólnienie kryterium Griffitha-Irwina. Prędkość zmiany współczynnika wyzwalań energii		54
3. PODSTAWY MATEMATYCZNE		62
3.1. Transformacja całkowa Fouriera		62
3.2. Równanie całkowe Wienera-Hopfa. Metoda Wienera-Hopfa		68
4. PODSTAWOWE ZWIĄZKI DWUWYMIAROWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI		77
4.1. Płaski stan odkształcenia		77
4.1.1. Równania ośrodka sprężystego w ruchomym układzie współrzędnych		78
4.1.2. Drgania harmoniczne		81
4.2. Antypłaski stan odkształcenia		84
4.2.1. Równania ośrodka w ruchomym układzie współrzędnych		85
4.2.2. Drgania harmoniczne		86
5. STACJONARNE ZAGADNIENIA SZCZELIN W PASMIE SPRĘŻYSTYM. PŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA		88
5.1. Stacjonarny ruch szczeliny w pasmie ze swobodnym brzegiem		88
5.1.1. Szczelina z obciążeniem skupionym, normalnym do jej powierzchni		89

5.1.2.	Szczelina z obciążeniem skupionym, stycznym do jej powierzchni	101
5.2.	Stacjonarny ruch szczeliny w pasmie z utwierdzonym brzegiem	105
5.2.1.	Przykład	115
5.2.1a.	Współczynnik intensywności naprężenia	116
5.2.1b.	Przemieszczenie $u_2$ i naprężenie $\sigma_{22}$ w płaszczyźnie szczeliny	117
5.2.1c.	Przemieszczenia i naprężenia wewnątrz pasma	122
5.3.	Drgania harmoniczne w ośrodku sprężystym ze szczelinami	130
5.3.1.	Szczelina z obciążeniem skupionym	133
5.3.2.	Szczelina z równomiernie rozłożonym obciążeniem	137
5.4.	Drgania harmoniczne	142
5.4.1.	Przykład	148
5.4.1a.	Współczynnik intensywności naprężenia	150
5.4.1b.	Przemieszczenie $u_2$ i naprężenie $\sigma_{22}$ w płaszczyźnie szczeliny	151
5.4.1c.	Przemieszczenia $u_i$ i naprężenia $\sigma_{ij}$ wewnątrz pasma	154
6.	STACJONARNE ZAGADNIENIA SZCZELIN W WARSTWIE SPRĘŻYSTEJ. ANTYPŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA	162
6.1.	Stacjonarny ruch szczeliny w jednorodnej warstwie ze swobodnymi brzegami	162
6.1.1.	Szczelina z obciążeniem skupionym	166
6.1.2.	Szczelina z dowolnie rozłożonym obciążeniem	167
6.2.	Stacjonarny ruch szczelin w nieograniczonym ośrodku sprężystym	169
6.2.1.	Szczelina z obciążeniem skupionym	172
6.2.2.	Szczelina z dowolnie rozłożonym obciążeniem	173
6.2.3.	Szczelina ze stałym obciążeniem	175
6.2.4.	Szczelina o swobodnych powierzchniach	177
6.3.	Stacjonarny ruch szczeliny w niejednorodnej warstwie	179
6.3.1.	Szczelina ze stałym obciążeniem	184
6.3.2.	Szczelina o swobodnych powierzchniach	187
6.4.	Drgania harmoniczne w ośrodku sprężystym ze szczelinami	190
6.4.1.	Szczelina z równomiernie rozłożonym obciążeniem	195
6.4.2.	Szczelina o swobodnych powierzchniach	197
6.5.	Drgania harmoniczne w niejednorodnej warstwie sprężystej osłabionej szczeliną	201
6.5.1.	Szczelina z równomiernie rozłożonym obciążeniem	205
6.5.2.	Szczelina o swobodnych powierzchniach	207
7.	STATYCZNE ZAGADNIENIA NIEJEDNORODNEJ WARSTWY SPRĘŻYSTEJ OSŁABIONEJ DWIEMA SZCZELINAMI. ANTYPŁASKI STAN ODKSZTAŁCENIA	211
7.1.	Zagadnienie dwóch szczelin w warstwie ze swobodnym brzegiem	211



7.1.1. Przykład	226
7.2. Zagadnienie dwóch szczelin w warstwie z utwierdzonym brzegiem	232
7.2.1. Przykład	242
LITERATURA	247