

38 / 1979

Jacek Rośka

**ROZWIĄZANIA DYNAMICZNYCH
ZAGADNIEŃ POZĄTKOWO BRZEGOWYCH
W TEORII LEPKOPLASTYCZNOŚCI**

Praca doktorska

P.269a



WARSZAWA 1979

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 sierpnia 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 38/1979

Pr a c a d o k t o r s k a

Promotor: Prof.dr hab Piotr Perzyna



57209



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

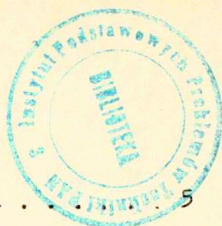
Nakład 140 egz. Ark.wyd.6,1. Ark.druk.8,75 .

Oddano do drukarni w sierpniu 1979 r.

Nr zamówienia 540/0/79

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

SPIS TREŚCI



1. WSTĘP	5
2. DYNAMICZNE ZAGADNIENIE LEPKOPLASTYCZNEJ RURY GRUBOŚCIENNEJ	8
2.1. Materiał lepkoplastyczny	8
2.2. Powierzchnie płynięcia i wzmocnienie materiału	18
2.3. Efekty termiczne	27
2.4. Dynamiczne zachowanie materiału nieściśliwego	29
2.5. Równanie podstawowe	30
3. ISTNIENIE I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZANIA	39
3.1. Analiza układu równań / θ /	39
3.2. Analiza problemu /S/	45
4. METODY ROZWIĄZYWANIA	51
4.1. Omówienie metod	52
4.1.1. Metoda elementów skończonych a metoda różnic skończonych	52
4.1.2. Metoda elementów skończonych dla problemu Stefana	55
4.1.3. Metoda Rungego-Kutty	62
4.1.4. Metoda kollokacji	64
4.1.5. Metoda różnic skończonych.	70
5. REZULTATY	81
5.1. Rozwiązanie problemu / θ /	84
5.2. Rozwiązanie problemu /W/	114
5.3. Rozwiązanie problemu /S/	120
6. LITERATURA	125

Jacek Rońda

Instytut Budowy Sprzętu Mechanicznego PW

ROZWIĄZANIA DYNAMICZNYCH ZAGADNIENÍ POZĄTKOWO BRZEGOWYCH
W TEORII LEPKOPLASTYCZNOŚCI

1. WSTĘP

W pracy sformułowano i rozwiązano trzy problemy opisujące reakcję rury grubościennej dla materiałów nieściśliwych:

/G/ sztywno - lepkoplastycznego ze wzmocnieniem izotropowym i efektami termicznymi,

/W/ sztywno - lepkoplastycznego ze wzmocnieniem izotropowym,

/S/ sztywno - idealnie - lepkoplastycznego.

Zakładano, że rura jest nieskończenie długa i występuje w niej płaski stan odkształcenia. W opisie zachowania się materiału, w równaniu równowagi uwzględniono siły masowe. W rozwiązywanych zagadnieniach wykorzystano równanie konstytutywne Perzyny.

W problemie oznaczonym symbolem /G/ rura ogrzewana na powierzchniach walcowych jest obciążona ciśnieniem p/t na powierzchni wewnętrznej. Szczególnymi przypadkami tego zagadnienia są problemy /S/ i /W/, w których rura grubościenna jest poddana działaniu ciśnienia p/t . W trzech wymienionych problemach przyjmowano, że odkształcenie są małe. Problem /G/ sformułowano jako zagadnienie Stefana przewodnictwa cieplnego w obszarze z ruchomym brzegiem.

Analizowano jednoznaczność i istnienie rozwiązań zagadnień /G/, /W/ i /S/. Badanie to dla problemu /G/ sprowadzono do analizy istnienia i jednoznaczności rozwiązania problemu Stefana, dla zadań /W/ i /S/ dyskutowano istnienie i jednozna-

czność problemu początkowego dla nieliniowego, zwyczajnego równania różniczkowego typu Releya.

Przedstawiono metody numeryczne rozwiązania, które można zastosować do sformułowanych problemów. Metody te porównywano pod względem wielkości kosztów metody oraz dokładności. Metodę Hermita wybrano do rozwiązania problemu /G/. Dokładność możliwa do uzyskania w metodzie Hermita jest większa niż w innych metodach numerycznych, przy założeniu tych samych kosztów metody. Metodę różnic skończonych zastosowano do rozwiązania problemu /W/ ze względu na mały koszt metody. Problem (S) rozwiązano metodą Rungego - Kuty, która zapewnia odpowiednio mały koszt metody przy dużej dokładności.

Metody numeryczne zastosowane do rozwiązania tych problemów są odpowiednie nie tylko dla równania konstytutywnego Perzyny, warunku plastyczności Hubera-Misesa i wzmocnienia izotropowego. W przypadku innych równań konstytutywnych dla materiałów sztywno-lepkoplastycznych oraz warunków plastyczności i funkcji wzmocnienia prezentowanych w tej pracy proponowane metody rozwiązania zachowują swoją przydatność.

Rezultaty uzyskane dla trzech problemów (G), (W) i (S) są zgodne jakościowo. Wyniki określające reakcję rury w zagadnieniach (G) i (W) porównano pod względem ilościowym. Uzyskane rezultaty określają wpływ temperatury $\Theta(r,t)$ oraz współczynnika $\delta = \text{del}$ na opis deformacji rury grubościennej. Współczynnik δ jest wykładnikiem potęgi w potęgowanym równaniu konstytutywnym dla materiału lepkoplastycznego.

Określeniem reakcji rury grubościennej obciążonej ciśnieniem na powierzchni wewnętrznej zajmowało się wielu autorów, którzy proponowali rozwiązania dla różnych modeli materiału.

Rozwiązanie problemu (S) dla materiału sztywno-lepkoplastycznego przedstawił APPLEBY /1/ stosując dodatkowe i nienaturalne założenia o prędkości odkształcenia. Zagadnienie to dla materiału lepkosprężysto-plastycznego rozwiązał SHINOZUKA /114/.

Problem deformacji rury grubościennej obciążonej ciśnieniem $p/t/$ i naprężeniem osiowym $q/t/$ dla materiału sprężysto-lepkoplastycznego rozwiązał BALTOV /16/.

Deformację osiowo-symetrycznej płyty z otworem obciążonej ciśnieniem i momentem skręcającym na wewnętrznej powierzchni badali NORDGREN i NAGHDI /82/ zakładając płaski stan naprężenia.

Reakcję rury grubościennej z materiału termosprężysto-plastycznego poddanej działaniu źródeł ciepła, ciśnienia wewnętrznego oraz sił osiowych określili KAMMASH, MURCH i NAGHDI /68/.

Problem zachowania się sprężysto-plastycznej rury grubościennej w warunkach osiowej symetrii badali SHIELD /109/, BLAND/8/, HODGE i WHITE /52/.

Deformacje sprężysto-idealnie-lepkoplastycznego cylindra badali NAYAK I ZIENKIEWICZ /83/ oraz CORMEAU /33/. Reakcję sprężysto-idealnie-plastycznego, osiowo-symetrycznego zbiornika grubościennego oraz dwuwarstwowej rury określił CORMEAU/33/.

Zagadnieniem zachowania się osiowo-symetrycznych powłok walcowych zajmowali się WIERZBICKI /126÷129/ i PABIANEK /98/. Deformacje lepkoplastycznego cylindra uderzającego o sztywną przeszkodę analizował BEJDA /14/.

Problemy sformułowane w pracy rozwiązano posługując się programami: LP dla /S/, LW dla /W/, TLP dla /G/. Programy te opracowano i uruchomiono wraz z użytecznymi procedurami pomocniczymi pozwalającymi na łatwiejszą i szybszą obróbkę i analizę wyników.

Treść programów oraz procedur specjalnych sporządzonych w języku ODRA-ALGOL 1204 omówimy ogólnie. Obliczenia wykonano na EMC ODRA 1204 wyposażonej w DISPLAY i pisak automatyczny w Pracowni Obliczeń Numerycznych IPPT PAN.

2. DYNAMICZNE ZAGADNIENIE LEPKOPLASTYCZNEJ RURY GRUBOŚCIENNEJ

2.1. MATERIAŁ LEPKOPLASTYCZNY.

Dokonyamy przeglądu równań konstytutywnych dla materiału lepkoplastycznego proponowanych w półempirycznych teoriach jednowymiarowych i teoriach fenomenologicznych opisujących efekty lepkie. Szczególną uwagę zwrócimy na prawa konstytutywne, które określają reakcję materiału lepkoplastycznego w ramach opisu materiału typu prędkościowego. Równania te są stowarzyszone z warunkami płynięcia niezależnymi od historii prędkości odkształcenia.

2.1.1. TEORIE JEDNOWYMIAROWE

Badania materiału przy jednoosiowym rozciąganiu, ścisaniu lub czystym skręcaniu prowadzone w różnych temperaturach wskazują na rozmaite efekty prędkościowe między innymi na wrażliwość granicy plastyczności na prędkość odkształcenia. W teoriach lepkoplastyczności związanych z tymi prostymi próbami proponuje się empiryczne lub półempiryczne równania konstytutywne, opisujące efekty lepkie. Zakres stosowalności tych równań jest ograniczony do zagadnień jednowymiarowych.

Wzór obowiązujący dla metali przy prostym rozciąganiu

$$2.1. \quad \sigma = \sigma_0 \ln(\dot{\epsilon}^{\text{VP}} / \dot{\epsilon}_0^{\text{VP}}), \quad \dot{\epsilon}^{\text{VP}} \neq 0$$

podał LUDWIK /73/. Część niesprężystą prędkości odkształcenia definiuje się przez $\dot{\epsilon}^{\text{VP}} = \dot{\epsilon} - \dot{\sigma}/E$, a wielkości $\sigma_0, \dot{\epsilon}_0^{\text{VP}}$ są stałymi materiałowymi.

Liniovą aproksymację tego równania słuszną w otoczeniu punktu /0,0/ leżącego w płaszczyźnie / $\sigma, \dot{\epsilon}^{\text{VP}}$ / proponował NADAI /80/.

Prawo konstytutywne z funkcją hiperboliczną

$$2.2. \quad \dot{\epsilon}^{\text{VP}} = \dot{\epsilon}_0^{\text{VP}} \sinh(\sigma/\sigma_0) \quad \text{słuszne dla każdego } \sigma$$

zapropował na podstawie fizycznej teorii plastycznego płynięcia PRANDTL /87/.

Uogólnione równanie /MALVERN /75// dla całkowitej prędkości odkształcenia ma postać

$$2.3. \quad E\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + g(\sigma, \epsilon)$$

Wykorzystując teorię dyslokacji GILMAN /49/ postulował funkcję $\dot{\epsilon} / \bar{\sigma}, \epsilon /$ w równaniu Malverna jako zależność wykładniczą względem naprężenia $\bar{\sigma}$

$$2.4. \dot{\epsilon} / \bar{\sigma}, \epsilon / = E \dot{\epsilon}_0 e^{-A/\bar{\sigma}} \quad \text{gdzie } A, \dot{\epsilon}_0 \text{ są stałymi materiałowymi.}$$

Prawa konstytutywne dla aluminium /CHIDDISTER and MALVERN/23//

$$2.5. \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 + k \ln \dot{\epsilon}, \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 \dot{\epsilon}^n$$

również uzyskano bez rozdzielania prędkości, na składową niesprężystą i sprężystą. Stałe materiałowe $\bar{\sigma}_0, k$ i n są wielkościami zależnymi od temperatury. Empiryczne równanie

$$2.6. \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0(\epsilon) + \bar{\sigma}_1(\epsilon) \ln \dot{\epsilon}$$

przewiduje reakcję materiału, jeśli znamy z eksperymentu $\bar{\sigma}_0(\epsilon)$ i $\bar{\sigma}_1(\epsilon)$ /LINDHOLM 1964/, gdzie $\bar{\sigma}_0(\epsilon)$ opisuje wzmocnienie materiału przy prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon} = 1$.

Prawo konstytutywne będące równaniem różniczkowym *quasilinio-*wym

$$2.7. \dot{\epsilon} = \Phi(\bar{\sigma}, \epsilon) \bar{\sigma}^n + \Psi(\bar{\sigma}, \epsilon),$$

w którym jawnie występują człony opisujące efekty prędkościowe o różnych skalach czasu, proponował CRISTESCU /24/. Funkcja Φ określa natychmiastową reakcję materiału pojawiającą się z nieskończoną prędkością a Ψ jest funkcją opisującą efekty typu pełzania.

Cechą charakterystyczną pewnej grupy jednowymiarowych teorii jest założenie o tym, że składowa niesprężysta prędkości odkształcenia jest funkcją nadwyżki naprężenia ponad statyczną granicą plastyczności.

W tych teoriach postulowano równania konstytutywne:

$$2.8. E \dot{\epsilon} = \dot{\bar{\sigma}} + g(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_y) \quad \text{/SOKOŁOWSKI /108//}$$

$$2.9. E \dot{\epsilon} = \dot{\bar{\sigma}} + D \left(\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_y} - 1 \right)^2 \quad \text{/TING i SYMONDS /120//}$$

$$2.10. E \dot{\epsilon} = \dot{\bar{\sigma}} + E \sum_i A_i \left[e^{(\bar{\sigma}/\bar{\sigma}_y - 1)^i} - 1 \right] \quad \text{/PERZYNA/95//}$$

$$2.11. E \dot{\epsilon} = \dot{\bar{\sigma}} + E \sum_i B_i \left[\frac{\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}_y} - 1 \right]^i \quad \text{/PERZYNA /95//}$$

lub dla materiałów ze wzmocnieniem /*strain* hardening /

$$2.12. \mathbf{E}\dot{\epsilon} = \dot{\sigma} + g(\sigma - f(\epsilon)) \quad \text{gdzie } \sigma = f(\epsilon)$$

jest statyczną krzywą wzmocnienia, A_i, B_i, σ_y, D, q są stałymi materiałowymi a $g / . /$ jest pewną funkcją całkowaną.

2.1.2. TEORIE FENOMENOLOGICZNE

Przedstawimy równania konstytutywne występujące w teoriach fenomenologicznych mieszczących się w ramach opisu materiału typu prędkościowego lub materiału z parametrami wewnętrznymi.

W opisie materiału z parametrami wewnętrznymi aktualne wartości parametrów określających stan materiału znajduje się na podstawie całych historii stanów przeszłych, gdzie historia oznacza następstwo zdarzeń.

Równania konstytutywne mają wówczas postać funkcjonalną. Rozwiązanie problemu zachowania się materiału z takim prawem konstytutywnym jest możliwe, jeśli znamy trajektorię odkształcenia. Podczas tego typu obliczeń konieczne jest gromadzenie i przechowywanie w pamięci maszyny cyfrowej stale rosnącej ilości informacji. Taką teorię zaproponował VALANIS /124/. Znalazła ona szerokie zastosowanie w zagadnieniach jednoosiowych związanych z cyklicznym obciążeniem materiałów.

W opisie materiałów typu prędkościowego podaje się równania ewolucji zmiennych stanu. Te równania ewolucji określają stany następne na podstawie aktualnych wartości zmiennych stanu.

Prawa konstytutywne sformułowane w tych teoriach można wyrazić w ogólnej postaci:

$$/2.13/ \quad \dot{\epsilon}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + N(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^v, \alpha_n),$$

gdzie H_{ijkl} jest tensorową stałą materiałową a przez $N(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^v, \alpha_n)$ oznaczono nieliniową funkcję zmiennych stanu takich jak naprężenie σ_{ij} , odkształcenie ϵ_{ij}^v i parametry wzmocnienia α_n .

Najpierw przedstawimy uwagi o teoriach sformułowanych w ramach opisu materiału typu prędkościowego a przede wszystkim

zaprezentujemy proponowane tam równania konstytutywne. Prostym modelem materiału sztywno-lepkoplastycznego jest mieszanina koloidalna podlegająca płynięciu, jeśli naprężenie ścinające τ przekroczy wartość krytyczną τ_0 . Prędkość odkształcenia przy ścinaniu dla ciał stałych zachowujących się podobnie jak mieszaniny koloidalne określa się z zależności

$$/2.14/ \dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} (\tau - \tau_0) \quad \text{dla } \tau \gg \tau_0$$

proponowanej przez BINGHAMA.

Prawo konstytutywne dla materiału Bingham'a daje się uogólnić dla trójwymiarowego stanu naprężenia, jeśli warunek plastyczności przy ścinaniu zastąpi się przez warunek Hubera-Misesa a prędkość odkształcenia i naprężenia przez odpowiednie wielkości dewiatorowe. Dewiator naprężenia po rozdzielaniu na część plastyczną k_{ij} i lepką $2\eta\dot{e}_{ij}$ można zapisać w postaci sumy

$$2.15. \quad s_{ij} = k_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} \quad \text{dla } k_{ij} \text{ spełniających warunek plastyczności}$$

$$f(k_{ij}) = k_{ij}k_{ij} - 2k^2 \leq 0 \quad \text{jeśli zachodzi relacja równoważności } \dot{e}_{ij} \text{ i } k_{ij}$$

$$\dot{e}_{ij} = 2\lambda k_{ij} \quad \text{gdy} \quad \begin{cases} \lambda > 0 & \text{jeśli } f = 0 \text{ i } df = 0 \\ \lambda = 0 & \text{jeśli } f < 0 \text{ lub } f = 0 \text{ i } df = 0, \end{cases}$$

lub zapisać wzorem

$$s_{ij} = \left(\frac{1}{2\lambda} + 2\eta\right)\dot{e}_{ij}. \quad \text{Wobec tego drugi niezmiennik naprężenia jest określony przez}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = (1 + 4\eta\lambda)k^2 \quad \text{dla } \lambda > 0.$$

Eliminując λ z tych dwóch zależności otrzymuje się równanie konstytutywne

$$2.16. \quad \begin{cases} \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}\right) s_{ij} & \text{dla } J_2 > k^2, \\ \dot{e}_{ij} = 0 & \text{jeśli } J_2 \leq k^2, \end{cases}$$

które dla niezmienników zapisuje się wzorem

$$\sqrt{J_2} = k + 2\eta\sqrt{II_2}, \quad II_2 = \frac{1}{2} \dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij}.$$

Reakcję materiału sprężysto-lepkoplastycznego można opisać wykorzystując powyższe równanie, jeśli całkowite odkształcenie przedstawi się jako sumę składowej sprężystej i lepkoplastycznej

$$2.17 \quad e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^{vp} .$$

Wówczas równanie konstytutywne /HOHENEMSER i PRAGER /50/ oraz FREUDENTHAL i GEIRINGER w 1958 / przyjmuje postać

$$2.18. \quad \begin{cases} \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{2\eta} \left(1 - \frac{k}{\sqrt{J_2}}\right) s_{ij} & \text{dla } \sqrt{J_2} > k \\ \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} & \text{dla } \sqrt{J_2} \leq k \\ \dot{e}_{ii} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii} . \end{cases}$$

Granicznym przypadkiem tego prawa konstytutywnego są równania Prandtla - Reussa, które otrzymuje się kiedy spełniony jest warunek $\sqrt{J_2} \cong k$.

Człon równania opisujący składową niesprężystą w ogólniejszych modelach materiału sprężysto-lepkoplastycznego można przedstawić w postaci sumy pewnych wyrazów /ZIENKIEWICZ i CORMEAU/134//

$$2.19 \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2\eta_i} \left\langle 1 - \frac{k_i}{\sqrt{J_2}} \right\rangle \right\} s_{ij}$$

lub całki /CRISTESCU /24/ /

$$2.20 \quad \dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \left\{ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{2\eta(\lambda)} \left\langle 1 - \frac{k(\lambda)}{\sqrt{J_2}} \right\rangle w(\lambda) d\lambda \right\} s_{ij}$$

jeśli znane są η, k, w funkcje parametru skalarnego $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$.

W tych równaniach przyjęto oznaczenia:

$\eta(\lambda)$ dla funkcji lepkości, k/λ / dla funkcji granicy plastyczności, w/λ / dla funkcji wagi, k_i i η_i dla stałych materiałowych związanych odpowiednio z granicą plastyczności i lepkości materiału.

Funkcja granicy plastyczności jest silnie rosnąca czyli $k(\lambda) > 0$ i $\frac{dk}{d\lambda} > 0$ a współczynniki k_i są zbiorem uporządkowanym.

$$0 < k_1 < \dots < k_i < \dots < k_N .$$

Symbol logiczny $\langle x \rangle = xH(x)$ powoduje, że w równaniach tych uwzględnia się tylko wyrazy niezerowe. $H/x/$ jest funkcją Heaviside'a.

Teorie te mają ograniczone zastosowanie ze względu na zależność plastycznego płynięcia jedynie od J_2 .

Obecnie omówimy pokrótce teorią pozbawioną tej wady, której cechami charakterystycznymi są definicja statycznej funkcji uplastycznienia.

$$2.21 \quad F(\sigma_{ij}) = \frac{f(J_1, J_2, J_3)}{\sigma} - 1$$

oraz zależność dynamicznej powierzchni płynięcia f od niezmiennika J_1 , tensora naprężenia σ_{ij} oraz J_2 i $J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{ij} s_{ij}$ drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia.

Parametr wzmocnienia oznaczono przez σ .

Równania konstytutywne dla obydwu składowych prędkości odkształcenia przyjmują postać

$$2.22 \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{3H} \dot{\sigma}_m \delta_{ij} \\ \dot{\epsilon}_{ij}^vp = \sigma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \end{cases} \quad /PERZYNA /95/ /$$

gdzie, G , H , σ oznaczają odpowiednio stałe materiałowe, tj. moduł ścinania, moduł odkształcenia objętościowego Helmholtza, współczynnik lepkości, a nawias $\langle \cdot \rangle$ ma znaczenie operatora logicznego

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} \Phi(F) & \text{jeśli } F > 0, \\ 0 & \text{dla } F \leq 0. \end{cases}$$

Funkcja Φ jest monotonicznie rosnąca i spełnia warunki $\frac{d\Phi}{dF} > 0$ dla wszystkich $F > 0$ oraz $\Phi(0) = 0$. Prędkość odkształcenia lepkoplastycznego jest **wektorem** w dziewięciowymiarowej przestrzeni tensorowej normalnym do dynamicznej powierzchni płynięcia $f = \text{const.}$ i na niej zaczepionym.

W tej teorii informacje dotyczące lepkoplastycznego płynięcia są związane z dynamiczną powierzchnią płynięcia mającą wyłącznie interpretację matematyczną. Możliwe jest odmienne podejście, w którym informacje o płynięciu wiąże się ze statyczną powierzchnią mającą sens fizyczny. Należy wówczas zdefiniować tensor w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń

$$h_{ij} = \sigma_{ij} - k_{ij} = h n_{ij}$$

o wielkości h równej odległości między σ_{ij} a statyczną powierzchnią plastyczności.

Rzut ortogonalny δ_{ij} na statyczną powierzchnię plastyczności oznaczone przez k_{ij} a jednostkowy tensor normalny do niej przez n_{ij} .

Równanie konstytutywne /PHILLIPS i WU /100a/ / dla składowej lepkoplastycznej jest

$$2.23 \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi(h) \rangle n_{ij}$$

gdzie funkcja Φ rośnie monotonicznie względem h oraz spełnia warunki $\frac{d\Phi}{dh} > 0$ dla każdego $F > 0$ i $\Phi / 0 = 0$. Prawo konstytutywne Phillipsa i Wu jest również słuszne dla γ i h określonych jako funkcje

$$\gamma = \gamma(k_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}), \quad h = h(k_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}^{vp})$$

zależne od miejsca na statycznej powierzchni płynięcia oraz prędkości odkształcenia.

Model ten ma pewne zalety w porównaniu z modelem Perzyny w przypadku kiedy na statycznej powierzchni plastyczności występują naroża lub wierzchołki. Uogólniona zależność między prędkością odkształcenia lepkoplastycznego a stanem naprężenia dla materiałów z tarcie wewnętrzny wyraża się równaniem

$$2.24. \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = B_0(J_1', J_2', J_3') \delta_{ij} + B_1(J_1', J_2', J_3') \delta_{ij} + B_2(J_1', J_2', J_3') \delta_{ik} \delta_{kj},$$

które jest niestowarzyszonym prawem płynięcia, gdy wektor $\dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$ nie jest prostopadły do powierzchni płynięcia.

Skalarne funkcje B_0 , B_1 i B_2 przyjmują wartości zerowe tam gdzie statyczna funkcja uplastycznienia $F(J_1', J_2', J_3') = 0$.

Szczególny przypadek tego równania, jakim jest uogólnione prawo PERZYNY

$$2.25 \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma \langle \Phi\left(\frac{F}{F_0}\right) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \delta_{ij}},$$

uzyskuje się zakładając istnienie funkcji potencjału $Q(J_1', J_2', J_3')$ oraz proporcjonalność prędkości lepkoplastycznego płynięcia do gradientu $\frac{\partial Q}{\partial \delta_{ij}}$.

Wówczas funkcje skalarne B_0 , B_1 , B_2 są określone przez

$$B_0 = \gamma \langle \Phi \rangle \left(\frac{1}{3} \frac{\partial Q}{\partial J_1'} - J_1' \frac{\partial Q}{\partial J_2'} + (J_1'^2 - 2/3 J_2') \frac{\partial Q}{\partial J_3'} \right),$$

$$B_1 = \gamma \langle \Phi \rangle \left(\frac{\partial Q}{\partial J_2} - 2J_1 \frac{\partial Q}{\partial J_3} \right),$$

$$B_2 = \gamma \langle \Phi \rangle \frac{\partial Q}{\partial J_3}.$$

Funkcja Φ musi spełniać warunki $\Phi(x) = 0$, $d\Phi(x)/dx > 0$ dla $x = 0$.

Pewną wartość funkcji F oznaczono przez F_0 .

ENDOCHRONICZNA teoria lepkoplastyczności sformułowana przez VALANISA /124/, w której proponuje się równania konstytutywne w postaci zależności całkowych, jest przykładem teorii materiału z parametrami wewnętrznymi.

Nowymi pojęciami w tej propozycji opisu materiału są czas naturalny nazywany niekiedy czasem wewnętrznym, którego przyrost definiowany jest wyrażeniem

$$2.25 \quad d\xi^2 := A^2 (k_1 d\varepsilon_{kk} d\varepsilon_{kk} + k_2 d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}) + B^2 dt^2,$$

oraz skala czasu wewnętrznego $Z = Z(\xi)$ o własnościach $\frac{dZ}{d\xi} > 0 \quad \forall \xi \in [0, \infty]$.

Przyrost czasu wewnętrznego jest związany z czasem fizycznym t mierzonym przez zegar i stanem deformacji.

Wielkości A , B , k_1 , k_2 są parametrami materiału zależnymi od ε_{ij} . Parametry k_1 i k_2 są tak dobrane, aby wielkość skalarna w nawiasie była dodatnia dla każdego $d\varepsilon_{ij}$.

Stan termomechaniczny ciała całkowicie opisuje

$$S = (\varepsilon_{ij}, \theta, q_\alpha)$$

funkcja zredukowanej temperatury $\theta = (T - T_0)/T_0$ i skończonej liczby parametrów wewnętrznych q_α , które są obiektami tensorowymi lub skalarnymi określonymi przez równania ewolucji

$$2.26 \quad \frac{dq_\alpha}{dZ} = f_\alpha(F), \quad \alpha = 1, \dots, n$$

wyprowadzone z nierówności Clausiusa - Duhema.

Układ całkowych równań konstytutywnych

$$2.27 \quad s_{ij} = \int_{Z_0}^Z 2G(Z-Z) \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial Z} dZ;$$

$$\sigma_m = \int_{Z_0}^Z 3K(Z-Z) \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial Z} dZ,$$

otrzymuje się stosując transformatę Laplace'a do równań różniczkowych uzyskanych po linearyzacji funkcji $f_{\alpha}/F/$ oraz rozwijając funkcję energii swobodnej Ψ w szereg Taylora. Praktyczne rozwiązanie problemu zachowania się materiału z takimi równaniami konstytutywnymi jest możliwe, jeśli znana jest funkcja skali czasu wewnętrznego $Z/\xi /$, co jest możliwe przy znanej trajektorii odkształcenia.

Jądra całkowe można przedstawić jako szeregi o współczynnikach okresowych określonych metodą PRONY w postaci

$$2.28. \quad \begin{aligned} G(Z) &= (G_0 - \sum_{\alpha} G_{\alpha})H(Z) + \sum_{\alpha} G_{\alpha} e^{-\rho_{\alpha} Z}, \\ K(Z) &= (K_0 - \sum_{\alpha} K_{\alpha})H(Z) + \sum_{\alpha} K_{\alpha} e^{-\lambda_{\alpha} Z}, \end{aligned}$$

gdzie wielkości $G_0, G_{\alpha}, K_0, K_{\alpha}, \rho_{\alpha}, \lambda_{\alpha}$ są związane ze współczynnikami rozwinięcia energii swobodnej Ψ w szereg Taylora.

Teoria endochroniczna staje się równoważna klasycznej teorii plastyczności jeśli $A, k_1, k_2 \neq 0$ i $B = 0$. Czysto sprężystą reakcję materiału opisuje się jeśli jądra $K(Z)$ i $G(Z)$ są stałe.

2.1.3. TEORIE FIZYCZNE

Taką teorię związaną z istnieniem wypukłego potencjału lepkoplastycznego podała RICE /106/.

Deformacja plastyczna w makroskopowo izotropowym materiale o objętości Ω ograniczonym powierzchnią Γ jest skutkiem nieciągłości przemieszczeń Δu_i pojawiających się na zbiorze wewnętrznych płaszczyzn poślizgu Γ_{sup} .

Związek między całkowitym odkształceniem ϵ_{ij} i makroskopowym naprężeniem σ_{ij} ma postać

$$2.29 \quad \Omega \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \int_{\Gamma} (\bar{\sigma}_{ij} n_j) u_i d\Gamma.$$

Zależność naprężeń lokalnych $\bar{\sigma}_{ij}$ od makroskopowych σ_{ij} jest liniowa / BUI i ZARKA /135 /

$$2.30 \quad \bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkh} \sigma_{kh},$$

gdzie A_{ijkh} jest tensorem lokalnej koncentracji naprężeń. Odształcenie ϵ_{ij}^e przy którym w materiale nie występują poślizgi, definiuje się jako składową sprężystą. Lepkoplastyczną część odształcenia określa się ze wzoru

$$2.31 \quad \epsilon_{ij}^{vp} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^e .$$

Związek między lepkoelastycznym odształceniem a nieciągłościami przemieszczeń Δu_i

$$\bar{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^{vp} = \frac{1}{S^2} \int_{\Gamma_{slip}} (\bar{\sigma}_{ij} n_j) \Delta u_i d\Gamma \quad \text{dla} \quad \Delta u_i = \dot{\gamma}^{vp} h m_i ,$$

przekształca się do postaci

$$2.32 \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} d\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{S^2} \int_{\Omega_{slip}} (\dot{\gamma}^{vp} d\tau) d\Omega ,$$

gdzie makroskopowe powierzchnie poślizgu Γ_{slip} traktuje się jako pakiety płaszczyzn krystalograficznych o grubości h w kierunku normalnym n_i ślizgających się ze względną prędkością $\dot{\gamma}^{vp} h$ w kierunku m_i , ponadto $d\Omega_{slip} = h d\Gamma_{slip}$ i naprężenie ścinające $\tau = \bar{\sigma}_{ij} m_i n_j$.

Potencjał lepkoelastyczny / RICE / 106/ /

$$2.33 \quad \Psi = \frac{1}{S^2} \int_0^{\bar{\sigma}_{kl}} \left\{ \int_{\Omega_{slip}} \dot{\gamma}^{vp} m_r n_s A_{rskl} d\Omega \right\} d\bar{\sigma}_{kl}$$

istnieje, jeśli prawa strona równania 2.32 jest różniczką. Warunek ten jest spełniony, gdy prędkość trwałego odształcenia ścinającego $\dot{\gamma}^{vp}$ zależy tylko od naprężeń ścinających τ działających na system płaszczyzn poślizgów.

Równanie konstytutywne

$$2.34 \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \partial \Psi / \partial \bar{\sigma}_{ij}$$

można wykorzystać w praktycznym rozwiązaniu problemu początkowo-brzegowego, jeśli znane są kierunki płaszczyzn poślizgów oraz funkcja tensorowa koncentracji naprężeń A_{ijkl} w materiale o objętości Ω .

Rezultaty te uogólnił ZARKA /133/ proponując teorię rzutową alternatywną do zaproponowanej przez Phillipsa i Wu, która pozwala budować regularne powierzchnie potencjalne związane z osobliwymi powierzchniami płynięcia.

UZASADNIENIE WYBORU PREZENTOWANYCH TEORII

Przedstawione teorie reprezentują trzy typy teorii lepkoplastyczności. Przegląd równań konstytutywnych pokazuje zalety stosowania teorii fenomenologicznych sformułowanych w ramach opisu materiału typu prędkościowego oraz trudności związane ze stosowaniem praw konstytutywnych proponowanych w teoriach materiału z parametrami wewnętrznymi i teoriach fizycznych. W opisie materiału z parametrami wewnętrznymi występują trudności związane z określeniem trajektorii odkształcenia w przestrzennym stanie deformacji a zatem funkcji skali czasu wewnętrznego $Z(\xi)$. Stosowanie praw konstytutywnych proponowanych w teoriach fizycznych wymaga praktycznego określenia stałych i funkcji opisujących parametry materiałowe.

2.2. POWIERZCHNIE PŁYNIĘCIA I WZMOCNIENIE MATERIAŁU

2.2.1. POWIERZCHNIE PŁYNIĘCIA DLA MATERIAŁÓW IZOTROPOWYCH

Pomysł wyrażenia warunku plastyczności przez energię odkształcenia wykorzystali MAXWELL w 1856 i BELTRAMI w 1885. Brali oni pod uwagę całkowitą energię odkształcenia. Ten sam pomysł wykorzystał HUBER w 1904 uwzględniając zależnie od znaku obciążenia hydrostatycznego, całkowitą energię lub tylko energię odkształcenia postaciowego. Warunek płynięcia jako kryterium porównawcze naprężeń ścinających z pewnym maksymalnym naprężeniem będącym stałą materiałową podał TRESCA w 1864. Prostą z geometrycznego punktu widzenia idealizację tego warunku uzyskuje się /LISES w 1913 / zastępując graniastosłup sześciokątny walcem w przestrzeni naprężeń głównych. Uproszczenie to jest szczególnie korzystne, kiedy kierunki naprężeń głównych nie są znane.

Warunek Misesa jest granicą energii akumulowanej w materiale na skutek odkształcenia postaciowego, wykazał to HENCKY w 1924.

Szczególnym przypadkiem funkcji płynięcia BELTRAMIEGO

$$2.35 \quad F = \frac{1}{2G} J_2 + \frac{1}{2K} \sigma_m^2 - \xi$$

jest kryterium MISESA

$$2.36 \quad \xi_d = \frac{1}{2G} J_2$$

jeśli zaniedba się energię odkształcenia spowodowanego izotropową ściśliwością.

Wielkości ξ , ξ_d są: energią odkształcenia sprężystego przypadającą na jednostkę objętości i energią odkształcenia postaciowego a G i K oznaczono moduł ścinania i moduł ściśliwości.

Funkcja płynięcia /2.36/ wyrażona w przestrzeni naprężeń i bezpośrednio związana z granicą plastyczności przy jednoosiowej próbie rozciągania ma postać.

$$2.37 \quad F = \sqrt{3} J_2 - Y.$$

Ta powierzchnia płynięcia jest walcem równoległym do osi głównych i stycznym do elipsoidy Beltramiego.

Uogólnienie kryterium Misesa zapisane w postaci

$$2.38 \quad F = g(\sigma_m) + h(J_2)$$

odpowiada ogólnej powierzchni obrotowej w przestrzeni naprężeń i jako szczególny przypadek, odpowiedni dla materiałów sypkich, zawiera stożek DRUCKERA - PRAGERA

$$F = 3\alpha\sigma_m + \beta\sqrt{J_2}.$$

Stożek ten jest powierzchnią złożoną z połączenia cylindra Misesa / $\sigma_m < 0$ / i elipsoidy Beltramiego / $\sigma_m > 0$ /.

Oznaczenia α i β przyjęto dla stałych materiałowych.

Inna definicja warunku płynięcia odnosi się do obwiedni kół Mohra w płaszczyźnie (τ, σ) otrzymywanych dla różnych trajektorii obciążenia.

Wówczas równania parametryczne dla krzywej $\tau = f(\sigma)$ są

$$2.39 \quad \begin{cases} \tau = \varphi(\sigma_0) (1 + (d\varphi/d\sigma_0)^2)^{1/2}, \\ \sigma = \sigma_0 + \varphi(\sigma_0) d\varphi/d\sigma_0, \end{cases}$$

gdzie współrzędne punktu leżącego na obwiedni $\tau_0 = \varphi(\sigma_0)$ kół Mohra oznaczono (τ_0, σ_0) .

W tym przypadku powierzchnię płynięcia zależną od dwóch naprężeń głównych / PRANDTL / 87/ /

$$2.40 \quad F = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - f \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \right]$$

określa się po uporządkowaniu naprężeń względem relacji słabej większości \gg

$$\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \sigma_3 .$$

Powierzchnia plastyczności Coulomba - Mohra sformułowana dla materiałów z tarcie wewnętrznym

$$2.41 \quad F = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) - (C \cos \psi - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \psi)$$

jest uogólnieniem warunku TRESCA

$$2.42 \quad F = \sigma_1 - \sigma_3 - Y ,$$

który uzyskuje się dla $\psi = 0$, gdzie ψ i C oznaczają kąt tarcia wewnętrznego i współczynnik spójności, a $Y = 2 C$.

Z równości / HOSFORD / 57 / /

$$2.43 \quad F = \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^n + \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)^n + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^n \right]^{1/n} - Y$$

uzyskać można jako szczególne przypadki warunek Tresca / $n=1$ / lub Hubera - Misesa / $n=2$ /. Naprężenia główne spełniają warunek $\sigma_1 \gg \sigma_2 \gg \sigma_3$.

Funkcja /2.43/ dobrze aproksymuje powierzchnie płynięcia określone doświadczalnie dla aluminium, miedzi i stali dla $n = 1.6 \pm 1.7$.

Przedstawione tu zależności algebraiczne wyrażające funkcje płynięcia mogą być użyte w sformułowaniu problemu określającego reakcję materiału lepkoplastycznego. Stosowanie kryteriów uplastycznienia ogólniejszych niż proponowane przez Mohra, Treskę lub Hubera i Misesa nie zwiększa trudności związanych z rozwiązaniem układu równań różniczkowych i algebraicznych opisujących problem fizyczny.

Użycie tych uogólnionych kryteriów wymaga określenia stałych ψ i C dla powierzchni Coulomba-Mohra lub współczynnika n w równości Hosforda.

2.2.2. TEORIA WZMOCNIENIA

UWAGI OGÓLNE

Podstawowym założeniem w teorii wzmocnienia izotropowego jest postulat mówiący o tym, że materiał pozostaje izotropowy w trakcie deformacji plastycznej. Ten model wzmocnienia opisany był przez PRAGER /88/ i HILLA /51/.

Wzmocnienie kinematyczne /PRAGER /88/, ISHLINSKII /61/ / jest próbą opisu anizotropii powodowanej przez deformację plastyczną.

Bardziej ogólną propozycją był model wzmocnienia /DRUCKER/34/, DRUCKER and EDELMAN /35 / / uwzględniający obrót, rozszerzanie lub kurczenie się powierzchni płynięcia w przestrzeni naprężeń.

Inna propozycja opisu wzmocnienia /BATDORF i BUDIANSKY /7/ / wykorzystująca teorię poślizgów była wnioskiem z fenomenologicznej teorii deformacji plastycznej.

Wykorzystanie odcinkami liniowej aproksymacji powierzchni płynięcia w pewnym szczególnym modelu wzmocnienia dyskutowali PRAGER /89 i /90/ oraz HODGE /53/ i /54/.

Niezgodnościami między modelami wzmocnienia kinematycznego w przestrzeniach naprężeń o różnych wymiarach zajmowali się SHIELD i ZIEGLER /110/.

Bardziej złożone modele wzmocnienia anizotropowego proponowali BALTOV i SAWCZUK /15/, MRÓZ /76/, EISENBERG i PHILLIPS /42/, KADASHEVICH i NOVOZHILOV /67/ oraz PHILLIPS i KASPAR /100/.

W badaniach eksperymentalnych PHILLIPS i GRAY /92/ oraz BERTSCH i FINDLEY /9/ obserwowali zachowanie się naroży na kolejnych powierzchniach płynięcia.

Brak naroży na powierzchni płynięcia oraz zgodność wyników eksperymentalnych z modelem kinematycznego wzmocnienia stwierdzili IVEY /62/, PARKER i KETTLEWELL /93/, PAUL, CHEN i LEE /94/, JENKINS /63/.

Prawo wzmocnienia uwzględniające wpływ trajektorii obciążenia na stan powierzchni płynięcia dla materiałów termoplastycznych zaproponowali PHILLIPS i TANG /99/ oraz PHILLIPS i KASPAR/100/ Ten model wzmocnienia opisuje transłacje powierzchni plastyczności oraz jej deformację w kierunku obciążenia wstępnego w dziewięciowymiarowej przestrzeni naprężeń.

Wyniki eksperymentalne oraz opis analityczny modelu wzmocnienia anizotropowego uwzględniającego wpływ trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia na stan powierzchni plastyczności przedstawili OHASHI, KAWASHIMA i YOKOCHI /84/ oraz OHASHI, TOKUDA i YAMASHITA /85/.

WZMOCNIENIE IZOTROPOWE

W teorii wzmocnienia izotropowego funkcja płynięcia jest wyrażona wzorem

$$2.44 F = f([\sigma]) - k(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

gdzie f jest funkcją skalarną naprężenia $[\sigma] = \sigma_{ij}$
a k zależy od parametrów wzmocnienia α_i dla $i = 1 \div n$.

W procesie deformacji powierzchnia płynięcia w przestrzeni naprężeń zwiększa swoje wymiary jednakowo we wszystkich kierunkach, wokół początku kartezjańskiego układu.

Parametry wzmocnienia są proporcjonalne do długości łuku trajektorii odkształcenia lepkoplastycznego. Jednym z tych parametrów jest wskaźnik odkształcenia plastycznego lub inaczej tzw. odkształcenie zredukowane

$$2.45 \bar{\epsilon}^{vp} = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \text{tr}[\dot{\epsilon}^{vp2}] \right)^{1/2} dt; [\dot{\epsilon}^{vp}] = \dot{\epsilon}_{ij}^{vp}$$

Wielkość tą utożsamia się z odkształceniem ϵ_u^{vp} przy czystym, stale rosnącym, jednoosiowym rozciąganiu w warunkach nieściśniętego płynięcia, wówczas

$$\epsilon_x^{vp} = \epsilon_u^{vp}, \quad \epsilon_y^{vp} = \epsilon_z^{vp} = -\frac{1}{3} \epsilon_u^{vp}$$

Innym parametrem wzmocnienia jest praca dysypowana w materiale plastycznym lub lepkoplastycznym

$$2.46 W^{vp} = \int_0^t \text{tr}[\sigma][\dot{\epsilon}^{vp}] dt.$$

Praca W^{VP} rośnie w czasie dla wszystkich trajektorii naprężenia, jeśli prędkość odkształcenia $[\dot{\epsilon}^{VP}]$ jest gradientem wypukłego potencjału lepkoplastycznego, którego powierzchnia equipotencjalna otacza początek $[\epsilon]=0$ układu współrzędnych.

Pochodne parametrów wzmocnienia dla materiałów lepkoplastycznych są zerowe, jeśli $[\dot{\epsilon}^{VP}]=0$.

Zależność podana przez Hilla dla materiałów plastycznych z równaniem konstytutywnym Misesa

$$2.47 \quad \frac{dW^{VP}}{dt} = \frac{1}{2} (F+Y) \frac{d\bar{\epsilon}^{VP}}{dt}$$

obowiązuje również dla materiałów lepkoplastycznych z prawem konstytutywnym PERZYNY stowarzyszonym z funkcją płynięcia typu

$$F = \sqrt{3} J_2 - Y(\bar{\epsilon}^{VP}).$$

W teorii lepkoplastyczności / $F > 0$ / w przeciwieństwie do teorii plastyczności / $F = 0$ / parametru W^{VP} nie można zastąpić przez $\bar{\epsilon}^{VP}$, ponieważ współczynnik proporcjonalności / $F + Y$ / zależy od aktualnego stanu naprężenia.

Głównymi cechami wzmocnienia izotropowego potwierdzonymi eksperymentalnie są:

- /i/ stałość kierunków głównych naprężenia,
- /ii/ współosiowość tensorów $[\dot{\epsilon}^{VP}]$ i $[\epsilon]$,
- /iii/ symetria powierzchni płynięcia względem środka układu składowych głównych naprężenia w czasie całego procesu odkształcenia.

WZMOCNIENIE ANIZOTROPOWE

Ogólnie funkcja płynięcia w teorii wzmocnienia anizotropowego wyraża się zależnością /SHRIVASTAVA, MRÓZ i DUBEY /118/

$$2.48 \quad F = f([\epsilon], [\alpha]) - k.$$

Parametry wzmocnienia α_i są składowymi symetrycznego tensora drugiego rzędu $\alpha_j = [\alpha]$.

Skalarna funkcja F nie zależy od układu odniesienia ośrodka ciągłego, można wykazać /RIVLIN /101//, że jest funkcją sześciu podstawowych oraz czterech wspólnych niezmienników tensorów $[\epsilon]$ i $[\alpha]$.

Funkcję płynięcia możemy zapisać w postaci

$$2.49 \quad F = f(\sigma_m, J_2, J_3, H_1, H_2, H_3, H_4, \alpha_m, J_2^\alpha, J_3^\alpha) - k$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{3} \text{tr} [\alpha], \quad [\alpha] = [\alpha] - \alpha_m \delta_{ij}, \\ J_2^\alpha &= \frac{1}{2} \text{tr} [\alpha^2], \quad J_3^\alpha = \frac{1}{3} \text{tr} [\alpha^3], \\ H_1 &= \text{tr} [s][\alpha], \quad H_2 = \text{tr} [s][\alpha^2], \\ H_3 &= \text{tr} [s^2][\alpha], \quad H_4 = \text{tr} [s^2][\alpha^2]. \end{aligned}$$

Tylko cztery wspólne niezmienniki oddziałują na proces plastycznego płynięcia, jeśli siły działające na brzegu zewnętrznym ciała zmieniają się tak, że składowe główne naprężenia są stałe. Wówczas niezmienniki podstawowe pozostają niezmienione.

Efekt Bauschingera modeluje się żądając, aby funkcja f była parzysta, czyli spełniała warunek

$$f([\sigma], [\alpha]) = f(-[\sigma], [\alpha]) \quad \text{dla} \quad [\alpha] = 0; \quad \text{dla} \quad [\alpha] \neq 0$$

może utracić tą własność.

Tensory $[\alpha]$ i $[\sigma]$ nie muszą być współosiowe, dlatego też prędkość odkształcenia $[\dot{\epsilon}^{vp}]$ pochodząca od pewnego potencjału

$$2.50 \quad Q = Q(\sigma_m, J_2, J_3, H_1, H_2, H_3, H_4, \alpha_m, J_2^\alpha, J_3^\alpha)$$

również nie będzie współosiowa z $[\sigma]$ ze względu na istnienie pochodnych $\partial H_i / \partial [\sigma]$ w wyrażeniach określających $[\dot{\epsilon}^{vp}]$.

Współosiowość prędkości odkształcenia $[\dot{\epsilon}^{vp}]$ i naprężenia $[\sigma]$ zachodzi tylko w szczególnych przypadkach kiedy:

- /i/ tensor $[\alpha]$ jest taki, że dla $t = 0$, $[\alpha] = 0$,
- /ii/ w czasie całej historii obciążenia utrzymuje się stałe kierunki główne,
- /iii/ zakłada się istnienie izotropowej zależności tensorowej między $[\dot{\alpha}]$ i $[\dot{\epsilon}^{vp}]$.

Definicja tensora $[\alpha]$ uzupełnia prawo wzmocnienia anizotropowego.

Tensor parametrów wzmocnienia można zdefiniować określając równanie ewolucji

$$2.51 \quad [\dot{\alpha}] - \psi([\sigma], [\alpha], [\dot{\epsilon}^{vp}]) = 0$$

lub podając funkcję liniową η

$$2.52 \quad [\alpha] = \eta([\epsilon^{VP}]).$$

Trójka tensorów $\{[\sigma], [\alpha], [\epsilon^{VP}]\}$ określa aktualny stan materiału.

Poniżej omówimy kilka najbardziej popularnych propozycji opisu wzmocnienia anizotropowego.

Prawo opisujące translację i zniekształcenie powierzchni płynięcia w przestrzeni naprężeń ma postać

$$2.53 \quad F = f(b_1, b_2, b_3) - k \quad /PRAGER /90/ /$$

gdzie:

$$b_1 = \sigma_m - \alpha_m = \frac{1}{3} \text{tr}([\sigma] - [\alpha]),$$

$$b_2 = J_2 - H_1 + J_2^\alpha = \frac{1}{2} \text{tr}([s] - [\alpha])^2,$$

$$b_3 = J_3 - H_3 + H_2 - J_3^\alpha = \frac{1}{3} \text{tr}([s] - [\alpha])^3.$$

Tensor parametrów wzmocnienia $[\alpha]$ mający wymiar naprężenia i określający translację powierzchni płynięcia definiuje się jednym z równań ewolucji

$$2.54 \quad [\dot{\alpha}] = c[\dot{\epsilon}^{VP}] \quad /PRAGER/90//$$

lub

$$2.55 \quad [\dot{\alpha}] = \mu \{ [s] - [\alpha] + \varrho (\sigma_m - \alpha_m) \delta_{ij} \}.$$

Współczynnik c zależy od niezmienników $[\epsilon^{VP}]$ i zmiennych stanu takich jak np. odkształcenie zredukowane $\bar{\epsilon}^{VP}$.

Wielkość μ określa się z układu równań /2.55/ i $\text{tr}[\dot{\alpha}][\dot{\epsilon}^{VP}] = c \text{tr}[\dot{\epsilon}^{VP}]^2$.

Wartości parametru ϱ ZIEGLER /131/ oraz SHRIVASTAVA i inni /118/ postulowali odpowiednio $\varrho = 1$ i $\varrho = 0$.

W ogólniejszym modelu wzmocnienia anizotropowego, w którym krzywa płynięcia zmienia swój kształt od okręgu MISESA do elipsy o środku w punkcie $[\alpha]$, funkcję płynięcia określa się wzorem /SAWCZUK i BALTOV / 16/ /

$$2.56 \quad F = 1/2 \text{tr} [s - \alpha]^2 + 1/2 A (\text{tr} [\alpha] [s - \alpha])^2 - k^2 \\ = J_2 - H_1 + J_2^\alpha + 1/2 A (H_1 - 2J_2^\alpha)^2 - k^2$$

gdzie: $[\alpha] = c[\epsilon^{vp}]$. Współczynnik A jest parametrem wzmocnienia odpowiadającym za zniekształcenie powierzchni płynięcia, dla którego BACKHAUS proponował definicję

$$2.57 \quad A = 2 B / E]_2 - 1/$$

gdzie B oznacza stałą materiałową związaną ze zmianą kształtu. Efekt zmiany wymiarów krzywej płynięcia w dwóch prostopadłych kierunkach opisał jakościowo SVENSSON /116/ postulując funkcję płynięcia

$$2.58 \quad F = \frac{1}{2} \text{tr}([\dot{s}] - [\alpha])^2 + A \text{tr}([\epsilon^{vp}]([\dot{s}] - [\alpha]))^2 + \frac{1}{2} A^2 \text{tr}([\epsilon^{vp}]([\dot{s}] - [\alpha]))^2, \quad [\alpha] = c[\epsilon^{vp}].$$

Parametry c i A interpretuje się jako moduł translacji i współczynnik zniekształcenia / dystorsji/.

Mieszane prawo wynikające z intuicji wzmocnienia izotropowego i kinematycznego podał HODGE /54/ dla materiału z powierzchnią plastyczności MISESA

$$2.59 \quad F = 3(J_2 - H_1 + J_2^\alpha)^{1/2} - Y(\bar{\epsilon}^{vp}), \\ [\alpha] = c[\epsilon^{vp}].$$

UWAGI KOŃCOWE

Żaden z przedstawionych modeli wzmocnienia nie opisuje w pełni zmian kształtu powierzchni płynięcia w procesie lepkoplastycznego płynięcia.

Wyniki jakie uzyskali PHILLIPS /100/ i /100a/ oraz OHASHI i zespół /85/ dobrze opisują rzeczywiste zmiany powierzchni płynięcia, ale wiążą się ze skomplikowanymi zależnościami matematycznymi oraz trudnościami w określeniu danych koniecznych do obliczeń numerycznych.

Modele wzmocnienia proponowane przez ZIENKIEWICZA, NAYAKA i OWENA /132/ nie nastroczają tych trudności, ale wymagają pamiętania i śledzenia ewolucji rosnącej liczby parametrów wewnętrznych określających stan materiału.

Proste prawa wzmocnienia mogą zapewnić dobrą zgodność teoretycznie określonego i rzeczywistego zachowania materiału w ograniczonych obszarach prędkości odkształcenia i temperatury.

Prezentowane tu teorie wzmocnienia materiału są charakterystyczne dla modelu wzmocnienia izotropowego i anizotropowego. Zależności opisujące powierzchnie plastyczności dla materiałów ze wzmocnieniem anizotropowym nie są przyczyną dodatkowych trudności związanych ze znalezieniem efektywnego algorytmu rozwiązującego problemy reakcji materiału lepkoplastycznego.

Stosowanie modeli wzmocnienia kinematycznego wymaga określenia dodatkowych współczynników takich jak tensor parametrów wzmocnienia $[\alpha]$ dla funkcji płynięcia proponowanej przez Mroza, Skrivastavę i Dubeya lub parametru zniekształcenia A i modułu translacji c dla funkcji płynięcia Svenssona.

2.3. EFEKTY TERMICZNE $\times/$

Jednoczesny wpływ prędkości odkształcenia i temperatury na zachowanie się materiału można opisać równaniami konstytutywnymi /2.22/, jeśli przyjmie się, że γ, F oraz funkcja Φ/F są zależne od temperatury w sposób ciągły.

Równania konstytutywne według propozycji zawartej w pracy PERZYNY i WIERZBICKIEGO $\times/$

$$/2.60/ \begin{cases} \dot{\epsilon}_{ij}^0 = \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} + \frac{1}{3H} \dot{\epsilon}_m \delta_{ij} + \alpha \dot{\theta}, \\ \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} = \gamma(\theta) \langle \Phi(F) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{2}}, \quad F = f(\epsilon_{ij}^{vp}, \epsilon_{ij}^{vp}) - 1, \end{cases}$$

$\times/$ Pewne uwagi o charakterze fenomenologicznym na temat przypadków równań konstytutywnych opisujących reakcję materiałów lepkoplastycznych o własnościach zależnych od temperatury przedstawili OLSZAK i PERZYNA /97/ oraz PERZYNA i WIERZBICKI 1964.

Obszerny spis literatury dotyczącej analizy zachowania się materiałów niesprężystych z punktu widzenia klasycznej termodynamiki znaleźć można w manuskryptach PERZYNY:

"Teoria lepkoplastyczności" PWN, Warszawa 1966 oraz

"Termodynamika materiałów niesprężystych" PWN, Warszawa 1978.

uwzględniają rozszerzalność cieplną oraz zależność granicy plastyczności od temperatury.

Współczynnik rozszerzalności cieplnej oznaczono przez α . Prawo konstytutywne określające prędkość lepkoplastycznego odkształcenia dla przypadków jedno-osioowych przyjmuje postać

$$2.61 \quad \dot{\epsilon}^{VP} = \frac{2}{\sqrt{3}} \gamma(\theta) \langle \Phi \left[\frac{\sigma}{Y(\theta)} - 1 \right] \rangle$$

lub równoważną powyższej zależności

$$\sigma(\dot{\epsilon}, \theta) = Y(\theta) \left\{ 1 + \Phi^{-1} \left[\frac{\sqrt{3} \dot{\epsilon}^{VP}}{2 \gamma(\theta)} \right] \right\}.$$

Zgodność między opisem reakcji materiału danym przez /2.61/ a wynikami eksperymentalnymi dotyczącymi prób jednoosioowych wykazał PERZYNA /95/ badając trzy przypadki szczególne:

- /i/ $Y = Y(\theta)$, $\gamma = \gamma_0 / \alpha$ i funkcja Φ / F nie zależy od temperatury,
- /ii/ $Y = Y(\theta)$, Φ zależy od temperatury i γ nie zależy od temperatury,
- /iii/ $Y = Y(\theta)$, γ i Φ są niezależne od temperatury.

Zależność postaci funkcji Φ / F od temperatury może wymagać stosowania kilku procedur rozwiązujących postawione zagadnienie początkowo-brzegowe w zależności od zakresu temperatury zmiennej w procesie deformacji. Niedogodność ta wiąże się z rozbudową algorytmu oraz zwiększeniem czasu potrzebnego do rozwiązania zagadnienia, ponieważ w pewnych problemach tylko iteracyjna metoda rozwiązania będzie odpowiednia /np. w sprzężonym problemie lepkoplastycznej deformacji/.

Trudności tego typu nie występują w dwóch z badanych przypadków, jednakże pierwszy z nich jest bardziej ogólny.

Prawo konstytutywne uwzględniające wzmocnienie

$$/2.62/ \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{VP} = \gamma(\theta) \langle \Phi \left[\frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^{VP})}{\kappa(\epsilon_{ik}^{VP}, \theta)} - 1 \right] \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}$$

umożliwia opis zachowania się materiału w szerszym zakresie zmienności temperatury i prędkości odkształcenia niż równanie /2.60b/.

2.4. DYNAMICZNE ZACHOWANIE MATERIAŁU NIEŚCISLIWEGO.

Pełny układ równań ruchu dla nieściśliwego, jednorodnego ciała stałego zapisuje się w postaci

$$/2.63/ \begin{cases} (i) \frac{d\vec{v}}{dt} = F - \frac{1}{\rho} \text{grad} \tilde{\sigma}, \\ (ii) \text{div } \vec{v} = 0, \\ (iii) \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \epsilon = 0, \end{cases}$$

gdzie \vec{v} i \vec{F} są wektorami prędkości przemieszczenia i sił masowych a $\tilde{\sigma}$ jest tensorem naprężenia. Równania równowagi /2.63//1/ sił działających w ciele dla układu współrzędnych walcowych r, φ, z wyrażają się równaniami

$$/2.64/ \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \rho \left(F_r - \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + \rho \left(F_\varphi - \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} \right) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho \left(F_z - \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = 0, \end{cases}$$

i określają ruch cząstki.

Przyjmując, że pole obciążenia /lub pole przemieszczenia/ jest symetryczne względem jednego z kierunków głównych w przestrzeni naprężenia /lub przemieszczenia/, równania równowagi /2.64/ można uprościć do postaci

$$/2.65/ \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \rho \left(F_r - \frac{\partial v_r}{\partial t} \right) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho \left(F_z - \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) = 0. \end{cases}$$

gdą $v_\varphi = 0, v_r = v$.

Składową przemieszczenia w kierunku osi r oznaczono przez u a składową wzdłuż osi z przez w .

Dalsze uproszczenie układu równań osiąga się w przypadku płaskiego stanu odkształcenia lub naprężenia, gdy we wszystkich punktach ciała jeden z trzech kierunków głównych tensora odkształcenia lub naprężenia jest równoległy do pewnego określonego kierunku.

W płaskim stanie odkształcenia spełnione są warunki

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \tau_{rz} = 0.$$

Wówczas zaniedbując siły masowe $\tilde{F} = 0$ układ równań /2.65/ redukuje się do jednego tylko równania

$$/2.66/ \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_a}{r} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}.$$

W płaskim stanie naprężenia obowiązuje ta sama zależność, ponieważ żąda się aby $\sigma_z = \tau_{rz} = 0$. Warunek $\frac{\partial W}{\partial r} = 0$ nie wynika z kinematyki ruchu cząstki materialnej w płaskim, osiowosymetrycznym, stanie odkształcenia. Przyczyną tego jest własność odwzorowania konstytutywnego danego równaniem konstytutywnym, które w przypadku materiałów lepkoplastycznych zerowemu naprężeniu τ_{rz} przyporządkowuje prędkość odkształcenia stycznego $\delta_{rz} = -\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial r} = 0$.

Wówczas niezerowa prędkość odkształcenia δ_{rz} mogłaby istnieć dla niesprzężonych pól odkształceń i naprężeń.

2.5. RÓWNIANIA PODSTAWOWE

2.5.1. UWAGI OGÓLNE

W dalszym ciągu przedstawimy układy równań i sformułujemy trzy zagadnienia początkowo-brzegowe opisujące zachowanie się rury grubościennej dla materiału:

- /i/ sztywno-lepkoplastycznego ze wzmocnieniem izotropowym i efektami termicznymi,
- /ii/ sztywno-lepkoplastycznego ze wzmocnieniem izotropowym,
- /iii/ sztywno-idealnie-lepkoplastycznego.

Rozpatrujemy zachowanie się rury z materiału sztywno-lepkoplastycznego, ponieważ interesują nas takie procesy plastycznego płynięcia, gdzie spełnione są warunki

$$\epsilon_{ij}^e \ll \epsilon_{ij}^{vp} \text{ dla } \forall (i,j) \text{ wówczas } \epsilon_{ij} \approx \epsilon_{ij}^{vp}.$$

We wszystkich trzech przypadkach nieskończenie długa rura jest obciążona ciśnieniem $p = p/t/$ działającym na powierzchni wewnętrznej i panuje w niej płaski, osiowosymetryczny stan odkształcenia. Założenie o nieskończonej długości rury upoważnia nas do wykluczenia z rozważań problemów wpływu brzegów oraz sposobów zamocowania na reakcję materiału, wówczas kiedy spełniony

jest warunek $\varepsilon_{zz} \ll \varepsilon_{rr}$.

W procesie deformacji sztywno-lepkoplastycznej rury w warunkach płaskiego stanu odkształcenia można wyróżnić dwie fazy. Założmy, że obciążenie stałe rośnie.

Pierwsza faza procesu trwa od chwili t_{p1} /patrz rys. 1/, w której pojawia się w sztywnym materiale strefa plastyczna do momentu, kiedy zniknie obszar sztywny. W tym okresie ruch cząsteczki materialnej w płaszczyźnie / r, φ / nie jest możliwy. Założenie o płaskim stanie odkształcenia jest nieodpowiednie dla opisu ruchu w tym stadium. W bliskim sąsiedztwie granicy obszaru sztywnego i plastycznego odkształcenia obwodowe i promieniowe spełniać musi warunki ciągłości

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^e = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{vp} = \varepsilon_{rr}^e = \varepsilon_{rr}^{vp} = 0.$$

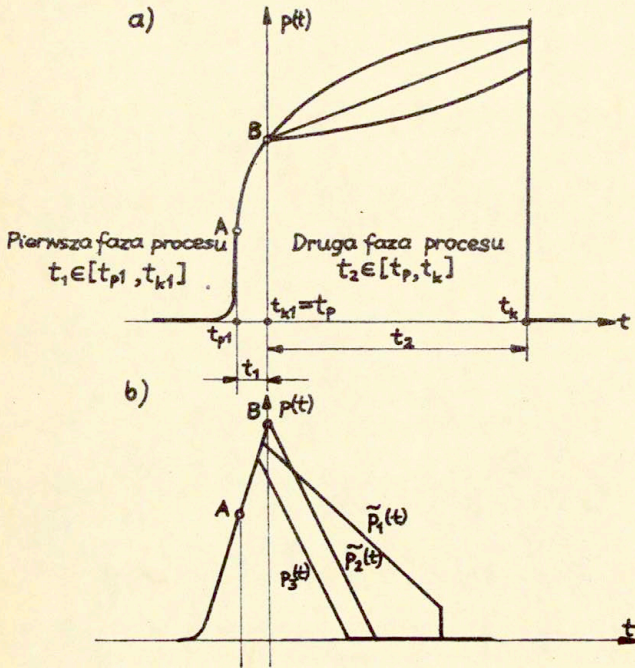
Druga faza procesu deformacji rozpoczyna się, kiedy granica strefy sztywnej i plastycznej pokryje się z zewnętrzną powierzchnią walcową, od tej chwili t_p przy dalszym wzroście ciśnienia $p/t/$ w czasie $t = t_k - t_p$ możliwe jest płynięcie rury w kierunku promieniowym.

Dalej będziemy zajmowali się tylko procesami zachodzącymi w drugim stadium deformacji / rys. 1a/ dla $t \in [t_p, t_k]$.

W rurze grubościennej nieznikającymi składowymi stanu odkształcenia będą dziewięć składowe prędkości odkształcenia

$$\dot{\varepsilon}_{rr}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{rr} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial r} \quad \text{i} \quad \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Niezerowymi naprężeniami będą $\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{zz}$.



Rys. 1. Fazy procesu deformacji oraz typy funkcji p/t /

1a. fazy procesu deformacji oraz ciśnienia p_1 , p_2 , p_3 w aktywnym procesie obciążania.

1b. typy obciążeń właściwe dla pierwszej fazy procesu deformacyjnego.

Punkt A oznacza punkt na wykresie p/t / odpowiadający początkowi pierwszej fazy. Punkt B oznacza początek drugiej fazy.

2.5.2. ROWNANIA PODSTAWOWE DLA MATERIAŁU Z EFEKTAMI TERMICZNYMI I WZMOCNIENIEM IZOTROPOWYM.

Problem zachowania się rury sztywno-lepkoplastycznej z efektami termicznymi i wzmocnieniem izotropowym sformułujemy bez pełnego sprzężenia termodynamicznego. W przypadku takiego sprzężenia każda cząstka materialna jest źródłem ciepła w procesie deformacji. Energia dysypowana w materiale w procesie deformacji plastycznej nie będzie brana pod uwagę w naszych rozważaniach jako źródło ciepła. Uwzględnimy efekty termiczne jakimi są wpływ temperatury na granicę plastyczności oraz zależność współczynnika lepkości od temperatury.

Rura grubościenna jest ogrzewana na powierzchniach walcowych. Rozkład temperatury w chwili t_p^- jest określony funkcją $\Theta = \Theta(r, t_p^-)$.

Zajmiemy się procesami deformacyjnymi uwzględniając przewodnictwo cieplne materiału opisane równaniem słusznym dla przypadków bez wewnętrznych źródeł ciepła

$$/2.67/ \quad \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right).$$

Temperatura na brzegu wewnętrznym w chwili t_p^+ będzie zmieniała się według jednego z podanych sposobów:

/i/ rosła skokowo tak, aby $\left. \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right|_{t_0, r_0} < \infty$,

/ii/ rosła tak, że $\Theta(r, t), \forall t \in [t_p, t_k]$ będzie funkcją ciągłą $\Theta \in C^2$,

/iii/ rosła skokowo a następnie zmieniała według wymagań /ii/.

Współczynnik dyfuzyjności lub inaczej przewodnictwa temperaturowego określa się z zależności $\mu = \frac{K}{c \rho}$, gdzie K, c, ρ oznaczają współczynniki przewodnictwa cieplnego, ciepło właściwe i gęstość materiału. Temperatura na powierzchni zewnętrznej w całym procesie będzie równa stałej wartości, czyli $\Theta = \Theta(b, t) = \text{const}$. Prędkość przemieszczenia $v(r, t) = \dot{u}(r, t)$ w każdym z rozwiązywanych w tej pracy problemów będzie spełniała warunek nieściśliwości /2.63/ii/, jedno z równań ruchu będące jednorodnym liniowym równaniem różniczkowym

$$/2.68/ \quad \frac{v(r,t)}{r} + \frac{\partial v(r,t)}{\partial r} = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest $v(r,t) = \dot{C}(t)e^{-\ln r} = \frac{C(t)}{r}$.

Z definicji wiadomo, że $v(r,t) = \frac{\partial r}{\partial t}$, wobec tego rozwiązanie równania zwyczajnego

$$/2.69/ \quad \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\dot{C}(t)}{r} \quad \text{w postaci}$$

$$/2.70/ \quad r^2 = r_0^2 + 2C(t), \quad \forall r \in [a, b], \quad C(t) \in \mathbb{C}^2$$

określa zmianę wymiarów osiowosymetrycznej konstrukcji.

Cząstka materialna leżąca w odległości r_0 od osi znajdzie się po czasie t w odległości $[r_0^2 + 2C(t)]^{1/2}$.

Przyjmujemy, że spełniony jest warunek plastyczności Hubera-Misesa /2.37/

$$/2.71/ \quad \sqrt{3}J_2 - \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_r) - \gamma \gg 0$$

oraz wzmocnienie jest izotropowe. Granica plastyczności

$\kappa(\epsilon_{ij}, \theta)$ jest liniową funkcją pracy plastycznej W^{VP}

$$/2.72/ \quad \kappa(\epsilon_{ij}, \theta) = \frac{1}{2} \eta W^{VP} + \kappa_0(\theta).$$

Parametr W^{VP} znajduje się z /2.46/ według wzoru

$$W^{VP} = \int_0^t (\sigma_{rr} \dot{\epsilon}_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi}) d\tau = - \int_0^t \frac{\dot{C}(\tau)}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) d\tau.$$

Wobec powyższego granicę plastyczności wyraża się zależnością

$$/2.73/ \quad \kappa(r,t) = \kappa_0(\theta) - \frac{1}{2} \eta \int_0^t \frac{\dot{C}(\tau)}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) d\tau.$$

Równanie konstytutywne /2.62/ uwzględniające jednoczesne efekty termiczne i prędkościowe dla potęgowej funkcji

$$\Phi(F) = \left[\frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^{VP})}{\kappa(\epsilon_{ij}^{VP}, \theta)} - 1 \right]^\delta \quad \text{gdzie} \quad \frac{f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^{VP})}{\kappa(\epsilon_{ij}^{VP}, \theta)} - 1 > 0$$

przyjmuje postać

$$/2.74/ \quad \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} = \frac{\dot{C}(t)}{r^2} = \gamma(\theta) \left(\frac{\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}}{2\kappa} - 1 \right)^\delta.$$

Współczynnik $\delta = 2m + 1$, gdzie m jest liczbą całkowitą, nie może być liczbą parzystą, gdyż ogólnie symetria funkcji tensorowej $\tilde{\epsilon}(\tilde{\sigma})$ nie jest fizycznie uzasadniona.

Równanie równowagi 2.66 po wykorzystaniu 2.69 przekształca się do postaci

$$/2.75/ \quad \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \rho \int_r^1 [\ddot{C}(t) - \left(\frac{\dot{C}(t)}{r}\right)^2] r^2 dr.$$

Eliminując człon $(\delta_{\varphi\varphi} - \delta_{rr})$ z równania konstytutywnego 2.74 i równowagi 2.75 otrzymujemy zależność

$$\frac{\partial \delta_{rr}}{\partial r} = \frac{2\alpha(r,t)}{r} \left(\frac{C^{\xi}}{r^{2\xi} \gamma^{\xi}(\theta)} + 1 \right) + \rho \frac{1}{r} \left[\dot{C}(t) - \left(\frac{C(t)}{r} \right)^2 \right], \quad \xi = \sigma^{-1},$$

która po scałkowaniu względem r w granicach $r \in [a, b]$

i wykorzystaniu warunku brzegowego $\delta_{rr}(t, a) = -p(t)$ ma postać równania różniczkowego

$$/2.76/ \quad p(t) + \rho \dot{C}(t) \ln a/b - \rho \frac{\dot{C}^2(t)}{2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) - 2C^{\xi}(t) \int_r^{b(C)} \frac{\alpha(r,t) dr}{r^{2\xi+1} \gamma^{\xi}(r,t)} - 2 \int_r^{b(C)} \frac{\alpha(r,t)}{r} dr = 0.$$

o współczynnikach zależnych od rozwiązania $C(t)$.

Różniczkując równanie 2.73 i eliminując wyraz $(\delta_{\varphi\varphi} - \delta_{rr})$ otrzymujemy

$$2.77 \quad \frac{\partial \alpha(r,t)}{\partial t} = \eta \frac{\dot{C}(t)}{r^2} \left(\frac{C^{\xi}}{r^{2\xi} \gamma^{\xi}(r,t)} + 1 \right) \alpha(r,t).$$

Równania 2.67, 2.76, 2.77 oraz warunki początkowe

$$\alpha(r, 0) = \alpha^0(r), \quad C(0) = \dot{C}(0) = 0, \quad \theta(r, 0) = T(r)$$

i brzegowe $\delta_{rr}(a, t) = -p(t)$, $\delta_{rr}(b, t) = 0$, $\theta(a, 0) = T(a) = g(a)$ warunek zgodności,

$$\theta(a, t) = g(t) \quad \text{są problemem początkowo-brzegowym opisującym}$$

reakcje grubościennej rury z materiału lekoplastycznego o równaniu konstytutywnym uwzględniającym wpływ temperatury na granicę plastyczności oraz współczynnik lepkości.

Ten problem początkowo-brzegowy dalej będziemy nazywali zagadnieniem / G / .

Czasy trwania procesów deformacyjnych w rozpatrywanym zagadnieniu są rzędu tysięcznych części sekundy. Należy wobec tego sprawdzić w jak grubej warstwie materiału w istotny sposób zmieni się temperatura na skutek przewodnictwa cieplnego. Obszar ten nazywa się warstwą cieplną.

Grubość tej warstwy można określić posługując się modelem przewodnictwa ciepła w półograniczonym ciele stałym /rys. 2/. Wówczas możemy wykorzystać dobrze znane w literaturze rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego

$$2.78 \quad \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2}$$

z warunkiem początkowym $\theta(x, 0) = \theta_0 = 0$ i brzegowym $\theta(0, t) = \Omega(t)$

Rozwiązanie powyższego problemu ma postać

$$2.79 \quad \Theta(x,t) = \int_0^x \Omega(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} B(x,t-\lambda) d\lambda$$

gdzie

$$B(x,t-\lambda) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/2\sqrt{\mu(t-\lambda)}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi.$$

W szczególnym przypadku niech $\Omega(\lambda)/t$ będzie funkcją liniową

$\Omega(\lambda)/t = k\lambda$, gdzie k jest stałą, wówczas rozwiązanie 2.79

jest

$$2.80 \quad \Theta(x,t) = kt \left\{ \left(1 + \frac{x^2}{2\mu t}\right) \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\mu t}} - \frac{x}{\sqrt{\pi\mu t}} e^{-x^2/4\mu t} \right\} \\ = 4kti^2 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{\mu t}}.$$

Występującą po prawej stronie funkcję $\operatorname{erfc}(l)$ definiuje się

$$\operatorname{erfc}(l) = 1 - \operatorname{erf}(l)$$

gdzie funkcja błędu Gaussa $\operatorname{erf}(l) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^l e^{-\beta^2} d\beta$

ma własności:

$$\operatorname{erf}(l) \in [0,1] \text{ dla } l \in [0,\infty], \operatorname{erf}(0) = 0, \operatorname{erf}(\infty) = 1.$$

Praktycznie dla $l \geq 2.7$ funkcja $\operatorname{erf}(l) = .9999$ praktycznie mało różni się od jedności.

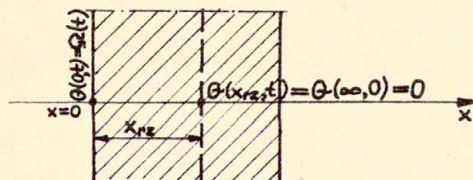
Temperatura na powierzchni granicznej Q warstwy cieplnej nie ulegnie zmianie w procesie o czasie trwania t , wobec tego zachodzi zależność

$$\Theta_0 = 4kti^2 \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{\mu t}}\right) = 0.$$

Skąd otrzymujemy równanie określające grubość warstwy cieplnej

$$2.81 \quad x = 2n\sqrt{\mu t} \quad \text{dla } n=2 \text{ lub } n=3.$$

Rzeczywistą grubość warstwy cieplnej x_{rz} szacuje się $x_{n=2} < x_{rz} < x_{n=3}$.



Rys. 2. Określenie grubości warstwy cieplnej x_{rz} .

Dalej rozważania będziemy prowadzili dla bezwymiarowego układu wielkości.

Wielkości obdarzone wymiarem oznaczymy daszkiem „na górze”.

Czas będzie przyjmował wartości z przedziału $[0, 1]$, jeśli

$t = \frac{\hat{t}}{\hat{t}_k}$, gdzie \hat{t}_k oznacza czas trwania procesu. Aktualną granicą plastyczności określimy porównując ją z granicą plastyczności w temperaturze $293 [^\circ\text{K}]$, $\varkappa(r, t) = \hat{\varkappa}(r, t) / \hat{\varkappa}_{20}^0$.

Pozostałe zmienne są parametryzowane według wzorów:

$$\gamma = \hat{\gamma} \cdot \hat{t}_k, C(t) = \hat{C}(t) / \hat{a}_0^2, a_0 = 1, b_0 = \hat{b}_0 / \hat{a}_0, \vartheta = \hat{\vartheta} \hat{a}_0^2 / \hat{a}_{20}^0 \hat{t}_k^2,$$

$$\mu = \hat{\mu} \hat{t}_k / \hat{a}_0^2, \theta = \hat{\theta} / 273 [^\circ\text{K}], r = \hat{r} / \hat{a}_0,$$

$$\sigma_{rr} = \hat{\sigma}_{rr} / \hat{\varkappa}_{20}^0, \sigma_{\varphi\varphi} = \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} / \hat{\varkappa}_{20}^0, \rho(t) = \hat{\rho}(t) / \hat{\varkappa}_{20}^0.$$

Zbiór wielkości wymiarowych parametryzujących układ zmiennych jest wobec tego $\hat{a}_0, \hat{t}_k, 273 [^\circ\text{K}], \hat{\varkappa}_{20}^0$.

Układ równań 2.67, 2.76 i 2.77 przy tym sposobie wyeliminowania wymiarów nie zmieni się.

Szukane funkcje będą określone na dziedzinie

$$\text{dom} = \{(r, t) : r(t) \in [a(t), b(t)], t \in [0, 1]\}.$$

2.5.3. RÓWNIANIA PODSTAWOWE DLA MATERIAŁU ZE WZMOCNIENIEM

Układ równań problemu / Θ / dla procesu izotermicznego $\Theta / r, t / = \Theta_0 = \text{const.}$, gdzie $\delta = \text{const.}$ i $\partial \varkappa^0 / \partial \theta = 0$ redukuje się do dwóch równań

$$\frac{\partial \varkappa(r, t)}{\partial t} = \eta \frac{\dot{C}(t)}{r^2} \left(\frac{\dot{C}^2}{r^2 \gamma^2} + 1 \right) \varkappa(r, t),$$

$$2.82/ \quad \rho(t) + \vartheta \dot{C}(t) \ln a/b - \frac{1}{2} \vartheta \dot{C}^2(t) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) - 2 \int_a^{b(C)} \frac{\dot{\varkappa}(t)}{r^2} \int_r^{b(C)} \frac{\varkappa(r, t)}{r^{2\gamma+1}} dr - 2 \int_a^{b(C)} \frac{\varkappa(r, t)}{r} dr = 0$$

Warunki początkowe i brzegowe są:

$$2.83 \quad \varkappa(r, 0) = \varkappa^0, C(0) = \dot{C}(0) = 0.$$

Układ równań 2.82 z warunkami 2.83 jest problemem początkowo-brzegowym opisującym zachowanie się materiału lepkoplastycznego ze wzmocnieniem izotropowym. Zagadnienie to dalej będziemy oznaczali symbolem /W/.

2.5.4. RÓWNANIA PODSTAWOWE DLA MATERIAŁU SZTYWNO-IDEALNIE LEPKOPLASTYCZNEGO

Granica plastyczności dla materiału sztywno-idealnie plastycznego spełnia warunek

$$\sigma(r,t) = \sigma^0 = \text{const.}$$

W tym przypadku problem /w/ zredukuje się do równania różniczkowego zwyczajnego sklasyfikowanego jako równanie ruchu typu Releya

$$/2.84/ \quad \rho \ddot{c}(t) \ln \frac{a}{b} - \frac{1}{2} \rho \dot{c}^2 \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{\dot{c}^{\frac{3}{2}}}{\frac{2}{3} \rho} \left(\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}} \right) + 2 \ln \frac{a}{b} + p(t) = 0$$

co łatwo zauważyć, jeśli wprowadzi się oznaczenia:

$$d := -2/\rho, \quad x := c/t, \\ g/x := p(t) / (\rho \ln [(a_0^2 + 2x)/(b_0^2 + 2x)]),$$

$$f(x, \dot{x}) := \left(\frac{\dot{x}^{\frac{3}{2}} [(a_0^2 + 2x)^{\frac{3}{2}} - (b_0^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}]}{\frac{2}{3} (b_0^2 + 2x)^{\frac{3}{2}} (a_0^2 + 2x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\rho \dot{x} [(a_0^2 + 2x) - (b_0^2 + 2x)]}{2 (a_0^2 + 2x)(b_0^2 + 2x)} \right) / (\rho \ln [(a_0^2 + 2x)/(b_0^2 + 2x)]),$$

ma ono postać

$$/2.85/ \quad \ddot{x} + f(x, \dot{x}) \dot{x} + g(x) = d.$$

Równanie to jest równoważne układowi równań autonomicznych pierwszego rzędu $x = y_1, \dot{x} = y_2$

$$/2.86/ \quad \begin{cases} (y_1)' = y_2, \\ (y_2)' = -g(y_1) - f(y_1, y_2) y_2 + d. \end{cases}$$

W ogólnej teorii równań ruchu współczynniki $f/x, \dot{x} / i g/x$ nazywa się odpowiednio współczynnikiem tłumienia i siłą "zwrotną" lub bezwładno^{śc}cią.

Warunki początkowe dla układu /2.86 / są

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 0 \quad \text{dla } t = 0.$$

3. ISTNIENIE I JEDNOZNACZNOŚĆ ROZWIĄZANIA.

W rozdziale tym omówimy twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania problemów /G/, /W/ i /S/. Ponadto podamy twierdzenia o rozwiązaniach okresowych lub nieokresowych oraz sprawdzenie założeń przyjętych w tych twierdzeniach dla problemu /S/.

Problem /G/ przedstawimy jako zagadnienie STEFANA dla równania przewodnictwa cieplnego.

Istnieniem i jednoznacznością klasycznego rozwiązania problemu Stefana zajmowali się między innymi FICHERA /44/, FRIEDMAN /45/, KOHN i NIRENBERG /70/, CANNON i HILL /31/.

Istnienie i jednoznaczność słabych rozwiązań badali LIONS /74/ i MIGNOT /77/. JAMET i PARTER /64/ oraz JAMET /65/ badali jednoznaczność i istnienie przybliżonego rozwiązania dyskretnego równania operatorowego.

W drugiej części rozdziału przedstawiono uwagi o równaniach różniczkowych typu Releya oraz cytuje się twierdzenia zawarte w pracach CHANTURII /32/, KARTSATOSA /72/, GRAEFA i SPIKESA /48/, BOBISUDA /17/ oraz innych.

3.1. ANALIZA UKŁADU RÓWNAŃ /G/

Zapiszmy układ równań /G/ w postaci normalnej

$$\begin{aligned}
 & 1. \ddot{C}(t) = \frac{1}{9 \ln(a/b)} \left\{ \frac{e^{\dot{C}(t)}}{2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2\dot{C}^2(t) \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{x(r,t) dr}{r^{(2+\gamma)} y^{\gamma}(r,t)} + 2 \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{x(r,t)}{r} dr - p(t) \right\} \\
 /G/ \quad & 2. \frac{\partial x(r,t)}{\partial t} = \eta \frac{\dot{C}(t)}{r^2} \left(\frac{\dot{C}(t)}{r^2 y^{\gamma}(r,t)} + 1 \right) x(r,t), \\
 & 3. \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) \text{ gdzie } C, x, \Theta \in C^2 \text{ (należą do klasy } C^2 \text{)}.
 \end{aligned}$$

Mozemy dla tego układu postawić warunki początkowe

$$/3.0/ \quad C(0) = \dot{C}(0) = 0, \quad x(r,0) = x^0(\Theta(r,0)) = x^0(r), \quad \Theta(r,0) = \varphi_1(r),$$

oraz brzegowy typu DIRICHLETA

$$/3.1/ \quad \Theta(a,t) = f(t) \quad \text{ i } \quad \Theta(b,t) = f_1(t).$$

Funkcje $\varphi_1(r), f(t)$ i $f_1(t)$ muszą spełniać warunki zgodności

$$/3.2/ \quad \varphi_1(a) = f(0) \text{ i } \varphi_1(b) = f_1(0) \text{ dla } b, a \neq 0$$

w przeciwnym przypadku warunków początkowy i brzegowy byłyby sprzeczne ze sobą w punktach $(a, 0)$ i $(b, 0)$.

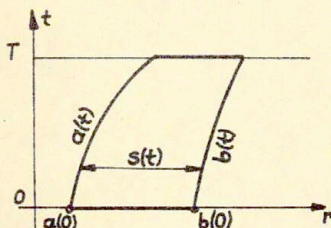
Problem opisany układem równań /G/ można sprowadzić do zagadnienia STEFANA dla równania przewodnictwa cieplnego, jeśli zamiast zmiennej geometrycznej, jaką jest promień r , wprowadzi się grubość

$$/3.3/ \quad x = r - a(t), \text{ gdzie } 0 \leq x \leq s(t), \quad s(t) = b(t) - a(t).$$

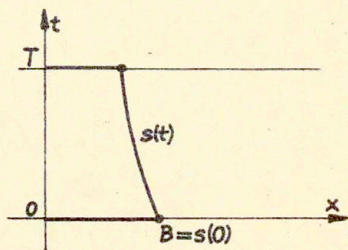
Dokonując transformacji /3.3/ obszar $\{r, t\}, a(t) \leq r < b(t), 0 \leq t < \infty\}$

/RYS. 3.1/ odwzorowuje się do obszaru $\{x, t\}, 0 \leq x \leq s(t), 0 \leq t < T\}$

/patrz RYS. 3.2/



RYS. 3.1 Obszar $\{r, t\}$.



RYS. 3.2 Obszar $\{x, t\}$.

Wówczas dla zadanych funkcji f, φ i szczególnego przypadku $f_1/t/ = 0$ oraz wartości B należy znaleźć dwie funkcje $s = s/t/$ i $\Theta = \Theta/x, t/$ takie, że ich para $/s, \Theta/$ spełnia zarówno równanie przewodnictwa

$$/3.4/ \quad \begin{cases} LG := \mu \frac{1}{x+a(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x+a(t)} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \right) - \frac{\partial \Theta}{\partial t} \text{ w obszarze } 0 < x < s(t), 0 < t \leq T, \\ \Theta(0, t) = f(t) \geq 0 \text{ i } \Theta(s(t), t) = 0 \text{ dla } 0 \leq t \leq T, \\ \Theta(x, 0) = \varphi(x) \geq 0 \text{ dla } 0 \leq x \leq B, \quad s(0) = B \geq 0, \end{cases}$$

jak również równania opisujące ruch swobodnego brzegu

$$/3.5/ \quad s(t) = b(t) - a(t) \text{ dla } r^2(t) = a^2(0) + 2C(t), \quad a(t) \leq r \leq b(t),$$

gdzie $C/t/$ jest określone z układu równań

$$/3.6/ \quad \begin{cases} \ddot{C}(t) = \frac{1}{\rho \ln(a/b)} \left\{ s \dot{C}^2(t) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + 2\dot{C}^{\frac{3}{2}}(t) \int_0^{s(t)} \frac{\sigma(x, t) dx}{(x+a(t))^{2\gamma+1} r^{\frac{2}{\gamma}}(\Theta)} + \int_0^{s(t)} \frac{\sigma(x, t) dx}{x+a(t)} - p(t) \right\}, \\ \frac{\partial \sigma(x, t)}{\partial t} = \eta \frac{\dot{C}(t)}{(x+a(t))^2} \left(\frac{\dot{C}^{\frac{3}{2}}(t)}{(x+a(t))^{2\gamma} r^{\frac{2}{\gamma}}(\Theta)} + 1 \right) \sigma(x, t), \end{cases}$$

w zależności od danej funkcji $\gamma(\theta)$ i warunków początkowych
 $\alpha(x,0) = \gamma(\theta(x,0))$ oraz $C/0 = \dot{C}/0 = 0$

Funkcja $C/t/$ jest ciągła i ograniczona tak, że przemieszczenie u gwarantuje występowanie małych odkształceń. Spełniony jest warunek $b/t/ - a/t/ > 0$, dla $t \in [0, T]$.

W problemie Stefana, jeśli $B > 0$ przyjmujemy że:

ZAŁOŻENIA 3.1

Funkcje f i φ są nieujemne oraz ciągłe z wyjątkiem skończonej ilości punktów, gdzie funkcje te mogą zmieniać się skokowo przy czym zawsze muszą być ograniczone.

Ponadto istnieje dodatnia stała N taka, że

$$3.7. \quad 0 \leq \varphi(x) \leq N(b-x) \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq b.$$

Istnienie rozwiązania problemu STEFANA wynika z twierdzenia

TWIERDZENIE 3.1 /o istnieniu/

Rozwiązanie (s, θ) problemu Stefana /3.4/, /3.5/ istnieje, kiedy spełnione są założenia /3.1/ dla $B > 0$. Funkcja $s/t/$ opisująca swobodny brzeg jest monotonicznie niemalejąca i ciągła co najmniej klasy C^1 oraz spełnia warunek

$$0 \leq \dot{s}(t) \leq A \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T,$$

gdzie A jest stałą określoną z lematu /3.1/.

LEMAT 3.1

Wobec założeń /3.1/ niech θ będzie rozwiązaniem /3.4/ a $s/t/$ niech będzie monotonicznie niemalejącą funkcją. Istnieje wówczas dodatnia stała A zależna tylko od B i stałej Lipschitza N w /3.7/ taka, że spełnia warunek

$$0 \leq \gamma^{-1} \theta(s(t) - \gamma, t) \leq A$$

dla wszystkich $0 \leq t \leq T$ i $0 < \gamma < b$.

Jednoznaczność rozwiązania problemu Stefana CANNON i HLLL/31/ przedstawili jako wniosek wynikający z twierdzenia o stabilności rozwiązania.

TWIERDZENIE 3.2 /o jednoznaczności/

Wobec założenia /3.1/ kiedy $B > 0$, rozwiązanie (s, θ) problemu

Stefana /3.4/, /3.5/ jest jednoznaczne.

W twierdzeniu /3.1/ zakładamy ciągłość pierwszej pochodnej funkcji

$$s(C(t)) = (b^2(0) + 2C(t))^{1/2} - (a^2(0) + 2C(t))^{1/2}$$

opisującej swobodny brzeg, należy zbadać własności $C(t)$.

Jest to możliwe jeśli znamy funkcje $\Theta(x,t)$, $\mathcal{A}(\Theta)$ i $\mathcal{A}^0(\Theta)$.

Stawiając zredukowane zagadnienie CAUCHY dla równania przewodnictwa cieplnego (Θ) (3) z warunkiem początkowym φ możemy określić rozwiązanie $\Theta(x,t)$ dla całej półprzestrzeni $\{(x,t); x \in \mathbb{R} \text{ i } t > 0\}$. Rozwiązanie zagadnienia Cauchy traktujemy jako przybliżenie rozwiązania innego jakościowo problemu Stefana, gdzie poszukujemy rozwiązania tylko w ograniczonym podobszarze półprzestrzeni

$$\{(x,t); -\infty < x < +\infty, t > 0\}.$$

TWIERDZENIE 3.3

Jeśli funkcja rzeczywista φ jest ciągła i ograniczona to funkcja

$$\Theta(x,t) = (2\sqrt{\pi t})^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) h(x-y,t) dy$$

nazywana całką FOURIERA - POISSONA jest rozwiązaniem zredukowanego zagadnienia CAUCHY. Rozwiązanie to jest ciągłe i ograniczone w półprzestrzeni domkniętej $\mathbb{R}_2 = \{(x,t), -\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$.

Funkcja $h \in C^\infty(\mathbb{R}_2 \setminus \{0\})$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowana w półprzestrzeni \mathbb{R}_2 poza bliskim otoczeniem $\{0\}$ punktu $(x=0, t=0)$ i ponadto jest określona zależnościami

$$h(x,t) = \begin{cases} t^{-1/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0, \\ h(x,0) \neq 0 & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Znając rozkład temperatury $\Theta(r,t)$ w problemie Cauchy możemy zbadać zagadnienie początkowe dla układu równań /3.6/ oraz warunków początkowych

$$/3.8/ \quad C(0) = \dot{C}(0) = 0, \quad \mathcal{A}^0(0,x) = \mathcal{A}^0(x),$$

gdzie funkcje określające zależność lepkości i granicy plastyczności od temperatury są dane wzorami

$$/3.9/ \quad \gamma(\theta) = 168.25 [1 + 2.6 (.80586 - \theta)^2];$$

$$/3.10/ \quad \delta^0(\theta) = 1511.56 \exp [.45(1.059/\theta - 1)] / \delta_{20}^0$$

Funkcje $\gamma(\theta)$ i $\delta^0(\theta)$ określono na podstawie badań MAIDENA i CAMPBELLA oraz pracy MANJOINE.

Obniżając rząd pierwszego z równań /3.6/ układ równań, dla którego stawiamy zgodnienie Cauchy, przyjmuje postać

$$/3.11/ \quad \begin{cases} \dot{C}(t) = \psi(t), \\ \dot{\psi}(t) = \frac{1}{s \ln(a/b)} \left\{ \frac{s\psi^2(1 - \frac{1}{a^2})}{2} + 2\psi^2 \int_0^{s(t)} \frac{dx}{(x+a(t))^{2\tau+1}} \gamma^{\tau} + 2 \int_0^{s(t)} \frac{dx}{x+a(t)} - p(t) \right\}, \\ \frac{\partial \mathcal{H}(x,t)}{\partial t} = \eta \frac{\psi}{(x+a(t))^2} \left(\frac{\psi^{\tau}}{(x+a(t))^{2\tau} \gamma^{\tau}} + 1 \right) \mathcal{H}(x,t), \end{cases}$$

a warunki początkowe są

$$/3.12/ \quad C(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \mathcal{H}(x,0) = \mathcal{H}^0(x).$$

W założeniach twierdzenia CAUCHY - KOWALEWSKIEJ o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania analitycznego układu równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu postuluje się analityczność wszystkich funkcji pojawiających się w układzie i warunkach początkowych. Funkcje występujące po prawych stronach równań /3.11/ możemy oznaczyć $F_i(x, t, C, \psi, \mathcal{H})$, są one analityczne względem każdego z argumentów w pewnej dziedzinie D_5 należącej do pięciowymiarowej przestrzeni wektorowej. Funkcja $\mathcal{H}^0(x)$ jest analityczna względem x .

TWIERDZENIE 3.4 /CAUCHY - KOWALEWSKIEJ /.

W dwuwymiarowym sąsiedztwie punktu $(x_0, 0)$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\{C, \psi, \mathcal{H}\}$ w dziedzinie funkcji analitycznych spełniających warunki /3.12/, jeśli spełnione są założenia o analityczności funkcji F_i ($i = 1, 2, 3$) i $\mathcal{H}^0(r)$.

Przedstawimy kilka uwag dotyczących analityczności funkcji F_i zdefiniowanych zależnościami

$$3.13 \quad \begin{cases} F_1(x, t, C, \psi, \mathcal{H}) := \psi(t), \\ F_2(x, t, C, \psi, \mathcal{H}) := \frac{1}{s \ln(a/b)} \left\{ \frac{s\psi^2(1 - \frac{1}{a^2})}{2} + 2\psi^2 \int_0^{s(t)} \frac{dx}{(x+a(t))^{2\tau+1}} \gamma^{\tau} + 2 \int_0^{s(t)} \frac{dx}{x+a(t)} - p(t) \right\}, \\ F_3(x, t, C, \psi, \mathcal{H}) := \eta \frac{\psi}{(x+a(t))^2} \left(\frac{\psi^{\tau}}{(x+a(t))^{2\tau} \gamma^{\tau}} + 1 \right) \mathcal{H}(x, t), \end{cases}$$

gdzie: $a = a(t) = [a^2(0) + 2C(t)]^{1/2}$, $b = b(t) = [b^2(0) + 2C(t)]^{1/2}$, $s(t) = b(t) - a(t)$.

W badaniu analityczności posłużymy się lematem:

LEMAT 3.2

Funkcja $f / X / = f / x_1, \dots, x_m /$ klasy C^∞ o zmiennych x_1, \dots, x_m jest analityczna wewnątrz m wymiarowej kuli Kr o środku w punkcie $X_0 / x_1^0, \dots, x_m^0 /$ i promieniu r , jeśli jest sumą szeregu potęgowego o postaci

$$3.14 \quad f(X) = \sum_{p_1, \dots, p_m=0}^{\infty} a_{p_1 \dots p_m} (x_1 - x_1^0)^{p_1} \dots (x_m - x_m^0)^{p_m}$$

z promieniem zbieżności r .

W szczególności może to być szereg Taylora, wówczas jego współczynniki są określone przez

$$3.15 \quad a_{p_1 \dots p_m} = \frac{1}{p_1! \dots p_m!} \cdot \frac{\partial^{(p_1 + \dots + p_m)} f}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}} \Big|_{X=X_0}$$

Parametr m dla funkcji F_1 w 3.13 jest $m = 5$.

Problem stwierdzenia analityczności polega na znalezieniu szeregu majoryzującego szereg 3.14.

W tym celu należy znaleźć M najmniejszą górną granicę członów szeregu 3.14 w pewnym punkcie $X_1 / x_1^1, \dots, x_5^1 /$ takim, że spełnione są nierówności $\overline{X_0 X_1} < R$ oraz $\min_{k \leq 5} |x_k^1 - x_k^0| = \xi > 0$, gdzie $\xi, R \in \mathbb{R}$.

Ze względu na drugą z nierówności człon szeregu 3.14 można oszacować w punkcie X_1

$$|a_{p_1 \dots p_5} \xi^{p_1 + \dots + p_5}| \leq |a_{p_1 \dots p_5} (x_1^1 - x_1^0)^{p_1} \dots (x_5^1 - x_5^0)^{p_5}| \leq M$$

stąd wynika nierówność

$$3.16 \quad |a_{p_1 \dots p_5}| \leq M \xi^{-(p_1 + \dots + p_5)}$$

Liczba M zależy od wyboru punktu X_1 , od kresu górnego modułu funkcji $f / X /$ i jej pochodnych dowolnie wysokiego rzędu. Określenie relacji między wyrazami szeregu Taylora 3.14 jest kłopotliwe dla funkcji wielu zmiennych, ponieważ wiąże się to z badaniem wielkości tych członów w różnych punktach ograniczonego obszaru D_5 .

Ograniczoność dziedziny D_5 wynika z intuicji fizycznych.

Znając liczby M i ξ możemy określić funkcję

$$3.17 \quad f^M(x_1, \dots, x_5) = M \sum_{p_1, \dots, p_5=0}^{\infty} \xi^{-(p_1 + \dots + p_5)} (x_1 - x_1^0)^{p_1} \dots (x_5 - x_5^0)^{p_5} =$$

$$f^*(x_1, \dots, x_s) = \frac{M}{(1 - (x_1 - x_1^0)/g) \dots (1 - (x_s - x_s^0)/g)}$$

która majoryzuje funkcję stanowiącą sumę szeregu potęgowego. Szereg w 3.17 jest zbieżny w kuli o promieniu $g < R/\sqrt{s}$.

Majoranta ta nie jest jedyną, możliwe są inne o większych współczynnikach szeregu. Przepis na skonstruowanie majoranty szeregu potęgowego będącego rozwinięciem funkcji wielu zmiennych podkreśla trudności związane z badaniem analityczności tych funkcji.

Poszukując odpowiednio dużej liczby M należy stwierdzić zbieżność współczynników /3.15/ szeregu potęgowego /3.14/.

W tym celu należy porównać sumy pierwszych i drugich pochodnych funkcji F_1 oraz zbadać, czy nie są funkcjami osobliwymi.

Spełnienie powyższych warunków łatwo stwierdzić dla funkcji F_1 i F_3 , jeśli spełnione są zależności $a(0) \neq 0, 0 \leq x \leq s(t), \psi(t) < \infty$ oraz relacja zawierania $r, \varphi \in \mathcal{R}(x, t)$, gdzie \mathcal{R} jest podprzestrzenią funkcji $f(x, t)$ o własnościach $f(x^*, t) < N < \infty$ dla x^* takiego, że $0 < x^* \leq s(t) \neq \infty, 0 < t < \infty, N \in \mathbb{R}$.

Badanie F_2 jest niezwykle pracochłonne. Mimo tych trudności sprawdzono, że sumy pierwszych, drugich i trzecich pochodnych funkcji $F_2(x, t, C, \psi, \varphi)$ są ograniczone, jeśli spełnione są te same warunki na ψ, φ, φ i x jakie podano w komentarzu o badaniu F_1 i F_3 .

3.2. ANALIZA PROBLEMU /S/

Równanie nieliniowe opisujące problem /S/

$$\begin{aligned} /s/ \quad \ddot{C} + \dot{C} \left[\frac{\dot{C}}{C} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] / g \ln(a/b) + [p(t)/g \ln(a/b) + 2/g] = 0, \\ a = a(C(t)) = [a^2(0) + 2C(t)]^{1/2}, \quad b = b(C, t) = [b^2(0) + 2C(t)]^{1/2} \end{aligned}$$

jest równaniem różniczkowym typu Releya, co łatwo zauważyć jeśli zapisze się je w postaci

$$3.18 \quad \ddot{C} + \dot{C}F(C, \dot{C}) + g(C) = 0$$

równoważnej układowi

$$3.19 \quad \dot{C}(t) = \psi(t), \quad \dot{\psi}(t) = -g(C) - F(C, \psi)\psi,$$

gdzie $g(C) = p(t)/s \ln(a/b) + 2/s$, oraz

$$3.19' \quad F(C, \psi) = \left[\frac{\psi^{\xi-1}}{\xi^{\xi-1}} \left(\frac{1}{b^{\xi}} - \frac{1}{a^{\xi}} \right) - \frac{g\psi}{2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right] / s \ln(a/b).$$

Rozwiązaniem problemu /S/ dla parametru $\xi = 1$ i warunków początkowych $C(0) = \dot{C}(0) = 0$ jest funkcja

$$(S1) \quad C(t) = [b^2(0) - a^2(0)\exp(\eta)] / (2[\exp(\eta) - 1]),$$

gdzie $\eta = p(t)[1 - \exp(t\delta)] + \exp(t\delta)\ln[b^2(0)/a^2(0)]$.

Zbadamy układ równań różniczkowych silnie nieliniowych

$$3.20 \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i / t, x_1, x_2, \quad / i = 1, 2 / , \quad \text{z warunkami}$$

$x_i(0) = 0$ odpowiadający układowi 3.19, gdzie funkcje

$f_i / t, x_1, x_2 / i = 1, 2 /$ są określone w dziedzinie

$$D = \{0 \leq t < +\infty, -\infty < x_1, x_2 < +\infty\}$$

i spełniają lokalne warunki Caratheodory'ego, to znaczy są ciągle ze względu na pierwszy parametr i mierzalne ze względu na parametry x_1, x_2 /własności te są zamienne/.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia 3.20 wynikają z twierdzeń Cauchy, Picarda lub szczególnych przypadków tych twierdzeń, jeśli $p/t > 0$.

W twierdzeniu Picarda żąda się, aby $f_i / i = 1, 2 /$ były funkcjami ciągłymi w sensie Lipschitza. Sprawdziliśmy, że prawe strony układu 3.19 spełniają ten warunek.

W twierdzeniu Cauchy postuluje się, aby $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \right|$ i $\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \right|$ były ograniczone w obszarze D, wówczas warunek Lipschitza jest spełniony.

Rozwiązanie x_1 może być osobliwe, jeśli dla pewnej funkcji $p/t > 0$ w chwili $t = t^*$ i przykładowo dla parametru

$$\xi = 1 \text{ spełniony jest warunek } p(t^*) = - \frac{e^{t^* \delta} \ln[b^2(0)/a^2(0)]}{1 - e^{t^* \delta}}.$$

Wówczas znajduje zastosowanie twierdzenie o istnieniu osobliwych rozwiązań układów równań silnie nieliniowych 3.20.

Rozwiązanie $x_1 / t /, x_2 / t /$ tego układu nazywa się osobliwym, jeśli jest określone w skończonym przedziale $[t_0, t^*)$ i spełnia warunek

$$3.22 \quad \lim_{t \rightarrow t^*} \sum_{i=1}^n |x_i(t)| = +\infty (-\infty), \quad n=2.$$

Punkt t^* nazywa się ruchomym punktem osobliwym. Nieruchomy punkt osobliwy widać bezpośrednio z badania funkcji $f_i / t, x_1, x_2 /$, inne punkty osobliwe nazywa się ruchomymi punktami osobliwymi.

Poniższy przykład ($**$) pokazuje różnicę między ruchomym i nieruchomym punktem osobliwym.

Istnienie osobliwego rozwiązania dla układu n równań typu 3.20 wynika z

TWIERDZENIE 3.5 /T.A. CHANTURIA /32/ /

Dla $t \geq 0$, $(-1)^k x_k \geq x_0$ ($k=1, \dots, n$) niech będą spełnione nierówności

$$3.23 (-1)^{y_i} f_i(t, |x_1|, \dots, |x_n|) \geq a_i(t) |x_{i+1}|^{\lambda_i} \quad (i=1, \dots, n),$$

gdzie $x_0 \geq 0$, $x_{n+1} = x_1$, $y_i = 0$ lub 1 , $\lambda_i > 0$ ($i=1, \dots, n$),

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i > 1 \text{ oraz } a_i(t) \quad (i=1, \dots, n)$$

są funkcjami ciągłymi i dodatnio określonymi w przedziale $[0, +\infty)$. Wówczas układ n równań typu 3.20 ma osobliwe rozwiązanie $x_1/t, \dots, x_n/t$ takie, że $(-1)^{y_i} x_i(t) > 0, t \in [t_0, t^*)$, ($i=1, \dots, n$).

Dowód tego twierdzenia podano w pracy /14/.

Twierdzenie to jest słuszne jeśli dla pewnego $m \in \{1, \dots, n\}$ spełniony jest warunek $\lim_{t \rightarrow t^*} \sum_{i=m}^n |x_i(t)| = +\infty (-\infty)$.

Klasyfikacja rozwiązań równania różniczkowego /S/ jest drugim z zagadnień jakie należy zbadać. Rozwiązanie C/t/ równania/S/ nie jest oscylacyjne, jeśli istnieje $t_1 \geq t_0$ takie, że $C(t) \neq 0$ dla $t \geq t_1$. Rozwiązanie nazywa się oscylacyjnym, jeśli dla każdego danego $t_1 \geq t_0$ istnieją t_2 i t_3 spełniające warunki $t_1 < t_2 < t_3$, $C(t_2) > 0$ i $C(t_3) < 0$.

($**$) PRZYKŁAD Rozpatrzmy przykład równania $\dot{x} = f / t, x /$, $x = / x_1, x_2, \dots, x_n /$ w którym $f / x, t /$ jest wielomianem.

W tym przypadku nieruchomych punktów osobliwych nie ma, mogą istnieć takie punkty osobliwe t_2, t_3 że spełniony jest warunek $x_1^2 + \dots + x_n^2 \rightarrow \infty$ przy $t \rightarrow t^*$.

Rozwiązanie niedodatnie lub neujemne, posiadające dowolnie dużo zer nazywa się rozwiązaniem typu Z.

Wygodnie jest zapisać równanie 3.18 w postaci

$$3.24 \quad \ddot{x} + f(t, x, \dot{x}) = e(t, x, \dot{x}),$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia $f(t, x, \dot{x}) = \dot{C}(C, \dot{C})$, $e(t, x, \dot{x}) = -g(C)$.

Przedstawimy twierdzenia podające warunki dostateczne istnienia rozwiązań nieoscylacyjnych:

TWIERDZENIE 3.6 / A.G. KARTSATOS /72//

Niech dla równania

$$(*) \quad x^{(n)} + f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) = e(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}), \quad n \geq 2$$

spełnione będą warunki

$$/i/ \quad f: T * \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} = (-\infty, +\infty), \quad T = [t_0, +\infty), \quad t_0 \geq 0;$$

$$/ii/ \quad e: T * \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$/iii/ \quad \int_0^{+\infty} t^m [f(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t)) - e(t, u(t), \dots, u^{(n-1)}(t))] dt = +\infty \quad (-\infty)$$

dla każdego $u \in C^n[t_0, +\infty)$ które jest ograniczone między dwoma dodatnimi /lub ujemnymi/ stałymi dla odpowiednio dużych t i dla pewnej stałej m takiej, że $0 \leq m < n-2$.

Wówczas każde rozwiązanie równania (*) jest NIEOSCYLACYJNE i spełnia warunek $\liminf_{t \rightarrow +\infty} |x(t)| = 0$.

Wykorzystując rozwiązanie (S1) dla parametru $\eta = 1$ oraz zależność określającą

$$x(t) = -(b_0^2 - a_0^2) \eta \exp(\eta) / (2[\exp(\eta) - 1]^2),$$

można sprawdzić, że funkcja x/t jest ograniczona, jeśli $\eta > 0$ to

$\frac{1}{2} a^2(0) < x(t) < M$, lub jeśli $\eta < 0$ to $M < x(t) < \frac{1}{2} b^2(0)$. W pierwszym przypadku

$$p(t) > \exp(t\eta) \ln [b^2(0)/a^2(0)] / p(t) [1 - \exp(t\eta)],$$

w drugim zaś zachodzi nierówność $p(t) < \exp(t\eta) \ln [b^2(0)/a^2(0)] / p(t) [1 - \exp(t\eta)]$.

Warunek /iii/ jest spełniony ponieważ

$$\int_0^{+\infty} f(t, x, \dot{x}) dt = \int_0^{+\infty} \frac{a^2 e^{\eta t}}{2(e^{\eta t} - 1)^2} (a^2(0) - b^2(0)) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left[\frac{1}{\eta} - \frac{a^2(0) - b^2(0)}{4} \right] \frac{\eta e^{\eta t}}{(e^{\eta t} - 1)^2} / (\eta \ln a/b) dt = 0$$

oraz $\int_0^{+\infty} e(t, x, \dot{x}) dt = \int_0^{+\infty} p(t) / \left[\eta \ln \frac{a^2(0)(1 - 2e^{-\eta t}) + 2b^2(0)}{3b^2(0) - 2a^2(0)e^{\eta t}} \right] dt = +\infty$ dla $p(t) > 0$.

Twierdzenie 3.4 uogólnili GRAEF i SPIKES /48/ dla równań

różniczkowych parzystego rzędu n z perturbowanymi argumentami postulując, aby $\liminf_{t \rightarrow \infty} |x(t)| \leq K$ gdzie K jest taką stałą, że dla $K \geq 0$ i pewnego $u \in C^n[t_0, \infty)$ spełnione są warunki $\liminf_{t \rightarrow \infty} u(t) > K$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) < -K$.

Bardziej ogólne twierdzenie słuszne również dla równań różniczkowych z perturbowanymi argumentami typu

$$x^{(n)} + f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, x(\tau_1(t)), \dot{x}(\tau_2(t)), \dots, x^{(n-1)}(\tau_n(t))) = e(t, x, \dot{x}, \dots, x(\tau_1(t)), \dots, x^{(n-1)}(\tau_n(t))),$$

które mają rozwiązania nieoscylacyjne lub typu Z podał GRAEF /47/. W twierdzeniu tym postuluje się, aby /W1/ $|e(t, x, \dot{x})| \leq S(t)$ dla każdego $t \in [t_0, \infty)$ oraz /W2/ $x f(t, x, \dot{x}) \geq 0$.

Pierwszy z tych warunków żądający ograniczoności funkcji $e/t, x, \dot{x}$ / nie jest spełniony. Drugie ograniczenie dla funkcji f jest spełnione, jeśli funkcja p/t / jest rozwiązaniem nierówności różniczkowej $\dot{p}(t)(t - e^{at}) - e^{at} p(t) + e^{at} \ln[b^2(t)/a^2(t)] < 0$ wynikającej z warunku $\dot{\eta}(t) < 0$.

TWIERDZENIE 3.7/ GRAEF /47/

Założmy, że istnieje ciągła funkcja $s : [t_0, \infty) \rightarrow R$ spełniająca warunek /W1/ oraz zachodzi /W2/. Wówczas każde nieoscylacyjne lub Z - typu rozwiązanie równania 3.24 spełnia warunek $|x(t)| = O(t + \int_{t_0}^t (t-\tau)s(\tau) d\tau)$, $t \rightarrow \infty$, czyli jest rzędu sumy danej w wyrażeniu $(t + \int_{t_0}^t (t-\tau)s(\tau) d\tau)$.

Warunki istnienia oscylacyjnego rozwiązania dla równania w postaci 3.18 podał BOBISUD /17/, gdzie funkcja $g = g(t, x, \dot{x})$.

TWIERDZENIE 3.6 /BOBISUD /17/

Założmy, że:

- 1 $g(t, x, \dot{x})$ ciągła na $[0, \infty) * (-\infty, \infty) * (-\infty, \infty)$ oraz spełnia warunek $xg(t, x, \dot{x}) > 0$ dla $x \neq 0$,
2. $f/t, x, \dot{x}$ / jest ciągła na $[0, \infty) * (-\infty, \infty) * (-\infty, \infty)$ i istnieją ciągłe, nieujemne funkcje k i m takie, że $-k(t) \leq f(t, x, \dot{x}) \leq m(t)$ zachodzi na $[0, \infty)$,
3. dla danych stałych $\delta > 0, M > 0$ istnieje $t_{\delta, M} > 0$ i funkcja $G/t/ = G_{\delta, M}/t/$ określona na $[t_{\delta, M}, \infty)$ spełnia warunki /i/ $\int_{t_{\delta, M}}^t G(\tau) d\tau \rightarrow +\infty$ dla $t \rightarrow +\infty$ jeśli $x\dot{x} > 0$ wówczas /ii/ $|g(t, x, \dot{x})| \geq g(t)$ dla $|x| > \delta, |\dot{x}| \leq M$,

4. dla każdego $t > 0$, $\int_0^{\infty} k(\tau) d\tau < \infty$,
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \exp[-\int_{t_0}^{\tau} m(s) ds] d\tau = 0$.

Wówczas równanie 3.18 ma rozwiązanie oscylacyjne.

Z warunku $1/xg(t, x, \dot{x}) > 0$ i twierdzenia ROLLE'A wynika warunek $g/t, 0, \dot{x} = 0$, który nie jest spełniony i ponadto funkcja ta nie jest symetryczna ze względu na x .

Warunek $\int_0^{\infty} k(\tau) d\tau < \infty$ również nie jest spełniony, ponieważ funkcja $F/t, x, \dot{x}$ nie jest ograniczona. Stąd wynika wniosek, że dla dowolnych funkcji $p/t > 0$ oraz $0 < \gamma < 1$ problem 3.18 z warunkami początkowym $G/0 = \dot{C}/0 = 0$ ma rozwiązania nieoscylacyjne.

4. METODY ROZWIĄZYWANIA

W rozdziale tym używając określeń i definicji z teorii aproksymacji oraz prostych faktów z analizy funkcjonalnej wyjaśnimy pojęcie aproksymacji funkcji z przestrzeni Banacha metodą elementów skończonych i metodą różnicową. Ponadto przedstawimy metodę Rungego - Kutty oraz metody kolokacyjne. Wszystkie prezentowane tu metody opiszemy pod względem ich użyteczności w rozwiązaniu problemu Stefana.

Metoda Rungego - Kutty może być zastosowana do rozwiązania zagadnień /G/ i /S/.

Metody kolokacyjne oraz ich szczególny przypadek, jakim jest metoda używająca funkcji "spline interpolation" są użyteczne do rozwiązania problemu Stefana oraz zagadnienia /W/.

Nie będziemy opisywali prostych metod różnicowych zapewniających dokładność rzędu pierwszego $O(h)$, podany jedynie końcowe zależności wynikające ze stosowania tych schematów różnicowych do rozwiązywania układu równań różniczkowych /W/. Koszt obliczeń, zbieżność i rząd dokładności metody są elementami decydującymi o jakości wybranej metody aproksymacyjnej zastosowanej do rozwiązywanego problemu różniczkowego.

Analiza jakościowa przedstawianych tu metod numerycznych wskazuje na to, że metoda Hermita jest procedurą optymalną ze względu na to, że zapewnia najwyższy rząd dokładności $O(h^4)$ przy najniższym koszcie obliczeń i ponadto jest metodą bezwarunkowo stabilną.

W opisach pominiemy oszacowania błędów metody oraz kryteria i twierdzenia o stabilności i zbieżności metod aproksymacyjnych. Szczegółowe opracowania na ten temat można znaleźć w pracach cytowanych w tym rozdziale.

4.1. OMOWIENIE METOD

4.1.1. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH A METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Niejednorodne równanie różniczkowe w każdym przypadku można przedstawić w postaci operatorowej $L/u/ = f$ lub oznaczając $A/u/ = L/u/ - f$ zapisać je w formie

$$\langle A(u), v \rangle = 0, \quad u, v \in X \subset B,$$

gdzie L jest operatorem różniczkowym, A jest operatorem liniowym działającym z przestrzeni $Dom(A) \subset B$ do przestrzeni sprzężonej $X^* \subset B$, B jest funkcyjną przestrzenią Banacha, nawias $\langle g, v \rangle$ oznacza wartość funkcjonału g na funkcji v . Rozwiązując równanie różniczkowe należy wyznaczyć taką funkcję

$$u \in Dom(A) \subset X \subset B$$

dla której wartość funkcjonału $A(u) \in X^*$ na funkcji v spełnia warunek

$$4.1. \quad \langle A(u), v \rangle = 0, \quad \forall v \in X.$$

Zagadnienie to nazywa się problemem BROWDERA i jest szczególnym przypadkiem poszukiwania funkcji $u \in Dom(L) \subset X$ będącej rozwiązaniem równania $L/u/ = 0$, gdzie L jest operatorem różniczkowym takim, że $L: Dom(L) \rightarrow Y$ i $X, Y \in B$.

Twierdzenie o istnieniu rozwiązania zadania Browdera /4.1/ dla funkcji u należącej do przestrzeni Banacha można sformułować następująco:

TWIERDZENIE 4.1 /F.E. BROWDER /13/ /

Założmy, że operator $A/u/$ daje się przedstawić w postaci

$$A/u/ = A_1/u/ + A_2/u/$$

i spełnia warunki:

1. przestrzeń X jest refleksywna czyli $X = X^{**}$,
2. operator A_1 jest maksymalnie monotoniczny, $\overline{Dom A_1} = X$,
3. operator A_2 jest monotoniczny, koercywny i ciągły w sensie opisanym dalej.

TEZA: ZADANIE 4.1 MA WÓWCZAS ROZWIĄZANIE.

Wyjaśnimy znaczenie pojęć podanych w założeniach tego twierdzenia.

Operator A nazywa się **MONOTONICZNYM**, jeśli spełniony jest warunek

$$4.2. \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in \text{Dom}(A) \subset X.$$

Monotoniczność operatora jest warunkiem koniecznym dla odwracalności operacji oraz zabezpiecza przed istnieniem zbyt wielu rozwiązań zagadnienia /4.1/. Bardziej ogólnie podzbiór $G \subset X \times X^*$ nazywamy zbiorem monotonicznym, jeśli dla każdej pary $\langle u_1, w_1 \rangle$ i $\langle u_2, w_2 \rangle$ należącej do G zachodzi nierówność

$$\langle w_2 - w_1, u_2 - u_1 \rangle \geq 0.$$

Zbiór G nazywa się **MAKSYMALNIE MONOTONICZNYM**, jeśli jest zbiorem maksymalnym w sensie zawierania wśród zbiorów monotonicznych. Odwzorowanie A jest maksymalnie monotoniczne w przypadku, kiedy wykres $G/A/$ tego odwzorowania jest zbiorem maksymalnie monotonicznym. **CIĄGŁOŚĆ** operatora A w twierdzeniu /4.1/ rozumiana jest jako ciągłość operacji A na każdej linii pęku prostych $u + tv$ utworzonego z funkcji $u, v, 1, \dots \subset X$, gdzie t jest parametrem rzeczywistym.

Taka ciągłość operatora

$$4.3 \lim_{t \rightarrow t_0} \langle A(u+tv), v \rangle = \langle A(u), v \rangle, t \in \mathbb{R}$$

jest równoważna zwykłej ciągłości, jeśli $\text{Dom}(A) \subset X = \mathbb{R}^2$.

Operator A jest maksymalnie monotoniczny wtedy i tylko wtedy, jeśli jest ciągły w sensie /4.3/ i maksymalny w sensie inkluzji w rodzinie monotonicznych odwzorowań z X do X^* oraz ma wypukłą dziedzinę $\text{Dom } A/$. Operator jest **KOERCYWNY**, jeśli iloraz $\frac{|\langle A(u), u \rangle|}{\|u\|}$ zbiega do $+\infty$ oraz mianownik zbiega

do $+\infty$. Koercywności operatora żąda się, aby istniało co najmniej jedno rozwiązanie skończone zagadnienia /4.1/. Oznacza to, że wyklucza się rozwiązania typu $u/x/ = e^{-x}, x \in \mathbb{R}$. Obraz $R/A/$ operatora koercywnego $A : \text{Dom } A/ = X / \rightarrow X^*$ jest całą przestrzenią X^* , jeśli jest on monotoniczny i ciągły w sensie /4.3/.

Głównym problemem aproksymacyjnego rozwiązania zadania Browdera jest zastąpienie problemu /4.1/ rodziną zadań

$$4.4 \langle A_n(u_n), v_n \rangle = 0, \forall v_n \in X_n,$$

co jest możliwe, jeśli wprowadzi się pojęcie aproksymacji przestrzeni Banacha X .

Aproksymację przestrzeni Banacha X stanowi zbiór $\{X_h, p_h, r_h\}_{h \in \mathcal{G}}$ którego elementami są:

1. parametr $h \in \mathcal{G} \subset (0, 1]$, $\inf \mathcal{G} = 0$,
2. przestrzeń X_h jest przestrzenią skończenie wymiarową
 $X_h = \mathbb{R}^{n/h}$ i istnieje funkcja $n : \mathcal{G} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$,
3. operator zwięzający r_h jest rzutem liniowym na skończenie wymiarową podprzestrzeń X_h czyli $r_h : X \rightarrow X_h$,
 $r_h \in \mathcal{L}(X, X_h)$ i ma własność $r_h r_h = r_h$,
4. operator rozszerzający p_h jest takim izomorfizmem, że
 $p_h \in \mathcal{L}(X_h, X)$, $p_h : X_h \rightarrow p_h X$.

Należy zwrócić uwagę, że operator r_h jest operatorem odwrotnym lewostronnie do p_h i wobec tego $r_h p_h u_h = u_h$, oraz $p_h r_h x$ są rzutami liniowymi elementu $x \in X$ na $p_h X$.

Mówimy, że zbiór $\{X_h, p_h, r_h\}$ jest aproksymacją zbieżną zbioru $Z \subset X$, jeżeli błąd jednostajny

$$E_h^X(Z) := \sup_{z \in Z} (\|z - p_h r_h z\|_X / \|z\|_X)$$

zbiega do 0, gdy h dąży do 0.

Odpowiedź na pytanie dla jakich A i A_h zadanie 4.4 ma rozwiązanie zawiera

TWIERDZENIE 4.2

Jeżeli operator $A : X \rightarrow X^*$ jest monotoniczny, ciągły i koczywny to zadanie $\langle A_h(u_h), v_h \rangle = 0, \forall v_h \in X_h$ i $\forall h \in \mathcal{G}$ ma rozwiązanie, o ile tylko spełniony jest warunek:

$$/4.5/ \quad A_h u_h := r_h^* A(p_h u_h)$$

i wówczas aproksymacja przestrzeni sprzężonej $\{X_h^*, p_h^*, r_h^*\}$ implikowana jest przez zbieżną aproksymację przestrzeni X .

Aproksymacją elementu $u \in X$ jest rodzina $\{p_h r_h u\}_{h \in \mathcal{G}}$.

Pierwszym zadaniem aproksymacji elementu $u \in X$ jest określenie zbieżności $u_h \in X_h$ do $x \in X$. Można to zrobić dwoma sposobami:

- /1/ wprowadzając dyskretną normę $\|u_h\|_{X_h}$ w X_h , liniowy operator r_h i błąd dyskretny $\|u_h - r_h u\|_{X_h}$ mówimy, że u_h zbiega dyskretnie do u jeśli błąd dyskretny zbiega do 0,
- /2/ wprowadzając izomorfizm p_h mówimy, że u_h zbiega do u jeśli $p_h u_h$ zbiega do u w przestrzeni X .

Funkcję $u \in X$ można wobec tego aproksymować przypisując jej rzut $r_h u \in X_h$ lub też przyporządkowując rzut $p_h r_h u \in P_h \subset X$. W pierwszym przypadku mówimy, że funkcję u aproksymujemy metodą różnic skończonych a w drugim elementem skończonym.

Zaletą metody elementu skończonego jest możliwość przeniesienia pewnych własności operacji A na operatory A_h , co można zauważyć badając definicje określające aproksymację przestrzeni sprzężonej X^* :

$$\text{DEFINICJA 1 } \forall u_h \in X_h, \langle r_h^* A(u), u_h \rangle_h := \langle A(u), p_h u_h \rangle,$$

$$\text{DEFINICJA 2 } \forall u \in X, \langle p_h^* A_h(u_h), u \rangle := \langle A_h(u_h), r_h u \rangle_h$$

gdzie $A_h(u_h) \in X_h^*$.

Dalej w rozdziale tym zajmiemy się metodami dającymi algorytmy jawne lub niejawne obliczania wartości u_h w węzłach dyskretnej dziedziny R_h .

4.1.2. METODA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DLA PROBLEMU STEFANA

Opiszemy dwie metody elementów skończonych użyteczne w rozwiązaniu jednowymiarowego problemu Stefana, czyli problemu przewodnictwa cieplnego

$$3.3 \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}(r, t) - \Delta \theta(r, t) = 0$$

w obszarze ze swobodnym brzegiem, którego ruch opisują dwa pozostałe równania różniczkowe 1, 2 układu /Q/. Rozwiązanie $\theta(r, t) > 0$ znajdziemy w obszarze $R = \{(r, t); a(t) \leq r \leq b(t), 0 \leq t \leq T\}$ z brzegiem $\Sigma_T = \{(r, t); r \in \Gamma(t) = \{r = a(t) \text{ lub } r = b(t)\}, 0 \leq t \leq T\}$.

Klasyczne zagadnienie STEFANA stawiano w obszarze typu $R_1 = \{(r, t); a(0) \leq r \leq a(0) + g(t), g(t) = b(t) - a(t), 0 \leq t \leq T\}$.

Dziedzinę R można odwzorować do R_1 , jeśli wprowadzi się funkcję $g(t)$ określającą grubość rury. Warunki początkowy i brzegowe dane są zależnościami 3.4 i 3.5.

Niech τ_0 i τ_1 będą dwoma liczbami takimi, że $0 \leq \tau_0 < \tau_1 \leq T$ i niech $G = G(\tau_0, \tau_1)$ oznacza część wspólną obszaru R z warstwą $\tau_0 < t < \tau_1$, to znaczy $G = \{(r, t); a(t) \leq r \leq b(t), \tau_0 < t < \tau_1\}$.

Symbolem $\bar{\Phi}/G$ oznaczmy przestrzeń wszystkich funkcji ϕ ciągłych w sensie Lipschitza określonych na domknięciu \bar{G} i takich które znikają na zbiorze $\Sigma_T \cap \bar{G}$, to znaczy zerują się na krawędziach bocznych.

Mnożąc 3.3 przez dowolną funkcję próbną $\phi \in \bar{\Phi}(G)$ i całkując przez części w G równanie różniczkowe transformujemy do zależności całkowej

$$/4.6/ \quad B_G \theta, \phi / = 0 \quad \text{dla każdego } \phi \in \bar{\Phi}(G),$$

gdzie forma dwuliniowa jest określona równością

$$/4.7/ \quad B_G(\theta, \phi) = - \int_{\tau_1(a(t))}^{\tau_2(b(t))} \theta \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \int_{\tau_1(a(t))}^{\tau_2(b(t))} \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \int_{a(t)}^{b(t)} \theta(r, \tau_2) \phi(r, \tau_2) dr - \int_{a(t)}^{b(t)} \theta(r, \tau_1) \phi(r, \tau_1) dr = 0.$$

Transformacja ta i zależność /4.6./ są podstawowymi elementami obydwu prezentowanych metod.

4.1.21. APROKSYMACJA CIĄGŁA WZGLĘDEM ZMIENNEJ PRZESTRZENNEJ I CZASU /BONNEROT and JAMET /19/, /21/ /

Dziedzinę R zastępuje się zbiorem R_n warstw G^n złożonych z czworoboków K_i^n wobec tego $G^n = G(t^n, t^{n+1}) = \bigcup_{i=0}^{J-1} K_i^n$ oraz

$R_n = \bigcup_{i=0}^{J-1} K_i^n$.
Wierzchołki $P_i^n, P_{i+1}^n, P_i^{n+1}, P_{i+1}^{n+1}$ czworoboku K_i^n określone są

przez pary współrzędnych (r_i^n, t^n) takie, że $t^n = n \Delta t$ i

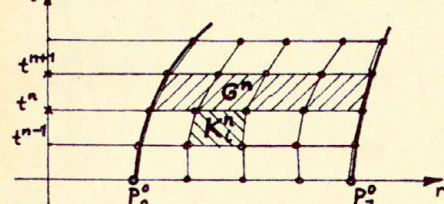
$$r_i^n = (i/J)(b(t^n) - a(t^n)) \quad \text{dla } 0 \leq i \leq J \text{ i } n \geq 0,$$

gdzie n, i, J należą do zbioru liczb całkowitych oraz

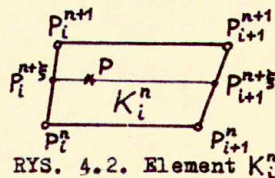
$P_i^n = (r_i^n, t^n)$. Ponadto położenie każdego punktu $P \in K_i^n$ określają dwa parametry (η, ξ) , $0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1$, takie, że

$$/4.8/ \quad \xi = (t - t^n) / \Delta t, \\ \eta = (x - x_i^{n+\xi}) / (x_{i+1}^{n+\xi} - x_i^{n+\xi}),$$

gdzie: $x_i^{n+\xi} = (1-\xi)x_i^n + \xi x_{i+1}^{n+1}$ (patrz rys.4.2).



RYS. 4.1. Dyskretyzacja obszaru R .



RYS. 4.2. Element K_i^n

Wobec tego każdą funkcję $\varphi \in Q(K_1^n)$ określoną na K_1^n można wyrazić jako funkcję współrzędnych r, t lub parametrów (η, ξ) wówczas $\hat{\varphi}(\eta, \xi) = \varphi(x, t)$ i $\hat{\varphi} \in \hat{Q}(\hat{K})$, gdzie kwadrat \hat{K} jest zbiorem punktów $\{(\eta, \xi); 0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1\}$.

Funkcję $\hat{\varphi} \in \hat{Q}$ określa się jednoznacznie przez wartości jakie przyjmuje ona w wierzchołkach kwadratu \hat{K} , zależność ta ma postać wielomianu.

$$/4.9/ \hat{\varphi}(\eta, \xi) = (1-\eta)(1-\xi)\hat{\varphi}(0,0) + (1-\eta)\xi\hat{\varphi}(0,1) + \eta(1-\xi)\hat{\varphi}(1,0) + \eta\xi\hat{\varphi}(1,1),$$

podczas gdy funkcja φ nie jest wielomianem względem zmiennych r i t .

Oznaczmy przez V_h przestrzeń funkcji φ ciągłych w sensie Lipschitza, określonych na R_h i takich których zwężenie do każdego K_1^n należy do Q / K_1^n . Funkcje należące do V_h są całkowicie określone przez wartości w punktach P_i^n , wynika to bezpośrednio z wzoru /4.9/.

Poszukujemy przybliżonego rozwiązania $q_h \in V_h$ problemu, który jest aproksymacją zadania /4.6/ sformułowanego w postaci

$$/4.10/ B_{G^n}(\theta_h, \varphi^{(i)}) = 0, \forall \varphi^{(i)} \in V_h \text{ i } n, 0 \leq n \leq N-1,$$

gdzie $\varphi^{(i)}(P_j^n) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } j=i \text{ dla } 0 \leq j \leq J \text{ i } n \leq 0. \\ 0 & \text{jeśli } j \neq i \end{cases}$

Dyskretny problem /4.10/ możemy zapisać jako równanie

$$/4.11/ -I_{G^n}(\theta_h \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t}) + I_{G^n}(\frac{\partial \theta_h}{\partial r} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r}) + I_{t^{n+1}}(\theta_h \varphi^{(i)}) - I_{t^n}(\theta_h \varphi^{(i)}) = 0$$

dla $i = 1, 2, \dots, J-1$ i $n \geq 0$ z warunkami

$\theta_h(P_0^n) = \theta^0(r_i)$ dla $0 \leq i \leq J$, $\theta_h(P_0^n) = g(t^n)$, $\theta_h(P_J^n) = 0$ dla $n \geq 0$.

Wielkości I_{G^n} i I_{t^n} występujące w tym równaniu są zdefiniowane zależnościami całkowymi na G^n prawdziwymi dla każdej funkcji $\varphi(r, t) \in V_h$ określonej na R_h

$$/4.12/ \text{i/ } I_{G^n}(\varphi) = \iint_{G^n} \varphi(r, t) dr dt = \sum_{i=0}^{J-1} \iint_{K_i^n} \varphi(r, t^n) dr,$$

$$\text{ii/ } I_{t^n}(\varphi) = \int_{\alpha(t^n)}^{\beta(t^n)} \varphi(r, t^n) dr = \sum_{i=0}^{J-1} \int_{r_i^n}^{r_{i+1}^n} \varphi(r, t^n) dr,$$

ponadto, jeśli $\varphi = f \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t}$ lub $\varphi = f_1 \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r}$, $f, f_1 \in V_h$ to

wyrażenie /i/ redukuje się do równości

$$/4.13/ I_{G^n}(\varphi) = I_{K_i^n}(\varphi) + I_{K_{i-1}^n}(\varphi),$$

ponieważ $\varphi^{(i)}$ jest równe zero na wszystkich czworokątach K_i^n z wyjątkiem $j = i$ oraz $j = i - 1$.

Wielkość $I_{K_i^n}$ oblicza się ze wzoru

$$/4.14/ \quad I_{K_i^n}(\varphi) = \iint_{K_i^n} \varphi(r,t) dr dt = \iint_{\hat{K}} \hat{\varphi}(\eta, \xi) \hat{J}_i^n(\eta, \xi) d\eta d\xi,$$

gdzie $\hat{J}_i^n = \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial t}{\partial \xi} - \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial t}{\partial \eta}$.

Ostatnią z całek oblicza się w sposób przybliżony wykorzystując kwadraturę

$$/4.15/ \quad \iint_{\hat{K}} \hat{F}(\eta, \xi) d\eta d\xi \approx \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \hat{F}(P_s),$$

gdzie $\{P_s\}_{s=1}^4$ oznacza cztery wierzchołki czworokąta \hat{K} a dowolna funkcja \hat{F} jest określona na \hat{K} .

Wobec tego z /4.14/ i /4.15/ wynika zależność

$$/4.16/ \quad I_{K_i^n} \left(\Theta_h \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t} \right) = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^4 \hat{\Theta}_h \frac{\partial \hat{\varphi}^{(i)}}{\partial t} \hat{J}_i^n = \frac{1}{4} \sum_{h=0}^4 \Theta_h \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t} J_i^n.$$

Skąd po podstawieniu wielkości określonych z /4.8/ $\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} (r_{i+1}^{n+1} - r_{i+1}^n) / (r_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - r_i^{n+\frac{1}{2}})$ i $J_i^n = \Delta t (r_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - r_i^{n+\frac{1}{2}})$ otrzymujemy $I_{K_i^n}$ w postaci jawnej

$$/4.17/ \quad I_{K_i^n} \left(\Theta_h \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial t} \right) = \frac{1}{4} \sum_{h=0}^4 \sum_{n=0}^1 \Theta_{i+h}^{n+\frac{1}{2}} (r_{i+h}^{n+1} - r_{i+h}^n) = \frac{1}{4} \{ (\Theta_i^n + \Theta_i^{n+1}) (r_{i+1}^{n+1} - r_i^n) + (\Theta_{i+1}^n + \Theta_{i+1}^{n+1}) (r_{i+1}^{n+1} - r_{i+1}^n) \},$$

gdzie $\Theta_i^n = \Theta_h(P_i^n)$.

Postępując podobnie jak poprzednio i podstawiając

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r} = -1 / (r_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - r_i^{n+\frac{1}{2}}), \quad \frac{\partial \Theta_h}{\partial r} = (\Theta_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - \Theta_i^{n+\frac{1}{2}}) / (r_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - r_i^{n+\frac{1}{2}}),$$

całkę $I_{K_i^n} \left(\frac{\partial \Theta_h}{\partial r} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r} \right)$ zastępujemy odpowiednio

$$/4.18/ \quad I_{K_i^n} \left(\frac{\partial \Theta_h}{\partial r} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial r} \right) = \frac{-\Delta t}{4} \sum_{h=0}^4 \sum_{n=0}^1 \frac{\Theta_{i+h}^{n+\frac{1}{2}} - \Theta_i^{n+\frac{1}{2}}}{r_{i+1}^{n+\frac{1}{2}} - r_i^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{-\Delta t}{2} \left(\frac{\Theta_{i+1}^n - \Theta_i^n}{r_{i+1}^n - r_i^n} + \frac{\Theta_{i+1}^{n+1} - \Theta_i^{n+1}}{r_{i+1}^{n+1} - r_i^{n+1}} \right).$$

Określając wyrażenie

$$/4.19/ \quad I_{i,n}(\Theta_h \varphi^{(i)}) = \frac{1}{2} (r_{i+1}^n - r_{i-1}^n) \Theta_i^n$$

oraz wykorzystując je wraz z /4.17/ i /4.18/ w dyskretnym

równaniu /4.11/ otrzymujemy uogólniony schemat CRANKA-NICOLSONA

$$/4.20/ \quad -\frac{1}{4} \{ (r_{i+1}^{n+1} - r_{i+1}^n) (\Theta_{i+1}^n + \Theta_{i+1}^{n+1}) - (r_{i-1}^{n+1} - r_{i-1}^n) (\Theta_{i-1}^n + \Theta_{i-1}^{n+1}) \} + \frac{1}{2} \{ (r_{i+1}^{n+1} - r_{i-1}^{n+1}) \Theta_i^{n+1} - (r_{i+1}^n - r_{i-1}^n) \Theta_i^n \} - \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\Theta_{i+1}^n - \Theta_i^n}{r_{i+1}^n - r_i^n} - \frac{\Theta_i^n - \Theta_{i-1}^n}{r_i^n - r_{i-1}^n} + \frac{\Theta_{i+1}^{n+1} - \Theta_i^{n+1}}{r_{i+1}^{n+1} - r_i^{n+1}} - \frac{\Theta_i^{n+1} - \Theta_{i-1}^{n+1}}{r_i^{n+1} - r_{i-1}^{n+1}} \right] = 0$$

dla niejednorodnej siatki węzłów w płaszczyźnie $/r, t/$.

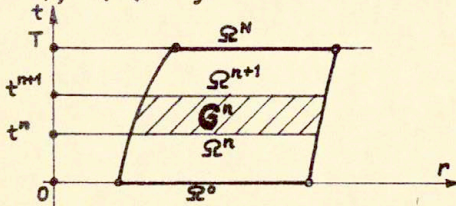
Klasyczny schemat różnicowy Cranka-Nicolsona.

$$/4.21/ \frac{\theta_i^{n+1} - \theta_i^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_{i+1}^n - 2\theta_i^n + \theta_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\theta_{i+1}^{n+1} - 2\theta_i^{n+1} + \theta_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \right) = 0$$

otrzymuje się z /4.20/ zakładając $r_i^{n+1} = r_i^n$, $r_{i+1}^{n+1} = r_i^{n+1} + \Delta r$ oraz $r_{i-1}^{n+1} = r_i^{n+1} - \Delta r$.

4.1.22. APROKSYMACJA NIECIĄGŁA WZGLĘDEM CZASU /P. JAMET/66//

Niech $\Omega^n = \Omega(r^n, t^n)$ będzie zbiorem $\{(r, t); a(t^n) \leq r \leq b(t^n), t = t^n\} \in R$, którego elementy należą do odcinka zawartego między punktami $(a(t^n), t^n)$ i $(b(t^n), t^n)$. Ponadto określimy warstwę $\tilde{G}^n = \bar{G}^n - \Omega^n = \{(r, t); r \in \bar{\Omega}(t), t^n < t \leq t^{n+1}\}$.



RYS. 4.3. Dyskretyzacja obszaru R.

Oznaczmy Φ_h^n skończenie wymiarową podprzestrzeń $\Phi(G^n)$ dla $0 < n \leq N-1$, a V_h niech będzie przestrzenią wszystkich funkcji v_h określonych w \bar{R} i takich których zwężenie do każdego \tilde{G}^n pokrywa się ze zwężeniem funkcji $\varphi_h \in \Phi_h^n$ na warstwie \tilde{G}^n , czyli na warstwie \bar{G}^n bez dolnej krawędzi Ω^n . Poprzednio w metodzie elementu skończonego z ciągłą aproksymacją przestrzeń V_h definiowaliśmy, jako przestrzeń funkcji v_h , których zwężenie do każdego $K_i^n \in G^n$ pokrywa się ze zwężeniem φ_h do $K_i^n \in G^n$. W ogólności funkcje $v_h \in V_h$ są nieciągłe w chwili $t = t^n$ i dlatego konieczne jest wprowadzenie \tilde{G}^n oraz oznaczenia $v_h^n = v_h(\cdot, t^n)$ dla $0 \leq n \leq N$ i $v_h^{n+\varepsilon} = \lim\{v_h(\cdot, t^n + \varepsilon); \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0\}$ dla $0 \leq n \leq N-1$. Wówczas z definicji przestrzeni V_h wynika $v_h^n = \lim\{v_h(\cdot, t^n - \varepsilon); \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0\}$ dla $1 \leq n \leq N$.

Zagadnienie /4.6/ zastępujemy problemem dyskretnym, w którym należy znaleźć $\theta_h \in V_h$ takie, że $\theta_h^0 = \theta^0$ i

$$/4.22/ B_{G^n}(\theta_h, \varphi_h) = 0$$

dla każdego $\varphi_n \in \tilde{\Phi}_h^n$ i dla wszystkich n spełniających warunek $0 \leq n \leq N-1$.

Jednoznaczność rozwiązania tego problemu wynika z

TWIERDZENIE 4.3 /P. JAMET /66/ /

Dyskretny problem /4.22/ dopuszcza jednoznaczne rozwiązanie Θ_h^n spełniające oszacowanie

$$4.23 \|\partial \Theta_h^n / \partial r\|_{L^2(\tilde{G}(t^{n+1}))}^2 + \frac{1}{2} \|\Theta_h^n\|_{L^2(\tilde{\Omega}(t^{n+1}))}^2 \leq \frac{1}{2} \|\Theta^0\|_{L^2(\tilde{\Omega}(t^0))}^2 \text{ dla każdego } n, 0 \leq n \leq N.$$

Z równania /4.22/ dla każdego n wynika układ równań algebraicznych, liniowych o kwadratowej macierzy współczynników, której rząd jest równy wymiarowi przestrzeni $\tilde{\Phi}_h^n$. W ten sposób jednoznaczność rozwiązania Θ_h^n implikuje jego istnienie.

Każdej funkcji $v_h \in V_h$ można przyporządkować jedną funkcję $\varphi_h = \varphi^{(n)} v_h \in \tilde{\Phi}_h^n$, która pokrywa się z v_h na \tilde{G}^n .

Wobec tego na $V_h \times V_h$ definiuje się nową formę dwuliniową

$$B^n(\Theta_h, v_h) = B_{G^n}(\Theta_h, \varphi^{(n)} v_h)$$

dla każdego $v_h \in V_h$.

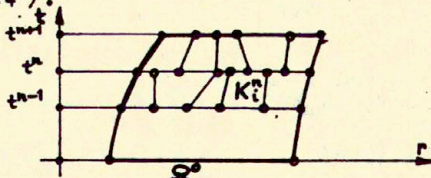
Równanie /4.22/ ma wówczas postać

$$/4.24/ \quad \begin{aligned} B(\Theta_h, v_h) &= 0 \text{ dla wszystkich } v_h \in V_h, \text{ gdzie} \\ B(\Theta_h, v_h) &= \sum_{n=0}^N B^n(\Theta_h, v_h). \end{aligned}$$

W tej metodzie przestrzeń $\tilde{\Phi}_h^n$ dla każdej warstwy \tilde{G}^n można wybrać dowolnie i niezależnie od $\tilde{\Phi}_h^s$ dla $s \neq n$. Ponadto przestrzenie $\tilde{\Phi}_h^n$ w ogólności nie muszą mieć tych samych wymiarów dla różnych n .

Należy zauważyć, że w tej metodzie nie jest konieczna wstępna aproksymacja funkcji początkowej, ponieważ $\Theta_h^0 = \Theta^0$.

Szczególnym przypadkiem dyskretyzacji dziedziny R jest pokrycie tego obszaru siatką węzłów tworzących elementy czworokątne. /Rys. 4.4 /.



RYS. 4.4. DYSKRETYZACJA R elementami czworokątnymi.

Weźmy dwa sąsiednie elementy prostokątne K_{i-1}^n i K_i^n o wierzchołkach $P_{i-1}^n, P_i^{n+1}, P_i^n, P_i^{n+1}, P_{i+1}^n, P_{i+1}^{n+1}$, gdzie $P_i^n = (r_i, t^n)$, $r_{i+1} - r_i = r_i - r_{i-1} = \Delta r$, $t^{n+1} - t^n = \Delta t$. Funkcja Θ_h w każdym prostokącie jest liniowa względem zmiennej r i t . Określając ją jednoznacznie cztery wartości

$$\Theta_i^{n+0} = \Theta_h^{n+0}(r_i) = \lim\{\Theta_h(r_i, t^n + \varepsilon); \varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0\}, \Theta_{i+1}^{n+0}, \Theta_i^{n+1} \text{ oraz } \Theta_{i+1}^{n+1}.$$

Zależność określająca Θ_h jest podobna do /4.9/

$$/4.25/ \Theta_h(r, t) = (1 - \hat{r})(1 - \hat{t})\Theta_i^{n+0} + \hat{r}(1 - \hat{t})\Theta_{i+1}^{n+0} + (1 - \hat{r})\hat{t}\Theta_i^{n+1} + \hat{r}\hat{t}\Theta_{i+1}^{n+1},$$

gdzie $\hat{r} = (r - r_i) / \Delta r$ i $\hat{t} = (t - t^n) / \Delta t$.

Z zależności całkowej /4.22/ /lub 4.24/ dla liniowo niezależnych funkcji próbnych φ_h otrzymuje się równania algebraiczne.

Wybieramy, dla każdego i dwie funkcje próbne $\varphi_h^{(i,1)}$ i $\varphi_h^{(i,2)}$

o własnościach

$$\varphi_h^{(i,1)}(P) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } P = P_i^n \\ -1 & \text{jeśli } P = P_i^{n+1} \\ 0 & \text{dla wszystkich innych węzłów,} \end{cases}$$

$$\varphi_h^{(i,2)}(P) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } P = P_i^{n+1} \\ 0 & \text{dla wszystkich innych węzłów } P \neq P_i^{n+1}. \end{cases}$$

Otrzymujemy równania

$$/4.26/ \left(\frac{1}{6}(\Theta_{i+1}^{n+0} - \Theta_{i+1}^n) + \frac{2}{3}(\Theta_i^{n+0} - \Theta_i^n) + \frac{1}{6}(\Theta_{i-1}^{n+0} - \Theta_{i-1}^n) \right) / \Delta t + \frac{1}{6} \left((\Theta_{i+1}^{n+1} - 2\Theta_i^{n+1} + \Theta_{i-1}^{n+1}) - (\Theta_{i+1}^{n+0} - 2\Theta_i^{n+0} + \Theta_{i-1}^{n+0}) \right) / (\Delta r)^2 = 0,$$

$$/4.27/ \left(\frac{1}{6}(\Theta_{i+1}^{n+1} - \Theta_{i+1}^{n+0}) + \frac{2}{3}(\Theta_i^{n+1} - \Theta_i^{n+0}) + \frac{1}{6}(\Theta_{i-1}^{n+1} - \Theta_{i-1}^{n+0}) \right) / \Delta t - \left(\frac{1}{3}(\Theta_{i+1}^{n+0} - 2\Theta_i^{n+0} + \Theta_{i-1}^{n+0}) + \frac{2}{3}(\Theta_{i+1}^{n+1} - 2\Theta_i^{n+1} + \Theta_{i-1}^{n+1}) \right) / (\Delta r)^2 = 0.$$

Na każdym kroku czasowym wartości Θ_i^n są znane dla wszystkich $0 \leq i \leq J$, należy znaleźć wartości Θ_i^{n+0} i Θ_i^{n+1} .

Schemat ten zapewnia dokładność pierwszego rzędu $O(\Delta r + \Delta t)$, podczas gdy aproksymacja ciągła ze schematem /4.20/ pozwala uzyskać dokładność drugiego rzędu $O(\Delta t + \Delta r^2)$.

Dokładność schematu /4.26, 4.27/ wzrośnie, jeśli weźmiemy elementy trójkątne lub czworokątne z nierównomierną siatką trapezoidalną.

4.1.3. METODA RUNGEGO-KUTTY

Stosując metodę prostych/method of lines/ problem początkowy lub brzegowy dla równań różniczkowych cząstkowych można zredukować do zagadnienia początkowego dla układu równań różniczkowych zwyczajnych. W metodzie tej ciągłą zmienną r zastępuje się przez zmienną dyskretną r^i , $i = 1, 2, \dots$. Operatory różniczkowe ze względu na tę zmienną zastępuje się wyrażeniami różnicowymi, w których występują dyskretne wartości szukanej funkcji określone w punktach węzłowych r^i . Z każdym węzłem r^i stowarzyszone jest równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu.

Metodę prostych zastosujemy do równania przewodnictwa cieplnego

$$\Theta_t = \mu \Theta_{rr} + \frac{1}{r} \Theta_r$$

z warunkiem początkowym $\Theta(0, r) = \varphi$ dla $a(0) \leq r \leq b(0)$, $\varphi = \varphi(r)$ i warunkami brzegowymi $\Theta(t, a) = \psi_1(t)$, $\Theta(t, b) = \psi_2$ dla $t \geq 0$.

Warunki są zgodne, czyli spełnione są wymagania

$$\varphi(a(0)) = \psi_1(0) \quad \text{i} \quad \varphi(b(0)) = \psi_2(0).$$

Ten problem początkowo-brzegowy można aproksymować przez problem początkowy typu

$$\underline{\Theta}_t = \underline{f}(t; \underline{\Theta})$$

$$\text{z warunkiem } \underline{\Theta}(t=0) = \underline{\Theta}_0,$$

jeśli zmienną r zastąpi się zmienną dyskretną

$$r^j = jh + a(t), \quad j = 0, 1, \dots, r-1; \quad h = \frac{1}{k}$$

gdzie k jest liczbą całkowitą większą od 1. Wówczas funkcję

$\Theta(t, r)$ zastępuje się funkcją wektorową $\underline{\Theta} = \underline{\Theta}(t)$ o składowych Θ_j , $j = 0, 1, \dots, k-1$ takich, że wartości $\Theta(t, jh)$ odpowiadają wartościom $\Theta_j(t)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$.

Podobnie funkcję $\varphi(r)$ zastępuje się wektorem $\underline{\varphi}$ o składowych

$$\varphi(jh), \quad j = 0, 1, \dots, k-1.$$

W następnym etapie określa się równania różniczkowe dla ciągu funkcji Θ_j .

Układ równań

$$/4.28/ \frac{d\Theta_j}{dt} = \Theta_{j+1}(k^2\mu + s) - 2\mu k^2\Theta_j + \Theta_{j-1}(k^2\mu - s), \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

redukuje się do równania wyjściowego dla $h \rightarrow 0$, gdzie $s := [2(jh + a(t))h]^{-1}$.

Układ równań /4.28/ przedstawia zbiór k równań różniczkowych z $k + 2$ niewiadomymi.

Eliminując niewiadome funkcje θ_{-1} i θ_k otrzymuje się układ k równań z k niewiadomymi

$$/4.29/ \quad \frac{d\theta_j}{dt} = \theta_j \left(2uk^2 + \frac{k}{2a(t)} \right) - 2uk^2 \theta_0, \quad \frac{d\theta_j}{dt} = \theta_{j+1} (k^2 u + s) - 2uk^2 \theta_j + \theta_{j-1} (k^2 u - s);$$

$$s := [2(jh + a(t))h]^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-2,$$

$$\frac{d\theta_{k-1}}{dt} = \theta_{k-2} \left(k^2 u - \frac{k}{2b(t)} \right) - 2uk^2 \theta_{k-1} + \psi_2(t) \left(k^2 u + \frac{k}{2b(t)} \right),$$

dla którego warunki początkowe są $\theta_j(0) = \varphi$. Jakobian tego układu jest macierzą trójdiagonalną z dodatnimi elementami leżącymi poza główną przekątną.

Układ równań różniczkowych /4.29/ w postaci

$$/4.30/ \quad \dot{\theta}_j = f_j(\theta_j)$$

można rozwiązać prostą lub uogólnioną metodą Rungego-Kutty. Metoda całkowania w pierwszym przypadku wymaga liczenia f_j/θ_j w m punktach w sąsiedztwie punktu $\theta_j^n := \theta_j(t_n)$.

Wzory Rungego-Kutty

$$/4.31/ \quad \theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j k_n^{(j)}$$

$$k_n^{(j)} = \tau_n f_j(\theta_j^n + \sum_{l=0}^{j-1} \beta_{j,l} k_n^{(l)}), \quad \tau_n = t_{n+1} - t_n,$$

gdzie parametry $\alpha_j, \beta_{j,l}$ określa się korzystając z warunków zgodności, zbieżności i stabilności. W uogólnionej metodzie Rungego-Kutty wymagana jest znajomość Jakobianu układu /4.30/ oraz jedno lub dwukrotne obliczenie funkcji f_j/θ_j .

Zastępując we wzorach /4.31/ skalarne parametry α_j i $\beta_{j,l}$ operatorami $A_j: R^r \rightarrow R^r$ i $B_{j,l}: R^r \rightarrow R^r$ otrzymuje się wzory uogólnionej m -punktowej metody Rungego-Kutty:

$$/4.32/ \quad \theta_j^{n+1} = \theta_j^n + \sum_{j=0}^{m-1} A_j k_n^{(j)}, \quad k_n^{(j)} = \tau_n f_j(\theta_j^n + \sum_{l=0}^{j-1} B_{j,l} k_n^{(l)}).$$

Operatory A_j i $B_{j,l}$ definiuje się wzorami /ROSENBROCK/102/

$$/4.33/ \quad A_j := \alpha_j [I - \mu_j \tau_n J_j(\theta_j^{(j)})]^{-1}, \quad B_{j,l} := \beta_{j,l} A_l / \alpha_l,$$

gdzie α_j i μ_j są skalarnymi parametrami. Wzory /4.31/ i /4.32/ obowiązują dla schematów aproksymacyjnych, gdzie funkcję θ na $n + 1$ kroku oblicza się z zależności $\theta_j^{n+1} = E_n(\theta_j^n)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

E_n jest nieliniowym operatorem. Cechą schematów wyższego rzędu jest zależność $\underline{\theta}^{n+1} = E_n(\underline{\theta}^n, \underline{\theta}^{n-1}, \dots, \underline{\theta}^{n+1-k})$, $k > 1$ o postaci

$$/4.34/ \underline{\theta}^{n+1} = \sum_{l=1}^k [c_l \underline{\theta}^{n+1-l} + r_n d_l f(\underline{\theta}^{n+1-l})] + r_n d_0 f(\underline{\theta}^{n+1}).$$

Stosując metodę iteracyjną Newtona-Raphsona do rozwiązania równania /4.34/, uzyskujemy wzór

$$/4.35/ \underline{\theta}_j^{n+1} = \sum_{l=1}^k C_{j,l} \underline{\theta}_j^{n+1-l} + r_n \sum_{l=2}^k D_{j,l} f(\underline{\theta}_j^{n+1-l}) + r_n \sum_{l=0}^{j-1} F_{j,l} f(\underline{\theta}_j^{n+1-l}), \quad j=1,2,\dots,m,$$

gdzie j /oznacza numer iteracji, $\underline{\theta}_{(1)}^{n+1}$ jest daną początkową aproksymacją, $C_{j,l}$, $D_{j,l}$, $F_{j,l}$ są wielomianami lub funkcjami rzeczywistymi zmiennej $r_n J(\underline{\theta}^n)$, a $J(\underline{\theta}^n)$ jest macierzą Jacobiego. Zależności /4.35/ nazywa się uogólnioną metodą Rungego-Kutty dla schematów iteracyjnych wyższego rzędu.

Jeśli znana jest funkcja $\underline{\theta}(t)$, to wówczas z dwóch pozostałych równań układu / $\underline{\theta}$ / określa się ruch brzegów obszaru, opisany funkcjami $a/t/$ i $b/t/$. Z tymi funkcjami w następnym etapie obliczeń ponownie znajduje się $\underline{\theta}_j^{n+1}$ po czym aktualizuje a_j i b_j . Te iteracje powtarza się, aż do spełnienia odpowiedniego kryterium określonego dla zbieżnego procesu iteracyjnego.

Przedstawiony tu sposób rozwiązywania równania przewodnictwa cieplnego dla obszaru z ruchomym brzegiem dobrze nadaje się do analizy wpływu ruchu brzegów obszaru na zmiany wielkości funkcji $\underline{\theta}(t) \approx \underline{\theta}_j^{n+1}$, $n=0,1,2,\dots,N-1$, $j=0,1,\dots,k-1$.

4.1.3.1. PROBLEM /S/

Zagadnienie opisane układem równań /S/ rozwiązano metodą RUNGEGO-KUTTY z warunkami początkowymi $C/0/ = \dot{C}/0/ = 0$.

4.1.4. METODA KOLLOKACJI

W metodzie kollokacji /J. DOUGLAS Jr. and T. DUPONT /37/, /38/, /39// dla równania parabolicznego

$$/4.36//i/ \quad c(x,t,\theta) \underline{\theta}_x - a(x,t,\theta) \underline{\theta}_{xx} - b(x,t,\theta, \underline{\theta}_x) = 0, 0 < x < 1, 0 < t \leq T$$

z warunkami

$$/4.36//ii/ \quad \begin{cases} \theta(x,0) = f(x), 0 < x < 1, \\ \theta(0,t) = g_0(t), \theta(1,t) = g_1(t), 0 < t \leq T, \end{cases}$$

rozwiązanie w każdej chwili t aproksymuje się wielomianami Hermite'a względem zmiennej x .

Rozwiązanie aproksymacyjne problemu brzegowego w metodzie kollokacji musi dokładnie spełniać równanie różniczkowe w punktach $\xi_{j,k}$, $j = 1, \dots, M$, $k = 1, \dots, r-1$ określonych zależnościami

$$\xi_{j,k} = x_{j-1} + h_j \xi_k,$$

gdzie punkty $x_j \in [0,1]$, $j = 1, \dots, M$

spełniają warunek $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M = 1$ i $h_j = x_j - x_{j-1}$ a wielkości ξ_k są pierwiastkami równania $l_{r-1}(x) = 0$ dla wielomianu LEGENDRE'A

$$l_{r-1}(x) = \frac{1}{2^{(r-1)}(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} (x^2-1)^{r-1}.$$

Elementy zbioru $\{\xi_k\}$, $k = 1, \dots, r-1$ są węzłami kwadratury GAUSSA - LEGENDRE'A. Wzór określający tę kwadraturę ma postać

$$\int_0^1 p(x) dx = \sum_{k=1}^{r-1} p(\xi_k) w_k$$

gdzie współczynniki wagowe spełniają warunek $w_k > 0$; $k = 1, \dots, r-1$ oraz $p \in P_{2r-3}(x)$, $r \geq 3$, gdzie $P_r(E)$ oznacza zbiór funkcji określonych na $I = [0,1]$, które na $E \subset I$ są wielomianami stopnia nie większego od r .

Symbolem

$\mathcal{M}_1(r, \sigma) = \{v \in C^1(I) \mid v \in P_r(I_i), i = 1, \dots, M\}$, $r \geq 3$, $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_M\}$,
oznaczymy zbiór funkcji $v \in C^1(I)$, które na odcinku $I_i = [x_{i-1}, x_i]$,
 $I_i \subset I$, $i = 1, \dots, M$ są wielomianami.

W metodzie kollokacji poszukuje się odwzorowania

$$U: [0, T] \rightarrow \mathcal{M}_1(r, \sigma)$$

różniczkowalnego względem czasu t , oraz spełniającego warunki:

(i) $U(x, 0) = f(x)$ jest wielkością dostatecznie małą,

$$/4.37/(ii) \left\{ c(U) \frac{\partial U}{\partial t} - a(U) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - b(U, U_x) \right\} (\xi_{j,k}, t) = 0; j = 1, \dots, M; k = 1, \dots, r-1,$$

$$(iii) U(0, t) = g_0(t), U(1, t) = g_1(t), 0 < t \leq T.$$

Rozwiązanie aproksymacyjne $U(t)$ problemu różniczkowego /4.386/ określa się rozwiązując w każdej chwili czasu t układ złożony z $2M + 2$ równań algebraicznych.

Dwie z tych zależności otrzymuje się z warunków brzegowych.

Pozostałe $2M$ równań otrzymuje się wykorzystując własność mieszanej metody kollokacyjnej, w której żąda się, aby

aproxymacja rozwiązania dokładnie spełniała równanie różniczkowe w $2M$ punktach oraz warunki brzegowe. Na końcach każdego przedziału I_i , $i = 1, \dots, M$ umieszczone są dwa punkty, w których można napisać po jednym równaniu typu 4.37/ii/.

Wynika stąd, że liczba równań jest równa liczbie niewiadomych. Konieczne jest określenie warunków początkowych dla U . W tym celu buduje się schemat startowy. Najprościej taki schemat można zbudować, jeśli $U(x, 0)$ potraktuje się jako interpolację $f(x)$, $0 < x < 1$ to znaczy, że w punktach węzłowych x_i wielkości $U(x, 0)$ i $\partial U(x, 0) / \partial x$ będą zgodne z $f(x)$ i $f'(x)$ gdy $f(x) \in C^1(I)$.

Postępowanie to jest równoważne znalezieniu operatora interpolacyjnego

$$T_{r,\sigma} : C^1(I) \rightarrow \mathcal{M}_1(r, \delta),$$

wówczas warunki początkowe określa się z równania

$$U(x, 0) = (T_{r,\sigma} f)(x).$$

Interpolacja ta bazuje na punktach x_i , $i = 1, \dots, M$ a operator ma własności:

$$\text{/i/ } (T_{r,\sigma} v)(x_j) = v(x_j), (T_{r,\sigma} v)'(x_j) = v'(x_j), \quad j=0, \dots, M,$$

/4.37/

$$\text{/ii/ } (T_{r,\sigma} v)(\eta_{j,k}) = v(\eta_{j,k}), \quad j=1, \dots, M, \quad k=1, \dots, r-3 \text{ dla } v \in C^1(I)$$

i ponadto jest lokalny w tym sensie, że wartość $T_{r,\sigma} v$ jest określona na I_j przez wartości v na I_j .

Punkty $\eta_{j,k}$ określa się ze wzoru $\eta_{j,k} = x_{j-1} + h_j \eta_k$, $j=1, \dots, M$, $k=1, \dots, r-3$ a elementy η_k są pierwiastkami równania $B_r(x) = 0$ posiadające dwa pierwiastki podwójne w $x = 0$ i $x = 1$ oraz $r-3$ pojedynczych pierwiastków w punktach takich, że spełniona jest nierówność

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_{r-3} < 1.$$

Wielomian

$$B_r(x) := \frac{1}{(2r-2)!} \frac{d^{r-3}}{dx^{r-3}} [x^{r-1}(x-1)^{r-1}], \quad B_r \in P_{r+1}(I),$$

ma własności

$$\text{/i/ } B_r''(\xi_k) = 0, \quad k=1, \dots, r-1, \quad \text{czyli druga pochodna zeruje się w punktach kolokacji,}$$

$$\text{/ii/ } B_r(x) = B_r'(x) = 0, \quad x=0 \text{ lub } 1,$$

$$\text{/iii/ } B_r^{(r+1)}(x) \equiv 1.$$

Warunki /i/ oraz /iii/ implikują, że $B^r /x/$ jest wielokrotnością wielomianu LEGENDRE'A stopnia $/r-1/$ na przedziale I.

Wielomiany Burnstaina nazywane B - splinami są funkcjami bazowymi dla przedstawienia wielomianu interpolacyjnego nazywanego "spline polinomial" $S_{r,\delta} v \in \mathcal{M}_1(r,\delta)$.

Wobec tego możliwa jest druga metoda interpolacyjna bazująca na punktach $\xi_{j,k}$.

Należy zdefiniować operator $S_{r,\delta}$, który dla v określonego w punktach $0, 1$ i $\xi_{j,k}$, $j=1, \dots, M, k=1, \dots, r-1$ spełnia warunki $S_{r,\delta} v \in \mathcal{M}_1(r,\delta)$ oraz

$$/i/ (S_{r,\delta} v)(x) = v(x), \quad x=0 \text{ lub } 1,$$

$$/ii/ (S_{r,\delta} v)(\xi_{j,k}) = v(\xi_{j,k}), \quad j=1, \dots, M, \quad k=1, \dots, r-1.$$

Operator ten nie jest operatorem lokalnym w sensie podanym poprzednio. W praktyce metoda kollokacyjna /4.37/ wymaga aproksymacji funkcji U i współczynników w czasie. Można to osiągnąć metodą różnic skończonych stosując schemat Cranka-Nicolsona.

W metodzie kollokacyjnej poszukuje się wówczas odwzorowania

$$U: \{t_0, t_1, \dots, t_N\} \rightarrow \mathcal{M}_1(r,\delta) \text{ takiego, że}$$

$$/i/ U^0 = f \text{ jest dane}$$

$$/4.38/ /ii/ \{c(U^{n+1/2}) d_t U^n - a(U^{n+1/2}) U_{xx}^{n+1/2} - b(U^{n+1/2}, U_x^{n+1/2})\}(\xi_{ij}) = 0,$$

$$\text{dla } i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, r-1, \quad n = 0, \dots, N-1,$$

$$/iii/ U^n(0) = g_0(t_n), \quad U^n(1) = g_1(t_n), \quad n=0, \dots, N \text{ gdzie } c(U^{n+1/2})_{\xi_j} = c(\xi_j, t_{n+1/2}, U(\xi_j)),$$

/inne współczynniki liczy się podobnie/ oraz

$$U^n = U^n(x) = U(x, t_n), \quad t_n = n\Delta t, \quad \Delta t = T/N, \quad U^{n+\alpha} = \alpha U^{n+1} + (1-\alpha)U^n, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$d_t U^n = (U^{n+1} - U^n) / \Delta t.$$

W metodzie kollokacyjnej z ciągłym czasem /4.37/ można sformułować twierdzenie dotyczące jednoznaczności rozwiązania oraz błędu aproksymacji:

TWIERDZENIE 4.4. /J. DOUGLAS and T. DUPONT /39/ /

Niech współczynniki a i c równania różniczkowego /4.36/ mają ograniczone trzecie pochodne w sąsiedztwie domknięcia zbioru $\{(x,t, \theta(x,t)) \mid x \in I, t \in [0, T]\}$ gdzie θ jest rozwiązaniem /4.36/.

Funkcja b w równaniu /4.36/ również musi mieć ograniczone trzecie pochodne w sąsiedztwie domknięcia zbioru

$$\{(x,t, \Theta(x,t), \Theta_x(x,t)) \mid x \in I, t \in [0, T]\}.$$

Zakładamy, że $\Theta \in L^\infty(0, T; H^{r+3}(I_i))$, $\Theta_t \in L^2(0, T; H^{r+3}(I_i))$, $i=1, \dots, M$ oraz $U(x, 0) = T_{r, \delta} f$.

Symbol $L^p(0, T; H^{r+3}(I_i))$ oznacza przestrzeń odwzorowań z przedziału $[0, T]$ do przestrzeni Sobolewa $H^{r+3}(I_i)$ funkcji mających pochodne rzędu $r+3$ całkowalne z p -tą potęgą $L^p(I_i)$.

TEZA: Istnieje jednoznaczne rozwiązanie U równań kollokacyjnych /4.37/ i słuszne jest oszacowanie błędu

$$/4.39/ \quad \|\Theta - U\|_{L^\infty(I \times [0, T])} \leq C \left\{ \sum_{i=1}^M (\|\Theta\|_{L^\infty(Q_T; H^{r+3}(I_i))})^2 + \|\Theta_t\|_{L^2(Q_T; H^{r+3}(I_i))}^2 \right\}^{1/2}.$$

Warunki istnienia rozwiązania i oszacowania błędu aproksymacji rozwiązania w metodzie kollokacyjnej Cranka-Nicolsona podaje

TWIERDZENIE 4.5 /J. DOUGLAS and T. DUPONT /39/ /

Jeśli założenia twierdzenia 4.4. są spełnione i ponadto funkcja Θ dla normy

$$\|u\|_{2,2} := \sup \left\{ \left| \frac{\partial^{k+j} \Theta}{\partial x^k \partial t^j}(x,t) \right| \mid x \in I, 0 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq M, 0 \leq k \leq \alpha, 0 \leq j \leq \beta \right\}$$

spełnia warunki $\|\Theta\|_{2,2} < \infty$ oraz $\|\Theta\|_{0,3} < \infty$, wówczas dla dostatecznie małego Δt istnieje jednoznaczne rozwiązanie równań kollokacyjnych /4.38/ a błąd między Θ i U spełnia warunek

$$/4.40/ \quad \max_{0 \leq k \leq N} \|(\Theta - U)^k\|_{L^\infty(I)} \leq C \left[(\Delta t)^2 + \left\{ \sum_{i=1}^M (\|\Theta\|_{L^\infty(Q_T; H^{r+3}(I_i))})^2 + \|\Theta_t\|_{L^2(Q_T; H^{r+3}(I_i))}^2 \right\}^{1/2} \right],$$

gdzie $C = C(\|\Theta\|_{2,2}, \|\Theta\|_{0,3})$.

Przedstawione tu równania /4.38/ są szczególnym przypadkiem procedury zapewniającej wyższy rząd dokładności i będącej kombinacją, metody kollokacji względem czasu z metodą kollokacji względem zmiennej przestrzennej, w której wykorzystuje się przestrzeń $M_1(r, \delta)$.

Zdefiniujemy zbiór

$M_0(s, \epsilon) = \{v \in C^0([0, T]) \mid v \in P_s(J_k), k=1, \dots, N\}$
funkcji $v \in C^0([0, T])$ będących wielomianami stopnia nie większego od s na odcinku $J_k = [t_{k-1}, t_k] \subset J$,
gdzie $J = [0, T]$, $\epsilon = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_N = T\}$.

Niech $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1(r, \delta) \otimes \mathcal{M}_0(s, \epsilon)$ oznacza przestrzeń, w której bazę tworzy skończony zbiór iloczynów postaci $w(x)v(t)$, gdzie w jest elementem bazy w $\mathcal{M}_1(r, \delta)$ a v elementem bazy $\mathcal{M}_0(s, \epsilon)$.

Operator interpolacyjny $T_{s, \epsilon}^* : C^0([0, T]) \rightarrow \mathcal{M}_0(s, \epsilon)$ jest określony zależnością $(T_{s, \epsilon}^* v)(\xi_{kq}) = v(\xi_{kq})$, $k=1, \dots, N$, $q=0, \dots, S$,

gdzie $\xi_{kq} = t_{k-1} + \Delta t_k \xi_q$, a ξ_q są punktami, w których wielomian

$B_s^*(t) = \frac{1}{(2s)!} \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} (t^s(t-1)^s)$ ma wartości zerowe. Punkty ξ_q dają się uporządkować $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_s = 1$.

Przez τ_{kl} oznaczymy punkty $\tau_{kl} = t_{k-1} + \Delta t_k \tau_l$, $k=1, \dots, N$, $l=1, \dots, S$,

gdzie τ_l są punktami kwadratury Gaussa w przedziale $[0, 1]$.

Wobec tych oznaczeń można sformułować aproksymację problemu /4.36/ metodą peźnej kolokacji.

Rozwiązanie $U \in \mathcal{M}$ jest określone przez zależności operatorowe lokalne w czasie

$$/i/ \quad U(x, 0) = (T_{r, \delta} f)(x),$$

$$/4.41/ \quad /ii/ \quad U(0, t) = (T_{s, \epsilon}^* g_0)(t), \quad U(1, t) = (T_{s, \epsilon}^* g_1)(t),$$

$$/iii/ \quad \{c(U)U_t - \alpha(U)U_{xx} - b(U, U_x)\}(\xi_{ij}, \tau_{kl}) = 0,$$

$i=1, \dots, M$, $j=1, \dots, r-1$, $k=1, \dots, N$, $l=1, \dots, S$.

Rozwiązanie układu równań /4.41 iii/ dla każdej trójki i, j, l przy ustalonym k może być przedłużone na cały podprzedział czasowy δ_k . Interpolacje warunków początkowych i brzegowych są liniowe i lokalne.

Regułą optymalnego wyboru h i $\Delta \tau$ określa pierówność

$$/4.42/ \quad 0 < c_1 \leq \frac{\Delta t}{h} + \frac{h^3}{\Delta \tau} \leq c_2 < \infty.$$

Wykorzystując warunek /4.42/ można oszacować $\varphi = \theta - U$ w przestrzeni L^∞ dla $(x, t) \in I \times [0, T]$, stosując:

LEMAT 4.1

Niech $h_1 = h$ i $\Delta t_k = \Delta t$. Normy $\|\varphi\|_{L^\infty(I \times [0, T])}$ oraz

$$\max_{\substack{i=1, \dots, M \\ k=1, \dots, N}} \left\{ \|\varphi(\cdot, t_k)\|_{L^\infty(I_i)}^2 + \frac{h^3}{\Delta t} \sum_{l=1}^s |\varphi_{x l}(\tau_{kl}) w_l^* \Delta t + \frac{\Delta t}{h} \int_{\delta_k} |\varphi_t|^2(\tau) d\tau \right\}^{1/2}$$

są równoważne na $\mathcal{M}_1(r, \delta) \times \mathcal{M}_0(s, \epsilon)$

dla $r \geq 3$. W szczególności

$$\|\varphi\|_{L^{\infty}(I \times [0, T])} \leq C \left\{ \max_{k=0, \dots, N} \|\varphi(\cdot, t_k)\|_{L^2(I)}^2 + \frac{h^3}{\Delta t} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{\infty} |\varphi_{xx}|^2(\tau_{kl}) w_l^* \Delta t + \frac{\Delta t}{h} \int_0^T \int_I |\varphi_t|^2(\tau) d\tau \right\}^{1/2}.$$

W prezentowanych metodach kollokacyjnych interpolacja warunków początkowych i brzegowych związana jest z punktami, które odpowiednio są miejscami zerowymi η_i wielomianów $B_T(x)$ lub $B_S^*(t)$. Punktami kollokacji w obszarze $\Omega = (0, 1) \times (0, T)$ są punkty związane zależnościami algebraicznymi z węzłami kwadratury Gaussa - Legendre'a.

Ten sposób postępowania powoduje, że aproksymacja pochodnej funkcji w punktach Gaussa jest tego samego rzędu jak aproksymacja funkcji.

Praktyczne wykorzystanie metod kollokacyjnych wymaga zastosowania procedur znajdujących współczynniki wielomianów interpolacyjnych aproksymujących dokładnie rozwiązanie w punktach $\tau_{kl} \times \xi_{ij} \in [a(t), b(t)] \times [0, T]$. Wartości funkcji $a(t)$ i $b(t)$ znajduje się rozwiązując układ dwóch pozostałych równań układu /@/ dla każdej chwili t_k . Koszt tych obliczeń będzie większy niż dla schematów różnicowych zastosowanych praktycznie do rozwiązania układu /@/. Schematy te opiszemy w następnym rozdziale.

4.1.5. METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

4.1.51 METODA HERMITA DLA PROBLEMU STEFANA.

Układ równań /@/ rozwiążemy numerycznie z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi traktując to zagadnienie jako problem STEFANA ze swobodnym brzegiem. Jest to problem przewodnictwa cieplnego z dziedziną zmienną w czasie, której kształt boków opisuje układ równań różniczkowych cząstkowych.

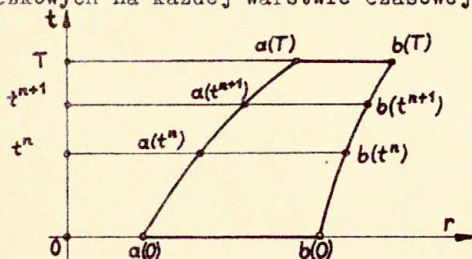
Ciągłą dziedzinę $\Omega = [b(t) - a(t)] \times [0, T]$ zastępujemy dwoma skończonymi zbiorami punktów $\{t^n; 0 \leq n \leq N, t^0 = 0, t^n < t^{n+1}, t^n = T\}$ i

$$\{r_i; 0 \leq i \leq M, r_0 = a(t^n), r_i < r_{i+1}, r_M = b(t^n)\}$$

wybranych odpowiednio na zmiennej czasowej t i przestrzennej

$$a(t) \leq r(t) \leq b(t).$$

Metodę Hermita zastosujemy do rozwiązania równania parabolicznego. Brzeży $a/t/$ i $b/t/$ dziedziny Ω znajdujemy rozwiązując metodą różnic skończonych układ pozostałych dwóch równań różniczkowych na każdej warstwie czasowej $t = t^n$.



RYS. 4.1. Dyskretyzacja dziedziny Ω względem czasu, przypadek jednej zmiennej przestrzennej.

Błąd dyskretyzacji pochodnych w metodzie Hermita jest kilkakrotnie mniejszy niż błąd w innych schematach różnicowych tego samego rzędu dokładności. Eliminacja wyższych pochodnych powoduje obniżenie kosztu obliczeń oraz uproszczenie algorytmu.

W węzłach siatki dyskretnej sąsiadujących z brzegiem obszaru obowiązują dodatkowe zależności dające dokładność przybliżenia trzeciego rzędu. Dzięki tym zależnościom rząd dokładności metody Hermita w punktach leżących w obszarze jest zgodny i wyższy o jeden od rzędu dokładności w punktach sąsiadujących z brzegiem, ponadto cały układ równań liniowych daje się wówczas rozwiązać algorytmem niejawnym.

Metoda ta zachowuje swoje własności dla siatek nierównomiernych, gdy zależnie od własności rozwiązania zmniejsza się lub zwiększa oczko siatki.

Rozwiążemy równanie przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right).$$

W klasycznych metodach różnic skończonych pochodne funkcji przybliżano schematami np:

$$\theta_r \text{ przez } \hat{\theta}_r(t_k, r_i) := \hat{\theta}_{r_i}^k = (1/2h)(\theta_{i+1}^k - \theta_{i-1}^k),$$

$$\theta_{rr} \text{ przez } \hat{\theta}_{rr}(t_k, r_i) := \hat{\theta}_{rr_i}^k = (1/(h^2))(\theta_{i+1}^k - \theta_{i-1}^k - 2\theta_i^k),$$

lub schematami wyższego rzędu, gdzie wykorzystywano więcej niż trzy węzły.

W metodzie Hermita przybliżone wartości pochodnych $\hat{\Theta}_{r_i}^k$ i $\hat{\Theta}_{rr_i}^k$ traktuje się jako wielkości niewiadome w każdym punkcie dyskretnej dziedziny, co stanowi cechę charakterystyczną tej procedury.

Wielkości te znajduje się rozwiązując układ równań Hermita

$$\begin{aligned} /4.43/(i) \quad & \hat{\Theta}_{r_{i+1}}^k + 4\hat{\Theta}_{r_i}^k + \hat{\Theta}_{r_{i-1}}^k = (3/h)(\Theta_{i+1}^k - \Theta_{i-1}^k), \\ (ii) \quad & \hat{\Theta}_{rr_{i+1}}^k + 10\hat{\Theta}_{rr_i}^k + \hat{\Theta}_{rr_{i-1}}^k = (12/h^2)(\Theta_{i+1}^k + \Theta_{i-1}^k - 2\Theta_i^k), i=1, \dots, M, \end{aligned}$$

gdzie k odpowiada chwili czasu $n\tau$ lub $(n+1)\tau$, h^k oznacza krok siatki równomiernej w wybranej chwili a τ jest krokiem po zmiennej t , "daszek" nad symbolem oznacza wartość przybliżoną Θ , Θ_r lub Θ_{rr} .

Algorytm rozwiązujący równanie przewodnictwa cieplnego jest złożony z równań

$$/4.44/ \quad \hat{\Theta}_i^k = \hat{\Theta}_i^{k-1} + \tau\mu \hat{\Theta}_{rr_i}^k + \frac{\tau\mu}{\tau k} \hat{\Theta}_{r_i}^k,$$

gdzie wielkości $\hat{\Theta}_{r_i}^k$ i $\hat{\Theta}_{rr_i}^k$ są rozwiązaniami układu /4.43/.

Układ 3M równań /4.43/ i /4.44/ dla siatki z M węzłami wzdłuż zmiennej r zawiera 3M niewiadomych. Macierz tego układu jest trójdzielna co obok wysokiego rzędu dokładności jest dodatkową zaletą tej metody /Y. ADAM /5/, /6/ /.

Ilość niewiadomych w układzie 3M równań algebraicznych można zmniejszyć, jeśli zastosuje się zależność

$$/4.45/ \quad \hat{\Theta}_{rr_i}^k = (2/h^2)(\Theta_{i+1}^k + \Theta_{i-1}^k - 2\Theta_i^k) - (1/2h)(\Theta_{r_{i+1}}^k - \Theta_{r_{i-1}}^k),$$

eliminującą z rozważań drugą pochodną Θ_{rr} . Schemat ten przybliża Θ_{rr} z dokładnością czwartego rzędu O/h^4 / na co wskazuje relacja

$$\hat{\Theta}_{rr} \cong \Theta_{rr} + (1/120)h^4 \frac{\partial^4 \Theta}{\partial r^4}.$$

Wzór /4.45/ jest prawdziwy dla siatek równomiernych, w przypadku siatek nierównomiernych zależność przybliżająca Θ_{rr} ma postać /Y. ADAM /6/ /

$$/4.46/ \quad \hat{\Theta}_{rr_i}^k = (1/h^2)(g_i \Theta_{i+1}^k + b_i \Theta_i^k + c_i \Theta_{i-1}^k) + (1/h)(d_i \Theta_{r_{i+1}}^k + e_i \Theta_{r_i}^k + f_i \Theta_{r_{i-1}}^k).$$

Oznaczając

$$/4.47/ \quad r_{i+1}^k - r_i^k = \delta_i h = h_{i+1}, \quad r_i^k - r_{i-1}^k = \delta_{i-1} h = h_i$$

współczynniki równania /4.45/ są rozwiązaniem układu

$$/4.48/ \quad \begin{bmatrix} \frac{\delta_i^2}{2} & \frac{\delta_{i-1}^2}{2} & \delta_i & -\delta_{i-1} \\ \frac{\delta_i^3}{6} & -\frac{\delta_{i-1}^3}{6} & \frac{\delta_i^2}{2} & -\frac{\delta_{i-1}^2}{2} \\ \frac{\delta_i^4}{24} & \frac{\delta_{i-1}^4}{24} & \frac{\delta_i^3}{6} & -\frac{\delta_{i-1}^3}{6} \\ \frac{\delta_i^5}{120} & -\frac{\delta_{i-1}^5}{120} & \frac{\delta_i^4}{24} & \frac{\delta_{i-1}^4}{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_i \\ c_i \\ d_i \\ f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_i = -/g_i + c_i/,$$

$$e_i = -/d_i + f_i/ + \delta_{i-1}c_i - \delta_i g_i.$$

Współczynniki δ_i , oraz g_i , c_i , d_i , f_i , b_i , e_i będą liczone na każdym kroku czasowym.

Krok h siatki jednorodnej dobierzemy w chwili początkowej t^0 . W następnych krokach czasowych siatka ta nie będzie równomierna ze względu na zmianę wymiarów dziedziny co opisuje funkcja C/t , której przybliżone wartości C^{j+1} znajduje się rozwiązując w każdej chwili t^j równanie algebraiczne

$$/4.49/ A_1(C^{j+1})^2 + (C^{j+1} - C^j)^2 J_1 / \tau^2 - A_3 C^{j+1} - A_4 = 0, \quad \tau \leq 1.$$

Równanie to otrzymuje się przybliżając odpowiednie pochodne schematami różnicowymi i porządkując równanie $\Theta_{/ii/}$, gdzie

$$A_1 := \tau(\alpha^2 - b^2) / [2(\alpha^2 + 2C^j)(b^2 + 2C^j)\tau^2],$$

$$A_2 := \tau \ln[(\alpha^2 + 2C^j)/(b^2 + C^j)] / (2\tau^2),$$

$$J_1 := \sum_{n=0}^{M-1} [(r_{n+1}^j - r_n^j) \left(\frac{x_n^j}{(r_n^j)^{2\tau+1} \delta_n^j} + \frac{x_{n+1}^j}{(r_{n+1}^j)^{2\tau+1} \delta_{n+1}^j} \right)],$$

$$J_2 := \sum_{n=0}^{M-1} [(r_{n+1}^j - r_n^j) \left(\frac{x_n^j}{r_n^j} + \frac{x_{n+1}^j}{r_{n+1}^j} \right)],$$

$$x_n^j := x_n^{j-1} + \frac{\tau(C^j - C^{j-1})}{(r_n^{j-1})^2} \left[\frac{(C^j - C^{j-1})\tau}{[\tau \delta_n^{j-1} (r_n^{j-1})^2]^\tau} + 1 \right],$$

$$/4.50/ (r_n^j)^2 = (\alpha^0 + nh)^2 + 2C^j,$$

$$A_3 := A_2 + 2A_1 C^j,$$

$$A_4 := p^j - J_2 - 2A_2 C^j + A_2 C^{j-1} - A_1 (C^j)^2.$$

Zależność między przybliżonymi wartościami funkcji i pochodnej ma ogólną postać

$$/4.51//i/ \quad x_i \Theta_{r_{i+1}}^k + \varphi_i \Theta_{r_i}^k + \psi_i \Theta_{r_{i-1}}^k - \frac{1}{h} (m_i \Theta_{i+1}^k + n_i \Theta_i^k + l_i \Theta_{i-1}^k) = 0.$$

Stąd jako szczególny przypadek słuszny dla siatek równomiernych wynika równanie /4.43//i/.

Współczynniki tego równania określone są wzorami

$$x_i = x_{i-1}^2, \quad \varphi_i = x_i^2, \quad \psi_i = (x_i + x_{i-1})^2, \quad m_i = \frac{2x_i^2(2x_i + x_{i-1})}{x_i(x_i + x_{i-1})}, \\ n_i = \frac{2(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{x_i x_{i-1}}, \quad l_i = -\frac{2x_i^2(2x_{i-1} + x_i)}{x_{i-1}(x_i + x_{i-1})}.$$

Stosując zależność /4.45/ do równania /4.44/ możemy wyeliminować Θ_{rr} , otrzymujemy wówczas równanie

$$/4.51//ii/ \quad d_i \Theta_{r_{i+1}}^k + \Theta_{r_i}^k (e_i + \frac{h}{r_i^k}) + f_i \Theta_{r_{i-1}}^k + \frac{1}{h} [g_i \Theta_{i+1}^k + (b_i - \frac{h^2}{\alpha \mu}) \Theta_i^k + z_i \Theta_{i-1}^k] = -\frac{h}{\alpha \mu} \Theta_i^{k-1}.$$

Układ równań /4.51/ można zapisać dla każdej chwili t^k , $k \in [1, N]$ oraz $i = 2, \dots, M-1$ w postaci macierzowej

$$/4.52/ \quad -A_i U_{i+1} + B_i U_i - Z_i U_{i-1} = D_i,$$

co podkreśla trójdzielny charakter schematu rekurencyjnego,

$$\text{gdzie } \begin{pmatrix} \Theta_i \\ \Theta_{r_i} \end{pmatrix}, A_i = \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} \\ A^{21} & A^{22} \end{pmatrix}, B_i = \begin{pmatrix} B^{11} & B^{12} \\ B^{21} & B^{22} \end{pmatrix}, Z_i = \begin{pmatrix} Z^{11} & Z^{12} \\ Z^{21} & Z^{22} \end{pmatrix}, D_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -h \Theta_i^{k-1} / \alpha \mu \end{pmatrix}.$$

Układ równań algebraicznych można rozwiązać stosując uogólnioną metodę THOMASA /częściej używa się spolszczonej nazwy rosyjskiej "metoda PRAGONKI"/ lub algorytm stosowany w pracy BAUERA i IWANOWA /22/

W pierwszym z tych algorytmów obowiązują wzory rekurencyjne

$$/i/ \quad E_i = (B_i - Z_i E_{i-1})^{-1} A_i,$$

$$/4.53/ \quad /ii/ \quad F_i = (B_i - Z_i E_{i-1})^{-1} (D_i + Z_i F_{i-1}) \quad \text{dla } i=2, \dots, M-1,$$

$$/iii/ \quad U_i = E_i U_{i+1} + F_i \quad \text{dla } i=M-1, \dots, 1,$$

gdzie występuje konieczność odwracania macierzy. Wskaźnik -1 na górze symbolu oznacza operację odwracania macierzy. Schemat rekurencyjny /4.53/ musi być uzupełniony zależnościami określającymi elementy startowe E_1 , F_1 oraz U_M .

Układ równań /4.51/ dopełniają warunki brzegowe typu /4.51//i/

$$\psi_2 \Theta_{r_2}^k + \varphi_2 \Theta_{r_1}^k - \frac{1}{h} (m_2 \Theta_3^k + n_2 \Theta_2^k + l_2 \Theta_1^k) = 0 \quad \text{dla } i=1,$$

$$\psi_M \Theta_{r_M}^k + \varphi_{M-1} \Theta_{r_{M-1}}^k - \frac{1}{h} (m_M \Theta_M^k + n_M \Theta_{M-1}^k + l_M \Theta_{M-2}^k) = 0 \quad \text{dla } i=M,$$

dające błąd przybliżenia O/h^3 lub warunki o dokładności O/h^2 w postaci /ADAM/5/ /

$$/1/ \frac{2}{x_1^2 h} G_1 + G_{r1} = \frac{2}{x_1^2 h} G_2 - G_{r2},$$

$$/4.54/ \quad /ii/ - \frac{2}{x_{M-1}^2 h} G_M + G_{rM} = - \frac{2}{x_{M-1}^2 h} G_{M-1} - G_{rM-1}.$$

Elementy startowe schematu rekurencyjnego dla warunków brzegowych /4.54/ są określone zależnościami

$$/4.55/ \quad E_1 = \frac{x_1}{2(1-x_1)} \begin{pmatrix} -2 & h \\ x_1^2 & -2 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \frac{x_1}{2(1-x_1)} \begin{pmatrix} n \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$U_M = \left(\begin{pmatrix} -2/x_{M-1}^2 h & 1 \\ -2 & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & h \end{pmatrix} E_{M-1} \right)^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & h \end{pmatrix} F_{M-1} + \begin{pmatrix} -2G_{M-1}/x_{M-1}^2 h - G_{rM-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Układ równań /4.51/ przepisujemy zmieniając kolejność wyrazów oraz wprowadzając oznaczenia $v = \Theta^k$, $u = \Theta^k_r$ dla każdego $k \in \{1, N\}$

$$\begin{cases} hf_i u_{i-1} - li v_{i-1} + h\psi_i u_i - ni v_i + hx_i u_{i+1} - m_i v_{i+1} = 0, \\ hf_i u_{i-1} + zi v_{i-1} + h(e_i + \frac{1}{r_i k}) u_i + (b_i - \frac{h^2}{\tau \mu}) v_i + hd_i u_{i+1} + g_i v_{i+1} = -\frac{h^2}{\tau \mu} \Theta_i^{k-1}. \end{cases}$$

Stosując symbole

$$s_i^{(1)} = hf_i, \quad s_i^{(2)} = -li, \quad w_i^{(1)} = h\psi_i, \quad w_i^{(2)} = -ni, \quad x_i^{(1)} = hx_i, \quad x_i^{(2)} = -m_i, \quad y_i^{(1)} = 0,$$

$$s_i^{(3)} = hf_i, \quad s_i^{(4)} = zi, \quad w_i^{(3)} = h(e_i + \frac{1}{r_i k}), \quad w_i^{(4)} = b_i - \frac{h^2}{\tau \mu}, \quad x_i^{(3)} = hd_i, \quad x_i^{(4)} = g_i, \quad y_i^{(2)} = -\frac{h^2}{\tau \mu} \Theta_i^{k-1},$$

równania te zapisuje się w postaci:

$$/4.56/ \quad s_i^{(1)} u_{i-1} + s_i^{(2)} v_{i-1} + w_i^{(1)} u_i + w_i^{(2)} v_i + x_i^{(1)} u_{i+1} + x_i^{(2)} v_{i+1} = y_i^{(1)},$$

$$s_i^{(3)} u_{i-1} + s_i^{(4)} v_{i-1} + w_i^{(3)} u_i + w_i^{(4)} v_i + x_i^{(3)} u_{i+1} + x_i^{(4)} v_{i+1} = y_i^{(2)}, \text{ dla } 1 \leq i \leq M,$$

gdzie $s_i^{(m)} = x_i^{(m)} = 0$ dla $1 \leq m \leq 4$.

Algorytmu Thomasa dla b_i - trójdzielnej macierzy układu

/4.56/ użyto w programie TLP1 rozwiązującym problem /G/.

Układ zależności stanowiący ten schemat obliczeniowy przedstawimy poniżej /VON ROSENBERG /105//:

W pierwszym etapie oblicza się

$$\beta_i^{(1)} = w_i^{(1)} - s_i^{(1)} \lambda_{i-1}^{(1)} - s_i^{(2)} \lambda_{i-1}^{(2)},$$

$$\beta_i^{(2)} = w_i^{(2)} - s_i^{(1)} \lambda_{i-1}^{(2)} - s_i^{(2)} \lambda_{i-1}^{(1)},$$

$$\beta_i^{(3)} = w_i^{(3)} - s_i^{(3)} \lambda_{i-1}^{(1)} - s_i^{(4)} \lambda_{i-1}^{(3)},$$

$$\beta_i^{(4)} = w_i^{(4)} - s_i^{(3)} \lambda_{i-1}^{(2)} - s_i^{(4)} \lambda_{i-1}^{(4)}, \text{ gdzie } \beta_i^{(m)} = w_i^{(m)} \text{ dla } m \in \{1, 4\},$$

oraz

$$\delta_i^{(1)} = y_i^{(1)} - s_i^{(1)} s_{i-1}^{(1)} - s_i^{(2)} s_{i-1}^{(2)},$$

$$\delta_i^{(2)} = y_i^{(2)} - s_i^{(3)} s_{i-1}^{(1)} - s_i^{(4)} s_{i-1}^{(2)}, \text{ gdzie } \delta_1^{(1)} = y_1^{(1)} \text{ i } \delta_1^{(2)} = y_1^{(2)},$$

ponadto określa się $\mu_i = \beta_i^{(1)} \beta_i^{(4)} - \beta_i^{(2)} \beta_i^{(3)}$.

Następnie oblicza się wielkości $\lambda_i^{(m)}$, $m = 1, \dots, 4$ i $\delta_i^{(n)}$

$n = 1, 2$ korzystając z równań

$$\lambda_i^{(1)} = (\beta_i^{(4)} x_i^{(1)} - \beta_i^{(2)} x_i^{(3)}) / \mu_i,$$

$$\lambda_i^{(2)} = (\beta_i^{(4)} x_i^{(2)} - \beta_i^{(2)} x_i^{(4)}) / \mu_i,$$

$$\lambda_i^{(3)} = (\beta_i^{(4)} x_i^{(3)} - \beta_i^{(3)} x_i^{(1)}) / \mu_i,$$

$$\lambda_i^{(4)} = (\beta_i^{(4)} x_i^{(4)} - \beta_i^{(3)} x_i^{(2)}) / \mu_i,$$

oraz $\delta_i^{(1)} = (\beta_i^{(4)} \delta_i^{(1)} - \beta_i^{(2)} \delta_i^{(2)}) / \mu_i,$

$$\delta_i^{(2)} = (\beta_i^{(4)} \delta_i^{(2)} - \beta_i^{(3)} \delta_i^{(1)}) / \mu_i, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, M-1.$$

Wartości $\lambda_i^{(m)}$ oraz $\delta_i^{(n)}$ muszą być zapamiętane, ponieważ używa się ich we wzorach rekurencyjnych

$$/4.57/ \quad u_i = \delta_i^{(1)} - \lambda_i^{(1)} u_{i+1} - \lambda_i^{(2)} v_{i+1},$$

$$v_i = \delta_i^{(2)} - \lambda_i^{(3)} u_{i+1} - \lambda_i^{(4)} v_{i+1}, \text{ dla } i = M-1, M-2, \dots, 1,$$

oraz $u_M = \delta_M^{(1)}, v_M = \delta_M^{(2)}.$

W równaniach /4.53/ występuje operacja odwracania macierzy $/B_i - Z_i E_{i-1}/$ i mnożenia jej przez A_i lub $/D_i + Z_i F_{i-1}/.$

W algorytmie Thomasa operację tą wykonuje się poszukując macierzy odwrotnej $/B_i - Z_i E_{i-1}/^{-1}$ a następnie mnożenia przez inną macierz, inny sposób wykonania tego działania zaproponowano w pracy Bauera-Iwanowa.

Na wierszach tablicy $/B_i - Z_i E_{i-1}/$ oraz A_i lub $/D_i + Z_i F_{i-1}/$ dokonuje się jednoczesnych operacji, które sprowadzają pierwszą z tych macierzy do postaci diagonalnej. Elementy tej macierzy leżące na głównej przekątnej są wówczas równe 1.

Algorytm ten pozwala rozwiązać zarówno układ /4.53/, /4.55/ dla macierzy 2×2 jak również taki sam układ dla macierzy 3×3 odpowiadający równaniom Hermita z $3M$ niewiadomymi $\Theta_1, \Theta_{r1}, \Theta_{rr1}.$

Stosując w równaniu /4.44/ różnicę skończoną „do przodu” otrzymujemy najprostszy sposób rozwiązania równań Hermita. W tej metodzie wartości Θ_i^{k+1} , $i = 2, \dots, M$ oblicza się na kroku czasowym k z równania

$$/4.58/ \quad \Theta_i^{k+1} = \frac{\gamma u}{h^2} (g_i \Theta_{i+1}^k + (b_i + \frac{h^2}{\gamma u}) \Theta_i^k + c_i \Theta_{i-1}^k) + \frac{\gamma u}{h} (d_i \Theta_{i+1}^k + (e_i + \frac{h}{\gamma k}) \Theta_i^k + f_i \Theta_{i-1}^k)$$

dla $i = 2, \dots, M-1$ wówczas algorytm Thomasa /metodą progonki/ stosuje się do równania rekurencyjnego /4.51//i/ z warunkami brzegowymi /4.54/ dla określenia wartości G_{ri}^{k+1} .

Jeśli znamy wartości G_1^{k+1} , G_{r1}^{k+1} , $i = 1, \dots, M$ to możemy obliczyć z /4.58/ wartości G_i^{k+2} .

Ostatni z prezentowanych tu schematów obliczeniowych jest najprostszy, ale dla zachowania stabilności rozwiązania konieczne jest zmniejszenie kroku na zmiennej t .

4.1.52. METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DLA ZADANIA /W/.

W problemie /W/ opisującym zachowanie się rury lepkoplastycznej ze wzmocnieniem izotropowym należy określić wartości funkcji wzmocnienia \mathcal{W}_n^j i wartości funkcji opisujących położenie brzegów materiału α_n^j , b_n^j , $j = 1, \dots, N$, $n = 1, \dots, M$ oraz funkcji C^j .

Przybliżając odpowiednie pochodne różnicami skończonymi w układzie równań /W/ otrzymuje się równanie algebraiczne, jakie należy rozwiązać na każdym kroku czasowym

$$/4.59/ A_1(C^{j+1})^2 + (C^{j+1} - C^j)^2 J_1 / \tau^2 - A_3 C^{j+1} - A_4 = 0 \text{ dla } \tau \ll 1.$$

Równanie to rozwiązuje się dla C^{j+1} metodami iteracyjnymi jako zadanie, w którym poszukuje się minimum funkcji określonej równością

$$\min [P(C^{j+1})] = [A_1(C^{j+1})^2 + |C^{j+1} - C^j|^2 J_1 / \tau^2 - A_3 C^{j+1} - A_4]^2$$

gdzie: $A_1 = \rho(\alpha^{02} - b^{02}) / [2(\alpha^{02} + 2C^j)(b^{02} + 2C^j)\tau^2]$,

$$A_2 = \rho \ln[(\alpha^{02} + 2C^j) / (b^{02} + 2C^j)] / (2\tau^2),$$

$$I_1 = \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{\delta} [(r_{n+1}^j - r_n^j) \left(\frac{\mathcal{W}_n^j}{(r_n^j)^{2\tau+1}} + \frac{\mathcal{W}_{n+1}^j}{(r_{n+1}^j)^{2\tau+1}} \right)],$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^{M-1} [(r_{n+1}^j - r_n^j) \left(\frac{\mathcal{W}_n^j}{r_n^j} + \frac{\mathcal{W}_{n+1}^j}{r_{n+1}^j} \right)],$$

$$(r_n^j)^2 = (\alpha^0 + nh)^2 + 2C^j,$$

$$A_3 = A_2 + 2A_1 C^j,$$

$$A_4 = p^j - J_2 - 2A_2 C^j + A_2 C^{j-1} + A_1 (C^j)^2,$$

$$\mathcal{W}_n^{j+1} = \mathcal{W}_n^j + \rho \frac{(C^j - C^{j-1})}{(r_n^j)^2} \left[\frac{(C^j - C^{j-1})}{[\tau \gamma (r_n^j)^2]^\tau} + 1 \right],$$

dla warunków $\alpha_n^1=1$, $n=1, \dots, M$, $C^1=C^2=0$.

4.2. UZASADNIENIE WYBORU METODY

Każdą z przedstawionych metod możemy zastosować do rozwiązania problemu Stefana opisanego układem równań różniczkowych /G/.

Rząd dokładności, przy tym samym koszcie metody, jest inny dla każdej z opisanych metod numerycznych.

Metoda różnic skończonych oraz metody kollokacyjne mogą, być użyte do rozwiązania układu równań opisujących ruch brzegów obszaru w problemie /G/ jak również do rozwiązania zagadnienia /W/.

Metoda HERMITA opisana w rozdziale /4.1.51/ i stosowana w programie TLP jest bezwarunkowo stabilna oraz zapewnia dokładność O/h^4 / czwartego rzędu w obszarze $R = \{(r,t); a(t) \leq r \leq b(t), 0 < t < T\}$.

Na brzegu ∂R uzyskać możemy dokładność O/h^3 / po zastosowaniu specjalnych schematów brzegowych.

Koszt metody jest liniową funkcją:

- /1/ ilości kroków czasowych $(T-t) / \Delta t$,
- /2/ ilości kroków po zmiennej przestrzennej $(r_m - r_1) / h$,
- /3/ stałego kosztu zależnego tylko od algorytmu.

Koszt metody Hermita wyraża się wzorem

$$/4.60/ \quad C_H = c_H (r_m - r_1) (T - t_0) / M,$$

lub w zależności od funkcji błędu

$$/4.61/ \quad C_H = c_H (r_m - r_1) (T - t_0) \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} \alpha_H^{1/2} \gamma_H^{1/4} \epsilon_H^{-3/4},$$

gdzie $M = 1 / \Delta t h$ oraz wielkości $\alpha_H, \gamma_H, \epsilon_H$ określa się

z rozważań nad dokładnością metody

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} = 12 \left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right) (t^*) + \epsilon_H |\theta_k| \right\}, t^*: t < t^* < t + \Delta t,$$

$$\epsilon_H = \alpha_H \Delta t^2 + \beta_H \Delta t^2 h^2 + \gamma_H h^4,$$

$$\alpha_H = \frac{1}{96} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(3 \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + 8 \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right) / |\theta_k|,$$

$$\gamma_H = \frac{1}{720} \frac{\partial^4}{\partial r^4} \left(-4 \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + 3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right) / |\theta_k|,$$

$$\beta_H = \frac{1}{288} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial t^2} \left(2 \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - 3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right) / |\theta_k|.$$

Podobnie możemy określić koszt klasycznej metody CRANKA-NICOLSONA, jeżeli użyjemy zależności:

$$\begin{aligned} \epsilon_c &= \alpha_c \Delta t^2 + \beta_c h^2 \\ \alpha_c &= \frac{1}{12} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right) / |\theta_k|, \\ \beta_c &= \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(2 \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} \right) / |\theta_k|. \end{aligned}$$

Koszt metody Hermita C_H w zależności od kosztu metody Cranka-Nicolsona C_c wyraża się wzorem

$$/4.62/ \quad C_H = 2C_c (r_m - r_1) (T - t_0) \alpha_c^{1/2} \beta_c^{1/2} \epsilon_c^{-1}.$$

Porównując koszty obydwu tych metod przy tej samej dokładności otrzymujemy zależność

$$/4.63/ \quad \frac{C_c}{C_H} = 2 \left(\frac{C_c}{C_H} \right)^{1/4} \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_H} \right)^{1/2} \beta_c^{1/2} \delta_H^{-1/4} \epsilon^{-1/4}$$

gdzie $C_c/C_H = 2.3$.

Elementarne rozwiązanie równania przewodnictwa jest

$$G_k(r, t) = \exp\left(\frac{1}{2r}\left(r - \frac{t}{r}\right)\right) \exp(-\omega_k^2 t) (A_k \sin \omega_k r + B_k \cos \omega_k r).$$

Zależnie od relacji między ω_k i współczynnikiem $1/r$ w równaniu przewodnictwa rozpatruje się uproszczony wzór /4.63/

$$\frac{C_c}{C_H} = Z \left(\frac{\omega^2}{\epsilon} \right)^{1/4}$$

gdzie Z jest wielkością stałą, $Z \in \mathbb{R}$.

Trzy przypadki relacji między ω_k i $1/r$ badał ADAM /5/ i stwierdził, że w każdej sytuacji metoda Cranka-Nicolsona jest bardziej kosztowna niż metoda Hermita.

W omówionych w punkcie 4.1.2. metodach elementu skończonego z ciągłą i nieciągłą dyskretyzacją względem czasu otrzymuje się uogólnione schematy Cranka-Nicolsona i z tego względu metody te są droższe od procedury Hermita. Zakładając stały koszt, taki jak w metodzie Hermita, rząd dokładności metody elementów skończonych z ciągłą aproksymacją względem czasu jest $O(h^2)$. Druga metoda elementów skończonych opisana w /4.1.21/ jest procedurą pierwszego rzędu dokładności $O(h)$. Rzędy błędów schematów aproksymacyjnych potwierdził BONNEROT i JAMET /19/ eksperymentalnie.

Wyniki otrzymane w wyniku działania procedury Hermita można poprawić stosując na każdym kroku czasowym metodę "predictor-corrector" dla całego układu równań /6/.

W tym przypadku dla położenia brzegu obszaru obliczonego na kroku czasowym $n - \frac{1}{2}$ / można rozwiązać problem przewodnictwa cieplnego w chwili n .

W metodzie kollokacyjnej opisanej w rozdziale /4.1.4/ z dyskretyzacją zmiennej t według schematu Cranka-Nicolsona błąd przybliżenia jest rzędu O/h^{2z-2} /. Wielkość ta jest określoną dla funkcji aproksymacyjnej w węzłach leżących na jednej warstwie czasowej. Oszacowanie błędu metody kollokacyjnej podali DOUGLAS i DUPONT /39/ oraz De BOOR i SWARTZ /40/. Parametr z jest stopniem wielomianu interpolacyjnego względem zmiennej przestrzennej.

Błąd przybliżenia w pełnej metodzie kollokacyjnej jest rzędu $O(h^{2z-2} + (\Delta t)^{2s})$, gdzie s jest stopniem wielomianu interpolacyjnego względem czasu. Metoda ta zapewnia taki sam rząd dokładności jak metoda Hermita, jeśli stopień wielomianu jest $z = 3$. Koszt metody kollokacyjnej jest jednak większy.

Metoda linii wraz z metodą RUNGEGO-KUTTY przedstawione w rozdziale /4.1.3/ dla rozwiązywania problemu Stefana zapewniają błąd rzędu $O/h^4 + O/\Delta t$ /. Metody te stosował MEYER /78/.

5.0. REZULTATY

Przedstawimy wyniki rozwiązań problemów / θ /, / w / i / S /.
 Problem / θ / sformułowany jako problem Stefana rozwiązano numerycznie metodą różnic skończonych Hermita, posługując się programem TLP. W rozwiązaniu określono: temperaturę $\theta = \theta/r, t/$, granicę plastyczności $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}/r, t/$ oraz składowe naprężenia $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r/r, t/$, $\bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_\theta/r, t/$, $\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_z/r, t/$ i odkształcenia $\bar{\epsilon}_r = \bar{\epsilon}_r/r, t/$, $\bar{\epsilon}_\theta = \bar{\epsilon}_\theta/r, t/$.

Problem Stefana był jednym z etapów rozwiązania problemu reakcji materiału lepkoplastycznego z efektami termicznymi. W programie TLP na kroku j po czasie określono wartości funkcji $C/t/$ opisującej zmiany wymiarów rury i temperaturę $\theta/r, t/$ w chwili $j + 1$. Znając stan naprężenia, odkształcenia, wartości funkcji temperatury oraz granicę plastyczności w chwili $j + 1$ można obliczyć wartości $C/t/$ i $\theta/r, t/$ w chwili $j+2$. Zagadnienie / θ / rozwiązano dla trzech typów warunków początkowych i brzegowych jakie proponowano dla funkcji temperatury $\theta/r, t/$. Każdy z tych problemów jest matematycznym modelem innego procesu lub opisuje tylko pewien etap procesu fizycznego, jaki może zachodzić w rurociągu. Problem / w / rozwiązano metodą różnic skończonych posługując się programem LW. Rozwiązaniem tego problemu były funkcje: składowych naprężeń $\bar{\zeta}_r = \bar{\zeta}_r/r, t/$, $\bar{\zeta}_\theta = \bar{\zeta}_\theta/r, t/$, $\bar{\zeta}_z = \bar{\zeta}_z/r, t/$, składowych odkształceń $\bar{\epsilon}_r = \bar{\epsilon}_r/r, t/$, $\bar{\epsilon}_\theta = \bar{\epsilon}_\theta/r, t/$ i granicy plastyczności $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(r, t)$.

Rezultaty te porównano pod względem ilościowym i jakościowym z wynikami dla zagadnienia / θ / uzyskanymi z rozwiązania problemu Nr 1, gdzie temperatura $\theta/r, t/$ w obszarze $r \in [a(t), b(t)]$ oraz na brzegu $a/t/$ była stała i równa temperaturze otoczenia, czyli $\theta/r, t/ = \text{const.}$ dla $t \in [t_p, t_k]$ i $r \in [a, b]$.

Zagadnienie / S / rozwiązano metodą Rungego-Kutty określając naprężenie i odkształcenie.

Program LP zawierał algorytm tego rozwiązania.

W problemach / w / i / S / szczegółowo analizowano zmiany jakościowe funkcji $C/t/$ w zależności od tego, czy ciśnienie $p/t/$ jest określone przez funkcję malejącą czy też rosnącą.

Ciśnienie $p/t/$ dobierano tak, aby w czasie całego procesu deformacyjnego rura była ostatecznie plastyczna.

We wszystkich rozpatrywanych problemach ciśnienie $p/t/$ zmienia się skokowo w chwili t_p , dla czasu $t \in (t_p, t_k]$ jest określone zależnością

$$/5.1/ \quad p(t) = f_1 + \delta_1 f_2 t + \delta_2 f_3 t^{1/2},$$

gdzie f_j , $j = 1, 2, 3$ są liczbami rzeczywistymi. Wielkości δ_1, δ_2 przyjmują wartości 0 lub 1 w zależności od tego czy wykres $p/t/$ jest linią prostą czy też krzywą drugiego stopnia. Wielkość i rodzaj funkcji $p/t/$ oraz warunek początkowy dla temperatury $\varphi_1(r) = \Theta(r, t_p)$ dobierane są tak, aby model matematyczny procesu najlepiej odpowiadał rzeczywistemu procesowi fizycznemu.

Wyniki dla problemów (G), (W) i (S) dobrze aproksymują rzeczywistość dla zakresu ciśnienia $p/t/$, przy którym odkształcenia występujące w materiale są małe. Rezultaty te gorzej opisują rzeczywistą reakcję rury grubościennej, jeśli kryterium małości odkształceń nie jest spełnione, ponieważ problemy były sformułowane dla równań ruchu i praw konstytutywnych odpowiednich dla nieskończenie małych deformacji.

Największe ciśnienie $p/t/$, przy którym odkształcenia w rurze są małe, jest wielkością związaną z typem problemu, modelem materiału oraz prędkością odkształcenia. Czas trwania procesu deformacji materiału jest parametrem charakterystycznym dla rozwiązywanego problemu opisującego reakcję rury sztywnolepkoplastycznej.

Wszystkie programy i procedury sporządzono w języku ALGOL-ODRA 1204.

Wykaz rozwiązywanych problemów i rezultatów przedstawiono w tablicy 5.1.

Nazwa problemu	Material		Warunki brzożowe i początkowe		DANE										REZULTATY					Nazwa programu					
	Opis	Granica plastyczności	Współczynniki lepkości	$\rho(\dot{\theta}) \neq \rho(\dot{\theta})$ $\rho(\dot{\theta}) > \rho(\dot{\theta})$	$G_r(\dot{\theta}) = 0$	$\theta(r, t_p)$	$\theta(r, t_p) = 0$	$\theta(r, t_p) = \theta(r, t_p)$	$\theta(r, t_p) = \text{const}$	Numer danych	$\Delta t = \Delta$	temperatura $\theta(r, t)$	$C(t)$	promień $r(t)$	napięcie promieniowe $G_r(r, t)$	napięcie osłowe $G_r(r, t)$	napięcie obwodowe $G_r(r, t)$	odkształcenie $\epsilon(r, t)$	$E_r(r, t)$		granica plastyczności $\sigma(r, t)$	predkosc odkształcenia $\dot{\epsilon}(r, t)$	czas trwania procesu [s]	DETAJLNIJE	
PROBLEM (G) Problem Nr1 Problem Nr2	sztywno-lepkoplastyczny ze sztywnym i lepkoelastycznym i efektem termicznym	$\mu(\dot{\theta})$	$\mu(\dot{\theta})$	1	1	1	$\theta(r, t) = \text{const}$	$\theta(r, t) = \text{const}$	1	3	5.1	5.4	5.7	1	0	0	1	5.15a	5.18	5.156	0	0.0025	1000	PLAS	
																									2013
																									2016
																									2019
																									3003
PROBLEM (G) Problem Nr1 Problem Nr2	sztywno-lepkoplastyczny ze sztywnym i lepkoelastycznym i efektem termicznym	$\mu(\dot{\theta})$	$\mu(\dot{\theta})$	1	1	1	$\theta(r, t) = \text{const}$	$\theta(r, t) = \text{const}$	1	3	5.1	5.6	5.8	1	0	0	1	5.15a	5.18	5.156	0	0.0025	1000	PLAS	
																									2025
																									2014
																									2017
																									2026
PROBLEM (G) Problem Nr3 Problem Nr4	sztywno-lepkoplastyczny ze sztywnym i lepkoelastycznym i efektem termicznym	$\mu(\dot{\theta})$	$\mu(\dot{\theta})$	1	1	1	$\theta(r, t) = \text{const}$	$\theta(r, t) = \text{const}$	1	3	5.2	5.6	5.8	1	0	0	1	5.15a	5.18	5.156	0	0.0025	1000	PLAS	
																									2015
																									2018
																									2027
																									180
PROBLEM (W) Problem Nr5	sztywno-lepkoplastyczny ze sztywnym i lepkoelastycznym i efektem termicznym	$\mu(\dot{\theta})$	$\mu(\dot{\theta})$	1	1	1	$\theta(r, t) = \text{const}$	$\theta(r, t) = \text{const}$	1	1	5.3	5.6	5.8	1	0	0	1	5.15a	5.18	5.156	0	0.0025	1000	PLAS	
																									120
																									120
PROBLEM (S) Problem Nr6	sztywno-lepkoplastyczny ze sztywnym i lepkoelastycznym i efektem termicznym	$\mu(\dot{\theta})$	$\mu(\dot{\theta})$	1	1	1	$\theta(r, t) = \text{const}$	$\theta(r, t) = \text{const}$	1	1	5.24	5.24	5.24	0	0	0	1	5.24	5.24	5.24	0	0.0075	1000	PLAS	
																									51
																									51

TABLCA 5.1 WYKAZ rozwiązanych problemów oraz wykaz rezultatów. UWAGA: 1 oznacza, że wielkość lub funkcja jest dyskutowana w rozdziale 5. 0 oznacza brak danych.

5.1. ROZWIĄZANIE PROBLEMU (G)

Zagadnienie (G) w zależności od warunków brzegowych i początkowych stawianych dla temperatury $\Theta/r, t/$ opisuje różne procesy fizyczne, związane z ogrzewaniem i deformacją rury grubościennej, w której płynie ciecz lub gaz pod ciśnieniem $p/t/$.

W pierwszym przypadku nazwanym dalej problemem Nr 1 temperatura $g/t/ = \Theta/a, t/$ na brzegu $a/t/$ jest funkcją ciągłą czasu t . Funkcja określająca warunek początkowy $\varphi_1/t/$ jest nieliniową, jednostajnie ciągłą funkcją czasu. Problem ten jest modelem procesu deformacji rurociągu, w którym płyn ogrzewa ścianki rury w czasie $t \in (-\infty, t_k]$, tak że w czasie $t \in [t_p, t_k]$ temperatura $\Theta/r, t/$ jest nieliniową funkcją promienia $r \in [a/t/, b/t/]$.

W chwili t_p ciśnienie $p/t/$ płynu w rurociągu rośnie skokowo $p(t_p^+) \gg p(t_p^-)$ do wartości, przy której naprężenie w całej rurze spełni warunek plastyczności.

W drugim przypadku określonym jako problem Nr 2 temperatura $\Theta/a, t/$ jest funkcją nieciągłą, zmienia się skokowo w chwili $t = t_p$ i spełnia warunek $\Theta(r, t_p^+) \gg \Theta(r, t_p^-)$.

Temperatura $\varphi_1/r/$ w chwili początkowej t_p procesu jest stała $\varphi_1/r/ = \Theta/r, 0/ = \text{const.}$, $r \in [a(t_p), b(t_p)]$.

Zagadnienie to jest modelem procesu deformacyjnego jaki zachodzi w rurociągu, w którym do chwili t_p^- temperatura jest stała $\Theta/r, t/ = \text{const.}$, $t \in (-\infty, t_p^-)$, $r \in [a, b]$.

W chwili t_p temperatura płynu rośnie skokowo tak, że pochodna funkcji temperatury względem czasu jest bliska nieskończoności $|\partial\Theta/\partial t| \approx \infty$. Ciśnienie zmienia się tak samo jak w problemie Nr 1.

W zagadnieniu nazwanym problemem Nr 3 temperatura $\Theta(a, t)$ na brzegu $a/t/$ zmienia się skokowo w chwili $t = t_p$ do wartości $\Theta(a(t_p), t_p^+) > \Theta(a(t_p), t_p^-)$ i dalej w czasie $t \in (t_p, t_k]$, jest rosnącą i ciągłą funkcją czasu. Funkcja $\varphi_1(r) = \Theta(r, t_p^-)$ jest nieliniowa względem zmiennej t .

Zagadnienie to jest modelem procesu, w którym płyn nagrzewa rurę do temperatury $\theta(r, t)$ w czasie $t \in (-\infty, t_p^-)$. Temperatura $\theta(r, t)$ jest nieliniową funkcją względem $r \in [a, b]$.

W chwili t_p funkcja ta zmienia się skokowo. W czasie trwania procesu deformacji $t \in (t_p, t_k]$ temperatura rurociągu dalej rośnie. Ciśnienie płynu $p/t/$ w chwili t_p jest funkcją nieciągłą.

Proces złożony z trzech opisanych procesów można sobie wyobrazić dla rurociągu, w którym płyną gazy będące produktami wybuchowego lub detonacyjnego spalania materiałów wysokoenergetycznych /np. nitrogliceryny lub prochów nitroglicerynowych/.

Proces Nr 2 jest najbardziej odpowiedni do opisu reakcji rurociągu w czasie pierwszego wybuchu.

Rura grubościenna przed wybuchem nie jest ogrzewana a temperatura $\theta/r, t/$ jest równa temperaturze otoczenia. Przyjmijmy, że wybuchy powtarzają się z dużą częstotliwością, to znaczy okres czasu, kiedy gaz w rurociągu nie płynie są porównywalne z czasem trwania procesu deformacji rury. Procesy Nr 1 i Nr 3 określają reakcję rury grubościennej w czasie następnych wybuchów, przy czym drugi z nich uwzględnia zmianę temperatury gazów w okresie $\tau = t_k - t_p$. Problem Nr 3 lepiej nadaje się do opisu takich procesów, dla których okres τ jest dostatecznie długi, tak aby zmiana θ w tym czasie miała znaczący wpływ na opis reakcji materiału. Temperatura $\theta(a, t)$ na brzegu $a/t/$ jest we wszystkich problemach (θ) , funkcją

$$/5.2/ \quad g(t) = \theta(a, t) = d_1 + d_2 + \exp(-td_3) + d_4,$$

gdzie $d_l \in \mathbb{R}$ dla $l = 1, 2, 3, 4$ są parametrami funkcji.

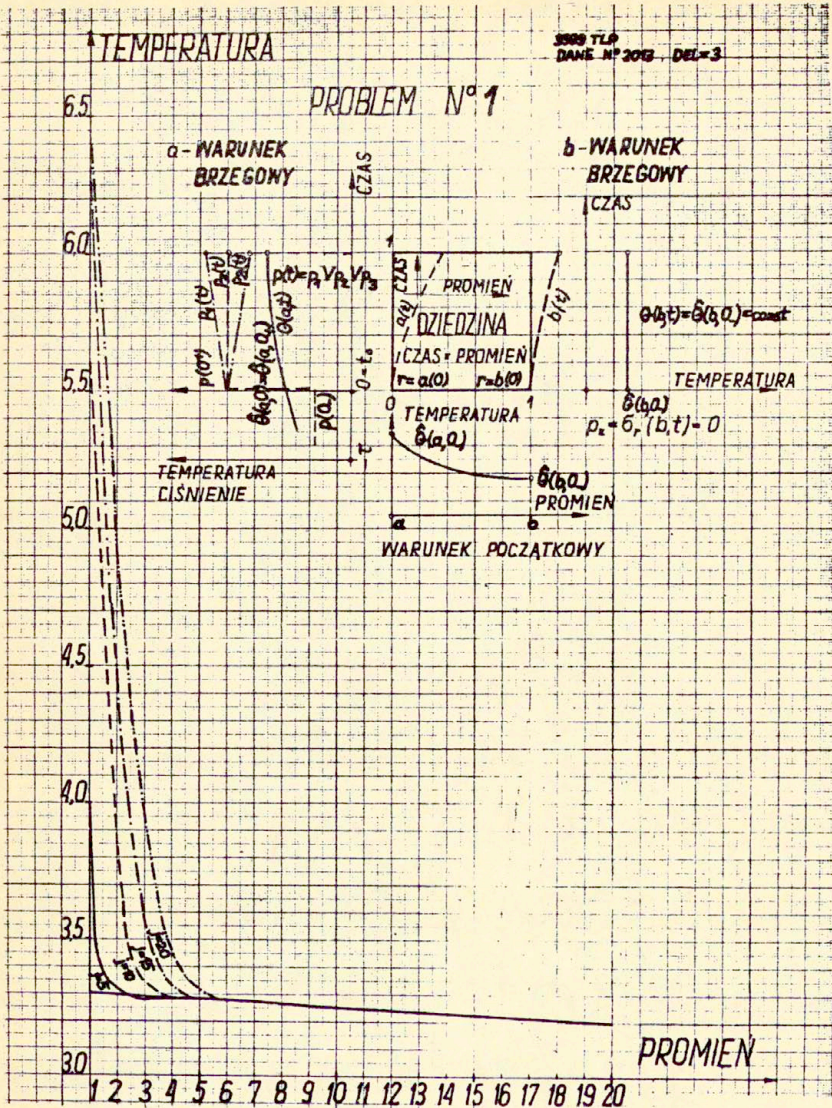
FUNKCJA TEMPERATURY

Zbadano wpływ współczynnika $del = \delta$ na grubość warstwy cieplnej i temperaturę w rurze grubościennej. Grubość warstwy cieplnej jest większa dla mniejszych wartości współczynnika del .

Wobec tego wielkość ta dla materiału z $del = 1$ jest większa niż dla materiałów opisywanych równaniem konstytutywnym z $del = 3$ lub 5. Grubość warstwy cieplnej w materiale jest liniowo zależna od wielkości funkcji $C/t/$, zwiększa się wraz ze wzrostem $C/t/$.

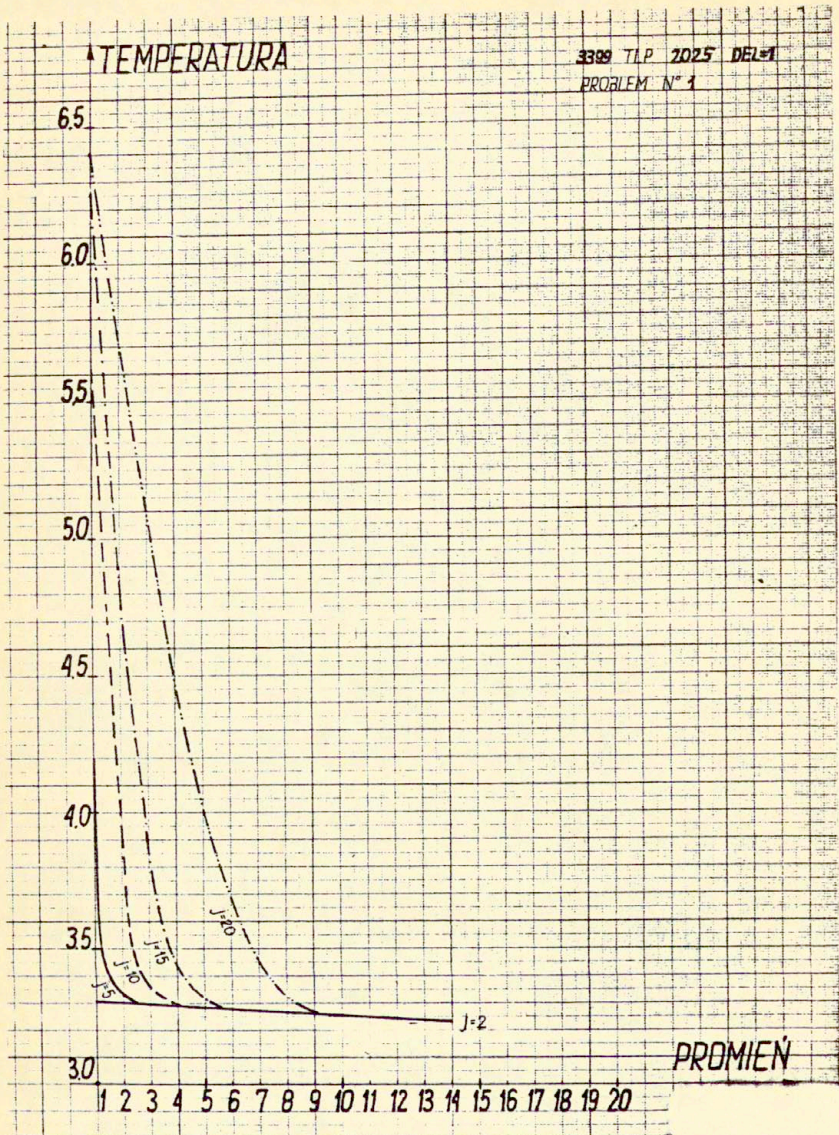
W rozwiązaniach trzech problemów (G) stwierdzono, że funkcja temperatury zmienia się pod względem jakościowym w warstwie cieplnej w ten sam sposób, niezależnie od warunków początkowych i brzegowych stawianych dla funkcji $\theta(r,t)$.

Temperatura $\theta(r,t)$ zmienia się ilościowo zależnie od del oraz typu problemu (G), co pokazano na rysunkach /5.1/, /5.2/, i /5.3/.



Rys. 5.1a

Wykresy temperatury $\theta(r, j)$ w wybranych chwilach czasu dla wartości współczynnika $\text{del} = 3$ w problemie Nr 1.



RYS. 5.1b

$\Theta(r, j)$ dla problemu Nr 1, gdy $del=1$.

TEMPERATURA

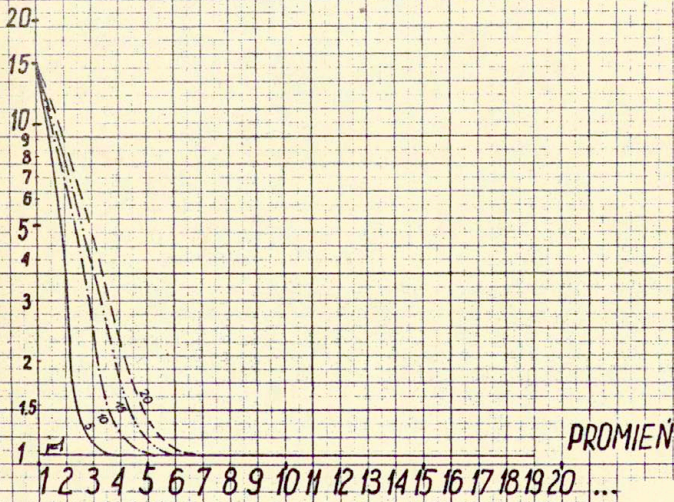
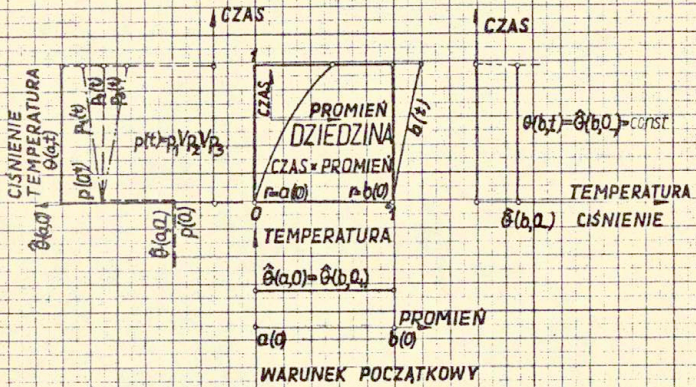
TLP 3399

DANE N° 2074; DEL=3;

PROBLEM N°2

a- WARUNEK BRZEGOWY

b- WARUNEK BRZEGOWY

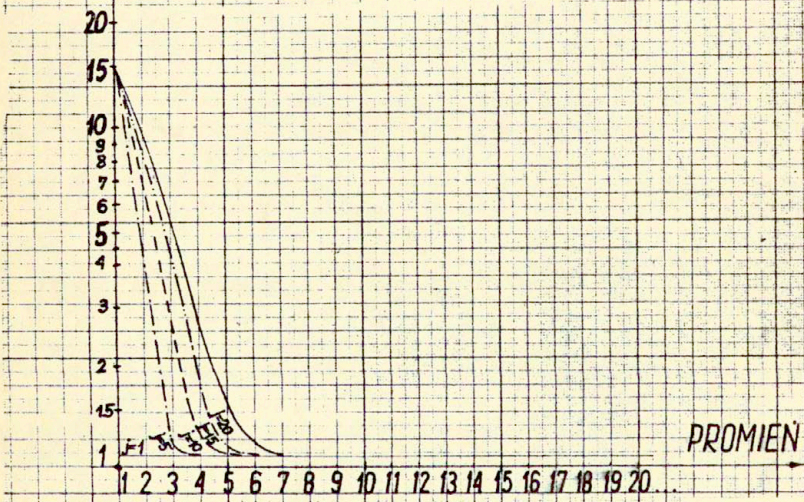


RYS. 5.2a

Temperatura $\theta(r, t)$ dla problemu Nr 2 i współczynnika $\text{del}=3$. Temperatura jest przedstawiona w skali logarytmicznej.

TEMPERATURA

TLP 3399 DANE 2026
DEP-1
PRZYPADEK 2



Rys. 5.2b

Temperatura $\Theta(r, j)$ dla $\sigma = 1$ w wybranych chwilach czasu j .

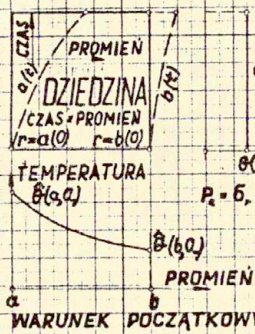
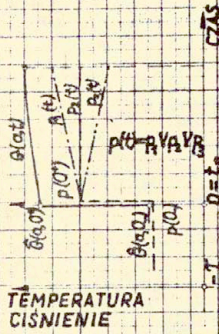
TEMPERATURA

3399 TLP
DANE: N° 2015 - DEL+3

PROBLEM N°3

α - WARUNEK
BRZEGOWY

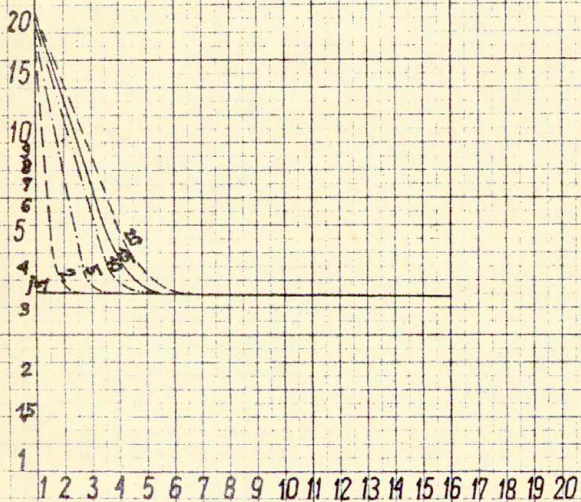
β - WARUNEK
BRZEGOWY



$\theta(b,t) = \theta(b,0) = \text{const}$
TEMPERATURA
CISNIENIE
 $P_e = \delta_r(b,t) = 0$

TEMPERATURA
CISNIENIE

α WARUNEK POCZĄTKOWY β PROMIEN



Rys. 5.3a

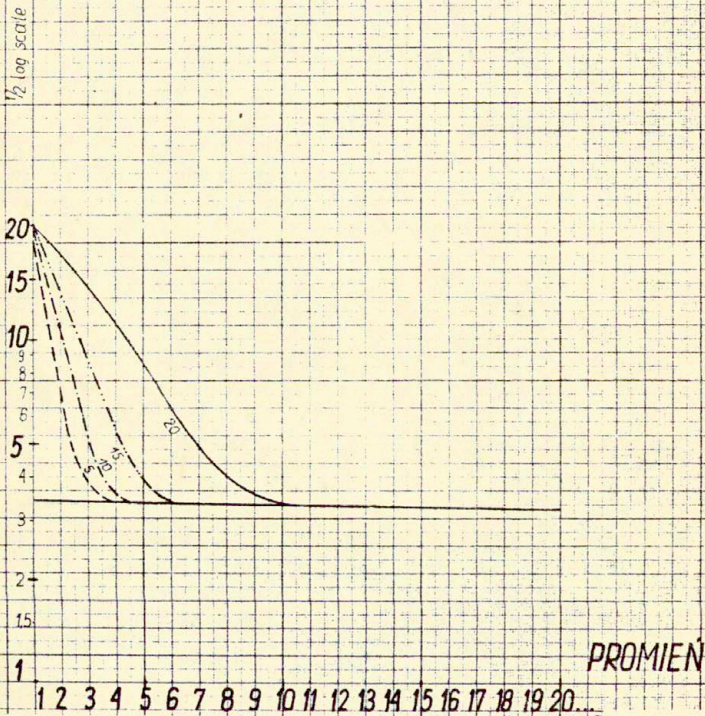
Wykresy temperatury $\theta(r,t)$ dla problemu Nr 3 i wartości współczynnika $\text{del} = 3$.

Temperatura jest przedstawiona w skali logarytmicznej.

TEMPERATURA

TLP 3399 DANE 2027

PROBLEM N° 3



Rys, 5.3b

Wykresy temperatury $\theta(r, j)$ dla problemu Nr3 i wartości współczynnika $\text{del}=1$. Temperatura jest przedstawiona w skali logarytmicznej.

FUNKCJA $C/t/ = y [1, j]$

Wykresy funkcji $C/t/ = y [1, j]$ przedstawiono na rys.5.4, 5.5 i 5.6. Porównanie funkcji $C/t/$ pod względem ilościowym i jakościowym dla różnych wartości współczynnika del i tego samego czasu trwania procesu przedstawiono na rysunkach /5.4/ i /5.6/. Większe wartości funkcji $C/t/$ otrzymuje się dla mniejszych współczynników del oraz dla wyższej temperatury $\theta(r, t)$.

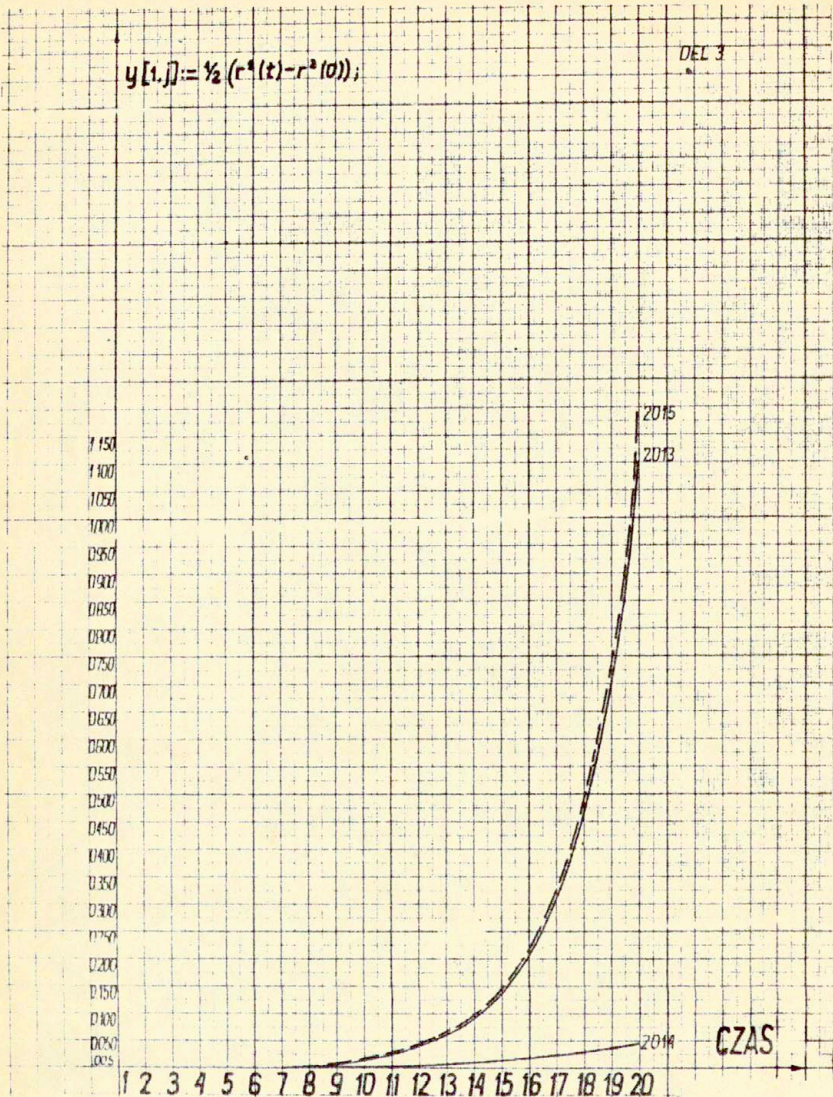
Zgodność i stabilność wyników otrzymywanych dla rozwiązania problemu (θ) z różną liczbą węzłów siatki można przedstawić jako wniosek z analizy wykresów na rysunku 5.5.

Wartości funkcji $C/t/$ dla problemu Nr 1 w chwili $t = t_k$ są równe: dla danych $3003 / \text{del} = 5 / C/t_k / \approx 10^{-2}$, dla danych $2016 / \text{del} = 3 / C/t_k / \approx 1$ i dla danych $2025 / \text{del} = 1 / C/t_k / \approx 10^2$

Wyniki te otrzymano przy tych samych wartościach funkcji brzegowych i początkowych dla temperatury i ciśnienia $p/t/$.

Na rysunkach 5.7, 5.8 i 5.9 przedstawiono wykresy zmian promieni rury $a/t/$ i $b/t/$ w zależności od parametru del oraz typu warunków początkowych i brzegowych w problemie przewodnictwa cieplnego.

Promienie $a/t/$ i $b/t/$ stają się większe dla wyższych temperatur i mniejszych wartości współczynnika $\text{del} = 1$ przy tych samych czasach procesu deformacji rury.

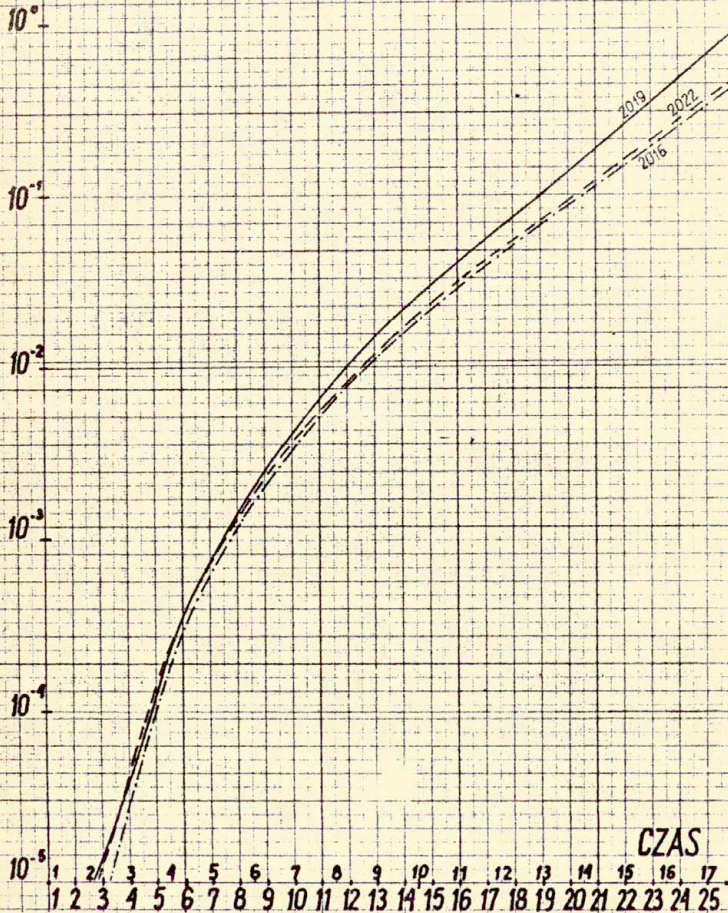


RYS. 5.4

Wykresy funkcji $C/t/ = y[1, j]$ dla trzech początkowo-brzegowych zagadnienia (Θ) . Dane 2013 odpowiadają problemowi Nr 1, dane 2014 są sporządzone dla problemu Nr 2 a dane 2015 określają problem Nr 3.

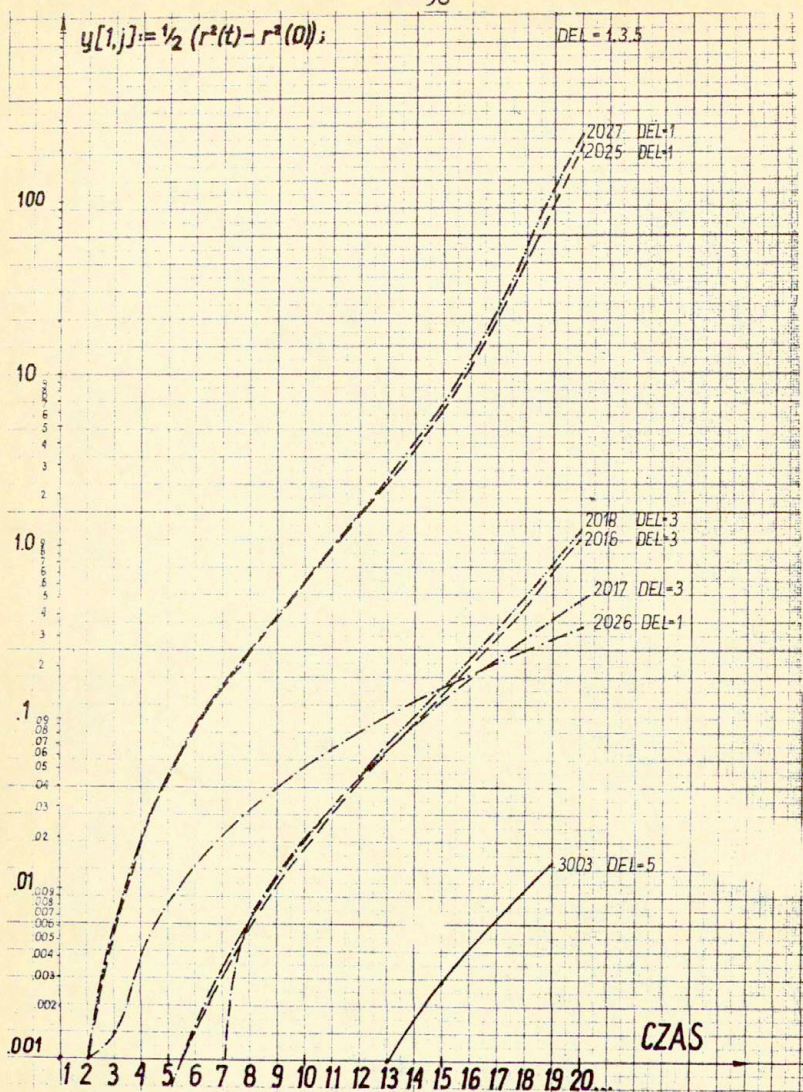
$$10^4 \cdot y[t, j] := \frac{1}{2} (r^2(t) - r^2(0));$$

DEL-3			
2019	2016	2022	Nr Dane
20x21	20x21	10x31	KxJ
0035	0025	0025	T-czas



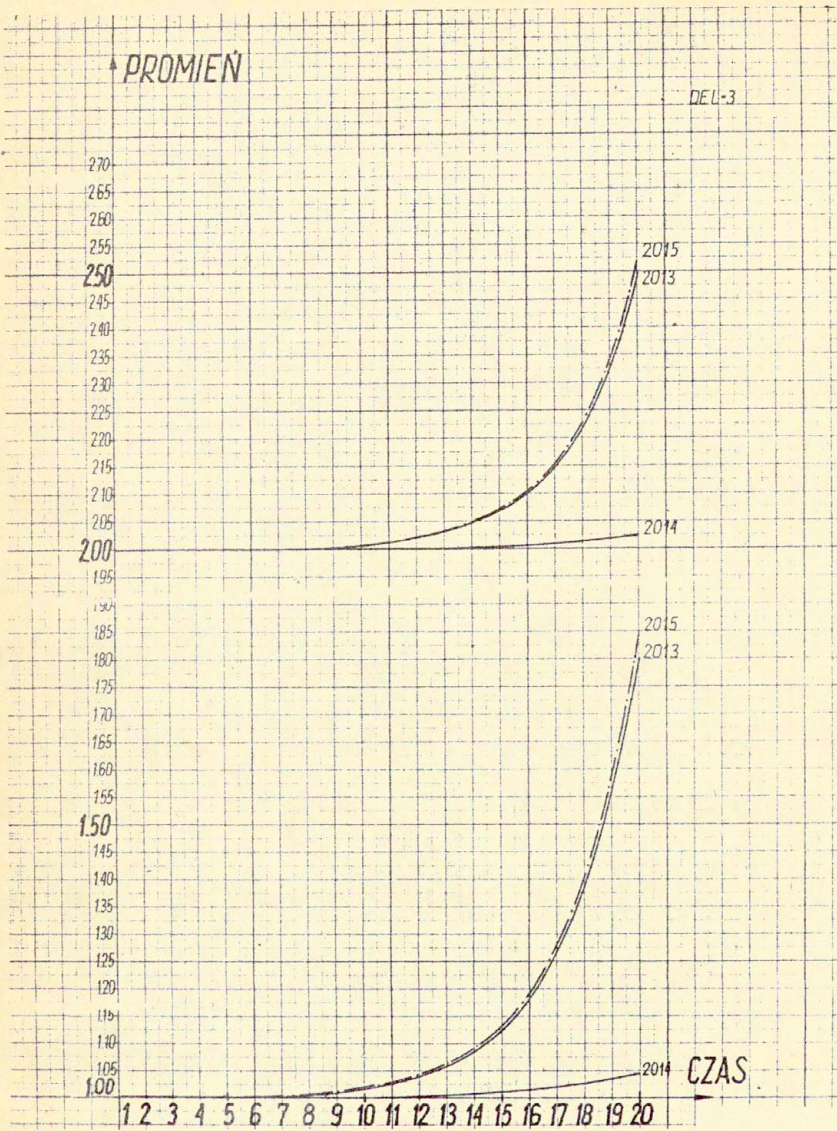
RYS. 5.5

Wykresy funkcji $C/t/ = y [1, j]$ w problemie Nr 1 dla różnych czasów trwania procesu deformacji i dla różnej ilości węzłów siatki dyskretyzacyjnej. Dane 2016, 2019, 2022, odpowiadają problemowi Nr 1.



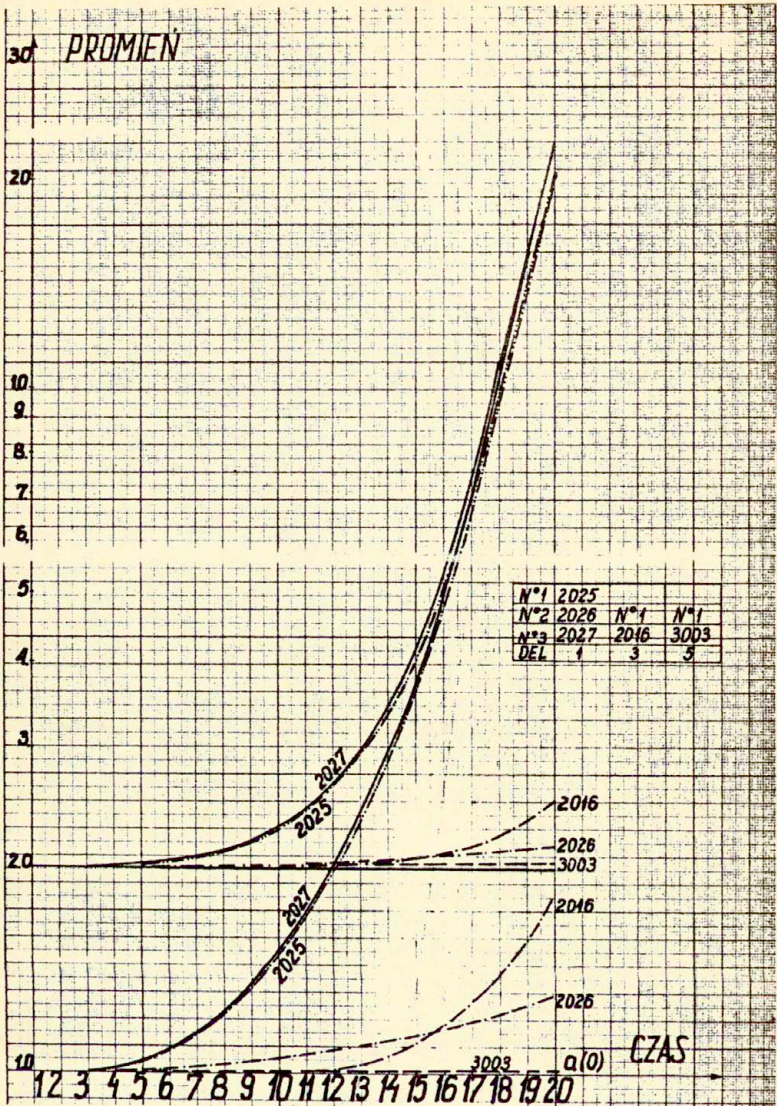
RYS. 5.6

Funkcja $C/t/ = y[1,j]$ określona dla: współczynników $del=1,3,5$, problemów z różnymi typami warunków początkowo-brzegowych oraz tego samego czasu trwania procesu deformacji rury. Dane 2016, 2025, 3003 odpowiadają problemowi Nr 1, problem Nr 2 rozwiązano dla danych 2017 i 2026. Dane 2018 i 2027 określają problem Nr 3. Funkcja $C/t/$ jest przedstawiona w skali logarytmicznej.



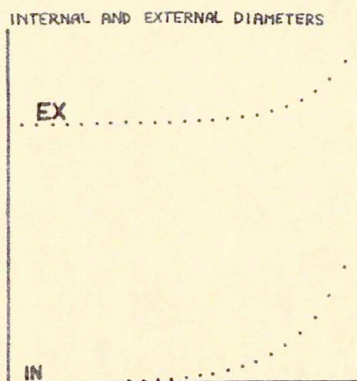
Rys. 5.7

Zmiany wymiarów rury grubościennej dla trzech procesów (a) i $\text{del}=3$. Promień wewnętrzny rury dla $t=t_p=0$ jest $a(0)=1$ a zewnętrzny $b(0)=2$.



RYS, 5.8.

Wykresy a/t/ i b/t/ dla różnych problemów termicznych
i współczynnika $\text{del} = 1, 3, 5$.



RYS. 5.9

Wykresy pokazujące zmiany promienia wewnętrznego $in = a(t)$ i zewnętrznego $ex = b(t)$ rury. Wykresy te fotografowano na ekranie monitora ekranowego maszyny cyfrowej.

NAPRĘŻENIE, ODKSZTAŁCENIE I GRANICA PLASTYCZNOŚCI

Naprężenie σ_{rr} i odkształcenie promieniowe ϵ_{rr} maleje dla większych temperatur.

Należy pamiętać, że największe wartości temperatury występują w problemie Nr 3 i są one niewiele większe od wartości w problemie Nr 1.

Naprężenie i odkształcenie promieniowe określone dla materiału lepkoplastycznego ze współczynnikiem $\delta = 1$ są mniejsze niż dla $\delta = 3$ i $\delta = 5$ w tych samych chwilach czasu i dla tej samej temperatury. Wykresy funkcji σ_{rr} i ϵ_{rr} pokazano na rysunkach 5.10, 5.11, 5.15a.

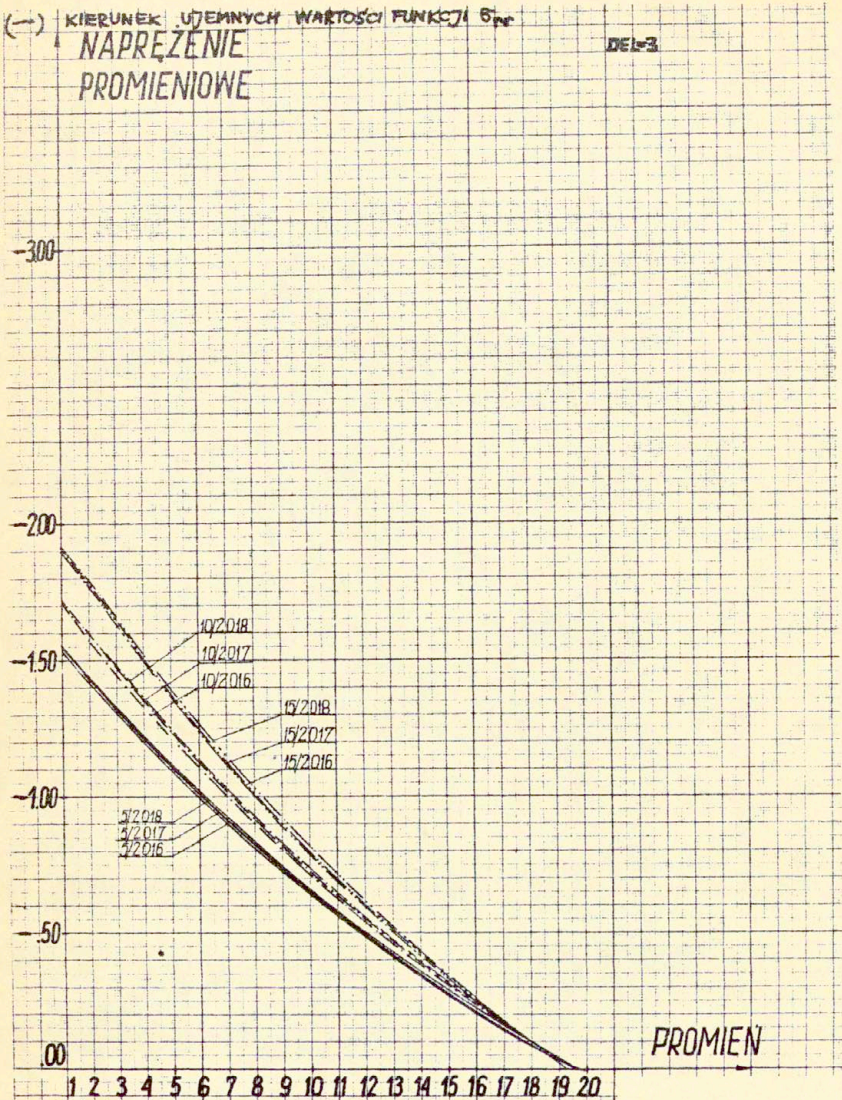
Naprężenie promieniowe $\sigma_{rr}(r, t)$ jest rosnącą funkcją promienia i nierosnącą funkcją czasu.

Naprężenie osiowe $\sigma_{zz}(r, t)$ i obwodowe $\sigma_{\theta\theta}(r, t)$ dla $\delta = 1$ są większe niż dla współczynnika $\delta = 3$ w tych samych problemach termicznych. Jest to wniosek wynikający z porównania wykresów przedstawionych na rysunkach 5.12a i 5.12b. Naprężenia σ_{zz} i $\sigma_{\theta\theta}$ są większe dla problemów termicznych, w których temperatura materiału jest większa /patrz rysunki 5.12 i 5.14/, ponadto są one rosnącymi funkcjami czasu i promienia, co można zauważyć na zdjęciach 5.13b i d oraz 5.16a i b.

Prędkość odkształcenia $v(r, t)$ jest malejącą funkcją promienia i rosnącą funkcją czasu /rys. 5.15b/.

Granica plastyczności $\kappa(r, t)$ jest malejącą funkcją promienia /rys. 5.17a/ i rosnącą funkcją czasu /rys. 5.17b/.

W problemie Nr 1 dla danych Nr 2025 z $\delta = 1$ granica plastyczności jest większa niż dla danych z innymi wartościami δ . Porównanie wielkości $\kappa(r, t)$ dla danych o różnych δ pokazano na rysunku 5.18.



RYS. 5.10.

Wykresy naprężenia promieniowego $\sigma_{rr}/t, j/$ trzech problemów termicznych w trzech wybranych chwilach czasu $j=5, 10, 15$.

(-), KIERUNEK UJEMNYCH WARTOŚCI FUNKCJI 6.

NAPRĘŻENIE
PROMIENIOWE

-3.5

-3

-2.5

-2

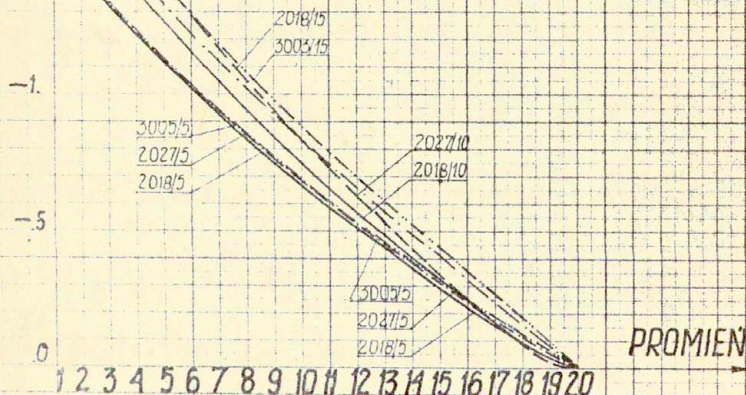
-1.5

-1

-0.5

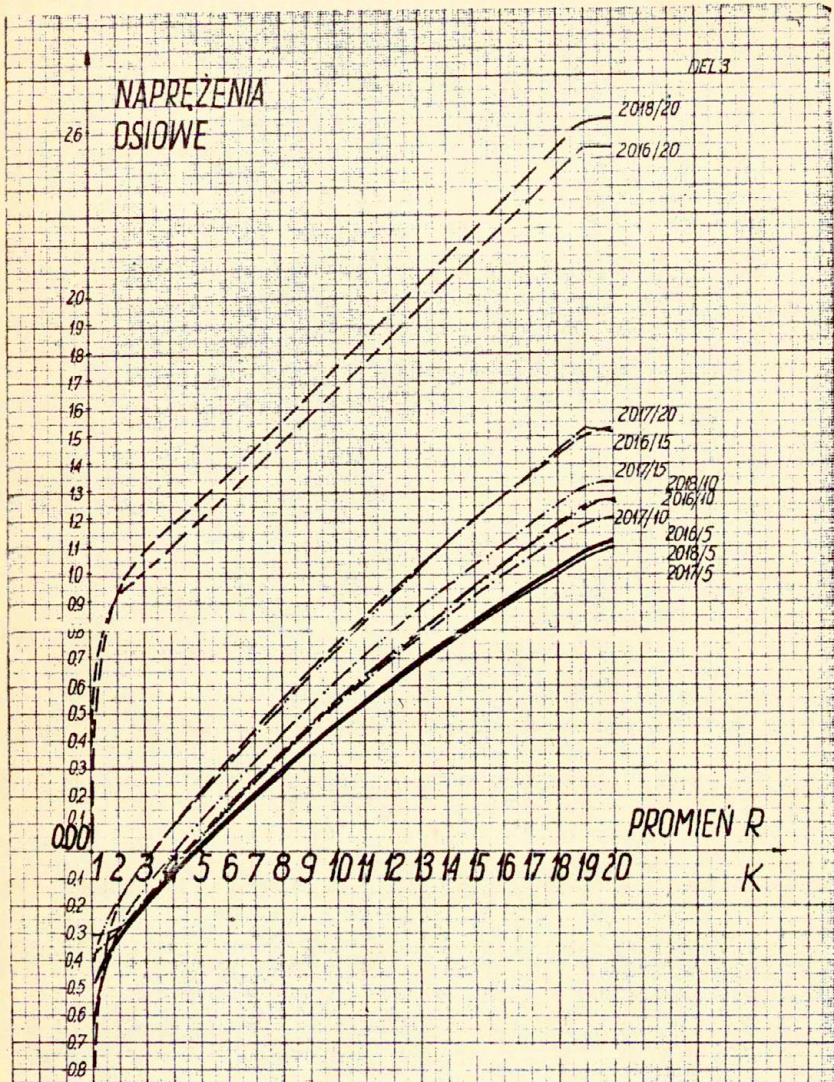
0

DEL=1 2027
DEL=3 2018
DEL=5 3003



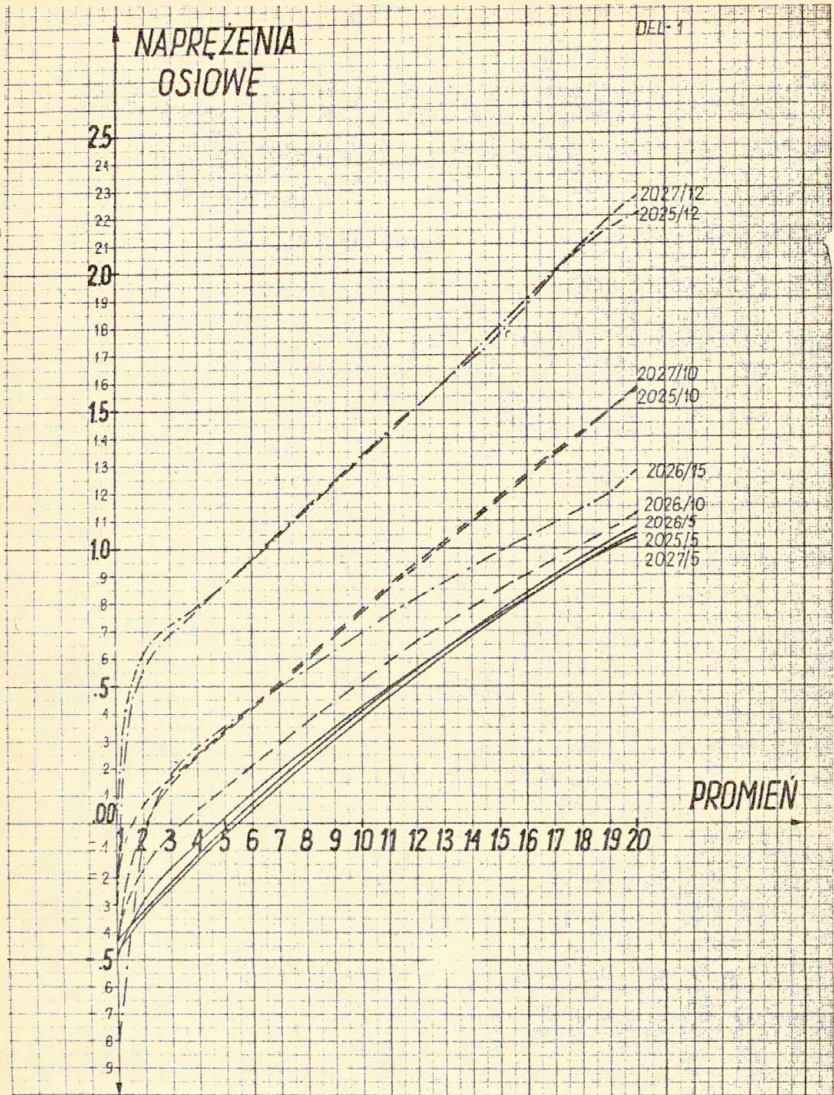
RYC. 5.11

Porównanie wartości naprężenia promieniowego obliczonego dla problemu Nr 3 dla danych 2027 i 2018 oraz naprężenia promieniowego określonego w rozwiązaniu problemu Nr 1 dla danych 3003. Wykresy przedstawiono dla chwili czasu $j = 5, 10, 15$.



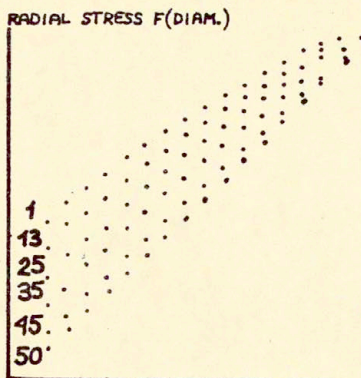
RYS. 5.12 a

Wykresy naprężenia osiowego $\sigma_{xx}/r, j$ dla różnych problemów przewodnictwa cieplnego oraz współczynnika $\text{del} = 3$ w wybranych chwilach czasu j .



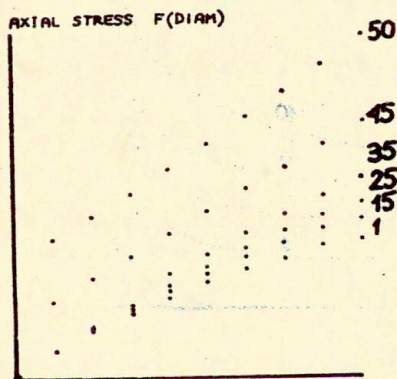
RYS. 5.12b

Wykresy naprężenia osiowego $\sigma_{zz}(r, j)$ dla różnych problemów przewodnictwa cieplnego oraz współczynnika $\text{del}=1$ w wybranych chwilach czasu j .



RYS. 5.13 a

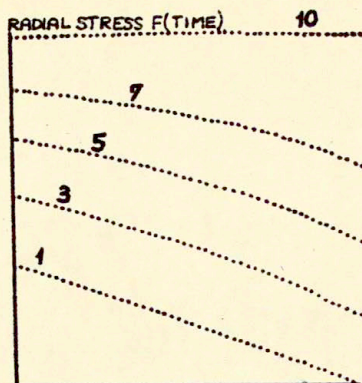
UWAGA 1. Na rysunkach 5.13 a i c zero układu współrzędnych naprężenie promieniowe - promień /lub czas/ jest umieszczone w lewym górnym rogu zdjęcia pod literą R.



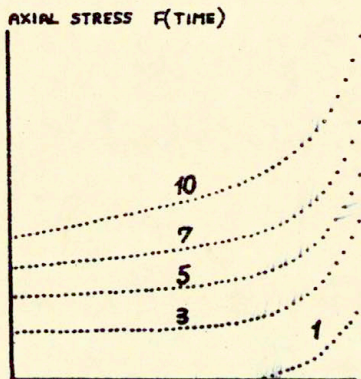
RYS. 5.13 b

UWAGA 2. Na rysunkach 5.13 b i d przedstawiono wykresy wartości bezwzględnej naprężenia osiowego

c.

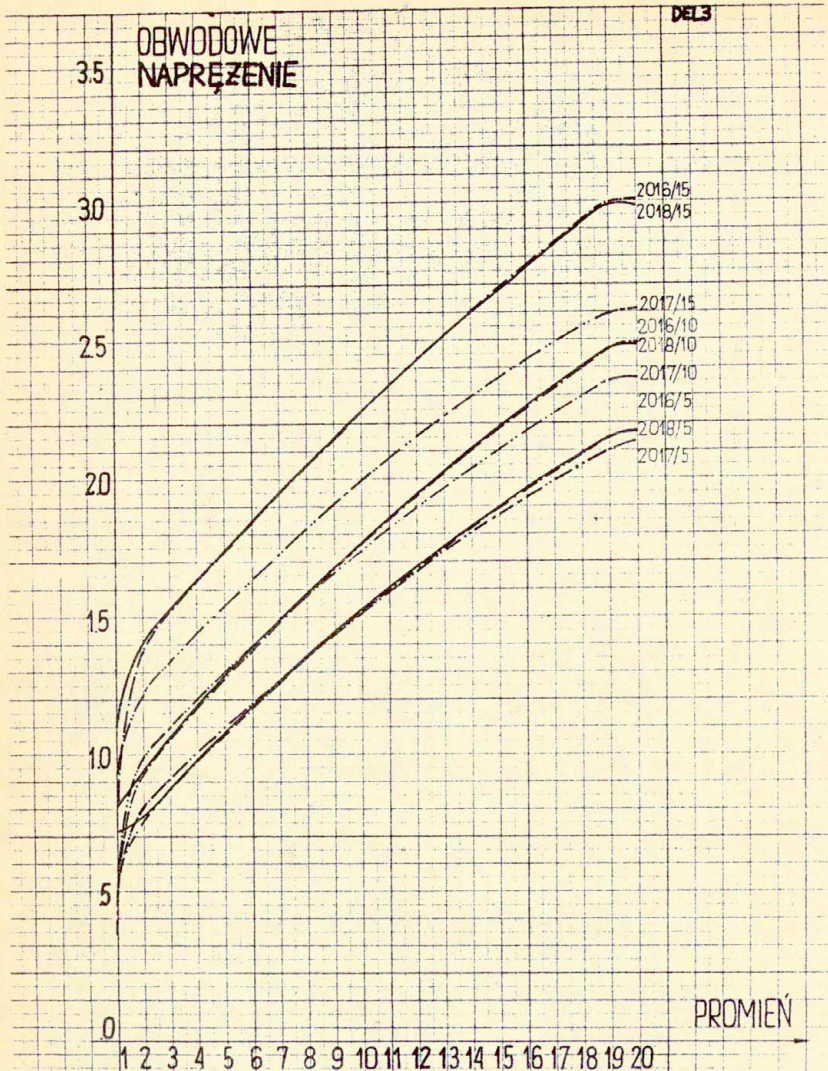


d.



RYS. 5.13 c i d

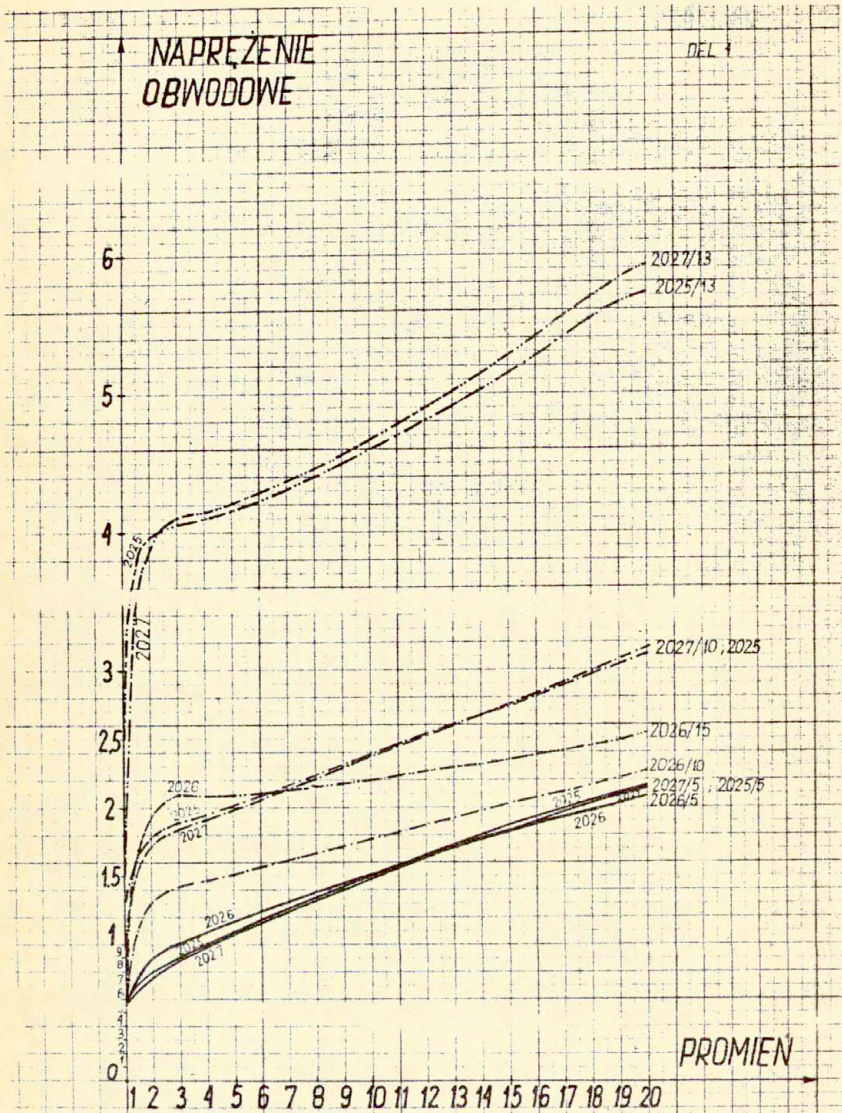
Wykresy naprężenia promieniowego i obwodowego: /a/ i /b/ naprężenie promieniowe i osiowe przedstawiono jako wykresy funkcji zależnych od promienia r dla różnych chwil czasu t , /c/i/d/ naprężenie promieniowe i osiowe pokazano jako wykresy funkcji czasu t w wybranych miejscach na zmiennej r .



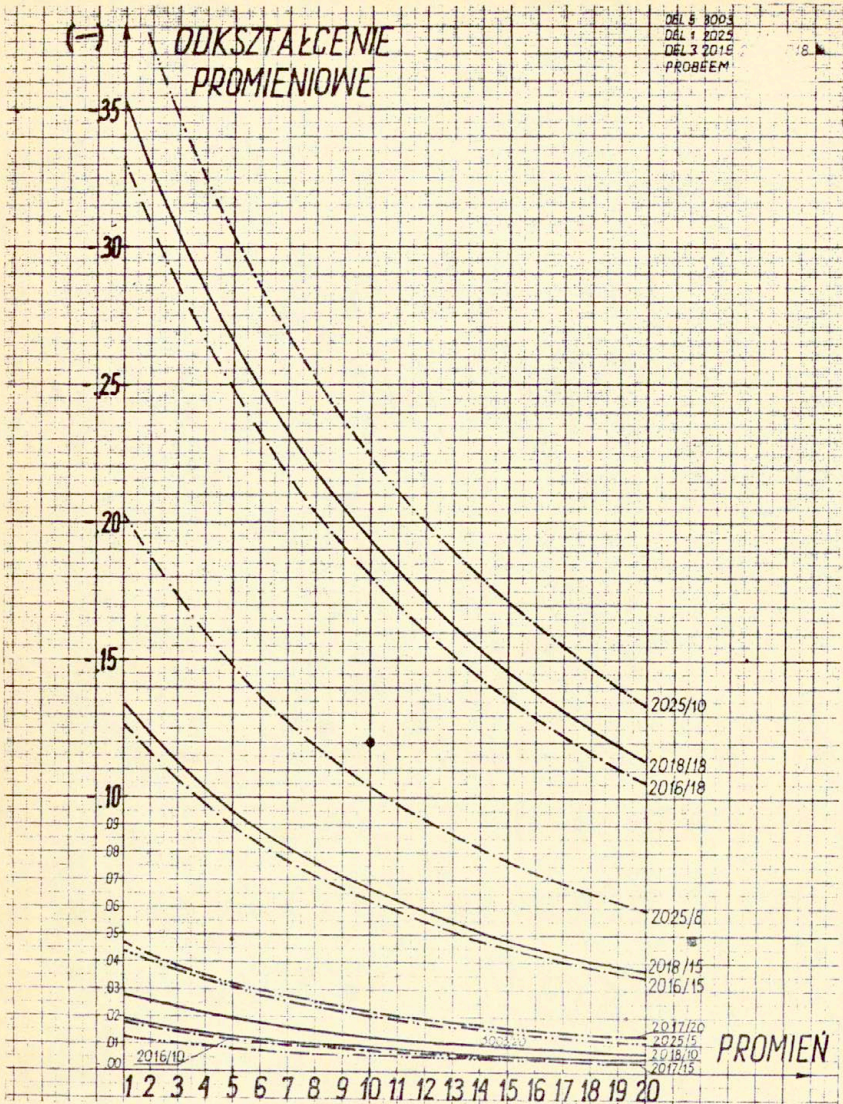
RYS. 5.14 a i b

Napężenie obwodowe $\sigma_{\theta\theta}$ /r, j/ dla wybranych chwil czasu $j \in [1, J]$ i trzech problemów termicznych oraz współczynników $\text{del} = 1, 3$.

DANE: 2016 i 2025 określają problem Nr 1, 2017 i 2026 wybrano dla problemu Nr 2, 2018 i 2027 są odpowiednie dla problemu Nr 3

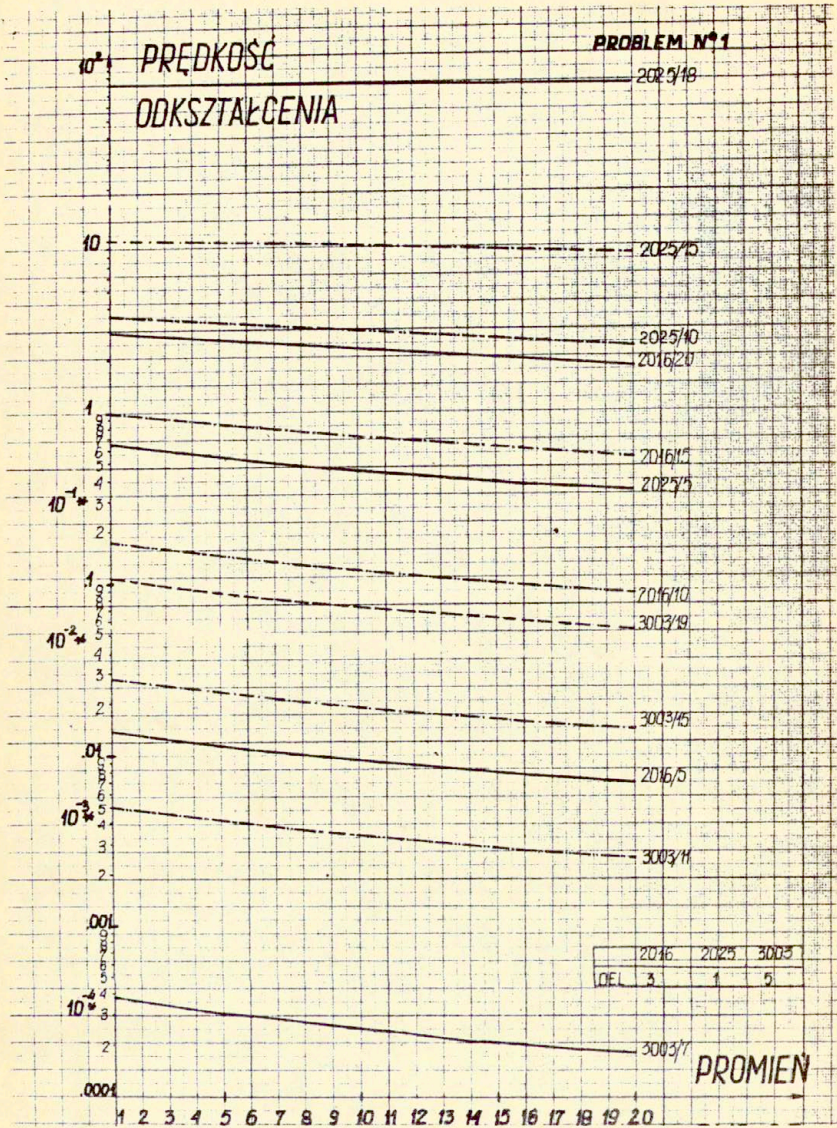


RYS. 5.14 b

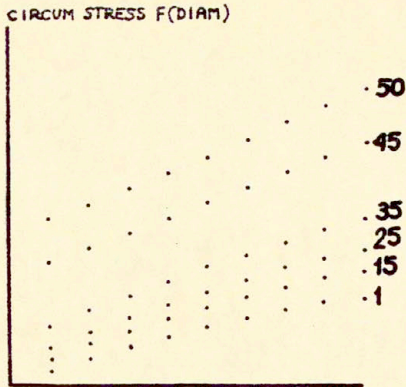


RYS. 5.15 a i b.

Prędkość i odkształcenie promieniowe $\dot{\epsilon}_{rr}$ /r, j/ dla wybranych chwil czasu j. Porównanie prędkości odkształcenia dla różnych wartości współczynnika del = 1,3,5, dla problemu Nr 1 pokazano na rysunku /b/.

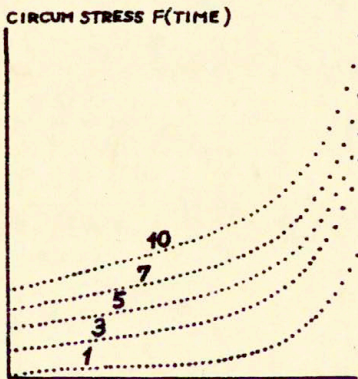


RYS. 5.15 b



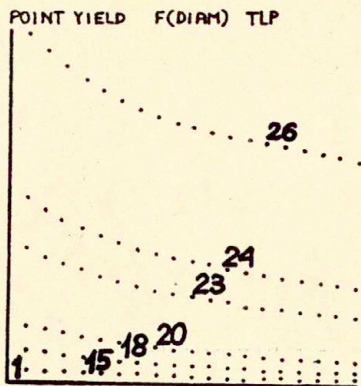
RYS. 5.16 a

Napężenie obwodowe $\sigma_{\theta\theta}/r, j/$ dla wybranych chwil czasu j .



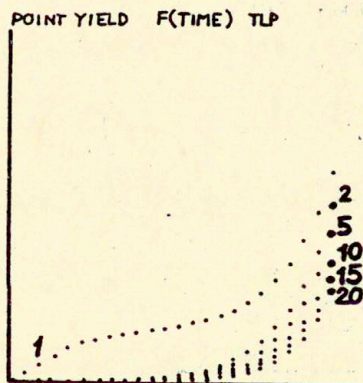
RYS. 5.16 b

Napężenie obwodowe $\sigma_{\theta\theta}/k, t/$ dla wybranych promieni k rury grubościenniej.



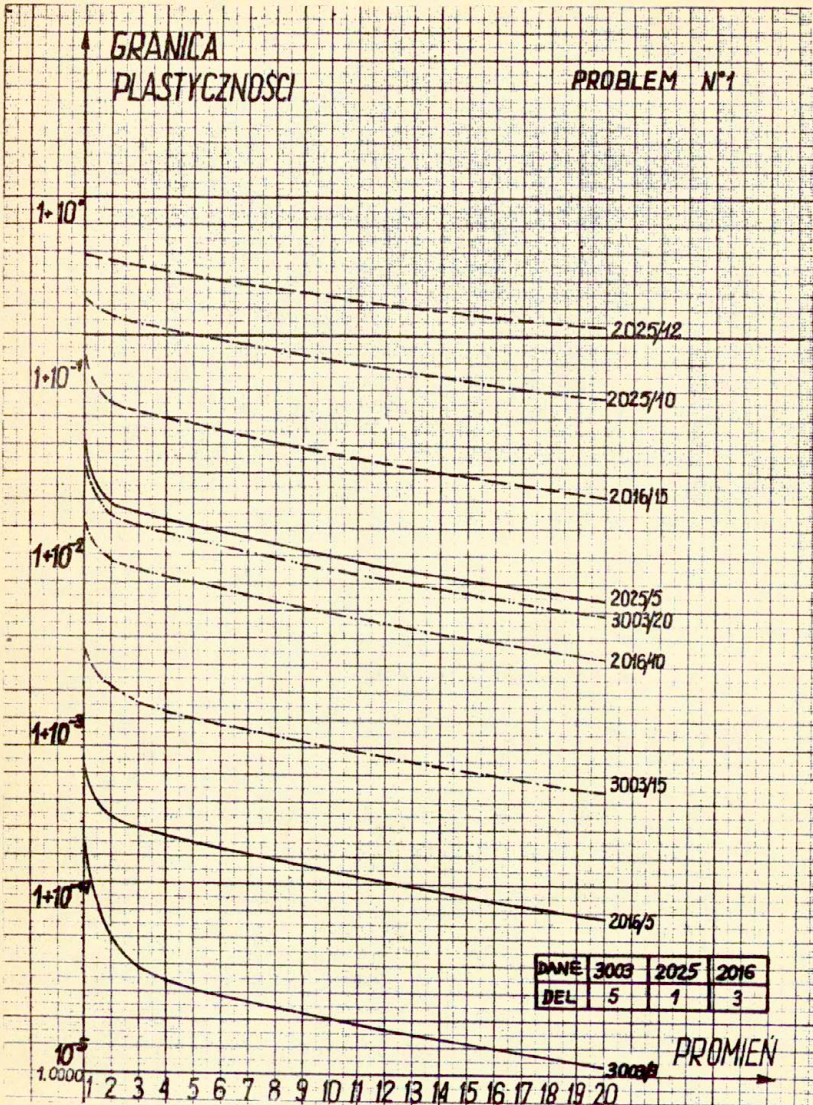
RYS. 5.17 a

Granica plastyczności $\sigma / r, j/$ dla wybranych chwil czasu j .



RYS. 5.17 b

Granica plastyczności $\sigma / k, t/$ dla wybranych promieni k rury grubościenniejszej.



RYS. 5.18

Granica plastyczności $\sigma/r, j/$ dla wybranych chwil czasu j oraz dla różnych wartości współczynnika $\text{del} = 1, 3, 5$.
 Funkcja $\sigma/r, j/$ jest przedstawiona w skali półlogarytmicznej.

5.2. ROZWIĄZANIE PROBLEMU /W/.

Porównamy rezultaty otrzymane z rozwiązania problemu/W/ z wynikami rozwiązania zagadnienia (G). Funkcja C/t/ w procesie deformacji /W/ zmienia się w ten sam sposób jak funkcja C/t/ określona w problemie Nr 1 typu (G). W obydwu przypadkach C/t/ przyjmuje wartości tego samego rzędu.

Dane do rozwiązania problemu typu (G) były tak dobrane, aby temperatura w rurze była stała w czasie całego procesu, $\Theta(r,t) = \text{const.}, t \in [t_p, t_k], r \in [a(t), b(t)]$.

Wartości C/t/ dla dłuższych czasów trwania procesu $\tau = t_k - t_p$ są większe niż dla procesów o krótszym czasie τ . Funkcja C/t/ przy tym samym ciśnieniu p/t/ i czasie τ przyjmuje większe wartości dla materiałów ze współczynnikiem $\delta = 1$ niż dla materiałów z $\delta = 3$ lub $\delta = 5$ /patrz rysunki 5.19 i 5.20/.

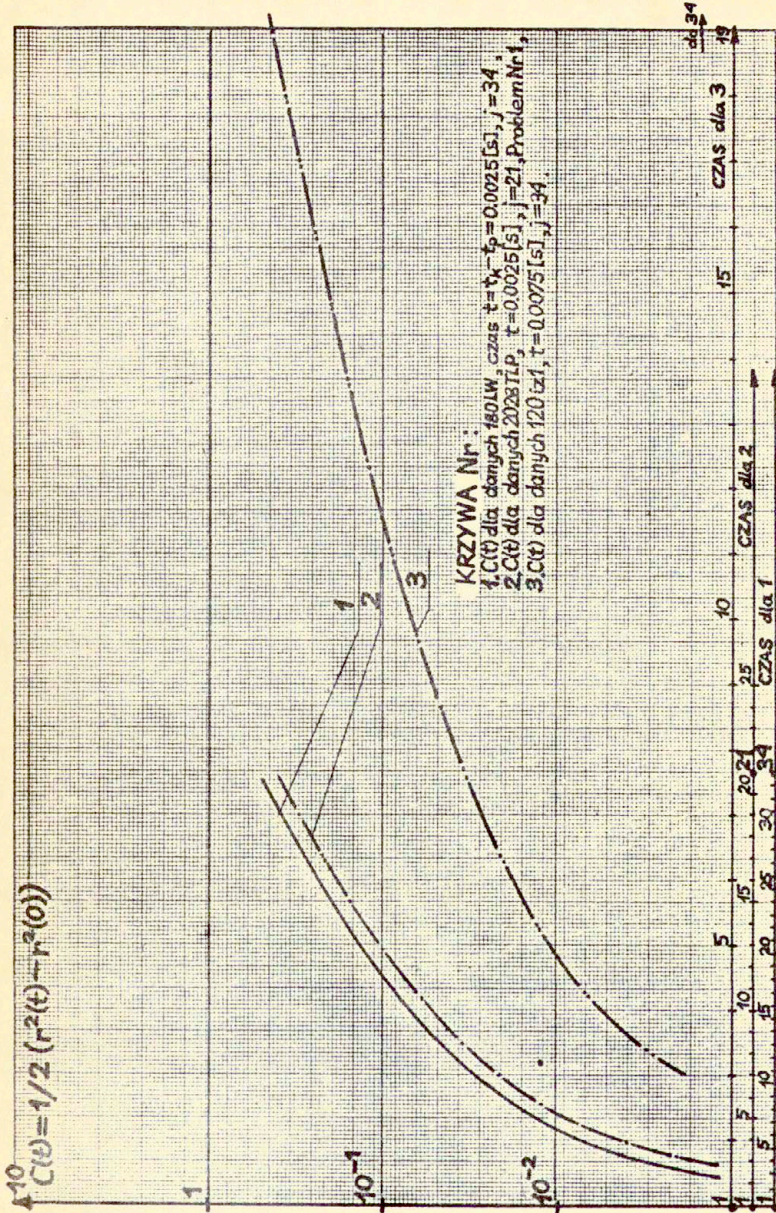
Naprężenie i odkształcenie określone w zagadnieniu /W/ są ilościowo i jakościowo zgodne z rezultatami w problemie (G). Naprężenia i odkształcenia promieniowe są malejącymi funkcjami czasu i rosnącymi funkcjami promienia. Funkcja naprężenia spełnia warunek $\sigma_r(b(t), t) = 0$ dla $t \in [t_p, t_k]$.

Wykresy funkcji naprężenia i odkształcenia przedstawione są na rysunkach /5.21/ i /5.22/.

Porównanie wykresów granicy plastyczności dla problemów (G) i /W/ zaprezentowano na rysunku /5.23/. Wartości granicy plastyczności znacznie różnią się od siebie dla początkowego etapu procesu, kiedy granica plastyczności dla danych LW 180 jest mniejsza od $1 + 10^{-2}$.

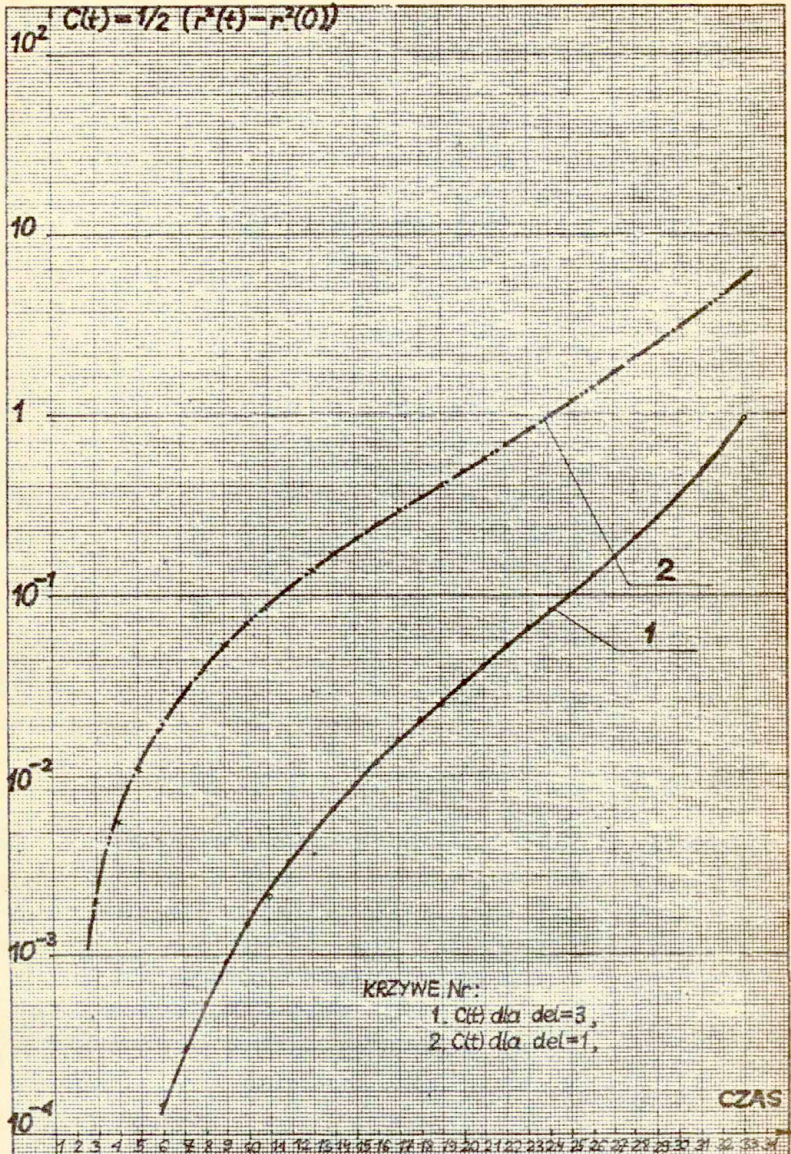
Różnice ilościowe i jakościowe między granicą plastyczności dla (G) i /W/ występują ze względu na wpływ funkcji lepkości $\gamma(\Theta; t)$.

Problem /W/ jest matematycznym modelem procesów odkształcenia, zachodzących w grubościennej rurze pod działaniem ciśnienia p/t/, które w chwili początkowej zmienia się skokowo $p(t_p^+) > p(t_p^-)$ i ponadto dla $t_1, t_2 \in [t_p, t_k], t_2 > t_1$ ma własność taką, że $p(t_2) \gg p(t_1) \forall p(t_1) \gg p(t_2)$.



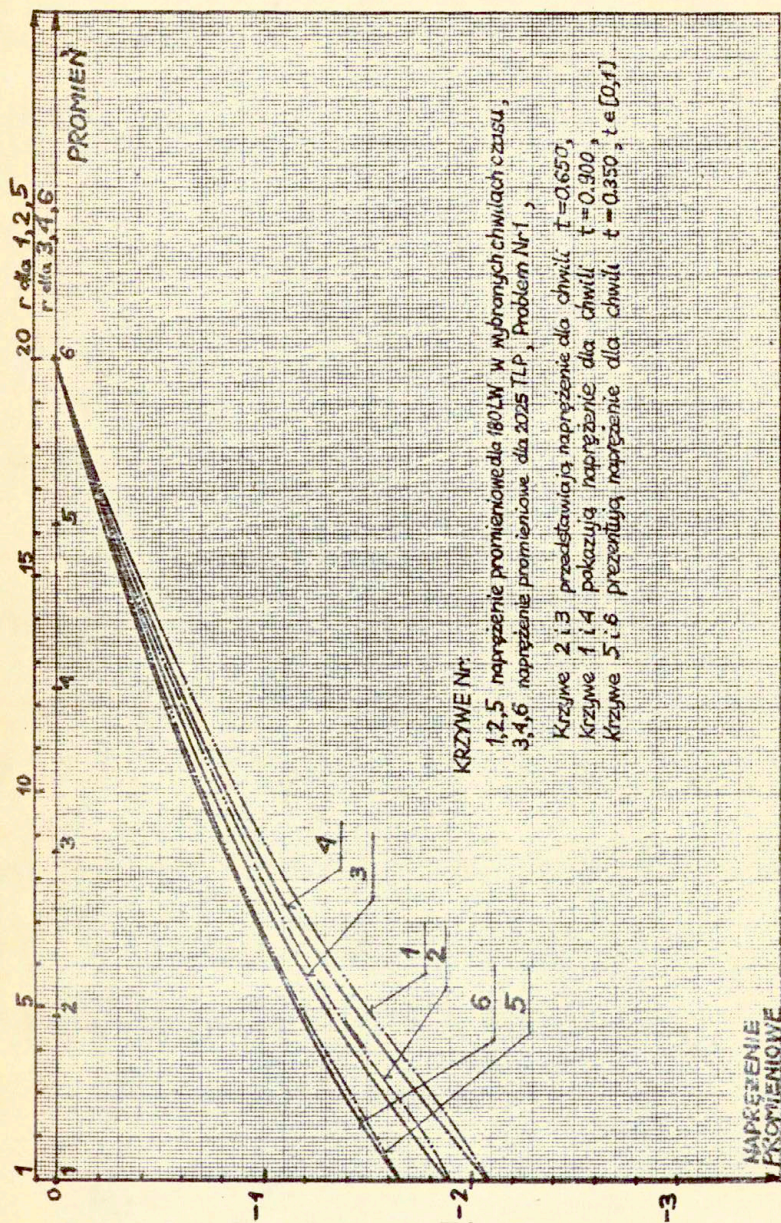
RYS. 5.19

Porównanie funkcji C/t dla różnych czasów t trwania procesu deformacji, $del = 1$.



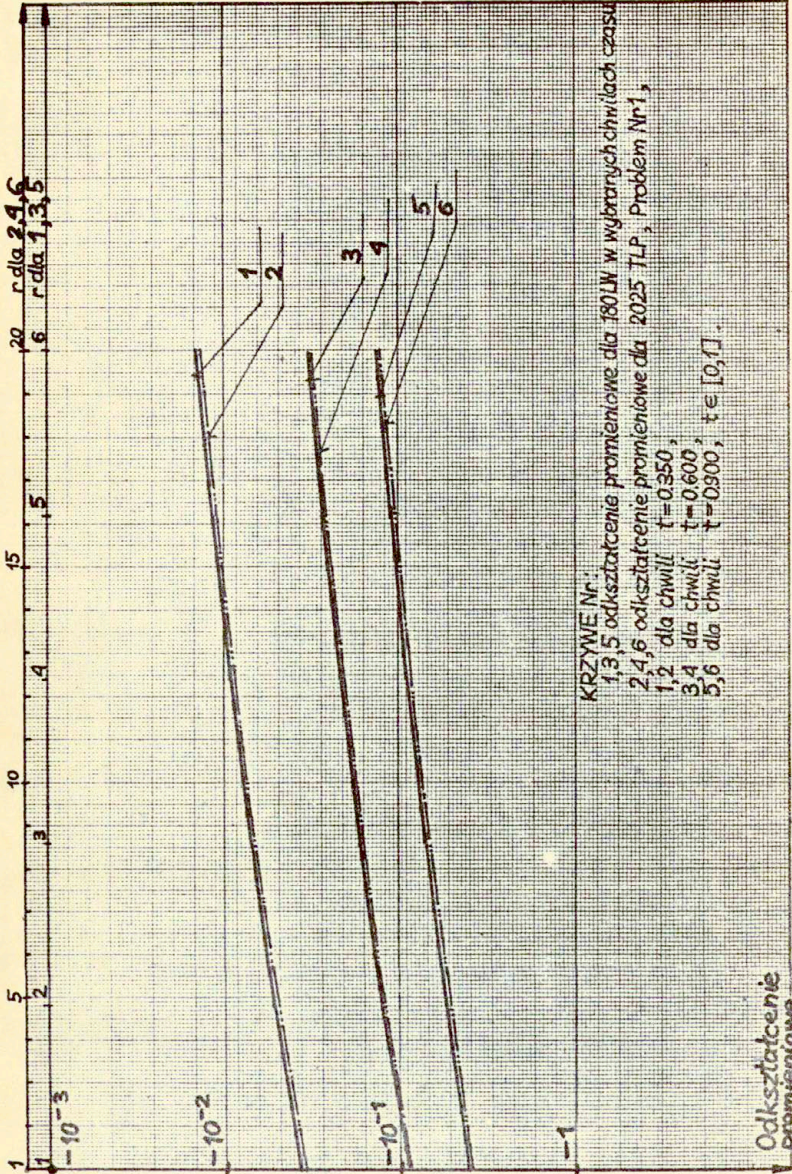
RYS. 5.20

Funkcja $C(t)$ dla materiału lepkoplastycznego ze wzmocnieniem izotropowym. Dane numer 120 *iz1* / $\text{del} = 1$ / oraz 120 *iz2* / $\text{del} = 3$.



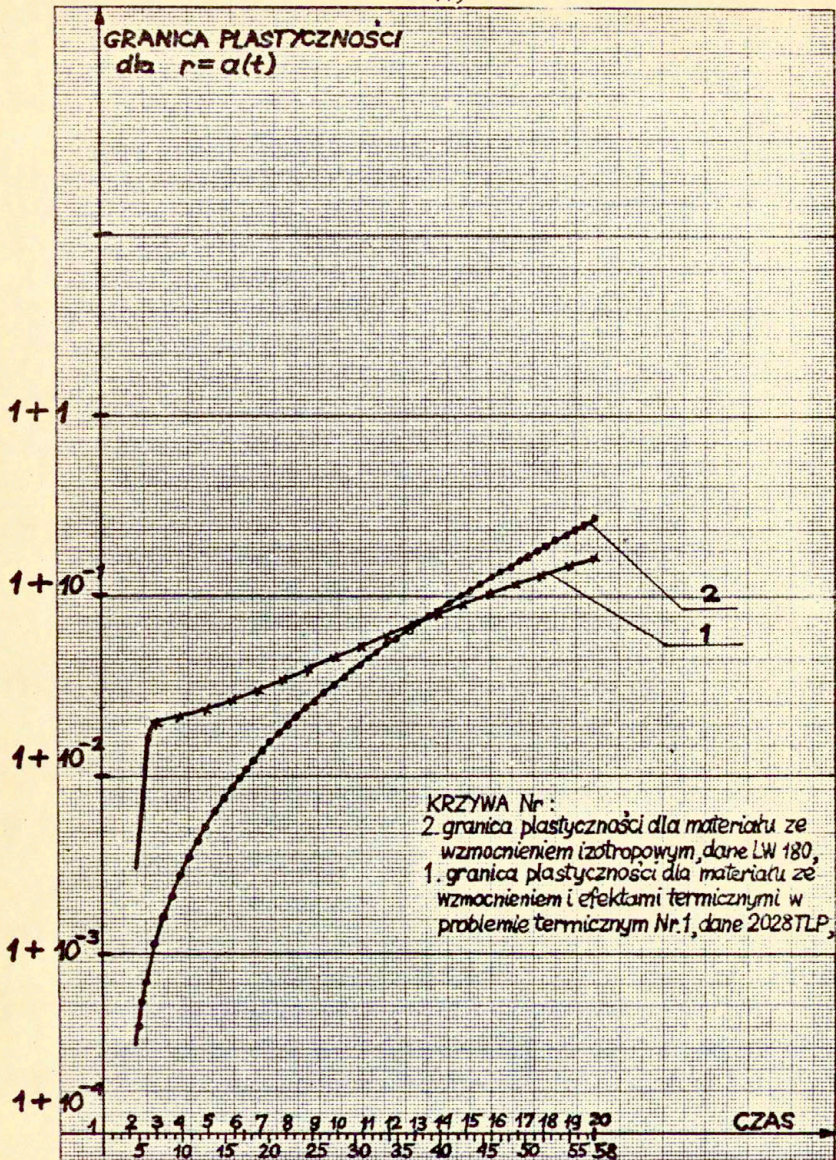
RYS. 5.21

Naprężenie promieniowe dla materiałów ze wzmocnieniem
 izotropowym dla wybranych chwil czasu.



rys. 5.22

Odkształtzenie promieniowe dla materiałów ze wzmożeniem izotropowym dla wybranych chwil czasu.



RYS. 5.23

Porównanie granicy plastyczności dla materiałów ze wzmocnieniem izotropowym dla $r = a/t$.

5.3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU /S/

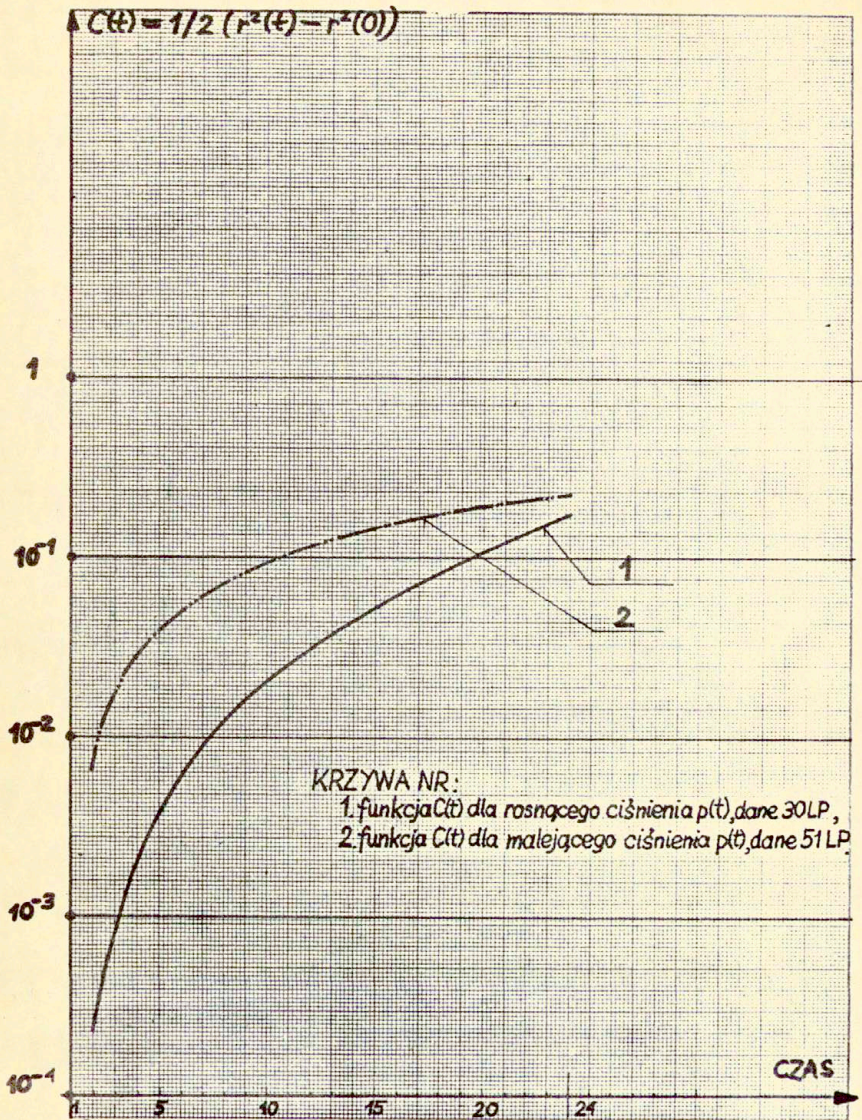
Przedstawimy rezultaty otrzymane z rozwiązania problemu /S/. Funkcja $C/t/$ daje pogląd na zmiany jakościowe i ilościowe odkształceń w zależności od modelu materiału lepkoplastycznego.

Naprężenie i odkształcenie zmieniają się jakościowo w ten sam sposób we wszystkich problemach /G/, /W/ i /S/. Zależność wielkości naprężenia i odkształcenia od wartości współczynnika δ w równaniu konstytutywnym z potęgową funkcją nadwyżki oraz od czasu trwania procesu deformacji jest tego samego rodzaju jak w zagadnieniach /G/ i /W/.

We wszystkich problemach wartości $C/t/$ zależą od tego, czy funkcja $p/t/$ opisująca ciśnienie jest malejącą czy też rosnącą funkcją czasu. Większe wartości $C/t/$ otrzymuje się dla przypadku, kiedy ciśnienie maleje od wartości największej p_{max} do wartości $p_{min} = 1.4 \sigma_0$, gdzie σ_0 jest statyczną granicą plastyczności w chwili t_p . Ciśnienie p_{max} jest parametrem rozwiązania.

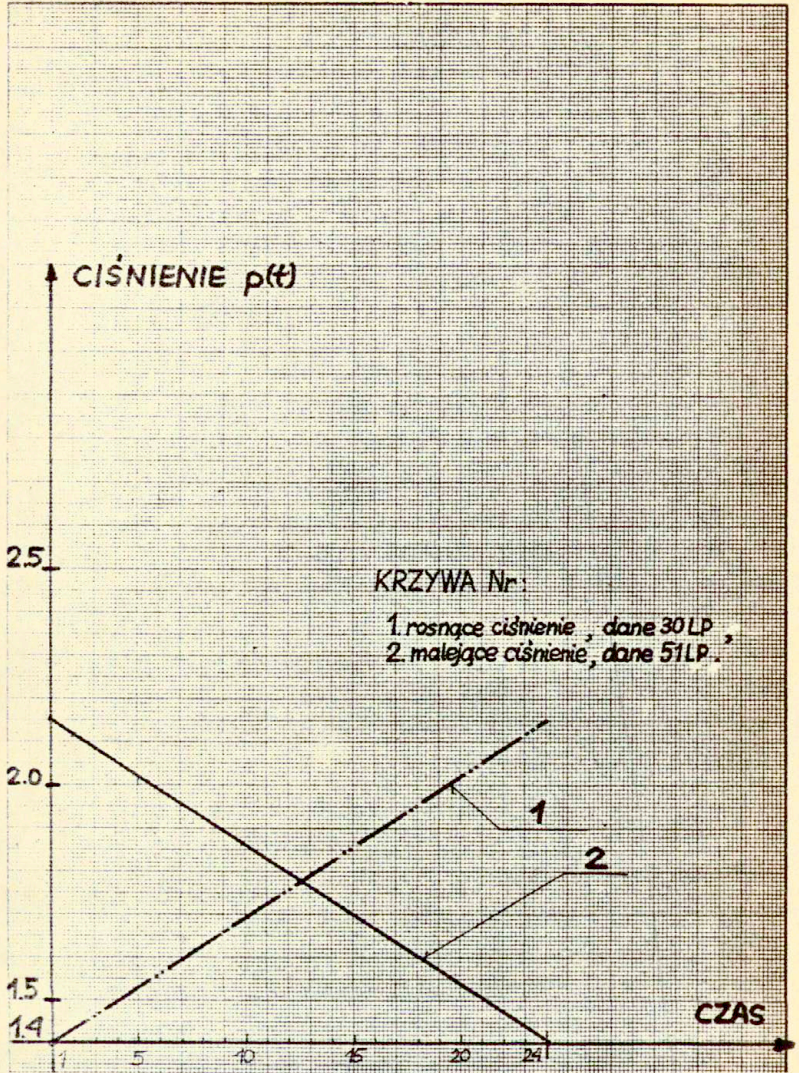
Rura grubościenna zarówno przy rosnącym jak i malejącym ciśnieniu $p/t/$ jest plastyczna w całym procesie deformacji.

Naprężenie promieniowe i obwodowe określone w rozwiązaniach problemów /W/ i /S/ porównano na wykresach /5.27/.



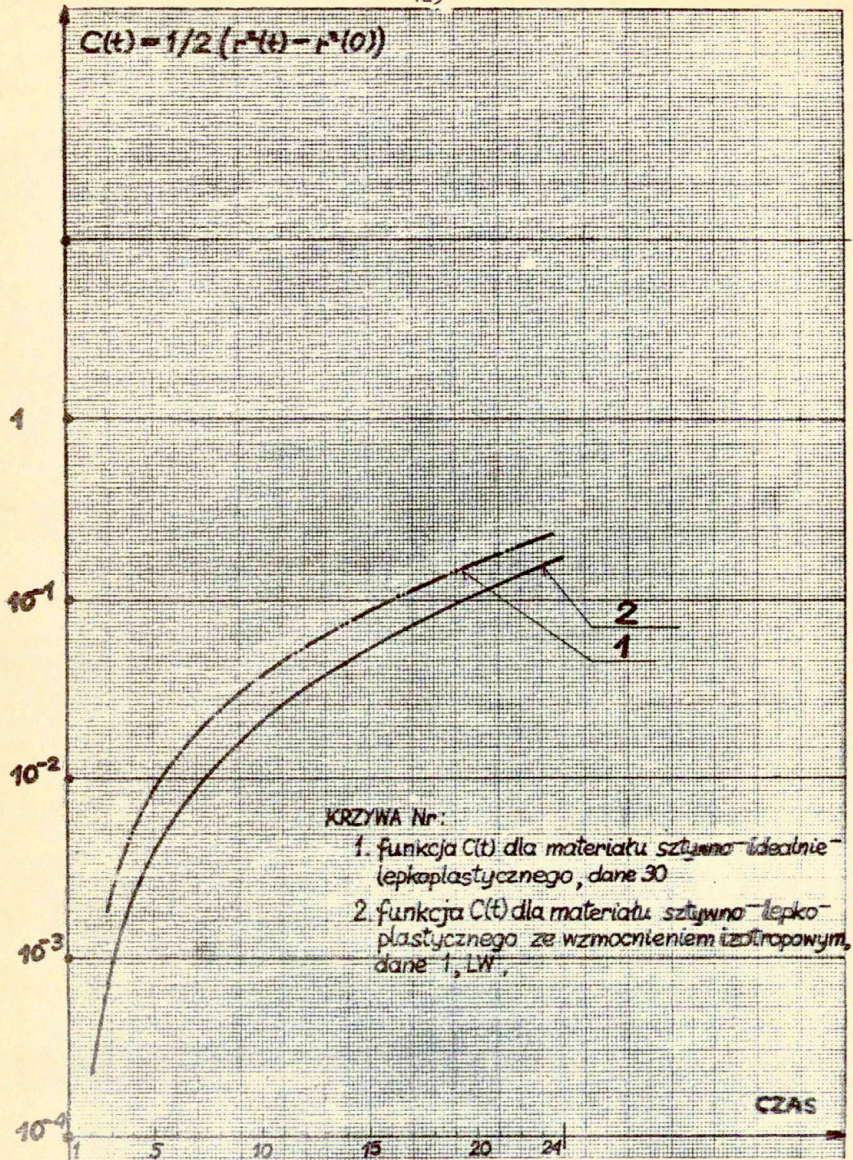
RYS. 5.24.

Porównanie funkcji C/t dla rosnącego i malejącego ciśnienia p/t .



RYS. 5.25

Ciśnienia rosnące i malejące, przy których obliczono wartości C/t przedstawione na rysunku 5.24.



RYS. 5.26

Wpływ wzmocnienia na wartości funkcji $C(t)$.

6.0 SPIS LITERATURY

1. APPLEBY E.J.
The dynamic viscoplastic expansion of a cylindrical tube, Transactions of the ASME, ser. E, J.Appl.Mech, 1964, 31, 654-658,
2. ANSELONE P.M. and LAURENT P.J.
A general method for the construction of interpolating or smoothing spline - functions, Numer.Math. 12, 1968,66+82,
3. AUBIN J.P.
Approximation of elliptic boundary - value problems, New York 1972, Wiley - Interscience,
4. ASCHER U.M.
A collocation method for parabolic and elliptic quasilinear problems an general domains, Ph.D. thesis, Dept. of Computer Information and Control Sci., Univ. of Minnesota, Minneapolis, MN, 1975,
5. ADAM Y.
A hermitian finite difference method for solution of parabolic equations, Comp. Math. Appl. 1, 1975, 393-406,
6. ADAM Y.
Highly accurate compact implicit methods and boundary conditions J.Comp.Phys., 24, 1977, 10+22,
7. BATDORF S.F. i BUDIANSKY B.
A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, NACA Technical Note April 1949, No 1971
8. BLAND D.R.
The generalized plane strain of an elasto-plastic material, ZAMP 1959, 10, 113-133,
9. BERTSCH P.K. i FINDLEY W.N.
An experimental study of subsequent yield surfaces, corners, normality, Bauschinger and allied effects, Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., ASME, 1962, 893,
10. BROWDER F.E.
Strongly nonlinear parabolic boundary value problems, Amer. J.Math., 86, 1964, 339-357,

11. BROWDER F.E.
Nonlinear equations of evolution, *Ann. Math.*, 80, 1964, 485-523,
12. BROWDER F.E.
Nonlinear initial value problems, *Ann. Math.*, 82, 1965, 51-87,
13. BROWDER F.E.
Nonlinear maximal monotone operators in Banach space, *Mathematische Annalen*, 175, 1968, 89-113,
14. BEJDA J.
Analysis of deformation in a short, visco-plastic cylinder striking a rigid target, *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences*, 1964, XII, 1964,
15. BALTOV A. and SAWCZUK A.
A rule of anisotropic hardening, *Acta Mechanica*, 1965, 1, 81,
16. BALTOV A.
The plane problem for elastic/visco-plastic bodies, *Arch. Mech.Stos.*, 1966, 18, 373-402,
17. BOBISUD L.E.
Oscillation of nonlinear differential equations with small nonlinear damping, *SIAM J.Appl. Math.*, 1970, 18, 74-76,
18. BURKOWSKI F.
Nonlinear oscillation of a second order sublinear functional differential equations, *SIAM J.Appl. Math.*, 1971, 21, 486-490,
19. BONNEROT R. and P.JAMET
A second order finite element method for the one-dimensional STEFAN problem, *Int. J. Num. Math. Engng.* 8, 1974, 811-820,
20. BREZZI

21. BONNEROT R. and JAMET P.
Numerical computation of the free boundary for the two-dimensional Stefan problem by space-time finite elements, *J.Comput. Phys.* 25, 1977, 163-181,

22. BAUER J. i IWANOW Z.
Zastosowanie schematów rekurencyjnych w analizie konstrukcji, *Mechanika i Komputer*, 1, 1978, 139-148,
23. CHIDDISTER J.L. and MALVERN L.E.
Compression - impact testing of aluminium at elevated temperatures, *Exper. Mech.*, 1963, 2, 81-90,
24. CRISTESCU N.
Dynamic plasticity, North-Holland Publ., Amsterdam, 1967,
25. CHIOU K.
Oscillation and nonoscillation theorems for second-order functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 1974, 45, 385-403,
26. COLTON D.
Integral operators and reflection principles for parabolic equations in one space variable, *J. Differential Equations*, 1974, 15, 551-559,
27. COLTON D.
Generalized reflection principles for parabolic equations in one space variable, *Duke Math. J.*, 1974, 41, 547-553,
28. COLTON D.
Complete families of solutions for parabolic equations with analytic coefficients, *SIAM, J. Math. Anal.*, 1975, 6, 937-947,
29. COLTON D.
The approximation of solutions to initial boundary value problems for parabolic equations in one space variable, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1976, 34, 377-386,
30. COLTON D.
Solution of boundary value problems by the method of integral operators, Pitman Publishing, London, San Francisco, Melbourne, 1976,
31. CANNON J.R. and HILL C.D.
Existence, uniqueness, stability and monotone dependence in a Stefan problem for the heat equation, *J. Math. Mech.*, 17, 1967, 1+20,
32. CHANTURIA T.A.
On singular solutions of strongly nonlinear systems of

- ordinary differential equations, in Research Notes in Mathematics No 8, 196-204,
33. CORMEBAU I.C.
Viscoplasticity and plasticity in the finite element method, University of Wales, Swansea 1976, murch,
34. DRUCKER O.C.
The significance of the criterion for additional plastic deformation of metals, Colloid Sci. /Rheology Issue/ 1949, 4, 299,
35. DRUCKER O.C. and EDELMAN F.
Some extensions of elementary plasticity theory, J.Franklin Inst., 1951, 251, 581,
36. DRUCKER O.C. and PRAGER W.
Soil mechanics and plastic analysis or limit design, Quart. Appl. Math., 1952, 10, 157-165,
37. DOUGLAS J. and DUPONT T.
A finite element collocation method for quasilinear parabolic equations, Math. Computation, 1973, 27, 17-28,
38. DOUGLAS J. and DUPONT T.
Galerkin methods for parabolic equations with nonlinear boundary conditions, Numer. Math., 1973, 20, 213-237,
39. DOUGLAS J. and DUPONT T.
Collocation methods for parabolic equations in a single space variable, Lecture Notes in Mathematics vol. 385 ed. by A.DOLD and B.ECKMANN, 1974,
40. DE BOOR C. and SWARTZ B.
Collocation at Gaussian points, SIAM J. Numer. Anal., 1973, 10, 582-606,
41. DE BOOR C.
Package for calculating with B - splines, SIAM J. Numer. Anal., 1977, 14, 441-472,
42. EISENBERG M.A. and PHILLIPS A.
On nonlinear kinematic hardening, Acta Mechanica, 1969, 5, 1-15,
43. ERUGIN N.P.
The book for reading in differential equations, Nauka i Technika, Mińsk 1972,

44. FICHERA G.
On unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order, *Boundary Problems in differential equations*, University of Wisconsin Press,
45. FRIEDMAN A.
Partial differential equations of parabolic type, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall 1964,
46. GRAMMATIKOPULOS M.K.
Oscillatory and asymptotic behaviour of differential equations with deviating arguments, *Hiroshima Math. J.*, 1976, 6, 31-53,
47. GRAEF J.R.
Oscillation, nonoscillation and growth of solutions of non-linear functional differential equations of arbitrary order, *J. Math. Anal. Appl.*, 1977, 60, 398-409,
48. GRAEF J.R. and SPIKES P.W.
Asymptotic properties of solutions of functional differential equations of arbitrary order, *J. Math. Anal. Appl.*, 1977, 60, 339-348,
49. GILMAN J.J.
Physical nature of plastic flow and fracture, *Plasticity, Proc. 2nd Symp. Naval Structural Mech.*, Brown University 1960, Ed.E.H.Lee and P.S.Symonds, Pergamon Press, New York 1960, 43-99,
50. HOHNEMSER K. and PRAGER W.
Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua, *ZAMM*, 1932, 12, 216-226,
51. HILL R.
Mathematical theory of plasticity, Oxford University Press, 1950,
52. HODGE P.G. and WHITE
A quantitative comparison of flow and deformation theories of plasticity, *J.Appl. Mech.*, 1950, 17, 180+184,
53. HODGE P.G.
The theory of piecewise linear isotropic plasticity, in "Deformation and flow of solids", ed. by R.GRAMMEL, Springer /Berlin/, 1955, 147,

54. HODGE P.G.
A general theory of piecewise linear plasticity based on shear, *J. Mech. Phys. Solids*, 1957, 5, 242,
55. HARTMAN P.
Ordinary differential equations, J. Wiley, Inc., New York, London, Sydney, 1964,
56. HICKS J.S. and J.WEI
Numerical solution of parabolic partial differential equations with two-point boundary conditions by use of the method of lines, *J. Association for Computing Machinery*, 1967, 14, 549-562,
57. HOSFORD W.F.
A generalized isotropic yield criterion, *J. Appl. Mech.*, 1972, 39, 607-609,
58. HINO Y.
On oscillation of the solution of second order functional differential equations, *Funkcial. Ekvac.* 1974, 17, 95-105,
59. HIRSH R.S.
Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique, *J. Comp. Phys.*, 1975, 19, 90-105,
60. HOUSTIS B.
A collocation method for systems of nonlinear ordinary differential equations, *J. Math. Anal. and Applications*, 1978, 62, 24-37,
61. ISHLINSKII A.Ju.
General theory of plasticity with linear strain hardening, *Ukr. Mat. Zhurnal*, 1954, 6, 314,
62. IVEY H.J.
Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminum alloys, *J. Mech. Eng. Sci.*, 1961, 3, 15,
63. JENKINS D.R.
Kinematic hardening in zinc-alloy tubes, *J. Appl. Mech.*, 1965, 32, 849,
64. JAMET P. and PARTER S.V.
Numerical methods for elliptic differential equations whose coefficients are singular on a portion of the

- boundary, SIAM J. Numer. Anal., 1967, 4, 131-146,
65. JAMET P.
Numerical methods and existence theorems for parabolic differential equations whose coefficients are singular on the boundary, Mathematics of Computation, 1968, 22, 721-743,
66. JAMET P.
Galerkin-type approximations which are discontinuous in time for parabolic equations in a variable domain, SIAM J. Numer. Anal., 1978, 15, 912-928,
67. KADASHEVICH Ju. I. and NOVOZHILOV W.W.
The theory of plasticity which takes into account residual microstresses, Prik. Mat. Mech., 1958, 22, 78,
68. KAMMASH T.B., MURCH S.A. and NAGHDI P.M.
The elastic-plastic cylinder subjected to radially distributed heat source, lateral pressure and axial force with application to nuclear reactor fuel elements, J.Mech. Phys. Solids, 1960, 8, 1-25,
69. KIGURADZE I.T.
The asymptotic properties of solutions of a nonlinear differential equation of Emden-Fowler type, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. mat. 1965, 29, 965-986,
70. KOHN J.J. and NIRENBERG L.
Degenerate elliptic-parabolic equations of second order, Comm. Pure. Appl. Math., 1967, 20, 797-872,
71. KOSTIN A.V.
The existence and behaviour of solutions that have asymptotes in the case of second order nonlinear equations, Differencialnye Uravnienija, 1970, 6, 2182-2192,
72. KARTSATOS A.G.
Maintenance of oscillations under the effect of a periodic forcing term, Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 33, 377-383,
73. LUDWIK P.
Über den Einfluss der Deformationgeschwindigkeit bei bleibenden Deformationen mit besonderer Berücksichtig-

- ung der Nachwirkungserscheinungen, Phys. Zeitschrift, 1909, 10, 411-417,
74. LIONS J.L.
Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouvertures non cylindriques, Ann. Inst. Fourier /Grenoble/, 1957, 7, 143-182,
75. MALVERN L.E.
The propagation of longitudinal waves of plastic deformation in a bar of material exhibiting a strain-rate effect, J. Appl. Mech., 1951, 18, 203-208,
76. MRÓZ Z.
On the description of anisotropic workhardening, J. Mech. Phys. Solids, 1967, 15, 163,
77. MIGNOT A.L.
Méthodes d'approximation des solutions de certains problèmes aux limites linéaires, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XL 1968,
78. MEYER G.H.
On a free interface problem for linear ordinary differential equations and the one-phase STEFAN problem, Numerische Mathematik, 1970, 16, 248-267,
79. MOSZYŃSKI K. i A.WAKULICZ
Approximation, Prywatny komunikat, Instytut Matematyczny PAN, 1976,
80. NADAI A.
Theory of flow and fracture of solids, vol. II, Mc Graw Hill, N.Y., 1963,
81. NAGHDI P.M. and MURCH S.A.
On the mechanical behaviour of viscoelastic/plastic solids, J. Appl. Mech., 1963, 30, 321-328,
82. WORDGREEN R.P. and NAGHDI P.M.
Loading and unloading solutions for an elastic/plastic annular plate in the state of plane stress under combined pressure and couple, Applied Mechanics, series 130, issue 3, University of California, Berkeley,
83. NAYAK G.C. and ZIENKIEWICZ O.C.
Elasto-plastic stress analysis. A generalization using

- isoparametric elements and various constitutive relations including strain softening, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, 1972, 5, 113-135,
84. OHASHI Y., TOKUDA M. and YAMASHITA H.
Effect of third invariant of stress deviator on plastic deformation of mild steel, *J. Mech. Phys. Solids*, 1975, 23, 295,
85. OHASHI Y., KAWASHIMA K. and YOKOCHI T.
Anisotropy due to plastic deformation of initially isotropic mild steel and its analytical formulation, *J. Mech. Phys. Solids*, 1975, 23, 277,
86. PRAGER W.
Mécanique des solides isotropes au-delà du domaine élastique, *Mém. Sci. Math.*, Gaunthier-Villars, Paris, 1937,
87. PRANDTL L.
Über die Eindringungs - Festigkeit /Härte/ plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Schneiden, *ZAMM*, 1921, 1, 15-20,
88. PRAGER W.
The stress-strain laws of the mathematical theory of plasticity, a survey of recent progress, *J. Appl. Mech.*, 1948, 15, 226,
89. PRAGER W.
On the use of singular yield conditions and associated flow rules, *J. Appl. Mech.*, 1953, 20, 317,
90. PRAGER W.
The theory of plasticity, a survey of recent achievements, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, 1955, 169, 41,
91. PRAGER W.
A new method of analyzing stresses and strains in work - hardening plastic solids, *J. Appl. Mech.*, 1956, 23, 493,
92. PHILLIPS A. and GRAY G.A.
Experimental investigations of corners in the yield surface, *Trans. ASME J. Basic Eng.*, 1961, 83, 275,
93. PARKER J. and KETTLEWELL J.
Plastic stress - strain relationships - further

- experiments on the effect of loading history, *J. Appl. Mech.*, 1961, 28, 439,
94. PAUL B., CHEN W. and LEE L.,
An experimental study of plastic flow under stepwise increments of tension and torsion, *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, ASME, 1962, 641,
95. PERZYNA P.
The study of the dynamical behaviour of rate sensitive plastic materials, *Arch. Mech. Stos.*, 1963, 15, 113-130,
96. PERZYNA P.
Fundamental problems in viscoplasticity, *Advances in Appl. Mech.*, 1966, 9, 243-377,
97. PERZYNA P. and OLSZAK W.
On thermodynamics of the differential type materials, *IUTAM Symp. on Irreversible aspects of continuum mechanics*, Vienna, June 1966, Springer, Wien 1968, 279-291,
98. PABIANEK A.
Analiza lepkoplastycznych powłok walcowych, *Prace IPPT*, 1971, Nr 43,
99. PHILLIPS A. and JUH-LING TANG,
The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures, *Int. J. Solids Structures*, 1972, 8, 463,
100. PHILLIPS A. and KASPAR R.
On the foundations of thermoplasticity - an experimental investigation, *J. Appl. Mech.*, 1973, 40 B, 287,
- 100a PHILLIPS A. and HAN-CHIN WU
A theory of viscoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, 1973, 9, 15-30,
101. RIVLIN R.S.
Further remarks on the stress - deformation relations for isotropic materials, *J. Rat. Mech. Anal.*, 1955, 4, 681,
102. ROSENBROCK H.H.
Some general implicit process for the numerical solution of differential equations, *Comput. J.*, 1963, 2, 329-330,
103. REISSIG R., SANSONE G., CONTI R.
Qualitative theorie nichtlinearer differentialgleichungen,

- Edizioni Cremonese, Roma, 1963,
104. ROSSER J.B.
A Runge - Kutta for all seasons, SIAM Rev., 1967, 9,
417-452,
105. VON ROSENBERG D.V.
Methods for the numerical solution of partial differential equations, Modern analytic and computational methods in science and mathematics, vol. 16, Ed. by R.BELLMAN, Am. Elsevier Pub. Comp., New York, 1969,
106. RICE J.R.
On the structure of stress - strain relations for time dependent plastic deformations in metals, J.Appl. Mech., 1970, 37 E, 728-737,
107. ROSEN J.B.
Interactive graphical solution of boundary value problems using linear programming, Techniques of optimization, BALAKRISHNAN, ed., Academic Press, New York, 1972, 183-194,
108. SOKOLOVSKI V.V.
The propagation of elastic-viscous-plastic waves in bars, Prik. Mat. Mekh., 1948, 12, 261-280,
109. SHIELD R.T.
On the plastic flow of metals under conditions of axial symmetry, Proceedings of the Royal Society, 1955, 233 A, 267-286,
110. SHIELD R.T. and ZIEGLER H.
On Prager's hardening rule, ZAMP, 1958, 9 A, 260,
111. STRANG G.
Accurate partial difference methods I: Linear Cauchy problems, Arch. Rat. Mech. Anal., 1963, 12, 392-402,
112. STRANG G.
Accurate partial difference methods II, Nonlinear problems, Numerische Mathematik, 1964, 6, 37-46,
113. STRANG G.
On the construction and comparison of difference schemes, SIAM, J.Numer. Anal., 1968, 5, 506-517,

114. SHINOZUKA M.
Stress in an incompressible viscoelastic - plastic thick-walled cylinder, AIAA Journal, 1964, 2, 1800-1804,
115. SVENSSON N.L.
Anisotropy and the Bauschinger effect in cold rolled aluminium, J.Mech. Engng. Sci., 1966, 8, 162,
116. SYMONDS P.S. and TING T.C.T.
Longitudinal impact on viscoplastic rods, linear stress - strain rate law, J. Appl. Mech., 1964, 31 E, 199-207,
117. SPIJKER M.H.
Equivalence theorems for nonlinear finite - difference methods, Numerische lösung nichtlinearer partieller differential und integrodifferentialgleichungen, Ed. by ANSORGE R. and TÖRNIG W. in Lecture Notes in Mathematics, 1972, 267,
118. SHRIVASTAVA H.P., MRÓZ Z. and DUBEY R.N.
Yield criterion and the hardening rule for a plastic solids, ZAMM, 1973, 53, 625,
119. STAIKOS V.A. and SPICAS Y.G.
Forced oscillations for differential equations of arbitrary order, J. Differential Equations, 1975, 17, 1-11,
120. TING T.C.T. and SYMONDS P.S.
Impact of a cantilever beam with strain rate sensitivity, Proc. Fourth U.S. National Congress Appl. Mech., Berkeley, June, 1962, 1153-1165,
121. TO-YAT CHEUNG
Recent developments in the numerical solution of partial differential equations by linear programming, SIAM J. Numer. Anal., 1978, 15, 210-216,
122. TO-YAT CHEUNG
Three nonlinear initial value problems of the hyperbolic type, SIAM J. Numer. Anal., 1977, 14, 484-491,
123. TO-YAT CHEUNG
Approximate solutions and error bounds for quasilinear elliptic boundary value problems, Computer and System Sciences, 7, 1973, 306-322,

124. VALANIS K.C.
A theory of viscoplasticity without a yield surface, Arch. Mech., 1971, 23, 517-551,
125. VAN DER HOUWEN P.J.
Construction of integration formulas for initial value problems, North-Holland Publ. Comp., 1977, Amsterdam,
126. WIERZBICKI T.
A thick - walled elastic - visco - plastic spherical container under stress and displacement boundary value condition, Arch. Mech. Stos., 1963, 15, 297-308,
127. WIERZBICKI T.
Impulsive loading of a spherical container with rigid-plastic and strain rate sensitive material, Arch. Mech. Stos., 1963, 15, 775-790,
128. WIERZBICKI T.
A method of approximate solution of boundary value problems for rigid, viscoplastic structures, Acta Mechanica, 1967, 3, 56-66,
129. WIERZBICKI T.
Dynamika powłok lepkoplastycznych, Rozprawy Inżynierskie, 1971, 19, 667-730,
130. WAKULJCZ A.
Aproksymacyjne rozwiązanie równań różniczkowych cząstkowych, Prawny komunikat, Instytut Matematyczny PAN, 1977,
131. ZIEGLER H.
A modification of Prager's hardening rule, Quart. Appl. Math., 1959, 17, 55,
132. ZIENKIEWICZ O.C., NAYAK G.C., OWEN D.R.J.
Composite and overlay models in numerical analysis of elastoplastic continua, Int. Simp. Foundations of Plasticity, Warszawa 1972, Ed. by SAWCZUK A., Noordhoff Int. Pub. Groningen 1972,
133. ZARKA J.
Généralisation de la théorie du potentiel plastique multiple en viscoplasticité, J. Mech. Phys. Solids, 1972,

- 20, 179-195,
134. ZIENKIEWICZ O.C. and CORMEAL I.C.
Viscoplasticity and plasticity. An alternative for the finite element solution of material nonlinearities. Proceeding Colloque sur les méthodes de calcul scientifique et technique,
135. ZARKA J. and BUI
Fondements expérimentaux et modèles pour l'étude du comportement global des métaux, Plasticité et viscoplasticité, Séminaire 27-29 Septembre 1972, Ed. D. RADENKOVIC et J. SALENGON, McGraw-Hill, Paris 1974, 1-20.