

Rozdział 4.

OPIS WEWNĘTRZNEJ STRUKTURY MATERIAŁÓW SPIEKANYCH. PRAWA FILTRACJI.

4.1. Geometryczna charakterystyka materiału porowatego.

Na własności mechaniczne ośrodka porowatego ma wpływ wiele różnych czynników. Własności mechaniczne materiału, z którego zbudowany jest szkielet ośrodka i własności charakteryzujące ciecz, jaką jest nasycony ten ośrodek nie wyznaczają w sposób jednoznaczny własności całego ośrodka. Bardzo istotna jest również geometria jego mikrostruktury. Jest wiele parametrów charakteryzujących porowatą strukturę, lecz żaden z nich nie daje pełnych informacji o geometrycznych własnościach ośrodka porowatego. Używamy więc do opisu mikrostruktury kilku parametrów równocześnie w zależności od analizowanych zjawisk i wymaganego stopnia dokładności.

● Zależności objętościowe i masowe.

Podstawowymi parametrami opisującymi strukturę ośrodków wieloskładnikowych są te, które określają ilościowy udział poszczególnych składników. W danej próbce materiału określa się parcjalne (cząstkowe) koncentracje składników i traktuje się je jako wielkości charakteryzujące cały ośrodek (w przypadku ośrodków jednorodnych) lub jako wielkości lokalne (dla ośrodków niejednorodnych).

Jeżeli do całkowitej objętości próbki V odnosimy objętość V_1 - 1-tego składnika materiału zawartego w tej próbce to taki stosunek $V_1/V = c_1$ nazywamy parcjalną objętościową koncentracją 1-tego składnika. Gdy ilość 1-tego składnika w danej próbce wyrażamy ze pomocą jego masy m_1 to stosunek $m_1/V = C_1$ nazywamy parcjalną masową koncentracją 1-tego składnika.

Porowatością objętościową

danej próbki materiału porowatego nazywamy parcjalną objętościową koncentrację porów i oznaczamy przez f_v . W ujęciu statystycznym porowatość interpretuje się jako prawdopodobieństwo, że wybierając losowo dowolny punkt z ośrodka porowatego trafimy na punkt należący do porów.

Gęstością objętościową

próbki nazywamy iloczyn

$$(4.1.1) \quad d = (1 - f_v) d_s$$

gdzie d_s - gęstość materiału litego z którego zbudowany jest szkielek. Gęstość objętościowa jest masową koncentracją szkieleku i możemy ją wyrazić albo w g/cm^3 albo w % gęstości materiału wyjściowego (gęstość objętościowa względna) [2].

W materiale porowatym możemy spotkać trzy typy porów: zamknięte, otwarte oraz półotwarte. Pory otwarte łączą się z powierzchniami porowatego ciała i może się odbywać przez nie przepływ cieczy i gazów. Pory zamknięte nie łączą się z żadną z powierzchni materiału porowatego - przepływ przez nie jest niemożliwy. Trzeci rodzaj porów - półotwarte łączy się tylko z jedną powierzchnią materiału porowatego. Przepływ cieczy przez nie jest niemożliwy, jednakże w odpowiednich warunkach mogą się one wypełniać cieczą.

Porowatością objętościową efektywną (otwartą)

nazywamy stosunek

objętości porów otwartych do objętości całej próbki.

Porowatość powierzchniową

określamy jako stosunek powierzchni porów zawartych na danym przekroju ośrodka porowatego do całkowitej powierzchni tego przekroju. Jest ona często utożsamiana co do wartości z porowatością objętościową. W [3] wykazano jednak, że można tak postępować jedynie gdy mówimy o średniej porowatości powierzchniowej. Porowatość powierzchniowa jest jednym z parametrów opisujących przepuszczalność ośrodka porowatego i musi się ona zmieniać wraz z kierunkiem przepływu, gdy rozpatrujemy ośrodek o anizotropowej strukturze. Różni się więc od porowatości objętościowej nieczułej na zmiany kierunku.

Porowatością powierzchniową efektywną

nazywamy stosunek powierzchni porów na danym przekroju przez które jest możliwy przepływ w kierunku normalnym do tego przekroju do powierzchni przekroju. W [4] wykazano, że nawet dla ośrodków izotropowych tak rozumiana porowatość powierzchniowa różni się od porowatości objętościowej. W pracy [8] zaobserwowano różnicę porowatości objętościowej i powierzchniowej w spiekach z proszków żelaza.

Wyznaczanie porowatości

danej próbki materiału porowatego prowadzi się do wyznaczania objętości porów i objętości całej próbki. Objętość porów można wyznaczyć wtłaczając do nich rtęć; objętość całej próbki możemy obliczyć za pomocą pomiarów geometrycznych (dokładnych jedynie dla bardzo prostych kształtów próbek) lub mierząc objętość cieczy wypartej przez tę próbkę, gdy wcześniej wykluczaliśmy wnikanie cieczy do wnętrza próbki. W praktyce wyznaczamy najczęściej gęstość objętościową materiału porowatego i na tej podstawie, znając gęstość materiału pełnego, obliczamy porowatość objętościową. Warunki i sposoby wyznaczania gęstości objętościowej dla metali porowatych określa PN-63/H-04938. Dopuszcza ona w celu wyznaczenia gęstości objętościowej badanie albo odcinka próbek albo też przygotowanie specjalnych kształtek uformowanych w identycznych warunkach co seria produkcyjna. Norma przewiduje ważenie próbki, a następnie nasycaenie jej olejem, (przy gęstości względnej do 87% w powietrzu, przy gęstości powyżej 87% w próżni) i ważenie nasyconej próbki w wodzie. Znając ciężar próbki w powietrzu i ciężar próbki w wodzie zmniejszony o ciężar w oleju wyznaczamy szukaną gęstość. Można również badając gęstość spieku powlec próbkę np. warstwą lakieru bezbarwnego, który zasklepiając pory w minimalnym stopniu zmienia ciężar i objętość próbki [2] .

Problem wyznaczenia porowatości powierzchniowej rzeczywistego materiału nie jest w literaturze potraktowany z należytą uwagą. Jest to wynikiem tego, że w wielu pracach z zakresu mechaniki ośrodków porowatych porowatość powierzchniową utożsamia się z porowatością objętościową (np. prace M.A. Biota). Z metod opisanych można wymienić wyznaczanie porowatości powierzchniowej na podstawie wydatku cieczy przez daną powierzch-

nię. Będzie to oczywiście wyznaczenie porowatości powierzchniowej efektywnej. Porowatość powierzchniową całkowitą można wyznaczyć na podstawie pomiarów mikroskopowych.

- Współczynnik krętności porów, wewnętrzna powierzchnia właściwa.

Kształt porów w epiekach jest bardzo złożony i zależy od rodzaju i składu proszków, kształtu i wielkości ziaren oraz od parametrów technologicznych procesu wytwarzania elementów (ciśnienie prasowania, temperatura). Gdybyśmy badali kształt porów w ośrodku idealnym zbudowanym z kulistych ziaren o jednokowych wymiarach, zauważylibyśmy również regularne kształty porów. Ośrodek rzeczywisty jest daleki od takiego modelu i nie należy oczekiwać takiej regularności. Poszczególne pory różnią się od siebie znacznie kształtem i wielkością a powierzchnie porów są odmienne.

Długość drogi przebytej przez cząsteczkę cieczy podczas przepływu przez próbkę materiału porowatego jest nie mniejsza od szerokości materiału w kierunku tego przepływu. Jeżeli najkrótszą z możliwych dróg cząsteczek w danym porze porównamy z szerokością całej próbki, to możemy powiedzieć, że stosunek ten wyraża krętność obserwowanego pora.

Współczynnik krętności porów

danej próbki materiału porowatego

definiuje się następująco:

$$(4.1.2) \quad a_{kr} = l_p/l$$

gdzie l - szerokość próbki, l_p - długość średniego pora danej próbki. Dla idealnego materiału porowatego przy porowatości zmieniającej się od 0,259 - 0,476 a_{kr} maleje od 1,305 - 1. Dla takiego ośrodka współczynnik a_{kr} można wyznaczyć na podstawie obliczeń geometrycznych. Dla rzeczywistych ośrodków porowatych wykazano, że dla porowatości od 0,26 - 0,84 a_{kr} mieści się w przedziale 1,5 - 1.

W pewnych modelach przepływów przez ośrodek porowaty (model z promieniem hydraulicznym) stosuje się jeszcze jeden parametr opisujący wewnętrzną strukturę ośrodka. Promień hydrauliczny R wyraża się przez stosunek objętości cieczy zawartej w porach do powierzchni zwilżonego cząsteczkami:

$$(4.1.3) \quad R = V_p/A_s = [f_V/(1 - f_V)] M_s$$

gdzie M_s jest nazywane

wewnętrzną powierzchnią właściwą

i dane wzorem

$$(4.1.4) \quad M_s = A_s/V_p$$

A_s - pole wewnętrznej powierzchni porów zawartych w próbce,
 V_p - objętość porów w próbce. Wymiarem M_s jest $[m^{-1}]$. Wewnętrz-
 ną powierzchnią właściwą wyznacza się przy pomocy izotermy ad-
 sorbcji.

● Rozkład wielkości porów.

Przestrzeń porów często charakteryzuje się rozkładem roz-
 mierów porów jak również wielkością maksymalną i średnią wiel-
 kością porów. Maksymalne pory odgrywają ważną rolę w porowatych
 filtrach, ponieważ określają maksymalne rozmiary cząsteczek za-
 nieczyszczeń, które teoretycznie mogą przejść przez filtr. Śred-
 nie rozmiary porów są z kolei ważne przy badaniach hydrodynamicz-
 nych. Rozkład wielkości porów daje wyobrażenie o liczbie lub
 objętości porów z każdego rozmiaru oraz o rozrzucie dyspersji
 zmian rozmiarów porów w materiale. W literaturze można znaleźć
 wiele sposobów definiowania powyższych wielkości. W niniejszej
 pracy przytaczamy definicje za A.E.Scheideggerem [5], [6].

Średnicę pore

w punkcie $x \in P$ (przestrzeń porów) nazywamy
 długość średnicy maksymalnej kuli $k \in P$, takiej że $x \in k$ (kula
 k zawiera się całkowicie w przestrzeni porów a punkt x należy do
 tej kuli).

Rozkład wielkości średnicy porów

wskazuje jaka część $\alpha(\delta)$
 całości objętości porów ma średnicę porów zawartą między δ i
 $\delta + d\delta$. Funkcja $\alpha(\delta)$ jest oczywiście unormowana:

$$(4.1.5) \quad \int_0^{\infty} \alpha(\delta) d\delta = 1$$

Zamiast używać funkcji $\alpha(\delta)$ często korzysta się ze skumulowanej
 funkcji $f(\delta)$:

$$(4.1.6) \quad f(\delta) = \int_{\delta}^{\infty} \alpha(\delta) d\delta \quad f(0) = 1 .$$

$f(\delta)$ - oznacza jaką część całkowitej objętości porów zajmuje zbiór takich punktów w których średnica pora jest większa od δ . Podobne wielkości można zdefiniować również dla obszaru szkieletu.

Najczęściej stosowanymi metodami określania rozmiarów porów są: wtłaczanie rtęci, wytłaczanie cieczy z porów, obserwacje mikroskopowe struktury oraz równoczesne rozwiązywanie równania Darcy'ego i równania Hageña-Poiseuille'a. Pierwsza z tych metod polega na wtłaczaniu rtęci przy rosnącym ciśnieniu na jednej z powierzchni próbki. W momencie pojawienia się pierwszych z kropli rtęci na powierzchni przeciwległej odczytujemy wartość ciśnienia tłoczenia i na podstawie równania równowagi menisków cieczy w kapilarach obliczymy minimalny wymiar maksymalnej pory.

● Anizotropia i niejednorodność struktury porów.

Z punktu widzenia użytkowania elementów ze spieków proszków metali pożądane jest, aby materiał porowaty, z którego jest wykonany dany element miał strukturę jednorodną i izotropową. Wszelkie zaburzenia tej struktury mogą pociągnąć za sobą zmianę własności mechanicznych części elementów w stosunku do całości. Możliwa jest jednak taka sytuacja, że niejednorodność struktury i różne własności kierunkowe są w elemencie pożądane. Należy wówczas tak zaprojektować proces technologiczny, aby te własności uzyskać.

Idealny materiał porowaty ma oczywiście strukturę jednorodną i izotropową. Można jednak wykazać, że już w hipotetycznym materiale zbudowanym nie z kul ale z elipsoid losowo zorientowanych pojawiają się anizotropowe własności struktury. Różne własności kierunkowe spieków pojawiają się w czasie procesu technologicznego i są obserwowane w gotowych elementach. Można zatem z dużym prawdopodobieństwem twierdzić o elemencie wykonanym ze spieku proszku metalu, że jest anizotropowy i niejednorodny.

Do opisu anizotropowości struktury ośrodka porowatego nie wystarczają wielkości o charakterze skalarnym. J.Ferrandon

[9] użył do opisu własności przepuszczalności ośrodka porowatego tensora wprowadzonego na drodze obliczeń hydrodynamicznych. W pracach [10],[11] zaproponowano definicję strukturalnego tensora przepuszczalności. Tensor ten wykorzystywany jest zarówno do opisu przepływu cieczy jak i do charakterystyki własności mechanicznych szkieletu.

Anizotropowe własności mechaniczne spieków proszków metali były obserwowane w wielu doświadczeniach. Zaobserwowano m.in. brak spodziewanej ortotropii w spiekach osiowo odkształcalnych w płaszczyznach prostopadłych do osi odkształcenia. Można to wytłumaczyć jedynie anizotropią materiału wyjściowego. W pracy [8] obserwowano zmiany mikrostruktury spieków wywołane rozciąganiem. Początkowo izotropowa struktura spieku przechodziła w strukturę ukierunkowaną.

4.2. Filtracja cieczy i gazów w materiałach porowatych.

Podstawową cechą spiekanych proszków metali jest ich zdolność przepuszczania przez swoją objętość cieczy i gazów. Własność ta pozwala wykorzystywać spieki jako elementy porowatych łożysk, filtrów dokładnego oczyszczania, elektrod itp. Projektowanie takich elementów wymaga znajomości opisu ruchu płynów w ośrodku porowatym co wiąże się ze sformułowaniem prawa przepływu. Prawa takie są formułowane w zasadzie przy szeregu założeń upraszczających, a więc dla modeli przepływów. Celem tego podrozdziału jest krótkie przedstawienie istniejących modeli oraz praw przepływu w ośrodkach porowatych.

● Modele przepływów.

A. Modele kapilarne.

Przy budowaniu tego typu modeli brane są pod uwagę następujące podstawowe założenia:

1. Przepływ w mikroskali odbywa się wzdłuż mikrokanałów z mikroprędkością v^{ff} (prędkością porową),
2. Prędkość porowa musi być większa niż prędkość filtracji q , gdyż makroprzepływ definiowany jest w odniesieniu do

całej objętości ośrodka,

3. Słuszny jest postulat Dupuit-Forchheimera, tzn. ¹.

$$(4.2.1) \quad q = f_v v^{ff} .$$

Cechą wspólną tego typu modeli jest ich budowa. Ośrodek ciągły zawiera szereg kapilar o różnych, w ogólności, długościach, średnicach, kształtach. Właśnie w zależności od rodzaju kapilar wyróżnia się modele: prosty, kapilar równoległych i szeregowy.

Prosty model kapilarny

reprezentuje ośrodek porowaty zawierający wiele prostych, równoległych kapilar o jednakowych średnicach $\bar{\delta}$. Przepływ Q przez kapilary opisuje prawo Hagen-Poiseuille'a

$$(4.2.2) \quad Q = -\frac{\pi \bar{\delta}^4}{128 \mu} \frac{dp}{dx} ,$$

gdzie μ jest lepkością cieczy a dp/dx gradientem ciśnienia wzdłuż kapilar. Przepływ przez jednostkową powierzchnię (prędkość filtracji) określony jest wzorem

$$(4.2.3) \quad q = -\frac{n \pi \bar{\delta}^4}{128 \mu} \frac{dp}{dx} ,$$

przy czym n jest liczbą kapilar na tej powierzchni. Oznaczając współczynnik przepuszczalności jako $k = n \pi \bar{\delta}^4 / 128$ oraz obliczając porowatość powierzchniową ośrodka $f_v = n \pi \bar{\delta}^3 / 4$ można określić bardzo tu istotną zależność pomiędzy k i f_v , która przyjmuje formę

$$(4.2.4) \quad k = \frac{1}{32} f_v \bar{\delta}^2$$

Dla rzeczywistych ośrodków porowatych o jednym kierunku przepuszczalności zależność ta nie jest całkowicie poprawna i wówczas przez $\bar{\delta}$ oznacza się średni wymiar kanalików (porów), a w miejsce stałego mianownika wprowadza się współczynnik krętności T . Związek ten będzie miał zatem postać

$$(4.2.5) \quad k = \frac{f_v^3}{T^3 S^2}$$

gdzie $S = n \pi \bar{\delta}$ jest średnią powierzchnią właściwą ośrodka.

Model kapilar równoległych

jest pewnym uogólnieniem modelu prostego. Zakłada się, że ośrodek porowaty zawiera trzy ortogonalne wiązki kapilar równoległych. W każdym z tych kierunków przestrzennych skierowana jest 1/3 ogólnej liczby kapilar, a więc przepuszczalność w każdym z tych kierunków będzie trzykrotnie niższa w porównaniu z modelem poprzednim. Związek między k i f_v będzie zatem

$$(4.2.6) \quad k = \frac{1}{96} f_v \bar{\delta}^2$$

przy czym nadal obowiązuje postulat Dupuit-Forchheimera. W ośrodku rzeczywistym średnice kapilar mogą się zmieniać wzdłuż kierunku przepływu i dlatego należy wprowadzić funkcję rozkładu średnic $f(\delta)$. Wprowadzenie tutaj, podobnie jak w modelu prostym, średniego wymiaru porów napotyka na trudności. Przyjmując różniczkowy rozkład średnic porów $\alpha(\delta)$ i wykorzystując również prawo Hagena-Poiseuille'a można całkowity przepływ cieczy przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu wyrazić zależnością:

$$(4.2.7) \quad q_v = - \frac{dp}{dx} \frac{f_v}{96\mu} \int_0^{\infty} \delta^3 \alpha(\delta) d\delta,$$

zaś związek pomiędzy współczynnikiem przepuszczalności a porowatością jest następujący

$$(4.2.8) \quad k = \frac{f_v}{96} \int_0^{\infty} \delta^2 \alpha(\delta) d\delta.$$

Model szeregowy.

W modelach równoległych zakładano stałą lub w sposób ciągły zmieniające się średnice kapilar. Sens modelu szeregowego polega na tym, że każdy kanałik przewodzący ciecz przez całe ciało z jednego brzegu do przeciwległego jest szeregowym złożeniem kapilar o różnych średnicach. Daje to w efekcie kanałik o skokowo zmiennym przekroju. Ponadto w każdym kierunku przepływu kapilary mogą wykazywać krętność. Zatem długość kanałika S w wybranym kierunku może być większa od wymiaru ciała X w tym kierunku. Ograniczając nasze rozważania do przypadku jednowymiarowego i wykorzystując, jak poprzednio, równanie Hagena-Poiseuille'a oraz zaniedbując różnice ciśnień kapilarnych spowodowanych zmianami średnic kapilar, można przepływ przez jednostkę

powierzchni wyrazić zależnością

$$(4.2.9) \quad q = - \frac{1}{98} \left(\frac{x}{s} \right)^2 \frac{\delta^2}{\mu} f_v \frac{p_2 - p_1}{x}$$

gdzie p_1 i p_2 są ciśnieniami na przeciwnych brzegach ciała a $s/x = T$ jest krętnością.

Bliższa rzeczywistości może być zmodyfikowana postać tego modelu polegająca na wprowadzeniu zmienności średnicy każdej kapilary składającej się na jeden kanalik. Wymaga to oczywiście znajomości funkcji dystrybucji wymiarów porów $\alpha(\delta)$ ośrodka. Prawo przepływu przyjmie postać całkową a zależność pomiędzy k i f_v będzie teraz bardziej złożona

$$(4.2.10) \quad \frac{1}{k} = \frac{96 T^2}{f_v} \left[\int \delta^2 \alpha(\delta) d\delta \right]^2 \int \frac{\alpha(\delta)}{\delta^6} d\delta.$$

B. Model z promieniem hydraulicznym, Teoria Kozeny.

W zagadnieniach z zakresu hydrauliki oblicza się straty energii występujące w rozpatrywanym przewodzie. Źródłem tych strat jest lepkość cieczy. Im większy jest obwód omywany przez płyn w stosunku do przekroju poprzecznego, tym większe są straty. Dla przewodów o tym samym polu przekroju, najmniejsze straty występują w przewodach o przekrojach kołowych. Wielkością charakteryzującą straty energii w przewodach o różnych przekrojach poprzecznych jest stosunek przekroju strumienia cieczy do obwodu zwilżonego, który nosi nazwę promienia hydraulicznego.

Drugim argumentem przemawiającym za tym, by podobnie potraktować przepływ w ośrodku porowatym jest fakt, że przepuszczalność w jednostce objętości ma wymiar kwadratu długości. Tę właśnie długość utożsamia się z promieniem hydraulicznym.

Najlepiej znanym z literatury modelem z promieniem hydraulicznym jest model J.Kozeny z roku 1927. Model ten jest zbiorem kanałów o różnych przekrojach ale o ustalonej długości. Równania Navier-Stokes'a są jednocześnie rozwiązywane dla wszystkich kanałów przechodzących przez przekrój normalny do kierunku przepływu. Dla użytej w prawie Darcy'ego przepuszczalności otrzymuje się zależność:

(4.2.11)

$$k = \frac{c \cdot l}{S^2}$$

gdzie S jest wewnętrzną powierzchnią właściwą a c - jest tzw. stałą Kozeny ($c=0,5$ dla kanału kołowego, $c=0,5619$ dla kanału kwadratowego, $c=0,5976$ dla kanału trójkątnego - wartości te wynikają z obliczeń teoretycznych). Z kolei z doświadczeń wynika, że $c = 0,20$. To świadczy o słabości modelu Kozeny.

C. Modele z oporem lepkim.

Potraktujmy szkielet ośrodka porowatego jako zbiór cząsteczek otoczonych przepływającą cieczą lepłą. Każda z cząsteczek ciała stałego stawia opór płynącej cieczy. Na obserwacji takiego zjawiska bazują pewne modele przepływów przez ośrodek porowaty.

Z punktu widzenia makroskopowego ośrodek porowaty stawia opór przepływającej cieczy. Opór całego ośrodka otrzymujemy jako superpozycję oporów poszczególnych cząsteczek wchodzących w skład szkieletu. Dla pewnych złożonych teorii uwzględnia się również interferencję indywidualnych oporów sąsiadujących cząsteczek. Podejście takie stosuje się jedynie dla ośrodków o dużej porowatości.

Przykładem takiego podejścia do analizy przepływów przez ośrodek porowaty jest praca A.S.Iberall'a z roku 1950, gdzie autor rozpatruje model utworzony z włókien o kołowych przekrojach normalnych o tej samej średnicy d , zorientowanych w przestrzeni w trzech wzajemnie prostopadłych kierunkach tak, że ośrodek możemy traktować jako izotropowy i jednorodny. Obliczając poszczególne opory na podstawie znanych rozważań dla laminarnych przepływów cieczy lepkich wokół walców po superpozycji otrzymuje się wzór

$$(4.2.12) \quad \text{grad}(p) = q \frac{16\mu}{3} \frac{1-f}{f \cdot d^2} \frac{4 - \ln(dv_{ff}^2/\mu)}{2 - \ln(dv_{ff}^2/\mu)}$$

Słabość tego podejścia polega na tym, że powyższy wzór nie może być przedstawiony w postaci odpowiadającej prawu Darcy'ego.

D. Model komórkowy.

Sch. Uchida w roku 1949 i J.Happel w roku 1958 badali podobne modele ośrodka porowatego. Szkielet tego ośrodka składał się z kulistych ziaren o jednakowej średnicy d . Każde z takich ziaren jest całkowicie otoczone przez koncentryczną z nim kulę cieczy o promieniu $D/2$. Kule te poukładane są w regularnej siatce przestrzennej. Zakłada się w tym modelu, że porowatość objętościowa dana jest wzorem

$$(4.2.13) \quad f_v = \frac{D^3 - d^3}{D^3}$$

Z równań ciągłości i równania Naviera-Stokes'a z pominięciem części inercyjnej przy następujących warunkach brzegowych:

- (a) nie ma prędkości cieczy na powierzchni ziaren,
- (b) prędkość jest stała i nie ma składowej stycznej na zewnętrznych otoczek;

otrzymuje się równanie odpowiadające prawu Darcy'ego.

E. Model statystyczny.

Ośrodek porowaty można potraktować jako całkowicie nieuporządkowany i losowy. Przepływ każdego punktu cieczy jest wówczas procesem stochastycznym. Z twierdzenia ergodycznego czasowe uśrednianie drogi jednej cząsteczki prowadzi do takiego samego wyniku co uśrednianie "po zbiorze" dróg zbioru cząsteczek cieczy. Drogi każdej z cząsteczek znajdujemy metodami błędzenia losowego, a poszczególne kroki otrzymujemy z praw przepływów lepkich zastosowanych w mikroskali. Makroskopowe prawo przepływu otrzymujemy obliczając odpowiednie wartości oczekiwane. A.E.Scheidegger w roku 1954 wyprowadził na tej drodze klasyczne prawo Darcy'ego.

● Prawa przepływu.

A. Prawo Darcy'ego.

Izotropowy ośrodek porowaty.

Szereg badań eksperymentalnych doprowadziło do sformułowania podstawowego prawa przepływu cie-

czy przez nieodkształcalny ośrodek porowaty - prawa Darcy'ego. Według tego prawa lokalna prędkość filtracji cieczy q jest liniową funkcją gradientu ciśnienia p i zależy od stałych materiałowych: przepuszczalności ośrodka k i lepkości cieczy μ . Dla przepływu przez izotropowy ośrodek porowaty z uwzględnieniem grawitacji prawo Darcy'ego ma postać:

$$(4.2.14) \quad q = -\left(\frac{k}{\mu}\right) (\text{grad } p - \rho g),$$

gdzie ρg reprezentuje cząstkową siłę ciężkości cieczy. W rzeczywistości zarówno przepuszczalność jak i lepkość mogą być wielkościami zmiennymi i wówczas:

$$(4.2.15) \quad q = -\text{grad}\left(\frac{k p}{\mu}\right) + \frac{k \rho}{\mu} g$$

Jeżeli istnieje możliwość zdefiniowania potencjału sił, wówczas prawo przepływu można napisać w postaci:

$$(4.2.16) \quad q = -\frac{k \rho}{\mu} \text{grad } \phi$$

gdzie
$$\phi = gz + \int_a^p \frac{1}{\rho(p)} dp$$

z - współrzędna pionowa.

Przy zmiennych k i μ mamy odpowiednio

$$(4.2.17) \quad q = -\text{grad } \Psi$$

przy czym
$$\Psi = \frac{k \rho}{\mu} + \int_{z_0}^z \frac{k}{\mu} \rho g dz$$

Wyrażenie prawa przepływu przez potencjał jest słuszne tylko wówczas, gdy powyższe całki są jednowartościowe. Będzie to miało miejsce wtedy, gdy zależność między ciśnieniem cieczy p i jej gęstością ρ jest jednoznaczna, tzn. nie ma histerezy w związku p - ρ .

Żadna z różniczkowych postaci prawa Darcy'ego nie określa w pełni przepływu przez ośrodek porowaty, gdyż zawiera trzy niewiadome - q , p i ρ . Dwa poniższe równania uzupełniają opis zagadnienia. Są to: zależność między ρ i p dla cieczy

$$(4.2.18) \quad q = q(p)$$

oraz równanie ciągłości

$$(4.2.19) \quad -f_v \frac{\partial q}{\partial t} = \operatorname{div}(qg),$$

gdzie f_v jest porowatością a t oznacza czas. Powyższe związki pozwalają wyeliminować z prawa przepływu niewiadome q i g i wówczas będzie ono w postaci

$$(4.2.20) \quad f_v \frac{\partial q}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{kq}{\mu} (\operatorname{grad} p - qg) \right]$$

lub

$$(4.2.21) \quad f_v \frac{\partial q}{\partial t} = \operatorname{div} \left[q \left(\operatorname{grad} \frac{kp}{\mu} - \frac{kq}{\mu} g \right) \right]$$

Należy zauważyć, że stosowanie prawa Darcy'ego w formie potencjalnej jest preferowane w literaturze z uwagi na łatwiejsze rozważanie analityczne.

Ściśliwy ośrodek porowaty.

Ażeby w sposób bliższy rzeczywistości opisywać przepływ cieczy, różniczkowa postać prawa (4.2.20) lub (4.2.21) musi być uogólniona na ściśliwe ośrodki porowate. Istnieje szereg teorii uwzględniających ściśliwość ośrodka. Jedną z nich zakłada, że zarówno ciecz jak i szkielet są sprężyste i podlegają prawu Hooke'a, tzn.

$$(4.2.22) \quad \frac{dq}{dp} = q\beta_t$$

$$(4.2.23) \quad \frac{df_v}{dp} = \beta_m$$

gdzie q jest gęstością cieczy, f_v - porowatością ośrodka a β_t i β_m stałymi współczynnikami ściśliwości cieczy i szkieletu. Równanie ciągłości takiego ośrodka będzie następujące:

$$(4.2.24) \quad \operatorname{div}(qg) = - \left(f_v + \frac{\beta_m}{\beta_t} \right) \frac{\partial q}{\partial t}$$

Odpowiednio zmieni się także różniczkowa postać prawa Darcy'ego

Przepływ anizotropowy.

Formułowanie teorii przepływu cieczy przez anizotropowy ośrodek porowaty zapoczątkowali Ferrandon, Ghizetti i Litwiniszyn w końcu lat 40-tych. Liniowe prawo przepływu przyjęto w postaci wektorowej, analogicznej do prawa Darcy'ego (4.2.16)

$$(4.2.25) \quad \mathbf{q} = - \frac{\bar{k}\mathbf{g}}{\mu} \text{grad } \phi$$

gdzie \bar{k} jest symetrycznym tensorem przepuszczalności.

Fakt, że przepuszczalność w anizotropowym ośrodku porowatym ma postać tensorową prowadzi do następujących wniosków:

- (i) kierunki gradientu sił potencjalnych $\text{grad } \phi$ i prędkości filtracji \mathbf{q} nie są w ogólności równoległe,
- (ii) istnieją w przestrzeni takie trzy ortogonalne osie, wzdłuż których kierunki $\text{grad } \phi$ i \mathbf{q} pokrywają się. Są to osie główne tensora przepuszczalności.

Całkowanie prawa Darcy'ego.

Przy rozwiązywaniu większości zagadnień przepływu przez spiekany ośrodek porowaty materiał szkieletu można traktować jako недеformowalny. Wówczas przepływ płynów przez taki ośrodek opisany jest przez układ równań złożony z prawa przepływu Darcy'ego (4.2.15), równania ciągłości (4.2.19) oraz związku pomiędzy ciśnieniem i gęstością płynu (4.2.18). Po wykorzystaniu (4.2.19) i (4.2.18) w (4.2.15) otrzymamy równanie różniczkowe wyłącznie dla nieznannej funkcji ciśnienia:

$$(4.2.26) \quad \rho \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}(\rho) = \text{div} \left[\frac{\bar{k}}{\mu} \mathbf{q}(\rho) \text{grad } p - \mathbf{q}(\rho) \mathbf{g} \right]$$

Dla zagadnień stacjonarnych równanie powyższe redukuje się do

$$(4.2.27) \quad \text{div} \left[\frac{\bar{k}}{\mu} \mathbf{q}(\rho) \text{grad } p - \mathbf{q}(\rho) \mathbf{g} \right] = 0.$$

Jeżeli ponadto porowaty ośrodek jest przestrzennie jednorodny oraz przepływający płyn jest nieściśliwy to zagadnienie przepływu opisuje równanie Laplace'a

$$(4.2.28) \quad \nabla^2 p = 0.$$

Rozwiązaniami równania Laplace'a możemy posługiwać się również w pewnych przypadkach gdy uwzględnimy ściśliwość przepływającego płynu. Wprowadzając funkcję

$$\Psi = \int_p^p g dp$$

równanie (4.2.27) przyjmie postać:

$$(4.2.29) \quad \nabla^2 \Psi - \operatorname{div} [g^2(p) g] = 0.$$

Dla gazów drugi wyraz tego równania jest dużo mniejszy od wyrazu pierwszego, zatem można go zaniedbać.

Otrzymujemy ponownie równanie Laplace'a

$$(4.2.30) \quad \nabla^2 \Psi = 0.$$

Jest więc widoczne, że większość ważnych z technicznego punktu widzenia zagadnień stacjonarnych przepływów przez ośrodek porowaty opisywanych jest równaniem Laplace'a.

Dla zagadnień niestacjonarnych równanie (4.2.26) jest w ogólnym przypadku równaniem nieliniowym. Jednak zakładając, że płyn charakteryzuje się stałą ściśliwością, czyli zachodzi warunek

$$\frac{1}{g} \frac{dg}{dp} = \beta_f$$

gdzie β_f jest stałym współczynnikiem ściśliwości, przy pominięciu sił ciężkości, równanie (4.2.26) przyjmuje postać liniową

$$(4.2.31) \quad f_v \beta_f \frac{\partial g}{\partial t} = \frac{k}{\mu} g \cdot \nabla^2 g$$

Równanie (4.2.31) jest równaniem dyfuzji, którego rozwiązania otrzymuje się powszechnie znanymi metodami.

Tego samego typu równanie możemy otrzymać dla niestacjonarnych przepływów z uwzględnieniem sił ciężkości. Wykorzystując potencjał dla sił, określony jak następuje

$$\phi = gz + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}$$

a następnie stosując odpowiednią linearyzację mamy

$$(4.2.32) \quad \nabla^2 \phi = \frac{\mu}{k} \beta_f \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Widzimy zatem, że wszystkie zlinearyzowane niestacjonarne zagadnienia przepływu opisywane są liniowym równaniem dyfuzji.

Ograniczenia dla prawa Darcy'ego.

Linowe prawo przepływu

Darcy'ego ma ograniczony zakres stosowalności. Teoretyczny wywód tego prawa oraz przyjmowane założenia wskazują, że jest ono słuszne tylko dla ograniczonego pewnymi warunkami obszaru prędkości przepływów.

Dla ustalenia takich ograniczeń wykorzystuje się podobieństwo pomiędzy prawem Darcy'ego i prawem dla laminarnego przepływu przez rurki płynów lepkich. Wówczas szacuje się, że dla materiału porowatego ze znaną średnią średnicą porów δ i danymi własnościami cieczy filtrującej istnieje "krytyczna" prędkość filtracji powyżej której prawo Darcy'ego jest niesłuszne. Prędkość ta określona jest przez maksymalną liczbę Reynoldsa Re w postaci

$$(4.2.33) \quad Re = \frac{1}{\mu} \rho q \delta,$$

gdzie q jest prędkością filtracji, ρ - gęstością cieczy i μ jej lepkością.

Ponadto, liczne badania przepływów przez ośrodek porowaty wykazały, że istnieje również pewna minimalna wartość liczby Reynoldsa poniżej której przepływ nie nastąpi (są to przepływy z początkowym gradientem hydraulicznym).

Pomimo licznych badań, brak jest jednoznacznie określonych liczb Re^{\min} i Re^{\max} odnoszących się w ogólności do materiałów porowatych. Np. dla gruntów wykazano, że liniowe prawo przepływu Darcy'ego jest słuszne w zakresie [7]

$$1 < Re < 10$$

przy czym o niskiej liczbie R_e^{\max} dla gruntu decyduje granica utraty spójności gruntu. Dla innych materiałów R_e^{\max} może osiągać nawet wartość $R_e^{\max} = 75$, [5].

Ponadto stwierdzono, że dla $R_e < 100$ przepływy są laminarne, natomiast dla $R_e > 150$ przepływy stają się turbulentne.

B. Prawa przepływu przy większych liczbach R_e .

Badania doświadczalne wykazują, że przy większych liczbach R_e prawo przepływu nie jest liniowe. Wraz ze wzrostem prędkości filtracji wzrasta bowiem opór przepływu. Odchylenia od liniowości mogą być również spowodowane adsorbcją bądź też efektami elektroosmozy towarzyszącymi przepływowi płynów zawierających zjonizowane cząstki.

Dla jednorodnego i izotropowego ośrodka dobrą zgodność opisu nieliniowego przepływu z eksperymentem daje paraboliczne prawo przepływu Dupuit-Forchheimera, które w przypadku stacjonarnym ma postać:

$$(4.2.34) \quad \text{grad } p = a q + b q^2$$

Rys. 4.1 przedstawia porównanie liniowego i parabolicznego prawa przepływu dla różnych liczb R_e .

Istnieją również inne, eksperymentalnie ustalone nieliniowe prawa przepływu takie jak, [7]:

$$\text{grad } p = \alpha q + \beta q^2 + \varepsilon q^3 \quad (\text{Forchheimer, 1930})$$

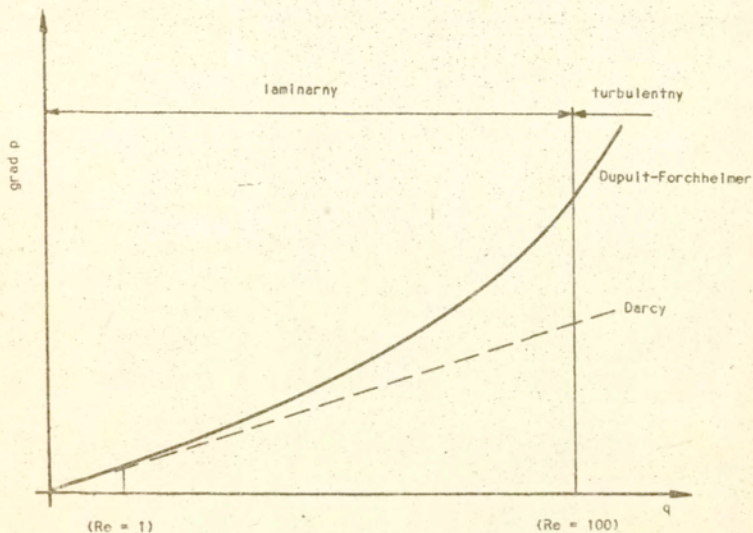
$$\text{grad } p = \alpha q + \beta q^n \quad (\text{Muskat, 1937})$$

lecz ich stosowność jest ograniczona.

Należy nadmienić, że odchylenia od prawa Darcy'ego przy przepływie gazu przez ośrodek porowaty badań eksperymentalnie Sameshima (patrz [5]). Ustalił on, że prędkość filtracji q gazu spełnia związek

$$(4.2.35) \quad \frac{1}{q} = C \mu^n M^{(4-n)/2},$$

gdzie M jest masą melekularną gazu, c i n są stałymi niezależnymi od rodzaju gazu lecz zależą od struktury ośrodka porowatego oraz ciśnienia gazu.



Rys. 4.1. Porównanie liniowego i kwadratowego prawa przepływu przy różnych Re .

Literatura do rozdziału 4.

- [1] S.W.BIEŁOW, Poristytje metały w maszynostrojenii, Moskwa, 1981.
- [2] W.RUTKOWSKI, Projektowanie właściwości wyrobów spiekanych z proszków i włókien, PWN, Warszawa, 1977.
- [3] J.KUBIK, A.RYBICKI, Porowatość ośrodka porowatego scharakteryzowanego tensorem przepuszczalności, Prace IPPT, Nr 72, 1978.
- [4] J.KUBIK, A.RYBICKI, Porosity-permeability relation in material with channel pore structure, Studies Geot. et Mech., 3, 1980.
- [5] A.E.SCHEIDEGGER, Hydrodynamics in porous media, Handbuch der Physik.

- 6 A.E.SCHEIDEGGER, The physics of flow through porous media, Univ. Toronto Press, Toronto, 1960,
- 7 J.BEAR, D.ZOSLORSKY, S.IRMAY, Physical principles of water percolation on seepage, UNESCO, 1968,
- 8 J.MIELNICZUK, Plasticity of porous metals, Int.Conf. CNRS, Villard de Lans, 1983,
- 9 J.FERRANDON, Les lois de l'écoulement de filtration, Génie Civil, 2,1948,
- 10 J.KUBIK, Mechanika silnie odkształcalnych ośrodków o anizotropowej przepuszczalności, Prace IPPT, 29,1981,
- 11 J.KUBIK, A macroscopic description of geometrical pore structure of porous solids, Int. J. of Engng Sci. vol.24, No 6, 1986,