METODY I TEORYE

ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ GEOMTRYCZNYCH KONSTRUKCYJNYCH

ZASTOSOWANE

DO PRZESZŁO 400 ZADAŃ

PRZEZ

Dr. JUL. PETERSENA.

DOCENTA SZKOŁY POLITECHNICZNEJ W KOPENHADZE, CZŁONKA KRÓL. DUŃSKIEGO TOWARZYSTWA NAUK.

PRZETŁOMACZYŁ

Dr. KAROL HERTZ,

NAUCZ. SZKÓŁ PUBLICZNYCH.

WARSZAWA.

WYDAWNICTWO BERNARDA LESMANA.

1881.

Cena kop. 60.

METODY I TEORYE

ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ GEOMETRYCZNYCH KONSTRUKCYJNYCH

ZASTOSOWANE

DO PRZESZŁO 400 ZADAŃ

PRZEZ

Dr. JUL. PETERSENA.

DOCENTA SZKOŁY POLITECHNICZNEJ W KOPENHADZE, CZŁONKA KRÓL. DUŃSKIEGO TOWARZYSTWA NAUK.

PRZETŁOMACZYŁ

Dr. KAROL HERTZ,

NAUCZ. SZKÓŁ PUBLICZNYCH.

WARSZAWA.

WYDAWNICTWO BERNARDA LESMANA,

1881.

Дозволено Цензурою.
Варшава 8 Марта 1881 года.

W Drukarni Jana Noskowskiego, Mazowiecka Nr. 11.

Przedmowa tłomacza.

Każdy obeznany z trudnościami, jakie uczący się geometryi napotykają przy rozwiązywaniu zadań geometrycznych i konstrukcyjnych, przyzna, że praca Dr. Jul. Petersena stanowi niezmiernie ważny nabytek dla nauczycieli matematyki. Istnieją wprawdzie najrozmaitsze wzory zadań geometrycznych, lecz żaden z nich nie wyrównywa książce *Petersena*, gdyż w niej na każdym kroku występuje dążność autora do *podawania metod*, ułatwiających rozwiązywanie zadań, tak, że uczeń, który uważnie przerobi niniejszą książoczkę, z pewnością będzie w stanie rozwiązać każde prawie zadanie geometryczne.

O użyteczności pracy Petersena najlepiej przekonywa fakt, że w ciągu niespełna 13-tu lat doczekała się dwu wydań duńskich i tłomaczeń na języki angielski, francuzki i niemiecki.

Obeznany ze stanem wykładu matematyki w naszych gimnazyach, mam niepłonną nadzieję, że tłomaczenie polskie przyniesie też rzeczywistą korzyść uczącej się młodzieży.

Tłomacz.

WSTĘP.

Prawdy geometryczne występują w dwojakiej formie, już to wyrażając, że figura, nakreślona według pewnych z góry oznaczonych prawideł, czyni zadość pewnym warunkom; już też, stawiając żądania, aby figura w ten sposób została nakreśloną, iżby czyniła zadość pewnym warunkom. W pierwszym przypadku mamy *twierdzenie*, w drugim — *zadanie do wykreślenia*.

Przy rozwiązywaniu zadań sposobem graficznym musimy się posługiwać pewnymi przyrządami, gdyż rozwiązania uskuteczniamy za pomocą rysunku. Przyrządami tymi są liniał, za pomocą którego można nakreślić linię prostą pomiędzy danymi dwu punktami i cyrkiel, za pomocą którego z danego punktu jako ze środka opisujemy okrąg koła danym promieniem. Rozwiązanie zatem jakiegokolwiek zadania graficznego musi się składać z dwu wyżej przytoczonych działań, to jest poprowadzenia linii prostej i kreślenia koła.

To ograniczenie sprawia, że niektóre zadania, lubo na pozór bardzo proste, nie dają się rozwiązać (dzielenie kąta na trzy równe części, kwadratura koła i t. p.). W ogólności można dowieść, że ma to miejsce ze wszystkiemi zadaniami, których algebraiczne rozwiązanie prowadzi do równań stopni wyższych nad 1-szy i 2-gi.

Zadanie jest *więcej niż oznaczonem*, jeśli figura wykreślić się mająca poddaną zostaje większej liczbie warunków aniżeli potrzeba do zupełnego jej wyznaczenia; zadanie jest *oznaczonem*, jeśli ma oznaczoną liczbę rozwiązań; w końcu zadanie jest *nieoznaczonem*, jeśli ma nieskończoną liczbę rozwiązań.

Przy rozwiązaniu zadania oznaczonego należy podać:

Sposób wykreślenia.

Dowodzenie tego sposobu.

Rozbiór, to jest badanie granic, w których zawierać się muszą dane wielkości, aby zadanie miało 0, 1, 2 i t. d. rozwiązań.

Pomiędzy nieoznaczonemi zadaniami na szczególną uwagę zasługują te, w których *jeden* nowy warunek dodany do poprzednich zamienia zadanie na oznaczone. Chociaż bowiem podobne zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, to jednak nie każda figura czyni zadość warunkom zadania, gdyż wszystkie rozwiązania grupują się w pewien sposób odpowiednio do warunków zadania. Tak np. punkt jest oznaczonym, jeśli ma czynić zadość dwu warunkom; jeśli zatem stawimy tylko jeden warunek, to punkt ten jest nieoznaczonym, lecz wszystkie punkty czyniące zadość temu warunkowi, leżeć muszą na linii prostej lub krzywej. W taki sam sposób zachowuje się figura, dla wyznaczenia której brakuje jednego warunku, gdyż, w ogólności, to samo będzie miało miejsce z każdym jej punktem, tak, że każdy z nich otrzymuje swoje miejsce geometryczne.

Zupełnie ogólną metodę rozwiązywania zadań geometrycznych daje nam geometrya analityczna. Wypada jednak samo przez się, że jeśli chcemy jedną i tę samą metodę zastosować do wszystkich zadań, musimy często dużo drogi nałożyć nim do celu dochodzimy. Tak np. w geometryi analitycznej oznaczamy odległości punktów od dwu osi, które bardzo często nie mają nic wspólnego z zadaniem; oprócz tego, przy zastosowaniu tej metody bardzo często wykonywamy rachunki czysto mechanicznie, gdyż nie zawsze jesteśmy w stanie podać geometryczne znaczenie otrzymanych równań. Do tego należy jeszcze dodać, i to może jest najważniejszy zarzut przeciwko geometryi analitycznej, że równania, które otrzymujemy, są niekiedy tak skomplikowane, iż praktyczne ich rozwiązanie staje się niemożebnem.

Wskutek tych trudności, które napotykamy przy bezpośredniem zastosowaniu metody *Descartes'a*, starano się w nowszych czasach podać inne sposoby (za pomocą różnych układów współrzędnych i t. p.), za pomocą których rozwiązanie pojedyńczych zadań staje się naturalniejszem i prostszem, lecz za to trudność zostaje tylko przeniesioną na wybór metody. Te różne nowe metody utorowały przejście ze sposobów algebraicznych do sposobów czysto geometrycznych. Za pomocą tego ostatniego sposobu, rozwiązanie zadania staramy się otrzymać, badając geometrycznie, jakie zachodzą związki pomiędzy danymi i szukanymi elementami zadania. Dla ułatwienia tych badań przedewszystkiem *kreślimy figurę*, przedstawiającą szukane rozwiązanie, i figurę tę badamy za pomocą twierdzeń, znanych nam z geometryi.

Jeśli przy takiem badaniu, i to ma miejsce przy największej liczbie prostszych zadań, okaże się, że całe rozwiązanie sprowadza się do wyznaczenia jednego nieznanego punktu, to sposób do rozwiązania zadania użyć się mający, nastręczy się sam przez się:

Należy oddzielnie rozpatrywać każdy z dwu warunków, którym szukany punkt ma czynić zadość; każdemu z nich odpowiada miejsce geometryczne, i jeśli one będą liniami prostemi lub kołami, to zadanie będzie rozwiązanem, gdyż, ponieważ szukany punkt ma się znajdować na każdej z tych dwu linij, więc będzie on wspólnem ich przecięciem.

Jeśli wspomniane wyżej miejsca geometryczne są liniami prostemi, to zadanie ma tylko jedno rozwiązanie i może się stać niemożebnem tylko w przypadku, gdy linie są równoległe. Jeśli te miejsca geometryczne są dwoma okręgami kół, lub okręgiem koła i linią prostą, to zadanie ma dwa rozwiązania, gdy się te linie przecinają, jedno — gdy są do siebie styczne, i w końcu zadanie staje się niemożliwem do rozwiązania, gdy linie żadnych wspólnych punktów nie mają. Zachodzi istotna różnica pomiędzy tym ostatnim przypadkiem i poprzednim, w którym przypadek niemożliwości zadania występuje jako przypadek graniczny możliwego rozwiązania.

Gdy miejsca geometryczne są innemi krzywemi liniami, wtedy krzywych tych nie można bezpośrednio zastosować do wykreślenia, lecz musimy zadanie z innego punktu rozpatrywać. Należy jednak zwrócić uwagę, że punkt oznaczony przez linię prostą i przecięcie ostrokręgu może też być wyznaczonym przez okrąg koła i linię prostą, gdy tymczasem konstrukcya jest niemożliwą, gdy punkt danym jest za pomocą dwu przecięć ostrokręgowych od siebie niezależnych.

Metoda, którąśmy tu wyłożyli dla najprostszych zadań, może być uogólnioną dla zadań bardziej złożonych. W tym przypadku prawidło da się tak wyrazić:

Należy przypuścić, że jeden z warunków, którym ma czynić zadość szukana figura nie istnieje i następnie szukać miejsc geometrycznych punktów figury, która teraz stała się nieoznaczoną.

Z tego cośmy wyżej powiedzieli wynika, że jest rzeczą niezmiernie ważną znać znaczną liczbę miejsc geometrycznych, o ile takowe odnoszą się do linij prostych i okręgów kół. Z tego punktu wychodząc, w pierwszym rozdziale niniejszej pracy pomieściliśmy najważniejsze z takich miejsc geometrycznych i z bardziej szczegółowem rozwinięciem wyżej przytoczonych głównych prawideł.

W przypadku gdy bezpośrednie zastosowanie miejsc geometrycznych jest niemożebnem, główne prawidło przechodzi w następujące:

Z danej figury należy utworzyć nową, w którejby związek pomiędzy danymi i szukanymi elementami był dogodniejszym. Szczegółowe rozwinięcie tego prawidła znajdzie czytelnik w drugim rozdziale.

W dalszym ciągu używać będziemy następujących oznaczeń. Przez ABC oznaczać będziemy trójkąt, długość zaś jego boków przez a, b, c. Wysokość trójkąta spuszczoną na bok a oznaczymy przez h_a, linię prostą poprowadzoną od wierzchołka A do środka boku a t. j. ośrodkową — przez m_a, linię dwusieczną kąta A—przez w_a. Przez ρ i r oznaczać będziemy promienie koła wpisanego w trójkąt i około niego opisanego, nakoniec przez ρ_a, ρ_b, ρ_c oznaczać będziemy promienie kół zewnętrznie stycznych do boków a, b, c, (zawpisanych). Koło o promieniu ρ_a jest stycznem do boku a i do przedłużeń boków b i c. Gdy mówić będziemy o czworoboku $ABCD$, wierzchołki jego należy sobie wyobrażać w tym porządku, w jakim są wypisane.

$\angle (a, b)$ oznacza kąt pomiędzy dwiema liniami prostemi a i b.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

MIEJSCA GEOMETRYCZNE.

A. Miejsca geometryczne punktów.

a. *Miejscem geometrycznem punktów, które od danego punktu są odległe na daną długość, jest koło zakreślone z danego punktu jako środka, promieniem równym danej długości.*

Dodatek 1. Miejscem geometrycznem końców stycznych do tego samego koła i mających jednakową długość — jest okrąg koła współśrodkowego z danem.

Dodatek 2. Miejscem geometrycznem wszystkich punktów, mających tę własność, że pary stycznych przez nie poprowadzonych do tego samego koła tworzą jeden i ten sam kąt, jest okrąg koła współśrodkowego z danem.

Dodatek 3. Miejsce geometryczne środków kół danego promienia, stycznych do danego koła stanowią dwa koła współśrodkowe z danem, i których promienie są odpowiednio równe summie i różnicy promieni danych kół.

b. *Miejscem geometrycznem punktów, które od danej linii prostej odległe są na daną długość, są dwie linie równoległe do do danej i poprowadzone od niej w danej odległości.*

Dodatek 1. Miejscem geometrycznem wierzchołków trójkątów, jednakową powierzchnię mających i zbudowanych na tej samej podstawie, jest linia prosta równoległa do wspólnej podstawy, gdyż wszystkie te trójkąty mają jednakową wysokość.

c. *Miejscem geometrycznem punktów jednakowo oddalonych do dwu danych punktów jest prostopadła poprowadzona do prostej łączącej dwa te punkty i przechodząca przez jej środek.*

d. *Miejscem geometrycznem punktów jednakowo oddalonych od dwu danych prostych są dwie linie proste prostopadłe do siebie, będące dwójsiecznemi kątów, utworzonych przez dane dwie proste.*

e. *Miejscem geometrycznem punktów mających tę własność, że proste poprowadzone od nich do końców danej prostej tworzą jednakowe kąty jest łuk koła, mający za cięciwę daną prostą.* O łuku tym mówimy, że *obejmuje* dany kąt, o cięciwie zaś, że ze wszystkich punktów łuku jest *widzialną* pod danym kątem.

Jeśli jeden punkt łuku ma żądaną własność, to wszystkie inne punkty tegoż łuku muszą mieć tę samą własność, gdyż wszystkie kąty są wpisane w ten sam łuk. Poprowadziwszy styczną do koła w końcu cięciwy, łatwo się przekonać możemy, że kąt utworzony przez styczną i cięciwę jest równym danemu kątowi, gdyż kąty te mierzą się jednym i tym samym łukiem. Ztąd wypada następujące wykreślenie: Przy jednym końcu danej linii prostej kreślimy kąt równy danemu, przez co otrzymujemy styczną do szukanego łuku; prostopadła wystawiona w punkcie styczności do stycznej przejdzie przez środek koła, którego częścią jest szukane miejsce geometryczne; lecz ponieważ tenże sam środek leżeć musi na prostopadłej do danej prostej wystawionej w jej środku, więc środek ten leżeć musi na wspólnem przecięciu się tych prostopadłych.

Łuk koła zamienia się w półkole, gdy dany kąt jest prostym.

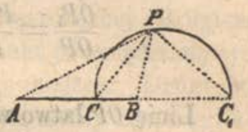
Uwaga. Jeśli nie wiemy na której stronie prostej znajdować się ma szukany punkt, to należy wykreślić dwa łuki, obejmujące dany kąt po jednym z każdej strony linii prostej. Dwa pozostałe łuki obydwu kół obejmują kąty dopełniające dany kąt do dwu kątów prostych.

Dodatek 1. Miejscem geometrycznem środków cięciw, przechodzących przez dany punkt, jest koło, gdyż linie proste, łączące środki cięciw z danym punktem i ze środkiem koła tworzą kąty proste.

Dodatek 2. Jeśli w dane koło wpiszemy trójkąty ABC, mające wspólny bok AB, i w tak otrzymane trójkąty wpiszemy koła, to miejscem geometrycznem środków tych kół będzie łuk koła mający AB za cięciwę i środek we środku łuku AB; pozostała część okręgu tego koła będzie miejscem geometrycznem środków kół stycznych zewnętrznie do trójkąta. Bok bowiem AB jest widzianym ze środków szukanych pod kątami odpowiednio równymi $R + {}^1/_2\, C$ i $R - {}^1/_2\, C$, gdzie $R = 90^0$, ten sam zaś bok AB widzianym jest ze środka łuku AB pod kątem $2R-C$.

f. *Miejscem geometrycznem wszystkich punktów, których odległości od dwu danych punktów są w stosunku $m:n$ jest okrąg koła.*

Jakoż niech A i B oznaczaja dane dwa punkty, P jeden z punktów miejsca geometrycznego.



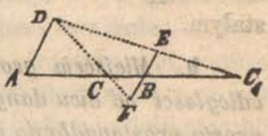
Rozdzieliwszy kąt APB i przyległy mu kąt na dwie równe części otrzymamy:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{m}{n}; \; CPC_1 = R.$$

Punkty zatem C i C_1 dzielą linię AB wewnętrznie i zewnętrznie w danym stosunku i pozostają te same dla każdego punktu P. Ponieważ linia CC_1 widzianą jest z punku P pod kątem prostym, więc na zasadzie **e** miejscem geometrycznem punktu P będzie okrąg koła, którego średnicą jest linia CC_1.

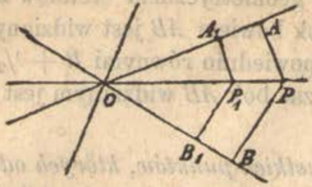
O punktach C i C_1 powiadamy, że dzielą linię AB *harmonicznie* w stosunku $m:n$; zadanie więc sprowadza się do następującego: *Daną linię podzielić harmonicznie w danym stosunku.*

Dołączona figura daje nam rozwiązanie tego zadania. AD i BE mają się do siebie w danym stosunku i poprowadzone są równolegle do siebie, $BF = BE$. Linie DF i DE dzielą wtedy linię AB w szukanym stosunku.



c jest szczególnym przypadkiem **f**, mianowicie gdy $m = n$.

g. *Miejscem geometrycznem punktów, których odległości od dwu prostych danych są w stosunku danym $m:n$, są dwie linie proste, przechodzące przez punkt przecięcia się dwu prostych danych.*



Jakoż, niech OA i OB będą danemi liniami prostemi. Gdy jeden punkt P prostej OP czyni zadość żądanemu warunkowi, wtedy wszystkie punkty tej linii czynią mu zadość; jeśli bowiem weźmiemy pod uwagę punkt P_1 np., to będzie:

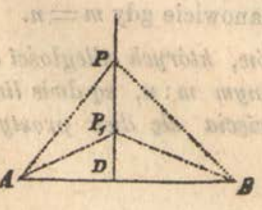
$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{P_1A_1}{PA} = \frac{P_1B_1}{PB}, \text{ zkąd } \frac{P_1A_1}{P_1B_1} = \frac{PA}{PB}.$$

Linię OP łatwo wykreślić możemy, znając jeden którykolwiek z jej punktów, punkt taki da się łatwo wyznaczyć na zasadzie **b**, mianowicie prowadząc linie równoległe do danych w odległościach, których stosunek równa się $\frac{m}{n}$. Druga linia miejsca geometrycznego w ten sam sposób się wyznacza; leży ona w kącie przyległym kątowi AOB. Te cztery linie proste wychodzące z punktu O tworzą *pęk harmoniczny*. Pęk ten na dowolnej prostej (poprzecznej) wyznacza cztery punkty harmoniczne.

d jest szczególnym przypadkiem **g**, mianowicie gdy $m = n$.

Dodatek. Gdy mając dwa odcinki prostych AB i CD, szukamy punktu P, czyniącego zadość warunkowi, aby powierzchnie trójkątów PAB i PCD były w danym stosunku, znajdziemy, że miejscem geometrycznem punktu P będzie to, o którem w poprzednim ustępie mówiliśmy, gdyż stosunek wysokości trójkątów jest stałym.

h. *Miejscem geometrycznem punktów, dla których kwadraty odległości od dwu danych punktów mają stałą różnicę a^2, jest linia prosta prostopadła do prostej, łączącej dane dwa punkty.*



Jakoż, niech A i B będą danymi punktami, P — jednym z punktów szukanego miejsca geometrycznego, prosta zaś PD — linią prostopadłą do AB. Łatwo widzieć, że każdy punkt linii PD czyni zadość żądanemu warunkowi, gdyż

$$\overline{AP_1}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{P_1D}^2; \; \overline{BP_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{P_1D}^2$$

$$\text{zkąd } \overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$$

w ten sam sposób znajdziemy

$$\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2.$$

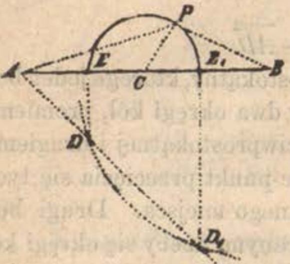
Jeśli nakreślimy dowolny trójkąt prostokątny, którego jeden bok równa się a i z punktów A i B zakreślimy dwa okręgi kół, promienie których byłyby odpowiednio równe przeciwprostokątnej i drugiemu bokowi tego trójkąta, to łatwo widzieć, że punkt przecięcia się tych okręgów będzie jednym punktem szukanego miejsca. Drugi bok trójkąta prostokątnego musi być tak dobranym, ażeby się okręgi kół przecinały ze sobą. W naszym rysunku punkt P jest bliższym A niż B.

Dodatek 1. Miejscem geometrycznem punktów, mających tę własność, że styczne od nich poprowadzone do dwu stałych kół są równej długości (mają tę samą *potęgę* odnośnie do danych kół) jest linia prosta, prostopadła do linii środków (*oś pierwiastna*, *linia potęgowa* danych kół). Łatwo bowiem widzieć, że punkty szukanego miejsca geometrycznego muszą być w takiej od środków danych kół odległości, że różnica kwadratów tych odległości równa się różnicy kwadratów promieni. W przypadku gdy się koła przecinają, oś pierwiastna przechodzi przez punkty przecięcia się okręgów. Trzy osie pierwiastne układu trzech kół przechodzą przez jeden i ten sam punkt, który nazywa się *środkiem pierwiastnym* lub *potęgowym*. Na tej własności się opierając, łatwo wyznaczyć możemy punkt osi pierwiastnej dwu nieprzecinających się kół, gdyż w tym celu dostatecznem będzie nakreślić koło przecinające dane dwa koła.

Dodatek 2. Miejscem geometrycznem środków kół, które przecinają prostokątne dane dwa koła, jest oś pierwiastna tych kół (o dwu kołach mówimy, że przecinają się prostokątnie, jeśli styczne do nich w punkcie przecięcia się są prostopadłe do siebie).

Dodatek 3. Miejscem geometrycznem środków kół przecinających dane dwa koła według średnic (t. j. mających tę własność, że jeśli którekolwiek z nich przecina jedne z danych kół według średnicy, to przecina i drugie według średnicy) jest linia prosta prostopadła do linii środków, poprowadzona w takiej odległości od środka jednego koła, w jakiej drugi środek znajduje się od osi pierwiastnej.

i. *Miejscem geometrycznem punktów, mających własność, że summa kwadratów ich odległości od dwu punktów danych równa się ilości stałej a^2 — jest okrąg koła, środek którego znajduje się w środku linii prostej, łączącej dwa dane punkty.*



Jakoż, niech A i B będą danymi punktami, P zaś — jednym z punktów szukanych. Prowadząc ośrodkową PC względnie do boku AB trójkąta APB, otrzymamy, na zasadzie znanego twierdzenia:

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{PC}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2$$

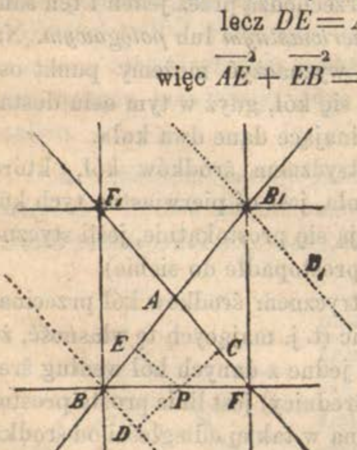
$$\text{albo } \overline{PC}^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2$$

Szukane więc punkty P znajdują się w odległości stałej od C. Dla wyznaczenia punktów, w których okrąg koła przecina linię AB postępujemy w sposób następujący: przy punkcie A kreślimy kąt $BAD = 45^0$ i z punktu B promieniem równym a zakreślamy łuk koła, pızecinający prostą AD w punktach D i D_1, nakoniec z punktów D i D_1 prowadzimy prostopadłe DE i D_1E_1 na prostą AB; spodki E i E_1 tych prostopadłych będą szukanymi punktami. Jakoż:

$$a^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EB}^2 \text{ i } a^2 = \overline{D_1E_1}^2 + \overline{E_1B}^2,$$

$$\text{lecz } DE = AE \text{ i } D_1E_1 = AE_1,$$

$$\text{więc } \overline{AE}^2 + \overline{EB}^2 = a^2 \text{ i } \overline{AE_1}^2 + \overline{E_1B}^2 = a^2.$$



k. *Miejscem geometrycznem punktów, których odległości od dwu danych linij prostych mają daną summę lub różnicę, jest układ czterech prostych.*

Niech AB i AC będą danemi liniami, P—jednym z punktów miejsca geometrycznego, więc $PC + PE = a$. Jeśli odetniemy $PD = PE$ to miejscem geometrycznem punktu D będą dwie linie proste równoległe do AC i poprowadzone od niej w odległości a. Niech temi liniami będą BD i B_1D_1. Szukane punkty muszą zatem leżeć w równej odległości od linii AE i od jednej z linij BD i B_1D_1 i dla tego będą one leżeć na jednej z czterech prostych, dzielących kąty przy punktach przecięcia się linij AB i BD jakoteż AB_1 i B_1D_1 na dwie równe części. Rozwiązanie powyższe stosuje się do przypadku, gdy różnica pomiędzy odległościami ma być równą a, gdyż przypatrując się dołączonej figurze łatwo widzieć, że dla odcinków ograniczonych BF, B_1F, BF_1 i B_1F_1 summa odległości, dla pozostałych zaś nieograniczonych odcinków różnica odległości są stałe.

Uwaga. Jeśli się zgodzimy uważać CP za dodatnie lub odjemne, stosownie do tego, czy P leży po jednej lub drugiej stronie linii danej AF, i tak samo odnośnie do PE względem linii AB, to miejscem geometrycznem szukanych punktów będzie linia prosta nieograniczona i dla czterech linij będzie odpowiednio

$$CP + EP = a;\ CP - EP = a;$$
$$-CP + EP = a;\ -CP - EP = a.$$

Za pomocą wyżej podanych miejsc geometrycznych można z łatwością rozwiązać zadania, które niżej podajemy. Przy rozwiązywaniu tych zadań należy każdy z postawionych warunków uważać oddzielnie, przez co otrzymamy dwa miejsca geometryczne dla punktu szukanego.

Przykłady.

1. Znaleźć punkt równo oddalony od trzech danych punktów (**c**).
2. Znaleźć punkt równo oddalony od trzech linij prostych danych(**d**).
3. Zbudować trójkąt, znając trzy jego boki (**a**).

   Nakreślić koło danego promienia:
4. przechodzące przez dwa dane punkty (**a**),
5. przechodzące przez dany punkt i styczne do danej linii (**a** i **b**),
6. przechodzące przez dany punkt i styczne do danego koła (**a**),
7. styczne do danych dwu prostych (**b**),
8. styczne do danej prostej i do danego koła (**a** i **b**),
9. styczne do dwu kół danych (**a**).
10. Zbudować trójkąt, znając a, h_a i m_a (**a** i **b**).

11. Do danego koła poprowadzić styczną, od której dana prosta odcina daną długość (**a**. Dod. 1).
12. Nakreślić koło, przechodzące przez dany punkt i styczne do danej prostej lub danego okręgu w danym punkcie (**c**).
13. Na danym okręgu znaleźć punkt, któryby od danej linii prostej był w danej odległości (**b**).
14. Na danej prostej wyznaczyć punkt, któryby był równo oddalony od dwu danych punktów (**c**).
15. Nakreślić koło styczne do dwu linij równoległych i przechodzące przez dany punkt (**d** i **a**).
16. Z danego punktu poprowadzić styczną do danego koła (**e**).

Zbudować trójkąt, znając:

17. A, a i h_a (**e** i **b**).
18. A, a i m_a (**e** i **a**).
19. Znaleźć punkt, z którego dwa dane odcinki linij prostych widziane są pod tym samym kątem (Zadanie Pothenot'ego) (**e**).
20. Zbudować czworokąt wpisalny w koło, znając jeden jego kąt, bok temu kątowi przyległy i dwie przekątne (**e** i **a**).
21. Wyznaczyć punkt, którego odległości od trzech danych prostych są w danych stosunkach (**g**).
22. W danym trójkącie wyznaczyć pnnkt, którego odległości od trzech wierzchołków są w stosunkach danych (**f**).
23. Przez dany punkt poprowadzić sieczną do danego koła tak, aby odległegłości punktów przecięcia się okręgu ze sieczną od danej prostej miały summę daną.
    Należy szukać środka cięciwy (**e**. Dod. 1 i **b**).
24. Wyznaczyć punkt, mający tę własność, że styczne poprowadzone od niego do dwu kół danych mają dane długości (**a**. Dod. 1).
25. Wyznaczyć punkt, z którego dwa dane koła widziane są pod danym kątem (t. j. ażyby pary stycznych do tych kół poprowadzone tworzyły jednakowe kąty) (**a**. Dod. 2).
26. W dany trójkąt wpisać trójkąt równoramienny, mający daną wysokość i podstawę równoległą jednemu z boków (**b** i **c**).
27. Zbudować trójkąt, znając kąt A, w_a i ρ (**d**, **b** i 16).
28. Zbudować czworokąt wpisalny w koło, znając AB, BC, AC i kąt pomiędzy przekątnemi (3 i 1).

29. Wyznaczyć punkt, mający tę własność, że styczne od niego poprowadzone do trzech kół, mają jednakową długość (**h**. Dod. 1).
30. Zbudować trójkąt, znając A, a i b^2+c^2 (**e** i **i**).
31. W danym trójkącie wyznaczyć punkt, mający tę własność, że proste poprowadzone od tego punktu do trzech wierzchołków trójkąta dzielą go na trzy równoważne części.

Niech ABC będzie danym trójkątem; O szukanym punktem. Ponieważ AOB i AOC są równoważne, więc miejscem geometrycznem punktu O musi być prosta przechodząca przez A. (**g**. Dod.). Ponieważ ośrodkowa dzieli trójkąt na dwie równoważne części, więc środek boku BC musi być jednym z punktów miejsca geometrycznego; szukanem więc miejscem geometrycznem jest linia ośrodkowa, a zatem szukanym punktem — przecięcie się linij ośrodkowych.

32, Nakreślić koło, którego środek leżałby na danej prostej i którego okrąg byłby w danych odległościach od dwu danych prostych (**k**). Odległością okręgu od prostej, nazywamy mniejszą część linii prostej, poprowadzonej prostopadle ze środka koła do danej linii, zawartą pomiędzy okręgiem koła i daną prostą.
33. W dany trójkąt wpisać drugi o dwu danych bokach w taki sposób, ażeby jeden z jego wierzchołków znajdował się w danym punkcie (**a**).
34. Poprowadzić koło, obejmujące stycznie trzy koła o równym promieniu (**l**).
35. Zbudować trójkąt, znając h_b, h_c i a (**e** i **a**).
36. Wyznaczyć punkt, którego odległość od wierzchołka danego kąta, równą jest danej długości, i którego odległości od ramion tego kąta są w danym stosunku (**a** i **g**).

Zbudować trójkąt, znając:

37. a, A i b^2-c^2 (**e** i **h**).
38. a, h_a i b^2+c^2 (**b** i **i**).
39. Zbudować trójkąt prostokątny, mając wysokość odnośnie do przeciwprostokątnej, dwa punkty tej przeciwprostokątnej i jeden punkt każdego z boków kąta prostego (**b** i **e**).
40. Naokoło trójkąta równobocznego opisać kwadrat, mający jeden wierzchołek wspólny z trójkątem.

Należy wyznaczyć wierzchołek kwadratu przeciwległy danemu (**c** i **e**).

41. Zbudować trójkąt, znając A, a i ρ (**e**. Dod. 2).
42. Daną prostą rozdzielić na dwie takie części, dla których dana długość byłaby średnią proporcyonalną (**e** i **h**).
43. Nakreślić okrąg koła, któryby przechodził przez wierzchołek kąta prostego danego trójkąta prostokątnego, był stycznym do przeciwprostokątnej i miał swój środek na jednem z ramion kąta prostego tegoż trójkąta (**d**).
44. Dane są dwie linie równoległe i dwa punkty, jeden A na jednej z równoległych, drugi zaś O gdziekolwiek. Poprowadzić przez punkt O linię prostą, którąby przecięła równoległą, przechodzącą przez A w punkcie X, drugą zaś równoległą w punkcie Y tak; ażeby $AX = AY$.
    Należy wyznaczyć środek odcinka XY.
45. Wyznaczyć punkt, z którego trzy odcinki AB, BC i CD prostej widać pod jednym i tym samym kątem (**f**).
46. W trójkącie wyznaczyć punkt, z którego wszystkie trzy jego boki widać pod jednym kątem (**e**).
47. Wyznaczyć punkt, z którego trzy dane koła widać pod tymi samymi kątami.
    Odległości punktu szukanego od środków kół muszą być w stosunku promieni; punkt więc ten wyznaczy się na zasadzie **f**.
48. Zbudować trójkąt, znając a, h_a i $b:c$ (**h** i **f**).
49. W danym czworokącie wyznaczyć punkt, którego odległości od dwu przeciwległych boków czworokąta miałyby daną summę, odległości zaś tego punktu od pozostałych boków, miałyby dany stosunek.
50. Na danym okręgu wyznaczyć punkt, ażeby summa jego odległości od dwu danych prostych była najmniejszością (**k**).
51. Wykreślić koło, które przecina trzy dane koła pod kątem prostym (**h**. Dod, 2).
52. Wykreślić koło, które przecina trzy dane koła po średnicach (**h**. Dod. 3).
53. W dane koło wpisać trójkąt prostokątny tak, ażeby boki kąta prostego przechodziły, każdy przez dany punkt (**e**).

54. W dane koło wpisać trójkąt prostokątny, mając dane: jeden z jego ostrych kątów i jeden punkt boku kąta prostego (e).

55. Na średnicy okrągłego (kołowego) bilardu leżą dwie bile; jak należy uderzyć jedną z nich, by ta po odbiciu się o brzeg bilardu spotkała drugą bilę? (f).

We wszystkich poprzednich zadaniach można było bezpośrednio stosować miejsca geometryczne, gdyż w nich albo szło o bezpośrednie wyznaczenie punktu, albo też od razu widać było, że zadanie daje się rozwiązać przez wyznaczenie położenia punktu.

Jeśli zaś taki przypadek nie zachodzi, zastosowywa się następujące prawidła:

Należy wprowadzić do figury dane wielkości. Jeśli np. daną będzie summa dwu linij, to nie wystarcza, aby te linie figurowały oddzielnie, lecz trzeba koniecznie wprowadzić ich summę: w ogólności mówiąc, uskutecznia się to w ten sposób, ażeby jeden koniec tej linii padł na dany punkt.

Należy figurę poddać ścisłemu rozbiorowi w celu wyznaczenia linij i kątów, które lubo nieznane, dają się jednak łatwo wyznaczyc za pomocą wielkości danych.

Następnie należy wyznaczyć taką część figury, którą łatwo wykreślić można za pomocą wielkości danych, która zatem może służyć jako punkt wyjścia dla wykreślenia pozostałej części figury. Takich części może być wiele i pierwszeństwo, w ogóle mówiąc, należy dać tej części, za pomocą której można wykreślić największą część figury. Zasadę tę głównie stosujemy przy wykreślaniu *trójkątów* z trzech danych wielkości.

Dla wprowadzenia boków trójkąta, jako też summy i różnicy tychże boków, często posługujemy się czterema kołami stycznemi do trójkąta. Na każdym boku leżą dwa wierzchołki i cztery punkty styczności a odległość pomiędzy dwu którymikolwiek z nich daje się bardzo łatwo wyznaczyć za pomocą boków trójkąta. Oznaczając przez s połowę obwodu trójkąta, znajdujemy następujące godne uwagi związki:

a) Koło wpisane w trójkąt, dzieli jego boki na odcinki $s-a$, $s-b$ i $s-c$.

b) Odległości od wierzchołka A do punktów, w których koło o promieniu ρ_a dotyka się boków b i c równają się s. Odległości tych punktów styczności od punktów, w których koło wpisane dotyka się boków b i c, równają się a.

c) Koło wewnętrznie styczne i jedno z kół zewnętrznie stycznych dotykają się boku a w punktach równooddalonych od B i C, i których wzajemna odległość równa się $b—c$ lub $c—b$.

Przykłady.

56. Zbudować czworokąt $ABCD$, znając AB, BC, AC, BD i $\angle D$.
$\triangle ABC$ można bezpośrednio wykreślić, następnie należy wyznaczyć D (**e** i **a**).
57. Zbudować wpisalny czworokąt $ABCD$, znając $\angle A$, $\angle ABD$, AC i BD.
58. Zbudować równoległobok, znając AB, AC i AD.
59. Zbudować trójkąt, znając A, h_a i w_a.
Należy zbudować trójkąt, znając h_a i w_a.
60. Zbudować trójkąt, znając h_a, m_a i r.
Należy przedewszystkiem wykreślić trójkąt, którego boki są h_a i m_a, następnie wyznaczyć środek koła opisanego na zasadzie **a** i **c**.
61. Zbudować trójkąt, znając a, r i h_b.
Należy przedewszystkiem zbudować trójkąt, którego boki są a i h_b, następnie wyznaczyć środek koła opisanego, na zasadzie **a**.
62. Zbudować trójkąt, znając B, a i ρ.
63. Zbudować trójkąt, znając a, $b+c$ i h_b.
64. Zbudować równoległobok, znając jeden bok i dwie przekątne.
65. Zbudować trójkąt, znając h_a, m_a i jeśli wiadomo, że $a=2b$.
66. Zbudować czworokąt, znając AC, $\angle CAB$, $\angle ACD$, CD i DB.
Należy wykreślić trójkąt ADC i następnie wyznaczyć B.
67. Przez dany punkt poprowadzić prostą w ten sposób, ażeby punkty przecięcia się jej z dwoma bokami trójkąta i końce trzeciego boku leżały na okręgu koła.

Zbudować trójkąt, znając:

68. a, h_b i m_a.

69. h_a, m_a i b.
70. h_a, h_b i B.
71. h_a, m_a i $a:b$.
72. h_a, B i C.
73. Zbudować trójkąt, mając a, A i $b + c$.
Należy do figury wprowadzić summę $b + c$, co uskutecznimy, przedłużając AC za A o długość $AD = c$. Połączywszy następnie punkty D i B widzimy, że $\triangle CDB$ daje się łatwo wykreślić, gdyż $\angle D = \frac{1}{2} A$. Wierzchołek A wyznacza się następnie na zasadzie **c**.
Z poprzedniego rozwiązania widać też, że jeśli prosta BC jest daną cięciwą i jeśli cięciwę BA tego samego koła przedłużymy do punktu D o odcinek $AD = DC$, to miejscem geometrycznem punktu D będzie okrąg koła mającego swój środek na środku łuku BC.
74. Zbudować trójkąt, mając A, b i $a - c$.
Należy bok c przedłużyć za A o odcinek $a - c$.
75. Dany łuk koła podzielić na dwie takie części, ażeby summa odpowiadających tym częściom cięciw była największością.
76. Zbudować trójkąt, znając A, $b + c$ i $h_b + DC$, gdzie D oznacza spodek prostopadłej h_b.
77. Zbudować trójkąt, znając a, $b + c$ i $B - C$.
78. Zbudować trójkąt, znając a, A i $b - c$.
79. Około danego kwadratu opisać drugi dany kwadrat (73).
80. Około danego foremnego wielokąta opisać drugi dany foremny wielokąt o tej samej liczbie boków.
81. Zbudować czworobok, znając AB, BC, BD, $\angle A$ i $\angle B$.
82. Zbudować czworobok, znając AB, AC, $\angle A$, $\angle D$ i $\angle C$.
83. Zbudować wpisalny czworobok, znając r, AC, BD i $AB \pm BC$.
Należy nakreślić koło, wpisać w nie cięciwę AC, oznaczyć położenie punktu B (73) i następnie znajdziemy D.
84. Zbudować wpisalny czworobok, znając AB, BC, AC i $CD \pm DA$.
85. Zbudować wpisalny czworobok, znając AB, CD, AC, $\angle BAC$ i $\angle ABD$.
86. Zbudować wpisalny czworobok, znając $AB \pm BC$, DA, BD i $\angle A$.
87. Zbudować trójkąt, mając a, $b - c$ i $B - C$.

Należy odciąć $AD = AB$, otrzymamy $DC = (b-c)$ i $\angle DBC = \frac{1}{2}(B-C)$. Za pomocą tych danych możemy zbudować $\triangle DBC$ i następnie wyznaczyć A na zasadzie **c**.

88. Zbudować trójkąt, znając c, w_a i $B-C$.
Trójkąt, w którym c i w_a są bokami daje się bezpośrednio wykreślić, gdyż $\angle (w_a, a) = 90^\circ - \frac{1}{2}(B-C)$.

89. Zbudować trapez, znając jego przekątnie, jeden z boków równoległych i jeden kąt.

90. Daną jest linia prosta, na niej punkt A i zewnątrz niej punkt P. Trzeba wyznaczyć na danej prostej taki punkt X, ażeby $AX + XP = m$, gdzie m jest wielkością daną, (AX należy brać z właściwym znakiem).
Należy na danej prostej odłożyć długość m począwszy od A i następnie X się wyznaczy za pomocą **c**.

91. Dane są dwa punkty A i B i linia prosta przez B przechodząca, trzeba wyznaczyć na prostej dwa punkty X i Y w równej od B odległości, ażeby linia XY z punktu A widzianą była pod danym kątem.
Należy przedłużyć linię prostą AB aż do punktu C, dla którego $BC = AB$.

92. Dane są dwie linie równoległe, na jednej z nich punkt A, na drugiej punkt B i pomiędzy równoległemi punkt O. Trzeba przez punkt O poprowadzić linię prostą, którąby przecięła linje równoległe w punktach X i Y w ten sposób, ażeby AX i BY (wzięte z właściwymi znakami) miały daną summę.
Prosta szukana przechodzi przez środek linii AC, jeśli $YC = AX$.

93. Zbudować trójkąt, znając a, A i $CD \,.\, b$, gdzie D oznacza spodek prostopadłej h_b.
Bardzo łatwo możemy na zasadzie danych wyznaczyć spodek prostopadłej h_a.

94. Zbudować trójkąt, znając B, $c - a$ i różnicę dwu odcinków, na które wysokość trójkąta h_b dzieli bok b.
Jeśli dane różnice odetniemy na AB i AC jako AD i AE, będziemy mieli kąt AED wiadomym. ($BE = BD = BC$).

95. Dane są trzy punkty A, B, C i prosta przez punkt A przechodząca. Trzeba wykreślić koło, przechodzące przez A i B i prze-

cinające daną prostą w takim punkcie D, że DC będzie styczną do koła.

Kąt BDC = kątowi BAD, zkąd bardzo łatwo wyznaczyć D.

96. Zbudować trójkąt, znając r, h_a i $B - C$.

Kąt pomiędzy h_a i promieniem poprowadzonym do A jest wiadomym.

97. W trójkącie ABC poprowadzić prostą równoległą do BC w ten sposób ażeby $XY = XB + YC$.

Szukana linia przechodzi przez środek koła wpisanego w trójkąt.

98. Zbudować trójkąt, znając $B - C$, w_a i stosunek $\frac{b+c}{a}$

99. W równoległoboku poprowadzić prostą AX do punktu X leżącego na CD w ten sposób, ażeby $AX = AB + XD$.

100. W trójkącie ABC bok AB danym jest co do wielkości i położenia; oprócz tego dane są $\angle A$ i punkt D, w którym średnica opisanego około trójkąta koła, przechodząca przez C przecina bok AB, należy wykreślić koło opisane.

Łatwo widzieć, że odcinek BD widzianym jest ze środka koła pod wiadomym kątem.

101. W trójkącie, w którym AD jest dwójsieczną kąta A mamy AD, $AB - BD$ i $AC - CD$. Zbudować trójkąt.

Na linii BC odkładamy BA i CA, tak że DA_1 i DA_2 są danemi różnicami. Koło które przechodzi przez punkta A, A_1 i A_2 jest współśrodkowe z kołem wpisanem w trójkąt i ma średnicę wiadomą.

102. Zbudować czworokąt, znając rzuty przecięcia się przekątnych na cztery boki.

Wiadomym jest kąt utworzony przez dwie prostopadłe do dwu boków przeciwległych.

103. Na boku kąta prostego dane są dwa punkty A i B. Wyznaczyć na drugim boku taki punkt X, ażeby $\angle AXB = 2 \angle ABX$.

Należy wyznaczyć środek prostej XY, jeśli Y jest punktem na XB i $AX = AY$.

104. Przez dany punkt poprowadzić prostą w ten sposób, ażeby ona od danego kąta odcięła trójkąt o danym obwodzie.

Za pomocą danych można wykreślić jedno z kół zawpisanych.

105. Zbudować trójkąt, znając A, w_a i $a + b + c$.

106. Zbudować trójkąt, znając A, ρ i $a + b + c$.

107. Zbudować trójkąt, znając A, r i $a + b + c$.
Ponieważ bok a jest danym, więc zadanie redukuje się do 73 lub 137.

108. Zbudować trójkąt, znając ρ, ρ_a i w_a.
Za pomocą ρ i ρ_a łatwo wyznaczyć h_a.

109. Zbudować trójkąt, znając ρ, ρ_a i $b - c$.
Różnica $b - c$ jest odległością dwu punktow styczności.

110. Zbudować trójkąt, znając a, ρ i $b + c$.
s i a są znane i wyznaczają dwa punkty styczności i jeden z wierzchołków.

111. Zbudować trójkąt, znając a, ρ i $b - c$.

112. Zbudować trójkąt, znając h_a, ρ i $a + b + c$.
Bok a jest wiadomym.

113. Zbudować trójkąt, znając a, ρ_b i ρ_c.
Odcinek pomiędzy punktami styczności obu kół jest wiadomym.

114. Zbudować trójkąt, znając ρ_a, ρ_b i $a + b$.
Odcinek pomiędzy punktami styczności obu kół jest wiadomym.

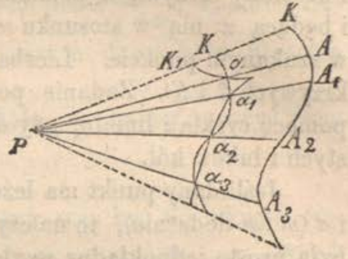
115. Zbudować trójkąt, znając ρ_b, ρ_c i $B - C$.
Kąt pomiędzy BC i centralną obu kół jest wiadomym.

116. Zbudować trójkąt, znając a, $b + c$ i w_a.
Poprowadziwszy w_a oznaczamy B i C w ten sposób, że odległość tych punktów od końców linii w_a są w tym samym stosunku $(b + c):a$.

Mnożenie krzywych linij.

Jeśli z danego punktu P poprowadzimy linię prostą do dowolnego punktu danej krzywej K i linię tę w punkcie a tak podzielimy, ażeby było $Pa : PA = m : n$, to miejscem geometrycznem dla punktu a będzie krzywa k, podobna do danej krzywej.

O tych dwu krzywych powiadamy, że są *podobnie położone* (jednokładne). Punkt P nazywa się ich *środkiem podobieństwa*, linie zaś proste przez punkt P poprowadzone *promieniami wodzącymi podobieństwa*. *Odpowiednimi punktami* krzywych nazywamy punkty, leżące na jednym promieniu wodzącym, *odpowiedniemi zaś prostemi* nazywamy punkty łączące punkty odpowiednie. Pojęcie powyższe daje się uogólnić, gdyż dowolny punkt płaszczyzny może być uważanym jako należący do jednego układu i przez to możemy wyznaczyć punkt odpowiedni w drugim układzie. Przy takiem uważaniu, środkiem podobieństwa będzie taki punkt płaszczyzny, który uważany jako należący do jednego układu zlewa się z odpowiadającym mu punktem w drugim układzie. Ponieważ teorya figur jednokładnych (podobnych i podobnie położonych) wykładaną bywa we wszystkich podręcznikach geometryi, więc ograniczymy się w tem miejscu na przypomnieniu niektórych tylko twierdzeń.



Figurą jednokładną do linii prostej lub koła jest linia prosta lub koło.

Dwie linie odpowiednie są równoległe.

Dwa kąty odpowiednie są równe.

Linie odpowiednie są w stosunku $m : n$. Figury z tego powodu nazywają się podobnemi w tym stosunku.

Jeśli długość Pa odłożymy na przedłużeniu PA za punktem P, to i wtedy jeszcze powyższe twierdzenia są prawdziwe. Powiadamy wtedy, że figury są jednokładne odwrotne.

Dwa dowolne okręgi koła mogą być jednocześnie uważane jako figury jednokładne proste i odwrotne.

Dwa środki podobieństwa nazywają się wtedy środkami podobieństwa: zewnętrzny i wewnętrzny obu okręgów.

Na zasadzie wyżej wyłożonego możemy rozwiązać ogólne zadanie, które znajduje częste zastosowanie, a mianowicie:

Przez punkt P poprowadzić linię prostą, przecinającą dane krzywe K i K_1 w punktach A i a w ten sposób, ażeby PA i *Pa były w danym stosunku $m : n$.*

W tym celu uważamy punkt P jako środek podobieństwa i kreślimy krzywą k podobną i podobnie położoną względem K i będącą z nią w stosunku $n : m$; krzywa ta przetnie krzywą K^1 w szukanym punkcie. Liczba rozwiązań równa się liczbie przecięć krzywych k i K^1. Zadanie powyższe możemy zawsze rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału, gdy dane krzywe utworzone są z linij prostych i łuków kół.

Jeśli dany punkt ma leżeć po tej samej stronie punktów A i a ($m : n$ dodatnie), to należy krzywą k tak nakreślić ażeby ona była prosto jednokładną względem K, jeśli zaś punkt dany ma leżeć pomiędzy A i a ($m : n$ odjemne) to należy krzywą k tak nakreślić, aby ona była odwrotnie jednokładną względem K.

Dla skrócenia, zamiast powiedzieć, że krzywa ma być nakreśloną jednokładnie względem danej w stosunku $m : n$ używać będziemy wyrażenia: krzywa dana ma być względem środka podobieństwa pomnożoną przez $\pm\frac{m}{n}$, a mianowicie $+$ lub $-$ stosownie do tego, czy krzywe mają być jednokładne proste, czy też jednokładne odwrotne.

Jeśli linia prosta ma być pomnożona, to kierunek jej pozostaje niezmiennym (t. j. będzie równoległą do danej), więc dostatecznie będzie pomnożyć jeden z jej punktów.

Jeśli okrąg koła ma być pomnożonym, to należy pomnożyć środek i promień lub środek i jeden punkt okręgu.

Przykłady.

117. Przez dany punkt O poprowadzić linię prostą przecinającą dwie proste dane tak, żeby odległości punktu O od punktów przecięć miały się do siebie w stosunku $m : n$.

Dla rozwiązania tego zadania należy punkt O uważać za środek podobieństwa, pomnożyć jedną z linij danych przez $\pm\frac{m}{n}$ i poprowadzić linię prostą przez punkt O i przez punkt przecięcia się prostej otrzymanej z mnożenia z drugą daną linią.

118. Przez punkt O dany wewnątrz koła poprowadzić cięciwę, któraby w tym punkcie została podzieloną na dwa odcinki będące w stosunku $m : n$.

Dla rozwiązania tego zadania obieramy punkt O za środek podobieństwa i mnożymy koło dane przez $-\frac{m}{n}$; szukane cięciwy przejdą przez punkty, w których nowe koło przecina dane.

Jeśli dany punkt leży zewnątrz koła, to należy mnożyć dane koło przez $\frac{m}{n}$ lub $\frac{n}{m}$.

Jeśli odcinek zewnątrz koła leżący ma być do odciętej cięciwy w stosunku $\frac{m}{n}$ to należy mnożyć przez $\frac{m}{m+n}$ lub $\frac{m+n}{m}$

119. Przez punkt przecięcia się O dwu okręgów kół poprowadzić prostą, od której dane okręgi odcinają równe cięciwy.

Należy jeden okrąg pomnożyć przez -1, obierając punkt O za środek podobieństwa.

120. W dany czworobok wpisać równoległobok, któregoby środek znajdował się w danym punkcie.

121. Zbudować trójkąt, znając a, b i m_c.

Należy nakreślić prostą $CE = m_c$ i z punktu C jako ze środka opisać łuki promieniami odpowiednio równymi a i b, następnie obierając punkt E za środek podobieństwa pomnożyć jeden z tych łuków przez -1, Można też było najprzód nakreślić jeden z danych boków; wtedy należałoby jeden z łuków pomnożyć przez $\frac{1}{2}$, lub drugi — przez 2; w praktyce ostatni sposób postępowania jest prostszym, wymaga jednak więcej miejsca.

122. Zbudować trójkąt, znając a, A i m_b.

Na a należy nakreślić łuk obejmujący kąt A, następnie opisać z punktu B jako ze środka łuk o promieniu m_b; ten ostatni należy pomnożyć przez 2, lub pierwszy z opisanych łuków należy pomnożyć przez $\frac{1}{2}$. W pierwszym i drugim razie za środek podobieństwa należy obrać punkt C.

123. Z punktu danego na okręgu koła poprowadzić cięciwę tak, ażeby ona została przepołowioną przez drugą daną cięciwę.

Należy dany punkt obrać za środek podobieństwa i daną cięciwę pomnożyć przez 2, lub dane koło pomnożyć przez $\frac{1}{2}$.

124. Dwa okręgi współśrodkowe przeciąć linią prostą w ten sposób, ażeby mniejsza cięciwa była połową większej.

125. Zbudować trójkąt, znając a, $\frac{b}{c}$ i m_c.

126. Zbudować trójkąt, znając kąt i dwie ośrodkowe.

127. Zbudować trójkąt, znając jego ośrodkowe.

Zadanie to sprowadza się do zadania 121, gdyż ośrodkowe dzielą się wzajemnie w stosunku 1 : 2.

128. Dla wykreślenia trójkąta dane są: jego środek ciężkości (punkt przecięcia się ośrodkowych), jeden z wierzchołków i dwie krzywe (linie proste lub koła), na których mają leżeć dwa pozostałe wierzchołki.

129. Zbudować trójkąt, znając a, m_b i $\angle (m_a, b)$.

130. Zbudować trójkąt, znając b, m_b i $\angle (m_a, a)$.

131. Zbudować czworobok wpisalny, znając $\angle A$, bok DB, $\angle ACB$ i stosunek odcinków przekątnej AC.

132. Zbudować równoległobok, w którym dwa przeciwległe wierzchołki znajdowałyby się w dwóch danych punktach, dwa zaś pozostałe wierzchołki na danym okręgu koła.

133. W danym trójkącie poprowadzić z punktu A linię prostą AD do boku BC w ten sposób, ażeby ona była średnio proporcyonalną pomiędzy BD i DC.

Należy posługiwać się kołem opisanym około trójkąta.

134. Zbudować trójkąt, znając a, b i w_c.

135. Zbudować trójkąt, znając A, b i $\angle (m_a, a)$.

136. W danym trójkącie poprowadzić przez punkt A linię prostą w ten sposób, ażeby jej odcinki od punktu A do rzutów punktu B i C były w danym stosunku.

137. Poprowadzić styczną wspólną dwu kołom danym.

Dwa okręgi koła uważane jako figury jednokładne mają dwa środki podobieństwa. Środki te leżą na linii środków i linia prosta poprowadzona przez końce dwu promieni równoległych przechodzi przez środek podobieństwa zewnętrzny lub wewnętrzny stosownie do tego, czy promienie równoległe skierowane są w jedną stronę lub w strony przeciwne. Styczna poprowadzona z jednego środka podobieństwa do jednego z okręgów, jest też styczną do drugiego okręgu.

138. Mając dany punkt O i dwa okręgi kół chcemy do każdego z dwu okręgów poprowadzić styczną w ten sposób, ażeby te dwie styczne były równoległe i odległości ich od punktu O były w danym stosunku.

Mnożąc jeden z okręgów odnośnie do punktu O sprowadzamy zadanie do poprzedniego.

139. Zbudować trójkąt, znając A, m_b i $\angle (a, m_c)$.

140. Na okręgu koła dane są punkty A i B, należy na tymże okręgu wyznaczyć taki punkt X, ażeby proste XA i XB przecięły daną średnicę w dwu punktach Y i Z, którychby odległości od środka koła były w danym stosunku.

Mnożąc AX odnośnie do środka koła w ten sposób, ażeby punkt Y upadł na punkt Z, znajdziemy, że punkt A upadnie na znany punkt A_1 i $\angle A_1ZB$ będzie znanym.

141. Zbudować trójkąt, znając położenie trzech punktów, które dzielą trzy boki trójkąta w danych stosunkach.

Niech ABC będzie szukanym trójkątem, D, E i F — danymi punktami i niech $BD : DA = m : n$; $AF : FC = p : q$; $CE : EB = r : s$. Jeśli D obierzemy za środek podobieństwa i pomnożymy DB przez $-\frac{n}{m}$, to D pozostanie na swojem miejscu i B upadnie na nieznany punkt A; mnożąc następnie DA przez $-\frac{q}{p}$ odnośnie do środka podobieństwa F, to widzimy, że A pada na C i punkt D na znany z położenia punkt D_1; mnożąc następnie $D_1 C$ przez $-\frac{s}{r}$ odnośnie do środka podobieństwa E, znajdziemy, że C upadnie na B i D_1 na nowy znany punkt D_2. Ponieważ przez mnożenie kierunek prosty nie zostaje zmienionym, więc BD_2 musi być równoległą do DB, tak że DD_2 zlewa się z AB. Dla otrzymania boku BC, powtarzamy powyższe działania w kierunku odwrotnym, zaczynając od E.

Powyższa konstrukcya daje się zastosować do każdego wielokąta. Na szczególną uwagę zasługuje przypadek, gdy dane są środki wszystkich boków wielokąta i liczba ich jest parzystą;

zadanie jest wtedy albo nieoznaczonem albo niemożebnem. (Mathematisk Tidsskrift for 1862 str. 159).

142. Mając dane cztery koła współśrodkowe chcemy poprowadzić linię prostą, przecinającą okręgi tych kół odpowiednio w punktach A, B, C i D w ten sposób, ażeby $AB = CD$.

Jeśli (AB) oznacza potęgę punktu okręgu A odnośnie do okręgu B i jeśli sieczna przecina jeszcze raz dane koła odpowiednio w punktach A_1, B_1, C_1 i D_1, to $(AD) = AD \cdot AD_1$; (BC) $BC \cdot BC_1$; $AD_1 = BC_1$, więc:

$$AD : BC = (AD) : (BC).$$

Stosunek ten łatwo wykreślić możemy, prowadząc dwie linie proste w ten sposób, ażeby odcinek jednej z nich pomiędzy okręgami A i B zawarty, był równym odcinkowi drugiej pomiędzy okręgami B i C zawartemu. Znamy też stosunek $AB : AC$ i możemy szukaną prostą poprowadzić przez dowolny punkt A.

143. W czworoboku $ABCD$ dane są boki AB, BC, CD i AC; nadawszy bokowi AB oznaczone położenie, należy wyznaczyć miejsca geometryczne.

α) wierzchołka D,

β) środka przekątnej BD,

γ) środka prostej łączącej środki przekątnych.

144. W kole o środku O poprowadzono stałą średnicę AOB i zmienną cięciwę BC, którą przedłużono w ten sposób, ażeby $CD = BC$, trzeba wyznaczyć miejsce geometryczne punktu przecięcia się prostych OD i AC.

145. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktu symetrycznego ze stałym punktem A odnośnie do prostej, obracającej się około drugiego stałego punktu B.

Metoda figur podobnych.

Metoda, którąśmy zastosowali przy mnożeniu linij krzywych, jest tylko szczególnym przypadkiem innej metody nazwanej metodą podobieństwa figur. *Stosujemy ją gdy po odjęciu jednego z danych warunków zadania, otrzymujemy układ podobnych* (*i podobnie położonych*) *figur*. Gdy dotychczas szukaliśmy części figur zupełnie oznaczonych, *teraz będziemy szukali takich części figur, których kształt jest tylko znany.*

Najważniejsze przypadki są następujące:

a) *Dana jest długość, oprócz tego zaś tylko kąty i stosunki.* W tym przypadku odrywamy uwagę od danej długości i staramy się wykreślić figurę, któraby miała dane kąty i stosunki, obierając długość jednej z jej linij zupełnie dowolnie. Nakreślona figura podobną jest do danej i tę ostatnią otrzymujemy, wprowadzając daną długość.

146. Zbudować trójkąt, mając dane dwa kąty i jedną linię prostą w związku z trójkątem będącą (ośrodkowa, wysokość, obwód i t. d.).
Należy zbudować dowolny trójkąt i następnie wykreślić drugi trójkąt podobny pierwszemu i zawierający daną prostą.

147. Zbudować trójkąt znając A, a i $b : c$.
Dowolny trójkąt, o kącie A, w którym boki tego kąta są wdanym stosunku, musi być podobnym szukanemu.

148. Zbudować kwadrat, znając różnicę pomiędzy przekątnią i bokiem.

149. Zbudować trójkąt, znając A, b i $a : c$.

150. Dany jest kąt centralny ACB, trzeba poprowadzić styczną w ten sposób, ażeby punkt styczności i punkty przecięcia się jej z bokami kąta centralnego rozdzieliły styczną w danym stosunku.
Dla rozwiązania tego zadania, kreślimy prostą dowolnej długości i przyjmujemy ją za styczną do koła, którego środek oznaczamy. Figura otrzymana ma szukany kształt i otrzymuje żądaną wielkość, gdy środek koła obierzemy za środek podobieństwa.

151. Zbudować trójkąt, znając A, h_a i stosunek odcinków utworzonych przez wysokość h_a na boku a.

152. Zbudować trójkąt, znając trzy jego wysokości.
Stosunek boków jest znanym. Jeśli z dowolnego punktu zewnątrz koła poprowadzimy trzy sieczne, których części zewnętrzne równe są trzem danym wysokościom trójkąta, to całe sieczne będą w stosunku szukanych boków trójkąta.

153. W dane półkole wpisać czworobok podobny danemu czworo-

bokowi i któryby miał dwa wierzchołki na średnicy, dwa zaś pozostałe na okręgu półkola.

Przedewszystkiem należy około danego czworoboku opisać półkole. Otrzymana figura będzie podobną do szukanej.

b) W powyżej przytoczonych zadaniach położenie szukanej figury było zupełnie dowolnem; *jeśli zaś szukana figura ma miec oznaczone położenie względem pewnych linij lub punktów, to należy się starać o usunięcie takiego warunku, ażebyśmy otrzymali układ figur podobnie położonych.* Przez to geometryczne miejsca wszystkich punktów figury stają się liniami prostemi przechodzącemi przez środek podobieństwa i tym sposobem łatwo wyznaczyć możemy szukaną figurę, albowiem wykreśliwszy którą kolwiek z tych figur, pozostaje nam tylko zbudować figurę podobnie położoną względem nakreślonej i czyniącą zadość usuniętemu warunkowi. Warunek, który usunąć należy polega zwykle na tem *ażeby linia prosta miała daną długość, albo też, ażeby punkt leżał na danej linii, albo nakoniec, ażeby linia przechodziła przez dany punkt.*

154. W dany trójkąt ABC wpisać drugi abc, tak ażeby boki jego były równoległe do danych prostych.

Usuwając warunek nawet, ażeby punkt a leżał na boku BC, widzimy, że pozostałym warunkom czyni zadość układ trójkątów podobnych, mających punkt A za środek podobieństwa. Nakreśliwszy jeden z tych trójkątów np. $a_1\, b_1\, c_1$, widzimy, że linia Aa_1 przetnie bok BC w punkcie a.

155. Wpisać kwadrat w dany trójkąt, wycinek lub odcinek koła.

156. W dany trójkąt wpisać równoległobok podobny danemu.

157. Przez dany punkt poprowadzić prostą, która z danemi dwu liniami prostemi tworzy równe kąty.

158. Przez dany punkt poprowadzić linię prostą w ten sposób, ażeby odcinki utworzone na niej przez trzy dane linie proste przez jeden punkt przechodzące, były w stosunku danym.

Zamiast danego punktu weźmy dowolny punkt na jednej z danych prostych (117).

159. Przez dany punkt poprowadzić linię prostą tak, ażeby ona od boków danego kąta odcięła części w danym stosunku będące.

160. W danym trójkącie poprowadzić linię równoległą do jednego z boków w ten sposób, ażeby część równoległej w trójkącie zawarta, była w danym stosunku do części, którą odcina od jednego z dwu pozostałych boków.

161. Linię prostą poprowadzić w danym kierunku tak, ażeby boki dwu danych kątów odcięły na niej dwa odcinki w danym stosunku będące.
Jeśli danymi kątami są kąty *BAC* i *DEF*, *X* zaś szukanym punktem na linii *EF*, to, uważając linię *EF* jako nieistniejącą znajdziemy, że punkt *X* opisuje linię prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się *DE* i linii równoległej do danego kierunku przez punkt *A* poprowadzonej.

162. Zbudować trójkąt równoramienny, znając wysokość i ośrodtrójkąta odnośnie do jednego z boków.
Trójkąt, w którym dane linie są bokami, daje się bezpośrednio wykreślić i wtedy znany nam będzie kształt trójkąta, w którym ośrodkowa jest bokiem, kąt zaś przy wierzchołku trójkąta równoramiennego kątem przeciwległym temu bokowi.

163. Na okręgu koła danym jest punkt *A* i oprócz tego cięciwa *BC*. Należy poprowadzić cięciwę *AD* w ten sposób, ażeby ona rozdzieliła cięciwę *BC* w punkcie *E* na odcinki *DE* i *DC* będące w danym stosunku. Znanym jest kształt trójkąta *CED* i kreśli się trójkąt jemu podobny, biorąc *C* za środek podobieństwa.

164. W kole dane są dwa promienie, należy poprowadzić cięciwę, któraby została podzieloną przez promienie na trzy równe części.

165. W czworobok wpisać romb, którego boki byłyby równoległe do przekątnych czworoboku.

166. W dany trójkąt wpisać drugi *XYZ*; dany jest kierunek linii *YZ*, punkt linii *BC*, na którym ma leżeć punkt *X* i stosunek *XY* : *XZ*.
Należy uważać bok *BC* jako nieistniejący (to się nie odnosi do linii przechodzącej przez punkt *A* i punkt dany na boku *BC*) i obrać punkt *A* za środek podobieństwa.

167. Poprowadzić linię prostą w danym kierunku tak, ażeby ona

przecięła jedną parę boków przeciwległych czworokąta w jednakowym stosunku (154).

168. W danym trójkącie poprowadzić linię równoległą do jednego z boków w ten sposób, ażeby ona była średnią proporcyonalną pomiędzy odcinkami, jakie tworzy na jednym z dwu pozostałych boków.

169. Dane są: punkt B i dwie linie do siebie równoległe, z których jedna przechodzi przez punkt A. Należy przez punkty A i B poprowadzić dwie linie równoległe, któreby z danemi utworzyły: 1) romb; 2) równoległobok o danym obwodzie; 3) równoległobok, w którym boki miałyby dany stosunek.

170. W dany trójkąt wpisać romb, któregoby jeden kąt przypadał razem z jednym z kątów trójkąta.

171. W dane koło wpisać trójkąt równoramienny, w którym daną jest summa z jego wysokości i podstawy.

Należy przyjąć trójkąt ABC za szukany i wprowadzić do figury daną sumę, przedłużając wysokość BD do E; wtedy $DE = 2\,AD$ i kształt trójkąta ADE jest znanym, poczem zadanie z łatwością się rozwiązuje, przyjmując E za środek podobieństwa.

172. W dany trójkąt wpisać prostokąt o danym obwodzie.

Należy wprowadzić do figury połowę danego obwodu.

173. W dany trójkąt wpisać drugi, wiedząc, że jeden z jego wierzchołków A leży w danym punkcie któregokolwiek z boków danego trójkąta; oprócz tego danym jest kąt A i bok przeciwległy temu kątowi ma być równoległym do danej prostej.

174. W dany trójkąt wpisać równoległobok, którego boki miały dany stosunek. Jeden z boków równoległoboku ma leżeć na boku BC trójkąta, a mianowicie jeden z wierzchołków równoległoboku w danym punkcie.

175. Wyznaczyć na jednym z boków trójkąta taki punkt, ażeby linie proste poprowadzone od tego punktu w danych kierunkach do przecięcia się z dwu pozostałymi bokami, trójkąta miały daną summę.

176. Dane są: punkt B i dwie linie proste do siebie równoległe AX i CY. Należy przez punkt B poprowadzić prostą, ażeby

ona przecięła równoległe w takich punktach X i Y, ażeby stosunek AX do AY miał daną wartość.

Należy uważać jakoby punktu B nie było, obrać na linii AX dowolny punkt X_1 zamiast X i oznaczyć na linii AY punkt Y_1 odpowiadający punktowi Y.

177. Dane są: kąt i punkt. Należy przez dany punkt poprowadzić prostą XY, przecinającą boki kąta w punktach X i Y w ten sposób, ażeby odległość wierzchołka kąta od linii XY była w danym stosunku do odcinka XZ, który ma dany kierunek i łączy punkt X z punktem Z na drugim boku trójkąta.

Należy przyjąć że punktu danego P niema i obrać na boku XA dowolny punkt X_1 zamiast X.

178. W trójkącie ABC poprowadzić linię prostą w danym kierunku, którąby przecięła bok AB w X, bok BC w Y w ten sposób, ażeby odcinki AX i CY były w danym stosunku.

Kształt czworoboku $AXYC$ jest znanym; obierzmy punkt A za środek podobieństwa i weźmy B zamiast X.

179. Poprowadzić w trójkącie ABC poprzeczną XY w ten sposób, ażeby $BX = XY = YC$.

Kształt $BXYC$ jest znanym.

Do tego zadania redukuje się następujące: Zbudować trójkąt znając A, $a + b$ i $a + c$.

180. W trójkącie ABC poprowadzić poprzeczną XY równoległą do BC w ten sposób, ażeby pomiędzy odcinkami XY, XB i YC miał miejsce dany jednorodny związek (np. $\overline{XY}^2 = \overline{XB}.\,\overline{YC}$; $\overline{XY}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{YC}^2$; i t. d.).

181. Nakreślić koło, przechodzące przez punkt A i styczne do dwu przecinających się w punkcie O linij prostych.

Dowolne koło styczne do dwu danych prostych musi być podobnie położonem względem szukanego, jeśli punkt O obierzemy za środek podobieństwa. Linia prosta OA przecina nakreślone dowolnie koło w punkcie, który odpowiada punktowi A w szukanem kole. Ponieważ prosta OA przecina nakreślone koło w dwu punktach, więc zadanie ma dwa rozwiązania. Jeśli w nakreślonem dowolnie kole poprowadzimy promienie do punktów przecięć okręgu z linią prostą OA, to środki szukanych kół otrzymamy prowadząc przez punkt A linie równoległe do tych promieni.

182. Na danej linii prostej wyznaczyć punkt, któryby był w równej odległości od danego punktu i danej prostej. (Punkt przecięcia się paraboli z linią prostą). Przypuszczamy, że danego punktu niema i obieramy punkt przecięcia się dwu danych linij prostych za środek podobieństwa. W gruncie rzeczy zadanie to jest identyczne z poprzedniem.

183. Na danej linii prostej wyznaczyć punkt, którego odległości od danego punktu i danej linii prostej byłyby w danym stosunku. (Punkt przecięcia się linii prostej z przecięciem stożkowem, danem za pomocą swego ogniska, kierownicy i mimośrodu). Zadanie nie ulegnie istotnej zmianie, jeśli zamiast prostopadłej spuszczonej z danego punktu na daną prostą weźmiemy linię prostą, któraby z daną prostą utworzyła dowolny kąt.

184. Nakreślić koło, mające swój środek na danej prostej, przechodzące przez dany punkt, i od którego dana prosta odcina łuk, któremu odpowiada dany kąt centralny.

185. Nakreślić koło, przechodzące przez dane dwa punkta i styczne do danej prostej.

186. W trójkącie ABC poprowadzić linię w danym kierunku, któraby bok AB przecięła w punkcie X, bok BC w punkcie Y w taki sposób, ażeby summa odcinków XY i YA miała daną wielkość.

187. Zbudować trójkąt, znając a, B i $b - h_a$.
Należy przedłużyć h_a o odcinek $b - h_a$ po za a (182).

188. Zbudować trójkąt, znając A, $a - c$ i $h_b + CD$, gdzie D oznacza spodek wysokości h_b.
Należy przedłużyć CD do punktu E tak, ażeby $DE = h_b$, linię zaś BA do punktu F tak, ażeby $AF = a - c$. Jak łatwo widzieć można nakreślić CE jakoteż kąt $CEB = 45^0$ i prostą przez punkt F równoległą do CE. Następnie należy wyznaczyć punkt B (183).

189. Zbudować trójkąt, znając a, A i $b + nc$, gdzie n jest daną liczbą.

190. Zbudować trójkąt, znając A, $b + c$ i $a + e$.
Należy przedłużyć bok b po za A o długość c aż do punktu D,

bok zaś c po za B o a; następnie należy odłożyć długość CD, poprowadzić DB i wyznaczyć B.

191. W dany trójkąt ABC wpisać półkole w ten sposób, ażeby ono dotykało się boku BC w punkcie P, i któregoby końce leżały na dwu drugich bokach.

Należy pomnożyć bok AB lub AC przez — 1 odnośnie do punktu P i wtedy zadanie redukuje się do zadania 173.

Figury odwrotne.

Linia prosta obraca się około stałego punktu P (*biegun* lub *środek przekształcenia*) gdy jednocześnie punkt ruchomy A tejże samej prostej opisuje daną krzywą linię K. Na prostej wyznaczamy punkt A_1 tak, ażeby $PA . PA_1 = I$, gdzie I (*potęga przekształcenia*) jest ilością stałą (dodatnią lub ujemną). Punkt A_1 opisze drugą linie krzywą K_1. O krzywych K i K_1 mówimy że jedna jest *odwrotna* względem drugiej (przekształcona przez promienie *wodzące odwrotne*). A i A_1 nazywają się punktami odpowiednimi.

Krzywą odwrotną linii prostej jest okrąg koła, przechodzący przez punkt wzięty za biegun.

Niech linia prosta PB będzie prostopadłą do linii danej i niech punkt B_1 będzie punktem odpowiadającym punktowi B, gdy A i A_1 są też punktami odpowiednimi sobie. Z równania

$$PA . PA_1 = PB . PB_1.$$

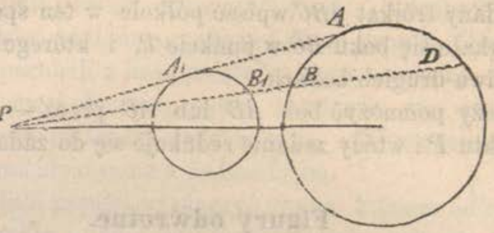
wypada, że trójkąty BPA i B_1PA_1 są podobne, tak że kąt $PA_1B_1 = 90^0$. Miejscem zatem geometrycznem punktu A_1 jest okrąg koła, którego średnicą jest linia prosta PB_1.

Jeśli linia prosta przechodzi przez biegun przekształcenia, wtedy jest ona sama swoją odwrotnością.

Odwrotnie, jeśli punkt A_1 opisuje okrąg koła, to punkt A opisze linie prostą AB, *figurą* zatem *odwrotną okręgu koła, przechodzącego przez biegun przekształcenia jest linia prosta.*

Figurą odwrotną okręgu, nie przechodzącego przez biegun przekształcenia, jest okrąg koła, mający z pierwszym biegun przekształcenia za jeden ze środków podobieństwa.

Niech B i B_1 będą dwa punkty odpowiednie i niech linia prosta PB przetnie jeszcze raz okrąg koła w punkcie D. Dwa iloczyny



$PB \,.\, PB_1$ i $PB \,.\, PD$ mają wartości stałe i dla tego też i stosunek $\frac{PB_1}{PD}$ jest stałym. Znajdziemy więc miejsce geometryczne punktu B_1, jeśli miejsce geometryczne punktu D (dany okrąg) pomnożymy przez ilość stałą odnośnie do punktu P. Szukane zatem miejsce geometryczne jest okrąg koła, podobnie położony względem danego z punktem P, jako środkiem podobieństwa. Jeśli potęga przekształcenia równa się potędze punktu P względem danego koła, to krzywą odwrotną danego okręgu będzie sam okrąg.

Dowiedliśmy, że punkta B i B_1 jednocześnie opisują okręgi kół; należy jednak zwrócić uwagę, że nie opisują jednocześnie podobnych łuków; przeciwnie punkty B_1 i D opisują łuki podobne i podobnie położone.

Teraz możemy już rozwiązać następujące ogólne zadanie:

Przez dany punkt P poprowadzić linię prostą, od której dwie dane krzywe K i K_1 odcinają dwa odcinki PX i PY, mające stały i dany iloczyn.

Jakoż przyjmując, że krzywa K_1 nie jest daną, znajdziemy, że miejscem geometrycznem punktu Y jest krzywa odwrotna względem K z punktem P jako biegunem przekształcenia. Punkt zatem Y leżeć musi na wzajemnem przecięciu się tej ostatniej krzywej z krzywą K_1. Powyższe zadanie daje się rozwiązać z pomocą cyrkla i liniału jeśli dana krzywa składa się z linij prostych i łuków kół.

192. Przez dany punkt P poprowadzić linię prostą, któraby boki danego kąta przecięła w punktach A i B tak, ażeby $PA \,.\, PB = a^2$, gdzie a jest dany odcinek.

193. Dane jest koło a w niem średnica i punkt P; trzeba poprowa-

dzić przez punkt P linię prostą, którąby przecięła okrąg koła w X, średnicę zaś w Y tak, ażeby $PX . PY = a^2$.

194. Przez jeden z punktów przecięcia się dwu okręgów należy poprowadzić linię prostą tak, ażeby cięciwy odcięte przez okręgi miały dany iloczyn.

195. Zbudować trójkąt ABC, mając wiadome: stronę kwadratu wpisanego, którego dwa wierzchołki leżą na BC, $\angle A$ i iloczyn dwu odcinków, na które jeden z wierzchołków kwadratu dzieli bok AB.

196. Zbudować trójkąt mając a, A i $BD . BA$, gdzie D jest spodkiem wysokości h_c.

Bardzo często używamy metody przekształcenia przez promienie wodzące, jeśli mamy wykonać jakąś konstrukcyę lub dowieść jakiegoś twierdzenia, gdyż bardzo często figura odwrotna jest prostsza od danej: szczególnie należy zwrócić uwagę na następujące związki pomiędzy dwiema figurami odwrotnemi.

a) *Gdy dwie figury przecinają się lub dotykają w punkcie A, to odwrotne figury przetną się lub też będą stycznemi w punkcie A_1 odpowiadającym punktowi A.*

Jeśli bowiem punkt A leży na obu krzywych, to punkt A_1 musi leżeć na krzywych odwrotnych i jeśli w punkcie A dwa punkty przecięcia zlewają się, to punkta odpowiadające im, także się zejdą w punkcie A_1.

Jeśli punkt A przypada w biegunie, to twierdzenie nie ma miejsca, gdyż punkt ten w ogólności nie odpowiada punktowi lecz linii prostej w nieskończoności.

b) *Jeśli dwie krzywe przecinają się w punkcie A pod pewnym kątem* (kąt pomiędzy stycznemi), *to krzywe odwrotne przetną się w punkcie A_1 pod tym samym kątem* (ze znakiem odwrotnym, jeśli kąt mierzyć będziemy od oznaczonej krzywej do drugiej).

Łatwo widzieć (Fig. na str. 33), że twierdzenie powyższe jest prawdziwem, gdy jedna z krzywych jest koło, druga zaś — linia prosta przechodząca przez biegun. Twierdzenie nie przestaje też być prawdziwem, gdy danemi krzywemi są dowolne dwa koła, gdyż linia prosta, łącząca punkt A z biegunem przechodzi przez punkt A_1. Ztąd zaś wypada prawdziwość twierdzenia dla dowolnych dwu krzywych, gdyż krzywe te tworzą w punkcie A ten sam kąt, jaki tworzą dwa okręgi kół, z których każdy jest styczny do jednej z krzywych

Zastosowania.

197. Nakreślić okrąg koła, przechodzący przez dany punkt P i styczny do dwu danych kół.

Przekształcając figurę przez promienie wodzące odwrotne z punktem P jako biegunem, widzimy, że zadanie redukuje się do prowadzenia wspólnej stycznej do dwu okręgów. Potęgę odwrotności możemy tak dobrać, ażeby jeden z danych okręgów pozostał niezmieniony.

198. Dowieść, że dowolny okrąg koła, przechodzący przez punkty przecięcia się dwu okręgów przecina układ kół stycznych do dwu danych (pomiędzy niemi i wspólną styczną) pod równymi kątami.

Twierdzenie to za pomocą przekształcenia przez promienie odwrotne utworzonem zostało z twierdzenia, według którego dowolna linia prosta, poprowadzona przez środek podobieństwa, układu kół podobnych i podobnie położonych przecina te koła pod jednym i tym samym kątem.

199. Wykreślić koło styczne do trzech kół, przechodzących przez jeden i ten sam punkt.

200. W dane koło wpisać czworobok, którego każdy bok przechodzi odpowiednio przez dany punkt.

Niech boki czworoboku AB, BC, CD i DA odpowiednio przechodzą przez punkty a, b, c i d. Te cztery punkty obieramy za bieguny przekształcenia, biorąc dla każdego z nich jego potęgę względem koła jako potęgę przekształcenia. Punkt A przez cztery kolejne przekształcenia około punktów a, b, c i d upadnie znów na A. Niech P będzie punkt, który za pomocą trzech przekształceń około a, b i c pada na d; punkt ten otrzymamy, przekształcając kolejno punkt d około c, b i a. Każdy okrąg koła lub każda prosta, przechodząca przez punkt P przez przekształcenie około a, b i c przechodzi w okrąg koła przez punkt d przechodzący i następnie przez nowe przekształcenie około d zamienia się w prostą. Linia zatem prosta PA po czterech przekształceniach przechodzi w prostą P_1A, gdzie P_1 oznacza punkt, który otrzymujemy, przekształcając kolejno punkt a około b, c i d. Ponieważ zaś kąt pomiędzy

PA i okregiem przez wyżej opisane przekształcenia nie zmienia ani swej wielkości ani znaku i oprócz tego sam okrąg koła pozostaje niezmienionym, więc linie PA i P_1A muszą tworzyć jedną linię prostą.

Ztąd otrzymujemy następujące rozwiązanie zadania: Za pomocą przekształcenia punktu a około b, c i d wyznaczamy punkt P_1, następnie za pomocą przekształcenia punktu d około c, b i a wyznaczamy punkt P. Linia prosta PP_1 przecina okrąg koło w pukcie A.

Powyższe rozwiązanie łatwo daje się zastosować do każdego wielokąta o parzystej liczbie boków.

201. W dane koło wpisać trójkąt ABC tak, ażeby każdy z jego boków przechodził przez dany punkt (a, b i c).

Sposób postępowania jest taki sam jak w poprzedniem rozwiązaniu tylko, że liczba przekształceń jest teraz trzy. W skutek jednak takich trzech kolejno po sobie następujących przekształceń, dwie linie PA i P_1A nie utworzą jednej linii prostej, gdyż kąty jakie PA i P_1A tworzą z okręgiem mają różne znaki. Z tego to powodu jeden z punktów, w których prosta Pa przecina okrąg, przekształcamy około punktów a, b i c; otrzymamy tym sposobem punkt Q. Linie proste aP i PA po przekształceniu przechodzą w linie QP_1 i P_1A tworzące ten sam kąt pomiędzy sobą co i dwie pierwsze linie. Kąty te mają ten sam znak (przyczynę tego łatwo zrozumieć, śledząc za przekształceniami; linie proste parami sobie odpowiadają, lecz ich punkty przecięcia nie odpowiadają sobie) i cztery proste tworzą czworobok wpisalny, tak że punkt P wyznacza się za pomocą koła przechodzącego przez punkty P, P_1 i punkt przecięcia się prostych aP i P_1Q.

Rozwiązanie powyższe z łatwością daje się zastosować do wielokąta o nieparzystej liczbie boków.

Miejsca geometryczne wogólności.

Oprócz miejsc geometrycznych, które w poprzednich ustępach przytoczyliśmy, jest jeszcze bardzo wiele innych, mających częste zastosowania, których jednak szczegółowe opisanie byłoby zbyt rozwlekłem. Dla tego przy rozwiązywaniu zadań, w których opisane przez nas miejsca geometryczne nie znajdują zastosowania, należy samemu szukać linij prostych lub kół będących miejscami geometrycznemi punktów figur. Dobrze wykonany rysunek jest w takim razie bardzo skutecznym i praktycznym środkiem pomocniczym.

Często się zdarza, że mając nakreślić figurę w pewném oznaczonem położeniu, możemy ją, po usunięciu jednego z postawionych warunków zadania, nakreślić w dowolnem położeniu i następnie przez równoległe przesuwanie lub przez obrót około pewnego punktu doprowadzić do żądanego położenia. Miejscami geometrycznemi punktów figury będą wtedy odpowiednio linie proste lub koła współśrodkowe.

Przykłady.

202. Nakreślić koło o danym promieniu, któregoby środek leżał na danej prostej, i któryby drugą daną prostą przeciął po cięciwie danej długości.
Należy nakreślić koło tak, ażeby ono w jakiemkolwiek miejscu odcięło od danej prostej daną cięciwę i następnie doprowadzić je do szukanego położenia, nadając mu ruch taki, ażeby środek jego opisał prostą równoległą do danej.
203. Nakreślić koło danego promienia, któregoby środek leżał na okręgu danym i któreby przecięło się z drugim danym okręgiem według cięciwy danej długości.
204. Nakreślić koło danego promienia, któreby przechodziło przez dany punkt i przecięło daną prostą po cięciwie danej długości.
205. Nakreślić trójkąt równy danemu w ten sposób, ażeby jeden z jego boków leżał na danej prostej, wierzchołek zaś przeciwległy temu bokowi na drugiej danej prostej.
206. W dany odcinek koła wpisać trójkąt równy danemu.
207. Nakreślić koło danego promienia, aby przecięło dwie dane proste lub dwa dane okręgi podług danych cięciw.
208. Do danego koła poprowadzić styczną tak, aby dwie dane linie równoległe lub dwa koła współśrodkowe odcięły od niej daną długość.

209. Przez dany punkt poprowadzić linię prostą tak, ażeby część odcięta na niej przez dwa koła współśrodkowe była widzianą ze środka tych kół pod danym kątem.

210. Dane są dwa koła; należy wyznaczyć taki punkt, żeby styczne od niego poprowadzone do danych kół utworzyły dany kąt i jedna z nich miała daną długość.

Należy styczną, której długość jest dana, wykreślić w ten sposób, ażeby ona dotykała się jednego z danych kół w dowolnym punkcie i w jej końcu nakreślić kąt równy danemu; następnie należy drugie koło obracać około środka pierwszego dopóty, dopóki ono nie stanie się stycznem do poprzednio wykreślonej linii, w końcu należy to koło wraz ze styczną zwrócić do pierwotnego położenia.

211. Nakreślić koło styczne do dwu danych linij równoległych i przechodzące przez dany punkt.

212. Przez dany punkt poprowadzić linię prostą, od której dwie pary linij równoległych odcięłyby równe części.

Linia szukana musi być równoległą do przekątnej równoległoboku utworzonego przez obie pary linij równoległych.

213. Nakreślić dwa koła o danych promieniach w ten sposób, ażeby jedno z nich przecięło daną prostą według danej cięciwy, drugie przecięło drugą prostą według drugiej danej cięciwy; oprócz tego, koła mają być styczne do siebie i linia prosta wspólna styczna ma mieć dany kierunek.

214. W dane koło wpisać trójkąt, którego jeden bok jest danym, i w którym ośrodkowa, temu bokowi odpowiadająca przechodziłaby przez dany punkt i miała daną długość.

215. W dane koło wpisać trójkąt, którego dany jest jeden bok i ośrodkowa do drugiego boku należąca, i w którym ośrodkowe przecinałyby się w punkcie leżącym na danej średnicy.

216. W danem kole poprowadzić cięciwę danej długości, którąby przez daną średnicę została podzieloną w danym stosunku.

217. W dany czworokąt wpisać równoległobok, któregoby boki miały dane kierunki.

Jeśli usuniemy jeden z boków czworokąta, to swobodny wierzchołek równoległoboku opisuje linię prostą

218. Przez dany punkt poprowadzić linię prostą, którąby przecięła

trzy dane proste w ten sposób, ażeby trzy punkty przecięcia i dany punkt leżały harmonicznie.

Jeśli usuniemy jedną z trzech danych prostych, to swobodny punkt opisuje linię prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się dwu pozostałych prostych.

219. Zbudować trójkąt, znając w_a, B i odległość C od w_a.

Należy nakreślić w_a i wystawić do niej prostopadłą w punkcie A. Zadanie sprowadza się do poprzedniego, tylko że na miejscu jednej z trzech danych prostych występuje łuk, obejmujący kąt A.

B. Miejsca geometryczne linij prostych.

Linia prosta zupełnie tak samo jak i punkt jest zupełnie wyznaczoną, gdy dane są dwa warunki, którym ma czynić zadość, i tak samo jak punkt będzie częściowo wyznaczoną, gdy danym będzie jeden tylko warunek, gdyż zawsze się znajdzie linia krzywa, która jest styczną do wszystkich prostych czyniących zadość danemu warunkowi. Trzymając się anologii, możemy tę krzywą nazwać miejscem geometrycznem linij prostych. W szczególnym przypadku krzywa ta może się zamienić w punkt, tak że wtedy wszystkie linie proste czyniące zadość warunkowi danemu przechodzą przez ten punkt. Z wyjątkiem tego ostatniego przypadku rozpatrywać będziemy tylko takie przypadki, w których krzywą będzie koło.

We wszystkich więc razach, w których możemy wyznaczyć dwa miejsca geometryczne linii prostej, zadanie redukuje się do następujących:

1. Poprowadzić linię prostą przez dane dwa punkty.
2. Z danego punktu poprowadzić styczną do koła (16).
3. Poprowadzić styczną wspólną do dwu kół (137).

Podamy tu najważniejsze miejsca geometryczne dla linij prostych.

I. *Miejscem geometrycznem równych cięciw jednego koła jest okrąg koła współśrodkowego z danem.*

Należy w danem kole poprowadzić daną cięciwę i nakreślić koło styczne do tej cięciwy.

m. *Miejscem geometrycznem linij, których odległości od dwu stałych punktów mają dany stosunek, jest punkt, dzielący linię prostą, łączącą dane dwa punkty w danym wyżej stosunku.* Odległości należy brać z właściwym znakiem.

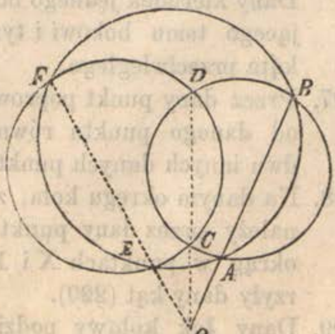
n. *Miejscem geometrycznem punktów, których odległości od dwu danych punktów mają daną summę jest okrąg koła, mający swój środek we środku linii prostej łączącej dane dwa punkty.*

Jeśli *różnica odległości* ma być równą danej linii, to miejsce geometryczne składa sie z dwu punktów w nieskończonej odległości i linie tworzą więc dwa układy linij równoległych. Kierunek tych linij dany jest przez styczną poprowadzoną od jednego z danych punktów do koła zakreślonego i drugiego punktu jako ze środka promieniem równym danej linii.

Uwaga. Odległości należy brać z właściwym znakiem. Jeśli odległość od jednego oznaczonego punktu z dwu danych ma być wziętą za odjemną, to miejscem geometrycznem będzie jeden tylko nieskończenie odległy punkt.

o. *Jeśli w dane koło wpiszemy kąty, których boki opierają się na końcach jednego i tego samego łuku i wszystkie te kąty podzielimy w jednaki sposób na dwie części liniami prostemi, to wszystkie linie dzielące przejdą przez jeden i ten sam punkt łuku, który otrzymamy, dzieląc jeden z kątów wpisanych w podany sposób.*

p. *Jeśli przez dane dwa punkty poprowadzimy koła, które dane koło przecinają (lub dotykają się), to miejscem geometrycznem wspólnych cięciw będzie punkt, leżący na linii łączącej dwa dane punkty.*



Niech danymi punktami będą A i B i niech dowolne koło przez te dwa punkty poprowadzone przetnie dane koło w punktach C i D. Linia prosta CD przetnie linię AB w szukanem miejscu geometrycznem O; gdyż jeśli inne dowolne koło przez punkta A i B przechodzące przecina koło stałe w punktach E i F, to linie FE, DC i BA są osiami radykalnemi trzech kół i jako takie przecinają się w jednym punkcie i dla tego EF musi przejść przez punkt O.

Przykłady.

220. Przez dany punkt poprowadzić prostą, od której dane koło odcina danej długości cięciwę.
Zadanie redukuje się przez I do zadania 16.

221. Poprowadzić linię prostą, od której dwa dane koła odcinają danych długości cięciwy.

222. Poprowadzić linię prostą, która daną prostą przecina w punkcie X, dane zaś koło w punktach Y i Z tak, że linie proste XY i YZ mają dane długości.
Zadanie redukuje się przez I do zadania 11.

223. W dane koło wpisać trójkąt w ten sposób, ażeby był podobnym danemu trójkątowi i ażeby jeden jego bok przechodził przez dany punkt.

224. W danem kole poprowadzić cięciwę danej długości i danego kierunku.

225. W dane koło wpisać trójkąt, czyniący zadość następującym warunkom: jeden jego bok ma być równy i równoległy danej linii i oprócz tego dwójsieczna kąta przeciwległego ma przechodzić przez dany punkt.
Jeden bok otrzymujemy bezpośrednio (I), następnie znamy dwa punkty dwójsiecznej kąta przeciwległego.

226. W dane koło wpisać trójkąt, znając kierunek jednego boku, dwójsieczną kąta przeciwległego jakoteż jeden punkt tej ostatniej.
Dany kierunek jednego boku oznacza środek łuku, odpowiadającego temu bokowi i tym sposobem znaną jest dwójsieczna kąta przeciwległego.

227. Przez dany punkt poprowadzić linię prostą, której odległość od danego punktu równała by się summie jej odległości od dwu innych danych punktów.

228. Na danym okręgu koła, znamy położenie dwu punktów A i B, należy przez dany punkt P poprowadzić prostą, przecinającą okrąg w punktach X i Y tak, ażeby proste AX i BY utworzyły dany kąt (220).

229. Dany łuk kołowy podzielić na takie dwie części, ażeby ich cięciwy miały dany stosunek.

Kąt jaki szukane cięciwy ze sobą tworzą, zostaje podzielonym na dwie równe części przez linię prostą. dzielącą cięciwę danego łuku w danym stosunku i przechodzącą przez środek łuku, dopełniającego dany łuk do całego okręgu.

230. Przez dany punkt poprowadzić prostą, przechodzącą przez punkt przecięcia się dwu prostych, jeśli te proste nie przecinają się w granicach rysunku.

Jeśli pomiędzy danemi prostemi poprowadzimy dwie linie równoległe, z których jedna przechodzi przez dany punkt, to szukana prosta dzieli odcinki obu równoległych w tym samym stosunku.

231 Zbudować trójkąt, znając części, na które linia prosta AD dzieli $\angle A$ i bok a.

Należy nakreślić koło opisane z bokiem a jako cięciwą i wtedy będziemy znali dwa punkty linii AD (**o**).

232. Zbudować trójkąt, znając h_a, w_a i m_a.

Trójkąty prostokątne, oznaczone przez te trzy dane linie możemy bezpośrednio nakreślić; otrzymamy tym sposobem A i prostą, na której leży a, pozostaje więc tylko wyznaczyć B i C. Punkty te otrzymamy, kreśląc okrąg opisany około trójkąta. Przedłużywszy bowiem w_a i wystawiwszy prostopadłą ze środka boku a widzimy, że linie te muszą się przeciąć we środku łuku, odpowiadającego bokowi a; wyznaczywszy ten punkt, łatwo nakreślić koło.

233. Do danego koła poprowadzić styczną, której odległości od dwu danych punktów miałyby daną summę.

234. Dany jest czworokąt $ABCD$, należy w nim poprowadzić prostą, którąby była w równej odległości od A i C jakoteż od B i D. (Równe odległości mają znaki przeciwne).

235. W dane koło wpisać czworokąt $ABCD$, znając jego przekątnią AC, kąt pomiędzy przekątniemi i wiedząc oprócz tego, że w czworokąt szukany można wpisać koło.

Należy w danem kole nakreślić przekątnią AC jako cięciwę, wtedy znanym nam będzie kierunek BD, a zatem i środki łuków do BD należących. Można więc będzie poprowadzić dwójsieczne kątów A i C, które muszą się przeciąć we środku koła wpisanego w czworokąt. Dwójsieczne kątów B i D muszą przejść przez ten środek koła i przez środki łuków, należących do AC; można zatem te linie poprowadzić i tym sposobem wyznaczyć B i D.

236. Nakreślić kwadrat, którego boki pojedyńczo brane przechodzą przez jeden z czterech punktów A, B, C i D.

Na AB i CD jako na średnicach opiszmy półokręgi kół; które będą geometrycznemi miejscami dla dwu wierzchołków kwadrata; ponieważ przekątnia kwadrata jest dwójsieczną jego kątów, więc musi ona przejść przez środki obu półokręgów i ztąd można ją bezpośrednio wykreślić. Za pomocą tej przekątni wyznaczymy dwa wierzchołki kwadratu i następnie nietrudno będzie wyznaczyć dwa pozostałe wierzchołki.

237. Zbudować czworokąt podobny danemu, i któregoby boki pojedyńczo brane przechodziły przez cztery dane punkty.

Zadanie to jest łatwem uogólnieniem poprzedniego i daje się w podobny sposób rozwiązać, gdyż przekątnie dzielą kąty szukanego czworokąta w wiadomy sposób.

238. Przez dane dwa punkty poprowadzić koło styczne do danego.

Przez dane dwa punkty A i B poprowadzimy dowolne koło przecinające dane. Wspólna cięciwa przecina AB w punkcie, który leżeć musi na wspólnej stycznej do danego i szukanego koła; poprowadziwszy tę styczną, otrzymujemy punkt styczności i następnie środek szukanego koła.

Poprzednie zadanie da się jeszcze tak wyrazić:

Dane są dwa punkty A i B i okrąg koła; wyznaczyć na okręgu koła punkt X taki, ażeby linie AX i XB przecięły okrąg koła w dwu punktach, które połączywszy linią prostą, otrzymalibyśmy linię równoległą do AB.

239. Przez dwa dane punkty poprowadzić koło, które przecina dane koło według danej cięciwy.

240. Zbudować czworokąt wpisalny, znając CA, BD, $\angle A$ i $\angle ACB$.

Należy nakreślić BD i wyznaczyć A za pomocą **e** i **o**.

241. Przez dane dwa punkty poprowadzić koło, przecinające dane koło w ten sposób, żeby cięciwa przecięcia się kół była styczną do drugiego danego koła.

242. Przez dane dwa punkty poprowadzić koło, któreby dane koło

przecięło w ten sposób, żeby odległości cięciwy przecięcia się kół od dwu danych punktów były w danym stosunku.

243. Zbudować trójkąt równy danemu i czyniący zadość następującym warunkom: dwa boki mają przechodzić przez dwa punkty i dwójsieczna kąta utworzonego przez te dwa boki ma być styczną do danego koła.

244. Dane są dwie linie równoległe, na jednej z nich punkt A, na drugiej punkt B, należy przez dany punkt P poprowadzić prostą, przecinającą obie równoległe w punktach X, Y tak, ażeby AX i BY były w danym stosunku.

245. Dane są trzy punkty A, B i C i koło. Należy przez punkty A i B poprowadzić dwie cięciwy ZX i VY w ten sposób, ażeby XY i ZV przechodziły przez punkt C.

ROZDZIAŁ DRUGI.

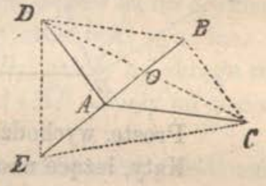
PRZEKSZTAŁCANIE FIGUR.

Warunkiem zastosowalności metod podanych w poprzednim rozdziale jest, ażeby dane części w nakreślonej figurze zostawały w prostych pomiędzy sobą związkach, a mianowicie, ażeby, o ile można, *leżały blisko siebie*, gdyż w tym przypadku bardzo często można odrazu nakreślić większą część figury, tak że zadanie redukuje się do wyznaczenia punktu lub linii prostej. Gdy poprzedni warunek nie ma miejsca, wtedy nie możemy bezpośrednio zastosować miejsc geometrycznych; lecz to cośmy wyżej powiedzieli prowadzi łatwo do zasady, której się w tym przypadku trzymać należy, i która stanowić będzie podstawę następnych rozumowań. *Jakoż, należy się starać wykreśloną figurę przekształcic na inną, w której dane części tak są ugrupowane, że konstrukcyę wykonać można.* Jeśli ta ostatnia figura będzie wykreśloną, to w ogólności łatwo wrócić się do szukanej figury. Metody służące do podobnego przekształcenia są:

A. Równoległe przesuwanie,
B. Kład i
C. Obrót.

A. Równoległe przesuwanie.

Dla zbliżenia niektórych części figur za pomocą tej metody, przesuwamy niektóre linie figury w nowe położenia, równoległe do pierwotnych. W szczególności daje się ta metoda często zastosować, dgy w figurze szukanej mamy dwie linie proste i kąt pomiędzy niemi zawarty, gdyż przesuwając jednę z danych linij tak, ażeby jeden jej koniec przypadł z jednym końcem drugiej linii, otrzymamy trójkąt, który bezpośrednio wykreślić można. W dowolnym wielokącie można jego części tak złączyć, że przez równoległe przesuwanie boków doprowadzimy je do tego, że wszystkie będą wychodzić z jednego punktu. Boki te mogą być poprowadzone w takich kierunkach, że kąty, jakie ze sobą tworzą, równe będą kątom zewnętrznym początkowego wielokąta, których summa, jak wiadomo, równa się czterem prostym. Jeśli końce tak poprowadzonych prostych połączymy liniami prostemi, otrzymamy wielokąt, który w wielu przypadkach jest łatwiejszym do przekształcenia niż dany. Następujące przypadki lepiej wyjaśnią naszą myśl.



Trójkąt. Przez przesuwanie utworzymy z trójkąta ABC trójkąt CDE, $AE = AB$ i $DB = AC$. Linie wychodzące z A są bokami pierwotnego trójkąta, kąty zaś przy A—jego kątami zewnętrznymi. Ponieważ $DC = 2CO$, to boki nowego trójkąta są podwójnemi ośrodkowemi danego trójkąta, A przeciwnie jest punktem przecięcia się ośrodkowych nowego trójkąta. Ponieważ punkty B i D są w równej od AC odległości, więc wysokości trójkąta ABC będą też wysokościami trójkątów schodzących się w A. Ponieważ przy równoległem przesuwaniu, kąty nie ulegają zmianie, więc wszystkie kąty, jakie tworzą ze sobą boki, wysokości i ośrodkowe muszą też się znajdować w nowej figurze. Ponieważ $\triangle\ DAC$ jest równoważny z trójkątem ABC, więc pole $\triangle\ DEC$ musi być trzy razy większem od pola $\triangle\ ABC$. Jeśli można wykreślić $\triangle\ DEC$ albo jeden z dwu mniejszych trójkątów schodzących się w A, to łatwo będzie wrócić się do $\triangle\ ABC$.

Przykłady.

246. Zbudować trójkąt, znając jego trzy ośrodkowe.

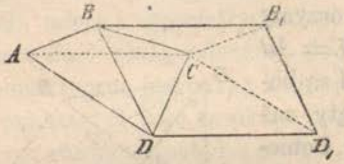
Należy wykreślić $\triangle\ DEC$ i następnie wyznaczyć punkty A i B.

247. Zbudować trójkąt, znając m_c, h_a i h_b.

Należy wykreślić DOC (35); następnie poprowadzić $BO = OA$.

Zbudować trójkąt, znając:

248. h_a, m_a i m_b.
249. h_a, m_b i h_c.
250. h_a, m_b i m_c.
251. A, h_a i m_a.
252. h_a, m_a i $h_c : b$.
253. A, h_a i m_b,
254. m_a, m_c i $\angle (m_b, a)$.
255. m_a, h_a i h_b.
256. h_a, h_b i $\triangle (m_a, b)$.
257. h_a, h_a i $\angle (m_b, c)$.
258. h_a, $b + c$ i $h_b : h_c$.



Czworokąt. W czworokącie możemy boki AB i AD przesunąć do położeń CB_1 i CD_1; otrzymany równoległobok BB_1DD_1 będzie zawierał niektóre części czworokąta w prostszym pomiędzy sobą związku:

Proste, wychodzące z punktu C, są kątami czworokąta.

Kąty, leżące naokoło punktu C, są bokami czworokąta.

Boki równoległoboku są przekątnemi czworokąta i kąty jego równają się kątom utworzonym przez te przekątne.

Kąty utworzone przez linie proste, wychodzące z punktu C i boki równoległoboku równają się kątom pomiędzy przekątnemi i bokami czworokąta.

Pole równoległoboku jest dwa razy większem od pola czworokąta. Przekątne równoległoboku są dwa razy większe od prostych, łączących środki przeciwległych boków czworokąta; do tego wypadku łatwo dojdziemy, uważając równoległobok utworzony z linij łączących środki boków czworoboku.

W równoległoboku zatem napotykamy wszystkie te wielkości, które zwykliśmy uważać w każdym czworokącie. Przesunięcie okazuje się być szczególnie pożytecznem, gdy mamy przekątne czworokąta i kąt pomiędzy niemi, gdyż wtedy równoległobok daje się bezpośrednio wykreślić i zadanie redukuje się do wyznaczenia punktu C. Dla tego punktu odrazu odnajdujemy dwa miejsca geometryczne, gdy z wyżej wymienionych części znane nam będą dwie, lub też pewien związek pomiędzy niektóremi z nich (np. stosunek dwu boków, summa lub różnica ich kwadratów i t. d.). Liczny szereg zadań, które tym sposobem bezpośrednio rozwiązać możemy, zostaje jeszcze powiększony przez prostą uwagę, że w każdym czworokącie dwa boki przeciwległe możemy uważać za przekątne, przekątne zaś za dwa boki; tym sposobem możemy rozwiązać wszystkie takie zadania, w których zamiast przekątnych i ich kątów mamy dwa boki przeciwległe i kąty pomiędzy nimi.

Dla jaśniejszego wytłomaczenia metody, zastosujemy ją do rozmaitego rodzaju zadań.

Przykłady.

259. Zbudować trapez, znając wszystkie jego boki.

Przesuwając jeden z nierównoległych boków aż do drugiego boku otrzymamy trójkąt, którego wszystkie boki są znane.

260. W kole są dane dwie cięciwy AB i CD; należy na okręgu wyznaczyć taki punkt X, ażeby proste XA i XB odcięły od cięciwy CD część FG równą linii danej.

Przesuwając odcinek FG aż punkt F upadnie na A, znajdziemy, że punkt G upadnie na punkt H, który łatwo wyznaczyć możemy; następnie wyznaczamy punkt G za pomocą e, gdyż $\angle HGB = \angle X$ (kąt wpisany w odcinek mający cięciwę AB).

261. Zbudować czworokąt $ABCD$, znając jego cztery boki i linię EF łączącą środki boków AB i CD.

Dla złączenia części czworokąta, posuniemy boki BC i AD do położeń EC_1 i ED_1. Punkty C_1, F i D_1 leżeć muszą na jednej linii prostej, gdyż trójkąty C_1CF i DD_1F są równe sobie. Teraz możemy wykreślić $\triangle C_1D_1E$ (121) i następnie wyznaczyć C i D. Konstrukcya pokazuje, że kąt C_1ED_1 pomiędzy bokami przeciwległymi jest niezależnym od długości dwu pozostałych boków. Rozwiązanie zadania dałoby się jeszcze uskutecznić na zasadzie wyżej wyłożonego ogólnego przesunięcia.

262. Przez jeden z punktów przecięcia się dwu okręgów kół, poprowadzić prostą, od której dwa okręgi odcinają cięciwy, mające daną różnicę. (Cięciwy należy brać z właściwymi znakami, licząc kierunki od punktu przecięcia okręgów).

Rzut linii środków na szukaną linię równa się połowie danej różnicy. Przesuwając ten rzut tak długo, aż jeden jej koniec upadnie na jeden ze środków kół, przekonamy się, że rzut ten wraz z linią środków tworzy trójkąt prostokątny, który łatwo wykreślić można. Szukana linia będzie równoległą do jednego z boków tego trójkąta. Jeśli summa cięciw jest daną, to należy summę tę wprowadzić do figury, mnożąc jeden z okręgów przez —1 odnośnie do punktu przecięcia się okręgów, następnie należy nowe koło podstawić na miejsce danego i wykonać wykreślenie wyżej podane.

263. Wykreślić prostokąt, znając jeden jego bok i wiedząc, że każdy z boków ma przechodzić przez dany punkt (262).

264. W danym trójkącie ABC poprowadzić linię prostą od punktu X na boku AB do punktu Y na boku BC tak, ażeby odcinek XY miał daną długość i ażeby $AX:CY=p:q$.
Przesuwając XY w położenie AY_1 możemy oznaczyć punkt Y_1, gdyż znamy jego odległość od punktu A i kształt trójkąta YY_1C.

265. Dane dwa okręgi kół należy przeciąć linią prostą poprowadzoną w danym kierunku w ten sposób, ażeby summa lub różnica cięciw, jakie koła na poprowadzonej linii odcinają, miała daną wielkość.
Jeden z danych okręgów należy przesuwać w danym kierunku tak długo, aż przetnie drugi na szukanej linii i w tem położeniu łatwo wyznaczyć możemy jego środek.

266. Przez dany punkt poprowadzić linię prostą, od której dane dwa okręgi odcinają równe cięciwy.
Należy jeden z okręgów przesuwać dopóty, dopóki równe cięciwy nie zleją się ze sobą i wtedy łatwo nam będzie wyznaczyć środek przesuniętego koła w nowem położeniu, gdyż z tego środka daną linię środków widzimy pod kątem prostym i nadto znamy jego odległość od danego punktu, albowiem styczna poprowadzona od danego punktu do koła przesuniętego, równa się stycznej poprowadzonej do koła stałego.

267. W dwu danych kołach o środkach A i B poprowadzić dwa

równoległe promienie AX i BY, które z danego punktu P widać pod równymi kątami.

Trójkąt AXP przesuwamy o odcinek równy i równoległy linii środków, mnożąc go jednocześnie przez stosunek promieni, tak że AX i BY wskutek przesunięcia zleją się z sobą. Punkt P zajmie nowe miejsce P_1, które łatwo wyznaczyć możemy, gdyż znamy kierunek i wielkość BP_1. Ponieważ $\angle YP_1B = \angle XPA$, więc punkty P, P_1, B i Y muszą leżeć na jednym okręgu koła i tym sposobem wyznaczamy punkt Y.

268. Zbudować równoległobok, znając jego boki i kąt pomiędzy przekątnemi.

Przesuwając jedną z przekątnych, aż jej koniec upadnie na koniec drugiej przekątnej, będziemy mogli wykreślić trójkąt, w którym przekątne są jego boki. (18).

269. Zbudować trapez, znając jego przekątne, linię prostą łączącą środki boków nierównoległych i jeden z jego kątów.

Zadanie to za pomocą sposobu wyżej podanego sprowadza się do 3.

270. W jakim przypadku, przy ogólnem przesunięciu czworokąta punkt C pada na jedną z przekątnych równoległoboku?

Za pomocą równoległego przesunięcia można rozwiązać ogólne zadanie, które się często napotyka:

Pomiędzy dwiema danemi krzywemi poprowadzić linię prostą równą i równoległą do danej.

Przesuwając jedną z danych krzywych o odcinek równy i równoległy do danej prostej, widzimy, że ona musi przeciąć drugą krzywą w punkcie, przez który ma przechodzić szukana prosta. Zadanie daje się zawsze rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału, jeśli krzywe stanowią układ linij prostych i łuków kół.

271. Linię prostą równą i równoległą do danej, umieścić końcami na danym okręgu.

272. W trójkącie poprowadzić poprzeczną danej długości równolegle do jednego z boków.

273. W kole poprowadzić cięciwę równą i równoległą do danej prostej.

274. Z okrętu widać dwa znane punkty pod danym kątem; przepłynąwszy przez pewien czas daną przestrzeń w danym kierunku znowu obserwujemy z okrętu nowy kąt, pod którym widzimy dane punkty; wyznaczyć miejsce okrętu.
Jeśli przez te znane dwa punkty poprowadzimy łuki zawierające dane kąty, to łatwo widzieć, że zadanie sprowadza się do zadania 271.

Szczególny sposób równoległego przesunięcia stosujemy często, gdy mamy do czynienia z okręgami kół stycznymi do innych okręgów lub linij prostych; wyobrażamy sobie wtedy, że promień jednego koła maleje do zera, tak, że koło redukuje się do swego środka, jednocześnie zmieniają się też i linie proste i koła styczne, pierwsze zachowują przy tem swój kierunek, drugie swoje środki. Tą drogą postępując, możemy często dane zadanie sprowadzić do prostszego, gdyż lubo warunki zadania pozostają te same, to jednak możemy koło zastąpić punktem.

275. Do dwu danych kół poprowadzić styczną wspólną.
Gdy mniejsze koło będzie się ciągle zmniejszać, aż się stanie punktem, i gdy jednocześnie styczne ulegną odpowiedniej zmianie, wtedy drugie koło, które nie przestaje się dotykać do stycznych, otrzyma promień równający się summie lub różnicy promieni danych kół, stosownie do tego, czy uważamy styczne wewnętrzne lub zewnętrzne. Tym sposobem zadanie spowadza się do 16.

276. Wykreślić koło styczne do dwu danych prostych i do danego koła.
Jeśli dane koło będzie się zmniejszać aż się zamieni na swój środek, wtedy zadanie będzie sprowadzonem do 181. Szukane koło może być stycznem do danego koła w dwojaki sposób, odpowiednio temu mamy przesunięcia stycznych w przeciwległych kierunkach.

277. Wykreślić koło styczne do danego koła i do danej prostej w danym jej punkcie.

278. Wykreślić koło styczne do dwu kół, do jednego w danym punkcie.

Różne przykłady na posunięcia równoległe.

279. Zbudować czworokąt, znając jego boki i kąt pomiędzy dwoma przeciwległemi bokami zawarty.
280. Zbudować czworokąt, znając jego przekątne, kąt pomiędzy niemi i dwa kąty przeciwległe czworokąta.
281. Zbudować trapez, znając jego przekątne, kąt pomiędzy niemi i summę lub różnicę dwu boków przyległych.
282. Zbudować trójkąt, znając m_a, $\angle (m_b, m_c)$ i powierzchnię trójkąta.
283. W trójkącie ABC, w którym $\angle B = 90^0$ należy poprowadzić poprzeczną XY danej długości tak, ażeby summa $\overline{AX}^2 + \overline{XY}^2 + \overline{YC}^2$ była równą danemu kwadratowi.
Punkt Y (patrz 264) wyznacza się na zasadzie **a**.
284. Zbudować czworokąt wpisalny, znając jego przekątne, kąt pomiędzy niemi i kąt pomiędzy jedną przekątną i bokiem.
285. Zbudować czworokąt, znając jego przekątne, kąt pomiędzy niemi, stosunek dwu boków przyległych i kąt pomiędy dwu drugimi bokami.
286. Około danego trójkąta opisać największy możebny trójkąt równoboczny.
287. Zbudować czworokąt, znają dwa kąty przeciwległe, powierzchnię i dwie linie łączące środki boków przeciwległych. Kąt pomiędzy danemi liniami wyznacza się z wielkości tychże i powierzchni czworokąta. Znając ten kąt, możemy zastosować ogólną metodę przesunięcia czworokąta.
288. Zbudować czworokąt $ABCD$, znając AB, CD, $\angle BAC$, $\angle ACD$ $\angle BDA$.
289. Zbudować czworokąt, znając dwa boki przeciwległe i wszystkie kąty.
290. Zbudować trapez, znając jego przekątne, kąt pomiędzy niem i jeden bok.
291. Zbudować czworokąt, znając jego trzy boki i kąty przyległe czwartemu bokowi.
292. Zbudować czworokąt $ABCD$, znając AB, CD, AC, $\angle ABD$ i $\angle BDC$.

293. Zbudować czworokąt, znając $\angle BCA$, $\angle CAD$, przekątne i kąt pomiędzy niemi.

294. Dane są dwie linie równoległe L i M, trzecia prosta N i punkt P; należy przez ten punkt P poprowadzić prostą, ażeby ona przecięła dane proste, odpowiednio w punktach A, B, C w ten sposób, ażeby AB i CP były w danym stosunku.
Należy przesunąć AB i CP w położenia A_1Q i QP_1, gdzie Q oznacza punkt przecięcia się prostych M i N, i wyznaczyć punkt P_1.

295. W trójkącie $AXBYC$ należy poprowadzić prostą XY w danym kierunku tak, ażeby AX i YC miały daną summę.

296. Zbudować trapez, znając jego przekątne i boki nierównoległe (142).

297. Rozwiązać zadanie w 169 w przypuszczeniu, że punkt A jest dowolny.

298. Zbudować czworokąt, znając jego przekątne, dwa boki przeciwległe i kąt pomiędzy nimi.

299. Zbudować czworokąt, znając linię prostą, łączącą dwa boki przeciwległe, przekątne, stosunek dwu boków przeciwległych i summę kwadratów dwu drugich boków.
Zwyczajny równoległobok daje się wykreślić, gdyż znamy jego boki i przekątnią.

300. Zbudować czworokąt, znając cztery jego boki i linię łączącą środki jego przekątnych.
Rozwiązanie podobne do poprzedniego lub do 261.

301. Zbudować trójkąt, znając dwie jego ośrodkowe i kąt pomiędzy trzecią ośrodkową i bokiem odpowiednim.

302. Zbudować trapez, znając jego boki równoległe i przekątne.

303. W dane koło wpisać trapez, w którym znamy jego wysokość i różnicę boków równoległych.

304. Zbudować czworokąt, znając: dwa boki przeciwległe, linię dzielącą dwa pozostałe boki w danym stosunku, stosunek tych boków i kąt pomiędzy nimi.
Rozwiązanie podobne do 261.

305. Zbudować trapez, znając jego przekątne, linię łączącą środki przekątnych i linię łączącą środki dwu boków przeciwległych.

306. W dane koło wpisać trapez, znając jego wysokość i summę boków równoległych.

Trapezowi możemy nadać takie położenie, że zostanie on podzielonym przez każdą średnicę na dwie części symetryczne. Środek jednego z nierównoległych boków musi leżeć na znanej linii równoległej do średnicy. Spodek wysokości poprowadzonej z końca jednego z nierównoległych boków daje się wyznaczyć (271 i 336).

307. Na danej prostej AB umieścić drugą CD danej długości tak, ażeby punkty C i D dzieliły linię AB harmonicznie.

Na AB jako na cięciwie opiszemy koło dowolne i, uważając zadanie jako rozwiązane, poprowadzimy z punktów C i D proste CE i DF do środków dwu łuków AB. Te linie są do siebie prostopadłe i przecinają się na okręgu koła. Gdy przesuniemy CD równolegle do siebie aż do EG, to odcinek FG widzianym będzie z punktu D pod kątem prostym. Jeśli M jest środkiem linii AB, to znamy iloczyn i różnicę MC i MD; na zasadzie tej uwagi można też zadanie łatwo rozwiązać.

308. Dane są dwa punkty A i B i pomiędzy nimi dwie linie równoległe; należy pomiędzy temi równoległemi poprowadzić prostą w danym kierunku tak, ażeby summa $AM + MN + NB$ była najmniejszością (minimum).

309. Przez dany punkt P poprowadzić prostą, którejby odległości AX i BY od dwu danych punktów A i B miały dany iloczyn.

Przesuwając BY aż do AY_1, widzimy, że miejscem geometrycznem dla Y_1 jest prosta, gdy dla X jest okrąg koła, którego średnica jest AP; przesuwając prostą o odcinek AB otrzymamy, że miejscami geometrycznemi punktu Y są: koło i linia prosta.

310. Z danego punktu P poprowadzono prostą PA do punktu A na danej krzywej i z innego danego punktu L prostą LB równoległą do PA, tak ażeby $LB : PA = m : n$; wyznaczyć miejsce geometryczne punktu B.

B. Kład.

Tą metodą zupełnie tak samo jak poprzednią posługujemy się w celu otrzymania przy wykreśleniu figur, w których dane części miałyby wygodniejsze położenie. Metoda ta polega na tem, że jednej części figury nadajemy nowe położenie, a to w celu:

1) *Skupiania danych części.*

311. W dane koło wpisać czworokąt $ABCD$, w którym znamy dwa boki przeciwległe AB i CB i stosunek dwu pozostałych boków. Przewróciwszy trójkąt ABC tak, ażeby punkt A upadł na punkt C i punkt C na punkt A, zobaczymy, że punkt A i teraz leżeć będzie na okręgu. Przez takie odwrócenie doprowadziliśmy do tego, że dane części figury znajdują się w położeniu dogodniejszem dla rozwiązania, gdyż znamy teraz dwa boki przyległe i stosunek dwu pozostałych; możemy więc dane dwa boki bezpośrednio wykreślić i następnie wyznaczyć czwarty wierzchołek (229).

Pozostaje teraz przywrócić trójkątowi ABC jego położenie pierwotne.

312. Zbudować czworokąt opisalny $ABCD$, znając AD, AB, $\angle D$ i $\angle B$. Jeśli trójkąt ADC obrócimy około dwójsiecznej kąta A, to punkty D i C odpowiednio upadną na punkty D_1 i C_1 i linia D_1C_1 stanie się styczną do okręgu. Możemy teraz zbudować trójkąt, którego jeden bok jest BD_1, ponieważ znamy ten bok i dwa kąty jemu przyległe; koło daje się następnie łatwo wykreślić, gdyż musi ono być stycznem do boków tego trójkąta.

2) *Wprowadzenia danych części do figury.*

313. Zbudować trójkąt, znając a, b i $A—B$.

Odwróćmy trójkąt tak, ażeby punkt B upadł na punkt A, punkt zaś A na punkt B; wtedy możemy wykreślić trójkąt, którego boki są a i b. $A—B$ zaś kąt pomiędzy tymi bokami zawarty.

314. Zbudować trójkąt, znając a, h_a i $B—C$.

Wprowadzamy $B—C$ przez odwrócenie trójkąta w ten sposób, ażeby punkt B upadł na punkt C, punkt C na punkt B i punkt A na punkt A_1. Teraz możemy nakreślić równoległobok, którego jedna przekątna jest AA_1, i którego trzeci wierzchołek jest punkt B, gdyż przekątną z punktu B poprowadzoną, widzimy z punktu A pod wiadomym kątem.

315. Zbudować trójkąt, znając bc, m_a i $B-C$.

Odwróciwszy trójkąt tak, ażeby on przybrał położenie BA_1C, widzimy, że znana powierzchnia trójkąta A_1BA równa się powierzchni trójkąta równoramiennego, mającego za bok m_a.

3) *Przyprowadzenia prostych lub kątów do przystawania;* sposób ten najczęściej stosujemy, gdy równe części są nieznane, gdyż wtedy za pomocą tego sposobu możemy niejako wyrugować te nieznane części. Podobną metodę możemy stosować, gdy nam znanym będzie stosunek dwu linij; chcąc doprowadzić te linie do przystawania możemy przy wykonaniu kładu część figury powiększyć w danym stosunku.

316. Zbudować czworokąt wpisalny $ABCD$, znając cztery jego boki.

Boki trójkąta ABC mnożymy przez $AD:AB$ i następnie odwracając go dajemy mu położenie ADC_1, w którem DC_1 i CD stanowią jedną linię prostą. Teraz możemy wykreślić trójkąt CAC_1, gdyż znamy stosunek $CA:C_1A$, jakoteż CD, DC_1 i DA.

317. W dane koło wpisać trójkąt, znając środki łuków, których cięciwy są bokami trójkąta.

Niech dany trójkąt będzie ABC, γ środek AB, β środek AC i α środek BC. Jeśli punkt A obrócimy około punktu γ, następnie około punktów α i β, to punkt A wróci do dawnego położenia, gdy tymczasem dowolny punkt okręgu, znajdujący się w danej odległości od punktu A, po tych trzech obrotach będzie się znajdował w takiej samej co poprzednio odległości od A, lecz po drugiej stronie tego punktu. Ztąd widzimy, że wychodząc od dowolnego punktu możemy wyznaczyć położenie punktu A, gdyż punkt ten leżeć musi we środku pomiędzy dwoma położeniami dowolnie obranego punktu. Zadanie to z łatwością daje się zastosować do n kąta; łatwo widzieć, że staje się ono nieoznaczonem lub niemożebnem dla parzystego n, oznaczonem zaś dla nieparzystego n.

318. Dana jest linia prosta i na niej punkt A; należy ze środka O danego koła poprowadzić prostą, przecinającą okrąg koła w punkcie Y, prostą zaś — w punkcie X tak, ażeby XY i XA miały dany stosunek.

Jeśli linię XY doprowadzimy do zlania się z XA (rosnąco) to punkt O upadnie na znany punkt O_1 i linia AY będzie równoległą do $O_1 O$.

319. Zbudować czworokąt $ABCD$, znając AB, AD, $\angle B$, $\angle D$ i stosunek $BC : CD$.
Należy zastosować ten sam kład co i w zadaniu 316.

4) *Otrzymania figury symetrycznej, której szukany punkt leżałby na osi symetryi.*

320. Na danej prostej wyznaczyć punkt, któryby był w równej odległości od danego punktu tej samej prostej i od drugiej danej prostej.
Należy wystawić prostopadłą w danym punkcie do pierwszej z danych linij i podzielić na dwie równe części kąt pomiędzy tą prostopadłą i drugą z danych prostych.

321. Wykreślić koło styczne do danej prostej w danym punkcie i przecinające dane koło pod danym kątem.
Zrobiwszy kład danego koła w ten sposób, ażeby ono przecięło daną prostą w danym punkcie pod danym kątem, widzimy, że oś symetryi obu okręgów przechodzić musi przez środek szukanego koła.

5) *Doprowadzenia części figury do takiego położenia, ażeby dwa szukane punkty zlały się w jeden, gdy jednocześnie dwie proste ze sobą przez ten punkt przechodzące utworzyły dany kąt i każda przechodziła przez znany punkt.* Możemy wtedy nakreślić koło przechodzące przez punkt przecięcia się dwu prostych.

322. Dane są dwa koła i na okręgu jednego z nich punkty A i B; należy na tym okręgu wyznaczyć taki punkt X, że jeśli proste AX i BX odpowiednio przecinają drugie koło w punktach M i N, to cięciwa MN ma mieć daną długość.
Jeśli O ozacza środek drugiego koła, to kąt MON jest wiadomy. Jeśli linię MA o ten kąt obrócimy około punktu O, to M upadnie na N i punkt A na wiadomy punkt A_1. Ponieważ linie MA i NB tworzą ze sobą kąt wiadomy, więc $\angle BNA_1$ jest także wiadomy a więc i położenie punktu N jest wyznaczone.

Różne przykłady do metody kładów.

323. W dane koło wpisać czworokąt, znając dwa boki przeciwległe i summę dwu pozostałych.

324. Zbudować trójkąt, znająu A_1 h_a i m_a.
Należy tak odwrócić trójkąt, ażeby punkt B upadł na punkt C, punkt C na punkt B, punkt A zaś na A_1. Prostą AA_1 możemy wykreślić i następnie wyznaczyć punkt B.

325. Około danego koła opisać trójkąt tak, ażeby trzy jego wierzchołki leżały na trzech danych prostych ze środka koła wychodzących.
Zadanie jest podobne do zadania 317.

326. Zbudować kwadrat ukośny w ten sposób, ażeby dwa jego boki leżały na danych równoległych, dwa zaś pozostałe odpowiednio przechodziły przez punkty A i B.
Jeśli kwadrat ukośny położymy dwoma drugimi bokami na dane równoległe, to AB przyjmie nowe położenie, którego kierunek jest znany. Kąt pomiędzy nowem i dawnem położeniem linii AB wyznacza kąt kwadratu ukośnego.

327. Zbudować trójkąt, którego podstawa jest wiadoma, którego wierzchołek leży na danej prostej i jeśli oprócz tego znaną jest różnica kątów przy podstawie.
Należy trójkąt odwrócić tak, jak to uczyniliśmy w zadaniu 313 i zastosować metodę podobieństwa.

328. W trójkącie poprowadzono linię prostą od wierzchołka do danego punktu podstawy; należy na tej linii wyznaczyć punkt, z którego oba odcinki podstawy widziane są pod równymi kątami.

329. W trójkącie ABC bok AC podzielono na dwa odcinki AD i DC, należy na boku AB wyznaczyć punkt X, z którego dwa odcinki AD i DC widziane są pod równymi kątami.
Możemy wyznaczyć punkt na boku AB, symetryczny z punktem C względem osi symetryi DX.

330. Przez wierzchołek B trójkąta, należy poprowadzić taką linię prostą, ażeby prostopadłe AP i CQ spuszczone na nią utworzyły dwa trójkąty ABP i CBQ, których powierzchnie byłyby w danym stosunku.

Zmieniając wielkość trójkąta ABP, należy mu nadać położenie CBP_1 i na linii BC jako na średnicy nakreślić koło; cięciwa P_1Q otrzyma wtedy oznaczoną długość i zostanie podzieloną przez BC w znanym stosunku.

331. Zbudować trójkąt, znając m_a, b^2-c^2 i $\angle (a\, m_a)$.

332. Mając cztery boki czworokąta należy go tak wykreślić, ażeby jedna przekątna rozdzieliła jeden z kątów czworokąta na dwie równe części.

333. Dane są dwa koła o środkach A i B; należy wykreślić koło, przechodzące przez punkty A i B i przecinające dane dwa koła odpowiednio w punktach X i Y (na różnych stronach linii AB) w taki sposób, ażeby summa kątów ABY i BAX była równą danemu kątowi.

Należy trójkątowi ABY nadać takie położenie BAY_1, ażeby $\angle XAY_1$ był danym kątem.

334. Zbudować trójkąt, znając A, ρ i $c-b$.

Oznaczając środek wpisanego trójkąta przez O, widzimy, że w trójkącie BOC znane są trzy części, mianowicie kąt O, wysokość OF i odległość punktu F od środka BC.

335. Zbudować trójkąt, znając ρ, $c-b$ i $C-B$.

Należy wykreślić ten sam trójkąt co i w poprzedniem zadaniu.

Obrót około osi

jest szczególnym przypadkiem kładu, lecz z powodu częstego zastosowania, sposób ten zasługuje na to, ażeby go oddzielnie traktować. Za pomocą tego sposobu, staramy się uzyskać te same korzyści co i w metodzie kładów, obracając część figury około linii prostej, tak, ażeby oba położenia tej części były symetryczne względem tej linii prostej.

Za pomocą tego sposobu rowiązujemy następujące ogólne zadanie:

336. *Do danej prostej wystawić prostopadłą tak, ażeby dwie dane krzywe odcięły na niej równe odcinki.*

Jakoż obracając jedną z danych krzywych około danej prostej jako około osi, widzimy, że ona przetnie drugą w szukanych punktach.

337. Zbudować kwadrat, mający dwa przeciwległe wierzchołki na danej prostej, dwa zaś pozostałe na dwu danych okręgach.

338. Na danej prostej wyznaczyć taki punkt X, że linie proste, łączące ten punkt z dwoma danymi punktami A i B po jednej stronie danej prostej leżącymi tworzą z tą linią równe kąty.

Jeśli jeden z danych punktów A obrócimy około danej prostej, aż przyjdzie w położenie A_1, to linia BXA_1 jest prostą.

Uwaga. Zadanie to często się przytrafia w zjawiskach przyrody, gdyż ciało sprężyste przy uderzeniu o płaszczyznę, promień światła, padający na zwierciadło, fala, napotykająca po drodze płaszczyznę i t. d. zostają odbite, pod kątem równym kątowi padania. Możemy np. wyobrazić sobie, że A przedstawia punkt świecący, dana zaś linia — przecięcie zwierciadła. Zadanie polega na tem, żeby wyznaczyć drogę, którą promień swiatła przebiedz musi, ażeby po odbiciu się od zwierciadła przeszedł przez punkt B. Ponieważ cała droga, jaką przy tem przebiega promień światła równa się prostej BA_1, gdy taka sama droga dla każdego punktu innego od X, równa się linii łamanej pomiędzy tymi samymi punktami A_1 i B poprowadzonej, widzimy więc, że promień światła dochodzi do celu po *najkrótszej drodze*.

Jeśliby promień szedł ku innemu punktowi a nie ku X, to zostanie jednakże tak odbitym, jak gdyby wyszedł z punktu A_1, tak, że w podobnych zadaniach możemy sobie wyobrazić daną linię jakby wcale nie istniejącą, jeśli tylko punkt A zastąpimy przez punkt A_1.

339. Na bilardzie, mającym kształt wielokąta, leżą dwie bile M i N; należy tak popchnąć bilę M ku bokowi AB, ażeby została odrzuconą ku bokowi BC i tak dalej, aż uderzywszy o wszystkie boki bilardu zetknęłaby się z bilą N.

Przez obrót punktu M około AB nadajemy mu położenie M_1; możemy teraz oderwać uwagę od AB, zastępując punkt M przez punkt M_1. To samo powtarzamy dla boku BC i następnych, póki zadanie nie zostanie sprowadzonem do poprzedniego. Przedewszystkiem więc należy wyznaczyć szukany punkt na ostatnim boku, poczem bardzo łatwo odnaleść można inne szukane punkta. Jeśli przy wykreśleniu tych punktów jeden z nich upadnie na przedłużeniu któregokolwiek z boków bilardu, to zadanie będzie niemożebnem.

340. W dany wielokąt wpisać drugi, którego obwód byłby najmniejszością.

Dwa przyległe boki szukanego wielokąta muszą tworzyć równe kąty z bokiem danego wielokąta, na którym się przecinają, gdyż jeśliby ten warunek nie miał miejsca dla jednego z wierzchołków szukanego wielokąta, toby można było wykreślić wielokąt z mniejszym obwodem czyniąc zadość powyższemu warunkowi. Zadanie zatem jest podobne do poprzedniego i daje się w sposób podobny rozwiązać.

Wykreślenie możemy zacząć od szukanego punktu, ponieważ jednak nie wiemy gdzie punkt ten leży, musimy bok wielokąta, na którym ten punkt leży po kolei obracać około każdego z pozostałych boków danego wielokąta. W taki sposób postępując, wszystkie boki szukanego wielokąta ułożymy po kolei obok siebie, na jednej prostej i krańcowe jej odcinki będą właśnie bokami, które się przecinają na linii, od której zaczęliśmy obrót. Ponieważ jeden z tych dwu odcinków ciągle towarzyszy bokowi, któryśmy kolejno obracali, więc kąt pomiędzy nim i odcinkiem zawarty pozostaje zawsze ten sam i tym sposobem zadanie sprowadza się do następującego:

Pomiędzy dwiema prostemi jednakowej długości poprowadzić trzecią, któraby tworzyła z niemi równe kąty i odcięła od nich równe części, licząc te części od oznaczonych końców danych linij.

Gdy równe kąty stają się kątami naprzemianległymi, wtedy zadanie oczywiście staje się nieoznaczonem, gdy dane linie są równoległe; staje się zaś niemożebnem, gdy te linie nie są równoległe. Przypadek ten ma miejsce, gdy liczba boków danego wielokąta jest parzystą, gdy zaś liczba ta jest nieparzystą, wtedy zadanie zawsze będzie możebne, jeśli tylko zgodzimy się i takie wielokąty uważać jako wpisane, których wierzchołki leżą na przedłużeniach boków danego wielokąta.

341. Zbudować wielokąt, znając położenia prostopadłych do jego boków wystawionych z środków tychże.

Niech A będzie jednym ze szukanych wierzchołków, B — dowolnym punktem płaszczyzny wielokąta; obracając linię prostą AB po kolei około każdej z prostopadłych, zobaczymy, że nakoniec A znów upadnie na A, zaś B na jakiś punkt B_1; ponieważ przy tych obrotach długość linii AB nie uległa zmianie, więc $BA = B_1A$. Na zasadzie tej uwagi zadanie daje się z łatwością rozwiązać; jakoż rozpoczynamy wykreślenie od dowolnego punktu B i wyznaczamy punkt B_1. Szukany wierzchołek leżeć musi na prostopadłej wystawionej ze środka BB_1. Biorąc teraz inny punkt płaszczyzny i powtarzając powyższe wykreślenie, otrzymamy położenie szukanego wierzchołka A. Rozbiór tego rozwiązania podobny jest do rozbioru zadania 340.

342. Zbudować wielokąt, znając położenia dwójsiecznych.

Rozwiązanie podobne do poprzedniego.

343. Do dwu danych kół poprowadzić styczne, przecinające się na danej prostej i tworzące z nią równe kąty.

Rozwiązanie podobne do 338; zadanie sprowadza się do 137.

344. Na danej prostej wyznaczyć punkt X tak, ażeby jego odległości od dwu danych punktów A i B miały daną summę.

Należy do figury wprowadzić daną summę, przedłużając AX do punktu B_1 tak ażeby $XB_1 = XB$. Punkt szukany zatem X będzie środkiem koła, przechodzącego przez punkt B i stycznego do koła, mającego swój środek w punkcie A promienia AB_1. Jeśli zwrócimy jeszcze uwagę na to, że szukane koło musi przejść przez punkt otrzymany z obrotu punktu B około danej prostej, przekonywamy się, że zadanie sprowadza się do 238.

345. Na danej prostej wyznaczyć punkt, którego odległości od dwu danych punktów mają daną różnicę.

Rozwiązanie podobne do poprzedniego.

Uwaga. Dwa poprzednie zadania dają się jeszcze wyrazić w sposób następujący:

Znaleść wspólne przecięcie linii prostej i przecięcia ostrokręgowego, którego wielka oś i ogniska są dane. Zadanie to daje się zatem rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału. Jeśli zaś zamiast linii prostej weźmiemy dowolny okrąg koła, to zadanie nie da się rozwiązać za pomocą tych przyrządów.

346. W trójkącie ABC, prosta AD jest dwójsieczna kąta A; należy

na tej linii wyznaczyć taki punkt M, ażeby różnica kątów DMC i DMB była największością.

Przez obrót linii AB około dwójsiecznej kąta, zadanie sprowadza się do 185.

347. Dwa koła odpowiednio przechodzą przez punkty A i B; należy na ich linii potęgowej wyznaczyć taki punkt P, ażeby prosta, łącząca dwa punkty Q i R, w których linie PA i PB powtórnie przecinają okręgi danych kół, była prostopadłą do linii potęgowej kół.

Jeśli koło przechodzące przez punkt A obrócimy około linii potęgowej, to punkt A upadnie na punkt A_1 i Q na Q_1; około czworokątów $QABR$ i Q_1A_1BR można opisać koła i ztąd wypada, że koło AA_1B przechodzi przez punkt P.

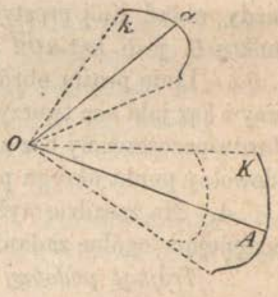
348. Dana jest prosta PQ i po jednej jej stronie dwa punkty A i B; należy na tej prostej wyznaczyć taki punkt X, ażeby $\angle BXQ = 2\angle AXP$.

Należy linię AX obrócić około PQ aż przyjdzie w położenie A_1X i następnie wyznaczyć rzut punktu B na A_1X.

ROZDZIAŁ TRZECI.

TEORYA OBROTU.

1. Jeśli z danego punktu O poprowadzimy linie proste do punktów krzywej k i te linie obrócimy około punktu O o kąt v, powiększając je jednocześnie w danym stosunku f, to jako miejsce geometryczne końców linij poddanych obrotowi, otrzymamy krzywą K. Krzywa ta musi być podobną do krzywej k gdyż możemy sobie wyobrazić, że opisane wyżej działanie zostało uskutecznione w ten sposób, że najprzód wykonaliśmy obrót około punktu O, przez co tylko położenie krzywej uległo zmianie, następnie pomnożyliśmy krzywą przez f odnośnie do punktu O. Dowolny punkt a krzywej k, za pomocą obrotu wyznaczy punkt A krzywej K. Dwa takie punkty nazywają się odpowiednymi.



Linie proste, łączące punkty odpowiedne, nazywają się liniami odpowiednemi; kątami zaś odpowiednymi nazywamy kąty utworzone przez linie odpowiedne. Punkt O nazywać będziemy środkiem obrotu, kąt v — kątem obrotu, wielkość f — stosunkiem obrotu. Dla dwu dowolnych odpowiednych punktów A i a, trójkąt AOa musi mieć ten sam kształt, ponieważ dla wszystkich takich punktów $\angle aOA = v$ i $AO : aO = f$ są ilości stałe. Możemy zatem jeszcze powiedzieć, że krzywa K została opisaną przez jeden wierzchołek A trójkąta AOa, który, zachowując swój kształt, obraca się około drugiego swego wierzchołka O, gdy jednocześnie trzeci wierzchołek a opisuje daną krzywą k. Działanie, za pomocą którego krzywą k obrócimy około punktu O o kąt v jako kąt obrotu i wielkość f jako stosunek obrotu nazywać będziemy mnożeniem krzywej przez f_v odnośnie do punktu O.

2. Każdy punkt płaszczyzny może być uważany jako należący do jednego układu i utrzymuje przez to swój punkt odpowiedny w drugim układzie. Jeśli w taki sam sposób uważać będziemy i środek obrotu, to będzie on swoim własnym punktem odpowiednym (samemu sobie odpowiadający punkt) i na zasadzie tej własności może być uważany jako punkt podwójny układów. Możemy też sobie wyobrazić, że cała płaszczyzna tak się obraca około punktu O, iż jeden z punktów opisuje daną krzywą; jeżeli przy tem cały układ punktów na płaszczyźnie podczas obrotu zachowuje swój kształt, to każdy punkt tego układu musi też opisać krzywą, podobną do danej.

3. Jeżeli znanym jest środek obrotu wraz z kątem i stosunkiem obrotu, to za pomocą cyrkla i liniału można obracać każdy układ linij prostych i łuków kół. Punkt a obrócimy około punktu O, jeśli kąt aOA uczynimy równym kątowi obrotu i $OA = f \cdot Oa$. Linię prostą obrócimy, jeśli jeden dowolny jej punkt obrócimy i kąt jaki ona tworzy z prostą, idącą od tego punktu do środka obrotu pozostawimy bez zmiany. Koło obrócimy, jeśli jego środek i dowolny punkt okręgu poddamy obrotowi.

4. Na zasadzie wyżej wyłożonych prawd, możemy rozwiązać następujące ogólne zadanie:

Trójkąt podobny danemu tak umieścić, ażeby jeden z jego wierzchołków upadł na dany punkt, dwa zaś pozostałe na dwie dane krzywe.

Jakoż, jeśli dany punkt obierzemy za środek obrotu i jedną z krzywych obrócimy około tego punktu w ten sposób, ażeby kąt obrotu był równy kątowi trójkąta, którego wierzchołek znajduje się w O, stosunek zaś obrotu — stosunkowi boków, ten kąt obejmujących, to krzywa poddana obrotowi przetnie drugą daną krzywą w punktach, w których może być umieszczony drugi wierzchołek trójkąta; trzeci wierzchołek otrzymamy, odkładając przy O dany w tym punkcie kąt.

Jeśli zamiast kształtu trójkąta znane są: kąt, którego którego wierzchołek znajduje się w danym punkcie i iloczyn boków tego kąta, to zadanie rozwiązuje się w sposób podobny do poprzedniego, gdyż w tym przypadku zamiast poddać obrotowi jedną z danych krzywych wykonamy obrót krzywej, która jest jej odwrotną.

Przykłady.

349. Umieścić wierzchołki trójkąta równobocznego na trzech liniach równoległych.

Jeden z wierzchołków można umieścić w dowolnym punkcie jednej z danych równoległych; punkt obrany staje się środkiem obrotu; $v = 60^0, f = 1$.

350. Równoboczny trójkąt umieścić wierzchołkami na trzech kołach współśrodkowych.

351. W dany równoległobok wpisać trójkąt równoramienny o danym kącie; wierzchołek trójkąta ma leżeć na jednym z wierzchołków równoległoboku.

352. W dany trójkąt wpisać drugi, podobny drugiemu danemu trójkątowi w ten sposób, ażeby jeden z wierzchołków upadł na dany punkt jednego z boków pierwszego danego trójkąta.

353 W dany odcinek kołowy wpisać trójkąt podobny danemu w ten sposób, ażeby jeden z wierzchołków upadł na dany punkt cięciwy.

354. W dane koło wpisać cięciwę w ten sposób, ażeby jej długość była w danych stosunkach do odległości jej końców od danego punktu.

355. W równoległobok wpisać prostokąt o danym kącie pomiędzy jego przekątnemi.

Środki obu równoległoboków muszą być w jednym punkcie.

356. W równoległobok wpisać kwadrat ukośny, którego przekątne miałyby dany stosunek.

357. W kwadrat wpisać równoboczny trójkąt.

358. Dane są: koło i dwa punkty A i B; należy do koła poprowadzić styczną w ten sposób, ażeby odległości punktu A od tej stycznej i prostopadłej do niej z punktu B poprowadzonej były w danym stosunku.

Przez obrót około punktu A możemy doprowadzić do tego, ażeby punkt B leżał na stycznej.

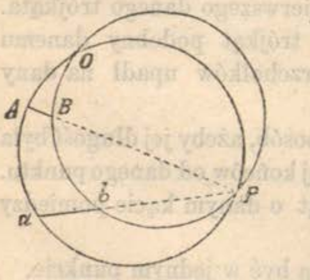
359. W dany równoległobok wpisać kwadrat ukośny o danej powierzchni.

360. Dane są dwa punkty A i B, jako też dwie proste, przecinające się w punkcie C; należy przez punkty A i B poprowadzić dwie proste, któreby utworzyły pomiędzy sobą dany kąt i przecięły dwie dane proste odpowiednio w punktach X i Y w ten sposób, ażeby odcinki AX i BY były w danym stosunku.
Przez równoległe posunięcie możemy liniom AX i BY nadać położenie A_1C i B_1C.

361. Zbudować trójkąt, znając h_a, $B-C$ i bc.

362. Przez dany punkt A poprowadzić dwa koła przecinające się pod kątem v; stosunek promieni tych kół ma być f i każde z nich ma być stycznem do jednej z dwu danych prostych.
Mnożąc jedną z danych prostych przez f, odnośnie do punktu A, sprowadzamy zadanie do zadania 181.

5. Dwie figury podobne, jeżeli tylko ich części idą w tym samym kierunku obrotu, *) (takie przypuszczenie wogólności przyjmiemy dla wszystkich figur podobnych) będą miały środek obrotu, to jest taki punkt, około którego obrócić możemy jedną z danych figur, ażeby ona przystawała do drugiej. Stosunek obrotu jest znany, gdyż równa się on stosunkowi dwu dowolnych linij odpowiednych, kąt zaś obrotu równa się kątowi pomiędzy dwiema dowolnemi odpowiednemi liniami. Dla wyznaczenia środka obrotu, możnaby było posługiwać się znanym stosunkiem odległości jego od dwu par punktów odpowiednych, lecz można do tego zastosować inną prostą konstrukcyę. Jakoż, jeśli A i a, B i b oznaczają dwie pary punktów



---

*) Aby określić co znaczy wyrażenie „ich części idą w tym samym kierunku obrotu“ wyobrażamy sobie, że widz stojący wewnątrz figury, patrzy na punkt ruchomy, który obwód obiega w porządku alfabetycznym wierzchołków $A, B, C\ldots$ albo $a, b, c\ldots$ tj. od A do B, potem do C i t. d. Jeśli kierunek ruchu w obu figurach będzie od prawej do lewej, lub w obu od lewej do prawej, mówimy, że części figur idą w tym samym kierunku. *P. T.*

odpowiednych, to linie odpowiednie AB i ab muszą tworzyć pomiędzy sobą kąt równy kątowi obrotu; kąt ten równa się też kątowi utworzonemu przez linie proste, łączące dwa punkty odpowiedne ze środkiem obrotu, a zatem *środek musi leżeć na tem samem kole, które przechodzi przez punkt przecięcia się dwu linij odpowiednych i dwa punkty odpowiedne na tych liniach leżące.*

Figura na poprzedniej stronie, pokazuje, że środek obrotu leży w punkcie O przecięcia się dwu okręgów kół $PBbO$ i $PAaO$.

Środkiem obrotu dla dwu odpowiednych prostych dwu figur podobnych jest środek obrotu samych figur, gdyż jeśli jedną prostą obrócimy tak, ażeby przystała do drugiej, to i cała jedna figura przystanie do drugiej.

Środek obrotu dwu nieograniczonych linij prostych, uważanych jako dwie figury podobne — jest zupełnie nieoznaczony; jeśli na tych liniach obierzemy dwa punkty za punkty odpowiedne, to miejscem geometrycznem środków obrotu dla danych linij, będzie okrąg koła; jeśli dane będą jeszcze dwa punkty odpowiednie, albo co na jedno wychodzi stosunek obrotu, to środek obrotu będzie zupełnie oznaczonym, gdyż koła drugi raz przecinają się w punkcie przecięcia się prostych.

Środek obrotu dwu kół jest nieoznaczony, dwa bowiem dowolne punkty ich okręgów można uważać jako punkty odpowiedne; ponieważ odległości środka obrotu od środków danych kół są w stosunku promieni, to miejscem geometrycznem tego środka obrotu musi być okrąg koła, dzielący harmonicznie linię środków w tym stosunku. (Koło przechodzące przez środek podobieństwa dwu danych kół i mające swój środek na linii środków). Jeśli dwa punkty danych okręgów obierzemy za punkty odpowiedne, to środek obrotu stanie się oznaczonym i daje się najłatwiej wyznaczyć za pomocą dwu promieni odpowiednych, gdyż środki kół są zawsze punktami odpowiednymi.

6. *Środek obrotu dwu przeciwległych boków czworokąta jest też środkiem obrotu dla dwu pozostałych boków.*

Jeśli O jest środkiem obrotu dla boków BA i CD, to $\triangle ABC \backsim \triangle DOC$, zkąd wypada, że $\triangle AOD \backsim \triangle BOC$, a tem samem, że punkt O jest środkiem obrotu dla AD i BC. W pierwszym przypadku punkty B i C jako też A i D będą punktami odpowiednymi, w drugim, takimi punktami będą B i A, C i D.

W taki sam sposób możemy dowieść, że środek obrotu dla *AB* i *CD* będzie też środkiem obrotu dla *AC* i *BD*.

Jeśli boki przeciwległe czworokąta przedłużymy aż do przecięcia się, to koła wyznaczające środek obrotu, będą opisane około czterech trójkątów, które się utworzą we figurze; te same koła należy stosować, gdy chcemy wyznaczyć środek obrotu dla dwu dowolnych części figury, które się nie przecinają w jakimś wierzchołku tej figury, wypada ztąd następujące twierdzenie:

W czworokącie zupełnym, *) *koła opisane naokoło czterech trójkątów, powstających po kolejnem usunięciu każdego z boków czworokąta, przechodzą przez jeden i ten sam punkt który będzie środkiem obrotu dla dwu dowolnych części figury nieprzecinających się w jej wierzchołku.*

7. *Jeżeli linie proste, łączące odpowiednie punkty krzywych podobnych, rozdzielimy w tym samym stosunku, to miejscem geometrycznem punktów podziału, będzie krzywa podobna do danych i dwie dowolne krzywe takiego rodzaju mają ten sam środek obrotu co i dane.*

Jakoż niech A i a będą dwa punkty odpowiedne, P zaś punkt, który prostą Aa dzieli w danym stosunku. Jeśli O oznacza środek obrotu, to kształt trójkąta AOa musi być stałym; to samo da się powiedzieć o trójkącie AOP, więc punkt P przy obrocie trójkąta około O musi opisać krzywą podobną do danych.

Dodatek. Jeśli w czworokącie poprowadzimy linie proste, dzielące każdą parę przeciwległych boków w tym samym stosunku, to i same te linie dzielą się wzajemnie w tym stosunku.

---

*) Czworokątem zupełnym nazywamy układ czterech punktów A^1, O, B^1, C wraz ze wszystkiemi liniami prostemi: A^1C, A^1O, A^1B, CO, CB^1, B^1O oznaczonemi przez parę którychkolwiek z tych czterech punktów. Linie te nazywają się bokami czworoboku, wspomnione wyżej cztery punkty — jego wierzchołkami, trzy zaś pozostałe punkty przecięcia się boków — punktami przekątnemi. Odpowiednio powyższemu określeniu, nazywamy czworobokiem zupełnym układ czterech linij prostych, z których każda przecina trzy pozostałe wraz z punktami przecięcia się tych prostych. Sześć punktów przecięcia się inij prostych, nazywają się wierzchołkami czworoboku, układ czterech prostych — jego bokami, trzy zaś pozostałe proste łączące jego wierzchołki — przekątnemi. *P. T.*

Zastosowania.

363. Dane są dwie proste i na każdej z nich punkt, A i B, nadto danym jest jeszcze punkt P; należy przez punkt P poprowadzić prostą, którąby przecięła dane proste w punktach X i Y tak, ażeby odcinki AX i BY były w danym stosunku.

Należy wyznaczyć środek obrotu O dla dwu danych linij, uważając punkty A i B jako też X i Y za punkty odpowiedne; przy takiem uważaniu, stosunek obrotu równa się danemu stosunkowi. Ponieważ $\triangle XOY \sim \triangle AOB$, więc linia OP będzie widzianą z punktu X pod znanym kątem, i tym sposobem możemy bardzo łatwo wyznaczyć punkt X.

Uwaga. Zadanie to postawił *Apolloniusz* w dziele „de sectione rationis.“ Dzieło to zaginęło, lecz je odtworzył *Halley* z zachowanego tłomaczenia arabskiego.

364. Przez dany punkt poprowadzić prostą, którąby przecięła dwie dane krzywe podobne w punktach odpowiednych.

Zadanie to jest uogólnieniem poprzedniego i rozwiązuje się w sposób podobny.

365. Dane są dwie linie proste i na każdej z nich punkt, A i B i oprócz tego punkt P. Należy przez punkt P poprowadzić prostą, przecinającą dane proste w punktach X i Y tak, ażeby odcinki AX i BY miały daną summę.

Jeśli na jednej z danych linij odetniemy część BD równą danej summie, to $AX = YD$ i tym sposobem zadanie sprowadza się do 363.

366. Przez dany punkt P poprowadzić prostą, która w połączeniu z dwiema danemi prostemi tworzy trójkąt o danej powierzchni.

Niech A będzie punktem przecięcia się danych prostych; jeśli daną powierzchnię przedstawimy w kształcie trójkąta, którego jeden bok jest AP, drugi zaś przypada na jednej z danych prostych, to łatwo widzieć, że szukana linia musi być tak poprowadzoną, ażeby część powierzchni, która przybywa do powierzchni trójkąta była równą tej, która zostaje odciętą; lecz te części są trójkątami, których wysokości są nam znane, gdyż niemi są prostopadłe, poprowadzone z punktu P na dane proste. Stosunek zatem podstaw tych trójkątów jest także znanym i tym sposobem zadanie sprowadza się do 363.

Uwaga. Zadanie powyższe również podanem zostało przez *Apolloniusza.* Dzieło o tem traktujące „*de sectione spatii*" zaginęło i poczęści zostało odtworzone przez *Halleya.*

367. Dane są dwa okręgi kół, na jednem z nich punkt A, na drugiem B; należy na dwu okręgach wyznaczyć odpowiednio punkty X i Y w ten sposób, ażeby łuki AX i BY były podobne i linia prosta XY miała daną długość.

Należy wyznaczyć środek obrotu obu kół uważając A i B jako punkty odpowiedne; punkty X i Y będą również punktami odpowiednymi i trójkąty ABO i XYO będą zatem podobne.

W tem zadaniu zawiera się też i zadanie 262, w którem drugi punkt przecięcia się kół jest środkiem obrotu.

368. Zbudować prostokąt, w którym każdy bok przechodzi przez jeden z czterech punktów i którego przekątna ma daną długość.

Jeśli nakreślimy dwa koła, miejsca geometryczne dwu przeciwległych wierzchołków prostokąta, to zadanie się sprowadzi do poprzedniego.

369. Dane są dwie linie proste AB i CD; należy przez punkt przecięcia się tych prostych poprowadzić koło, któreby przecięło AB, w punkcie X, CD zaś — w punkcie Y w ten sposób, ażeby stosunki $AX : CY$ i $XB : YD$ miały dane wielkości.

Koło przechodzi przez środek obrotu linij AX i CY, jako też przez środek obrotu linij XB i YD.

370. Przez dane dwa punkty A i B, poprowadzić dwie proste, tworzące ze sobą dany kąt v i przecinające daną prostą i dane koło odpowiednio w punktach X i Y w ten sposób, ażeby stosunek $AX : BY$ był równy danej wielkości $1 : k$.

Należy daną prostą pomnożyć przez k, odnośnie do środka obrotu linij AX i BY.

371. Dany jest punkt A i dwie linie proste BC i DE; należy na tych prostych wyznaczyć odpowiedne punkty X i Y w ten sposób, ażeby BX i DY były w danym stosunku i ażeby $\angle XAY$ miał daną wielkość.

Jeśli BX obrócimy aż do zlania się z DY około środka obrotu, to punkt A upadnie na jakiś punkt A_1 i kąt AYA_1 jest znanym.

372. Czworokąt $ABCD$ tak umieścić, ażeby wierzchołki B i C upadły na dane punkty, wierzchołki zaś A i D na dane linie, jeśli przy tem znamy różnicę $B—C$ i stosunek $BA : CD$.
Zadanie to za pomocą kładu sprowadza się do zadania znanego (4).

373. Przez jeden z punktów S przecięcia się dwu okręgów kół poprowadzić dwie proste ASa i BSb (punkty A i B na jednym okręgu, punkty a i b na drugim), tworzące ze sobą dany kąt i czyniące zadość warunkowi, ażeby trójkąty ASB i asb były równoważne.
Punkt przecięcia się okręgów jest środkiem obrotu dla Aa i Bb, a zatem i dla AB i ab. Obracając AB ku ab, znajdziemy, że punkt S upadnie na znany punkt S_1. Cięciwa ab ma wiadomą długość i odległości jej od S i S_1 są w danym stosunku. Prostsze rozwiązanie tego zadania otrzymamy, uważając, że prostopadłe do obu cięciw wystawione w punkcie S, przecinają linię środków w równej odległości od jej środka.

374. Dane są dwa okręgi kół, na jednym punkt A, na drugim B; należy przez punkty A i B poprowadzić koło, przecinające dane koło w punktach X i Y tak, ażeby łuki AX i BY były podobne.
Należy wyznaczyć środek obrotu obu okręgów, uważając punkty A i B za odpowiedne. Ponieważ cięciwy AX i BY są liniami odpowiednemi, więc muszą się przeciąć na okręgu ABO, lecz cięciwy te przecinają się też na linii potęgowej dwu danych okręgów.

375. Jeśli środki boków trójkąta połączymy liniami prostemi, to otrzymamy trójkąt podobny danemu; łatwo widzieć, że kąt obrotu dla tych trójkątów równa się 180^0, stosunek zaś obrotu $= {}^1/_2$. Środek zatem obrotu musi dzielić każdą linię prostą, łączącą dwa punkty odpowiedne na dwa odcinki, będące w stosunku 1 : 2, a ponieważ ośrodkowe są takiemi liniami, więc środek obrotu musi leżeć na wspólnem przecięciu ośrodkowych. Ponieważ punkty przecięcia się wysokości są punktami odpowiednymi, i punkt przecięcia się wysokości małego trójkąta jest środkiem koła opisanego około większego trój-

kąta, więc w każdym trójkącie punkt przecięcia się wysokości, punkt przecięcia się ośrodkowych i środek koła opisanego leżą na jednej prostej, której odcinki są w stosunku 1 : 2.

376. Dane są: koło, punkty O i P i kąt v; prosta, przechodząca przez punkt P przecina koło w punktach A i B; należy wyznaczyć miejsce geometryczne punktu X, dla którego $\angle OBX = \angle OAX = v$.

Koło $AOXB$ przecina prostą OP w dwu stałych punktach, porusza ono się zatem około punktu O jako środka obrotu tak, że jego środek opisuje linię prostą. Punkt zatem X musi także opisać linię prostą. W przypadku, gdy O jest środkiem danego koła i $v = 90^0$ punkt X opisuje biegunową punktu P.

8. Jeśli mamy trzy układy podobne A, B i C i jeśli punkt O jest jednocześnie środkiem obrotu dla układów A i B jako też dla B i C, to ten punkt musi też być środkiem obrotu dla układów A i C. Punkt zatem O jest wspólnym środkiem obrotu dla trzech układów i to samo może też mieć miejsce dla dowolnej liczby układów.

Jeśli trzy odpowiedne punkty a, b i c trzech układów połączymy ze środkiem obrotu O, to stosunki tych linij, jako też kąty, jakie ze sobą tworzą, muszą być stałe; ztąd wynika, że kształt trójkąta abc musi też być stałym i dla tego trójkąt ten nazwiemy *trójkątem podstawowym*. Łatwo widzieć, że w przypadku, gdy liczba figur podobnych o wspólnym środku obrotu jest większą od trzech, istnieje *wielokąt podstawowy* o stałym kształcie; gdy ten wielokąt obraca się około środka obrotu w ten sposób, że jeden z jego wierzchołków opisuje jednę z figur, wtedy pozostałe wierzchołki opisują pozostałe figury i każdy punkt płaszczyzny uważany jako należący do wielokąta podstawowego, opisze figurę podobną danym.

Ponieważ wielokąt podstawowy przyjmuje kolejno wszystkie swoje położenia, więc środek obrotu danych figur będzie zarazem środkiem obrotu dla wielokąta podstawowego we wszystkich jego położeniach.

9. Dla dwu prostych linij, na których dane są dwa punkty, jako punkty odpowiedne, środek obrotu, jak wiemy, musi leżeć na okręgu koła, przechodzącego przez te dwa punkty i przez punkt przecięcia się prostych; dla trzech zatem prostych, na których dane są trzy punkty jako punkty odpowiedne środek obrotu wyznacza

się za pomocą punktu przecięcia się dwu takich kół; trzecie koło musi przejść przez ten sam punkt. Jeśli trzy dane punkty połączymy liniami prostemi, otrzymamy trójkąt podstawowy, który może mieć dowolny kształt, gdyż wyżej wspomniane trzy punkty mogą być dowolnie obrane. Różnym trójkątom podstawowym odpowiadają różne środki obrotu. Dla danego kształtu trójkąta podstawowego można bardzo łatwo wyznaczyć środek obrotu, kreśląc trójkąt podobny danemu tak, ażeby jego wierzchołki znajdowały się na danych liniach, (np. za pomocą zadania 154) i tym sposobem wyznaczymy trzy punkty odpowiedne.

Jeśli trzy dane proste przechodzą przez ten sam punkt O, to punkt ten staje się środkiem obrotu dla każdego trójkąta podstawowego, tak, że wszystkie trójkąty podobne danemu trójkątowi podstawowemu są podobnie położone i mają punkt O za środek podobieństwa. Jest jednak jeden przypadek, w którym środek obrotu staje się nieoznaczonym, a mianowicie gdy wierzchołki A i B trójkąta opisują linie proste AO i BO i $\angle C = AOB$, to wierzchołek C opisze prostą przechodzącą przez O.

10. Dla dwu okręgów kół, środek obrotu był według 6 nieoznaczonym, lecz dla trzech kół możemy wyznaczyć wspólny środek obrotu. Ponieważ punkt ten wyznacza się za pomocą przecięcia się dwu okręgów (patrz 6) więc zadanie o wyznaczeniu środka obrotu wspólnego dla trzech kół ma dwa rozwiązania, a mianowicie środkami obrotu będą dwa punkty, których odległości od środków kół mają się w stosunku promieni.

Jeśli jeden z tych punktów obierzemy za środek obrotu dla kół, to kąty obrotu dają się łatwo wyznaczyć, gdyż środki kół są punktami odpowiednemi, a zatem proste poprowadzone od nich do środka obrotu są odpowiednemi; trójkąt, którego trzy wierzchołki znajdują się w środkach trzech danych kół — jest trójkątem podstawowym, a zatem każdy inny trójkąt otrzymany z połączenia liniami prostemi trzech punktów odpowiednych musi być podobnym temu trójkątowi.

11. *Jeśli wielokąt podobny danemu tak się porusza, że trzy jego punkty opisują linie proste (nie przechodzące przez jeden punkt) to i wszystkie inne punkty figury muszą opisywać linie proste.*

Trójkąt, który otrzymujemy, łącząc trzy dane punkty liniami prostemi ma stałą formę i jeśli trójkąt ten obierzemy za podstawowy, to będziemy mogli wyznaczyć środek obrotu dla trzech prostych, po których się punkty poruszają. Na zasadzie 8 punkt ten będzie też środkiem obrotu dla wszystkich położeń trójkąta podstawowego, a zatem i dla wszystkich położeń wielokąta, którego część stanowi ten trójkąt. Ruch więc wielokąta danego, polega na tem, że obraca się on około stałego punktu, a zatem wszystkie jego punkty muszą opisywać krzywe podobne, które w tym przypadku będą liniami prostemi.

W przypadku, gdy wszystkie trzy linie przechodzą przez ten sam punkt, może się zdarzyć przypadek, jak to dowiedliśmy w 9, że powyższe twierdzenie miejsca mieć nie będzie.

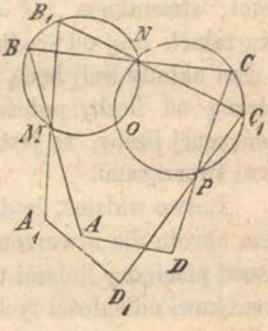
Twierdzenie powyższe daje się łatwo uogólnić, gdyż trzy punkty wielokąta mogą opisywać trzy krzywe podobne o wspólnym środku obrotu. Trzy punkty muszą w tym przypadku podczas ruchu ciągle przypadać z trzema odpowiednymi punktami krzywych, a zatem trójkąt przez te trzy punkty wyznaczony, musi być trójkątem podstawowym trzech krzywych. Jeśli ten przypadek ma miejsce, to zupełnie tak samo jak poprzednio można dowieść, że każdy inny punkt wielokąta opisywać musi krzywą, podobną do danych. Łatwo widzieć, że wyliczonych warunków jest więcej aniżeli trzeba do zupełnego wyznaczenia ruchu i dla tego postaramy się usunąć warunki zbyteczne, przyczem uwzględnimy tylko ten przypadek, kiedy trzy krzywe są kołami, gdyż ten tylko przypadek może mieć dla nas znaczenie. Należy mianowicie zbadać, czy w tym przypadku ma miejsce to samo twierdzenie, któreśmy otrzymali dla linij prostych, według którego trójkąt podstawowy może tylko poruszać się po trzech krzywych, przechodząc ciągle przez punkty odpowiedne.

Dowiedliśmy, że trzy koła mają dwa wspólne środki obrotu, ecz którykolwiek z nich obierzemy, zawsze trójkąt podstawowy będzie jeden i ten sam, gdyż w obu razach środki trzech kół są punktami odpowiednymi i trójkąt podstawowy otrzymuje się, z połączenia trzech takich punktów.

Jeśli teraz obierzemy dowolny punkt A na jednym z okręgów, to temu punktowi na dwu pozostałych okręgach odpowiadać będą punkty B i C lub też b i c stosownie do tego, którym środkiem obrotu posługiwać się będziemy. Trójkąt zatem podstawowy, gdy jeden z jego wierzchołków pada na punkt A, może mieć położenie ABC lub Abc. Łatwo też dowieść, że trójkąt ten nie może przybrać innego położenia. Jakoż, rozwiązując ogólne zadanie: umieścić trójkąt podstawowy tak, ażeby jeden z jego wierzchołków upadł na punkt A, dwa zaś pozostałe wierzchołki — na okręgi dwu pozostałych kół, otrzymamy na zasadzie podanej poprzednio konstrukcyi dwa rozwiązania, które zatem muszą być identyczne z temi, któreśmy teraz na innej drodze otrzymali.

Trójkąt zatem podstawowy może się tylko poruszać po okręgach trzech kół, przechodząc przez punkty odpowiednie, lecz ruch ten może się odbyć w dwojaki sposób.

12. *Jeśli wielokąt podobny danemu tak się porusza, że trzy linie proste figury (nie przechodzące przez jeden punkt) zawierają każda po szczególe stały punkt, to na każdej z prostych do figury należących znajdzie się punkt stały.*



Niech trzy dane proste AB, BC i CD zawierają odpowiednio punkty M, N i P; pozostaje dowieść że czwarta linia DA także zawiera punkt stały. Przedewszystkiem łatwo widzieć, że wszystkie położenia wielokąta mają wspólny środek obrotu. Jakoż, jeśli szukać będziemy tego środka obrotu dla dwu położeń wielokąta $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ to na zasadzie 5 musimy opisać okrąg koła, przechodzący przez punkty odpowiedne B i B_1 i przez punkt M przecięcia się dwu linij odpowiednych i okrąg ten możemy od razu nakreślić, gdyż on przechodzi przez stałe punkty M i N i zawiera wiadomy kąt B. Środek zatem obrotu O jest stały, gdyż oprócz na nakreślonym okręgu, musi jeszcze leżeć na drugim okręgu opisanym w podobny poprzedniemu sposób, przez punkty N i P. Okrąg koła, przechodzący przez punkty O, P i D musi też przejść przez punkt D_1 jako też przez wspólne przecięcie się prostych odpowiednych AD i A_1D_1 i to przy dowolnem położeniu tej ostatniej prostej, a zatem ten punkt przecięcia się linij jest stałym. Podane teraz twierdzenie daje się też uogólnić, którego to uogólnienia jednak dla rozważania rzeczy z różnych punktów widzenia dowiedziemy w inny sposób.

13. Przy obrocie wielokąta podobnego danemu około punktu stałego wyznaczyliśmy dotychczas ruch jego, stawiając żądanie, aby jakiś punkt wielokąta opisał daną krzywą. Lecz ruch wielokąta możemy jeszcze określić, stawiając żądanie, aby bok wielokąta podczas obrotu stale dotykał się danej krzywej (powlekał daną krzywą, tworzył). W tym przypadku każda inna linia prosta wielokąta musi powlec krzywą podobną danej. Jakoż, jeśli wyobrazimy sobie, że prosta AB będąc ciągle styczną do danej krzywej przyjmuje kolejno położenie AB, A_1B_1, A_2B_2 i t. d., inna zaś prosta BC wielokąta przyjmuje odpowiednie położenia BC, B_1C_1, B_2C_2 i t. d., to oba te układy linij przez obrót około stałego punktu mogą być doprowadzone do tego, że przystaną do siebie. Przy tym obrocie kątem obrotu będzie stały kąt pomiędzy dwiema odpowiednemi prostemi; stosunkiem zaś obrotu będzie stały stosunek odległości dwu takich linij od środka obrotu. Figury zatem utworzone przez te dwa układy linij będą podobne, a ponieważ własność ta jest niezależną od liczby położeń, więc będzie jeszcze prawdziwą dla nieskończonej liczby, to jest, gdy utworzone figury będą liniami krzywemi tworzącemi.

Łatwo widzieć, że dany środek obrotu jest też wspólnym środkiem obrotu dla utworzonych krzywych, gdyż kąt obrotu równa się kątowi pomiędzy liniami tworzącemi, stosunek zaś obrotu równa się stosunkowi odległości tych linij od środka obrotu. Jeśli weźmiemy wielokąt w pewnem oznaczonem położeniu, to wszystkie jego boki muszą być stycznemi do utworzonych krzywych w punktach odpowiednych, a zatem muszą być odpowiednemi liniami tych krzywych. Układ dowolnych innych linij odpowiednych krzywym, oczywiście tworzy wielokąt podobny danemu i dany wielokąt otrzymuje przez to znaczenie, które w zupełności odpowiada znaczeniu wielokąta podstawowego; dla tego wielokąt ten nazwiemy *wielokątem podstawowym drugiego rodzaju*. Istnieje ścisły związek pomiędzy obydwoma wielokątami podstawowymi, a mianowicie wielokąt pierwszego rodzaju daje się wpisać w wielokąt drugiego rodzaju i on pozostaje być wpisanym i wtedy, gdy jeden z wielokątów tak będziemy obracać około środka obrotu, ażeby jeden z wierzchołków wpisanego wielokąta ciągle pozostawał na jednym z boków opisanego wielokąta.

Ruch wielokąta, któryśmy uważali, daje się jeszcze i w inny sposób oznaczyć; będziemy jednak rozważali tylko ten przypadek, gdy ruch wielokąta wyznacza się przez warunek, ażeby boki jego ciągle dotykały się trzech podobnych krzywych. Ażeby ruch ten był identyczny z poprzednio opisanym, muszą te trzy krzywe mieć wspólny środek obrotu i trzy boki wielokąta muszą być stycznemi do krzywych w punktach odpowiednych. Ponieważ warunek ten jest dostatecznym do określenia ruchu, więc ruch ten staje się identycznym z poprzednio opisanym, to jest, musi polegać na tem, że wielokąt obraca się około środka obrotu krzywych, gdy jednocześnie każda jego linia tworzy krzywą, podobną do krzywych danych; trójkąt utworzony przez trzy proste styczne do trzech danych krzywych jest dla nich trójkątem podstawowym drugiego rodzaju. Twierdzenie wyłożone w numerze 12 jest szczególnym przypadkiem wyżej wyłożonego, a mianowicie gdy dane krzywe zamieniają się w punkty.

14. Jeśli wyznaczymy środek obrotu dla dwu kół, przyjmując dwa punkty A i a za punkty odpowiedne, to styczne do tych kół w tych punktach utworzą pomiędzy sobą kąt wyznaczony przez położenie tych punktów i kąt ten nie zmieni się gdy punkty A i a opiszą łuki podobne. Odwrotnie, znając ten kąt, możemy wyznaczyć parę punktów odpowiednych i środek obrotu im odpowiadający. Dwie bowiem dowolne styczne, które tworzą pomiędzy sobą dany kąt, dotkną się danych kół w punktach odpowiednych (dwa rozwiązania).

15. *Obrót około danego punktu może zawsze być zastąpionym przez obrót około dowolnego punktu i przez równoległe przesunięcie*, przyczem kąt i stosunek obrotu, pozostają niezmiennemi, przesunięcie zaś równoległe zależnem jest tylko od tych wielkości i położenia środka obrotu.

Ponieważ stosunek obrotu pozostaje niezmieniony, więc przez nowy obrót figura otrzymuje właściwą swą wielkość, ponieważ dalej i kąt obrotu zostaje ten sam, więc linie figury przyjmą właściwe swoje kierunki. Ztąd widzimy, że przesunięcie równoległe co do swej wielkości i kierunku równać się musi linii prostej, łączącej dwa położenia, które przyjmuje dowolny punkt krzywej wskutek obu obrotów.

Niech teraz punkt O będzie danym środkiem obrotu, O_1 — nowym. Przez obrót około O punkt O_1, uważany jako należący do danej krzywej upadnie na jakiś punkt O_2, gdy tymczasem przy obrocie około O_1 pozostaje na swojem miejscu. Prosta zatem $O_1 O_2$ wyznacza kierunek i wielkość równoległego przesunięcia. *Równoległe zatem przesunięcie wyznacza się przez linię, którą nowy środek obrotu przebiega, gdy go obracamy około danego środka obrotu.*

Odwrotnie możemy każdy obrót i równoległe przesunięcie zastąpić przez obrót około nowego punktu, który na zasadzie wyżej wyłożonego łatwo wyznaczyć możemy.

16. *Porządek, w którym dwa po sobie następujące obroty mają być wykonane, może być odwróconym, jeśli do nich dodamy równoległe przesunięcie.*

Jakoż, jakikolwiek porządek obrotu obierzemy, zawsze każda prosta układu zostaje obróconą o kąt równy summie kątów obrotu i pomnożoną przez iloczyn stosunków obrotu. Dwie zatem figury otrzymane przy dwu różnych porządkach obrotu będą miały tę samą wielkość i ich boki odpowiedne te same kierunki; przez równoległe zatem przesunięcie możemy jednej figurze nadać takie położenie, ażeby ona przystała do drugiej.

Jeśli środkami obrotu będą punkty A i B i uważać będziemy punkt A, to przy obrocie około A, punkt ten pozostanie na swojem miejscu, przy obrocie zaś około punktu B, punkt A upadnie na jakiś punkt C. Jeśli teraz zmienimy porządek obrotów i najprzód wykonamy obrót około B, to A upadnie na punkt C, następnie na punkt D. Linia zatem DC lub CD wyznacza przesunięcie równoległe, które dodać należy, ażeby porządek obrotów nie miał wpływu na wypadek.

17. *Dwa obroty można zastąpić jednym.*

Niech danemi środkami obrotu będą punkty A i B. Z szukanego obrotu, mającego zastąpić dwa dane, nie znamy tylko jego środka C Punkt A przy obrocie około A pozostaje na swojem miejscu, przy obrocie zaś około punktu B pada na jakis punkt A_1. Punkt zatem C należy tak wyznaczyć, ażeby $\angle ACA_1$ równał się summie danych kątów obrotu, stosunek zaś obrotu $CA_1 : CA$ — iloczynowi danych stosunków obrotu. Dane kąty obrotu i stosunki obrotu wyznaczają zatem kąty i stosunki boków trójkąta, którego wierzchołki znajdują się w trzech środkach obrotów. Należy uważać, że w przypadku, w którym dwa środki obrotów zlewają się w jeden punkt, to i trzeci środek obrotu przypada w tym samym punkcie, jakeśmy to wyżéj pokazali, i że w przypadku gdy kąty obrotów są równe zeru, wszystkie trzy środki obrotów przypadają na jednej linii prostej. Środki obrotów są w tym przypadku środkami podobieństwa figur, które po dwie brane są podobnie położone. Twierdzenie to dowiedziemy później w inny jeszcze sposób.

18. Pokazaliśmy poprzednio, jak za pomocą obrotu i odwracania przychodzimy do uważania takich układów punktów, w których punkt w jednym układzie odpowiada punktowi w drugim, i każdemu okręgowi koła w jednym układzie — okrąg koła w drugim (włączając pod pojęcie okręgu koła i linię prostą); oprócz tego pokazazaliśmy, jak właśnie ten związek uwarunkowywa znaczenie tego przekształcenia dla elementarnej geometryi. Mamy więc powód do badania, czy nie ma jeszcze i innych przekształceń, w których punktowi odpowiada punkt, okręgowi koła — okrąg koła, jeśli wszystkie punkty płaszczyzny uważać będziemy jako należące do obu układów.

Niech A, B i C będą trzy dowolne punkty jednego układu, a, b i c odpowiadające im punkty drugiego układu. Niech dalej M oznacza dowolny punkt pierwszego układu, byle nie leżący na okręgu koła ABC. Dwu okręgom koła ABM i BCM odpowiadają dwa okręgi kół abm i bcm w drugim układzie i punktowi M musi zatem odpowiadać punkt m. Zależność zatem pomiędzy dwoma układami jest zupełnie wyznaczoną przez trzy pary punktów. Wpiszmy teraz w koło ABC trójkąt $a_1b_1c_1 \backsim abc$ w ten sposób, ażeby proste Aa_1, Bb_1 i Cc_1 przecięły się w jednym punkcie O. Zadanie to łatwo daje się rozwiązać, gdyż kąty przy O są znane. Ztąd wypada, że za pomocą przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne, możemy z układu ABC utworzyć układ podobny układowi abc, ten ostatni zaś przez obrót (w razie potrzeby przez obrót około osi) może być przekształcony w układ abc. Dowiedliśmy tym sposobem, że *dwa układy, w których punkt odpowiada punktowi, okrąg koła zaś — okręgowi* *koła, dają się zawsze przez obrót i przekształcenie przez promienie wodzące odwrotne przekształcić jeden w drugi.*

19. Z twierdzeń wyłożonych w teoryi obrotu możemy na zasadzie metod nowszej geometryi wyprowadzić nowe twierdzenia ogólniejszego znaczenia. Ponieważ podobne zastosowanie nie jest zgodne z planem, jakiśmy sobie ułożyli przy napisaniu tego dziełka, więc dla wyjaśnienia poprzedniego wystarczy jeden przykład. W Nr. 11 dowiedliśmy, że jeśli linia prosta porusza się tak, że stosunek odcinków *ab* i *bc*, które na téj prostéj odcinają trzy proste stałe jest ilością stałą, to linia ta obraca się około stałego środka obrotu; ztąd wypada, że każdy punkt ruchomej prostej, który wyznaczonym jest przez stosunek odcinków, na które dzieli np. odcinek *ab* również opisuje linię prostą. Przytoczone stosunki dają się wyrazić przez stosunki nieharmoniczne, *) jeśli wprowadzimy punkt przecięcia się linii ruchomej z linią prostą nieskończenie odległą. W formie jaką teraz twierdzenie poprzednie przybiera, wyraża ono własność rzutową, a mianowicie:

Jeżeli prosta ruchoma przecina cztery stałe proste w punktach o stałym stosunku nieharmonicznym, to każdy jej punkt (oznaczony przez stosunki nieharmoniczne) *opisuje linię prostą.*

Jeśli dwie ze stałych linij prostych odsuniemy, aż do urojonych, nieskończenie odległych punktów kołowych, to otrzymamy następujące twierdzenie:

Jeżeli dany kąt ABC ma stały wierzchołek A i punkty B i C opisują stałe linie proste, to każdy punkt D linii BC (oznaczony przez kąt BAD) opisze linię prostą.

Zastosowania.

377. W dany trójkąt *ABC* wpisać inny któryby był równy drugiemu danemu trójkątowi.

---

*) Jeśli na linii prostej znajdują się cztery punkty *a, b, c* i *d*, to punkty *a* i *b* wyznaczają odnośnie do punktów *c* i *d* cztery odcinki *ac, cb, ad db.* Otóż iloraz stosunków

$$\frac{ac}{cb} : \frac{ad}{db}$$

Chasles oznacza przez (*abcd*) i nazywa *stosunkiem nieharmonicznym* czterech punktów *a, b, c* i *d.* *P. T.*

Na zasadzie 9 każdy układ trójkątów podobnych wpisanych w dany trójkąt ma wspólny środek obrotu; dla tego należy w dany trójkąt wpisać trójkąt o żądanym kształcie i oznaczyć środek obrotu, uważając ten ostatni trójkąt za podstawowy. Szukany trójkąt otrzymamy przez obrót trójkąta wpisanego i obrót ten najłatwiej wykonać, mnożąc nakreślony trójkąt podstawowy odpowiednio do środka obrotu tak, ażeby otrzymał żądaną wielkość i następnie obracamy go około tego samego punktu, póki wierzchołki jego nie upadną na boki danego trójkąta.

378. W dany czworokąt wpisać inny podobny drugiemu danemu. W dany czworokąt wpisujemy drugi w ten sposób, ażeby trzy jego wierzchołki upadły na bokach czworokąta, w który szukany ma być wpisany i następnie wyznaczamy środek obrotu zupełnie tak samo jak w zadaniu poprzedniem; poczem pozostaje tylko czworokąt wpisany tak obrócić około środka obrotu, ażeby czwarty jego wierzchołek upadł na czwarty bok; lecz ten wierzchołek podczas obrotu opisuje linię prostą (11), którą łatwo wykreślić, gdyż przez powtórzenie poprzedniej konstrukcyi możemy wyznaczyć drugi punkt tej linii prostej; linię tę możemy też otrzymać, obracając jeden z boków danego czworokąta około znalezionego środka obrotu. Przy zastosowaniu pierwszej konstrukcyi nie ma potrzeby szukać środka obrotu.

379. Na czterech danych prostych tak umieścić piątą, ażeby trzy odcinki jakie na niej odcinają dane linie były w danym stosunku. Zadanie to jest szczególnym przypadkiem poprzedniego, gdyż szukana linia prosta może być uważaną jako czworokąt znanego kształtu.

Uwaga. Trzy poprzednie zadania znajdują się w pierwszej księdze dzieła *Newtona* „Principia mathematica philosophiae naturalis."

380. W dany trójkąt wpisać drugi podobny innemu danemu trójkątowi i mający pole minimum.

381. Zbudować równoległobok o danych kątach i danym obwodzie pod warunkiem, ażeby każdy z jego boków przechodził przez dany punkt.

Niech boki AB, BC, CD i DA równoległoboku przechodzą odpowiednio przez dane punkty P, Q, R i S. Jeśli T oznacza punkt przecięcia się kół SAP i PBQ, to punkt ten będzie środkiem obrotu dla AB i dowolnej pomiędzy okręgami kół poprowadzonej linii prostej A_1PB_1, a zatem będzie $AT : AB = A_1T : A_1B_1$.

Jeśli znowu V będzie punktem przecięcia się kół PAS i SDR, to w podobny sposób znajdziemy stosunek $AV : AD$ i następnie można wyznaczyć A (189).

382. Umieścić na trzech okręgach kół trójkąt równy trójkątowi, mającemu swe wierzchołki w środkach danych kół.

Należy wyznaczyć wspólny środek obrotu trzech kół; ponieważ środki tych kół są punktami odpowiednymi, więc dany trójkąt jest trójkątem podstawowym i wyznaczony środek obrotu musi też być środkiem obrotu dla tego trójkąta i szukanego; ten ostatni więc otrzymamy, obracając pierwszy z nich dopóty, dopóki jeden z jego wierzchołków nie upadnie na okrąg koła. Stosunek obrotu jest w tym przypadku równy 1, lecz zadanie w ten sam sposób się rozwiązuje i dla każdego innego stosunku.

383. Zbudować trójkąt równy danemu z warunkiem, ażeby każdy bok szukanego trójkąta przechodził przez dany punkt.

Łatwo nakreślić trójkąt podobny danemu, i którego boki przechodzą przez dane punkty. Punkty te możemy uważać za krzywe podobne i nakreślony trójkąt za trójkąt podstawowy drugiego rodzaju; w tem założeniu oznaczamy środek obrotu i mnożymy nakreślony trójkąt przez taką wielkość, ażeby stał się równym danemu. Ponieważ stosunek obrotu dla otrzymanego w ten sposób trójkąta i szukanego równa się 1, więc dwa boki odpowiednie muszą być w równej odległości od środka obrotu odległości i jedna ze szukanych linij wyznacza się z warunku, że ma być styczną do znanego koła i przechodzić przez dany punkt.

384. Zbudować czworokąt podobny do danego, z warunkiem, ażeby każdy z jego boków przechodził odpowiednio przez jeden z czterech danych punktów.

Należy wykreślić dowolny czworokąt podobny danemu w ten sposób, ażeby trzy boki przechodziły przez trzy z danych punktów i następnie wyznaczyć środek obrotu tak, jak w poprzedniem zadaniu. Otrzymany czworokąt należy obracać około środka obrotu, póki czwarty bok nie przejdzie przez czwarty z danych punktów; obrót ten łatwo uskutecznimy, gdyż ten bok oprócz czwartego punktu zawiera jeszcze punkt stały, który wyznaczyć możemy w dwojaki sposób (podobn. do 378).

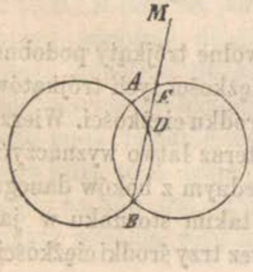
385. Około trójkąta ABC opisano koło; z punktu O na okręgu tego koła poprowadzono linie proste do boków trójkąta, tworzące z tymi bokami dany kąt; — należy dowieść, że spodki poprowadzonych prostych leżą na jednej prostej.

Jeśli A, B i stosownie dobrany punkt na AB obierzemy za punkty odpowiedne na trzech bokach trójkąta, to punkt O będzie środkiem obrotu i trzy spodki punktami odpowiednymi. Te trzy punkty muszą leżeć na jednej prostej, albowiem trójkątem podstawowym w naszym przypadku jest linia prosta.

386. Środki trzech kół leżą na trzech wierzchołkach B, C i D równoległoboku. Należy tak umieścić równoległobok o danych kątach, ażeby jeden z jego wierzchołków upadł na czwarty wierzchołek A danego równoległoboku, trzy zaś pozostałe na trzy dane okręgi kół.

Mnożąc koło C przez $1/2$ odnośnie do punktu A, otrzymamy nowe koło. Koło to jak również koła B i D mają za trójkąt podstawowy linię prostą, podzieloną na dwa równe odcinki. Przekątna zatem B_1D_1 szukanego równoległoboku, musi przeciąć te trzy koła w punktach odpowiednych i widzianą być z punktu A pod danym kątem. Jeśli obrócimy BB_1 ku DD_1, to punkt A upadnie na znany punkt A_1 i $\angle AD_1A_1$ będzie wiadomym.

387. Wyznaczyć miejsce geometryczne punktów, od których poprowadzone styczne do dwu danych kół byłyby w danym stosunku.



Niech dane koła przecinają się w punktach A i B i niech M będzie jednym z szukanych punktów; linia prosta MB przecina oba koła w punktach D i E i w skutek postawionego warunku stosunek pomiędzy iloczynami $MD \,.\, MB$ i $ME \,.\, MB$, a zatem i pomiędzy MD i ME jest stałym; ponieważ jednocześnie i kąty trójkąta ADE są stałe, więc i cała figura $ADEM$ ma stałą formę i jeśli figura ta tak się obraca około punktu A, że punkty D i E opisują okręgi kół, to i punkt M musi opisać okrąg koła. Ponieważ A jest wspólnym środkiem obrotu dla tego koła i dla kół danych, więc koło to musi tak samo jak i koła dane przechodzić przez punkt A. Linia DEM przedstawia trójkąt podstawowy dla tych kół, a że trójkąt, którego wierzchołki leżą na środkach tych kół jest podobnym do trójkąta podstawowego, więc środki kół muszą leżeć na linii prostej. Odległości szukanego środka od danych środków są w stosunku $MD : ME$, a stosunek ten równa się kwadratowi danego stosunku.

388. Do dwu danych kół poprowadzić dwie styczne, tworzące ze sobą dany kąt i czyniące zadość warunkowi, ażeby linia prosta, łącząca punkty ich styczności, przechodziła przez dany punkt.
Zadanie to na zasadzie 14 sprowadza się do 364.

389. Do dwu danych kół poprowadzić dwie styczne, tworzące ze sobą dany kąt i czyniące zadość warunkowi, ażeby linia prosta łącząca ich punkty styczności miała dany kierunek.
Zadanie to jest szczególnym przypadkiem poprzedniego, gdyż w tym przypadku punkt dany leży w nieskończoności.

390. W dany trójkąt wpisać drugi podobny danemu, czyniący zadość warunkowi, ażeby jeden z jego boków przechodził przez dany punkt.
Należy wyznaczyć trzy punkty odpowiedne na trzech danych liniach, biorąc trójkąt wpisać się mający za trójkąt podstawowy.
Zadanie zostało teraz sprowadzone do 364.

391. W dany trójkąt wpisać drugi podobny innemu danemu i czyniący zadość warunkowi, ażeby jego środek ciężkości leżał na jednej z ośrodkowych danego trójkąta.
W dany trójkąt należy wpisać dwa dowolne trójkąty podobne danemu; linia prosta łącząca środki ciężkości tych trójkątów przecina daną ośrodkową w szukanym środku ciężkości. Wierzchołki szukanego trójkąta dadzą się teraz łatwo wyznaczyć, gdyż układ trzech wierzchołków na jednym z boków danego trójkąta wyznacza odcinki, które są w takim stosunku w jakim znajdują się odcinki wyznaczone przez trzy środki ciężkości.

392. W dany trójkąt wpisać drugi, czyniący zadość warunkowi, ażeby dwa jego boki miały dane kierunki, trzeci zaś — daną długość.

Niech wpisanym trójkątem będzie *abc* i *bc* — dany bok. Koło opisane około trójkąta *abc* przetnie bok danego trójkąta, na którym leży wierzchołek *a* w dwu punktach, a mianowicie w *a* i *d*. Znamy teraz wszystkie boki trójkąta *abc*.

393. Nakreślić trzy okręgi kół, jeśli wiadome są: punkt, z którego wszystkie koła są widziane pod jednym kątem, punkt na każdym z okręgów, stosunki pomiędzy promieniami kół i w końcu kąty, pod którymi z danego punktu widzimy linie proste łączące środki kół.

Znamy wspólny środek obrotu trzech kół, ich stosunki obrotu i kąty obrotu. Dla tego możemy dwa z danych punktów tak obrócić, ażeby upadły na okrąg, na którym trzeci punkt leży i wtedy znamy trzy punkty tego okręgu.

394. Dane są dwa koła przecinające się w punktach A i B jakoteż dwa punkty P i R; należy w każdem z danych kół poprowadzić cięciwę, ażeby każda z nich przechodziła przez jeden z danych punktów i ażeby linie proste łączące końce cięciw przechodziły przez punkt A.

Uważając dwie cięciwy jako figury podobne widzimy, że punkt B staje się środkiem obrotu dla tych cięciw i danych kół. Znamy kąt obrotu i stosunek obrotu możemy zatem jeden z danych punktów obrócić tak, ażeby upadł na cięciwę, zawierającą drugi punkt; znamy teraz dwa punkty tej cięciwy.

395. Punkt X jest środkiem obrotu dla AB i CY, gdzie A, B i C są danymi punktami; wyznaczyć jaką linię krzywą opisuje punkt X, gdy Y przebiega daną linię krzywą.

Za pomocą równoległego przesunięcia, nadajemy trójkątowi BAX położenie B_1CX_1. Z podobieństwa trójkątów B_1CX_1 i YCX wypada, że iloczyn $B_1Y.\ CX$ jest stałym, i że odcinki BY i CX obracają się w kierunku przeciwnym z jednakową prędkością, X i Y zatem opisują krzywe odwrotne.

396. Geometra może widzieć na polu trzy punkty A, B i C; odpowiedne im punkty a, b i c oznaczone są na stoliku mierniczym. Należy na stoliku wyznaczyć punkt, odpowiadający stanowisku geometry na polu.

Szukany punkt jest środkiem obrotu dla trójkątów ABC i abc. Jeśli za pomocą dioptry poprowadzimy linie proste przez punkty a, b i c, które przedłużone odpowiednio przechodzą przez punkty A, B i C, to otrzymamy tak nazwany trójkąt błędów; niech tym trójkątem będzie $\alpha\beta\gamma$, a mianowicie punkt γ jest punktem przecięcia się prostych przechodzących przez a i b i t. d. Kąty α, β i γ przy nieznacznej zmianie położenia stolika mogą, z powodu znacznej odległości punktów A, B i C, być uważane jako stałe. Szukanym zatem punktem będzie przecięcie się kół $a\gamma b$ i $a\beta c$. Jednakże koła te nie dają się dobrze zastosować do wykreślenia, gdyż trudno ściśle je nakreślić i ich środki bardzo często przypadają po za granicami rysunku. Jeśli nakreślimy figury odwrotne tych kół z punktem a jako środkiem przekształcenia przez promienie odwrotne i z iloczynem $a\beta \,.\, a\gamma$ jako potęgą tego przekształcenia, to szukany punkt zamienia się na punkt przecięcia się dwu linij prostych, przechodzących przez β, γ i tworzących z linią $\beta\gamma$ kąty, które odpowiednio będą $ab\gamma$ i $ac\beta$. Ztąd wypada następujący sposób kreślenia: Odkłada się $\angle\, \beta\gamma O_1 = \beta ca$ i $\angle\, \gamma\beta O_1 = \gamma ba$ (z uwzględnieniem kierunku obiegu kątów) i w ten sposób wyznacza punkt O_1. Następnie obraca się stolik dopóty, dopóki linia $O_1 a$ nie stanie się linią celu skierowaną ku A; trójkąty abc i ABC są wtedy podobnie położone i trójkąt błędów sprowadza się do szukanego punktu.

DODATKI.

O przecięciu się łuków kół.

Wyłożone w poprzednich ustępach prawdy dowodzą, jak ważną jest rzeczą ścisłe badanie figur w celu wykrycia związku pomiędzy jej częściami, a szczególniej pomiędzy jej kątami. Badania takie, w ogólności mówiąc, można uskutecznić na zasadzie związków zachodzących pomiędzy kątami i łukami kół i za pomocą innych elementarnych twierdzeń. Jeśli jednak dane figury są bardziej złożone, to z powodu znacznej liczby kątów, odszukanie podobnych związków jest często dość trudnem. Z tego to powodu korzystnem będzie szukać środków ułatwiających podobne badania. Jednym z takich środków jest badanie kątów utworzonych przez łuki kołowe, gdyż ten sposób badania bardzo często ułatwia pogląd na figurę. Nie jest naszym celem dać w tem miejscu wyczerpujący wykład tego przedmiotu, chcielibyśmy tylko wyłożyć niektóre, do tej materyi się odnoszące twierdzenia, których zastosowanie często okazuje się w praktyce korzystnem.

1. *W wielokącie, utworzonym przez łuki kół, summa boków powiększona o summę kątów przyległych kątom wielokąta, równa się czterem kątom prostym.*

Jakoż, wyobraźmy sobie linię prostą, obracającą się około wielokąta w ten sposób, że rozpoczyna obrót od jednego wierzchołka dotykając się jednego boku aż dosięgnie drugiego wierzchołka; doszedłszy tego wierzchołka linia ruchoma obraca się około niego póki nie stanie się styczną do następnego boku i tak dalej, aż wróci do położenia pierwotnego. Przy tym obrocie linia prosta opisała kąty, które już to są równe bokom wielokąta, już też kątom przyległym wewnętrznym kątom wielokąta; ponieważ jednak linia prosta raz się obróciła, więc summa tych wszystkich kątów równa się 360⁰.

Dla prostoty przypuściliśmy, że linia ruchoma po *jednym* już obrocie wróciła do pierwotnego położenia; jednakże przy wielokątach nie wypukłych może się stać, że linia ta kilka razy (lub ani razu) się obróciła, tak, że szukana summa kątów może być każdą wielokrotnością 360⁰.

Chcąc, ażeby nasze twierdzenie było zawsze prawdziwem, należy kąty i łuki brać z właściwym ich znakiem, stosownie do kierunku w jakim zostały przebieżone.

2. *W trójkącie summa kątów zmniejszona o summę boków, równa się 180⁰. Jeśli boki przechodzą przez jeden punkt* (który nie jest wierzchołkiem trójkąta), *to summa kątów równa się 180⁰, a summa boków zeru.*

Ostatniej części twierdzenia możemy łatwo dowieść, jeśli zamiast kątów trójkąta weźmiemy równe im kąty utworzone przy wspólnem przecięciu się boków.

3. *W dwójkącie* *) *oba kąty są równe pomiędzy sobą i każdy z nich równa się połowie summy boków.*

4. *Kąt wpisany równa się połowie summy jego boków i połowie łuku, na którym się opiera.*

Jeśli przedłużymy boki kąta aż do przecięcia się, to one utworzą dwójkąt i kąt wpisany mierzyć się będzie połową summy boków dwójkąta, lecz summa przedłużeń boków równa się łukowi, na którym kąt wpisany się opiera (**2**). Łuk ten należy brać z różnymi znakami, stosownie do tego, czy uważamy go jako bok jednego lub też jako bok drugiego z dwu trójkątów, na które dwójkąt jest podzielony.

5. *Jeśli w dwu parach kół punkty przecięcia się każdej pary leżą każdy na jednym okręgu drugiej pary, to koła każdej pary przecinają się pod tym samym kątem* (**2**).

6. *W czworokącie wpisanym, summa dwu kątów przeciwległych równa się summie dwu drugich kątów. Jeśli cztery boki*

---

*) Dwójkątem nazywamy część płaszczyzny zawartą pomiędzy dwoma przecinającemi się kołami. *P. T.*

przechodzą przez ten sam punkt, to równe summy kątów stanowią 180°, a summa boków równa się zeru (**4**).

7. *Jeśli w czworokącie summa dwu kątów przeciwległych równa się summie dwu drugich kątów, to czworokąt jest wpisalny.*

Z **1** wypada bowiem, że summa dwu przeciwległych kątów zmniejszona o połowę summy boków równa się 180°, lecz ta różnica stanowi właśnie summę kątów przeciwległych w czworokącie prostolinijnym, którego wierzchołki przypadają razem z wierzchołkami danego czworokąta.

8. *Jeśli dwa koła są styczne do dwu drugich kół w jednakowy sposób* (oba zewnętrznie lub oba wewnętrznie), *to cztery punkty styczności leżą na jednym okręgu koła* (**7**).

9. *Każde koło przechodzące przez punkty przecięcia się dwu stałych kół, przecina układ kół stycznych do kół stałych* (*w jednakowy sposób*) *pod jednakowymi kątami.*

Twierdzenia tego dowiedliśmy poprzednio (198) za pomocą sposobu przekształcenia przez promienie odwrotne, podamy teraz dowód bezpośredni, który daje się jeszcze zastosować i w przypadku, gdy stałe dwa koła się nie przecinają; w tym przypadku przez koło, przechodzące przez punkty przecięcia się stałych kół, należy rozumieć koło, które z danemi kołami ma wspólną linię potęgową.

Jako jedno koło układu możemy też uważać styczną wspólną; niech ta styczna dotyka się stałych kół S_1 i S_2 w punktach A i B, gdy jakiekolwiek inne koło S układu dotyka się ich w punktach C i D. Koło przechodzące przez punkty przecięcia się stałych kół przecina wspólną styczną w punkcie E, koło zaś S — w F. Linie proste AC i BD przecinają się na kole S w punkcie O, w którym styczna jest równoległą do wspólnej stycznej. Ponieważ punkty A, C, D i B leżą na jednym okręgu koła, więc punkt O ma tę samą potęgę odnośnie do S_1 i S_2. Z tego to powodu O ma też tę samą potęgę odnośnie do kół ACF, EF i BDF i dla tego musi leżeć na linii potęgowej każdej pary z tych trzech kół. Ponieważ trzy te koła mają punkt F wspólny, więc OF jest ich wspólną linią potęgową i dla tego mają jeszcze jeden wspólny punkt przecięcia się, leżący na linii OF. Ponieważ w ten sposób te trzy koła mają dwa punkty wspólne, więc ich środki muszą leżeć na jednej prostej. Ponieważ koła ACF i BDF przechodzą przez punkty styczności, więc każde z nich przecina wspólną styczną i styczną w punkcie F pod równymi kątami i ich środki leżą z tego powodu na dwójsiecznej kąta utworzonego przez styczne. Ponieważ koło EF ma swój środek na tej samej prostej, więc musi ono wspólną styczną i styczną w F, czyli koło S przeciąć pod równymi kątami.

Układy kół.

Z pomiędzy warunków mogących wyznaczyć koło na szczególną uwagę zasługują: 1) ażeby koło przechodziło przez punkt dany, 2) ażeby dotykało się danej prostej i 3) ażeby było stycznem do danego koła. Jeśli z tych warunków, wyznaczających koło wybierzemy trzy, otrzymamy grupę zadań, które jednakże, z wyjątkiem czterech zostały już poprzednio rozwiązane. Nim przystąpimy do rozwiązania tych i z niemi spowinowaconych zadań wyłożymy najprzód dwa twierdzenia, które w następstwie znajdą zastosowanie.

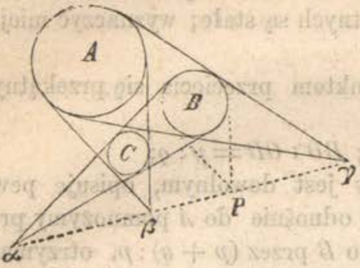
10. *Jeśli koło dotyka się dwu drugich kół w punktach A i B, to linia prosta AB przechodzi przez jeden ze środków podobieństwa obu kół.*

Niech prosta AB przecina powtórnie koło, przechodzące przez B w punkcie b. Łatwo widzieć, że promień koła, przechodzący przez punkt b jest równoległy do promienia poprowadzonego w drugiem kole do punktu A. Punkty zatem A i b są punktami odpowiednymi w dwu podobnie położonych kołach i z tego powodu linia Ab przechodzi przez środek podobieństwa.

Jeśli koło jest stycznem do obu kół jednakowo (zewnętrznie lub wewnętrznie) to linia Ab przechodzi przez zewnętrzny środek podobieństwa, jeśli zaś koło dotyka się obu kół niejednakowo, to ta linia przechodzi przez wewnętrzny środek podobieństwa.

Jeśli O oznacza środek podobieństwa, to oba koła są krzywemi odwrotnemi z punktem O jako środkiem przekształcenia przez promienie odwrotne, a iloczyn $OA \cdot OB$ jest z tego powodu stałym.

11. *Trzy wewnętrzne środki podobieństwa dla każdych dwu z trzech okręgów leżą na jednej prostej.*



Niech danemi kołami będą A, B i C, γ — środkiem podobieństwa dla A i B, β — dla A i C, α — dla B i C. Do koła B poprowadźmy dwie styczne równoległe do stycznych wspólnych dwu okręgom A i C i przecinających się w punkcie P. Jeśli uważać będziemy dwa koła A i B to β i P są punktami odpowiednymi i dla tego wraz ze środkiem podobieństa γ leżą na jednej prostej. Jeśli teraz uważać będziemy koła B i C, to punkty β i P są również punktami odpowiednymi i dla tego wraz ze środkiem podobieństwa α leżą na jednej prostej. Ztąd wypada, że punkty α, β, γ leżą na jednej linii prostej.

Dodatek 1. W taki sam sposób można dowieść, że prosta, łącząca dwa środki wewnętrzne podobieństwa przechodzi przez zewnętrzny środek podobieństwa trzeciej pary kół.

Dodatek 2. Twierdzenie powyższe stosuje się też i do dowolnych trzech krzywych, z których każde dwie są podobnie względem siebie położone; gdyż możemy do tych trzech krzywych dodać trzy koła odpowiedne i twierdzenie jest wtedy prawdziwem dla środków podobieństwa tych kół, które są zarazem środkami podobieństwa i dla trzech krzywych.

Przykłady.

397. Nakreślić koło styczne do dwu danych kół z warunkiem, ażeby prosta łącząca dwa punkty styczności przechodziła przez dany punkt.

398. Nakreślić koło styczne do dwu kół w jednakowy sposób i przecinające daną prostą przez zewnętrzny środek podobieństwa tych kół, przechodzącą według danej cięciwy.

399. Dane są dwa koła A i B jakoteż punkty D, E i F; należy przez punkt D poprowadzić koło C z warunkiem, ażeby linia potęgowa dla A i C przechodziła przez E, linia zaś potęgowa dla B i C przez F.

400. W czworokącie $ABCD$ bok AB ma stałe położenie i stosunki pomiędzy odcinkami przekątnych są stałe; wyznaczyć miejsce geometryczne lini CD.

Niech punkt O będzie punktem przecięcia się przekątnych i niech będzie:

$$AO : OC = m : n;\ BO : OD = p : q;$$

dajmy, że punkt O, który jest dowolnym, opisuje pewną krzywą K. Jeśli krzywę tę odnośnie do A pomnożymy przez $(m + n) : m$, odnośnie zaś do B przez $(p + q) : p$, otrzymamy krzywe, które jednocześnie zostają opisane przez C i D; krzywe te są podobne według stosunku $p\,(m + n) : m\,(p + q)$ i ich środkiem podobieństwa jest jakiś punkt M na prostej AB (**11**, dodat. 2). Ponieważ punkty C i D są punktami odpowiednymi, więc prosta CD przechodzi przez punkt M, gdyż stosunek $MC : MD$ równa się stosunkowi wyżej przytoczonemu. W ten sposób można dowieść, że stosunek $MA : MB$ jest stałym tak, że M jest stałym punktem, a zatem jest miejscem geometrycznem dla CD.

401. Nakreślić koło styczne do dwu danych kół i przechodzące przez dany punkt.

Znamy potęgę środka podobieństwa danych kół odnośnie do koła szukanego. Na tej zasadzie możemy wyznaczyć jeszcze jeden punkt szukanego koła i zadanie sprowadza się do 238

402. Nakreślić koło, przechodzące przez dany punkt i styczne do danej linii prostej i do danego koła.

Zadanie to jest szczególnym przypadkiem poprzedniego, gdyż daną linię prostą możemy uważać jako koło o promieniu nieskończenie wielkim.

403. Nakreślić koło styczne do trzech danych kół.

Zadanie to za pomocą metody podanej przy przesunięciu równoległem, daje się sprowadzić do zadania 401.

Zadanie to daje się też rozwiązać i za pomocą sposobu zastosowanego do zadania 201. Trójkąt, mający się wykreślić, jest ten, którego wierzchołki leżą na punktach styczności; bok tego trójkąta przechodzą przez trzy ze środków podobieństwa danych kół. Biorąc te środki podobieństwa za środki przekształceń przez promienie odwrotne, za potęgi zaś przekształcenia takie wielkości, ażeby każde dwa koła przechodziły wskutek przekształcenia jedno w drugie, widzimy, że każde z kół po trzech przekształceniach stanie się tem samem, jakiem było pierwiastkowo. Nie ma zatem istotnej różnicy pomiędzy tem i poprzednio rozwiązanem zadaniem.

Najprostsze jednak i najdowcipniejsze rozwiązanie otrzymujemy, opierając się na twierdzeniu, że linia potęgowa dwu kół przecina pod jednakowym kątem koła styczne do obu danych kół i do wspólnej stycznej tych kół.

Ztąd bowiem wypada, że linie styczne do szukanego koła w punktach jego przecięcia się z liniami potęgowemi danych kół są równoległe do tych wspólnych stycznych do kół danych, które należą do tego samego układu kół stycznych co i szukane. (Zewnętrzne styczne wspólne dla dwu danych kół należą do układu kół stycznych do danych w jednakowy sposób, wewnętrzne do tych, które są niejednakowo styczne). Niech A, B i C oznaczają dane koła. Jeśli szukane koło i koło A uważać będziemy jako koła podobnie położone z punktem styczności jako środkiem podobieństwa, to obie linie potęgowe dla A i B jakoteż dla A i C są odpowiednemi dla dwu linij prostych, z których jedna łączy punkty styczności pomiędzy A i wspólnemi stycznemi do A i B, druga zaś łączy punkty styczności pomiędzy kołem A i wspólnemi stycznemi dla A i C. Te dwie proste zatem przecinają się w punkcie, który odpowiada środkowi potęgowemu danych kół i linia prosta, łącząca te dwa punkty przechodzi zatem przez szukany punkt styczności.

Wszystkie inne zadania, w których koło oznaczonem jest przy trzy z wyżej przytoczonych warunków mogą być uważane jako szczególne przypadki, tylko co rozwiązanego zadania.

404. W trójkąt ABC wpisać trzy koła S_a, S_b i S_c w ten sposób, ażeby każde z nich było stycznem do dwu pozostałych i do dwu boków trójkąta.

Znane to zadanie zostało po raz pierwszy rozwiązanem przez matematyka włoskiego *Malfattiego* († 1807), który obliczył promienie szukanych kół i znalazł dla nich wartości, dające się z łatwością wykreślić. W r. 1826 *Steiner* podał twierdzenie, że każda ze stycznych wspólnych dwu danym kołom w punkcie ich zetknięcia jest zarazem styczną do dwu z kół, które dają się wpisać w trzy trójkąty, na które dwójsieczne rozdzielają dany trójkąt. Twierdzenie to odrazu daje prosty sposób wykreślenia. *Steiner* jednak nie dał dowodzenia tego twierdzenia, wskazał tylko, że dowodzenie to polega na szeregu twierdzeń o środkach podobieństwa, liniach potęgowych, kołach potęgowych i t. d., które to twierdzenia podał. Dopiero w r. 1874 dał *Schröter* dokładne dowodzenie zgodnie ze wskazówkami *Steinera*, lecz dowodzenie to *Schröter* otrzymał za pomocą dość złożonych przekształceń przez promienie odwrotne. My podamy konstrukcyę *Steinera*, opierając się na bardzo elementarnych twierdzeniach.

Punkty styczności wraz z bokami tak oznaczymy, że przebiegając obwód trójkąta, po kolei napotykamy następujące punkty: A, c_1, c_2, B, a_1, a_2, C, b_1, b_2; oprócz tego niech γ będzie punktem styczności kół S_a i S_b, β — punktem styczności S_a i S_c i nakoniec α — punktem styczności S_b i S_c. Koło, które jest stycznem do kół S_a i S_c w β i przechodzące przez c_2 przecina AC w punkcie D i tworzy równe kąty z bokami AB i AC (9). Styczne zatem do tego koła w punktach c_2 i D przecinają się na dwójsiecznej kąta A i tworzą z dwoma bokami czworokąt wpisany, tak że łuk c_2D równa się kątowi A. Koło $c_2\alpha\beta$ również przechodzi przez punkt c_1. Niech to ostatnie koło i koło βDb_2 przecinają się w punkcie E. Lecz $\angle c_1Eb_2 = \angle c_1c_2\beta + \angle b_2D\beta = 180^0 - {}^1\!/_2 A$; ztąd wypada, że koło c_1Eb_2 ma swój środek w A. Koło $c_1c_2\alpha\beta$ przecina AB, AE i styczną w punkcie c_2 według równych cięciw, gdyż $Ac_1 = AE$ i koło przecina AB i $D\beta c_2$ pod równymi kątami. W ten sam sposób można dowieść, że koło $E\beta Db_2$ przecina AE i styczną w D według równych cięciw. Niech teraz styczne w punktach c_2 i D przecinają się w F, linię zaś AE odpowiednio w punktach G i H. Z równań $c_2F = DF$, $c_2G = EG$, $DH = HE$ wypada, że jeden bok trójkąta GFH równa się summie dwu pozostałych; ztąd wynika, że punkty G i H zlewają się z punktem F tak, że AEF staje się dwójsieczną kąta A. Koło zatem $c_1c_2\alpha\beta$ przecina AB, AE i styczne w punktach α i β pod równymi kątami i dla tego możemy nakreślić koło z niem współśrodkowe styczne do tych czterech prostych. W ten sam sposób można dowieść, że koło to jest także stycznem do dwójsiecznej kąta *B*, czem dowiedliśmy twierdzenia *Steinera*. Jeśli chcemy także uwzględnić i takie koła, które są styczne i do przedłużeń boków, to zadanie otrzymuje i inne rozwiązania, które się wyprowadzają z poprzedniego za pomocą nieznacznych zmian. Jeśli w zadaniu zamiast boków trójkąta weźmiemy trzy koła, to wtedy wystarczy zbadanie figury przekształconej przez promienie wodzące odwrotne z punktem przecięcia się dwu z tych kół jako środkiem przekształcenia. Łatwo widzieć, że i do tego uogólnionego przypadku twierdzenie wyżej dowiedzione daje się zastosować, jeśli zamiast dwójsiecznych kątów weźmiemy koła, dzielące kąty pomiędzy danemi na dwie równe części (koła potęgowe) i zamiast stycznej w β — koło jej odpowiadające w figurze przekształconej i t. d.

O możności rozwiązania danego zadania za pomocą cyrkla i liniału.

Jeżeli nie jesteśmy w stanie rozwiązać danego zadania, to nasuwa nam się pytanie, czy ta niemożność rozwiązania jest wynikiem niedostatecznego zrozumienia zadania i nieodpowiednego jego traktowania, czy też, jest ona wynikiem tej okoliczności, że dane zadanie należy do rzędu tych, których za pomocą cyrkla i liniału rozwiązać nie możemy. Sposoby, które teraz wyłożymy dadzą nam możność rozstrzygnięcia tej kwestyi w największej liczbie przypadków.

Jeśli zadanie daje się rozwiązać, to rozwiązanie to jakkolwiek złożonem ono by było, sprowadza się do dwu zasadniczych wykreśleń: poprowadzić prostą przez dane dwa punkty i wykreślić koło, którego środek i promień są dane. Każdy punkt wyznacza się z przecięcia się dwu prostych, prostej i okręgu koła lub dwu okręgów kół. Jeśli teraz wyobrazimy sobie, że za pomocą wzorów i metod geometryi analitycznej obliczyliśmy współrzędne punktów, które otrzymujemy za pomocą kolejnych wykreśleń, to w ciągu całego rachunku będziemy tylko potrzebowali rozwiązywać równania stopnia 1-go lub 2-go. Możemy zatem każdą wielkość przez wykreślenie otrzymaną, wyrazić za pomocą danych, tak, że otrzymane wyrażenia nie będą zawierały innych niewymierności oprócz pierwiastków kwadratowych. Ponieważ zaś z drugiej strony wiemy, że każde takie wyrażenie daje się wykreślić, więc widzimy, że *koniecznym i dostatecznym warunkiem ażeby zadanie dało się rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału jest, ażeby szukane wielkości dały się wyrazić wymiernie za pomocą danych i za pomocą pierwiastków kwadratowych.*

Badania nad równaniami dającemi się rozwiązać za pomocą pierwiastków kwadratowych znajdzie czytelnik w pracach autora „Om Ligniger, der kunne loses ved kvadratrod“ i „Teorya równań algebraicznych.“ Kopenhaga, Andr. Fred. Host i Syn 1878 Rozd. VII. W pracach tych znajdzie czytelnik dowodzenie następujących twierdzeń:

1. *Oprócz przecięć ostrokręgowych nie ma krzywych, których przecięcie się z linią prostą dało się wyznaczyć za pomocą cyrkla i liniału.*

2. *Oprócz przecięć okręgowych nie ma krzywych, do których ostro po z dowolnego punktu możnaby było poprowadzić styczną za pomocą cyrkla i liniału.*

3. *Jeśli za pomocą cyrkla i liniału możemy wyznaczyć punkty przecięcia się dowolnego promienia pęku z krzywą nieprzechodzącą przez wierzchołek pęku, to rząd krzywej musi być potęgą liczby 2, i w pęku muszą być przynajmniej dwa takie dromienia, których punkty przecięcia się z krzywą po dwa się zlewają.*

Z tych twierdzeń możemy za pomocą przekształceń otrzymać nowe; możemy też badania podobne prowadzić dla układów innych linij odmiennych od pęków linijnych, jak np. dla układów kół i t. p. Odnośnie do tych uogólnień znajdzie czytelnik wskazówki w wyżej przytoczonych pracach, w tem miejscu przytoczymy tylko następujące twierdzenie:

4. *Oprócz koła i linii prostej nie ma innych krzywych, których wspólne przecięcie się z dowolnem kołem dałoby się wyznaczyc za pomocą cyrkla i liniału.*

Twierdzenie to daje się za pomocą przekształcenia przez promienie wodzące wyprowadzić z pierwszego z wyżej przytoczonych twierdzeń, gdyż koło i linia prosta są jedynemi krzywemi, które przez inwersyę z dowolnym środkiem przekształcenia przechodzą w przecięcia ostrokręgowe.

Przytoczone twierdzenia są w bardzo wielu wypadkach wystarczającemi. Przypuśćmy np., że w jakiemś zadaniu dana jest linia, której położenie jest zupełnie dowolne, i jakiś punkt X figury ma upaść na tę linię. Odrywając uwagę od tego warunku, widzimy, że X leżeć musi na jakiemś miejscu geometrycznem, które, według twierdzenia pierwszego, będzie przecięciem ostrokręgowém, jeśli zadanie ma się [dać rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału. W ten sam sposób możemy zastosować drugie twierdzenie, kiedy figura zawiera punkt, którego położenie jest dowolnem. Zastanawiając się w szczególności nad peirwszym z tych przypadków, widzimy że z poprzedniego rozumowania wypada rodzaj ogólnej metody graficznej dla rozwiązania zadań. Odrywając uwagę od danej linii i kreśląc dwie dowolne figury czyniące zadość pozostałym warunkom zadania, otrzymamy dwa położenia punktu X, a mianowicie X_1 i X_2. Linia X_1X_2 przecina usuniętą linię w punkcie, który będzie szukanym punktem, jeśli miejscem geometrycznem punktu X jest linia prosta. Jeśli otrzymany w ten sposób punkt nie jest szukakanym, to należy wykreślić jeszcze jedną figurę, przez co otrzy mamy trzeci punkt X_3. Jeśli koło $X_1X_2X_3$ nie przecina usunięte linii w szukanych punktach, to należy wykreślić jeszcze dwie figury, które dadzą dwa punkty X_4 i X_5. Punkty przecięcia usuniętej prostej z przecięciem ostrokręgu określonem przez pięć punktów X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 dają się wykreślić za pomocą cyrkla i liniału. Jeśli otrzymane punkty przecięcia nie są szukanymi, to zadanie nie daje się rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału. W drugim z dwu przytoczonych przypadków możemy zastosować sposób podobny.

Gdy zadanie rozwiązaliśmy za pomocą cyrkla i liniału, wtedy, na zasadzie wyżej przytoczonych twierdzeń możemy wnosić, że miejscem geometrycznem pewnych punktów są przecięcia ostrokręgowe; w ogólności, nie trudno rozstrzygnąć, czy te miejsca geometryczne są kołami lub liniami prostemi.

Zastosowania.

405. Przez dany punkt poprowadzić prostą, od której boki danego kąta odcinają danej długości odcinek.

Jeśli usuniemy jeden z boków kąta, to miejscem geometrycznem punktu, który przez to stał się swobodnym, będzie konchoida. Ponieważ zaś położenie usuniętej linii prostej jest zupełnie dowolnem i niezależnem od konchoidy, więc zadanie nie daje się rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału. Dla pewnych położeń danego punktu (gdy np. leży na dwójsiecznej kąta) prosta może przybrać takie względem konchoidy położenie, że zadanie daje się rozwiązać.

406. Z dwu punktów stałych poprowadzono linie proste do dowolnego punktu koła; należy dowieść, że miejscem geometrycznem linii prostej łączącej dwa pozostałe punkty przecięcia się dwu prostych z okręgiem koła jest przecięcie ostrokręgowe.

Twierdzenie to jest wynikiem możności rozwiązania zadania 201 za pomocą cyrkla i liniału.

407. Umieścić trójkąt trzema jego wierzchołkami na okręgach trzech danych kół.

Zadania tego rozwiązać nie możemy, gdyż usunąwszy jedno koło, widzimy, że miejscem geometrycznem oswobodzonego przez to wierzchołka nie może być ani linia prosta ani koło. Gdyż w szczególnym przypadku, kiedy dwa koła są liniami prostemi, trójkąt zaś zamienił się w linię prostą, miejscem geometrycznem szukanego punktu jest elipsa.

408. Zbudować trójkąt znając a, c i $B—C$.

Odciąwszy BC i prowadząc z punktu B dwie proste, z których jedna tworzy z BC kąt równy połowie danego, druga zaś jest prostopadłą do poprowadzonej prostej, łatwo widzieć, że zadanie sprowadzą się do następującego: Z punktu C poprowadzić prostą, od której boki kąta prostego odcinają długość $2c$. Ponieważ zadanie to jest szczególnym przypadkiem zadania 405, więc musimy je oddzielnie badać. Jeśli usuniemy punkt C to linia $2c$ ślizgając się po ramionach kąta prostego, tworzy hypocykloidę.

Ponieważ linia $BC = a$ i dany kąt możemy tak zmieniać, ażeby punkt C przybrał dowolne położenie bez zmienienia hypocykloidy, więc zadanie nasze nie może być rozwiązanem za pomocą cyrkla i liniału.

409. Dany kąt podzielić na trzy równe części.

Zadanie to można bardzo łatwo zamienić w następujące: Przez dany punkt A okręgu koła poprowadzić prostą, która przecina okrąg koła w punkcie X, dowolnie zaś daną średnicę w punkcie Y tak, ażeby odcinek XY równał się promieniowi. Usuwając średnicę, znajdziemy, że miejscem geometrycznem punktu Y jest krzywa czwartego rzędu mająca punkty podwójne w nieskończenie odległych punktach kołowych urojonych i w punkcie A i przechodzącą oprócz tego przez środek koła. Ponieważ średnice tworzą wiązkę promieni, której wierzchołek nie jest szczególnym punktem krzywej, więc koniecznym warunkiem możności rozwiązania zadania jest ten, ażeby rzęd krzywej był o jedność większym od potęgi 2. (Patrz wyżej przytoczone prace). Zadanie zatem nie daje się rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału.

410. Punkt P i dwa koła są dane; należy poprowadzić przez P prostą i po jednej stycznej do każdego z kół w ten sposób, ażeby punkt P i dwa punkty styczności były środkami boków trójkąta utworzonego przez poprowadzone trzy proste.

Jeśli X i Y są punktami styczności, to trójkąt XYP powinien mieć takie położenie, że jego wysokości odnośnie do punktów X i Y powinny przechodzić przez środki kół. Jeśli koło, przechodzące przez X obrócimy około punktu P ku okręgowi przechodzącemu przez Y, to punkt X upadnie na jakiś punkt X_1 czyniący zadość warunkowi, ażeby linie PY i PX_1 tworzyły równe kąty z prostą poprowadzoną od punktu P ze środka koła. Promień poprowadzony do punktu X_1 tworzy wiadomy kąt z linią PY, gdyż przed obrotem był on prostopadłym do linii PY i został obrócony o kąt wiadomy. Jeśli teraz zechcemy zbudować trójkąt PX_1O, gdzie O oznacza środek koła, to zadanie sprowadza się do zadania 408 i dla tego nie daje się rozwiązać za pomocą cyrkla i liniału.

punkt C, przyczem dowolne położenie bez zmieniania hypo-tetyczny, więc zadanie zatem nie może być rozwiązane za pomocą cyrkla i linału.

409. Dany kąt podzielić na trzy równe części.

Zadanie to można bardzo łatwo zamienić na następujące: Przez dany punkt I okręgu koła poprowadzić prostą, która przecina okrąg koła w punkcie A, dowolnie zaś daną średnicę w punkcie B tak, aby odcinek AB równał się promieniowi tamtego. Rozwiązanie, znajdujemy, że miejscem geometrycznem punktu B jest krzywa czwartego stopnia, nadto punkty po-dwójne w nieskończenie odległych punktach kołowych urojonych i w punkcie A i przechodząca oprócz tego przez środek koła. Ponieważ średnica stanowi wspólne punktem, które-wierzchołek, nie jest szczególnym punktem krzywej, więc koniecznym warunkiem możności rozwiązania zadania jest ten, ażeby rząd krzywej była jedność wyższym od potęgi 2. (Patrz wyżej przytoczone prace). Zadanie zatem nie daje się rozwiązać za pomocą cyrkla i linału.

410. Punkt P i dwa koła są dane; należy poprowadzić przez P prostą i po jednej stycznej do każdego z kół w ten sposób, aŻeby punkt P i dwa punkty styczności były środkami boków trójkąta utworzonego przez poprowadzone trzy proste.

Jeśli X i Y są punktami styczności, to trójkąt XPY powinien mieć takie położenie, że jego wysokości odnośnie do punktów X i Y powinny przechodzić przez środki kół. Jeśli koło, przechodzące przez X obrócimy około punktu P tak, ażeby przechodzącemu przez Y, to punkt X upadnie na jakiś punkt X_1, czyniący zadość warunkowi, ażeby linje PY i PX_1 tworzyły równe kąty z prostą poprowadzoną od punktu P ze środka koła. Promień poprowadzony do punktu X_1 tworzy wiadomy kąt z linją PY, gdyż przed obrotem był on prostopadłym do linji PY i został obrócony o kąt wiadomy. Jeśli teraz zechcemy skonstruować trójkąt PX_1O, gdzie O oznacza środek koła, to zadanie sprowadza się do zadania 408 i dla tego nie daje się rozwiązać za pomocą cyrkla i linału.

SPIS RZECZY.

Przedmowa autora.

Już na wiele wieków przed naszą erą geometrya zajęła wysokie stanowisko. Ponieważ wówczas algebra nie dosięgła jeszcze stopnia rozwoju, na którym później tak ważne usługi oddawała geometryi, więc starożytni przy rozwiązywaniu zadań musieli się posługiwać prawie wyłącznie sposobami czysto geometrycznymi. Nie dziw więc, że w ich pismach rozwiązywanie zadań na wykreślenie odgrywa tak ważną rolę. Chociaż matematycy do najnowszych czasów interesowali się podobnemi zadaniami, to jednak rozwinięcie sposobów traktowania ich było bardzo nieznaczne. Tak np. *Apollonius* mógł był tak dobrze jak i *Steiner* rozwiązać zadanie *Malfattiego*, jeśliby je tylko znał.

Rozwiązywanie zadań na wykreślenie jest dotychczas jeszcze przez wielu uważanem jako rodzaj odgadywania szarad, dostępne tylko dla niektórych szczególniej przez naturę uposażonych umysłów. Bezpośredniem następstwem takiego sposobu zapatrywania się, było to, że zadania konstrukcyjne w ogólności małe tylko znalazły uwzględnienie w szkole, w której jednak powinny zająć miejsce, i to miejsce honorowe, żadne bowiem inne zadania nie przyczyniają się w tak wysokim stopniu do rozwinięcia zdolności obserwacyjnych i kombinacyjnych ucznia, i nie mają takiego uroku jak zadania geometryczne konstrukcyjne.

Niniejsza książka przedstawia próbę podawania uczącym się sposobów rozwiązywania zadań konstrukcyjnych. Powstała ona w ten sposób, że sam rozwiązywałem znaczną liczbę zadań po części oryginalnych, po części zaś zaczerpniętych z dawniejszych zbiorów zadań. Rozwiązawszy zadanie, starałem się wykryć ideę, która naprowadzić musi na rozwiązanie i następnie analizować bieg myśli, który wywołał tę ideę, i to w celu wykrycia mniej lub więcej ogólnych metod rozwiązywania zadań. Z tego wynika, że w rzadkich tylko przypadkach mogłem się posługiwać rozwiązaniami innych autorów, gdyż w rzadkich tylko wypadkach z takich rozwiązań można sądzić o biegu myśli, które do nich doprowadziły. Jednakże, samo przez się rozumie się, że moje rozwiązania, a szczególniej łatwiejsze, są zupełnie podobne do rozwiązań innych autorów. Może też być, że niektóre zadania dadzą się rozwiązać w sposób łatwiejszy aniżeli przezemnie podany, lecz na to muszę zwrócić uwagę czytelnika, że zawsze dawałem pierwszeństwo zadaniu, którego idea jest jasna i wyraźna przed innemi, które noszą na sobie piętno przypadkowości, chociażby ich praktyczne wykonanie było nieco łatwiejszem.

Ponieważ moim celem są *metody*, więc sposoby rozwiązania są tylko wskazane, szczegółowe zaś rozwinięcie i rozbiór zadań zostawiłem czytelnikowi, lub też nauczycielowi. Z figur podałem tylko niektóre, gdyż jaśniejszy pogląd na figurę otrzymujemy wtedy, gdy ją sami kreślimy. W ogólności jestem tego zdania, że książkę moją należy nie *czytać* lecz *studyować*.

„Metody i teorye i t. d." ukazały się po raz pierwszy w r. 1866 w języku duńskim. Książka więc moja przeszła przez jedną próbę i śmiało rzec mogę, że ją dobrze wytrzymała. Mam bowiem dowody, że wywarła znaczny wpływ na wykład geometryi nie tylko w Danii, lecz jeszcze i w dwóch sąsiednich państwach północnych. W tem leży też przyczyna, że ośmieliłem się wystąpić przed szerszą publicznością. *) Spodziewam się, że książka moja okaże się i tam użyteczną, już to jako środek pomocniczy przy wykładzie geometryi elementarnej, już też jako przygotowanie do nauk nowszej geometryi.

Juliusz Petersen.

---

*) Niemiecką.

ERRATA.

str.	*wiersz z góry*	*wiersz z dołu*	*zamiast*	*powinno być.*
20	5	—	dany	znanym
20	6	—	lub 137	wypuścić
21	8	—	punkty	linie
24	14	—	bok	przekątna
30	10 i 12	—	romb	kwadrat ukośny
40	17	—	analoyii	analogii
44	8	—	przekątnia	przekątna
48	11	—	drugie *ha*	*a*
48	19	—	kątami	bokami
48	20	—	bokami	kątami
59	4	—	A_1	A,
77	9	—	na innej drodze	inną drogą
78	12	—	położenie	położenie
78	—	1	pozostaje	nie przestaje

Дозволено Цензурою. Варшава, 18 Марта 1881 г. W Drukarni J. Noskowskiego, Mazowiecka 11.