Wydział
nauk matematycznych i przyrodniczych.

Posiedzenie

z dnia 3 Lutego 1910 r. **Rok III. № 2.**

Obecni:

Za Przewodniczącego Wydziału p. S. Dickstein.
Sekretarz p. J. Tur.

Członkowie Towarzystwa pp.: Ign. Baranowski, Z. Dmochowski, J. Eismond, Wł. Gorczyński, M. Jakowski, Wł. Janowski, W. Kamocki, L. Kryński, W. Mayzel, J. Pruszyński, St. Serkowski, J. Sosnowski.

Goście pp.: H. Lindenfeld, Z. Lorec, St. Majkowska, J. Turowa, T. Wolski.

Komunikaty.

1. Pan Wł. Gosiewski:

O zasadzie indukcyi według teoryi prawdopodobieństwa.

Komunikat zgłoszony dn. 13 stycznia 1910 r.

Mówi się wiele o indukcyi, ale nikt, o ile nam wiadomo, nie ustanowił dokładnie i ogólnie ani warunków jej zasady, ani reguł postępowania, w razie gdy ma się ją stosować.

We wstępie do Teoryi analitycznej prawdopodobieństwa, Laplace usiłuje pogodzić zasadę determinizmu, jako czegoś objektywnego, z zasadą losu (adeterminizmu), jako czegoś subjektywnego, i, dzięki jego powadze, idea ta zakorzeniła się odtąd tak głęboko, iż w tej gałęzi wiedzy stała się prawie pewnikiem.

Dlatego to nie zdołano ani określić przyczyny zdarzenia ewentualnego, ani ocenić ważności mało prawdopodobnej niezmienności działania losu. Zatem nie umiano nadać właściwego charakteru zasadzie Bayes'a, a nawet jej dobrze nie rozumiano.

Z drugiej strony, ponieważ niezmienność działania losu jest w gruncie definicyą determinizmu, sam determinizm staje się w ten sposób przypadkiem szczególnym adeterminizmu. Zdaje się więc, wbrew opinii Laplace'a, że to raczej los jest zaimplikowany w naturze jako coś objektywnego, i że to on być może wciąż pozostaje tą niewiadomą X, której istoty nie rozpoznamy nigdy, lecz której skutki nie przestaną również nigdy nas zadziwiać.

Na tym to gruncie zamierzamy ustanowić warunki zasady indukcyi, i pod postacią łatwą w zastosowaniu.

§ 1.

Przez przyczynę zdarzenia ewentualnego rozumiemy *każdy* układ warunków właściwych, aby to zdarzenie uczynić *możliwem*.

W przyczynie tak pojmowanej rozróżniamy dwie *strony: bierną* i *czynną*.

Strona przyczyny czynna polega na działaniu losu, t. j. działaniu sprawiającem skutek wielopostaciowy, i przeto nieoznaczony, podczas gdy strona przyczyny bierna wyznacza wszystkie postaci możliwe skutku, oraz ich prawdopodobieństwa odpowiednie.

Niech będą w tem znaczeniu

$$a, a', a'', \ldots, a^{(n-1)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wszystkie postaci możliwe skutku działania losu w przypadku rozważanym, i

$$x, x', x'', \ldots, x^{(m-1)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wszystkie przyczyny możliwe tego skutku, przyczem strona bierna przyczyny, danej przez którykolwiek wyraz ciągu (2), wyznacza wszystkie wyrazy ciągu (1), oraz ich prawdopodobieństwa odpowiednie, różne dla każdego wyrazu ciągu (2).

Oznaczmy przez $p_a(y)$ prawdopodobieństwo przyczyny y skutku a, a przez $p_b(y)$ prawdopodbieństwo skutku b przyczyny y, gdzie y jest wyrazem którymkolwiek ciągu (2), b — wyrazem którymkolwiek ciągu (1), i a — wyrazem oznaczonym ciągu (1).

Iloczyn $p_a(y)\,p_y(b)$ wyraża wówczas prawdopodobieństwo ewentualności b z racyi przyczyny y aktualności a. Zatem suma

$$q_a(b) = \Sigma_y\, p_a(y)\,p_y(b)\,, (y = x, x', x'', \ldots) \quad . \quad . \quad 3)$$

pod warunkiem

$$\Sigma_y p_a(y) = 1, \quad (y = x, x', x'', \ldots)$$

wyraża prawdopodobieństwo ewentualności b z racyi aktualności a.

§ 2.

Wyraźmy oraz prawdopodobieństwa $p_b(y)$, skoro już $p_y(b)$ są wyznaczone przez stronę bierną przyczyny y.

Oznaczmy przez $p(b, y)$ prawdopodobieństwo zbiegu skutku b i przyczyny y. Wtedy, na mocy reguły prawdopodbieństwa całkowitego, będzie

$$p(b) = \Sigma_y p(b, y), \quad (y = x, x', x'', \ldots) \quad . \quad . \quad (4)$$

$$p(y) = \Sigma_b p(b, y), \quad (b = a, a', a'', \ldots) \quad . \quad . \quad (5)$$

gdzie $p(b)$ jest prawdopodobieństwem ewentualności b, uważanej za skutek którejbądź przyczyny w ciągu (2), a $p(y)$ jest prawdopodobieństwem ewentualności y, uważanaj za przyczynę któregobądź skutku w ciągu (1).

Z drugiej strony, na mocy reguły prawdopodobieństwa złożonego, mamy $p(b, y) = p(b)\, p_b(y)$, a przeto, zgodnie ze wzorem (4):

$$p_b(y) = \frac{p(b, y)}{\Sigma_y p(b, y)} \qquad \begin{matrix} (y = x, x', x'', \ldots) \\ (b = a, a', a'', \ldots) \end{matrix}$$

albo raczej

$$p_b(y) = \frac{p(y)\, p_y(b)}{\Sigma_y p(y)\, p_y(b)} \qquad \begin{matrix} (y = x, x', x'', \ldots) \\ (b = a, a', a'', \ldots) \end{matrix} \quad . \quad . \quad (6)$$

albowiem jest także $p(b, y) = p(y)\, p_y(b)$, gdzie $p(y)$ jest określone wzorem (5).

Zauważmy nadto, że należy starannie odróżnić charakter ogólny prawdopodobieństw $p(b)$ i $p(y)$ od charakteru prawdopodobieństw $p_y(b)$, $p_b(y)$ i $q_a(b)$.

Ponieważ wzór (4) wyczerpuje wszystkie przyczyny możliwe skutku b, nie wiemy zatem do której z nich należy skutek b odnieść, a przeto jest właściwie nazywać prawdopodobieństwo $p(b)$— prawdopodobieństwem *a priori*. Również to samo dotyczy prawdopodobieństwa $p(y)$ z uwagi, że wzór (5) wyczerpuje swoim porządkiem wszystkie skutki możliwe przyczyny y.

Przeciwnie jest z prawdopodobieństwami $p_y(b)$, $p_b(y)$ i $q_a(b)$. Tym razem mamy wskazanie wyraźne, że przyczyną aktualną skutku ewentualnego b — jest y, że skutkiem aktualnym przyczyny ewentualnej y — jest b, i nareszcie, że racyą ewentualności b jest aktualność a. Jest więc właściwie nazywać prawdopodobieństwa $p_y(b)$, $p_b(y)$ i $q_a(b)$ — prawdopodobieństwami *a posteriori*.

§ 3.

Ustanówmy jeszcze prawdopodobieństwo *a posteriori* powtórzenia się przyczyny którejkolwiek z pomiędzy wszystkich w ciągu (2).

Niech w tym celu $\varphi(y)$ oznacza prawdopodobieństwo *a priori* tej przyczyny; będziemy mieli

$$\varphi(y) = \sum_{y=x}^{x^{(m-1)}} p(y) = 1 \qquad (7),$$

albowiem ciąg (2) wyczerpuje wszystkie przyczyny możliwe w przypadku uważanym.

Z tego samego powodu będzie także

$$\varphi(y,y) = \sum_{y=x}^{x^{(m-1)}} p(y)^2,$$

gdzie $\varphi(y, y)$ oznacza prawdopodobieństwo *a priori* powtórzenia się dwukrotnego którejkolwiek przyczyny z pomiędzy wszystkich w ciągu (2).

Lecz, że na mocy reguły prawdopodobieństwa złożonego, i warunku (7), jest

$$\varphi(y,y) = \varphi(y)\varphi_y(y) = \varphi_y(y),$$

jest przeto ostatecznie

$$\varphi_y(y) = \sum_{y=x}^{x^{(m-1)}} p(y)^2 \qquad (8)$$

na prawdopodobieństwo *a posteriori* powtórzenia się przyczyny którejkolwiek z pomiędzy wszystkich w ciągu (2).

Przypadek indukcyi częściowej.

§ 4.

Zajmijmy się w końcu naszem zadaniem istotnem.

Z punktu widzenia teoryi prawdopodobieństwa zasada indukcyi postuluje:

Z racyi skutku aktualnego a *należy spodziewać się ewentualnego również* a, *z prawdopodobieństwem*

$$q_a(a) > q_a(b),\ (b = a', a'', \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

gdzie $q_a(b)$ *i* $q_a(a)$ *są określone wzorem* (3).

Wobec tak postawionej kwestyi pozostaje tylko ustanowić prawdopodobieństwo nierówności (9), i wyznaczyć następnie warunki jego maximum.

Jeśli skutek ewentualny a, o którym mowa w wysłowieniu zasady, ma pochodzić z tej samej przyczyny co skutek aktualny a, jego prawdopodobieństwo powinno wyrazić się wówczas iloczynem

$$\psi(y, a) = \varphi_y(y) p_y(a) \leqslant \varphi_y(y).$$

$\psi(y, a) \leqslant \varphi_y(y)$ jest więc oraz prawdopodobieństwem niezmienności przyczyny skutku a, również dobrze ze względu na jej stronę bierną jak i czynną, t. j. prawdopodobieństwem zasady *determinizmu* dla skutku a.

Zatem

$$1 - \psi(y, a) \geqslant 1 - \varphi_y(y)$$

jest prawdopodobieństwem zasady *adeterminizmu* dla skutku a.

Tym sposobem skutek ewentualny a, o którym mowa w wysłowieniu zasady indukcyi, może się realizować tylko dwoma różnemi sposobami, wyłączającemi się wzajemnie, a mianowicie:

1) albo na mocy zasady *determinizmu*, i wówczas realizuje się z *pewnością*, której prawdopodobieństwo wynosi $\psi(y, a) \leqslant \varphi_y(y)$;

2) albo na mocy zasady *adeterminizmu*, i wówczas realizuje się z prawdopodobieństwem $q_a(a)$, zadość czyniącem nierównościom (9) z prawdopodobieństwem $1 - \psi(y, a) \geqslant 1 - \varphi_y(y)$.

Gdy więc założymy

$$1 - \psi(y, a) \geqslant max.\ [1 - \varphi_y(y)],$$

nierówności (9) staną się najprawdopodobniejszemi.

Owóż, z uwagi na związki (8) i (7), otrzymujemy wówczas

$$p(y) = \frac{1}{m},\ \varphi_y(y) = \frac{1}{m},$$

a przeto wzór (6) (dla $b = a$) i nierówności (9) przyjmują odpowiednio postaci następujące:

$$p_a(y) = \frac{p_y(a)}{\Sigma_y p_y(a)},\ (y = x, x', x'', \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\Sigma_y p_y(a)^2 > \Sigma_y p_y(a) p_y(b),\ (b = a', a'', \ldots) \quad . \quad (11)$$

przyczem nierówności (11) realizują się z prawdopodobieństwem

$$1 - \psi(y, a) \geqslant \frac{m-1}{m}.$$

Ponieważ liczba nierówności (11) równa się $n - 1$, zatem iloczyn

$$(n - 1)\,[1 - \psi(y, a)] \geqslant \frac{(n - 1)(m - 1)}{m}$$

wyraża liczbę prawdopodobną nierówności spełnionych między wszystkiemi (11). Przystoi więc mówić, że zasada indukcyi częściowej posiada wówczas przynajmniej $(n - 1)(m - 1)/m$ *stopni prawdopodobieństwa*.

Zauważmy nakoniec, że związki (10) wyrażają zasadę Bayes'a jeszcze nieuogólnioną przez Laplace'a.

Tym sposobem wyniki dopiero co otrzymane dają się streścić w wysłowieniu następującem:

Jeżeli w przypadku uważanym m jest liczbą przyczyn możliwych, a n liczbą postaci możliwych skutku działania losu, zasada Bayes'a, *jeszcze nieuogólniona przez* Laplace'a *wyraża wówczas warunek zasady indukcyi częściowej z $(n - 1)(m - 1)/m$ przynajmniej stopniami prawdopodobieństwa.*

Tylko przy $m = \infty$ zasada indukcyi częściowej posiada wszystkie stopnie prawdopodobieństwa, i staje się *zupełną*.

Przypadek indukcyi całkowitej.

§ 5.

Jednak z punktu widzenia najogólniejszego, kwestya indukcyi może być rozważana także inaczej.

Jakoż, skutek ewentualny a z racyi aktualnego a może się realizować tylko dwoma różnemi sposobami, wyłączającemi się wzajemnie, a mianowicie:

1) albo na mocy zasady *determinizmu*, której prawdopodobieństwo wynosi $\psi(y, a)$, i wtedy realizuje się z *pewnością*;

2) albo na mocy zasady *adeterminizmu*, której prawdopodobieństwo wynosi $1 - \psi(y, a)$, i wtedy realizuje się z prawdopodobieństwem $q_a(a)$.

Zatem, prawdopodobieństwo *całkowite* skutku ewentualnego a z racyi aktualnego a równa się

$$\psi(y, a) + [1 - \psi(y, a)]\, q_a(a).$$

Z drugiej strony należy także powiedzieć: skutek ewentualny $b \neq a$ z racyi aktualnego a może się realizować tylko dwoma różnemi sposobami, wyłączającemi się wzajemnie, a mianowicie:

1) albo na mocy zasady *determinizmu*, której prawdopodobieństwo wynosi $\psi(y, a)$, i wówczas realizuje się z *niepodobieństwem*;

2) albo na mocy zasady *adeterminizmu*, której prawdopodobieństwo wynosi $1 - \psi(y, a)$, i wówczas realizuje się z prawdopodobieństwem $q_a(b)$.

Zatem, prawdopobieństwo *całkowite* skutku ewentualnego $b \neq a$ z racyi aktualnego a równa się

$$[1 - \psi(y, a)]\, q_a(b).$$

W ten sposób *zasada indukcyi całkowitej* wymaga nierówności postaci

$$\psi(y, a) + [1 - \psi(y, a)]\, q_a(a) > [1 - \psi(y, a)]\, q_a(b),$$

t. j. nierówności

$$\frac{\psi(y,a)}{1 - \psi(y, a)} + q_a(a) > q_a(b), \; (b = a', a'', \ldots) \quad . \quad . \; (13)$$

Pomiędzy nierównościami (13) mogą być wogóle realizujące się na mocy nierówności $q_a(a) > q_a(b)$, i są to właśnie te same, które się spełniają z prawdopodobieństwem $1 - \psi(y, a)$. A że jest wtedy

$$max.\, [1 - \psi(y, a)] = 1 - \frac{p_y(a)}{m}, \; p(y) = \frac{1}{m},$$

postać najprawdopodobniejsza nierówności (13) jest następująca:

$$\frac{p_y(a)}{m - p_y(a)} + q_a(a) > q_a(b), \; (b = a', a'', \ldots) \quad . \quad . \; (14)$$

gdzie jest ogólnie

$$q_a(b) = \frac{\Sigma_y p_y(a)\, p_y(b)}{\Sigma_y p_y(a)}, \; (y = x, x' x'', \ldots) . \quad . \quad . \; (15)$$

Zauważmy nakoniec, że nierówności (14) mogą być zastąpione tą jedyną:

$$p_y(a) \geqslant \frac{m\,[max.\, q_a(b) - q_a(a)]}{1 + max.\, q_a(b) - q_a(a)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \; (16)$$

gdzie $max.\ q_a(b)$ jest największe między

$$q_a(a),\; q_a(a'),\; q_a(a''), \ldots$$

W taki sposób na wyznaczenie przyczyny, która sprawiła istotnie skutek aktualny a, istnieje jedynie nierówność (16), na mocy której wyznaczymy oraz prawdopodobieństwo $min.\ \psi(a, y) = p_y(a)/m$, lub co najmniej jego granicę *niższą*. To prawdopodobieństwo jest bardzo małe, zwłaszcza jeżeli liczba przyczyn możliwych m jest bardzo wielka.

Stąd widać, że zasada determinizmu jest mało prawdopodobna, a więc, że dzięki jedynie twórczości umysłu, realizowaną w umiejętności bywa. Pod tym względem uczony i artysta są do siebie podobni, bo i ten drugi szuka także dla dzieł swoich tylko tematów lub stylów niezwykłych, zatem mało prawdopodobnych. Inaczej dzieła sztuki nie zachwycałyby nikogo.

§ 6.

Ażeby uwidocznić znaczenie powyższych wyników, zakończymy nasz komunikat dwoma liczbowymi przykładami.

1. Wyobraźmy sobie urnę zawierającą mieszaninę złożoną z 3 tylko gałek, i przypuśćmy, że losując z tej urny po jednej gałce 5 razy, ale wrzucając za każdym razem wylosowaną gałkę napowrót, po uprzedniem zanotowaniu jej koloru, okazało się w ten sposób $a \leqslant 5$ gałek białych. Jest to skutek aktualny. Chcemy obliczyć i sprawdzić, dla każdego a oznaczonego, ile jest stopni prawdopodobieństwa zasady indukcyi częściowej.

Ponieważ w tym razie $m = 3 + 1 = 4$ i $n = 5 + 1 = 6$, zatem szukana liczba stopni $> 5 . 3/4 = 3{,}75$.

Ale na mocy wzoru (15) mamy w tym razie ogólnie

$$q_a(b) = \frac{5!}{a!(5-a)!}\,\frac{1}{3^5}\,\frac{\sum\limits_{\lambda=0}^{3}\lambda^{a+b}(3-\lambda)^{10-a-b}}{\sum\limits_{\lambda=0}^{3}\lambda^{a}(3-\lambda)^{5-a}} \quad . \; . \; (17)$$

Zatem obliczając $q_a(b)$ dla wszystkich wartości

$$a = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ i } b = 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

otrzymamy następującą tablicę wartosci $q_a(b)$: (patrz na str. 103). w której wartość $q_a(b)$ znajduje się na przecięciu wiersza a z kolumną b.

Według tej tablicy liczby stopni prawdopodobieństwa zasady indukcyi częściowej w przykładzie rozważanym dla $a = 0, 1, 2,$ 3, 4, 5 wynoszą odpowiednio:

$$5, 4, 5, 5, 4, 5 > 3{,}75$$

zgodnie z wynikiem teoretycznym.

Co do indukcyi całkowitej, dajmy w przypadku $a = 1$, nierówność (16) ma postać

a	$b=0$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$
0	$\frac{30037}{33534}$	$\frac{1285}{33534}$	$\frac{1300}{33534}$	$\frac{680}{33534}$	$\frac{200}{33534}$	$\frac{32}{33534}$
1	$\frac{257}{2187}$	$\frac{650}{2187}$	$\frac{680}{2187}$	$\frac{400}{2187}$	$\frac{160}{2187}$	$\frac{40}{2187}$
2	$\frac{130}{1458}$	$\frac{340}{1458}$	$\frac{400}{1458}$	$\frac{320}{1458}$	$\frac{200}{1458}$	$\frac{68}{1458}$
3	$\frac{68}{1458}$	$\frac{200}{1458}$	$\frac{320}{1458}$	$\frac{400}{1458}$	$\frac{340}{1458}$	$\frac{130}{1458}$
4	$\frac{40}{2187}$	$\frac{160}{2187}$	$\frac{400}{2187}$	$\frac{680}{2187}$	$\frac{650}{2187}$	$\frac{257}{2187}$
5	$\frac{32}{33534}$	$\frac{200}{33534}$	$\frac{680}{33534}$	$\frac{1300}{33534}$	$\frac{1285}{33534}$	$\frac{30037}{33534}$

$$\lambda(3-\lambda)^4 > \frac{1944}{739} = 2\frac{466}{739},$$

z której, ponieważ λ może być tylko jedną z liczb 0, 1, 2, 3, wynika $\lambda = 1$. Stąd mamy *min.* $\psi(1, y) = 20/243$ na prawdopodobieństwo zasady determinizmu w uważanym przypadku, czyli innemi słowy: na prawdopodobieństwo przyczyny *oznaczonej* w zdarzeniu pojawienia się jednej gałki białej na pięć ciągnień.

II. Przyjmijmy powtóre te same warunki co poprzednio, tylko, że w urnie liczba wszystkich gałek jest nieoznaczona.

Załóżmy najprzód, że liczba tych gałek równa się s. Wówczas, zamiast (17), będziemy mieli

$$q_a(b) = \frac{5!}{a!(5-a)!} \frac{\sum_{\lambda=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{s}\right)^{a+b} \left(1-\frac{\lambda}{s}\right)^{10-a-b}}{\sum_{\lambda=0}^{s} \left(\frac{\lambda}{s}\right)^{a} \left(1-\frac{\lambda}{s}\right)^{5-a}},$$

a mnożąc licznik i mianownik przez $1/s$ i kładąc $s = \infty$ (ponieważ s jest nieoznaczone), znajdziemy

$$q_a(b) = \frac{5!}{a!(5-a)!} \frac{\int_0^1 u^{a+b}(1-u)^{10-a-b}\,du}{\int_0^1 u^a (1-u)^{5-a}\,du},$$

gdzie $u = lim.(\lambda/s)$, $du = lim.(1/s)$.

W ten sposób będzie

$$q_a(b) = \frac{6!\,5!}{11!} \frac{(a+b)!}{a!\,b!} \frac{(10-a-b)!}{(5-a)!\,(5-b)!},$$

przyczem liczba stopni prawdopodobieństwa indukcyi zupełnej wynosi $lim.\ 5s/(s+1) = 5$, co stwierdza w zupełności tablica następująca.

Ponieważ wszędzie jest mianownik wspólny, równy 462, zamieszczamy w tablicy same tylko liczniki.

a	$b=0$	$b=1$	$b=2$	$b=3$	$b=4$	$b=5$
0	252	126	56	21	6	1
1	126	140	105	60	25	6
2	56	105	120	100	60	21
3	21	60	100	120	105	56
4	6	25	60	105	140	126
5	1	6	21	56	126	252

RÉSUMÉ.

M-r L. Gosiewski:

Sur le principe de l'induction d'après la théorie des probabilités.

Communication annoncée 13. I. 1910.

On parle beaucoup de l'induction, mais personne, à nôtre connaissance du moins, n'a établi d'une manière précise et générale ni des conditions de son principe, ni des règles à suivre quand on va l'appliquer.

Dans l'introduction à sa Théorie analytique des probabilités, Laplace cherche à concilier le principe du déterminisme comme une chose objective, avec celui du hasard (indéterminisme) comme une chose subjective, et grace à son autorité, cette idée s'est enracinée depuis si profondement que dans cette branche de la science elle est devenue presque un axiome.

C'est pourquoi on n'a réussi ni définir la cause d'un évenement eventuel, ni apprécier l'importance de l'invariabilité peu probable de l'action du hasard. Par conséquent, on n'a pas su donner le caractère propre au principe de Bayes, et même on ne l'a pas bien compris.

D'autre part, l'invariabilité de l'action du hasard étant au fond la définition du détérminisme, le détérminisme lui même devient ainsi un cas particulier de l'indetérminisme. Il paraît donc, tout contrairement à l'opinion de Laplace, que c'est plutôt le hasard qui est impliqué dans la nature comme une chose objective, et que c'est lui peut être qui réste continuellement cette inconnue X dont l'essence nous ne connaitrons jamais, mais dont les effets ne cesseront aussi jamais nous surprendre.

C'est sur ce fondement que nons allons établir les conditions du principe de l'induction sous la forme convenable par elle même à l'application.

§ 1.

Par une cause d'un évenement eventuel nous entendons *chaque* système de conditions propres à le rendre *possible.*

Dans la cause ainsi conçue nous distinguons deux côtés; passif et actif.

Le côté actif de la cause consiste en action du hasard, c'est à dire, action qui amène un effet multiforme, et par conséquent indétérminé, tandis que le côté passif de la cause détérmine toutes les formes possibles de l'effet, ainsi que leurs probabilités respectives.

Soit dans ce sens

$$a, a', a'', \ldots, a^{(n-1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

toutes les formes possibles de l'effet de l'action du hasard dans le cas considéré, et

$$x, x', x'', \ldots, x^{(m-1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

toutes les causes possibles de cet effet, le côté passif de la cause, donnée par un terme quelconque de la suite (2), étant susceptible à détérminer touts les termes de la suite (1) et leurs probabilités respectives, différentes pour chaque terme de la suite (2).

Désignons par $p_a(y)$ la probabilité de la cause y de l'effet a, et par $p_y(b)$ celle de l'effet b de la cause y, y étant un terme quelconque de la suite (2), b étant celui de la suite (1), et a étant le terme detérminé de la suite (1).

Le produit $p_a(y)p_y(b)$ exprime alors la probabilité de l'eventualité b à raison de la cause y de l'actualité a. Par conséquent la somme

$$q_a(b) = \Sigma_y p_a(y) p_y(b), \quad (y = x, x', x'', \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

à la condition

$$\Sigma_y p_a(y) = 1, \quad (y = x, x', x'' \ldots)$$

exprime la probabilité de l'eventualité b à raison de l'actualité a.

§ 2.

Exprimons aussi les probabilités $p_b(y)$, dès que déjà celles $p_y(b)$ sont détérminées par le côté passif de la cause y.

Désignons par $p(b, y)$ la probabilité du concours de l'effet b et de la cause y. Alors, en vertu de la règle de la probabilité totale, on aura

$$p(b) = \Sigma_y p(b, y), \quad (y = x, x', x'', \ldots). \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$p(y) = \Sigma_b p(b, y), \quad (b = a, a', a'', \ldots). \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$p(b)$ étant la probabilité de l'eventualité b, considèrée comme l'effet d'une cause quelconque parmis celles de la suite (2), et $p(y)$ étant la probabilité de l'eventualité y, considèrée comme la cause d'un effet quelconque parmis ceux de la suite (1).

D'autre part, en vertu de la régle de là probabilité composée, nous avons $p(b, y) = p(b) p_b(y)$, et par conséquent, conformement à la formule (4):

$$p_b(y) = \frac{p(b, y)}{\Sigma_y p(b, y)}, \quad \begin{matrix} (y = x, x', x'', \ldots) \\ (b = a, a', a'', \ldots) \end{matrix}$$

ou plustôt

$$p_b(y) = \frac{p(y) p_y(b)}{\Sigma_y p(y) p_y(b)}, \quad \begin{matrix} (y = x, x', x'', \ldots) \\ (b = a, a', a'', \ldots) \end{matrix} \quad . \quad . \quad (6)$$

car on a aussi $p(b, y) = p(y) p_y(b)$, $p(y)$ étant défini par la formule (5).

Rémarquons de plus qu'il faut soigneusement distinguer le caractère général des probabilités $p(b)$ et $p(y)$ du celui des probabilités $p_y(b)$, $p_b(y)$ et $q_a(b)$.

Puisque la formule (4) épuise toutes les causes possibles de l'effet b, nous ne savons donc pas à laquelle d'entre elles il faut le rapporter, et par conséquent il est raisonnable de nommer la probabilité $p(b)$ celle *a priori*. Le même raisonnement se rapporte à la probabilité $p(y)$, car la formule (5) épuise, à son tour, tous les effets possibles de la cause y.

Quant à la probabilité $p_y(b)$, $p_b(y)$ et $q_a(b)$, le contraire a lieu. Cette fois nous avons l'indication explicite que la cause actuelle de l'effet eventuel b — est y, et que l'effet actuel de la cause eventuelle y—est b, et enfin que la raison de l'eventualité b — est l'actualité a. Il convient donc de nommer les probabilités $p_y(b)$, $p_b(y)$ et $q_a(b)$ celles *a posteriori*.

§ 3.

Etablissons encore la probabilité *a posteriori* de la répétition d'une cause quelconque parmis celles de la suite (2).

Soit dans ce but $\varphi(y)$ la probabilité *a priori* de cette cause; on aura

$$\varphi(y) = \sum_{y=x}^{x^{(m-1)}} p(y) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

car la suite (2) épuise toutes les causes possibles dans le cas considéré.

Pour le même motif on aura aussi

$$\varphi(y, y) = \sum_{y=x}^{x^{(m-1)}} p(y)^2,$$

$\varphi(y, y)$ étant la probabilité *a priori* de la répétition réitérée d'une cause quelconque parmis celles de la suite (2).

Mais comme en vertu de la règle de la probabilité composée, et de la condition (7), on a

$$\varphi(y, y) = \varphi(y)\,\varphi_y(y) = \varphi_y(y),$$

on a donc définitivement

$$\varphi_y(y) = \sum_{y=x}^{x^{(m-1)}} p(y)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

pour la probabilité *a posteriori* de la répétition d'une cause quelconque parmis celles de la suite (2).

Cas de l'induction partielle.

§ 4.

Occupons nous enfin de notre problème essentiel.

Au point de vue de la théorie des probabilités, le principe de l'induction postule:

A raison d'un effet actuel a il faut en espérer eventuel aussi a, avec la probabilité

$$q_a(a) > q_a(b), \quad (b=a, a', a'', \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$q_a(b)$ et $q_a(a)$ étant défini par la formule (3).

La question étant ainsi posée, il ne reste qu'établir la probabilité des inégalités (9), et détérminer ensuite les conditions qu'elle soit maximum.

Si l'effet eventuel a, dont on vient de parler dans l'enoncé du principe, va provenir de la même cause que celui actuel a, sa probabilité doit s'exprimer alors par le produit

$$\psi(y, a) = \varphi_y(y) p_y(a) \leqslant \varphi_y(y).$$

$\psi(y, a) \leqslant \varphi_y(y)$ est donc en même temps la probabilité de l'invariabilité de la cause de l'effet a aussi bien par rapport au côté passif de cette cause qu'à celui actif, en d'autres termes: c'est la probabilité du principe du *détérminisme* pour l'effet a.

Par conséquent

$$1 - \psi(y, a) \geqslant 1 - \varphi_y(y),$$

c'est la probabilité du principe de l'*indétérminisme* pour l'effet a.

Ainsi l'effet eventuel a, dont on parle dans l'enoncé du principe de l'induction, ne peut se réaliser que de deux manières différentes qui s'excluent mutuellement, savoir:

1) ou bien en vertu du principe du *détérminisme*, et alors il se réalise avec la *certitude* dont la probabilité est égale à $\psi(y, a) \leqslant \leqslant \varphi_y(y)$;

2) ou bien en vertu du principe de l'*indétérminisme*, et alors il se réalise avec la probabilité $q_a(a)$ qui satisfait aux inégalités (9) avec la probabilité $1 - \psi(y, a) \geqslant 1 - \varphi_y(y)$.

En posant donc

$$1-\psi(y, a) \geqslant max. [1-\varphi_y(y)],$$

les inégalités (9) deviennent les plus probables.

Or, vu les relations (3) et (7), on obtient alors

$$p(y) = \frac{1}{m}, \quad \varphi_y(y) = \frac{1}{m},$$

et par conséquent la formule (6) (pour $b = a$) et les inégalités (9) prennent respectivement les formes suivantes:

$$p_a(y) = \frac{p_y(a)}{\Sigma_y p_y(a)}, \quad (y = x, x', x'', \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\Sigma_y p_y(a)^2 > \Sigma_y p_y(a) p_y(b), \quad (b = a', a'', \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

les inégalités (11) se réalisant avec la probabilité

$$1-\psi(y, a) \geqslant \frac{m-1}{m}.$$

Le nombre des inégalités (11) étant égal à $n-1$, le produit

$$(n-1)\,[1-\psi(y,a)] \geqslant \frac{(n-1)\,(m-1)}{m}$$

exprime le nombre probable des inégalités satisfaites parmis celles (11). Il convient donc de dire que le principe de l'induction partielle possede alors au moins $(n-1)\,m-1)\,/\,m$ *degrés de vraisemblance.*

Rémarquons enfin que les relations (10) expriment le principe de Bayes pas encore généralisé par Laplace.

Ainsi les resultats que nons venons d'obtenir peuvent être résumés dans l'enoncé suivant:

Si dans le cas considéré m *est le nombre des causes possibles et* n *celui des formes possibles de l'effet de l'action du hasard, le principe de* Bayes, *pas encore généralisé par* Laplace, *exprime alors la condition du celui de l'induction partielle avec* (n—1) (m—1) / m *au moins degrés de vraisemblance.*

Ce n'est donc que pour $m=\infty$ que le principe de l'induction partielle possede touts les degrés de vraisamblance, et devient ainsi *complète.*

Cas de l'induction totale.

§ 5.

Cependant au point de vue la plus générale, la question de l'induction peut être envisagée aussi autrement.

En effet, l'effet eventuel a à raison du celui actuel a ne peut se réaliser que de deux manières différentes qui s'excluent mutuellement, savoir:

1) ou bien en vertu du principe du *détérminisme* dont la probabilité est $\psi(y,a)$, et alors il se réalise avec la *certitude;*

2) ou bien en vertu du principe de *l'indétérminisme* dont la probabilité est $1-\psi(y,a)$, et alors il se réalise avec la probabilité $q_a(a)$.

Par conséquent, la probabilité *totale* de l'effet eventuel a à raison du celui actuel a est égale à la somme

$$\psi(y,a)+[1-\psi(y,a)]\;q_a(a).$$

D'autre part il faut aussi dire: l'effet eventuel $b \neq a$ à raison du celui actuel a ne peut se réaliser que de deux manières différentes qui s'excluent mutuellement, savoir:

1) ou bien en vertu du principe du *détérminisme* dont la probabilité est $\psi(y,a)$, et alors il se réalise avec *l'impossibilité;*

2) ou bien en vertu du principe de *l'indétérminisme* dont la

probabilité est $1 - \psi(y, a)$, et alors il se réalise avec la probabilité $q_a(b)$.

Par conséquent, la probabilité *totale* de l'effet eventuel $b \neq a$ à raison du celui actuel a est égale à

$$[1 - \psi(y, a)]\ q_a(b).$$

Ainsi le *principe de l'induction totale* postule les inégalités de la forme

$$\psi(y, a) + [1 - \psi(y, a)]\ q_a(a) > [1 - \psi(y, a)]\ q_a(b),$$

c'est à dîre les inégalités

$$\frac{\psi(y, a)}{1 - \psi(y, a)} + q_a(a) > q_a(b),\ (b = a', a'', \ldots). \quad . \quad . \ (13).$$

Parmis les inégalités (13) il y a en général quelques unes qui ne se réalisent qu' en vertu des inégalités $q_a(a) > q_a(b)$, et ce sont précisemment celles qui se réalisent avec la probabilité $1 - \psi(y, a)$. Et comme on a

$$max.\ [1 - \psi(y, a)] = 1 - \frac{p_y(a)}{m},\ p(y) = \frac{1}{m},$$

la forme la plus probable des inégalité (13) est la suivante:

$$\frac{p_y(a)}{m - p_y(a)} + q_a(a) > q_a(b),\ (b = a', a'', \ldots) \quad . \quad . \ (14)$$

où l'on a en général

$$q_a(b) = \frac{\Sigma_y p_y(a) p_y(b)}{\Sigma_y p_y(a)}.\ (y = x, x', x'', \ldots). \quad . \quad . \ (15).$$

Rémarquons enfin que les inégalités (14) peuvent être remplacées par celle unique

$$p_y(a) \geqslant \frac{m\,[max.\ q_a(b) - q_a(a)]}{1 + max.\ q_a(b) - q_a(a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \ (16),$$

$max.\ q_a(b)$ étant le plus grand parmis

$$q_a(a),\ q_a(a'),\ q_a(a''), \ldots$$

De cette manière pour détérminer la cause y qui a produit réellement l'effet actuel a, il n'y a que l'inégalité unique (16), en vertu de laquelle nous détérminons aussi la probabilité $min.\ \psi(a, y) = p_y(a) / m$, ou au moins sa limite *inférieure*. Cette probabilité est très petite, surtout si le nombre des causes possibles m est très grand.

Ainsi l'on voit que le principe du détérminisme est peu probable, d'où il vient que ce n'est que grace à l'action créatrice de l'esprit qu'il se réalise dans la science. Sous ce raport le savant et l'artiste se ressemblent, car cet autre ne cherche aussi pour ses oeuvres que des thèmes ou des allures extraordinaires, et par conséquént peu probables. Autrement les oeuvres de l'art ne charmeraient personne.

---

2. Pan F. Kucharzewski:

Piśmiennictwo techniczne polskie. II. Inżynierya z miernictwem.

Komunikat zgłoszony dn. 13 Stycznia 1910 r.

Podobnie, jak w dziale I, rozebrane zostały najprzód dawne książki, do końca XVIII w., z których dwie: Grzepskiego i Strumieńskiego należą do najcenniejszych zabytków dawnego piśmiennictwa polskiego. W XIX w. piśmiennictwo w dziale inżynieryi z miernictwem rozwija się powolnie, z przerwami wywołanemi przez wypadki krajowe. Z otwarciem polskiej politechniki we Lwowie i ożywieniem czasopiśmiennictwa technicznego w Warszawie, rozwój wchodzi na tory prawidłowe. Pogląd ogólny, streszczający szczegółowe rozbiory prac, do lat ostatnich drukiem ogłoszonych, podzielić wypadło, z powodu różnorodności przedmiotów, na grupy szczegółowe, uszeregowane w porządku, w jakim powstawały ich zawiązki. Zestawiono więc krótkie przeglądy rozwoju poszczególnych dziedzin, mianowicie: 1) miernictwa, 2) hydrauliki rolniczej, 3) hydrotechniki, 4) budowy dróg, 5) budowy mostów, 6) inżynieryi miejskiej, 7) kolejnictwa, 8) mechaniki budowlanej, 9) historyi, szkolnictwa i słownictwa.

W tych wszystkich dziedzinach, technicy warszawscy, pomimo cięższych warunków pracy, torowali z początku drogę pracownikom grupującym się w około lwowskiej uczelni i pociągali ich za sobą. Przyjazne warunki naukowego ogniska, coraz żywszem płonącego światłem, sprawiły, że technicy lwowscy zaczęli dotrzymywać kroku kolegom tutejszym a w końcu, ilością i jakością swych prac, wysunęli się naprzód. Dziś liczą oni w swem gronie, zwłaszcza między profesorami Szkoły Politechnicznej, najwybitniejszych pracowników naszych, w większej części poszczególnych dziedzin inżynieryi z miernictwem.

RÉSUMÉ.

M-r F. Kucharzewski:

La Littérature technique polonaise. II. L'art de l'ingénieur.

Comme dans la première partie de ce travail, l'auteur présente l'analyse d'abord des anciennes publications, jusqu'à la fin du XVIII s. Parmis ces publications se distinguent surtout les petits livres du XVI s. de Grzepski et Strumieński. La littérature polonaise dans le domaine de l'art de l'ingénieur se développe lentement au XIX s., avec les arrêts causés par les insurrections. Ce développement se poursuit plus régulièrement dépuis l'ouverture d'une Polytechnique polonaise à Léopol et la rénaissance à Varsovie d'une presse technique. L'aperçu général du développement de cette litterature a dû être divisé en groupes particuliers, par suite de la diversité des sujets, et ces groupes sont présentés par l'ordre chronologique de leurs origines. On a donc des aperçus particuliers sur le développement de la littérature dans les domaines suivants: 1) arpentage et topographie, 2) hydraulique agricole, 3) hydrotechnique, 4) routes, 5) ponts, 6) travaux municipaux, 7) chemins de fer, 8) stabilité des constructions, 9) histoire, instruction, terminologie.

Dans tous ces domaines, les ingénieurs de Varsovie, quoique placés dans des conditions moins favorables, ont d'abord ouvert le chemin aux camarades groupés autour de l'Ecole de Léopol et les ont attirés à leur suite. Puis l'action bienfaisante d'un foyer d'études se fit sentir et les ingénieurs de Léopol commençèrent à tenir le pas aux camarades de Varsovie et à la fin les ont surpassé. Aujourdhui ils comptent dans leur groupement, surtout parmis les professeurs de l'Ecole Polytechnique des écrivains les plus distingués dans la plupart des domaines particuliers de l'art de l'ingénieur.

---

3. Pan J. Eismond:

Badania doświadczalne nad rozwojem ryb spodoustych.

(Ciąg dalszy).

Komunikat zgłoszony d. 13 Stycznia 1910 r.

Prelegent przedstawił, w celu uzupełnienia swego poprzedniego komunikatu [1]), pewne szczegóły, dotyczące samoregulacyi

[1]) J. Eismond. Badania doświadczalne nad rozwojem ryb spodoustych. Sprawozdania z posiedzeń Tow. Nauk. Warsz. № 1., (Styczeń) 1910

w rozwoju tarczek zarodkowych u płaszczek, które rozdzielane były na części, odsuwane od siebie na znaczniejszą odległość (do $^3/_4$ *mm*) i pozostawiane na miejscu.

Omówiwszy drobiazgowo dające się obserwować wśród podobnych warunków objawy, zwłaszcza wtórne zrastanie się oddzielnych części pierwotnej tarczki zarodkowej, tudzież zawiązków zarodków, które na nich powstają, prelegent uzasadniał nieodzowność badań nad „cytotropizmem", uznając wykrycie tego zjawiska, dokonane przez Roux'a, za niezmiernie doniosłe. Dowodzi ono, że objawy chemotaktyczne między poszczególnemi komórkami, a wynikające z ich biochemizmów, naprowadzają nas na trop poszukiwań nad różniczkowem powinowactwem między niemi. Na tej zaś drodze można będzie dojść w przyszłości do wyjaśnienia podstaw planowego grupowania się komórek embryonalnych podczas rozwoju oraz spoistego utkania kompleksów komórkowych zarodków, nawet pomimo braku specyalnych urządzeń mechanicznych, jakie występują w organizmach wyższych dopiero w okresach późniejszych.

---

4. Pan T. Banachiewicz:

Sposób wyznaczenia spłaszczenia Wenery i czasu jej obrotu dookoła osi.

Komunikat nadesłany dn. 3 Lutego 1910 r.

Sposobność do wyznaczenia spłaszczenia planety daje obrót jej sierpa podczas dolnych połączeń ze słońcem, o ile połączenie przypada daleko od węzła orbity planety (w lutym, marcu, sierpniu i wrześniu). Przez pomiary średnicy sierpa [1]), obejmującego wówczas więcej, niż 60″, otrzymać można rozmiary tarczy Wenery w różnych kierunkach, a więc i jej spłaszczenie pozorne. Poznanie spłaszczenia jest zaś równoważne, na zasadzie nierówności Clairaut'a, z ustanowieniem ścisłych granic na szybkość ruchu wirowego, przy dodatkowem założeniu, że obserwacye czynione były blisko płaszczyzny równika planety. Nie czyniąc tego założenia, otrzymuje się *maximum* czasu obrotu.

Jaką dokładność da sposób powyższy—wykażą obserwacye.

---

1) Porówn. nasz telegram w *Astronomische Nachrichten* № 4383.

5. Panowie Zygmunt Lorec i Tadeusz Wolski:

Nowy gatunek z rodzaju strzebla (Phoxinus Agas.). Strzebla przekopowa (Phoxinus Dybowskii spec. nov.?)

Komunikat zgłoszony dn. 20 grudnia 1909 r.

Trzy lata temu, w miejscowości Choszczówce pod Buchnikiem, w powiecie Warszawskim, w niewielkim rowie, na łące w pobliżu torfowiska, znaleźliśmy w ogromnej ilości ryby, należące do rodzaju *Strzebla (Phoxinus Agas.)*. Oprócz strzebli w tymże rowie znajdowała się wielka ilość karasi.

W lecie roku przeszłego 1909, znaleźliśmy te same ryby w okolicach Piaseczna w Siedlisku, powiatu Grójeckiego, w niewielkim potorfowym zbiorniku wody, w półwiorstowej odległości od rzeki Jeziorki. Strzeble te w ilości 20 egzemplarzy zostały przez nas, w celu określenia gatunku, zbadane i porównane z okazami tegoż rodzaju, znajdującymi się w gabinecie zoologicznym uniwersytetu warszawskiego, a określonymi przez prof. B. Dybowskiego i kustosza Akademii Nauk Przyrodniczych w Petersburgu, L. Berg'a.

Ojczyzną ryb, należących do rodzaju *Phoxinus* jest Syberya; w wodach syberyjskich żyje około 17-tu gatunków i odmian mniej lub więcej wyraźnie wyodrębnionych; w Europie zaś dotychczas znaleziono dwa gatunki, oba należące i do fauny syberyjskiej. Przed ukazaniem się pracy prof. Dybowskiego z r. 1876 o rybach Amuru, znane były tylko 2 gatunki rodzaju *Phoxinus*: *laevis* i *percnurus*. Prof. Dybowskiemu zawdzięczamy opis 3 nowych gatunków i jednej odmiany strzebli. Wkrótce potem Mikołaj Warpachowskij opisał 8 nowych gatunków z wód syberyjskich i jeden nowy gatunek europejski. W roku 1887 Warpachowskij ogłosił w sprawozdaniach Petersburskiej Ak. N. rozprawę p. t. „Notiz über die in Russland vorkommenden Arten der Gattung Phoxinus“, w pracy tej wymienia on ogółem 12 gatunków strzebli. Wkrótce po ogłoszeniu tej próby systematyki rodzaju *Phoxinus* opisano jeszcze kilka nowych gatunków syberyjskich. W r. 1907 prof. Gracjanow w dziele swem p. t. „Obzor ryb Rossijskoj imperii“ zredukował liczbę gatunków i odmian strzebli do 11 i dla tych tylko 11 gatunków podaje on w swem dziele klucz do określenia. Ryby, przez nas znalezione, do żadnego z tych gatunków zaliczone być nie mogą. Dla upewnienia się porównywaliśmy je z oryginalnemi opisami gatunków, przez Gracjanowa wymienianych, nie mając zaś opisów Dybowskiego, wymierzaliśmy spirytusowe okazy typów, przezeń opisanych.

Zaraz po wyjściu dzieła Gracjanowa, L. Berg wydaje broszurę p. t.: „Zamietki o niekotorych palearkticzeskich widach roda Phoxinus". W pracy tej łączy on znane 18 gatunków w 4 wyraźnie rozgraniczone gatunki i umieszcza klucz do ich określania. Ponieważ strzebla przez nas znaleziona, zbliżając się jednemi cechami do gat. *Phoxinus percnurus Pall.*, (rozmieszczonego we wschodniej Syberyi (od rzeki Kołymy na zachód do dorzecza Dniepru), innemi zaś do gat. *Phoxinus Czekanowski* Dyb. (dorzecze Amuru i Bajkału na zachód do Bałchasza), nie daje się jednak podciągnąć pod dyagnozę żadnego z gatunków przez Berga utworzonych, opisujemy więc ją jako nowy gatunek, znoszący jednak linję demarkacyjną między gat. *Phox. percnurus* i *Czekanowskii.* Temu nowemu gatunkowi postanowiliśmy nadać nazwę *Phoxinus Dybowskii* na cześć słynnego badacza fauny syberyjskiej; polską zaś nazwę, *Strzebla przekopowa*, nadaliśmy od rodzaju zbiorników, w których była znajdywana.

Dyagnoza.

Phoxinus Dybowskii. Spec. nov.?

D. III. 7—8; A. III. 7—8; P. I; 12—14; V. II. 6—8; C. 19-20(21;22;24;
Lin. lat. 83—97; lin. tr. 30—36.

Phoxinus corpore lato compresso; altitudine corporis 3,9—4,7 in ejus longitudine (absque pinna caudali); altitudine corporis minima 2—2,6 in maxima, 1,2—2,6 in pedunculo caudali; longitudine pedunculo caudalis 1—1,4 in altitudine corporis maxima; capitis longitudine, corporis maxima altitudine majore, altitudine corporis 1,2—1,5 in ejus longitudine; oculis diametro 3—4 in longitudine capitis.

Strzebla przekopowa — Phoxinus Dybowskii nobis.

Wielkość 45,5—74 *mm.*

D. III. 7 — 8; A. III. 7 — 8; P. I. 12 — 14; V. II. 6 — 8;
C. 19 — 20 (21; 22; 24).

Linia naboczna $\frac{18 - 21}{10 - 13}$ 83 — 97; w poprzek ciała 30 — 36.

Zęby gardłowe 2,4—4,2; 2,5—5,2; 2,5—4,2; 1,4—4,2.

Łuska drobna. Linia naboczna niepełna, kończy się na 34—52-giej łusce, naprzeciw pł. grzbietowej lub nawet nieco poza nią.

Mamy jednak egzemplarze o linii pełnej, przerywanej, pogiętej, łamanej. Przecięcie ust zwrócone ku górze, ukośne. Ciało szerokie, nieco ścieśnione. Największa wysokość ciała (10—16 *mm.*),

2—$2\frac{3}{5}$ raza większa od najmniejszej wysokości ($4\frac{1}{2}$—$8\frac{1}{2}$ *mm*), mieści w długości ciała bez pł. ogonowej (39–64 *mm*) $3\frac{9}{10}$—$4\frac{2}{3}$ raza. Wysokość ciała u kątów pokrywy skrzelowej (7—12 *mm*), mieści się w długości ciała $4\frac{3}{5}$—$5\frac{2}{3}$ raza. Długość ogona (8—13 *mm*), mniejsza jest od długości głowy (11—18 *mm*), $1\frac{1}{2}$—$2\frac{2}{5}$ raza większa od wysokości jego ($4\frac{1}{2}$—8 *mm*), 4–$5\frac{7}{10}$ raza mniejsza od długości ciała; głowa gruba, nieco zbliżona kształtem do ukośnie ściętej czworograniastej piramidy. Długość głowy $1\frac{1}{10}$—$1\frac{3}{10}$ raza większa od największej wysokości ciała. Wysokość głowy przy kątach pokrywy skrzelowej (7—12 *mm*) prawie równa lub nieco większa od jej szerokości, $1\frac{2}{5}$—$1\frac{1}{2}$ raza mniejsza od długości głowy. Średnica oka (3—$4\frac{1}{2}$ *mm*) równa jest lub prawie równa $\frac{1}{4}$—$\frac{1}{3}$ długości głowy. Długość pyszczka ($2\frac{1}{2}$–5 *mm*), równa, nieco mniejsza lub nieco większa od średnicy oka (3—$4\frac{1}{2}$ *mm*). Odległość od końca pyszczka do tylnego brzegu oka ($5\frac{1}{2}$—$9\frac{1}{2}$ *mm*) nieco mniejsza, równa lub nieco większa od odległości tylnego brzegu oka do brzegu pokrywy skrzelowej ($7\frac{1}{2}$—$9\frac{1}{2}$). Długość zaokrąglonej płetwy grzbietowej (4—7 *mm*), $1\frac{2}{3}$—$2\frac{1}{2}$ raza mniejsza od jej wysokości (8—$11\frac{1}{2}$ *mm*), mniejsza lub nieco większa od najmniejszej wysokości ciała ($4\frac{1}{2}$—8 *mm*). Odległość od górnego końca szpary skrzelowej do początku płetwy grzbietowej (14—$24\frac{1}{2}$ *mm*) większa od odległości końca pł. grzbietowej do środka nasady pł. ogonowej (14—22 *mm*). Płetwa podogonowa miernie zaokrąglona, nieco krótsza i niższa od płetwy grzbietowej. Długość zaokrąglonych płetw piersiowych ($6\frac{1}{2}$—$9\frac{1}{2}$ *mm*) mniejsza od największej wysokości płetwy grzbietowej (8—11½ *mm*). Długość zaokrąglonych płetw brzusznych (6—9 *mm*) mniejsza od największej wysokości płetwy podogonowej (7—10 *mm*). Odległość od końca pyszczka do nasady płetw brzusznych (20½—34 *mm*), większa od odległości nasady płetw brzusznych do środka nasady płetwy ogonowej (18—31 *mm*). Długość słabo wciętej płetwy ogonowej (6½—10 *mm*) prawie równa lub równa długości płetw brzusznych (6—9 *mm*).

Ubarwienie: Tęcza oka żółtawo-złocista, czarno kropkowane. Tarcze pokrywy skrzelowej żółtawe z połyskiem fioletowo-srebrzystym, czarno punktowane. Barwa grzbietu oliwkowo-zielona; boków od grzbietu ku dołowi przechodzi od oliwkowo-zielonej do żółtawo-białej, o złocisto-ołowiastym połysku. Wzdłuż boków nad linją naboczną ciągnie się od głowy ku ogonowi złocisto-zielona pręga, pod tą pręgą znajdują się liczne czarniawe plamki, ułożone w mniej lub więcej wyraźną ciemną pręgę. Barwa brzucha żółtawa lub biaława o srebrnym połysku, niekiedy z odcieniem różowawym.

Określając Strzeble przekopowe oraz przeglądając odpowiednią literaturę ichtyologiczną doszliśmy do kilku wniosków ogólniejszego znaczenia. Przedewszystkiem rzuca się w oczy cała względność systematyki ichtyologicznej; cechami, charakteryzującymi gatunki, są stosunki między wymiarami ciała. Stosunki te jednak podlegają wahaniom, zależnym od najróżnorodniejszych czynników: od stopnia odżywiania, wieku i t. p. Wiele gatunków rodzaju *Phoxinus* zostało opisanych na mocy jednego okazu, odstępującego od normy, ustalonej dla innych gatunków. Uważano dawniej formułę pletw i łuskę za podlegające niewielkim wahaniom. Przy określaniu jednak już 20 egzemplarzy występują wahania b. wyraźne i normę—dyagnozę gatunku ustalić może tylko metoda statystyczna. Rozporządzany przez nas materyał okazowy nie pozwolił nam w pełni zastosować tej metody, próby jednak przez nas czynione, bez względu na niewielką liczbę egzemplarzy, dały nam już pewne nader cenne wskazówki; obecnie uważamy ryby przez nas znalezione za gatunek nowy, w następstwie jednak postaramy się, zebrawszy odpowiedni materyał porównawczy, ułożyć systematykę przynajmniej tego rodzaju, opartą na danych metody statystycznej.

Za typ całego rodzaju *Phoxinus* przyjmują ichtyolodzy strzeblę rzeczną *Phoxinus laevis* i za praojczyznę całego rodzaju *Phoxinus* uznają Europę, chociaż, jak to wspominaliśmy już powyżej, w Europie znaleziono dopiero 2 gatunki strzebli, a w Azyi około 18-tu. Niektórzy uczeni, jak Karol Knauthe, opierając się na swych badaniach nad rybami z rodzaju *Gobio*, rzucają przypuszczenie, iż forma rzeczna wysmukła o niewielkiej głowie i pysku poziomo rozciętym, pod wpływem stojącej wody i obfitego pokarmu, przeobrazić się może w formą krępą, o łbie dużym i pysku zwróconym ku górze (tak zwana forma mopsowata). Otóż być może, że, co się tyczy rodzaju *Phoxinus* to sprawa ta da się postawić wręcz odwrotnie, t. j. że *Strzebla rzeczna* mogła powstać drogą powolnych zmian z formy jeziornej a właściwie błotnej; ku temu przypuszczeniu skłania nas fakt, że gatunek *Phoxinus percnuus* odznacza się nadzwyczajną żywotnością, wytwarza on masę odmian i przystosowuje się do najgorszych warunków, rozmieszczenie jego jest również obszerniejsze od rozmieszczenia *Phoxinus laevis*. Ten dochodzi zaledwie do Leny i Jany, podczas gdy w Japonii znany jest gatunek *Ph. Steindachneri Sauv.*, należący do strzebli błotnych. W zachodniej i środkowej Europie panował dotychczas niepodzielnie typ strzebli rzecznej i dopiero znalezienie przez nas w okolicach Warszawy typowej formy błotnej ukazuje sprawę w innem świetle. Przedewszystkiem więc zaważyć należy, iż strzeble, znalezione zostały w zbiornikach najzupełniej od rzeki oddzielonych, w zbiornikach, położonych na kwaśnych, podmokłych łąkach, w pobliżu torfowisk. (Sam charakter jednak tych zbiorników nie jest ściśle torfowy, gdyż roślinność nie składa się ze *Spagnum*, lecz z *Mchu wodnego (Fontinalis antypyretica)* i *Okrężnicy wodnej (Hottonia palustris)*.

Strzeble przekopowe znalezione zostały przez nas dopiero w dwu miejscowościach po obu stronach Wisły, w samej zaś Wiśle i nigdzie w pobliżu strzebli rzecznych nie łapano nigdy jeszcze. Najbliższą ich od Warszawy placówką jest, zdaje się, Suchedniów w gub. Kieleckiej (200 *km*). Możliwość przeniesienia ikry z Syberyi przez ptactwo wyklucza się przez to już, że strzeble przekopowe znalezione zostały przez nas w zbiornikach małych i roślinnego pokrycia pozbawionych zupełnie, więc nie odwiedzanych przez ptactwo. Poszukiwania zaś nasze były bezowocne, gdyśmy czynili przegląd ryb po spuszczeniu stawów w Zgorzałej, miejscowości o 2 w. oddalonej od Siedliska, dadać należy, że stawy te były pokryte bujną roślinnością, a więc nader licznie przez ptactwo wodne odwiedzane.

Z wywodów powyższych nasuwa się nam wniosek, iż *Phoxinus Dybowskii* jest dawnym mieszkańcem naszego kraju, znikającym z postępem zmian natury. Za lat parę z osuszeniem przekopów w Choszczówce i Siedlisku znikną na zawsze ostatni bodaj Mohikanowie europejscy strzebli błotnych.

Poczuwamy się do przyjemnego obowiązku serdecznie podziękować Sz. prof. J. Szczełkanowcewowi za ułatwienie nam niniejszej pracy oraz dr. J. Turowi za łaskawe wykonanie fotografii strzebli.

Literatura.

1) Bade E. Die mitteleuropäischen Süsswasserfische, Berlin 1902.
2) Berg L. Ryby Turkiestana, 1905, str. 138—143.
3) „ „ Zamietki o niekotorych palearkticzeskich widach roda Phoxinus. Odbitka z Jeżegod. Zoołog. Muzeja Imp. Akad. Nauk., tom XI, 1906.
4) „ „ Zamietki o niekotorych palearkticzeskich widach roda Phoxinus. Odbitka z Jeżegod. Zooł. Muz. Imp. Ak. Nauk., tom V, 1900, str. 357.
5) Blanchard. Poissons des eaux douces de la France, Paryż 1866.
6) Dybowski B. Versuch einer Monografie der Cyprynoiden Livlands, Dorpat 1862.
7) Grącjanow W. Opyt obzora ryb Rossijskoj impierji, Moskwa 1906, str. 122.
8) „ Ichtiofauna Bajkała. Odbitka z Dniewnika zooł. otd. Imp. Obsz. lub. jestiestwoznanja, Moskwa 1902, str. 34.
9) Kaszczenko N. Riezultaty Ałtajskoj zoołog. eksp. 1898 goda. Pozwonocznyje, Tomsk 1899, str. 145.
10) Kesler K. Opisanje ryb, kotoryja wstrieczajutsia w wodach S. Pet. gubernji, Petersburg 1864, str. 1864.
11) Knauthe K. Ueber Entwickelungsformen von Gobio fluviatilis, Zoolog. Anz. XXIV, 1891, str. 60.
*12) Nikolskij A.[1]) O faunie pozwonocznych żiwotnych dna Bałchaszskoj kotłowiny. Trudy S. Pet. Obsz. Jest. 1887.
13) Sabaniejew Z. Ryby Rossiji, 1892, t. 2., str. 100.
14) Siebold. Die Süsswasserfische Mitteleuropa, Lipsk 1863.
*15) Warpachowskij i Giercensztein. Zamietki po ichtiołogji bassiejna rieki Amura. Trudy Pet. Obszcz. Jest., t. XIX, 1887, str. 27.

---

[1]) Książki oznaczone gwiazdką znamy tylko według streszczeń w książce Kożewnikowa: Otczot o literaturie po pozwonocznym.

*16) W a r p a c h o w s k i j. Niebolszija zamietki po ichtiołogiczeskoj faunie Rossiji. Iz bassiejna rieki Dniepra. Wiestnik Rybopr., 1889.

*17) „ Oczerk ichtiolog. fauny rieki Małoj Kokszagi. Dodatek do Prot. Obszcz. Jest. Kazanskaho uniwiersit., № 63, str. 10.

18) „ Dannyja po ichtiołogiczeskoj faunie bassiejna rieki Obi. Jeżegodnik zoołog. Muz. Imp. Akad. Nauk, tom 2, 1897, str. 241.

19) „ Oczerk ichtiołogiczeskoj fauny Kazanskoj gubiernji. Dodatek do III tomu Zapisok Imp. Ak. Nauk. Petersburg, 1886, str. 16 i 53.

20) „ Notiz über die in Russland vorkommenden Arten der Gattung Phoxinus. Bulettin de l'Academie Imp. des sciences de St. Pet., tom XXXI, 1887, № 4.