JEOMETRYA
DLA
SZKÓŁ
NAROD.

CZ. 1

J. Dobbe

911
3

Z Xiąg Jana
6700
6700
13400
Lipkowskiego

2048

2048

spis nr 48695
spis nr 48696

JEOMETRYA

DLA

SZKOŁ NARODOWYCH

Część I.

Z Xięg ~~Jana [illegible]skiego~~

Cena oprawnéy w papiér Złł: 4

N. B. [illegible]

Tomaszewskiego

W WILNIE,

w Drukarni Jmp: Wil: Uniwer:
R. 1803.

CZĘŚĆ PIERWSZA

O Liniach i powierzchowniach.

ROZDZIAŁ I.

Wiadomości początkowé o Liniiach prostych, o Obwodzie Koła, i o Kątach.

1. Podróżny umieiący rachować kroki swoié, potrafi dochodzić iak długą była droga ta, którą odprawił. Strzelec doświadczeniém i wprawą częstą nauczony, osądzi łatwo, ieżeli strzelba iego do zamierzonégo doniesie celu. Obadwa tak sposobią się do pewniéyszego wyobrażenia sobie długości i odległości, to iest: do porównania ich z témi które iuż dobrze poznali i wyznaczyli. Krok iest taką dla podróżnégo długością, a średnia strzelby donośność, służy myśliwému do wymiaru innéy odległości.

Te proste, i inné, im podobné sposoby wyobrażenia sobie długości niewiadomych, użyteczné są w wielu bardzo okolicznościach życia; gdzie potrzeba osądzénia prędkiego, innych dokładniéyszych uży nie pozwala. A ponieważ przez częś sposobów takich używanie, uczymy ę chronić tych omyłek, w których w szczególnych razach wpadać zwykli bli, nie od rzeczy więc będzie wprawiać iak oko uczących się, tyle iednak, ile to go dzić się może z publiczną edukacyą.

Ale iakiéyżekolwiek w téy miérz łatwości nabiorą uczniowie przez częste wprawiania się; chybiać wszelako bdą w porównywaniu długości bardzo wielkich, lub bardzo małych. Oprócz tego, każdy w szczególności człowiek, używaiąc sposobu wyżéy wspomnionégo, różnby ieden od drugiego czynił wyznaczenié iednéyże nawet długości; a zatém trudnoby ludzie iedni z drugimi zrozumieć się w téy miérze mogli, gdyby pierwszego tego w wyznaczéniu długości sposobu trzymali się.

2. Z téy pobudki udano się do ustanowiénia umowionéy pewnéy długości, którą na samo weyrzénié, dokładnie sobie wyobrazić można było. Do tey stosowano wszystkie inné długości niewiadome, które, poznać chciano, i dochodzono ich przykładaiąc wiadomą długość do niewiadomych: długość takowá nazwaná iest *Miarą*.

3. W iednymże kraiu, nie iedna miara zwykła bydź używaná, według różnych okoliczności, które do iéy użycia zda

ią ſię. W Polszcze na przykład kupieckie niektóre towary, i pomniéysze na ziemi długości, łokciém, podzielonym na cale i liniie mierzyć ſię zwykły. Gdy zaś znaczniéyszą iaką długość wymiérzać na ziemi trzeba, używamy do tego ſążnia z trzéch łokci złożonego, albo pręta zawiéraiącego 7. ½ łokci, a ieszcze lepiéy ſznura, który 10. prętów zamyka.

Ponieważ té oſtatnié miary nic nie ſą innego, tylko łokieć kilka razy przydany, doſyć więc będzie wielkości łokcia dokładné ſobie wyobrażenié uczynić, aby dokładnie poznać, i wielkość miar większych od łokcia. Wzyſtkié té ſłowa: *Sznur*, *Pręt*, *Sążeń*, *Łokieć* i. t. d. byłyby tylko ſłowami próżnémi i bez zrozumienia, gdybyśmy dokładnego nie mieli wyobrażenia, iednéy z tych miary, na przykład łokcia; bo wszyſtkié naszé wyobrażénia, które o wielkościach mamy, ſą tylko *względnémi* (relativae) iedné do drugich.

4. Kraie różne, odmiennych też miar żażywaią; a co ieszcze w opaczné rozumienié wprowadzić może, miary te, lubo odmienne, iednémże ſłowém częſto ſię wyrażaią. (a) I tak łokieć litewſki

(a) *Matematycy z wielką uſilnością ſzukali miary iednoſtaynéy, do któréy można by było ſtoſować wſzyſtkié inné. Rozumieli oni, iż ią znaleźli w długości* Wieszadła proſtégo (*Pendulum ſimplex*) *uſtanowionégo w miéyscu wolném od zawad, i na powietrzu pomiarkowaném; ale ta materyá należy do Fizyki.*

ieſt $\frac{1}{16}$ większy od łokcia koronnego; a zatém i inné litewſkié miary, w któré łokieć wchodzi, większé będą od miar koronnych. Łokieć francuzki, dwa razy prawie ieſt od polſkiego większy. Mila niemiecká, zawiéra prawie 1 $\frac{2}{3}$ mili francuzkiéy; a mila angielſká trzécią tylko ieſt francuzkiéy mili częścią. (Obacz w 3. części Arytm: roz: V. Porównanié różnych łokci, miar drożnych &c.

5. W przypadkach, o których mówiliśmy, na ſamę tylko wzgląd miało ſię *długość*, wielkości tych, któréśmy uważali. W takowym razie mówić ſię zwykło, że ſię ſamémi liniiami zaprzątamy, a w ſzczególności liniiami *proſtámi*; gdy té wyznaczaią odległość, albo naykrótszą drogę od iednégo ich końca do drugiégo. Gdyby zaś w tychże ſamych liniiach baczył kto ſzczególniéy to miéysce, gdzie ſię liniia zaczyna, albo gdzie ſię kończy; lub gdzie iedna drugą przecina, wtedy mówiłoby ſię że ſię zaprząta około *Punktu*. (b)

6. Przez ieden punkt można tyle linii rzeczą ſamą, albo przynaymniéy myślą poprowadzić, ile kto zechce. Ale gdy i drugi punkt ieszcze, w iakiéykolwiek od piérwszego odległości, będzie wyzna-

---

(b) *Nie trzeba tych wyrazów mieć za Definicye, ale tylko za ſzczére objaśnienia i wyluszczenia wyobrażeń, które do tych ſłów zwykliśmy przywiązywać. Im więcéy kto zaſtanawia ſię nad początkami, na których zaſadzaią ſię nasze wiadomości, tym większą poſtrzega trudność w ich wyłożeniu.*

czony, przez który liniiá proftá má przechodzić, w tym razie położenie téyże linii, iuż fię wyznacza; albo co na iedno wychodzi; wszyftkié liniie profté, któréby kto przez dwa punkta dané poprowadził, nie będą tylko iedną i tą samą liniią. A zatém, gdy dwie liniie profté zchodzą fię, lub przecinaią, nie mogą, tylko punkt ieden miéć fpólny. Gdy fię mówić będzie w fzczególności o wymiérzaniu na ziémi, powiémy tam, iaką oftróżność mieć potrzeba, gdy wyznaczyć i wymiérzyć przychodzi liniią łączącą dwa punkta, których odległość ieft wielká.

7. Na papierze, aby złączyć dwa punkta przez liniią proftą, używamy narzędzia, które fię nazywa *Liniiałém* (Reguła) niespuszczaiąc fię na famę rękę i oko; i przyftawiwszy ten liniiał do dwóch wyznaczonych punktów, kréślimy piórém, lub ołówkiém liniią podaną.

Oprócz wymiaru linii proftych, przypada częfto zatrudniać fię położeniém ich, iednych względém drugich.

8. Gdy dwie liniie, maią punkt fpólny, mogą bydź do fiebie nachylóné rozmaitémi fposobami. Abyśmy tę wielość położeń ich, iednych względém drugich dobrze poięli; wyftawmy fobie liniią iednę proftą na ftole na przykład wyrytą, i drugą na niéy naprzód położoną, i zupełnie do niéy przyftaiącą, a potém obracaiącą fię około punktu wyznaczonégo, któ-

ryby tym obydwóm liniiom ſbył ſpólny W takowém obracaniu ſię, drugá liniiá odmienné oraz położenia i nachylenia miéć będzie względém piérwszéy. Té rozmaité nachylenia nazywaią ſię *Kątami*; (Anguli) Punkt, około którégo ta drugá liniiá obracała ſię, nazywa ſię *Wierzchołkiém kąta.* (Vertex Anguli) Liniie, któré nachyleniém ſwoim tén kąt czynią, nazwać można *amionami*, (po łacinie zowią takowé liniie *Crura.*) Pod czas obracania ſię téy linii, punkt którykolwiek w niéy naznaczony, w jednakiéy zawsze odległości będzie od tégo punktu, około którego ſtatecznie ſię liniiá obraca; a zatém i wszyſtkié punkta śladu od niéy zoſtawionégo, iednakowo będą odległe od tego punktu nie wzruszonégo. Jeżeli obracaiącá ſię liniiá zupełny obrót uczyni, że znowu do piérwszego położenia, zkąd ſię obracać zaczęła, powróci; ślad taki od tegoż ſamego punktu zoſtawiony, nazywa ſię *Okręgiém koła.* (Circumferentia Circuli) Własność okręgu ztąd wypływaiącá, ieſt ta: że każdy w nim znayduiący ſię punkt, w równéy od jednégo punktu zoſtaie odległości; a tén punkt nazywa ſię *środkiém*; (Centrum) odległość środka od któregokolwiek punktu okręgu, nazywa ſię *Promieniém.* (Radius) część okręgu, nazywa ſię *Łukiém,* (Arcus) a liniiá proſtá łączącá końce dwa łuku, nazwać ſię może *Cięciwą.* (Chorda,) Gdy cienciwa ta przechodzi przez środek okręgu, a zatém dwa razy większá, iest od promienia, zwać ią będziémy *średnicą*; (Diameter) dzieli ona okrąg koła, na dwie równé części, któré tém tylko różnią się; że iedna z jednéy, a drugá z drugiéy strony średnicy iest położoná. (c)

9. Po tych definicyach, (któré obiaśnić należy ręcznem działaniém tego, co wyrażaią) póydźmy do wyłożenia początku kątów, z którego pochodzą.

Jeżeliby liniiá ruchomá, odprawiła obrótém swoim, połowę, trzecią część, czwartą, piątą i t. d. téy całéy drogi, którą iéy obéyśdź trzeba było, aby do piérwszego swego położenia powróciła; punkt téż którykolwiek téy linii, odprawił tém samém połowę, trzecią część, czwartą, piątą, okręgu zupełnégo, któryby ta liniiá zrobiła wkoło się obróciwszy. Zkąd wynika, że wierzchołek kąt obrawszy za środek, i od niego iakimkolwiek promieniém łuk nakréśliwszy, któryby między ramionami kąta zamykał się, wielkość tego łuku koła względém całego okręgu, do którego należy, da nam poznać wielkość kąta, względém całego tego miéysca kątowego, (Angularis) któreby iedna z tych dwóch linii przeszła,

---

(c) *Chcąc na papierze nakréślić okrąg koła, którego środek i promień mamy wyznaczony; używamy do tego narzędzia nazwanégo pospolicie* Cerklém, (*Circinus*) zaczynaiąc ſię obracać wtedy, gdy na drugiéy leżała, a niekończąc ſię obracać, aż znowu do niéy przyſtanie. I przeto łuk tén nazwany ieſt miarą (d) kąta między dwóma ramionami zamkniętégo, a zatém tak łuk tén, iako i kąt, iednakowo ſię powiększaią, albo zmniéyszaią, to ieſt: ſtaią ſię razém podwóynémi, potróynémi i t. d.

10. Ztąd ſię okazuie, że wielkość kąta od długości ramion iego nie zawiſła. (uwaga to ieſt, nad którą dobrze zaſtanowić ſię potrzeba).

11. Aby ſposobém wygodnym wielkość każdego kąta wyznaczyć przez wielkość łuku między iego ramionami zamkniętego; którego promień ieſt dany; zgodzono ſię na podzielenie okręgu iakiegożkolwiek na 360. części równych, z których każda nazywa ſię *Stopniém* (Gradus), przeto ieżeli łuk zamknięty między ramionami kąta, ma w ſobie 20, 30, 40, i t. d. części takich, iakich okrąg cały ma 360; o tym także kącie mówią, że ma 20, 30, 40. i t. d. ſtopniów. (e) Na tym gruncie zasa-

---

(d) *Ten wyraz* Miara *nie kładzie ſię tu w ściſłém rozumieniu; miara albowiém iakiéy ilości właściwie wzięta, powinna bydź tego gatunku, którego ieſt ta ilość którą ſię mierzy; na przykład długość iedna, mierzy ſię przez długość inną. Łuk zas koła i kąt, ſą gatunku różnégo, a zatém łuk koła miarą kąta właściwie wziętą bydź nie może.*

(e) *W działaniach większéy dokładności wyciągaiących, dzielą ieſzcze każdy ſtopień na* 60. *części i nazwanych* dza się cała robota i używanie narzędziów zdatnych do mierzenia kątów na ziemi, i sposób robienia tychże kątów na papierze, któreby iakążkolwiek stopniów podaną liczbę zawierały. *O narzędziach tych mówić potém będziémy.*

Dla uniknienia długości, którąby obszérne każdego działania wykładanie za sobą pociągało, i aby natężeniu myśli posolgować, zgodzili się Matematycy na pewné nazwiska punktów, liniiów, kątów i t. d. około których maią do czynienia.

12. Punkt oznaczaią przez iednę tylko literę, np: A.B.C.D. i t. d. gdy położenié tego punktu iest wiadomé; a np: przez x, y, z, gdy nie wiedzą, ale dopiero szukaią iego położenia.

Do oznaczenia linii używaią liter, które na dwóch iéy końcach kładą, ieżeli iest wielkości ograniczonéy; ieżeli zaś w wielkości swoiéy nie iest ograniczona, tedy na niéy dwa punkta stanowią, i przy nich piszą dwie litery, któremi ią mianuią. Tak np: liniiá łączącá dwa punkta A. i B. oznaczona byłaby témi dwiema złączonémi literami AB. *Tab: I. Fig. 1.*

Minutami, *a każdą minutę na* 60. minut drugich (*Minuta secunda* albo iedném słowém: *secunda*) *Znak stopniów, iest: o nad liczbą stopniów napisané.*

Tak np: $20^{\circ}, 21^{\circ}, 30^{\circ}\ 31^{\circ}$, *i t. d. wymawia się: dwadzieścia, dwadzieścia ieden i t. d. stopniów.*

Dla oznaczenia kąta (ponieważ tén czynią dwie liniie do siebie się nachylaiące) kładą trzy litery, iednę przy wierzchołku kąta, drugą i trzecią przy końcu ramion tego kąta; a złączywszy ie razém, i w środku ich położywszy literę nad wierzchołkiém kąta napisaną, trzémá témi literami kąt wyrażaią. Tak np: kąt zro-
Fig. 2. biony przez dwie liniie CA, CB. oznaczy i-by iednym z tych dwóch wyrazém: ACB. albo BCA. Gdy wierzchołek nie należy do więcéy, iak do iednego kąta, dosyć będzie oznaczać kąt tą iedną literą, którá iest nad wierzchołkiém iego.

13. Kiedy ramié ruchomé przez obrót swoy, którym początek kątów objaśniliśmy,
Fig. 3. uchodzi tylko czwartą część całego okręgu: zrobi takim obrótém swoim dwa kąty równe z tą linią, około któréy się obraca, gdy tę drugą daléy pociągniémy. Te kąty nazywaią się *Prostémi*, (Anguli recti) łuk koła, który im za miarę służy, będzie miał w sobie 90. stopni, sama zaś liniiá ruchomá, będzie w tén czas *Prostopadłą* (Perpendicularis) względém drugiéy. (Obacz w 1. Części Arytm: roz: V. piérwsze początki miernictwa &c.

Gdy to samo ramié ruchomé obrótém swoim nie dochodzi czwartéy części okręgu, wtedy kąty między niém i drugiém ramieniém przedłużoném uczynioné, będą nie równé. Jeden mniéyszy będzie od prostego, a drugi większy. Te dwa kąty nazwané ſą *Przyległémi*, (Adjacentes) albo (deinceps poſiti.) Mnieyszy od proſtego zowie ſię *Oſtrym*, (*acutus*) większy zaś od proſtego, *Roztwartym*, (obtusus) a iedna z tych liniiá nazywa ſię *Pochyłą*, (obliqua) do drugiey. Kąty DCA. DCB. ſą nierówné; kąt DCB. ieſt oſtry, a kąt DCA. roztwarty, liniiá DC. pochyła do linii AB. Fig. 4.

14. *Summa dwóch kątów przyległych, równa ſię dwóm kątóm proſtym.*

Niech będzie DC. pochyła do AB. ſumma kątów: DCB. DCA. równa ieſt dwóm kątom proſtym.

Jakoż, gdyby liniiá DC, zrobiwszy obrótém ſwoim około punktu C, kąt BCD, daley ſię ieszcze obracała, ażby naoſtatek przyſtała do linii CA, byłaby obrótém takim przeszła dwa kąty proſte; ale też razém byłaby przeſzła i kąty BCD, i DCA; więc te dwa kąty ſą dwiéma częściami ſummy z dwóch kątów proſtych złożoney, a zatém równaią ſię dwóm kątóm proſtym.

15. Gdyby liniiá CD. była pociągnioná na drugą ſtronę linii AB, naprzykład aż do E; kąty BCD, ACE, nazywałyby ſię, ieden względém drugiego *Przeciwległémi w wierzchołku* (ad Verticem oppoſiti) maią oné wierzchołek C, ſpólny; a ramiona CA, CE, iednego z tych kątów, ſą przedłużeniém ramion CB, DC, drugiego.

6. *Kąty w wierzchołku przeciwległé ſą równé.*

Jakoż w ſaméy rzeczy kąty: BCD, ACE, mogą bydź uważané, iak gdyby ſię zrobiły z obracania ſię lini ED, około punktu niewzruszonego C, zaczynaiąc ten obrót, gdy liniiá ED. na linii AB. leżała, do położenia iéy na CE; tym ſposobém liniiá ED. przez taki ſwóy obrót nachyli ſię do linii AB, równie z jednéy iak i z drugiéy ſtrony) a zatém czyni równé kąty DCB, ECA.

Wszyſtkié té *Podania* (Propoſitiones) którésmy dotąd przytoczyli, powinny bydź obiaśnioné, wykonywaiąc ié, przez działania ręczne, na których ſię zasadzaią. (f)

ROZDZIAŁ II.

O przyſtawaniu Troykątów, z przyſtosowaniém do rozwiązania wielu Zagadnień.

17. *Dfinicye*: Méysce zakończoné trzema liniiami proſtémi, zowie ſię troy

(f) *Niech ſię nie obawiaią Nauczyciele żadnych zarzutów, gdy przez ruch linii tłómaczyć i obiaśniać będą wiele prawd Jeometrycznych Ucznióm ſwoim dopiéro poczynaiącym. Dalecy oni ſą ieſzcze, aby w téy materyi domyślać ſię mieli ſubtelności Metafizycznych. Czynić pod ich oczami działania około tych rzeczy, którémi ſię zatrudniać maią, i zmyſły ich na nie obracać, ieſt to ieden z nayſkuteczniéyſzych ſpoſobów, baczność w nich i uwagę do rzeczy przywiązać, a razém i natężeniu myśli pofolgować.*

kątém prostokréślnym (Triangulum rectilineum.) My samégo przez się słowa *Troykąt* używać będziemy. Liniie trzy, w których się *Troykąt* zamyka, zowiémy *Bokami* troykąta (Latera Trianguli.) Takie liniie zowią także *ścianami*. Tego nazwiska do innego potém znaczenia użyiemy. *Przystawanie* (Convenientia) i przypadanie figur iednych do drugich, na którém równość dwóch iakich powierżchni zakładamy, używané iest często w pospolitych życia ludzkiego potrzebach i wygodach. Na obicie naprzykład pokoiów, bierzémy tyle płótna, lub innéy iakiéy materyi, ile wystarcza na przykrycie ścian iego; i wielkość powierzchni tego obicia, nie różni się od ścian powierzchni, które pokrywa, tylko tém; że ściany są pod obiciém, a obicie na ścianach. Toż mówić o deskach wystarczaiących na podłogę, albo o szybach do okien i t. d. Krawcy o to się staraią, aby tak suknie lub inné odzienia wymierzali, żeby te przystawały iak naylepiéy do tych ciała części, które pokrywać maią. Dwie księgi iednakowego dzieła, dwa obrazy pod iednakowémi wymiarami odmalowané, nie różnią się co do powierzchni, tylko tém, że nie są iedną rzeczą, ale dwiémá. Miary na zboże, napoie, i t. d. tak się zgadzaią z sobą, że iedna prawie wielość ziarna pewnégo, napełnia korzec ieden, iako i drugi; tyle w jeden garniec, co i w drugi mieści się napoiu i t. d. gdy te miary stosuią się do iednéy ustanowionéy od Zwierzchności.

18. *Twierdzenie.* (Theorema) Jeżeli w dwóch troykątach, dwa boki w iednym, równe są dwóm bokom w drugim, i kąty między témi bokami zawarte równe, trzeci téż bok iednégo, równy będzie trzeciému bokowi drugiego, i kąty przy tych bokach równych będące, w jednym i w drugim troykącie będą równe.

Fig. 5. Niech będą dwa troykąty: ABC, i bc, których boki: AC, i ac, są równe, boki téż BC, bc, równé; i kąty: C, i c, równe. Dowieśdź tzeba, że i boki; AB, i ab, i kąty A, i a, iako téż B, i b, będą równe.

Dowodzenie (Demonstratio.) Wystawmy sobie troykąt, abc, iakoby oderwany (co téż odstrzygłszy go, i w rzeczy saméy wykonać można) i przeniesiony na troykąt, ABC: w ten sposób; aby położywszy linią ca, na linii CA; liniá téż cb, przystała do linii CB, (co dla równości kątów C, i c, nastąpić powinno) ponieważ liniá ca, równá iest linii CA; a liniá cb, linii CB, punkta a, i b, przypadną na punkta A, i B; a zatém i liniié ab, i AB, będą przez té samé punkta zakończoné. Więc té dwié ostatnié liniié przykryią się zupełnie iedna drugą; a zatém będą równé; i zrobią z liniiami ca, CA, cb, CB, kąty równe a, i A, iako téż b, i B.

19. *Uwaga.* Dwa troykąty cab, CAB, nie różnią się od siebie tylko przez to, że odmiennė miéyscė zastępuią. O takich więc dwóch troykątach, a w powszechności i o każdych dwóch figurach, samém tylko położeniém miéysca różniących się, mówimy, że do siebie *przystawać mogą.*

20. Przystosowanié: ieżeli w iednym troykącie, dwa boki są równe, będą też równe i dwa kąty przy nich leżącé

Niech będzie troykąt ABC, którego boki AC, BC, są równe; kąty też A, i B, będą równé. *Fig. 6.*

Wystawmy sobie, że ten troykąt ABC, wybity iest na drugiém miéyscu tak, żeby bok CA, w wybitym troykącie, to miał położenié, co bok CB, w troykącie piérwszym, a znowu bok CB, aby w drugim, na téy stronie leżał, na któréy bok CA, w piérwszym; ponieważ kąt C. iest iednakowy w obydwóch tych troykątach, położywszy tedy drugi troykąt na piérwszym; bok CB, i CA, troykąta wybitego, przystanie zupełnie; piérwszy CB, do boku CA, drugi CA, do boku CB, troykąta piérwszego, a zatém i punkta B, i A, należące do troykąta wybitego, leżeć będą na punktach A, i B, należących do piérwszego troykąta. Więc drugi troykąt przeniesiony na piérwszy będzie mógł przystać do niego; a przeto kąty B, i A, tego troykąta równe będą, piérwszy kątowi A, drugi kątowi B, tro kąta podłożonego. Aże kąt A, w tym podłożonym troykącie, iest równy także kątowi A, drugiego troykąta, więc kąty A, i B, troykąta podłożonego są równe kątowi A. w troykącie na nim położonym, a zatém kąty A i B, są sobie równe.

Naitępuiące tegoż twierdzenia dowodzenié, zastanawia prawie wszystkich poczynaiących; i wielu iest zdania, lubo często zawodnego, że w zrozumieniu tego dowodzenia, daie się poznawać poiętność Ucznia i sposobność do Jeometryi.

Fig. 7. Niech będzie trookąt CAB, którego boki CB, są równe; kąty CAB, CBA, będą też równe.

Przygotowanie. Na liniiach CA, CB, przedłużonych, weźmy iakiekolwiek liniie równe, naprzykład: AD, BE, i poprowadźmy BD, AE.

Dowodzenie. Ponieważ liniie CA, CB, są równé; a liniie też AD, BE, wzięté są równe; więc w troykątach: DCB, ECA, gdzie kąt C, iest spólny, ramiona CB, i CA, CD, i CE, tego kąta równe będą; a zatém te dwa troykąty przystać do siebie mogą: (18) a w szczególności liniie AE, BD, i kąty przy D i E, równe będą.

W troykątach: ADB, BEA, boki AD, BE, są równe, dowiodło się też, że liniie BD, AE, są także rowne, i że równe są kąty w tych ramionach zawarte przy D, i E;

więc te troykąty mogą do siebie przystać: a w szczególnoś i kąty: DAB, EBA, są równe, a zatém i im przyległe CAB,CBA, będą równe.

21. Gdyby wszystkie trzy boki w troykącie były równe, trzy także kąty w nim równe byłyby.

22. *Definicye.* Gdy w troykącie dwa boki są równe, taki troykąt zowiémy *Równoramiennym* (Isosceles albo Æquicrurum.) Gdy w troykącie boki trzy będą równe, nazwiémy go *Równobocznym* (aequilaterum.)

Gdy w troykącie wszystkie trzy boki nierówne będą, zwać go będziémy, *Różnobocznym* (Scalenum.)

23. *Twierdzenie* 2. Gdy dwa troykąty, maią bok ieden równy, i gdy dwa kąty przy tym boku iednego troykąta, równe są względém dwóch kątów przy boku równym drugiego troykąta; trzeci też kąt w jednym troykącie, równy będzie trzeciému kątowi w drugim; i dwa inne boki, równe względém siebie będą w obydwóch tych troykątach.

Niechay naprzykład w dwóch troykątach: ABC, abc, boki AB, ab, i kąty A, i a, B, i b, będą równe; będzie i kąt C, równy kątowi c; boki: AC, ac, i boki także BC, bc, będą równe. *Fig.* 5.

Dowodzenié. Wystawmy sobie troykąt abc, przeniesiony na troykąt ABC; i na nim położony, tak, aby punkt a, poſtawiwszy na punkcie A, liniią ab, rowną linii AB, na niéy leżała. Ponieważ kąt a, równa ſię kątowi A, i kąt b, kątowi B; liniią też ac, przyſtanie do linii AC; a liniią bc, do BC; punkt tedy c, muſi ſię znaydować razém i na linii AC, i na linii BC, a zatém znaydować ſię będzie na ich ſpólném przecięciu C. Więc troykąt abc, zupełnie przyſtanie do troykąta ABC, a przeto liniie ac i bc, równe będą liniiom AC, i BC, tak, iako i kąt c, równy kątowi C.

24. *Przyſtosowanie*. Jeżeli w troykącie, kąty przy *Podſtawie* (ad basim) ſą równe, t ki troykąt będzie *Równoramiennym*. Dowodzenié tego podobné ieſt wcale dowodzeniu położonému w przyſtosowaniu piérwſzego twiérdzenia (20.) Jeżeli troykąt ma wszyſtkié trzy kąty równé, będzie równobocznym.

24 *Twiérdzenié* 3. Gdy w dwóch troykątach, boki trzy iednego, równe ſą trzém bokom drugiego; i kąty też trzy w jednym, będą równe trzém kątom w drugim, a te dwa troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

Tab II. Fig. 1. i 2. Niech będą dwa troykąty ABC, abc, takie, aby bok AB, w piérwszym, równy był bokowi ab, w drugim, podobnie iak i boki AC, BC, równe bokom ac, bc, te dwa troykąty mogą przyſtać do ſiebie.

Dowodzenie. Wyſtawmy ſobie troykąt abc, przenieſiony i położony pod troykątém ABC, tak, iak go wyraża na figurze troykąt ABD. Poprowadźmy liniią CD. Ponieważ liniie CB, BD, ſą obiedwie równe linii cb, ſą też i ſobie rowne; więc i kąty: BCD. BDC ſą równe (23) Podobnie kąty ACD, ADC, ſą także równe; a zatém i kąty: ACB ADB, równe będą.

Więc dwa troykąty: ACB, ADB, mogą przyſtać do ſiebie. Ale że też troykąty: ABD, i abc przyſtać do ſiebie mogą; więc przyſtaną także i troykąty: ABC, i abc.

26. *Uwaga.* Położenie linii CD, może bydź troiakié, bo może albo przecinać liniią AB, między punktami A i B, albo może przez który z tych dwóch punktów przechodzić, albo nawet i przez przedłużenié téyże linii AB. Dowodzenié toż ſamo ieſt we wszyſtkich trzech razach.

27. *Zagadnienie.* (Problema.) Maiąc dane dwa punkta, znaleśdź trzeci, któryby od każdego z tamtych, w jednakowéy był odległości.

Rozwiązanié (Solutio.) Od iednego i od drugiego z punktów danych, poprowadziwszy łuk koła promieniém większym od odległości tych dwóch punktów; tam gdzie ſię te dwa łuki przecinać będą, będzie punkt którego ſzukamy.

28. *Uwaga.* Na rozwiązaniu tego, lubo tak łatwego zagadnienia, zasadza ſię *Wykréślenie* Jeometryczne wielu innych za-

gadnień. Wykréślenie to zowią połacinie: (*Conſtructio.*) Lubo tego ſamégo ſłowa zażywaią także Matematycy, na oznaczenié przygotowania poprzedzaiącego dowodzenia, przez kréślenié pewnych linii potrzebnych, do tegoż dowodzenia. My przykładém ich, w obydwóch także razach, używać będziémy tego ſłowa: *Wykréślenié.*

29. *Zagadnienié.* 2. Daną liniią proſtą podzielić na dwie części równe.

Rozwiązanie. Sposobém w poprzedzaiącém zagadnieniu wyrażoném znaydźmy po obydwóch linii téy ſtronach dwa punkta, któreby od końców iéy iednakowo były odległe; złączmy te dwa punkta liniią proſtą, ta przetnie w jednym punkcie liniią daną, i w tém przecięciu będzie punkt podziału żądanego.

Fig. 3. Niech będzie liniiá daná AB, punkt C, równo odległy od A i B, końców linii danéy; drugi punkt D, podobnie także odległy. Punkt X. gdzie liniiá CD, przecina liniią AB. dzielić będzie na dwie równe części liniią daną.

Wykréślnié, (Conſtructio.) Pociągniymy liniie AC, BC, AD, BD.

Dowodzenié. Troykąty: CDA, CDB, maią trzy boki równe iedne drugim; a zatém (25.) mogą przyſtać do ſiebie; a w ſzczególności, kąt ACD, równy ieſt kątowi BCD: więc troykąty ACX, BCX, mieć będą boki AC, i BC, równe, bok CX, ſpólny; i kąt także w tych ramionach zamknięty równy; więc (24.) te dwa troykąty mogą do ſiebie przyſtać; i liniie AX. i BX. ſą równe.

30. *Defin*: Gdy w troykącie, albo w jakiéykolwiek innéy figurze, bok ieden będzie przedłużony; kąt, który ſię między tém przedłużeniém i bokiém przyległym zrobi: nazywa ſię *zewnętrznym* (externus) tego troykąta, lub innéy figury.

31. *Twierdzenié*. 4. W troykącie, zewnętrzny kąt, większy ieſt od iednego z wewnętrznych na przeciwko niego położonych.

Niech będzie troykąt ABC, którego bok AB, przedłużony ieſt według upodobania ku D; kąt zewnętrzny CBD, większy ieſt niżeli ieden ze dwóch wewnętrznych, naprzykład C. Fig

Przygotowanié. Przetniymy na połowę w punkcie E, bok BC; i poprowadźmy liniią AE, aż do F, aby FE, równała ſię AE; pociągniymy ieszcze i liniią BF.

Dowodzenie. Troykątów: AEC, FEB, kąty przeciwne w wierzchołku E, ſą równe; i ramiona tychże kątów równe, z wykréślenia. Więc dwa te troykąty, mogą do ſiebie przyſtać (18.) A w ſzczególności kąt C. równy ieſt kątowi EBF; który kąt EBF, ieſt tylko częścią kąta CBD, Przeto kąt cały CBD, większy ieſt od kąta C, równego kątowi EBF.

32. *Wniosek.* (Corollarium.) Summa dwóch iakichkolwiek kątów w troykącie, mniéyszá iest od dwóch kątów prostych. Ponieważ kąt CBD, większy iest od kąta C, summa kątów CBD, ABC, większá będzie od summy, kątów C, i ABC; a że summa dwóch kątów piérwszych, waży tyle, co dwa kąty proste, bo iest summą dwóch kątów przyległych (14.) Więc ta drugá summa mniéyszá iest od piéwszéy.

Idzie zatém, że ieżeli w troykącie, będzie kąt ieden prosty, albo też roztwarty, dwa inne, nie mogą bydź, tylko każdy z nich ostry.

33. *Definicye.* Jeżeli troykąt zawiera w sobie kąt prosty, zowie się *Prostokątnym* (Triangulum Rectangulum.) Jeżeli ma kąt roztwarty, nazwać go można *Roztwartokątnym* (Obtusangulum.) Jeżeli wszystkie trzy kąty ma ostre, zwać się będzie *Ostrokątnym* (Acutangulum.)

34. *Twierdzenié.* 5. Gdy w dwóch troykątach, bok iednego będzie równy bokowi drugiego, i kąt tym bokóm przyległy równy ieden drugiému, a kąt nie przyległy tym bokóm, także równy w obydwóch troykątach: dwa te troykąty mogą przystać do siebie.

Fig. 6 Niech będą dwa troykąty ABC, abc, maiące dwa boki AB, ab, równe, kąty A i a, przy tych bokach równe, i kąty C, i c, równe; te dwa troykąty mogą do siebie przystać.

Dowodzenié. Przenieśmy troykąt abc, na troykąt ABC, tak, aby bok ab, przystawszy do boku, AB, bok też ac, przystawał do boku AC; (co dla równości kątów a, i A. nastąpić powinno.) Gdyby punkt c, nie przypadł na punkt C, toby przypadł albo między punktami A i C, na przykład na d, albo daléy za punktém C, na linii AC, przedłużonéy, naprzykład na D; w piérwszym razie, kąt ADB, albo C, byłby zewnętrzny troykąta CBD, a zatém większy od kąta C. W drugim razie kąt C, byłby zewnętrzny troykąta CBD, a zatém większy od kąta D. albo c; co w obydwóch razach, iest przeciwko podaniu; bo kąty C, i c, dane, są równe. Więc liniiá ac, przeniesioná na AC, nie gdzie indziéy kończyć się będzie, iak na punkcie C, a zatém troykąty BAC, bac, mogą przystać do siebie (18.)

35. *Twierdzenié.* 6. W każdym troykącie, ieżeli bok ieden większy iest od drugiego; i kąt też na przeciwko boku piérwszego, większy będzie od kąta drugiemu bokowi przeciwnego.

Niech będzie troykąt ABC, którego bok AC, większy od boku BC; będzie też i kąt ABC, większy od kąta A. *Fig. 5.*

Przygotowanié. Na boku AC, większym, weźmy CD równą CB, i od D poprowadźmy DB.

Dowodzenié. Troykąt równoramienny BCD, ma kąty CBD, CDB: równe; kąt CDB ieſt zewnętrzny troykąta BAD; więc ieſt większy niżeli kąt A; a zatém i kąt CBD większy będzie od kąta A; dopiéroż kąt CBA większy ieſt od tegoż kąta A.

36. *Twierdzenié*. 7. Gdy w troykącie, większy ieſt kąt ieden od drugiego; bok naprzeciwko piérwszego kąta, większy też będzie od boku przeciwnego drugiemu kątowi.

Dowodzenié. Gdyby bok przeciwny piérwszému kątowi, był równy albo mniéyszy od boku drugiému kątowi przeciwnego; piérwszy też kąt byłby równy drugiemu, albo od niego mniéyszy (35.) Ale przez podanie, ten piérwszy kąt nie ieſt ani równy, ani mniéyszy od drugiego; więc też i bok témn piérwszému kątowi przeciwny, nie będzie ani równy, ani mniéyszy od drugiego boku; a przeto będzie większy od niego.

37. *Uwaga*. W tém twierdzeniu użyliśmy piérwszy raz dowodzenia *zbocznego*, albo *przez niepodobność*. Po łacinie piszący, nazywaią takie dowodzenie: *Demonſtratio indirecta*, albo *per absurdum*. Okazuie ſię tym ſposobém, że wszelkie inne odmienne w téy mierze twierdzenie, byłoby fałszywém; a zatém to tylko ieſt prawdziwe, które dowodzimy.

38. *Wnioſki*. Ponieważ w toykącie proſtokątnym, i w troykącie roztwartoką-

tnym, kąt prosty, i kąt roztwarty, są z trzech kątów naywiększém; przeto też boki naprzeciwko takich kątów leżące, będą naywiększe.

A ztąd między wszystkiémi liniiami poprowadzonémi od tegoż samégo punktu, od iedney linii, naymnieysza iest liniiá prostopadłá. Jnne liniie pochyłe, tém większe będą, im dalsze od prostopadłéy. Dwie także liniie pochyłe, równéy wielkości, od punktu tegoż samégo poprowadzić można; a nie więcéy, i te od prostopadłéy równie będą odległe.

Ztąd też wypływa, że liniiá prostá, nie może przecinać okręgu koła w więcéy, iak we dwóch punktach; a to w tych, których odległość od środka koła, równá się promieniowi tegoż koła; bo inaczéy więcéy niż dwie liniie równe, możnaby poprowadzić od iakiego punktu do trzeciéy linii.

39. *Defin:* Liniiá prostopadłá, spuszczoná od iakiego punktu na inną liniią, nazywa się *odległością* tego punktu od linii, na którą spada; a to dla tego, że ta liniiá iest naykrótszą między wszystkiémi innémi, któreby od tegoż punktu można poprowadzić do téy saméy linii.

40. *Twierdzenie.* 8 W troykącie summa dwóch boków, większá iest od boku trzeciego.

Niech będzie troykąt ABC; summa dwóch boków AB, BC, większá iest od boku AC. *Fig. 7.*

Wykréślenié. Pociągnąwszy daléy bok AB, weźmy BD, równą BC, i złączmy ich końce liniią CD.

Dowodzenié. W troykącie równoramiennym BCD, kąty C i D, ſą równe; więc w troykącie ACD, kąt ACD, większy ieſt od kąta D; a zatém i bok AD, większy będzie od boku AC; a że AD równá ſię ſummie boków AB, BC, więc i ta ſumma boków, większá ieſt od boku AC.

41. *Uwaga.* To twierdzenié ſłużyć nam może po części za objaśnienie w tém, które iuż mamy, naturalném linii proſtéy wyobrażeniu. Widzimy tu oczywiście, że liniiá proſtá, którá łączy dwa punkta, mniéyszá ieſt, niżeli ſumma dwóch innych linii do tychże punktów poprowadzonych, od punktu takiego, który ſię nieznayduie na linii łączącéy te dwa punkta.

42. *Twierdzenié.* 9. Jeżeli od środka linii proſtéy wyprowadzimy proſtopadłą: każdy punkt w téy proſtopadłéy, będzie równo odległy od obydwóch końców linii piérwszéy; każdy zaś inny punkt za tą proſtopadłą wzięty, nie iednakową od tychże końców odległość mieć będzie.

Fig. 8. Niech będzie proſtopadłá CD, do środka C, linii AB.

Naprzód: Odległości DA, DB, punktu którégokolwiek D, wziętego na linii CD, od punktów A i B, ſą równe.

Dowodzenié. W troykątach ACD, BCD, kąty proſte przy C, ſą równe, i ramiona przy tych kątach równe, więc dwa te troykąty mogą przyſtać do ſiebie; a zatém liniie AD i BD ſą równe.

Powtóre: Niech będzie punkt E, za proſtopadłą DC, liniie AE, EB, nierówne będą.

Niech liniiá AE, przechodzi punkt D, należący do proſtopadłéy CD; od punktu tego poprowadźmy liniią DB.

Dowodzenié. Liniie AD, BD, ſą równe, iako ſię iuż dowiodło; a że liniiá AE, równa ſię ſummie linii AD, DE, więc liniiá AE, większá ieſt od linii AD, a zatém i od linii BD, którá tamtéy ieſt równá.

Zwykłó ſię krócéy ieszcze to twierdzenie tak wyrażać: *Liniiá proſtopadłá z pośrodka innéy linii wyprowadzoná, ieſt mieyscém* (Locus) *wszyſtkich punktów oddalonych iednakowo od obydwóch końców teyże linii*. (g)

43. *Zagadnienié* 3. Od punktu danego na linii proſtéy wyprowadzić liniią proſtopadłą.

Rozwiązanie. Weźmy na danéy linii dwa inne punkta, iednakowo od punktu danego odległe; od każdego z tych dwóch punktów, iako od środka (a centro) ie-

---

(g) *Ponieważ liniiá proſtá, przez dane położenie dwóch punktów, ieſt iuż tém ſamém wyznaczoná: ieżeli zatem przez dwa inne punkta, z których każdy iednakową ma od obydwóch punktów danych odległość, poprowadzimy liniią, to w środku linii łączącéy dwa punkta dane, będzie proſtopadłą.*

dnakowym promieniém, większym iednak, niż ieſt odległość tych dwóch punktów, od punktu danego, nakréśimy dwa łuki przecinaiące ſię. Punkt dany, i drugi w przecięciu znaleziony złączmy z ſobą liniią proſtą, ta będzie proſtopadłą, któréy ſzukaliśmy.

44. *Zagadnienié 4.* Od punktu danego za liniią proſtą, ſpuścić na nią liniią proſtopadłą.

Rozwiązanié: Znaydźmy dwa punkta na linii danéy, iednakowo odległe od punktu danego: kréśląc od niego iako od środka, iednakowym promieniém, dwa łuki przecinaiące we dwóch punktach liniią daną: ſzukaymy innego ieszcze punktu równie od dwóch przecięcia punktów odległego. Liniiá łącząca ten punkt znaleziony, i drugi dany: ieſt ta ſama proſtopadłá, któréy ſzukaliśmy.

45. *Zagadnienié 5.* 1. Na danéy linii wyſtawić troykąt równoboczny.

2. Na danéy linii wyſtawić troykąt równoramienny, którego ieden bok ieſt wiadomy.

3. Na danéy linii wyſtawić troykąt, którego dwa inne nierówne boki ſą wiadome.

Rozwiązanié. 1. Z dwóch końców linii danéy, promieniém równym teyże linii pociągnąć trzeba po iednéy ſtronie dwa łuki, i punkt ich przecięcia złączyć z końcami linii danéy.

2. Z dwóch końców linii danéy, promieniém równym linii, która ma służyć za ramie tro kąta równoramiennego, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia poprowadzić dwie liniie do końców linii danéy.

3. Z dwóch końców linii danéy, promieniami odmiennémi, równémi w długości liniiom maiącym służyć za boki do troykąta, pociągnąć dwa łuki, i od punktu ich przecięcia, poprowadzić dwie liniie do końców linii danéy.

Przestroga. Summa dwóch linii danych, powinna bydź większa od trzeciéy linii także danéy. (40.)

46. *Definicya.* Gdy uważamy troykąt, ile wystawiony iest na iakiéy prostéy linii; taka liniia nazywa się *Podstawą* (Basis) troykąta; a kąt naprzeciwko iéy stoiący nazywamy *Wierzchołkiém Troykąta* (Vertex Trianguli.)

47. *Przystosowanie.* Przerysować troykąt dany.

Rozwiązanie: Weźmy ieden z boków troykąta za podstawę onego. Podstawę tę przenieśmy na insze miéysce; i od końców iéy promieniami, dwóm innym bokom równémi, nakréślmy dwa łuki, a od punktu ich przecięcia, poprowadźmy dwie liniie do końców podstawy; iuż tém samém przerysowany będzie troykąt dany, na inny iemu we wszystkiém równy.

48. *Zagadnienié 6.* Maiąc dany kąt iaki, zrobić mu drugi równy, któryby miał za iedno ramie liniią daną, a za wierzchołek punkt na téy linii także dany.

Rozwiązanié. Zaczynaiąc od wierzchołka kąta danego, wziąć trzeba na iego ramionach dwie iakiekolwiek linie równe, i końce ich złączyć trzecią liniią. Zrobi się tym sposobém troykąt. Od punktu danego na linii także danéy, przenosi się długość, wzięta na iednym ramieniu kąta danego, i na niéy iak na podstawie, przerysuie się troykąt, pierwszemu zewszystkiém równy (47.)

49. *Przystosowanié.* 1. Zrobić troykąt, którego wiadome są dwa ramiona, i kąt między niémi.

2. Zrobić troykąt, którego wiadoma podstawa, i dwa przy niéy kąty.

50. *Zagadnienié* 7. Zrobić troykąt, którego dany iest ieden, i dwa boki, ieden przyległy kątowi danemu, drugi naprzeciwko niego leżący.

Uwaga: Kąt dany może bydź *prosty*, *roztwarty*, albo ostry. W piérwszych dwóch razach, bok przeciwny kątowi danému, powinien bydź większy od boku przy kącie będącego. (38.) W trzecim razie, bok przeciwny kątowi, może bydź większy lub mniéyszy od drugiego. We wszystkich tych razach, zróbmy kąt równy danému, i daymy mu za ramie, liniią równą danéy, a maiącéy mu służyć za toż ramie.

Z końca téy linii promieniém równym bokowi danému, który ma leżeć na przeciwko kąta danego, pociągniymy łuk, któryby przecinał drugie tegoż kąta ramie. Punkt przecięcia oznaczy koniec drugiego ramienia kąta.

Niech będzie C. wierzchołek kąta danego, liniiá CA równá linii danéy za ramie tego kąt; i niech łuk kréślony od punktu A, iako od środka, promieniém równym linii drugiéy danéy (którá ma służyć za bok przeciwny kątowi C;) przecina drugie ramie w punktach B. i b. Fig. 9. i Tab III Fig. 1. 2, 3.

1. Gdy kąt C ieſt *Proſty*; dwa troykąty: ACB, ACb mogą przyſtać do ſiebie: bo liniie pochyłe równe AB, Ab, iednakowo ſą od proſtopadłéy AC odległe, a zatém CB i Cb ſą równe.

W jnnych razach ſpuśćmy liniią proſtopadłą AD.

2. Gdy kąt C ieſt *Roztwarty*, albo oſtry, ale liniiá AB, większá od AC; w tym razie liniie pochyłe i równe AB, Ab, dalſze ſą od proſtopadłéy AD, niżeli liniiá pochyła AC; a zatém z dwóch troykątów ACB, ACb ieden tylko troykąt ACB wypełnia trzy założone *Warunki* (Conditiones.)

3. Gdy kąt C ieſt *oſtry*, ale liniiá AB mniéyszá od AC; dwie liniie pochyłe i równe: AB, Ab, będą bliższe proſtopadłéy AD, niżeli liniiá AC; a zatém troykąty ACB, ACb, lubo ſobie nierówne,

obadwa iednak wypełnią trzy założone warunki.

Powtórzenie przypadków, w których dwa troykąty mogą przystać do siebie, albo w których troykąt wyznaczony iest przez wiadomość dostateczną boków i kątów iego.

1. Dwa boki i kąt między niémi.
2. Bok ieden i dwa przy nim kąty.
3. Trzy kąty.
4. Dwa boki i kąt prosty nie między niémi zawarty.
5. Dwa boki i kąt roztwarty nie między niémi zawarty.
6. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny danému kątowi iest naywiększy.
7. Dwa boki i kąt ostry nie zawarty między niémi, i gdy bok przeciwny kątowi danému iest naymniéyszy. Ten przypadek iest wątpliwy) bo dwoiakim sposobém troykąt czyni zadosyć trzém warunkom.

51. *Uwaga.* 1. Nietylko z tych, któreśmy tu wymienili wiadomości, ale i z innych ieszcze wyznaczyć można troykąt. Te iednak, które się tu wspomniał przypadki, nayczęściéy zdarzać się zwykły, i wszystkie inne mogą się pod nie podciągnąć.

Cztéry ostatnie przypadki mogą być ściągnione do iednego. (Obacz w Rozd. 10. Twierdz: 5.) Ale przy początkach lepiéy ie osobno podawać.

52. *Uwaga.* 2. Same tylko troykąty ſą takiémi figurami, gdzie wiadomość trzech boków iuż ieſt doſtateczná do wyznaczenia troykąta. Okazać to w proſtym przykładzie można na *Czworoboku*, albo *Czworokącie* (Quadrilaterum,) którego wszyſtkie boki ſą równe. Chociaż albowiém wiedzieć będziémy boki wszyſtkie tego czworoboku, nie potrafimy iednak oznaczyć iaki czworokąt ztąd wyniknie, bo tym bokom różne dadź możémy nachylenie, a zatém i czworokątowi odmienną dadź możémy figurę. Tak np: ieżeli damy mu kąty wszyſtkie proſte, zrobi ſię *Kwadrat*, ieżeli damy dwa kąty oſtre, a dwa roztwarte, zrobi ſię czworokąt pochyły tém bardziéy, im oſtrzsze iedne kąty, a drugie roztwartsze mieć będzie.

53. *Twierdz:* 10. Linia proſta przecinaiącá kąt na dwie części równe, każdy w ſobie punkt mieć będzie iednakowo odległy od obydwóch ramion tegoż kąta; a wszelki inny nie na téy linii punkt, nie tak odległy będzie od iednego ramienia tego kąta, iak od drugiego.

Niech będzie kąt ACB, który na dwie części przecina liniiá CD; ieli punkt iaki na iéy, naprzykład D, weźmiémy, liniie proſtopadłe DE, DF, do ramion tego kąta ſpuszczone, będą równe. Fig. 4

Dowodz: Dwa troykąty proſtokątne CDE, CDF, które bok CD ſpólny maią, i kąty przy C równe, mogą przystać do siebie (18.) więc liniie DE, i DF, są równe.

Niech znowu będzie punkt G, nie w linii CD; prostopadłe GE, GH, będą nierówne.

Niech albowiém prostopadłá GE, spotyka w punkcie D, liniią CD: która na dwie części dzieli kąt ACB, od punktu D. spuśćmy prostopadłą DF, i poprowadźmy GF.

W troykącie DFG, summa linii FD, i DG, większá iest od boku FG; ale ta summa linii FD, i DG, równá się linii EG, więc liniiá EG, większá iest od linii FG. A że znowu liniiá GF, większá iest od linii GH, (38.) więc tém bardziéy liniiá EG, większá będzie od linii GH.

54. *Uwaga.* Liniiá prostá, która przedziela kąt na dwie równe części, nazywa się *Miéyscém* wszystkich punktów, których odległość iednakowá iest od dwóch linii danych.

55. *Zagadn:* 8. Dany maiąc kąt, na dwie części go podzielić.

Rozwiązanié. Od wierzchołka tego kąta, wziąwszy na ramionach iego dwie liniie równe, z końców ich kréślę dwa łuki iednakowym promieniém. Przez ich przecięcie, i przez wierzchołek kąta, prowadzę liniią, ta dzielić będzie kąt na dwie równe części.

56. *Wniosek.* Będzie też można każdą z tych połowę podzielić daléy na dwie

równe części, te znowu na dwie i. t. d. Przeto każdy kąt może bydź (przynaymniéy myślą) podzielony na 2, 4, 8, 16, i. t. d. części równych.

ROZDZIAŁ III.

O liniiach równoodległych i o równoległobokach.

57. *Twierdzenie* 1. Niech będzie liniiá prostá, od któréy dwóch punktów wychodzą dwie liniie prostopadłe. Te prostopadłe nigdzie się nie zéydą, choćbyśmy ie naybardziéy przedłużali.

Dowódz: Gdyby te prostopadłe, gdzie się zeszły, zrobiłyby z trzecią liniią, od któréy są wyprowadzone, troykąt maiący dwa kąty proste; a to iest niepodobná.

58. *Defin*: Dwie liniie na *Płaszczyznie* (Planum) poprowadzone, gdy się zeyśdź z sobą nie mogą, nazwane są *Równoodległe* (Parallelae.)

W ogólności zaś mówiąc: iakiekolwiek liniie dwie proste od trzeciéy przecięte iednakowo z iednéy strony nachylaiące się do téy trzeciéy linii, są równoodległe.

59. Niechby naprzykład liniie CF, i DG, przecięte w punktach A, i B, od linii HE, miały kąty, CAE, i DBE, równe; te dwie liniie nie mogą się nigdzie zéyśdź z sobą. Gdyby albowiém gdzie się zeszły, w troy- *Fig.* 5.

kącie z nich i z trzeciéy linii AB złożonym, byłby kąt zewnętrzny DBE, równy iednému z wewnętrznych CAE; co bydź nie może. (31.)

60. Wniosek: Ponieważ kąt HBG, równa się kątowi DBE, (16.) a kąt HAF, kątowi CAE można podobnie dowieśdź, że liniie CF, DG, nie zéydą się ani z drugiéy strony linii HE.

61. Defin: Kąty DBE, CAE, nazwać można *Jednostronne*, podobnie, iako i kąty: DBH, CAH; EBG, EAF, GBH, FAH, kąty: DBH, CAE, nazywaią się *Wewnętrzne* (Jnterni) takie też są i kąty: FAE, GBH. Kąty: FAE, DBH, nazwać można kątami na przemian, to iest na przemianległémi po łacinie zowią się (*Alterni*) toż nazwisko daie się i kątom CAE, GBH.

Te Definicye znać dobrze Uczniowie powinni.

62. Kąty przyległe: DBE, DBH, czynią razém dwa kąty proste; (14.) ale że kąt DBE równa się kątowi CAE, dla równéy pochyłości obydwóch linii DB, i CA, do linii HE; więc i kąty wewnętrzne: DBH, CAE, razém wzięte równe będą dwóm kątom prostym.

63. Kąty w wierzchołku przeciwne DBE, HBG, są równe (16.) więc i kąty na przemian CAE, HBG równe będą.

64. Piérwszé twierdzenié można i tak wyrazić: że ieżeli dwie liniie proste przecięte przez linią trzecią, czynić będą

z nią kąty iednoſtronne równe, albo kąty na przemian równe, albo że dwa kąty wewnętrzne równać ſię będą ſummie dwóch kątów proſtych: takie dwie linie będą równo odległe.

65. Zagadn: 1. Daną maiąc iednę liniią, poprowadzić drugą równo odległą, przez punkt dany.

Niech będzie liniiá daná BC, i punkt A *Fig. 6.* także dany; przez ten punkt poprowadzić liniią równoodległą, od linii danéy BC.

Rozwiązanié. Przez punkt A. ciągniymy iakążkolwiek liniią, naprzykład AD, do BC. Przy punkcie A. zrobmy kąt DAE, równy kątowi ADC. Liniiá AE, będzie tą równoodległą, któréy ſzukaliśmy.

Dowodz: Kąty na przemian DAE, ADC, ſą równe, więc liniie BC, AE, ſą równoodległe.

66. Twierdz: 2. Jeżeli kąty iednoſtron- *Tab. IV Fig. 1.* ne CAE, IBE, nie ſą równe: choćby też i bardzo nieznaczná była ich różnica, wszelako iednak liniie AC, BI, zéydą ſię gdziekolwiek z ſobą; albo (co na iedno wychodzi) ieżeli ſumma kątów wewnętrznych IBH, CAE, mniéyszá, albo większá ieſt od dwóch kątów proſtych, tedy dwie liniie CF: IL, zéydą ſię z téy ſtrony linii HE, gdzie ta ſumma ieſt mniéyszá od dwóch kątów proſtych.

Na dowodzenié tego twierdzenia, wysilali od dawnych czasów dowcipy ſwoie Jeometrowie, i pospolicie fałszywie go dowodzili; bo będąc to twierdzenié w sobie tak iasné, możná było i bez dowodzenia na nie przystać. Można iednak dowieśdź go bez popadnienia omyłce; ale dowody te tak długie, że ciąg i związek ich, wielkiego natężenia, uwagi, i rozumu wyciągaiący, znudziłby Uczniów tém bardziéy, im mniéy przeświadczeni byliby o pożytku i potrzebie tego dowodzenia. Rozumiém, idąc w tém za przykładém Euklidesa, że lepiéy iest mieć to twierdzenié za oczywiste, zwłaszcza dowiodłszy iuż dwóch innych podań *odwrótnych.* (Propositio inversa) piérwszego: że, gdy linije zchodzą się z sobą, kąty iedno-stronne są nie równe; drugiego: że gdy kąty iednostronne równe są, linije z sobą się zeyśdź nigdzie nie mogą.

67. *Wniosek.* Jeżeli dwie linije są równoodległe, a trzeciá ie przecina, kąty iednostronne będą równe; kąty naprzemian także równe, i kątów dwóch wewnętrznych summa, równać się będzie summie dwóch kątów prostych. Jeden z tych trzech wniosków przypuściwszy, przypuścić trzeba i dwa drugie, tak iak w piérwszym twierdzeniu. Jakoż, gdyby którákolwiek z tych trzech równości kątów, nie była prawdziwá, iużby tém samém linije zéyśdź się gdzie z sobą mogły to iest niebyłyby równoodległe.

Defin: Czworokąt, którego boki na

przeciwko siebie leżące są równoodległe, nazywać będziémy *Równoległobokiém.* (Parallelogrammum.) Liniią, która łączy wierzchołki dwóch kątów przeciwnych, nazwiémy *Przekątną* (Diagonalis.)

68. *Twierdz:* 3. W każdym równoległoboku, boki przeciwne, i kąty przeciwne są równe.

Niech będzie równoległobok ABCD; mieć on będzie boki AB; i DC równe; boki AD, i BC także równe, i kąty przeciwne A i C, iako też B i D, równe. Fig. 2.

Przygotowanié, Poprowadźmy przekątną AC.

Dowodz: Dwa troykąty: ACB, i CAD, mogą przystać do siebie; maią albowiém bok AC spólny, kąty na przemian ACD, i CAB, równe, i kąty na przemian CAD, ACB także równe; a zatém (23.) i liniie AB, i DC, są równe, iako też i liniie AD, i i BC; kąty także B i D równe, i kąty A i C iako składaiące summę kątów względém siebie równych w obydwóch troykątach, także równe.

69. *Wniosek* 1. Przekątná dzieli równoległobok na dwa troykąty równe, to iest takie, które przystać do siebie mogą.

70. *Wniosek* 2. Jeżeli dwie liniie są równoodległe, spuściwszy od dwóch punktów iednéy, dwie prostopadłe do drugiéy że prostopadłe równe będą,

71. *Wniosek* 3 Jeżeli równoległobok ma ieden kąt prosty, wszystkie, też inne kąty iego proste będą; a ieżeli dwa iego boki przyległe, są równe, wszystkie także boki równe będą.

72 *Defin:* Równoległobok, którego kąty są proste, nazywa się *Prostokątém* (Rect ngulum.)

Prostokąt, którego wszystkie boki są równe, zowie się *Kwadratém*. Równoległobok, który ma kąty nierówne, zachowuie nazwisko równoległoboku; lubo czasém z przydatkiém się wyraża, że iest równoległobokiém *Ukośnym* (Obliquangulum.) Równoległobok ukośny, którego boki wszystkie są równe, nazwany bydź może *Kwadratém ukośnym* (Rhombus.)

Fig. 2. 73. *Twierdz:* 4. Jeżeli w czworokącie boki przeciwne są równe, taki czworokąt będzie równoległobokiém.

Niech będzie czworokąt: ABCD, którego boki przeciwne AB, i CD, są równe, i boki przeciwne AD i BC także równe, ten czworokąt będzie równoległobokiem.

Przygotowanié. Poprowadźmy przekątną AC.

Dowodz: W troykątach: ACD, i CAB, boki trzy w iednym, równe są trzém bokom w drugim; (68.) więc przystać do siebie mogą; (25.) w szczególności zaś kąty na przemian CAB. ACD są równe; więc linije AB, i CD są równoodległe; podobnie liniie BC, i AD ſą także równoodległe.

74. *Twierdz:* 5. Jeżeli w czworokącie dwa boki przeciwne ſą równe, i równoodległe, taki czworokąt ieſt równoległobokiém.

Niech będzie czworokąt ABCD, którego boki przeciwne AB; i CD ſą równe, i równoodległe, ten czworokąt ieſt równoległobokiém.

Przygotowanié. Poprowadźmy przekątną AC.

Dowodz: Dwa troykąty: ACD, i CAB, maią bok AC ſpólny, boki AB i CD równe, i kąty na przemian: ACD, i CAB, zawarte między témi bokami, równe; więc przyſtać do ſiebie mogą; (18.) a w ſzczególności, kąty: CAD, i ACB będą równe; że zaś ſą na przemian, więc liniie AD i CB ſą równoodległe.

75. *Uwaga.* Czworokąt może mieć dwa boki równoodległe, a dwa inne równe, a nie bydź przeto równoległobokiem, chyba w ten czas, gdy boki przyległe bokom równoodległym, ſą proſtopadłe. Widzieć to można na figurze 3. gdzie lubo czworokąt ABCD, ma boki dwa przeciwne: AB i CD równoodległe; boki AD i BC równe, nie ieſt iednak równoległobokiém.

76. *Zagadn:* 2. Maiąc daną liniią proſtą, poſtawić na niéy kwadrat.

Rozwiązanié. Z końca iednego linii danéy, wyprowadźmy proſtopadłą iéy równą. Z drugiego końca téy danéy linii i proſtopadłéy, iako do środka promieniém równym danéy linii, nakréślmy dwa łuki okręgu, i punkt ich przecięcia złączmy z końcém linii danéy i proſtopadłéy.

Dowodz: Czworokąt tak zrobiony, będzie miał wszyſtkie boki równe, i kąt ieden proſty, więc będzie kwadratém.

77. *Zagadn:* 3. Wykréślić proſtokąt, którego boki ſą dane.

Sposób wykréślenia ieſt ten ſam, co wyżéy, (76.) z tą różnicą, że proſtopadłá powinná mieć długość daną, a nie bydź równą podſtawie; promienie także łuków kréślić ſię maiących, ieden powinien bydź równy podſtawie, a drugi proſtopadłéy.

78. *Zagadnienié.* 4. Wykréślić równoległobok, którego kąt ieſt wiadomy, i boki.

Sposób wykréślenia tém tylko różni ſię od poprzedzaiącego, że zamiaſt proſtopadłéy, poprowadzić potrzeba liniią z tém nachyleniém, któréby czyniło kąt dany.

ROZDZIAŁ IV.

O kątach w figurach proſtokréślnych, a w ſzczególności w troykątach.

Widzieliśmy, (31.) że kąt zewnętrzny troykąta, większy ieſt od iednego z dwóch kątów wewnętrznych iemu przeciwnych; dowiedziémy teraz, że ten kąt zewnętrzny równa się obydwóm kątom wewnętrznym na przeciw siebie leżącym.

79. *Twierdz*: 1. Niech będzie troykąt: ABC a kąt iego zewnętrzny: CBD; ten kąt równy iest summie dwóch kątów wewnętrznych: A i C. Fig. 4.

Przygotowanié. Poprowadźmy BE, równoodległą od AC.

Dowodz: Kąty na przemian C i CBE są równe; równe także i kąty iednostronne: A i EBD; więc summa katów: C i A, równá iest summie kątów: CBE i EBD, to iest kątowi zewnętrznému CBD.

80. *Twierdz*: 2. W każdym troykącie, summa trzech kątów równá iest dwóm kątom prostym.

Niech będzie troykąt: ACB; summa trzech iego kątów, równá się summie dwóch kątów prostych.

Przygotowanié, Pociągniymy daléy AB, naprzykład aż do D.

Dowodz. Już się dowiodło, że kąt zewnętrzny CBD, równa się dwóm kątom wewnętrznym, A i C; więc summa kątów CBD, i CBA, równać się będzie summie kątów: A, C, i CBA; ale summa dwóch piérwszych kątów, iako przyległych, wyrównywa dwóm kątom prostym, więc i drugá trzech kątów summa, tymże dwóm kątom prostym iest równá. (h)

(h) *To twierdzenié iest bardzo wielkiéy wagi, przeto trzeba, aby iak naydokładniéy zrozumieli ie Uczniowie.*

81. *Wniosek.* 1. W troykącie równobocznym, każdy w ſzczególnosci kąt, ieſt trzecią częścią dwóch kątów proſtych, albo $\frac{2}{3}$ kąta iednego proſtego, to ieſt: każdy waży 60. ſtopni.

82. *Wniosek.* 2. W troykącie, znaiąc dwa kąty, iuż tém ſamém znany i kąt trzeci.

Przykład. Niech będzie troykąt, którego kąt ieden ma ſtopni 50° a drugi 72°, ſumma tych dwóch kątów będzie 122°. Różnica zaś 122°; od dwóch kątów proſtych, albo od 180°, ieſt 58°, i ta ieſt ważność trzeciego kąta.

83. *Wniosek.* W troykącie równoramiennym, znaiąc kąt ieden, poznamy zaraz i dwa drugie.

Przykład. Niechby kąt ieden przy wierzchołku ważył 40°, w troykącie równora-

---

iako i inné twierdzenia, od których dowodzenie tego zawiſło. Tu podobno miéysce byłoby pokazania związku twierdzeń dotąd podanych iednych z drugiémi, który to związek iſtotny ieſt poſtępowaniu Jeometrycznému. Cwiczenia, które poprzedziły, iuż powinny były dadź poznać Uczniom ten ſposób poſtępowania. Trzeba iednak często im związek takowy okazywać, i iak ſię iedna prawda z drugiéy odk ywa. Ztąd naywiększy pożytek z Matematyki odnieść mogą, i nabiorą prawdziwego ducha Matematycznego, co nierównie pożyteczniéy im będzie iak mieć nawet wiadomość ſaméy Matematyki.

miennym. Już tém ſamém dwa inne ważą, 140°, aże ſą równe, każdy z nich ważyć będzie połowę, to ieſt 70°.

Niechby znowu kąt ieden przy podſtawie ważył 64°, i drugi przy podſtawie ważyłby 64°. Summa tych dwóch kątów byłaby 128°, a różnica między 180° i 128°, to ieſt 52°, pokazałby ważność kąta trzeciego.

84. *Defin:* Figura maiąca, więcéy niż cztéry boki, albo kąty, nazywa ſię *Wielokątém* (Polygonum.)

85. *Twierdz:* 3. Ważność ſummy kątów wszyſtkich w figurze *Proſtokréślnéy* (Figura Rectilinea) zawiſła od liczby boków téyże figury. Liczbę tę boków podwoiwszy, i odciąwszy od podwoionéy liczbę: 4; reszta okaże w kątach proſtych ważność kątów wszyſtkich figury proſtokréślnéy. Nim ſię przyſtąpi do ogólnego dowodzenia, trzeba zacząć od przypadków ſzczególnych w ſposób podobny naſtępuiącému.

Niechby naprzykład figura proſtokréślná miała tylko cztéry boki, to ieſt niechby tylko była czworokątém. Poprowadziwszy w niéy przekątną, ta podzieli czworokąt na dwa troykąty, w których ſumma kątów razém wzięta, będzie równá ſummie kątów w czworokącie. Aże ta ſumma kątów w dwóch troykątach, waży cztéry kąty proſte, więc i ſumma kątów w czworokącie ważyć także będzie cztéry kąty proſte.

Niechby figura miała pięć boków, to ieſt była *Pięciokątém* (Pentagonum.) Poprowadźmy od iednego wierzchołku, do dwóch drugich przeciwnych, dwie przekątne: podzielą one pięciokąt na trzy troykąty, których ſumma ważności kątów, to ieſt 6. kątów proſtych, będzie też ſumma ważności kątów piąciokąta.

Dowodzenié ogólné. Od wierzchołku kąta któregokolwiek w wielokącie, poprowadźmy tyle przekątnych, ile można. Poſtrzeżémy łatwo, że trokątów liczba z tego podziału wynikaiąca; mnieyſzá będzie dwóma, od liczby boków wielokąta; albowiém od kąta tego, od którego ſię prowadziły przekątne, nie można ich było prowadzić do dwóch innych kątów naybliższych; boby tylko przykryły ſobą dwa naybliższe boki, albo ramiona tego kąta, i nie zrobiły troykątów. Ponieważ zaś w każdym troykącie ważność trzech kątów, równa ſię ważności dwóch kątów proſtych; będzie więc dwa razy tyle zawierało ſię (co do ważności) kątów proſtych, wielokącie; ile ſię zawiera w nim troykątów. Aże liczba troykątów, mnieysza ieſt dwóma, od liczby boków wiélokąta; więc liczba kątów proſtych, w tymże wielokącie, będzie dwa razy tak wielká, to ieſt będzie ſię równać liczbie boków podwoionych, odtrąciwszy od niéy dwa razy 2. to ieſt 4; a zatém ważność kątów wszyſtkich wielokąta w kątach proſtych znaydziémy odéymuiąc liczbę 4. od liczby podwoionéy boków tegoż wielokąta, (t)

86. *Twierdz:* 4. Pociągnąwszy daléy w iednę ſtronę boki wszyſtkie wielokąta, iakążkolwiek będzie liczba boków iego zawsze iednak ſumma kątów zewnętrznych, zamkniętych między bokiém iednym, i przedłużeniém drugiego przyle-

---

(t) *Dowodzenié to, mogłoby ſię wydawać trudném, gdyby go wiele przykładów na wielokątach ſzczególnych nie poprzedziło, i Figury na każdy ſzczególny przykład kréślone nie obiaśniły. Wiele iednak na tém zawiſło, aby i bez Figury przyuczali ſię Uczniowie dawać ſprawę z tego, czego ſię nauczyli, a tym ſposobém aby wprawiali ſię w zachowanie dobrego porządku, tak w wyobrażeniach, które ſobie czynić będą, iako też i w ſamych wyrazach. Szczególniéyszego zaś ſtarania przykładać trzeba, aby bardziéy rozumém, niż pamięcią wszyſtko to, czego ſię uczyć będą, ogarnywali. Z téy przyczyny przy rozwiązaniu niektórych zagadnień, opuszczały ſię umyślnie Figury. Niech iednak ztąd nie wnoszą Nauczyciele, aby wcale bez Figur obeyśdź ſię mogło; i owszém niech przyuczaią Uczniów, aby ie ſami ſobie kréślić umieli z pamięci zrozumiawſzy piérwiéy twierdzenia, do których dowodzenia ſtosować ſię maią te Figury. Przykłady dotąd przytoczone, tym ſposobém ſię podawały, którym potrzeba, aby, i Uczniowie dawali ſprawę z działań iuż dobrze od ſiebie poiętych. Odpowiedź naypospolitszá młodych ieſt, tych nawet, którzy lepiéy rzecz przenikaią:* Umiém ia to, ale ſię wytłumaczyć nie mogę.

głego, ważyć będzie cztéry kąty pro-
ſte. (k)

Nim ſię przyſtąpi do ogólnego dowo-
dzenia, trzeba piérwéy na ſzczególnyc
przykładach tego twierdzenia dowieść
zacząwszy od troykąta, w którym ka
żdy kąt z ſwoim zewnętrznym przyle
głym waży dwa kąty proſte; a że kątó
ieſt w troykącie trzy, więc z przyległe
mi ważyć będą ſześć kątów proſtych; trz
zaś kąty, które ſię w troykącie znayduią
ważą dwa kąty proſte; więc te, które ſ
za troykątém, to ieſt zewnętrzne, waży
będą cztéry kąty proſte.

Dowodzenie ogólne. Każdy kąt wewnę
trzny w wielokącie, z ſwoim zewnętrz
nym przyległym, waży dwa kąty pro
ſte; więc ſumma wszyſtkich kątów t
wewnętrznych, iako i zewnętrznych, wa
ży dwa kąty proſte wzięte tyle razy, il
ieſt boków w wielokącie; a zatém ſum
ma ſamych kątów zewnętrznych, waży
będzie tyle, ile brakuie ſummie kątó
wewętrznych, aby ważyła dwa kąty pro
ſte wzięte tyle razy, ile ma boków wielo
kąt. Ale że (iakośmy w poprzedzaiącé
twierdzeniu dowiedli) brakuie do teg
téy ſummie kątów cztéry; więc ſumm
kątów zewnętrznych wielokąta waży
będzie cztéry kąty proſte.

(k) *Mówię tu tylko o wielokątach, w których kąt ka żdy mnieyszy ieſt od dwóch kątów proſtych; to ieſt o t kich; w których kąty ſą wyſkakuiące* (Salientes)

87. *Uwaga* 1. Naywiększéy wagi ſą te przypadki, w których kąty wszyſtkie wielokąta ſą równe. Każdy w tym razie kąt zewnętrzny, waży 4, kąty proſte, podzielone przez liczbę boków wielokąta. Ważność zaś każdego kąta zewnętrznego znaydziémy, odtrąciwszy ten wieloraz, to ieſt: ważność iednego kąta zewnętrznego od dwóch kątów proſtych.

Jeżeli wszyſtkie kąty wielokąta ſą równe, tedy im większy będzie każdy kąt iego zewnętrzny, tém mniéyszy będzie wewnętrzny, a im mniéyszy tamten, tém ten większy.

Po dowiedzionych tych twierdzeniach, łatwo będzie Uczniom ułożyć ſobie tablicę ważności kątów tak wewnętrznych, iako i zewnętrznych w tych wielokątach, w których kąty wszyſtkie ſą równe, i mogą tę ważność wyrazić, czyli to przez kąty proſte, czyli przez ſtopnie.

88. *Uwaga* 2. Umieiąc dowieśdź dwa twierdzenia poprzedzaiące, można rozwiążać i to, co naſtępuie zadanie;

Jak wielorakim ſposobém około punktu danego napełnić można miéysce (to ieſt cztéry kąty proſte) przez kąty figury proſtokréślnéy iednégo gatunku, (l) i któréy wszyſtkie kąty ſą równe.

(l) *Mówię* iednégo gatunku, *ponieważ gdyby wolno było mieſzać kąty różnych wielokątów, możnaby* 14. *ſpoſobami napełnić miéyſce około iednego punktu, używaiąc tych tylko wielokątów, które kąty wſzyſtkie równe maią.*

1. Gdy troykąt ma wszyſtkie boki równe, czyli ieſt równobocznym; każdy z kątów iego waży trzecią część dwóch kątów proſtych, albo $\frac{2}{3}$ iednego kąta proſtego; a zatém ſześć takich kątów, uczyni 4, kąty proſte, i napełni miéysce około punktu iednego.

2. Gdy czworokąt ma wszyſtkie kąty równe, czyli ieſt proſtokątém; każdy z kątów iego ieſt kątém proſtym, a zatém 4. takie kąty ważyć będą 4. kąty proſte.

3. Kąt zewnętrzny pięciokąta, którego kąty wszyſtkie ſą równe, waży $\frac{1}{5}$ część cztérech kątów proſtych, albo $\frac{4}{5}$ iednego kąta proſtego, a zatém każdy kąt wewnętrzny, ważyć będzie; 1. $\frac{1}{5}$ kąta proſtego. Trzy takowe kąty, czynią tylko 3 kąty proſte i $\frac{3}{5}$ co ieſt mniéy iak 4, a cztéry takie kąty, czynią 4. kąty proſte i $\frac{4}{5}$, co ieſt więcéy iak 4. Przeto kątami pięciokąta, maiącego wszyſtkie kąty równe, nie można napełnić miéysca około punktu iednego.

4. Kąt zewnętrzny ſześciokąta, którego kąty wszyſtkie ſą równe, waży $\frac{1}{6}$ część cztérech kątów proſtych, albo $\frac{2}{3}$ iednego kąta proſtego; a zatém każdy kąt wewnętrzny ważyć będzie 1. $\frac{1}{3}$ kąta proſtego. Trzy zaś takowe kąty, czynią zupełnie cztéry kąty proſte.

Jeżeli wielokąt ma więcéy niż 6. boków, każdy z kątów iego wewnętrznych,

J. Bielły

będzie większy od kąta w ſześciokącie; trzy więc takowe kąty uczynią więcéy niż 4. kąty proſte; aże kąt wielokąta maiącego boki wszyſtkie równe, ieſt zawsze mniéyszy od 2. kątów proſtych; więc dwa takie kąty nie wyſtarczą na napełnienie miéysca około punktu iednego.

Przeto trzema tylko ſposobami rozwiązać można wzwyż wyrażoné zadanié; to ieſt przez 6. kątów troykąta, przez cztéry kąty czworokąta, i przez trzy kąty ſześciokąta. Fg:5.6. i Tab:V. Fig: 1.

Natura ſama nauczyła pszczoły układać w ulu komorki w ſześciokąty.

ROZDZIAŁ V.

O równoległobokach i troykątach równych co do powierzchni; i o zamienieniu iakiéykolwiek figury proſtokréślnéy na troykąt i na równoległobok.

Widzieliśmy w Rozdziale drugim przypadki, w których dwa troykąty mogą przyſtać do ſiebie; i bydź zatém co do powierzchni, równe. W Rozdziale trzecim widzieliśmy także, iako dwa równoległoboki, które miały i boki i kąty równe, mogły przyſtać do ſiebie; i że zatém powierzchnie ich równe były. Te przypadki przyſtawania iednych figur do drugich były tylko, co do równości powierzchni, przypadkami ſzczególnémi;

ogólnieysze zaś w téy mierze twierdzenia będą rzeczą tego Rozdziału.

89. *Twierdzenie* 1. Dwa równoległoboki zrobione na iednéyże postawie, a z przeciwnéy strony zakończone przez liniią równoodległą od postawy, maią powierzchnie równe.

Niech będą dwa równoległoboki: ABCD, i ABEF, których taż sama iest podstawa AB, a kończy ie z drugiéy strony, równoodległá od podstawy liniá DE, te dwa równoległoboki, maią równe powierzchnie, iakażkolwiek boków ich długość będzie.

Fig. 2. 3. 4. *Dowodz:* Troykąty: DAF, i CBE, mogą przyyść do siebie; boki albowiém AD, i BC są równe, bo naprzeciwko leżące w równoległoboku ABCD; boki też AF, i BE równe, naprzeciwko leżące w równoległoboku ABEF. Kąty oprócz tego iednostronne: ADF, BCE, i AFD, BEC równe, odiąwszy tedy osobno troykąt DAF, i troykąt iemu równy CBE, od całéy figury ABED; reszty będą równe, to iest równoległobok ABEF. równy będzie równoległobokowi ABCD.

To twierdzenie możnaby obiasnić figurą z papieru grubego wyrobioną, i zacząć od przypadku, który wyraża figura 2, gdzie punkta C i F razém przypadaią. W takim razie troykąty: ACD, i BEC równe są piérwszy i drugi troykątowi; ABC, a zatém i sobie są równe;

więc tak równoległobok ABCD, iako ABEF złożony iest z dwóch troykątów równych.

90. Defin: Ponieważ liniie prostopadłe spuszczone od któregokolwiek punktu linii, na drugą liniią równoodległą, są równe; ieżeli więc od punktu któregokolwiek w boku równoległoboku spuścimy do boku przeciwnego liniią prostopadłą, ta prostopadłá iednakowey zawsze będzie wielkości, i nazywa się *Wysokością* tego równoległoboku, względém drugiego boku do którego iest spuszczoná, i który wzięty iest za podstawę tegoż równoległoboku. Twiérdzenié poprzedzaiące możnaby też i tak wyrazić: *dwa Równoległoboki maiące spólną Podstawę, i wysokość iednakową, są równe.*

91. Twierdzenié 2. Dwa równoległoboki są równe, których podstawy i wysokości równe.

92. Dowodz: Do podstawy iednego z tych równoległoboku, przyłożmy podstawę drugiego; przystaną zupełnie do siebie te podstawy, bo są równe; będą więc te postawione na sobie równoległoboki miały spólną podstawę, i równą wysokość, a zatém według piérwszego twiérdzenia będą równe.

93. Twiérdz: 3. Jeżeli dwa równoległoboki zrobione na iedney podstawie, równe maią powierzchnie, równe też i wysokości mieć będą.

Fig. 5. Niech będą dwa równoległoboki ABCD, i ABEF których obydwóch podstawa iest AB, i równá powierzchniá; maią one i wysokość iednakową, to iest zakończone są przez tę samę liniią równoodległą od podstawy.

Dowodz: Gdyby punkta F i E, nie były na linii DC, albo na iéy przedłużeniu; toby inne iakie punkta naprzykład H, i G, linii AF, i BE, były na téyże linii DC; a zatém równoległoboki ABCD, i ABGH, byłyby równe. Aleśmy wzięli za równe równoległoboki ABCD, i ABEF; więc i równoległoboki ABEF, i ABGH byłyby równe, co iest niepodobná, chyba że punkta H i G, będą te same, co i punkta F i E.

W ogólności mówiąc: dwa równoległoboki, maiące równe podstawy i powierzchnie, maią też i równe wysokości; a gdy znowu równoległoboki mieć będą wysokości i powierzchnie równe, i podstawy ich równe będą.

94. Twierdz: 4. Gdy troykąt i równoległobok, stoi na téyże saméy podstawie, a wierzchołek troykąta przypada na boku równoodległym od podstawy i należącym do równoległoboku, albo na przedłużeniu tegoż boku; taki troykąt iest połową równoległoboku.

Tab. VI Fig. 1. Niech będzie równoległobok ABCD, a troykąt ABE; maiący z nim spólną podstawę AB; i niech wierzchołek E, troykąta przypada na boku DC, należącym do równoległoboku; troykąt ten ABE; będzie połową równoległoboku ABCD.

Przygotowanie. Przez B. poprowadźmy BF, równoodległą od AE, któraby spotkała DC, w F.

Dowodzenie. Troykąt ABE, iest połową równoległoboku ABFE, ponieważ bok BE troykąta iest przekątną równoległoboku: ABFE. A że równoległoboki ABFE, i ABCD, są równe, więc troykąt ABE, iest także połową równoległoboku ABCD.

95. Defin: Prostopadła spuszczona od wierzchołka troykąta do podstawy, nazywa się *wysokością* tego troykąta. Twierdzenie tedy powyższe takby mogło bydź inaczéy wyrażone. *Jeżeli równoległobok i troykąt maią spolną podstawę, i wysokość równą, troykąt ten będzie połową równoległoboku.*

96. Wniosek. Można więc przystosować wszystko do troykątów, cokolwiek się o równoległobokach powiedziało. I tak:

1. Dwa troykąty maiące równe podstawy i wysokości, równe mieć będą i powierzchnie.

2. Dwa troykąty równe w powierzchniach, i w wysokościach albo w podstawach; będą też miały równe podstawy lub wysokości.

W ogólności zaś mówiąc: z tych trzéch ilości; z podstawy, wysokości, i powierzchni równoległoboku lub troykąta, dwie któregokolwiek wiadome, trzecią poznać daią; iedna zaś nie iest dostateczną, aby z niéy dwie drugie wyznaczyć można. Obaczymy daléy w tym Rozdziale: iako można zrobić tyle równoległoboków równych i równokątnych, ile zechcémy, chociaż boki nierówne mieć będą (m)

97. *Zagadn:* I. Maiąc dany równoległobok, zamienić go na prostokąt, któryby tę samę miał podstawę i powierzchnią.

Rozwiązanié. Od obydwóch końców podstawy, wynieśmy liniie prostopadłe, aż do boku podstawie przeciwnego: zrobi się prostokąt równy równoległobokowi, co do podstawy i powierzchni.

Podobnym sposobém postąpić sobie potrzeba, chcąc zamienić równoległobok dany na drugi równy piérwszému w podstawie i w powierzchni, gdy inny iakikolwiek kąt przy podstawie, a nie prosty dany będzie.

98. *Zagadn:* 2. Troykąt dany zamienić na inny prostokątny, którzyby miał tę samę podstawę i powierzchnią.

Rozwiązanié. Przez wiérzchołek troykąta danego, poprowadźmy równoległą od podstawy, a od końca któregokolwiek téyże podstawy, wynieśmy prostopadłą

(m) *Trzeba to dobrze dadź poznać Uczniom, że wielkość równoboków i troykątów nie zawista od ich obwodu (Perimeter) omyłki w téy mierze część zwykły bywać.*

aż do równoległéy; punkt przecięcia tych dwóch linii, będzie wiérzchołkiem troykąta szukanego.

Podobnym sposobém postąpimy sobie chcąc zamienić troykąt dany na drugi równy mu w podstawie i w powierzchni: gdy inny a nie prosty kąt przy podstawie dadź będzie potrzeba tému drugiému troykątowi.

99. *Zagadn:* 3. Zamienić troykąt dany, na równoległobok prostokątny, któryby miał albo tę samę co troykąt podstawę, albo tę samę wysokość.

Rozwiązanie. Równoległobok prostokątny, któryby miał tę samę podstawę, i wysokość, co troykąt; byłby dwa razy tak wielki; a zatém równoległobok ten, którego szukamy, powinien mieć tę samę podstawę co troykąt, a połowę iego wysokości: albo też tę samę wysokość a połowę tylko podstawy.

100. *Zagadn:* 4. Czworokąt dany zamienić na troykąt téyże saméy powiérzchni.

Rozwiąz: Poprowadźmy w czworokącie danym przekątną, a przez wiérzchołek iednego z kątów iéy przeciwnych, pociągniymy równoległą od téyże przekątnéy. Wszystkie troykąty maiące za podstawę tę przekątną czworokąta, a wiérzchołek na równoodległéy od téy przekątnéy będą równe w powiérzchni troykątowi, który czyni ta przekątna dwóma bokami czworokąta ſchodzącémi ſię na równoodległéy (96.) a zatém będzie też równy w powierzchni temu troykątowi, i troykąt maiący za podſtawę tę ſamę co i tamten przekątną, a za bok ieden, maiący przedłużenie aż do równoległéy, boku czworokąta leżącego z drugiéy ſtrony przetątnéy; ten troykąt oſtatni dodawszy do troykąta z drugiéy ſtrony przekątnéy leżącego, zrobi ſię troykąt równy co do powiérzchni czworokątowi danému; bo ponieważ troykąty dwa, na które ieſt czworokąt przez przekątną podzielony, równaią ſię co do powierzchni całému czworokątowi; więc temuż czworokątowi równy także będzie co do powiérzchni i troykąt przez przekątną w czworokącie uczyniony; a drugi równy w powiérzchni troykątowi drugiému wchodzącému także w czworokąt i onego dopełniaiącému.

Fig. 2. Niech będzie naprzykład ABCD czworokąt dany; poprowadziwszy przekątną BD, i od niéy równoległą CE. przez wierzchołek C, kąta DCB, gdy bok AB troykąta drugiego w czworokącie pociągniémy aż do zéyścia ſię z równoodległą CE w punkcie E; zrobi ſię troykąt ADE równy co do powierzchni czworokątowi ABCD.

102. Uwaga. Tym ſosobém poſtąpimy ſobie, chcąc zmniéyszyć iednym bokiém figurę iaką proſtokréślną bez odmienienia iéy powierzchni poprowadzimy naprzód przekątną, którąby odcięła troykąt ieden w figurze podanéy; potém przez wierzchołek tego troykąta pociągnimy równoodległą od téy przekątnéy, aż do zéyścia się téyże równoodległéy z bokiém drugim przyległym do przekątnéy; nasttatek złączymy punkt przecięcia z drugim końcém téyże przekątnéy.

Można nawet użyć sposobu tego do zamienienia iakiéykolwiek figury prostokréślnéy, na troykąt téyże saméy, co i podana figura powierzchni; a to zmniéyszaiąc naprzód iednym bokiém figurę podaną; potém odéymuiąc znowu bok ieden, zmniéyszonéy iuż iednym bokiém figurze i. t. d. póty, póki do trzéch tylko boków, to iest do troykąta nie przyyidziémy.

Przykład. Niechby trzeba zamienić pięciokąt ABCDE, na troykąt téyże saméy powierzchni. *Fig. 3.*

Poprowadźmy przekątne: DB, i DA, przez C i E, pociągniymy równoodległe CG, i EF, aż do ich zéyścia się z liniią AB przedłużoną w punktach G i F, złączmy te punkta z końcami przekątnych, przez DG i DF, troykąt DFG będzie równy w powierzchni pięciokątowi danému.

102. *Wniosek.* Widzieliśmy, (99.) że troykąt może bydź zamieniony na równo-

łegłobok proſtokątny, maiący tę ſamę co i troykąt powiérzchnią; a zatém można każdą figurę proſtokréślną zamienić zawsze na proſtokąt nie różniący ſię od niéy w powierzchni, mogąc ią pierwiéy zamienić na troykąt.

103. *Uwaga.* Niechby nam podano dwie iakie figury proſtokréślne, którebyśmy iuż zamienili obydwie na proſtokąty; i niechby te dwa proſtokąty miały albo podſtawy, albo wysokości równe. Łatwo nam będzie zrobić taki znowu proſtokąt, któryby równy był w powierzchni, ſummie albo różnicy tych dwóch figur podanych. Proſtokąt albowiém, któryby miał podſtawę równą ſummie albo różnicy podſtaw w obydwóch mnieyszych proſtokątach (gdyby ich wysokości były równe) i tę ſamę co one wysokość, byłby równy w powiérzchni ſummie tych figur, lub ich różnicy. Wkrótce ſię także pokaże, iż można zamienić proſtokąt ieden na drugi, któryby był piérwszemu równy w powierzchni, a miał w ſobie bok ieden dany; a zatém można zawsze dwa proſtokąty do tego przyprowadzić, aby miał ieden bok równy w obydwóch; przeto można zawsze i proſtokąt taki zrobić, któryby równy był w powierzchni dwóm albo więcéy figurom proſtokréślnym podanym.

104. *Twierdz:* 5. W iakimkolwiek proſtokącie, poprowadziwszy przekątną, a

przez iéy punkt którykolwiek pociągnąwszy dwie równoodległe od boków prostokąta, będą równe w powierzchniach dwa prostokąty, przez te równoodległe zrobione, a ztykaiące się w wierzchołku dwóch kątow przeciwnych.

Niech będzie prostokąt ABCD, przez punkt E, przekątnéy poprowadziwszy równoodegłe; HE, i GI; prostokąty HEGD, i FEIB będą równe w powierzchniach. Fig. 4.

Dowodz: Troykąty ACD, i CAB są równe, piérwszy składa się z troykątów CEG, i EAH, i z prostokąta HEGD. Drugi składa się z troykątów ECF, i AEI, i z prostokąta FEIB. Aże troykąt CEG, równy iest troykątowi ECF, a troykąt EAH, równy troykątowi AEI; więc i prostokąt HEGD, równy będzie prostokątowi EFIB.

Twierdzenia podobne poprzedzaiącemu, gdy równoległobok nie będzie prostokątny, tymże samym sposobém dowieśdź można.

105. *Zagadn*: 5. Dany prostokąt zamienić na inny téyże saméy powiérzchni, któryby miał za bok liniią daną.

Niech będzie prostokąt ABCD; ten zamienić trzeba na inny, w którymby liniiá daná za bok służyła. Fig. 5.

Rozwiąz. Pociągniymy daléy bok AE, aż do E, tak, aby liniiá BE, równá była linii danéy. Dopełniymy prostokąta BEFC, i poprowadźmy przekątną FB, któráby ſpotkała w punkcie G, bok przedłużony AD; weźmy potém FI, równą DG, i złączmy punkta G, i I. liniią GI. To uczyniwszy, proſtokąt EBHI, równy będzie co do powierzchni proſtokątowi ABCD, i za bok ma liniią daną BE. Ze równe ſą te dwa proſtokąty, można okazać podobnym iak w oſtatniém twiérdzeniu ſpoſobém.

106. *Uwaga* 1. Aby dodadź dwa proſtokąty maiące boki odmienne; trzeba naprzód ieden z tych proſtokątów zamienić na inny równéy z nim powierzchni, i któryby miał bok ieden równy bokowi proſtokąta drugiego nie zamienianego. Wziąwszy potém za wysokość, ten bok równy w dwóch proſtokątach. a za podſtawę, ſummę dwóch innych boków odmiennych; zrobi ſię proſtokąt równy co do powierzchni ſummie dwóch proſtokątów danych. Podobnie ſię poſtępuie, chcąc mieć ich różnicę.

107. *Uwaga* 2. Gdyby proſtokąty dane były kwadratami; a proſtokąt równy ich ſummie miał też bydź kwadratém; poprzedzaiące wiadomości, nie dosyć byłyby na rozwiązanie tego zagadnienia. Niżéy obaczymy, iak ſobie w takim razie poſtąpić trzeba. (Obacz w Rozdz: VIII.)

108. *Przyſtosowanie.* Nie powtarza ſię tu, co ſię iuż powiedziało w Arytmetyce o mierzeniu proſtokątów, których boki ſą w liczbach wyrażone. Przyſtoso-

wanié teraznié ysze ściągać się będzie do równoległoboków iakichkolwiek, i do troykątów, wyrażaiąc podstawy ich i wysokości w liczbach.

Aby doyśdź powierzchni czworokąta, którego przekątná i prostopadłá od wierzchołku kąta iéy przeciwnego spuszczoná, w liczbach iest daná; trzeba rozmnożyć tę przekątną przez połowę summy obydwóch prostopadłych; albo połowę przekątnéy, przez summę tychże prostopadłych; albo nakoniec całą przekątną przez całą summę prostopadłych rozmnożyć, i rozmnożonéy liczby wziąć połowę. Gdyby czworokąt miał dwa boki równoodległe; powierzchniá iego byłaby równá prostokątowi maiącému za wysokość odległość tych dwóch równoległych, a za podstawę połowę summy dwóch boków przeciwnych czworokąta, których wiemy odległość.

Przykłady. 1. Niech będzie ABCD, równoległobok *Pochyłokątny* (obliquangulum) którego postawa AB, ma długości łokci 37. a wysokość DE łokci 20; powierzchniá iego będzie $20 \times 37 = 740$. łokci kwadratowych. Fig. 6.

2. Niech powierzchniá równoległoboku ABCD zawiera łokci kwadratowych 378. Podstawa AB, niech ma długości łokci 27. wysokość DE, będzie $\frac{378}{27} = 14$. łokci.

3. Niech będzie powierzchniá równo-

ległoboku ABCD $=544$. łokci kwadratowych; wysokość DE $=17$. łokci, podstawa AB, będzie $=\frac{544}{17}=32$. łokci.

4. Niech znowu równoległoboku ABCD podstawa będzie łokci 23. stop 1. cal 10 to iest $23.\frac{11}{12}$ łokci, wysokość DE 14. stop, 1. cal: 8. to iest 14. $\frac{5}{8}$ łokci powierzchnia będzie $14\frac{5}{8}$ razy $23.\frac{11}{12}$ $=354.\frac{55}{72}$ łokci kwadr: $=354$. łok: kw: 3. stop. 8. cal:

5. Niech powierzchnia równoległoboku ABCD będzie $=8433$. sznur: kwad: 72. pręt: kwad: $=8433.72$. sznur kwad: i podstawa AB $=153$. sznur: 9 pręt: $=$ 15 9. sznur. wysokość DE, będzie $=$ $\frac{8433.72}{153.9}=54, 8$. sznur: $=54$. sznur: 8. pręt:

6. Niech powierzchnia równoległoboku ABCD, będzie $=$ Ł. K. St: Kw: Cal: Kw: 815, 3. 58. $=815.\frac{245}{288}$ Ł. K. wysokość DE $=$ Łok: St: Cal: $=15.$ 1. 10. $=15.\frac{11}{12}$ Łok: podstawa będzie $=\frac{90965}{4584}$ Łok: — Łok: — 19. Stop 1. 8. $\frac{49}{191}$ Cal:

Tab: VII. Fig. 1. 7. Niech będzie ABC troykąt, którego podstawa AB, $=28$. łokci, a wysokość CD $=16$. łokci. Powierzchnia iego będzie połową 28. przez 16. rozmnożonych, czyli $\frac{28 \times 16.}{2}=8. \times 8=224$ Łok: kw:

8. Niech będzie powierzchnia troyką-

ta ABC = 156. ſtop kw: a podſtawa AB = 24. ſtop: wysokość CD, będzie = $\frac{156}{\frac{1}{2} \times 24} = \frac{312}{24}$ albo $\frac{156}{12}$ = 13. ſtop.

9. Niech będzie powierzchniá troykąta ABC = 195. Ł. kw. a wysokość CD = 15. łokci. podſtawa AB będzie = $\frac{195}{\frac{1}{2} \times 15} = \frac{390}{15}$. = 26. Ł. kw:

10. Niech będzie ABC troykat, któ-

		pręt:	łok:	ca:
rego podſtawa AB	=	12,	2.	2.

= 12. $\frac{5}{18}$. pręt: wysokość = 7. $\frac{5}{6}$. pręt: powierzchniá będzie = $7 \frac{5}{6} \times 6 \frac{5}{36}$ = 48. $\frac{19}{216}$ pręt: kw: = 48. pręt: kw; 4. łok: kw: 3. ſtop: 114. cal: kw:

11. Niech będzie powiérzchniá troy-

		ł. kw:	cal: kw:	łok kw:
kąta ABC	=	25.	32	= 25 $\frac{1}{18}$
		Ł.	cal.	linii Łokci
Podſtawa AB	=	9.	2.	8 = 9 $\frac{1}{9}$.

wysokość CD będzie = $\frac{451}{82}$. = 5. ł. 1. ſto:

12. Niech będzie powiérzchniá troykąta = 21. ſzn: kw: 17. pręt: kw: wysokość CD = 5. ſzn: 8 Pręt: podſtawa AB będzie = $\frac{21}{2}$. $\frac{17}{9}$. albo $\frac{42}{5}$, $\frac{34}{8}$. = 7. 3. ſzn: 7. ſzn: 3. pręt:

13. Niech będzie *Różnobok* (Trapezium) ABCD maiący tylko równoodległe boki AB, i CD; — bok AB = 35 łok: *Fig. 2.*

bok CD = 17 łok:

A zatém ſumma ich = 52.
Wysokość DE = 14.
Powiérzchniá tego czworokąta będzie

$= \frac{14 \times 52}{2} = 7. \times 52$, albo $14 \times \frac{1}{4}\, 26. = 364.$ ł. kw:

14. Aby powiérzchniá takiego czworokąta zawierała 255. cal: kw: którego boki dwa równoodległe są:

ieden AB=23. cal:
drugi CD=11.

A zatém ſumma=34.
Trzeba mu dadź wysokość $= \frac{255}{17} = \frac{510}{34} =$ 15. cal.

15. Aby zaś powierzchniá takiego czworokąta zawierała 325. ſtop: kw: gdy podſtawa AB = 31. ſtop, a wysokość ED = 13. trzeba, aby ſumma boków równoodległych była $= \frac{325}{\frac{1}{2} \times 13} = \frac{650}{13} = 50.$ ſtop: Aże bok AB = 31. ſtop. więc CD będzie = 19. ſtop.

16. Niech w takowym czworokącie ABCD boki równoodległe będą;

AB =	20 pr:	4. ło.	1. ſt.	6. cal
CD =	13.	5.	1.	4.
A zatém ſumma =	34.	2.	1.	10. =

34. $\frac{7}{18}$ pręt:

Wysokość DE =	9.	5.	1.	8. =

9. $\frac{7}{9}$.
Powiérzchniá będzie $= 9.\frac{7}{9}. \times 17.\frac{7}{36}. =$ 168. $\frac{10}{81}$. pręt: kw: 168. pręt: kw: 6. łok: kw: ſt: kw: 112. cal: kw:

Fig. 3. 17. Niech będzie czworokąt iakikolwiek ABCD, którego przekątná DB = 86. łokci; proſtopadłe zaś do niéy ſpuszczo-

ne: - - AE=39.
- - CF=25.

A zatém ich ſumma AE * CE=64. łok:
Powiérzchniá tego czworokąta będzie =
$\frac{64 \times 86}{2}$ = 32. × 86. albo 64. × 43, = 2752.
łokci kw:

18. Niech znowu będzie przekatná AB =26. ſzn: 8. pręt: 6. łok: =26. $\frac{22}{25}$. ſzn:
Proſtopadłe: AE=13. ſzn: 7. pręt: 5. łok:
CF= 11. 9 6. $\frac{1}{2}$.

A zatém AE*CF= 25. 7. 4.
=25. $\frac{113}{150}$ ſznur:

Powierzchniá czworokąta ABCD będzie =25, $\frac{113}{150}$. × 13 $\frac{11}{25}$ =346. $\frac{78}{628}$ ſzn: kw:

19. Niech w pięciokącie ABCDE będzie bok - AE = 128. łok; *Fig. 4.*

Przekątne: AC=79.
CE=81.
Proſtopadłe: CH=49.
BF=42.
DG=39.

Znaydziémy powierzchnie troykątów;
AEC=40. × 64.=3136. łok kw:
ABC=21. × 79.=1659.
EDC=39. × 81.=1579. $\frac{1}{2}$.

A zatém powierzchniá pięciokąta ABCDE będzie $=6374.\frac{1}{2}$. ło: kw:

Fig.5. 20. Niech w ſześciokącie ABCDEF będą

Przekątne:	AC $=200$. łok:
	AE $=125$.
Poſtopadłe:	BG $=23$.
	DH $=80.\frac{1}{2}$.
	DI $=64.\frac{3}{4}$.
	FK $=42$.

A zatém BG$*$DH $=103.\frac{1}{2}$. łok:
DI $*$FK $=106.\frac{3}{4}$.

Znaydziémy powierzchnie czworokątów:

ABCD $= 103\ \frac{1}{3} \times 100. = 10350$. ł. kw:
ADEF $= 53.\frac{3}{8} \times 125 = 6671.\frac{7}{8}$

Powierzchniá tedy całego Sześciokąta będzie $= 17021.\frac{7}{8}$ łok: kw:

Inaczéy naſtępuiącym ſposobém znaleśdź można powierzchnią ſześciokąta: ABCDEF.

Niech będzie

Fig.6.

	ſzn:	pręt:	łok.
bok AB =	20.	0.	0.
Równoodległe: FG =	23.	7.	$3.\frac{1}{8}$
CH =	28.	2.	$2.\frac{13}{16}$.
EI =	12.	2.	$2\frac{3}{16} = 1\,2\frac{11}{48}$ ſz: kw

Części prostopadłey DN.

$DK = 2.\ 4.\ 7\tfrac{7}{24} = 2\tfrac{179}{360}$

$KL = 4.\ 6.\ 6\tfrac{1}{4} = 4\ \tfrac{41}{60}$

$LM = 1.\ 0.\ 3\tfrac{4}{8} = 1\ \tfrac{1}{20}$

$MN = 7.\ 8.\ 5\tfrac{5}{6} = 7\ \tfrac{79}{90}$

A zatém $AB*FG = 43.\ 7.\ 3\ \tfrac{1}{8} = 43\tfrac{89}{120}$

$FG*CH = 46.\ 9.\ 5.\tfrac{15}{16} = 46\tfrac{47}{48}$

$CH*EI = 35.\ 4.\ 5. = 35\tfrac{5}{17}$

Więc troykąt $DEI = 1.\tfrac{179}{720}, \times 17\tfrac{11}{48}$

$15.\tfrac{9313}{34560}$. ſzn: kw:

Czworokąty.

$EICH = 2.\tfrac{41}{120}. \times 35.\tfrac{7}{15} = 83.\tfrac{23}{450}$

$CHFG = 1.\tfrac{1}{20} \times 23.\tfrac{47}{96} = 24.\tfrac{85}{128}$

$ABGF = 3\tfrac{169}{180} \times 43.\tfrac{89}{120} = 172\tfrac{6341}{21600}$.

Sz: kw:

Cały więc ſześciokąt $ABCDEF = 295.\tfrac{641}{2304}$

21. Niech będzie ſiedmiokąt ABCDEFG *Tab. 8. Fig. 1.* w którym naſtępuiące wymiary znaleźliśmy, to ieſt:

Części przekątnéy AD.

$AH = 32\tfrac{2}{3}$ ſtopy.

$HI = 35.$

$IK = 15.\tfrac{1}{3}$

$KL = 81.\tfrac{5}{6}$

$LM = 11.\tfrac{5}{6}$

$MD = 13.\tfrac{1}{3}$

Proſtopadłe:

$GH = 70\tfrac{1}{2}$

$BI = 56\tfrac{1}{3}$

$FK = 64.$

EL $= 86\frac{1}{3}$.
CM $= 45\frac{5}{6}$.

ftop: kw:

Będą tedy troy-kąty.	AHG	$= 16.\frac{1}{3}$	$\times\ 78.\frac{1}{2}$.	$=$	$1282.\frac{1}{6}$
	ABI	$= 28.\frac{1}{6}$	$\times\ 67.\frac{1}{3}$.	$=$	$1905\frac{17}{18}$
	DLE	$= 43\frac{1}{3}$	$\times\ 25.\frac{1}{6}$.	$=$	$1086\frac{13}{36}$
	CMD	$= 6\frac{2}{3}$	$\times\ 45.\frac{5}{6}$.	$=$	$305.\frac{5}{9}$.
Czwo-rokąty.	HKFG	$= 25.\frac{1}{6}$.	$\times\ 142.\frac{1}{2}$	$=$	$3568\frac{1}{4}$
	KLEF	$= 81.\frac{1}{6}$.	$\times\ 75.\frac{1}{6}$.	$=$	$6151\frac{5}{36}$
	BCNI	$= 109$	$\times\ 51.\frac{1}{12}$	$=$	$5568\frac{1}{12}$

A zatém cały fiedmiokąt ABCDEFG = $19885.\frac{1}{2}$. ftop: kw:

PRZYGOTOWANIE DO ROZDZIAŁOW NASTĘPUIĄCYCH.

O podnieſieniu liczby do kwadratu i wyciągnieniu z niéy pierwiaſtku kwadratowego.

Lubo nauka, którá fię tu wykładać będzie, ma częſté używanié w wyższych rachunkach, bardziéy iednak ieſt potrzebná w Jeometryi. W naſtępuiących Rozdziałach, różne zdarzą fię użycia iéy okoliczności. Tam fundamenta, na których fię zasadza, iaśniéy zrozumiane będą, niż gdyby na zawilszych działaniach rachunkowych były okazane, zwłaszcza, gdy ieszcze Algebra uczniom ieſt nieznaioma.

109. Defin: Kwadrat liczby; ieſt to ta ſama liczba przez ſiebie rozmnożona.

Okazać to można z Jeometryi, w któréy aby znaleśdź pole kwadratu, trzeba rozmnożyć przez siebie liczbę znaczącą wielkość boku tegoż kwadratu..
Y tak dziewięciu liczb piérwszych:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	Kwadraty są
1.	4.	9.	16.	20.	36.	49.	64.	81.	
10.	20.	30.	40.	50.	60.	70.	80.	90.	Liczb: Kwadraty są
100.	400.	900.	1600.	2500.	3600.	4900.	6400.	8100.	
1000.	2000.	3000 - - - 9000.							Tych też Kwadraty będą:
1000000.	4000000.	9000000. - - - 81000000							

110. Ztąd się wnosi, że kwadraty liczb, które iednę cyfrę maią, a resztę zerów, składaią się z kwadratu téyże saméy cyfry, i z tyle dwoie następuiących zerów, ile ich było w téy liczbie.

111. Gdy się robi kwadrat z liczby, naprzykład z 37. mnożąc 37. przez 37; mnoży się naprzód 7. przez 7. to iest robi się kwadrat z 7. potém mnoży się 30. przez 7. daléy 7. przez 30. albo drugi raz znowu 30. przez 7. naostatek mnoży się 30, przez 30. to iest bierze się kwadrat z 30. Jest tedy liczba rozmnożoná 1369. kwadratém trzydziestu siedmiu, złożonym z kwadratu trzydziestu, z liczby 30. rozmnożonéy dwa razy przez 7. i z kwadratu 7. Ta reguła iest ogólná ściągaiącá się do kwadratów liczb wszystkich, które na dwie części podzielić można.

Niech będzie naprzykład liczba 5 któ-
rą uważam iak złożoną z 1. i z 4. kwa-
drat iéy może bydź uważany, iakby ſię
ſkładał z tych trzech liczb: 1. 8. 16.
Piérwszá 1. ieſt kwadratém z 1. drug
8. ieſt liczbą rozmnożoną dwa razy z 1.
przez 4. trzecia 16. ieſt kwadratém z 4.
Jakoż ſumma tych trzech liczb 1. 8. 16.
ieſt: 25 a 25 ieſt kwadratém z 5. Gdy-
byśmy uważali 5. iako zbiór z tych dwóch
liczb 2. i 3; kwadrat z 5. brałby ſię tém
ſamém za ſummę z tych trzech liczb: 4.
12. 9. która ſumma ieſt także 25. Liczba
4. byłaby kwadratém z 2. liczba 12. byłab
z rozmnożenia dwa razy 2. przez 3. a li-
czba 9. byłaby kwadratém z 3.

Toż ſamo widocznie pokazać ſię F może ſposobém Jeometrycznym

Niech liniiá AB. będzie na mieysce liczby iakiéy ſkła- daiącéy ſię z tylu iedności, ile pewnyc części zamyka w ſobie taż liniiá AB. Lin téy części AE, EB, niech zaſtępui części dwie, które tę liczbę ſkładaią; zrob my kwadrat ABCD z linii AB. a wziąw szy liniią AF równą AE, pociągniym przez F i E, dwie liniie FG, i EK, równo odległe od boków kwadratu, i przecinaiące się w punkcie J. Kwadrat AEIF. będzie z części AE, linii AB. Kwadrat IGCK, będzie z części EB, linii teyże AB. prostokąty; FIKD, i EBGI, będą obadwa z linii: AD i EB, to iest z części iednéy, linii AB i z części drugiéy.

112. Wygodná rzecz iest, liczbę, któréy, kwadratu szukamy rozłożyć na iedności, dziesiątki, sta, i t. d.

Przykład. 1. Chcę mieć kwadrat z 24. Rozkładam tę liczbę na dziesiątki, i na iedności, to iest na 20, i na 4.

Będzie	1.	400.	kwadrat z dziesiatków.
	2.	160.	liczbą dwa razy rozmnożona z dziesiątków przez iedności.
	3.	16.	Kwadrat z iedności.
Summa - -		576.	Kwadrat z 24.

Przykład 2. Chcę mieć kwadrat z 36.

	1.	900.	Kwadrat z 30.
	2.	360.	dwa razy 30 przez 6. rozmnożone.
	3.	36.	Kwadrat z 6.
Summa - -		1296.	Kwadrat z 36.

Przykład. 3. Chcę mieć Kwadrat z 324.

1.	90000.	Kwadrat z 300.
2.	12000.	Dwa razy 300. przez 20.
3.	400.	Kwadrat z 20.

4. 2560. Dwa razy 320.
przez 4.
5. 16. Kwadrat z 4.

Summa - - 104976. Kwadrat z 324.

Przykład 4. Chcę mieć Kwadrat z 4687.

1, 16000000. Kwadrat z 4000.
2 4800000 Dwa razy 4000.
przez 600.
3. 360000. Kwadrat z 600.
4. 636000. Dwa razy 4600.
przez 80.
5. 6400. Kwadrat z 80.
6. 65520. Dwa razy 4680.
przez 7.
7. - - 49. Kwadrat z 7.

Summa - - 21967969. Kwadrat z 4687.

113. Uwaga 1. Postrzedz łatwo możemy w tych przykładach, że każda liczba składaiącá po części kwadrat cały, ma iednêm zero mniéy, niżeli ta, która ią poprzedzała; a zatém cyfra iedna w każdey liczbie niższéy występuie bardziéy ku prawéy ręce, niż w téy która iest nad nią.

Widzimy zatém, że możnaby opuścić zera, pisząc cyfry, same tym sposobém iedne pod drugiémi, aby w każdym rzędzie niższym, cyfra iedna w prawą coraz bardziéy wychodziła. J tak opuściwszy zera w przykładzie ostatnim tym porządkiém szłyby same cyfry.

16.
48.
36.
736.
64.
6552.
49.

Summa 21967969.

2. W piérwszym rzędzie, gdzie ieſt 16. opuszcza ſię zerów ſześć, a zatém 16. znaczy 16. millionów, to ieſt kwadrat z 4000. czyli z piérwszego po lewéy ręce znaku liczby 4687. W drugim rzędzie gdzie ieſt 48. opuszcza ſię zerów pięć, a zatém 48. znaczy 4. milliony, 8. kroć ſto tyſięcy, i dla tego 4. piszą ſię pod iednościami millionow, a 8. wyſtępuie. Ta zaś liczba 48. pochodzi z rozmnożenia piérwszego po lewéy ręce znaku 4. liczby 4687. przez drugi znak 6. téyże liczby dwa razy wzięty. W trzecim rzędzie opuszcza ſię zerów cztéry, a zatém 36. znaczy trzykroć ſto tyſięcy, i 6. dzieſiątków tyſięcy, i dla tego 3. piszą ſię pod ſtami tyſiąców, a 6. wyſtępuie. Ta zaś liczba 36. znaczy kwadrat drugiego po lewéy ręce znaku 6. liczby 4687. W czwartym rzędzie opuszcza ſię zerów trzy, a zatém 736 znaczy ſiedmkroć trzydzieści ſześć tyſięcy; i dla tego 3. piszą ſię pod dzieſiątkami tyſiąców, a 6. wyſtępuie. Ta zaś liczba 736. pochodzi z roz-

mnożenia dwóch piérwszych po lewé ręce znaków 46. liczby 4687. przez 8 trzeci znak téyże liczby dwa razy wzięt i t. d.

3. W takowém liczb ułożeniu, idąc o dołu do góry, to ieſt zaczynaiąc od 49 w piérwszym rzędzie, piérwsza po prawey ręce cyfra 9. znaczy iedności, w drugim rzędzie 2. znaczy dzieſiątki, w trzecim rzędzie 4. znaczy ſta, w czwartym rzędzie 6. znaczy tyſiące i t, d.

4. Ta ſama liczba 49. w piérwszym od dołu rzędzie znaczy kwadrat z iedności 7; i prawa iéy cyfra 9 naybardziéy wyſtępuie. Trzecia w tym porządku liczba 64. ieſt kwadratém z dzieſiątków 8. przeto prawa iéy cyfra 4. iako znacząca ſta, mniéy wyſtępuie, niżeli obydwie cyfry 49. kwadratu z ſaméy iedności. Piąta w porządku liczba 36. ieſt kwadratém ze ſtów 6; i przeto prawa iéy cyfra 6. iako znacząca dzieſiątki tyſiąców, ma przed ſobą kwadraty z dzieſiątków i z iedności. Nakoniec ſiódma i naywyższa liczba 16. ieſt kwadratém z tyſiąców 4. i przeto prawa iéy cyfra 6. ma przed ſobą kwadraty ze ſtów, dzieſiątków i iedności W ſummie więc 21,967,969. na miéyscach nie parzyſtych, od prawéy ręki rachuiąc kończyć ſię będą kwadraty z liczb poiedyńczych, z których ſię ſkłada cały kwadrat: to ieſt kwadrat z jedności kończyć ſię będzie tam, gdzie oſtatnie po prawéy

ręce 9. napisane; kwadrat z dziesiątków tam, gdzie iest drugie 9, kwadrat ze stów tam, gdzie iest 6, kwadrat z tysiąców, gdzie 1.

5. Dla podobnéy przyczyny w summie teyże 21,967,969. kwadrat wyrażaiącéy (rachuiąc zawsze od prawéy ręki) na mieyscach parzystych, drugim, czwartym, szóstym i t.d. kończyć się będą liczby pochodzące z rozmnożenia poiedyńczych znaków, z których kwadrat urosł, przez te wszystkie, które ie poprzedzały.

Trzeba to ieszcze bardziey obiaśnić na wielu innych przykładach kwadratów, tymże samym co wyżéy porządkiém części ich układaiąc.

§ 114. *Wniosek* 1. Gdy tedy mamy liczbę iaką kwadratową, możémy doyśdź z iak wielu znaków liczebnych przez siebie rozmnożonych urosł ten kwadrat; to iest możémy doyśdź wielości znaków piérwiastku kwadratowego. Po łacinie taki piérwiastek zowie się (Radix quadrat.) Doydziémy zaś tego, oddzielaiąc kreskami albo kropkami od prawéy ręki zacząwszy po dwa znaki liczebne. Liczba takich oddziałów pokaże wielość znaków liczebnych pierwiastku. Naprzykład liczba 576, będzie miała dwa oddziały, które tak oznaczam 5,76. a zatém piérwiastek iéy z dwóch się składa znaków. Piérwiastek téy liczby 10,49,76. będzie miał trzy znaki liczebne, bo w niéy trzy oddziały zrobić można

Piérwiaſtek liczby 21,96,79,69. mieć będzie cztéry znaki, bo cztéry także w nim oddziały uczynić można, i t. d.

115. Wniosek 2. Ponieważ w miéysaach nieparzyſtych liczby kwadratowéy, kończą ſię kwadraty znaków poiedyńczych tę liczbę ſkładaiących, mogą zaś znaki liczebne w kwadracie bydź nie parzyſte; więc w takim razie; w piérwszym zaraz od lewéy ręki znaku kwadratu, znaleśdź momożna znak piérwszy pierwiaſtku tegoż kwadratu: a zatém oddzielaiąc kréſkami co dwie liczby, od prawéy ręki do lewéy, na oſtatni oddział, może tylko przypaśdź znak ieden liczebny. Tak iak wyżéy widzieliśmy w tym kwadracie 5,76.

PRZYKŁADY

116. Niechby z téy ſaméy liczby: 576 wyciągnąć trzeba było pierwiaſtek kwadratowy. Ta liczba mogąc mieć dwa oddziały, będzie też miała dwa znaki w piérwiaſtku, to ieſt znak dzieſiątków, i znak iedności. Piérwszy znak pierwiaſtku taki bydź powinien, aby kwadrat iego nie przechodził 5. ſtów; taki kwadrat ieſt 4. ſta, albo 400. którego pierwiaſtek, 2. dzieſiątki, albo 20. Kwadrat 400. piérwszego tego znaku piérwiaſtkowego 20. odiąwszy od 576. zoſtanie 176. Ta reszta pozoſtała powinna ieszcze zamykać w ſobie drugi znak pierwiaſtku rozmnożony przez

pierwszy 20. dwa razy wzięty, i nadto kwadrat tegoż drugiego znaku; więc jeżeli przez tenże znak 20, dwa razy wzięty, to iest przez 40. podzielimy resztę 176, wieloraz pokaże drugi znak piérwiastku złożony z iedności. Podzieliwszy 176, przez 40. wieloraz będzie 4. iedności. Te 4. iedności; rozmnożywszy przez 40, wypadnie 160. które 160. odiąwszy od 176. zostanie 16. W téy reszcie 16. znaydować się ieszcze powinien kwadrat znaku piérwiastkowego iedności 4, to iest 16, że się znayduie zupełnie, więc cały pierwiastek kwadratu 576, będzie: 24.

Wzór Działania.

5,76|40.
400 kwadrat z 20.

40. | 176. |4.
| 160 z rozmnożenia 40 przez 4.
16. Reszta.
16. Kwadrat z 4.

0-

Tymże sposobém wyciągnąć można pierwiastek kwadratowy z téy liczby 144.

Wzór Działania.

1,44|10
1 00 kwadrat z 10.

20|44|2.

40 z rozmnożenia 20. prz

4. Reszta
4. Kwadrat z 2.

0.

Niechby potrzeba wyciągnąć pierw
ſtek z kwadratu; 692224.

Oddzieliwszy iak wyżéy kréſkami
dwie liczby od prawéy ręki, będzie tr
oddziałów, a zatém i trzy znaki w pi
wiaſtku, Kwadrat nayblizéy przyſtępu
cy do 69. ieſt 64, którego pierwiaſ
8; więc 8. ſtów, będzie znakiém piérwszy
pierwiaſtku. Odiąwszy kwadrat 8. ſtó
to ieſt 640000. od 692224, zoſtanie 522
Ta reszta powinná zamykać piérwszy zn
800. pierwiaſtku dwa razy wzięty prz
drugi znak dzieſiątków rozmnożony;
kwadrat drugiego znaku pierwiaſtku; p
winná ieszcze zamykać dwa te pierws
znaki ſtów i dzieſiątków rozmnożony
przez trzeci znak iedności dwa razy wzi
ty, i nakoniec kwadrat znaku tegoż iedn
ści. W ſzczególności zaś mówiąc, powi
na zamykać 800, dwa razy wzięte, t
ieſt 1600. rozmnożone przez znak dzi
ſiątków, którego ſzukamy, podzieliwsz
tedy 52224, przez 1600. znaydziémy n
wielorazz 30, albo 3. dzieſiątki; a zatém 3
dzieſiątki będą znakiém drugim pierwi
ſtku. 1600. rozmnożone przez 30. czy
nią 48000. które od 52224. odiąwszy, zo
ſtanie 4224. Ta reszta ma ieszcze zamy

kać kwadrat z 30, to iest 900, które 900 od 4224. odiąwszy zostanie 3324.

Ta reszta powinna zamykać część pierwiastku znalezioną 830, dwa razy wziętą, i rozmnożoną przez znak iedności pierwiastku, i ieszcze zamykać powinna kwadrat tychże iedności. Podzielmy więc 3324. przez 1660, to iest przez 830. dwa razy wzięte, a wieloraz 2. będzie znakiém iedności pierwiastku. Przez te 2. rozmnożywszy 1660, i liczbę rozmnożoną 3320, odiąwszy od 3324, zostanie 4, która to reszta iest kwadratém z 2. iedności. Cały więc pierwiastek kwadratu: 692224; będzie 832.

Wzór działania

```
      69,22,24.|800.
      64 00 00.
1600.| 5 22 24.|30.
       4 80 00.
       42.24.
        900.
  1600|33 24|2
       33 20.
           4.
           4.
           0.
```

Trzeba iako naywięcéy takich przykładów Uczniom podawać, nieużywaiąc za-dnego ieszcze skrócenia. Na wzór dwa następuiące przykłady podaią się.

Przykład I.

```
          46,02,26,56 | 6000
          36,00,00,00 |
12000,   10022656  | 700.
          8400000
          1622656
           490000
13400 | 1132656 | 80.
        1072000
          60656
           6400
13560 |  54256 | 4
         54240
            16
            16
            0.
```

Przykład II.

```
        13,59,39,69, 3000
         9 00 00 00
6000    4 59 39 69, 600.
        3 60 00 00
          99 39 69
          36 00 00
7200 | 63 39 69 | 80
       57 60 00
        5 79 69
          64 00
7360 | 5 15 69 | 7
       5 15 20
            49
            49
            0.
```

227. *Uwaga.* Jako w dzieleniu zwyczayném, tak i w wyciąganiu pierwiastku kwadratowego, można się (kto ieszcze nie iest wprawnym) łatwo pomylić w znakach wieloraziu. Omyłka w dzieleniu łatwá iest do poprawienia, gdy uważać będziemy, ieżeli liczba dzieląca rozmnożona przez wielorasz odiąć się może od części liczby podzieloney, którą dzielić przypada, albo ieżeli reszta nie iest większá

od liczby dzielącéy. W wyciąganiu pierwiastku kwadratowego,(które wychodzi na iedno prawie co i dzielem, w którymby liczba dzieląca co raz się odmieniała) można także omyłkę iakąkolwiek postrzedz podobną, iak przy zwyczaynem dzieleniu, czyniąc uwagę; wzgląd ieszcze i na to mieć należy, że wyciągaiąc pierwiastek sposobem wyżéy podanym, dwa się czyną odeymowania; to iest odéymnie się naprzód liczba dzieląca przez część przypadaiącą pierwiastku rozmnożona, i powtóre odéymuie się kwadrat téyże części pierwiastku; więc, gdyby zdarzyło się, że piérwsze tylko odięcie uczynić można, a drugiego iuż nie można; ostrzeżeni tém bylibysmy, zesmy wzięli wieloraz bardzo wielki, a zatém zmniéyszyć go potrzeba. W ostatnich dwóch przykładach, w piérwszym, 12000, zmieścić się mogło razy 800 w 10022656; a w drugim 6000, mogło się znaydować 700 razy w 4593969; ale nie możnaby było od reszty odiąć kwadraty tychże wielorazów; i przeto w obydwóch tych przykładach iednością wieloraz zmniéyszyliśmy.

118. *Piérwsze* skrócenie, którego przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego użyć można, iest w opuszczeniu zerów w liczbie dzielącéy, podzielnéy, i wielo-

razie, zachowuiąc iednak cyfrom pozosta-
łym te mieysca, któreby zastępować po-
winny gdyby zera odcięte niebyły.

119. *Powtóre.* Ponieważ ostatnie p
prawéy ręce znaki kwadratu podanego d
wyciągania pierwiastku, całe się nieodmie
niaią, po piérwszych odéymowaniach; ni
są więc do nich potrzebne; a zatém d
każdego w szczególności odéymowani
można te tylko cyfry spuszczać z kwa
dratu, od których odéymować przypad
liczbę dzielącą przez wieloraz rozmnożo
ną; zachowuiąc im miéysce i znaczenie t
amo, które miały w całym kwadracie.

120. *Potrzecie.* Zamiast dwóch odéy
mowań, naprzód liczby dzielącéy prze
wieloraz rozmnożonéy, potém kwadrat
tegoż wielorazu, można obadwa razé
czynić odéymowania; kładąc znak znal
ziony na wieloraz, nie tylko na zwyczay
ném swoiém mieyscu, ale też przy koń
liczby dzielącéy, i dopiéro tak powiększo
ną liczbę dzielącą mnożyć przez ten zna
wielorazu, a rozmnożoną od liczb przy
padaiących z kwadratu, odéymować.

Tu na tych samych liczbach kwadra
towych, z których iuż uczniowie wycia
gali pierwiastek, niechay użyią tych trzec
sposobów skrócenia; bo im iuż i działani
będzie łatwiéysze, i lepiéy dokładność te
go sposobu skróconego obaczą, porówny
waiąc działanie piérwsze z drugiém.

121. Wyciągamy tym skróconym sp

ſobém pierwiaſtek kwadratowy z liczby 13593969.

Naprzód oddzielić trzeba kréſkami co dwie liczby, iak wyżéy; oddzieliwszy tak liczby kwadratu podanego 13,59.39,69, widzimy, że ten kwadrat cztéry znaki liczebne mieć będzie w ſwoim pierwiaſtku. Kwadrat naybliższy w piérwszym po prawéy ręce oddziale zawarty, będzie 9, którego pierwiaſtek, 3. znaczący tyſiące. Odiąwszy ten kwadrat 9. od 13. zoſtanie 4. do których przypisawszy oddział naſtępuiący: 59. będzie 459. Podwoymy piérwszy znak pierwiaſtku 3, i będzie 6. Te 6. w piérwszych dwóch znakach 45, liczby 459. znalazłoby ſię razy 7. ale maiąc wzgląd, że kwadrat tego wielorazu niemógłby ſię potém odiąć, położmy tylko 6. na miéyscu wielorazu, i przypiszmy ie także do 6. liczby dzielącéy. Rozmnożywszy 66. przez 6. i liczbę rozmnożoną 396. odiąwszy od 459. zoſtanie 63. do którey reszty przypiszmy oddział kwadratu naſtępuiący 39; i dzielmy daléy 6339. przez dwa znaki pierwiaſtku znalezione, 36. podwoiwszy ie; to ieſt przez 72. 72. w 633. znayduie ſię razy 8. Napiszmy 8. na wieloraz, i przypiszmy ie do liczby dzielącéy 72. Rozmnożywszy 728. przez 8. będzie 5824. które odiąwszy od 6339. zoſtanie 515. Dopiszmy do téy reszty oſtatni kwadratu oddział 69; i 51569. dzielmy przez podwóyną liczbę znaków pier-

wiastku już znalezionych 368; to iest prze
736. 736 w 5156, znaydziemy razy 7
Przypiszmy te 7. do 368. i do 736. roz
mnożywszy 7367. przez 7. i liczbę roz
mnożoną 51569. odiąwszy od 51569. ni
nie zostanie; a zatém kwadratu podane
go pierwiastek będzie: 3687.

Wzór działania.

```
     13,59,39,69,3687.
      9
 66 | 45,9.
      39,6
728 | 6339.
      5824
7367| 51569
      51569
        0.
```

122. *Wniosek.* Ponieważ wyniesieni iakiey liczby do kwadratu, iest to ied co rozmnożenie téy liczby przez sieb samę, czyli rozmnożenie dwóch liczb rów nych iedney przez drugą, kwadrat w ułomku iakiego, będzie ułomek, które licznik, iest kwadratém licznika tamteg a mianownik kwadratém mianownika i go. Y tak kwadrat z $\frac{1}{2}$. iest $\frac{1}{4}$. kwadr z $\frac{1}{3}$. iest $\frac{1}{9}$. kwadrat z $\frac{2}{3}$. iest $\frac{4}{9}$; kwadra

ułomków $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{4}$, są $\frac{1}{16}$. $\frac{9}{16}$. i t. d.

Chcąc tedy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z ułomka pod niego, trzeba osobno wyciągnąć go, z licznika i z mianownika. Y tak pierwiastki kwadratowe tych ułomków; $\frac{9}{16}.\frac{16}{25}.\frac{25}{36}.$ i t. d. są $\frac{3}{4}.\frac{4}{5}.\frac{5}{6}.$ i t. d.

123. *Uwaga.* Gdy się trzeba wyciągać pierwiastek kwadratowy z liczby mieszanéy, to iest złożonéy z liczby całkowitéy, i z ułomku; trzeba ią pierwéy obrócić na sam ułomek. Tak naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z $2.\frac{1}{4}$ liczba ta będzie iedno co ułomek $\frac{9}{4}$ którego pierwiastek $\frac{3}{2}$. czyli $1.\frac{1}{2}$. Liczba też: $2\frac{7}{9}$. iest iedno co $\frac{25}{9}$. a zatém pierwiastek iéy $\frac{5}{3}$. czyli: $1.\frac{2}{3}$. Liczba $10\frac{6}{25}$. tyle znaczy co $\frac{256}{25}$. więc pierwiastek iéy: $\frac{16}{5}$ czyli $3.\frac{1}{5}$.

O ilościach niespółmiernych, i przybliżeniu pierwiastków tych liczb, które nie są kwadratami.

124. *Uwaga.* 1. Niech będzie liczba 2. z któréy przypada wyciągać pierwiastek kwadratowy. Pierwiastkiém téy liczby nie będzie ani 1. ani 2; bo kwadrat z 1. iest 1; mniéy od 2. a kwadrat z 2 iest 4. więcéy od 2. Więc pierwiastek z 2, będzie między 1. i 2. a zatém będzie złożonym z iedności, i z ułomku; to iest: będzie liczbą mieszaną, którą na sam ułomek obrócić można.

125. Aby ułomek ten był prawdziwym pierwiastkiém z 2. trzebaby, aby kwadrat iego równał się 2. a zatém aby kwadrat licznika iego był dwa razy większy od

kwadratu mianownika. Znaleśdźby tedy potrzeba taki kwadrat, który dwa razy w sobie zamykał inny kwadrat; aże to iest niepodobná zaraz się pokaże.

Każdá liczba kończyć się musi na ieden z tych dziesięciu znaków: 1,2,3, 4, 5, 6, 7,8,9.0.

Każdy zaś kwadrat inaczéy kończyć się niemoże, tylko na te znaki, na które kończą się kwadraty dziesięciu znaków dopiéro wyrażonych to iest na:

1,4.9.6,5,6,9,4,1,0.

czyli krócéy, na 1,4,9,6,5.0,

Kwadraty podwoione niemogą się inaczéy kończyć, tylko tak, iak się kończą liczby kwadratów ostatnie, podwoione; to iest, na: 2,8.8,2,0,0; czyli krócéy na: 2,8,0. A że pierwsze zakończenia na: 2,8, nie są zakończeniami kwadratów; więc kwadraty poodwoione, liczb zakończonych na: 1.2,3,4,5.6.7.8,9. niemogą bydź kwadratami. Jeżeli liczba zakończoná iest na iedno żero, to iest ieżeli ieden lub więcéy dziesiątków w sobie zupełnie zamyka, kwadrat iéy zamykać będzie takąż liczbę stów, a zatém kończyć się będzie na dwa zera. Kwadrat zaś liczby kończącéy się na 5. kończy się na 25. a podwoiony, kończyć się będzie na iedno tylko zero, bo będzie kończył się na 50; więc tak podwoiony nie-będzie kwadratém.

Nakoniec ieżeli liczba kończy się na iedno zero, 10. razy zámykać w ſobie będzie liczbę zakończoną na ieden z dziewięciu piérwszych znaków: 1,2,3,4,5.6,7,8,9; a kwadrat iéy, 100. razy zamykać będzie liczbę zakończoną na: 1,4,5,6,9, kwadrat zaś ten dwa razy wzięty, zamykać będzie 100, razy liczbę zakończoną na 2, 8,0, a piérwiaſtek kwadratu tego dwa razy wziętego, zamykać będzie 10. razy pierwiaſtek liczby zakończonéy na ieden z tych trzech znaków: 2,8,0; który to oſtatni pierwiaſtek wyciągniony bydź niemoże, iakośmy iuż okazali. Tego ſamego rozumowania użyć można, gdy liczba kończyć ſię będzie na dwa, trzy, cztery i t. d. zera.

Więc w ſzczególności mówiąc, pierwiaſtek kwadratowy z liczby 2, wyciągniony bydź niemoże.

126. To dowodzenie ſtosowané bydź może do wszyſtkich liczb na 2. zakończonych. Y tak nie można wyciągnąć pierwiaſtku kwadratowego z liczb: 12. 22, 32, 42, 52, 62, i t. d: czyli to w liczbach całkowitych, czyli w ułomkach, czyli w liczbach mieszanych.

127. Podobnie dowieśdź można, że niepodobná znaleśdź pierwiaſtek kwadratowy liczby 3, ani żadnéy innéy na 3. kończącéy ſię. Tym co wyżéy ſposobém dowodzi ſię niepodobność wyciągnienia pierwiaſtku kwadratowego z liczb kończących ſię na 5,7, i t. d; a z tąd możnaby

ułożyć tablicę bardzo obszerną liczb t
kich, których pierwiastki kwadratowe
liczbach ani całkowitych, ani łamanych
zupełnie wyciągnione bydź niemogą.

18. Możnaby iednak i ogólnie do
wieśdź, że wszystkie liczby całkowite, kt
re nie maią pierwiastku kwadratowego
liczbach całkowitych, mieć go też nie b
dą i w liczbach łamanych. Kładzie
tu treść tylko tego dowodu:

Jeżeli dwie liczby są *pierwszemi* ied
względem drugiéy, (ob. cz. w Arytmety
na karcie 154.) ich kwadraty piérwsze
też będą ieden względem drugiego; p
nieważ dzielniki kwadratów pochodzą
dzielników ich pierwiastków.

Y tak, że liczby 2, i 3. są między
bą *piérwszemi*; piérwszemi są także mię
sobą i ich kwadraty: 4 i 9; że liczby
i 5. są między sobą piérwszemi, podobn
piérwszémi będą i ich kwadraty: 9.
więc ieżeli dwie iakiekolwiek liczby
piérwszémi między sobą, ich kwad
niebędą wielokrotne, ieden drugiego;
iest: ieden kwadrat niebędzie zupełnie
sobie zamykał drugiego.

Niech będzie liczba iaka całkowita, k
réy nie można mieć pierwiastku kwad
towego w liczbach całkowitych: Gdy
ten pierwiastek można zupełnie oka
w liczbie mieszanéy, ta liczba mie
dałaby się obrócić na sam ułomek, a ułom
ten możnaby przywieśdź do nayprości

szych wyrazów. Ale aby tenże ułomek wyrażał zupełny pierwiastek, trzebaby, aby iego kwadrat był liczbą całkowitą, a zatém, aby licznik tego ułomka kilka razy zupełnie większy był od dzielnika iego, co iest nie podobna; więc gdy w liczbie iakiéy całkowitéy, nie można zupełnie znaleśdź pierwiastku kwadratowego w liczbie całkowitéy, nie można go też znaleśdź ani w ułomku.

129. Są więc takie niektóre ilości (*Quantitates*) które w liczbach dokładnie bydź wyrażone nie mogą; ani nawet wyrazić można, iak się maią do iedności. Takie są te ilości, które przez siebie samę rozmnożone, czynią liczby: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, i t. d. Te ilości nazywaią się *niespółmiernémi* (Incommensurabiles, albo Irrationales) Piszą się następuiącym sposobém.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$. i t. d.

Znak ten $\sqrt{}$, czyta się *Pierwiastek* (Radix) naprzykład $\sqrt{2}$, Pierwiastek dwóch, $\sqrt{3}$, Pierwiastek trzech i t. d.

130. Gdy mówię, że tych ilości wyrazić dokładnie nie można, przydaię zaraz, że ich dokładnie wyrazić niemożna w liczbach; bo w innym sposób można ie dokładnie wyrazić, naprzykład: można zawsze naznaczyć dwie linie, któreby się miały między sobą, iak 1, do pierwiastku kwadratowego liczby podanéy. Y tak przekątna kwadratu, ma się do boku iednego, iak się ma pierwiastek kwadrato-

wy 22. do 1, albo iak $\sqrt{2}$: 1. Wysokość także troykąta równobocznego, tak się ma do połowy podstawy, iak $\sqrt{3}$: 1. i t. d.

131. Lubo w liczbach niemożna dokładnie wyrazić ilosci niespółmiernych; można iednak ich wartość przybliżyć do prawdziwéy, i uchybienie zmniéyszyć tyle, ile zechcémy. Sposób do tego naysnadniéyszy iest przez użycie znaków *Dziesiątnych* do wyrażenia takich ilości.

Niech będzie podaná liczba 2, aby wyciągnąć z niéy pierwiastek kwadratowy przez *przybliżenie* (per approximationem)

Gdyby liczba podaná była razy 100, 10000, 1000000, i t. d. większá, iéy pierwiastek byłby też większy razy 10, 100, 1000, i t. d. tak dalece, że wyciągnąwszy pierwiastek z liczb 200, 20000, 2000000. i t. d. trzebaby piorwiastek ten dzielić przez 10, 100, 1000, i t. d. aby w nim uniknąć omyłki w częściach dziesiątych, setnych, tysiącznych i t. d. Przeto pierwiastek kwadratowy, wyciągniony z 2, aż do cząstek tysiącznych, znaydzie się wyciągaiąc go z liczby: 2000000.

Pierwiastek nayblizszy z liczby 2000000 wyciągniony iest 1414. a pierwiastek z liczby 2. przybliżony aż do $\frac{1}{1000}$. iest, 1, 414. Ponieważ kwadrat z 1, 414, iest 1,999396, i różni się od 2, tylko 0,000604.

Wzór Działania.

$$\begin{array}{r|l} 2,00,00,00 & 1,414. \\ 1 & \\ \hline 24 \,|\, 10,0 & \\ 96 & \\ \hline 281. \,|\, 40,0 & \\ 28,1 & \\ \hline 2824. \,|\, 1190,0 & \\ 11\,296. & \\ \hline 004. & \end{array}$$

Gdybyśmy chcieli ieszcze bardziéy przybliżyć do prawdziwego, ten pierwiastek, naprzykład żeby ani w cząstce $\frac{1}{10000}$, nie było uchybienia, trzebaby ieszcze dwa zera przydać, aby mieć iednym znakiém więcéy w pierwiastku.

132. Dla sprawdzenia, czyliśmy w cząstce $\frac{1}{1000}$. nieuchybili, można położyć zamiast pierwiastku znalezionego 1,414; liczbę: 1,415, a ta przez siebie rozmnożona uczyni kwadrat: 2,002225, większy od 2.

133. Częstokroć bardzo wygodnie i prędko wyciągnąć można z liczby pierwiastek przybliżony, w ułomkach zwyczaynych. Sposób ten zasadza się na tém, że ieżeli liczba iest złożona z dwóch części, z których iedna iest bardzo wielka względem drugiéy; kwadrat téy liczby będzie prawie złożony z kwadratu

części większéy, i z podwoionego rozmnożenia części piérwszéy przez drugą: ponieważ kwadrat części mniéyszéy, iako bardzo mały, może bydź zaniedbany. Y tak kwadrat liczby n. przykład 11. podzielonéy na dwie części: 10. i 1. będzie równy 100, to iest kwadratowi z 10, przydawszy 10. przez 2. rozmnożone, to iest, 20, i kwadrat części mniéyszéy: 1; A choćby ten ostatni kwadrat i opuścić; tedy iednak summa 120, małoby się różniła od kwadratu prawdziwego 121.

134. Idzie z tąd, że maiąc liczbę, z któréy przypada wyciągać pierwiastek złożony z dwóch części, z których iedna byłaby wielka, a druga, mała: ieżeli wiemy iuż tę część wielką, znaydziemy, z niewielkiém uchybieniém i część małą, podzieliwszy różnicę między liczbą podaną, i kwadratém części wielkiéy, przez tę samę część wielką dwa razy wziętą. To; co na wieloraz wypadnie, trzeba przydać do wielkiéy części, gdy liczba podaná będzie większá od kwadratu części wielkiéy; albo odiąć od części wielkiéy, gdy kwadrat iéy większy będzie od liczby podanéy.

Niech będzie podaná do wyciągnienia pierwiastku liczba 5. Pierwiastek iéy nayblizszy w liczbie całkowitéy, iest 2. którego kwadrat 4. Różnica między tym kwadratém i 5. iest: 1. Podzielmy tę różnicę 1. przez 2, dwa razy wzięte, to-ieſt przez 4. i będzie $\frac{1}{4}$. A zatêm pierwiaſtek liczby 5. nie wiele uchybiony będzie 2, $\frac{1}{4}$. albo $\frac{9}{4}$. Kwadrat z $\frac{9}{4}$. ieſt $\frac{81}{16}$. czyli 5 $\frac{1}{16}$. Podzielmy $\frac{1}{16}$ przez $\frac{9}{4}$, dwa razy wzięte, to ieſt przez $\frac{9}{2}$ wypadnie na wieloraz $\frac{1}{72}$. który odiąwszy od $\frac{9}{4}$, czyli od 2. $\frac{1}{4}$. zoſtanie 2 $\frac{17}{72}$. albo $\frac{161}{72}$, i ten będzie ieszcze bardziey przybliżaiący ſię do prawdziwego. Pierwiaſtek kwadratowy liczby 5. Jakoż kwadrat z $\frac{161}{72}$. ieſt; $\frac{25921}{5184}$, czyli 5. $\frac{1}{5184}$.

135. Chcąc porównać to przybliżenie z tem, któreśmy mieli w ułomkach dzieſiątnych; obróćmy ułomek zwyczayny $\frac{161}{72}$ na ułomek dzieſiątny, a znaydziemy: 2,2361. i t. d. Pierwiaſtek zaś liczby 5, w ułomku dzieſiątnym byłby 2,2360. i t. d. A zatém różnica liczb w tém dwoiakiém poſtępowaniu, wydałby ſię dopiéro w częściach dzieſięć tyſiącznych.

136. W pierwszém poſtępowaniu, kładzie ſię zamiaſt liczby podaney, ułomek ze wszyſtkiém iey równy, którego dzielnik ieſt kwadratém z 10, z 100, z 1000. i t. d. Na przykład zamiaſt 2. pisze ſię $\frac{200}{100}$, $\frac{20000}{10000}$. $\frac{2000000}{1000000}$. W drugiém poſtępowaniu, szukamy ułomka bardzo bliſko równego liczbie podaney. Którego tak licznik, iako i mianownik, byłby zupełnym kwadratém. Y tak liczba 2, ieſt prawie równa ułomkom. $\frac{9}{4}$, $\frac{49}{25}$. $\frac{100}{49}$. $\frac{289}{144}$. i t. d. Liczba 3. ieſt prawie równa ułomkom; $\frac{49}{16}$, $\frac{361}{121}$: i t. Znayduiémy zaś te ułom-

ki, dwoiąc, troiąc, i t. d. kwadraty liczb naturalnych: 2, 3, 4, 5, i t. d. i uważaiąc ieżeli między liczbami kwadratowémi nie będzie która tuż zbliżaiącá się do liczby podwóynéy, potroynéy, i t. d. którąśmy iuż znaleźli. Naprzykład: 2. razy 4. czyni 8, a blisko czyni kwadrat 9, więc 2, zupełnie równa się $\frac{8}{4}$, a niedaleko iest od $\frac{9}{4}$. a zatém pierwiastek z 2, będzie blisko $\frac{3}{2}$, podobnie 2, razy 25, czyni 50. więc 2 równa się $\frac{50}{25}$; a nie daleko iest od $\frac{49}{25}$; a zatém pierwiastek z 2, będzie blisko. $\frac{7}{5}$. Można potém poprawić, gdy zechcémy pierwsze tę przybliżenia, postępuiąc sobie tak iak się wyżéy powiedziało.

Dosyć będzie tym czasem na téy początkowéy wiadomości względém przybliżania pierwiastków nie spółmiernych. Rzecz ta stała się materyą wielkiéy wagi gdy sławni Matematycy Euler i de la Grange, głębiéy ią brać poczęli, i rozmaite ich przystosowania czynić. (m)

137. Niech będzie ułomek $\frac{2}{3}$, z którego trzeba wyciągać pierwiastek kwadratowy. Zamiast, cobysmy mieli osobno ten pierwiastek wyciągać z 2, i z 3, i dzielić potém pierwiastek licznika przez pierwiastek mianownika; wygodniéy będzie, ułomek ten $\frac{2}{3}$, odmienić na inny, gdzie

---

(m) *Obacz Między innemi Dzieło pod Tytułem. Introductio ad analysym infinitorum przez Eulera: i przyd... de la Grange do Algebry Eulera po Francuzku wydan...*

mianownik, był zupełnym kwadratém U-łom k tedy tak odmieniony będzie $\frac{6}{9}$. Wyciągniymy pierwiaſtek z licznika 6, a trzecia część tego pierwiaſtku, będzie pierwiaſtkiém ułomka $\frac{2}{3}$. $\sqrt{6} = 2,4494$: trzecia tego pierwiaſtku część ieſt prawie 0,8165. Jakoż kwadrat z 0,8165, będzie: 0,66667225 i nie wiele różni ſię od $\frac{2}{3} = 0,66666666$. i t. d.

138. Możnaby też wyciągnąć pierwiaſtek z $\frac{2}{3}$, przez ułomki zwyczayne. Kwadrat naybliższy ułomka $\frac{2}{3}$, ieſt 1. który różni ſię od $\frac{2}{3}$ przez $\frac{1}{3}$. Dzielmy, przez kwadrat 1. podwoiony to ieſt przez 2, tę różnicę $\frac{1}{3}$, i będzie $\frac{1}{6}$. a odiąwszy $\frac{1}{6}$, od 1. albo od $\frac{6}{6}$, zoſtanie $\frac{5}{6}$; kwadrat z $\frac{5}{6}$. ieſt $\frac{25}{36}$, który od $\frac{2}{3}$. różni ſię przez $\frac{1}{36}$. Tę różnicę $\frac{1}{36}$ podzieloną przez dwa razy $\frac{5}{6}$. czyli przez $\frac{5}{3}$. to ieſt $\frac{1}{60}$, odéymuię od $\frac{5}{6}$. zoſtanie $\frac{49}{60}$. Y ten ułomek $\frac{49}{60}$, będzie pierwiaſtkiém bardzo bliſkim z $\frac{2}{3}$, ponieważ kwadrat z $\frac{49}{60}$. ieſt $\frac{2401}{3600}$, a ułomek: $\frac{2}{3}$, znaczy tyle, co $\frac{2400}{3600}$; różnica więc będzie tylko w $\frac{1}{3600}$.

139. W ogólności mówiąc; aby pierwiaſtek kwadratowy wyciągnąć z ułomka iakiego; trzeba pierwiéy tak zrobić, aby mianownik iego był kwadratém, mnożąc, gdy inaczéy bydź nie może, licznika i mianownika przez mianownika, i wyciągać potém pierwiaſtek z licznika tak rozmno-

żonego, a przez mianownika nie rozmno-
żonego podzielić ten pierwiastek.

140. Może się iednak obeyśdź czasem bez mnożenia tak licznika, iako i miano-wnika, przez tegoż samego mianownika gdy mianownik iuż iest kwadratém, albo gdy takim można go uczynić, mnożąc przez mnieyszą iaką od mianownika liczbę, tak licznika, iako i mianownika. Naprzykład chcąc wyciągnąć pierwiastek z $\frac{3}{4}$; wyciągniymy go z 3. i podzielmy przez 2; chcąc mieć pierwiastek z $\frac{5}{12}$, rozmnożmy 5, i 12, przez 3, a maiąc z tąd $\frac{15}{36}$; wyciągniémy pierwiastek z 15, i podzielimy przez 6. pierwiastek z 15, będzie prawie 4. odtrąciwszy $\frac{1}{8}$, to iest będzie $\frac{31}{8}$ więc pierwiastek z $\frac{5}{12}$, będzie $\frac{31}{48}$ kwadrat albowiém z $\frac{31}{48}$. iest $\frac{961}{2304}$. a $\frac{5}{12}$ tyle znaczy co $\frac{960}{2304}$: a zatém uchybienie iest tylko w $\frac{1}{2304}$.

ROZDZIAŁ VI.

O dodawaniu i odéymowaniu kwadratów i zamienianiu ich na iakiekolwiek Figury prostokréślné.

141. *DEfin:* W troykącie prostokątnym bok przeciwny prostemu kątowi nazywać będziémy liniią *Przeciwprostokątną* albo iedném słowém: *Przeciwprostokątną* Hypothenusa.

142. *Twierdz*: 1. Kwadrat zrobiony na przeciwprostokątnéy troykąta prostokątnego

nego, równa się summie kwadratów z dwóch innych boków tegoż troykąta.

Prawdę twierdzenia tego okazać naprzód potrzeba na troykącie prostokątnym równo-ramiennym, to iest maiącym dwa boki równe; dowodząc: że kwadrat zrobiony na przekątnéy kwadratu, dwa razy iest od tegoż kwadratu większy:

Niech będzie: ABCD, kwadrat, którego przekątna AC. Przeciągniymy AB, do E, i CB, do F, tak, aby BE, i BF, równe były AB. Poprowadźmy liniie: AF, CE i EF, czworokąt ACEF, będzie kwadratém przekątnéy AC, i będzie dwa razy większy od kwadratu ABCD. Tab: VIII. Fig. 8.

Jakoż cztéry troykąty: ABC, ABF, EBC, i EBF, mogą przystać do siebie; bo maią wszystkie kąty przy B proste; i boki przy nich równe; a zatém liniie AC, CE, EF i AF, będą wszystkie równe. Każdy oprócz tego kąt w czworokącie ACEF, iest prosty, bo złożony z dwóch kątów połprostych, iak naprzykład kąt ACE, złożony iest z kątów półprostych ECA, BCE; więc czworokąt ACEF iest prostokątém maiącym boki wszystkie równe, a przeto iest kwadratém. Ten kwadrat ACEF, składa się z cztérech troykątów, z których każdy przystać może do iednego z dwóch troykątów kwadratu ABCD. Że tedy takich troykątów iest cztéry w kwadracie ACEF, iakich iest dwa w kwadracie ABCD;

kwadrat więc przekątnéy AC, ieſt dwa r
zy większy od kwadratu tego, któreg
bokiém ieſt ta przekątna.

143. *Wniosek:* Aby dodać dwa kwadra
ty równe, trzeba zrobić troykąt proſto
kątny równoramienny, którego boki prz
kącie proſtym byłyby równe, bokowi ie
dnego z dwóch kwadratów, a przeciw
proſtokątna tego troykąta, będzie bokié
kwadratu równego ſummie dwóch tam
tych kwadratów.

Można ieszcze, nim ſię do ogólneg
dowodzenia, przyſtąpi, przytoczyć n
które przypadki ſzczególne, gdzie trz
boki troykąta proſtokątnego będą w licz
bach wyrażone. Obacz na Figurze
Fig. 3. gdzie trzy boki troykąta proſtokątneg
wyrażone przez liczby: 5,4,3, w cz
ściach równych, naprzykład w calac
kwadraty tych liczb ſą, 25, 16, 9, caló
kwadratowych: i piérwszy kwadrat rów
ſię ſummie dwóch oſtatnich.

INNE PRZYKŁADY.

Przeciwproſtokątne		*Boki.*		
13.	- - -	12	-	5
17.	- - -	15	-	8.
25.	- - -	24	-	7.

Dowodzenie ogólne, które teraz damy
można obiaśnić na kwadratach z kart
grubey wyrzniętych.

Niech będą dwa iakiekolwiek kwadraty: Fig. 4.
ABCD i AEFG; znaydziemy kwadrat rów-
ny ich ſummie w ten ſpoſób. Poſtawmy
naprzód te kwadraty, ieden przy drugim
tak, aby dwa ich boki AD i AG, ſtykały
ſię, i iednę liniią czyniły DG. Bok AG
mnieyszego kwadratu, przenieśmy po-
tém na bok AD, większego kwadratu, od
D, do I. Poprowadźmy linie IF i IC. Troy-
kąty proſtokątne GF, CID maią boki przy-
ległe kątowi proſtému, równe bokom kwa-
dratów obydwoch. Trzeba więc dowieśdź
że kwadrat przeciwproſtokątnéy IF, albo
IC, równy ieſt ſummie kwadratów z GI, i
GF, albo z DC, i DI. Wyrznąwszy kartę
wzdłuż linii IF, i IC, przyłożmy, troykąta
IDC, bok DC, na iego równym boku BC,
bok DI, przypadnie na BH, przedłużeniu
boku AB; a to z téy przyczyny, że obadwa
ſą kąty proſte D, i B; bok zatém trzeci IC,
weźmie położenie HC; będzie więc troy-
kąt CBH, równy troykątowi CDI. Podo-
bnie i drugiego troykąta IGF, bok IG,
przyſtanie zupełnie do boku HF, ſobie ró-
wnego, ponieważ IG, równa ſię AD, i AD,
równa ſię AB, a AB, równa ſię HE; bok GF,
przypadnie na równy ſobie bok EF: a IF,
weźmie położenie HF, będzie więc troy-
kąt FEH, równy troykątowi FGI. Czwo-
rokąt, który ſię zrobi z cztérech przeciw-
proſtokątnych CI, IF. FH, HC, będzie
miał wszyſtkie kąty proſte, bo kąt naprzy-

kład IFH, równa się summie kątów IFE, IE H, które równie czynią kąt prosty, iak czyniły kąty IFE i EFG. Ten więc czworok iest razém i prostokątém maiącym wszystkie boki równe, a zatém iest kwadratém który to kwadrat równa się summie dwóch kwadratów pod nych; a zrobiony iest n przeką néy troykąta prostokątnego, maiącego za boki przyległe kątowi prost mu te same, które były bokami tych kwadratów.

Dowodzenie następuiące powinno té iaśniéy bydź wyłozone, im prościey ie szcze od piérwszego tę prawdę okazuie i więcéy daie do czynienia dowcipow wiele także użyteeznych wniosków niego wypływa.

Tab. IX. Fig. 1. Niech będzie troykąt ABC, prostok tny przy C. Na trzech bokach iego AB AC, BC, wystawmy trzy kwadraty. ABDE ACFG, BCHI. Kwadrat ABDE równ będzie summie dwóch innych: ACGF, BCHI.

Z wierzchołku kąta prostego spuśćm na przeciwprostokątną AB; prostopadł CL, przeciągniymy ią aż do boku ED do M.

Pokazać teraz trzeba, że kwadrat BCHI równy iest prostokątowi BDML, a kwadrat ACFG, prostokątowi AEML a zatém obadwa razém kwadraty równe kwadratowi ABDE.

Pociągniymy liniią CD; troykąt BDC, będzie połową równoległoboku proſtokątnego BDML; bo obadwa maią ſpólną podſtawę BD, i na teyże ſamey równoodległey MC, ſą zakończone. (94.)

Pociągniymy liniią AI; troykąt BIA, będzie połową kwadratu BCHI, dla teyże, co wyżey przyczyny; bo obadwa także maią podſtawę ſpólną BI, i obadwa na iedney równoodległey AH, ſą zakończone.

Jeżeli tedy dowiedziemy, że troykąty ABI, CBD, ſą równe; iuż tem ſamem proſtokat BDML, równy będzie kwadratowi BCHI; bo kiedy połowy dwóch rzeczy ſą równe, to i dwie te rzeczy będą równe.

Te dwa troykąty mogą przyſtać do ſiebie; ponieważ bok AB, w jednym, równy ieſt bokowi BD, w drugim, bo obadwa te boki do iednego kwadratu należą; bok BI, w jednym, równy także ieſt bokowi BC, w drugim; kąty między temi bokami zawarte: ABI. CBD ſkładaią ſię obadwa z kąta proſtego i z kąta ABC: więc te dwa Tróykąty ſą równe w powierzchniach: a zatem i kwadrat BCHI, równy będzie Proſtokątowi BDML. Tymże ſamym ſpoſobem dowodzi ſię że kwadrat ACFG, równy ieſt Proſtokątowi AFML; to ieſt pociągnąwſzy liniie CE, BG, Troykąty BAG, EAC, mogą przyſtać do ſiebie, a zatem będą równe; kwadrat więc ACFG, że ieſt dwa razy większy od Troykąta BAG, będzie równy Proſtokąkątowi AEML, dwa razy także większe mu od Troykata EAC, (n)

144 *Wniosek.* Gdy od wierzchołka kąta prostego, w Troykącie prostokątny spuszczona będzie Prostopadła na przeciw prostokątną, kwadrat z boku iednego tego Troykata równy będzie prostokątowi zrobionemu z przeciw prostokątney, i z odcinka uczynionego przez Prostopadłą, przyległego temuż Troykąta bokowi którego kwadrat bierze się. Tak naprzykład kwadrat boku AC, to iest ACFG, równy iest Prostokatowi z Przeciwprostokątney AB, albo AE i z odcinka AL, to iest Prostokątowi AEML, iako się wyżey pokazało, Podobnie i kwadrat drugiego boku BC, to iest BCHI, równy iest Prostokątowi z Przeciw prostokątney AB, albo BD, z odcinka BL, to iest Prostkątowi BDML,

145 *Zagadn:* 1. Maiąc dane dwa kwadraty, zrobić kwadrat równy summie, albo ich różnicy,

---

(n) *Sposob postępowania w tém dowodzeniu, może służyć za wzór do innych dowodzeń przydłuższych i z wielu złożonych. Podzieliliśmy na części, z każdą osobnośmy się obeszli w tych samych częściach były znowu uczynione nowe podziały, niezawsze iedne od drugich i każdy podział w szczególności dowodzony. Linie nie były razem prowadzone, ale wtedy dopiero, gdy były potrzebne. Tą ostatnia uwaga powinna być między innemi na pamięci w dowodzeniu twierdzeń złożonych, gdzie gdyby wiele razem linii prowadziło się na figurze, nie małą trudność zadał by to Uczniom niedobrze ieszcze w takowe działania wprawionym.*

1. Zrobmy kąt prosty, którego ramionami byłyby boki dwóch kwadratów danych. Pociągnąwszy przeciw prostokątną, ta będzie bokiem kwadratu równego summie tamtych dwóch kwadratów.

2. Zrobmy kąt prosty, dawszy mu za iedno ramie bok mnieyszego kwadratu. Od końca tego ramienia, promieniem równym bokowi większego kwadratu, nakreślmy łuk koła, któryby przecinał ramie drugie kąta prostego, to przecięcie naznaczy długość tego drugiego ramienia, z którego wyprowadziwszy kwadrat; ten będzie równy różnicy dwóch kwadratów danych.

Gdyby kwadraty dane były równe rozwiązanie byłoby ieszcze łatwieysze.

Przystosowanie zagadnienia, poprzedzaiącego, do wynalezienia innych kwadratów.

146. Jużeśmy pokazali, że kwadrat Przekątney iest dwa razy większy od kwadratu, którego iest ta Przekątna. Aby zrobić kwadrat równy summie trzech kwadratów równych, czyli aby potroić iaki kwadrat; znalazłszy naprzód kwadrat podwóyny, możnaby mu przydać znowu kwadrat poiedyńczy, ale też można i ieszcze lepiey tak sobie postąpić. Kwadrat potróyny iest różnicą kwadratu poczwornego, od kwadratu Poiedyńczego. Zrobmyż więc Troykąt prostokątny którego bokiem iednym byłby bok kwadratu danego, a Przeciw prostokątną

daymy mu dwa razy większą od tego boku: bok drugi, który przypadnie w tym, że Tróykącie będzie taki, iakiego nam potrzeba, abyśmy mieli kwadrat potroyny.

147. *Uwaga*, Troykąt Prostokątny którego Przeciwprostokątna iest dwa razy tak wielka, iak iest wielkie ramie iednego kąta prostego; ten, mówię, Troykąt dwa razy iest mnieyszy od Troykąta równobocznego którego połową podstawy byłoby ramię iedno kąta prostego, a drugie byłoby wysokością iego: a zatém, aby potroić iaki kwadrat, dosyć iest na podstwie dwa razy większy od boku tego kwadratu zrobić Troykąt Równoboczny, a wysokość tego Troykąta okaże wielkość boku, na którym wystawić mamy kwadrat potróyny.

148. Aby zrobić cztéry razy większy kwadrat od tego który iest dany: trzeba tylko kwadratu danego bok podwoić.

149 Aby zrobić kwadrat pięć razy większy od podanego, trzeba przy kącie prostym postawić dwa ramiona: iedno równe bokowi kwadratu danego, drugie, dwarazy tak wielkie, a przeciw prostokątna będzie bokiem kwadratu pięć razy większego.

150. Aby zrobić kwadrat sześć razy większy od podanego, trzeba albo dodać do siebie kwadrat poczwórny i podwoyny; albo też kwadrat podwóyny potroić;

oprowadziwszy w danym kwadracie Przekątną, i tę podwoioną, wziąwszy za bok Tróykąta równobocznego, którego wysokość oznaczy bok kwadratu sześć razy większego.

151. Aby zrobić kwadrat siedm razy większy od danego, trzeba dodać kwadrat poczworny i potroyny, dawszy kąt prosty między bokami tych dwóch kwadratów: a na przeciw prostokątney kwadrat postawiwszy; ten będzie siedm razy większy od danego.

152. Aby zrobić kwadrat ośm razy większy od podanego, trzeba go albo podwoić, i podwoiony cztéry razy pomnożyć, dawszy mu bok dwa razy większy od boku kwadratu podwoionego; albo też zrobić kwadrat równy Różnicy między kwadratem danym, i kwadratem dziewięć razy większym od niego; postawiwszy na ten koniec Tróykąt prostokątny, któremu za ramie iedno przy kącie prostym damy bok kwadratu podanego, a za przeciwprostokątną, linią trzy razy od tego boku większą. Ramie drugie, które przypadnie w tym Troykącie, oznaczy bok kwadratu ośm razy większego od danego.

153. Aby zrobić kwadrat dziewięć razy większy od podanego, trzeba mu dać bok, trzy razy od podanego większy.

154. Aby zrobić kwadrat dziesięć razy większy od podanego; trzeba wziąć sum-

mę kwadratu podanego, i dziewięć razy większego.

155. Aby zrobić kwadrat iedenaście razy większy od podanego, trzeba wziąść summę kwadratu: dwa razy, i dziewięć razy tak wielkiego, iak ieſt podany.

156. Zrobić kwadrat dwanaście razy więkſzy od podanego, trzeba podwoić bok kwadratu potróynego, i na tym boku potróynym kwadrat poſtawić.

157. Aby zrobić kwadrat trzynaście razy więkſzy od podanego: trzeba wziąść ſummę kwadratu poczwornego, i dziewięć razy więkſzego niż ieſt kwadrat podany; albo też poſtawić Troykat proſtokątny i dać dwa ramiona, iedno trzy razy, a drugie dwa razy więkſze od boku kwadratu podanego; przeciwproſtokątna oznaczy bok kwadratu trzynaście razy więkſzego od podanego i t. d.

158. Wnioſek z zagadnienia poprzedzaiącego; że kwadrat ramienia iednego przy kącie proſtym, równy ieſt Proſtokątowi i z odcinka iey przyległego temuż ramieniowi, przez proſtopadłą zrobionego; ten mówię wnioſek daie ſpoſob ogólnieyſzy, a czaſem i proſtszy rozwiązania zagadnień w przyſtoſowaniu położonych.

Jakoż ieżeli przeciwproſtokątna ieſt dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielka; iak odcinek przyległy iednemu bokowi; proſtokąt z tey przeciwproſtokątney i z tego odcinka, będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. odcinka; a zatém i kwadrat boku przyległego temu odcinkowi będzie też dwa, trzy, cztery i t. d. razy tak wielki iak kwadrat tego odcinka, co iasno bydź powinno, maiąc w pamięci to, co się, powiedziało w Arytmetyce na karcie 66. i następuiących o mierzeniu Prostokątów, a co tu nie zawadzi powtórzyć.

159. Podanie przybrane (Lemma.) (o) Gdy od punktu któregokolwiek na okręgu koła, poprowadzone będą dwie linije do dwóch końców średnicy; kąt przy tym punkcie zrobiony, i zawarty między dwiema temi liniiami będzie prosty.

Niech będzie AKB, półkole, którego AB, iest średnią. Weźmy iakikolwiek punkt naprzykład K, na okręgu tego półkoła, i poprowadźmy od tego punktu linije AK, BK, do końców średnicy. Kąt zrobiony przez te dwie liniie iest prosty. Fig 21

Przygotowanie. Pociągniymy promień CK.

Dowodź: Troykąt AKC, iest równoramienny, bo AC, równa się CK; więc i kąty A, i CKA, na przeciw tym bokom stoiące będą równe; toż mówić i o Tróykącie CKB; a zatém w Troykącie AKB. kąt przy K, będzie równy summie kątów A i

(o) *Lemma nazywamy podaniem przybraném, że nie należy właściwie do tey rzeczy, o którey mowa, i że się przybiera czasem z inney części Matematyki dla przysposobienia nas do łatwieyszego zrozumienia tego, co nastąpuie.*

B; a ponieważ razem z temi dwóma kątami, czyni dwa kąty proste, więc sam przez się będzie czynił kąt ieden prosty.

160. Zagadn: 2. Znaleśdź kwadrat, któryby kilka całe razy, lub więcéy zamykał w sobie kwadrat dany.

Fig. 3. Niech AC, zamyka tyle razy w sobie AB, ile razy kwadrat którego szukamy, ma w sobie zamykać ten, który iest dany. Na AC, iako na średnicy nakreślmy półkole. Od punktu B, wyprowadźmy prostopadłą BD, przecinaiącą półkole w Punkcie K. Liniia AK, będzie służyła za bok kwadratowi żądanému.

161. Uwaga. Trzeba tu pokazać widocznie Uczniom pożyteczność większą i ogólnieyszą Jeometryi, niżeli Arytmetyki; ponieważ w Arytmetyce nie można zupełnie wyciągać Pierwiastku kwadratowego z liczb całych, które są podwóyne, potróyne, poszóstne i t. d. innych liczb kwadratowych. I tak nie można nawet w ułomkach znaleśdź Pierwiastku kwadratowego liczb 2. 3. 5. 6. i t. d. a w Jeometryi, iako się pokazało, znayduiemy i wyznaczamy boki kwadratów podwóynych, potróynych, poszóstnych i t. d.

Można więc powiedzieć, że niepodobność w wyznaczeniu pierwszych ilości, których kwadraty byłyby podwóyne, potróyne, i t. d. innych kwadratów, nie iest w sobie, ale pochodzi tylko od sposobu, którego używamy.

162. *Zagadn.* 3. Maiąc dany Prostokąt, zamienić go na kwadrat iemu równy.

Rozwiąz. Na większy bok prostokąta, przenieśmy długość boku iego mnieyszego, tak, aby koniec ieden tego boku mnieyszego schodził się z końcem iednym boku większego. Na tymże boku większym, iako na średnicy nakreślmy półkole, a do końca drugiego boku mnieyszego nieschodzącego się z końcem drugim boku większego wyprowadźmy Prostopadłą, i od punktu przecięcia teyże Prostopadłey z połkolem, poprowadźmy liniią do tego końca średnicy, który schodzi się z bokiem mnieyszym Prostokąta. Ta ostatniá liniiá będzie bokiem kwadratu równego Prostokątowi.

164. *Wniosek*, Widzieliśmy w Rozdziale V. iako Figurę każdą prostokreślną można zamienić na prostokąt. Teraz się pokazało iak można Prostokąt każdy zamienić na kwadrat: więc każda Figura Prostokreślna, może bydź i na kwadrat zamieniona.

W Troykącie maiącym kąt ieden rozwarty, kwadrat boku przeciwnego temu kątowi większy iest od summy kwadratow dwóch innych bokow; mnieyszy zaś byłby kwadrt boku przeciwnngo kątowi ostremu od summy kwadratów dwóch innych boków w iednymże Troykącie.

Dwa następuiące Twierdzenia, pokażą

Różnicę w Tróykącie między kwadratt boku tak przeciwnego kątowi roztwartemu, iako i przeciwnego kątowi ostrem i kwadratowi dwóch innych boków.

165. *Twierdz.* 2. W Troykącie mai cym kąt roztwarty, spuściwszy prosto padłą od iednego końca boku przeciwne go kątowi roztwartemu, na inny bo którybykolwiek; kwadrat tamtego boku będzie równy summie kwadratów dwóc innych boków i dwa razy wziętem Prostkątowi z boku, na który prostopa dła spuszczoná, rozmnożonego przez od ległość od teyże Prostopadłey, wierz chołka kąta roztwartego.

Fig: 4 Niech będzie Tróykąt: ABC. który m kąt roztwarty przy C, Od końca, A, bok AB, przeciwnego temu kątowi, spuśćm na BC, prostopadłą AD. Kwadrat z AB równy będzie summie kwadratów z AB i z BC, i dwa razy wziętemu Prostokąto wi z BC, przez CD.

Przygotowanie. Na linii BD, zrobmy kwadrat BDEF, i na dwóch bokach iego weźmy FG, i FL równe BC; poprowadźmy przez G, i L, liniie GI, i LC,

Dowodz. Prostokąt FGKL; iest kwadratem z BC; prostokąt CDIK iest kwadratem CD. a prostokąty obydwa BCKG i EIKL, są z BC przez CD.

Kwadrat z AB, równa się summie kwadratowi z AD, z BD, to iest summie kwadratów z AD, z DC, i z BC, i dwa, razy

J. 123

wziętému proſtokątowi z BC, przez CD. Aże ſumma kwadratów z AD, i DC, równá ieſt kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy ieſt ſummie kwadratów z AC, i z BC, i dwa razy wziętému proſtokątowi z BC, przez CD.

166 *Przykład*. Niechby troykąt ACD był połową troykąta równobocznego; to ieſt niechby liniiá AC była połową linii CD. Proſtokąt z BC, przez CD, dwa razy wzięty, byłby równy proſtokątowi BC, przez CA, a ſam przez ſię byłby tylko iego połową. Ten przypadek ſzczególny można wyrazić w ſłowach następuiących. *W troykącie, którego kąt roztwarty równa ſię ſummie kąta proſtego i trzéciey części iego*: kwadrat boku przeciwnego kątowi roztwartému, równy ieſt ſummie kwadratów innych dwóch boków i proſtokątowi z tychże boków.

167. *Twiérdz*: 3. W Troykącie iakimkolwiek uważaiąc ieden kąt oſtry, a od końca boku przeciwnego temu kątowi ſpuściwſzy proſtopadłą na iedno ramie iego; kwadrat tego boku równać ſię będzie różnicy między ſummą kwadratów ramion tydwóch kąta tego oſtrego, i dwa razy wziętym proſtokątém z ramienia, na które proſtopadłá ieſt spuszczoná i z odległości wierzchołka kąta oſtrego od proſtopadłéy. Niech będzie troykąt ABC, w którym kąt C ieſt oſtry, od końca A, boku przeciwnego AB, ſpuśćmy proſtopadłą AD, na ramię BC, kąta ostrego. Kwadrat z AB, równy będzie różnicy między summą kwadratów = *Fig V.*

AC, i z BC, i dwa razy wziętym prostokątem którego bokami będą BC, i CD.

Przygotowanie, Zrobmy kwadrat z CB, BCEF. Naznaczmy liniié FG, FL równe AB; i CI równą CD, prowadźmy ieszcze linie: DL, i IG. Przeciągniymy DL, i CE do M i N, tak, aby LM, EN równe były CD. Złączmy ich końce liniią MN. Prostokąt ELMN, równy będzie kwadratowi z CD.

Dowodz; Kwadrat z AB równy iest summie kwadratów z AD, i z BD. Kwadrat z BD, to iest FGKL, równy iest kwadratowi BCEF, z BC, mniéy summą dwóch prostokątów: BGIC, i EIKL, albo dodawszy, i odiawszy kwadrat ELMN, z CD; kwadrat z BD będzie równy summie kwadratów BCEF, i ELMN, mniéy summą prostokątów BGIC, EIKL, i kwadratu ELMN, czyli mniéy summą prostokątów BGIC, i IKMN; które obadwa są prostokątami z boków BC, i CD; a zatém kwadrat z AB, iest równy summie kwadratów z AD, z CD, i z BC, mniéy dwa razy wziętym prostokątem z BC, przez CD. A że summa kwadratów z AD, i CD, równa się kwadratowi z AC, więc kwadrat z AB, równy iest summie kwadratów z AC z BC mniéy dwa razy wziętym prostokątém z BC, przez CD.

168 *Przykład*. Niechby troykąt ACD był połową troykąta równobocznego; zatém AC, dwa razy większa od CD. W takim razie kwadrat z AB, będzie równy summie kwadratów z AC, i z BC, mniéy prosto-

kątem z tychże boków AC, i BC. Co tak można wyrazić: *W Troykącie, którego kąt tenże równa się kątowi prostemu, mniéy trzécią iégo częścią; kwadrat boku przeciwnego temu kątowi, równać się będzie różnicy między summą kwadratów z ramion tegoż kąta, i prostokątem z tychże ramion.*

169. *Wnioski i przystosowania dwóch twierdzeń ostatnich*

1. Jeżeli w troykącie kwadrat iednego boku równy iest summie kwadratów z ramion kąta przeciwnego, albo większy lub mniéyszy od téy summy; kąt też przeciwny będzie prosty, albo roztwarty, lub ostry.

2. W każdym troykącie, prostokąt dwa razy wzięty, z boku któregokolwiek i z odległości wiérzchołka kąta iednego przy tym boku, od prostopadłéy spuszczonéy na tenże bok, z wiérzchołka kąta iemu przeciwnego, ten mówię dwa razy wzięty prostokąt, równy iest różnicy między summą kwadratów z dwóch ramion, i kwadratóm boku przeciwnego temu kątowi; to iest równy będzie summie tych dwóch kwadratów mniéy kwadratém boku przeciwnego, gdy kąt iest ostry; a gdy roztwarty, to ten prostokąt dwa razy wzięty, równy będzie kwadratowi boku przeciwnego, mniéy summą kwadratów z ramion; a zatém iéżeli wiadome nam są w liczbach boki troykąta; dóydziémy ztąd w liczbach i prostokąta tego podwóynego: dóydziémy i odcinek (Segmentum) podstawy, zawartego między

wiérzchołkiem kąta, o którym ieſt rzecz, i proſtopadłą. Aże kwadrat wyſokości troykąta równa ſię różnicy między kwadratem boku przyległego odcinkowi, i kwadratem tegoż odcinka; więc dóydziémy i wyſokości troykąta, a zatém i powiérzchni iégo,

170. *Przykład.* 1. Niéch będą trzy boki: BC, AB, i AC w liczbach oznaczona: piérwſzy 21, drugi 20, trzéci 13.

Kwadrat z AB, ieſt: 400.

Summa kwadratów z BC, i AC, ieſt ſumma z 441. i z 169, to ieſt; 610.

Ta ſumma ponieważ ieſt większá, niż kwadrat z AB, przeto kąt przy C, ieſt oſtry.

Różnica między tą ſummą i kwadratem z AB, ieſt 210, którá to różnica równa ſię podwóynemu proſtokątowi z BC, przez CD, czyli liczbie znaczącéy długość boku BC, rozmnożonéy przez liczbę oznaczaiącą długość odcinka CD, dwa razy wziętą. Ten proſtokąt poiedyńczy wyrazi ſię więc przez 105. Aże BC oznaczone ieſt przez 21, więc długość CD, będzie 5. Kwadrat z AD równa ſię różnicy między kwadratem z AC i kwadratem z CD; to ieſt różnicy między 169 i 25: ta różnica ieſt: 144. więc AD. będzie oznaczone przez 12. Powiérzchnia troykąta CAB, ieſt połową proſtokąta z BC, przez AD; to ieſt 126:

171, *Przykład.* 2. Niéch będzie BC, 11, AB 20, AC 13. Kwadrat z AB, będzie 400.

Summa kwadratów z BC, i z AC; będzie ſumma z 121. i z 169; toſt: 290.

Ta ſumma ponieważ ieſt mniéyſza od kwadratu z AB; przeto kąt przy C, będzie roztwarty.

Różnica między tym kwadratém, i tą ſummą ieſt: 110; która to różnica równa ſię podwóynemu proſtokątowi z BC, przez CD, a zatém poiedyńczy proſtokąt bedzie = 55. Aże BC, równa ſię 11; więc CD. będzie ſię równać 5.

Kwadrat z AD, równa ſię różnicy między kwadratem z AC, i kwadratem z CD; to ieſt różnicy między 169 i 25. Ta różnica ieſt: 144. więc AD, będzie = 12. a powiérzchniá troykąta będzie 6. razy 11, to ieſt 66. Trzeba na więcéy ieſzcze przykładach wprawiać uczniów, dobieraiąc po więkſzey części liczb takich, aby pierwiaſtki kwadratowe zupełnie w liczbach całkowitych wychodziły.

Przykłady: boki podstawa

51 i 25 - 52 albo 38
52 i 29 - 69 albo 27
17 i 39 - 44, albo 38
168 i 87 - 95, albo 31.

172. *Przeſtroga. 1.* Dla więkſzéy wygody używać na potém będziémy ſkróconych wyrażeń, których ku znaceniu wykładamy.

Znak ten: = wyrażać będzie równość między dwiema ilościami.

Znak: * gdzie iédna liniiá proſto drugą przecina, wyrażać będzie oddanie iednéy ilości od drugiéy: i wymawia ſię tém ſłówem; *więcéy* (plus) Naprzykład, 4. * 5 = 9. wymawia ſię cztéry więcéy piącią, równa ſię dziéwięciom.

Znak; — wyrażać będzie odéymowanie iednéy ilości od drugiéy: i wymawia ſię tém ſłowém: *mniey*, (minus) naprzykład: $7 - 4 = 3$; wymawia ſię ſiédm mniéy cztérema, równa ſię trzém.

Dla oznaczenia rozmnożenia liczb w Arytmetyce; albo proſtokąta z dwóch linii w Jeometryi, używać będziémy znaku: $\times$ to ieſt krzyża ukośnego: naprzykład 4×3, znaczy cztéry przez trzy rozmnożone, $AB \times CD$, znaczy proſtokąt z linii AB, i CD; albo proſtokąt z AB, przez CD, Dziélenie oznacza ſię tym znakiém: to ieſt dwiémi kropkami, iédną pod drugą, które kładą ſię po ilości podziélnéy, a przed ilością dziélącą: naprzykład $6 : 2$. znaczy 6, przez 2 podzielone. Można także dziélenie i ſpoſobém ułomków wyrażać, kładąc za licznika ilość podzielną a za mianownika, ilość dzielącą kwadrat iakiéy ilości, naprzykład linii AB, iédnym z tych dwóch spoſobem zwykł ſię wyrażać AB^2, albo AB^{q} częściéy iédnak piérwſzym.

I tak piérwſzé twiérdzenie można było w ten ſpoſob wyrazić:

Fig: 1. $AB^2 = AC^2 + BC^2$

Fig: 4 Szóſte $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \times CD$,

Fig: 5 Siódme $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \times CD$,

Wſzyſtkie trzy tych twiérdzeń przypadki takby razem mogły bydź wyrażone: $AB^2 = AC^2 + BC^2 \pm 2BC \times CD$. W tym razie, gdzie kąt ieſt proſty, linia CD, a zatym i proſtkąt $BC \times CD$, niknie.

173. *Przeſtroga* 2. Trzéba oſtrzedz Uczniów, aby używaiąc tych ſkróconych wyrazów, miéli zawſze przed oczyma figury ſtoſuiące ſię do tychże wyrazów, i dobrze ie rozważali. Należy także uſtnie

piérwéy wyrazić każde twiérdzenie lub zagadniénie, nim się przystąpi do pisania ich znakami wyraz skracaiącemi. I owszem lépiéyby było, aby póty tych znaków nie używać, póki zupełnéy wprawy nie nabiorą Uczniowie w wyłożeniu ustném, a iasném twiérdzeń, i zagadnień im podanych,

ROZDZIAŁ. VII.

O Liniiach stycznych z kołem; o kątach przy okręgu koła; i o kątach, których wierzchołki są między okręgiem albo za okręgiém.

174. DEfinicya. Koła równe są te, których promienie są równé; i takie koła przystać mogą od siebie.

Gdyby to podanie nie zdawało się bydź tak oczewistém, aby go przypuścić można za Definicyą; tedy możnaby dowiéśdź go tymże samym sposobem, którym wyłożyliśmy w Rozdziele I. tworzenie się koła: (8) pokazuiąc, iż dwie liniie równe, obrótém, swoim około iednego i nie poruszonego końca, nie mogą zrobić, tylko równe dwa koła; albo też uważaiąc te dwie liniie, iak gdyby iedna leżała na drugiéy, i iak gdyby obiédwie razém czyniły ten obrót; w takim razie, i kiekolwiek będzie położenie spólne tych dwóch linii, ponieważ zawsze iedna do drugiéy przystaie, więc i te miéysca, które przéyśdź maią w tymże samym czasie, i te, które iuż przeszły w czasach równych, rachuiąc od początku ich obrótu przystałyby do siebie; a zatém i całe te miéysca, czyli koła, któreby zrobiły, mogłyby też do siebie przystać.

Końce tych dwóch linii tak się obraciących, w czasach równych, zrobiłyby łuki równe; a zatém w kołach równych, kąty przy ich środkach równe, zamykaią swemi ramionami łuki równe.

Wzaiémnie gdy w równych kołach, równe łuki weźmiémy, kąty w środkach tych kół, które między ramionami swémi zamykaią te łuki, będą równe.

Tab;10. *Fig*: 1. Niéch będą dwa łuki równe: BA i ba, w dwóch równych kołach: Kąty ACB, i acb, które wiérzchółki swoié maią w środkach tych kół, i które zamykaią swemi ramionami te łuki, są też równe, Bo gdyby kąty ACB, acb, nie były równe, kąt naprzykład ACB, gdyby był mniéyszy od kąta acb; to kąt inny, naprzykład DCB, byłby równy kątowi acb; a zatém i łuki DB, ab, byłyby równe; ale że wzięliśmy za równe łuki AB i ab, więc łuki także AB i DB, byłyby równe, co iest nie podobna, chyba żeby liniie CD, i CA iednę tylko linią czyniły, zupełnie do siebie przystaiąc.

Część koła zawartą między dwóma promieniami i łukiem, zwać będziémy wycinkiém koła. (Sector Circuli.)

Z tego, co się wyżéy powiedziało, wnieść można, że w równych kołach i wycinki te przystać mogą do siébie których kąty, albo łuki są równe; a wzaiemnie, że kąty i łuki są równe w tych wycinkach, które przystać do siébie mogą.

W kołach równych, łuki równe, maią też i cieciwy równe. Jakoż w takich dwóch kołach troykąty równoramiénne złożone z cięciwy i z dwóch promieni, mogą przyſtać do ſiebie, dla równości promiéni, i kątów w środku, które na równych łukach wſpieraią ſię.

Wzaiemnie, ieżeli w kołach równych cięnciwy ſą równe, łuki też równe będą: bo troykąty złożone z tych cięnciw, i z promieni równych, maiąc trzy boki równe, mogą przyſtać od ſiébie, i kąty w środku, zrobione przez dwa promiénie będą równe, a zatém i łuki im przeciwne, równe będą.

Przez odcinek koła(ſegmentum Circuli) rozumieć będziémy miéysce zawarte między łukiém i cięciwą.

Gdy cięciwa nie ieſt razem średnicą, dzieli koło na dwa odcinki, ieden większy, a drugi mniéyszy od półkoła. Takie dwa odcinki, nazywaią ſię odcinkami *na przémian*. (Alterna.)

W dwóch równych kołach, ieżeli dwa odcinki maią równe łuki, przyſtać do ſiébie mogą. Jakoż te odcinki ſą różnicami dwóch wycinków maiących równe łuki od dwóch troykątów, które za podſtawy maią cienciwy tychże łukow równych.

A że te wycinki mogą przyſtać do ſiébie, bo maią łuki równe; troykąty mogą też do ſiébie przyſtać; bo maią wſzyſtkie trzy boki równe.

Więc i dwa odcinki, przyſtać mogą do ſiebie, będąc różnicą dwóch troykątów równych, od dwóch wycinków równych.

Wszyſtko to co ſię teraz powiedziało, trzeba przyſtoſować do łuków, cienciw, wycinków, odcinków iédnego koła.

Te podania powinneby się wydawać oczywistémi, i nie potrzebować wcale żadnego dowodzenia, i z téy przyczyny są bardzo zdatne, aby się na nich wprawiali Uczniowie w tłumaczenie się iak naydokładnieyſze z tych nawet wyobrażeń, które im iuż wystawuią rzecz iaką dosyć iaśnie i aby tym sposobem wyobrażenia w sobie proste, prościéyszémi ieszcze czynić uczyli się.

175. *Twierdz:* 1 Prostopadła ciągnioná od środka cienciwy, przechodzi przez środek koła.

2. Liniiá prostá prowadzona od środka koła do środka cienciwy, iest do niéy prostopadłą.

3. Prostopadłá od środka koła spuszczoná na cięciwę, przypada na iéy środek.

Niech będzie AB, cienciwa w kole, którego środek C, a promień CA.

1. Prostopadła od środka D, cienciwy wystawioná, przechodzi przez środek koła.

Dowodz: W téy prostopadłéy wszystkie punkta iednakowo są odległe od dwóch końców cienciwy, aże i śródek koła iednakowo iest odlégły od dwóch końców téyże cienciwy; więc będzie też znaydował się na téy prostopadłey.

2. Liniiá CD, od środka koła poprowadzoná do środka cienciwy, iest do niéy prostopadłą.

Dowodz: Troykąty: DCA, DCB, maią wszystkie boki równe; więc mogą przystać do siébie, a w szczególności kąty przy D, są równe, a będąc kątami przyległémi, obadwa profte bydź muszą, a zatém liniiá CD, ieft proftopadłá do AB,

3 Proftopadłá CD, fpuszczoná od środka koła na cięnciwę AB, przypada na iéy środek.

Dowodz: W Troykącie równoramiénnym ACB, kąty A i B, fa równe: więc w troykątach proftokątnych: ACD. i BCD, wfzyftkie kąty równe będą iedne względem drugich; aże i boki AC, CB, fą równe, więc te dwa troykąty przyftać do fiébie mogą, a w fzczególności liniié AD, i BD, fą równe.

176. *Wniofek.* Koło nie może mieć więcéy, iak dwa punkta fpólne z liniią prostą; bo gdyby mogło mieć więcéy takich fpólnych punktów naprzykład trzy: złączywfzy iedną liniią punkt piérwfzy z drugim, a drugą punkt drugi z trzecim, i od środka koła poprowadziwfzy do tych dwóch linii dwie proftopadłe, te uczyniłyby troykąt maiący dwa kąty profte, co ieft nie podobná.

177. *Zagad:* 1. Maiąc dane trzy punkta, których położenie nie ieft w linii proftéy; nakréslić koło, któreby przez te trzy punkta przechodziło.

Rozwiąz: Ponieważ środek koła powinien fię znaydować na każdéy proftopadłéy poprowadzonéy od środka linii łączącéy dwa punkta znayduiące fię w kole; iézeli tedy piérwfzy z punktów danych złączémy liniią z drugim, a drugi z trzecim, i od środka tych dwóch linii poprowadzimy proftopadłe; te przetną fię w punkcie, który będzie środkiém koła maiącego przechodzić przez ſtrzy punkta dane.

178. *Przyſtoſowanie.* Znaleśdź środek koła danego.

Rozwiąz: Na okręgu koła weźmimy trzy iakiekolwiek punkta, a przez poprzedzaiące zagadnienie ſzukaymy środka koła przez te trzy punkta przechodzącego.

179. *Wnioſek.* Ponieważ proſtopadłe wyſtawione na środku dwóch linii łączących punkt ieden dany z dwóma innemi, nie mogą ſię przecinać tylko w jednym punkie; więc nie może bydź więcéy iak iedno koło przechodzące przez te trzy punkta; albo ieżeli dwa koła przechodziłyby przez te trzy punkta: toby nie były, tylko iédném w rzeczy ſamey kołém; a zatém gdy dwa koła ſię przecinaią, nie więcéy mogą mieć, iak dwa punkta ſpólne w przecięciach. Ta własność koła, że ie z trzech punktów danych wyznaczyć można, iako i ta druga; że wſzyſtkie iego promienie ſą równe; różni koło od wſzyſtkich krzywych linii; podobnie iako liniiá proſtá różni ſię przeto od krzywych linii, że doſyć iest mieć dwa punkta dane, aby ią wyznaczyć.

180. *Twierdz:* 2. Od końca promienia koła wyprowadziwſzy proſtopadłą do tegoż promienia; wſzyſtkie inne punkta téy proſtopadłéy będą za kołém.

Dowodz: Odległością któregokolwiek z tych innych punktów, od środka koła, ieſt przeciwproſtokątná troykata, którego bokiém iédnym ieſt promień koła; a że przeciw proſtokątná większá ieſt od iednego z boków troykąta; więc i odlégłość od śródka koła, punktu któregokolwiek na prostopadłéy, oprócz tego który iest końcém promiénia, większá iest od tégoż promiénia; a zatém każdy z tych punktów będzie za kołém.

171. *Defin:* Gdy prostá liniiá iéden tylko ma punkt spólny z okręgiém koła, taká liniiá nazywa się styczną z kołém (Tangens Circuli.)

182, *Zagadn:* 2. Maiąc dany punkt na okręgu koła, poprowadzić przez niégo styczną.

Rozwiąz: Punkt dany z śródkiém koła złączmy promiéniém; i od tégoż punktu wyprowadźmy prostopadłą do promiénia; a ta sama będzie i styczná z kołem w punkcie danym.

183. *Zagadn:* 3, Od punktu danego za kołem, poprowadzić do tegoż koła styczną.

Rozwiąz: Złączmy liniią, punkt dany z środkiem koła. Na téyże linii, iako na średnicy, nakréślmy półkole; punkt ten gdzie okrąg półkoła przecinać będzie koło dane, będzie tym samym punktem, do którego poprowadzona liniiá od punktu danego, będzie styczná z kołém (159.)

To zagadnienie dwoiako może bydź rozwiązane; gdyż półkole z jédnéy, lub z drugiéy strony średnicy nakréślić można.

184. *Twierdz:* 3. Od końca promiénia poprowadziwszy styczną z kołém, iézeli przez punkt, w którym się ta styczna koła dotyka, przeciągniémy inną iaką liniią prostą, ta przecinać będzie okrąg koła.

Dowodz: Promień koła ste prostopadły

do ſtycznéy w końcu tegoż promiénia, a zatém pochyły będzie do każdéy innéy linii; przez ten koniéc promiénia, to ieſt: punkt koła przechodzącéy. Poprowadziwſzy więc proſtopadłą od śródka koła do téy linii; ta proſtopadłá krótſza będzie od promiénia; bo promień będzie przciwproſtokątną tego troykąta, którego ta proſtopadła będzie tylko bokiém; aże koniec promienia iest na okręgu koła, więc koniec téy proſtopadłéy nie dóydzie do okręgu koła, Już tedy ieden punkt tey linii będzie w kole, a drugi w samym okręgu koła na końcu promienia; a zatém liniiá ta przechodząca przez koniec promiénia, ponieważ drugi swóy punkt ma w kole przecinać go muſi.

185. *Twiérdz:* 4. Jeżeli liniiá prostá iest styczną z kołém, będzie:

1. Promień poprowadzony od punktu tego, gdzie się liniiá styka z kołém, będzie do téy stycznéy prostopadłym.

Jakoż, gdyby promień do punktu tego poprowadzony, nie był do styczney prostopadłym, tędy liniiá inna prostopadła do tego promienia, i przechodząca przez iego koniéc, byłaby styczną z kołém, a ta pierwsza zamiast stykania się z kołém, przecinałaby go, iako się w poprzedzaiącém twiérdzeniu okazało.

2. Prostopadłá do stycznéy, od punktu dotknięcia ciągniona, przéchodzi przez środék koła.

Gdyby ta prostopadła nie przéchodziła przez środek koła, tedyby iédnak promiéń do tegoż punktu dotknięcia ciągniony był prostopadłym do stycznéy dwie pierwsze liczby, gdy dodane będą, summa ich 20, będzie też większa dwa razy od summy dwóch drugich liczb 6, i 4, to iest od 10. A przeciwnie gdy naprzykład 12, i 8; pierwsze większe iest dwa razy od 6, a drugie od 4, różnica między 12. i 8, to iest 4. dwa razy też większa będzie od różnicy między 6, i 4. to iest od 2.

Gdyby tego była potrzeba, możnaby i na liniiach to samo okazać.

Niech będzie Liniiá AB, większa dwa razy od CD, i AE większa także dwa razy od CF. Od punktu E naznaczywszy na linii AB, Liniie EG EH, równe liniiom FC, FD Liniie AG i BH, będą tak iedna, iako i druga oznaczać różnicę Linii AE, od CF: summa zaś tych dwóch linii AG, i BH, oznaczy różnicę całéy linii AB, od całéy linii CD. *Fig 6,*

189. *Wniosek.* Kąty przy okręgu koła, które ramionami swémi iednakowe łuki obéymuią, są równe; albo, co na iednoż wychodzi, kąty w tymże samym odcinku koła są równe. Że tak w saméy rzeczy iest co do kątów przynaymniéy ostrych, to iest: których ramiona obéymuią łuk mniészy od pół okręgu, wynika to z twierdzenia poprzedzaiącego. Z następuiącego zaś wnieść będzie łatwo można, że to samo ma miéysce i w kątach przy okręgu koła, których ramiona obéymuią okrąg większy od pół okręgu.

190. *Twierdz.* 6. Summa kątów w odcinkach na przemian, (174.) równa się dwóm kątom prostym; albo co iedno znaczy, ieżeli czworokąt iest kołém obwiedziony, summa kątów przeciwnych tego czworokąta, równa się dwóm kątom prostym.

Tab. II. Fig. 1. Niech cienciwa AB, dzieli koła na dwa odcinki, ADB, ACB; kąt ADB, w jednym odcinku, wraz z kątém ACB w drugim odcinku, wyrównywa dwóm kątom prostym; albo, summa kątów D- i C, czworokąta kołem obwiedzionego, równa się dwóm kątom prostym.

Przygotowanie. Poprowadźmy przekątna DC.

Dowodz. Kąty ADC, ABC, obéymuią obadwa ramionami swémi łuk ieden AC, mnieyszy od pół okręgu; więc są równe. Dla téyże przyczyny i kąty BDC, BAC, są równe. Summa tedy kątów ACD, BDC, to iest kąt ADB, równa się summie kątów ABC, BAC; i zatym summa kątów ADB, ACB równa iest summie trzech kątów Troykąta ABC; i ponieważ ta ostatnia summa wyrównywa dwóm kątom prostym, więc i tamta.

Powtórnie. Jeżeli cienciwa iest razém i średnicą, dzieli koło na dwa półkoła, a w każdém tym półkole, kąty są proste.

Jeżeli cienciwa nie iest średnicą: dzieli koło na dwa odcinki ieden większy, a drugi mnieyszy od pół okręgu; kąt w większym odcinku wspiera się na łuku mnieyszym od pół okręgu, i iest ostry; iednakowéy zawsze wielkości. Kąt zaś w mnieyszym odcinku wspiera się na łuku większym od pół okręgu, i iest roztwarty dopełniaiący zawsze dwóch kątów prostych, z kątém ostrym w drugim odcinku.

191. *Twierdz.* 7. Jeżeli od punktu w odcinku koła, lub za odcinkiém będącego, do końców podstawy tego odcinka poprowadziémy dwie linie, kąt między témi dwiéma

liniami zawarty będzie w pierwszym razie większy, a w drugim mieyszy od kąta w samym odcinku.

Niech będzie punkt D. w odcinku albo za odcinkiem CAB; poprowadźmy od punktu tego, do końców Podstawy AB, tegoż odcinka Liniie DA, DB, kąt ADB, będzie większy w pierwszym razie a mnieyszy w drugim, od kąta ACB.

Dowodz: W pierwszym razie kąt ADB. iest zewnętrzny Troykąta DBC, więc iest większy od iednego z wewnętrznych kątów tegoż Troykąta; to iest od kąta ACB, w samym odcinku.

W drugim razie kąt ACB iest zewnętrzny Troykąta CDB, a zatém większy od kąta D. albo co na iedno wychodzi, kąt D, iest mnieyszy od kąta C, w odcinku.

192 *Uwaga* 1. W pierwszym razie, gdzie ramie BD przedłużone spotyka okrąg w punkcie E, kąt ADB, równa się summie kątów: BCD, CBD, a kąt CBD obeymuie swemi ramionami łuk EC, który też łuk zawarty iest między przedłużeniami ramion AD, BD, kąta ADB.

W drugim razie, gdzie ramie BD, przecina okrąg w punkcie E: kąt ADB mniéyszy iest od kąta ACB, w odcinku, kątem CBD; który to kąt CBD obéymuie swémi ramionami łuk CE. a ten łuk CE, mniéyszy iest od łuku AC, obiętego od tychże ramion AD, BD kąta ADB,

193 *Uwaga* 2. Na okręgu koła znayduią się te wszystkie punkta, od których poprowadziwszy dwie liniié do dwóch punktów danych, kąt między dwiéma témi li-

niami zawarty, iednakowy zawsze będzie: to iest, okrąg koła iest *mieyscem* (Locus) tych wszystkich punktów.

194. *Defin.* Kąt zawarty między styczną z kołém i między cienciwą przez punkt dotknięcia prowadzoną, nazywa się *kątém odcinka.*

195 *Twierdz. 8. Kąt odcinka*, równa się kątowi *w odcinku na przemian.*

*Fig.*3. Niech będzie ABD kąt odcinka, między BD, styczną z kołém, i BA, cienciwą przechodzącą przez B, punkt dotknięcia. Ten kąt równy iest kątowi którémukolwiek w odcinku na przémian, naprzykład kątowi BEA, którego iedno ramie BE iest średnicą do punktu dotknięcia B, poprowadzoną.

Dowod. Kąt EBD, między średnicą EB, i styczną BD, zawarty, iest prosty(185) to iest summa kątów: ABE i ABD, czyni kąt prosty.

Kąt A w półkole iest też prosty (159.) więc summa kątów ABE, AEB, w tymże samym Troykącie równa także będzie kątowi prostému A; zatym kąt ABD, tąk z kątém AEB, iak i z kątém ABE, czyni kąt prosty. Muszą tedy równe bydź kąty AEB, i ABD, kiedy przydany każdy z osobna do kąta ABE, czyni równą summę.

196. *Zagadn.* 4. Na linii danéy zrobić docinek koła, w którym odcinku zmieściłby się kąt dany.

*Fig.*3. Niech będzie liniiá AB, na któréy zrobićby trzeba ten odcinek.

Rozwiązanie. Od punktu B. prowadzę liniią BD, czyniącą kąt dany z liniią daną

BA. Od tegoż punktu B, wyprowadzam prostopadłą do BA, a od punktu A, drugą prostopadłą do AB. Punkt E. przecięcia tych dwóch prostopadłych wyznaczy mi wielkość średnicy BE, należącéy do tego koła, w którego odcinku ma się mieścić kąt dany

Albo też: Od śródka linii danéy AB. prowadzę Prostopadłą, która przetnie liniią BE w punkcie maiącym służyć za śródek koła, w którym będzie odcinek żądany.

Zamiast robienia kąta ABD, równego danemu, możnaby zrobić kąt ABE, dopełniaiący kąt dany do 90 stopniów, to iest czyniący z nim razém kąt prosty.

197. *Zagadn.* 5. Maiąc dane koło, oddzielić od niego odcinek, w którymby się zmieścił kąt dany.

Rozwiąz. Od punktu któregokolwiek na okręgu koła danego, ciągnę styczną, a przez punkt dotknięcia prowadzę cienciwę czyniącą kąt dany z styczną. Ta cienciwa oddzieli w kole odcinek żądany.

198 *Zagadn.* 6 W koło dane wpisać (inscribere) Troykąt, ktoryby miał kąty wszystkie równe kątom Troykąta danego

Rozwiąz. 1. Pociągnąwszy styczną przez którykolwiek punkt okręgu koła, przez tenże punkt prowadzę dwie cienciwy po prawéy i po lewéy ręce, czyniące dwa kąty równe kątóm Troykąta danego. Liniiá trzecia łącząca końce tych dwóch cienciw, będzie trzecim bokiém Troykąta, ktoregó kąty wszystkię równe będą kątom Troykąta danego

Rozwiąz. 2. Troykat dany opisuię (circumscribo) kołém, i do trzech wierzchołkéw kątów, prowadzę od środka trzy promienie Od tegoż samégo środka, kreślę koło promieniém koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła przecinać będzie promienie trzy piewszego, będą wierzchołkami kątów Troykąta którego szukam.

199. *Zagadn.* 7 Maiąc dany Troykat, wpisać weń koło; to iest nakreślić takie koło któreby się dotykało trzech boków tego Troykąta.

Rozwiąz. Srodek tego koła, ponieważ iednakowo ma bydź odległy, od wszystkich trzech boków Troykąta danego, musi się gdzieś znaydować na linii dzielącéy kąt którykolwiek Troykąta na dwie równe części, gdyż téy linii odległość punktów wszędzie będzie równa od dwóch boków Troykąta iéy przyległych; podzieliwszy na dwie równe części, i drugi kąt Troykąta drugą liniią; tam gdzie ta druga liniia przetnie pierwszą, będzie środek koła, którego szukamy; bo ten punkt przecięcia będzie iednakowo odległy od wszystkich trzech boków Troykąta danego.

200 *Zagadn.* 8. Maiąc dane koło, opisać na nim (circumscribere) Troykąt któryby miał kąty wszystkie równe kątom Troykąta danego.

Rozwiąz. 1. W Troykąt dany wpisuię koło; i do Punktów trzech dotknięcia, prowadzę trzy promienie. Od tegoż samego srodka kreślę drugie koło, promieniém koła danego. Punkta, w których okrąg tego drugiego koła przecinać będzie promienie trzy pierwszego, albo ich przedłużenia oznaczą trzy punkta dotknięcia trzech boków Troykąta którego szukam.

Rozwiąz, 2. W czworokącie, który się zrobi z dwóch promieni koła danego i z dwóch stycznych z kołém w końcach tychże promieni, kąty dwa między témi promieniami i stycznémi będą proste, a zatym kąt ieden między dwiema stycznemi, i drugi kąt między dwoma promieniami, będą razém wzięte, równe dwóm kątom prostym. (85) Ztąd wypada wykreślenie następuiące.

Prowadzę promień ieden w kole danym; po obydwóch stronach tego promienia, prowadzę dwa inne czyniące z pierwszym dwa kąty, równe kątom dwóm dopełniaiącym dwa którekolwiek kąty Troykąta, do 180. stopniów, to iest równe dwóm kątom przyległym (14,) do dwóch którychkolwiek kątow tegoż Troykąta. Przez końce tych trzech promieni przeciągam trzy styczne, te zrobią Troykąt żądany.

ROZDZIAŁ VIII.

Wstęp do Proporcyi przez przykłady Jeometryczne, z przystosowaniém w szczególności do Troykątów podobnych, a w ogólności do innych Figur prostokreślnych także podobnych.

DOtąd uważaliśmy tylko wielkość różnych ilości i Figur, co do przystawania iednych do drugich, czyli do ich równości. Teraz też same ilości porównywać z sobą będziémy w sposob ogulniéyszy.

201. *Uwagi*. Widzielismy, że dwa równoległoboki które miały iednakową podstawę i wysokość, były równe. Weźmy teraz dwa równoległoboki z równą wysokością,

ale z nie iednakową podstawą; i obaczmy co za różnica wypadnie między témi dwoma równoległobokami, z przyczyny nie równości ich Podstaw.

Jeżeli podstawa iednego z tych równoległoboków dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, większa będzie od podstawy drugiego; da się podzielić ten pierwszy równoległobok na dwa, trzy, cztery, i t. d. równoległoboki równe między sobą, i z drugim równoległobókiém; ponieważ wszystkie iednakowe mieć będą wysokości i podstawy; a zatym, ten pierwszy równoległobok będzie dwa trzy, cztery, i t. d. razy większy od drugiego.

Gdyby podstawa pierwszego równoległoboku nie zamykała w sobie kilka zupełnie razy podstawy drugiego równoległoboku; naprzykład, gdyby ta pierwsza podstawa miała w sobie 4. 5. 7. i t. d. takich części, iakich podstawa druga ma 3; możnaby tę pierwszą podstawę podzielić na 4. 5. 7 i t. d. części równych między sobą, i równych także każdéy z 3 części drugiéy podstawy; a zatém, iako liczby ukazuiące wielkość podstawy piérwszego równoległoboku względém podstawy drugiego, są 4. 5. 7. i t. d. : 3; tak też liczby ukazuiące wielkość pierwszego równoległoboku względem drugiego, są: 4. 5. 7. i t. d. i 3. Albo; iako podstawa pierwszego równoległoboku zamyka w sobie podstawę drugiego tyle razy, ile oznaczaią liczby ułomkowe $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$. i t. d; tak też pierwszy równoległobok zamyka w sobie drugi, tyle razy, ile oznaczaią te same liczby ułomkowe: $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{7}{3}$ i t. d.

Podobnie gdy dwa Troykąty maią równe wysokości, a nie równe podstawy; ieżeli podstawa pierwszego Troykąta zawiérać w sobie będzie podstawę drugiego, dwa, trzy, cztery i t. d. razy; to też powierzchnia tego pierwszego Troykąta, będzie dwa trzy, cztery i t. d. razy większa od powierzchni drugiego. Toż mówić, gdy podstawa iednego Troykąta, zamiast zawierać w sobie kilka zupełnie razy podstawę drugiego, będzie się tylko składała z kilku takich części równych z jakich się składa i podstawa Troykąta drugiego. Y tak ieżeli podstawy obudwóch Troykątów zamykaią w sobie iedna 4, a druga 5, takichże równych części; te też dwa Troykąty zamykać będą ieden 4, a drugi 5 równych między sobą Troykątów maiących wysokość iednakową z wysokością nie podzielonych Troykątów, a za podstawę, część iednę tylko podstawy tamtych Troykątów. A zatym, iako podstawa pierwszego Troykąta iest $\frac{4}{5}$ podstawy drugiego, tak też i powierzchnia pierwszego Troykąta będzie $\frac{4}{5}$ powierzchni drugiego.

Dwa kąty maiące swoie wierzchołki w środku tego samego koła albo kół równych, i obeimuiące ramionami swémi łuki równe, są równe (174).

Jeżeli tedy z dwóch kątów w środku kół równych ieden wspiera się na łuku, dwa, trzy, cztery i t. d większym, niżeli iest ten, na którym wspiera się kąt drugi; można tamten kąt większy podzielić na dwa, trzy, cztery i t. d. kątów równych sobie i kątowi drugiemu. Toż samo mówić można, gdy dwa łuki nie zupełnie się zamykaią ieden w drugim. Y tak ieżeli ieden z tych łukow może bydź podzielony na 4 równe części: a drugi na 3 takież części; dwa kąty, które się wspieraią na tych łukach, mogą się podzielić, ieden na 4, a drugi na 3 kąty równe między sobą.

Toż samo przystosować można i wycinkom w kołach równych, względem łuków, które ramionami swémi też wycinki obéymuią.

W takich szczegulnych razach, szukano, ilekroć dwie iakie ilości iednakowego gatunku, naprzykład dwie linié, dwa łuki koła, zamykały się iedna w drugiéy, i znaydowano, że tylekroć i inne dwie ilości iednakowego także gatunku zamykały się iedna w drugiéy, naprzykład: dwa Równoległoboki, dwa Troykąty, dwa wycinki i t. d.

202. *Definicye.* Gdy dwie iakie ilości do siebie przyrównywamy, abyśmy wiedzieli, ile razy iedna zamyka w sobie drugą, takie przyrównywanie nazwać można stosunkiém Jeometrycznym (Ratio Geometrica) albo bez przydatku stosunkiém tych dwóch ilości. Pierwszy wyraz ilości, którą do drugiéy stosuiémy, zwać będziémy *Poprzednikiém* stosunku (antecedens rationis) Drugi zaś wyraz ilości téy, do któréy przyrównywamy ilość pierwszą, nazwiemy *Następnikiem* (consequens rationis) stosunku. To co z tego przyrównania wynika nazwać można *Wykładnikiem* stosunku (exponens rationis.) Dwa stosunki na-

zywaią się równemi, gdy równémi są ich wykładniki.

203. *Uwaga.* Z tych samych Definicyi widziémy, że wyrazy stosunku Jeometrycznego, nie mogą bydź tylko iednakowego gatunku, gdyż nie można do siebie przyrównywać tylko ilości iednakowego gatunku; a ztąd dwa wyrazy stosunku tego, zawsze w liczbach mieć możemy, z których iedna tyle razy zamykać w sobie drugą będzie, ile razy ilość przyrównywać się maiąca, zamyka w sobie drugą ilość tegoż gatunku, do któréy ią przyrównywamy. Przeto stosowanie takie, uważać można iak dzielenie liczebne, biorąc za liczbę pódzielną poprzednika stosunku, za liczbę dzielącą następnika stosunku, a za wieloraz wykładnika tegoż stosunku. Wykładnik tedy iedno będzie, co ułomek którego, licznikiém poprzednik, a mianownikiem następnik stosunku.

204 Gdy się cztery ilości takie znayduią, że stosunek dwóch pierwszych, równy iest stosunkowi dwóch drugich; takie cztery ilości czynią *Proporcyą Jeometryczną*, albo bez przydatku, *Proporcyą:* i mówimy, że tak się ma poprzednik pierwszego stosunku do swego następnika, iak się ma poprzednik drugiego stosunku do swego także Następnika. I tak, przypadki szczególne, któreśmy za przykład wyżéy przytoczyli, takby mogły bydź wyrażone.

Jeżeli dwa Równoległoboki iednakową maią wysokość, powierzchnia iednego z nich, tak się będzie miała do powierzchni drugiego, iak się ma podstawa pierwszego do podstawy drugiego. Jeżeli dwa Troykąty iednakową maią wysokość: powierzchnia iednego Troykąta, tak się ma do powierzchni drugiego Troykąta, iak się ma podstawa pierwszego do podstawy drugiego.

Jeżeli dwa kąty w środku dwóch równych koł znayduią się ieden z tych kątów tak się mieć będzie do kąta drugiego, iak się ma łuk objęty od ramion pierwszego kąta, do łuku objętego od ramion drugiego kąta.

Jeszcze i tak możnaby te same podania wyrazić. Dwa równoległoboki iednakowéy wysokości tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa Troykąty iednakowéy wysokości tak się maią do siebie, iak ich podstawy.

Dwa kąty w środku koł równych tak się maią do siebie, iak dwa łuki, na których się wspieraią. Toż mówić i o wycinkach koł równych.

Na koniec ieszcze krócéy zwykły się czasem wyrażać podobne podania, zamykaiąc całą proporcyą w dwóch tylko na oko wyrazach, i to ieszcze znaczących ilości odmiennego gatunku. *Wiele na tém zawisło, aby Uczniowie znali się dobrze na takowych wyrazach często używanych.*

Mówi się naprzykład, że powierzchnia równoległoboku, którego wysokość iest *iednostayna* (constans) proporcyonalną iest do swoiéy podstawy.

Tu się opuszcza wyraz drugiego równoległoboku, który także wchodzi w po-

ównanie, i iego podstawy; ale się wy-
azów tych domyślać trzeba. Dla tego
ę zaś opuszczaią, że ten drugi równo-
egłobok równéy z pierwszym wysokości
ydź mniémamy, i iednostáynév, to iest
ieodmiennéy podstawy, a zatym i po-
ierzchni. Będzie tedy pierwszy równo-
egłobok tym większym albo mniéyszy
zględém drugiego równoległoboku o-
uszczonego, im podstawa pierwszego wię-
sza lub mniéysza iest od podstawy dru-
iego. Tak, niech pierwszy równoległobok:
na wysokości 3. łokcie, równie iak i
rugi; ieżeli ten drugi rownoległobok:
nieć będzie podstawę łokci 4, zawsze
ednostáyną i nieodmienną, a zatym i
ednostáyną powierzchnią 12, łokci kwa-
ratowych; pierwszy równoległobok tym
iększy lub mniéyszy będzie od drugiego
o iest, tym większą lub mniéyszą mieć
ędzie powierzchnią od drugieg, im
iększą lub mniéyszą damy mu podstawę
d drugiego. Dawszy mu naprzykład pod-
tawy 8. łokci, będzie powierzchnia iego
4. łokci kwadratowych, dwa razy więk-
za od powierzchni drugiego równoległo-
oku; dawszy mu podstawy 2. łokci, bę-
zie powierzchnia iego 6. łokci kwadrato-
ych, dwa razy mniéysza od powierzchni
egoż równoległoboku i t. d. Gdy tedy
en pierwszy równoległobok, albo po-
ierzchnia iego, tyle się tylko powiększa
ub pomniéysza względém powierzchni
rugiego równoległoboku, ile się powię-
szy lub pomnieyszy podstawa iego wzglę-

dém podstawy drugiéy iednostaynéy, dosyć iest więc powiedzieć w takim razie że powierzchnia tego równoległoboku, którego wysokość iednostáyna, proporcyonalną iest do swoiéy podstawy; to iest gdy podstawa dwa razy naprzykład większa będzie, powierzchnia też większa będzie dwa razy: gdy tamta dwa razy mniéysza, to i ta, i t. d.

205. Niech będą cztery ilości oznaczone przez A,B C,D, które do siebie stosować można; zgodzono się, aby stosunek ten wyrazić kształtém następuiącym A: B. = C: D: co tak się wymawia: A. tak się ma do B. iak się ma C. do D. Dwa punkta umieszczone między dwóma wyrazami każdego w szczególności stosunku znakiém są dzielenia iednego wyrazu przez drugi; dwie zaś linié w pośrodku znaczą równości dwóch stosunków.

206 *Wniosek*. Z tych *zasad* (principium) któreśmy o proporcyach założyli, wynikaią następuiące podania.

1, Jeżeli dwa stosunki są równe trzeciemu: równe też i sobie będą.

2, Jeżeli w dwóch Proporcyach trzy pierwsze wyrazy w iednéy równe są trzém pierwszym wyrazom w drugiéy; to i czwarte wyrazy równe też będą.

3. Stosunek między dwiéma ilościami tenże sam iest, co i między temiż ilościami podwoionémi, potroionémi i t. d. Tak naprzykład 4. ma się do 2. iak 8. do 4. albo iak 12. do 6. i t d. Ztąd wynika że można podzielić, albo rozmnożyć przez iednakową liczbę dwa pierwsze lub dwa

ostatnie wyrazy Proporcyi, nie naruszaiąc przeto proporcyi między témiż czteréma wyrazami.

4. Można także podwoić, potroić, i t d. obadwa Poprzedniki, albo obadwa Następniki; a proporcya wszelako będzie zachowana. W pierwszym razie wykładnik stosunków, stanie się dwa, trzy i t d. razy większym niż był z początku; w drugim zaś razie będzie tylko połową trzecią częścią, i t d. Wykładnika pierwszego.

5. W téyże saméy proporcyi można odmienić miéysce obydwóm Poprzednikom; to iest, położyć tam Poprzedniki, gdzie były Następniki, a Następniki tam gdzie były Poprzedniki; równość iednak i po téy odmianie zachowana będzie między dwóma stosunkami téyże proporcyi. Y tak naprzykład w téy Proporcyi: $4:2 = 12:6$. można odmienić położenia Poprzedników: 4 i 12 i napisać: $2:4 = 6:12$. wszelako iednak zachowa się Proporcya; bo iako w pierwszéy proporcyi wykładniki stosunków obydwóch; $4:2$, i $12:6$ były równe; to iest tak, 4 przez 2 iak 12 przez 6, podziélone dawały na wykładnika, albo na wieloraz, 2; tak i w drugiéy proporcyi, wykładniki stosunkow $2:4$, i $6:12$ są równe; to iest tak 2, przez 4, iak i 6 przez 12 podzielone, daią na Wykładnika, albo na wieloraz iednakowy ułomek $\frac{1}{2}$. Toż mówić i o podanéy odmianie w jakiéykolwiek innéy Proporcyi; co tak można ogólnie przez litery wyrazić:

Jeżeli A: B = C: D.

to też i B: A = D: C

§. 6. W proporcyi każdéy można powiedzieć, że summa, albo różnica dwóch pierwszych wyrazów, tak się ma do iednego z tych dwóch wyrazów, iak się ma summa albo różnica dwóch drugich wyrazów, do iednego z tychże wyrazów. Naprzykład ieżeli 4: 2 = 12: 6, to też będzie 6: 2 = 18: 6, albo 6: 4 = 18: 12, albo 2: 4 = 6: 12.

Jakoż ieżeli każdą Poprzednika i Następnika summę lub różnicę stosuiémy do następnika iéy własnego; Wykładnik każdego w szczególności stosowania powiększy się lub pomniéyszy iednością, a zatym równy będzie w obydwóch stosunkach i po takiey odmianie.

Jeżeli zas każdą poprzednika i Następnika summę lub różnicę stosuiémy do Poprzednika iéy własnego: iedno czyniemy, iak gdybyśmy pierwéy poprzednika każdego za Następnika położyli, a potym dopiéro, summę lub różnicę ich stosowali do następników, tak iak wyżéy: a zatym tąż częścią pomnoży się lub zmniészy wykładnik pierwszego, stosunku iak i drugiego.

Wyrażenia literalne tegoż samego.

Jeżeli A: B = C:D.

to też A: * B: B = C * D: D.

A — B: B = C: D :D:

A * B: A = C * D: C

A — B:A = C — D:C.

Gdyby Następniki większe były od swoich Poprzedników, naprzykład B od A i D od C; tę proporcyą A:B=C:D możnaby w tę za mienić B,A=D: C. a zatym.

A—A: A=D—C: C
B—A: B=D—C. D.

7. Gdy w Proporcyi, cztery wyrazy iednego są gatunku: to iest, gdy wszystkie znaczą n. p. liniié lub powierzchnie i t: d, można powiedzieć, że summa dwóch Poprzedników, tak się ma do summy dwóch Następników, iak się ma którykolwiek poprzednik do swego natsępnika.

Jakoż ieżeli ieden poprzednik zamyka naprzykład dwa, trzy i t. d. razy swego Następnika, i drugi też Poprzednik, tyle razy następnika swego zamykać w sobie będzie; a zatym i summa Poprzedników, tyle też razy zamykać będzie summę następnikow. Przeto summa Poprzedników tak się mieć będzie do summy następników, iak każdy w szczegulności Poprzednik do swego Następnika. To samo rozumowanie przystosować można do różnicy dwóch Poprzedników i do różnicy dwóch następnikow; i do więcéy iak dwóch równych stosunków.

Wszystkie te odmiany na wielu przykładach liczebnych obiaśnić należy.

207. *Uwaga* Dadzą poznać Nauczyciele, Uczniom swoim że *Reguła trzech*, iest pewnym gatunkiem proporcyi w któréy z trzech wyrazow znaiomych, szukamy czwartego nieznaiomégo, co samo na przykładach iakich rachunkowych pokazać trzeba, Mnożenie nawet i dziele-

nie," do proporcyi przyrównać możn; bo w mnożeniu liczby, mnożna, i mnożąca są średniémi wyrazami proporcyi, iedność, iest pierwszym wyrazém proporcyi, a liczba rozmnożona iest ostatnim wyrazem. Y tak naprzykład; $4 \times 3 = 12$. rozłożyć można na proporcyą następuiącą $1 : 4 = 3 : 12$ W dzieleniu zaś, liczba dzieląca i wieloraz są średniemi wyrazami proporcyi; iedność iest wyrazem pierwszym, a liczba podzielna iest ostatnim wyrazém. Y tak naprzykład $\frac{8}{4} = 2$ albo $8 : 4 = 2$, rozłożyć można na proporcyą następuiącą: $1 : 4 = 2 : 8$. = więcéy ieszcze takowych przykładów podać nie zawadzi.

208. *Twierdzenie 1 fundamentalne.* Gdy w Troykącie iakimkolwiek bok ieden przedłużaiąc go powiększémy, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. razy; i przez końce takiego przedłużenia poprowadziémy równoległe od boku drugiego aż do boku trzeciego także przedłużonego; zrobią się tym sposobém Troykąty, których i inne dwa boki większe też będą od boków pierwszego Troykąta; dwa, trzy, cztery, pięć i .t d. razy.

Fig. 4. Niech naprzykład będzie Troykąt ABC, którego bok AB. tak przedłużyliśmy, aby liniiá AD, dwa razy była większa od AB. Przez D. poprowadziwszy DH równoległą od BC; Liniiá DH, dwa razy też większa będzie od linii BC, a linii AH dwa razy większá od linii AC.

Wyjaśnienie. Przez punkt C. poprowadźmy CN, równoległą od AB. którab spotkała w punkcie N, liniią DH.

Dowodz. Czworokąt BDNC, iest równoległobokiém; więc boki w nim przeciwne są równe; to iest BC=DN a BD =CN: a że BD=AB; więc i CN=AB. Kąty iednostronne A, i NCH są równe iako też i kąty iednostronne ACB, AHD; a zatym Troykąty ACB, CHN dla równości kątów wszystkich i boków AB, CN równych, mogą przystać do siebie, i będzie AC=CH, a tym samym AH= 2 AC. to iest liniiá AH dwa razy większa od AC. Iest też i BC=NH, a tym samym DH= 2 BC, to iest liniiá DH dwa razy większa od BC. Weźmy znowu Liniią AE trzy razy większą od AB, i poprowadźmy EI równoległą od BC. Podobnie iak wyżéy dowieść będzie można, że też liniiá EI trzy razy iest większa od BC, a AI trzy razy większa od AC, co się łatwo okaże pociągnąwszy linią HO, równoległą od A E; bo dla równości kątów wszystkich i bokow AB, HO. Troykąty ABC, HOI, przystaną do siebie, a zatym AC=HI, i BC= OI. A że EO=DH, a DH=2 BC=2 OI. więc EO=2 BC, a zatym EI=3 BC. Tak też i AI=AH + HI = 2 AC + HI=3 HI.

Tymże sposobém dowodzi się, że ieżeli liniiá AF, cztery razy będzie większa od linii AB; Liniiá też FL rowno odległa od BC, cztery razy od niéy większa będzie, i liniiá AL, cztery także razy większa od AC, i t. d.

209. *Zagadn.* 1. Podzielić daną liniią na ilekolwiek części równych.

Niech naprzykład będzie liniiá dana

AG, którą podzielić mamy na 5. części równych.

Rozwiązanie. Od końca iednego naprzykład A, linii daney AG, prowadzę drugą liniią AM, iakieykolwiek długości, czyniącą z liniią daną, kąt iaki mi się podoba. Od A ku M, biorę tyle części równych na linii AM, na ile ich ma bydź podzielona liniiá AG; tu naprzykład biorę 5 części równych. Punkt M. Linii AM, gdzie się ostatnia część podziału kończy, łączę liniią MG z punktem G. Linii daney AG. Przez inne podziału punkta: L. I, H. C, prowadzę równoodległe od linii MG, do linii AG. Te równoodległe. LF, IE,, HD. CB wraz z liniią MG przecinać będą liniią daną AG w punktach podziału żądanego,

Podobnym sposobem postąpić sobie trzeba, gdy na więcey lub mniey części podzielić przypadnie liniią daną.

Dla większey łatwości, w prowadzeniu równoodległych, można użyć następuiącego sposobu, zwłaszcza gdy na wiele równych części przypada dzielić liniią daną.

Fig. 5 Chcąc naprzykład podzielić liniią AB na 5. równych części, prowadzę od końca ieyiednego A. liniią AC, pod iakimkolwiek kątem, i od drugiego końca B, prowadzę liniią BD, od pierwszey równoodległą. Dzielę od punktu A, lini ą AC, na pięć iakichkolwiek równych części i na takież pięć równych części od punktu B, dzielę liniią BD. Punkta podziałów równych w obydwóch liniach, łączę tylaż równoodległemi; te przetną liniią dana AB w punktach podziału żądanego.

Dowodzenie tego nie różni się od poprzedzaiącego, gdyż w równoległoboku ACBD, uważać można ieden tylko Troykąt. BAC, lub ABD; a zatym równość części, Linii AB, podobnie się, iak w pierwszym Twierdzeniu, dowiedzie. (p)

2io *Twierdz.* 2 Dwa Troykąty równokątne, maią proporcyonalne boki przeciwne kątom równym.

Niech będą dwa Troykąty AGM, i abc, *Fig.* 4 i 6, w których kąty A i a, G i b, M i c, są równe. Niech naprzykład bok AG, będzie pięć razy większy od boku ab; będzie też i bok AM pięć razy większy od boku ac, i bok GM, pięć razy także większy od boku bc.

Jakoż odciąwszy Liniią AB równą linii ab, i AC równą ac, i pociągnąwszy linią BC, Troykąty ABC, abc, będą mogły przystać od siebie, a w szczegulności kąty B i b, C i c będą równe, A że też kąty

---

(p) *Rozwiązuiąc tymże podobne Zagadnienia, niechay nie przestaią Uczniowie na Figurze podaney, ale niech sami kreślą sobie podobną Figurę, i na niey rozwiązuią Zagadnienie. Figura podana niech im tylko służy do łatwieyszego w czytaniu zrozumienia Propozycyi, którą gdy iuż dobrze zrozumieią, niechay zamknąwszy nawet książkę, na Figurze osobney od nich, nakreśloney pokażą Nauczycielom, że to co czytali, dokładnie zrozumieli, i umieią się dobrze wytłumaczyć.*

G i b. M i c, są równe więc równe, takie są i kąty G B, M i C; a zatym liniié BC, GM będą równoodległe. Przeto według pierwszego Twierdzenia, ieżeli AG iest, pięć razy większa od AB, czyli od ab, będzie też i AM pięć razy większa od AC, czyli od ac, i GM pięć razy większa od BC czyli od bc. Toż samo mówićby się mogło, gdyby dwa boki Troykątów, przeciwne równym kątow nie pięć, ale mniéy lub więcéy zupełnych razy, w sobie się zamykały.

Gdyby zaś dwa boki w dwóch Troykątach, przeciwne kątom równym, niezamykały się zupełnie ieden w drugim, ale ieden naprzykład z tych boków miał w sobie 7 takich równych części, i kich drugi ma tylko 3; w takim razie inne też boki równym kątom przeciwne, w tychże Troykątach nie zamykałyby się zupełnie ieden w drugim, ale ieden składałby się z 7 takich części, z iakich 3. składa się drugi. Tak na Figurze 7. gdzie Troykąty ABC, abc, są równokątne, i bokom AB, ab, taka długość dana, żeby bok AB, zamykał w sobie 7. części równych linii AD, a bok ab, takież miał 3 tylko części równe linii AD albo ad, w tych Troykątach poprowadziwszy liniié DE, de, równoodległe od BC, bc, boki AC i ac, mieć też będą pierwszy 7. drugi 3. części równe linii AE, albo ae, a boki BC i bc, zamykać także będą pierwszy 7. a drugi 3 części równe linii DE, albo de. Toż mówić, gdyby boki dwóch Troykątów, przeciwne kątom równym, więcéy lub mniéy części równych w sobie zamykały,

211. *Przestroga.* W dwóch Troykątach równokątnych, których boki porówrywać z sobą mamy, dobrze iest wierzchołki kątow równych, naznaczać podobnémi literami, naprzykład, gdy nad wierzchołkiém kąta w jednym Troykącie napiszémy literę A. napiszmy i nad wierzchołkiém kąta równego pierwszému w drugim troykącie, literę a; gdy nad drugim kątém w pierwszym Troykącie będzie B, niech i nad drugim kątém równym tamtemu w drugim Troykącie będzie b, i t. d. Tym sposobém i boki przeciwne równym kątom w obydwóch Troykątach, będą podobnémi też literami naznaczone; a zatym gdy w proporcyi weźmiémy naprzykład boki AB, ab, za Poprzedniki stosunku, za Następniki wziąć będzie potrzeba boki AC, ac, albo BC, bc; i dla tego wszystkie te proporcye będą dobre; AB: ab = AC: ac, AB: ab = BC: bc, albo AC. ac = AB: ab. BC: bc = AB: ab: albo, AC: ac = BC: bc, albo BC: bc = AC; ac

212. *Twierdz;* 3. Jeżeli we dwóch Troykątach, kąty dwa którekolwiek są równe, i boki dwa około każdego z tych kątów proporcyonalne; takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty ABC, abc, i w tych kąty A i a, równe, boki zaś AB, ab, i AC, ac, około tych kątów proporcyonalne; to iest: niech się ma tak AB, do ab, iak AC do ac, czyli AB: ab = AC: ac. W takim razie będą też równe kąty B, b i kąty C, c, a z tym i stosunek boków BC, bc, będzie ten sam co i boków AB, ab, albo AC, ac.

Tab. XI. Fig. 1. *Wykreślenie.* Na boku AB, weźmy liniią AD, równą ab. i poprowadźmy DE równoodległą od BC, i spotykaiącą AC, w Punkcie E.

Dowodz. Troykąty ABC, ADE są równokątne; więc (iako się w drugim Twierdzeniu dowiodło) AB: AD (albo ab) = AC: AE. Aże AB: ab = AC: ac, więc. AE = ac; a zatym Troykąty ADE abc mogą przystać do siebie; że zaś Troykąty ABC, ADE, są równokątne, więc równokątne także będą i Troykąty ABC, abc. a zatym. AB: ab = BC: bc.

213. *Twierdz.* 4. Jeżeli w dwóch Troykątach, trzy boki w jednym są proporcyonalne względem trzech boków w drugim, takie Troykąty będą równokątne.

Niech będą dwa Troykąty ABC, abc i boki w nich proporcyonalne, tak, że AB: ab = AC: ac. AB: ab = BC. bc, te dwa Troykąty są równokątne.

Wykreslenie. Weźmy liniią AD równą linii ab, i poprowadźmy DE równoodległą od BC.

Dowodzi. Troykąty ABC. ADE są równokątne, więc AB. AD (albo ab) = AC: AE.

Aże też iest AB: ab = AC: ac.
więc - - - AE = ac
Podobnie AB: AD (albo ab) = BC: DE.
Aże też iest, AB: - - ab = BC: bc
Więc - - - DE = bc,

A zatym dwa Troykąty ADE, abc wszystkie trzy boki maią sobie równe, i dlatego mogą przystać do siebie, i są równokątne. Aże też są równokątne i Troykąty ABC, ADE, więc równokątne także będą Troykąty ABC, abc.

214 *Twierdz.* 5 Niech będą dwa Troykąty maiące kąt ieden prosty, roztwarty, lub ostry równy w obdwóch Troykątach i niech stosunek ramion przy tych kątach będzie równy stosunkowi boków przeciwnych tymże kątom. Te dwa Troykąty będą równokątne, byleby w trzecim przypadku boki przeciwne kątowi ostremu większe były w obydwóch Troykątach niżeli ramiona po iednéy lub po drugiéy stronie przyległe témuż kątowi; albo chociaż te boki przeciwne mniéysze będą od ramion, byleby inny kąt w obydwóch Troykątach był roztwarty, lub ostry, który iedno ramie, ma spólne z kątém pierwszym równym w obydwóch Troykątach. Niechby naprzykład były dwa Troykąty ABC, abc, w których kąty A, i a. równe i stosunek ramienia AC do ac, taki iaki, boku BC do bc. Te dwa Troykąty będą równokątne.

1. Gdy kąty A i a, obadwa są proste. *Fig.* 2.
2. Gdy kąty A i a, obadwa są rostwatre. *Fig* 3.
3. Gdy kąty A i a, obadwa są ostre, ale *Fig.* 4. boki BC. bc. większe od ramion AC, ac.
4. Gdy kąty A, i a, obydwa są ostre ale boki BC. bc, mniéysze od ramion AC, ac: i kąty B i b. obadwa ostre, Fig. 5. albo obadwa roztwarte Fig. 6.

Wykreślenie powszechne. Weźmy Linią AD. równą ac. i poprawadźmy DE, równoodległą od BC.

Dowodz. Troykąty ACB, ADE są równokątne;

Więc AC: AD (albo ac) = BC: DE
Ale też iest AC: ac = BC: bc
więc DE = bc,

A zatym dwa Troykąty ADE, acb; mogą przystać do siebie, i są równokątne; aże też i Troykąty ACB, ADE są równokątne, więc równokątne także będą i Troykąty ACB, acb. (q)

215 *Def.* Gdy w dwóch Figurach prostokreślnych równe się kąty wszystkie znayduią iedne względem drugich, i boki około tych kątów proporcyonalne, takie Figury nazywaią się *podobnemi* (Figuræ similes.)

216. *Uwaga.* Po przytoczonych dowodzeniach Twierdzeń poprzedzaiących iaśnie się pokazuie, że równość kątów w dwóch Troykątach pociąga za sobą proporcyonalność ich boków, i wzaiemnie proporcyonalność boków w dwóch Troykątach wywodzi równość kątów w tychże Troykątach: W jnnych zaś Figurach prostokreślnych, które z więcey niż trzech bokow są złożone, nie można z równości kątów we dwóch takich wielokątach, wnosić proprocyonalność, ich boków, ani wzaiemnie z proporcyonalności boków, wnosić równość kątów. Y

(q) *Dla skrócenia, różne te przypadki w jednem powszechnem zamknęło się dowodzeniu; lepiey iednak będzie każdego z osobna przypadku osobno uczniom dowodzić, aby wielu razem okoliczności wystawieniem, baczność ich nie była rostargniona.*

tak kwadrat prostokątny, z kwadratém ukośnym. lubo maią boki proporcyonalne, nie maią iednak kątów równych. Dwa znowu prostokąty, nie różnią się między sobą, co do kątów, a iednak boki ich mogą bydź nierówne i całe nieproporcyonalne.

Trzeba iak nayiaśniéy i naydokładniéy wyłożyć Uczniom te trzy rzeczy, to iest: *Przystawanie, Równość i Podobieństwo* Figur.

Równość dwóch naprzykład Figur, ściąga się tylko do ich wielkości nie zaś do ułożenia ich boków albo granic w których się zamykaią; i tak dwa Troykąty, które równe podstawy maią i wysokości są sobie równe lubo ich boki nie iednakowo mogą bydź ułożone, i większe iedne lub mnieysze od drugich. Dla tego też można znaleść Troykąty, lub kwadrat, równy Figurze prostokreślnéy danéy, iakażkolwiek liczba iéy boków będzie, i tychże boków ułożenie.

Podobieństwo ściąga się tylko do saméy Figury czyli ułożenia boków, nie zas do wielkości. Dwie Figury, naprzykład dwa Troykąty mogą bydź do siebie podobne, lubo ieden będzie nader wielki, a drugi nader mały. Lecz aby Figury były podobne, trzeba 1mo. Aby miały iednakową liczbę boków, 2do. Aby kąty w iednéy Figurze były równe kątom w drugiéy. 3tio, Aby *boki odpowiadaiące* (latera correspondentia:) to iest te, które zamykaią w sobie kąty równe, były proporcyonalne. i tak dwa kwadraty zawsze są podobne iedne do drugiego, chociażby naprzykład bok iednego był na mile, długi a drugiego tylko na łokieć, lub na cal.

Przystawanie zamyka w sobie razem równość i podobieństwo. Dwie Figury aby przystać do siebie mogły, trzeba, aby się w niczym nie różniły, tylko w tym, że na odmiennych mieyscach są nakreślone(r)

Tab, 13. Fig. 1. 217 *Twierdz.* 6. Jeżeli dwie iakiekolwiek Figury prostokreślne są podobne, i w każdéy z nich przez wierzchołki kątów równych, poprowadziémy do drugich kątów tyle przekątnych, ile ich poprowadzić można; wszystkie te Troykąty, na które iednę Figurę podzielemy, będą podobne Troykątom w drugiéy Figurze.

Przykład. Niech będą dwa Pięciokąty ABCDE, abcde, podobne do siebie; od wierzchołków A, i a, dwóch kątów równych, poprowadziwszy przekątne, AC, AD, ac ad; Troykąty, ABC, ACD, ADE, będą podobne Troykątom. abc. acd, ade.

Dowodz: Ponieważ te Pięciokąty są do siebie podobne, kąty w nich B i b, będą równe, i boki około tych kątów proporcyonalne; dwa więc Troykąty ABC,

---

(r) *Przetrząsnąwszy Twierdzenia ściągaiące się do równości, i do podobieństwa Troykątów, łatwo postrzeżemy, że dowodzenia tam przytoczone zupełnie się zasadzaią na tych, któreśmy dawali mówiąc o przystawaniu Troykątów. Wiele na tym zawisło, aby często przypominać Uczniom sposob postępowania, który prowadzi od wyobrażeń prościeyszych, do tych, które bardziey są zawiklane.*

abc, sa do siebie podobne, iako ſmaiące katy B i b, równe, i boki około nich proporcyonalne, a wszczególności kat ACB, równy iest katowi acb; a że też równe sa dane katy, BCD bcd więc i kąty ACD, acd, równe będa. Boki także AC, ac, sa między soba iak boki AB, ab. albo BC, bc, A że tak boki AB, ab iak i boki, BC, bc, sa w proporcyi z bokami DC, dc. więc i boki AC, ac, sa proporcyonalne bokom DC, dc; a zatym i Troykaty ACD, acd, będa podobne maiac. katy C i c równe, i boki około nich AC, DC; ac. dc. proporcyonalne; a wszczególności katy ADC, adc, będa równe. A że znowu i Katy E, e, sa równe, więc i Troykaty ADE, ade, będą względem siebie równokątne; a zatém podobne.

218. *Uwaga* 1. Dla dowiedzenia, że Troykaty ADE. ade, sa podobne, nie trzeba było używać koniecznie proporcyonalności boków AE, ae de. DE, można nawet było i nie pokazywać wyraźnie równości katów E, e, z samego wykreślenia; ponieważ kątów EDA, eda, EAD, ead, mogła bydź równość okazana, z równości już dowiedzionéy kątów ADC, adc, DAC, adc, CAB, cab, innych Troykatach; a tym samym równość katów E, e wydałaby się, a zatym i podobieństwo Troykątów ADE, ade, byłoby dowiedzione.

219. *Uwaga*. 2. Wiele na tym zawisło, aby to dać postrzedz Uczniom, że gdy we dwóch Figurach podobnych złaczone będą przekatnemi wierzchołki dwóch kątów odpowiadaiacych ſobie, te przekątne mieć bedą iednostayne stosunki, z bokami tych dwóch Figur; a zatym gdy w podobnych

Figurach końce dwóch boków odpowiadaiących sobie złączémy przez przekątne: Troykąty złożone z tych przekątnych z dwóch boków należących do tych Figur, będą do siebie podobne.

210 *Zagadn.* 1. Maiąc dane trzy linii proste, na trzy pierwsze wyrazy proporcyi znaleśdź liniią czwartą proporcyonalną.

Wykreślenie. Zrobmy kąt iakikolwiek. Na dwa ramiona tego kąta przenieśmy od wierzchołka iego dwie dane liniie, maiące służyć za dwa pierwsze wyrazy proporcyi. Końce tych dwóch linii złączmy trzecią liniią. Przenieśmy ieszcze podobnym sposobém i trzecią daną liniią, na to ramie, na które iuż iest przeniesiona pierwsza liniia proporcyi. Od końca téy trzeciéy linii, poprowadźmy aż do drugiego ramienia liniią równoodległą od téy, która złączyła końce dwóch pierwszych linii. Liniiá zawarta między wierchołkiém kąta i punktém, w którym ostatnia równoodległa przecina ramie drugie, będzie czwartą liniią proporcyonalną, któréy szukaliśmy (s)

211. *Zagadn.* 2. Maiąc daną liniią prostą, tak ią przeciąć, aby dwa iéy odcinki tak się do siebie stosowały, iak się stosuią dwie inne dane liniié.

Wykreślenie. Od końca iednego linii

(s) *Co w Arytmetyce znaczy Reguła trzech, to znaczy w Geometryi Zagadnienie, aby trzy maiąc dane liniié proste, znaleść czwartą proporcyonalną. Jest to w samey rzeczy Reguła trzech wykonana na liniiach.*

[d]anéy do przecięcia, poprowadźmy pod [i]akimkolwiek katem liniią równą iednéy z [t]ych dwóch, których dany iest stosunek, a [o]d drugiego końca, w stronę przeciwną, [p]oprowadźmy równoodległą od pierwszéy, [r]ówną drugiéy linii, której także dany [i]est stosunek.

Złączmy końce, tych dwóch linii w [p]rzeciwne strony poprowadzonych, liniią [t]rzecią, ta przetnie liniią daną w pun[k]cie, którego szukaliśmy.

Albo tak. Od końca linii danéy do prze[c]ięcia, poprowadźmy liniią, któraby z nią [u]czyniła kąt iakikolwiek. Na tę drugą li[n]iią, od wierzchołka kąta, przenieśmy [i]ednę z tych linii, których dany iest stosu[n]ek; i od końca znowu téy ostatniéy li[n]ii pociągniymy drugą liniią, równą dru[g]iéy, któréy także dany iest stosunek. Ko[n]iec iéy złączmy z końcem linii danéy [d]o przecięcia; a do tego punktu, gdzie [s]ię pierwsza kończyła, a ta druga zaczy[n]ała, poprowadźmy równoodległą, która [p]rzetnie liniią daną do przecięcia, w pun[k]cie żądanym.

Ten ostatni sposob postępowania, może [b]ydź przystosowanym i w innych razach, [g]dzieby liniią daną na więcéy części prze[c]iać potrzeba; naprzykład na 3. 4. 5. i t. d. [k]tóre takby się miały do siebie, iak się [m]aią 3, 4, 5. i t. d. linii danych. (t)

222. *Zagadn.* 3. przedłużyć liniią daną [t]ak, aby summa z tey linii i z iéy prze-

---

(t) *Takie zagadnienie iest tym samym w Geometryi, czym iest w Arytmetyce* Re[g]uł a spółki.

dłużenia tak się miała do samego przedłużenia, iak się maią do siebie dwie inne liniié dane; czyli, znaleść dwie liniié, których dana jest różnica i stosunek.

Wykreślenie. Od obydwóch końców linii danéy, poprowadźmy w jednę stronę dwie linije równoodległe, i równe dwóm liniiom, których dany iest stosunek. Przez końce tych równoodległych, przeciągniymy liniią tak daleko, aż się spotka z przedłużeniém linii danéy. Punkt ten spotkania, wyznaczy długość przedłużenia linii danéy; i odległość iego od dwóch końców téyże linii, będzie wyrazem długości dwóch linii, których szukaliśmy.

223. *Zagadn.* 4. Maiąc dany Troykąt, i liniią osobną wystawić na téy linii Troykąt podobny danému.

Sposob 1 Dwom bokom Troykata danego, i trzeciéy Linii danéy, szukam czwartéy proporcyonalney, i mieć będę dwa boki Troykąta, którego szukam w proporcyi z dwóma bokami Troykąta danego. Tymże sposobem znaydę i trzeci bok Troykąta, który ma bydź podobny Tróykątowi danemu.

Sposób. 2. Od dwóch końców linii danéy, prowadzę po iednéy stronie dwie liniié, czyniące z nią dwa kąty równe dwóm kątom Troykąta danego; te dwie liniié zéyściem się z sobą, zrobią z daną liniią Troykąt podobny danemu

Sposob. 3. Liniią daną przenoszę na bok którykolwiek Troykąta danego tak, aby koniec ieden téy linii, był na wierzchołku kąta, a drugi tam, gdzie przypadnie, lub na samym boku Troykąta, lub za nim, gdy liniiá dana dłuższa będzie od boku Troykąta. Z końca tego drugiego, Linii danéy prowadzę równoodległą od boku Troykąta przeciwnego kątowi, od którego pierwszą linią ciągnąłém, i tak daleko ią prowadzę, aż się zniydzie z trzecim bokiém troykąta danego, przedłużonym, gdy tego będzie potrzeba. Zrobi się tym sposobém Troykąt podobny danému, i maiący za podstawę, liniią równą danéy, ktory to Troykąt przerysować potym mogę na saméy linii danéy. (u)

224. *Zagadn.* 5. Na danéy linii wykreślić iakąkolwiek Figurę prostokreślną podobną Figurze danéy.

Rozwiąz. Na danéy Figurze od końca boku którégokolwiek, prowadzę tyle przekątnych do inych kątów, ile można, i dzielę tak Figurę daną na Troykąty. Potym na linii danéy wykreślam po iednéy stronie sposobém wyżéy opisanym tyle Troykątów podobnych, ile ich iest w Figurze danéy. Wierzchołki tych Troykątów, będą wierzchołkami kątów Figury, któréy szukałém.

225. *Uwaga.* Między innémi sposobami rozwiązania tego Zagadnienia, sposob podany zdaie się naylepszym; a to dla tego, że używaiąc go, uchybienia; które popełnić można w położeniu linii, czyli boków Figury, nie zawisły iedne od drugich; i można uchybić w położeniu ie-

L

(u) *Częste tego zagadnienia używnie było pobudką do podania kilku sposobów, któremi bydź może rozwiązane,* dnéy linii, a nie uchybić tym samym, w położeniu drugiéy; na co osobliwszą baczność koniecznie mieć potrzeba.

226. *Podanie przybrane.* (Lemma). W Troykącie prostokątnym, gdy spuściémy prostopadłą, od wierzchołka kąta prostego; ta prostopadła podzieli Troykąt na dwa inne z pierwszym równokątne, a zatym i równokątne między sobą.

Fig. 2. Niech będzie Troykąt ABC prostokątny w C, zkąd spuszczona iest prostopadła CD na przeciw prostokątną AB; Troykąty trzy: ABC, ACD, CBD są względém siebie równokątne.

Dowodz; Troykąty ABC, ACD, maią kąt spolny A, i kąty ACB, ADC proste, a zatym równe; trzeci przeto kąt w jednym, będzie też równy trzeciemu kątowi w drugim. Są więc obadwa te Troykąty, równokątne. Podobnie i Troykąty prostokątne ABC. CBD, maią kąt spólny B, i są także równokątne.

W Troykątach równokątnych ABC ACD, mamy proporcyą: AB: AC=AC: AD. w Troykątach: ABC, CBD będzie AB: BC=BC: BD; a w Troykątach ADC: CDB: AD: DC=DC: BD. w Troykątach, ABC, ACD, iest też i ta proporcya, AB: BC=AC CD.

To iest: 1. W Troykącie prostokątnym,: bok ieden iest średnim Jeometrycznie proporcyonalnym, między przeciw prostkątną y odcinkiém mu przyległym, który czyni prostopadła.

2. Wysokość Troykąta prostokątnego, iest średnią Jeometrycznie proporcyonalną między dwóma odcinkami przeciwprostokątnéy.

3. Przeciwprostokątna, dwa boki, i wysokość Troykąta prostokątnego, są w proporcyi.

227. *Zagadn:* 6 Między dwiema danemi liniiámi, znaleść średnią Jeometryczną.

Sposob 1. Złączywszy z sobą dwie dane liniie, w jednę liniią prostą; na niéy iako na średnicy nakreślmy półkole, i od punktu złączenia tych dwóch linii, wynieśmy prostopadłą aż do okręgu półkoła. Ta prostopadła będzie średnią proporcyonalną, któréy szukamy.

Sposob 2. Na większéy z dwóch danych linii, iako na średnicy nakreślmy półkole. Na tę samę średnicę, od końca iéy iednego, przenieśmy drugą mniéyszą liniią daną, a od tego punktu gdzie się na średnicy kończyć będzie, wynieśmy prostopadłą, aż do okręgu, półkoła i punkt zéyścia się z półkołém złączmy liniią z punktém tym średnicy, od którego przeniesiona była liniiá mniéysza dana. Ta liniiá łącząca te dwa punkta, będzie średnią proporcyonalną, ktoréy szukamy.

ROZDZIAŁ. IX.

O stosunkach powierzchni Figur prostokreślnych, w ogulności, a w szczegulności o stosunkach Figur podobnych.

228 *Twierdz:* 1 Gdy cztery liniié są w proporcyi Jeometryczném; prostokąt z dwóch skraynych, rowny iest prostokątowi z dwóch średnich.

To Twierdzenie trzeba naprzód objaśnić na liczbach, ieżeli cztery liczby są Jeometrycznie proporcyonalne, dwie skrayne rozmnożone iedna przez drugą, równe będą dwóm średnim podobnie rozmnożonym. W każdéy albowiém proporcyi Jeometrycznéy równość zachodzi między dwóma stosunkami Jeometrycznémi, to iest tyle razy pierwszy poprzednik zamykać w sobie powinien swego następnika, tyle razy i drugi poprzednik zmyka także następnika swego. Y tak naprzykład w téy proporcyi: $6:3=8:4$, iak 6, zamyka w sobie 3, razy 2, tak i 8 zamyka 4, razy 2. Ztąd wynika, że rozmnożenie skraynych i śrzednich wyrazów proporcyi, można oznaczyć, przez trzy iednakowe liczby, a tym samym okazać równość wyrazów rozmnożonych, tak skraynych iako i średnich. Naprzykład, ponieważ $21:3=28:4$, i równie 21. zamyka w sobie 3. iak i 28, zamyka 4, razy 7. a zatym tak $21=7$, razy 3, iak $28=7$. razy 4; więc 4 razy $21=4\times7\times3$; 3 razy $28=3\times7\times4$. A że $4\times7\times3=3\times7\times4$ więc i $4\times21=3\times28$.

Podobnie, ponieważ $16:12=20:15$ i tak 16 zamyka w sobie 12, iak 20. zamyka 15, razy $1\frac{1}{3}$ albo $\frac{4}{3}$; a przeto tak, $16=\frac{4}{3}\times12$, iak i $20=\frac{4}{3}\times15$; idzie zatym, że tak $15\times16=15\times\frac{4}{3}\times12$; iako i $12\times20=12\times\frac{4}{3}\times15$.

Tak też ponieważ $8:28=10:35$, i $8=\frac{2}{7}\times28$, a $10=\frac{2}{7}\times35$; idzie zatym że tak iest $35\times8=35\times\frac{2}{7}\times28$; iako też $28\times10=28\times\frac{2}{7}\times35$.

W ogólności zaś mówiąc, ieżeli iest $a:b=c:d$: i tak a, zamyka w sobie b, iak, i c, zamyka d, razy n; będzie $a=n\times b$, i $c=n\times d$, a zatym tak $d\times a=d\times n\times b$, iako - - $b\times c=b\times n\times d$

Objaśniwszy to twierdzenie na wielu przykładach przystąpi Nauczyciel do następuiącego dowodzenia.

Niech będą dwa prostokąty: ABCD, *Fig.* 3. BDEF, i boki iednego, AB, BC niech będą skraynémi téy proporcyi, któréy boki BD, BF drugiego prostokąta są średniémi; to iest, niech się ma; AB: BF=BD: BC, w takim razie te dwa prostokąty są równe.

Wykreślenie. Ustawmy tak te dwa prostokąty, aby w kątach dwóch przeciwnych przy B, schodziły się, i przedłużmy boki ich DC, EF, aż do zéyścia się w punkcie G.

Dowodz. Prostokąty: AC, BG(w) których iednakowa iést wysykość, maią się do siebie, iak ich Podtsawy AB, BF. Prostokąty także BE, BG iednakowéy wysokości, maią się do siebie, iak ich Podstawy; BD, BC. A że z podania iest liniiá; AB, do BF, iak liniiá BD: BC; więc też i prostokąt AC tak się ma do prostokąta BG, iak prostokąt BE, do prostokąta BG; czyli Prost: AC : Prost: BG=Prost. BE: Prost. BG. a zatym Prost. AC=Prost. BE, co samo krócéy tak się wyraża.

	AC: BC=AB: BF
	BE; BG=BD: BC
A że	AB: BF=BD: BC
więc	AC: BG=BE: BG
A zatym	AC=BE.

229. *Wzaiemnie też* (Reciprocè) albo

(*w*) *Prostokąty zwykły się wyrażać przez dwie litery, na końcach przeciwnych kątów napisane.*

é converso) dowieść można, że ieżeli dwa Prostokąty są równe: wziąwszy dwa boki iednego za skrayne, a dwa boki drugiego za średnie wyrazy proporcyi; znaydziemy między témi bokami proporcyą.

W liczbach oczewiście się to pokazuie, bo gdyby boki dwa iednego Prostokata wyrażone były przez liczby: 10. i 42. a boki drugiego przez 15, i 28, obadwa te prostokąty zawierałyby w sobie 420. naprzykład stop: kwadratowych; to iest byłoby, $10 \times 42 = 15 \times 28$, zkądby wypadła ta proporcya: $10 : 15 = 28 : 42$.

Wykreślenie Jeometryczne do tego Twierdzenia służące, nie odmienne byłoby od poprzedzaiącego, Dowodzenie także w środku dopiero działania różniłoby się; to iest, ponieważ.

$$AC : BG = AB : BF$$
$$\text{i } BE : BG = BD : BC$$

A przez podanie $AC = BE$.

$$\text{więc } AC : BG = BE : BG$$

$$\text{A zatym } AB\ BF - BD : BC$$

230. *Wnioski* 1 Ponieważ w proporcyi tenże sam być może następnik pierwszego stosunku, co i poprzednik drugiego; naprzykład: $8 : 4 = 4 : 2$, albo; $84 : 4 : 2$, przeto kwadrat z średniéy linii Jeometrycznie proporcyonalnéy, równa się też Prostokątowi z dwóch linii skraynych, i znowu, ieżeli kwadrat równy iest prostokątowi, bok kwadratu będzie linią średnią proporcyonalną między bokami Prostokąta.

Te podania były wyłożone w Rozdziałach szóstym, i osmym, lubo sposobem odmiennym.

2. Można to samo przystosować i do równoległoboków, chociaż nie prostokątnych, byleby kąty iednego, równe były kątom drugiego; także i do Troykątów, które kąt ieden spólny maią; bo ieżeli ramiona ich około tego kąta są proporcyonalne, tak, żeby można wziąść dwa ramiona iednego Troykąta za skrayne, a dwa drugiego za średnie, te dwa Troykąty będą sobie równe; i wzaiemnie; a to ztąd wynika, że takie Troykąty, są połowami dwóch równoległoboków równokątnych, maiących za boki ramiona tego kąta spolnego.

3. Przystosowanie to uczynić można, i do równoległoboków różnokątnych, biorąc zamiast boku iednego, w obydwóch, wysokość oznaczoną przez prostopodłą, spuszczoną od końca boku iednego na bok drugi; tak dalece, że te dwa równoległoboki będą równe, gdy podstawa i wysokość iednego będą mogły być wzięte za dwie liniié skrayne, a podstawa i wysokość drugiego za dwie liniié średnie proporcyonalne; i wzaiemnie, ieżeli te cztery liniié będą proporcyonalne, równoległoboki będą też równe.

4. Jeżeli cztery liniié są w proporcyi można zawsze odmienić miéysce dwóm średnim, lub dwóm skraynym, a nawet i dwie średnie położyć na miéyscu dwóch skraynych, lub skrayne na miéyscu średnich, nie psuiąc proporcyi; ponieważ przy takich odmianach prostokąt z średnich równy iednakowo będzie prostokątowi z skraynych.

231, *Twierdz*, 2. Gdy przez punkt iaki w kole, lub za kołém, poprowadziémy dwie liniié, któreby okrąg koła przecinały po obydwóch stronach; prostokąt z dwóch części iednéy z tych linii zawartych między tym punktém i okręgiém koła, będzie równy Prostokątowi z dwóch części drugiéy linii zamkniętych także między tym punktém, i koła okrągiém.

Fig 4. Niech będzie w kole punkt A, przez który przeciągnione są cienciwy BC, ED; Prostokąt EA × AD równy iest Prostokątowi, BA × AC.

Wykreśl. Poprowadźmy liniie BD, EC.

Dowodz. Troykąty BAD, EAC są do siebie podobne; kąty ich albowiem w wierzchołku A przeciwne, są równe, i kąty B, E, (189) równe, iako obéymuiące ramionami swemi tenże sam łuk CD. Będą więc boki tych Troykątów proporcyonalne; i AB: AE = AD: AC, a zatym AB × AC = AE × AD.

Fig. 5. 2. Niech będzie punkt A, za kołém, od tego punktu ciągniemy dwie Liniié AB, AE, przecinaiące okrąg koła, iedna w B, i C, a druga w E i D. Prostokąty AB × AC, i AE × AD, będą równe.

Wykreśl. Poprowadźmy linié BD, EC.

Dowodz. Troykąty, BAD, EAC, maią kąt A, spólny, i kąty B i E, równe, bo wsparte ramionami na tym samym łuku CD; więc te Troykąty maią boki proporcyonalne; i AB: AE = AD: AC; a zatém, AB × AC = AE × AD.

To Twierdzenie zwykło się ieszcze i tak wyrażać.

1. Jeżeli dwie cienciwy przecinaią się

w kole, części ich będą *odwrótnie* (inversè) albo in ratione inversa) proporcyonalne; to iest tak się będzie miała część iednéy cienciwy do części cienciwy drugiéy, iak się ma druga część cienciwy drugiéy, do drugiéy części cienciwy pierwszéy.

Dwie tedy części cienciwy iednéy, będą średniémi proporcyi, a dwie części cienciwy drugiéy będą skraynémi téyże proporcyi.

2, Gdy dwie liniié przecinaiące koło, wychodzą od iednego punktu za kołém; są odwrótnie proporcyonalne z częściami temi, które za koło wychodzą; to iest, tak się ma iedna przecinaiąca do drugiéy, iak się ma część drugiéy za kołém do części pierwszey także za kołém, iedna tedy przecinaiąca, i część iéy za kołém są średniémi w proporcyi, a druga przecinaiąca, i część iéy także za kołém, są skraynémi téy saméy proporcyi,

232. *Uwaga. W pierwszym razie.* Gdy iedna z cienciw, iest średnicą koła, a druga do niey prostopadłą; ta prostopadła na dwie równe części będzie od średnicy podzieloną; i Prostokąt z dwóch części średnicy, będzie równy kwadratowi z połowy drugiéy cienciwy, prostopadła tedy spuszczona od którego kolwiek punktu koła, na średnicę, iest średnią Jeometrycznie proporcyonalną między dwiéma częściami średnicy; który to przypadek szczególny, i wyżéy iuż iest dowiedziony.

W drugim razie. Gdy iedna z linii zamiast coby miała przecinać koło, iest *styczną* (tangens) iego, można ią uważać iak przecinaiącą koło, ale tak, że część iey w kole niknie dla małośći, i dwa iéy punkta przecięcia schodzą się w punkt ieden.

W tym razie Prostokąt ieden, odmienią się na kwadrat z styczney. Y ztąd wynika to wielkiéy wagi podanie; że ieżeli od iednego punktu, wychodzą dwie liniié, iedna przecinaiąca koło, a druga styczna z kołém, kwadrat z styczney równać się będzie Prostokątowi z całéy Linii przecinaiącey, i z części iéy za kołém; czyli to iest; że styczna iest średnią Jeometryczną między całą przecinaiącą, i częścią iéy za kołém. Następuiące dowodzenie iest ieszcze iaśniéysze, i bardziéy pod oczy podpadaiące.

Niech będzie AD. styczna, AB zaś przecinaiąca koło, i od tegoż samego punktu A poprowadzona, ta styczna AD iest średnią Jeometryczną między przecinaiącą AB, i iéy częścią, AC, za kołém.

Fig. 6

Wykreśl: Od punktu dotknięcia D, poprowadźmy dwie liniié; DB, DC.

Dowodz: Troykąty: ABD, ADC, są do siebie podobne; maią albowiem spólny kąt A, i kąt odcinka ADC równy kątowi w odcinku na przémian ABD (195) a zatym i trzeci kąt w jednym Troykącie równy iest kątowi trzeciému w drugim, będą więc tych Troykątów boki proporcyonalne, i AB:AD = AD: AC, to iest kwadrat z styczneyAD, równy będzieProstokątowi z AB przez AC.

233 W szczegulności zaś, niech będzie styczna AT i przecinaiąca AD. od tegoż samego punktu A poprowadzona, przez środek C, koła.

Fig. 7

Pociągniymy promień CD do punktu dotknięcia T; kwadrat z linii AC, równy będzie summie kwadratów z AT, i CT, to iest: równy będzie summie z prostkąta AD przez AB, i z kwádratu BC. Zkąd wynika ten wniosek, że ieżeli średnicę BD, podzielemy na dwie równe części w punkcie C, i potym na iéy przedłużeniu, weźmiémy iakikolwiek punkt naprzykład A; Prostokąt z całéy téy linii z jéy przedłużenia (AD × AB) z przydanym kwadratém, z połowy średnicy (BC^2) równać się będzie kwardatowi z linii złożonéy z połowy średnicy, i z jéy przedłużenia(AC^2) to iest będzie $AD \times AB + BC^2 = AC^2$.

234. *Zagad*: 1. Maiąc dany Prostokąt i kwadrat, znaleść dwie liniié, któreby tak się miały do siebie, iak się maią, ten Prostokąt i kwadrat.

Rozw ąz. Zamieńmy Prostokąt dany na inny iému równy, któryby za boki ieden, miał bok kwadratu; czyli (co na iedno wychodzi) szukáymy czwartéy linii proporcyonalnéy do boku kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta. Bok kwadratu, tak się mieć będzie do téy czwartéy proporcyonalnéy, iak się ma kwadrat do Prostokąta.

To postępowanie zgadza się zupełnie z tym, co się iuż powiedziało w Arytmetyce (na karcie 71. i 72.) a co tu przez różne przykłady, podobne następuiącému obiaśnić ieszcze należy.

Wziąwszy bok kwadratu za spolną miarę, albo za iedność, niechby bok ieden Prostokąta, zawierał w sobie 5, razy bok kwadratu, a drugi 7. razy. Czwarta liniiá proporcyonalna do boku tego kwadratu, i do dwóch boków Prostokąta, zawierałaby w sobie 35, razy bok kwadratu, tak, iako i cały Prostokąt, zawierałby w sobie 35 razy cały kwadrat.

235. *Przystosowanie.* Podobnym sposobém postąpiémy sobie chcąc znaleść dwie liniié, ktoreby tak się miały do siebie, iak się maią dwa Prostokąty; to iest, szukać będziémy czwartéy proporcyonalnéy do boku iednego Prostokąta, i dwóch boków drugiego; do téy albowiém czwartéy proporcyonalnéy tak się mieć będzie drugi bok pierwszego Prostokąta, iak się maią powierzchnie tychże Prostokątów.

Możnaby to samo wykonać, szukaiąc sposobém wyżéy wyrażonym (234) stosunku każdego z dwóch Prostokąta, do tegoż samego kwadratu, znaleźlibyśmy albowiém, że powierzchnie tych dwóch Prostokątów tak się maią do siebie, iak się maią dwie czwarte proporcyonalne do boku kwadratu, i dwóch boków każdego z osobna Prostokąta.

Niechbyśmy naprzykład znaleźli, że Prostokąt ieden, ktory nazywam P. zawiera w sobie kwadrat K, tyle razy, ile razy liniiá L, zawiera w sobie bok B, kwadratu; to iest: że P: K=L: B.

Niechbyśmy znowu znaleźli, że drugi Prostokąt Q, zawiera w sobie ten sam kwadrat K, tyle razy, ile razy liniiá M, zawiera w sobie bok B tegoż kwadratu; to iest: że Q: K=M: B. Wnoszę ztąd że Prostokąty P, Q, tyle razy zawierać będą ieden drugi, ile razy się zawieraią liniié L, M. iedna w drugiéy, to iest: że będzie, P: Q=L:M.

Jakoż ieżeli prostokąt P, zawiera w sobie kwadrat K, dwa, trzy, cztery, i t. d. razy, a prostokąt Q, zawiera naprzykład 6. razy kwadrat K, Prostokąt pierwszy, będzie do Prostokąta drugiego, iak są liczby; 2, 3, 4, i t, d, do liczby: 6. Aże też i liniiá L. zawiera w sobie bok, B. 2, 3, 4, i t. d. razy, więc też i liniiá M zawierać będzie bok B, razy 6: a zatym tak się ma Prostokąt P, do Prostokąta Q, iak liniiá L, do linii M.

Jeżeli tedy mamy dwie proporcye; nap:
P: K=L:B.
i Q: K=M:B.

W których iednakowe są następniki; poprzedniki pierwsze obydwóch proporcyi tak się do siebie będą miały, iak poprzedniki drugie tychże proporcyi to iest

P: Q=L: M.

236. *Uwaga* W jednéy z dwóch dopiero wyrażonych proporcyi, naprzykład w drugiéy można było odmienić miéysce poprzednikom, i następnikom, i te same proporcye tak wyrazić

P: K=L: B.
K: Q=B: M.
Zkąd wynika P: Q=L: M

137. *Defin.* Gdy będą trzy iakiekolwiek ilości iednakowego gatunku, stosunek pierwszéy z nich, do trzeciéy nazywa się *stosunkiém składanym*(ratio composita) z stosunku pierwszéy ilośći. do drugiéy, i drugiéy do trzeciéy Y tak stosnnek P. do Q nazywa się składanym z stosunku P do K, i K do Q. Tak też stosunek L do M będzie składanym z stosunku L do B. i B do M, Takie stosunki złożone z stosunków

równych są równe. I tak ponieważ stosunek P do K, i K do Q równy iest pierwszy stosunkowi L do B, drugi stosunkowi B do M; będzie też i stosunek składany P, Q równy stosunkowi składanému L do M,

238. *Przyst:* 1 To, co się tu powiedziało o stosunku składanym dobrze będzie przystosować do reguły trzech składaney, o którey mówiło się w Arytmetyce.

Przykład. Rzémieślnicy z jednakową pilnością pracuiący około iakiéy roboty, tém więcey iéy zrobią, im większa będzie ich liczba, i czas dłuższy strawiony na téyże robocie. Przeto gdy porównać chcémy dwie iednakowego gatunku roboty, którémi się dwie kupy Rzémieślników zatrudniaią; trzeba rozmnożyć (iako się to iuż w Arytmetyce wyłożyło) liczby Rzemieślników przez liczby dni, przez które pracowali; a roboty przez tych Rzémieślników wygotowane, tak się będą do siebie miały, iak się maią tamte dwie liczby rozmnożone

Niechby naprzykład liczby Rzemieślników były do siebie iak 2 do 3; a czasy przez które robili iak 5 do 7. Pierwszy stosunek 2, do 3 równa się stosunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 5 rozmnożonych, i będzie, iak 10 do 15. Drugi stosunek 5 do 7; równa się stosunkowi tychże liczb przez tę samę liczbę 3 rozmnożonych, i będzie iak 15; do 21. A zatym stosunek robot, który się równa stosunkowi 10 do 21, równy będzie stosunkowi składanemu z stosunku 10, do 15, i 15 do 21; z których pierwszy równy iest stosunkowi 2 do 3, a drugi równy stosunkowi 5 do 7.

Podobnie rozumować można, gdy więcéy niż dwa będzie stosunków

239. *Przystos:* 2. Wszystkie także działania o zamianach, i inne podobne, któremi zstrudnialiśmy się w Arytmetyce, zasadzały się na stosunkach złożonych z dwóch lub więcéy stosunków równych, iako to bardzo łatwo w przykładach okazać można.

240. *Przysto:* 3. Same nawet niektóre działania, które zdaią się bydź tylko zwyczáyném mnożeniém, można podciągnąć pod stosunek składany.

Przykład: 1. 15. Czerwonych złotych ileż czyni groszy Polskich?

Aby znaleść wartość 15, czerwonych złotych w groszach, zwyczaynie obracaią się czerwone złote na złote, a te potym na grosze. Rozwiążem teraz to zadanie, rozkładaiąc ie na stosunki poiedyncze, i szukaiąc stosunku z nich złożonego; a to dla pokazania, że czasém i niemyśląc o tym, używamy w samey rzeczy stosunku składanego.

Stosunek wartości 15. czerw: do wartości w groszach, składa się z stosunków następuiących:

1. Wartość 15. czer: zł. do wartości 1. czer: zł. iest, iak - - - 15 do 1.

2. Wartość 1, czer: zł, do wartości 1. złotego - - iak - - - 18 do 1,

3. Wartość 1. złotego do wartości 1. grosza - iak - - 30. do 1.

4. Stosunek z tych trzech złożony iest iak - - - - - 8100, do 1.

Więc 15. czerwonych złotych czyni groszy - 8100.

Przykład 2. Osoba 30. lat maiąca, ileż minut żyła, rachuiąc w Roku dni 365 ?,

Stosunek 30. lat do iedney minuty składa się z stosunków, następuiących;

Z Stosunku 30. lat do 1. roku, to iest, - - - - - -	30 do 1.
Z Stosunku 1. roku do 1 dnia, to iest; - - - - - -	365 do 1.
Z Stosunku 1. dnia do 1. go. dziny. to to iest; . - - -	24 do 1.
Z Stosunku 1. godziny do 1. miuuty; te iest; - - -	60. do 1.
Stotunek z tych wszystkich złożony iest; - -	15,768,000.
Azatym w 3 latach iest minut - - - -	15,768,000.

241 *Przystos*. 4 Widzieliśmy wyżey że dla znalezienia stosunku dwóch Prostokątów, trzeba było ieden z nich zamienić na inny, któryby miał bok równy bokowi w drugim Prostokącie, albo (co na iedno wychodzi) trzeba było znaleść czwartą liniią proporcyonalną do iednego boku iednego Prostokąta, i dwóch boków drugiego; i że tak się ma pierwszy Prostokąt do drugiego, iak się ma drugi bok pierwszego prostokąta, do tey czwartey linii proporcyonalney. Zwyczaynie to podanie tak się wyraża: że *stosunek dwóch prostokątów składa się z stosunków ich boków* Co tak okazać można,

Niech będą dwa boki iednego Prostokąta nazwane A i B, a dwa boki drugiego prostokąta, C i D. Szukaymy czwartey linii proporcyonalney trzem bokom B, C, D i ta niech będzie L; to iest niech będzie B: C=D: L, stosunek linii A, to iest drugiego boku pierwszego prostokąta, do L równy będzie stosunkowi pierwszego prostokąta, do drugiego. (235) Aże stosunek A do L składa się z stosunków, A do D, i D do L; stosunek zaś A do D, iest stosunkiem boku iednego, iednego Prostokąta do boku drugiego; drugiego Prostokąta; a stosunek D do L, równa się stosunkowi drugich dwóch boków B i C (bo było; B: C = D:L:) *więc stosunek dwóch Prostokątów, składa się z stosunków ich boków.*

242. *Przyst.* 5. Gdy dwa Prostokąty, które z sobą porównywać mamy, są kwadratami; ponieważ boki kwadratu są wszystkie równe, kwadrat ieden tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma bok ieden pierwszego kwadratu do trzeciey linii proporcyonalney z tym bokiem, i z bokiem drugiego kwadratu. Niech naprzykład A i B, będą boki tych dwóch kwadratów, a C, niech będzie liniia trzecia proporcyonalna do tych boków, kwadrat pierwszy, tak się mieć będzie do kwadratu drugiego, iak się ma A do C.

243. *Defin:* Ten stosunek A do C, składa się z stosunku A do B, i B do C. Jako zaś te dwa ostatnie stosunki są równe; bo kładliśmy A do B, iak B do C, albo A: B: C, tak stosunek z nich złożony, nazywa się *dwómnożnym*, (Ratio duplicata) że wykładnik iego, iest kwadratem iednego z wykładników, dwóch pierwszych stosunków.

Niechby boki dwóch kwadratów miały się do siebie, iak 1. do 2; Powierzchnie tych kwadratów będą do siebie w tym samym stosunku, w którym iest 1, do 4; trzecia też linii proporcyonalna do 1. i 2, iest: 4; a zatém te dwa kwadraty tak się do siebie mieć będą, iak się ma bok iednego z nich do trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Jeżli boki dwóch kwadratów będą do siebie, iak 2, do 3, powierzchnie ich będą, iak 4. do 9; trzecia też liniia proporcyonalna do 2. i 3, iest: $\frac{9}{2}$, a stosunek 2 do $\frac{9}{2}$ iest ten sam, co i stosunek 4 do 9.

Jako stosunek pierwszy naprzykład linii do trzeciey *ciągło* (continuè) proporcyonalnéy, nazywa się stosunkiém dwumnożnym stosunku pierwszéy linii do drugiéy; tak znowu stosunek pierwszéy téy linii do drugiéy, nazwać można stosunkiém *dwudzielnym* (ratio subduplicata) stosunku linii pierwszéy do trzeciéy. Y tak gdy trzy linie przez liczby oznaczone: 1, 2, 4, są ciągło proporcyonalne, to iest 1 do 2, iak 2 do 4; albo 1: 2: 4. Ponieważ pierwsza do trzeciéy, to iest 1 do 4 iest w stosunku dwumnożnym pierwszéy do drugiéy, to iest iak 1^2 do 2^2; będzie znowu 1. do 2, w stosunku dwudzielnym 1; do 4: to iest iak $\sqrt{1}$. do $\sqrt{4}$.

244. *Zagadn*: 2. Maiąc dany kwadrat ieden, znaleśdź drugi, któryby do pierwszégo był w danym stosunku.

Rozwiąz. Danemu stosunkowi znaydźmy inny równy maiący za poprzednika bok kwadratu danego, między tym poprzednikiém, i następnikiém iego, szukaymy średniéy proporcyonalnéy, ta będzie bokiém kwadratu żądanego.

Albo tak: Złączmy wprost z sobą dwie liniie, maiące do siebie ten sam stosunek, który maią dwa wyrazy, naprzykład dwie liczby dane. Na téy linii z dwóch złożonéy, iako na średnicy, nakreślmy półkole, i do punktu ich łączenia się wynieśmy prostopadłą, aż do okręgu. Od punktu zéyścia się prostopadłéy z okręgiém poprowadźmy dwie liniié do dwóch końców średnicy, kwadraty tych dwóch linii, mieć będą do siebie dany stosunek; a zatém ieżeli iedna z nich równa iest bokowi kwadratu danego, druga też równa będzie bokowi kwadratu, którego szukamy. Jeżeli zaś pierwsza nierówna iest bokowi kwadratu danego, to trzeba na niéy, zacząwszy od punktu iéy przecięcia z okręgiém, wyznaczyć liniią równą bokowi kwadratu danego i od punktu naznaczonego prowadzić równoodległą od średnicy, a ta równoodległa przetnie drugą liniią w tym punkcie, który wyznaczy długość linii kwadratu szukanego.

To zagadnienie przystosować należy do przykładów Arytmetycznych.

Przykład. 1. Znaleśdź kwadrat, którzyby był $\frac{3}{5}$. kwadratu danego, to iest, któryby tak się miał do niego, iak 3. do 5.

Bok kwadratu danego dzielę na dwie części, któreby tak się miały do siebie, iak 2. do 3. Na tymże boku, iak na średnicy kreślę półkole, a od punktu podziału wynoszę prostopadłą aż do iéy spotkania się z okrągiém. Od tego punktu spotkania prowadzę liniią do końca średnicy, w tę stronę, gdzie część iéy większa znayduie się. Ta liniiá będzie bokiém kwadratu szukanego.

Przykład. 2. Maiąc dany kwadrat, do

Ma

brać mu drugi, któryby tak się miał do niego, i k 5 do 3

Liniią równą bokowi danego kwadratu przeciągniymy daléy, aż takich 5. części zamykać w sobie będzie, iakich 3. nieprzeciąguiona zamykała.

Na téyże linii tak przeciągnionéy, iak na średnicy, nakreślmy półkole, i do punktu od którego iest przedłużona, wynieśmy prostopadłą, aż do okręgu, i do tego punktu, gdzie go spotyka, poprowadźmy liniią do końca tego średnicy, gdzie część iéy równa się bokowi danego kwadratu. Ta ostatnia linia będzie wymiarém boku kwadratu, którego szukamy.

245 *Uwaga*. Rozwiązanie Arytmetyczne takowych zagadnień zasadza się na wyciąguieniu pierwiastku kwadratowego.

Gdy naprzykład znaleśdź potrzeba kwadrat, któryby był ⅗ kwadratu danego, to iest, któryby tak się miał do niego, iak 3. do 5; rozmnożywszy obiedwie te liczby przez 5. będzie 3. do 5, iak 15. do 25. Więc kwadrat, którego szukamy tak się mieć będzie do kwadratu, danego, iak 15 do 25, a zatém bok kwadratu, którego szukamy, będzie do boku kwadratu danego, iak iest liczba, która przez siebie rozmnożona czyni 15, do liczby, która przez siebie rozmnożona czyni 25; to iest: iak pierwiastek kwadratowy z 15 do 5. Trzeba tedy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 15, i ten pokaże wielkość boku kwadratu szukanego; to iest trzeba znaleśdź średnią liczbę proporcyonalną między dwiema danémi, 3 i 5; rozmnożywszy iednę przez drugą, i z rozmnożoney liczby

15, pierwiastek kwadratowy wyciągnowszy.

Działanie więc Jeometryczne zmierzaiące do znalezienia średniéy linii proporcyonalnéy między dwiema danemi, iest to samo, co w Arytmetyce wyciąganie pierwiastku kwadratowe.o z liczby daney; co można i tym potwierdzić, że kwadrat liczby średniéy Jeometrycznie proporcyonalney między dwiema innemi, równa się tymże dwóm liczbom przez siebie rozmnożonym; a zatém ta średnia liczba znaydzie się wyciągaiąc pierwiastek kwadratowy z tych dwóch liczb, iedney przez drugą rozmnożonych.

Gdyśmy wyżey Jeometrycznie szukali kwadratu; któryby miał się do kwadratu danego w danym stosunku, szukaliśmy przez wykreślenie, średniey linii Jeometrycznie proporcyonalney między dwiema w danym stosunku, będącemi: i ta średnia liniia była bokiém kwadratu szukanego.

246. Przystosować załatwością można podania dopiero wyłożone do innych iakichkolwiek figur prostokreślnych, i do siebie podobnych. Pokaże się to naprzód na Prostokątach podobnych, pot m na Troykątach, naostatek w ogulności na iakichkolwiek figurach prostokreślnych.

Gdy będą dwa Prostokąty podobne, i na ich dwóch bokach odpowiadaiących sobie zrobiemy dwa kwadraty, te dwa Prostokąty, tak się do siebie mieć będą, iak te dwa kwadraty.

Niech będą dwa prostokąty podobne, ABCD, abcd; ich powierzchnie, tak się do *Tab: 24.*

Fig. 1. siebie mieć będą, iak się maią powierzchnie kwadratów ABEF. abef. zrobione na bokach odpowiadaiących sobie; AB ab Jakoż Prostokąt ABCD, tak się ma do kwadratu ABEF. iak wysokość AD do wysokości AF=AB to iest:

$$ABCD: ABEF = AD: AB.$$

Podobnie abcd: abef = ad: ab.

Aże dla podobieństwa prostokątów, iest też AD: AB = ad: ab. więc

$$ABCD: ABEF = abcd: abef.$$

albo. ABCD: abcd = ABEF: abef.

To samo ieszcze wyłożyć można sposobem następuiącym.

Fig. 2. Niech dwie podstawy dwóch Prostokątów podobnych będą do siebie iak 5. do 3; wysokości ich będą też w takowym stosunku 5 do 3: a zatém ieżeli podzielémy iednę podstawę na 5. a drugą na 3. równe części, wysokość także, iednę na 5. części równych, a drugą na 3. równe pierwszym; powierzchnie tych dwóch Prostokątów będą mogły bydź podzielone, pierwsza na 25. a druga na 9. części równych w obydwóch Prostokątach, tak iak też i kwadraty na tych samych podstawach zrobione, mogłyby bydź podzielone, ieden na 25. a drugi na 9. równych kwadratów, ztąd wypływa, że i troykąty prostokątne podobne, tak się maią do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie; bo takie Troykąty są w saméy rzeczy połowami prostokątów podobnych, i maiących też samę, co one, podstawę, i wysokość.

247. Można ieszcze przystosować to

samo i do iakichkolwiek Troykątów podobnych; ponieważ albowiem w podobnych Troykątach, wysokości są między sobą iak Podstawy, zatém prostokąty, któreby miały téy wielkości podstawy i wysokości. co i Troykąty, byłyby podobne i miałyby się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków, albo iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie (246) więc, i Troykąty, iako połowy tychże prostokątów, będą do siebie w stosunku także dwumnożnym ich bokow.

Jaśniéy to wyłożyć można, gdy stosunki boków wyrażone będą przez liczby.

Niech będzie Troykąt iakikolwiek, którego podwoiliśmy wszystkie trzy boki, Ten drugi Troykąt zmieści w sobie 4 Troykąty, z których każdy przystanie do pierwszego. *Fig. 3.*

Jeżeli w tymże pierwszym Troykącie bok każdy potroiémy, ten drugi Troykat zamknie w sobie 9. Troykątów, z których każdy przystanie do pierwszego.

Jeżeli znowu każdy bok w pierwszym Troykącie tak przedłużémy, żeby dłuższy był 4, 5, 6, i t. d. razy; ten drugi Troykąt pomieści w sobie, 16, 25. 36 i t. d. Troykątów, mogących przystać do pierwszego.

Przeto, ieżeli boki Troykąta iednego zawieraią w sobie 1.2.3.4 5 6.7.8.9. razy boki innego Troykąta, powierzchnia pierwszego Troykąta zawierać będzie powierzchnią drugiego, 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64, 72, 81... razy.

Podobnie, powierzchnie kwadratów, których boki zawieraią 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

8, 9, - - razy bok innego kwadratu, będą zawierać powierzchnią tego drugiego kwadratu, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 72, 81, - - razy.

Gdyby boki dwóch Troykątów podobnych miały się naprzykład do siebie, iak 5 do 7; możnaby w pierwszym Troykącie umieścić 25, a w drugim, 49 równych Troykątów, których wszystkich boki przystaćby mogły od siebie, a zatém powierzchnie tych dwóch Troykątów miałyby się do siebie, iak 25 do 49; to iest iak powierzchnie dwóch kwadratów, których boki byłyby do siebie iak 5 do 7.

Nakoniec, można tego samego dowieść sposobem podobnym, iakośmy dowodzili, że kwadraty maią się do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków (242).

I tak gdy będą dwa iakiekolwiek Troykąty podobne, do których dwóch boków odpowiadaiących sobie, znaydujemy trzecią liniią, ciągłoproporcyonalną; powierzchnia iednego Troykąta, tak się mieć będzie do powierzchni drugiego, iak bok pierwszego Troykąta, który wzięty iest za pierwszy wyraz proporcyi, do téy trzeciéy linii proporcyonalnéy.

Fig. 4. Niech będą dwa Troykąty podobne, ABC, abc, znaydźmy AD trzecią ciągłoproporcyonalną do boków AB, ab, i tę samę AD przenieśmy na liniią AB, od A do D. Powierzchnia Troykąta ABC będzie do powierzchni Troykąta abc, iak AB do AD.

Wykreślenie. Poprowadźmy liniią CD.

Ponieważ dla podobieństwa Troykątów iest: AB; ab = AC, ac a przez wykreślenie AB. ab = ab: AD, będzie więc; AC: ac = ab: AD. a zatém Troykąty cab, CAD, maią kąty A i a równe, i ramiona około tych kątów *na odwrot* proporcyonalne: Będą tedy te dwa Troykąty równe co do powierzchni; a przeto stosunek Troykąta ABC, do każdego z nich będzie iednakowy. A że stosunek tegoż Troykąta ABC, do Troykąta ADC, równy iest stosunkowi linii AB. do linii AD. więc też i Troykąt ABC tak się mieć będzie do Troykąta abc, iak liniiă AB do linii AD; to iest w stosunku dwumnożnym boków AB, ab.

Idzie ztąd, że i równoległoboki podobne są także między sobą, w stosunku dwumnożnym ich boków; ponieważ takie równoległoboki dwa razy w sobie zamykaią Troykąty podobne.

248. Można także było równie dokładnie dowieść, że Troykąty podobne ABC, abc, są między sobą w stosunku dwumnożnym ich boków AC, ac; a zatém, że stosunek dwumnożny AB do ab, równy iest stosunkowi dwumnożnému AC, do ac, to iest; że stosunki dwumnożne z równych stosunków są równe; co też iuż się ogólnie pokazało, mówiąc wyżéy o stosunkach składanych z innych stosunków.

Jakoż niech będą trzy iakiekolwiek ilości ciągło proporcyonalne; A, B, C, i drugie trzy ciągło także proporcyonalne; a, b: c, i w równym z pierwszémi stosunku. Stosunek składany A do C, równy będzie stosunkowi składanému a do c. to iest; A: C = a: c.

Bo, ponieważ stosunek A do B. równy wzieliśmy stosunkowi a do b, będzie.

$A:B = a:b$; Aże $A:A = B:C$
i $a:b = b:c$

Więc $B:C = b:c$.
a zatém $A:C = a:c$.

W liczbach to samo iaśniey się okazuie.

Niech będą trzy liczby ciągło proporcyonalne 8, 4, 2 i drugie trzy ciągło także i równie proporcyonalne: 12, 6, 3, będzie; $8:2 = 12:3$.

Ponieważ albowiém równe są stosunki 8 do 4, i 12 do 6, będzie.

$8:4 = 12:6$; Aże, $8:4 = 4:2$,
i $12:6 = 6:3$,

Więc $4:2 = 6:3$.
Azatym $8:2 = 12:3$.

249 *Podanie przybrane.* Gdy mamy iakiżkolwiek zbiór stosunków równych, których wyrazy wszystkie iednakowego są gatunku; summa wszystkich poprzedników, tak się mieć będzie do summy wszystkich następników, iak każdy w szczególności poprzednik, do swego następnika.

Bo, ieżeli każdy z osobna poprzednik dwa, trzy, czterý i t. d. razy, zamyka w sobie swoiego następnika, wszystkie też razém poprzedniki zamykać będą wszystkie razém następniki dwa, trzy, cztery i t. d. razy; a zatém summa wszystkich poprzedników, tyle razy zamykać będzie summę następników, ile każdy z osobna poprzednik, swego następnika.

I tak niech będą równe stosunki 64 do 32; 50 do 25; 42, do 21; 30 do 15; 24 do 12; 18 do 9; 10 do 5; 8 do 4; 6, do 3; 4 do

2; 2 do 1. Summa wszystkich poprzedników $=$ 258. a summa wszystkich następników $=$ 129; będzie tedy, 258: 129. $=$ 64: 32; albo $=$ 50: 25; albo $=$ 42: 21 i t. d.

250. *Twierdzenie.* 3. Jakieżkolwiek są Figury prostokreślne podobne, zawsze te do siebie będą w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących sobie.

Wykreśl. Od wierzchołków dwóch ką- *Fig. 5.* tów odpowiadaiących w obydwóch figurach, poprowadźmy przekątne do innych kątów, do których mogą bydź poprowadzone.

Dowodzenie. Dwie te figury będą podzielone na Troykąty, które z osobna brane w jedney figurze, będą podobne Troykątom odpowiadaiącym w drugiey figurze. Każdy zaś w szczególności Tróykąt w jedney figurze, będzie do Troykąta odpowiadaiącego sobie w drugiey figurze w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących; wszystkie tedy Troykąty, z których się składa iedna figura, będą poprzednikami, a wszystkie troykąty pierwszym odpowiadaiące, z których się składa druga figura, będą następnikami tamtych; a zatém summa wszystkich Troykątów które składaią iednę figurę (to iest ta cała figura) tak się mieć będą do summy wszystkich Troykątów, z których się składa druga figura (to iest do téy drugiéy całey figury) iak się ma każdy w szczególności Troykąt w jednéy figurze, do Troykąta odpowiadaiącego w drugiéy figurze; to iest w stosunku dwumnożnym boków odpowiadaiących w tych dwóch figurach.

Wszystko zatém, cokolwiek się powiedziało o stosunku dwoch kwadratów i o sposobie znalezienia kwadratów, któreby się miały do siebie w danym stosunku, może bydź przystosowane do iakichkolwiek figur prostokreślnych podobnych.

251. Aby Figurę iaką prostokreślną zrobić podobną i równą danym dwóm innym podobnym figurom prostokreślnym, trzeba tym końcem postawić Troykąt prostokątny, dawszy mu za ramiona dwa boki odpowiadaiące sobie w dwóch figurach danych podobnych, a przeciwprostokątna tego Troykąta, będzie bokiem odpowiadaiącym w figurze, ktoréy szukamy.

252. Gdy cztery linie składaią proporcyą, i na dwóch pierwszych, wyrażaiących ieden stosunek, zrobiemy dwie iakiekolwiek figury podobne, a na dwóch drugich, wyrażaiących drugi stosunek, zrobiemy inne dwie iakiekolwiek figury podobne, w takim razie stosunek dwóch pierwszych figur, równy będzie stosunkowi dwóch drugich, bo tak stosunek dwóch pierwszych figur, iako i stosunek dwóch drugich, iest stosunkiem dwumnożnym z dwoch równych stosunków.

Prawdzi się to w szczególności, gdy wszystkie cztery figury są sobie podobne; a tém widoczniey ieszcze się okazuie, gdy te cztery figury są kwadratami.

253. Maiąc dwie proporcye, których wyrazy wszystkie są liniiami, Prostokąt

z poprzedników dwóch pierwszych stosunków, w każdey proporcyi tak się mieć będzie do Prostokąta z dwóch ich następników, iak Prostokąt z poprzedników, drugich dwóch stosunków do Prostokąta z ichże następników.

Należy to obiaśnić na przód na przykładach liczebnych, pokazuiąc, że gdy będą dwie proporcye w liczbach wyrażone, poprzedniki dwóch pierwszych stosunków, w obydwóch proporcyach ieden przez drugi rozmnożone, tak się mieć będą do swoich następników przez siebie także rozmnożonych; iak i inne dwa poprzedniki, ieden przez drugi rozmnożone do swoich następników podobnie rozmnożonych.

Przykład. Niech będzie: $14 : 7 = 6 : 3$.
i znowu - $15 : 5 = 12 : 4$.
będzie też $14 \times 15 : 7 \times 5 = 6 \times 12 : 3 \times 4$.
to iest, $210 : 35 = 72 . 12$.

To co na liczebnych przykładach widocznie się pokaże, trzeba ieszcze ztwierdzić rozumowaniem podobnym następuiącému: Jeżeli poprzednik w piérwszéy proporcyi iest dwa razy naprzykład wiekszy od swego następnika, a poprzednik w drugiéy proporcyi, trzy razy naprzykład, iest większy od swego także następnika; tedy rozmnożywszy pierwszego poprzednika, pierwszéy proporcyi, przez pierwszego poprzednika drugiéy proporcyi, poprzednik z tych dwóch rozmnożony, będzie dwa razy trzy, to iest sześć razy większy, od następnika podobnie z dwóch następników pierwszych, w obydwóch proporcyach rozmnożonego; a że i drugie dwa poprzedniki, są, ieden dwa razy, a drugi trzy razy, większe od swoich następników, więc tak pierwszy poprzednik, z dwóch pierwszych poprzedników rozmnożony, iak i drugi poprzednik z dwóch drugich rozmnożony, będzie sześć razy większy od swoiego następnika podobnie rozmnożonego; które to rozumowanie przystosować można i do każdego innego wykładnika.

Niech litery A, B, C, D, wyrażaią cztery liniié składaiące pierwszą proporcyą, i niech litery a, b, c, d, wyrażaią drugie cztery liniié składaiące drugą proporcyą; to iest: niech będzie: $A : B = C : D$, i $a : b = c : d$; będzie też $A \times a : B \times b = C \times c : D \times d$.

Bo naprzod $A : B = Aa : Ba$.
i podobnie $C : D = Cc : Dc$.
Aże - $A : B = C : D$.
Więc - - $Aa : Ba = Cc : Dc$
Tak też znowu; $a : b = Ba : Bb$.
$c : d = Dc : Dd$.
Aże - $a : b = c : d$.
Więc - - - $Ba : Bb = Dc : Dd$
Stosunek tedy złożony z stosunków:
$Aa : Ba$.
i $Ba : Bb$.
To iest stosunek Aa, Bb, równa się stosunkowi złożonému z stosunków.
$Cc : Dc$.
i $Dc : Dd$.
To iest stosunkowi, $Cc : Dd$.
albo co na iedno wychodzi; $Aa \, Bb = Cc : Dd$.

ROZDZIAŁ. X.

O wielokątach foremnych.

254. *Defini.* Gdy wielokąt ma wszystkie boki i kąty równe, nazywa się *Wielokątem foremnym* (Poligonum regulare.)

255. *Wniosek* Ponieważ ważność wszystkich razem kątów wielokąta zawisła tylko od liczby boków iego (85) gdy tedy wszystkie kąty wielokąta są równe, ważność iednego z tych kąta, zawisła tylko od liczby boków tegoż wielokąta. Ztąd idzie, że wielokąty foremne, iednakową maiące liczbę boków, kąty też wszystkie maią równe i boki proporcyonalne; są więc do siebie podobne. Można tedy przystosować im to wszystko, co się w ogulności o figurach podobnych powiedziało.

Wiemy iuż sposob wykreślenia Troykąta równobocznego i kwadratu na linii daney, wiemy też iak wpisać w Troykąt równoboczny, lub na nim opisać koło.

Wpisanie w koło dane, Troykąta równobocznego, i opisanie tegoż koła Troykątem, łatwiey się wykonywa przez wykreślenie *Sześciokąta* foremnego (Hexagonum.)

256. *Twierdz*: 1. Bok sześciokąta w koło wpisanego, równy iest promieniowi tegoż koła.

Niech będzie ABCDEF sześciokąt foremny, w koło w pisany; bok którykolwiek tego sześciokąta nap: AB, równy iest promieniowi SB tegoż koła. *Tab.* 15. *Fig.* 1.

Wykreślenie. Poprowadźmy promień SA.

Dowodz. Kąt ASB, zamyka szóstą część, czterech kątów prostych; to iest $\frac{2}{3}$

iednego kąta prostego; áżé trzy kąty Troykąta ASB, składaią dwa kąty proste, więc dwa kąty A i B tegoż troykąta, razem wzięte są róźnicą między dwóma kątami prostemi i $\frac{2}{3}$ iednego kąta prostego; to iest czynią $\frac{4}{3}$ kąta prostego. Ponieważ zaś te dwa kąty są sobie równe, więc każdy z nich będzie $\frac{2}{3}$ kąta prostego: a zatém wszystkie trzy kąty Troykąta ASB są równe, i dla tego też i boki wszystkie trzy równe będą. Będzie tedy bok AB, sześciokąta foremnego (czyli cienciwa 60. stopniów) równy promieniowi koła opisanego.

257. *Wniosek* 1. Aby więc wpisać sześciokąt foremny w koło dane, dosyć iest przenieść 6 razy iako cięciwę promień tego koła, na okrąg iego.

248. *Wniosek* 2. Poprowadziwszy liniią AC, będzie ona cienciwą trzeciéy części okręgu koła, a zatém będzie bokiém Troykąta równobocznego wpisanego w dane koło. Pociągnąwszy tedy liniié AE, CE, Troykąt ACE, będzie Troykątém równobocznym w koło wpisanym.

259. *Twierdzen.* 2. Gdy w koło wpisany będzie Troykąt równoboczny, a przez wierzchołki kątów iego; pociągniémy styczne z kołém tak daleko, aż się z sobą zniydą, te styczne zrobią Troykąt równoboczny na kole opisany.

Fig. 2. Niech będzie ABC Troykąt równoboczny wpisany w koło SABC; przez wierzchołki A, B, C, tego Troykąta prowadzone styczne koła, aż do spotkania się ich z sobą w punktach D, E, F, zrobią Troykąt równoboczny na kole opisany.

Wykreślenie. Pociągniymy promienie SA, SB, SC.

Dowodz: Którykolwiek z kątów w środku koła, naprzykład kąt ASB, i iemu przeciwny kąt E, między dwiema stycznemi zawarty, czynią razem dwa kąty proste. Aże kąty wszystkie trzy w środku koła są równe, więc równe będą i kąty trzy od stycznych zrobione; a zatém i Troykąt DEF będzie równoboczny.

Łatwo więc opisać można dane koło Troykątem równobocznym, wpisawszy piérwey w toż koło Troykąt także równoboczny.

260. W ogulności zaś mówiąc: niechby był iakikolwiek Wielokąt forenny w koło wpisany; ieżeli przez wszystkie wierzchołki kątów tego Wielokąta poprowadziémy styczne koła, tak, aby każde dwie blizkie z sobą się spotykały; Wielokąt, który z tych stycznych zrobi się, będzie także forennym.

Dowodz: We wszystkich czworokątach takich, iak naprzykład ASBE, kąty między dwiema stycznemi zawarte, iak naprzykład kąt E, będą równe; a zatém wszystkie kąty tego wielokąta będą równe.

Wszystkie także Troykąty, iak naprzykład ABE będą równoramienne, i kąty w jednym Troykącie, równe będą kątom w drugim, i podstawy w nich, iak naprzykład; iest podstawa AB, będą równe; a zatém wszystkie te Troykąty mogą przystać do siebie, i ztąd boki iednego Troykąta równe będą bokom drugiego. Więc summa dwóch takich równych boków iednakowa zawsze będzie. Aże bok naprzykład EF, iest summą dwóch takich równych boków Wielokąta opisanego, więc wszystkie boki tego Wielokąta równe będą.

261. Twierdz. 3. W każdy Wielokąt foremny, można wpisać iedno koło, i drugie koło, na nim opisać, a obadwa te koła spólny mieć będą środek.

Niech będzie iakikolwiek sześciokąt foremny, ABCDEF, można zawsze wpisać weń koło, i drugie na nim opisać, a te dwa *koła* będą *spółśrodkowe*. (circuli concentrici.)

Fig. 3. *Dowodz.* Od środka dwóch boków blizkich, naprzykład od G, i H, wyprowadziwszy dwie prostopadłe: GS, HS; punkt S, przecięcia ich, iednakowo będzie odległy od trzech wierzchołków blizkich A, B, C, (według tego co się iuż powiedziało o opisaniu kołem Troykąta) będą tedy równe liniie AS, BS, CS; a zatém Troykąty SBC, SBA równe względem siebie boki mieć będą, i ieden Troykąt przystać może do drugiego; a w szczególności kąt SBC, równy iest kątowi SBA, i każdy z nich czyni połowę kąta w wielokącie, to iest kąta ABC. Aże też równe są i kąty SCB, SBC, więc i kąt SCB, będzie połową kąta w Wielokącie, a zatém kąt SCD, będzie drugą iego połową. Mają więc Troykąty: SCD, SCB spólny bok: SC, równe boki: CD, CB, i kąty w C między niémi zawarte, równe. Mogą tedy i te dwa Troykąty przystać do siebie; a w szczególności linie SB, SD równe bę-

dą. Więc to koło, którego środkiém iest S, i które przechodzi przez punkta blizkie: A, B, C, przechodzić także będzie i przez punkt następuiący: D. Podobnym sposobém pokazać można: że też koło przechodząc przez punkta: B, C, D, przechodzić będzie i przez punkt E i t. d.

Wszystkie promienie: SA, SB, SC, SD, i t. d. dzielą w wierzchołkach na dwie równe części, kąty Wielokąta, iako się pokazało; a zatém dwa Troykąty naprzykład SBH, SBG mogą przystać do siebie, bo maią kąty proste przy H, i G, bok spólny: SB, i kąty przy B równe; a w szczególności liniié SH, SG są równe; toż samo możnaby dowieśdź i względém innych prostopadłych spuszczonych od środka S, na boki wielokąta. Punkt tedy S, iest iednakowo odległy od wszystkich boków Wielokąta, a zatém iest środkiém koła, któreby wpisać można w Wielokąt.

262. *Twierdz. 4.* Maiąc Wielokąt foremny w koło wpisany, a przeciąwszy na dwie równe części łuk, którego cięciwą iest bok tego Wielokąta, i od punktu każdego takiego przecięcia poprowadziwszy liniié do dwóch końców łuku, zrobi się z tych linii inny wielokąt foremny, tyle dwoie co pierwszy boków maiący.

1. Wszystkie boki tego nowego wielokąta będą równe, bo będą cięciwami połowy łuków równych.

2. Wszystkie także kąty tego Wielokąta, będą równe, bo każdy z nich będzie dwa razy większy od kąta przy podstawie Troykątów równoramiennych, przystać do

siebie mogących, które za boki, maią promienie koła.

Ten tedy Wielokąt, będzie miał wszystkie boki i kąty równe, a zatém będzie forémnym.

Podobnym sposobém dowieśdź możnaby, że ieżeli boki Wielokąta, są cienciwami tyloż części równych koła, ile Wielokąt má boków, ten Wielokąt będzie forémnym; a zatém wykreślenie Wielokąta foremnego, któryby zamykał w sobie pewną liczbę boków danych, zależy od tego, aby podzielić okrąg koła na daną liczbę części równych.

263. *Zagadn.* Na danym kwadracie opisać, i wpisać w ń koło; i znowu w dane koło wpisać, i opisać na nim kwadrat.

Rozwiąz: 1. Prowadzę dwie przekątne w kwadracie; punkt przecięcia ich, będzie środkiem koła, które wpisać w kwadrat, i opisać na nim mamy.

1. Prowadzę dwie średnie w kole, iednę do drugiéy prostopadłą. Końce ich będą wierzchołkami kwadratu wpisać się w koło mogącego; przez te wierzchołki pociągnąwszy styczne koła, te zrobią kwadrat na kole opisany.

264. *Wniosek.* 1. Kwadrat opisany na kole, równa się kwadratowi średnicy iego, i dwa razy iest większy od kwadratu wpisanego.

265. *Wniosek* 2. Z tego co się wyżéy powiedziało, wynika, że przez *podziały*, (subdivisiones) *ciągłe* łuków na dwie części równe, można wpisać w koło Wielokąty, których liczba boków byłaby następuiąca.

3, 6, 12, 24, 48, 96, albo w ogulności. 3×2^n (x)

4, 8, 16, 32, 64, 128 albo w ogulności. 4×2^n.

Przestr: Za pomocą samego liniiatu i Cerkla, nie można z zupełną dokładnością i pewnością (to iest bez szukania takowego podziału cerklém) podzielić łuk każdy na 3, 5, 7, i t. d. części równych; a zatém z takową samą pomocą nie można zawsze wykreślić takie Wielokąty, których liczba boków wyrażałaby się przez liczby rozmnożone, z 3, lub 4, i t. d. przez 3, raz lub więcéy razy wzięte.

266. *Twierd.* 5. Powiérzchnia Wielokąta opisanego na kole a w szczególności Wielokąta forémnego, równa się Troykątowi maiącému za wysokość promień tego koła, a za podstawę *obwod* (Perimeter) tego Wielokąta.

Wykreśl. Od środka koła poprowadźmy liniié do wszystkich wierzchołków Wielokąta.

Dowodz. Wielokąt podzielony będzie przez te liniié, na tyle Troykątów, ile ma boków; Troykąty zaś te maią za wysokość promień koła, a za podstawę boki Wielokąta; więc powierzchnia tych wszystkich Troykątów, czyli powierzchnia Wielokąta, równa iest iednému Troykątowi, któryby miał za wysokość promień

(x) *Co znaczą te wyrazy:* 3×2^n, 4×2^n *da się poznać w Algebrze.*

tego kąta, a za podstawę obwod Wielokąta.

297. *Wniosek.* Gdy rozmaite Wielokąty opisane są na iednêm kole; ich powierzchnie mieć się do siebie będą iak obwody.

268. *Twierdzenie. 6.* Powierzchnia Wielokąta forémnego, w koło wpisanego, równa się Troykątowi, maiącému za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwod wielokąta innego forémnego w toż koło wpisanego, a tylko połowę tyle boków maiącego.

Fig. 1. Niechay naprzykład sześciokąt ABCDEF, wystawia nam iakiko wiek Wielokąt forémny, w koło wpisany, powierzchnia tego sześciokąta równa iest Troykątowi, maiącému za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwód Troykąta równobocznego, w toż samo koło wpisanego.

Dowodz. Poprowadźmy promień SB przecinaiący w punkcie G. bok Troykąta równobocznego. Troykąt ASB, uważać można, iak gdyby miał podstawę SB, a wysokość AG; Troykąt także CSB uważać można, iak gdyby miał Podstawę SB a wysokość CG; a zatém czworokąt ASCB, równa się Troykątowi, któryby miał albo wysokość AC, a podstawę SB, albo też podstawę AC, a wysokość SB. Toż mówić i o innych Czworokątach, zawartych między dwóma Wielokąta bokami przyległémi, i dwóma promieniami; summa więc powierzchni, wszystkich tych czworokątów, to iest powierzchnia Wielokąta foremnego w koło wpisanego, równa się takiému Troykątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę obwod Wielokąta innego forémnego, w toż koło wpisanego, a połowę tyle boków maiącego.

Przykład. Powierzchnia Dwunastokąta forémnego w koło wpisanego, równa się Troykątowi, maiącému za wysokość promień tego koła a za podstawę obwod sześciokąta, w toż koło wpisanego, albo (co na iedno wychodzi) równa się Prostokątowi, któryby miał za wysokość promień tego koła, a za podstawę, tenże promień trzy razy wzięty.

Ta więc powierzchnia iest trzy razy większa od kwadratu promienia, i iest równa $\frac{3}{4}$ kwadratu średnicy.

Twierdzenie to stosuie się tylko do Wielokątów, których boki są parzyste; następuiące Twierdzenie przystosować można do wszystkich ogólnie Wielokątów foremnych.

269. *Twierdz.* 7. Powierzchnia Wielokąta forémnego w koło wpisanego, równa się Troykątowi, maiącému za wysokość prostopadłą spuszczoną od środka koła do boku wielokąta, a za podstawę obwod iego. (y)

Dowodz. Prostopadłą tę uważać można, iak promień koła wpisanego, lub wpisać się mogącego w Wielokąt; a zatém

---

(y) *Taka w szczególności prostopadła nazywa się z Greckiego apothema.*

twierdzenia to iest tylko przystosowaniém wyższego (256).

270 *Wniosek*. Jeżeli od punktu iakiegokolwiek w Wielokącie forémnym, nawet i w tym, którego boki tylko wszystkie są równe, spuściémy prostopadłe do wszystkich iego boków, te prostopadłe dodane do siebie, iednakową zawsze długość uczynią.

Jakoż poprowadziwszy od tego samego punktu dwie linije od dwóch końców iednego z boków, powierzchnia Troykąta, témi liniiami zakończona, równa będzie Troykątowi maiącému za podstawę bok wielokąta, a za wysokość prostopadłą nań spuszczoną; albo co na iedno wychodzi, powierzchnia ta równa będzie Troykątowi maiącému za wysokość bok Wielokąta, a za podstawę, prostopadłą nań spuszczoną; a z tém powierzchnia całego Wielokąta równać się będzie Troykątowi, któryby miał za wysokość bok tego Wielokąta, a za podstawę summę wszystkich prostopadłych na bok iego spuszczonych. Aże powierzchnia takowego Troykąta iest zawsze iednakowa, i wysokość także iednakowa, więc i podstawa, czyli summa wszystkich prostopadłych iednakowa zawsze będzie, z któregokolwiek punktu Wielokąta, onę spuściémy.

WSTĘP DO ROZDZIAŁOW XI. i XII.

O używaniu Przenośnika. Cerkla proporcyonalnego, i o podziale nazwanym Nonniuszém.

271. *DEf. Przenośnik* (Transportator) iest to półkole, którego okrąg podzielony iest na stopnie, albo, gdy większy będzie, na półstopnie, i cwierci stopniów.

272. *Zagadn.* 1. Maiąc dany kąt na papierze, znaleśdź liczbę stopniów, którą w sobie zamyka.

Sposob 1. Przykładam środek przenośnika do wierzchołka kąta danego, a podstawę tegoż przenośnika do iednego z ramion kąta; łuk przenośnika zawarty między ramionami kąta, pokaże w stopniach ważność iego.

Sposob 2. Od wierzchołka kąta danego, iak od środka, promieniém rownym promieniowi przenośnika, kreślę łuk zawarty miedzy ramionami kąta, odległość dwóch końców tego łuku przenoszę cerklém na okrąg przenośnika, od końca średnicy, która ma służyć za podstawę; łuk przenośnika miedzy końcém średnicy i drugim punktém, gdzie drugie ramie Cerkla przypadnie, zawarty, pokaże w stopniach ważność kąta danego.

273. *Zagadn.* 2. Na linii danéy, i przy punkcie na niéy danym, zrobić kąt zawiéraiący w sobie daną liczbę stopniów.

Sposob. 1. Położywszy na linii daney przenośnik, tak, aby średnica iego, do téy linii przystawała, a środek do punktu danego, naznaczam na papierze punkt któremu odpowiada punkt przenośnika ukazuiący liczbę daną stopniów, ten punkt łączę liniią z punktém danym, a ta liniia uczyni z daną kąt, którego szukałém.

To działanie będzie dokładniéysze, gdy przenośnik ma sobie przydany promień ruchomy około środka iego.

Sposob 2, Od punktu danego, iak od środka, promieniém równym promieniowi przenośnika, kreślę łuk, i na ten, wziętą na przenośniku liczbę stopniów danych przenoszę, od punktu przecięcia linii z tym łukiém, aż do drugiego punktu na tymże łuku. Punkt ten ostani złączywszy liniią z punktém danym na drugiéy lini; te obiedwie liniié zamykać będą kąt, którego szukałém.

274 *Zagadn:* 3 W dane koło, wpisać Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Szukam kąta w środku tego Wielokąta; ciągnę promień iakikolwiek i robię na nim kąt równy kątowi w środku Wielokąta, maiący środek koła danego za wierzchołek; łuk tego koła zawarty międzу ramionami kąta, będzie miał za cięciwę bok Wielokąta danego.

275. *Zagad.* 4. Na danéy lini wykreslić Wielokąt forémny o pewnéy liczbie boków.

Rozwiąz. Przy dwóch końcach danéy linii robię dwa kąty równe połowie kąta przy obwodzie Wielokąta, którego szukam. Punkt przecięcia ramion tych dwóch kątów będzie środkiém koła, w które wpisać się da Wielokąt, o tylu bokach, ile ich dano, i téy wielkości, iakiéy iest liniia dana.

276. *Uwaga.* Używanie przenośnika, wyciąga wielkiéy baczności im większy

promień mieć będzie, tym mniéy obawiać się trzeba znacznieyszego iakiego uchybienia.

Miedzy innémi narzędzia tego niedostatkami, iest ten mianowicie, że promienia w nim odmienić nie można według okoliczności; ale ten niedostatek zastąpić może w potrzebie inne narzędzie nazwane *liniią cienciw* (Linia chordarum) w cerklu proporcyonalnym.

277 Na obydwóch ramionach cerkla proporcyonalnego, znayduie się *liniią cienciw*, któréy podziały z czynaią się w środku (in centro) tego narzędzia; a kończą się tam, gdzie iest liczba: 180. albo w mniéyszych narzędziach tam gdzie iest liczba 60. Odległości środka od innych punktów podziału pokazuią wielkość cienciw wyznaczoną przez *rachunek* (per calculum) albo przez figurę dokładną. Ta wielkość cienciw wyznaczona iest w półkolei którego promień równa się odległości środka cerkla proporcyonalnego od punktu podziału naznaczonego liczbą 60; a to z przyczyny równości cienciwy 60; stopniów z promieniém. *Tab.* 17.

Poniewaź rozwiązanie czterech poprzedzaiących zagadnień iedynie zawisło od wyznaczenia cienciwy łuku, to iest: od wielkości iéy względém promienia; można więc cztery te Zagadnienia rozwiązać używaiąc, iednego tylko ramienia w cerklu proporcyonalnym, biorąc za promień koła odległość punków: 60 i 60.

Dwa razém ramiona tego cerkla służą do odmienienia promienia; náymniéyszym będzie, odległość dwóch punktów 60, i 60 gdy Cerkiel proporcyonalny zupełnie iest zamknięty; powiększonym zaś będzie przez odległość większą tychże punktów, gdy cerkiel coraz więcéy otworzemy; a náywiększym będzie, gdy cerkiel cale tak otworzémy, że ramiona iego w prostéy będą linii.

Niechby naprzykład tak był otworzony Cerkiel proporcyonalny, aby odległość dwóch punktów 60. i 60. czyniła połowę odległości iednego z tych punktów, od środka; będzie też i odległość drugich punktów odpowiadaiących sobie naprzykład 40. i 40 połową odległości iednego z nich od środka; a z tém odległość ta punktów: 40, i 40. oznaczyłaby cienciwę stopniów 40 albo 40°, w kole, którego promień równałby się odległości punktów 60 i 60: bo cienciwy łuków podobnych, w kołach różnych tak się maią do siebie, iak tychże kol promienie. W ogulności więc mówiąc: gdy za promień weźmiémy odległość punktów 60 i 60. na linii cien iw iakażkolwiek inna odległość dwóch punktów na téyże linii, naznaczonych iednakową liczbą, będzie cienciwą łuka, o tylu stopniach, ile wyraża ta liczba.

Ztąd wynika sposob, którego użyć wygodnie można, chcąc rozwiązać cztery poprzedzaiące zagadnienia, przez liniią cienciw, i odmieniaiąc iak się podoba promień

278. *Przykład* 1. Na danéy linii i przy punkcie na niéy także danym, zrobić kąt o pewney liczbie stopniów.

Rozwiąz: Weźmy iakikolwiek promień; otworzmy cerkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych liczbą 60, była równa temu promieniowi. Od punktu danego, iak od srodka, promieniém tymże nakreślmy łuk koła, i dàymy mu cięciwę równą odległości dwóch punktów naznaczonych liczbą daną stopniów.

279 *Przykł.* 2. Na danéy linii wykreślić Wielokąt forémny iakikolwiek.

Rozwiąz. Szukaymy kąta, iaki bydź powinien w środku Wielokąta żądanego; otworzmy cerkiel proporcyonalny tak, aby odległość punktów naznaczonych na linii cięciw tą liczbą iaka iest liczba stopniów kąta; w środkn Wielokąta, równała się linii danéy; na téyże linii wystawmy Troykąt równoramienny, dawszy mu za ramiona, liniié równe odległości punktów naznaczonych liczbą 60; wierzchołek tego Troykąta, będzie środkiém koła, w które wpisać można Wielokąt żądany.

280. *Uwaga.* Co do wykreślenia Wielokątów forémnych w szczegulności: aby się obéyść można bez szukania kątów w środku, znàyduie się na cerku u proporcyonalnym osobna liniiá Wielokatów, za którey pomocą, zacząwszy od Troykąta lub Czworokąta, aż do dwónastokąta, wykreślić można. Odległość środka tego narzędzia, od punktu 6, téy linii Wielokątów, wziąwszy za promień, albo za bok Sześciokąta forémnego w koło wpisanego, odległości, tegoż środka od pun-

któw: 3, 4, 5, i t. d. pokaża wielkość boku Wielokąta forémnego, który wpisać można w to samo koło, o tylu bokach, ile znaczą liczby: 3, 4, 5, i t. d. *Albotéż*: otworzywszy do woli cerkiel proporcyonalny, i wziąwszy na linii Wielokątów za promień, odległość punktow 6. i 6; odległości innych dwóch punktów: 3. i 3; 4. i 4, 5, i 5; i t. d. pokażą bok Wielokąta forémnego o téyże samey liczbie boków wpisanego w to koło, do którego za promień wzięliśmy odległość punktów 6 i 6.

281. Trzecia linija, którą na cerklu proporcyonalnym znáyduiémy, a wielkiego iest użytku, nazywa się *liniią części równych*. Na obydwóch cerkla proporcyonalnego ramionach, mamy liniją podzieloną na 200. części równych, a czasem, gdy cerkiel mnieyszy, na 120, mniéy lub więcéy. Jakożkolwiek ten cerkiel, otworzémy, odległość dwóch Punktow naznaczonych tą samą liczbą naprzykład 200, będzie dwa razy większa od odległości punktów naznaczonych liczbą 100, cztery razy większa od odległości dwóch punktów, 50; i t. d. a mówiąc ogulnie, odległość dwóch iakichkolwiek Punktów tą samą liczbą naznaczonych, będzie się tak miała do odległości dwóch innych punktów przez iednakową także liczbę naznaczonych; iak się maią do siebie też liczby.

282. *Używanie* 1. Maiąc daną liniją podzielić ią na pewną liczbę części równych.

Niechby naprz kład podzielić trzeba liniią daną na 5. części rownych.

Otworzmy tak cerkiel proporcyonalny, aby odległość punktów naznaczonych liczbą podzielną prze 5. równa była linii danéy; niech naprzykład odległość ta będzie punktów naznaczonych liczbą: 200; weźmy piątą część téy liczby, to iest 40, a odległość tych dwóch punktów naznaczonych liczbą 40. będzie częścią piątą linii danéy.

283. *Uwaga.* Ostatnią tę odległość znalezioną przenosząc 5 razy na liniią daną, uchybi nie (któreby zayść mogło w jéy wielkości, byłeby 5 razy powtórzone, a zatém tak powtórzone, mogłoby się stać znacznym, chociaż, każde z osobna było nieznaczne. Przytrafić się to może osobliwie w ten czas, gdy na wiele części dzielić przychodzi liniią. Aby więc tego powtarzania uniknąć, lepiéy będzie wziąść osobno $\frac{4}{5}$ linii, to iest odległość dwóch punktów: 160, i przenieść ią, od obydwóch końców na liniią daną; toż uczynić, wziąwszy potém $\frac{3}{5}$. linii i t. d.

284. *Używanie* 2. Maiąc daną liniią znaleźdź inną, którąby do niéy była w pewnym stosunku, w liczbach wyrażonym naprzykład iak 4 do 7.

Przenieśmy liniią daną na dwa punkta, naznaczone liczbą podzieloną przez 7, naprzykład na dwa punkta: 140: $\frac{4}{7}$ téy liczby 140, są 80; odległość tych dwóch punktów: 80, będzie liniią, któréy szukaliśmy.

285. *Uważanie* 3. Maiąc dane w licz-

bach trzy boki Troykąta, wykreślić go.

Przykład. Niechby trzy boki Troykąta miały bydź, iak trzy liczby: 150, 147, 128.

Otworzmy iakokolwiek cerkiel proporcyonalny; odległości dwóch Punktów: 150. dwóch punktów: 147, i dwóch punktów 128. będą do siebie, iak boki danej; a zatém mogą bydź wzięte za tę boki.

280. *Używanie* 4. Maiąc dany Troykąt iuż wykreślony, którego podstawa zamyka naprzykład 100, sznurów, znaleśdź wielkość innych dwóch boków.

Przenieśmy podstawę daną na dwa punkta: 200; zmierżmy cerkiem długość dwóch innych boków, i przenieśmy ią znowu na punkta dwa iednakową liczbą naznaczone, tém gdzie przypadną liczby dwie, na które długość tych dwóch boków przypadnie, wyrażać będą długość tychże boków w sznurach.

Opuszczam inne używania, gdzie wykreślenie Jeometryczne krótsze iest często, i pewnieysze; i tak n prz: w znalezieniu kwadratu, równego summie dwóch innych danych, albo więcey.

287. *Uwaga*. 1. Gdy kto nie ma cerkla proporcyonalnego, może na mieysce iego, a czasém i lepiey użyć lini podzieloney na wiele części równych.

288. *Uwa*: 2 Gdy część naymnieysza, którey nam do podziału potrzeba, iest bardzo mała, a liczba części ktorych szukamy znacznie wielka; w takim razie trudno iest mieć wszystkie, na teyże samey linii, podziały, tak aby ie dobrze rozez-

znać można. Udamy się więc w podobnym razie do sposobu następuiącego:

Niechby podana była liniiá, ktora zbyt iest mała, aby ią widocznie na 10, części podzielić można; trzeba osobno te części wynaleśdź od 1 aż do 10. *Tab.* 15. *Fig.* 4.

Rozwiąz. Przez dwa końce téy linii prowadzę, po iednéy stronie dwie równoodległe. Na te równoodległe przenoszę od końców linii danéy dziesięć równych części; każdy punkt podziału w iednéy rownoodległéy, łączę liniią z punktém odpowiadaiącym mu na drugiéy równoodległéy. (Te liniié łączące będą równoodległe od linii danéy) Od końca iednego linii danéy, ciągnę liniią poprzeczną do końca drugiego linii ostatniéy równoodległéy od danéy; Ta poprzeczna liniiá wyznaczy na równoodległych od linii danéy, części których szukałém.

Maiąc daną liniią bardzo małą, do podzielenia na 100, równych części, ale iednak tak wielką, aby mogła bydź widocznie podzieloną na 10, równych części; podzielić ią tak, aby tyle zaraz części równych wyznaczyć na niéy można, ile zechcemy, zacząwszy od 1. aż do 100. *Fig.* 5.

Rozwiąż. Podzielmy tę liniią na 10. rownych części; przez pierwszy punkt podziału, i przez drugi koniec téy linii, wyciągniemy dwie równoodległe iakiekolwiek (zręczniéy iednak, i wygodniéy iest, aby mało co od prostopadłych uchybiały:) Przenieśmy znowu na te dwie równoodległe 10, części, równych, albo mało rożniących się części linii danéy:

O

Złączmy drugi koniec linii danéy, od którego nie była prowadzona równoodległa, z ostatnim punktém podziału równoodległéy bliższéy; złączmy także i punkta iednéy równoodległéy z punktami odpowiadaiącémi na drugiéy; i przeciągniymy ie aż do linii ostatniéy nie równoodległéy. Nakoniec przez wszystkie punkta podziału linii danéy prowadźmy równoodległe od dwóch pierwszych równoodległych, co z łatwością przyydzie, przeniosłszy podziały linii danéy, na liniią iéy przeciwną i łączącą końce dwóch pierwszych równoodległych,, i złączywszy liniiami punkta podziału odpowiadaiące. Po takim wykreśleniu, mieć zaraz można tyle co chcémy części równych na linii danéy, zacząwszy od 1. aż do 100.

Trzeba naprzykład znaleśdź nam części 64, takich, iakich liniiá dana ma 100.

Stawmy ramie iedno cerkla zwyczáynego na punkcie średnim, 4. i otworzmy cerkiel tak szeroko, aż drugie ramie iego przypadnie na przecięcie dwóch linij, których końce naznaczone są liczbami: 4 i 60. Ta otwartość cerkla, da nam liczbę części, których szukaliśmy. i t. d.

Przedłużaiąc liniią danę, i wszystkie od niéy równoodległe, aż póki te przedłużenia nie będą równe linii danéy wziętéy raz, dwa razy, trzy razy - - dziesięć razy, otrzymamy taką liczbę części, iaką zechcémy, zacząwszy od 1, aż do 200, 300, 400, - - 1000.

Taka *podziałka* (scala) iest do używania náywygodniéysza, gdy kto nie ma cerkła proporcyonalnego, dla tego też i naywięcey iey używaią.

289 Jnny sposob do wynalezienia części równych linii daney, tak małey, że iey podzielić widocznie nie można na części żądane, iest ten, ktory się nazywa *podziałem Nonniusza*, a ktory raczey nazywać by się powinien podziałem *Verniera*, z przyczyny, że tak zwał się prawdziwy podziału tego wynalazca.

Niechby naprzykład przyszło podzielić na 30 równych części liniią tak małą, że widocznie na niey części, tych wyznaczyć nie można, niechby iednak była tey wielkości, że można ią wyraznie podzielić na 5 albo 6 części równych

Podzielmy tę liniią naprzykład na 6 części równych, i drugą iey równą, na 5 równych także części. Różnica szóstey części pierwszego podziału, od piątey części drugiego podziału, będzie równą różnicy między $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}$ częścią całey tey linii daney, to iest będzie $\frac{1}{30}$ tey linii. Gdy tedy te dwie linie tak ułożemy, że iedna będzie przy drugiey, i końce iedney w prost będą na przeciwko końców drugiey; odległość dwóch punktów pierwszego podziału w obydwóch liniiach, będzie 30stą częścią daney linii; podobnie odległość dwóch punktów drugiego podziału (rachuiąc od tychże samych, co wyżey końców) będzie; $\frac{2}{30}$; odległość dwóch punktów trzeciego podziału: $\frac{3}{30}$, czwartego: $\frac{4}{30}$, piątego; $\frac{5}{30}$, albo $\frac{1}{6}$ stą częścią całey linii daney: to iest. iedną z tych części, na które ta liniia iest podzielona, Fig. 6.

Tab. 17. 290. Czwarta liniiá, która ieszcze zwykła się znáydować na cerklach proporcyonalnych, i któréy wykreślenie zasadza-się na tém; co się wyżéy iuż wyłożyło, nazwana iest *liniią Płaszczyzn* (linea Planorum.)

Odległości środka w cerklu proporcyonalnym od punktów podziału téy linii, tak się maią do siebie, iak boki kwadratów, które w tym samym stosunku byłyby do siebie, w którym są liczby przy tychże punktach wyrażone. Y tak gdyby kwadrat ieden był: 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, razy większy od drugiego; bok tego drugiego kwadratu większy byłby: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, razy od pierwszego; dla tego też odległości od środka, punktów naznaczonych liczbami: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, tak się maią do siebie, iak liczby: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

Szczupłość narzędzia nie pozwoliła daléy tych podziałów rozciągnąć. Co się zaś tycze boków w kwadratach średnich między témi, które się dopiéro wyraziły; można ie wyznaczyć przez figurę dokładną, lub przez rachunek przybliżaiąc ich ważność do prawdziwéy. Y tak ieżeli odległość środka od punktu: 1, będzie wyrażać bok kwadratu równy naprz: 12 iakim cześciom; odległość tegoż środka od punktu: 2; wyrazi bok innego kwadratu równy blisko 17. takimże częściom; albo gdy piérwsza odległość znaczy nap. 100, druga znaczyć będzie troche więcéy iak 141, i t. d.

Używanie w tym, dwóch ramion cerkla proporcyonalnego, iest to samo, które było i do innych linii.

Ponieważ naprzykład odległości środka od punktów:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 62, maią się

Do siebie, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; iak liczby; - - - więc też i odległości dwóch punktów iednakową liczbą naznaczonych.

1, 4, 9, 16, 23, 36, 49, 64, Przy iakimkolwiek otwieraniu cerkla, mieć się będą iak liczby - - - - - - - - - - - - - - - - - - 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

Toż mówić i o innych liczbach pośrednich.

Przystosowanie Niech będzie dany bok kwadratu iednego; trzeba znaleśdź bok innego kwadratu, któryby był ⅛, pierwszego.

Otwieram tak cerkiel proporcyonalny, aby dwa ramiona cerkla zwyczáynego, z otwartością równą bokowi danemu, przypadły na dwa punkta Linii płaszczyzn, iednakową liczbą naznaczone, którąby podzielona bydź mogła przez 6; naprzykład na dwa punkta: 60; Biorę ⅚. téy liczby 60, to iest: 50. i nie odmieniaiac otwarcia cerkla proporcyonalnego, mierzę odległość dwóch punktów: 50; a ta będzie liniią którey szukam za bok kwadratowi, maiącému bydź ⅚, kwadratu danego; a że figury podobne maią się do siebie, iak kwadraty ich boków odpowiadaiących sobie, przeto działánie to przystosować równie można do wszystikch figur podobnych.

ROZDZIAŁ XI.

Pierwsze początki Miernictwa.

JEżeli gdzie nauka o figurach podobnych używana bywa w praktyce, to szczegulniéy gdy się wykreślaią na papierze figury, choć w małości swoiéy, podobne tym, których są wyobrażeniém; i gdy wyznaczamy na karcie położenie punktów na polu naprzykład znáyduiących się, których tám dla różnych zawad wyznaczyć częstokroć nie można.

291. *Przykład* 1. Niech będzie izba kwadratowa, któréy bok zmierzony, ma łokci 10.

Jakiéykolwiek wielkości kwadrat odrysuiemy na papierze zawsze iego figura, podobną będzie do figury izby.

Żeby iednak patrząc na kwadrat na papierze odrysowany, można sobie wystawić wielkość téy izby trzeba położyć i oznaczyć *Podziałkę*, według któréy bok izby przenieśliśmy na papier; bo inaczéy zapatruiąc się na ten ostatni kwadrat, poználibyśmy, tylko iaka iest figura izby, a nie widzieli ieszcze; iaka iéy wielkość.

Gdyby ta izba była prostokątém, maiącym długości łokci naprzykład 12, a szerokości łokci *8*; odrysowawszy na papierze iakikolwiek prostokąt którego dwa boki miałyby się do siebie, iak 12, do 8; ten prostokąt podobny do izby, wystawiłby nam iéy figurę, ale nie wielkość;

która dopiéro w ten czas czas byłaby poznana; gdyby się wyraziło, w jakiéy mierze to przeniesienie boków izby na papierze stało się czyli to przypisuiąc do boku odrysowanego, że łokci 12, ukazuie, czyli oznaczaiąc iaka iest długość na papierze wyrażaiąca łokci 10, i t. d.

Mierząc podobnie długość i szerokość domów, dziedzińców, ulic, grubość murów i ,t. d. można wyrazić na papierze wszystkie te, iedne względém drugich położenia i wielkość każdéy z osobna części nap: budynku i t. d.

Można potém i drobniéysze części wyrazić kładąc położenia drzwi, i t. d. aby pod ieden razém widok poddać budynek cały i z jego częściami.

Kilkakrotnie takowe roboty czyniąc nabędą w nich Uczniowie coraz większéy łatwości.

292. *Przykład.* 2. Niech będzie na polu Troykąt, którego, boki wszystkie zmierzyć można; ieden z tych boków zawiera łokci 180. drugi: 164, trzeci: 148.

Zróbmy iakąkolwiek podziałkę, i według niéy zróbmy Troykąt, którego trzy boki zawierałyby liczbę części równych z téy podziałki, ieden: 180, drugi: 164. trzeci 148. Ponieważ ten mały Troykąt ma boki w tym samym stosunku, w którym są boki Troykąta wielkiego, na polu naprzykład wymierzone; niczém więc od wielkiego Troykąta różnić się nie będzie, tylko samą wielkością; a zatém będzie nam go mógł wyobrazić, i da nawet poznać samę wielkość iego, gdy na papierze wyraziémy podziałkę, którey do tego użyliśmy.

293 *Uwagi.* W ostatnim przykładzie, długości do mierzenia były przy większe, a przeto gdybyśmy używali w takim razie krótkiey iakiéy miary, naprzykład łokcia, robota byłaby długa, i bardzo pracowita; a nadewszystko uchybienia małe, których się ciężko uchronić, w przykładaniach następnych miary, zebrane razém, uczyniłyby omyłkę tym znaczniéyszą, im częściéy byłyby powtórzone. Z tego powodu, wniosło się używanie sążni prętów, a nawet i sznurów, na miéysce łokci.

Do wymiarów tedy długości znaczniéyszéy należy mieć sznur, a ieszcze lepiéy łańcuch, który pewną liczbę łokci albo sążni w sobie zamyka. Dáymy naprzykład, że łańcuch którego używamy, ma w sobie 10, sążni. Tako y łańcuch, do długości 180, łokci, przyłożyć trzeba następnie sześć tylko razy, a iuż cała ta długość będzie wymierzona; będzie zatém wymiar i prędszy i pewniéyszy W takowych wymiarach wielkiéy baczności potrzeba.

1. Należy bydź zapewnionym, że miary brane są w linii prostéy

Tym końcém rozstawuią się żerdzie, w pewnéy od siebie odległości, i w téy linii, którą mierzyć przypada, tak; aby pierwsza żerdź zasłaniała następuiące, a osobliwie drugi koniec linii do mierzenia: trzeba także te żerdzie ustawić prostopadle (z) używaiąc do tego *Pionu* (Perpendiculum)

(z) *Linią prostopadłą do iakiéy płaszczyzny* poziomey (*horizontalis*) *nazywać będziemy* Pionową (*verticalis.*)

2. Jeżeli na końcu linii do mierzenia nieznayduie się iaki cel znaczny, naprzykład drzewo, rog domu. i t, d. trzeba tam osobliwie gdy długość iest bardzo wielka, wystawić znak iaki, naprzykład żerdź wysoką z chorągiewką, z tablicą białą na wierzchu, lub z jnnym podobnym znakiem.

3. Trzeba ieszcze uważać, aby przykładania następne miary. były w linii prostey; według drogi od żerdziów wyznaczoney. przeto ten, co trzyma pierwszy koniec łańcuha lub sznura, powinien się postawić wprost żerdziow i dać znak drugiému trzymaiącému drugi koniec, aby i ten wprost niego stanął w téyże samey linii; albo znowu trzecia osoba, stoiąc przy końcu iednym linii do mierzenia, przestrzegać będzie, i uważać przykładaiących miarę, aby z linii prostéy nieschodzili.

4. Trzeba się starać, by przy każdém przykładaniu miary, łańcuch, lub sznur, iak nàybardziéy był wyciągniony; dlatego należy go do samey ziemi przystawiać, ieżeli ta równa iest wszędzie; albo też wspierać go na podporach w pewnéy odległości rozstawionych; a tym sposobem nachylenie, które ciężar łańcucha, lub sznura sprawuie, będzie mniéy znaczne.

Y dla tegoć to, w robotach wielkiéy wagi, i osobliwéy dokładności wyciągaiących, łańcucha, ani sznura używać nie można.

5. Trzeba ieszcze mieć baczność, aby do tego samego mieysca, gdzie się miara

iedna skończyła, przykładać znowu koniec sznura, lub łańcucha. Dla tego należy dla znaku wbić zaraz żerdkę lub kół w to miéysce, w którém się miara przeszła zakończyła, a następuiąca ma się zaczynać.

6. Trzeba dobrze pamiętać, ile razy się łańcuch, lub sznur w całym wymiarze przykładał; i aby o tém dla iakiego roztargnienia nie zapomnieć, lepiéy iest za każdym razém naznaczyć sobie to przykładanie, albo na karcie, albo wtykaiąc na końcu każdego w szczegulności wymiaru, znak iaki.

7. Bespieczniéy także iest, powtórzyć zawsze wymiar całéy długości.

8. Jeżeli pole do wymierzenia cale iest otwarte, i wolne, można go podzielić na Troykąty; czyli to prowadząc wszystkie przekątne od iednego rogu, czyli biorąc bok ieden, za spolną podstawę tylu Troykątów, ile będzie pozostałych rogów; czyli ieszcze wyznaczaiąc punkt w samém polu, i uważaiąc go iak wierzchołek, albo raczéy zbieg tylu Troykątów, ile figura, którą odrysować chcemy, ma boków. Zmierzywszy potém wszystkie boki wszystkich tych Troykątów, można będzie odrysować na papierze figurę podobną.

294. *Przestroga.* Ten sposob postępowania, w odrysowaniu pola; mierząc w istocie wszystkie liniié do tego potrzebne; i czasu wiele zabiera, i rzadko nawet trafia się, aby pole tak było wolne, żeby na nim sposobu tego użyć można.

Jnnych zatém użyć trzeba w tym razie sposobów, które się tu przytoczą, zaczynaiąc od łatwieyszych i prostszych; postrzedz tu łatwo będzie można, iż używanie sposobów trudniéyszych i bardziéy zawikłanych, nie zawisło od prawideł Jeometrycznych, których grunt tenże sam jest zawsze i iednakowa dokładność, ale z przyczyny niedoskonałości zmysłów naszych, i ręcznych działań.

295. *Zagadn:* Znaleśdź iakiego celu odległość nie mierząc iéy *bezśrednie* (immediatè) czyli nie udaiąc się wprost, aż do samego celu.

Sposob 1. W którym samych się tylko żerdzi lub kołów używa.

1. Wymierzmy podstawę iaką, któraby się z jedney strony kończyła na punkcie, od którego odległość celu chcemy wiedzieć. Ta podstawa (dla większéy w praktyce dokładności) powinna bydź tém dłuższa, im odległość celu, okiém miarkowana, zdaie się bydź znaczniéysza. Dla téyże w praktyce dokładności, trzeba ieszcze takie położenie wybrać téy podstawie aby prostopadła którąby do niéy od celu spuścić można, iak náybliżéy iéy środka przypadła; ponieważ ze wszystkich innych téyże długości podstawa, z takiém położeniém iest náywygodniéysza.

2. Wytknîymy kołami ustawionémi od obydwóch podstawy końców, dwie liniie, ku celowi którego szukamy, prowadzące.

3. Zmierzmy od jednego końca podstawy, dwie iakiekolwiek długości, iednę na podstawie, a drugą na linii koła-

mi, wyznaczoney; zmierzmy nadto, i odległość końców, tych dwóch długości iuż wymierzonych. Zrobmy to samo i z drugiego końca podstawy.

Maiąc te na ziemi wymiary, możemy na papierze odrysować Troykąt podobny temu, który ma za podstawę liniią na ziemi wymierzoną, a za wierzchołek, punkt ten, którego odległości szukamy.

Jakoż wyraziwszy na papierze, podstawę przez linią iakąkolwiek, można będzie przy obydwóch końcach tey linii odrysować dwa Troykąty, których boki takby się miały do siebie, iak się maią długości na ziémi wymierzone (pod liczbą 3); a zatém i liniié które się ciągnły od końcow podstawy na ziemie, do punktu, którego odległości szukamy, będą tak do tey podstawy nachylone, iak i liniie dwie na papierze, od końców linii wyrażaiącey podstawę prowadzone, nachylaią się do teyże podstawy.

296. *Przestroga.* Ten sposób wielkiéy bardzo wyciąga baczności, tak w działaniach na ziemi, iako i w przenoszeniu na papier. W tym razie tylko można użyć, gdy i odległości nie są znaczne, i wielka dokładność nie potrzebna; gdy naprzykład wyobrażenie tylko chcémy sobie uczynić nie znaiomey odległości iakiego celu; wyznaczenie według tego sposobu położenia punktu iakiego niedostępnego, od tego zawisło, aby dóyść nachylenia iednéy linii wiadoméy, to iest podstawy, do dwóch innych, prowadzonych od obydwóch końców téyże podsta-

wy, ku punktowi, którego położenia szukamy; ponieważ gatunek Troykąta, témi trzema liniiami zawartego, a zatém i stosunék iego boków iuż wyznaczony będzie przez te nachylenia, *Stolik Jeometryczny* (Tabula Pretoriana i *Kątomierz* (Graphometrum, albo Instrumentum Goniometricum (są to dwa narzędzia szczególniéy używane do wyznaczenia bez średnie takowych nachyleń.

Sposob 2. Przez stolik Jeometryczny.

297. Niebawiąc się nad opisaniém tego narzędzia, i sztuk do niego należących (bo samo rzucenie oka, dopiéroż używanie, więcéy w téy mierze nauczy, niż opis choćby też nayobszerniéyszy) przestrzedz tylko należy, że lepiéy iest mieć przy stoliku, gdy kogo staie na to, perspektywy opatrzone nitkami, w kąt prosty przecinaiącémi się, niżeli proste *Celowniki* (dioptræ) i że tenże stolik ustawić należy *poziemnie* (horisontaliter) iak będzie można náyrówniéy, do czego *prawidła* Alidadæ) *albo* Regulæ (a) z ruchomémi perspektywami, daleko są lepsze, niżeli te, przy których perspektywy lub Celownik są nie ruchome. (b)

(a) *Prawidło iedno iest co i liniiał; że zaś przy stolikach Jeometyrcznych, łączy się razem i spaia z celownikami lub Perspektywami, dla tego się odmiennego nazwiska używa.*

(b) *Celowniki im są wyższe, tém lepsze, bo bez nachylenia, lub podniesienia stolika można przez nie widzieć Cel iaki na dole, lub w górze wystawiony.*

Aby wyznaczyć przez stolik, odległość tę, w którey od jakiego punktu niedostępnego zostaiemy; powinna do tego wymierzona bydź podstawa na ziemi, z ostróżnościami wyżey wzmiankowanemi, co do iey położenia i wielkości; trzeba potém postawić stolik na końcu iednym tey podstawy; i wyrazić tam iey długość; i położenie, a to przez liniią kierowaną przez prawidło wzdłuż teyże podstawy ustawione Nachylenie podstawy do linii poprowadzoney od iey końca ku punktowi niedostępnemu, wyraziémy na stoliku, przez liniią od końca podstawy wiedzioną przy prawidle, ku temuż punktowi zkierowanym To zrobiwszy, przeniesiémy stolik na drugi koniec podstawy, na ziémi wymierzoney i podobnie sobie, iak przy pierwszym końcu podstawy postąpiémy, ciągnąc znowu przy prawidle, liniią od końca drugiego podstawy na stoliku wyrażoney, ku punktowi, którego odległości szukamy. Troykąt wykreślony tym sposobém na stoliku podobny będzie Troykątowi na ziémi, zamkniętému między podstawą wymierzoną, i dwoma bokami, któreby od jéy końców prowadzone schodziły się w punkcie zostaiącym w odległości nie dostępney; a zatém wielkości linii na stoliku wykreślonych, i podług podziałki wymierzonych, dadzą nam poznać i wielkości linii odpowiadaiąch na ziémi. Y tak niechby naprzykład długość podstawy na ziemi, była: 200. sążni, którą wyraża na stoliku liniia zamykaiąca w sobie 200. równych części wziętych z jakiéykolwiek podziałki. Jeżeli druga liniiá na tymże stoliku poprowadzona od końca pierwszéy wyrażaiącéy podstawę, ma w sobie podług téy saméy podziałki: naprzykład 180 części to będzie obwodém, że i liniiá odpowiadaiąca iéy na ziémi, zawiera 180 sążni.

298. Używanie stolika nie rozciąga się tylko do długości pomiernych. Naywiększa taka długość, do któréy ieszcze stolika użyćby można, nie powinna przechodzić 300, a náywięcéy 400. sążni. Szczupłość narzędzia tego, a zatém i linii przez które musiémy na nim wyrażać liniie, uważane na ziémi, czyni uchybienia tém znacznieysze, im większe są te ostatnie długości. Możémy iednak używać stolika, gdy idzie tylko o wyrażenie, na papierze gruntu iakiego nie bardzo rozległego i prawie foremnego; albo gdy tylko wewnętrzne miéysca gruntu chociaż obszernego wyznaczyć potrzeba którego położenie punktów znamienitszych, iuż wyznaczone iest sposobém dokładniéyszym; który zaraz wyłożę.

299. *Sposob 3 przez Kątomierz* (c).

Wystawienie przed oczy tego narzędzia, a potém używanie, da go náylepiéy poznać.

(c) *Nauczyciele nie maiąc Kątomierza ukążą Uczniom przenośnik, który małością tylko rożni się od Kątomierza, i tém, że nie ma przydanych sobie prawideł z Celownikami.*

Tę tylko, co i względém stolika uwagę przydać należy, że kątomierze z ruchomemi prawidłami, na płaszczyznie pionowéy ustawione, i perspektywami oparzone, lepsze są od tych, które maią prawidło nie ruchome, zwłaszcza że wiele na tém zawisło, aby kątomierz był zawsze poziemnie ustawiony; a długie i trudne iest działanie, chcieć przewieść do iednéy płaszczyzny kąty na rożnych płaszczyznach uważane.

Kątomierz na to służy, aby prezeń stopniami wyznaczyć kąty, które tylko liniami na stoliku oznaczone były. Ponieważ zaś narzędzie to bywa małe, tak dla większéy wygody, iak i tanności, przeto nie można oznaczyć na iego brzegu podziałów mniéyszych od stopnia, przydaią mu zwyczáynie na to miéysce podział inny, któryśmy wyżéy nazwali *podziałem Nonniusza*; aby tym sposobém i minut dochodzić można; przynáymniéy do 3. 4. lub 5. według wielkości narzędzia; co dosyć iest w zwyczaynych na ziemi działaniach.

Niechby łuk koła, wzięty na brzegu prawidła ruchomego (który łuk powinien iak náybardziey przystawać do brzegu kątomierza) i zawieraiący w sobie naprzykład 11. stopniów, podzielony był na 12 części równych; każdy takowy podział tego łuku zawierać będzie stopień 1, mniéy $\frac{1}{12}$, stopnia, to iest mniéy 5. minutami; a zatém, gdy dwa podziały, ieden prawidła, a drugi stopnia. zéydą się z sobą; odległości pierwszych, drugich trzecich i t. d. podziałów wyrażać będą 5, 10, 15, i t, d, minut. Gdy punkt naznaczony 2, w podziale prawidła, to iest punkt odpowiadaiący *Osi* (*Axis*) prawidła; albo perspektywy schodzi się z podziałem brzegu kątomierza, liczba stopniów na tym brzegu wyrażona, zupełnie oznacza w stopnich wielkość kąta, który czynią dwa prawidła. Ale gdy ten punkt nie schodzi się z podziałem brzegu, kąt którego szukamy, różnić się będzie 5. 10. 15 i t. d. minutami co do wielkości swoiey, od liczby stopniów wyrażonéy przy podziale nayblizszym, podług tego iaki będzie podział prawidła czy pierwszy, czy drugi, czy trzeci i t. d. który się zeydzie z podziałém brzegu.

Aby przez Kątomierz wyznaczyć odległość punktu niedostępnego.

Trzeba naprzód, aby była wymierzona podstawa, położywszy potém Kątomierz, na końcu iednym podstawy, tak, aby prawidło nie ruchome przypadło na tęż podstawę, celuię drugim prawidłém ruchomym do punktu, którego położenie chcę wiedzieć. Toż czynię, i na drugim końcu podstawy; a tym sposobem będę miał dwa kąty wiadome przy podstawie.

Pociągnę daléy na papierze, iakąkolwiek linią, którąby podstawę wyrażała, i zrobię przy niey dwa kąty z obustron, równe kątom uważanym na ziemi. Punkt ten, w którym dwa tych kątów ramiona, przecinać się będą, pokaże na papierze położenie punktu, którego szukam; i iego odległość od iednego z końców linii wyrażaiącéy podstawę, tak się mieć będzie do téyże linii, iak się ma punktu niedostępnego na ziemi odległość, od końca podstawy tamtemu odpowiadaiącego do saméy podstawy. Pierwszy stosunek z podziałki wyznaczony będzie; a zatém wynaydzie się odległość żądana przez proporcyą; któréy trzy pierwsze wyrazy będą wiadome; to iest: iak się ma liniia wyrażaiąca podstawę na papierze, do podstawy na ziemi; tak się ma liniia na papierze odpowiadaiąca odległości, któréy szukamy, do téyże odległości.

Gdyby dwa takie punkta były niedostępne, których odległości nie wiémy; możnaby każdego z nich w szczegulności wyznaczyć położenie względem linii wymierzonéy, i wziętéy za podstawę; tak się albowiem mieć będzie liniia na papierze wyrażaiąca podstawę do linii wyrażaiącéy także na papierze położenia punktów dwóch nie dostępnych; (który to stosunek wiadomy iest z podziałki) iak się ma podstawa na ziemi wymierzona, do odległości na ziemi dwóch punktów niedostępnych.

Iakażkolwiek zgoła byłaby liczba punktów na ziemi, których położenie wyznaczyć chcielibyśmy, nie mierząc wszystkich tych odległości, któremi są te punktą oddzielone; można podobnym iak wyżéy sposobém i odległość tę wyznaczyć, i położenie każdego z osobna punktu względem podstawy, z któréy dwóch końców wszystkie te punkta widziane bydź mogą; i według tego wyznaczyć potém na papierze tak położenia, iako i od-

ległości odpowiadaiące tamtym punktom.
Można więc będzie tym sposobém odrysować mappę i obszernieyszéy sztuki ziémi, któréy punkta do tego potrzebne widzialne są z dwóch jakich innych punktów.

Gdyby zaś nie wszystkie te punkta, których położenia wiedzieć chcémy, były nie dostępne, można w tym razie przenieść się do dostępnych, i obrać ieden z nich, lub dwa za nowe *punkta stanowiska* (puncta stationis) to iest takie, z których położenie innych punktów, mogłoby bydź wyznaczone; i znowu wyznaczać położenia tych punktów, które albo z iednego tylko z pierwszych punktów stanowiska, albo z żadnego nie były widzialne; biorąc zawsze za podstawę odległość dwóch punktów, których położenie iuż wyznaczone iest przez rysunek. Można podobnym sposobém działanie to rozciągnąć, i do odrysowania miéysc obszernieyszych.

Lubo przepisy tu podane, są z siebie dokładne i iasne, atoli w wykonaniu ich, wielkiéy baczności przykładać należy; bo inaczéy, tém większe będą w rozmiarach błędy, i uchybienia, im odległości do mierzenia podane, są znacznieysze, i działania w nich bardziéy zawisłe iedne od drugich. Nie będziémy się tu bawić nad podawaniém drobnieyszych w téy mierze uwag, i służących tym tylko uczniom szczegulniéy, których powołanie wezwie w czasie, do pilnowania z Urzędu takowych działań, znáydą ci bardzo dobre do tego się sciągaiące nauki, w różnych Xiążkach, między innémi w trzeciéy Xiążce pod tytułem *Institutiones Mathematicæ* prz z X. Metzburga. w Wiedniu 1777 wydanéy.

300. Tego się szczególniéy w podobnych rozmiarach strzedz potrzeba, aby, tak te kąty, które uważamy przy punktach stanowiska nie były bardzo ostre, iako i te, które sobie wystawić w myśli można przy punktach, których położenia szukamy, i które zawarte byłyby między dwiema liniiami prowadzącémi od punktów dwóch stacyi, do tamtych punktów. Dla tego podstawa powinna bydź tém większa, im większa odległość, któréy szukamy, i położenie punktów takie, aby prostopadłe od nich spuszczone, ile możności przypadały na podstawę nie przedłużoną, albo przynayinniéy mało co przeciągnioną. Małe uchybienie w kącie; przy podstawie, pociąga za sobą tém większe uczybienie w bokach, im większe są nie tylko te same boki, ale i ich kwadraty; a zatém, gdy kąty przy podstawie są bardzo ostre, albo też, gdy ich summa nie wiele się różni od summy dwóch kątów prostych w takim razie trzeba odmienić iedno, lub oba dwa stanowiska. A ieżeliby między punktami, których położenie i odległość iuż iest wyznaczona, nie znaydowały się dwa inne takie, aby liniia łącząca ie zdatna była do wyznaczenia innych punktów pozostałych, trzeba w takim razie brać punkt iakikolwiek mogący wygodnie służyć za stanowisko, z ostróżnością i

wyżéy wspomnionémi; choć by nam z siebie nie był potrzebny do tego celu, któryśmy sobie szczególniéy założyli.

Gdy w działania wchodzić muszą takie wymiary, z których iedne zawisły od drugich, należy przynaymniey bydź zapewnionym, że w ten związek działań nie wpłatały się błędy, z których rozmnożenia urosłoby znacznieysze iakie uchybienie.

Przeto można w rzeczy saméy wymierzyć odległość iednę z tych, których doszliśmy z przeniesienia figury na papier, i uważać, czyli się nie różni od téy, która wyznaczona była przez proporcyą, któréy dwóma wyrazami były dwa boki na papierze, trzecim podstawa na ziemi, a czwartym odległość szukana; albo też: wynalezioną odległość dwóch punktów, wziąść za podstawę i szukać z niey położenia końca iednego z dwóch, pierwszéy podstawy, tak właśnie, jak gdyby ta była nam ieszcze niewiadoma: a gdy się pokaże, że z tego powtórnego działania wypadnie to samo położenie punktu, co z pierwszego, albo mało co różnić się będzie, można to mieć za dowód dość pewny, że w ciągu działań nie było uchybienia, przynaymniéy znacznieyszego; ponieważ z dwoiakiego takiego działania, iednakowe położenie wypaśćby inaczey nie mogło; chyba żeby ieden błąd poprawił, a bardziéy nagrodził drugi, co się rzadko trafia.

Iakażkolwiek iednak ostróżność będzie i dokładność w działaniach na gruncie, czyli to w wymierzeniu podstawy, czyli w braniu kątów: przenoszenie atoli na papier tych działań, będzie podlegać wielkim niepewnościom.

Trudność ta ostatnia ztąd szczegulniéy wynika, że pewną liczbę stopniów brać przychodzi na przenośniku, albo cerklu proporcyonalnym. Na tych zaś dwóch narzędziach ciężko iest wyznaczyć liczbę stopniów, a niepodobna wyznaczyć liczbę minut, które pospolicie w kącie danym znáyduią się. Nuż tedy uchybienie będzie w połowie tylko stopnia, albo 30, minutach; ten nie wielki na oko błąd pociągnie za sobą inny większy w liniiach, których długość różnić się ztąd będzie od prawdziwéy, 30stą, 20stą, a czasém i 10tą częścią tychże samych linii; a ten błąd tém większe uchybienie w długościach czyli wielkościach linii sprawi, im mniéysza względém nich była ta liniia, którą wzięliśmy za promień. Zródło to omyłek mniéy wpływać będzie w takowe uchybienia, gdy już nam zkąd inąd wiadome są długości boków należących do Figur, które rysować mamy, a te długości są pospolicie zamiarem szczegulniéyszym działań mierniczych. Gdyby naprzykład trafiło się, żeśmy w pół linii lub w całéy linii uchybili, biorąc na podziałce iakąkolwiek długość, omyłka ta, która ztąd wyniknie, względém położenia na papierze linii figurę iaką zamykaiących, będzie tém mniéysza, im dłuższe były linie, któreśmy przenosili.

Szukano więc sposobu, aby wszystkie

działania na gruncie, tak można było przenieść na papier, żeby te wyrażały się w takich Troykątach, których boki byłyby nam wiadome; to iest żeby można odrysować na papierze z pomocą samey podziałki, figury podobne tym, któreśmy na gruncie uważali. Maiąc tedy daną liczbę ilości w liniach lub w kątach, dostateczną do wyznaczenia całego Troykąta, szuk no sposobów, i znaleziono ie, iakby ztąd dóyść ilości pozostałych w liniiach i kątach ieszcze nie wyznaczonych.

Część Ziemiomierstwa, która na to przepisy daie, nazywa się Trygonometryą, albo *Troykątmierstwem*; ato dla tego, że szczegulniey rzecz tam iest o Trzech kątach, iako tych, od których wyrachowania wszystkich innych w ciokątów wyrachowania zawisło. Jest to część nayznakomitsza Matematyki, nazwaney (Mathesis pura) przystosować ią bardzo często można do Matematyki, którą nazywać można *Mięszaną*, idąc za łacińskim nazwiskiém (Mathesis mixta:) iako to do Mechaniki, albo nauki o machinach, czyli silniach; do Optyki, albo nauki o widzeniu, a naywięcéy do Astronomii, czyli nauki Gwiazdarskiéy; i dla tego ta część szczegulniéyszéy uwagi i zastanowienia się uczniów wyciąga.

Przygotowanie do Rozdziału następuiącego o Logarytmach.

POnieważ o Logarytmach dokładniéy mówić się potém będzie, tu tyle tylko o nich powiemy, ile potrzeba umieć, aby ie przystosować można do rozwiązania reguły trzech, i wyciągnienia pierwiastku kwadratowego.

301. Logarytmy, są to liczby odpowiadaiące liczbom całkowitym, i następnym, 1. 2. 3. 4. 5. 6. i t. d. w ten sposob, że te pierwsze liczby, czyli Logarytmy, iedne do drugich dodane, odpowiadaią tym ostatnim, gdy są iedne przez drugie rozmnożone.

Y tak znayduiemy w tablicach logarytmowych przy liczbach - - -

	2.	i	3.
Logarytmy	0.	0103	0.
	0	4771213.	

Ich summa 0. 778513. iest logarytmem liczby 6 która się robi z rozmnożenia 2, przez 3.

W zwyczaynych tablicach logarytmowych, logarytmy liczb:

10,	- -	1.
	są	
100;	- -	2.
1000.	- -	3.
10000.	- -	4.
i t. d.		i t d.

Logarytmy liczb mnieyszych od 10, ale większych od 1. są ułomki dziesiątne niemaiące żadney liczby całkowitey.

Y tak Logarytmy liczb:

2,	-	0, 3010300
	są	
3.	-	0, 4771213.
4,	-	0, 6020600.

5. . . 0, 69?9?00.
i t. d, i t. d.

302. Ponieważ zaś rozmnożęnie iakiéy liczby przez 1. żadnéy odmiany w niéy nie sprawia; przeto i dodanie logarytmu iedności, do logarytmu téy liczby, odmienić tego logarytmu nie powinno; Logarytm więc iedności iest zero albo 0

Logarytmy liczb między 10. i 100. są: iedność z przydanemi ułomkami dziesiątnemi.

Logarytmy liczb między 100. i 1000. między 1000 i 10000. i t. d są liczby całkowite pierwszych 2. drugich. 3 i t. d. z przydanemi ułomkami dziesiątnemi.

Znak pierwszy logarytmu liczby całkowitéy, iest częścią nayznakomitszą tegoż logarytmu, ponieważ daie poznać z iakiego wielu znaków składa się liczba całkowita, któréy iest logarytmém. Tak naprzykład znak logarytmu pierwszy: 0, 1. 2. 3. 4. i t. d. daie poznać, iż liczba, któréy odpowiada, zawiera się między 1, a 10. albo między 10, a 100, albo między 100, a 1000 albo między 1000. a 10000. albo między 10000, a 100000. i t. d. to iest: ma w sobie ieden, dwa, trzy, cztéry, pięć, i t. d. znaków liczb całkowitych. Dla tego też piérwszy znak Logarytmu nazywa się iego *Cechą* (Characteristica.)

303. Gdy dwa logarytmy, maią iednakowe ułomki dziesiątne, (d) a cecha ich

---

(d) Te ułomki w logarytmie, nazywaią Autorowie piszący po Łacinie: Mantissą

tylko iest odmienna; w takim razie liczby im odpowiadaiące; są 10, 100, 1000, i t. d. razy większe iedna od drugiéy, podług tego, iak cecha ich logarytmu większa będzie iedna od drugiéy, dwiema, trzema i t. d. iednościami. Y tak logarytm liczby 20, 200, 2000, i t. d. będzie, 1. 3010300, 2. 3010300, 3 3010300 i t. d. to iest będzie ten sam co i Logarytm liczby 2, przydawszy mu Log: liczb 10, 100, 1000, i t. d.

Trzeba przez kilka przykładów wprawić Ucznie w to pierwsze działanie; biorąc takie liczby, któreby nie większe były, od náywiększéy liczby tablic logarytmowych.

304. *Przykład* 1. Rozmnożyć 28 przez 32.

Log: liczby	28 iest	-	1,4471580.
Log;	32	-	1,5051500.
Summa Log:		- -	2,9523080

Y ta Summa powinna bydź logarytmém liczby rozmnożonéy z 28 przez 32. Jakoż w tablicach logarytmowych przy logarytmie, 29523080, znáydziémy liczbę 896; która to liczba wypada w saméy rzeczy z rozmnożenia 28 przez 32.

Przykład. 2. Rozmnożyć trzy liczby: 16, 24, 26,

Log:	16	-	1,2041200.
Log:	24	-	1 3802112.
Log:	26.	-	14149733,
Summa Log:		-	3,9993045.

Y to iest logarytm liczby 9984, który wypada z rozmnożenia trzech liczb: 16, 24: 26.

305. Ponieważ kwadrat iakiey liczby, iest ta sama liczba przez siebie rozmnożona; więc logarytm tego kwadratu, będzie równy logarytmowi liczby z któréy kwadrat powstał, dwa razy wziętemu.

Przykład 1. Log: 2, - 0,3010300.

Tenże dwa razy wzięty 0,6020600, będzie logarytmém kwadratu z 2, to iest 4.

Przykład. 2 Log. 56 - 1,7481880.
Dwa razy wzięty: - - 3,4963760.
będzie Logarytmém kwa- -
dratu z 56, - - - to iest 3136.

306. W dzieleniu; liczba podzielna równa się liczbie dzielącéy, przez wieloraz rozmnożonéy; a zatém logarytm liczby podzielnéy, równa się logarytmowi liczby dzielącéy dodanemu do logarytmu wielorazu; a ztąd logarytm tego wielorazu, będzie różnicą między logarytmami liczby podzielney i dzielącéy.

Przykład. 1. Podzielić 6, przez 2,
Log; 6. - - 0,7781513.
Log: 2. - - 0,3010300.

Różnica - - - 0,4771213. iest logarytmém wielorazu, to iest 3.

Przykład. 2. Podzielić 1632 przez 34.
Log: 1632 - - 3,2127202.
Log: 34 - - 1,5314789.

Różnica - - 1,6812413. iest logarytmém wielorazu, to iest, 48.

307. W proporcyi średniey liczby, ie-

dna przez drugą rozmnożone, równe są skraynym podobnie rozmnożonym, iako to w Arytmetyce i w Rozdziale o proporcyach wywiodło się. Przeto iednę z skraynych liczbę znayduiemy, dzieląc średnie liczby w ten iak wyżey sposob rozmnożone, przez drugą liczbę skrayną a zatém i logarytm liczby iednéy skraynéy wynaydziemy, odiąwszy od summy logarytmów dwóch liczb średnich, logarytm drugiéy liczby skraynéy.

Przykład. 1, 35 Robotników, zrobiło 45, sążni pewnéy roboty, ileż w tym samym czasie zrobi 42, robotników z równą usilnością pracuiących?

Log: 42	-	1,6232493.
Log: 45	-	1,6532125.
Summa	- - -	3,2764618.
Log: 35	- -	1,5440680.
Różnica	- -	1,7323938.

iest logarytmém żądanym, liczby 54.

308. Zamiast odéymowania, któreby należało czynić w logarytmach, używa się wygodnie dodawania w ten sposob: Logarytm liczby dzielącéy, a bardziéy iego cecha, odéymuie się całkowitéy liczby 10, i resztą dodaie się do logarytmu liczby podzielnéy, a od summy, znowu się 10 ydcina.

Defin. Różnica logarytmu liczby iakiéy od 10, nazywa się *dopełnieniém* (complementum) tego logarytmu.

Przykład. Podzielić 6. przez 2.

Log: 6, - - 0,7781513

Log: 2,0301030 dopełnie-
nie tego log: - - 9,6989700

Summa - - 10,4771213.
Log: wielorazu - 0,4771213.
iest Log. 3.

Podzielić 1632 przez 34.

Log. 1632 3,2127202.

Log: 34. 1,5314789. Dopełn:
Log: 34 8,4685211.

Summa. 11,6812413.
Log: wielora: 1,6812413.
iest Log: 48.

Ten sposob postępowania osobliwiéy iest wygodny w Regule Trzech, gdzie odéymowanie następuiące, po dodawaniu, mogłoby w długich zwłaszcza rachunkach, omyłki iakiéy dać okazyą. Można zaś i niewielką nawet w rachowaniu maiąc wprawę, na pamięć czynić to odéymowanie, które potrzebne iest do otrzymania dopełnienia logarytmu, które się potém dodaie na miéysce logarytmu odéymować się maiącego.

Przykład. 35 Robotników, zrobiło 45 sążni, ileż zrobi 42 robot?

Log: 42 1,6232493.
Log: 45 1,6532125.
Dopełnienie Logaryt. 35 8,4559320.

Summa któréy cecha.
zmniéyszona liczbą 10. 11,7323938.

Przykł. 2, Bok ieden prostokąta ma 1344, a drugi 1445, łokci. Trzeba go zamienić na inny prostokąt iemu równy, którego bok ieden ma zawierać 1440. łokci?

Log: 1344 - 3,1283903
Log; 1445 - 3,1628620

Summa - 6,2012[illegible]2.
Log: 1440 - 3,1583625.

Różnica - 3,1328998. iest Logarytmém liczby, któréy szukaliśmy to iest 1358.

309. Ponieważ Logarytm Kwadratu, dwa razy iest większy, niż logarytm pierwiastku; przeto logarytm pierwiastku; iest połową logarytmu kwadratu. Aby tedy wyciągnąć z liczby pierwiastek kwadratowy, trzeba wziąść połowę logarytmu tey liczby.

Przykład. 1. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 4.

Log: 4 - 0,6020600.
Połowa - 0,3010300. iest logarytmém pierwiastku, to iest 2.

Przykł. 2. Wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z 7569.

Log: 7569. - 3,8790385.
Połowa - - 1,9395192. iest logarytmém pierwiastku, to iest 87.

Przykł. 3. Boki prostokąta są: 378, i 672, iakiż będzie bok kwadratu iemu równego w powierzchni?

Log: 378 - 2,5774918.
Log: 672 - 2,8273693.

Summa - - 5,4048611.
Połowa - - 2,7024305. iest logarytmém liczby szukanéy to iest 504.

310, *Co się tycze logarytmów ułomków dziesiątnych.*

Niech będzie liczba nap: 1764, któréy logarytm: 3,2464986 Podzieliwszy tę liczbę przez 10. logarytm wielorazu powinien mieć iedną iednością mniéy w cesze swoiéy (303.(Logarytm tedy liczby 176, 4, będzie - - 2,2464986. Podobnie log: 17. 64. będzie 1,2464986. Log: 1, 764 - 0,2464986.

Dzieląc 1764 przez 1000, logarytm wielorazu, to iest liczby 1764, ma cechę mniéyszą 3 iednościami, niżeli miał logarytm liczby 1764 nie podzielonéy. Gdyby tedy przyszło, -1764 dzielić przez 1000, 100000, 1000000, i t. d. Logarytmy wielorazów, to iest ułomków dziesiątnych: 0 1764, 0, 01764, 0, 001764 i t. d. powinnyby mieć 4, 5, 6 i t. d. iednościami mniéyszą cechę, niżeli miał logarytm liczby 1764, nie podzielonéy. Że zaś Cecha logatytmu liczby 1764, iest 3. a Cechy logarytmów liczb: 10000, 100000, 1000000' i t. d. są: 4, 5. 6, i t. d. to iest liczby większe od 3, od których ie odéymować przypada, więc dla większéy w odéymowaniu wygody uważa się, iakoby cecha 3, powiększona była 10 iednościami, i dopiero od tak powiększonéy odéymuią się cechy liczb dzielących; 10000, 100000, 1000000, i t d. to iest cechy: 4, 5, 6, i t. d. pamiętaiąc zawsze na to przydanie, i zmniéyszaiąc znowu resztę, to iest logarytm wielorazu tąż liczbą: 10: Będzie więc log: $\frac{1764}{10000}$, albo, 1764

= 13, 2464986 — 4 (e) = 9, 2464986, to iest dla dodanych 10, do cechy 3, będzie w saméy rzeczy = 9 2464986 = 10, Tak też Log: 0,01764 będzie = 8. 24649. 86 — 10. Log: 0, 001764 będzie — 7. 2464986—10. i t. d.

Przykład. 1. Rozmnożyć 24 przez 0, 5.

Log: 24 = 1 3802112.
Log: 05 = 9698907— 10.

Summa = 1, 07 1812: = Log: 12, to iest liczby wypadaiącéy z rozmnożenia 24 przez 0, 5.

Przykład 2. Rozmnożyć 24 0, 05.

Log: 24 = 1 380212.
Log: 0,05 = 8. 698000. — 10.

Summa = 0,079182 iest logarytmém liczby rozmnożonéy.

Ten logarytm nie znayduie się w tablicach logarytmowych z cechą, 0. ale się znayduie z cechą 1, i odpowiada mu liczba: 12; a zatém liczba, któréy szukaliśmy będzie 10. razy mnieysza to iest: 1. 2.

Przykład. 3. Podzielić 32 przez 0, 5.

Log: 32 = 1 5051500.
Log: 0,5 = 9.6989700 — 10.

Reszta. 1,8061800 iest logarytmem wielorazu, to iest liczby 64.

Odéymuiąc 9.6989700. od 1,5051500. odéymowalibyśmy 10 razy więcéy, niż potrzeba; więcby to 10 do reszty przydać nale-

---

(e) *Znak—kładzie się przed tą ilością nap. przed tą liczbą, która ma bydź od drugiey odjętą.*

żało. Na iedno zaś wyydzie, gdy te 10, któremi iest powiększona liczba maiąca się odéymować, przydamy, też i do liczby, od któréy ią odéymować przypada; te iest: gdy odéymuiémy 9,6989700 od 11,5051500,

Przykł. 4. Podzielić 144 przez 0, 06.

Log: 144 = 2,1583625.

Log: 0,06, = 8,7781513—10,

Różnica - - 3,3802112. iest logarytmém wielorazu, to iest liczby; 2400.

Co do ułomków zwyczaynych.

311. Ponieważ ułomek uważać można, iako oznaczaiący dzielenie licznika iego przez mianownika; będzie zatém logarytm ułomka równy różnicy między logarytmém licznika iego i mianownika. Niéch będzie naprzykład ułomek niewłaściwy $\frac{7}{5}$.

Log: 7. - 0,8450980.

Log: 5. - 0,6989700.

Różnica - 0 1461280 = Log: $\frac{7}{5}$.

Można się o tém przekonać używszy ułomka dziesiątnego zamiast ułomku $\frac{7}{5}$, będzie albowiem $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = 1,4$.

Log: 14 - 1,1461280.

Azatém Log: 1,4 - 0,1461280,

312. Gdyby ułomek był właściwy, to iest gdyby licznik iego był mniéyszy od mianownika; w takim razie logarytm licznika byłby też mnieyszy od logarytmu mianownika; Aby więc można odiąć logarytm mianownika od logarytmu licznika pożyczamy 10. temu logarytmowi

iak wyżéy (310) w podobnym przypadku.

Przykład 1. Niech będzie ułomek: $\frac{2}{5}$.

Log: $2 = 0{,}3010300$,
Log: $5 = 0{,}6989700$.
Log: $\frac{2}{5} = 9{,}6020600. - 10$.

Przykład. 2. Trzeba znaleśdź Log: $\frac{7}{15}$.

Log: $7 = 0\ 8450980$.
Log: $15. = 1{,}1\ 760913$.

Log: $\frac{7}{15} = 9{,}6690067. - 10$.

Przykład: 3. Trzeba znaleśdź log: $\frac{1}{25}$.

Log: $1. = 0\ 0000000$.
Log: $25. = 1{,}3979400$.

Log: $\frac{1}{25} = 8{,}6020600. - 10$.

Zdaie się, iżby przystało używać odmiennego iakiego znaku cechy, gdy ta należy do logarytmu odpowiadaiącego ułomkowi, abo ią zaraz na wéyrzenie rozeznać można od cechy logarytmu; który liczbie całkowitey odpowiada.

313. Kiedy logarytm iaki, nie znayduie się w Tablicach; można wtedy liczbę, któréy odpowiada, wyznaczyć, albo z zupełną dokładnością, albo z małym uchybieniém.

Przykł: 1. Jakiż iest wieloraz 5, przez 4. podzielonych?

Log: 5	- -	0,6989700.
Log: 4	- -	0,6020600.
Różnica	- -	0,0969100

Logarytm ostatni oznaczaiący różnicę dwóch pierwszych logarytmów, nieznayduie się w Tablicach ani z cechą 0. ani z cechą 1; ale się znayduie z cechą 2; liczba onemu odpowiadaiąca iest 125; ale że ten logarytm ma cechę 2, więc nasz będzie odpowiadał liczbie 100 razy mnieyszéy, to iest: 1,25.

Przykł. 2. Trzeba znaleśdź kwadrat z 299. maiąc tylko Tablice Log. nie dałéy rozciągaiące się, iak do 10000, to iest takie, których náywiększy Log: iest 40000000.

Log: 299 - - 2,4756712.

Teyże podwoiony - 4,9613424.

Drugiego tego logarytmu w tablicach zwyczaynych nie znayduiemy. Zmnieyszmy więc iednością cechę iego: Ten Logarytm zmnieyszony 3,9513424, lubo co do wszsytkich liczb swoich, nie znáyduie się w tablicach, znayduiemy go iednak co do pierwszych; i mało co większy iest od Log: 3.9513375 a mniéyszy od 3,9513861

Pierwszy z tych logarytmow znáyduiących się zupełnie w Tablicach, iest Log: liczby 8940, a drugi Log: liczby - - 8941.

Azatém liczba, którey szukamy, będzie między 89400. - - - - - i - 89410.

Logarytm dany przewyższa logarytm pierwszy Tablicowy liczbą 49; mnieyszy zaś iest od drugiego logarytmu Tablicowego liczbą 437. Ta tedy którey szukamy liczba, powinna daleko więcey zbliżać się do 89400, niż do 89410.

Widziemy z Tablic, że kilka logarytmów, które następuią po logarytmach liczb 8940, i 8941, maią tę samę, co i te logarytmy różnicę, to iest 486; tak, iak i różnica liczb im odpowiadaiących iest taż sama, to iest 1; a zatém ieżeli różnica między logarytmém danym i logarytmém Tablic iemu náybliższém, iest naprzykład połową, lub trzecią częścią, lub czwartą, i t. d. różnicy między tymże náybliższym logarytmém, i drugim zaraz po nim następuiącym, to też i różnica między liczbą odpowiadaiącą logarytmowi danemu, a liczbą odpowiadaiącą logarytmowi náybliższému, będzie prawie połową trzecią częścią, czwartą i t. d. iedności, która iest różnicą między dwiéma liczbami naturalnemi, po sobie idącémi. Zatedy różnica 49. iest prawie $\frac{1}{10}$ częścią różnicy 486, więc i różnica liczby szukanéy dla dodatku liczbie 8940, będzie dziesiątą częścią iedności, to iest 0, 1; a zatém liczba odpowiadaiąca logarytmowi 3,9513424 będzie prawie 8940, 1, liczba zaś odpowiadaiąca Log: 4,9513424, będzie, 89401, to iest kwadrat, którego szukaliśmy.

Ponieważ w tym przykładzie szczegulnym zakończenie liczby 299 pokazuie, iż kwadrat iéy ma się kończyć na 1. można było bez tak długiego rozumowania doyść téyże liczby kwadratowéy: 89401.

314. Czému różnica dwóch logarytmów po sobie następuiących iest tym mnieysza, im są większe liczby, którym one odpowiadaią; można to tak wyłożyć.

Różnica logarytmów dwóch liczb: 10, i 9, iest: 457575.

Różnica logarytmów dwóch liczb 100, i 90, iest ta sama; (ponieważ $\frac{100}{90} = \frac{10}{9}$;

ale ta rozkłada się na dziesięć innych mnieyszych różnic między logarytmami liczb 90, i 91, 91, i 92, 92 i 93 - - - - 99 i 100.

Różnica między logarytmami liczb 900, i 1000 iest znowu ta sama co i między logarytmami liczb 10 i 9. (ponieważ $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$) ale ta rozkłada się na 100 mnieyszych daleko różnic między logarytmami liczb 900, i 901, 901, i 902, 902 i 903 - 999 i 1000.

Podobnie i różnica logarytmów liczb 9000 i 10000, lubo ta sama iest, co między logarytmami liczb 9 i 10, ale się rozkłada na 1000. innych różnic mnieyszych, i t. d.

315 Używanie logarytmów iest bardzo przydatne w wyciąganiu pierwiastków z Jlości nie spółmiernych.

Przykład 1. Trzeba wyciągnąć przybliżony pierwiastek kwadratowy z 2.

Log: 2. - 0,3010300.
Połowa tego Log: - - 0,1505150.

Szukaymy téy połowy z cechą 3. Logarytm náybliższy w tablicach będzie 3,1504494, ktory odpowiada liczbie: 1414. Aże ten logarytm iest mniéyszy od 3,1505150, więc liczba odpowiadaiąca logarytmowi danemu będzie między 1,414, i 1,415. Kwadraty zaś tych ostatnich liczb są: 1,994476; i 2,002305.

Aby pierwiastek bardziéy ieszcze przybliżyć do prawdziwego, weźmy różnicę 656. między logarytmém danym, i náybliższym z tablic; i znowu weźmy drugą różnicę 3070, między dwoma tablic logarytmami, danemu náybliszemi. Ułomek $\frac{515}{3070}$ na dziesiątne części obrócony. będzie miał pierwsze dwa znaki liczebne: 21; a zatém pierwiastek bardziéy przybliżony będzie; 1,41421. Możnaby i więcéy, gdyby kto chciał znaków liczebnych przydać w tym pierwiastku, kończąc daléy dzielenie, a tém więcéy pierwiastek ten byłby do prawdziwego przybliżony.

Przykł. 2, Trzéba znaleść liczbę przybliżoną do nastęnuiącego wyrazu: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Log: 5. - 0,6989700; $\frac{1}{2}$ Log: 5 ° 0,3494850.
Log: 2. - 0,3010300; $\frac{1}{2}$ Log: 2 - 0,1505150.

Różnica - - 0,1989700-

Ostatni logarytm oznaczaiący różnicę, odpowiada prawie w tablicach z cechą przydaną; 3, liczbie; 1581, a zatém $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ równa się prawie 1,581.

ROZDZIAŁ. XII.

O Trygonometryi.

316. WYstawmy sobie Troykąt w koło wpisany. Boki tego Troykąta byłyby cienciwami łukow przeciwnych iego kątom. Aże miarą tych kątów są połowy tychże łuków; więc boki tego Troykąta będą cienciwami łuków dwa razy większych niżeli są te, których ważność w stopniach ta sama iest, co i kątow im przeciwnych.

Idzie zatém, że gdybyśmy mieli ułożoną z figury dokładnéy, lub z rachunku Tablicę cienciw do łuków wszystkich koła, zacząwszy naprzykład od łuku iednéy minuty aż do 180 stopniów (którego to ostatniego łuku cienciwa iest náywiększa) iuż tém samém i stosunek boków Troykąta znalezlibyśmy z danych kątow iego; i wzaiémnie (lubo nie tak prosto) doszlibyśmy ważności w stopniach kątów, z danych boków Troykąta.

317 Aby uniknąć brania połowy, lub wedwoynasob kątów Troykąta, szukam zamiast cienciw innych linii, do których boki Troykąta byłyby proporcyonalne, i takich; któreby się właściwie śiągały do kątów tegoż Troykąta. Kąt w środku koła opisanego na Troykącie, zamykaiący ramionami swemi ten łuk, którego cienciwą iest bok ieden tegoż Troykąta, kąt mówię taki, dwa razy iest większy od tego, który przy okręgu koła naprzeciw stoi tegoż boku Troykąta; a zatém gdybyśmy ten kąt w środku, przecięli liniią na dwie równe części, iedna takowa część byłaby równa tamtému kątowi Troykąta. Bok tenże Troykąta byłby prostopadły do linii przecinaiącéy kąt na dwie równe części; a ta liniiá przecięłaby go na dwie także równe części. Toż samo przystosować można i do innych dwóch boków tego Troykąta. W ten sposob wystawiono sobie boki Troykąta, względém kątów im przeciwnych.

318. *Defin:* Wziąwszy łuk koła iakikolwiek, ieżeli od jednego końca tego

łuku, spuściémy prostopadłą na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku, ta prostopadła ma nazwisko *Sinus* (f) a po Polsku nazwać ią można *Wstawą* tego łuku, że się wstawia między końcem iednym łuku, kąt mierzącego, i między promieniém przez drugi koniec tegoż łuku przechodzącym.

Tab. 18. *Fig.* 1. Niech będzie AB łuk koła; prostopadłą BD, spuszczoną od końca B tego łuku, na promień CA, przechodzący przez drugi iego koniec A, nazywać będziémy *Wstawą* tego łuku.

319. *Wniosek* 1. Wstawa łuku równa się połowie cienciwy łuku innego, dwa razy większego, iak naprzykład Wstawa BD, łuku BA, równa się połowie cienciwy BE, łuku dwa razy większego BAE.

320. *Wniosek* 2. Wstawy łuków rosną od °, aż do 90,°, a ponieważ wstawa stopniow 90, równa się promieniowi, i iest náywiększą, nazywa się dla tego *Wstawą całą* (Sinus totus.)

(*f*) *Wyraz ten* Sinus *ztąd podobno ma swoy początek: Po łacinie* Cienciwa *nazywa się* Jnscripta; *a połowa cienciwy,* semiſſis Jnscriptæ; *dla skrócenia pisano może dawniey* S Jns. *Przepisuiący iakie dzieło Matematyczne, nie wiedząc znaczenia wyrazu tego skróconego, opuścił punkt oddzielaiący te dwa wyrazy, i dawszy słowu* Sins *zakończenie łacinskie, napisał* Sinus, *i ztąd potem wzięte podobno było to nazwisko.*

321. *Wniosek* 3. Wstawy łuków większych od czwartéy części okręgu koła, zmniéyszaią się coraz bardziéy zacząwszy od 90° aż do 180°; tak dalece że Wstawa stopniów 180° równa się°, Wstawa zaś każdego łuku większego od 90°, a mniéyszego od 180° iest ta sama, która i łuku mniéyszego od 90°, a spełniaiącego łuk pierwszy do 180°. Y tak naprzykład Wstawa łuku 100°, taż sama iest co i łuku 80° wstawa łuku 120° ta sama, co i łuku 60° i t. d. Takowe *Spełnienie* łuku do 180° albo do pół okręgu koła, nazywa się po łacinie *Supplementum arcûs*.

Co się tycze łuków większych od półokręgu koła, o tém nie ma potrzeby mowić w tych początkach.

322. *Wniosek* 4. Ponieważ promień naprzykład CF, iest Wstawą naywiększą ze wszystkich, czyli Wstawą stopniów 90°, Wstawa zaś od łuku AFb, większego od czwartéy części tego okręgu, iest ta sama, co i łuku ab, mnieyszego od czwartéy części tegoż okręgu; (który to łuk ostatni spełnia pierwszy do półokręga) idzie zatém, że do ułożenia Tablicy na wstawy łuków dosyć wyznaczyć wstawy tych łukow, które są mniéysze od 90°.

323 *Wniosek* 5. Wstawy łuków podobnych, w kołach odmiennych, tak się maią do siebie, iak tychże kół promienie. Jeżeli tedy mamy Tablicę wstaw podług promienia podzielonego na pewną liczbę części równych; wynaydziemy przez regułę trzech i wstawy podobnych łuków, podług innego promienia.

324. *Wniosek* 6. Ponieważ kąt w środku, naprzykład ACB, tyle stopniów w sobie zamyka, co i łuk AB, który go mierzy, i iest mu proporcyonalny; będzie więc wstawa łuku AB, Wstawą także i kąta ACB.

Wstawa tedy kąta, iest prostopadła, ſpuszczona od punktu iakiego w jednym z ramion iego do drugiego ramienia, biorąc za promień odległość tego punktu od wierzchołka kąta. Cokolwiek zatém powiedziało się o wstawach łuków, wszystko to przystosować można i do wstaw kątów. Y tak, Wstawy kątów rosną od o. aż do wstawy 90°; która się równa promieniowi; zmnieyszaią się znowu zacząwszy od wstawy 90°, aż do wstawy 180° (która iest = o;) i wstawa kąta roztwartego, ta sama iest, co i kąta ostrego, który tamtego spełnia, do 180°.

Wstawy równych kątów, są do siebie, iak linie wzięte za promienie.

A ieżeli dwie liniie są wstawami dwóch kątów, względem tegoż samego promienia, czyli Wstawy całéy, te liniie tak się do siebie mieć będą, iak Wstawy tychże dwóch kątów.

325. *Twierdz* 1. W każdym Troykącie boki tak się maią do siebie, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokom.

Fig. 4. Niech będzie Troykąt ABC; bok jego naprzykład AC, tak się ma do boku BC = iak wstawa kąta B, do wstawy kąta A.

Dowod: z wykreśleniem. Na danym Troykącie opiszmy koło, i poprowadźmy średnicę CD, i cienciwy DA, DB. kąty

BDC. BAC są równe. bo są w okręgu, i zamykaią ramionami swemi iednakowy łuk BC. Dla téyże przyczyny równe są także i kąty ADC. ABC. Oprócz tego kąty: CBD. CAD są proste, bo są w półkolu; więc Liniie CB. CA, będą wstawami kątów CDB. CDA względém téyże saméy wstawy całéy, czyli promienia CD; a zatém tak się mieć będą do siebie te liniié, iak wstawy kątów A i B.

Można ieszcze i następuiącym sposobem tego samego dowieźdź.

Opisawszy koło na dnym Troykącie; połowy boków iego będą wstawami, połowy będą też i wstawami kątów Troykąta przeciwnych tymże bokom; (biorąc za Wstawę całą, promień tego koła.) Są tedy do siebie połowy tych boków, iak wstawy kątów im przeciwnych, ażc połowy tak się maią do siebie, iak ich całości; więc też i całe boki Troykąta, tak się do siebie mieć będą, iak wstawy kątów przeciwnych tymże bokom.

326. *Wniosek.* Za pomocą Tablicy na Wstawy ułożonéy, podług promienia iakiegokolwiek, można doyśdź stosunku boków Troykąta, którego kąty są nam iuż wiadome, a zatém, gdy ieszcze i bok ieden tegoż Troykąta iest wiadomy, będzie można znaleść i dwa inne iego boki.

427. Jakoż rachowano i ułożono Tablicę Wstaw, podług promienia podzielonego nap: na 100000 części równych. Ten a nie większy podział, zwłaszcza w tablicach do zwyczaynieyszego używania

ułożonych, znáyduie się. Żeby zaś rachunek krótszym i łatwiéyszym uczynić, przydano i tablicę logarytmów. Wstaw tychże. W takowych iednak tablicach, gdzie i logarytmy wstaw znáyduią się; uważano promień, albo wstawę całą, iak gdyby na 10 000 000 000 części równych była podzielona, a zatém, iak gdyby logarytm iéy, miał za cechę czyli początkową liczbę: 10, która oznacza, iż wstawa zawiera w sobie liczbę części równych złożoną z znaków liczebnych iednym więcéy; tak, iak cecha logarytmu wstawy całéy, to iest liczba: 10, oznacza, iż wstawa cała zamyka w sobie znaków liczebnych 11, zamykaiąc części równych: 10 000 000 000.

Nie wykłada się teraz iak ułożone są te tablice; podany tylko będzie sposob ich używania. W tablicach tych znáyduiémy na dwóch kartach iednéy obok drugiéy, w dwóch różnych słupach czyli kolumnach, Wstawy dwóch kątów których summa czyni kąt prosty, albo 90°. Tablica tych wstaw po lewéy ręce kart, rozciąga się do 0, aż do 45° Tablica zaś po prawéy ręce idzie wspak od 90°, aż do 45. Te kąty których stopnie wyrażone są po prawéy ręce, nazywaią się *dopełnieniem* tamtych (complementum) do 90°; a ich wstawy *wstawami dopełnienia* (*sinus* complementi) czyli krócéy, *Dostawami* (Cosinus.)

328. Summa kwadratów, z Wstawy, i z dostawy łuku, albo kąta równa się kwadratowi promienia, czyli wstawy całéy.

Bo ponieważ dwa łuki; nap- AB, i FB, (albo dwa kąty; ACB, i FCB) są dopełnieniém ieden drugiego; Wstawa BG; łuku FB, równa iest linii CD; kwadrat zaś linii CD z kwadratém wstawy BD, równa się kwadratowi promienia BC, więc i summa kwadratów z BG i BD, równa będzie kwadratowi promienia BC.

329 *Przystosowanie*. Maiąc na polu wymierzoną podstawę, i kąty które czyni podstawa z dwiema liniiami wykierowanémi ku iednému celowi, znaleść tych ostatnich dwóch linii długość?

Niechby troykąt ABC, wyrażał Troykąt na polu, zawarty między podstawą wymierzoną i dwiema liniiami dążącemi ku iednemu celowi.

Niech będzie AB = 1200,
A = 50°
B = 72°
więc A + B = 122°
a zatém 180° - (A + B) = 58° = C.
Wstawa kąta C. Wstawy kąta A = AB:BC,
wsta: C: wsta: B = AB : AC
Log: AB = 3,0791812.
Log: wsta: A = 9,8842540.

Summa = 12,9634352.
Log: wst C = 9,9284205.
Różnica = Log:BC = 3,0350147.
A zatém bok BC = prawie 1084.

Z pierwszéy tedy proporcyi znaydziemy bok BC, dodaiąc do siebie logarytmy wstawy A, i boku AB, a odjawszy od jch summy, logarytm wstawy C; Różnica albowiém dwóch logarytmów ostatnich, pokazuie logarytm boku BC. który bok w tablicy osobney logarytmów liczb znaydziemy przy tymże logarytmie = 1083, 96. to iest prawie = 1084.

Podobnym sposobém znáydziémy z drugiéy proporcyi, i drugi bok AC = 1345, 76.

Dla skrócenia ruchunku, można z początku zaraz odjąć logarytm wstawy kąta C, od logarytmu liczby wyrażaiącéy bok AB, dodawszy do cechy tego drugiego logarytmu liczbę: 10 (co na pamięci mieć potrzeba:) Powszechnie zaś, dodaiąc osobno logarytmy wstaw kątów A i B, do logarytmu liczby wyrażaiącéy bok AB, dochodziémy dwóch boków innych.

Można także wygodnie użyć w rachunkach Trygonometrycznych dodawania, zamiast odéymowania, kładąc dopełnienia logarytmów (g) na mieysce tych, które przez nich są dopełnione.

Y tak w pierwszym przykładzie, ponieważ wstawa kąta C, iest pierwszym wyrazem proporcyi, z któréy szukamy boków AC, albo BC; podstawa zaś AB iest iednym z wyrazów średnich, a drugim wstawa kąta A lub B; ieżeli tedy do logarytmu podstawy AB, dodamy dopełnienie logarytmu wstawy kąta C, to summa dodana ieszcze do logarytmu wstawy

(g) *Dopełnieniém logarytmu nazywa się liczba, która z nim razém czyni logarytm promienia, iak naprzykład 0, 0715795 z logarytmém wstawy C, 9984205 = 10,0000000.*

kata A, lub B. będzie logarytmém boku BC, albo AC. odiąwszy tylko logarytm promienia.

Przykt. Dopełnienie logarytmu wstawy - - - C = 0,0715795.

Log: AB = 3,0791812.

Log: wst, A = 9,8842540.

Summa zmniéyszona liczbą 10. - - = 3,0350147 = Log: BC.

Więcéy ieszcze podobnych przykładów uczniom podać należy.

330. *Przykt.* 2, Maiąc dane kąty, i bok ieden Troykąta, znaleśdź powierzchnią iego przez iedną proporcyą.

Niech będzie ten sam co wyżéy Troykąt, którego wiadome nam są kąty, i podstawa AB; szukaymy powierzchni tego Troykąta, spuściwszy prostopadłą CD.

Wst: C: Wst; A = AB: BC.

Promień: Wst. B = BC; CD.

Więc Pr: × Wst: C: wst: A × wst. B. - - = AB. CD.

= AB² : AB × CD

= AB² : 2, Powierzchni

A zatém, 2. Pr. × wst. C: wst, A × - - wst. B = AB² : Powierzchni

Log: AB = 3,0791812.

Logarytm ten dwa razy wzięty =

Log: AB² = 6,1583624,

Log: Wst. A = - 9,8842540

Log. Wst, B = - 9,9782003.

Summa = 26,0208227.

Log: 2 = 0,3010300.

Log. Wst. C $=$ 9,9284205.
Log: Pr: $=$ 10,0 0 000.

Summa 20,2294505

Różnica tych dwóch summ. 5,7913722. iest logarytmém liczby, która oznaczy powierzchnią a ta będzie $=$ 6,18546. blizko.

Proporcya ta, z któréy doszlismy powierzchni Troykąta tak się wyraża: Prostokąt z Wstawy całéy, czyli z promienia, i z wstawy kąta przeciwnego iednemu bokowi tak się ma do prostokąta wstaw dwóch kątów przy tém boku; iak się ma tenże sam bok; do prostopadłéy nań spuszczonéy od wierzchołka kąta przeciwnego; albo też: prostokąt z promienia, i z wstawy kąta przy wierzchołku, tak się ma do prostokąta z wstaw dwóch kątów przy podstawie, iak się ma podstawa do wysokości Troykąta.

331. *Przyst.* 2 Maiąc dane w liczbach dwa boki Troykąta, i kąt między niémi zawarty, znaleść powierzchnią tego Troykąta przez iednę proporcyą.

Niechby w Troykącie ABC, znane były boki: AB, AC, i kąt A.

Spuśćmy na podstawę AB, prostopadłą CD; będzie Pr: - - - -

Wst. A $=$ AC: CD.
$=$ AC $\times$ AB: CD $\times$ AB.
$=$ AC $\times$ AB: 2 powierzchni

A zatém Pr.

$$\text{Wst. A} = \frac{\text{AC} \times \text{AB: powierzchni.}}{2}$$

To iest: tak się ma promień do wstawy iednego z kątów Troykąta, iak połowa prostokąta z dwóch ramion kąta danego do powierzchni Troykąta.

Niech będzie AB = 384

AC = 405.

A = 59°.

Log. ½ AB = Log. 192 = 2,2833012.

Log. AC = - - 2,6074550.

Log. Wst. 50° = - - 9,8842540.

Summa zmniéyszona liczbą 10. (to iest logarytmém promienia) = 4,7750102. a zatém powierzchnia któréy szukaliśmy = 59767.

§32. *Przystos.* 4. Maiąc dany Troykąt prostokątny, którego wiadoma iest przeciwprostokątna i iedno ramie kąta prostego, znaleśdź inne dwa kąty, i bok trzeci. Fig. 4.

Wziąwszy w tym Troykącie przeciwprostokątną za promień, ramiona kąta prostego, będą oraz wstawami kątów im przeciwnych; a zatém gdyby dana przeciwprostokątna była wyrażona przez 100000, i znaczyła promień na tyle części równych pod ielony; szukaiąc w tablicach między wstawami, lub dostawami, znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą bok drugi dany; a liczba stopniów odpowiadaiąca téy wstawie, pokazałaby ważność w stopniach, kąta przeciwnego bokowi danému.

Gdyby zaś przeciwprostokątna, przez inną liczbę była wyrażona, a nie przez tę, któraby się równała wstawie całéy w tablicach znáyduiącéy się w takim ra:

zie użyćby trzeba następuiącéy proporcyi:

BC, AC = Pr. wst B.

Niech będzie BC = 1548.

AC = 1248

Log. AC = 3,0962146.

Przydawszy log. Pr. = 13,0962146.

Log. BC = 3,1897710.

Różnica = 9,9064486. =

Log. Wst. B.

B = 53°. 44' — to iest 53 stopniów, i coś mniéy niż 44 minut.

C = 36°, 16, * i to iest 36 stopniów, coś więcéy niż 16 minut.

Pr. wst C = BC: AB.

Log BC = 3, 1897710.

Log. wst. C = 9.7719872 *

Odiąwszy Log. promienia, będzie tych dwóch Logarytmów Summa = 2,961752 * = Log. AB; a zatém AB = 915.7 *

Jeśli tylko samego boku AB, znalezienie iest potrzebne, można skrócić rachunek, biorąc summę logarytmów summy i różnicy przeciwprostokątnéy, i boku danego: i dzieląc tę summę przez 2; które to działanie na tém się zasadza, że kwadrat boku AB, równa się różnicy kwadratów przeciwprostokątné, BC, i boku drugiego AC, albo (co na iedno wychodzi) prostokątowi z summy ich i z różnicy. to iest prostokątowi z summy BC * AC i z różnicy: BC — AC, Summa tedy logarytmów summy BC * AC, i różnicy

BC—AC będzie logarytmem kwadratu, AB^2, a zatém połowa téy summy logarytmów, będzie logarytmem Pierwiastku to iest boku AB.

BC * AC = 2796.

BC — AC = 300.

Log (BC * AC) = 3.4465372.

Log. (BC — AC) = 2.4771213

Summa = - 5,9236585.

Połowa = - 2,968292 = Log. AB.

A zatém bok AB = 9158 *.

Porównywaiąc z sobą tę ważność dwoiaką boku AB, która z dwóch odmiennych rachunków wypada, postrzegamy różnicę mnieyszą niż $\frac{1}{9000}$ całéy ważności; która to różnica, ztąd pochodzi, że w pierwszym rachunku braliśmy kąty B i C w samych stopniach i minutach pierwszych nie szukaiąc minut drugich.

333. *Przystos.* 5 Maiąc dany w Troykącie roztwartokątnym, kąt roztwarty, bok iemu przeciwny, i iedno z dwóch ramion iego, znaleśdź drugie ramie i dwa inne kąty?

Niech będzie Troykąt ACB, którego *Fig.* 5. dany iest kąt roztwarty CAB, bok CB iemu przeciwny, i ramie iedno AC; znaleśdź inne kąty B, i C; i bok AB.

Sposob 1. *postępowania.* Z téy proporcyi; BC: AC = Wst. A : wst. B; dóydziemy kąta B, a odiąwszy od 180° summę kątów A i B, reszta pokaże kąt C.

Z drugiey proporcyi; wst. A: wst. C = BC: AB, wiadomy będzie bok AB.

Ka

Sposob 2, Spuśćmy prostopadłą CD, na bok przedłużony BA.

W Troykącie prostokątnym ACD, którego bok AC i kąt A i st wiadomy, można dóyść dwóch boków CD i AD, z dwóch następuiących proporcyi,

Pr. wst. A = AC : CD.

Pr. Dostawy A = AC : AD.

Maiąc wiadomą w Troykącie prostokatnym BCD, przeciwprostokątną BC, i iedno kąta prostego ramie, CD, będzie można dóyśdź (33a.) Boku BD, od którego odciąwszy AD, znaydziemy bok *AB*.

Przykłady wyżey podane iuż dosyć objaśnić były powinny, iak daley sobie w tém działaniu postąpić.

Fig. 6. Podobnego sposobu użyć należy gdy kąt ostry iest dany, i bok iému przeciwny większy od drugiego boku danego. Ta tylko iest różnica, że w drugim sposobie postępowania liniiá AB, będzie summą a nie różnicą linii BD, AD.

Fig. 7. Gdy zaś bok CB, przeciwny kątowi danemu A, mniéyszy iest od boku danego AC, który służy za ramię temuż kątowi; w takim razie wstawa kąta B wynaleziona z proporcyi; CB: AC = wst; A wst B może bydź równe wstawą dwóch kątow B, B, iednego ostrego, a drugiego roztwartego, i tamten spełniaiącego do 180°. podług drugiego sposobu postępowania, liniia AB, AB może bydź summą, albo różnicą linii AD BD, albo BD; co daie dwa odmienne Troykąty: ACB, ACB, które lubo maią w sobie dwa boki dane i kąt ostry także, dany, różnią się iednak trzecim bokiem. i dwoma innemi kątami. Zgadza się to zupełnie z tém, co się iuż w Jeometryi okzało w Rozd. II.

334. *Przystosowanie* 6. Maiąc daną liczbę boków w wielokątach foremnych, wyznaczyć ważność ich boków względem promienia koła, w które też wielokąty mogą bydź wpisane.

Rozwiązanie. Połowa boku każdego w foremnym wielokącie, w koło w pisanym, iest wstawa połowy kąta w środku tegoż wielokąta, wziąwszy za promień, promień koła na tym wielokącie opisanego.

Liczba boków Wielokąta,		*Połowy kątów w środku*		*Wst: Połowy kątów środku-*
3	-	60°	-	86602
4	-	45°	-	70712
5	-	36°	-	58779
6	-	30°	-	50000
7	-	[illegible]	-	43388
8	-	$22^\circ\frac{1}{2}$	-	38671
9	-	20°	-	34202
10	-	18	-	38902
11	-	$16^\circ\frac{4}{11}$	-	28171
12	-	15°	-	25882
15	-	12°	-	20791
16	-	$11^\circ\frac{1}{4}$	-	19509
20	-	9°	-	15643
24	-	$7^\circ\frac{1}{2}$	-	13053
i t. d.		i t. d.		i t. d.

Te wstawy dwa razy wzięte są bokami wielokątów wpisanych w koło, którego promień = 100000.

Niechby był Troykąt prostokątny, którego wiadome są dwa ramiona kąta prostego; trzeba znaleśdź przeciw prostkątną, i dwa inne kąty.

Już się wyżéy pokazało, że maiąc dane dwa boki w Troykącie prostokątnym do siebie dwa kwadraty tychże boków, i z summy wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy. Ale gdy liczby oznaczaiące wielkości boków danych są bardzo wielkie; nie mało czasu trzebaby na podniesienie tych liczb do kwadratu; a że i summa tych kwadratów będzie bardzo wielka, iż z niéy pierwiastku kwadratowego wyciągnąć przez logarytmy nie można, a wyciągać go zwyczaynym sposobém długaby praca była; przeto dla większéy wygody, w téy i wielu innych okolicznościach, wyrachowano w tablicach logarytmów. i inne ieszcze, oprócz wstaw, liniié.

335. *Defin.* Niech będzie łuk koła iakiego, a od jednego końca, tego łuku niech będzie poprowadzona styczna, tak daleko, aż się spotka z promieniém przedłużonym, i przechodzącym przez drugi koniec tego łuku. Ta część stycznéy zamknięta między punktém dotknięcia koła, i promieniém przedłużonym nazywa się *Styczną Troykątmierską*(Tangens Trigonometrica) albo tylko *Styczną* tego łuku. Liniia zaś zawarta między środkiém koła, i między punktém, gdzie promień przedłużony przecina styczną, nazywa się *Sieczną Troykątmierską.* (Secans Trygonometrica) albo tylko *Sieczną* tego łuku.

Y tak liniié AT. CT są, pierwsza styczną, a druga sieczną łuku AB. Jest także pierwsza liniiá styczną, a druga sieczną kąta ACB, biorąc za prómień liniią CA. Ponieważ łuk FB. iest dopełnieniém do 90°, łuku AB; ieżeli tedy poprowadzimy styczną FP aż do iéy spotkania się z promieniém CA przedłużonym; liniiá FP, będzie styczną, a CP sieczną dopełnienia łuku AB, a inaczéy ieszcze pierwsza nazywa się *Dostyczną* (cotangens) druga zaś *Dosieczną* Consecans) łuku AB. Tab: 18. Fig. 1.

Jak względém wstaw, tak względém stycznych i siecznych, uważano w tablicach, iednè łuki tyle przewyższaiące 45° ile drugie, nie dochodzą 45°; uważano zatém i co do stycznych, i co do siecznych dopełnienia iednych łuków względém drugich.

336. *Naprzykład*; Troykąty DCB, ACT są podobne; więc.

1. DC : DB = AC : AT. to iest dostawa tak się ma do wstawy, iak promień do stycznéy.

2. DC: CB = AC: CT, czyli dostawa do promienia, iak promień do siecznéy.

Tak też, dla podobieństwa Troykątów: BCG, PCF będzie.

1. Wstawa do dostawy iak promień do dostycznéy

2. Wstawa do promienia, iak promień do dosiecznéy.

Maiąc styczne, łatwo można wyrachować dostyczne. Bo ponieważ podobne są Troykąty ACT, FPC, będzie AT: AC =

CF FP; to iest promień będzie średnim Jeometrycznym między styczną i dostyczną. Logarytm tedy promienia dwa razy wzięty, równa się summie logarytmów styczney i dostyczney.

337 Styczne rosną, zacząwszy od 0, aż do styczney 45°, która się równa promieniowi. (bo w tym razie Troykąt ACT będzie równoramiennym) i daley ieszcze rosną aż do 90 °, których styczna będąc od promienia CF równoodległą, nigdzie się z nim nie zeydzie, a zatem większą iest od wielkiey długości którąby wyznaczyć można.

Sieczne podobnym także iak i styczne rosną sposobem.

Tab. 19. Fig. 1. 338 Niechby był Troykąt iakikolwiek prostokątny. naprzykład CAB, którego wiemy w liczbach dwa ramiona kąta prostego CAB.

Wziąwszy za promień, naprzykład liniią CA, liniá AB będzie styczną a liniiá CB sieczną kąta C.

Gdybyśmy tedy mieli liniią CA, to iest: promień wyrażony w tablicach przez 100 000: liczba stopniów, przy którey znaleźlibyśmy liczbę wyrażaiącą liniią AB. czyli styczną pokazałaby ważność kąta C; i znowu liczba między siecznemi odpowiadaiąca kątowi C, oznaczyłaby ważność linii CB.

Gdyby zaś liniiá AC nie była w tych liczbach wyrażona, w których wyrażona iest wstawa cała, czyli promień tablic, w takim razie trzeba zrobić dwie proporcye. pierwszą, AC: AB = Pr. styczney

C. z któréy dóydziemy ważności kąta C; drugą Pr. Siecz C = AC: CB.

Przykł. Niech będzie AC = 8464.
AB = 5678.

Logarytm AB z przydanym Log: promienia iest - 13,7541954.
Log. AC - - 3,9275757.

Różnica. czyli Log. styczněy.
- - - C = 9.8266197.
a zatém kąt C = 33°, 51.
Log. AC = 3,9275757.

Log. siecz C (odciąwszy Log. Pr.) = - - 0.0806610.

Summa— 4,0082367. = Log: CB; więc = 10101. *

339. *Uwaga* Gdyby przyszło wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z summy kwadratów $AC^2 + AB^2$, znaleźlibyśmy ważność przeciw prostokątnéy BC, większą niż 10192, a mniéyszą niż 10193, a zatém nie zgadzaiącą się z ważnością wyżéy znalezioną, 10191 *; co ztąd pochodzi; że wyznaczaiąc ważność kąta C, opuściły się minuty drugie i przestało się, na samych stopniach, i minutach pierwszych; i to opuszczenie sprawiło, że ważność BC, mniéysza iednością prawie wypadła; ale uchybienie takowe iest bardzo małe, gdyż od prawdziwéy ważności różni się tylko mało co więcéy, iak $\frac{1}{10000}$.

Poprawa téy omyłki taka bydź może. Ponieważ różnica między logarytmém styczněy C, znalezionym, i logarytmém tablic náybliższym, iest 874; a różnica dwóch logarytmów Tablic mnieyszego i większego od logarytmu znalezionego, iest: 2730, więc będzie, 2730: 874 = 60'': 19'', a zatém kąt C = 33° 51' 19''

Log. - AC = 3,9775757.
Log: siec : C.
(odciąwszy Log. Pr.) = 0,0806880.

Sum: czyli Log BC = 4,0082637.
więc BC = 1,0192 * = 10192,1

340. *Przystosowanie* W Troykącie, w którym wiadome są dwa boki, i kąt zawarty między niémi, znaleść bok trzeci, i dwa inne kąty?

Fig. 2. Niech będzie Troykąt ACB w którym dane są dwa boki AC, BC, i kąt C, trzeba ztąd doyśdź boku AB, i dwóch innych kątów.

Rozwiąz. Spuściwszy prostopadłą BD, na bok AC; w Troykącie prostokątnym BCD wiemy przeciw prostokątną BC, i kąt dany C, a zatém doydziémy dwóch boków BD, DC; a że wiadoma także iest podstawa AC, więc odjąwszy CD od AC znaydziémy AD; i znowu w Troykącie prostokątnym ADB z wiadomych dwóch ramion kąta prostego, doyśdź będzie można (338) innych dwóch kątów, i przeciwprostokątnéy AB.

Ten sposob w tém iest nie wygodny, że trzeba cztery uczynić proporcye, aby dóyść boku AB. Jako zaś, to co z każdéy z pierwszych trzech proporcyi wypada, wchodzi w czwartą proporcyą, tak i omyłki tam popełnione, tu wpływaią.

Aże więc w tém co z ostatniéy proporcyi wypadnie, uniknąć uchybienia, należy iak náydokładniéyszy rachunek czynić w trzech pierwszych. Y to ieszcze przydać potrzeba, że w tym sposobie działania szukać się musi dwóch odcinków AD i DC, iako też i wysokości BD, lubo o nie nie masz zapytania.

341. Gdyby przyszło dochodzić saméy tylko linii AB, w tym razie możnaby użyć następuiącego sposobu.

$AB^2. = AC^2 \ast BC^2 - 2\,AC \times CD.$

A że iest $BC\ CD = $ Pr: Dostawy BCD.

więc $2AC \times BC : 2AC \times CD = $ Pr. dost BCD.

a zatém $2AC \times CD = \dfrac{2AC \times BC \times \text{dost; BCD.}}{\text{Pr}}$

$$\text{A ztąd } AB^2 = AC_2 \ast BC_2 - \frac{2AC \times BC \times \text{Dost: BCD.}}{\text{Pr:}}$$

Ze zaś téy ostatniéy ilości nie można zawsze rozłożyć na inne mnożące ią ilości, więc przez same logarytmy działania tego wykonać w tym razie nie możemy; W takowym tedy przypadku, używa się pospolicie następuiącéy proporcyi.

342. *Twierdz.* 2. Summa dwóch boków Troykąta, tak się ma do różnicy tychże boków, iak styczna połowy summy dwóch kątów przeciwnych tym bokom, do styczńéy połowy różnicy tychże kątów.

Trzeba tu naprzod wyłożyć uczniom, co się rozumie przez wyrazy téy proporcyi; a w szczegulności pokazać im, że stosunek między stycznémi połowy dwóch kątów, albo dwóch łuków nie iest ten sam, co między stycznémi całych tych kątów albo łuków. Widocznie się to okazuie w tablicach Trygonometrycznych.

Fig. 3. Niech będzie Troykąt ABC, w którym bok AB, mnieyszy iest od boku AC; w tym Troykącie będzie $AC + AB : AC - AB = \text{stycz.} \frac{B + C}{2} : \text{stycz} \frac{B - C}{2}$.

Dowodz: Wziąwszy $AD = AB$, i pociągnąwszy BD, Troykąt równoramienny ABD, i Troykąt nie równoramienny ABC, maią kąt spólny A. Więc summa kątów ABD, ADB, równa się summie kątów ABC, ACB; a zatém ieden z kątów Troykąta równoramiennego, nap: kąt ABD, równa się połowie summy dwóch kątów ABC, ACB Troykąta ABC. Kąt ABC, większy z dwóch kątów ABC, ACB, składa się z połowy summy, i połowy różnicy tychże dwóch kątów; aże kąt ABD, iest połową ich summy, więc kąt CBD będzie połową ich różnicy

Liniiá DC iest różnicą dwóch boków AC, AB; przeciąwszy ią na dwie równe części w punkcie E, liniia CE będzie połową różnicy dwóch boków AC, AB. Aże bok większy AC równa się połowie summy wraz z połową różnicy tychże dwóch boków. więc AE będzie połową ich summy, gdy CE iest połową różnicy; a zatém liniié AE. CE. tak się maią do siebie, iak połowa summy boków AC, AB, do połowy ich różnicy. Na tém więc całe działanie rozchodzi się, aby pokazać, iż styczne kątów ABD, CBD, tak się maią do siebie. iak liniié AE, CE.

Z Punktu A, spuśćmy na BD, prostopadłą AF, przedłużywszy ią aż do G. Poponieważ Troykąt BAD iest równoramiennym, liniié BF, FD będą rowne; a że też są równe liniié DE, CE, więc pociągnąwszy liniią FE, podobne będą Troykąty: BDC, FDE, i liniié FE, BC równoodległe; a zatém i Troykąty AFE, AGC są podobne; Będzie więc AE: CE = AF; FG. Że zaś wziąwszy za promień liniią BF, liniié FA, FG. będą stycznémi kątów: FBA, FBG, albo ABD, CBD; więc AE : CE = stycz: ABD: stycz : CBD; albo, $AC \ast AB : AC - AB = \text{stycz: } \frac{B \ast C}{2} : \text{stycz: } \frac{B - C}{2}$. albo nakoniec,

$$\frac{AC \ast AB}{2} : \frac{AC - AB}{2} = \text{stycz: } \frac{B \ast C}{2} : \text{stycz: } \frac{B - C}{2}$$

343. *Przystosowanie.* 1. Gdy dwa boki AC, AB, są wiadome, będzie wiadoma ich summa AC ✱ AB, i ich różnica AC — AB; gdy także wiémy kąt A, wiedzieć tém samém będziémy summę i połowę summy dwóch innych kątów B i C, a zatém i styczną połowy téy summy; więc i czwartego wyrazu proporcyi poprzedzaiącéy, to iest stycznéy połowy różnicy tych dwóch kątów dóydziemy, a ztąd

wiadoma nam będzie i połowa różnicy tych dwóch kątów. Wiedząc zaś połowę ich summy, i połowę różnicy, gdy połowę summy do połowy różnicy dodamy, znáydziémy kąt większy B, a odiąwszy połowę różnicy od połowy summy, okaże się kąt mniéyszy C. Znáydziémy nakoniec i bok trzeci BC

Przykł: Niéch będzie - - -
- AC = 2452. AC * AB = 4296.
AB = 1844, AC — AB = 608.
A = 44° B * C = 136°,
$\frac{B * C}{2} = 98°$

4296 : 608 - - - -
stycz: 68° stycz. $\frac{B - C}{2}$

Log. stycz: 68° = 10,3935904.
Log. 608 = 2,7839036.

Summa - - 13,1774940
Log. 4296 = 3,6330643.

Różnica = 9,5444297. =
- - - Log. stycz: 10 18. *

Więc $\frac{B - C}{2} = 19°, 18'$ *

Aże $\frac{B * C}{2} = 68°$ więc

- - B = 87°, 18' +
C = 48°.42,. —

Wst: C: wst. A = AB: BC
Log. AB = 3,2657609.
Log. wst: A = 9,8417713.

Summa = 13,1075322.

Log. wst. C $= 9,8757927 -$

Reszta, to iest Log. $BC = 32317395 +$
$BC = 1705 +$

Aby się przeświadczyć o dokładności tego działania, szukamy BC, i przez drugą proporcyą; wst: B: wst: A = AC: BC.

Log. $AC = 3,3895205$.
Log. wst: $A = 9,8417713$.

Summa $= 132312918$.
Log. wst $B = 9,9995176 +$

Reszta $= 3,2317742 -$
więc $BC = 17052 -$

344. *Przystosowanie* 2. Wyznaczyć przez rachunek odległość dwóch miéysc nie dostępnych.

Widzieliśmy (w Rozdz. XI.) że do tego trzeba było wymierzyć podstawę i wyznaczyć kąty, które przy końcach podstawy czynią dwie liniié wykierowane ku dwóm punktom, których odległości szukamy. Można dóyść i przez rachunek żądanéy odległości.

Niech będzie AB podstawa wymierzona, i wyznaczone kąty: xAB yAB, xBA, i BA. Fig. 4.

Ponieważ w Troykącie xAB, wiémy dwa kąty przy podstawie, odiąwszy więc ich summę od dwóch kątów prostych, albo od 180°, reszta pokaże kąt trzeci A xB.

Podobnym sposobém doydziémy i kąta A i B.

W Troykącie AxB, maiąc wiadomą podstawę AB, i wszystkie kąty, można doyśdź dwóch innych boków, a w szczegulności linii Ax.

Podobnie. i w Troykącie A y B z wiadomego boku AB, i wszystkich kątów, można wyznaczyć dwa inne boki; a w szczegulności liniią A y.

W Troykącie na koniec xAy znaiąc dwa boki Ax, Ay, i kąt xAy między niemi zawarty, (który iest różnicą między kątém wyznaczonym xAB,y AB,) można doyśdź linii xy, to iest żądanéy odległości.

Uwaga. Ponieważ wyznaczenie linii xy, zawisło od linii Ax, Ay; dokładność też w wyznaczeniu linii xy, zawisło od téy dokładności, z którą dwie tamte linie były wyznaczone.

Przykład. Niech będzie.

xAB = 77° więc A x B = 49°,
yAB = 42° A y B = 36°.
yBA = 102 x A y = 35°.
xBA = 54°.
AB = 1200.

Wst: AxB: wst: xAB = AB: Ax.

Log, AB = 3,0791812.
Log. wst. xBA = 9,9079576.

Summa = 12,9871388.
Log. wst, A x B = 9,8777799.

Reszta = 3.1093589, = Log: Ax
Ax 1286,35.

Wst: A y B: wst. ABy = AB: Ay.

Log. AB = 3,0791812.
Log. wst. ABy = 9.9904044.

Summa . 13,0695856.

Log. wst. A y B = 9,7692187.

Reszta = 3,3003669. =

- - - Log. Ay.

Ay = 2514. bardzo blisko

Znalazłszy bok Ax = 1286,36

Ay = 2514.

Kąt między témi bokami zawarty; x Ay = 35°.

Będzie Ax + Ay = 3800,35.

Ay — Ax = 1227,65.

Axy * Ayx = 145°

Axy * Ayx = 72° ½.

2

Więc (podług Twierdz 2.): 3800,:35 1227: 65 = stycz: 72° ½: styczna - - Axy — Ayx.

2.

Log. stycz: 72° ½ = 10 5012777.

Log. 1227 35 = 3,0890735.

Summa = - 13.5903512.

Log. 3800,35. = 3,5798237.

Różnica = - 10,0105275. =

- - - Log. stycz: 45°42' —.

więc Axy — Ayx = 45°,42' —

Aże iest Axy * Ayx = 72° 30'

2.

Więc Axy = 118 12' —

Ayx 26° 48 +

Maiąc wiadome wszystkie kąty, w Troykącie xAy, i oprócz tego dwa boki: Ax, Ay, znáydziémy bok trzeci xy, to iest odleg-

S

łość, któréy szukamy, przez iednę z tych dwóch proprcyi:

Wst: Ayx: wst xAy = Ax: xy: albo wst. Axy: wst. xAy = Ay: xy.

Szukaymy boku xy przez pierwszą nap: proporcyą;

Będzie Log. Ax = 3,1093589.
Log. wst. xAy = 9,7585913.

Summa — 12,8679502.
Log. wst. Ayx = 9,6540586 —

Róż: to iest Log. xy = 3,2138916 +
więc xy = 1636 +

Zostaie ieszcze, do rozwiązania ten przypadek, w którym z trzech boków danych w Troykącie, szukamy kątów iego.

Sposob zwyczaynie używany, zawisł na tém, aby szukąć dwóch odcinków podstawy oddzielonych przez prostopadłą, na tę podstawę spuszczoną, od wierzchołku kąta iéy przeciwnego.

345. *Twierdz: przybrane.* Podstawa Troykąta, tak się ma do summy dwóch boków iego, iak różnica tychże boków, do różnicy odcinków podstawy.

Fig. 5. Niech będzie Troykąt ABC, w którym z wierzchołka C, spuszczona iest prostopadła CD, na podstawę AB; w tym Troykącie, AB : BC + AC = BC—AC : BD—AD.

Od punktu C, iak od środka, promieniém CA nakreślmy koło, które przetnie podstawę AB w punkcie G, bok BC, w punkcie F, a tenże przedłużony w punkcie E.

Będzie zatém - - - -
BE = BC + AC (bo AC = CE;)

BF = BC — AC (bo AC = CF:)
BG = BD — AD (bo AD = DG:)

A ponieważ sieczne AB BE od iednego punktu B wychodzą, więc (231) BA : BE = BF : BG; to iest, tak się ma podstawa BA do summy dwóch boków = BE; iak się ma różnica tychże boków = BF, do różnicy BG odcinków, które czyni prostopadła CD spuszczona z wierzchołka kąta C. na Podstawę.

346, *Przystosowanie*. Ponieważ odcinków BD, AD, wiemy summę i różnicę, wiedzieć będziémy i każdy z nich z osobna, iako to iuż się wyżéy pokazało; będzie albowiém większy odcinek AD = $\frac{AB+BG}{2}$, a mniéyszy AD = $\frac{AB-BG}{2}$.

Aże, BC : BD = Pr. Dost: B.
A zaś AC: AD = Pr. Dost. A.
Więc dóydziémy i kątów B, i A.

Przykł. Niech będzie - - -

AB = 1200.
BC = 935.
AC = 612.
BC + AC = 1547.
BC — AC = 323.

Log. BC + AC = 3,1894903.
Log. BC — AC = 2,5091025.

Summa = 5,6986928.
Log. AB = 3,0791812,

Reszta = 2,6195116.

Więc BD — AD = 416,4. bardzo blisko.

AB = 600.

$\quad$ 2

BD — AD = 208,2

$\quad$ 2.

Summa = 808,2. = BD.
Różnica = 391,8 = AD.
BC: BD = Pr. Dost: B,
Log. BD z przydanym Log. Pr. = - - - - - 12,9075188.
Log. BC = 2,9708116.

Reszta = 9,9367072 = Log. Dost: B więc B = 30°. 11' 15."
AC : AD = Pr. Dost. A.
Log: AD z przydanym Log. Pr. = - - - 12,5930644.
Log. AC = 2,7867514.

Reszta = 9,8063130. = Log. Dost. A. więc A = 50° 12'. 23".
C = 99°, 36' 22".

Dla zapewnienia się o tém, można szukać ieżeli stosunek wstaw kątów A, i B równa się stosunkowi boków im przeciwnych; będzie zaś w saméy rzeczy równał się, gdy w proporcyi, któréy trzema wyrazami będą; BC, AC, wst. A. za czwarty wyraz wypadnie wstawa kąta B, téyże saméy iak wyżéy znalezliśmy ważności.

Log. wst. A = 9,8855618.
Log. AC = 2,7767514.

Summa = 12,6723132.
Log. BC = 2,9708116.

Reszta = 9,7015016. = Log. wst. B.

Kąt B. odpowiadaiący temu logarytmowi, różni się mniéy niż 3" od wyżéy znalezionego.

347. *Uwaga*. Nie trzeba opuszczać takowych doświadczeń, zwłaszcza, gdy rachunki zawisły iedne od drugich.

W tym ostatnim razie, náylepiéy iest wziąść za podstawę bok náywiększy Troykąta; bo tak z zupełną pewnością wiedzieć będziémy, że kąty przy téy podstawie są ostre.

PRZYDATEK I.

Przystosowania Trygonometryi do różnych działań na gruncie.

348 *Przystosowanie*. I. Wyznaczywszy na gruncie; a potém wyrachowawszy położenia i odległości dwóch punktów, względém iednéy podstawy, wzięta była za drugą podstawę odległość tych dwóch punktów, i użyto iéy do wyznaczenia położeń, innych Punktów, które z pierwszych stanowisk, albo były nie widzialne, albo też od nich bardzo odległe. Trzeba teraz wyrachować położenia tych ostatnich punktów, względém pierwszéy podstawy.

Niech AB wyraża pierwszą podstawę; *Tab.* x y, dwa punkta, których położenia, i od- *20.* ległości wyznaczone iuż są względém *Fig. 1.* téy podstawy, przez wymierzenie kątów przy A i B. Weźmy potêm x y za drugą podstawę dla wyznaczenia położenia punktu z, niewidzialnego z pierwszych stanowisk: A i B, albo od nich bardzo odległego. Jakże to położenie punktu z wyznaczamy, względém pierwszéy podstawy AB?

Sposob postępowania przez rachunek:

1. W Troykącie A B wyznaczémy Ax.

2. W Troykącie A y B wyznaczmy Ay.

3. W Troykącie xAy wiadome maiąc. Ax Ay, i kąt xAy, wyznaczmy: xy, i kąt: Axy.

4. W Troykącie xzy, wiadomą maiąc, podstawę, i kąty wszystkie, wyznaczmy xz.

5. W Troykącie Azx wiadome maiąc: Ax zx i kąt Axz wyznaczmy Az.

Podobnie mozna wyznaczyć Bz

349. *Uwaga.* Tym sposobem postępuiąc można także sprawdzać działania iedne przez drugie czynione z różnych punktów stanowisk.

350. *Przystosowanie* 2. Do iakiéykolwiek linii czyniącéy kąt wiadomy z podstawą stosować położenia punktów wyznaczonych iuż względém téy podstawy.

*Fig.*2. Niech będzie AC liniiá czyniąca kąt wiadomy z podstawą AB. i niech x, będzie punktém, którego położenie iuż iest wyznaczone względém podstawy AB; trzeba ztąd dóyść położenia tego punktu względém linii AC.

Doydziémy tego, spuściwszy prostopadłą xP na liniią AB, i wyznaczywszy wielkość téy prostopadłéy, iako też iéy odległość AP, od punktu A.

Sposob postępowania przez rachunek.

W Troykącie AxB można było wyznaczyć liniią Ax; kąt x B iest też wiadomy: więc znáydziémy kąt CAx, który iest różnicą kątów CAB, xAB. W Troykącie tedy PAx, maiąc wiadome kąty, i przeciwprostokątną Ax, można będzie wyznaczyć liniié: AP, i Px.

351. *Przysto*; 3. Wyznaczyć promień koła, maiąc daną cienciwę odcinka iego, i kąt tegoż odcinka.

Niech będzie AB liniia dana, na któréy zakreślić trzeba odcinek koła mogący zawierać w sobie kąt dany; wyznaczmy promień tego koła. *Fig.* 3

Niech będzie C, środek koła, szukanego; poprowadźmy liniią CD do środka linii AB, ta będzie prostopadłą do AB. W Troykącie ACD, kąt ACD równa się kątowi odcinka danemu, bo miarą iego, iest połowa łuku AB; kąt CAD iest iego dopełnieniém. Wziąwszy AD za promień, będzie AC, sieczną kąta CAD, a tym można wyznaczyć, promień koła szukanego, z téy proporcyi; Jak się ma promień do dosieczné kąta danego, tak się ma połowa cienciwy danéy do promienia koła, którego szukamy.

352. *Uwaga*. Stosunek AD do CD, równy iest stosunkowi wstawy całéy, czyli promienia, do styczné kąta CAD.

Aże, ieżeli AB iest bokiém wielokąta foremnego, będzie CD promieniém koła wpisanego w ten wielokąt; więc maiąc dany bok wielokąta forémnego, i wiedząc liczbę boków iego, można wyznaczyć, promień koła wpisanego i opisanego, przez dwie następuiące proporcye.

1. Wstawa cała, tak się ma do styczney połowy kąta w środku koła, iak połowa boku wielokąta do promienia koła wpisanego.

2. Wstawa cała tak się ma do dosieczney połowy kąta w środku, iak połowa boku wielokąta, do promienia koła opisanego.

353. *Przystosowanie*. 4. Wyznaczywszy trzy boki Troykąta na gruncie iakim uważanego, i znaiąc kąty, pod któremi widziémy te trzy boki z jednego punktu, trzeba wyznaczyć odległość tégo punktu, od trzech wierzchołków Troykąta.

Fig. 4. Niech ABC wyraża Troykąt, którego wszystkich boków iuż doszliśmy, niech x, będzie punktém, z którego uważaliśmy kąty, pod któremi dały nam się widzieć liniie. AB, BC, AC; trzeba ieszcze wyrachowac liniie: Ax, Bx, Cx.

Niech będą D i E środki kół, których odcinki nakreślone na liniach AB, i BC mogą zawierać w sobie kąty równe tym, pod któremi widzieliśmy liniie AB i BC. Punkt x będzie w przecięciu tych dwóch kół.

Dwa promienie BD, BE, mogą bydź wyrachowane tak, iak w przystosowaniu 3.

W Troykącie ABC, w którym wszystkie boki są wiadome, można wyrachować kąt ABC. Kąt ABD, iest wiadomy, bo iest dopełnieniém kąta wiadomego AxB; więc wiadomy iest także i kąt CBD. A że wiemy i kąt CBE, który iest dopełnieniem kąta CxB, więc wiedzieć będziemy i kąt DBE; a zatém w Troykącie DBE, wiemy dwa boki: BD, BE, i kąt DBE, między niém zawarty; a zatém można wyznaczyć wysokość BF, która iest połową linii szukanéy Bx: albo (co krócéy ieszcze będzie) można, w tym Troykącie wyrachować kąty D, i E. Że zaś kąt w środku D, równa się kątowi xAB, wspieraiącemu się na łuku dwa razy większym; a kąt w środku E. iest spełnieniém (w téy figurze) kąta xCB; więc kąty; BAx, BCx są wiadome; a zatém w Troykątach: BAx BCx. wiemy kąty wszystkie, i boki BA, BC; zkąd będzie można wyznaczyć liniie Ax, Bx, Cx, których szukamy.

Jeden prawie iest sposob postępowania na iakiekolwiek położenie punktu x. W tym tylko bywa odmienny, że czasém trzeba dodawać, a czasém odéymować kąty znáyduiące się przy B. i że czasém kąty D i E równe są kątom przy A i C, a czasém są ich spełnieniém.

357. Rachunek ten może bydź ieszcze skróconym w niektórych przypadkach szczegulnych.

Przykład 1, Niech punkt x. znayduie się na przedłużeniu iednego z boków Troykąta ABC. nap: na przedłużeniu boku AB, *Fig.*1. *Tab.* 21.

W Troykącie CAx; wiadome są kąty A, x, i bok CA; więc będzie można wyrachować boki Ax Cx.

Przykład 2. Niech trzy punkta: A, B C, *Fig.*2. będą na iednéy linii.

Prostokąty Bx × Cx, i Bx × Cx są równe, pierwszy prostokątowi z prostopadłéy spuszczonéy od x. na AB, i z średnicy koła opisanego na Troykącie AxC; drugi, prostokątowi z téyże prostopadłéy, i z średnicy koła opisanego na Troykącie CxB, więc pierwsze dwa prostokąty tak się maią do siebie, iak i dwa drugie. Aże pierwsze tak się maią do siebie, i k liniie; Ax, Bx, a drugie tak się maią do siebie, iak dwie średnice; więc stosunek Ax do Bx iest wiadomy, bo iest równy stosunkowi średnicy koła opisanego na Troykącie ACx, do średnicy koła opisanego na Troykącie BCx albo równy stosunkowi promieni tych dwóch kół. Szukaiąc tedy podstawy w Troykącie, któryby miał kąt w wierzchołku równy kątowi AxB, a zatém wiadomy, i dwa ramiona równe dwóm wyżéy wspomnionym promieniom; gdybyśmy tę podstawę znaleźli równą linii AB, liniié też Ax, Bx, byłyby równe tym promieniom. Gdyby zaś ta znaleziona podstawa nie była równa linii AB, tedy z dwóch następuiących proporcyi, dóydziemy boków Ax, Bx.

1. Jak się ma podstawa znaleziona do podstawy AB, tak się ma promień pierwszy do Ax.

2. Jak się ma podstawa znaleziona, do podstawy AB, tak się ma promień drugi do Bx.

Tym sposobém możémy też doświadczać, czyli działania nasze czynione na ziémi; były dokładne.

355. *Przystos:* Niech będzie dana linia prosta na gruncie; wyznaczyć, bez mierzenia odległość i położenia względém téy

linii, dwóch punktów, z których widziémy obadwa iéy końce.

Niechby wiadoma była nap: liniiá AB, niech będą dwa punkta: C, i D, z których każdego widzieć można końce A, i B, téy linii; wyznaczyć odległości, i położenia tych dwóch punktów, C i D. tak względém siebie, iak i względém linii A B, nie mierząc pierwéy żadnéy z tych odległości. *Fig.* 3

Z punktów C, i D wyznaczmy kąty: ACB, DCB, ADB, ADC, a zatém i kąty: ACD, BDC.

Dawszy iakąkolwiek ważność linii CD, możnaby z niéy dochodzić ważności linii: CA, CB, DA, DB, i AB,

Gdybyśmy przypadkiem ważność téy ostatniéy linii AB, znaleźli równą prawdziwéy iéy ważności, którą wiémy; byłoby to dowodém, żeśmy natrafili na prawdziwą ważność linii DC a zatém i innych linii.

Gdyby zaś znaleziona ważność linii AB, nie była równa ważności iéy wiadoméy; tedy następuiącą trzeba uczynić proporcyą: iak się ma ważność mniemana linii AB, do ważności iéy prawdziwéy, tak się ma ważność mniémana linii CD, do ważności iéy prawdziwéy.

Przystosowania do miar wysokości.

Mogą Nauczyciele namienić tylko o sposobach wyznaczeniu wysokości iakiéy, czyli to przystępnéy, czyli też nie dostępnéy, przez same żerdzie albo przez odbiianie promienia świattła padaiącego na powierzchnią iaką płaską, i sposobną do odbiiania, albo na koniec przez wielkość cienia rzuconego od tego przedmiotu (objectum) którego wysokość wyznaczyć mamy.

Pierwszy z tych sposobów, iako w przepisach swoich, i z przyczyny łatwości iest bardzo dobry, tak w używaniu bardzo nie doskonały. W ogulności nawet mówiąc należy zawsze powątpiwać o działaniach choćby też z náylepszemi narzędziami czynionych, gdy idzie o wyznaczenie iakiéy wysokości; iednostayna albowiém w sobie wysokość napr: góry iakiéy może się wydawać czasém większą, a czasém mniéyszą, podług nieiednakowego stanu, w którym się znaydować zwykła nasza *Powietrznia*; (atmosphera(iako o tém obszerniéy będzie w Fizyce.

356, *Przystos.* 1. Niech będzie iaka wysokość nie wiadoma, do któréy iednak można przystąpić; trzeba wyznaczyć iéy wielkość; z punktu iakiego oddalonego od téyże wysokości.

Wymierzmy podstawę od punktu na gruncie obranego, aż do spodku téy wysokosci; od tegoż punktu uważáymy iaki kąt czynią na płaszczyznie pionowéy dwie linie, iedna ku wierzchołkowi téy wysokości, a druga poziemnie wykierowana. Znáydziemy wielkość téy wysokości nad liniią poziemną (którą perspektywa poziemnie ustawiona pokazuie) przez następuiącą proporcyą; iak się ma wstawa cała do styczney kąta uważanego, tak się ma podstawa wymierzona do wysokości szukanéy. Dodawszy do téy wysokości, wysokość narzędzia, znaydziemy całą wysokość, którey szukaliśmy, (g).

357. *Uwaga*. Rzadko się trafia, aby cale przystąpić można do spodku wysokości, którą wyznaczyć przypada. Tak naprzykład, maiąc wyznaczyć wysokość wierzchołka wieży iakiéy, baszty i t. d. nie można wymierzać podstawy, tylko aż do spodku iéy murów; można iednak zmierzyć całą grubość wieży, baszty i t. d. a ztąd wnieść położenie iéy środka, a zatém i długość, którą dodać potrzeba do podstawy wymierzonéy.

358. *Przystos*. 2. Niech będzie wiadoma wysokość (i) z którey wierzchołka wyznaczyć przypada odległość punktu

---

(g) *W dalszych przykładach trzeba zawsze na to pamiętac, aby wysokość narzędzia dodawać do wyrachowaney Trygonometrycznie wysokości; co lubo się wyraźnie kłaśdź nie będzie, same iednak okoliczności dostatecznie potrzebę tego okażą.*

(i) *Wysokości wieży, lub iakiego podobnego budynku łatwo dóyść można, spuściwszy z góry na doł sznur, który potém zmierzony, da poznać tę wysokość. Trzeba iednak mieć baczność na to, aby sznur iednakowo wszędzie był wyciągniony. Obacz między innémi Dzieło iuż wyżéy zalecone P. de Luc. Tom, 2. §516.*

położonego na gruncie, a widzialnego z mieysca stanowiska.

Ustawiwszy kątomierz na płaszczyznie pionowéy, iak wyżéy, naznaczmy kąt, który czyni perspektywa iedna w poziemnym położeniu a druga wykierowana ku punktowi, którego odległości szukamy. Zróbmy potém tę proporcyą; iak: się ma wstawa cała do dostyczneý kąta naznaczonego, tak się ma wysokość dana do odległości szukanéy.

Uwaga. Można tym sposobém wyznaczyć odległość od spodku wysokości iakiéy, tylu punktów, ile zechcémy; maiąc iuż wiadomą wysokość, z któréy wierzchołka wyznaczać przypada te odległości. Uważaiąc zaś, i znacząc kąty, które zrobi perspektywa (k) kierowana do tych różnych punktów, będzie można wyznaczyć i położenie ich, iednych względem drugich.

359 *Przystos*. 3. Maiąc wiadomą odległość punktu iakiego od spodku wysokości, na któréy się stoi wyznaczyć tę wysokość.

(*k*) *Te kąty ściśle mówiąc, nie tak czyni perspektywa coraz do innego punktu na gruncie położonego, kierowana, iako bardziéy płaszczyzny pionowe przechodzące przez perspektywę za każdym celowaniem. Naywygodniéy się to działanie wykona gdy kątomierz będzie miał półkole prostpadłe do reszty za narzędzia i opatrzone perspektywą ruchomą.*

Uważywszy kąt tak iak wyżéy, zrobmy tę proporcyą; Jak się ma wstawa cała do stycznéy kąta uważanego, tak się ma odległość daną do wysokości szukanéy.

360. *Przystos* 4. Niech będzie wysokość niedostępna, trzeba ią wyznaczyć.

Sposob postępowania náypospolicéy używany, zawisł na tém, aby wymierzyć podstawę iaką wprost téy wysokości, któréy szukamy, i naznaczyć kąty pod któremi z obydwóch końców téy podstawy. widziémy wysokość szukaną. Można ztąd dóyść, tak wysokości, iako też i odległości iéy spodku, od obydwóch końców podstawy.

Niech SP wyraża wysokość, a AB pod-*Fig*. 4. stawę wymierzoną wprost ku téy wysokości. Wyznaczmy kąty A i B, przez perspektywy, iednę poziemnie ustawioną, a drugą ku wierzchołkowi S. wykierowaną.

W Troykącie ASB, zachodzi ta proporcya:

Wst ASB: wst. A = AB: BS,

W Troykącie BSP, i st;

Wst: cała: wst B = SB: SP.

Więc wst: cała × wst. ASB. wst: A wst B = AB: SP.

361. *Uwaga*. 1. Tego sposobu używaiąc, można naprzód uchybić w braniu iakéy podstawy któraby przedłużona prosto prowadziła do wysokości podanéy do wymierzenia; ponieważ zaś w wielu przypadkach trudno iest utrafić na takie podstawy położénie, będzie więc i wysokość ztąd wyrachowana, nie pewna. Powtóre, gdy podstawa AB, iest bardzo nachylona

względém linii AS. BS, kąt ASB, pod którym pokazuie się ta podstawa AB, iest bardzo mały względém kąta ASP, a zatém i podstawa AB wymierzona iest bardzo mała względém całéy podstawy AP; zkąd także wyznaczenie wysokości PS będzie mniéy dokładne.

362. *Uwaga 2.* Gdy narzędzie którego używamy, opatrzone iest w półkole pionowe, to będzie służyć do dania tak dobrego podstawie położenia, iakiego tylko grunt pozwoli.

Fig. 5. Niech liniia AB wyraża iakąkolwiek podstawę wymierzoną, a liniia SP, niech wyraża wysokość, któréy szukamy.

Ustawiwszy półkole pionowe tak, aby Prawidło ruchome zmierzało ku punktowi S, a zatém, aby liniia SP, wpadała na płaszczyznę tego półkole; uważaymy kąt SAP na płaszczyznie pionowéy, i kąt PAB wyznaczony na płaszczyznie kątomierza poziémnie ustawionego. Zróbmy te samo i na drugiém stanowisku, przy punkcie B.

W Troykącie PAB, gdzie wiadoma iest podstawa, i wszystkie kąty, będzie:

Wst. APB: wst. ABP = AB: AP.

W Troykącie prostokątnym SAP, iest:

Wst. cała: styczna SAP = AP: SP.

Więc wst. cała × wst. APB: wst. ABP × styczn. SAP = AB: SP.

Gdyby nawet dla iakiéy zawady nie można razém brać od kątów pionowych, i kątów poziémnych; tedy iednak wyznaczaiąc ciąg linii AP, BP, możnaby osobno wymierzyć kąty poziemne: PAB, PBA. Z tym wszystkim wyznaczenie tego ciągu z wielką częstokroć pracą przychodzi.

363. *Przystos.* 5. Niech będzie dana liniiá na iakim gruncie, i niech będzie wysokość niewiadoma, z któréy wierzchołka można widzieć końce téy linii danéy. Trzeba wyznaczyć odległość tych dwóch końców, od spodka wysokości niewiadoméy, i tęż samę wysokość.

1. Uważaymy z wierzchołka wysokości kąty na płaszczyznie pionowey, zawarte między liniią pionową, albo nitką z ciężarém zawieszoną, i między perspektywą wykierowaną następnie do dwóch końców linii danéy. Odległości tych końców, od spodka wysokości, tak się do siebie mieć będą, iak styczne kątów uważanych; (będą zaś te odległości stycznemi kątów tych wyznaczonych, gdy wysokość za promień wzięta będzie,) a zatém stosunek tych odległości będzie wiadomy. Uważáymy i ten kąt, który się zrobi na płaszczyznie poziémnéy kątomierza, przez płaszczyzny pionowe, na których znaydować się będzie, perspektywa następnie do tych dwóch punktów kierowana. Ten kąt równy kątowi zawartemu między dwiema liniiami prowadzonemi od końców podstawy do spodka wysokości, będzie kątem w wierzchołku Troykąta, maiącego wiadomą podstawę i wiadomy stosunek ramion, a zatém można ten Troykąt zupełnie wyrachować.

Uwaga. Gdy narzędzie tak iest zrobione, że go nie można użyć do mierzenia kąta zawartego między liniiami, które reby od spodka wysokości prowadzone były do dwóch końców Podstawy; w takim razie, trzeba mieć wiadomą wszystkich tych trzech punktów odległość; wyiąwszy, gdyby dwa końce podstawy, były w jednéy linii z spodkiém wysokości. (l)

PRZYDATEK II.

Pierwsze początki równoważenia.

W pierwszych początkach, na których się równoważenie (libellatio) zasadza, można uważać ziemię, iakoby ta zupełnie miała figurę kuli. Różnica zachodząca między tą mniemaną, a prawdziwą iéy figurą (spłaszczoną w końcach Osi) bardzo mało wpływa w działania, o których tu mówić się będzie; wiadomości zaś potrzebne do czynienia w rachunkach, popraw: z przyczyny nie zupełnéy ziémi okrągłości, byłyby teraz niewcześne i nad poięcie Uczniów.

264. Uważaiąc Ziémię, iak gdyby zupełnie była okrągłą, i przeciąwszy ią płaszczyzną przez środek iéy przechodzącą; przecięcie to byłoby kołém, którego promień byłby tenże sam, co i promień ziémi. Na okręgu tego koła podzielonym na 360 stopniów, rachuiąc mil Nie-

(l) *Gdyby nie było sposobności czynić na gruncie działań, wyrażonych w tych ostatnich przystosowaniach, tedy dla łatwieyszego uczniów poięcia można działania te na figurach wyrobionych z drewna wykonywać.*

mieckich 15. (które się nie wiele różnią od Polskich) na ieden stopień; cały ten okręg zawierać w sobie będzie mil Niemieckich 5400, a zatém średnica iego, to iest średnica ziémi mieć będzie długości mil prawie 1719. albo, rachuiąc okrągło: 1720.

Tę długośc na mnieysze miary Polskie z Niémieckich zamieniaiąc (sposobém w Arytmetyce podanym) będzie średnica ziémi, więcey cokolwiek niż

21000000, łokci Polskich.
7000000 sążni.
2800000, prętów
280000, sznurów.

365. Mówi się, że dwa mieysca są do *równowagi* (ad libellam,) gdy równą mają od środka ziémi odległość. Y tak powierzchnia wody stoiącey, wszystkie punkta ma do równowagi.

Gdy liniia iaka prostopadłą iest w punkcie powierzchni ziémi do iéy promienia, przez ten punkt przechodzącego; taki à prócz iednego tego punktu spólnego z promieniém, którego odległość od środka, równa się promieniowi ziémi, wszystkie inne swoie punkta, dalsze mieć będzie w rzeczy samey od środka ziémi; ale że przy takiéy wielkości promienia ziemi, różnica położenia téy linii, okazuiacéy *równowagę pozorną* (libella apparens) od położenia wody stoiącéy, która okazuie *równowagę prawdziwą* (libella vera) ta mowię różnica tak iest mała, że chyba w znaczney bardzo odległości da się postrzedz, przeto w zwyczaynieyszych działaniach, mmożna na tę różnicę względu nie mieć, i równowagę pozorną za równowagę brać prawdziwą.

W odległości 900: łokci, albo 300 sążni, różnica ta nie dochodzi 1. cala.

Fig.6. Jakoż niech promień CA, wyraża promień ziemi, liniia AB niech wyraża styczną do końca tego promienia prowadzoną, a bardzo małą względem niego. Niech BDCd wyraża liniią, ciągnioną przez punkt B i przez środek ziemi, spotykaiącą iey powierzchnią w punktach; D. i d. Będzie $AB^2 = DB \times Bd$; aże liniia BD iest bardzo mała względem linii Bd, będzie prawie $AB^2 = Dd \times BD$; a $BD = \frac{AB^2}{Dd}$.

Niechby AB, zawierała w sobie łokci 900, znaydziemy BD mnieyszą od $\frac{1}{24}$, części łokcia, to iest mnieyszą od cala.

Liniia ta BD iest prawie proporcyonalną kwadratowi linii AB; a zatem w odległościach, 2,3,4,5, i t. d. razy mnieyszych od 900, łokci będzie, 4,9,16,25, i t. d. razy mnieyszą od cala.

366 Lubo nierowności na powierzchni ziemi, są bardzo małe względem wielkości całey ziemi, a zatem można na nie względu nie mieć w niektórych okolicznościach; te iednak nierówności wiele się przykładaią do odmian, które na ziemi postrzegamy. Gdyby nap: ziemia była Matematyczną kulą, to iest zupełnie okrągłą, wody wszystkie na iey powierzchni znayduiące się byłyby stoiącemi; nie by-

łoby ani rzek, ani strumyków, ani źródeł wytryskuiących i sztuką tylko możnaby wody z jednego mieysca na inne sprowadzać.

367. Przez działanie równoważenia, wyznaczaią się te nierówności, czyli różnica, która zachodzi między odległością od środka ziémi, dwóch, albo więcéy punktów. Przeto dochodzenie iakieykolwiek wysokości, możnaby sobie wystawić pod ogólném tém wyobrażeniém działań równoważenia; zwyczaynié iednak działania te daléy się nie rozciągaią, iak do wyznaczenia pomniéyszych wysokości, a szczegulniéy do sprowadzenia wód z jednego miéysca na drugie; co obszerniéy zwykło się wykładać w Fizyce.

W działaniach równoważenia, używane są niektóre narzędzia, służące do wyznaczenia linii prostey ukazuiącéy równowagę pozorną. Tych wstystkich narzędziów opisanie, wieleby tu miéysca zabrało, (m) wyrażą się iednak potrzebniéysze.

368. Równowaga wodna, iedna z náyprościéyszych, składa się z rurki mosiężnéy, albo blaszanéy, i z dwóch butelek

---

(m) Dokładne i obszerne opisanie tych narzędziów, znayduie się w Książce P. Pikarda o równoważeniu, która z wielą przydatkami wyłożona iest z Francuskiego na Niemiecki ięzyk przez P. Lamberta. Wiele także doczytać się można w xiążce napisanéy w téy materyi przez P. LeFebure.

szklannych iak náyprzezroczystszych, przy końcach téyże rurki przyprawionych; Woda w tych butelkach zawarta przechodzi przez rurkę, i w równéy w obydwóch butelkach utrzymuie się wysokości. Osadzana bywa taka równowaga na nodze drewnianéy podobnie iak stolik mierniczy, albo kątomierz.

369. Używanie iey na tém się zasadza, że woda przez otwarcie iakie łączące dwa lub więcey naczynia, przechodząca z jednego do drugiego, układa się do równowagi. Z wielką iednak ostróżnością używać potrzeba, téy tu opisanéy równowagi, gdy bez pomocy perspektyw, gołém okiem do powierzchni wody przystawionym, celuiemy do iakiego mieysca.

370. Układ równowagi powietrznéy zasadza się na własności powietrza, ile lekszego od wody. Przez tę własność, powietrze w rurce wraz z wodą zamknięte, wychodzić nad wodę musi.

Jest to ieden z náylepszych sposobów do ustawienia, podług równowagi, prawidła, albo raczéy perspektywy do niego przyprawionéy.

Równowagi powietrzne do wielkiéy doskonałości można przyprowadzić, iako to, opisuiąc równowagę Brandera, obszernie wywodzi P. Lambert w przydatkach swoich do xiążki Pikarda. Robią ieszcze i równowagi próżne, to iest takie, z których powietrze iest wyciągnione.

Te równowagi za świadectwém X. Fonteny náymnieyszą nawet nierówność poznać daią.

371. Do wykierowania linii, prawidła, lub perspektywy, według położenia poziémnego służy też i nić, która przez ciężar w końcu iéy zawieszony do pionu się układa.

Ta nić ponieważ iest prostopadłą do linii iakiéykolwiek poziemnéy, na téy więc zasadzie robić zwykli, innego ieszcze gatunku równowagi, nazywane równowagami *Pikarda*, *Huyghensa* i t. d.

372. Do działań równoważenia, potrzebny także iest pręt podzielony na łokcie, cale i t. d. na który wkłada się znak z papieru grubego, lub inny podobny, mogący się posuwać wzdłuż pręta; a na środku tego znaku ma bydź cel wyrażony, któryby i zdaleka rozeznać można.

373. Niech będą dwa iakiekolwiek miéysca, których różność równowagi trzeba znaleśdź.

Postawmy narzędzie na iednèm z tych miéysc, a na drugim pręt na łokci, cale i t. d. podzielony. Perspektywę poziemnie, czyli do równowagi ustawioną kieruymy ku prętowi; do którego znak przyprawiony, ma bydź przez inną osobę spuszczany, lub podnoszony póty, póki środek tego znaku nie przypadnie w linii prostéy, którą poziemne perspektywy położenie wyznacza. Jeżeli wysokość tego środka znaku, od spodka pręta rachowana, będzie równa wysokości perspektywy rachowanéy od spodka nogi, na któréy całe narzędzie z perspektywą iest wsparte, tedy dwa te miéysca będą do równowagi. Jeżeli zaś wysokość środka znaku będzie większa lub mniéysza od wysokości perspektywy, tedy spodek pręta będzie tyle niższy lub wyższy od spodku nogi narzędzia, i ta iest różnicą między témi dwiema wysokościami.

Tego sposobu równoważenia używać tylko można w odległościach na 100, a naywięcéy na 200. sążni.

W większych odległościach, uchybienia byłyby znaycznieysze; tak z przyczyny zboczenia światła łamiącego się w powietrzu, iako z niedokładności narzędzia, które w większych odległościach większe też sprawuie uchybienie, a nakoniec i z przyczyny różnicy, zachodzącéy między prawdziwą i pozorną równowagą.

374. Po części można się ustrzedz tych uchybień a raczéy one zmnieyszyć, stawiaiąc narzędzie w równéy, ile bydź może odległości między dwóma mieyscami, które równoważyć mamy. Obydwóch tych mieysc trzeba wyznaczyć równowagę względém tego średniego stanowiska. Ponieważ zaś różnica wysokości środka znaku na dwóch tych mieyscach postawionego, iest różnicą tychże mieysc wysokości iednéy względém drugiéy, tą więc różnicą będzie wyższe od drugiego to mieysce, w którém znak niżéy iest położony.

Przez to dwoiakie działanie, można z iednego stanowiska równoważyć dwa iakie mieysca, których odległość zawierałaby nap. 300. sążni, a zatém iużby nadto wielka była, aby w niéy pierwszego do równoważenia sposobu użyć godziło się.

375. Gdy mieysca do równoważenia wyznaczone, są ieszcze odległéysze, nap. na iednę, lub dwie mile dalekie, iedno od drugiego, można tę przywiększą odległość podzielić na części, z których każda zawiérałaby około 300. sążni; a dopiéro z pośrodka każdéy téy mniéyszéy odległości, równoważyć iéy końce, czyli granice.

Przez piérwsze takowe działanie, znaydziémy różnicę pierwszego punktu wyskości od drugiego następuiącego. Przez drugie działanie znaydziemy różnicę wysokości tego drugiego punktu od trzeciego, i tak daléy; aż nakoniec znáydziémy różnicę wysokości przedostatniego punktu od ostaniego, który kończy całą odległość, a tém samém dóydziemy też i różnicy wysokości pierwszego punktu od ostatniego, to iest: dóydziemy różnicy wysokości między iednym i drugim końcem całey odległości.

376. Gdyby się zdarzyło, że postępuiąc od każdego punktu podziału, do innego iému naybliższego, każdy taki punkt następny byłby wyższy lub niższy od poprzedzaiącego, z którym się w równoważeniu porównywa, tedy summą różnic wysokości między iednym i drugim punktém następnym pokazałaby całą różnicę między wysokością dwóch punktów kończących całą odległość. Ale ieżeli te punkta następne, są na przémiany iedne wyższe, a drugie niższe względém tych z któremi się przy każdém działaniu porównywaią, tedy wziąść trzeba summę różnic

wysokości punktów wszystkich, które przy każdym następném działaniu są wyższe, od tych, z któremi ie porównywamy (postępuiąc zawsze od jednego końca całey odległości, do drugiego) Trzeba ieszcze wziąść i summę różnic wysokości punktów wszystkich, które przy każdém działaniu następném są niższe od tych, z któremi się porównywaią (w tę samę stronę co i pierwéy postępuią:)

Jeżeli te dwie summy będą równe, znakiem to będzie, że obadwa całéy odległości końce są do równowagi. Jeżeli zaś te dwie summy będą nie równe, tedy ostatni koniéc odległości, tyle wyższy, lub niższy będzie od pierwszego, ile pierwsza summa większa lub mnieysza iest od drugiey.

377 Aby nie bydź obowiązanym porównywać przy każdém stanowisku, wysokości dwóch punktów przypadaiących do równoważenia, lepiéy iest, że dway pomocnicy rachować będą wysokość znaku, i onę dla pamięci zapisywać po każdém szczegulném działaniu. Jedna z tych wysokości naznaczonych, będzie służyć do porównania iéy z jnną następną która ieszcze nie iest znaleziona. Ci dway pomocnicy postępować będą po każdém szczegulném działaniu, ku drugiemu końcowi całéy odległości; ten, który wprzódy póydzie, stanie przy następuiącym punkcie podziału, a drugi stanie przy punkcie od pierwszégo opuszczonym.

Po skończonych tych wszystkich szczegulnych działaniach, zbierze się wraz summa wysokości od pierwszego pomocnika naznaczonych, i podobnie w jednę summę zbiorą się wysokości naznaczone od drugiego pomocnika. Różnica tych dwóch summ, będzie różnicą wysokości dwóch punktów skraynych, któreśmy równoważyć postanowili, Ten zaś punkt będzie wyższy od drugiego, któremu odpowiadaiąca summa będzie mnieysza.

578. Co się tycze równoważenia mieysc położonych w Kraiach bardzo odległych; iak nap. gdyby trzeba wyznaczyć różnicę wysokości mieysc położonych przy brzegach Morza środziemnego, od wysokości mieysc innych w środ Polski położonych, albo przy brzegach morza Baltyckiego; rozumiem że pewnie o tem mowa będzie w fizyce. Można w tey mierze czytać między innemi Dzieło wielkie P. De Luc, o różnych umiarkowaniach powietrzni otaczaiącey ziemię (sur les modifications de l' Atmosphère.)

ROZDZIAŁ XIII.

O Kwadrowaniu koła, czyli o wynalezieniu Powierzchni Koła.

379. OBwody Wielokątow foremnych podobnych sobie, tak się do siebie maią, iak promienie kol w nie wpisanych, lub na nich opisanych. Powierzchnie tychże Wielokątów, równaią się Troykątom maiącym za wysokość promienie kol wpisanych, a za podstawę obwod Wielokątów. Też powierzchnie Wielokątów foremnych podobnych do siebie, tak się maią do siebie, iak kwadraty

promieni kół wpisanych i t. d. Wszystkie te Twierdzenia nie zawisły od liczby boków w Wielokątach, i zawsze są prawdziwe, chociażby náywiększa była liczba boków.

380. Ztąd zdaie się; że prawdziwe będą te wszystki Twierdzenia gdyby nawet liczba boków tak wielka była w wielokątach, żeby ich od kół rozeznać nie podobna i gdyby promienie kół wpisanych i opisanych różnicy między sobą nie miały, ale iednym promieniem wydawały się (n)

(n) *Takowe rozumowanie, przywiodło Geometrów, że do koła uważanego za granicę między wielokątém wpisanym i opisanym przystosowali te Twierdzenia, które o wielokątach stanowili. Dosyć podobno będzie przy pierwszém czytaniu téy książki, wystawić uczniom koła pod tą postacią. Jeżeli iednak przez ćwiczenia, poprzedzaiące, ducha dokładności i smaku w niéy nabyli przeciwną rzeczą zapewne zdawać im się będzie, przechodzić od wielokąta, choćby z náywiększą liczbą boków, do koła uważanego pod postacią wielokąta takiego; którego liczba boków większa byłaby od jakiekolwiek liczby naznaczonéy. Postrzegą oni, i postrzedz powinni skok niezmierny w takowém przechodzeniu; gdyż ściśle mówiąc, liniia krzywa nie może bydź uważana, iako zbiór wielu linii prostych bardzo małych, do siebie nachylonych. Należy przeto rzecz tę z większą*

381. *Twierdzenie przybrane.* Można zawsze chociaż myślą podzielić ilość iaką na tyle części równych, aby każda ta część w szczegulności mnieysza była, niżeli inna iakakolwiek ilość naznaczona.

Dowodz. Pomnożmy tę drugą ilość naznaczoną, tyle razy, ile potrzeba, aby się stała większą od pierwszéy ilości danéy; na tyleż części równych podzielmy ilość pierwszą, ile razy była pomnożona ilość druga; każda takowa część ilości pierwszêy, mniéysza będzie od ilości drugiéy naznaczonéy.

W szczegulności mówiąc, gdy się weźmie połowa ilości iakiéy skończonéy, i téy połowy połowa, to iest czwarta część całéy ilości, i znowu téy ostatniéy połowy połowa, to iest ósma część całéy ilości, daléy połowa téy ósméy części, to iest: część szesnasta i t. d. dóydzie się naostatek do takiéy części, która mniéyszą będzie od wszelkiéy ilości naznaczonéy. (o)

---

dokładnością wyłuszczyć tak dla zabieżenia wielu trudnościom, które w téy mierze zarzucać zwykli niektórzy o świetle rozumu swego i przeniknieniu nadto uprzedzeni, a ledwie w rzeczy saméy pierwsze Matematyki początki znaiący, iako też i dla wprawienia młodzi zawczasu w dokładność Matematyczną.

(o) *Przestrzegać będą Nauczyciele Uczniów, aby zamiast słowa* naznaczona, *nie używali tego drugiego słowa* na-

382 *Twierdzenie.* 1. Można opisać na kole danym, i wpisać weń foremne dwa takie wielokąty podobne, aby stosunek ich obwodów przybliżał się bardziéy, do stosunku równości, niżeli iakikolwiek inny stosunek nierówności naznaczony.

Przykład. Można wpisać w koło i na nim opisać dwa wielokąty foremne podobne takie, którychby różnica obwodów mniéysza była od dziesiątéy naprzykład części obwodu, iednego z nich.

Tab. 22 Fig. 1 Niech będzie CA promień koła, podzielony na dziesięć części równych, i niech AB iednę taką część wyraża.

Przez B przeciągniymy DBd. prostopadłą do promienia i spotykaiącą okrąg koła w punktach D, i d. Podzielmy okrąg koła, na 2. 4, 8, 16 i t. d. części równych, póty, póki nie dóydziemy do części koła mniéyszéy od łuku DAd. Niechby naprzykład łuk EAe był iedną z tych części mnieyszych od łuku DAd; i punkt A niechby go dzielił na dwie części równe FA, Ae. Pociągniymy liniią Ee, (która będzie prostopadłą do AC) Przez punkt A, niech przechodzi styczna FAf, i niechay dwa promienie CE, Ce, schodzą się z tą styczną w punktach F, f. Liniié Ee, Ff, są bokami dwóch wielokątów foremnych podobnych, iednego w koło wpisanego, a drugiego na kole opisanego; a zatém obwody tych dwóch

---

znaczyć się mogąca, *i dadzą im poznać różnicę tych dwóch wyrazów.*

wielokątów będą, iak boki Ee, Ff, albo iak liniié CG, CA. Więc różnica obwodów tych dwóch wielokątów, będzie do obwodu większego wielokąta, iak liniia AG, do linii CA. Aże liniiá AG mniéysza iest od linii AB, to iest od dziesiątéy części linii CA; więc i różnica dwóch obwodów mniéysza będzie, niżeli dziesiąta część obwodu wielokąta na kole opisanego.

Gdyby liniiá AB była $\frac{1}{10}$, linii BC, albo $\frac{1}{10}$. linii AC możnaby podobnym sposobem dowieśdź, że różnica dwóch obwodów, tak się ma do obwodu wielokąta w koło wpisanego, iak liniia AG do linii CG. Aże AG. mnieysza iest od AB, więc tém samém mnieyza iest od $\frac{1}{10}$ tey części linii BC, a tém bardziéy mniéysza będzie od 10téy części linii CG. Różnica tedy między dwóma obwodami wielokątów mniéysza byłaby od 10téy części obwodu wielokąta w koło wpisanego. (p)

383. *Wniosek* 1. Można w koło wpisać wielokąt ieden foremny, i drugi podobny na nim opisać, tak; aby stosunek obwodu koła do obwodu iednego z dwóch wie-

---

(p) *Daie się tu przykład liczebny dla łatwieyszego poięcia. Zaiednak te rozumowania uważane w sobie nie zawisły od tych liczb, i mogą bydź przystosowane do wszystkich innych; przeto dowodzenie nasze nie iest dla tego szczegulnego przystosowania, ani mniéy dokładnym, ani mniey ogulnym.*

lokątów bardziéy był przybliżony do stosunku równości, niżeli iakikolwiek inny stosunek naznaczony.

Przykład. Niechby opisany na kole był jeden wielokąt, a drugi podobny w koło wpisany, i niechby różnica ich obwodów mnieysza była od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanego.

Różnica obwodu wielokąta opisanego od obwodu koła mnieysza będzie, niż różnica obwodu tegoż wielokąta od obwodu wielokąta wpisanego; to iest mnieysza niżeli $\frac{1}{10}$ część obwodu wielokąta wpisanego a tém bardziéy mnieysza od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła.

Różnica także obwodu koła od obwodu wielokąta wpisanego mnieysza iest, niżeli różnica między obwodami dwóch wielokątów, a zatém mnieysza od $\frac{1}{10}$ części obwodu wielokąta wpisanego, a dopiero ż mnieysza od $\frac{1}{10}$ części obwodu koła

384. *Wniosek 2:* Maiąc daną liniią prostą, wziętą za równą okręgowi koła danego, wpisać w to koło, i opisać na nim wielokąty, których obwodów różnica od obwodu koła mnieysza byłaby, niżeli liniia dana i kiéykolwiek małości,

Pomnożmy ostatnią tę liniią tyle razy, aż większą będzie od linii wziętéy za równą okrągowi koła. Niechby naprzykład 10. razy powiększona była ta liniia. Wpiszmy w koło i opiszmy na nim dwa wielokąty foremne podobne, którychby różnica obwodów mnieysza była od $\frac{1}{10}$ części obwodu iednego z nich. Będzie zatém różnica obwodu koła od obwodu któregokolwiek z tych dwóch wielokątów mniéysza niżeli $\frac{1}{10}$ ta część obwodu, iednego z tychże wielokątów, naprzykład obwodu wielokąta wpisanego; a dopieroż mniéysza niżeli $\frac{1}{10}$. ta część okręgu koła, a ieszcze mniéysza, niż liniiá dana wyznaczonéy małości.

385. *Twierdz.* 2. Okręgi kół tak się maią do siebie, iak ich promienie.

Niech będą dwa koła C y c, a tych okręgi O y o, promienie zaś P y p; będzie zatém O: o = P: p.

Gdyby ta proporcya w czém chybiała, tedy pierwszy stosunek byłby większy lub mniéyszy od drugiego. W pierwszym razie trzebaby powiększyć okrąg o, a w drugim okrąg O. aby naprawić proporcyą; a zatém w obydwóch razach trzeba powiększyć ieden z okręgów dla zrobienia proporcyi.

Niechby liniiá prosta L, większa była od okręgu O, i niechby było (ieżeli podobna) L: o = P: p.

Opiszmy na kole C wielokąt foremny, któregoby różnica obwodu, od obwodu koła mniéysza była, niżeli różnica L od O. Na drugim także kole c, opiszmy wielokąt foremny podobny pierwszemu Obwody tych dwóch wielokątów tak się mieć będą do siebie, iak promienie P y p kół C y c; albo iak L do o, (ponieważ miało bydź L: o = P: p.) Ale obwód pierwszego wielokąta, mniéyszy iest niżeli L, więc i obwod drugiego, mniéyszyby bydź powinien niżeli o, to iest mniéyszy

U

niżeli okrąg koła, na którym iest opisany, co bydź nie może.

Więc stosunek promieni dwóch kół, nie iest większy ani mnieyszy od stosunku ich okręgów, a zatém równy iest temuż stosunkowi.

386. *Wniosek* 1. Idzie zatém, że stosunek okręgu koła iednego, do swego promienia, teuże sam iest, co i stosunek któregokolwiek innego koła, do swego także promienia.

Przeto gdyby można znaleśdź stosunek iakiegokolwiek koła, do iego promienia, iuż tém samém byłby znaleziony stosunek każdego innego koła do swego promienia.

387. *Wniosek* 2. Dwa prostokątne Troykąty są do siebie podobne, gdy maią za wysokości, promienie dwóch kół, a za podstawy linie wzięte za równe okręgom tychże kół; a zatém takie dwa Troykąty będą do siebie w stosunku dwumnożnym ich boków, naprzykład promieni dwóch kół.

388. *Twierdz.* 3. Powierzchnia koła równa się powierzchni Troykąta maiącego za wysokość promień tego koła a za podstawę, iego okrąg.

Dowodz. Gdyby ten Troykat nie był równy powierzchni koła, byłby od niéy większy, albo mnieyszy, a zatém koło byłoby równe innemu Troykątowi téyże samey wysokości, za podstawę zaś maiącemu liniią większą, albo mnieyszą od okręgu koła.

Nazwiymy okrąg koła, O, a tę liniią

większą albo mnieyszą od okręgu, nazwiymy L.

W pierwszym razie, w którym ta liniiá L, większa był by od okręgu koł, opiszmy na nim wielokąt foremny, który go obwod mnieyby się różnił od okręgu koła, niżeli się różni od niego liniiá L; a zatém liniiá L, większa by była od obwodu wielokąt. Powierzchnia tego wielokąta był by mnieysza od powierzchni Troykąta maiącego za wysokość promień koła, a za podstawę liniią L, to iest byłaby też powierzchnia wielokąta mnieysza od powierzchni koła, na którém wielokąt iest opisany; co bydź nie może.

W drugim razie w którym liniiá L, mnieysza był by od okręgu koła, wpiszmy w koło wielokąt foremny, który go obwod mnieby się różnił od okręgu koła, niżeli liniiá L a zatém obwod wielokąta byłby większy od linii L. Wpiszmy w to samo koło wielokąt inny foremny, tyle dwoie co pierwszy boków zawieraiący.

Powierzchnia tego drugiego wielokąta, równał by się Troykątowi maiącemu za wysokość promień koła, a za podstawę obwod pierwszego wielokąta; (268) to iest liniią większą od L.

A zatém powierzchnia tego wielokąta wpisanego w koło, większa byłaby niżeli powierzchnia koła, co bydź także nie może.

Więc powierzchnia koła, ani iest większa, ani mnieysza od powierzchni Troykąta maiącego za wysokość promień tego koła; a za podstawę iego okrąg; a

U 2

zatém równa iest powierzchni tego Troykąta.

389. *Wniosek* 1. Powierzchnie kół są do siebie w stosunku dwumnożnym ich promieni, albo średnic: przeto gdyby promienie kół były iak liczby: 1, 2. 3, 4, 5. i t. d. powierzchnie tychże kół byłyby iak kwadraty: 1, 4, 9, 16, 25 i t. d.

390. *Wniosek* 2. Powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni wielokąta na nim opisanego, iak okrąg koła, do obwodu wielokąta. A w szczegulności powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni kwadratu na nim opisanego, albo, co na iedno wychodzi do kwadratu średnicy, iak się ma okrąg koł, do obwodu tego kwadratu; to iest, iak się ma okrąg koła do swoiéy średnicy cztery razy wziętéy, czyli do linii długiéy, iak cztery średnice.

Ztąd porównanie dokładne powierzchni koła, z powierzchnią kwadratu, a zatém i porównanie koła z powierzchnią iakiéykolwiek figury prostekreślnéy, zawisło od porównania okręgu koła z liniią iaką prostą, albo (co na iedno wychodzi) *kwadrowanie* koła, zawisło od *wyprostowania* iego okręgu, czyli od wynalezienia linii prostéy równéy okręgowi koła.

391. *Wniosek* 3. Wszystkie sposoby postępowania, które się wyżéy podawały, do zrobienia kwadratu równego summie, albo różnicy dwóch innych kwadratów danych, końcém powiększenia lub zmniéyszenia kwadratu w danym stosunku, mogą bydź równiéy do kół przystosowane, czyniąc na ich promieniach lub średni-

cach te same działania, któreby się na nich czyniły, gdyby były bokami kwadratów na których podobne odmiany czynić przypadałoby.

A w szczegulności, chcąc podzielić powierzchnią koła danego, na pewną liczbę części równych, przez *koła spółśrodkowe* (circuli concentrici); trzeba podzielić promień iego na tyleż części równych, zacząwszy od środka, tak, aby odległości punktów podziału coraz dalszych od tegoż środka, były do siebie iak kwadraty liczb następnych 1,2,3,4,5, i t. d. Niechby nap. przypadało podzielić koło na 8 części równych przez koła spółśrodkowe. Podzielmy promień, na 7. części równych; średnie Geometryczne między odległościami punktów podziału od środka, i całym promieniem, będą promieniami kół, spół środkowych, przez które podzielona będzie powierzchnia koła danego, na 7. części równych.

392. Wyznaczenie powierzchni wycinków, i odcinków kół, zawisło także od wyznaczenia okręgu koła. Jakoż w saméy rzeczy.

1. Powierzchnia; wycinka tak się ma do powierzchni koła, do którego ten wycinek należy, iak się ma łuk wycinka, do okręgu koła; to iest: iak się ma Troykąt, którego wysokością iest promień, a podstawą, ten łuk, do Troykąta maiącego za wysokość tenże promień, a za podstawę okrąg koła. Aże ten ostatni Troykąt byłby równy powierzchni koła, więc i pierwszy Troykąt równy iest powierzchni wycinka.

2. Odcinek mnieyszy od pół koła iest różnica między wycinkiém maiącym tenże sam łuk, co i odcinek, i między Troykątém równoramiennym maiącym spólną z wycinkiém podstawę, wierzchołek zaś w środku koła.

Aże powierzchnia wycinka, równa się Troykątowi maiącemu za wysokość promień, a za podstawę łuk wycinka; a powierzchnia Troykąta o którym mowa (wziąwszy w nim za podstawę, ieden z promieni, to iest z ramion iego a za wysokość wstawę łuku należącego do wycinka) równa się Troykątowi maiącemu za wysokość promień, a za podstawę wstawę łuku: więc powierzchnia odcinka mnieyszego od pół koła równać się będzie Troykątowi maiącemu za wysokość, promień, a za podstawę różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku. Arytmetycznie ta powierzchnia wyraża się rozmnożeniem liczby oznaczaiącéy połowę promienia, przez jnną liczbę oznaczaiącą różnicę łuku wycinka od wstawy tegoż łuku.

Powierzchnia odcinka większego od pół koła, iest summą z wycinka zawieraiącego między swémi ramionami ten sam łuk większy od półkola, i z Troykąta, w którym, wziąwszy za podstawę promień, wysokością byłaby wstawa łuku czyniącego z łukiém pierwszym okrąg cały; a zatém powierzchnia tego odcinka, równa się Troykątowi maiącemu za wysokość promień, a za podstawę, summę z łuku odcinka tego, i z wstawy łuku, który spełnieniem iest pierwszego łuku do całego okręgu, albo, (co na iedno wychodzi) z wstawy różnicy między łukiém odcinka, i półokręgiem.

393. *Definic:* W koła h nieiednakowego promienia, wycinki i odcinki podobne, że są, których łuki są do siebie podobne, to iest równą stopniów liczbę w sobie zamykaią; a te łuki tak się maią do siebie, iak całe okręgi, a zatém iak promienie tychże kół.

394. *Twierdz. 4.* Wycinki i odcinki podobne w kołach nie iednakowego promienia, tak się maią do siebie, iak koła, do których należą.

1. Niech będą dwa wycinki podobne ABCDA, abcda, te dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą. *Fig. 2.*

Dowodz. Wycinek ACBDA, tak się ma do koła, do którego należy, iak łuk ADB. do okręgu ADBEB, albo (393) iak łuk adb, do okręgu adbda, to iest, iak wycinek acbda, do koła, do którego należy. Więc te dwa wycinki są do siebie iak koła, do których należą, to iest w stosunku dwumnożnym promieni tychże kół.

2. Niech będą dwa odcinki: ABDA, abda, podobne, te dwa odcinki tak się maią do siebie, iak koła do których należą.

Dowodz. Wycinki ACBDA, acbda, maią się do siebie w stosunku dwumnożnym promieni CA, ca, to iest, iak CA^2. do ca^2. Troykąty podobne: ACBA, acba, w tymże samym ieden do drugiego są stosunku; więc te dwa wycinki tenże sam do siebie maią stosunek, co i te dwa Troykąty. Więc różnica (albo summa) pierwszego wycinka, i pierwszego Troykąta, to iest odcinek ABDA, tak się ma do różnicy (albo do summy) drugiego wycinka i drugiego Troykąta, to iest do odcinka abda, iak się ma pierwszy wycinek do drugiego; to iest w stosunku dwumnożnym promieni kół, do których te odcinki należą.

395 *Defin.* Niech będą dwa koła spółśrodkowe, mieysce zawarte między ich okręgami, nazywa się Koroną.

396 *Twierdz.* 5. Powierzchnia iedney takiey korony równa iest prostokątowi maiącemu wysokość równą szerokości tey korony, a podstawę równą okręgowi koła, którego promień równałby się połowie summy promieni okręgów dwóch koronę tę zawieraiących.

Fig. 3. Niech będą CA, CB, promienie dwóch kół spółśrodkowych; przedzielmy AB na dwie równe części w F, liniia CF, będzie połową summy dwóch promieni CA, CB należących do dwóch kół spółśrodkowych; korona zawarta między temi kołami, równa iest prostokątowi maiącemu szerokość AB tey korony za wysokość, a za podstawę okrąg, którego liniia CF byłaby promieniem. Poprowadźmy AD prostopadłą do AC, i daymy, że AD równa się okręgowi, którego promieniem iest CA. Złączmy punkta C i D, liniią CD, a przez punkta B i F pociągniymy dwie liniie równoodległe od AD, aż do ich spotkania się z liniią CD, w punktach E, i G,

Ponieważ CA : CB = AD : BE
i CA : CB = okrąg CA : okręgu CB
więc - AD : BE = okrąg CA : okręgu CB.

Aże AD wzięta iest za liniią równą okręgowi, któr go CA iest promieniem więc i BE = okręgowi CB.

Podobnym sposobém dowieśdź można, że liniia FG, równa iest okręgowi, którego promieniem byłaby liniiá CF.

Powierzchnia koł, których promieniami są CA, i CB, równaią się Troykątom, CAD, i CBE, a zatém powierzchnia korony równa będzie czworokątowi ABED. Przez G poprowadźmy równoodległą od AB, któraby spotkała AD w H, a BE w J; Troykąty prostokątne GDH, GEJ, maią boki GH, GJ, równe, i kąty równe, więc mogą przystać do siebie; a zatém summa z Piąciokąta BEGHA, i z Troykąta GEI, to iest prostokąt ABIH równa się summie z Piąciokąta BEGHA, i z Troykąta GDH, to iest, równa się czworokątowi BEDA. Aże ten czworokąt równy, iest powierzchni korony, więc taż korona równa będzie prostokątowi ABIH, to iest prostokątowi, który ma szerokość korony za wysokość, a za podstawę, okrąg w którym, promieniem iest średnia arytmetycznie proporcyonalna, między dwóma promieniami, czyli połowa summy tychże dwóch promieni.

307 Podobnie i różnica w kołach spółśrodkowych, wycinków dwóch, zawartych między temiż samemi promieniami, równa się Prostokątowi maiącemu za wysokość różnicę dwóch promieni, a za

podstawę łuk podobny łukom wycinków dwóch danych, i należący do okręgu, którego promień, iest średnim arytmetycznym między promieniami tych dwóch wycinków.

1. Pokazawszy, iż zkwadrowanie koła, lub części iego, zawisło od wyprostowania, iego okręgu; przystąpmy do szukania tego sprostowania.

Zadanie to aż nazbyt wsławione zatrudniło wielu przypisuiących sobie nazwisko Jeometrów, którym ledwie początki Matematyki były znaiome, a i zadania nawet samego nie rozumieli. W czém było omylne ich rozumienie, bawić się nadtém, nie sądzę bydź rzeczą potrzebną. Mogą Nauczyciele, chcąc mieć obszernieyszą w téy mierze wiadomość, czytać Montukli przez mnie wspomnianą (*Historyi o dochodzeniu kwadrowania koła* Histoire des recherches sur la quadrature du Cercle:) Dosyć będzie powiedzieć, że treść tego zadania na tém zawisła, aby wynaleśdź liniią prostą równą okręgowi koła podanego. Nie rozumie się tu zaś równość pozorna, i zmysłowa (iak ci mniemaią, którzy koło z drewna lub z kruszcu wyrobione tocząc po iakiéy płaszczyznie, mierzą długość linii, którą punkt ieden tego koła przebiegł: albo którzy koło i kie nicią okręcaią i biorą potém długość téy nici; albo na koniec którzy ważą takowe koło, i one porównywaią z kwadratém podobnéy materyi, i iednakowéy z kołém grubości:) ale się rozumie równość umysłowa, czyli taka, o któréy możnaby się przeświadczyć przez rozumowania podobne tym, iakich używaliśmy do dowiedzenia prawd w tym przeciągu dzieła wyłuszczonych.

398 Archimedes trzysta lat blisko przed Narodzeniem Chrystusa znalazł stosunek okręgu do średnicy, tak bliźki prawdziwemu, że we zwyczaynych zdarzeniach iest dostatecznym, a przy tém, i w używaniu wygodnym. Doszedł on, że oznaczywszy średnicę koła przez 1, Okrąg iego większy będzie niż $3\frac{10}{71}$, a mnieyszy niż $3\frac{10}{70}$ albo, że wyraziwszy długość średnicy przez 497, okrąg będzie większy niż 1561, a mnieyszy niż 1562; uchybienie zatém byłoby naywiększy w części $\frac{1}{1561}$ całego okręgu; a którego kolwiek że dwóch stosunków używszy, nap. ostatniego, ten wypadłby na stosunek 7. do 22.

Późniey po Archimedesie, wynaleziono sposoby krótsze, któremi dochodzi się stosunków bardziey ieszcze zbliżonych do prawdziwych. Do téy nawet dokładności iuż przyszło, że wyraziwszy średnicę koła przez 1, z zerami 127 przydanemi, wynaydzie się okrąg w liczbie złożoney z tyluż znaków liczebnych, z uchybieniem mnieyszym od jedności ostatniego, a naymniey wyrażaiącego znaku téyże liczby. Sposob iednak dochodzenia z tą dokładnością ważności okręgu koła, nie może bydź w tych początkach Uczniom wykładany. Przytoczémy iednak stosunki niektóre wygodnieysze średnicy koła do okręgu, wyięte z Xięgi sławnego

P. Huyghens o wynalazkach wielkości koła (de circuli magnitudine inventa). Używaiąc Dwonasto kąta wpisanego w koło, i na kole opisanego, można wynaleśdź dokładnieysze stosunki średnicy koła do okręgu, niżeli te których doszedł Archimedes przez wielokąty o 96 bokach, wpisane w koło, i na nim opisane; ale na to mieysce rachunek Archimedesa mniey wyciąga poprzedzaiących podań, niżeli rachunek na dwunastokącie czyniony.

399. Stosunki średnicy do okręgu koła przybliżone do prawdziwych, są następuiące.

7	do	22.
100	do	314.
106	do	333.
113	do	355. (q)

Ponieważ stosunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy iego, ten sam iest, co stosunek okręgu koła do średnicy cztery razy wziętey, więc stosunki powierzchni koła do kwadratu średnicy będą następuiące.

22	do	28, albo, 11, do 14.
314	do	400 albo 157, do 200.
333	do	424.
355	do	452.

(q) *Napisawszy trzy pierwsze nieparzyste liczby 1. 3. 5. po dwa razy, iednę przy drugiey, tak: 113355 liczba 113. zawieraiąca trzy pierwsze znaki, wyrażać będzie średnicę; liczba zaś 355. zawieraiąca trzy ostatnie znaki, wyrazi z małem uchybieniem okrąg koła.*

Czyniąc przybliżenia dokładniéysze; lecz bardziéy zawiłe, i używaiąc sposobów krótszych, ale początkowe wiadomości przechodzących, znaleziono, iż okrąg koła zawiera w sobie średnicę, razy 3,141592953$\frac{5}{8}$*.

Zkąd wynika stosunek powierzchni koła, do kwadratu średnicy, albo stosunek okręgu koła do średnicy iego, cztery razy wziętéy, równy stosunkowi 3,14592658$\frac{5}{8}$* do 4 albo 314159265$3\frac{5}{8}$ * do 4000000000.

Z czterech powyżéy wyrażonych stosunków średnicy do okręgu koła; pierwszy daie okrąg koła większy razy.

	3,1428 * od średnicy.
drugi	3,1400.
trzeci	3'141509, *
czwarty	3,14152992 *

Widziémy tu, iż stosunek pierwszy, daie okrąg koła nadto wielki, drugi i trzeci daie ten okrąg nadto mały, a czwarty, znowu nad to wielki; trzeci iednak i czwarty stosunek dokładniéyszy iest od dwóch pierwszych, a zwłaszcza czwarty, który ieszcze w milionowych cząstkach daie okrąg koła nieróżniący się od ważności iego wyżéy podanéy (r) a iak náyściśléy wyrachowanéy.

(r) *W drugiéy Xiędze* Pamiętników (*Memoires*) *Matematycznych P. Lamberta*, *znáyduie się wyborna* Rozprawa (Dissertatio) *o kwadrowaniu koła. Dowodzi tam* (§9) *Autor, że ieżeli można*

400. Z tego co poprzedzało, łatwo iest rozwiązać przez przybliżanie, następuiące Zagadnienia

1. Maiąc daną średnicę koła, znaleźdź iego okrąg.

2. Maiąc dany okrąg koła, znaleźdź iego średnicę.

3 Maiąc daną średnicę koła, znaleźdź iego powierzchnią.

4. Maiąc daną powierzchnią koła, znaleźdź iego średnicę.

5. Znaleźdź bok kwadratu równego kołu danemu

Znaydujémy, iż stosunek średnicy koła do boku kwadratu równego temu kołu, iest, 200000 do $1772\frac{4}{6}$*

Ten stosunek przybliża się bardzo do stosunków następuiących.

35	do	31.
44	do	39.
123	do	109.
157	do	148.

6. Maiąc dany promień koła, i ważność kątową łuku, (to iest w stopniach) znaleźdź długość tego łuku, i powierzchnią wycinka, proporcyonalną temu łukowi.

7. Maiąc dany promień koła, i ważność

---

by wyznaczyć stosunek dokładny okręgu koła do średnicy iego, tedy liczby, ktoreby go wyrażały większeby być powinny od następuiących, ktore tèn stosunek przybliżony wyrażaią to iest: 101951. 4486099146 do 324 521 540 032 945.

kątową łuku, znaleśdź odcinek między tym łukiém i cięciwą iego.

Náyłatwiéy i náyprościéy rozwiążémy to ostatnie zagadnienie, gdy w Troykącie, który iest różnicą między wycinkiém i odcinkiém wspieraiącym się na tymże samym łuku, weźmiémy za podstawę ieden z promieni, a za wysokość wstawę łuku danego; maiąc albowiém tę proporcyą, że powierzchnia koła, tak się ma do powierzchni odcinka (mniéyszego od półkoła) iak się ma okrąg cały do różnicy między łukiém odcinka, i wstawą tego łuku; i ułożywszy sobie tablicę łuków koła, podług promienia tablic Trygonometrycznych, łatwo przyyydzie rozwiązać to zagadnienie. (s)

8 Znaleśdź przez przybliżenie ważnośćką ową łuku równaiącego się promieniowi koła.

Przystosowanie tego zagadnienia często bywa używane w wyższych częściach Matematyki.

(s) *Co się tycze sposobu ułożenia takowych tablic, obacz przykłady dane w Arytmetyce.*

Tab. I.

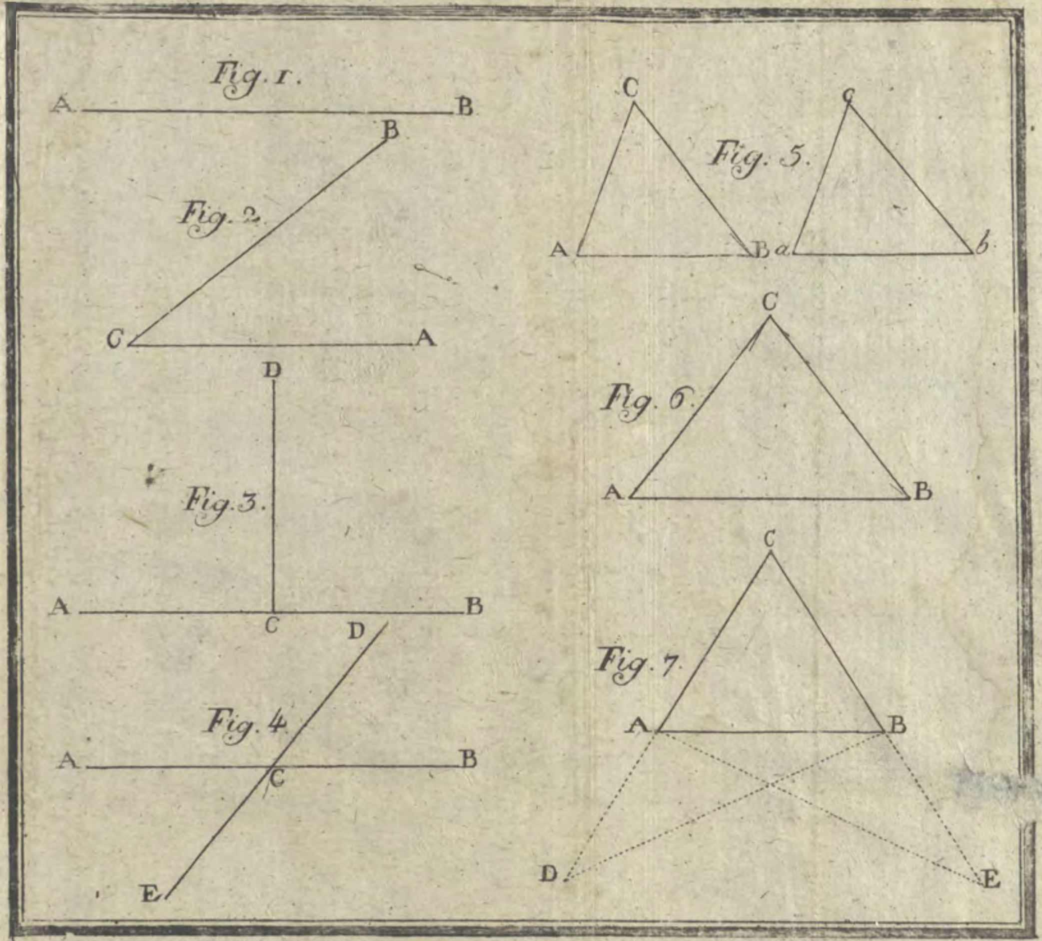


Fig. 1.
A B
Fig. 2.
B C A
Fig. 3.
D A C B
Fig. 4.
D A C B E
Fig. 5.
C A B c a b
Fig. 6.
C A B
Fig. 7.
C A B D E

Tab II

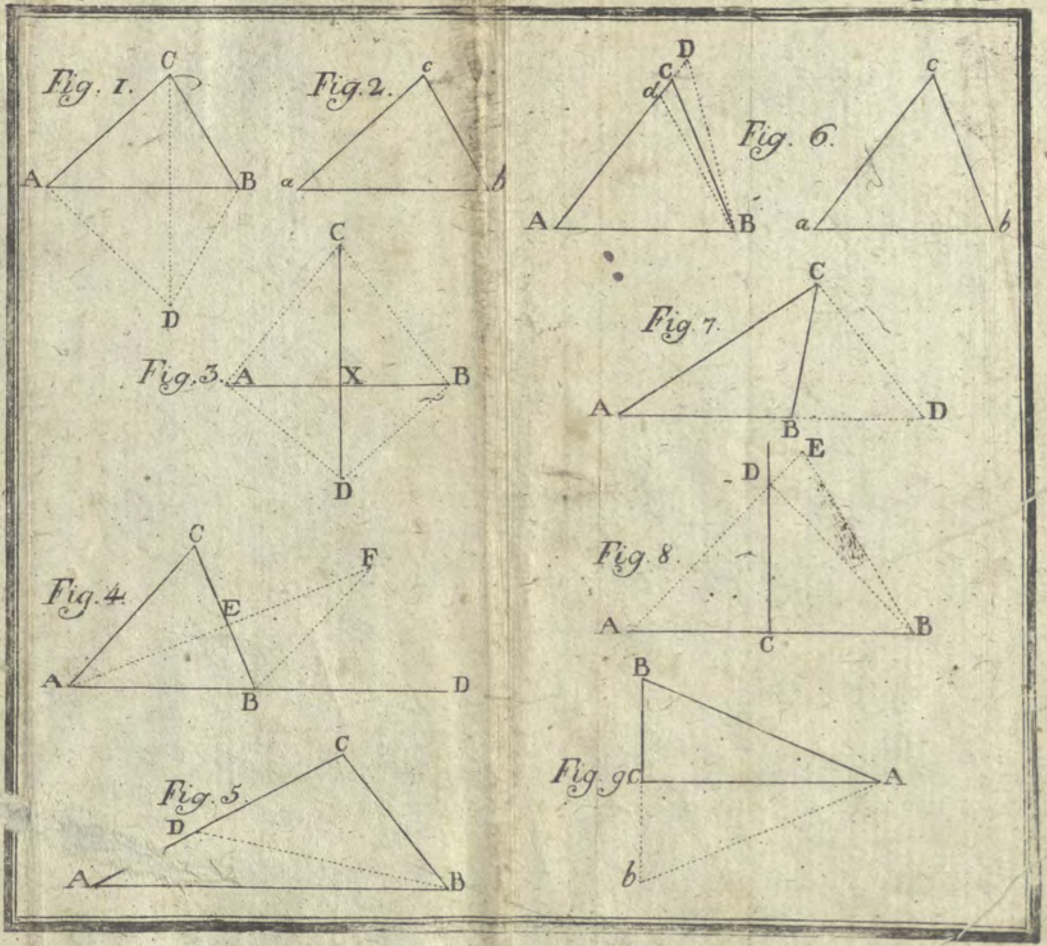
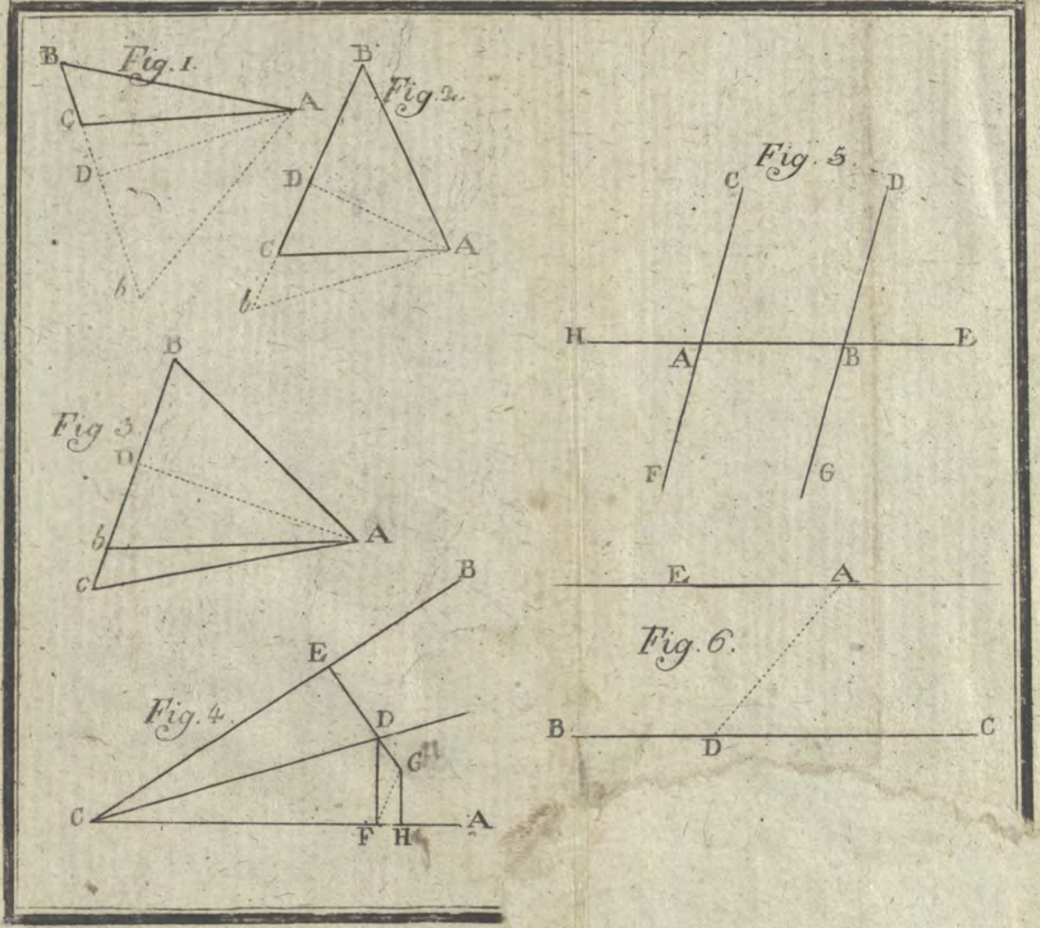
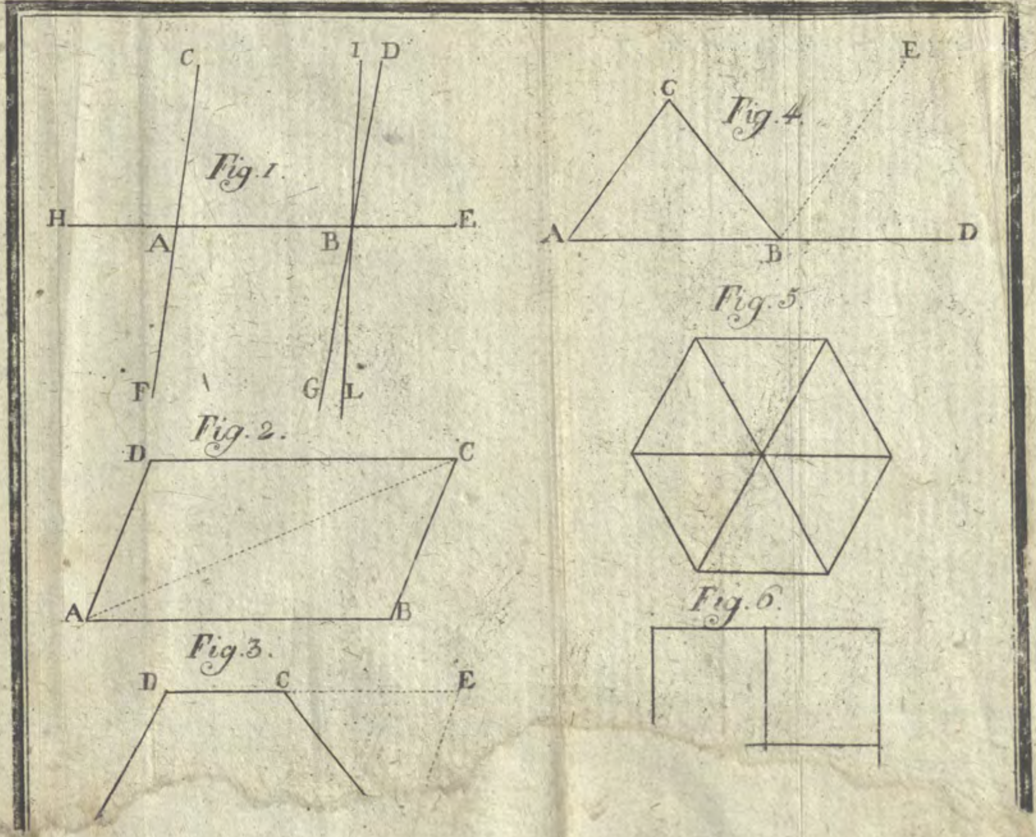


Fig. 1.
C A B D
Fig. 2.
c a b
Fig. 3.
C A X B D
Fig. 4.
C F E A B D
Fig. 5.
C D A B
Fig. 6.
D C d A B c a b
Fig. 7.
C A B D
Fig. 8.
E D A C B
Fig. 9.
B C A b

Tab. III.



Tab. IV.



Tab. V

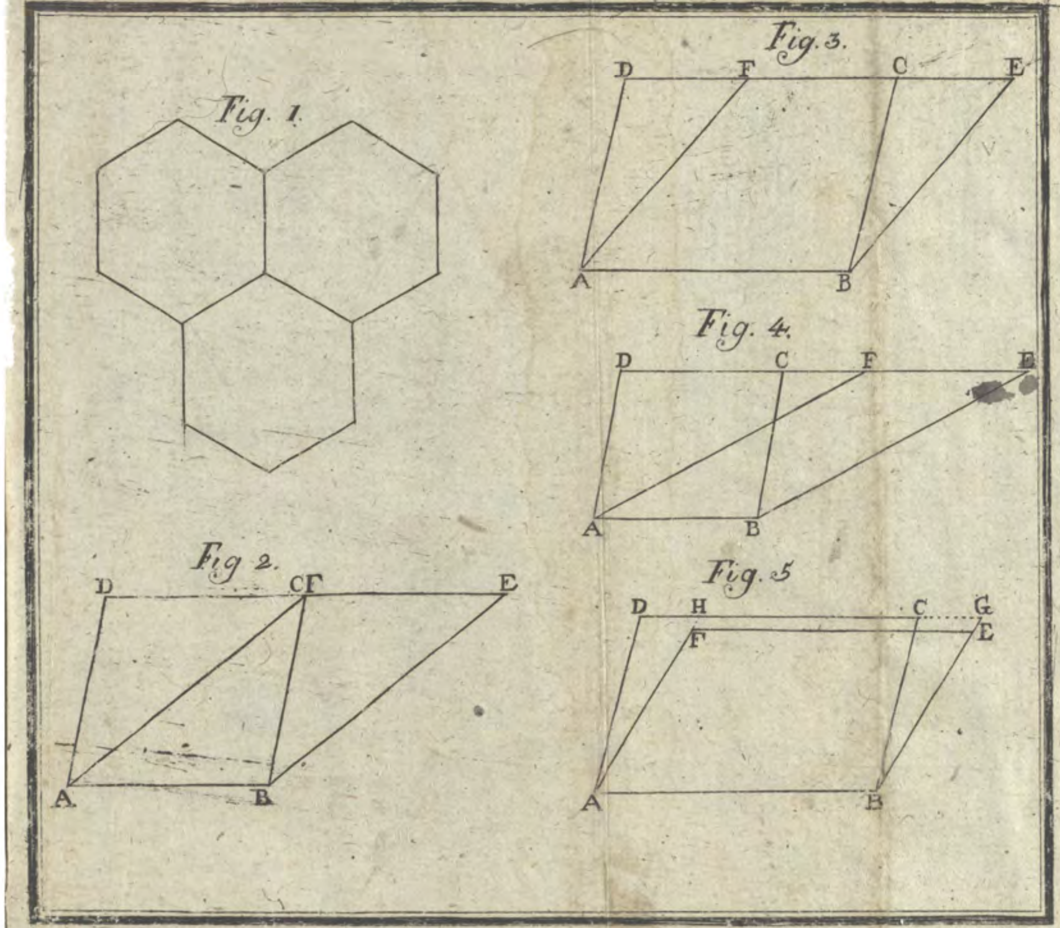


Fig. 1.
Fig. 2.
D C F E A B
Fig. 3.
D F C E A B
Fig. 4.
D C F E A B
Fig. 5
D H C G F E A B

Tab. VI

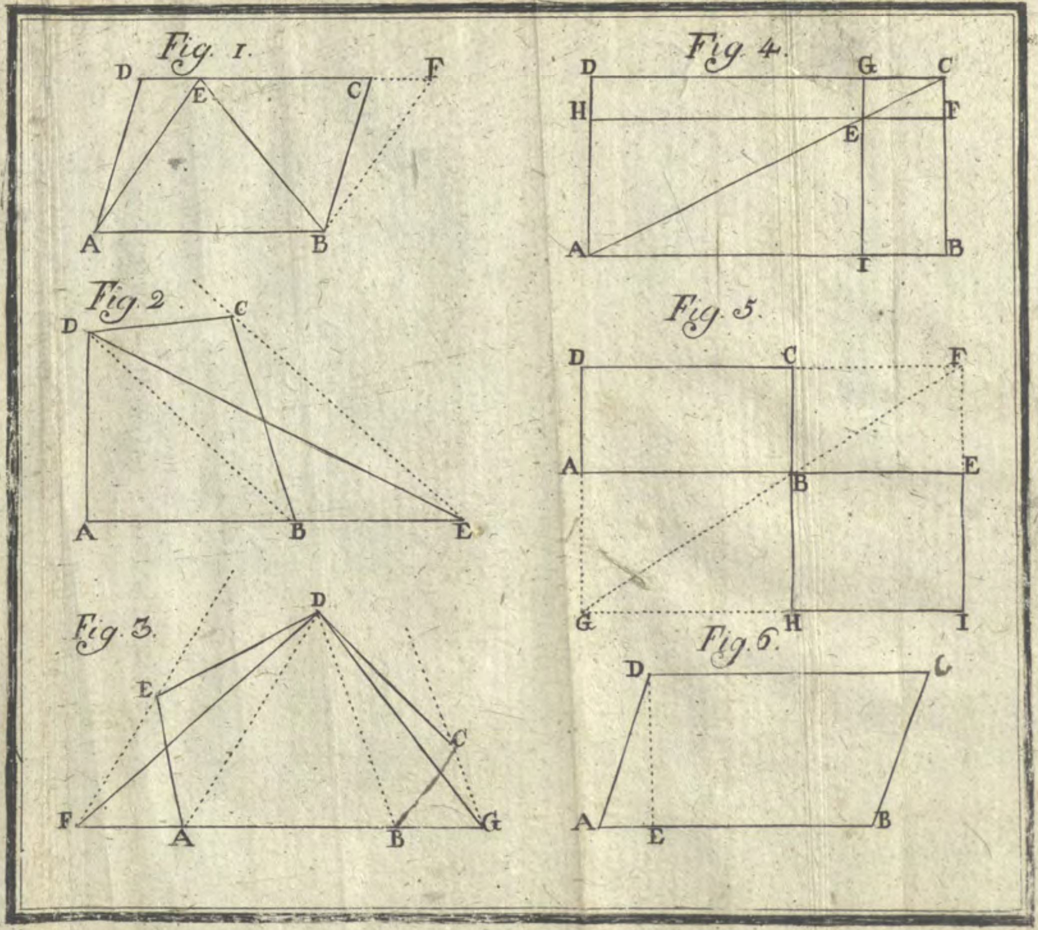
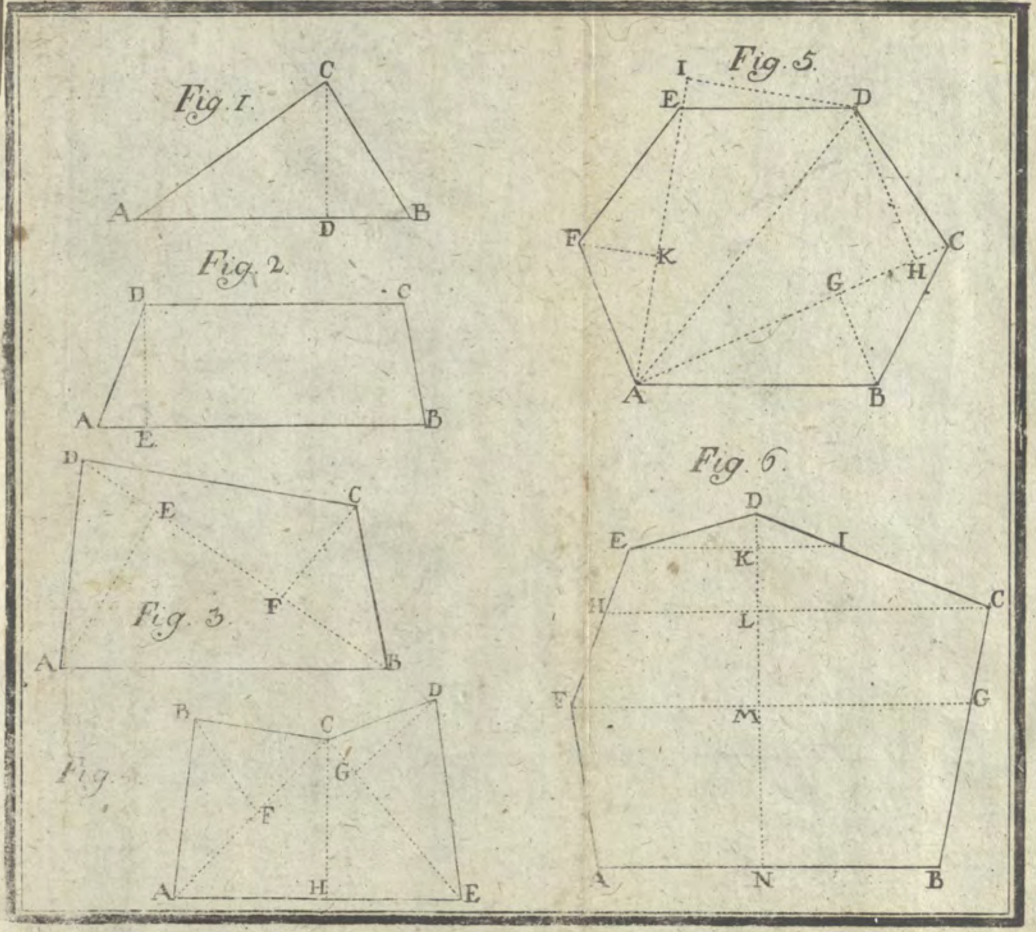
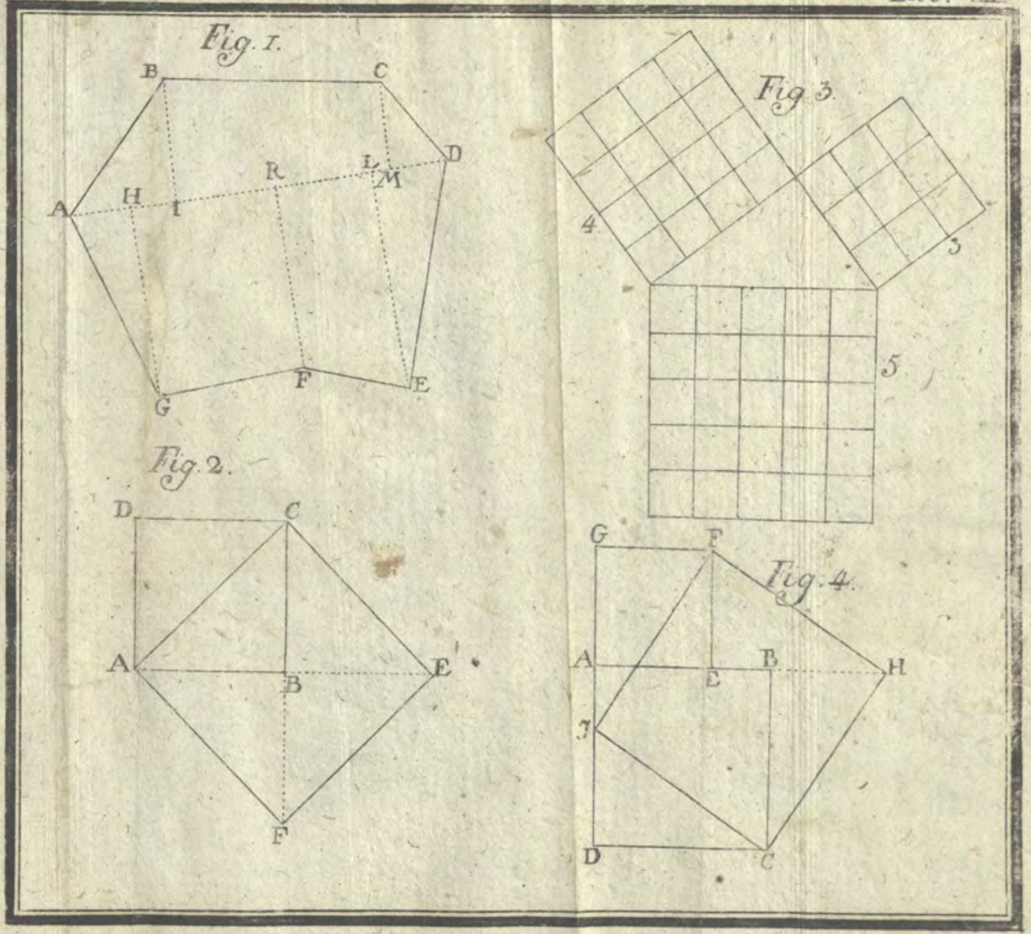


Fig. 1.
D E C F A B
Fig. 2
D C A B E
Fig. 3.
D E C F A B G
Fig. 4.
D G C H F E A I B
Fig. 5.
D C F A B E G H I
Fig. 6.
D C A E B

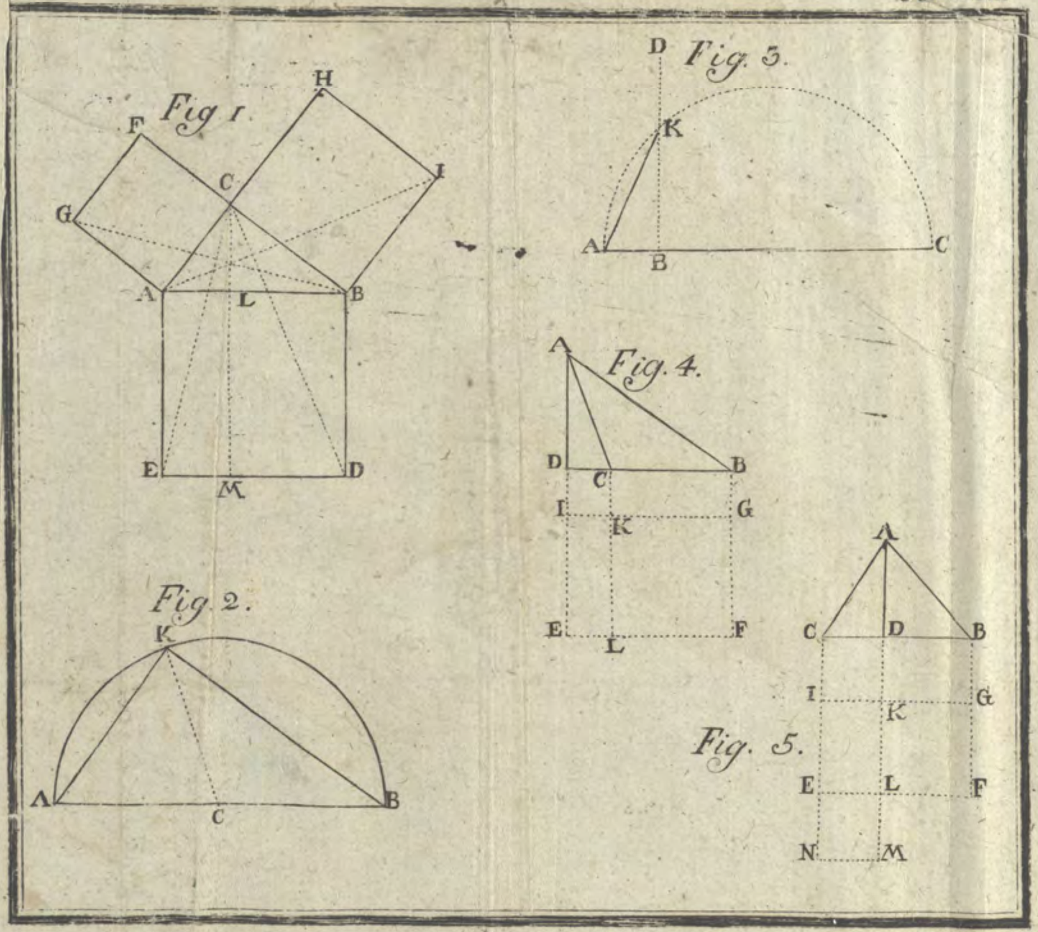
Tab. VII.



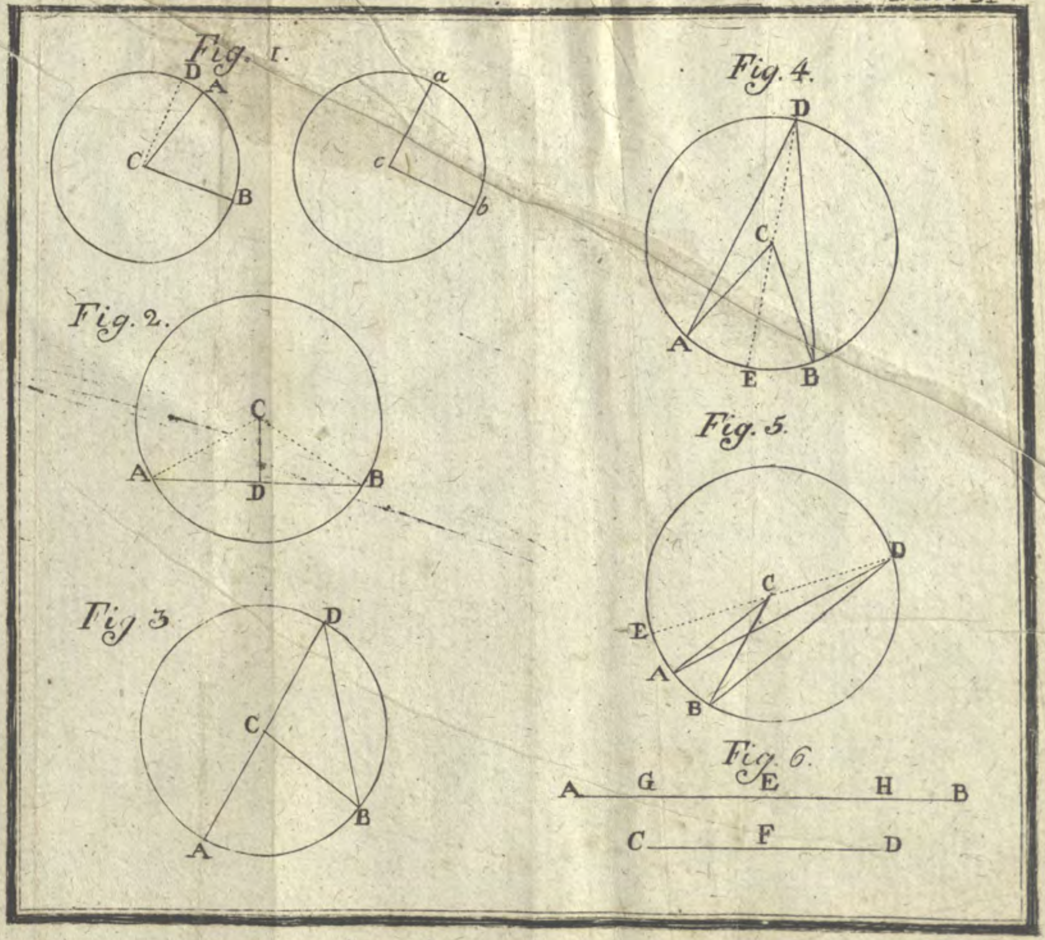
Tab. VIII.



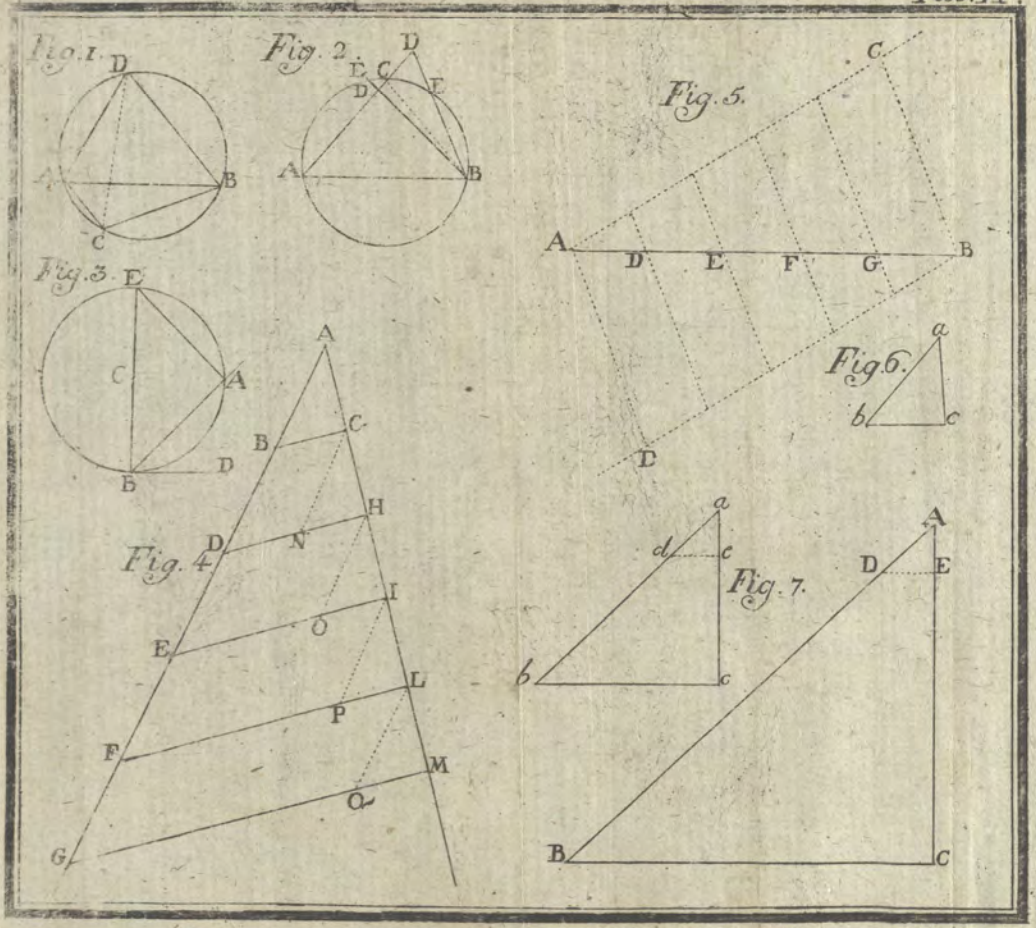
Tab. IX



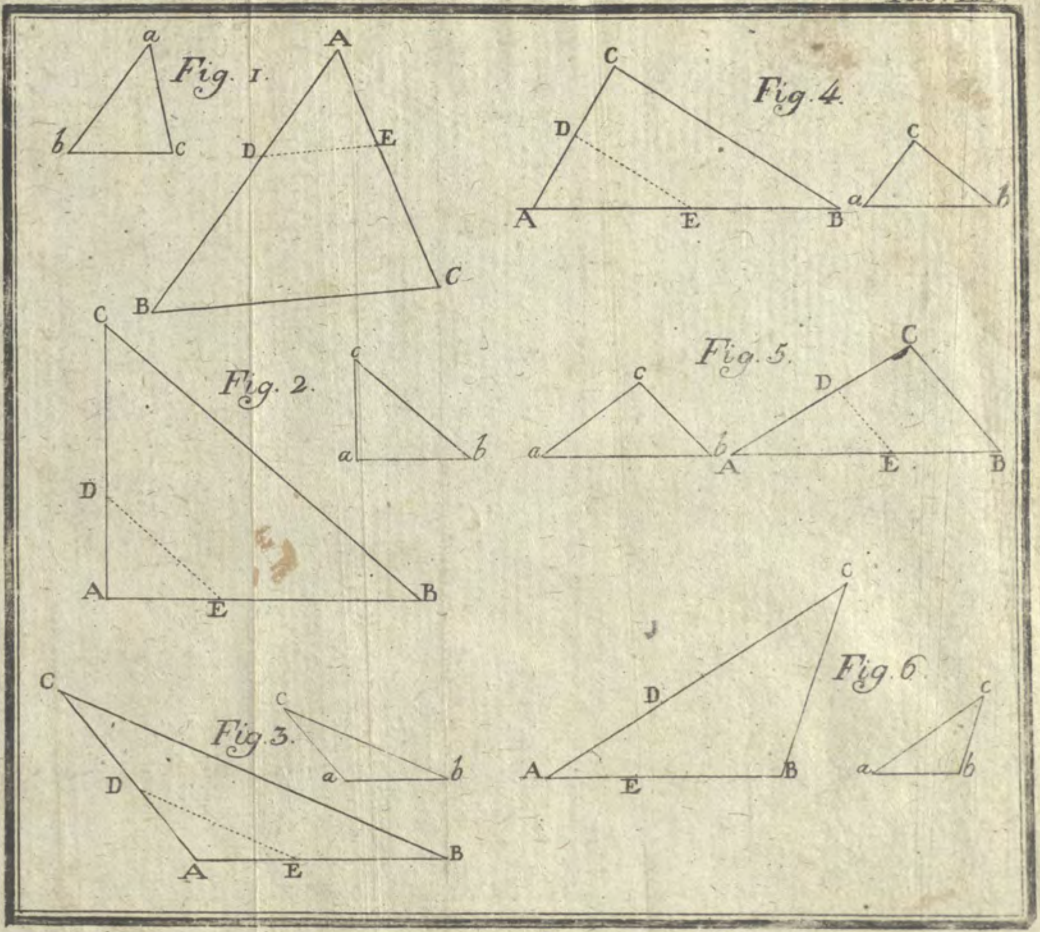
Tab. X



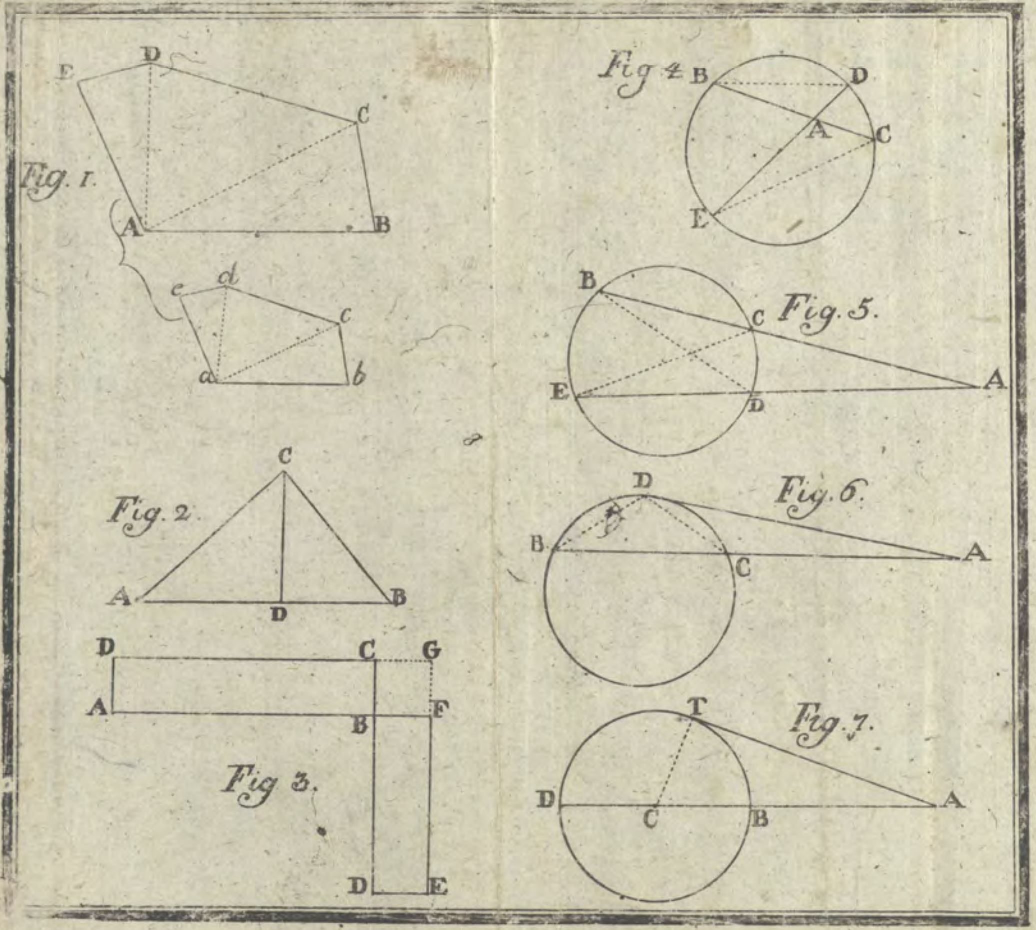
Tab. XI.



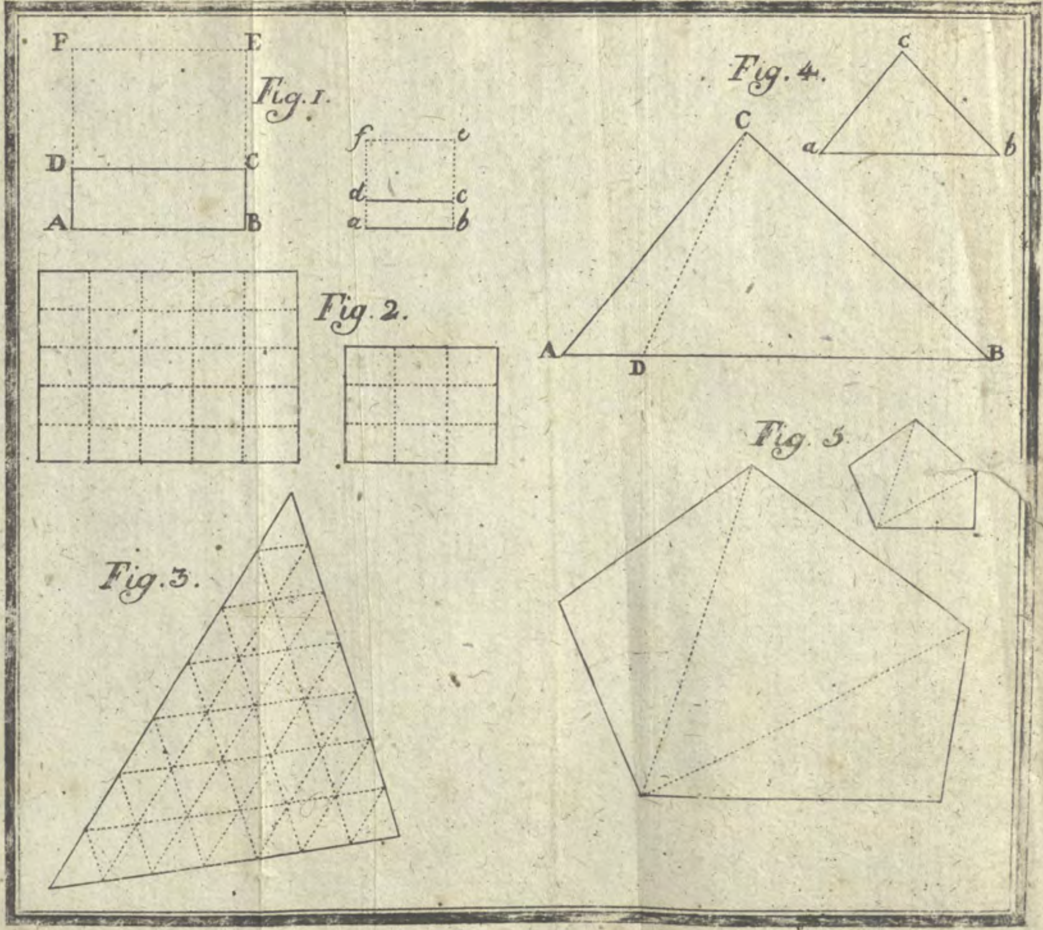
Tab. XII.



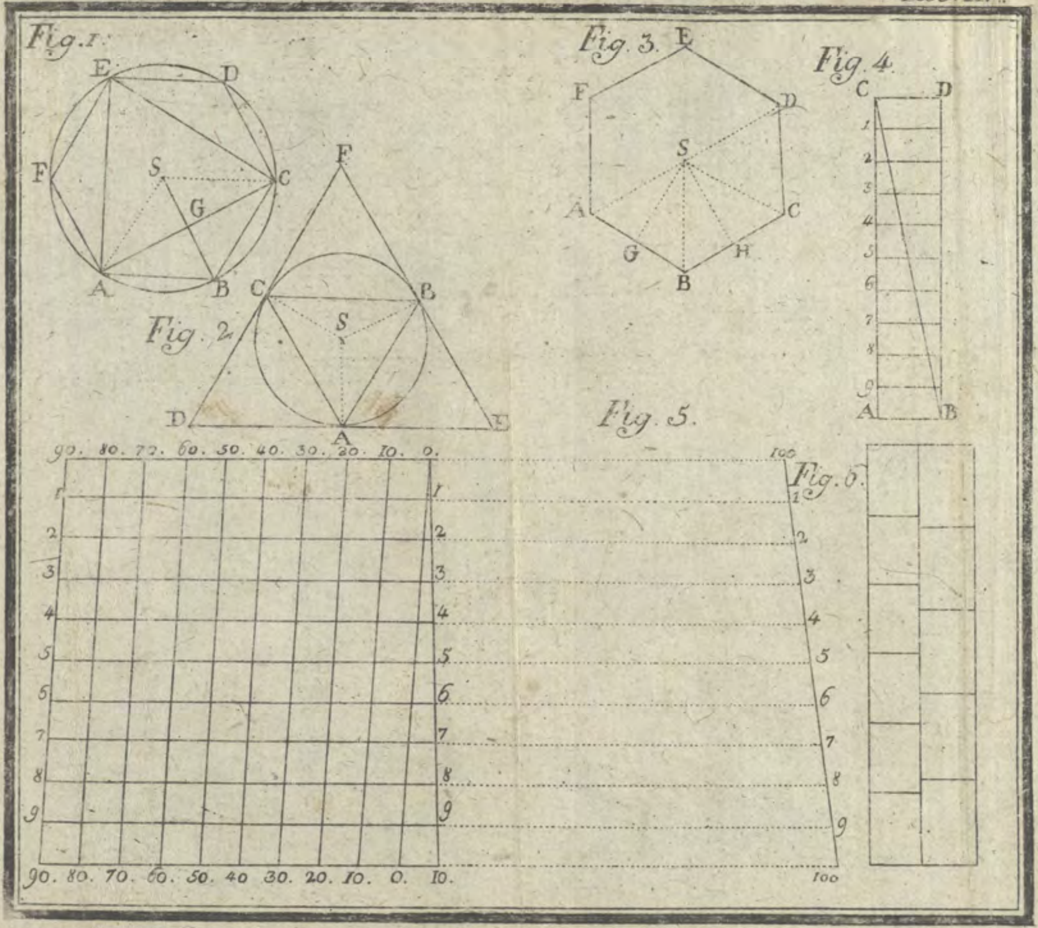
Tab. XIII



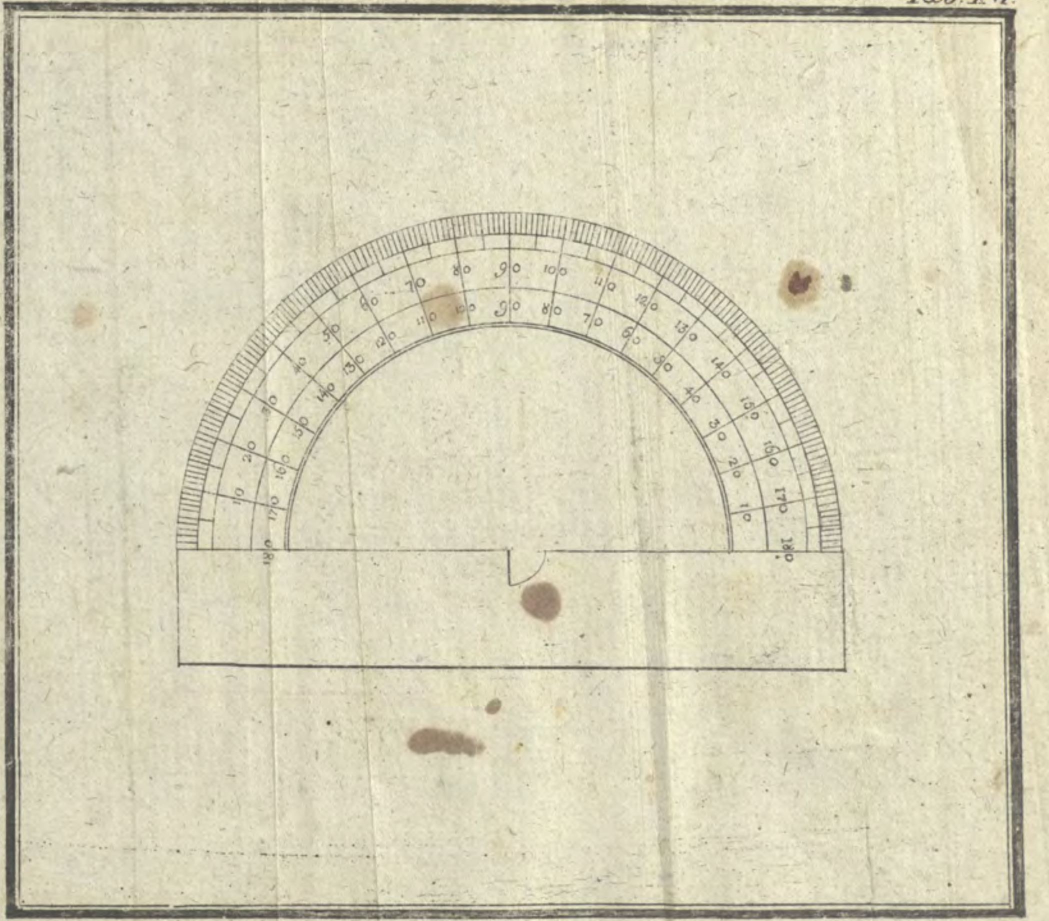
Tab. XIV



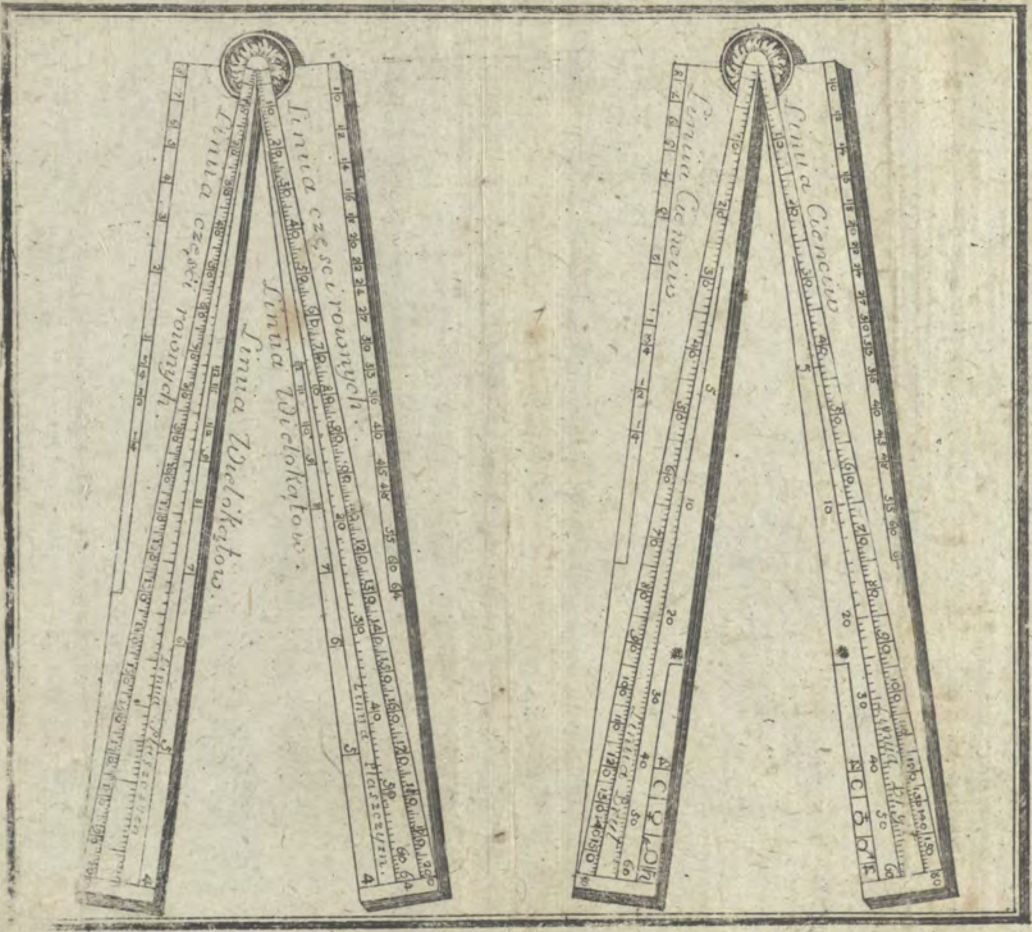
Tab. XV.



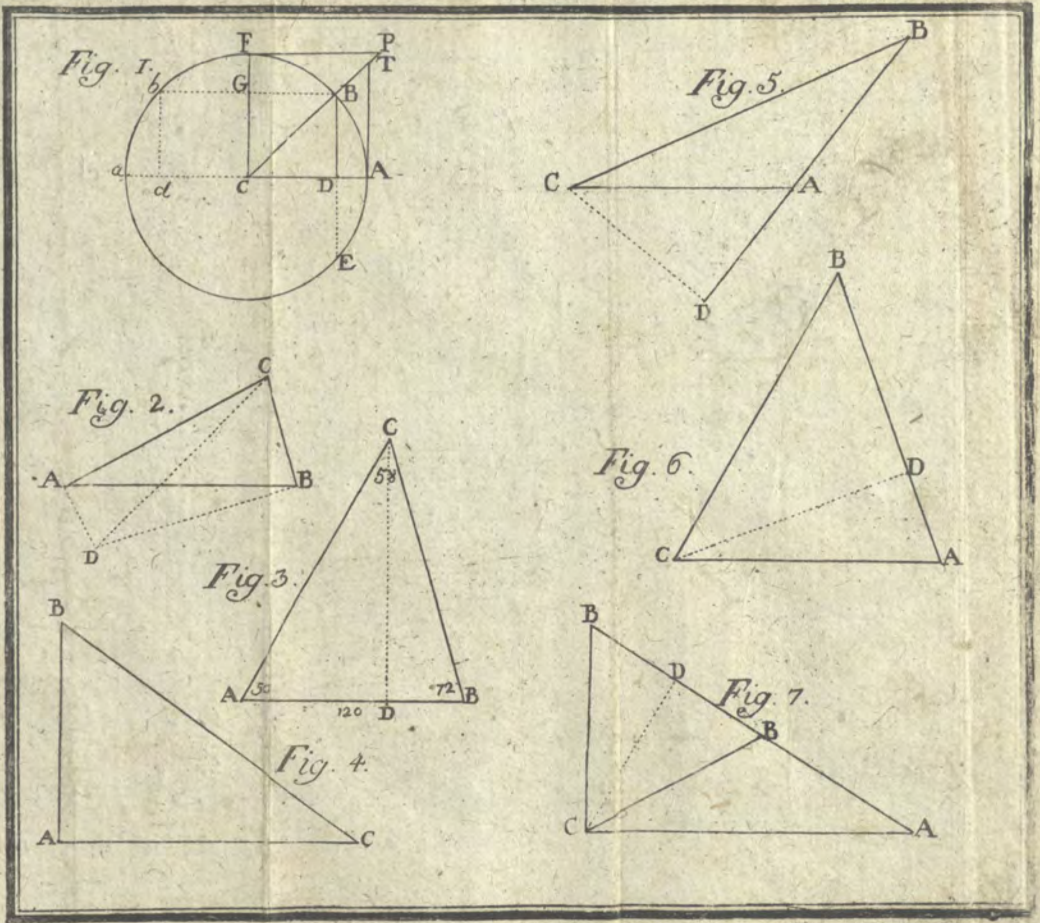
Tab. XVI.



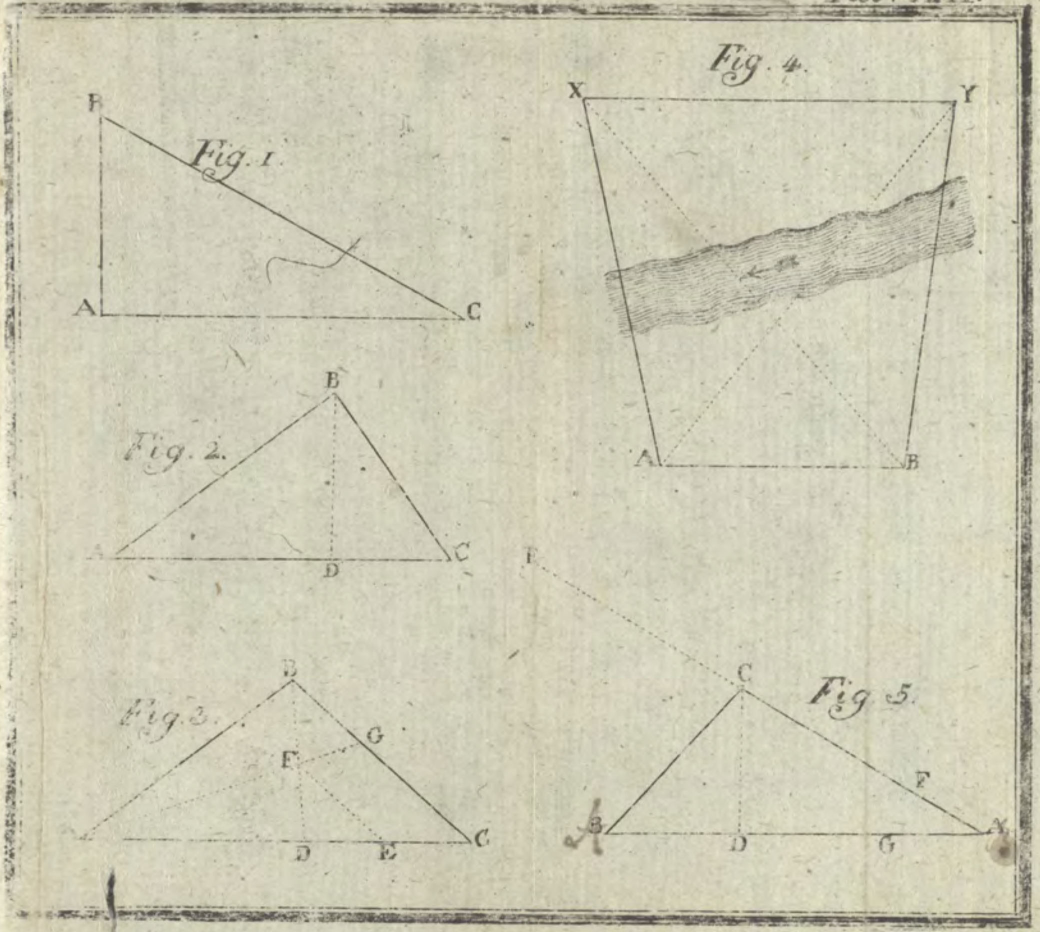
Tab. XVII



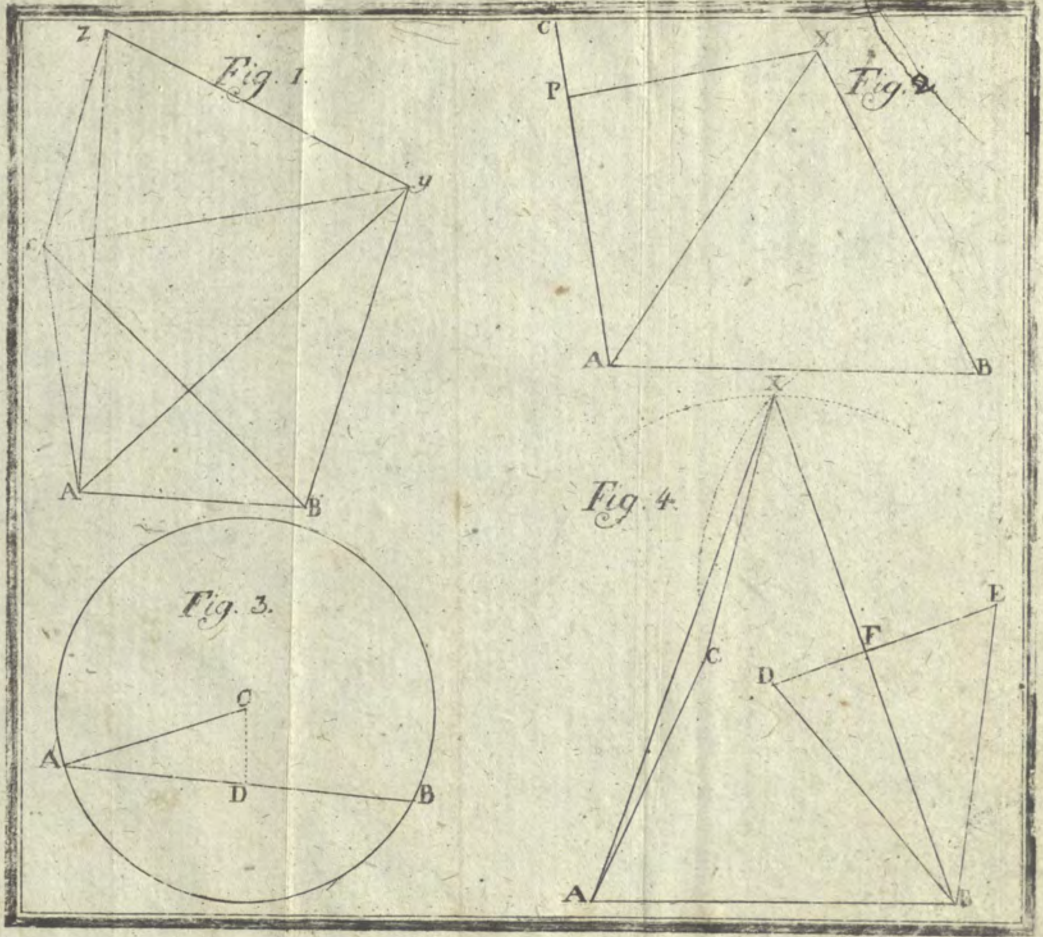
Tab. XVIII



Tab. XIX.

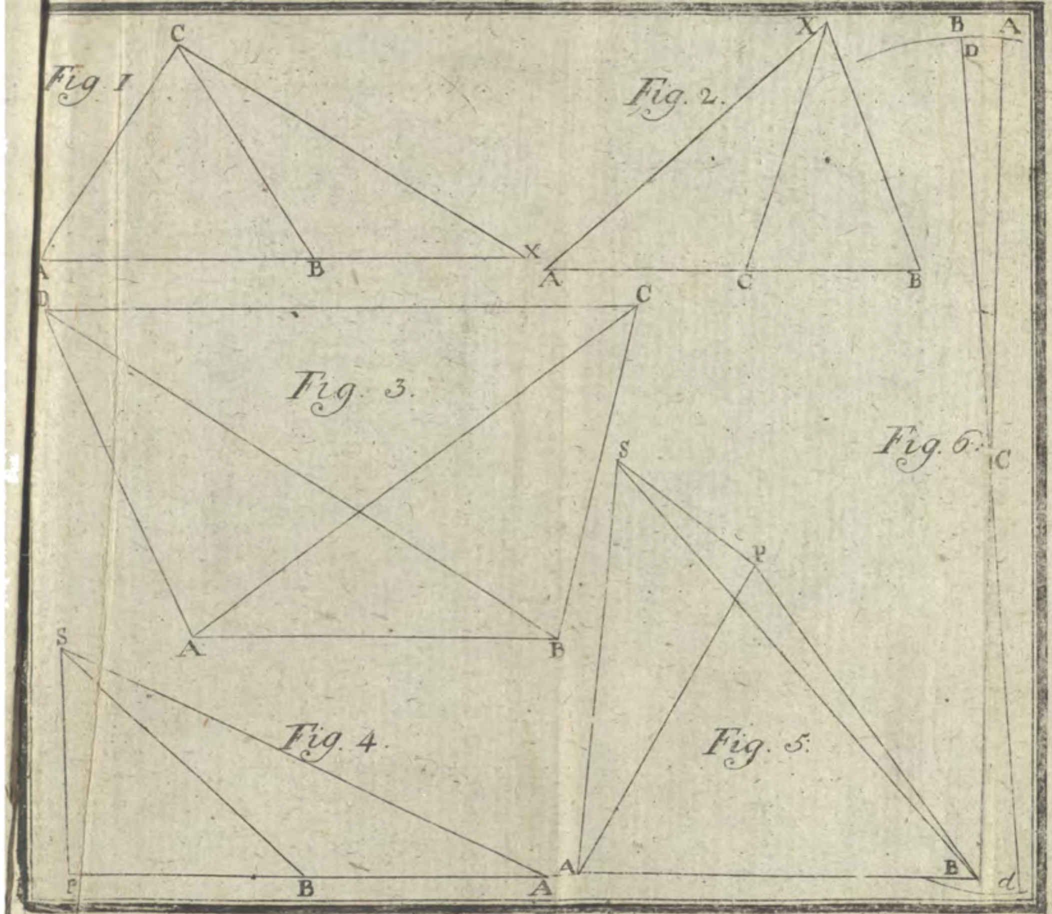


Tab. XX



9

Tab. XXI.



Tab. XXII.