

POLSKA  
AKADEMIA  
NAUK

PL ISSN 0012-5032

INSTYTUT GEOGRAFII  
I PRZESTRZENNEGO ZAGOSPODAROWANIA

---

DOKUMENTACJA GEOGRAFICZNA

KATARZYNA OSTASZEWSKA

ZASTOSOWANIE MODELI  
MATEMATYCZNYCH  
DO PRZEWIDYWANIA ZMIAN  
ROZMIESZCZENIA  
LUDNOŚCI POLSKI



ROK 1986

ZESZYT 1

---

WROCŁAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK · ŁÓDŹ  
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH  
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK

**WYKAZ ZESZYTÓW  
PRZEGLĄDU ZAGRANICZNEJ LITERATURY GEOGRAFICZNEJ  
za ostatnie lata**

**1983**

- 1 Geografia czasu, s. 88, zł 80, —
- 2 Teledetekcja w planowaniu regionalnym, s. 259, zł 80, —
- 3 Geografia przemysłu, s. 105, zł 80, —
- 4 Geografia polityczna, s. 178, zł 80, —

**1984**

- 1 Postępy geografii społecznej i ekonomicznej w krajach anglosaskich, s. 148, zł 120, —
- 2 Turystyka i rekreacja, s. 160, zł 120, —
- 3/4 Geografia a filozofia — wybrane zagadnienia metodologiczne, s. 167, zł 120, —

**ZASTOSOWANIE MODELI  
MATEMATYCZNYCH  
DO PRZEWIDYWANIA ZMIAN  
ROZMIESZCZENIA LUDNOŚCI POLSKI**

POLISH ACADEMY OF SCIENCES  
INSTITUTE OF GEOGRAPHY AND SPATIAL ORGANIZATION

---

KATARZYNA OSTASZEWSKA

THE APPLICATION  
OF MATHEMATICAL MODELS  
FOR PREDICTING CHANGES  
IN POPULATION DISTRIBUTION  
IN POLAND



YEAR 1986

FASC. 1

---

WROCLAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK · ŁÓDŹ  
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH  
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
<http://rcin.org.pl>

POLSKA  
AKADEMIA  
NAUK

---

INSTYTUT GEOGRAFII  
I PRZESTRZENNEGO ZAGOSPODAROWANIA

DOKUMENTACJA GEOGRAFICZNA

KATARZYNA OSTASZEWSKA

ZASTOSOWANIE MODELI  
MATEMATYCZNYCH  
DO PRZEWIDYWANIA ZMIAN  
ROZMIESZCZENIA  
LUDNOŚCI POLSKI



ROK 1986

ZESZYT 1

---

WROCŁAW · WARSZAWA · KRAKÓW · GDAŃSK · ŁÓDŹ  
ZAKŁAD NARODOWY IMIENIA OSSOLIŃSKICH  
WYDAWNICTWO POLSKIEJ AKADEMII NAUK

<http://rcin.org.pl>

## KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor Naczelny: Jerzy Grzeszczak  
Zastępca Redaktora Naczelnego: Zuzanna Siemek  
Członkowie: Maria Ciechocińska, Tadeusz Gerlach,  
Józef Skoczek, Władysława Stola  
Sekretarz: Maria Mozolewska

Adres Komitetu:

Instytut Geografii i Przestrzennego Zagospodarowania  
Polskiej Akademii Nauk  
ul. Krakowskie Przedmieście 30, 00-927 Warszawa

Redaktor Wydawnictwa Hanna Jurek  
Redaktor techniczny Ryszard Ulanecki

*Printed in Poland*

Zakład Narodowy im. Ossolińskich – Wydawnictwo, Wrocław 1986.  
Nakład: 400 egz. Objętość: ark. wyd. 4,80, ark. druk. 4,63, ark. A<sub>1</sub>-6.  
Papier druk. sat. kl. IV, 70 g, B-1. Oddano do składania 1985-10-04.  
Podpisano do druku 1986-03-04. Druk ukończono w marcu 1986.  
Wrocławska Drukarnia Naukowa, Zam. 3431/85. J-11 Cena zł 80.--

## SPIS TREŚCI

Przedmowa — <i>Zbyszko Chojnicki</i> . . . . .	7
Wprowadzenie . . . . .	9
Przedmiot i cel pracy . . . . .	9
Zakres pracy . . . . .	10
Metody badań . . . . .	11
Źródła danych statystycznych . . . . .	11
Zastosowanie modelu potencjału dochodu Carrothersa w prognozowaniu zmian w rozmieszczeniu ludności Polski . . . . .	13
Założenia teoretyczne i budowa modelu . . . . .	13
Dochód jako czynnik determinujący rozwój ludności . . . . .	17
Empiryczne zastosowanie modelu . . . . .	22
Model prognostyczny w ujęciu historycznym. Założenia . . . . .	22
Weryfikacja modelu . . . . .	29
Zastosowanie modelu łańcuchów Markowa w prognozowaniu zmian w rozmieszczeniu ludności Polski . . . . .	42
Założenia teoretyczne i budowa modelu ergodycznego . . . . .	42
Zastosowanie modelu w badaniach geograficznych ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień ludnościowych. . . . .	46
Empiryczne zastosowanie modelu . . . . .	48
Model prognostyczny w ujęciu historycznym. Założenia . . . . .	48
Weryfikacja modelu . . . . .	51
Próba modyfikacji ergodycznego modelu łańcuchów Markowa . . . . .	57
Zastosowanie zmiennej macierzy prawdopodobieństw przejść . . . . .	57
Zastosowanie zmiennego wektora prawdopodobieństw . . . . .	58
Analiza porównawcza wyników prognoz . . . . .	60
Podsumowanie . . . . .	65
Literatura . . . . .	68
The application of mathematical models for predicting changes in population distribution in Poland — summary . . . . .	71
Применение математических моделей к предусматриванию изменений размещения жителей Польши — резюме . . . . .	73





## PRZEDMOWA

Praca ma charakter metodologiczny i dotyczy problematyki zastosowania metod matematycznych do prognozowania zmian w strukturze przestrzennej ludności.

Praca składa się z (I) wprowadzenia, trzech zasadniczych części merytorycznych: (II) zastosowanie modelu potencjału dochodu Carrothersa w prognozowaniu zmian w rozmieszczeniu ludności Polski, (III) zastosowanie modelu łańcuchów Markowa w prognozowaniu zmian w rozmieszczeniu ludności Polski i (IV) analiza porównawcza wyników tych prognoz oraz (V) z podsumowania.

Zasadniczą treścią pracy jest próba dokonania predykcji zmian rozmieszczenia ludności w ujęciu wojewódzkim na podstawie dwóch modeli: łańcuchów Markowa (1966—1973) i potencjału dochodu Carrothersa (1965—1970) oraz ich sprawdzenia wraz z analizą reszt. Ponieważ predykcja ta ma charakter postgnozy, tj. takiego przewidywania, w którym wynik jest znany na podstawie danych opisowych, dlatego też główna wartość pracy polega na ich testowaniu i teoretycznej ocenie wartości poznawczej i prognostycznej modeli.

Praca stanowi oryginalny wkład do rozwoju badań przestrzenno-ekonomicznych. Ze względu na swoje walory metodologiczne będzie zapewne stanowić podstawę oraz inspirować dalsze badania w tym zakresie.

*Zbyszko Chojnicki*



## WPROWADZENIE

Przewidywanie zmian w rozmieszczeniu ludności jest problemem, który dotychczas nie znalazł zadowalającego rozwiązania. Postęp w doskonaleniu metodologii opracowywania tych prognoz w Polsce jest powolny. Wynika to między innymi ze słabo rozwiniętej teorii, która nie dostarcza odpowiednich podstaw do budowy modeli, a także z trudności w wykorzystaniu istniejących modeli matematycznych, konstruowanych w ramach innych dziedzin nauki i w krajach o odmiennych systemach społeczno-politycznych. Ich wykorzystanie, jako jednej z metod sporządzania prognoz, z jednej strony stwarza możliwość przełamania trudności związanych ze złożonością badanych problemów i znacznego przyspieszenia prac prognostycznych, z drugiej zaś strony niesie z sobą niebezpieczeństwo nadmiernych uproszczeń lub nawet zafalszowań, wynikających z bezkrytycznego zastosowania modeli powstałych w innych warunkach społeczno-ustrojowych.

Adaptacja modeli matematycznych powinna być poprzedzona ich testowaniem, obejmującym szczegółową analizę założeń będących podstawą konstrukcji modeli, ich budowy i warunków konkretyzacji oraz zastosowania, a także krytyczną ocenę wartości poznawczych i prognostycznych modeli. Niniejsza praca stanowi próbę testowania dwóch modeli matematycznych zbudowanych na podstawie koncepcji potencjału oraz teorii łańcuchów Markowa i zastosowanych do przewidywania zmian w rozmieszczeniu ludności.

## PRZEDMIOT I CEL PRACY

Przedmiotem pracy są: model potencjału dochodu Carrothersa i ergodyczny model łańcuchów Markowa, badane pod kątem możliwości oraz zasadności ich stosowania do prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności Polski.

O wyborze modeli zdecydowały takie ich właściwości, jak możliwość przestrzennego i operacyjnego zastosowania z uwzględnieniem zróżnicowania mechanizmu podejmowania decyzji. Modele te umożliwiają badanie złożonych całości strukturalnych poprzez analizę wzajemnych powiązań między wszystkimi elementami układu. Dzięki stosunkowo prostym zasadom i nieskomplikowanej procedurze obliczeniowej, wymagającej niewielkiej liczby informacji statystycznych, modele te nie pozostają wyłącznie modelami teoretycznymi, ale mogą być zastosowane w badaniach empirycznych.

Dobór — odmiennych w swym charakterze modeli — był podyktowany dążeniem do ujęcia zmian w rozmieszczeniu ludności od strony zróżnicowania mechanizmu podejmowania decyzji. Decyzje prokreacyjne i migracyjne można bowiem traktować jako zmienne deterministyczne lub probabilistyczne. Podejmowanie decyzji wynikających z przesłanek społeczno-ekonomicznych prezentuje model potencjału dochodu Carrothersa, określający związek między badanym zjawiskiem a wybranymi zmiennymi. Natomiast model łańcuchów Markowa opisuje te decyzje w kategoriach prawdopodobieństwa: badane relacje odwzorowują zasadniczo zachowanie się jednostki — w przeciwieństwie do modelu potencjału dochodu Carrothersa, w którym analizowane są zachowania wielkości zagregowanych.

Zasadniczym celem pracy jest testowanie modelu potencjału dochodu Carrothersa i ergodycznego modelu łańcuchów Markowa przez ich zastosowanie do przewidywania zmian w rozmieszczeniu ludności Polski.

#### ZAKRES PRACY

Zakres przestrzenny pracy obejmuje Polskę w podziale na 22 regiony, w których skład wchodzi 17 dawnych województw i 5 miast wydzielonych. Pojęcie regionu jest tu użyte w sensie bardzo ogólnym i traktowane jako synonim jednostki przestrzenno-administracyjnej.

Realizacja celu niniejszej pracy wymagała ujęcia retrospektywnego, ponieważ ujęcie takie umożliwiło pełne testowanie modeli. Tylko dla prognozy wygasłej można dokładnie określić jej zgodność z rzeczywistym przebiegiem zjawiska w okresie prognozowania<sup>1</sup>. Nowy podział administracyjny kraju i związany z nim brak danych empirycznych w formie długich szeregów czasowych spowodowały, że zakres czasowy pracy ograniczono zasadniczo do lat 1965—1970. Zakres ten jest nieco zróżnicowany w poszczególnych analizach i zależy od informacji statystycznych, jakimi dysponowano przy formułowaniu obu prognoz.

Dla prognozy według modelu potencjału dochodu Carrothersa zakres czasowy ograniczono z konieczności do lat 1965—1970, ponieważ tylko dla tego okresu można było uzyskać niezbędne dane statystyczne. Predykcją opracowaną na podstawie modelu łańcuchów Markowa objęto: w badaniu horyzontu prognozy — lata 1966—1973<sup>2</sup>, w analizie porównawczej wyników prognoz oszacowanych na podstawie modeli Carrothersa i Markowa — lata 1965—1970. Niektóre dodatkowe badania empiryczne dotyczące zastosowania modelu łańcuchów Markowa, oparte na analizie długich szeregów czasowych, wymagały uwzględnienia danych z lat 1953—1973.

<sup>1</sup> Prognoza wygasła to prognoza dokonana w chwili  $t_0$ , dotycząca dalszego przebiegu prognozowanego zjawiska w czasie, jeśli znany jest dalszy rzeczywisty przebieg zjawiska w okresie, którego prognoza dotyczy (Waszkiewicz 1976, s. 37). W niniejszej pracy używa się zamiennie określeń prognoza wygasła, prognoza w ujęciu historycznym.

<sup>2</sup> Informacje dotyczące międzyregionalnych przepływów ludności w 1966 r. stanowią bardziej wiarygodne źródło danych. Do 1965 r. włącznie materiały te opracowywano metodą reprezentacyjną.

Wykorzystanie poprzedniego podziału terytorialnego kraju na 22 jednostki przestrzenno-administracyjne miało także wpływ na zwiększenie efektywności ekonomicznej zastosowanych metod. Podjęcie próby zastosowania obu modeli do prognozowania zmian w zaludnieniu poszczególnych 49 regionów, według nowego podziału administracyjnego, wymagałoby wielokrotnie większej liczby skomplikowanych obliczeń.

## METODY BADAŃ

Metody zastosowane w niniejszej pracy są zróżnicowane w zależności od przedmiotu badań, jakim są omawiane modele, jak też od fazy dociekań w ramach poszczególnych modeli.

W części pracy dotyczącej modelu potencjału dochodu Carrothersa, poza zasadniczą procedurą obliczeniową wynikającą z modelu, zastosowano różne metody dotyczące: 1) wyboru zmiennych modelu, 2) estymacji parametrów, 3) weryfikacji modelu, 4) badania reszt z modelu. Wyboru zmiennej niezależnej, determinującej wzrost zaludnienia, dokonano na podstawie wyników analizy korelacji. Przy oszacowaniu parametrów modelu były pomocne: 1) metoda centrograficzna — służąca do wyznaczenia teoretycznych centrów koncentracji potencjału dochodu dla jednoimiennych jednostek przestrzennych, 2) analiza kartograficzna rozkładów przestrzennych potencjału dochodu przy różnych miarach odległości — niezbędna przy pomiarze samopotencjału, 3) metoda najmniejszych kwadratów — wykorzystana do oszacowania zasadniczego parametru modelu. W części weryfikacyjnej modelu zastosowano testy sprawdzające wiarygodność hipotez leżących u podstaw budowy modelu oraz test istotności oceniający trafność prognoz. Badanie reszt z modelu przeprowadzono metodą analizy współczynników korelacji i determinacji.

W drugiej części zastosowań empirycznych procedurę obliczeniową modelu łańcuchów Markowa uzupełniają: 1) analiza zmienności prawdopodobieństw przepływów — której wyniki były niezbędne do ustalenia warunków wyjściowych prognozy, 2) test istotności chi kwadrat — służący ocenie trafności przewidywań, 3) metoda analizy korelacji — wykorzystana w badaniu reszt z modelu. W tej części pracy zastosowano także metodę ekstrapolacji trendu, za pomocą której dokonano modyfikacji modelu Markowa przez wprowadzenie zmiennej macierzy prawdopodobieństw przejść i zmiennego wektora prawdopodobieństw rozkładu.

## ŹRÓDŁA DANYCH STATYSTYCZNYCH

Podstawowym źródłem danych statystycznych były publikowane i niepublikowane materiały Głównego Urzędu Statystycznego, dotyczące liczby ludności i jej przepływów pomiędzy regionami, a także wielkości dochodu narodowego oraz jego składowych w poszczególnych jednostkach przestrzenno-administracyjnych.

Dane dotyczące wielkości zaludnienia regionów w latach 1953—1955, 1960, 1965, 1970—1973 pochodzą z roczników statystycznych i demograficznych. Natomiast liczby ludności dla brakujących lat badanego dwudziestolecia, tj. 1956—

1959, 1961—1964 i 1966—1969, uzyskano z zestawień roboczych pt. *Szacunki stanu ludności w liczbach pełnych wg stanu na dzień 31 XII* w Departamencie Statystyki Ludności i Badań Demograficznych GUS. Informacje te zostały opracowane w GUS na podstawie materiałów nadesłanych przez Wojewódzkie Urzędy Statystyczne. Niedoskonałość statystycznych szacunków i konieczność posługiwania się dwoma źródłami danych statystycznych dotyczących stanu zaludnienia badanych regionów sprawiają, że analizowane szeregi czasowe danych nie są jednolite. Charakteryzują je gwałtowne wzrosty lub spadki liczby ludności niezgodne z dotychczasowymi tendencjami. Zjawisko to występuje na styku danych pochodzących z różnych źródeł i utrudnia ocenę oraz przewidywanie ilościowych zmian w zaludnieniu poszczególnych regionów.

Materiały źródłowe dotyczące międzywojewódzkich migracji ludności w latach 1961—1973 uzyskano również w Departamencie Statystyki Ludności i Badań Demograficznych GUS. Są to, z wyjątkiem zestawień dla lat 1964—1966 i 1972, materiały niepublikowane i do 1965 r. opracowywane metodą reprezentacyjną. Informacje te — zapisane w układzie macierzowym — dotyczą ludności zmieniającej miejsce zamieszkania według województw obecnego i poprzedniego miejsca zamieszkania w kolejnych latach. Ocena rozmiarów przemieszczeń wewnętrznych ludności w ujęciu przestrzennym w latach 1961—1973, opracowanych według różnych metod, ukazuje tylko przybliżony kierunek zmian, co utrudnia wnioskowanie — a przede wszystkim — predykcje oparte na ekstrapolacji trendu. Z macierzy przepływów ludności zaczerpnięto także dane statystyczne o wielkości odpływu ludności z poszczególnych regionów w analizowanym okresie 1961—1973, niezbędne do obliczenia prawdopodobieństw pozostania w regionie.

Zasadnicze różnice w jakości informacji i metodach ich uzyskania istniejące między materiałami spisowymi a danymi szacunkowymi oraz między badaniami reprezentacyjnymi a ewidencją ruchu ludności utrudniają porównywalność i wnioskowanie oraz zmniejszają trafność prognoz. Analizę długich szeregów czasowych ogranicza także brak ewidencji i wyodrębnienia zachodzących zmian administracyjnych.

Dane statystyczne dotyczące dochodu narodowego Polski według województw w latach 1965 i 1970 zaczerpnięto z publikacji GUS, pt. *Dochód narodowy Polski według województw w 1970 r. (szacunek)*, opracowanej przez Zakład Badań Statystyczno-Ekonomicznych i Departament Statystycznych Bilansów Gospodarki Narodowej, z. 51, Warszawa 1972 r. Opracowanie to ma charakter szacunku i określa tylko zasadnicze proporcje. Elementy składowe dochodu przeliczono na ceny porównywalne w sposób uproszczony, a podane przeliczenia na 1 mieszkańca są umowne.

Wszystkie pozostałe informacje statystyczne, niezbędne przy realizacji założonego programu badań, a dotyczące przyrostu naturalnego, salda migracji i odległości pomiędzy centrami regionów otrzymano bądź z gotowych danych, bądź też przeliczono na podstawie następujących opracowań: *Roczniki Demograficzne 1945—1966, 1967—1968, 1971, Rocznik Statystyczny 1973, Statystyka Polski nr 78, Ruch naturalny i wędrórkowy w 1969 r., Urzędowy Rozkład Jazdy PKP 1965 r.*

ZASTOSOWANIE MODELU POTENCJAŁU  
DOCHODU CARROTHERSA W PROGNOZOWANIU ZMIAN  
W ROZMIESZCZENIU LUDNOŚCI POLSKI

ZAŁOŻENIA TEORETYCZNE I BUDOWA MODELU

Model potencjału dochodu Carrothersa jest wyprowadzony z modelu potencjału ludności sformułowanego przez J. Q. Stewarta (1948)<sup>3</sup>. Stewart wzorując się na fizyce newtonowskiej przyjmuje, że wzajemne oddziaływanie jakie zachodzi w przestrzeni pomiędzy zbiorowościami ludzkimi odpowiada relacjom wzajemnego oddziaływania „mas fizycznych”. W ujęciu tym zbiorowości ludzkie to „masy”, a relacje to zależności analogiczne do tych, które występują w prawie grawitacji Newtona. Zgodnie z tym prawem każda „masa” reprezentuje pewien potencjał oddziaływający na nią samą i na inne masy. Całkowity zatem potencjał w danym regionie to całkowite wzajemne oddziaływanie pomiędzy danym regionem a wszystkimi innymi regionami, łącznie z nim samym<sup>4</sup>. Wielkość tego potencjału jest pewną funkcją masy poszczególnych regionów rozpatrywanego układu oraz funkcją odległości między danym regionem a pozostałymi regionami. Ogólną postać modelu potencjału można więc przedstawić jako:

$$V_i = k \sum_{j=1}^n \frac{f(M_j)}{g(d_{ij})}, \quad (1)$$

gdzie:  $M_j$  — masa regionu  $j$ ,  
 $d_{ij}$  — odległość regionu  $i$  od regionu  $j$   
 $k$  — stała.

Wychodząc ze sformułowania pojęcia potencjału ludności Stewarta, W. Isard i G. Freutel (1954) zastosowali dochód jako miarę masy i określili potencjał dochodu wywołany w danym regionie przez wszystkie pozostałe regiony rozpatrywanego układu jako:

$$V_i = G \sum_{j=1}^n \frac{Y_j}{d_{ij}^b}, \quad (2)$$

<sup>3</sup> Modele potencjału zostały obszernie omówione w pracy Z. Chojnickiego (1966).

<sup>4</sup> Region pojmowany jest tutaj jako pewna masa.

gdzie:  $Y_j$  — dochód regionu  $j$ ,  
 $G$  — stała,  
 $d_{ij}$  — odległość regionu  $i$  od regionu  $j$ ,  
 $b$  — wykładnik potęgowej odległości.

Pojęcie potencjału dochodu zastosował w swym modelu również G. A. P. Carrothers (1958). Model ten jest przeznaczony do przewidywania całkowitej liczby ludności obszarów „otwartych”, tj. obszarów mniejszych od kraju i opiera się na przesłance, że wzrost zaludnienia danego regionu jest pewną funkcją wzrostu potencjału dochodu tego obszaru. Potencjał dochodu jest miarą, która obejmuje różne czynniki (biologiczne, społeczne i ekonomiczne) determinujące wzrost lub spadek zaludnienia. Miara ta służy do wyjaśnienia międzyregionalnych różnic we wzroście liczby ludności. Podstawowa hipoteza przyjęta przez Carrothersa zakłada, że przyrost ludności w regionie, będący przejawem wzajemnego oddziaływania pomiędzy regionami, jest wprost proporcjonalny do rozmiarów badanych regionów i odwrotnie proporcjonalny do odległości pomiędzy nimi. Wielkość badanych regionów jest miarą masy w tym modelu i wyrażona jest za pomocą liczby ludności stanowiącej biologiczny czynnik determinujący wzrost zaludnienia. Społeczno-ekonomiczne determinanty wzrostu zaludnienia są uwzględnione przez ważenie liczby ludności przez dochód narodowy, przeliczony na 1 mieszkańca. W ten sposób liczba ludności przyjęta pierwotnie jako miernik masy została przekształcona w wielkość dochodu regionalnego. Drugim elementem miary potencjału dochodu jest odległość, a jej wykładnik potęgowej jest wskaźnikiem trudności występujących we wzajemnym oddziaływaniu pomiędzy regionami. Carrothers zastosował trzy warianty funkcji odległości komunikacyjnej pomiędzy centrami regionów ( $d, d^2, \sqrt{d}$ ) i wyprowadził odpowiednio trzy wzory na obliczenie potencjału dochodu każdego regionu.

Każdy z wariantów miar potencjału dochodu zawiera pozycję „samopotencjału”, który jest miarą możliwości wzajemnego oddziaływania wytworzonego wewnątrz rozważanego regionu przez jego własną ludność. Tak skonstruowana miara potencjału dochodu jest podstawowym elementem modelu prognostycznego Carrothersa. Model ten opiera się na założeniu, że liczba ludności danego regionu  $i$  w czasie przewidywanym  $t+\theta$  składa się z:

- 1) liczby ludności regionu na początku przewidywanego okresu w czasie  $t$ ;
- 2) wzrostu liczby ludności regionu na poziomie wzrostu liczby ludności kraju;
- 3) wzrostu lub spadku liczby ludności  $i$  w okresie  $\theta$ , jako odpowiednika zmiany pozycji międzyregionalnej regionu  $i$  ze względu na czynniki determinujące wzrost ludności (mierzone zmianą potencjału dochodu regionu  $i$  w czasie  $\theta$ ).

Zależność tę można przedstawić w sposób następujący:

$${}^{t+\theta}P_i = f({}^tP_i, {}^tP, {}^{t+\theta}P; {}^tY_1, {}^tY_2, \dots, {}^tY_n; {}^tY, {}^{t+\theta}Y_1, {}^{t+\theta}Y_2, \dots, {}^{t+\theta}Y_n, {}^{t+\theta}Y; d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}), \quad (3)$$

gdzie:  ${}^tP_i$  — ludność regionu  $i$ , w chwili  $t$ ,  
 ${}^tP$  — ludność kraju, w chwili  $t$ ,  
 ${}^{t+\theta}P$  — ludność kraju, w chwili  $t+\theta$ ,



- ${}^t Y_1, {}^t Y_2, {}^t Y_n$  — wielkość dochodu każdego z  $n$  regionów w chwili  $t$ ,  
 ${}^{t+\theta} Y_1, {}^{t+\theta} Y_2, {}^{t+\theta} Y_n$  — wielkość dochodu każdego z  $n$  regionów w chwili  $t+\theta$ ,  
 ${}^t Y$  — wielkość dochodu kraju w chwili  $t$ ,  
 ${}^{t+\theta} Y$  — wielkość dochodu kraju w chwili  $t+\theta$ ,  
 $d_{i1}, d_{i2}, d_{in}$  — odległość pomiędzy regionem  $i$  a każdym innym regionem,  
 $t$  — data rozpoczynająca okres przewidywań,  
 $\theta$  — okres przewidywań,  
 $t+\theta$  — data zamykająca okres przewidywań.

Powyższe założenie stało się podstawą sformułowania modelu prognostycznego o postaci:

$${}^{t+\theta} F_i = {}^0 \lambda \cdot {}^t P_i + {}^0 C \cdot {}^0 Z_i \cdot {}^t P_i, \quad (4)$$

gdzie:  ${}^{t+\theta} F_i$  — przewidywana liczba ludności regionu  $i$  w czasie  $t+\theta$ ,

${}^0 \lambda$  — stopa wzrostu liczby ludności kraju w okresie  $\theta$ ,

${}^0 \rho$  — stopa wzrostu dochodu narodowego w okresie  $\theta$ ,

${}^0 Z_i$  — zmodyfikowany względny czynnik potencjału dochodu w okresie  $\theta$ ,

${}^0 C$  — współczynnik wyjaśniający zmienne egzogeniczne wpływające na wzrost ludności w okresie  $\theta$ ,

${}^0 X_i$  — czynnik wzrostu międzyregionalnego w okresie  $\theta$ ,

przy czym:

$${}^0 \lambda = \frac{{}^{t+\theta} P}{{}^t P}, \quad (5a)$$

$${}^0 Z_i = \frac{{}^{t+\theta} V_i}{{}^0 \rho \cdot {}^t V_i} - 1, \quad \text{gdzie } {}^0 \rho = \frac{{}^{t+\theta} Y}{{}^t Y}, \quad (5b)$$

$${}^0 C_i = \frac{{}^0 X_i}{{}^0 Z_i \cdot {}^t P_i}, \quad \text{gdzie } {}^0 X_i = {}^{t+\theta} P_i - {}^0 \lambda \cdot {}^t P_i. \quad (5c)$$

Model ten składa się z dwóch części, reprezentujących dwa zespoły sił działających na wzrost zaludnienia poszczególnych regionów. Jeden z tych zespołów obejmuje siły wywołujące rozwój ludnościowy regionu zgodny z ogólnokrajowym tempem wzrostu zaludnienia. Dotyczy to pierwszej części modelu ( ${}^0 \lambda \cdot {}^t P_i$ ). Zgodnie z tym zapisem teoretyczna liczba ludności ( ${}^{t+\theta} P_i$ ) regionu  $i$ , pod koniec okresu przewidywań  $t+\theta$ , będzie równa liczbie ludności ( ${}^t P_i$ ) regionu  $i$  w momencie wyjściowym prognozy, pomnożonej przez stopę wzrostu liczby ludności kraju ( ${}^0 \lambda$ ) w okresie  $\theta$ :

$${}^{t+\theta} P_i = {}^0 \lambda \cdot {}^t P_i, \quad (6)$$

gdzie  ${}^{t+\theta} P_i$  zastępuje  ${}^{t+\theta} F_i$ .

Jeśli wzrost ludnościowy tego regionu będzie wywołany tylko działaniem sił określonych powyżej, to czynnik wzrostu międzyregionalnego ( ${}^0 X_i$ ) będący różnicą pomiędzy rzeczywistą a teoretyczną wielkością zaludnienia, obliczoną dla jakiegoś okresu minionego, będzie równy zeru, tj.:

$${}^{t+\theta} P_i - {}^0 \lambda \cdot {}^t P_i = {}^0 X_i = 0. \quad (7)$$

Jakakolwiek różnica, różna od zera ( ${}^0X_i \neq 0$ ), będzie rezultatem zmiany w czasie  $\theta$  międzyregionalnej pozycji regionu  $i$  ze względu na czynniki wzrostu liczby ludności. Czynnikiem wzrostu międzyregionalnego ( ${}^0X_i$ ) reprezentuje drugi zespół sił prowadzących do polepszenia (gdy  ${}^0X_i$  jest dodatnie) lub pogorszenia (gdy  ${}^0X_i$  jest ujemne) sytuacji regionu  $i$  w stosunku do innych obszarów.

Rezultat działania tych sił wyraża druga część modelu, tj.:

$${}^0C \cdot {}^0Z_i \cdot {}^tP_i = {}^0X_i. \quad (8)$$

Zmiana międzyregionalnej pozycji regionu  $i$  w czasie  $\theta$  jest wyjaśniana zmianą potencjału dochodu tego regionu w tym samym czasie. Z surowego wskaźnika zmian potencjału dochodu regionu  $i$  w czasie  $\theta$ , reprezentowanego przez

$$\frac{{}^{t+\theta}V_i}{{}^tV_i},$$

wyeliminowano zmiany regionalnego potencjału dochodu, spowodowane wzrostem lub spadkiem dochodu całego kraju w czasie  $\theta$ , dzieląc powyższy stosunek przez stopę wzrostu dochodu narodowego kraju ( ${}^0\varrho$ ) w czasie  $\theta$ . Od tej wielkości przedstawionej wzorem

$$\frac{{}^{t+\theta}V_i}{{}^0\varrho {}^tV_i}, \quad (9)$$

zwanej względnym potencjałem dochodu, odjęta została jedność, a nowe wyrażenie o nazwie zmodyfikowanego względnego czynnika potencjału dochodu przyjęło postać jak we wzorze (5b). Modyfikacja względnego potencjału dochodu doprowadziła do zrównania właściwości zmodyfikowanego względnego czynnika potencjału dochodu ( ${}^0Z_i$ ) i czynnika wzrostu międzyregionalnego ( ${}^0X_i$ ). Wartości  ${}^0Z_i$ , podobnie jak  ${}^0X_i$ , będą się wahały: od liczb ujemnych, gdy  $V_i$  będzie wzrastać wolniej niż dochód kraju, do liczb dodatnich, gdy potencjał dochodu regionu  $i$  będzie rósł szybciej niż dochód kraju. Gdy potencjał regionu  $i$  będzie wzrastał w tym samym tempie co potencjał dochodu całego kraju, zmodyfikowany względny czynnik potencjału dochodu ( ${}^0Z_i$ ) będzie równy zeru.

Nadanie modelowi charakteru operacyjnego wymaga również obliczenia współczynnika  ${}^0C$  wyjaśniającego zmienne egzogeniczne wpływające na zmianę liczby ludności w czasie  $\theta$ . Przyjęcie warunku niezmienności w czasie i przestrzeni współczynnika  ${}^0C$  umożliwia zastosowanie pojedynczej jego wartości, jednakowej dla wszystkich regionów, wyprowadzonej z danych liczbowych okresu minionego na podstawie wzoru 5c (Carrothers 1958, s. 137). Skala zmienności wartości współczynnika  ${}^0C$  jest bardzo duża. Wartość jego może być nieskończenie wielka (dodatnia lub ujemna), gdy liczba ludności regionu  $i$  nie rośnie w tym samym tempie co ogólnokrajowa wielkość zaludnienia, a potencjał dochodu wzrasta proporcjonalnie do wielkości krajowej. Mianownik jest wtedy równy zeru, a licznik różny od zera. Gdy liczba ludności i potencjał dochodu regionu  $i$  rosną w tym samym tempie co odpowiednie wielkości krajowe, to licznik i mianownik są równe zeru, a wartości

${}^{\theta}C$  są nieokreślone. Wartość współczynnika  ${}^{\theta}C$  może być równa zero, gdy licznik osiąga wartość zerową, a mianownik jest różny od zera. Występuje to wtedy, gdy liczba ludności regionu  $i$  wzrasta proporcjonalnie do wzrostu liczby ludności kraju, a wzrost potencjału dochodu tego obszaru jest inny niż wzrost ogólnokrajowy. Zdaniem Carrothersa możliwe byłoby również zbudowanie modelu prognostycznego z różnymi współczynnikami  ${}^{\theta}C_i$  odpowiednimi dla poszczególnych  $n$  regionów. W takim przypadku konieczne byłoby obliczenie  $n$  wartości  ${}^{\theta}C_i$  dla przewidywanego okresu  $\theta$ . W tym celu potrzebne byłyby dane dotyczące wielkości potencjału dochodu poszczególnych regionów dla odpowiednio długiego okresu, co umożliwiłoby wyznaczenie linii trendu i oszacowanie wartości  ${}^{\theta}C_i$ .

Model potencjału dochodu Carrothersa poza istotnymi zaletami (takimi jak możliwość operacyjnego zastosowania w ujęciu przestrzennym, z uwzględnieniem wzajemnych powiązań pomiędzy wszystkimi elementami układu) ma wiele ograniczeń. Modelowi zarzuca się jednostronność ujęcia liczby ludności regionu wskutek wprowadzenia globalnej wielkości dochodu jako jedyne miernika reprezentującego wszystkie czynniki wzrostu zaludnienia. Właściwsze — zdaniem Carrothersa — byłoby wydzielenie części dochodu, która rzeczywiście wzrost ten powoduje. R. W. Pfouts (1958) uważał, że wielkość ta powinna być przeliczona na 1 mieszkańca regionu, tylko taki bowiem miernik dochodu może stanowić istotny czynnik przyciągający migracje i wpływający na wielkość reprodukcji ludności. Zasadniczą słabością modelu jest zastosowanie koncepcji potencjału dochodu do przewidywania ogólnej liczby ludności (Chojnicki 1966). Z dwóch elementów wzrostu zaludnienia, przyrostu naturalnego i migracyjnego, ten drugi jest bardziej zmienny i łatwiej reaguje na wzrost dochodu regionalnego. Poza tym opór odległości, czynnik mający wpływ na wielkość potencjału — mierzony funkcją odległości, dotyczy głównie międzyregionalnych przemieszczeń ludności. Wielkość potencjału dochodu, wskazująca na siłę powiązań międzyregionalnych, nie ma wpływu na reprodukcję ludności. Wadą najczęściej przez krytyków komentowaną jest zastosowanie w modelu trzech wariantów arbitralnie przyjętych funkcji odległości. Ostateczne sformułowanie modelu nie zostało poprzedzone analizą wpływu odległości na wzajemne oddziaływanie. Dodatkowym ograniczeniem modelu jest konieczność wyznaczenia punktów koncentracji potencjału. Badane regiony muszą spełniać określone kryteria dotyczące wielkości i kształtu, aby można było precyzyjnie wyznaczyć te punkty, od tego bowiem również zależy wielkość potencjału dochodu.

Kwestionowana przez niektórych badaczy koncepcja wyjaśniania zmian w rozwoju zaludnienia tylko czynnikami ekonomicznymi znajduje także zwolenników. Świadczy o tym zamieszczony poniżej przegląd literatury z zakresu ekonomicznej teorii ilościowego rozwoju ludności.

#### DOCHÓD JAKO CZYNNIK DETERMINUJĄCY ROZWÓJ LUDNOŚCI

Naturalny rozwój ludności i jej ruchliwość przestrzenna zależą od wzajemnie powiązanych czynników demograficznych, społecznych, ekonomicznych, psychologicznych, kulturowych. Brak możliwości uwzględnienia wszystkich czynników

w jednym modelu operacyjnym powoduje konieczność określenia i wyboru tych czynników, które można uznać za istotne. Zagadnienie to nie zostało jeszcze jednoznacznie rozwiązane. Trudności polegają m. in. na tym, że poszczególni badacze przypisują istotną rolę różnym czynnikom i inaczej je charakteryzują. Ponadto uwzględnienie istotnych czynników jest utrudnione z powodu niemierzalności niektórych z nich, braku odpowiednich danych statystycznych określających czynniki dające się skwantyfikować lub zbyt dużej zmienności w czasie i przestrzeni znaczenia tych czynników. Na ogół w modelach uwzględnia się jeden czynnik lub niewielką ich liczbę. Wśród nich dominują motywy ekonomiczne, a szczególnie powszechna dążność do poprawy warunków materialnych. Dyskusje prowadzone przez przedstawicieli różnych dyscyplin naukowych nie dały, jak dotychczas, jednoznacznej interpretacji wzajemnych powiązań pomiędzy wzrostem liczby ludności a rozwojem gospodarczym. Niemniej jednak — jak twierdzi M. Okólski (1971, s. 73) — „...zmiany zachodzące w gospodarce narodowej stanowią jedną z podstawowych przyczyn zmian w sferze procesów demograficznych”. W literaturze zagranicznej, jak również i polskiej, stosunkowo rzadko są omawiane zależności pomiędzy rozwojem ludności w ogóle a czynnikami ekonomicznymi stymulującymi ten rozwój. Mimo że czynniki ekonomiczne wpływają na obydwie składniki zmian wielkości zaludnienia (przyrost naturalny i migracyjny), siła i charakter tego wpływu są w obu przypadkach różne. Stąd najczęściej pojawiają się opracowania, które odrębnie traktują wpływ czynników ekonomicznych na poszczególne składniki zmian wielkości zaludnienia.

Do zagadnień najtrudniejszych, budzących poważne kontrowersje, należy problem oddziaływania zmian ekonomicznych na zmiany przyrostu naturalnego ludności. Umieralność, jako jeden z elementów mających wpływ na wielkość przyrostu naturalnego, jest traktowana jako czynnik egzogeniczny o charakterze medycznym i często z rozważań eliminowana. W wyjaśnianiu powiązań procesów gospodarczych i demograficznych brane są pod uwagę urodzenia<sup>5</sup>.

Wśród zagranicznych prac poświęconych tym zagadnieniom można wyróżnić dwie zasadnicze grupy. Do jednej należą opracowania, które szerzej traktując czynniki ekonomiczne uwypuklają rolę industrializacji i urbanizacji w przeobrażaniu reprodukcyjnych zachowań ludności. Drugą grupę stanowią prace podkreślające rolę indywidualnych ekonomicznych motywacji oddziaływających na poziom rozrodczości.

Twierdzenia dotyczące wpływu industrializacji oraz urbanizacji na płodność przetrwały dziesiątki lat i nadal są aktualne. J. Dupâquier twierdzi, że urbanizacja i spadek płodności są ze sobą ściśle związane, choć zależność ta nie jest zupełnie prosta (por. Namysłowska 1975, s. 148). Analizy zmienności poziomu rozrodczości w miarę wzrostu wielkości miasta lub odległości od niego potwierdzają tę prawidłowość (Korčák 1975).

Wielu demografów i przedstawicieli innych dyscyplin uważa, że wyjaśnianie przeobrażeń w dzietności rodzin za pomocą tzw. czynników urbanizacji jest mało

<sup>5</sup> „Ludzie mają możliwość rozważania i podejmowania decyzji dotyczących kreacji nowego organizmu. Zgonu nie można jednak oddalić” (Okólski 1971, s. 73).

precyzyjne, ponieważ niższa dzietność jest wynikiem wielu przyczyn bardziej bezpośrednich niż czynnik urbanizacji. Różnorodne zjawiska towarzyszące temu procesowi, m. in. zasadnicza zmiana warunków ekonomicznych, wywierają wpływ na poczynania ludzi, a tym samym na zjawisko rozrodczości. Zdaniem tych badaczy najistotniejszym elementem oddziaływania warunków materialnych na postawy prokreacyjne ludności jest poziom dochodów pieniężnych przypadających na rodzinę (Okólski 1971). Ujawniły się dwa przeciwstawne poglądy głoszące, że wzrost stopy życiowej wpływa na zmniejszenie rozrodczości i przeciwnie, że rozrodczość wzrasta wraz ze wzrostem stopy życiowej (Smoliński 1969; Okólski 1971). Negatywna korelacja płodności i dochodu była do niedawna niemal powszechna w krajach, w których przyjmowano zasadę prymatu ekonomiki w kształtowaniu bytu i świadomości ludzi (Jagielski 1970; Okólski 1971). Korelacja ta nie jest obecnie uważana za prawidłowość uniwersalną. Ogólny wpływ dochodu na urodzenia może okazać się pozytywny lub negatywny, m. in. w zależności od poziomu rozwoju gospodarczego lub od wpływu poszczególnych współczynników uwzględnionych w modelu (Simon 1969). Niektórzy badacze stwierdzają, że aktywność generacyjna par małżeńskich zależy nie tylko od poziomu dobrobytu, ale odgrywa tu również istotną rolę ocena warunków w świadomości ludności (Bernhardt 1972). W literaturze amerykańskiej przedstawiciele ekonomicznej teorii dzietności sprowadzają problem do preferencji wyboru w rodzinach o różnych cechach społecznych, ekonomicznych, kulturowych itp. Twórcą tej teorii, sformułowanej na założeniach H. Leibensteina, jest G. S. Becker (por. Paradysz 1976a). W swych badaniach empirycznych Becker udowodnił dodatnią korelację pomiędzy przeciętną liczbą dzieci a wielkością dochodu. Substytucyjność dzieci i dóbr oraz doskonałą podzielność ponoszonych na nie nakładów uwzględnili w swej pracy W. C. Robinson i D. E. Horlacher (1971). W konkurencyjności dóbr, może nie tak skrajnie ujętej, również niektórzy naukowcy radzieccy doszukują się przyczyn tendencji ograniczania liczby dzieci w rodzinie (m. in. Fomin 1972). Wśród przeciwników teorii Beckera znaleźli się J. Blake i N. K. Namboodiri podkreślający odwrotną zależność pomiędzy dochodem a wielkością rodziny (por. Paradysz 1976a).

Brak jasności w ocenie wpływu rozwoju ekonomicznego na zmiany poziomu płodności wynika przede wszystkim z niewłaściwie ujmowanego charakteru tego związku. Najnowsze badania dowiodły, że ogniwem łączącym zmiany natężenia urodzeń z rozwojem ekonomicznym jest zależność postaw prokreacyjnych ludności od sytuacji i zmian gospodarczych. Warunki sprzyjające radykalnej zmianie postaw prokreacyjnych związane są bardzo silnie ze zmianami w rozwoju ekonomicznym. Hipoteza ta — zdaniem M. Okólskiego (1971) — znajduje potwierdzenie w pracach wybitnych demografów takich, jak: C. P. Blacker, A. Landry, F. Nattstein, A. Sauvy, W. S. Thompson oraz B. Urłanis. Potwierdzenie tej hipotezy uzyskują również inni naukowcy radzieccy. Wzrost stopy życiowej w ZSRR mierzonej wielkością dochodów pieniężnych przypadających na 1 członka rodziny w przedziałach o wysokich wartościach prowadzi do wzrostu rozrodczości (Slesariew 1965).

W polskiej literaturze demograficznej często wymienia się standard ekonomiczny rodziny jako czynnik determinujący jej dzietność (Okólski 1971; Roeske-Słomka

1973, 1975). Istnieją również poglądy, że poziom dzietności uzależniony jest od stopnia urbanizacji lub innych mniej syntetycznych parametrów ekonomicznych (m. in. Holzer, Smoliński 1968; Paradysz 1976b). Pierwszym, który empirycznie poddał weryfikacji tę hipotezę był E. Vielrose (1968). Stwierdził on silny ujemny związek pomiędzy zakupami samochodów w Polsce w latach 1955—1965 a rocznymi liczbami dzieci żywo urodzonych. Ostatnio przeprowadzone badania empiryczne wykazały, że chociaż istnieje odwrotna zależność pomiędzy kompletowaniem dóbr użytku trwałego a liczbą dzieci w rodzinie, to znaczenie tej konkurencyjności maleje (Paradysz 1976b). Z. Smoliński (1969) skonstruował model rozwoju rodziny w zależności od jej sytuacji materialnej, wyrażonej wysokością dochodów rodziny. Model ten jest oparty na teorii tzw. punktów progowych i uwzględnia zachowanie się rodziny w zależności od przynależności do określonej grupy dochodowej. Dzietność rodzin charakteryzujących się dochodem poniżej względnego minimum egzystencji rośnie wraz z dochodem, podobnie jest w rodzinach o dochodach powyżej względnego maksimum egzystencji. Natomiast w rodzinach o dochodach mieszczących się w przedziale pomiędzy minimalnym a maksymalnym poziomem egzystencji dzietność maleje wraz ze wzrostem dochodu. Próby weryfikacji tej hipotezy dokonała I. Roeske-Słomka (1974). Badanie to ujawniło istnienie prawidłowości ujętych w schemacie Z. Smolińskiego. Zbliżony pogląd głosi również A. Józefowicz, stwierdzając, że sytuacja konfliktowa nie występuje przy wyższych dochodach, które działają wtedy stymulująco na wzrost dzietności (por. Namysłowska 1975). Koncepcja tzw. punktów progowych Smolińskiego spotkała się z krytyką zarówno ze strony zwolenników ekonomicznej teorii rozwoju dzietności, jak i jej przeciwników. Zarzuca się jej uniformizację psychiki ludzkiej oraz lekceważenie wpływu postaw prokreacyjnych na rozrodczość i ich zmianę w zależności od poziomu rozwoju gospodarczego (Okólski 1971). Współczesne interpretacje „racjonalizmu ekonomicznego” w zachowaniach reprodukcyjnych ludności zwracają uwagę na czynniki psychologiczne i socjologiczne, które wspólnie z ekonomicznymi determinują zachowanie reprodukcyjne ludności (Jagielski 1975; Namysłowska 1975).

Wśród prac teoretycznych i empirycznych poświęconych zagadnieniu wpływu różnych czynników na podejmowanie decyzji migracyjnych dominują opracowania szukające przyczyn migracji ludności w procesach uprzemysłowienia i urbanizacji. Poza czynnikami bezpośrednio oddziaływającymi na migracje, jak np. rynek pracy, podkreśla się wpływ zróżnicowania poziomu warunków bytowych i powszechnej dążności do ich poprawy.

Pierwsze hipotezy tego typu wysunięto w połowie XX w. W pracach omówionych przez A. Gawryszewskiego (1974) została udokumentowana tendencja przenoszenia się ludności z obszarów o niskim poziomie życia do regionów o wyższym poziomie. Analogicznym spojrzeniem na migrację cechuje się praca E. Lövgrena (1956), który przedstawił pogląd, że migracje mogą być przede wszystkim wytłumaczone jako zjawisko związane z ruchliwością siły roboczej. Stwierdził również, że wśród badanych geograficzno-ekonomicznych zmiennych determinujących wielkość migracji, zmiany dochodu są szczególnie istotne. Z krytyką modeli migracji, u podstaw których leży hipoteza maksymalizacji dochodów pieniężnych, wystąpił P. Nelson (1959). Stwier-

dził on, że decyzje migracyjne tylko częściowo mogą być wytłumaczone chęcią maksymalizacji zysków pieniężnych. Z podobną krytyką teorii determinizmu ekonomicznego wystąpili nieco wcześniej D. J. Bogue, H. S. Shryock, Jr. i S. A. Hoermann<sup>6</sup>. W tym kontekście zasługuje na uwagę praca L. A. Sjaastada (1960), który analizował wpływ czynników ekonomicznych i społecznych na wielkość migracji. Jako zmienne niezależne przyjął dochód, bezrobocie, strukturę zawodową i rasową ludności oraz poziom edukacji. Okazało się, że tylko zmiana dochodu dawała zadowalające wyniki. Dochód, a ściślej mówiąc potencjał dochodu, został wykorzystany do budowy dwóch modeli teoretycznych służących do przewidywania zmian w rozmieszczeniu ludności w ujęciu regionalnym. W. Isard i D. F. Bramhal (1959) — autorzy tych modeli — dokonali modyfikacji modelu Carrothersa, eliminując z niego zasadnicze słabości. W swych modelach prognostycznych próbowali określić ogólną liczbę ludności na podstawie zmiany zatrudnienia, wzrost zaś liczby ludności danego regionu uzależniali od tej części dochodu, która rzeczywiście ma istotny wpływ na przyrost ludności. Charakteryzując modele ograniczyli się tylko do opisu procedur estymacyjnych, nie próbując zastosować ich w badaniach empirycznych, co uniemożliwia ocenę przydatności modeli do przewidywania zmian w rozmieszczeniu ludności<sup>7</sup>. Nadanie tym modelom postaci operacyjnej wymagałoby rozróżnienia wielkości zatrudnienia i dochodu w regionie z punktu widzenia rodzaju działalności na zorientowaną regionalnie i ponadregionalnie.

Na złożoność czynników wywierających wpływ na kierunki i rozmiary migracji zwracali niejednokrotnie uwagę badacze radzieccy. Jak wynika z wielu badań, motywami migracji są dążenia do podwyższenia zarobków i poprawy innych materialnych i kulturalno-bytowych warunków życia. R. W. Tatewosow w analizie regresji wielorakiej, przyjmując zbiór 9 czynników jako zmienne niezależne, wykazał silny związek pomiędzy natężeniem napływu i odpływu ludności miejskiej a udziałem zatrudnionych wśród ludności regionu, stopniem płynności kadr oraz poziomem przeciętnego wynagrodzenia i stopniem rozwoju usług (por. Gawryszewski 1974).

Polskie badania poświęcone uwarunkowaniom decyzji migracyjnych rozpoczęły się mniej więcej od połowy lat sześćdziesiątych. Jako przyczynę wywołującą migracje ludności uznano procesy uprzemysłowienia i towarzyszące im procesy urbanizacji (Dziewoński, Gawryszewski 1975). Podkreślano również wpływ inwestycji na wzrost natężenia migracji (Kędelski 1974). Szczególną uwagę zagadnieniom determinant przemieszczeń ludności, a mówiąc ściślej siły roboczej, poświęcił S. Borowski (1967a; 1969). W swych badaniach uznał on poziom dochodu i spożycia jako bardziej syntetyczne miary czynników ekonomicznych warunkujących decyzje migracyjne. Problemowi uwarunkowania przemieszczeń migracyjnych sporo miejsca poświęcił A. Gawryszewski (1974). Wyniki jego badań wskazują na istotne miejsce, jakie zespół

<sup>6</sup> Przegląd badań dotyczących modelowego ujęcia czynników determinujących przemieszczenia ludności znajduje się w pracy A. Gawryszewskiego (1974, s. 27–29).

<sup>7</sup> Dokładny opis procedury obliczeniowej modeli zawierają prace W. Isarda (1965, s. 394–413) i Z. Chojnickiego (1966, s. 97–100).

cech charakteryzujących poziom dobrobytu ludności zajmuje wśród czynników determinujących napływy migracyjne. Dalsze jego prace prowadzone wspólnie z K. Dziewońskim (1975) potwierdziły istnienie silnego związku przyczynowego pomiędzy urbanizacją a migracją ludności. Brak jasności co do rzeczywistych pobudek skłaniających ludzi do zmiany miejsca zamieszkania sprawił, że K. Kuciński i W. Rakowski (1978) podjęli próbę zbadania społeczno-ekonomicznych uwarunkowań migracji. Stwierdzili oni, że stymulatorami migracji do miast są czynniki ekonomiczne, na terenach zaś wiejskich na plan pierwszy wysuwają się względy pozaekonomiczne. Osłabienie — w pewnych sytuacjach — działania czynników ekonomicznych zauważył także W. Mirowski (1974). Przyznaje on decydującą rolę czynnikom ekonomicznym w ujęciach makrostrukturalnych. Mirowski twierdzi, że w analizie konkretnych decyzji migracyjnych znaczenie tych czynników nie zawsze występuje tak silnie. Potwierdzeniem tej tezy mogą być wyniki analizy migracji do Warszawy (Mirowski 1968). Podobne wyniki otrzymano w badaniach przeprowadzonych przez GUS (Klimczyk 1974). Na uwagę zasługuje także opracowanie dotyczące motywów podejmowania decyzji migracji J. Bobińskiego (1974). Badania udowodniły podstawową hipotezę, że głównym motywem przemieszczeń ludności jest praca, ale jej znaczenie maleje. Istotnym modyfikatorem decyzji migracyjnych — zdaniem Bobińskiego — są warunki mieszkaniowe. W związku ze zmianami struktury społeczno-zawodowej ludności i wzrostem ogólnej zamożności społeczeństwa, zmienia się dotychczasowa hierarchia potrzeb rodziny i jednostki, pociągająca za sobą zmianę hierarchii motywów powodujących migracje.

Z przeglądu literatury polskiej i zagranicznej wynika, że ekonomiczna koncepcja rozwoju ludności znajduje swoich zwolenników. Stosunkowo rzadko jednak pojawiają się opracowania analizujące zależności pomiędzy całkowitym wzrostem zaludnienia, uwzględniającym przyrost naturalny i migracyjny, a czynnikami ekonomicznymi, oddziałującymi na ten wzrost. Jeszcze rzadziej badacze wychodzą poza stwierdzenie istnienia takiej współzależności i tworzą modele rozwoju ludności w sensie ilościowym, w zależności od czynników ekonomicznych. W tym kontekście zasługuje na uwagę model Carrothersa, będący próbą wyjaśnienia zmiany zaludnienia zmianą wielkości potencjału dochodu. Dokumentowana w polskiej literaturze naukowej zależność rozwoju zaludnienia od czynników ekonomicznych upoważnia do podjęcia próby zastosowania modelu potencjału dochodu Carrothersa do prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności Polski w układzie przestrzennym.

## EMPIRYCZNE ZASTOSOWANIE MODELU

### MODEL PROGNOSTYCZNY W UJĘCIU HISTORYCZNYM. ZAŁOŻENIA

Model ten opiera się na hipotezie, że wzrost liczby ludności poszczególnych regionów Polski w latach 1965—1970 jest funkcją wzrostu potencjału dochodu tych regionów w tym samym czasie. Dla sprawdzenia powyższej hipotezy opracowano



model prognostyczny w ujęciu historycznym według wzoru<sup>8</sup>:

$${}^{70}P_i = {}^{65-70}\lambda \cdot {}^{65}P_i + {}^{65-70}C \cdot {}^{65-70}Z_i \cdot {}^{65}P_i \quad (i = 1, \dots, 22) \quad (10)$$

gdzie:  ${}^{70}P_i$  — przewidywana liczba ludności regionu  $i$  w 1970 r.,  
 ${}^{65}P_i$  — liczba ludności regionu  $i$  w 1965 r.,  
 ${}^{65-70}\lambda$  — stopa wzrostu liczby ludności kraju w latach 1965–1970,  
 ${}^{65-70}C$  — współczynnik wyjaśniający zmienne egzogeniczne wpływające na wzrost liczby ludności w latach 1965–1970,  
 ${}^{65-70}Z_i$  — zmodyfikowany względny czynnik potencjału dochodu dla lat 1965–1970.

Nadanie modelowi charakteru operacyjnego wymagało, poza ustaleniem wielkości zaludnienia kraju i regionów w 1965 r. ( $P, P_i$ ), określenia zmodyfikowanego względnego czynnika potencjału dochodu ( $Z_i$ ) i współczynnika wyjaśniającego zmienne egzogeniczne ( $C$ ). Obydwie zmienne ( $Z_i, C$ )<sup>9</sup> zawierają w sobie zasadniczy element modelu, jakim jest potencjał dochodu obliczony dla wszystkich badanych regionów Polski z zależności:

$$V_i = \sum_{j=1}^{22} \frac{Y_j}{d_{ij}^b} \quad (i = 1, \dots, 22), \quad (11)$$

gdzie:  $Y_j$  — dochód regionu  $j$ ,  
 $d_{ij}$  — odległość regionu  $i$  od regionu  $j$ ,  
 $b$  — wykładnik potęgowej odległości.

Zasadniczy problem pomiaru potencjału dochodu sprowadzał się do wyboru odpowiedniego miernika masy ( $Y_j$ ) i ustalenia punktów koncentracji potencjału oraz określenia sposobu pomiaru odległości i jej wykładnika potęgowego, a także pomiaru samopotencjału.

W próbie adaptacji modelu Carrothersa do warunków polskich — starając się ominąć dość istotną słabość modelu<sup>10</sup> — jako miarę masy w potencjale dochodu spróbowano wprowadzić taką wielkość dochodu, która może stanowić istotny czynnik przyciągający migracje i mogący mieć wpływ na reprodukcję ludności. W tym celu przeprowadzono analizę korelacji w zbiorze byłych 22 regionów Polski, dla lat 1965 i 1970, między przyrostem naturalnym i migracyjnym ludności a kilkoma miernikami dochodu, tj. dochodem narodowym podzielonym i jego składowymi — spożyciem dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych i nakładami inwestycyjnymi. Korelowane zmienne ujęto w postaci ilorazów o wspólnych mianow-

<sup>8</sup> Do oryginalnego wzoru (4) modelu Carrothersa zamieszczonego na s. 15 wprowadzono określenie dla omawianej procedury prognostycznej indeksy.

<sup>9</sup> Wzory  ${}^{\theta}Z_i$   ${}^{\theta}C$  są podane na s. 15.

<sup>10</sup> W modelu Carrothersa zmienną determinującą wzrost zaludnienia jest całkowita wielkość dochodu w regionie, zamiast wielkości dochodu na 1 mieszkańca.

nikach, wykorzystując jako podstawę przeliczeń liczby ludności regionów w celu uzyskania porównywalności informacji o regionach zróżnicowanych pod względem wielkości zaludnienia. Otrzymane współczynniki korelacji przedstawia tabela 1.

Tabela 1

Współczynniki korelacji między przyrostem ludności a miernikami rozwoju ekonomicznego regionów

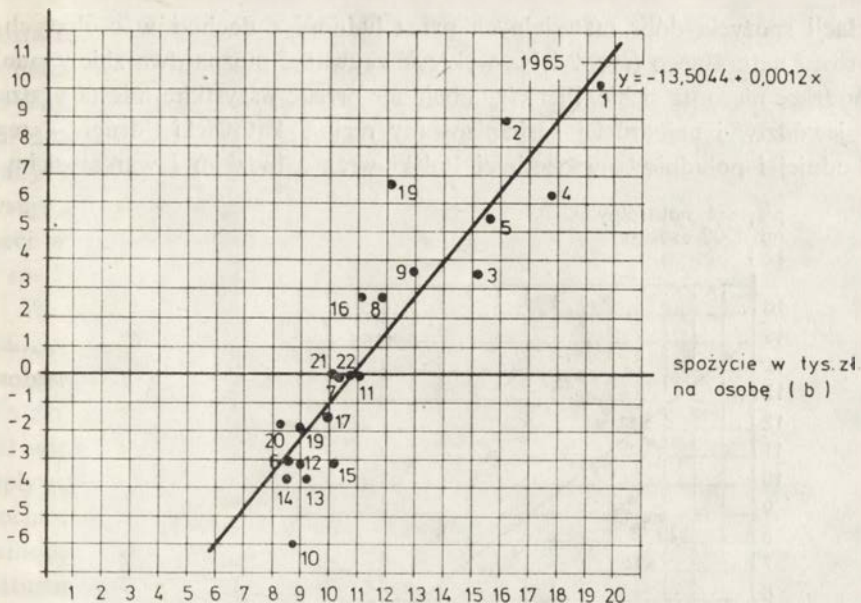
Wyszczególnienie		Spożycie dóbr materialnych ludności z dochodów (na 1 mieszkańca w złotych)	Nakłady inwestycyjne	Dochód narodowy podzielony
Przyrost naturalny (na 1000 osób)	1965	-0,6616	-0,3996	-0,6748
	1970	-0,6847	-0,0021	-0,6534
Przyrost migracyjny (saldo na 1000 osób)	1965	+0,9058	+0,6091	+0,9103
	1970	+0,9169	+0,3524	+0,8837

Źródło: Obliczenia własne na podstawie: *Roczniki statystyczne GUS 1966 i 1970* i *Dochód narodowy Polski według województw w 1970 r.*, GUS.

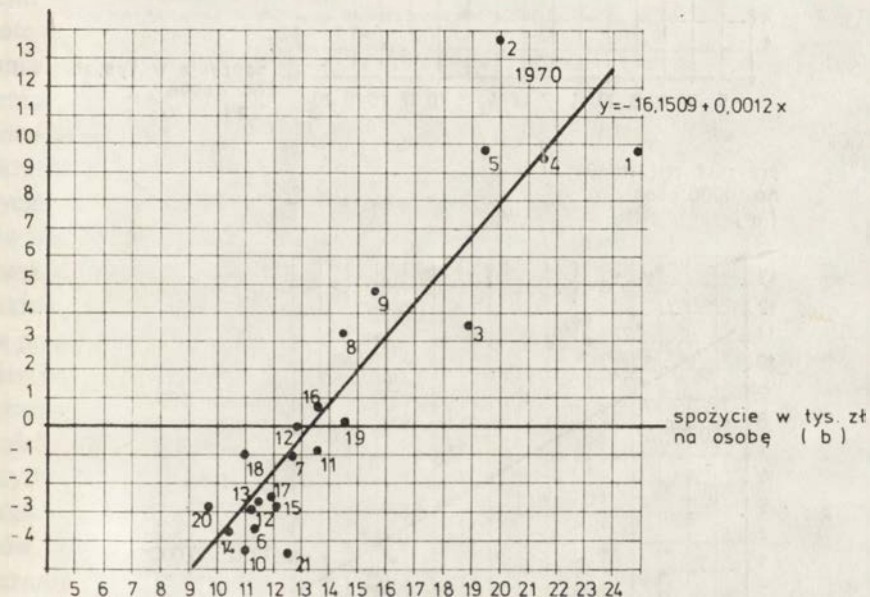
Analiza macierzy współczynników korelacji potwierdziła istnienie zależności pomiędzy badanymi zmiennymi, z wyjątkiem nakładów inwestycyjnych. Duża zmienność wysokości nakładów inwestycyjnych, odzwierciedlająca się w wielkości dochodu narodowego podzielonego, wpłynęła na obniżenie współczynników korelacji pomiędzy przyrostem naturalnym i migracyjnym a dochodem narodowym podzielonym. Badanie to wykazało, że spożycie dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych jest tą wielkością cząstkową dochodu, która odznacza się największą współzmiennością z przyrostem ludności<sup>11</sup>. Stwierdzona tutaj współzależność liczbowa nie prowadzi jednoznacznie do udowodnienia związku przyczynowego; jest ona jedynie sygnałem, że pomiędzy zjawiskami opisywanymi przez analizowane szeregi statystyczne zachodzi jakiś związek. Wyrażna korelacja pomiędzy naturalnym i migracyjnym przyrostem ludności a spożyciem dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych w znacznym stopniu wzmacnia postawioną hipotezę o istnieniu związku przyczynowego. Charakter tego związku jest różny w zależności od rozpatrywanego składnika przyrostu rzeczywistego. Punkty wykresu korelacji spożycia dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych i salda migracji dla lat 1965 i 1970 układają się wewnątrz pewnego pasa o wyraźnie zaznaczonym trendzie rosnącym (ryc. 1). Świadczy to o istnieniu korelacji dodatniej, wzrostowi bowiem wartości spożycia towarzyszy zmniejszenie ujemnego i wzrost dodatniego salda migracji. Nieco bardziej złożony obraz przedstawia rozrzut punktów wykresu

<sup>11</sup> Wynik analizy korelacji jest potwierdzeniem i pewnym uściśleniem zbadanej przez S. Borowskiego (1967b) zależności — „ludność napływa najliczniej tam, gdzie najwięcej na głowę przypada dochodu wytworzonego i podzielonego”.

saldo migracji  
na 1000 osób ( a )



saldo migracji  
na 1000 osób ( a )



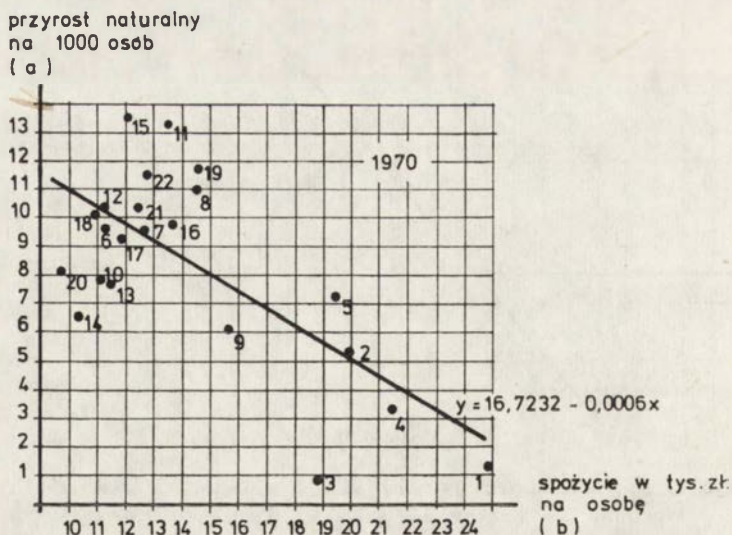
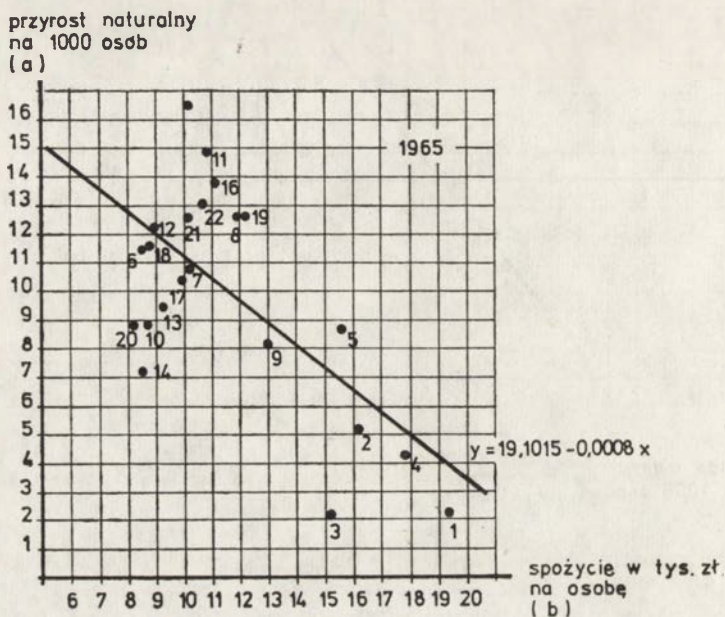
Ryc. 1. Zależność między spożyciem a saldem migracji w latach 1965, 1970

Regiony: 1 – Warszawa, 2 – Kraków, 3 – Łódź, 4 – Poznań, 5 – Wrocław, 6 – białostocki, 7 – bydgoski, 8 – gdański, 9 – katowicki, 10 – kielecki, 11 – koszaliński, 12 – krakowski, 13 – lubelski, 14 – łódzki, 15 – olsztyński, 16 – opolski, 17 – poznański, 18 – rzeszowski, 19 – szczeciński, 20 – warszawski, 21 – wrocławski, 22 – zielonogórski

Dependence between consumption and migration balance in 1965 and 1970

a – migration balance per 1000 people, b – per capita consumption in thousand zlotys

korelacji spożycia dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych i jej przyrostu naturalnego (ryc. 2). Na wykresie zauważyć można dwa zbiory punktów zachodzące nieco na siebie. Pierwszy obejmuje przede wszystkim miasta wydzielone z województw i najbardziej zurbanizowany region katowicki, drugi — regiony wschodniej i południowo-wschodniej Polski wraz z łódzkim i warszawskim oraz



Ryc. 2. Zależność między spożyciem a przyrostem naturalnym w latach 1965, 1970  
1—22 — regiony, patrz objaśnienia na ryc. 1

Dependence between consumption and natural increase in 1965 and 1970

a — natural increase per 1000 people, b — per capita consumption in thousand zlotys

poznańskim i bydgoskim. Zbiorem wspólnym są regiony wchodzące w skład Ziemi Północnych i Zachodnich obejmujące dawne Ziemie Odzyskane. Zbiór ten, charakteryzujący się wyższymi wartościami spożycia (powyżej 10 tys. zł/mieszk.) niż w zbiorze drugim, może być również przedłużeniem zbioru pierwszego i wtedy prezentowany diagram rozrzutu stanowi ilustrację modelu Z. Smolińskiego<sup>12</sup>. Wyraźnie rysuje się zależność prosta w grupie województw o wartości spożycia nie przekraczającej w zasadzie 10 tys. zł/mieszkańca i zależność odwrotna w grupie województw o spożyciu przekraczającym podaną powyżej wartość dla 1965 r.

W wyniku przeprowadzonych badań, do obliczeń potencjału dochodu wprowadzono jako miarę masy spożycie dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych w przeliczeniu na 1 mieszkańca. Przeliczenie to umożliwiło wprowadzenie do modelu zmiennej, która jest lepszym miernikiem dobrobytu mieszkańców niż wielkość globalna i może stanowić istotny czynnik przyciągający migracje oraz wpływający na indywidualne decyzje dotyczące prokreacji. W tak ujętej mierze dochodu są w pewnym stopniu uwzględnione różnice w wielkości przyrostu naturalnego ludności, spożycie obliczone bowiem na 1 mieszkańca jest również odbiciem naturalnego wzrostu liczby ludności.

Następnym krokiem w procedurze obliczeniowej, zmierzającej do określenia wielkości potencjału dochodu badanych obszarów, było ustalenie punktów koncentracji tego potencjału. Przyjęto założenie, że ludność i spożycie, a więc masa potencjału jest skoncentrowana w centrum każdego regionu i maleje w miarę oddalania się od niego. Z metodycznego punktu widzenia może budzić to pewne zastrzeżenia. W badaniach przestrzennych niezbędna jest jednak pewna generalizacja, umożliwiająca przetworzenie przestrzeni ciągłej w nieciągłą. Stopień tej generalizacji określił — w tym przypadku — przekrój terytorialny dostępnych danych statystycznych. W związku z tym, że analizie poddano 22 jednostki administracyjne (17 województw i 5 miast wydzielonych z województw), wystąpił problem tego samego punktu koncentracji potencjału dla jednoimiennych jednostek przestrzennych, takich jak województwo i miasto z niego wydzielone<sup>13</sup>. Zagadnienie to rozwiązano za pomocą metody centrograficznej, służącej do wyznaczania teoretycznych centrów zjawisk powierzchniowych. Zastosowana miara centrograficzna jest średnią arytmetyczną ważoną, inaczej — średnim centrum populacji lub po prostu środkiem ciężkości. Wyznaczone punkty koncentracji potencjału w badanych regionach to: Myślenice — w krakowskim, Pabianice — w łódzkim, Środa — w poznańskim, Wołomin — w warszawskim i Jawor — we wrocławskim. Cechą obliczonych środków ciężkości jest ich stabilność w czasie i przestrzeni. W pięcioleciu 1965—1970 zaznaczyły się zupełnie nieistotne przesunięcia gęstości masy, rzędu 200—700 metrów.

Drugą zmienną w mierze potencjału dochodu jest odległość ( $d_{ij}^b$ ). Pojęcie odległości w badaniach przestrzenno-ekonomicznych ogranicza się zwykle do różnie

<sup>12</sup> Model Z. Smolińskiego przedstawiono na s. 20. Por. Z. Smoliński (1969, s. 41—62).

<sup>13</sup> W pozostałych 12 województwach istniejące centra administracyjne uznano za punkty koncentracji potencjału. Jest to duże uproszczenie, lokalizacja bowiem niektórych z nich nie odpowiada określonym wymaganiom.

mierzonej odległości fizycznej, wyrażającej oddalenie wzdłuż linii prostej lub wzdłuż tras komunikacyjnych, odległości rozważanej w kategoriach ekonomicznych, społecznych, psychologicznych bądź też w kategoriach odległości funkcjonalnej. Optymalny miernik odległości powinien uwzględniać wszystkie wymienione elementy odległości wraz z istniejącymi między nimi powiązaniem. Niewykonalność tego zadania sprawiła, że w niniejszej pracy za najbardziej odpowiednią — w stosunku do badanego zagadnienia i istniejących danych — miarę odległości uznano odległość fizyczną, uwzględniającą najkrótsze i najdogodniejsze połączenia kolejowe pomiędzy ustalonymi centrami regionów<sup>14</sup>. Zwłaszcza że z możliwych do łatwego ujęcia ilościowego wariantowych mierników odległości, takich jak koszty przejazdu i czas podróży, obydwie są pewnym odzwierciedleniem dystansu fizycznego, a żaden nie wydaje się być miarą właściwszą. Słuszność wyboru takiego miernika potwierdziły również wyniki badań A. Gawryszewskiego (1974), który, analizując częstość występowania modeli najlepszych z punktu widzenia miernika odległości, uznał ostatecznie odległość komunikacyjną za miernik statystycznie najlepszy.

Istotną kwestią przy obliczaniu potencjału dochodu jest ustalenie wielkości wykładnika potęgowej odległości ( $b$ ). Empiryczna wiedza o wpływie odległości na wielkość wzajemnego oddziaływania jest niewielka. Niektóre badania wykazują zmniejszanie się wzajemnego oddziaływania wraz ze wzrostem odległości (Chojnicki 1966). Miernikiem hamującego wpływu odległości jest jej wykładnik potęgowy. Oszacowania parametru  $b$  dla różnych rodzajów wzajemnego oddziaływania wykazały, że wielkości te są bardzo zróżnicowane. Idea zmiennych wykładników została zaakceptowana przez wielu badaczy posługujących się modelami grawitacji. W zastosowaniach modeli potencjału postać funkcji odległości  $f(d) = d$  była raczej niezmienna. I. Q. Stewart i W. Warntz (1958) byli przeciwni przyjmowaniu w modelach potencjału wykładników potęgowych większych od dwu. Uważali, że wykładnik potęgowy równy jedności jest jedyną wielkością nie deformującą pojęcia potencjału. Carrothers przyjmując arbitralnie wielkości wykładników potęgowych od 1/2 do 2 wykazał, że każdy z nich daje najlepsze rezultaty przy obliczaniu potencjału dochodu dla różnych obszarów. W niniejszej pracy nie badano wpływu odległości na wzajemne oddziaływanie. Konkretyzacji modelu dokonano przez przyjęcie *a priori* wielkości wykładnika potęgowego równego jedności, stąd wzór na obliczenie potencjału dochodu przyjął postać następującą:

$$V_i = \sum_{j=1}^{22} \frac{Y_j}{d_{ij}} \quad (i = 1, \dots, 22). \quad (12)$$

Obliczenie całkowitego potencjału dochodu danego punktu wymagało również uwzględnienia wielkości potencjału tego punktu, tzn. potencjału, który wywołany przez masę zlokalizowaną w danym punkcie oddziałuje na nią samą. Pomiar samopotencjału możliwy jest przy założeniu, że masa skupiona w danym punkcie lub wokół

<sup>14</sup> Macierz najkrótszych i najdogodniejszych połączeń kolejowych pomiędzy centrami regionów opracowano na podstawie rozkładu jazdy PKP.

niego, znajduje się w odległości skończonej od tego punktu. Jak wykazała analiza, rozkład przestrzenny potencjału dochodu przy  $d_{ij} = 1$  wydaje się najbardziej zbliżony do rzeczywistego rozkładu punktów koncentracji tego potencjału. Wielkość ta została wprowadzona do obliczeń samopotencjału, przy określeniu wielkości całkowitego potencjału dochodu badanych regionów.

Obliczenie potencjału dochodu dla wszystkich badanych regionów umożliwiło ustalenie wielkości zmiennej niezależnej  ${}^{65-70}Z_i$ , tj. zmodyfikowanego względnego czynnika potencjału dochodu, przez podstawienie odpowiednich wielkości do wzoru (5b). Podobnie można byłoby obliczyć parametr  ${}^{65-70}C_i$ , czyli współczynnik wyjaśniający zmienne egzogeniczne wpływające na wzrost ludności w latach 1965—1970, podstawiając obliczone wartości do wzoru (5c)<sup>15</sup>. Możliwe jest to jedynie w sytuacji takiej jak niniejsza, gdy w celu sprawdzenia zasadniczej hipotezy modelu i oceny trafności prognozy buduje się model prognostyczny w ujęciu historycznym. Tylko wtedy znane są wszystkie dane. Przy konstruowaniu właściwej prognozy nieznaną jest wielkość  $X_i$  i w związku z tym współczynnik trzeba oszacować na podstawie analizy regresji, z danych dotyczących przeszłości. W związku z trudnościami, jakie napotyka prognozowanie wielkości i zmian  $n$  wartości współczynnika  $C$  dla przewidywanego okresu, Carrothers dopuszcza możliwość zastosowania pojedynczego współczynnika zmian egzogenicznych ( $C$ ), jako stałej charakterystyki w czasie i przestrzeni. W niniejszej pracy oszacowania parametru  $C$  modelu dokonano metodą najmniejszych kwadratów z wzoru<sup>16</sup>:

$$\frac{{}^{70}P_i}{{}^{65}P_i} = {}^{65-70}\lambda + {}^{65-70}C \cdot {}^{65-70}Z_i. \quad (13)$$

W wyniku otrzymano pojedynczą wartość współczynnika  $C = -0,1229$ , którą następnie wprowadzono do modelu prognostycznego w ujęciu historycznym, dla lat 1965—1970 (tab. 2).

#### WERYFIKACJA MODELU

Ocenę wiarygodności modelu potencjału dochodu Carrothersa zastosowanego do prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności Polski i jego dopasowania do badanej rzeczywistości przeprowadzono w dwóch etapach. W pierwszym z nich poddano testowaniu wartości prognostyczne modelu przez ocenę stopnia trafności prognozy, w następnym — wartości poznawcze modelu za pomocą weryfikacji hipotez leżących u podstaw budowy modelu.

W ocenie precyzji przewidywań posłużono się testem istotności chi kwadrat. Sprawdzone hipotezę  $H_0$  o braku istotnych różnic między wartościami teoretycznymi otrzymanymi z modelu a rzeczywistym zaludnieniem poszczególnych regionów Polski w 1970 r. Wartość obliczonej statystyki  $\chi^2 = 21,569$  przy 21 stopniach swobody daje tylko 43% prawdopodobieństwa poprawności hipotezy zerowej.

<sup>15</sup> Wzory (5b i 5c) podano na s. 15.

<sup>16</sup> Wzór ten jest uproszczoną postacią równania (4), gdzie  ${}^{70}P_i$  zastępuje  ${}^{70}F_i$ .

Tabela 2

Prognoza zmian w rozmieszczeniu ludności Polski w latach 1965–1970 według modelu potencjału dochodu Carrothersa

Regiony	Zaludnienie rzeczywiste w tys.		Potencjał dochodu			Zaludnienie prognozowane w tys. w 1970 r.	Reszty z modelu	
	1965	1970	1965	1970	stopa wzrostu 1965–1970		w tys.	w %
Warszawa	1253	1316	20,8	26,4	1,27	1291	25	1,89
Kraków	520	589	17,4	21,4	1,23	538	51	8,63
Łódź	744	763	16,8	20,6	1,23	770	–7	–0,90
Poznań	438	472	19,0	22,9	1,20	455	17	3,69
Wrocław	474	526	16,7	20,8	1,25	490	36	6,83
Białostocki	1160	1176	9,2	12,1	1,32	1192	–16	–1,33
Bydgoski	1837	1914	11,3	13,8	1,22	1903	11	0,58
Gdański	1353	1469	12,6	15,4	1,22	1402	67	4,59
Katowicki	3524	3701	14,0	17,1	1,21	3652	49	1,32
Kielecki	1899	1890	9,7	12,2	1,26	1960	–70	–3,72
Koszaliński	755	796	11,5	14,3	1,25	780	16	1,99
Krakowski	2128	2183	10,2	12,8	1,26	2196	–13	–0,58
Lubelski	1900	1925	10,1	12,4	1,24	1966	–41	–2,11
Łódzki	1665	1669	10,5	12,7	1,21	1727	–58	–3,45
Olsztyński	957	980	11,0	13,0	1,18	994	–14	–1,43
Opolski	1009	1059	12,2	15,1	1,23	1044	15	1,41
Poznański	2126	2193	11,4	13,6	1,19	2208	–15	–0,68
Rzeszowski	1693	1758	9,7	11,8	1,22	1753	5	0,26
Szczeciński	848	899	12,9	15,4	1,19	880	19	2,08
Warszawski	2453	2518	10,1	12,1	1,18	2547	–29	–1,14
Wrocławski	1967	1977	11,2	13,6	1,22	2038	–61	–3,06
Zielonogórski	847	885	11,6	14,0	1,20	879	6	0,64

Źródło: Rocznik Statystyczny GUS, 1971 i obliczenie własne



Stwierdzenie istotnych różnic między wartościami teoretycznymi a rzeczywistym zaludnieniem spowodowało odrzucenie hipotezy  $H_0$ . Mała trafność prognozy wykazała nieprzydatność modelu potencjału dochodu Carrothersa do krótkoterminowego prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności Polski.

Brak możliwości adaptacji tego modelu w jego oryginalnej postaci do warunków polskich nie podważa jednak, jak wykazały badania, samej idei wyjaśniania zmian w rozwoju zaludnienia za pomocą zmian ekonomicznych<sup>17</sup>. Stąd wydaje się celowa szczegółowa weryfikacja założeń leżących u podstaw budowy modelu i roli niektórych zmiennych w tym modelu, prowadząca do wskazania możliwości jego modyfikacji.

Model potencjału dochodu Carrothersa — jak już wspomniano — składa się z dwóch zasadniczych części. Pierwszą jest formalizacja matematyczna wzrostu liczby ludności, jakiego region może się spodziewać, jeśli jego ludność wzrasta proporcjonalnie do wzrostu liczby ludności kraju (tzw. metoda „wzrostu krajowego”)<sup>18</sup>. Wszelkie odchylenia od przyjętej powyżej zasady, czysto teoretycznej, model miał wyjaśniać zmianą potencjału dochodu stanowiącą zasadniczy człon drugiej części modelu. Jeśli założenie to miało być prawdziwe, to wyniki uzyskane przy wykorzystaniu modelu Carrothersa powinny być znacznie dokładniejsze od tych, które otrzymano jako rezultat zastosowania metody „wzrostu krajowego”. Konfrontację tych wyników przeprowadzono na podstawie testu porównawczego. Analizie poddano współczynniki określające wielkość odchylenia zaludnienia prognozowanego od wartości rzeczywistych, dla modelu Carrothersa i metody „wzrostu krajowego”. Współczynniki te naniesiono na układ współrzędnych, a rozkład otrzymanych punktów opisano za pomocą linii trendu porównawczego, która ma ogólną postać:

$$\frac{{}^{65-70}X_t}{{}^{70}P_t} = a + b \frac{{}^{65-70}X_t - {}^{65-70}C \cdot {}^{65-70}Z_t \cdot {}^{65}P_t}{{}^{70}P_t} \quad (14)$$

Analiza otrzymanych wyników wykazała bardzo małą różnicę pomiędzy współczynnikami odchyień. Obliczony za pomocą współczynnika korelacji stopień zgodności rozkładu wielkości odchyień modelu potencjału dochodu i metody „wzrostu krajowego” jest bardzo wysoki i wynosi 0,996<sup>19</sup>. Dodatnie nachylenie linii trendu oznacza, że obie metody przewidywań zmiernają w tym samym kierunku. Liczbowa wartość tego nachylenia ( $b = 1,0028$ ), nieco większa od jedności, wykazuje, że w wyniku zastosowania modelu potencjału dochodu osiągnięto nieco lepsze oszacowanie wielkości zaludnienia, niż przy użyciu metody „wzrostu krajowego”. O niewielkiej przewadze zastosowanego modelu świadczy również wielkość średnich arytmetycznych odchyień ( $\bar{x} = 0,705$ ;  $\bar{y} = 0,707$ ). Mniejsza wartość średniej

<sup>17</sup> Analiza korelacji pomiędzy naturalnym i migracyjnym przyrostem ludności regionów Polski w latach 1965 i 1970 a dochodem mierzonym wielkością spożycia dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych wykazała istotny związek między tymi zmiennymi. Wyniki tych badań przedstawiono na s. 24.

<sup>18</sup> Na podstawie metody „wzrostu krajowego” opracowano prognozę, którą wykorzystano jedynie jako bazę porównawczą w ocenie wyników modelu potencjału dochodu Carrothersa.

<sup>19</sup> Zależność obu zmiennych założono tylko w celu porównania współczynników.

arytmetycznej odchyłeń w modelu potencjału dochodu ( $\bar{x}$ ) wskazuje na nieco większą precyzję przewidywań modelu. Dodatni znak algebraiczny średnich odchyłeń świadczy o tym, że obliczone przy użyciu obu metod wielkości zaludnienia są na ogół niedoszacowane. Przeprowadzony test porównawczy wykazał, że zastosowana w modelu potencjału dochodu zmienna, wyjaśniająca zmianę zaludnienia poszczególnych regionów zmianą potencjału dochodu tych obszarów, nieznacznie tylko wpłynęła na wzrost dokładności przewidywań.

Fakt niedopasowania prognozowanych wielkości zaludnienia do rzeczywistości stał się podstawą próby modyfikacji modelu. Uznano, że wielkość średniej arytmetycznej odchyłeń w modelu potencjału może stanowić zgeneralizowaną miarę odchylenia wartości prognozowanej od rzeczywistej wielkości zaludnienia każdego regionu  $i$  w badanym okresie. Wprowadzenie tej wartości do modelu Carrothersa powinno prowadzić do zwiększenia precyzji przewidywań. Przeprowadzona próba włączenia średniej arytmetycznej odchyłeń ( $\bar{x}$ ) do modelu spowodowała wzrost poziomu dokładności prognozy, którego oceny dokonano za pomocą testu istotności chi kwadrat<sup>20</sup>:

Model	Statystyka $\chi^2$	Poziom istotności $\alpha$
Model potencjału dochodu Carrothersa	21,569	0,43
Metoda „wzrostu krajowego”	21,965	0,41
Model potencjału dochodu Carrothersa z korektą	18,927	0,59

W wyniku tej modyfikacji rozkład wielkości odchyłeń (stanowiących zmienność resztową, której model nie wyjaśnia) uległ wyraźnej poprawie (tab. 3). Jeszcze wyższy poziom dokładności można by osiągnąć wprowadzając do modelu regionalne odchylenia wielkości prognozowanych od rzeczywistych. Oszacowanie tych wartości,

Tabela 3

## Rozkład wielkości reszt (w %)

Wielkość reszt	Procentowy udział reszt w:		
	modelu potencjału dochodu Carrothersa	metodzie „wzrostu krajowego”	modelu potencjału dochodu Carrothersa z korektą
0,00–0,99	27,3	31,8	50,0
1,00–1,99	31,8	22,7	18,2
2,00–2,99	9,1	18,2	18,2
3,00 i więcej	31,8	27,3	13,6
	100,0	100,0	100,0

Źródło: Obliczenia własne

<sup>20</sup> Wyniki prognozy rozwoju ludności skorygowano o średnią odchyłeń ( $\bar{x} = 0,705$ ), tj. wielkość stanowiącą 0,71% wartości  $^{1970}F_i$ . Wartość tę odejmowano lub dodawano do wyniku prognozy, w zależności od tego, czy prognozowana wielkość zaludnienia była przeszacowana czy niedoszacowana.

na podstawie analizy wielu prognoz retrospektywnych, wymagałoby zebrania odpowiednich danych dotyczących wielkości dochodu regionów dla możliwie długiego okresu. Dotychczas statystyka polska nie dysponowała takimi danymi w ujęciu regionalnym.

Nieznaczną przewagę modelu potencjału dochodu Carrothersa nad metodą „wzrostu krajowego” świadczy o znikomej roli, jaką odgrywa zmodyfikowany, względny czynnik potencjału dochodu w modelu. Oznacza to równocześnie, że czynnik ten — wbrew założeniom modelu — nie wyjaśnia międzyregionalnych różnic we wzroście zaludnienia. Fakt ten potwierdza statystyczny test oceny poprawności modelu potencjału dochodu Carrothersa. Analizie poddano relacje między stopą wzrostu zaludnienia regionów  ${}^{70}P_i/{}^{65}P_i$  a czynnikiem potencjału dochodu, mającym powodować ten wzrost ( ${}^{65-70}Z_i$ ). W badaniu przyjęto założenie, że zależność obu zmiennych ma charakter w przybliżeniu liniowy, wyrażony równaniem:

$$\frac{{}^{70}P_i}{{}^{65}P_i} = {}^{65-70}\lambda + {}^{65-70}C \cdot {}^{65-70}Z_i. \quad (15)$$

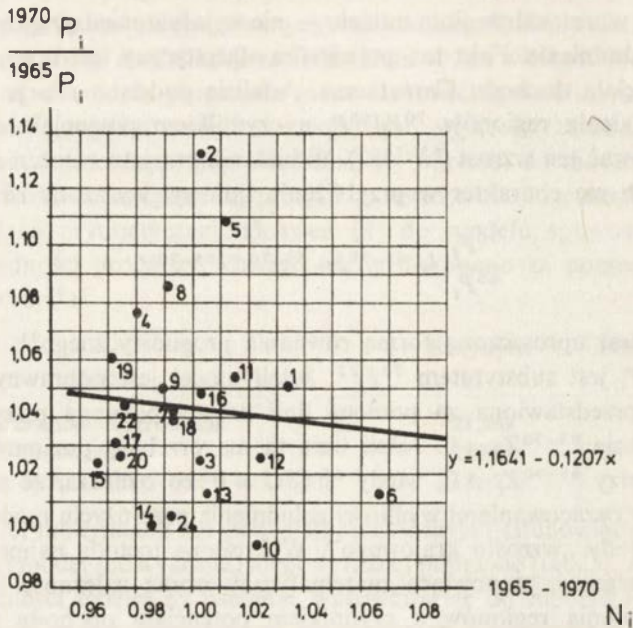
Równanie to jest uproszczoną formą równania prognostycznego<sup>21</sup>, w którym założono, że  ${}^{70}P_i$  jest substytutem  ${}^{70}F_i$ <sup>22</sup>. Jeżeli model jest poprawny, teoretyczna linia regresji przedstawiona za pomocą linii prostej powinna przechodzić przez  ${}^{65-70}\lambda$  w punkcie  ${}^{65-70}Z_i = 0$ . Jeżeli linia ta ma przebieg poziomy i przechodzi przez  ${}^{65-70}\lambda$  przy  ${}^{65-70}Z_i = 0$ , wtedy  ${}^{65-70}C = 0$ , co oznacza, że nie ma żadnej różnicy między oszacowaniami wielkości zaludnienia przy użyciu modelu potencjału dochodu i metody „wzrostu krajowego”. Wykreślona metodą najmniejszych kwadratów linia regresji, stanowiąca matematyczny obraz zależności między stopą wzrostu zaludnienia regionów a czynnikiem potencjału dochodu powodującym ten wzrost, nie przebiega poziomo (ryc. 3). Potwierdza to przewagę modelu potencjału dochodu nad metodą „wzrostu krajowego”. Przewaga ta jest jednak niewielka, o czym świadczy małe nachylenie linii regresji. Niski współczynnik determinacji wykazuje, że tylko 0,7% zmienności zmiennej zależnej  ${}^{70}P_i/{}^{65}P_i$  może być wyjaśnione zmiennością zmiennej niezależnej  ${}^{65-70}Z_i$ . Nachylenie linii regresji dowodzi, że zależność pomiędzy wzrostem zaludnienia a czynnikiem potencjału dochodu, mającym powodować ten wzrost, jest ujemna. Ostateczny wynik analizy korelacji nie potwierdza podstawowego założenia modelu. Współczynnik korelacji pomiędzy zmienną niezależną  ${}^{1965-1970}Z_i$  a zmienną zależną  ${}^{1970}P_i/{}^{1965}P_i$  jest nieistotny ( $r = -0,08$ ). Przyrost zaludnienia regionów nie jest więc funkcją wzrostu potencjału dochodu tych obszarów.

Weryfikacja modelu Carrothersa oparta na obserwacji algebraicznego znaku współczynnika  $C_i$  prowadzi również do odrzucenia hipotezy modelu, uzależniającej zmianę zaludnienia od zmiany potencjału dochodu. Carrothers założył, że jeśli

<sup>21</sup> Równanie prognostyczne modelu przedstawiono na s. 23.

<sup>22</sup> Założenie to można przyjąć wtedy, gdy model jest wykorzystany w prognozowaniu retrospektywnym.

model potencjału dochodu jest poprawny, to algebraiczny znak współczynnika  $C_i$  jest zawsze dodatni. Współczynnik wyjaśniający zmienne egzogeniczne wpływające na wzrost liczby ludności regionu  $i$  może mieć znak dodatni tylko wtedy, gdy obydwa czynniki  ${}^{\theta}X_i$  i  ${}^{\theta}Z_i$  mają ten sam (dodatni lub ujemny) znak algebraiczny. Założenie to jest zgodne z podstawową hipotezą modelu, według której zmiany wielkości



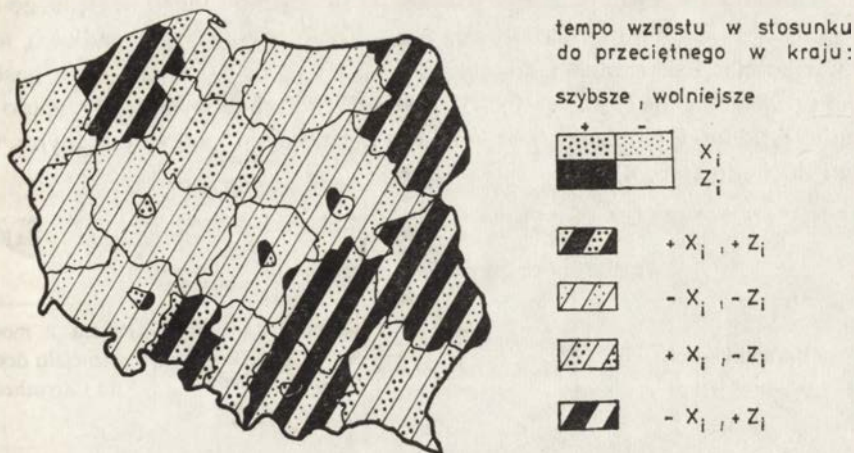
Ryc. 3. Statystyczny test oceny poprawności modelu potencjału dochodu Carrothersa  ${}^{1970}P_i/{}^{1965}P_i$  — stopa wzrostu liczby ludności regionu  $i$  w latach 1965—1970;  ${}^{1965-1970}N_i$  — względny potencjał dochodu regionu  $i$  w latach 1965—1970; 1—22 — regiony, patrz objaśnienia na ryc. 1

Statistical test of correctness of Carrothers' income potential model

${}^{1970}P_i/{}^{1965}P_i$  — rate of population growth at region  $i$  in 1965—1970;  ${}^{1965-1970}N_i$  — relative income potential factor at region  $i$  in 1965—1970

zaludnienia są funkcją zmian wielkości potencjału dochodu. Oznacza to, że wraz ze wzrostem potencjału dochodu, ujętym w modelu w postaci zmodyfikowanego względnego czynnika potencjału dochodu ( ${}^{\theta}Z_i$ ), wzrasta międzyregionalna pozycja regionu  $i$ . Wzrost tej pozycji, przedstawiony w postaci czynnika wzrostu międzyregionalnego ( ${}^{\theta}X_i$ ), powoduje wzrost liczby ludności tego regionu. Jeśli więc model jest poprawny, zależność między czynnikami jest wprost proporcjonalna. Ponieważ wielkość  $C_i$  zależy od wzajemnej relacji  $X_i$  i  $Z_i$ , otrzymano cztery możliwe kombinacje wartości  $X_i$  i  $Z_i$ . Albo obydwa czynniki są dodatnie lub ujemne i wówczas rezultat jest pozytywny ( $+C_i$ ), albo też jeden czynnik jest ujemny, a drugi dodatni lub odwrotnie i wówczas rezultat jest ujemny ( $-C_i$ ). Obserwacja znaku algebraicznego współczynnika  $C_i$  dla badanych 22 regionów w latach 1965—1970 wykazała,

że w 12 regionach współczynnik  $C_i$  jest ujemny. Ujemną wartość  $C_i$ , występującą w przypadku niezgodności algebraicznych znaków  $X_i$  i  $Z_i$ , obserwuje się w dwóch grupach województw (ryc. 4). W skład jednej z nich wchodzi regiony charakteryzu-



Ryc. 4. Rozkład przestrzenny kombinacji czynników  $^{1965-1970} X_i$  i  $^{1965-1970} Z_i$

$^{1965-1970} X_i$  — czynnik wzrostu międzyregionalnego liczby ludności regionu  $i$  w okresie 1965–1970;  $^{1965-1970} Z_i$  — zmodyfikowany względny czynnik potencjału dochodu w okresie 1965–1970)

Spatial distribution of the combination of factors  $^{1965-1970} X_i$  and  $^{1965-1970} Z_i$  (growth rate as compared with national average: faster +, slower -;  $X_i$  — population,  $Z_i$  — income)

$^{1965-1970} Z_i$  — modified relative income potential factor at region  $i$  in 1965–1970;  $^{1965-1970} X_i$  — interregional growth factor at region  $i$  in 1965–1970

jące się stopą wzrostu potencjału dochodu wyższą od krajowej (regiony: krakowski, Łódź, białostocki, lubelski i kielecki<sup>23</sup>). Nie obserwuje się jednak wpływu wzrostu potencjału dochodu na wzrost zaludnienia. Tempo wzrostu liczby ludności tych regionów jest niższe od tempa krajowego. Druga grupa obejmuje województwa, które cechuje wzrost zaludnienia przekraczający średnią wartość dla Polski. Są to regiony: gdański, Poznań, szczeciński, katowicki, zielonogórski, bydgoski i rzeszowski<sup>23</sup>. Wzrost ten nie jest spowodowany korzystnymi zmianami w potencjale dochodu. Stopa wzrostu potencjału dochodu tych regionów jest niższa od stopy krajowej. W przypadku pozostałych 10 regionów można powiedzieć, że model jest poprawny, ponieważ współczynniki  $C_i$  mają znak dodatni, a wzrostowi potencjału dochodu ponad przeciętną towarzyszy wzrost zaludnienia, który również jest większy od średniej krajowej, spadkowi zaś wartości  $Z_i$  odpowiada spadek wartości  $X_i$ . Nie oznacza to jednak związku przyczynowego między tymi zmiennymi. Jak wykazała weryfikacja modelu, przyrost zaludnienia regionów nie jest funkcją wzrostu potencjału dochodu tych obszarów. Natomiast analiza korelacji pomiędzy naturalnym i migracyjnym przyrostem ludności regionów Polski w latach 1965 i 1970 a do-

<sup>23</sup> Regiony zostały uszeregowane według malejącego wzrostu zaludnienia.

chodem, mierzonym wielkością spożycia dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych, wykazała istotny związek pomiędzy tymi zmiennymi ( $-0,68$  i  $0,92$ ). Poszukując rozwiązania tego problemu poddano badaniom zależność wzrostu zaludnienia regionów ( ${}^{70}P_i/{}^{65}P_i$ ) od charakteryzujących je wielkości: dochodu, potencjału dochodu, wzrostu potencjału dochodu i zmodyfikowanego względnego czynnika potencjału dochodu. Okazało się, że w dwu pierwszych przypadkach współczynniki korelacji są istotne i dodatnie ( $0,662$  i  $0,635$ ), natomiast dwie następne relacje są ujemne i nieistotne ( $-0,085$  i  $-0,086$ ). Podobne wyniki otrzymano przy badaniu zależności pomiędzy resztami a wymienionymi powyżej różnymi miernikami dochodu (tab. 4).

Tabela 4

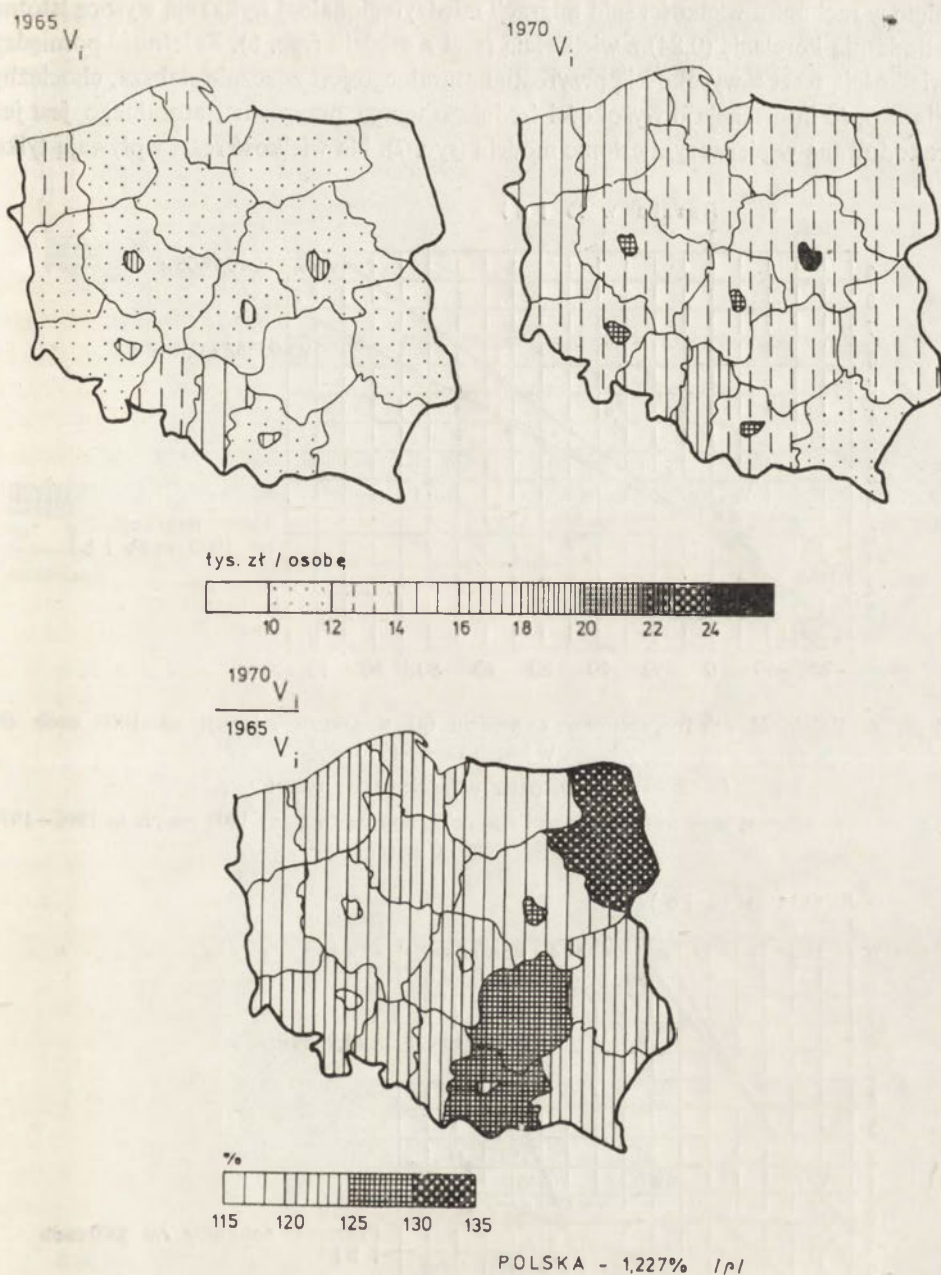
## Współczynniki korelacji i determinacji

Współczynniki korelacji ( $r$ ) i determinacji ( $r^2$ )	Regionalna stopa wzrostu zaludnienia		Reszta z metody „wzrostu krajowego”		Reszta z modelu potencjału dochodu Carrothersa	
	$r$	$r^2$	$r$	$r^2$	$r$	$r^2$
Dochód	0,662	0,438	0,664	0,441	0,674	0,454
Potencjał dochodu	0,635	0,403	0,636	0,404	0,637	0,405
Stopa wzrostu potencjału do- chodu	$-0,085$	0,007	$-0,079$	0,006	0,011	0,0001
Zmodyfikowany względny czyn- nik potencjału dochodu	$-0,086$	0,007	$-0,095$	0,009	$-0,005$	0,0000

Źródło: Obliczenia własne

Wysokie tempo wzrostu potencjału dochodu nie odpowiada dużemu wzrostowi zaludnienia. Można przypuszczać, że w krajach kapitalistycznych, skąd wywodzi się model Carrothersa, regiony charakteryzujące się wysokim potencjałem dochodu mają również wysokie tempo wzrostu tego potencjału, co w sumie wpływa na wzrost zaludnienia. W Polsce, m. in. wskutek dążenia do wyrównywania dysproporcji, regiony charakteryzujące się wysoką wartością potencjału dochodu mają na ogół niską stopę wzrostu tego potencjału (ryc. 5). Mimo to regiony te cechuje wysokie tempo wzrostu zaludnienia. Wynika z tego wniosek, że przyrost liczby ludności związany jest raczej z wysokością dochodu lub potencjału dochodu, a nie z jego przyrostem. Ponadto, jak wykazała przeprowadzona analiza, skuteczniejszym czynnikiem wyjaśniającym międzyregionalne różnice wzrostu zaludnienia w Polsce jest sam dochód, a nie jego potencjał, zwłaszcza że ten ostatni nie ma wpływu na przyrost naturalny ludności.

Na tempo wzrostu zaludnienia regionów wpływ wywierają obydwaj jego składniki: przyrost naturalny i migracyjny. Zastosowanie, w pierwszym członie modelu, zasady proporcjonalności rozwoju kraju i regionów oraz wadliwa — nie dostosowana do polskich warunków — konstrukcja drugiego członu modelu doprowadziły do eliminacji przyrostu migracyjnego z procedury obliczeniowej. Stopa wzrostu zaludnienia Polski, gdzie migracje międzyregionalne bilansują się w jej granicach, dotyczy tylko tempa przyrostu naturalnego i salda migracji zagranicznych. Pomi-



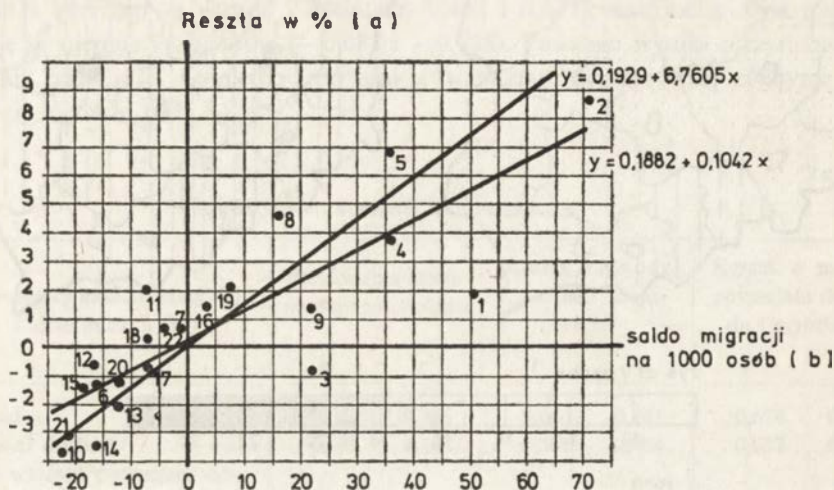
Ryc. 5. Potencjał dochodu w latach 1965–1970

Potencjał dochodu regionu  $i$ : w 1965 r. —  $^{1965}V_i$ , w 1970 r. —  $^{1970}V_i$ ;  $^{1970}V_i/^{1965}V_i$  — stopa wzrostu potencjału dochodu regionu  $i$  w latach 1965–1970

Income potential in 1965–1970 (in thousand zlotys per person)

$^{1965}V_i$  — income potential at region  $i$  in 1965;  $^{1970}V_i$  — income potential at region  $i$  in 1970;  
 $^{1970}V_i/^{1965}V_i$  — rate of income potential growth at region  $i$  in 1965–1970

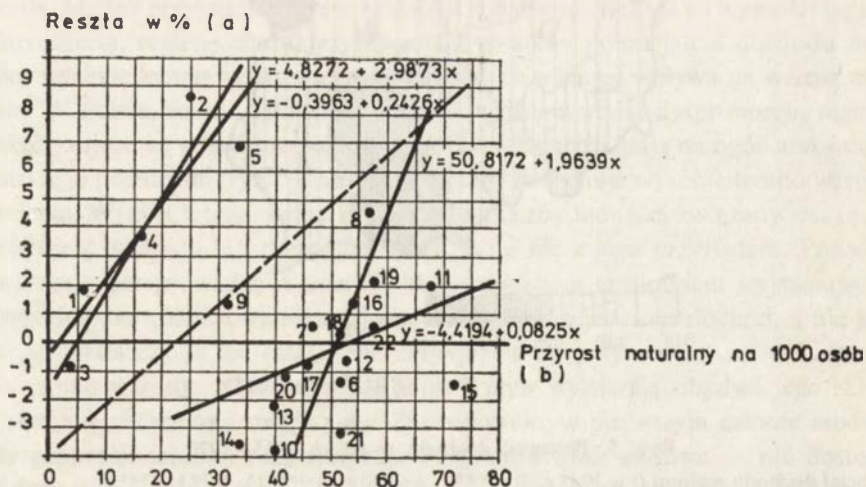
nięte w rachunku wielkości sald migracji międzyregionalnej wykazują wysoce istotną i dodatnią korelację (0,84) z wielkością reszt z modelu (ryc. 6). Zależność pomiędzy wielkością reszt a wysokością przyrostu naturalnego jest znacznie słabsza, chociażby dlatego, że informacja o wysokości średniego tempa przyrostu naturalnego jest już zakodowana w pierwszym członie modelu (ryc. 7). Na wielkość reszt wpływają tylko



Ryc. 6. Zależność między resztami z modelu (a) a saldem migracji na 1000 osób (b) w latach 1966–1970

1–22 — regiony, patrz objaśnienia na ryc. 1

Dependence between rests from the model and migration balance per 1000 people in 1966–1970  
a — rests in percent

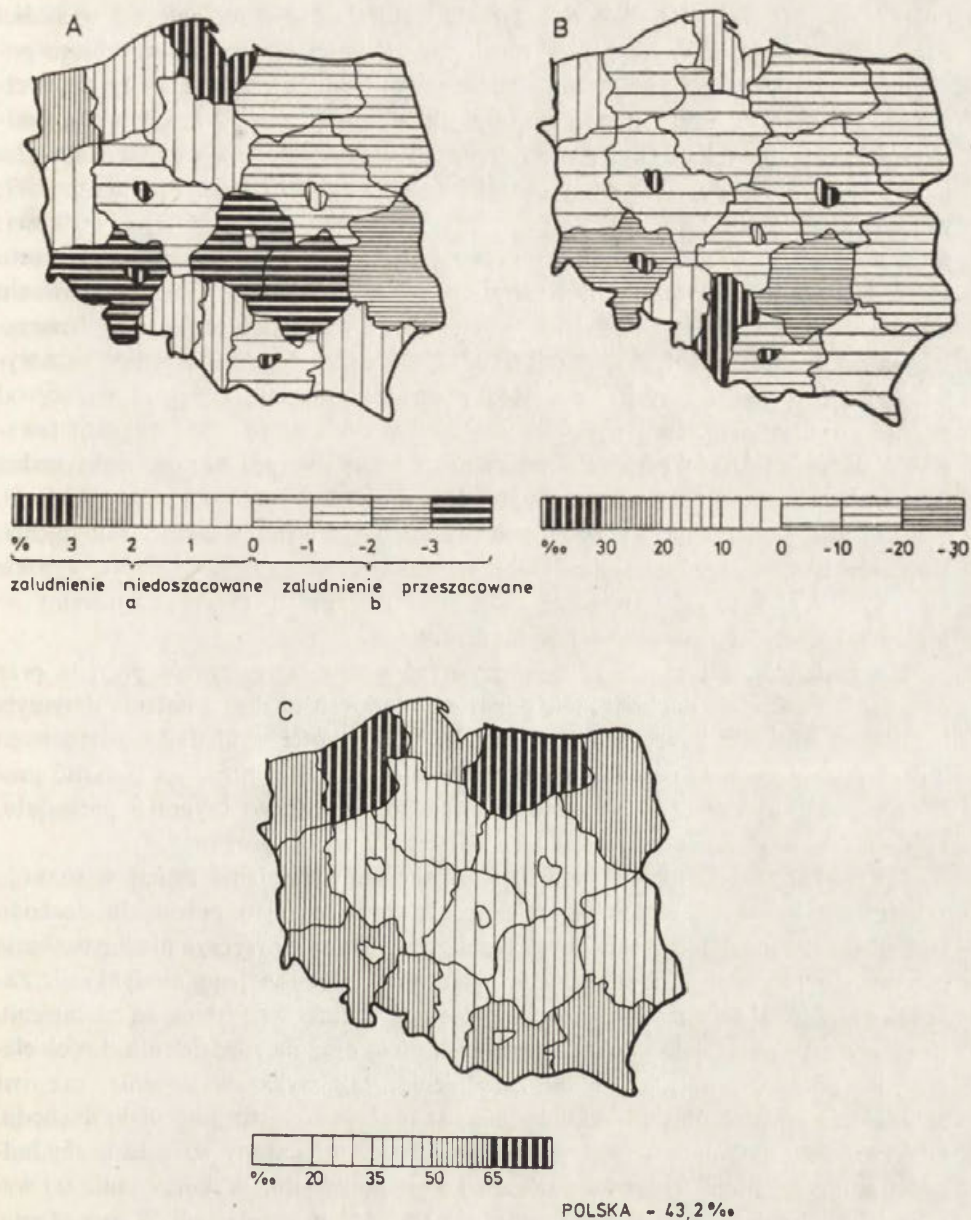


Ryc. 7. Zależność między resztami z modelu (a) a przyrostem naturalnym (b) w latach 1966–1970

1–22 — regiony, patrz objaśnienia na ryc. 1

Dependence between rests from the model and natural increase in 1966–1970  
a — rests in percent





Ryc. 8. Rozkład przestrzenny reszt z modelu, salda migracji i przyrostu naturalnego

A – reszty z modelu (1970) (a – zaludnienie niedoszacowane, b – zaludnienie przeszacowane),  
 B – saldo migracji na 1000 osób w latach 1966–1970, C – przyrost naturalny na 1000 osób w latach 1966–1970

Spatial distribution of rests from the model, migration balance and natural increase

A – rests from the model (1970) (a – underestimated population, b – overestimated population),  
 B – migration balance per 1000 people in 1966–1970, C – natural increase per 1000 people in 1966–1970

odchylenia rzeczywistej wielkości przyrostu naturalnego w regionie od wielkości zastosowanej w modelu. Zbyt duże różnice w wielkości przyrostu naturalnego pomiędzy województwami a miastami wydzielonymi z województw sprawiły, że zależność pomiędzy tym przyrostem a resztami dla zbioru 22 regionów była słaba i odwrotnie proporcjonalna. Obliczenie odrębnych współczynników korelacji dla obu podzbiorów wykazało rzeczywisty charakter tego związku i jego siłę (miasta 0,89; województwa 0,40). Analiza porównawcza rozkładu przestrzennego wielkości: salda migracji, przyrostu naturalnego i reszt, potwierdziła współmienność przyrostu rzeczywistego i wielkości reszt. Reszty dodatnie, świadczące o niedoszacowaniu prognozowanej wielkości zaludnienia, występują we wszystkich regionach odznaczających się dodatnim saldem migracji (ryc. 8). Obszary te cechuje również — z wyjątkiem miast wydzielonych — wysoki przyrost naturalny, znacznie wyższy od przyjętego w modelu. Jeśli wysokim wartościami dodatniego salda migracji towarzyszą wysokie wartości przyrostu naturalnego, reszty osiągają wartość maksymalną (np. woj. gdańskie). Odwrotnym przykładem mogą być regiony łódzki i kielecki, dla których model zbyt wysoko oszacował przewidywaną wielkość zaludnienia. Resztom tym, osiągającym najwyższe wartości ujemne, odpowiadają: wysokie i najwyższe ujemne saldo migracji oraz niski rzeczywisty przyrost naturalny — niższy od wartości zastosowanej w modelu.

Na wielkość reszt mogły również wywrzeć wpływ uproszczenia przyjęte przy obliczaniu potencjału dochodu. Nie poparte dodatkową analizą ustalenia dotyczyły lokalizacji punktów koncentracji potencjału<sup>24</sup> i wielkości wykładnika potęgowego odległości. W analizie pominięto oddziaływanie tych elementów na trafność prognozy, ponieważ dotyczą one zmodyfikowanego względnego czynnika potencjału, który nie wywarł istotnego wpływu na ostateczny wynik prognozy.

Jak wykazała weryfikacja modelu Carrothersa, wyjaśnianie zmian w rozwoju zaludnienia badanych regionów zmiennością stopy wzrostu potencjału dochodu tych obszarów nie dało oczekiwanych rezultatów. Badanie przyczyn niedopasowania modelu do rzeczywistości umożliwiło wskazanie kierunku jego modyfikacji. Zasadnicza modyfikacja modelu powinna polegać przede wszystkim na zastąpieniu stopy wzrostu potencjału dochodu jego wielkością oraz na rozdzieleniu dwóch elementów prognozowanego wzrostu zaludnienia. Jak wykazały badania, przyrost zaludnienia poszczególnych regionów nie jest funkcją wzrostu potencjału dochodu. Obserwuje się natomiast współwystępowanie zmienności stopy wzrostu liczby ludności ze zmiennością wielkości dochodu i jego potencjału. Wykorzystanie tej wysoce istotnej zależności mogłoby poprawić trafność przewidywań. Wprowadzenie do modelu odpowiedniego czynnika, określającego zależność wzrostu zaludnienia od wielkości potencjału dochodu, powinno być poprzedzone analizą korelacji pomiędzy zasadniczymi elementami wzrostu liczby ludności a różnymi miernikami

<sup>24</sup> Przy określaniu wielkości potencjału dochodu badanych regionów przyjęto, że masa potencjału skoncentrowana jest w centrum każdego obszaru. Tylko dla jednoimiennych jednostek przestrzennych, takich jak województwo i miasto z niego wydzielone, wyznaczono teoretyczne punkty koncentracji potencjału.

dochodu w przeliczeniu na 1 mieszkańca. Badanie to pozwoliłoby wybrać najważniejszy miernik dochodu, wywierający możliwie jednorodny, indukujący wpływ na wszystkie składniki wzrostu zaludnienia. Zastosowanie koncepcji potencjału do przewidywania ogólnej liczby ludności wykazało zasadnicze słabości modelu. Potencjał dochodu nie ma istotnego wpływu na przyrost naturalny. Opór odległości, mierzony funkcją odległości, odnosi się głównie do międzyregionalnych przemieszczeń ludności. Różnice te powinny znaleźć wyraz w budowie modelu prognostycznego. Wykorzystanie potencjału dochodu do przewidywania wielkości migracji winno być poprzedzone badaniami zależności pomiędzy wielkością regionalnych potencjałów a międzyregionalnymi przemieszczeniami ludności. Niezbędna jest także analiza wpływu odległości na migracje ludności, pozwalająca określić wielkość wykładnika potęgowego odległości. Dodatkowe badania powinny także wyjaśnić zależności pomiędzy wielkością i kształtem regionów oraz usytuowaniem punktów koncentracji potencjału a jego wielkością.

## ZASTOSOWANIE MODELU ŁAŃCUCHÓW MARKOWA W PROGNOZOWANIU ZMIAN W ROZMIESZCZENIU LUDNOŚCI POLSKI

### ZAŁOŻENIA TEORETYCZNE I BUDOWA MODELU ERGODYCZNEGO

Łańcuch Markowa<sup>25</sup> jest modelem matematycznym opisującym pewien typ procesu stochastycznego Markowa<sup>26</sup>. Proces ten, jako jeden z trzech głównych typów procesów stochastycznych zwanych losowymi<sup>27</sup>, jest jakąkolwiek sekwencją eksperymentów, która może podlegać analizie prawdopodobieństwa (Kemeny, Snell 1960). Dla pełnej charakterystyki stochastycznej tego procesu w chwili  $t$  wystarczy znajomość stanu, w jakim znajduje się proces w chwili poprzedzającej  $t$  oraz zbiór prawdopodobieństw warunkowych. Innymi słowy, wynik badanego eksperymentu zależy tylko od wyniku eksperymentu bezpośrednio go poprzedzającego, a zależności te są takie same na wszystkich etapach. Przeszłość systemu może wpływać na jego przyszłość tylko przez stan obecny. Proces łańcuchów Markowa, przemieszczający się w sekwencji kroków przez zbiór stanów, określić można jak następuje. Dany jest zbiór stanów  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ . Proces może się znajdować w jednym, i tylko w jednym, z tych stanów w danym czasie i przemieszcza się sukcesywnie z jednego stanu do drugiego. Każde przejście jest krokiem. Gdy proces znajduje się w stanie  $s_i$ , istnieje prawdopodobieństwo  $p_{ij}$ , że proces przemieści się do stanu  $s_j$  w następnym kroku. Prawdopodobieństwo przejścia ze stanu  $s_i$  do stanu  $s_j$  zależy tylko od stanu  $s_i$ , w którym proces znajduje się przed krokiem (własność Markowa). Prawdopodobieństwa  $p_{ij}$  dane są dla każdej kolejnej pary stanów. Prawdopodobieństwa te mogą być przedstawione w postaci macierzy. Macierz  $P = [p_{ij}]$  zwana jest

---

<sup>25</sup> A. A. Markow jako pierwszy rozpatrywał ciągi związane zmiennych losowych, dla których przyszłość nie zależy od przeszłości.

<sup>26</sup> W modelu procesu Markowa przejście z jednego stanu do drugiego może mieć miejsce w jakimkolwiek punkcie czasu, w łańcuchu zaś Markowa stan zmienia się tylko w dyskretnych interwałach czasu (Collins 1970, s. 3).

<sup>27</sup> Por. L. Collins (1970, s. 1). Określenia „procesy stochastyczne” i „procesy losowe” są synonimami, choć w praktyce drugi termin używany jest zazwyczaj wtedy, kiedy uwzględniany jest parametr czasu, podczas gdy w procesach losowych parametr ma inny sens fizyczny. Ponieważ z matematycznego punktu widzenia sens fizyczny procesu jest nieistotny, można nie odróżniać tych przypadków, stosując nazwę proces stochastyczny.

macierzą prawdopodobieństw przejścia:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} & \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (16)$$

Poszczególne elementy macierzy  $P$  są nieujemne, a suma składników w każdym wierszu równa jest 1.

Stany łańcuchów Markowa można podzielić na rodzaje, w zależności od tego czy istnieją między nimi połączenia, tzn. czy możliwe jest przechodzenie z jednego stanu do drugiego. Wyróżnia się trzy zasadnicze rodzaje stanów: ergodyczne, pochłaniające i przejściowe. Stan ergodyczny jest elementem zbioru ergodycznego, w którym każdy stan może być osiągnięty z każdego innego stanu (niekoniecznie w jednym kroku), a zbiór ten, raz osiągnięty, nie może być opuszczony. Jeśli zbiór ergodyczny zawiera tylko jeden element, a więc jeden stan, którego zgodnie z powyższą definicją opuścić nie można, stan taki nazywa się stanem pochłaniającym. Stan  $s_i$  jest stanem pochłaniającym wtedy, i tylko wtedy, jeżeli  $p_{ii} = 1$ . Stan przejściowy jest elementem zbioru przejściowego, w którym każdy stan może być osiągnięty z każdego innego stanu, a zbiór ten może być opuszczony, ale raz opuszczony nie może być ponownie osiągnięty.

Powyższa klasyfikacja stanów prowadzi do pierwotnego podziału łańcuchów Markowa na dwie grupy, w zależności od tego czy łańcuchy posiadają zbiory przejściowe, czy ich nie posiadają. Łańcuchy bez zbiorów przejściowych to łańcuchy zawierające pojedyncze zbiory ergodyczne, zwane łańcuchami ergodycznymi. Zdarzają się również łańcuchy złożone, posiadające kilka zbiorów ergodycznych, ale ze względu na brak powiązań między nimi można je badać oddzielnie. W łańcuchach ze zbiorami przejściowymi proces przemieszcza się przez zbiory przejściowe w kierunku zbiorów ergodycznych. W zależności od charakteru zbiorów ergodycznych można wydzielić łańcuchy ergodyczne i pochłaniające.

Łańcuchy pochłaniające charakteryzują się tym, że zbiory ergodyczne występujące w nich są zbiorami jednostkowymi, a więc posiadają przynajmniej jeden stan pochłaniający, i to taki, który może być osiągnięty z każdego stanu (niekoniecznie w jednym kroku). Kiedy proces osiągnie stan pochłaniający oznacza to, że proces został pochłonięty. Łańcuch w tym miejscu zatrzymuje się, ponieważ ze stanu pochłaniającego nie można przejść do stanu niepochłaniającego.

Łańcuch ergodyczny jest łańcuchem, w którym możliwe jest przejście pomiędzy jakimikolwiek dwoma stanami (niekoniecznie w jednym kroku). Szczególnym przypadkiem łańcucha ergodycznego jest łańcuch regularny, w którym dla pewnego  $n$  macierz  $P^n$  nie ma elementów zerowych, co oznacza, że nie istnieją takie stany, pomiędzy którymi nie byłoby połączenia. Stąd jakakolwiek potęga macierzy prawdopodobieństw przejść, która nie ma elementów zerowych, choćby była tylko jedną, wskazuje na regularność łańcucha Markowa. Jeśli przejście pomiędzy stanami możliwe jest tylko — na przykład — w parzystej liczbie kroków, wtedy wszystkie

potęgi macierzy przejść będą zawierały elementy zerowe, a więc łańcuch nie będzie regularny, lecz cykliczny. Jeżeli  $P$  jest macierzą prawdopodobieństw przejść dla łańcucha regularnego lub cyklicznego, wtedy potęga  $P^n$  zbliża się do macierzy  $A$ , która jest wartością graniczną. Wartość tę zapisać można w sposób następujący:

$$(31) \quad \begin{array}{ll} \text{dla łańcucha regularnego} & \text{dla łańcucha ergodycznego} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P^n = A, & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P + P^2 + \dots + P^n}{n} = A. \end{array} \quad (17)$$

Każdy wiersz macierzy  $A$  jest wektorem  $a = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ , którego składniki są dodatnie i spełniają następujący warunek:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_r = 1. \quad (18)$$

Wektor  $a$  jest jedynym w swym rodzaju wektorem prawdopodobieństwa, takim, że  $a \cdot P = a$ . Wektor ten reprezentuje rozkład równowagi, który łańcuch osiąga niezależnie od tego kiedy proces się rozpoczął, jeśli  $n$  zmierza do nieskończoności. Po osiągnięciu stanu równowagi ruch pomiędzy poszczególnymi stanami kompensuje się. Prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami, przy długofalowej predykcji (tj. dużym  $n$ ), są w przybliżeniu takie same dla wszystkich  $n$ . To znaczy, że  $p_{ij}$  jest zbliżone do  $a_{ij}$  (elementu macierzy  $A$ ). Miarą całkowitego odchylenia od stanu równowagi jest macierz  $Z$ , zwana macierzą fundamentalną, która ma następującą postać:

$$\begin{array}{ll} \text{dla łańcucha regularnego} & \text{dla łańcucha ergodycznego} \\ Z = I + \sum_{n=1}^{\infty} (P^n - A), & Z = (I - P + A)^{-1}, \end{array} \quad (19, 20)$$

gdzie:  $I$  — macierz tożsama jednostkowa,  
 $P$  — macierz prawdopodobieństw przejść,  
 $A$  — macierz graniczna.

Zanim badany układ osiągnie stan równowagi, przechodzi przez kolejne stany przejściowe. Zbadanie zachowania się układu w czasie możliwe jest tylko wtedy, gdy można określić stany i prawdopodobieństwo przejścia oraz znany jest stan początkowy układu. Stan wyjściowy układu, obrazujący prawdopodobieństwo wystąpienia jednostek w poszczególnych stanach, może być przedstawiony za pomocą poziomego wektora prawdopodobieństwa  $p^{(0)}$  o postaci:

$$p^{(0)} = [p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_k^{(0)}]. \quad (21)$$

Prawdopodobieństwo przejścia pomiędzy stanami określa macierz prawdopodobieństw przejść  $P$ . Posiadanie powyższych informacji umożliwi obliczenie prawdopodobieństwa wystąpienia jednostek w poszczególnych stanach po pierwszym kroku, tj. w czasie  $t = 1$ , według wzoru:

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P. \quad (22)$$

Dla kroków następnych wzory mają postać:

$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot P, \quad (23)$$

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P. \quad (24)$$

Jeśli do wzoru na obliczenie  $p^{(2)}$  podstawiony zostanie wzór na obliczenie  $p^{(1)}$ , otrzymane przekształcenia będą miały postać:

$$p^{(2)} = p^{(0)} \cdot P \cdot P = p^{(0)} \cdot P^2, \quad (25)$$

i odpowiednio:

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n. \quad (26)$$

Obydwa matematycznie równoważne wzory umożliwiają obliczenie  $n$ -tego przeciętnego stanu układu:

$$p^{(n)} = p^{(0)} \cdot P^n = p^{(n-1)} \cdot P. \quad (27)$$

Model łańcuchów Markowa — jak każdy model upraszczający złożoność badanych zjawisk — ma wiele ograniczeń. Zasadnicze z nich to: zamknięcie systemu, istnienie odrębnych stanów i odrębnych odcinków czasu oraz stabilność prawdopodobieństw. Charakterystyczne dla ergodycznego modelu łańcuchów Markowa zamknięcie systemu oznacza wyłączenie z rozważań urodzeń i zgonów jako stanów systemu, ponieważ pierwszy stan nie może być osiągnięty z innych stanów, drugi zaś nie może być opuszczony, jeśli raz został osiągnięty. Jest to jedno z podstawowych założeń ergodycznego modelu łańcuchów Markowa. Zgodnie z nim, konsekwencje urodzeń i zgonów w systemie wyrównują się i są pomijane w analizie. Uwzględnienie w procedurze obliczeniowej naturalnych składników zmian liczby ludności, jako stanów, przeczyłoby istocie modelu, którą jest możliwość przechodzenia pomiędzy jakimikolwiek stanami układu. Odtworzenie zbiorowości możliwe jest jedynie przy zastosowaniu absorpcyjnego łańcucha Markowa, co prowadzi do komplikacji strony matematycznej zagadnienia (Collins 1970). Przyjęcie odrębnych stanów i odrębnych odcinków czasu w modelu łańcuchów Markowa jest wynikiem niezbędnej generalizacji. Wprowadzenie czasu i przestrzeni, jako zmiennych ciągłych, wymagałoby zastosowania modeli dyfuzji. Posługiwanie się nimi trafia jednak na trudności, a ich zastosowania w zagadnieniach społeczno-ekonomicznych nie dają — jak dotychczas — oczekiwanych rezultatów. Autorzy prac dotyczących zastosowań łańcuchów Markowa krytycznie oceniają również założenie stabilności prawdopodobieństw przejść i sugerują modyfikację modelu, polegającą na wprowadzeniu zmiennych prawdopodobieństw przepływów (Bonnar 1976; Kotowska 1977). Krytyczna ocena założeń budowy modelu nie zmniejsza jednak jego przydatności. Model ten służy nie tylko jako narzędzie analityczne w badaniach mobilności ludności, ale daje się również zastosować w prognozowaniu zmian w rozmieszczeniu ludności. Zasadniczą zaletą łańcuchów Markowa jest możliwość przestrzennego zastosowania i badania złożonych całości strukturalnych. Ponadto, ze względu na prostotę konstrukcji i małą liczbę zmiennych wchodzących do modelu, może on być

wykorzystywany przy istniejącej i powszechnie dostępnej bazie danych statystycznych. Walory te sprawiają, że model łańcuchów Markowa znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach nauki.

#### ZASTOSOWANIE MODELU W BADANIACH GEOGRAFICZNYCH, ZE SZCZEGÓLNYM UWZGLĘDNIENIEM ZAGADNIENÍ LUDNOŚCIOWYCH

Proces łańcuchów Markowa, opisany przez autora w 1907 r., po raz pierwszy zastosowano w genetyce. Dopiero później metoda ta była stosowana przez ekonomistów i matematyków, następnie przez psychologów, demografów, geografów i techników. Od 1944 r. coraz liczniejsze są przykłady zastosowań łańcuchów Markowa w naukach przyrodniczych<sup>28</sup>. Dzięki możliwości zastosowania macierzy geograficznej, łańcuchy Markowa stosowane są w naukach o zjawiskach przestrzennych.

Analizie łańcuchowej były poddawane problemy geografii osadnictwa, takie jak koncentracja miast lub zagadnienie małych miast (Fuquitt 1965; Williamson, Swanson 1966). Model ten został również wykorzystany w analizie zmienności w czasie wysokości czynszów w miastach USA i cen ziemi w strefach podmiejskich, a także w badaniach wpływu decyzji planistycznych na procesy zmian rolniczego użytkowania ziemi w miastach Anglii i Walii (Clark 1965; Harris Jr. 1968; Drewett 1969). Próbę konstrukcji modelu procesów decyzji rynkowych, na podstawie analizy łańcuchów, podjęli R. G. Golledge i L. A. Brown (1967), a P. E. Smith (1961) zastosował łańcuchy Markowa do planowania międzyregionalnego przepływu dóbr i usług w regionach słabo rozwiniętych.

Pojawiły się także zastosowania modelu Markowa w geografii rolnictwa, komunikacji i przemysłu. W dziedzinach tych model łańcuchów Markowa służył badaniu typów użytkowania ziemi, struktury agrarnej, rozwoju sieci autostrad, struktury przestrzennej przemysłu. P. E. Hart i S. J. Prais (1956) zastosowali technikę łańcuchów Markowa do studium struktury i koncentracji przedsiębiorstw przemysłowych Wielkiej Brytanii. Adaptacji tej metody do przewidywania zmian w strukturze przemysłu USA dokonała I. G. Adelman (1958). Stosując pojęcie równowagi statycznej i dynamicznej, autorka zaprezentowała technikę badania właściwości stanu równowagi i skonstruowała miarę mobilności przedsiębiorstw opartą na koncepcji mobilności socjalnej S. J. Prais (1955). Podobnie jak I. G. Adelman, również L. Collins (1970) wykazał przydatność modelu łańcuchów Markowa nie tylko do opisu i analizy zjawisk, ale także do przewidywania zmian. Zastosował on model Markowa do prognozowania strukturalnych i przestrzennych zmian w rozwoju przemysłu prowincji Ontario, wprowadzając jednocześnie różne propozycje metodyczne. Autor udoskołonił model analityczny osiągając wysoką trafność przewidywań.

Najliczniejsze zastosowania modelu łańcuchów Markowa występują w badaniach ruchliwości ludności. Ruchliwość ta ujmowana jest przestrzennie lub jako przechodzenie ludności z jednej kategorii wielkościowej czy klasy typologicznej do drugiej.

<sup>28</sup> Obszerny przegląd zastosowań modelu łańcuchów Markowa znajduje się w pracy K. Dramowicza (1973).



Badaniom poddawana była ruchliwość ludności pomiędzy różnymi klasami dochodu i różnymi klasami społecznymi (Champernowe 1953; Prais 1955). Mobilność siły roboczej pomiędzy różnymi typami przemysłu została opisana przez I. Blumena i in. (1955), którzy posłużyli się modelem ruch — stabilność. Autorzy założyli, że przepływ siły roboczej pomiędzy różnymi typami przemysłu może być opisany za pomocą łańcucha Markowa. Stosując szczegółowy podział robotników według cech biologicznych wykazali, że dla różnych klas wieku i płci istnieją wyraźne różnice w ogólnej liczbie przemieszczeń. Modyfikację tego modelu przedstawił L. A. Goodman (1961), proponując podział heterogenicznych grup w populacji na homogeniczne subpopulacje, które umożliwiają dokładniejsze predykcje zachowania.

Wśród prac będących przykładem zastosowania łańcuchów Markowa w geografii licznie reprezentowane są studia dotyczące migracji ludności w przestrzeni. P. A. Compton (1968) zastosował ergodyczny model Markowa do zademonstrowania zmienności wpływu każdego rocznego systemu migracyjnego na wielkość zaludnienia 24 regionów Węgier w latach 1959–1965. Badaniu poddane zostały także zmiany wielkości migracji pomiędzy skrajnymi datami, mierzone jako wynik działania każdego rocznego systemu migracyjnego na początkowy rozkład ludności. Przy tej okazji Compton wskazał na wyższość podejścia systemowego nad tradycyjnym. Stany równowagi ludności poszczególnych regionów, obliczone przy zastosowaniu siedmiu systemów migracyjnych, zostały wykorzystane jako indeksy migracji, w celu przeprowadzenia klasyfikacji regionów według typu zachowania migracyjnego. Podobnie D. Bonnar (1976), uznając tradycyjne techniki analizy migracji za nieprzydatne, badał za pomocą łańcuchów Markowa ruchliwość przestrzenną różnych grup ludności w granicach Wielkiego Londynu.

Model łańcuchów Markowa jest wykorzystywany nie tylko jako narzędzie analityczne w badaniach mobilności ludności, ale także jako technika prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności. Przykładem tych zastosowań są prace J. D. Tavera, W. R. Gulleya (1965) — autorów krótkoterminowej prognozy ludności USA oraz J. P. Côlea i in. (1970), którzy przedstawili prognozy ludnościowe dla Brazylii do 2060 r. Ergodyczny i absorpcyjny model łańcuchów Markowa był podstawą budowy modeli polityki migracji międzyregionalnych. A. Rogers (1966) stwierdził, że modele łańcuchów Markowa, przedłużające dotychczasowe trendy i nie uwzględniające możliwości zmian kierunku oraz intensywności ruchów migracyjnych, nie mogą być stosowane w predykcjach, w których należy zmiany takie przewidzieć. Również — założona w modelu — kompensacja ruchów pomiędzy poszczególnymi stanami może okazać się sprzeczna z celami polityki przestrzennej. W takich przypadkach, zdaniem autora, niezbędne będzie sterowanie procesami migracji w celu uzyskania pożądanego rozkładu ludności w poszczególnych regionach. A. Rogers, modyfikując model Markowa przez wprowadzenie wektora interwencji rządowych i wektora pożądanej równowagi, przystosował go do prognozowania systemów sterowanych i zmiennych w czasie. Poza interwencyjnymi modelami Rogers opracował modele z częściową interwencją, przeznaczone do stosowania w sytuacji, gdy państwo może wywierać wpływ na migracje ludności tylko w pewnej części regionów.

W polskiej literaturze naukowej opracowania o charakterze teoretycznym, a przede wszystkim prace prezentujące konkretne zastosowania metody łańcuchów Markowa, należą do rzadkości. Pierwsze próby wykorzystania łańcuchów Markowa, w postaci modelu dynamiki postaw, przeprowadzono w dziedzinie socjologii (Okrasa 1968). Przydatność łańcuchów Markowa do badania przebiegu zdarzeń w czasie wykazano także w analizie wzajemnego przekazywania gruntów rolnych pomiędzy sektorem indywidualnym, państwowym i społecznym (Szajnowska 1971). Problematykę szacowania parametrów jednorodnego i niejednorodnego łańcucha Markowa podjęto w Instytucie Rozwoju Gospodarki SGPiS. Praca J. Józwiak (1974) przedstawia propozycje estymacji zmiennych w czasie prawdopodobieństw przejść oraz przykład zastosowania modelu Markowa do prognozowania przekształceń produkcji przemysłu w nawiązaniu do podstawowych czynników wzrostu. Zagadnienie estymacji prawdopodobieństw przejścia jednorodnego łańcucha Markowa, przy użyciu różnych metod, poruszyli w swej pracy M. Gruszczyński i I. Koźniewska (1975), wykorzystując łańcuchy Markowa do prognozowania zmian w strukturze produkcji przemysłowej. Model łańcuchów Markowa, jako instrument prognostyczny, zastosował także L. Bolesławski (1972) do opracowania koncepcji prognozowania migracji wewnętrznych. Wobec negatywnej próby wykorzystania łańcucha jednorodnego, Bolesławski posłużył się łańcuchem niejednorodnym do prognozowania odpływu ze wsi do miast, z miast na wieś i przyrostu migracyjnego w miastach w latach 1966–1971. Porównanie danych empirycznych z teoretycznymi wykazało wysoki poziom trafności opracowanej prognozy. Autor stwierdził również, że niezbędne są prognozy bardziej szczegółowe, wskazując jednocześnie na ryzyko zastosowania modelu niejednorodnego do większej liczby małych jednostek przestrzennych. Komplikacja strony matematycznej może utrudnić stosowanie modelu, a ponadto ujawnienie się, w zmiennej formie, zależności społeczno-ekonomicznych rządzących procesem migracji może wpłynąć na zmniejszenie trafności prognozy.

## EMPIRYCZNE ZASTOSOWANIE MODELU

### MODEL PROGNOSTYCZNY W UJĘCIU HISTORYCZNYM. ZAŁOŻENIA

W procesie rozwoju ludności dość istotną rolę odgrywają czynniki losowe. Decyzje prokreacyjne i migracyjne warunkują, w poważnej mierze, subiektywny w swej istocie czynnik psychologiczny. Można więc — upraszczając problem — decyzje te traktować nie jako zmienne deterministyczne, lecz jako zmienne losowe. Przy takim założeniu można zastosować stochastyczny model łańcuchów Markowa do prognozowania rozwoju ludności. Najlepszym rozwiązaniem byłoby wykorzystanie w tym celu absorpcyjnego modelu łańcuchów Markowa, gdyby nie komplikacja strony matematycznej procedury obliczeniowej tego modelu. Wpłynęło to na celowe ograniczenie prognozy zmian w rozmieszczeniu ludności Polski do migracyjnego czynnika tych zmian. Ograniczenie to umożliwiło zastosowanie ergodycznego modelu łańcuchów Markowa. Uznano zresztą, że badanie skuteczności przewidywań przy użyciu modelu ergodycznego winno poprzedzać próbę zastosowania modelu absorpcyjnego w prognozowaniu rozwoju ludności.

W celu zbadania wartości prognostycznych ergodycznego modelu łańcuchów Markowa podjęto próbę jego wykorzystania do opracowania prognozy zmian w rozmieszczeniu ludności Polski w ujęciu historycznym<sup>29</sup>. Momentem wyjściowym tej prognozy jest rok 1966. Ustalenie to oparto na analizie prawdopodobieństw przepływów ludności pomiędzy regionami dla lat 1960–1973. Analiza wykazała gwałtowny spadek wartości tych prawdopodobieństw do 1965 r. Dopiero około 1966 r. zaznacza się pewna stabilizacja. Ponieważ zasadniczym warunkiem jednorodnego łańcucha Markowa jest stabilność wartości prawdopodobieństw przepływów w czasie, próbowano utrzymać wymagane warunki wybierając odpowiedni okres badań. W procesie Markowa zakłada się zależność między jednym zdarzeniem a zdarzeniem bezpośrednio je poprzedzającym. Przewidywanie zmian w rozmieszczeniu ludności wymaga więc przyjęcia założenia, że przyszły układ — na przykład w 1973 r. — jest funkcją układu z roku bezpośrednio poprzedzającego rok prognozowany, tj. z 1972 r. oraz zmian określonych przez zbiór prawdopodobieństw. Dokładne określenie procesu łańcuchów Markowa wymaga znajomości macierzy prawdopodobieństw przejścia i stanu wyjściowego, czyli początkowego wektora prawdopodobieństwa wystąpienia jednostki w danym regionie na początku procesu. Stan układu z 1966 r. — wyjściowego (zerowego) roku prognozy — przedstawić można za pomocą poziomego wektora prawdopodobieństwa:

$$p^{(0)} = [p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \dots, p_{22}^{(0)}]. \quad (28)$$

Składowe tego wektora wyrażają udział 22 regionów w zaludnieniu całego kraju, które wynosi 1<sup>30</sup>. Drugim elementem łańcucha Markowa, wyrażającym pewne czynniki zmian modyfikujące poprzedni układ, jest macierz prawdopodobieństw przejść o wymiarach 22 × 22. Macierz ta jest pochodną wyjściowej macierzy  $D$ , zawierającej rzeczywiste przepływy międzyregionalne ludności. Macierz  $D$  przedstawia poniższy schemat:

$$D = \begin{array}{c} \text{Regiony} \\ \text{odpływu} \end{array} \begin{array}{c} \text{Regiony} \\ \text{napływu} \end{array} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & \dots & 22 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ 22 \end{array} & \begin{pmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & \dots & d_{1,22} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & \dots & d_{2,22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{22,1} & d_{22,2} & \dots & d_{22,22} \end{pmatrix} & & & \end{array} \quad (29)$$

Macierz zawiera: w kolejnych oznaczających regiony wierszach — bezwzględne odpływy ludności z tych regionów do wszystkich pozostałych regionów, w kolumnach

<sup>29</sup> Obliczenia związane z zastosowaniem ergodycznego łańcucha Markowa wykonano w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN według procedur opracowanych przez autorkę niniejszej pracy.

<sup>30</sup> Jak wspomniano we wstępie, analizą został objęty cały kraj w podziale na 22 jednostki administracyjne (regiony), tj. 17 województw i 5 miast wydzielonych z województw wg podziału administracyjnego sprzed 1 czerwca 1975 r.

oznaczonych tą samą kolejnością regionów — bezwzględne napływy ludności do tych regionów ze wszystkich pozostałych regionów, na głównej zaś przekątnej — bezwzględne liczby ludności pozostającej w poszczególnych regionach, nie przemieszczającej się do innych regionów. Analizując wiersz takiej macierzy można zauważyć, że w każdej z przeprowadzonych obserwacji może się zrealizować tylko jedno z wzajemnie wykluczających się zdarzeń. Zdarzenia te zwane są stanami, a w przypadku rozważanych migracji są to po prostu regiony. Znaczy to, że każdy mieszkaniec jakiegokolwiek regionu ma do wyboru pozostanie w regionie swego zamieszkania albo przejście do któregośkolwiek z 21 pozostałych regionów, czyli stanów. Alternatywa tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym, to znaczy, że jedno z nich musi się zrealizować. Jeśli więc przez  $p_{ij}$  będzie oznaczone prawdopodobieństwo przejścia z jednego regionu do drugiego lub pozostanie w nim — jako zdarzenie pewne, to dla każdego regionu  $i = 1, \dots, 22$  zachodzi równość  $\sum_{j=1}^{22} p_{ij} = 1$ , co oznacza, że suma elementów każdego wiersza macierzy prawdopodobieństw przejść jest równa jedności. Wykorzystując tę podstawową własność rachunku prawdopodobieństwa można statystycznie oszacować prawdopodobieństwa przejść, których estymatorami mogą być częstości względne realizacji odpowiednich zdarzeń losowych, tzn. częstości względne przejścia układu z jednego stanu do innego stanu w jednym kroku. Macierz prawdopodobieństw przejść można otrzymać przez podzielenie elementów każdego wiersza ( $d_{ij}$ ) macierzy wyjściowej  $D$  przez sumę elementów wiersza, tj.:

$$p_{ij} = \frac{d_{ij}}{\sum_{j=1}^{22} d_{ij}}. \quad (30)$$

W nowo powstałej macierzy prawdopodobieństw przejść  $P$  elementy w wierszach są prawdopodobieństwami odpływu z danego regionu, elementy zaś w kolumnach są prawdopodobieństwami napływu, natomiast wzdłuż głównej przekątnej — prawdopodobieństwami pozostania w tym samym regionie. Macierze prawdopodobieństw przejść dla kroków następnych, tj. kolejnych lat prognozy, obliczono korzystając z algebry macierzy, potęgując macierz wyjściową  $P$ . Możliwość dokładnego określenia stanów (regiony) i prawdopodobieństw przejść pomiędzy nimi (macierz przepływów międzyregionalnych ludności) oraz znajomość początkowego stanu układu (wektor prawdopodobieństwa wystąpienia jednostek w danym regionie na początku procesu), pozwoliły ustalić zachowanie się układu w czasie, w latach 1966–1973. Prawdopodobieństwo wystąpienia jednostek w poszczególnych regionach po pierwszym kroku, tj. w czasie  $t+1$ , a więc dla pierwszego kroku prognozy (1967), obliczono mnożąc wyjściową macierz prawdopodobieństw przejść  $P$  z 1966 r. przez wektor stanu wyjściowego  $p^{(0)}$  również z 1966 r. według wzorów:

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot P, \quad (31)$$

$$p^{(2)} = p^{(0)} \cdot P^2, \text{ dla drugiego roku prognozy (1968),} \quad (32)$$

$$p^{(7)} = p^{(0)} \cdot P^7, \text{ dla siódmego roku prognozy (1973),} \quad (33)$$

W wyniku przeprowadzonych obliczeń otrzymano wektory teoretyczne  $p^{(1)}, \dots, p^{(7)}$ , przedstawiające przewidywany udział zaludnienia poszczególnych regionów w całkowitym zaludnieniu kraju, w kolejnych latach prognozy 1967–1973. Wykorzystując dodatkową informację statystyczną, jaką było całkowite zaludnienie kraju w roku prognozowanym, obliczono bezwzględne teoretyczne wielkości zaludnienia poszczególnych regionów w kolejnych latach prognozy retrospektywnej i porównano je z odpowiednimi wielkościami rzeczywistymi (tab. 5).

#### WERYFIKACJA MODELU

Weryfikacji modelu dokonano na podstawie testu istotności chi kwadrat przyjmując hipotezę  $H_0$  zakładającą brak istotnej różnicy między teoretycznymi a rzeczywistymi wielkościami zaludnienia. Statystyki chi kwadrat obliczone dla poszczególnych lat prognozy przedstawia poniższe zestawienie:

lata	$\chi^2$	$\alpha$
1967	3,734	} powyżej 0,99
1968	5,088	
1969	7,039	
1970	6,353	
1971	7,794	
1972	9,165	0,99
1973	15,809	0,78

Wartość chi kwadrat wyraźnie rośnie w miarę upływu czasu, co oznacza zmniejszanie się trafności prognozy. Wartości poziomu istotności  $\alpha$ , odczytane z rozkładu chi kwadrat przy 21 stopniach swobody, wskazują, że dla prognozy z lat 1967–1971 istnieje ponad 99% prawdopodobieństwa poprawności hipotezy zerowej, dla prognozy 1972 r. — 99%, a dla prognozy 1973 r. — 78%. Wysokie wartości poziomu istotności świadczą o słuszności hipotezy zerowej i potwierdzają dość dużą precyzję przewidywań zmian w rozmieszczeniu ludności Polski w latach 1966–1973.

Największą trafnością odznaczają się prognozy dla regionów: opolskiego, poznańskiego, olsztyńskiego i bydgoskiego (ryc. 9). Reszty z prognozy dla tych obszarów nie przekraczają 1% w poszczególnych latach prognozowanego okresu 1967–1973, a w przypadku pierwszych dwóch regionów nawet maleją z czasem. Podobnie niskie wartości reszt do 1972 r. charakteryzują prognozę dla regionów: lubelskiego, białostockiego, szczecińskiego i zielonogórskiego. Opracowana na podstawie modelu łańcuchów Markowa prognoza zmian w rozmieszczeniu ludności Polski w latach 1966–1973 okazała się bardzo trafna dla 36% zbioru regionów do przedostatniego roku siedmioletniego okresu prognozowanego, a dla 18% całego zbioru — do ostatniego roku prognozy. Najgorsze wyniki (reszty często powyżej 3%) otrzymano w przypadku miast wydzielonych z województw (oprócz Poznania) i regionu gdańskiego, co w sumie stanowi 23% zbioru analizowanych jednostek przestrzennych.

Występowanie reszt, a więc różnic między teoretycznymi a rzeczywistymi wartościami zaludnienia, spowodowane jest — z jednej strony — wyborem niekorzystnych warunków wyjściowych, z drugiej zaś — dużymi uproszczeniami, jakie zawiera mo-

Prognoza zmian w rozmieszczeniu ludności Polski w latach 1966–1973

Regiony	1967			1968			1969		
	Zaludnienie			Zaludnienie			Zaludnienie		
	rzeczywiste	prognozowane	reszta z modelu	rzeczywiste	prognozowane	reszta z modelu	rzeczywiste	prognozowane	reszta z modelu
Warszawa	1267	1296	-29	1279	1320	-41	1288	1344	-56
Kraków	555	544	+11	565	557	+8	576	569	+7
Łódź	745	757	-12	750	765	-15	753	772	-19
Poznań	453	450	+3	457	456	+1	462	463	-1
Wrocław	506	489	+17	512	497	+15	517	503	+14
Białostocki	1174	1178	-4	1184	1184	0	1191	1189	+2
Bydgoski	1880	1874	+6	1898	1888	+10	1915	1902	+13
Gdański	1421	1392	+29	1442	1407	+35	1461	1421	+40
Katowicki	3584	3608	-24	3614	3652	-38	3646	3695	-49
Kielecki	1895	1915	-20	1902	1920	-18	1910	1925	-15
Koszaliński	772	773	-1	781	780	+1	790	785	+5
Krakowski	2169	2160	+9	2185	2169	+16	2200	2178	+22
Lubelski	1933	1927	+6	1946	1938	+8	1956	1948	+8
Łódzki	1678	1685	-7	1684	1694	-10	1690	1703	-13
Olsztyński	974	972	+2	981	977	+4	985	982	+3
Opolski	1028	1031	-3	1037	1042	-5	1046	1051	-5
Poznański	2152	2165	-13	2171	2180	-9	2189	2193	-4
Rzeszowski	1731	1721	+10	1747	1732	+15	1763	1741	+22
Szczeciński	877	872	+5	887	882	+5	896	891	+5
Warszawski	2527	2490	+37	2544	2505	+39	2560	2518	+42
Wrocławski	1975	1998	-23	1984	2009	-25	1994	2019	-25
Zielonogórski	867	866	+1	876	872	+4	883	879	+4
POLSKA	32163	32163	0	32426	32426	0	32671	32671	0

Źródło: Roczniki statystyczne GUS z 1968–1974 r. i obliczenia własne.

del. Rokiem wyjściowym prognozy historycznej był 1966 r., wybrany celowo ze względu na założenia stabilności prawdopodobieństw przejść, leżące u podstaw budowy modelu. Począwszy od 1966 r. w większości regionów zaznaczył się mniej lub bardziej gwałtowny wzrost lub spadek liczby ludności, wyraźnie zakłócający dotychczasowy trend. Dość przypadkowe zmiany w wielkości zaludnienia niektórych regionów, spowodowane najprawdopodobniej niedokładnością szacunków liczby ludności w latach międzypisowych, występowały również w latach 1969/1970 i 1972/1973. Gwałtowne spadki lub wzrosty wielkości zaludnienia w tych latach, sprzeczne z dotychczasowymi trendami, mogą stanowić istotną przyczynę występowania dużych reszt, ponieważ prognoza opracowana według procedury modelu łańcuchów Markowa jest ekstrapolacją trendów zaobserwowanych w przeszłości.

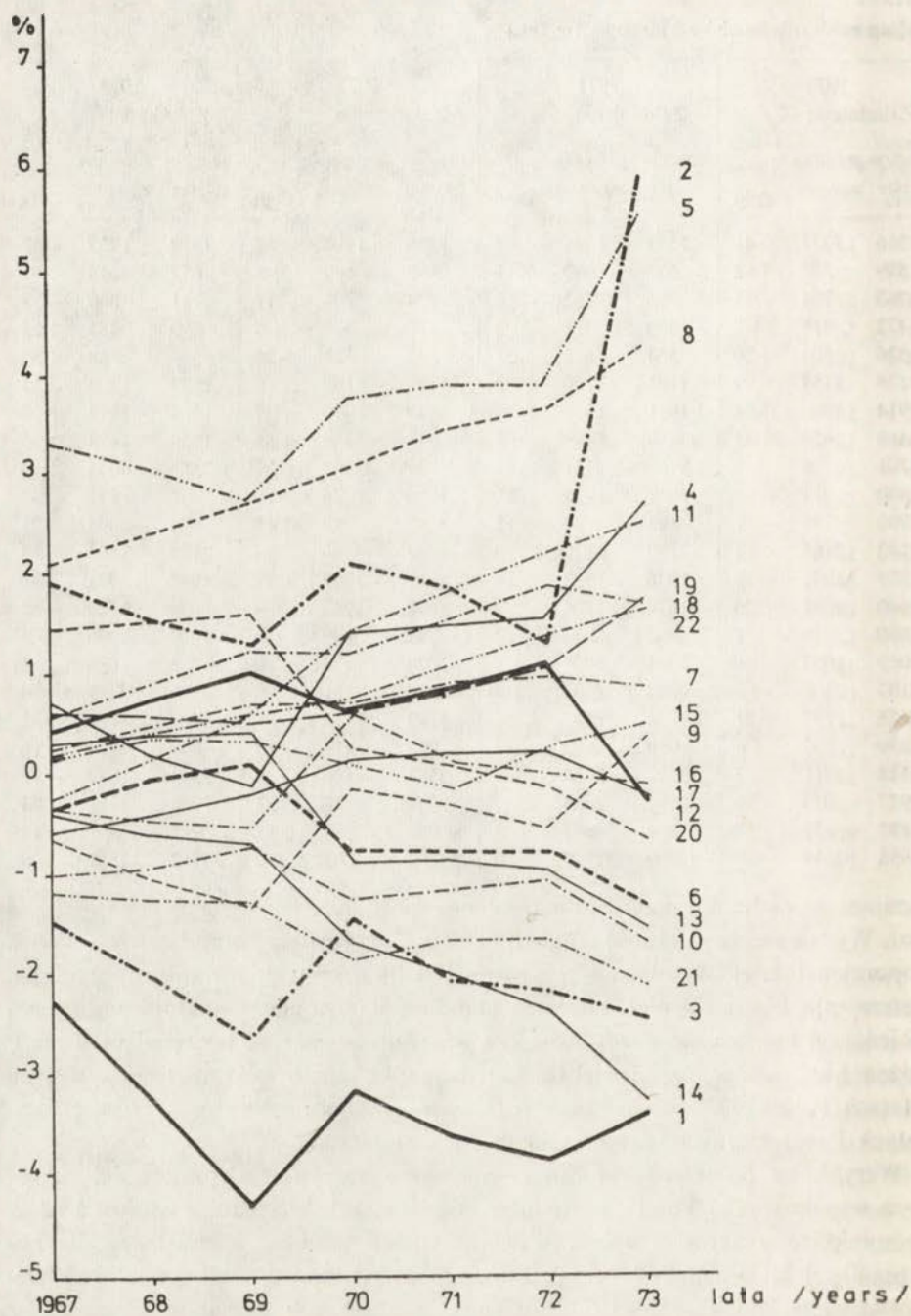
Jednym z zasadniczych uproszczeń modelu łańcuchów Markowa — zdaniem jego krytyków — jest zamknięcie systemu, oznaczające wyłączenie z rozważań urodzeń i zgonów, naturalnych składników zmian wielkości zaludnienia. Fakt

według modelu łańcuchów Markowa (w tys.)

1970			1971			1972			1973		
Zaludnienie			Zaludnienie			Zaludnienie			Zaludnienie		
rzeczy- wiste	progno- zowane	reszta z mo- delu	rzeczy- wiste	progno- zowane	reszta z mo- delu	rzeczy- wiste	progno- zowane	reszta z mo- delu	rzeczy- wiste	progno- zowane	reszta z mo- delu
1316	1357	-41	1333	1381	-48	1356	1408	-52	1388	1435	-47
589	577	+12	600	589	+11	610	602	+8	657	616	+41
763	774	-11	766	782	-16	774	791	-17	781	800	-19
472	465	+7	479	471	+8	486	478	+8	499	485	+14
526	506	+20	534	513	+21	541	521	+20	560	528	+32
1176	1185	-9	1181	1190	-9	1188	1197	-9	1189	1204	-15
1914	1900	+14	1931	1914	+17	1949	1930	+19	1964	1947	+17
1469	1424	+45	1490	1439	+51	1511	1456	+35	1539	1473	+66
3701	3708	-7	3737	3751	-14	3777	3798	-21	3862	3848	+14
1890	1914	-24	1897	1919	-22	1906	1926	-20	1902	1934	-32
796	785	+11	805	790	+15	815	797	+18	826	805	+21
2183	2169	+14	2197	2178	+19	2214	2190	+24	2194	2203	-9
1925	1942	-17	1036	1952	-16	1946	1965	-19	1948	1978	-30
1669	1698	-29	1674	1706	-32	1678	1717	-39	1674	1729	-55
980	979	+1	982	984	-2	992	990	+2	1001	996	+5
1059	1053	+6	1064	1063	+1	1074	1074	0	1085	1086	-1
2193	2190	+3	2207	2204	+3	2224	2221	+3	2235	2239	-4
1758	1737	+21	1774	1747	+27	1792	1758	+34	1802	1771	+31
899	893	+6	910	903	+7	923	913	+10	940	924	+16
2518	2511	+7	2527	2524	+3	2537	2540	-3	2543	2559	-16
1977	2013	-36	1991	2024	-33	2004	2037	-33	2008	2051	-43
885	878	+7	894	885	+9	905	893	+12	915	901	+14
32658	32658	0	32909	32909	0	33202	33202	0	33512	33512	0

pomijania w rachunku przyrostu naturalnego może mieć istotny wpływ na wielkość reszt. Wydaje się, że zależność pomiędzy resztą a przyrostem naturalnym jest wprost proporcjonalna, tj. wysokiemu przyrostowi naturalnemu odpowiada duża reszta. Zastrzeżenia budzi również założenie stabilności poziomego wektora prawdopodobieństwa, mogące nie pozostawać bez wpływu na wielkość występujących reszt. Można więc założyć, że im większa jest dynamika zmian wektorów rzeczywistych w latach 1966—1973, tym większa różnica w dynamice zmian wektorów rzeczywistych i teoretycznych, a tym samym większa reszta.

Weryfikując powyższe założenie, zmierzono stopień tych zależności za pomocą współczynnika korelacji. Analizie poddano, z jednej strony wielkości reszt, z pominięciem znaków — ważna tu była tylko ich wielkość bezwzględna dla poszczególnych lat prognozy ( $x_1-x_7$ ), z drugiej zaś: dynamikę zmian wektorów rzeczywistych w latach 1966—1973 ( $u$ ); sumę gwałtownych wzrostów lub spadków wielkości zaludnienia w latach 1966—1973 ( $v$ ); przyrost naturalny na 1000 osób dla poszczególnych regionów i kolejnych lat 1967—1973 ( $y_1-y_7$ ). W celu sprawdzenia istotności statystycznej otrzymanych współczynników korelacji posłużono się testem t-Studenta.



Ryc. 9. Zmienność reszt z modelu łańcuchów Markowa w latach 1967–1973  
1-22 regiony, patrz objaśnienia na ryc. 1

Variability of rests from the Markov chain model in 1967–1973



Analiza zależności pomiędzy resztami z 1973 r. ( $x$ ) i dynamiką zmian wektorów rzeczywistych w latach 1966–1973 ( $u$ ) z jednej strony, a miarą gwałtownych wzrostów lub spadków wielkości zaludnienia w latach 1966–1973 ( $v$ ) z drugiej strony, wykazała w obu przypadkach korelację dodatnią i wysoce istotną:

	$r$	$t$	$r^2$	
$x, u$	0,72	4,61	0,52	korelacja wysoce istotna
$x, v$	0,82	6,62	0,69	$t > t_{\alpha} = 3,850$ .

Im wyższa dynamika zmian wektorów rzeczywistych, tym trudniej jest trafnie prognozować ich rozwój za pomocą modelu łańcuchów Markowa, a więc tym większe są reszty ( $r = 0,72$ ). Okazało się, że model łańcuchów Markowa, zakładający dążność układu do stanu równowagi, dość silnie spłaszcza dynamikę rozwoju. Oszacowanie wielkości tego spłaszczenia i wprowadzenie korekty do modelu mogłoby poprawić wyniki prognozy. Jeszcze trudniej o celność prognozy, gdy rozwój ludności odbywa się gwałtownymi skokami: stąd zależność między resztami z prognozy a miarą gwałtowności skoków jest jeszcze silniejsza i wynosi 0,83, a współczynnik determinacji ( $r^2$ ) wskazuje, że 70% zmienności reszt jest określonych przez gwałtowne zmiany we wzroście ludności poszczególnych regionów. Korzystanie z danych rzeczywistych wolnych od zniekształceń wynikających z szacunków poprawiłoby wyniki prognozy.

Badanie stopnia zależności między wielkościami reszt a wskaźnikiem przyrostu naturalnego dało dosyć nieoczekiwane rezultaty. Logiczne wydawało się przyjęcie założenia o prostej zależności tych zmiennych, tzn. im większy przyrost naturalny, tym większa reszta. Przypuszczano także, że zależność ta będzie silna. Tymczasem obliczony współczynnik korelacji jest ujemny. Wysokim wartościom przyrostu naturalnego odpowiadają niskie wartości reszt, a przede wszystkim związek tych zmiennych jest dość słaby i maleje z czasem. Jak wynika z obliczeń, korelacja między resztami a wskaźnikiem przyrostu naturalnego jest istotna tylko w trzech pierwszych latach 1967–1969, potem traci na istotności. Współczynnik determinacji zaś wskazuje, że w pierwszych latach około 30% zmienności reszt jest zdeterminowane wielkością przyrostu naturalnego, następnie wielkość ta maleje do 10%. Zmienność w czasie wartości współczynników korelacji  $r$ , statystyk  $t$  i współczynników determinacji  $r^2$  przedstawia poniższe zestawienie:

Lata	$r_{x,y}$	$t$	$r^2$	
1967	-0,48	-2,47	0,23	korelacja istotna $t > t_{\alpha} = 2,086$
1968	-0,54	-2,84	0,29	
1969	-0,54	-2,89	0,29	
1970	-0,37	-1,76	0,14	korelacja nieistotna $t < t_{\alpha}$
1971	-0,35	-1,68	0,12	
1972	-0,30	-1,41	0,09	
1973	-0,31	-1,44	0,10	

Pewnym wytłumaczeniem tak słabej zależności pomiędzy wielkością reszt a wskaźnikiem przyrostu naturalnego poszczególnych regionów może być fakt zakodowania informacji o przyroście naturalnym w poziomym wektorze prawdopodobieństwa

wystąpienia jednostki w danym stanie. Przedstawiony w postaci elementów wektora wyjściowego udział regionów w zaludnieniu kraju jest wynikiem współdziałania przyrostu naturalnego i migracyjnego. Zamknięcie układu w modelu łańcuchów Markowa polega na tym, że przyrost naturalny wchodzi do rachunku tylko jako informacja wyjściowa i nie pojawia się w następnych krokach procedury obliczeniowej. Udziały regionów w zaludnieniu kraju, w następnych przeciętnych stanach układu, są modyfikacją wektora wyjściowego poprzez wprowadzenie do procedury obliczeniowej tylko informacji z zakresu migracji z pominięciem przyrostu naturalnego. Dlatego też słuszniejsze byłoby korelowanie reszt z różnicami w przyroście naturalnym pomiędzy wyjściowym a końcowym rokiem prognozy.

Istotny wpływ na wielkość reszt może mieć również założenie stabilności prawdopodobieństw przejść pomiędzy regionami, stanowiące zasadnicze uproszczenie modelu. Oznacza to posługiwanie się jedną jedyną, wyjściową macierzą rzeczywistych prawdopodobieństw przejść z roku zerowego prognozy przy obliczaniu przyszłych stanów przeciętnych układu. W każdym jednak kroku procedury obliczeniowej, w wersji macierzy potęgowanej modelu łańcuchów Markowa, stosowana jest inna macierz, której estymatorem jest odpowiednia potęga macierzy wyjściowej. Analiza zmienności elementów macierzy rzeczywistych w latach 1961–1973 i porównanie ich z teoretycznymi, a więc odpowiednimi elementami kolejnych potęg macierzy wyjściowej z 1966 r. wykazały dość poważne rozbieżności między danymi rzeczywistymi a teoretycznymi. Elementy głównej przekątnej macierzy rzeczywistej, a więc rzeczywiste prawdopodobieństwa pozostania w danym regionie, w większości przypadków systematycznie wzrastają — w przeciwieństwie do elementów głównej przekątnej macierzy teoretycznej, które gwałtownie maleją. Podobne rozbieżności zaobserwowano w zmienności rzeczywistych i teoretycznych prawdopodobieństw przepływów międzyregionalnych. Podczas gdy rzeczywiste prawdopodobieństwa podlegające większym lub mniejszym fluktuacjom w latach 1961–1973 wykazują trend malejący, czasami tylko — począwszy od 1970/71 — nieco wzrastający, to teoretyczne prawdopodobieństwa przejść rosną gwałtownie, i to tym gwałtowniej, im wyższe są wartości prawdopodobieństw przepływów pomiędzy regionami w macierzy wyjściowej.

Analiza zmienności rzeczywistych i teoretycznych prawdopodobieństw międzyregionalnych przepływów ludności wykazała niesłuszność założenia stabilności tych prawdopodobieństw na wszystkich etapach procedury obliczeniowej. Ich zmienność według schematu macierzy potęgowanych i kierunek tych zmian dość wyraźnie określony przez dążność macierzy do stanu równowagi przeczą zmienności rzeczywistych prawdopodobieństw przepływów międzyregionalnych. Dążenie macierzy do stanu równowagi powoduje, że elementy macierzy o niskich wartościach, tj. prawdopodobieństwa przepływu, wzrastają, elementy zaś o wysokich wartościach, a więc prawdopodobieństwa pozostania, gwałtownie maleją. Zupełnie odwrotnie jest w rzeczywistości i stąd przypuszczenie, że analizowany proces migracji międzyregionalnych nie jest typowym procesem Markowa, ponieważ nie spełnia warunków zakładanych w modelach Markowa, m. in. założenia o dążności macierzy prawdopodobieństw przejść do stanu statystycznej równowagi.

## PRÓBA MODYFIKACJI ERGODYCZNEGO MODELU ŁAŃCUCHÓW MARKOWA

## ZASTOSOWANIE ZMIENNEJ MACIERZY PRAWDOPODOBIEŃSTW PRZEJŚĆ

Analiza rozbieżności rzeczywistych i teoretycznych prawdopodobieństw przejść wskazała na konieczność modyfikacji modelu. Próba modyfikacji ergodycznego modelu łańcuchów Markowa polega na zastosowaniu zmiennej macierzy prawdopodobieństw przejść, wyprowadzonej z ekstrapolacji macierzy z lat 1961—1966 na następne lata prognozy 1967—1973. Przyjęto założenie, że macierze obliczone na podstawie ekstrapolacji rzeczywistych wartości elementów macierzy poprzednich, uwzględniające zmienność w czasie i wykazujące podobieństwo do macierzy rzeczywistych, mogą dać lepsze wyniki. Podstawą ekstrapolacji stała się krzywa  $x = e^{b+ct}$ , która najlepiej przybliży zmienność elementów macierzy. Współczynniki  $b$  i  $c$  zostały obliczone metodą najmniejszych kwadratów w skali logarytmicznej. Okazało się, że krzywa  $x = e^{b+ct}$  w sposób zadowalający przybliży zmienność elementów macierzy rzeczywistych i wzór ten może być zastosowany do ekstrapolacji wartości poszczególnych elementów kolejnych macierzy z lat 1961—1966 na lata 1967—1973. Zastosowany test chi kwadrat potwierdził słuszność przyjętej hipotezy, że krzywa  $x = e^{b+ct}$  najlepiej przybliży zmienność elementów macierzy rzeczywistych. Otrzymane w wyniku ekstrapolacji macierze wprowadzono do wzoru modelu łańcuchów Markowa. Zmodyfikowany model, w którym macierz jest zmienna, był podstawą opracowania prognozy historycznej dla analogicznego okresu 1967—1973 według wzoru:

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P_{E(n)}, \quad (34)$$

gdzie  $P_{E(n)}$  — macierz ekstrapolowana dla odpowiedniego okresu  $n$ . Dane wyjściowe to wektor wyjściowy z 1966 r. i ekstrapolowane macierze dla kolejnych lat prognozy 1967—1973. Kolejne stany układu, czyli wektory  $p^{(1)}, \dots, p^{(7)}$ , ustalono mnożąc wektor teoretyczny z kroku poprzedniego ( $p^{(n-1)}$ ) przez odpowiednią macierz ekstrapolowaną  $P_E$ . Na podstawie wektorów charakteryzujących stany układu w kolejnych latach prognozy w ujęciu historycznym i rzeczywistych wielkości zaludnienia Polski w latach 1967—1973 oszacowano teoretyczne wielkości zaludnienia poszczególnych regionów i porównano je z wielkościami rzeczywistymi.

Sprawdzenie hipotezy zerowej o braku istotnych różnic między wartościami rzeczywistymi i teoretycznymi zmodyfikowanego niejednorodnego modelu łańcuchów Markowa dokonano za pomocą testu chi kwadrat. Wartość statystyki chi kwadrat dla modyfikacji, w porównaniu z modelem Markowa, przedstawia poniższe zestawienie:

Lata	Model łańcuchów Markowa		Modyfikacja (zmienna macierz) łańcuchów Markowa	
	$\chi^2$	$\alpha$	$\chi^2$	$\alpha$
1967	3,734	powyżej 0,99	3,868	powyżej 0,99
1968	5,088		5,565	
1969	7,039		8,295	
1970	6,353		6,808	
1971	7,794		9,811	
1972	9,165	0,99	14,573	0,83
1973	15,809	0,78	15,428	0,80

Trafność prognozy rozwoju ludności obliczonej według wzoru zmodyfikowanego jest mniejsza niż predykcji opartej na modelu łańcuchów Markowa. Ekstrapolacja prawdopodobieństw przepływów i pozostania nie dała oczekiwanych rezultatów. Precyzja przewidywań tych wielkości jest niewielka. Zasadniczą przyczyną tego stanu rzeczy jest załamanie się dotychczasowej tendencji zmian w wielkości zaludnienia regionów, mające miejsce w latach 1965—1966. Do 1966 r. w większości przypadków występował dość gwałtowny spadek wartości prawdopodobieństw przepływów, które po tym okresie albo się stabilizowały (np. przepływy katowickie — olsztyńskie) lub zmieniały tempo, a nawet kierunek (z dotychczasowego spadku na wzrost — np. przepływy białostockie—gdańskie). Ekstrapolowano wartości prawdopodobieństw z lat 1961—1966. Koniec tego okresu charakteryzowały wyraźnie zarysowane, a nawet gwałtowne spadki wartości prawdopodobieństw przejść i pozostania. Można przypuszczać, że gdyby nie załamanie dotychczasowej tendencji właśnie w 1966 r., wyjściowym roku prognozy historycznej, predykcja byłaby znacznie trafniejsza.

#### ZASTOSOWANIE ZMIENNEGO WEKTORA PRAWDOPODOBIEŃSTW

Analiza składowych rozkładu z lat 1953—1973 wykazała, że jest to część modelu łańcuchów Markowa, która charakteryzuje się znacznie mniejszą zmiennością w czasie niż macierz prawdopodobieństw przejść, stanowiąca drugą część modelu. Krzywe obrazujące zmianę udziału zaludnienia poszczególnych regionów w zaludnieniu kraju mają na ogół charakter monotoniczny, są pozbawione gwałtownych i dość przypadkowych skoków, co zdecydowanie może ułatwić predykcję. Spróbowano więc wykorzystać tę składową modelu Markowa do prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności Polski. Predykcję oparto na ekstrapolacji wartości składowych wektorów z lat 1961—1966. Podstawą ekstrapolacji była krzywa  $x = e^{b+ct}$ . Współczynniki  $b$  i  $c$  obliczono metodą najmniejszych kwadratów w skali logarytmicznej. Sprawdzenie wzoru ekstrapolacyjnego na interpolacji wstecz wykazało, że krzywa ta najlepiej przybliży zmienność składowych wektorów. Wzór ten zastosowano do obliczenia wartości składowych wektorów teoretycznych dla lat 1967—1973. Teoretyczne wielkości zaludnienia poszczególnych regionów, dla kolejnych lat prognozy historycznej, oszacowano za pomocą ekstrapolowanych wektorów i rzeczywistych wielkości zaludnienia Polski w latach 1967—1973.

Trafność tak skonstruowanej prognozy okazała się, w zestawieniu z pozostałymi modelami, najniższa. Wartość statystyki chi kwadrat tej modyfikacji, na tle pozostałych modeli, przedstawia poniższe zestawienie:

	Model łańcuchów Markowa		Modyfikacja (zmienna macierz)		Modyfikacja (tylko zmienny wektor)		
	$\chi^2$	$a$	$\chi^2$	$a$	$\chi^2$	$a$	
1967	3,734	powyżej 0,99	3,868	powyżej 0,99	4,233	powyżej 0,99	
1968	5,088		5,565		5,661		
1969	7,039		8,295		7,723		
1970	6,353		6,808		11,000		0,96
1971	7,794		9,811		0,98		13,662
1972	9,165	0,99	14,573	0,83	16,246	0,75	
1973	15,809	0,78	15,428	0,80	31,994	0,06	

Ekstrapolacja wektorów nie dała oczekiwanych rezultatów. Podstawą ekstrapolacji był okres 1961–1966, po którym w wielu regionach nastąpiło załamanie dotychczasowych trendów zmienności składowych wektorów, polegające na zmianie dotychczasowego tempa, a nawet kierunku. Ekstrapolacja zaś przedłużyła istniejące w latach 1961–1965 trendy, prowadząc do dość dużych rozbieżności między rzeczywistymi a teoretycznymi wielkościami zaludnienia niektórych regionów. Okazało się, że okres stanowiący podstawę ekstrapolacji składowych wektora był stanowczo za krótki.

## ANALIZA PORÓWNAWCZA WYNIKÓW PROGNOZ

Analiza ta obejmuje porównanie wyników prognoz prezentowanych w niniejszej pracy. Konieczność dostosowania zakresu czasowego prognoz do istniejących danych statystycznych oraz potrzeba wyboru najlepszych warunków początkowych predykcji sprawiły, że w obu podstawowych modelach przyjęto różne lata wyjściowe prognoz, co w znacznym stopniu utrudniło analizę porównawczą<sup>31</sup>.

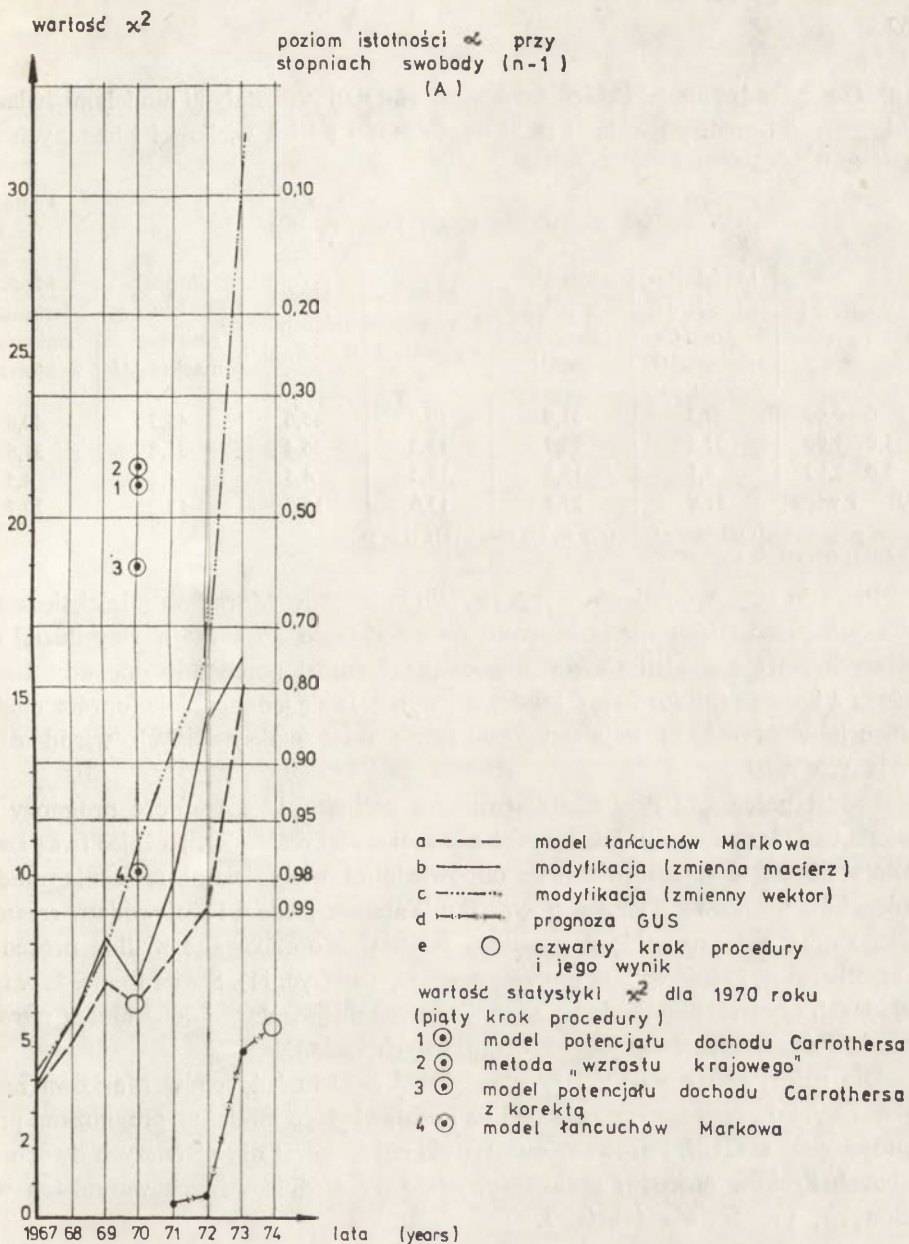
Porównania rezultatów omawianych prognoz dokonano dwoma sposobami, przy czym każdy z nich spełniał podstawowy warunek, jakim było zrównanie długości okresu przewidywań. Jednym z tych sposobów było zestawienie wyników piątego kroku wszystkich sześciu procedur obliczeniowych niezależnie od przyjętych zróżnicowanych warunków wyjściowych tych prognoz. Ocenę tych wyników umożliwiło porównanie wartości statystyki chi kwadrat i rozkładu wielkości reszt dla modelu potencjału dochodu Carrothersa i jego odmiany z 1970 r. — z odpowiednimi wartościami dla modelu łańcuchów Markowa i jego modyfikacji z 1971 r., przedstawione poniżej:

	$\chi^2$	$\alpha$
Model potencjału dochodu Carrothersa (1)	21,569	0,43
Metoda „wzrostu krajowego” (1)	21,965	0,41
Model potencjału dochodu Carrothersa z korektą (1)	18,927	0,59
Model łańcuchów Markowa (2)	7,794	0,99
Zmodyfikowany model łańcuchów Markowa ze zmienną macierzą (2)	9,811	0,98
Zmodyfikowany model łańcuchów Markowa ze zmiennym wektorem (2)	13,662	0,88

Okres przewidywań: (1) — 1965—1970 ( $t = 5$ ); (2) — 1966—1971 ( $t = 5$ ).

Porównanie miar precyzji przewidywań — dla piątego kroku poszczególnych procedur prognostycznych — wykazało, że najlepsze wyniki daje prognoza oparta na modelu łańcuchów Markowa. Wartość statystyki chi kwadrat przy 21 stopniach swobody w modelu Carrothersa daje tylko 43% prawdopodobieństwa poprawności hipotezy zerowej, podczas gdy dla modelu Markowa wielkość ta wynosi 99% (ryc.

<sup>31</sup> Ze względu na dane statystyczne dotyczące dochodu w ujęciu regionalnym dostępne tylko dla lat 1965 i 1970, a niezbędne do przeprowadzenia obliczeń według procedury modelu potencjału dochodu Carrothersa, zakres czasowy tej prognozy obejmuje lata 1965—1970. Natomiast w modelu łańcuchów Markowa ustalenia dotyczące roku wyjściowego prognozy, którym jest 1966 r., oparto na szczegółowych analizach prawdopodobieństw przepływów z lat 1961—1973. Końcowy rok opracowanej predykcji ustalono w wyniku badania horyzontu prognozy. Doprowadzenie obliczeń aż do 1973 r. ujawniło moment wyraźnego spadku skuteczności przewidywań.



Ryc. 10. Wartość statystyki  $\chi^2$  w sześciu wersjach prognozy historycznej  
a – model łańcuchów Markowa, b – modyfikacja (zmienna macierz), c – modyfikacja (zmienny wektor), d – prognoza GUS, e – czwarty krok procedury i jego wynik  
Wartość statystyki  $\chi^2$  dla 1970 r. (piąty krok procedury): 1 – model potencjału dochodu Carrothersa, 2 – metoda wzrostu krajowego, 3 – model potencjału dochodu Carrothersa z korektą, 4 – model łańcuchów Markowa.

Poziom istotności  $\alpha$  przy 21 stopniach swobody (n-1)

Value of statistic  $\chi^2$  in six versions of historical prediction

a – Markov chain model, b – modification (variable matrix), c – modification (variable vector),  
d – GUS forecast, e – fourth step of the procedure and its result

The value of statistic  $\chi^2$  for 1970 (fifth step of the procedure): 1 – Carrothers' income potential model, 2 – national growth method, 3 – corrected Carrothers' income potential model, 4 –

Markov chain model

Level of significance  $\alpha$  at 21 degree of freedom (n-1)

10). O przewadze modelu łańcuchów Markowa nad pozostałymi modelami świadczą także wyniki analizy rozkładu reszt w zależności od ich wielkości i badanych modeli (tab. 6).

Tabela 6

Rozkład wielkości reszt (w %)

Wielkości reszt	Model potencjału dochodu Carrothersa <sup>(1)</sup>	Metoda wzrostu „krajowego” <sup>(1)</sup>	Model Carrothersa z korektą <sup>(1)</sup>	Model łańcuchów Markowa <sup>(2)</sup>	Model Markowa ze zmienną macierzą <sup>(2)</sup>	Model Markowa ze zmiennym wektorem <sup>(2)</sup>
0–0,99	27,3	31,8	50,0	45,6	45,5	40,8
1,0–1,99	31,8	22,7	18,2	36,4	31,8	31,8
2,0–2,99	9,1	18,2	18,2	4,5	4,5	4,5
3,0– i więcej	31,8	27,3	13,6	13,5	18,2	22,7

Okres przewidywań: (1) 1965–1970 ( $t = 5$ ), (2) 1966–1971 ( $t = 5$ ).

Źródło: Obliczenia własne

Przeszło 80% wszystkich reszt z modelu łańcuchów Markowa mieści się w najniższych przedziałach wielkościowych reszt (od 0 do 2%). Najwyższy udział najniższych reszt z modeli Carrothersa osiągnął model potencjału dochodu Carrothersa z korektą (blisko 70%). Model ten wyróżnia się jednocześnie (oprócz modelu łańcuchów Markowa) najniższym udziałem reszt maksymalnych wśród ogółu badanych reszt.

Model potencjału dochodu Carrothersa cechuje niska trafność prognozy dla całego badanego systemu jak również dla większości regionów. Różnice te są szczególnie widoczne w zestawieniu z odpowiednimi wielkościami reszt dla modelu łańcuchów Markowa. Tylko w przypadku Warszawy, Łodzi i województw rzeszowskiego oraz zielonogórskiego prognozy regionalne opracowane według procedury Carrothersa wykazują wyższą precyzję przewidywań (ryc. 11). Stwierdzenie, że w tych regionach czynniki ekonomiczne zajmują istotne miejsce wśród determinant wzrostu zaludnienia, wymagałoby jednak dodatkowych badań.

Dla pełnej oceny wartości prognostycznej modelu łańcuchów Markowa zestawiono wyniki prognozy opracowanej na podstawie tego modelu z prognozami przygotowanymi w GUS. Porównanie statystyki chi kwadrat dla pierwszych dwóch lub czterech kroków procedur obliczeniowych, przy zróżnicowanych warunkach wyjściowych, przedstawia tabela 7.

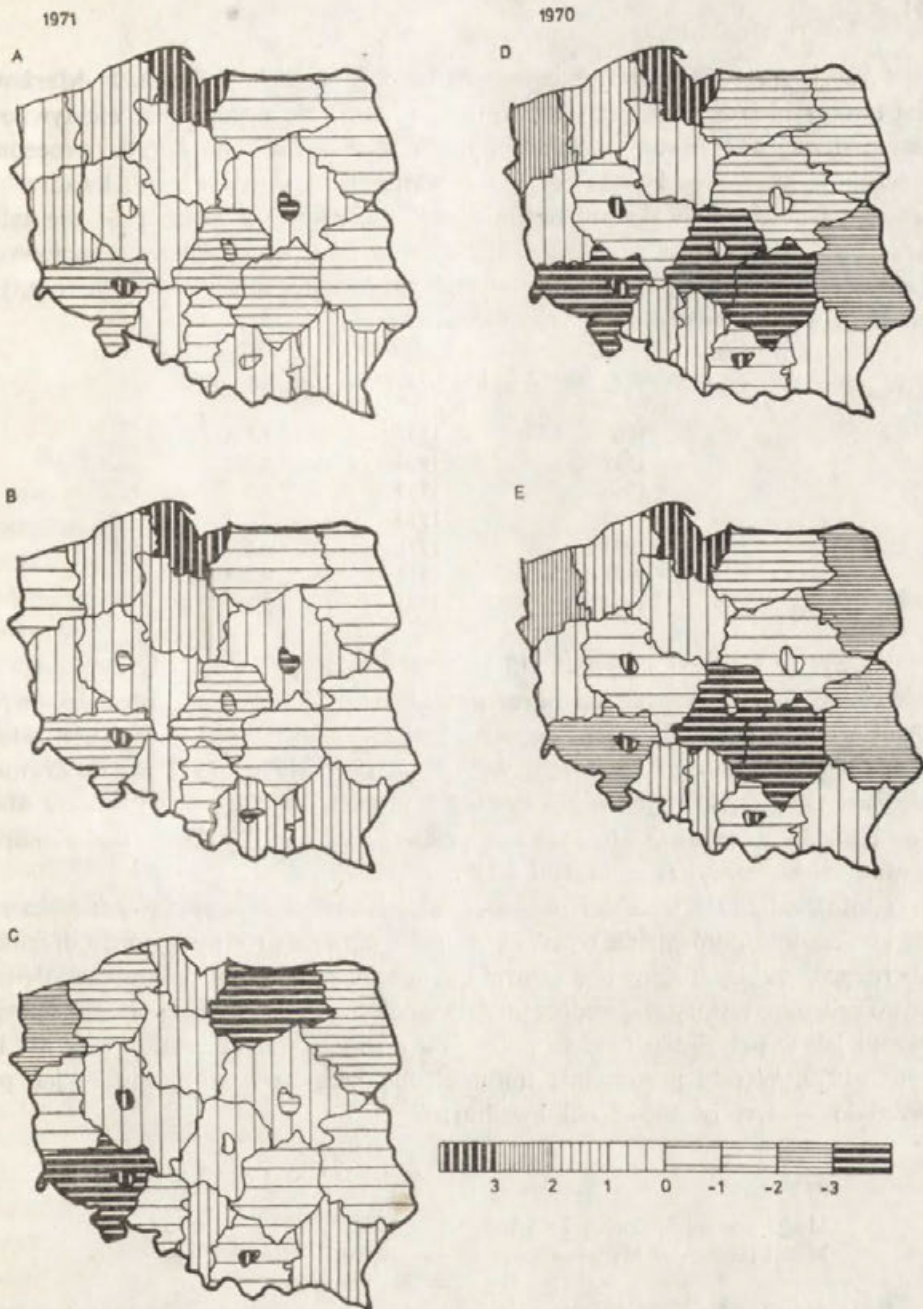
Tabela 7

Rozkład wielkości statystyki chi kwadrat

Krok procedury obliczeniowej	Prognoza wg modelu Markowa		Prognoza GUS	
	I	II	III	IV
1	3,734	0,247	0,346	0,178
2	5,088	.	4,778	0,326
3	7,039	.	.	4,800
4	6,353	.	.	5,462

Prognozy: I z 1966 r. dla lat 1967–1970; II z 1970 r. dla 1971 r.; III z 1971 dla lat 1972–1973; IV z 1970 r. dla lat 1971–1974





Ryc. 11. Rozkład przestrzenny reszt z modeli w latach 1970–1971

A – model łańcuchów Markowa, B – zmodyfikowany model łańcuchów Markowa (zmienna macierz), C – zmodyfikowany model łańcuchów Markowa (tylko zmienny wektor), D – model potencjału dochodu Carrothersa, E – metoda wzrostu krajowego

Spatial distribution of rests from the models in 1970–1971

A – Markov chain model, B – modified Markov chain model (variable matrix), C – modified Markov chain model (only variable vector), D – Carrothers' income potential model, E – national growth method

Precyzja przewidywań opracowanych według modelu łańcuchów Markowa jest nieco mniejsza niż w przypadku prognoz GUS, ale porównanie efektywności ekonomicznej analizowanych metod wypada zdecydowanie na korzyść procedury łańcuchów Markowa. Istotne różnice w wartościach statystyki chi kwadrat są często pozorne. Jak wykazały badania, trafność prognozy zmienia się nie tylko wraz z długością okresu przewidywań, ale zależy także od warunków wyjściowych. Zależność tę ilustruje porównanie statystyk chi kwadrat obliczonych dla rocznych prognoz według procedury łańcuchów Markowa:

Moment wyjściowy prognozy	Pierwszy krok procedury	$\chi^2$
1966	1967	3,734
1967	1968	0,363
1968	1969	0,338
1969	1970	2,432
1970	1971	0,247
1971	1972	0,253
1972	1973	3,337

Najwyższe wartości statystyki chi kwadrat występują wtedy, gdy moment wyjściowy prognozy przypada na okres gwałtownych zaburzeń w dotychczasowych trendach wzrostu zaludnienia. Przypadkowe i gwałtowne skoki w wielkości zaludnienia regionów nastąpiły w latach 1966—1967, 1969—1970 i 1972—1973. Zrównanie warunków wyjściowych porównywanych prognoz według GUS i modelu Markowa mogłoby wykazać zdecydowaną przewagę modelu Markowa nad skomplikowanymi koncepcyjnie metodami GUS.

Istotna zależność trafności prognozy od jej warunków wyjściowych wskazała na konieczność porównania wyników prognoz nie tylko równych co do długości, ale rozpoczynających się w tym samym momencie. W tym celu opracowano dodatkowo prognozę historyczną według modelu łańcuchów Markowa dla takiego samego okresu jak w przypadku modelu potencjału dochodu Carrothersa, a więc dla lat 1965—1970. W celu porównania trafności obu prognoz zastosowano — jak poprzednio — test istotności chi kwadrat:

	Statystyka $\chi^2$	Poziom istotności $\alpha$
Model potencjału dochodu Carrothersa	21,569	0,43
Model łańcuchów Markowa	9,951	0,98

Porównanie to również wykazało zdecydowaną przewagę modelu łańcuchów Markowa. Niska trafność prognozy według modelu potencjału dochodu Carrothersa — w oryginalnej postaci — przekreśla jego przydatność do prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności.

## PODSUMOWANIE

Rezultaty przeprowadzonych badań można ocenić z punktu widzenia zamierzonego celu pracy. Nadrzędnym celem, jaki jej przyświecał, było testowanie modelu potencjału dochodu Carrothersa i ergodycznego modelu łańcuchów Markowa przez ich zastosowanie do przewidywania zmian w rozmieszczeniu ludności Polski. Opracowanie prognoz — nie będące celem pracy samym w sobie — posłużyło tylko jako metoda testowania. Testowaniu poddano wartości poznawcze modeli (przez weryfikację prawidłowości założeń leżących u podstaw budowy tych modeli, w odniesieniu do warunków, w których zostały zastosowane) oraz wartości prognozytyczne (przez ocenę trafności przewidywań i efektywności ekonomicznej modeli).

Testowane modele, połączone wspólną cechą, jaką jest możliwość operacyjnego zastosowania w ujęciu przestrzennym z uwzględnieniem wzajemnych powiązań między wszystkimi elementami układu, charakteryzują odmienne podstawy teoretyczne i różna budowa. Dlatego też wyniki testowania są omówione odrębnie.

Model potencjału dochodu Carrothersa, wyprowadzony z modeli potencjału ludności J. Q. Stewarta, opiera się na przesłance, że wzrost zaludnienia jest pewną **funkcją** wzrostu potencjału dochodu tego obszaru. Tak sformułowany model uwypukla związek problematyki demograficznej z szerszą problematyką społeczno-ekonomiczną.

Próbie adaptacji metody (stosowanej w krajach kapitalistycznych) do warunków gospodarki planowej przeprowadzono po zbadaniu zależności między kilkoma wielkościami dochodu — z jednej strony, a naturalnym i migracyjnym przyrostem ludności Polski — z drugiej strony. Wielokrotnie dokumentowaną w literaturze naukowej zależność między tymi zmiennymi potwierdziła analiza korelacji przeprowadzona dla 22 regionów Polski. Badanie to pozwoliło ominąć istotną słabość modelu Carrothersa. Jako miarę masy w potencjale dochodu — zamiast bezwzględnej wielkości dochodu narodowego w regionie — wprowadzono spożycie dóbr materialnych przez ludność z dochodów osobistych w przeliczeniu na 1 mieszkańca (jako tę kategorię dochodu, która stanowi czynnik mający wpływ na wzrost migracji i poziom reprodukcji ludności). Mimo istotnych współczynników korelacji pomiędzy tą kategorią dochodu a poszczególnymi składnikami przyrostu rzeczywistego ludności poziom dokładności przewidywań zmian w jej rozmieszczeniu jest niski. Wynika to z braku zgodności między rzeczywistym przebiegiem zjawisk a przebiegiem przyjętym według koncepcji Carrothersa.

Zastosowane testy weryfikujące prawidłowość założeń modelu wykazały, że przyrost zaludnienia regionów nie jest funkcją stopy wzrostu potencjału dochodu tych obszarów, lecz funkcją wielkości tego potencjału. Jak wykazało badanie zmienności potencjału dochodu w czasie i przestrzeni, w gospodarce planowej, cechującej się dążeniem do wyrównywania dysproporcji między regionami, obszary o wysokim potencjale dochodu charakteryzuje słabe tempo wzrostu tego potencjału — i na odwrót. W tej sytuacji model potencjału dochodu Carrothersa — w swej oryginalnej postaci — nie może być przydatny do przewidywania zmian rozmieszczenia ludności Polski.

Przeprowadzone badania nie podważają jednak samej idei wyjaśniania zmian w rozwoju zaludnienia układów przestrzennych za pomocą kategorii ekonomicznych. Wykorzystanie modelu potencjału dochodu Carrothersa do prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności Polski wymaga wprowadzenia istotnych modyfikacji. Zwiększenie trafności predykcji można by osiągnąć przez wprowadzenie do modelu regionalnych odchyień, oszacowanych na podstawie wielu prognoz retrospektywnych. Niestety statystyka polska — jak dotąd — nie dysponuje odpowiednimi danymi. Zasadnicze modyfikacje modelu powinny przede wszystkim prowadzić do zastąpienia stopy wzrostu potencjału dochodu jego wielkością oraz rozdzielnego potraktowania obu składowych prognozowanego wzrostu zaludnienia. Niezbędne byłoby przeprowadzenie badań podstawowych dotyczących wpływu odległości na migracje ludności oraz wpływu wielkości i kształtu regionów, a także usytuowania punktów koncentracji potencjału na jego wielkość. Istotną poprawę rzetelności prognoz można by uzyskać przez wprowadzenie opóźnień czasowych do modelu. Mało realistyczne wydaje się bowiem założenie, że zmiany potencjału dochodu oddziałują natychmiast na wielkość zaludnienia. Jak wykazało wstępne badanie, średni czas opóźnienia reakcji na bodziec wynosi w przypadku migracji dwa lata, a w przypadku przyrostu naturalnego — trzy lata. Podjęcie próby wykorzystania modelu potencjału dochodu Carrothersa, uwzględniającego opóźnienia czasowe, do prognozowania zmian w rozmieszczeniu ludności wymagałoby przeprowadzenia szeregu analiz potwierdzających rezultaty wstępnych badań.

Ergodyczny model łańcuchów Markowa odniesiony do procesów ludnościowych jest modelem opisującym zmiany w rozmieszczeniu ludności w kategoriach prawdopodobieństwa. Losowy w pewnej mierze charakter decyzji migracyjnych i prokreacyjnych uzasadnia możliwość wykorzystania stochastycznego modelu do przewidywania zmian ludnościowych.

Analiza zmienności teoretycznych i rzeczywistych prawdopodobieństw, zarówno składowych wektora poziomego jak i elementów macierzy, potwierdziła spotykaną w literaturze tezę, że przestrzenne procesy społeczno-ekonomiczne nie są typowymi procesami Markowa. Obserwowany proces wzrostu zaludnienia nie spełnia podstawowego warunku zakładanego w modelach Markowa, jakim jest dążność układu do stanu równowagi. Zmienność teoretycznych prawdopodobieństw przejść, zgodna ze schematem macierzy potęgowanych i kierunek tych zmian, wyraźnie określony przez dążność macierzy do stanu równowagi, przeczą zmienności rzeczywistych prawdopodobieństw przejść.

Mimo wielu słabości modelu łańcuchów Markowa, przeprowadzone badania potwierdziły jego przydatność do krótkoterminowego prognozowania wielkości zaludnienia. Ograniczenie horyzontu prognozy do 5–7 lat wynika z ekstrapolacyjnego charakteru modelu. Osiągnięta precyzja przewidywań nie odbiega w sposób istotny od trafności prognoz GUS. Natomiast konfrontacja efektywności ekonomicznej obu metod wypada zdecydowanie na korzyść modelu łańcuchów Markowa.

Wzrost trafności predykcji byłby możliwy dzięki dostępności danych statystycznych wolnych od zniekształceń szacunków oraz eliminacji z procedury obliczeniowej uproszczenia, jakim jest zasada stabilności wszystkich prawdopodobieństw. Założenie stabilności prawdopodobieństw przepływów ludności pomiędzy regionami, przeczące ich naturalnej zmienności, podkreśla opisowy charakter modelu łańcuchów Markowa. Próba modyfikacji modelu Markowa polegająca na wprowadzeniu do procedury obliczeniowej elementu wyjaśniającego w postaci zmiennej macierzy przejść, której elementy były wynikiem ekstrapolacji prawdopodobieństw z okresu poprzedzającego okres prognozowany, nie powiodła się. Zastosowanie prawdopodobieństw przejść zmieniających się według schematu macierzy potęgowanego właściwego modelu łańcuchów Markowa okazało się lepszym rozwiązaniem. Modyfikacja modelu łańcuchów Markowa prowadząca do eliminacji z procedury obliczeniowej macierzy i opierająca cały rachunek na wprowadzeniu zmiennego wektora prawdopodobieństwa, przez ekstrapolowanie jego wartości składowych, nie dała oczekiwanych rezultatów. Przedłużenie dotychczasowych trendów, ulegających częstym załamaniom, wywołało stosunkowo dużą rozbieżność między rzeczywistymi i teoretycznymi wielkościami zaludnienia.

Próby modyfikacji modelu, oparte na wprowadzeniu zmiennych macierzy lub zmiennych wektorów na zasadzie ekstrapolacji danych rzeczywistych, nie dały lepszych rezultatów niż właściwy model Markowa, m. in. ze względu na zbyt krótki szereg chronologiczny danych rzeczywistych stanowiących podstawę ekstrapolacji. Dalsze badania zmierzające do zwiększenia rzetelności prognoz opartych na modelu łańcuchów Markowa powinny prowadzić do konstrukcji ergodycznego modelu zawierającego elementy wyjaśniające i do budowy łańcuchów pochłaniających, uwzględniających wszystkie czynniki zmian w wielkości zaludnienia. W systemie planowania centralnego, wykorzystującego możliwość sterowania procesami społeczno-ekonomicznymi, użyteczne mogłyby się okazać interwencyjne modele łańcuchów Markowa typu Rogersa<sup>32</sup>.

<sup>32</sup> Prostą projekcję ludności Polski dla 2002 r. w układzie regionalnym przy wykorzystaniu modelu Rogersa–Wiellekensa oraz dwie symulacje długofalowych zmian uwzględniające określone cele polityki ludnościowej państwa opracowali K. Dziewoński i P. Korcelli (1981, s. 43–79).

## LITERATURA

- Adelman J. G., 1958, *A stochastic analysis of the size distribution of firms*, J. Amer. Statist. Ass., 53, 893–904.
- Bernhardt E. M., 1972, *Fertility and economic status — some recent findings on differentials in Sweden*, Popul. Studies, 2, 175–184.
- Blumen I., Kogan M., McCarthy P. J., 1955, *The industrial mobility of labour as a probability process*, Cornell University Press, Ithaca.
- Bobiński J., 1974, *Motywy decyzji migracyjnych — poszukiwanie czynników umożliwiających sterowanie procesami przemieszczeń ludności*, Maszynopis referatu na Spotkanie Okrągłego Stołu KPZK PAN 25–26 XI 1974: Migracje wewnętrzne w perspektywie nauk społecznych.
- Bolesławski L., 1972, *Koncepcja prognozowania migracji wewnętrznych w oparciu o model łańcuchów Markowa*, [w:] *Ludność*, GUS, 69–76.
- Bonner D., 1976, *Stochastic models for migration analysis*, Reading Geogr. Papers, 51, 44.
- Borowski S., 1967, *O płodności kobiet, migracjach wewnętrznych i ekonomicznym rozwoju regionów*, [w:] *Problemy demograficzne Polski Ludowej*, Bibl. Wiad. Statyst., 4, 245–252.
- 1969, *Współzależność ruchu siły roboczej, poziomu dochodu narodowego i spożycia w ujęciu regionalnym*, Pozn. Roczn. Ekon., 21, 87–116.
- Carrothers G. A. P., 1958, *Population projections by means of income potential models*, Papers and Proceedings, Reg. Sci. Ass., 4, 121–152.
- Champernowe D. G., 1953, *A model of income distribution*, Econ. J., 63, 318–351.
- Chojnicki Z., 1966, *Zastosowanie modeli grawitacji i potencjału w badaniach przestrzenno-ekonomicznych*, Studia KPZK PAN, 14.
- Clark W. A. V., 1965, *Markov chain analysis in geography: an application to the movement of rental housing areas*, Annals, Ass. Amer. Geogr., 55, 351–359.
- Cole J. P., Speridiao Faissol, McCullagh M. J., 1970, *Population projection for Brasil. A Markov chain study*, Referat na Konferencję Metod Ilościowych MUG, Poznań, 21–24 września 1970.
- Collins L., 1970, *Markov chains and geographical applications*, IGU Commission on Quantitative Methods, Poznań (m-pis).
- Compton P. A., 1968, *Internal migration and population change in Hungary between 1959 and 1965*, xerocopy from a book, 111–129.
- Dramowicz K., 1972, *Procesy Markowa w analizie przestrzennej* (m-pis, s. 39).
- Drewett J. P., 1969, *A stochastic model of the land conversion process. An interim report*, Reg. Studies, 3, 269–280.
- Dziewoński K., Gawryszewski A., 1975, *Struktura i mechanizmy migracji wewnętrznych ludności w Polsce Ludowej*, Studia Demogr., 40, 97–106.
- Dziewoński K., Korcelli P., 1981, *Migracje w Polsce: przemiany i polityka*, [w:] *Studia nad migracjami i przemianami systemu osadniczego w Polsce*, Prace Geogr. IG i PZ PAN, 140, 10–90.
- Fomin S. S., 1972, *O wliwaniu dochodu na płodowość*, Demogr. Tietradi, 4–5, 227–239.
- Fuguitt G. V., 1965, *The growth and decline of small towns as a probability process*, Amer. Soc. Rev., 30–31, 403–411.
- Gawryszewski A., 1974, *Związki przestrzenne między migracjami stałymi i dojazdami do pracy oraz czynniki przemieszczeń ludności*, Prace Geogr. IG i PZ PAN, 109.

- Golledge R. G., Brown L. A., 1967, *Search learning and the market decision process*, Geogr. Ann. Ser. B, 49, 116–124.
- Goodman L. A., 1961, *Statistical methods for the Mover-Stayer model*, J. Amer. Statist. Ass., 56, 841–868.
- Gruszczyński M., Koźniewska I., 1975, *Wykorzystanie łańcuchów Markowa do prognozowania zmian w strukturze produkcji przemysłowej*, Przegl. Statyst., 22, 37–51.
- Harris C. C. Jr., 1968, *A stochastic process model of residential development*, J. Reg. Sci., 8–11, 29–39.
- Hart P. E., Prais S. J., 1956, *The analysis of business concentration*, J. Roy. Statist. Soc., Ser. A, 119, 150–175.
- Holzer J., Smoliński Z., 1968, *Problemy reprodukcji ludności Polski*, GUS, Warszawa, 60–64.
- Isard W., Freutel G., 1954, *Regional and national product projections and their interrelations*, [w:] *Long range economic projections*, Studies in Income and Wealth, 16.
- Isard W., Bramhal D., 1959, *Regional employment and population forecast via relative income potential models*, Papers and Proceedings, Reg. Sci. Ass., 5, 25–50.
- Jagielski A., 1970, *Niektóre problemy współczesnego rozwoju ludności ZSRR*, Studia Demogr., 1, 35–36.
- 1975, *Spadek płodności w miastach w Polsce*, Studia Demogr., 41, 57–73.
- Jóźwiak J., Gruszczyński M., Kotowski I., Koźniewska I., Witkowski I. M., 1974, *Prognoza przekształceń produkcji przemysłu w nawiązaniu do określonych podstawowych czynników wzrostu*, IRG SGPiS, Warszawa.
- Kemeny J. G., Snell J. L., 1960, *Finite Markov chains*, D. van Nostrand Co., Princeton, New Jersey.
- 1962, *Mathematical models in the social sciences*, Ginn a. Comp., Boston.
- Kędelski M., 1974, *Wpływ inwestycji na rozwój ludności w układzie powiatowym na tle urbanizacji*, Studia Demogr., 38, 51–65.
- Klimczyk M., 1974, *Kierunki i struktury migracji wewnętrznych w Polsce w latach 1951–1980*, (m-pis).
- Korčák J., 1975, *Urbanizacja a płodność*, Studia Demogr., 41, 3–6.
- Kuciński K., Rakowski W., 1978, *Spoleczno-ekonomiczne uwarunkowania migracji w Polsce*, Biuletyn IGS SGPiS, 1, 86–104.
- Lovgren E., 1956, *The geographical mobility of labour. A study of migration*, Geogr. Ann., 38, 4, 344–394. (tłum. pol. 1972, *Geograficzna mobilność siły roboczej. Studium migracji*, Przegl. Zagr. Lit. Geogr., 3–4, 183–257).
- Mirowski W., 1968, *Migracje do Warszawy*, Ossolineum.
- 1974, *Czynniki ekonomiczne i pozaekonomiczne w indywidualnych decyzjach migracyjnych* (m-pis referatu na Spotkanie Okrągłego Stołu KPZK PAN, 25–26 XI 1974, *Migracje wewnętrzne w perspektywie nauk społecznych*).
- Namysłowska M., 1975, *Seminarium nt. Rozwój ludności a procesy urbanizacji we współczesnej Europie*, Studia Demogr., 41, 137–149.
- Nelson P., 1959, *Migration, real income and information*, J. Reg. Sci., 1, 2, 43–74.
- Okólski M., 1971, *Rozwój ekonomiczny a zagadnienie rozrodczości*, Studia Demogr., 26, 73–92.
- Okrasa W., 1968, *Łańcuchy Markowa jako model dynamiki postaw*, praca magisterska, Wyd. Fil. UW (m-pis).
- Paradysz J., 1976a, *Ekonomiczne koncepcje dzietności w literaturze amerykańskiej*, Studia Demogr., 43, 71–85.
- 1976b, *O niektórych związkach między spadkiem płodności, sturzeniem się ludności a zakupami dóbr trwałego użytku*, Studia Demogr., 45, 139–146.
- Pfouts R. W., 1958, *Discussion: population projection by means of income potential models*, Papers and Proceedings, Reg. Sci. Ass., 4, 155–158.
- Prais S. J., 1955, *Measuring social mobility*, J. Roy. Statist. Soc., Ser. A, 118, 56–66.
- Robinson W. C., Horlacher D. E., 1971, *Population growth and economic welfare*, Reports on Population, Family Planning, 6, 22–30.

- Roeske-Słomka J., 1973, *Współzależność naturalnego rozwoju demograficznego i wzrostu gospodarczego regionów*, *Studia Demogr.*, 31, 85–99.
- 1974, *Współzależność dochodów i dzietności rodzin*, *Studia Demogr.*, 37, 45–61.
- 1975, *Czynnik demograficzny w niektórych ujęciach wzrostu gospodarczego*, *Studia Demogr.*, 42, 99–122.
- Rogers A., 1966, *A Markovian policy model of interregional migration*, *Papers, Reg. Sci. Ass.*, 17, 205–224.
- Simon J., 1969, *The effect of income on fertility*, *Popul. Studies*, 3, 329.
- Sjaastad L. A., 1960, *The relationship between migration and income in the United States*, *Papers and Proceedings, Reg. Sci. Ass.*, 6, 37–64.
- Slesariew G., 1965, *Metodologia socjologicznego issledowanija*, *Problem narodonasielenija*, Moskwa.
- Smith P. E., 1961, *Markov chains. Exchange matrices and regional development*, *J. Reg. Sci.*, 3, 1, 27–36.
- Smoliński Z., 1969, *Wpływ czynników ekonomicznych na proces reprodukcji ludności*, *Studia Demogr.*, 19, 41–62.
- Stewart J. Q., 1948, *Demographic gravitation, evidence and applications*, *Sociometry*, 11, 31–58.
- Stewart J. Q., Warntz W., 1958, *Physics of population distribution*, *J. Reg. Sci.*, 1, 1, 99–123.
- Szajnowska A., 1971, *Próba zastosowania modelu Markowa do prognozowania wlasnościowego obrotu ziem (m-pis)*.
- Tarver J. D., Gulley W. R., 1965, *A stochastic analysis of the Census divisions of the United States*, *Demography*, 2, 134–139.
- Vielrose E., 1968, *Przyczynek do zagadnienia współzależności między dochodem narodowym a płodnością*, *Studia Demogr.*, 15, 13–21.
- Williamson J. G., Swansons J. A., 1966, *The growth of cities in the American Northeast 1820–1870*, *Exploration in Entrepreneurial History*, 4, 1, Suppl. Fall.



## THE APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELS FOR PREDICTING CHANGES IN POPULATION DISTRIBUTION IN POLAND

### Summary

The subject of this work are two mathematical models — Carrothers' income potential model and Markov ergodic chain model — examined from the point of view of their usefulness for predicting changes in the distribution of population in Poland. The essential goal of the work was to test the models by means of prediction *ex post* of changes in the distribution of Poland's population. The predictions were not in themselves the aim of the study, but were worked out merely for testing purposes. The author tested the cognitive value of the models by verifying the correctness of the premises underlying the models in respect to the conditions in which they were used and their predictive value (by evaluating the accuracy of the predictions and the economic effectiveness of the models). The tested models differ in their theoretical grounds and construction, but are similar in that they may be operative in a spatial approach and allow us to consider mutual links between all the elements of the system.

Carrother's income potential model, derived from J. Q. Stewart's population potential models, is based on the premise that population growth is certain function of income potential growth in the region. This formulation of the model emphasises relationship between demographic processes and broader social and economic processes. The dependence of population growth on economic factors, which has many times been documented in scientific literature, has been corroborated by means of correlation analysis for the regions of Poland under study. Correlation coefficients between a selected income category and different components of real population growth were highly significant. Despite this, the level of accuracy of prediction of changes in population distribution achieved with the use of Carrothers' procedure was low. This is due to the fact that real processes deviated from the processes envisaged in Carrothers' concept.

The tests used in the study to verify the correctness of the model's premises showed that population growth in regions was not a function of the growth of income potential in these regions, but a function of the magnitude of this potential. As an examination of variability of income potential over time and space showed, in planned economy, which tends to level off disproportions between regions, regions with a high income potential exhibit a low rate of growth of this potential and vice versa. Considering this, Carrothers' income potential model cannot in its original form be applied to predicting changes in the distribution of Poland's population.

However, the study did not undermine the idea itself of explaining changes in population processes of regions with the use of economic categories. To be used for predicting changes in Poland's population, Carrothers' income potential model requires essential modifications. The analyses conducted in this study identified the directions of these modifications.

When applied to population processes, Markov ergodic chain model describes changes in population distribution in the categories of probability. As the character of individual decisions related to migration and reproduction is to some extent random, it should be possible to use a stochastic model for projecting population changes. Despite the many shortcomings of the Markov chain model, the studies have confirmed its usefulness for short-term population prediction. Limiting the time horizon of the prediction to 5–7 years is due to the extrapolative character of the model

and the fact that the observed process of population growth does not meet the basic condition subsumed in Markov models, which is that the system should tend towards a state of equilibrium. An analysis of theoretical and real variations of transition probabilities has confirmed the view encountered in scientific literature that spatial socio-economic processes are not classic Markov-type processes. The accuracy of prediction achieved by means of Markov model does not significantly deviate from the accuracy of prediction made by the Central Statistical Office (GUS). However, the Markov chain model has a definite edge as regards the economic effectiveness of the two methods.

The attempts to modify the model by introducing variable matrices or variable vectors based on the extrapolation of real data did not yield better results than the Markov model proper, one reason being that the chronological series of real data serving as the basis of extrapolation was too short.

Further research designed to improve the reliability of predictions based on the Markov chain model should lead to constructing an ergodic model subsuming explanatory elements and to constructing absorbing chains, which would subsume all the determinants of changes in population size. In the system of central planning, considering the possibility of steering the socio-economic processes intervening Markov chain models of Roger's type could be found useful.

*Translated by Urszula Siuta*

## ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ К ПРЕДУСМАТРИВАНИЮ ИЗМЕНЕНИЙ РАЗМЕЩЕНИЯ ЖИТЕЛЕЙ ПОЛЬШИ

### Резюме

Предметом настоящей работы являются две математические модели — модель потенциала дохода Карротерса и эргодичная модель цепей Маркова — исследуемые с точки зрения возможности их применения в прогнозировании изменений размещения населения Польши. Основная цель работы заключалась в испытании этих моделей путём их применения в предусматривании изменений размещения населения Польши в ретроспективном подходе. Разработка прогнозов, которая не является одной лишь целью работы, послужила только как метод испытания. Испытанию подвергли познавательные ценности моделей (путём верификации закономерностей положений лежащих в основе строения моделей, учитывая условия, в которых были применены), а также прогнозируемые ценности (путём оценки правильности предположений и экономической эффективности моделей). Испытываемые модели характеризуются разными теоретическими основами и разным строением, но их соединяет возможность оперативного применения в пространственном подходе с учётом взаимосвязей между всеми элементами системы.

Модель потенциала дохода Карротерса, выведенная из моделей потенциала населения Ж. Стюарта, опирается на предпосылку, что рост заселения является некоторой функцией роста потенциала дохода этой территории. Сформулированная таким образом модель подчёркивает связь демографической проблематики с более широкой социально-экономической проблематикой. Многократно документированная в научной литературе зависимость развития заселения от экономических факторов подтвердил анализ корреляции проведен для исследуемых районов Польши. Коэффициенты корреляции между выбранной категорией дохода и отдельными составными частями действительного прироста населения были очень важными. Несмотря на это степень точности предусматривания изменений в размещении населения — по процедуре Карротерса — низкая. Это вытекает из отсутствия согласованности между действительным течением явлений и течением принятым по концепции Карротерса.

Примененные в исследовании тесты проверяющие правильность положений моделей показали, что прирост заселения районов не является функцией роста потенциала дохода этих территорий, но функцией величины этого потенциала. Исследование изменчивости потенциала дохода во времени и пространстве, обнаружило что в плановом хозяйстве, для которого характерным является стремление к выравниванию диспропорции между районами, территории с высоким потенциалом дохода характеризуются небольшим темпом роста этого потенциала — и наоборот. В такой ситуации модель потенциала дохода Карротерса не может быть в своём оригинальном виде пригодной для предусматривания изменений размещения населения Польши.

Проведенные исследования не нарушают, однако, самой идеи объяснения изменений в развитии заселения пространственных систем при помощи экономических категорий. Использование модели потенциала дохода Карротерса в прогнозировании изменений в размещении населения Польши требует введения существенных изменений. Направления этих изменений указали анализы проведенные в настоящей работе.

Эргодичная модель цепей Маркова отнесена к демографическим процессам является моделью, которая описывает изменения в размещении населения в категориях вероятности. Случайный, в некоторой степени, характер решений в области миграции и рождаемости обосновывает возможность использования стохастической модели в предусматривании изменений заселения. Несмотря на многие недостатки модели цепей Маркова, проведенные исследования подтвердили её пригодность для коротковременного прогнозирования плотности заселения. Ограничение горизонта прогноза до 5—7 лет вытекает из экстраполяционного характера модели, а также из факта, что наблюдаемый процесс роста заселения не выполняет основного условия принятого в модели Маркова, т. е. стремление системы к состоянию равновесия. Анализ изменений теоретических и действительных вероятностей переходов подтвердил встречанный в научной литературе тезис, что пространственные социально-экономические процессы не являются типичными процессами Маркова. Полученная точность предвидений, использующих модель Маркова не отходит существенно от правильности прогнозов Центрального статистического управления. Зато сопоставление экономической эффективности обоих методов решительно выпадает в пользу модели цепей Маркова.

Попытки модификации модели, опирающиеся на введение переменных матрицы или переменных векторов на основе экстраполяции действительных данных, не принесли лучших результатов, чем подлинная модель Маркова, в частности из-за слишком короткого хронологического ряда действительных данных, являющихся основой экстраполяции.

Дальнейшие исследования в цели увеличения добросовестности прогнозов, опирающихся на модели цепей Маркова, должно привести к составлению эргодичной модели, содержащей объясняющие элементы, и к строению поглащающих цепей, учитывающих все факторы изменений плотности заселения.

В системе центрального планирования, использующего возможность управления социально-экономическими процессами, полезными могли бы оказаться интервенционные модели цепей Маркова типа Рожерса.

*Перевела Регина Ольмевска*

**WYDAWNICTWA IG i PZ PAN<sup>7</sup>**  
**VARIA**

**Bibliografia geografii polskiej 1980, 1984, s. 405, zł 500, —**

**Streszczenia prac habilitacyjnych i doktorskich 1982, 1985, s. 103, zł 100. —**

**Centralny katalog zbiorów kartograficznych w Polsce Zeszyt 5. Wieloarkuszowe mapy topograficzne  
Polski 1576—1870, 1984, cz. 1 s. 109, cz. 2 tab. 220, zł 3500, —**

**Katalog dawnych map Rzeczypospolitej Polskiej w kolekcji Emeryka Hutten-Czapskiego i w innych  
zbiorach. Oprac. W. Kret, 1978, s. 164, 37 map, zł 140, —**

**WYKAZ ZESZYTÓW DOKUMENTACJI GEOGRAFICZNEJ**  
za ostatnie lata

**1984**

- 1/2 PRACA ZBIOROWA — Problemy bioklimatologii uzdrowiskowej, cz. V, s. 138, zł 60,—
- 3 L. ANDRZEJEWSKI — Dolina Zgłowiączki — jej geneza oraz rozwój w późnym glacie i holocenie, s. 84, zł 60,—
- 4 F. SZLAJFER — Rola plantacji w kształtowaniu przestrzeni społeczno-gospodarczej na przykładzie Ameryki Środkowej, s. 102, zł 60,—
- 5 E. PYTEL-TAFEL — Struktura demograficzna jako czynnik różnicujący zbiór miast polskich, s. 88, zł 60,—
- 6 R. BUREK — Infrastruktura gospodarcza a towarowość rolnictwa (na przykładzie woj. kieleckiego), s. 82, zł 60,—

**1985**

- 1 T. LIJEWSKI — Układy komunikacyjne województw, s. 80, zł 70,—
- 2 I. CHUDZYŃSKA — Struktura przestrzenna handlu detalicznego w Warszawie, s. 74, zł 70,—
- 3 M. GÓRALCZYK, B. GÓRZ — Z badań nad strukturą i infrastrukturą rolnictwa, s. 100, zł 70,—
- 4 P. WERNER — Zmiany struktury przestrzennej przemysłu środków informatyki w Polsce w latach 1965—1980, s. 88, zł 70,—
- 5 A. WELC — Zmienność denudacji chemicznej w Karpatach fliszowych (na przykładzie zlewni potoku Bystrzanka), s. 99, zł 70,—
- 6 T. NIEDŹWIEDŹ, M. ORLICZ, J. ORLICZOWA — Wiatr w Karpatach polskich, s. 90, zł 70,—

**1986**

- 1 K. OSTASZEWSKA — Zastosowanie modeli matematycznych do przewidywania zmian rozmieszczenia ludności Polski, s. 74, zł 80,—
- 2 PRACA ZBIOROWA — Niektóre problemy metodyczne hydrologii (w druku)
- 3 PRACA ZBIOROWA — Wyniki badań bioklimatu Polski. cz. I (w druku)
- 4 PRACA ZBIOROWA — Współczesne problemy światowych procesów rozwoju (w druku)
- 5 PRACA ZBIOROWA — Zbiornik wrocławski — niektóre problemy z geografii fizycznej (w druku)
- 6 S. ŻUREK — Akumulacja i decesja materii organicznej w torfowiskach na obszarze Polski (w druku)