ANALYTISCHE

GEOMETRIE DES RAUMES

VON

GEORGE SALMON.

DEUTSCH BEARBEITET

VON

DR. WILHELM FIEDLER,

ORDENTLICHER PROFESSOR DER DESCRIPT. GEOMETRIE AM POLYTECHNIKUM ZU PRAG.

II. THEIL.

DIE THEORIE DER CURVEN IM RAUME UND DER ALGEBRAISCHEN FLÄCHEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1865.

ANALYTISCHE
GEOMETRIE DER CURVEN
IM RAUME
UND DER
ALGEBRAISCHEN FLÄCHEN

VON

GEORGE SALMON.

DEUTSCH BEARBEITET

VON

Dr. WILHELM FIEDLER,
ORDENTLICHER PROFESSOR DER DESCRIPT. GEOMETRIE AM POLYTECHNIKUM ZU PRAG.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1865.

VORWORT.

Indem ich dem mathematischen Publikum den zweiten Theil von G. Salmon's Analytischer Geometrie des Raumes übergebe, deren erster Theil im Herbst 1863 veröffentlicht wurde, habe ich nur einige Worte über die Abweichungen hinzuzufügen, welche denselben von der Original-Ausgabe unterscheiden.

Sie bestehen, abgesehen von Aenderungen der Bezeichnung, die ich nützlich glaube, wie die consequente Durchführung der Indices bei den Differentialen der Functionen und bei den vier Veränderlichen insbesondere der homogenen unter ihnen, in Erweiterungen zum Theil von bedeutenderem Umfange. Das Werk meines vortrefflichen Freundes, in welchem so wichtige Theile der Wissenschaft, wie die allgemeine Lehre von den Singularitäten der algebraischen Flächen, die Theorie der Raumcurven und der developpabeln Flächen, insbesondere ihrer projectivischen Eigenschaften, die Theorie der Flächen dritter Ordnung etc., zum erstenmale im Zusammenhange vorgetragen wurden, hat seinen schönsten Erfolg darin gefunden, dass es Anlass und Ausgangspunkt geworden ist für die Veröffentlichung von Arbeiten, welche die Wissenschaft weiter geführt haben.

Es genügt, zur Bezeichnung ihres Werthes auf die Abhandlungen von A. Clebsch über die Osculationsebenen und die stationären Ebenen der Durchschnittscurven zweier Flächen und über die Doppelpunkte der Curve vierpunktiger Berührungen auf einer Fläche, und auf die von A. Cayley über die allgemeine Theorie der windschiefen Regelflächen und die Hesse'sche Fläche der Developpabeln hinzuweisen.

Die Trennung des umfangreichen Materials in zwei Theile hat es möglich gemacht, die wichtigsten derselben nach ihrem wesentlichen Inhalte in das Werk aufzunehmen. Ich hoffe, dass in dem jetzigen Stadium der Entwickelung diese Rücksicht auf eine gewisse Vollständigkeit des Materials der Sache besonders nützlich sein und der Wirksamkeit kurzer aber ganz von dem wissenschaftlichen Standpunkte der lebenden Meister geschriebener Lehrbücher den Boden bereiten könne, die uns die Zukunft vielleicht schenkt. Darum sind auch einige Arbeiten berücksichtigt worden, welche wohl in einem Werke dieser Art nur übergangen werden dürfen, wenn bestimmte Rücksichten auf den Umfang desselben unumgänglich sind. Ich zähle dahin Kummer's Theorie der Strahlensysteme, und Clebsch's analytische Theorie des Steiner'schen Pentaeders bei Flächen dritter Ordnung, sowie seine Abhandlung vom Normalenproblem bei Flächen zweiten Grades. Dass ich aus älterer Zeit Jacobi's Untersuchung über die Bestimmung der Flächen durch Punkte und aus neuerer Bour's Veröffentlichungen über die Theorie der Deformation der Flächen berücksichtigt habe, wird wohl keiner Rechtfertigung bedürfen. Bei den Raumcurven und den Developpabeln ist überall, obwohl bei dem schon so reichen Material mit Zurückhaltung, auf die neuesten Fortschritte Rücksicht genommen, bei den Flächen vierter Ordnung sind ebenso Kummer's werthvolle Beiträge zur Theorie derselben mitgetheilt worden, die wieder ihrerseits die schönen Arbeiten von Schröter und Cremona (vergl. „Jour. f. d. r. u. a. Math.“ Bd. LXIII, p. 315) über die dabei untersuchte Steiner'sche Fläche hervorgerufen haben.

In den Zusätzen sind diese Ergänzungen theils durch Literaturnachweise fortgeführt, theils sind einzelne besondere Untersuchungsrichtungen bezeichnet worden. Unter ihnen hebe ich die Formeln von Lamé und die Untersuchung von Clebsch über die Verwendung der elliptischen und Abel'schen Functionen in der Raumgeometrie hervor. Die Skizze über den Quaternionen-Calcul ist unverändert nach dem Original wiedergegeben.

Besonders muss ich aber erwähnen, dass die lebhafte Theilnahme des verehrten Verfassers an der deutschen Veröffentlichung seiner Arbeiten mich in den Stand gesetzt hat, die Erweiterung der Theorie der Invarianten der Systeme von Flächen zweiten Grades zu einer allgemeinen Erledigung der bezüglichen Hauptprobleme in ihren die betreffenden Partien des ersten Bandes ergänzenden Theilen hier vorzulegen, welche er für die zweite Auflage seines Werkes bestimmt hat. Sie bildet den Schluss der Zusätze (p. 593 f.) und wird als eine werthvolle Bereicherung der deutschen Ausgabe gewiss anerkannt werden.

Möge denn das Werk so kräftig zur Förderung der analytisch-geometrischen Studien in Deutschland beitragen, wie die hohe Schätzung zu erwarten berechtigt, die es bei den Männern der Wissenschaft bereits erworben hat.

Prag, am 23. Februar 1865.

Dr. Wilhelm Fiedler.

Inhaltsverzeichniss.

Kapitel I.
Allgemeine Theorie der Flächen.

I. Einleitung.

II. Krümmung der Flächen.

Kapitel II.
Gewundene Curven und abwickelbare Flächen.

I. Projectivische Eigenschaften.

II. Classification der Curven.

III. Nicht-projectivische Eigenschaften der Curven.
(Vgl. Anhang p. 553 bis p. 558).

IV. Die Curven auf den Flächen.

V. Die Theorie der Krümmung und Deformation der Flächen und die der geradlinigen Strahlensysteme.

Kapitel III.
Von den Familien der Flächen.

Kapitel IV.

Von den Flächen, welche aus Flächen zweiter Ordnung abgeleitet werden.

Kapitel V.

Von den Flächen dritter Ordnung.

Artikel. Seite.

Kapitel VI.
Allgemeine Theorie der Flächen.

Zusätze.

NB. Die mit einem Stern bezeichneten Artikel oder Abschnitte sind im Original nicht enthalten.

I. Kapitel.

Allgemeine Theorie der Flächen.

I. Abschnitt. Einleitung.

1. Indem wir für ein späteres Kapitel eine mehr in das Detail eingehende Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der Flächen vorbehalten, gedenken wir hier einen Abriss derjenigen Theile dieser allgemeinen Theorie zu geben, welche sich mit der mindesten Mühe ableiten lassen.

Sei die allgemeine Gleichung der Fläche in der Form:

$$\begin{gathered} A \\ + Bx + Cy + Dz \\ + Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + 2Hyz + 2Kzx + 2Lxy \\ + \text{etc.} = 0 \end{gathered}$$

geschrieben oder, wie es zur Abkürzung vorzugsweise geeignet ist:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} = 0,$$

wo u_n die Vereinigung der Glieder vom n^{ten} Grade in der Gleichung bezeichnet.

In dieser Ausdrucksform besteht u_0 aus einem Gliede, u_1 enthält drei, u_2 sechs Glieder, etc., und die Gesammtzahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung ist die Summe von $(n + 1)$ Gliedern der Reihe

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad \text{etc.},$$

d. i.

$$= \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{1 . 2 . 3}.$$

Die Zahl der zur Bestimmung einer Fläche vom

n^{ten} Grade nothwendigen Bedingungen ist um eins kleiner als diese Anzahl, d. h.

$$= \frac{n(n^2 + 6n + 11)}{6}.$$

Daher bestimmen 3 Punkte eine Ebene, 9 Punkte eine Fläche zweiter, 19 eine Fläche dritter, 34 eine Fläche vierter Ordnung.

Wenn man in die allgemeine Gleichung die Werthe

$$x = mz + a, \quad y = nz + b$$

einsetzt, welche Punkten einer geraden Linie entsprechen, so liefert die für z bestimmende Gleichung n^{ten} Grades, welche dadurch entsteht, die x Werthe des z in den Punkten, die der geraden Linie und der Fläche n^{ter} Ordnung gemeinschaftlich sind: Eine gerade Linie schneidet eine Fläche n^{ter} Ordnung in n (reellen, oder ganz oder zum Theil imaginären) Punkten. Wird das Substitutionsresultat eine Identität, so ist die Gerade in der Fläche enthalten. Somit ist eine Fläche n^{ter} Ordnung durch eine in ihr gelegene Gerade und $\frac{n(n^2 + 6n + 5)}{6} - 1$ Punkte auf ihr bestimmt. Die Bedingung, eine Gerade zu enthalten, gilt für $(n + 1)$ Bedingungen. Daher bestimmen 3 Gerade im Raume eine Fläche zweiten Grades.*) Eine ähnliche Elimination zeigt, dass die Durchschnittslinie einer Fläche n^{ter} Ordnung mit einer Ebene eine Curve n^{ter} Ordnung ist.

Die Theorie der Elimination lehrt auch, dass drei Flächen von den respectiven Ordnungen m, n, p sich in mnp Punkten durchschneiden, oder dass die Durchschnittscurve zweier Flächen von den Ordnungen m und n von einer Fläche p^{ter} Ordnung in mnp Punkten, von einer Ebene also z. B. in mn Punkten geschnitten wird.

Man findet ferner: Wenn durch beliebige

$$\frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{6} - 2$$

*) Nicht alle Flächen enthalten gerade Linien; da die Gleichungen der Geraden vier Constante enthalten, so findet nur bei den Flächen zweiten Grades die Möglichkeit den Bedingungen zu genügen stets und bei denen dritter Ordnung in einer bestimmten Zahl von Fällen statt; die Flächen höherer Ordnungen enthalten nicht allgemein gerade Linien.

Punkte eine Schaar von Flächen n^{ter} Ordnung gelegt werden, so schneiden sich alle diese Flächen in einer und derselben Curve. Denn sie sind alle durch die Gleichung

$$U + \lambda U_1 = 0$$

darstellbar, in welcher U und U_1 diejenigen Polynome n^{ten} Grades bezeichnen, welche mit Null verglichen die Gleichungen zweier unter jenen Flächen darstellen.

Sie enthalten also alle die Curve

$$U = 0, \quad U_1 = 0.$$

Jede von ihnen ist durch einen einzigen dieser Curve nicht angehörigen Punkt bestimmt, den sie enthalten soll. Diess ist der Grundcharacter eines Büschels von Flächen n^{ter} Ordnung.

Ein Büschel von Flächen dritter Ordnung ist bestimmt durch 18, ein solches von Flächen vierter Ordnung durch 33 Punkte.

Ferner: Alle Flächen n^{ter} Ordnung, die durch

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - 3$$

beliebige Punkte gehen, schneiden sich ausser in jenen noch in anderen

$$n^3 + 3 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

festen Punkten.

Beispielsweise alle Flächen zweiten Grades, die durch 7 Punkte gehen, in einem achten Punkte.

Denn die Gleichungen aller dieser Flächen sind in der Form

$$U + \lambda U_1 + \mu U_2 = 0$$

enthalten, in welcher U, U_1, U_2 diejenigen Polynome n^{ten} Grades bezeichnen, welche gleich Null gesetzt drei jener Flächen repräsentieren. Die Zahl der denselben gemeinschaftlichen Punkte ist n^3 und daraus entspringt der Satz. Da die Gleichung des Systems zwei Constanten explicite enthält, so kann durch jedes gegebene Paar von Punkten im Raume eine jener Flächen gelegt werden. Man nennt die Gesammtheit dieser Flächen ein Netz von Flächen n^{ter} Ordnung und dass je eine Fläche des Netzes durch zwei willkürlich gegebene Punkte geht, ist die characteristische Eigenschaft der Netze von Flächen. Alle diejenigen Flächen eines

1*

Netzes, welche durch denselben Punkt des Raumes gehen, bilden ein Flächenbüschel. Daran schliessen sich auch die Sätze: Wenn unter den Zweigen der Durchschnittscurve zweier Flächen n^{ten} Grades solche sind, durch welche eine Fläche vom m^{ten} Grade gelegt werden kann, so geht durch die übrigen eine Fläche vom $(n-m)^{\text{ten}}$ Grade. Wenn z. B. zwei Flächen dritten Grades eine ebene Curve enthalten, so geht durch den Rest der Durchdringungscurve eine Fläche zweiten Grades. Die Eigenschaften des windschiefen Sechsecks auf einer Fläche zweiten Grades gehen daraus hervor.*)

Wenn von den Durchschnittspunkten dreier Flächen n^{ten} Grades mn^2 auf einer Fläche m^{ten} Grades liegen, so geht durch die $(n-m)\,n^2$ übrigen Durchschnittspunkte eine Fläche $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades.

Wenn drei Flächen n^{ten} Grades eine und dieselbe Curve enthalten, die auf einer Fläche m^{ten} Grades liegt, so schneiden sich die drei Flächen $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades, welche durch die zweiten Durchschnittscurven jener Flächen gehen, in einer und derselben Curve.

Man kann endlich diese Betrachtungen fortsetzen auf Flächen n^{ter} Ordnung von der allgemeinen Gleichungsform

$$U + \lambda U_1 + \mu U_2 + \nu U_3 = 0.$$

Man hat damit Flächen, deren jede durch je drei beliebige Punkte bestimmt werden kann nach der Zahl der Constanten λ, μ, ν. Man hat vorgeschlagen eine solche Flächenfamilie als ein System zu benennen, und sieht leicht, dass alle die Flächen des Systems, welche durch denselben Punkt gehen, ein Netz, und alle die, welche dasselbe Paar von Punkten enthalten, ein Büschel bilden.

2. Man kann die allgemeine Gleichung in die Form einer Polargleichung überführen, indem man die Substitutionen

$$\varrho \cos\alpha, \quad \varrho \cos\beta, \quad \varrho \cos\gamma$$

für

$$x, \qquad y, \qquad z$$

ausführt, und erhält dadurch eine Gleichung vom n^{ten} Grade, aus der n Werthe des Radius vector bestimmt sind, die einer ge-

*) Vergl. Art. 112 im ersten Bande dieses Werkes.

gebenen durch die Winkel α, β, γ bezeichneten Richtung desselben entsprechen.

Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in der Fläche liegt, so ist

$$u_0 = 0$$

und eine der Wurzeln der letztgedachten Gleichung ist

$$\varrho = 0.$$

Eine zweite Wurzel derselben Gleichung nimmt den Werth Null an, wenn die Bedingung

$$B \cos\alpha + C \cos\beta + D \cos\gamma = 0$$

erfüllt ist, die durch Multiplication mit ϱ in die Form

$$Bx + Cy + Dz = 0$$

übergeht, welche also ausdrückt, dass der Radius vector in der Ebene

$$u_1 = 0$$

enthalten sei.

Es ist keine andere Bedingung zu erfüllen, damit der Radius vector die Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten schneide.

Wir erkennen so, dass im Allgemeinen durch einen willkürlich gewählten Punkt einer Fläche unendlich viele Radien vectoren gelegt werden können, welche in ihm zwei zusammenfallende Punkte mit derselben gemein haben, d. i. unendlich viele Tangenten der Fläche; alle diese Tangenten liegen in einer durch die Gleichung

$$u_1 = 0$$

bestimmten Ebene, welche die Tangentenebene der Fläche in jenem Punkte genannt wird.

3. Der Durchschnitt einer Fläche mit einer ihrer Tangentenebenen ist eine Curve, welche den Berührungspunkt zum Doppelpunkt hat.*)

Jeder Radius vector, welcher in der Tangentenebene liegt, ist auch ein Radius vector der durch sie mit der Fläche gebildeten Schnittcurve, und da jeder von diesen Radien die Schnittcurve

---

*) Diese Bemerkung ist wohl zuerst von Cayley gemacht worden; vergl. Gregory's „Solid Geometry“ Second Edition p. 141.

im Coordinatenanfang in zwei zusammen fallenden Punkten schneidet (Artikel 2), so ist dieser nach der Definition ein Doppelpunkt derselben.

Man hat ein Beispiel dieses Gesetzes bei dem einfachen Hyperboloid kennen gelernt, als welches durch jede seiner Tangentenebenen in einem Kegelschnitt mit einem Doppelpunkt, d. h. in zwei geraden Linien geschnitten wird. Der Berührungspunkt der Tangentenebene einer Fläche zweiter Ordnung von einer andern Species ist ebenso als der Durchschnittspunkt von zwei imaginären geraden Linien zu betrachten.

Aus unserer jetzigen Betrachtung folgt umgekehrt, dass jede Ebene, die eine Fläche in einer Curve mit Doppelpunkt schneidet, als eine *Tangentenebene* der Fläche anzusehen ist, welcher jener Doppelpunkt als Berührungspunkt entspricht; dass sie eine *doppelte Tangentenebene* heissen muss, wenn der besagte Durchschnitt zwei Doppelpunkte enthält, und eine *dreifache Tangentenebene*, wenn drei Doppelpunkte ihm angehören.

Da die Gleichung einer Ebene drei unabhängige Constanten enthält, so ist es immer möglich, eine Ebene so zu bestimmen, dass sie drei gegebenen Bedingungen genügt, und es kann daher eine endliche Anzahl von Ebenen gefunden werden, welche eine gegebene Fläche in einer Curve mit drei Doppelpunkten schneiden, d. h. *jede Fläche hat im Allgemeinen eine bestimmte Zahl von dreifachen Tangentenebenen.*

Sie besitzt auch unendlich viele *Doppeltangentenebenen*, und es wird durch dieselben als der *Ort ihrer Berührungspunkte* eine Curve auf der Fläche bestimmt. Der Grad dieser Curve und die Zahl der dreifachen Tangentenebenen werden weiterhin untersucht.

4. *Durch einen in einer Fläche willkürlich gewählten Punkt können im Allgemeinen zwei Linien so gezogen werden, dass sie mit der Fläche drei zusammen fallende Punkte gemein haben.*

Damit der Radius vector die Fläche in drei zusammen fallenden Punkten schneide, muss nicht allein wie in Artikel 2 die Bedingung

$$B \cos \alpha + C \cos \beta + D \cos \gamma = 0,$$

sondern auch die andere

$$E \cos^2 \alpha + F \cos^2 \beta + G \cos^2 \gamma$$
$$+ 2H \cos \beta \cos \gamma + 2K \cos \gamma \cos \alpha + 2L \cos \alpha \cos \beta = 0$$

erfüllt sein. Wenn beide Bedingungen erfüllt sind, so ist die Gleichung des n^{ten} Grades, durch welche ϱ bestimmt wird, — da A auch gleich Null ist — durch ϱ^3 theilbar und hat daher drei ihrer Wurzeln gleich Null.

Nun drückt die erste Bedingung aus, dass der Radius vector in der Tangentenebene

$$u_1 = 0$$

liegt, und die zweite sagt, dass er der Fläche

$$u_2 = 0$$

oder

$$Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + 2Hyz + 2Kzx + 2Lxy = 0$$

angehöre, welche ein Kegel zweiten Grades ist.

Da jeder solche Kegel von einer durch seinen Scheitel gehenden Ebene in zwei geraden Linien geschnitten wird, so können, der Behauptung gemäss, stets zwei die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllende gerade Linien gefunden werden.

Jede durch eine dieser Linien gehende Ebene — die Tangentenebene ausgenommen, welche beide enthält — schneidet die Fläche in einer Curve, welche den Berührungspunkt zum Inflexionspunkt hat; denn ein Inflexionspunkt ist ein Punkt, dessen Tangente die Curve in drei zusammen fallenden Punkten schneidet. Wir nennen deshalb die zwei durch jeden Punkt der Fläche gehenden geraden Linien, welche mit derselben in ihm drei zusammen fallende Punkte gemein haben, die I n f l e x i o n s t a n g e n t e n d e r F l ä c h e i n d i e s e m P u n k t e.

Die Existenz solcher Linien kann überdiess wie folgt nachgewiesen werden. Wir wissen, dass der Berührungspunkt in dem durch die Tangentenebene gebildeten Schnitt ein Doppelpunkt ist; es wird aber in der Theorie der ebenen Curven bewiesen, dass durch einen Doppelpunkt stets zwei gerade Linien gezogen werden können, welche die Curve in drei mit ihm zusammen fallenden Punkten schneiden. Das Gleiche gilt offenbar für dieselben von der Fläche.

5. Jenachdem das Paar seiner Tangenten reell und verschieden, zusammen fallend oder imaginär ist, gehört der Doppelpunkt

einer von drei verschiedenen Klassen an. Ihnen entsprechend ist die Berührung einer Ebene mit einer Fläche entweder eine solche, für welche der Berührungspunkt ein Knotenpunkt der Schnittcurve, d. i. ein Doppelpunkt mit reellen Tangenten, oder eine solche, für welche der Berührungspunkt eine Spitze oder ein Cuspidalpunkt, d. i. ein Doppelpunkt mit zusammenfallenden Tangenten, oder eine solche, für die der Berührungspunkt ein conjugierter Punkt ist, d. h. ein Doppelpunkt mit imaginären Tangenten; mit andern Worten, die Inflexionstangenten des Berührungspunktes characterisieren die Art der Berührung.

Dupin, welcher zuerst diese Unterschiede der Berührung bezeichnet hat,*) drückt sich darüber in folgender Weise aus: Wenn man nur Punkte betrachtet, die dem Anfangspunkt der Coordinaten so nahe sind, dass alle höheren Potenzen der Coordinaten von der zweiten aufwärts vernachlässigt werden können, so schneidet die Tangentenebene in demselben oder eine ihr unendlich nahe Parallel-Ebene die Fläche

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.}$$

in derselben Curve, in welcher sie die Fläche zweiter Ordnung

$$u_1 + u_2$$

schneidet. Jenachdem diese letztere Fläche durch Ebenen, welche der Tangentenebene parallel sind, in Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln geschnitten wird, muss auch der durch die Tangentenebene gebildete Schnitt als eine unendlich kleine Ellipse, Hyperbel oder Parabel betrachtet werden.

Dieser unendlich kleine Schnitt wird von Dupin die Indicatrix des Berührungspunktes genannt und er theilt die Punkte der Fläche je nach der Natur der ihnen entsprechenden Indicatrix in elliptische, hyperbolische und parabolische Punkte.

Wenn wir die Tangentialebene als die Ebene der xy voraussetzen, so ist die Gleichung der Fläche von der Form

$$z + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + \text{etc.} = 0,$$

und der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein elliptischer, hyper-

---

*) Vergl. Dupin's „Développements de Géométrie", p. 48.

bolischer oder parabolischer Punkt, je nachdem

$$B^2 \lesseqgtr AC$$

ist.*)

6. Aus der bekannten Gleichung der Tangentenebene für den in der Fläche gelegenen Anfangspunkt der Coordinaten leiten wir durch einfache Transformation der Coordinaten die Gleichung der Tangentenebene in einem beliebigen Punkte der Fläche ab. Wir erkennen genau in derselben Art, wie im Art. 58 des ersten Bandes, dass dieselbe in jeder der beiden Formen

$$(x-x')\frac{dU'}{dx'} + (y-y')\frac{dU'}{dy'} + (z-z')\frac{dU'}{dz'} = 0,$$

und

$$x\frac{dU'}{dx'} + y\frac{dU'}{dy'} + z\frac{dU'}{dz'} + w\frac{dU'}{dw'} = 0$$

geschrieben werden kann.

7. Wenn hiernach gefordert ist, die Tangentenebene in einem dem Anfangspunkt unendlich nahe liegenden Punkte der Fläche

$$z + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + \text{etc.} = 0$$

zu bestimmen, so haben wir x', y' als so klein voraus zu setzen, dass ihre Quadrate vernachlässigt werden können, während zugleich, da der nächstfolgende Punkt der Tangentialebene angehört

$$z' = 0$$

oder genauer gesprochen, wie es die Gleichung der Fläche zeigt, z' eine Grösse der nämlichen Ordnung mit den Quadraten von x' und y' ist. Damit wird ebensowohl aus der Formel des letzten Artikels, als durch die directe Einführung von $x + x'$,

*) Diess kann auch so ausgedrückt werden: Wenn die Ebene der xy die Tangentialebene und die Gleichung der Fläche in der Form

$$z = \Phi(x, y)$$

ausgedrückt ist, so ist der Anfangspunkt ein elliptischer, hyperbolischer oder parabolischer Punkt, je nachdem

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\right)^2 \lesseqgtr \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$$

ist; man findet leicht, dass dies mit dem im Text mitgetheilten Kennzeichen äquivalent ist. Wir gehen nicht näher darauf ein, weil es selten vorkommt, dass die Gleichung der Fläche in der entsprechenden Form gegeben, d. h. z explicite als Function von x und y ausgedrückt ist.

$y + y'$ für x und y und Vergleichung des linearen Theils der transformierten Gleichung mit Null, die Gleichung der nächstfolgenden Tangentialebene in der Form

$$z + 2(Ax' + By')\,x + 2(Bx' + Cy')\,y = 0$$

gefunden. Nun bezeichnet aber

$$(Ax' + By')\,x + (Bx' + Cy')\,y$$

denjenigen Durchmesser des Kegelschnitts

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = F,$$

welcher dem nach dem Punkte (x', y') gezogenen conjugiert ist („Analytische Geom. d. Kegelschnitte", Art. 96). Man hat also den Satz: Jede Tangentenebene einer Fläche wird durch eine nächstfolgende Tangentenebene derselben in demjenigen Durchmesser der Indicatrix geschnitten, welcher der durch die Wahl des nächstfolgenden Punktes bestimmten Richtung conjugiert ist.

Diess ist aus Dupin's Anschauung auch geometrisch evident. Denn wenn wir annehmen, dass die dem gegebenen nächstfolgenden Punkte in einem unendlich kleinen Kegelschnitt liegen, so geht die Tangentenebene in einem von ihnen nothwendig durch die zugehörige Tangente dieses Kegelschnitts; diese Letztere fällt aber beim Uebergang zur Grenze mit dem Durchmesser des Kegelschnitts zusammen, welcher zu dem durch den gewählten Punkt der Peripherie bestimmten conjugiert ist, weil sie diesem conjugierten Durchmesser parallel und unendlich wenig von ihm entfernt ist.

Darnach können alle Tangenten einer Fläche, die in einen gegebenen Punkt derselben an sie gelegt sind, in Paare so vertheilt werden, dass die Tangentenebene der Fläche in dem nächstfolgenden Punkte einer jeden von ihnen die jedesmalige andere enthält. Die so auf einander bezogenen Tangenten werden conjugierte Tangenten genannt.

In dem Falle, in welchem die zwei Inflexionstangenten reell sind, ist die Relation zwischen je zwei conjugierten Tangenten eines anderen Ausdrucks fähig. Wenn man nämlich die Inflexionstangenten als die Achsen der x und y wählt, welches mit der Einführung der Voraussetzungen

$$A = 0, \quad C = 0$$

in die vorige Gleichung identisch ist, so wird die Gleichung der nächstfolgenden Tangentenebene

$$z + 2B\,(x'y + xy') = 0.$$

Und da die geraden Linien

$$x = 0,\quad y = 0,\quad x'y + xy' = 0,\quad x'y - xy' = 0$$

ein harmonisches Büschel bilden, so lernen wir, dass jedes Paar conjugierter Tangenten mit den Inflexionstangenten ein harmonisches Büschel erzeugt; d. i. die Inflexionstangenten sind die sich selbst conjugierten Strahlen des involutorischen Büschels, welches von den Paaren der conjugierten Tangenten gebildet wird. (Vgl. „Analytische Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 413.)

8. In dem Falle, in welchem der Anfangspunkt der Coordinaten ein parabolischer Punkt ist, kann die Gleichung der Fläche in die Form

$$z + Ay^2 + \text{etc.} = 0$$

gebracht werden und die Gleichung einer nächstfolgenden Tangentenebene ist

$$z + 2Ay'y = 0.$$

Somit geht die Tangentenebene in jedem auf einen parabolischen Punkt nächstfolgenden Punkte durch die Inflexionstangente; und wenn der nächstfolgende Punkt in der durch

$$y' = 0$$

bestimmten Richtung genommen wird, so fällt die entsprechende Tangentenebene mit der ursprünglichen zusammen.

Demnach ist die Tangentenebene in einem parabolischen Punkt als eine Doppeltangentenebene zu betrachten; denn sie berührt die Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten.*)

In dieser Hinsicht können parabolische Punkte in Flächen als Analoga der Inflexionspunkte in ebenen Curven betrachtet werden; denn in der Theorie der höheren ebenen Curven wird bewiesen, dass die Tangente im Inflexionspunkt in ganz gleicher Art als eine Doppeltangente anzusehen ist. Eine weitere Analogie

---

*) Diess ward wohl zuerst bemerkt „Cambridge and Dublin Mathematical Journal“ Vol. III, p. 45.

zwischen parabolischen und Inflexionspunkten wird später dargelegt werden.

Da es zweckmässig ist, einen Namen zu haben zur Unterscheidung von Doppeltangentenebenen, welche in zwei verschiedenen Punkten berühren, von den Doppeltangentenebenen der hier betrachteten Art, bei welchen die Berührungspunkte zusammen fallen, so werden wir diese Letzteren stationäre Tangentenebenen nennen; indem wir durch diess Wort anzeigen wollen, dass die Tangentenebene bei der Bewegung, welche dem Uebergang von einem Punkt der Fläche zu einem andern entspricht, für einen solchen Punkt einen Augenblick in der nämlichen Lage bleibt.

Aus demselben Grunde hat man die Tangenten in den Inflexionspunkten ebener Curven stationäre Tangenten derselben genannt.

9. Wenn durch die Transformation des Anfangspunktes der Coordinaten in einen Punkt der Fläche nicht nur, wie bisher allein vorausgesetzt ward,

$$u_0 = 0$$

ist, sondern auch alle Glieder von

$$u_1$$

verschwinden, so dass die Gleichung der Fläche die Form

$$Ex^2 + Fy^2 + Gz^2 + 2Hyz + 2Kzx + 2Lxy + u_3 + \text{etc.} = 0$$

annimmt, so erkennt man in derselben Art, dass jede durch diesen Anfangspunkt gehende gerade Linie in ihm zwei zusammen fallende Punkte mit der Fläche gemein hat; derselbe ist dann als ein Doppelpunkt der Fläche zu bezeichnen.

Man sieht auch, dass eine durch diesen Anfangspunkt gezogene Gerade die Fläche in ihm in drei zusammen fallenden Punkten schneidet, wenn ihre Richtungscosinus der Bedingung

$$E\cos^2\alpha + F\cos^2\beta + G\cos^2\gamma$$
$$+ 2H\cos\beta\cos\gamma + 2K\cos\gamma\cos\alpha + 2L\cos\alpha\cos\beta = 0$$

genügen; in andern Worten, durch einen Doppelpunkt der Fläche gehen unendlich viele gerade Linien, welche mit der Fläche drei zusammen fallende Punkte gemein haben; sie bilden einen Kegel zweiten Grades, dessen Gleichung ist

$$u_2 = 0.$$

Ueberdiess schneiden sechs von diesen Linien die Fläche in vier zusammen fallenden Punkten, die Durchschnittslinien der beiden Kegel zweiten und dritten Grades

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0.$$

Die Doppelpunkte der Flächen können nach der Zahl dieser geraden Linien eingetheilt werden, welche reell sind, nach dem Zusammenfallen von zweien oder mehreren unter ihnen, etc.; wir wollen aber nicht in diese Einzelheiten eingehen.

Der einzige specielle Fall, welcher erwähnt werden muss, entspricht dem Zerfallen des Kegels u_2 in zwei Ebenen, und derselbe schliesst den specielleren Fall ein, wenn diese beiden Ebenen zusammen fallen, d. i. wenn u_2 ein vollkommenes Quadrat ist.

10. Jede einen Doppelpunkt enthaltende Ebene kann in gewissem Sinne als eine Tangentenebene der Fläche angesehen werden, weil sie die Fläche in einer Curve schneidet, die einen Doppelpunkt besitzt; in besonderer Art sind aber die Tangentenebenen des Kegels u_2 als Tangentenebenen der Fläche anzusehen. Jede derselben schneidet die Fläche in einer Curve, für welche der Anfangspunkt der Coordinaten eine Spitze ist.

Dem Doppelpunkt einer Fläche, welcher hiernach ein Punkt ist, durch den unendlich viele Tangentenebenen derselben hindurch gehen, entspricht im Allgemeinen in der Reciprocalfläche eine Ebene, welche diese in unendlich vielen einem Kegelschnitt angehörigen Punkten berührt. Wenn der Doppelpunkt von der speciellen Art ist, welche am Ende des letzten Artikels bezeichnet ward, so entspricht ihm eine Doppeltangentenebene der Reciprocalfläche, welche zwei Berührungspunkte besitzt.

11. Die in den vorhergehenden Artikeln unter der speciellen Voraussetzung, dass der Anfangspunkt der Coordinaten mit dem betrachteten Punkte zusammen falle, erhaltenen Resultate übertragen und erweitern wir nun auf den Fall einer beliebigen Lage dieses Punktes.

Wir erinnern zuerst den Leser daran, dass immer eine begrenzte Anzahl gerader Linien bestimmt werden kann, welche vier Bedingungen genügen (als z. B. eine Fläche vierfach berühren), weil die Gleichungen einer geraden Linie vier Constanten enthalten (Bd. I, Art. 46, Anmerk.); während dagegen unendlich viele gerade Linien gefunden werden können, welche drei Bedingungen erfüllen (z. B.

eine Fläche dreifach berühren) wobei dann diese Geraden eine gewisse Fläche erzeugen und die zugehörigen Berührungspunkte einen gewissen Ort auf der gegebenen Fläche bestimmen.

Wir kommen in einem späteren Kapitel auf die allgemeinen Probleme zurück, welche die Zahl der Auflösungen für vier gegebene Bedingungen und den Grad der erzeugten Fläche, sowie den Ort der Berührungspunkte für drei gegebene Bedingungen zu bestimmen verlangen.

In diesem Kapitel beschränken wir uns auf den Fall, in welchem die gerade Linie durch einen gegebenen Punkt gehen muss, der in oder ausser der Fläche gelegen ist; diese Bestimmung ist zweien Bedingungen äquivalent und es können daher unendlich viel gerade Linien so bestimmt werden, die einen Kegel bilden, dass sie noch überdiess einer andern Bedingung genügen, während nur eine begrenzte Zahl von solchen geraden Linien möglich ist, die ausserdem zwei Bedingungen erfüllen.

Wir bedienen uns der Untersuchungsmethode von Joachimsthal, welche in „Analytische Geom. d. Kegelschn." Artikel 107, überdiess aber auch im Artikel 71 des ersten Bandes von diesem Werke angewendet worden ist.

Wenn die tetraedrischen Coordinaten zweier Punkte durch x', y', z', w' und x'', y'', z'', w'' bezeichnet werden, so findet man die Punkte, in denen ihre gerade Verbindungslinie eine Fläche schneidet, durch die Substitution von

$$\lambda x' + \mu x'', \quad \lambda y' + \mu y'', \text{ etc.}$$

für

$$x \quad , \quad y \quad , \text{ etc.}$$

in die Gleichung der Fläche. Das Resultat der Substitution ist eine Gleichung n^{ten} Grades in Bezug auf das Verhältniss $\lambda : \mu$, deren Wurzeln die Verhältnisse der Segmente bestimmen, nach welchen die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte durch die ihr angehörigen Punkte der Fläche getheilt wird. Und wenn $\lambda' : \mu'$ eine der Wurzeln dieser Gleichung ist, so sind die Coordinaten des entsprechenden Schnittpunktes der Fläche mit dieser Fläche durch

$$\lambda' x' + \mu' x'', \quad \lambda' y' + \mu' y'', \quad \lambda' z' + \mu' z'', \quad \lambda' w' + \mu' w''$$

dargestellt. Alles das wird dem Leser keinerlei Schwierigkeit bereiten, der die entsprechende Theorie für ebene Curven bewältigt hat. Das Resultat der fraglichen Substitution kann, wie bei diesen letzteren, in der Form

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1}\mu \varDelta U' + \frac{1}{1 \cdot 2}\, \lambda^{n-2}\mu^2 \varDelta^2 U' + \text{etc.} = 0$$

geschrieben werden, wo das Symbol $\varDelta$ die Operation

$$x \frac{d}{dx'} + y \frac{d}{dy'} + z \frac{d}{dz'} + w \frac{d}{dw'}$$

bezeichnet.

In Verfolgung der Analogie der ebenen Curven nennen wir die durch die Gleichung

$$x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy} + z' \frac{dU}{dz} + w' \frac{dU}{dw} = 0$$

dargestellte Fläche die erste Polare des Punktes (x', y', z', w'); wir nennen

$$\left(x' \frac{d}{dx} + y' \frac{d}{dy} + z' \frac{d}{dz} + w' \frac{d}{dw}\right)^2 U = 0$$

die zweite Polare und so weiter. Die Polarebene desselben Punktes ist

$$x \frac{dU'}{dx'} + y \frac{dU'}{dy'} + z \frac{dU'}{dz'} + w \frac{dU'}{dw'} = 0.$$

Jede Polarfläche ist auch eine Polarfläche des Punktes $(x'y'z'w')$ in Bezug auf alle anderen Polarflächen desselben, deren Grade den ihrigen übersteigen.

Wenn ein Punkt in der Fläche liegt, so berühren alle seine Polaren die ihm entsprechende Tangentenebene der Fläche; denn diese letztere ist seine Polarebene in Bezug auf die Fläche und somit auch die Polarebene in Bezug auf die verschiedenen andern Polarflächen, also ihre gemeinschaftliche Berührungsebene.

Man erkennt diess auch, indem man die Polare des Coordinatenanfangs in Bezug auf

$$u_0 w^n + u_1 w^{n-1} + u_2 w^{n-2} + \text{etc.} = 0$$

nimmt (welche Gleichung durch Einführung der neuen Veränderlichen w homogen gemacht worden ist). Die Polarflächen werden durch Differentiation in Bezug auf diese neue Veränderliche erhalten, so die erste Polare in der Form

$$n u_0 w^{n-1} + (n-1)\, u_1 w^{n-2} + (n-2)\, u_2 w^{n-3} + \text{etc.},$$

und wenn daher

$$u_0 = 0$$

ist, so sind die Glieder des ersten Grades sowohl im Ausdruck der Fläche als in dem der Polare die durch u_1 repräsentierten.

Wir wollen bemerken, dass die ersten Polarflächen aller Punkte des Raumes in Bezug auf eine Fläche n^{ten} Grades ein System, die aller Punkte einer Ebene ein Netz, die aller Punkte einer Geraden ein Büschel bilden.

Wenn man die Polarebenen speciell betrachtet, so lässt sich erstens leicht zeigen, dass es für zwei Flächen vom m^{ten} und n^{ten} Grade respective $(m + n - 2) \left\{(m-1)^2 + (n-1)^2\right\}$ Punkte gibt, welchen dieselbe Polarebene in beiden Flächen entspricht. Für $m = n$ wird diese Zahl $= 4\,(n-1)^3$ und diese Punkte haben dieselbe Eigenschaft für alle Flächen des von ihnen bestimmten Büschels vom n^{ten} Grade. Daraus folgt, dass ein solches Flächenbüschel $4\,(n-1)^3$ Doppel- oder Knotenpunkte enthält. Darum enthält das Büschel von Flächen zweiten Grades vier Kegelflächen, d. i. vier Doppelpunkte.

Nach der Natur der Büschel muss ein Punkt, der für zwei seiner Flächen ein Doppelpunkt ist, ein allen gemeinsamer Doppelpunkt sein. Für drei unter ihnen ist derselbe ein Cuspidalpunkt.

Wenn ferner die Flächen eines Büschels sich in einem Punkte berühren, so ist derselbe für eine unter ihnen ein Knotenpunkt.

Was das Netz von Flächen n^{ten} Grades betrifft, so gehen die Polarebenen eines beliebigen Punktes P für alle Flächen eines Netzes durch einen Punkt P'. Und die Polarebenen eines Punktes bezüglich derjenigen von ihnen, die einen Doppelpunkt besitzen, umhüllen einen Kegel von der Klasse $4\,(n-1)^3$.

Der Ort der Doppelpunkte der Flächen eines Netzes ist eine Curve vom Grade $6\,(n-1)^2$.

12. Wenn der Punkt $(x'y'z'w')$ in der Fläche liegt, so verschwindet U' und eine der Wurzeln der Gleichung in $\lambda : \mu$ entspricht dem $\mu = 0$. Die Gleichung besitzt eine zweite Wurzel $\mu = 0$, die gerade Linie schneidet die Fläche in zwei in $(x'y'z'w')$ zusammen fallenden Punkten, wenn der Coefficient von $\lambda^{n-1}\mu$ in der bezeichneten Gleichung verschwindet; und damit diess geschehe, ist es hinreichend und nothwendig, dass x'', y'', z'', w'' der Gleichung der Ebene

$$x \frac{dU'}{dx'} + y \frac{dU}{dy'} + z \frac{dU'}{dz'} + w \frac{dU'}{dw'} = 0$$

genüge; d. i. alle Tangenten einer Fläche, welche in einem gegebenen Punkte sie berühren, liegen in einer Ebene, deren Gleichung die eben geschriebene ist.

Indem man von dieser Gleichung die Identität

$$x' \frac{dU'}{dx'} + y' \frac{dU'}{dy'} + z' \frac{dU'}{dz'} + w' \frac{dU'}{dw'} = 0$$

subtrahiert, erhält man die gewöhnliche Cartesische Gleichung der Tangentenebene

$$(x-x') \frac{dU'}{dx'} + (y-y') \frac{dU'}{dy'} + (z-z') \frac{dU'}{dz'} = 0;$$

und nach dem Art. 42 des I. Bandes kann man daraus unmittelbar die Gleichungen der Normale ableiten

$$\frac{x-x'}{\frac{dU'}{dx'}} = \frac{y-y'}{\frac{dU'}{dy'}} = \frac{z-z'}{\frac{dU'}{dz'}}.$$

13. Die gerade Linie schneidet die Fläche in drei auf einander folgenden Punkten oder die Gleichung, welche wir betrachten, hat drei dem Werthe $\mu = 0$ entsprechende Wurzeln, wenn ausser den Coefficienten von λ^n und $\lambda^{n-1}\mu$ auch der Coefficient von $\lambda^{n-2}\mu^2$ verschwindet, d. h. wenn die gerade Linie nicht nur auf der Tangentenebene sondern auch in der Polarfläche zweiter Ordnung

$$\left(x \frac{d}{dx'} + y \frac{d}{dy'} + z \frac{d}{dz'} + w \frac{d}{dw'}\right)^2 U' = 0$$

gelegen ist. Nach Artikel 11 berühren alle Polarflächen eines in der Fläche selbst gelegenen Punktes die Fläche in ihm; die Tangentenebene berührt somit die Polarfläche zweiter Ordnung und hat daher mit ihr zwei reelle oder imaginäre gerade Linien gemein; sie sind die beiden Inflexionstangenten der Fläche. (Artikel 4.)

14. Durch einen Punkt einer Fläche gehen

$$(n+2)\cdot(n-3)$$

geradlinige Tangenten, welche die Fläche auch in anderen Punkten berühren.

Damit die betrachtete gerade Linie in dem Punkte $(x'y'z'w')$ die Fläche berühre, müssen wir wie vorher die Coefficienten von λ^n

und $\lambda^{n-1}\mu$ verschwinden lassen, so dass sich die allgemeine Gleichung auf eine Gleichung vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade reduciert; wenn die gerade Linie die Fläche zum zweiten Mal berühren soll, so muss diese reducierte Gleichung ein Paar gleiche Wurzeln haben. Die Bedingung, unter welcher diess stattfindet, die Discriminante der reducierten Gleichung, enthält die Coefficienten dieser Gleichung im Grade $(n-3)$, eines ihrer Glieder ist z. B.

$$(\Delta^2 U' \,.\, U)^{n-3}.$$

Indem wir dieses Glied betrachten, erkennen wir, dass die Discriminante die Coordinaten x', y', z', w' im Grade

$$(n-2)\ (n-3)$$

und die Coordinaten x, y, z, w im Grade

$$(n+2)\ (n-3)$$

enthält. Wenn also der Punkt $(x'y'z'w')$ als fest betrachtet wird, so bezeichnet sie eine Fläche, welche von der Tangentenebene in $(n+2)\ (n-3)$ geraden Linien geschnitten wird.

Somit ist allgemein bewiesen, dass in jedem Punkte einer Fläche unendlich viele Tangenten an dieselbe gezogen werden können; dass dieselben im Allgemeinen in einer Ebene liegen, dass zwei von ihnen durch drei auf einander folgende Punkte der Fläche gehen, und $(n+2)\ (n-3)$ andere die Fläche noch in einem anderen Punkte berühren.

15. Wir gehen dazu weiter, die durch einen nicht in der Fläche gelegenen Punkt gehenden Tangenten derselben zu betrachten.

Da wir in den vorigen Artikeln Relationen begründet haben, welche die Coordinaten irgend eines Punktes der Tangente mit denen ihres Berührungspunktes verknüpfen, so können wir durch den einfachen Wechsel der accentuierten und der nicht accentuierten Buchstaben ausdrücken, dass der erstere Punkt bekannt und der Letztere, der Berührungspunkt, gesucht sei.

Wir sehen z. B., indem wir diesen Wechsel in der Gleichung des Artikel 12 vollziehen, dass die Berührungspunkte aller Tangenten oder Tangentenebenen, welche durch den Punkt $(x'y'z'w')$ an die Fläche gelegt werden können, in der ersten Polare liegen, welche vom Grade $(n-1)$ ist, nämlich in der Fläche

$$x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dy} + z'\frac{dU}{dz} + w'\frac{dU}{dw} = 0.$$

Und da die Berührungspunkte auch in der gegebenen Fläche liegen, so ist der Ort derselben eine Curve von der Ordnung $n(n-1)$, welche den Durchschnitt der Fläche mit der ersten Polarfläche des Punktes bezeichnet.

16. Die Gesammtheit der Tangenten, welche von dem Punkte $(x'y'z'w')$ an die Fläche gelegt werden können, bildet einen Kegel, dessen Tangentenebenen zugleich Tangentenebenen der Fläche sind. Die Gleichung desselben wird gefunden, indem man die Discriminante der Gleichung des n^{ten} Grades in λ im Artikel 11 bildet; denn das Verschwinden dieser Discriminante drückt aus, dass die Verbindungslinie des festen Punktes mit dem Punkte $(xyzw)$ die Fläche in zwei zusammen fallenden Punkten schneidet, d. i. $(xyzw)$ ist ein Punkt in irgend einer der durch $(x'y'z'w')$ gehenden Tangenten. Man sieht leicht, dass die fragliche Discriminante vom Grade $n(n-1)$ ist, und es ist auch aus andern Gründen offenbar, dass dieses der Grad des Tangentenkegels sei; denn sein Grad stimmt mit der Zahl von Geraden überein, welche eine durch seinen Scheitel gehende Ebene mit ihm bestimmt und eine solche Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, an welche von dem festen Punkte aus $n(n-1)$ Tangenten gezogen werden können, die auch Tangenten der Fläche von diesem Punkte sind.

17. Durch einen nicht in der Fläche gelegenen Punkt können im Allgemeinen $n(n-1)(n-2)$ Inflexionstangenten derselben gehen.

Wir haben im Artikel 13 gesehen, dass die Coordinaten eines beliebigen Punktes einer Inflexionstangente mit denen ihres Berührungspunktes durch die Relationen

$$U' = 0, \quad \Delta U' = 0, \quad \Delta^2 U' = 0$$

verbunden sind. Wenn wir daher die Coordinaten eines beliebigen Punktes $(xyzw)$ der Inflexionstangente als bekannt voraussetzen, so ist ihr Berührungspunkt als einer der Durchschnitte der gegebenen Fläche U, die von der n^{ten} Ordnung ist, seiner ersten Polarfläche ΔU von der Ordnung $(n-1)$ und seiner zweiten Polarfläche $\Delta^2 U$ von der Ordnung $(n-2)$ bestimmt; es existieren somit

$$n\,(n-1)\,(n-2)$$

solcher Durchschnitte.

18. Durch einen nicht in der Fläche gelegenen Punkt können im Allgemeinen $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$ Doppeltangenten derselben gelegt werden.

Die Berührungspunkte solcher Linien sind nach Artikel 14 die Durchschnitte der gegebenen Fläche, der ersten Polarfläche und der durch die in Artikel 14 erörterte Discriminante dargestellten Fläche; wir erkannten dort, dass die Coordinaten des Berührungspunktes im Grade $(n-2)(n-3)$ in diese Discriminante eingehen, es giebt somit im Allgemeinen

$$n(n-1)(n-2)(n-3)$$

derartige Berührungspunkte. Die Hälfte dieser Anzahl ist die Zahl der Doppeltangenten, weil jede derselben zwei Berührungspunkte enthält.

Damit ist die Discussion der durch einen gegebenen Punkt gehenden Tangenten der Fläche vervollständigt; wir haben gesehen, dass ihre Berührungspunkte in der Durchschnittslinie der Fläche mit einer andern Fläche von der Ordnung $(n-1)$ gelegen sind, dass ihre Gesammtheit einen Kegel vom Grade $n(n-1)$ bestimmt, dass $n(n-1)(n-2)$ von ihnen Inflexionstangenten und

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

andere Doppeltangenten sind.

Diese Doppeltangenten sind offenbar auch Doppelkanten des Tangentenkegels, weil sie demselben in Folge jeder Berührung angehören; und längs einer solchen entsprechen diesem Kegel zwei Tangentenebenen, nämlich die Tangentenebenen der Fläche in diesen Berührungspunkten.

Die Inflexionstangenten sind ebenfalls als Doppeltangenten der Fläche zu zählen, denn die gerade Linie durch drei auf einander folgende Punkte der Fläche ist eine Doppeltangente, da sie gleichzeitig die gerade Verbindungslinie des ersten und zweiten und die des zweiten und dritten Punktes ist. Die Inflexionstangenten sind somit Doppeltangenten, deren Berührungspunkte zusammen fallen. Sie sind eben deshalb auch Doppelkanten des Tangentenkegels, aber solche speciell, denen zusammen fallende Tangentialebenen entsprechen, d. h. sie sind Cuspidalkanten dieses Kegels.

Es ist somit bewiesen, dass der Tangentenkegel der Fläche, welcher vom Grade $n(n-1)$ ist, $n(n-1)(n-2)$ Cuspidalkanten und $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ Doppelkanten besitzt; jede Ebene bestimmt also mit diesem Kegel eine Curve der Ordnung $n(n-1)$, welche ebenso viele Doppelpunkte und Cuspidalpunkte oder Spitzen besitzt.

19. Es wird genau in derselben Weise wie für ebene Curven bewiesen, dass der Ort eines Punktes die Polarebene eines festen Punktes in Bezug auf die Fläche ist, wenn derselbe in jedem von diesem letzteren ausgehenden Radius vector so bestimmt ist, dass der reciproke Werth seiner Entfernung von demselben dem n^{ten} Theil der Summe der reciproken Werthe der n entsprechenden Radien vectoren der Fläche gleich ist; dass für einen Punkt der Fläche der Ort der Endpunkte der Mittel aus den reciproken Werthen der von ihm ausgehenden $(n-1)$ Radien vectoren die ihm entsprechende Polarfläche zweiten Grades ist; etc.

Die einfache Vertauschung accentuierter und nicht accentuierter Buchstaben in der Gleichung der Polarebene beweist, dass der Ort der Pole aller Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen, die erste Polarfläche dieses Punktes ist. Der Ort der Pole einer Ebene, welche durch zwei feste Punkte geht, d. i. der Ebenen eines Büschels, ist eine Curve vom Grade $(n-1)^2$, nämlich der Durchschnitt der beiden ersten Polarflächen dieser Punkte. Die erste Polarfläche jedes Punktes in der Verbindungslinie dieser Punkte muss durch dieselbe Curve hindurch gehen.

Ebenso bestimmen die ersten Polarflächen von drei beliebigen Punkten, die nicht in einer geraden Linie liegen, durch ihren Durchschnitt $(n-1)^3$ Punkte, deren jeder ein Pol der Ebene ist, welche jene bestimmen; die erste Polare jedes andern Punktes dieser Ebene muss durch dieselben Punkte hindurch gehen.

20. Aus der Theorie der durch einen Punkt gehenden Tangenten einer Fläche kann in doppelter Weise die Ordnung der Reciprocalfläche abgeleitet werden.

Zuerst: Die Zahl von Punkten, in welchen eine willkürliche Gerade die reciproke Fläche schneidet, ist der Zahl von Tangentenebenen gleich, welche an die gegebene Fläche durch eine willkürliche Linie gelegt werden können. Betrachten wir nun irgend zwei Punkte A, B dieser Geraden und den Berührungspunkt C irgend einer der entsprechenden Tangentenebenen, so liegt C in der ersten Polarfläche von A, weil die gerade Linie AC die Fläche berührt; und in der ersten Polarfläche von B, weil auch BC die Fläche berührt. Die Berührungspunkte sind somit die Durchschnittspunkte der gegebenen Fläche mit den beiden ersten Polarflächen zweier willkürlich gewählten Punkte der Geraden; ihre Anzahl und somit die Ordnung der Reciprocalfläche ist daher $= n\ (n-1)^2$.

21. Sodann: Sei ein Tangentenkegel von dem Punkte A als Scheitel an die Fläche gelegt, so besteht, weil jede Tangentenebene der Fläche durch A diesen Kegel berührt, die Aufgabe darin, die Zahl der Tangentenebenen dieses Kegels zu bestimmen, welche durch eine gerade Linie AB gelegt werden können; und wenn wir den Kegel durch eine Ebene durchschneiden, die den Punkt B enthält, so reduciert sich das Problem ferner auf die Bestimmung der Zahl von Tangenten, welche von B an diese Curve zu ziehen sind. Die Klasse einer Curve von der Ordnung $n\ (n-1)$ mit $n\ (n-1)\ (n-2)$ Cuspidalpunkten, und $\frac{1}{2}\, n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)$ Doppelpunkten ist aber

$$n(n-1)\left\{n(n-1)-1\right\} - 3n\,(n-1)\,(n-2) - n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$$
$$= n\,(n-1)^2.$$

Der Schnitt der Reciprocalfläche mit einer beliebigen Ebene entspricht allgemein dem Tangentenkegel der Originalfläche durch irgend einen Punkt. Und man erkennt leicht, dass der Grad des Tangentenkegels der Reciprocalfläche für irgend einen Punkt, ebenso wie der Originalfläche, $n\ (n-1)$ ist.

22. Indem wir zu der Bedingung zurückkehren, unter welcher eine Linie die Fläche berührt,

$$x\,\frac{dU'}{dx'} + y\,\frac{dU'}{dy'} + z\,\frac{dU'}{dz'} + w\,\frac{dU'}{dw'} = 0,$$

sehen wir, dass wenn alle vier Differentiale für die Coordinaten eines Punktes identisch verschwinden, jede Linie durch diesen Punkt die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten schneidet; der Punkt ist somit ein Doppelpunkt der Fläche. Die Bedingung, unter welcher eine gegebene Fläche einen Doppelpunkt besitzt, wird durch Elimination der Veränderlichen zwischen den vier Gleichungen

$$\frac{dU}{dx} = 0, \qquad \frac{dU}{dy} = 0, \text{ etc.}$$

gebildet und wird die Discriminante der gegebenen Form genannt.*) Da sie das Resultat der Elimination zwischen vier Gleichungen ist, deren jede vom Grade $(n-1)$ ist, so enthält sie die Coefficienten einer jeden im Grade $(n-1)^3$ und ist somit vom Grade $4(n-1)^3$ in den Coefficienten der Originalgleichung. Aus dem Gesagten ist auch offenbar, dass, wenn die Fläche einen Doppelpunkt besitzt, die erste Polare jedes Punktes durch ihn hindurchgeht. (Vergl. Art. 11.)

Es kann aber geschehen, dass die vier Flächen

$$\frac{dU}{dx} = 0, \text{ etc.}$$

nicht nur einzelne gemeinschaftliche Punkte haben, dass vielmehr eine ganze ihnen gemeinschaftliche Curve existiert. Sie ist dann eine Doppelcurve der Fläche U und jeder Punkt von ihr ist ein Doppelpunkt. Da wir nun aus Artikel 3 wissen, dass die durch die allgemeine Cartesische Gleichung vom n^{ten} Grade dargestellte Fläche im Allgemeinen unendlich viele Doppeltangentenebenen besitzt, so hat die Reciprocalfläche im Allgemeinen unendlich viele Doppelpunkte, welche eine Curve bilden. Die Existenz dieser Doppelcurven ist daher unter den gewöhnlichen Singularitäten der Flächen mit zu betrachten.

Wenn der Punkt $(x'y'z'w')$ ein Doppelpunkt ist, so verschwinden U' und $\Delta U'$ identisch und jede durch den Doppelpunkt gehende gerade Linie schneidet die Fläche in drei auf einander folgenden Punkten, wenn sie der Gleichung

$$\Delta^2 U' = 0$$

genügt, welche einen Kegel zweiten Grades repräsentiert.

23. Die Polarfläche zweiten Grades für einen parabolischen oder Wendepunkt einer Fläche ist ein Kegel.

Die quadratische Polarfläche des Anfangspunktes der Coordinaten in Bezug auf irgend eine Fläche

$$u_0 w^n + u_1 w^{n-1} + u_2 w^{n-2} + \text{etc.} = 0$$

(wo wir wie im Artikel 11 w eingeführt haben, um die Gleichung homogen zu machen) wird durch $(n-2)$ malige Differentiation in Bezug auf w erhalten; die Ausführung derselben und die nachmalige Division durch $(n-2)(n-3)\ldots 3$ giebt die Gleichung der Polarfläche zweiten Grades in der Form

$$n(n-1)\,u_0 + 2(n-1)\,u_1 + 2u_2 = 0.$$

*) Vergl. „Vorlesungen“ Art. 62.

Wenn aber der Anfangspunkt der Coordinaten ein parabolischer Punkt ist, so ist nach Artikel 5 die Gleichung der Fläche von der Form

$$z + Cy^2 + 2Dzx + 2Ezy + Fz^2 + \text{etc.} = 0$$

oder es ist

$$u_0 = 0$$

und u_2 von der Form

$$u_1 v_1 + w_1^2.$$

Die quadratische Polarfläche wird dann

$$z(n-1 + 2Dx + 2Ey + Fz) + Cy^2 = 0.$$

Jede Gleichung aber, welche eine homogene Function dreier Grössen vom ersten Grade ist, repräsentiert nach Band I, Art. 62 einen Kegel; die so eben geschriebene Gleichung bezeichnet also einen Kegel, welcher den Durchschnittspunkt der drei Ebenen

$$z = 0, \quad n-1 + 2Dx + 2Ey + Fz = 0, \quad y = 0$$

zum Scheitel hat; die zwei ersteren Ebenen sind Tangentenebenen dieses Kegels und

$$y = 0$$

ist die Ebene der ihnen entsprechenden Berührungsseiten.

24. Aus dem vorigen Artikel ergiebt sich, dass der Ort eines Punktes, dessen quadratische Polaren in Bezug auf die Fläche Kegel sind, die Fläche in ihren parabolischen oder Wendepunkten durchschneidet.

Dieser Ort wird durch die Bildung der Discriminante von $\Delta^2 U' = 0$ ausgedrückt. Wenn a, b, etc. die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2U'}{dx'^2}$, $\frac{d^2U'}{dy'^2}$, etc. bezeichnen, so ist nach Band I, Art. 63 die Discriminante

$$\begin{aligned} &abcd + 2(alqr + bmpr + cnpq + dlmn) \\ &- (adl^2 + bdm^2 + cdn^2 + bcp^2 + caq^2 + abr^2) \\ &+ l^2p^2 + m^2q^2 + n^2r^2 - 2mnqr - 2nlrp - 2lmpq \\ &= 0 \end{aligned}$$

oder in der Schreibweise der Determinantentheorie

$$\Sigma \pm \frac{d^2U'}{dx'^2} \frac{d^2U'}{dy'^2} \frac{d^2U'}{dz'^2} \frac{d^2U}{dw'^2} = 0$$

und in einer andern Abkürzung, welche die Anwendung der Indicesbezeichnung auf die Unterscheidung der Coordinaten — x_1, x_2, x_3, x_4

statt x, y, z, w — voraussetzt,

$$\Sigma \pm U_{11} U_{22} U_{33} U_{44} = 0.$$

Sie bezeichnet eine Fläche von der Ordnung $4(n-2)$, welche nach der Hesse'schen Determinante, welche ihren Ausdruck giebt, die Hesse'sche Fläche, die Determinantenfläche, oder nach Jac. Steiner's Bezeichnung die Kernfläche der gegebenen Fläche genannt werden kann. In derselben Art, wie in der Ebene die Inflexionspunkte einer Curve als die Punkte ihres Durchschnitts mit der durch die Hesse'sche Determinante ihrer Gleichung repräsentierten Curve bestimmt sind, so bestimmt der Durchschnitt einer Fläche mit der durch die Hesse'sche Determinante ihrer Gleichung ausgedrückten Fläche eine Curve von der Ordnung $4n(n-2)$, welche der Ort ihrer parabolischen Punkte ist. (Art. 8.)

Und wenn man bemerkt, dass in dem System von Gleichungen, zwischen denen zur Bildung der Discriminante die Veränderlichen zu eliminieren sind, der Tausch der Coordinaten des Pols und des Doppelpunkts der Polarfläche geschehen darf, so zeigt sich die Reciprocität des Verhältnisses: Hat die Polare eines Punktes einen Doppelpunkt, so ist jener ein Doppelpunkt in der Polare des letzteren. Darum kann man mit Steiner solche Punktepaare als reciproke Pole bezeichnen. Der Ort der Doppelpunkte der Polaren ist die Hesse'sche oder Kernfläche von der $4(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung. Der Ort der Pole selbst eine andere, die conjugierte Kernfläche nach Steiner, von der Ordnung $4(n-2)^3$. Dass für Flächen dritten Grades beide Kernflächen nicht verschieden sind, kann man schon hiernach schliessen. Dass es ferner unter den mit einem Doppelpunkte begabten Polaren gewisse Schaaren giebt, deren Knoten in einen einzigen Punkt zusammen fallen, während die zugehörigen Pole eine gerade Linie bilden, soll später näher erörtert werden. In der That hat die Kernfläche selbst allgemein $10(n-2)^3$ Doppelpunkte, denen $10(n-2)^3$ Gerade in der conjugierten Kernfläche als Ort der zugehörigen Pole entsprechen.

25. Aus dem, was so eben bewiesen ward, ergiebt sich, dass durch einen gegebenen Punkt $4n(n-1)(n-2)$ stationäre Tangentenebenen an die Fläche gelegt werden können.

Denn wenn die Tangentenebene durch einen festen Punkt geht, so liegt ihr Berührungspunkt in der ersten Polarfläche desselben, die von der Ordnung $(n-1)$ ist, und der Durchschnitt dieser Fläche U und der im letzten Artikel bestimmten Fläche, die der Ort der Berührungspunkte stationärer Tangentenebenen ist, bestimmt die $4n(n-1)(n-2)$ fraglichen Punkte.

Oder auch: Die durch irgend einen Punkt gehenden stationären Tangentenebenen der Fläche sind auch stationäre Tangentenebenen des durch ihn gehenden Tangentenkegels derselben; wenn man daher diesen Kegel durch irgend eine Ebene schneidet, so bestimmt dieselbe mit den stationären Tangentenebenen die Tangenten in den Inflexionspunkten der Schnittcurve. Die Zahl der Inflexionspunkte einer ebenen Curve wird aber durch die Formel

$$\iota - \varkappa = 3(\nu - \mu)$$

bestimmt; und da man im gegenwärtigen Falle nach Art. 18 die Werthe

$$\nu = n(n-1)^2, \quad \mu = n(n-1),$$
$$\varkappa = n(n-1)(n-2)$$

hat, also

$$\nu - \mu = n(n-1)(n-2)$$

erhält, so ist

$$\iota = 4n(n-1)(n-2),$$

d. i. man findet die nämliche Zahl der stationären Tangentenebenen wie vorher.

Die Zahl der Doppeltangentenebenen desselben Kegels wird ebenso durch die Formel

$$2(\tau - \delta) = (\nu - \mu)(\nu + \mu - 9)$$

bestimmt, und ist durch

$$2\delta = n(n-1)(n-2)(n-3),$$
$$\nu + \mu - 9 = n^3 - n^2 - 9,$$
$$2\tau = n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12).$$

Man kann also durch einen beliebigen Punkt τ Doppeltangentenebenen der Fläche legen, wenn τ die eben berechnete Zahl ist. Wir werden weiterhin zeigen, dass die Berührungspunkte der Doppeltangentenebenen in dem Durchschnitt der Fläche mit einer Fläche von der Ordnung $(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)$ liegen.

26. Wenn eine gerade Linie ganz in einer Fläche enthalten ist, so berührt sie die Fläche ihrer Hesse'-

schen Determinante und somit die Curve*) ihrer parabolischen oder Wendepunkte.

Sei die Gleichung der Fläche

$$x\Phi + y\Psi = 0,$$

so suchen wir das Resultat der Substitution

$$x = 0, \quad y = 0$$

in der Hesse'schen Determinante derselben, um die Durchschnittspunkte der Linie mit dieser Fläche zu bestimmen. Da jede der Grössen

$$\frac{d^2U}{dz^2}, \quad \frac{d^2U}{dw^2}, \quad \frac{d^2U}{dz\,dw}$$

x oder y als einen Factor enthält, so verschwinden dieselben unter dieser Voraussetzung, und die entsprechende Substitution

$$a = 0, \quad d = 0, \quad r = 0$$

in der entwickelten Form der Hesse'schen Determinante verwandelt dieselbe in ein vollkommenes Quadrat

$$(lp - mq)^2,$$

d. i. die gerade Linie berührt die durch die Hesse'sche Determinante dargestellte Fläche.

Dass diese Berührung $2\,(n-2)$fach ist, ergiebt sich bei einer anderen Untersuchung.

Für

$$x = 0, \quad y = 0$$

wird

$$lp - mq$$

zu

$$\frac{d\Phi}{dz}\,\frac{d\Psi}{dw} - \frac{d\Phi}{dw}\,\frac{d\Psi}{dz}$$

reduciert. Wenn die Tangentenebene längs einer ganzen geraden oder krummen Linie berührt, so ist diese Linie ganz in der Fläche der Hesse'schen Determinante enthalten. Der Leser kann diess ohne Schwierigkeit für die Fläche

$$x\Phi + y^2\Psi = 0$$

bestätigen.

---

*) Vergl. „Cambridge and Dublin Mathematical Journal“, Vol. IV, p. 255.

II. Abschnitt. Krümmung der Flächen.

27. Wir wollen die Krümmung der verschiedenen ebenen Schnitte untersuchen, welche durch einen Punkt einer Fläche hindurchgehen. Wir erinnern dabei zuerst, dass für eine Curve von der Gleichung

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} = 0$$

der Krümmungsradius im Anfangspunkt der Coordinaten der nämliche ist, wie derjenige des Kegelschnitts

$$u_1 + u_2 = 0;$$

denn der bekannte Ausdruck des Krümmungsradius enthält nur die Coordinaten des Punktes und die Werthe der ersten und zweiten Differentialcoefficienten für diesen Punkt; nach einer zweimaligen Differentiation der Gleichung enthalten die aus u_3, u_4, etc. hervorgehenden Glieder der Entwickelung Potenzen von x und y und verschwinden daher für den Coordinatenanfang, d. i. $x = y = 0$; es sind somit die dem Coordinatenanfang entsprechenden Werthe der Differentialcoefficienten dieselben, wie sie aus der Gleichung $u_1 + u_2 = 0$ allein erhalten werden würden.

In Folge dessen ist der Krümmungsradius der Curve

$$y + ax^2 + 2bxy + cy^2 + \text{etc.} = 0$$

für rectanguläre Achsen und im Coordinatenanfang

$$= \frac{1}{2a}$$

(vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Art. 242); dieser Werth kann leicht auch aus dem gewöhnlichen Ausdruck für den Radius der Krümmung abgeleitet werden, wonach er

$$= \pm \frac{(U_1^2 + U_2^2)^{\frac{3}{2}}}{U_{11}U^2 - 2U_{12}U_1U_2 + U_{22}U_1^2}$$

für Cartesische Coordinaten und für die homogene Gleichungsform

$$= \pm \frac{(n-1)^2 (U_1^2 + U_2^2)^{\frac{3}{2}}}{x_3^2 \,.\, H}$$

ist, wenn H die Hesse'sche Determinante der Gleichung der Curve bedeutet. (Vergl. Art. 24.)

28. Wir denken hiernach die Fläche, bezogen auf eine ihrer Tangentenebenen als Ebene xy und die zugehörige Normale als Achse der z, durch die Gleichung

$z^2 + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + \text{etc.} = 0$ dargestellt und untersuchen die einem beliebigen Normalschnitte, d. i. einem durch die Achse der z geführten ebenen Schnitte, entsprechende Krümmung.

Den speciellen Fällen der Schnittebenen xz und yz entsprechen die respectiven Substitutionen

$$y = 0, \quad x = 0$$

in die Gleichung der Fläche und daher nach dem Vorigen die Krümmungsradien der entsprechenden Schnitte

$$\frac{1}{2A} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2C};$$

und man findet sodann für einen Schnitt, dessen Ebene mit der Ebene der xz den Winkel θ bildet, dem also die Drehung der Achsen x und y um den Winkel θ oder die Substitution

$$x \cos\theta - y \sin\theta, \quad x \sin\theta + y \cos\theta$$

für

$$x \quad \text{und} \quad y$$

entspricht (vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte", Artikel 9); durch die Voraussetzung

$$y = 0$$

ebenso, dass der Krümmungsradius mit dem halben reciproken Werth des neuen Coefficienten von x^2 identisch ist, d. h.

$$\frac{1}{2R} = A\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta.$$

29. Der Leser wird nicht verfehlen zu bemerken, dass dieser Ausdruck für den Krümmungsradius eines Normalschnittes der Form nach mit dem Ausdruck übereinstimmt, durch welchen das Quadrat des Durchmessers eines Centralkegelschnitts in Function der von ihm mit den Coordinatenachsen gebildeten Winkel ausgedrückt wird.

Wenn ϱ den Halbdurchmesser des Kegelschnitts

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \tfrac{1}{2}$$

bezeichnet, welcher dem Winkel θ entspricht, so ist

$$R = \varrho^2.$$

Man erkennt auch auf anderem Wege leicht, dass die Krümmungsradien der Normalschnitte mit ihren Richtungen durch dasselbe Gesetz verbunden sind, wie die Durchmesserquadrate eines Centralkegelschnitts. Sie hängen, wie wir sahen, nur von den

Gliedern in u_1 und u_2 ab. Die Krümmungsradien der Schnitte von

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} = 0$$

sind dieselben, wie die der Schnitte der Fläche zweiter Ordnung

$$u_1 + u_2 = 0,$$

und wir haben im Bd. I, Art. 204 bewiesen, dass die Krümmungsradien dieser letzteren den Durchmesserquadraten des Centralschnitts proportional sind, welcher der Tangentenebene parallel ist. Es ist klar, dass dieser Kegelschnitt, für welchen die Quadrate der Radien den Krümmungsradien proportional sind, der Indicatrix ähnlich ist.

30. Wir können hiernach auf die Theorie dieser Krümmungsradien alle die Resultate übertragen, welche für die Durchmesser der Centralkegelschnitte bekannt sind.

So wissen wir, dass die Grösse

$$A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta$$

einen Maximalwerth und einen Minimalwerth annimmt für Werthe von θ, welche stets reell sind und einen Richtungsunterschied von 90^0 bestimmen; Werthe, die überdiess durch die Gleichung (vgl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 97)

$$B \cos^2 \theta - (A - C) \cos \theta \sin \theta - B \sin^2 \theta = 0$$

gegeben sind.

In jedem Punkt einer Fläche treten somit unter den Normalschnitten zwei hervor, welche dem Maximalwerth und dem Minimalwerth des Krümmungsradius entsprechen; sie sind rechtwinklig gegen einander und entsprechen den Achsenrichtungen der Indicatrix; ihre Ebenen halbieren die Winkel zwischen den Inflexionstangenten. Wir werden sie die Hauptschnitte und die entsprechenden Krümmungsradien die Hauptradien nennen.

Wenn wir die Achsen der x und y mit den Richtungen der Maximal- und Minimal-Krümmung zusammen fallen lassen, welche so eben bestimmt wurden, so geht die Grösse

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

bekanntlich in die einfachere

$$A'x^2 + B'y^2$$

über. Dem Verschwinden des Coefficienten von xy entspricht aber nach Artikel 28 der Ausdruck

$$\frac{1}{2R} = A' \cos^2 \theta + B' \sin^2 \theta$$

für den Krümmungsradius eines beliebigen Normalschnittes; und da A' und B' die Werthe von $\frac{1}{2R}$ sind, welche den Substitutionen

$$\theta = 0, \quad \theta = 90^0$$

entsprechen, so wird jeder beliebige Krümmungsradius in Function der beiden Hauptradien ϱ und ϱ' und des Winkels, welchen seine Ebene mit den Hauptebenen bildet, ausgedrückt durch die Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\theta}{\varrho} + \frac{\sin^2\theta}{\varrho'}. \text{*)}$$

Beispielsweise erhält man für $\theta = 45^0,\ 45^0 + \alpha,\ 45^0 - \alpha$

$$\frac{1}{R_0} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right), \quad \frac{1}{R_1} = \frac{1}{\varrho}\cos^2(45^0 + \alpha) + \frac{1}{\varrho'}\sin^2(45^0 + \alpha),$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{\varrho}\sin^2(45^0 + \alpha) + \frac{1}{\varrho'}\cos^2(45^0 + \alpha)$$

also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{2}{R_0}$, so dass die Krümmungsmittelpunkte mit dem Punkte der Fläche selbst vier harmonische Punkte bilden. Die Krümmungsmittelpunkte für die Winkel $(45^0 \pm \beta)$ bilden damit eine Involution.

Ganz wie in der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte“ sind A' und B' oder $\frac{1}{2\varrho}$, $\frac{1}{2\varrho'}$ durch eine quadratische Gleichung gegeben, ihre Summe ist

$$= A + C$$

und ihr Product

$$= AC - B^2.$$

Für

$$\varrho = \varrho'$$

sind auch alle anderen Krümmungsradien $= \varrho$; die Form der Gleichung ist dann

$$z + A(x^2 + y^2) + \text{etc.} = 0,$$

d. h. die Indicatrix ist ein Kreis. Der Coordinatenanfang ist dann ein Umbilicus, Nabel- oder Kreispunkt.

Aus dem in diesem Artikel gegebenen Ausdruck leiten wir auch, ganz wie in der Theorie der Kegelschnitte ab, dass die Summe der reciproken Werthe der Krümmungsradien zweier gegen einander rechtwinkliger Normalschnitte constant ist; und über-

---

*) Diese Formel mit ihren Folgerungen verdankt man Euler.

diess, dass die Summe ihrer Krümmungsradien constant ist, wenn sie durch ein Paar conjugierte Tangenten hindurch gehen. (Vergl. Artikel 7.)

Beispiel 1. Eine Ringfläche ist durch Umdrehung eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Achse erzeugt. Man soll beweisen, dass einer der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte der Fläche dem Verhältniss der Entfernung des Punktes von der Achse zu seiner Entfernung von der Cylinderfläche um dieselbe durch das Centrum des gedachten Kreises proportional variiert.

Sind $(x-a)^2 + z^2 = r^2$, $y = 0$ die Gleichungen des um die Achse der z rotierenden Kreises, so wird die Gleichung der Ringfläche

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Beispiel 2. Alle Polarflächen einer gegebenen Fläche für einen Punkt derselben haben in diesem Punkte dieselbe Indicatrix; die Krümmungshalbmesser ihrer in derselben Ebene gelegenen Schnitte sind den um Eins verminderten Graden der Flächen umgekehrt proportional.

31. Man wird bemerken, dass der Krümmungsradius als dem Quadrat des Durchmessers eines Centralkegelschnitts proportional nicht imaginär wird, sondern nur das Zeichen wechselt, wenn die Grösse

$$A \cos^2\theta + 2B \cos\theta \sin\theta + C \sin^2\theta$$

negativ wird. Wenn die Krümmungsradien auf der einen Seite der Tangentenebene als positiv betrachtet werden, so sind sie auf der andern Seite derselben als negativ zu zählen; und das Zeichen wechselt somit, wenn der Sinn sich ändert, in welchem die Concavität der Curve liegt.

In einem elliptischen Punkte der Fläche, d. i. für

$$B^2 < AC$$

bleibt das Zeichen von

$$A \cos^2\theta + 2B \cos\theta \sin\theta + C \sin^2\theta$$

für alle Werthe von θ dasselbe, und in einem solchen Punkte ist daher die Concavität aller durch ihn gehenden Schnitte nach derselben Seite gewendet.

In einem hyperbolischen Punkt, d. i. für

$$B^2 > AC,$$

wechselt der Krümmungsradius zweimal das Zeichen und die Concavität der Schnitte der einen Art ist entgegengesetzt der Concavität derjenigen von der andern Art.

Die Fläche schneidet die Tangentenebene in der Nachbarschaft des Berührungspunktes und die Inflexionstangenten bezeichnen die Richtungen, in welchen sie die Tangentenebene durchsetzt und trennen die Schnitte, deren Concavität nach der einen Seite gewendet ist, von denen, für welche sie nach der andern Seite geht.*) Und wenn wir eine Hyperbel denken, für welche die Quadrate der Durchmesser der einen Reihe der Krümmungsradien proportional sind, so sind die der andern Reihe proportional den Quadraten der Durchmesser der conjugierten Hyperbel.

32. Nachdem gezeigt worden ist, in welcher Weise der Krümmungsradius eines Normalschnittes zu finden ist, gehen wir zu der durch ihn vermittelten Bestimmung des Krümmungsradius eines schiefen Schnittes über, welcher gegen den Normalschnitt, der seine Durchschnittslinie mit der Tangentenebene enthält, unter dem Winkel φ geneigt ist.

Wir sahen, dass der Krümmungsradius des durch die Ebene

$$y = 0$$

bestimmten Schnittes

$$= \frac{1}{2A}$$

ist; wir denken dann die Achsen der y und z in ihrer Ebene um den Winkel φ gedreht, welches geschieht, indem wir die Substitution

$$z \cos\varphi - y \sin\varphi, \quad z \sin\varphi + y \sin\varphi$$

für $\qquad z \qquad$ und $\qquad y$

vollziehen, und setzen das neue y gleich Null, d. i. wir bestimmen die auf rechtwinklige Achsen bezogene Gleichung des Schnittes, welchen die unter dem Winkel φ gegen die alte Ebene $y = 0$ geneigte und durch die alte Achse der x gehende Schnittebene mit der Fläche erzeugt, in der Form

$$z \cos\varphi + Ax^2 + 2Bxz \sin\varphi + Cz^2 \sin^2\varphi + 2Dxz \cos\varphi$$
$$+ 2Ez^2 \sin\varphi + Fz^2 \cos^2\varphi + \text{etc.} = 0;$$

durch dieselben Schlüsse, wie vorher, erhalten wir daraus den Krümmungsradius

$$= \frac{\cos\varphi}{2A}, \text{ d. i.} = R \cos\varphi,$$

wenn R den Radius der Krümmung des zugehörigen Normalschnittes bezeichnet. Diess ist Meunier's Theorem, nach welchem der Krümmungsradius eines schiefen Schnittes gleich der Projection des Krümmungsradius des

*) Das Bild eines Sattels kann diess erläutern.

durch dieselbe Tangente der Fläche gehenden Normalschnittes auf seine Ebene ist.

Oder nach dem Ausdruck von Hachette: Die Endpunkte der auf den Normalen aller durch dieselbe Tangente gehenden Schnitte abgetragenen Reciproken der Krümmungshalbmesser derselben bilden eine zum Hauptschnitt normale Gerade.

Wir sehen daraus, dass von allen Schnitten, welche durch eine in der Tangentenebene liegende, den Berührungspunkt enthaltende Gerade geführt werden können, der Normalschnitt den grössten Krümmungsradius hat, d. h. derjenige ist, welcher am wenigsten gekrümmt und am meisten der geraden Linie genähert ist.

Wir haben das Meunier'sche Theorem bereits in dem speciellen Falle der Fläche zweiter Ordnung bewiesen (Bd. I, Art. 204) und hätten den hier gegebenen neuen Beweis ersparen können, weil wir gesehen haben, dass der Krümmungsradius eines beliebigen Schnittes der Fläche

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} = 0$$

mit dem des entsprechenden Schnittes der Fläche zweiter Ordnung

$$u_1 + u_2 = 0$$

übereinstimmt.

33. Jede Kugel, deren Centrum in einer Normale der Fläche enthalten ist, während der Fusspunkt derselben in der Fläche ihrer Oberfläche angehört, berührt dieselbe. Die Berührung wird aber insbesondere zu einer stationären Berührung (Bd. I, Art. 129), wenn die Länge ihres Halbmessers der Länge eines der Hauptkrümmungsradien gleich ist. Denn wenn die Flächen

$$z + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \text{etc.} = 0,$$
$$z + A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 + \text{etc.} = 0$$

sich berühren, so geht die Fläche

$$(A - A')\,x^2 + 2\,(B - B')\,xy + (C - C')\,y^2 + \text{etc.} = 0$$

durch ihre Durchschnittscurve und es ward im Bd. I, Art. 128 bewiesen, dass die aus den drei Anfangsgliedern gebildete Gleichung

$$(A - A')\,x^2 + 2\,(B - B')\,xy + (C - C')\,y^2 = 0$$

die Tangenten der Durchschnittscurve im Berührungspunkte repräsentiert; sie fallen zusammen, d. h. die Berührung ist stationär, wenn die Bedingung

$$(A - A')\,(C - C') = (B - B')^2$$

erfüllt ist. (Bd. I, Art. 129.)

Für
$$B = B' = 0$$
schliesst diese Bedingung ein, entweder
$$A = A',$$
oder
$$C = C'.$$

Die Fläche
$$z + Ax^2 + Cy^2 + \text{etc.} = 0$$
hat daher mit der Kugel
$$2rz + x^2 + y^2 + z^2 = 0$$
eine stationäre Berührung, wenn entweder
$$2r = \frac{1}{A}$$
oder
$$2r = \frac{1}{C}$$
ist, d. h. wenn der Halbmesser der Kugel dem einen oder andern Hauptkrümmungsradius gleich ist.

34. Die im letzten Artikel erläuterten Principien erlauben uns, einen Ausdruck für die Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte und für irgend eine Lage der Coordinatenachsen zu finden. Was wir bewiesen haben ist, dass für
$$u_1 + u_2 + \text{etc.} = 0, \quad u_1 + v_2 + \text{etc.} = 0$$
als Gleichungen zweier sich berührender Flächen der Durchschnitt der Ebene
$$u_1 = 0$$
mit dem Kegel
$$u_2 - v_2 = 0$$
die beiden Tangenten der Durchdringungscurve giebt; dass also zwischen den Flächen selbst eine stationäre Berührung stattfindet, wenn diese Ebene jenen Kegel berührt.

Wenn wir nun die Gleichung zu einem beliebigen Punkt x', y', z' der Fläche transformieren, so dass sie wird
$$x\frac{dU'}{dx'} + y\frac{dU'}{dy'} + z\frac{dU'}{dz'}$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left(x\frac{d}{dx'} + y\frac{d}{dy'} + z\frac{d}{dz'}\right)^2 U' + \text{etc.} = 0,$$
oder wenn wir die ersten Differentialquotienten durch U_1, U_2, U_3, U_4 und die zweiten durch U_{11}, U_{22}, U_{33}, etc. bezeichnen wie vorher,
$$2(U_1x + U_2y + U_3z) + U_{11}x^2 + U_{22}y^2 + U_{33}z^2$$
$$+ 2U_{23}yz + 2U_{13}xz + 2U_{12}xy + \text{etc.} = 0,$$

so ist die Gleichung einer Kugel mit derselben Tangentenebene

$$2\,(U_1x + U_2y + U_3z) + \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

und dieselbe hat mit der Fläche zweiter Ordnung eine stationäre Berührung, wenn λ so bestimmt wird, dass

$$U_1x + U_2y + U_3z = 0$$

die Fläche

$$(U_{11}-\lambda)\,x^2 + (U_{22}-\lambda)\,y^2 + (U_{33}-\lambda)\,z^2 + 2\,U_{23}yz + 2\,U_{13}zx + 2\,U_{12}xy = 0$$

berührt, d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} (U_{11}-\lambda), & U_{12}, & U_{13}, & U_1 \\ U_{12}, & (U_{22}-\lambda), & U_{23}, & U_2 \\ U_{13}, & U_{23}, & (U_{33}-\lambda), & U_3 \\ U_1, & U_2, & U_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ist; oder entwickelt

$$\begin{aligned} &\left\{(U_{22}-\lambda)(U_{33}-\lambda)-U_{23}^2\right\}U_1^2+\left\{(U_{33}-\lambda)(U_{11}-\lambda)-U_{13}^2\right\}U_2^2 \\ +\ &\left\{(U_{11}-\lambda)(U_{22}-\lambda)-U_{12}^2\right\}U_3^2+2\left\{U_{13}U_{12}-(U_{11}-\lambda)\,U_{23}\right\}U_2U_3 \\ +\ &2\left\{U_{12}U_{23}-(U_{22}-\lambda)\,U_{13}\right\}U_3U_1+2\left\{U_{23}U_{13}-(U_{33}-\lambda)\,U_{12}\right\}U_1U_2=0. \end{aligned}$$

Somit ist λ durch die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} &(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)\,\lambda^2 \\ &-\left\{(U_{22}+U_{33})\,U_1^2+(U_{33}+U_{11})\,U_2^2+(U_{11}+U_{22})\,U_3^2\right. \\ &\left.-2U_{23}U_2U_3-2U_{13}U_3U_1-2U_{12}U_1U_2\right\}\lambda \\ &+(U_{22}U_{33}-U_{23}^2)\,U_1^2+(U_{33}U_{11}-U_{13}^2)\,U_2^2+(U_{11}U_{22}-U_{12}^2)\,U_3^2 \\ &+2(U_{13}U_{12}-U_{11}U_{23})\,U_2U_3+2(U_{12}U_{23}-U_{22}U_{13})\,U_3U_1 \\ &+2(U_{23}U_{13}-U_{33}U_{12})\,U_1U_2 = 0 \end{aligned}$$

bestimmt.

Ist nun r der Radius der Kugel

$$\lambda\,(x^2 + y^2 + z^2) + 2\,(U_1x + U_2y + U_3z) = 0,$$

so ist

$$r^2 = \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2}{\lambda^2},$$

und wir finden somit die Hauptradien der Krümmung aus der vorstehenden quadratischen Gleichung, indem wir die Substitution

$$\frac{\sqrt{(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)}}{r}$$

für

$$\lambda$$

in dieselbe vollziehen.

Das absolute Glied dieser Gleichung für λ kann durch die Einführung der Werthe von U_1, U_2, U_3 aus den Gleichungen

$$(n-1)\ U_1 = U_{11}x + U_{12}y + U_{23}z + U_{14}w,$$
etc.

vereinfacht werden und reduciert sich dadurch auf die Form

$$-\frac{Hw^2}{(n-1)^2},$$

wo H die in dem Artikel 24 entwickelte Hesse'sche Determinante der Gleichung der Fläche bezeichnet. (Vergl. Art. 27.)

Wir hätten a priori sehen können, dass das absolute Glied für jeden der Hesse'schen Determinantenfläche angehörigen Punkt verschwinden muss. Denn da die Richtungen der Hauptschnitte die Winkel zwischen den Inflexionstangenten halbieren, so fällt für zusammenfallende Inflexionstangenten ihre gemeinschaftliche Richtung in einen der Hauptschnitte und der Krümmungsradius dieses Schnittes ist unendlich gross, weil drei auf einander folgende Punkte desselben in gerader Linie sind; es muss somit einer der Werthe von λ, als reciproker Werth von r, verschwinden.

Indem wir ferner den Coefficienten von λ in der vorigen Gleichung mit Null vergleichen, erhalten wir die Gleichung einer Fläche vom $(3n-4)^{\text{ten}}$ Grade, welche in der gegebenen Fläche alle diejenigen Punkte bestimmt, für die die Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt sind, d. h. für welche die Indicatrix eine gleichseitige Hyperbel ist.

Die quadratische Gleichung dieses Artikels hätte auch mittels des Artikel 98, Band I gefunden werden können, welcher die Achsen eines der Ebene

$$U_1x + U_2y + U_3z = 0$$

parallelen Schnittes der Fläche zweiten Grades

$$U_{11}x^2 + U_{22}y^2 + U_{33}z^2 + 2\,U_{23}yz + 2\,U_{13}zx + 2\,U_{12}xy = 1$$

bestimmt.

35. Aus den Gleichungen des letzten Artikels können wir den **Krümmungsradius eines Normalschnittes finden, welcher die Tangentenebene in einer Linie von gegebenen Richtungswinkeln schneidet.**

Denn das Centrum der Krümmung liegt in der Normale und wenn wir aus ihm mit dem Krümmungsradius als Halbmesser eine Kugel beschreiben, so berührt sie die Fläche und ihre Gleichung ist von der Form

$$2(U_1x + U_2y + U_3z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Der folgende Punkt in diesem Schnitt der Fläche, welche wir betrachten, genügt dieser Gleichung und der anderen

$$u_1 + u_2 = 0,$$

$$2(U_1x + U_2y + U_3z) + U_{11}x^2 + U_{22}y^2 + U_{33}z^2 + 2U_{23}yz + 2U_{13}zx + 2U_{12}xy = 0,$$

so dass wir durch Subtraction erhalten

$$\lambda = \frac{U_{11}x^2 + U_{22}y^2 + U_{33}z^2 + 2U_{23}yz + 2U_{13}zx + 2U_{12}xy}{x^2 + y^2 + z^2},$$

eine homogene Gleichung, in der x, y, z durch die Richtungscosinus der geraden Linie ersetzt werden dürfen, welche den Anfangspunkt mit dem nächstfolgenden Punkte verbindet; da zugleich wie im letzten Artikel

$$\lambda = \frac{\sqrt{(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)}}{r}$$

ist, so wird

$$r = \frac{\sqrt{(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)}}{U_{11}\cos^2\alpha + U_{22}\cos^2\beta + U_{33}\cos^2\gamma + 2U_{23}\cos\beta\cos\gamma + 2U_{13}\cos\gamma\cos\alpha + 2U_{12}\cos\alpha\cos\beta}.$$

So reduciert sich das Problem der Bestimmung des Maximal- und Minimalradius der Krümmung auf die Bestimmung des Maximums und Minimums der Grösse

$$U_{11}x^2 + U_{22}y^2 + U_{33}z^2 + 2U_{23}yz + 2U_{13}zx + 2U_{12}xy$$

unter den Bedingungen

$$U_1x + U_2y + U_3z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

und wir erkennen, dass es genau mit dem Problem der Bestimmung der Achsen des Centralschnittes einer Fläche zweiten Grades durch eine Ebene $U_1x + U_2y + U_3z = 0$ übereinstimmt.

36. In derselben Weise stimmt das Problem, die Richtungen der Hauptschnitte in irgend einem Punkt zu finden, mit dem Problem der Bestimmung der Richtungen der Achsen für den durch die Ebene

$$U_1x + U_2y + U_3z = 0$$

in der Fläche zweiter Ordnung

$$U_{11}x^2 + U_{22}y^2 + U_{33}z^2 + 2U_{23}yz + 2U_{13}zx + 2U_{13}xy = 1$$

erzeugten Schnitt überein.

Durch einen gegebenen Durchmesser einer Fläche zweiten Grades kann stets ein ebener Schnitt gelegt werden, der ihn zur Achse hat, und die andere Achse desselben ist der Durchschnitt der zu ihm normalen Ebene mit der Ebene, welche ihm conjugiert ist. Ist somit

$$V = 1$$

die centrale Fläche zweiter Ordnung und geht der fragliche Durchmesser durch den Punkt (x', y', z'), so ist der zu ihm normale conjugierte Durchmesser der Durchschnitt der Ebenen

$$xx' + yy' + zz' = 0, \quad x'\frac{dV}{dx} + y'\frac{dV}{dy} + z'\frac{dV}{dz} = 0;$$

und liegt der erste Durchmesser in der Ebene

$$U_1x' + U_2y' + U_3z' = 0,$$

so beschreibt der zweite den Kegel, welcher durch die Vergleichung der durch Elimination von x', y', z' aus diesen drei Gleichungen gewonnenen Determinante mit Null repräsentiert wird, nämlich durch

$$(U_2z - U_3y)\frac{dV}{dx} + (U_3x - U_1z)\frac{dV}{dy} + (U_1y - U_2x)\frac{dV}{dz} = 0.$$

Dieser Kegel schneidet die Ebene

$$U_1x + U_2y + U_3z = 0$$

in den Achsen des durch sie bestimmten Schnittes. Die Richtungen der Hauptschnitte sind somit bestimmt als die Durchschnitte der Tangentenebene

$$U_1x + U_2y + U_3z = 0$$

mit dem Kegel

$$\begin{aligned}(U_2z - U_3y)(U_{11}x + U_{12}y + U_{13}z) + (U_3x - U_1z)(U_{12}x + U_{22}y + U_{23}z)\\ + (U_1y - U_2x)(U_{13}x + U_{23}y + U_{33}z) = 0,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}&(U_2U_{13} - U_3U_{12})\,x^2 + (U_3U_{12} - U_1U_{23})\,y^2 + (U_1U_{23} - U_2U_{13})\,z^2\\ &+ \{U_1(U_{22} - U_{33}) - U_2U_{12} + U_3U_{13}\}\,yz\\ &+ \{U_1U_{12} + U_2(U_{33} - U_{11}) - U_3U_{23}\}\,zx\\ &+ \{U_2U_{23} - U_1U_{13} + U_3(U_{11} - U_{22})\}\,xy = 0.\end{aligned}$$

37. Die im Artikel 34 angewendete Methode erlaubt uns auch, die Bedingungen für einen Kreispunkt zu finden.*)

*) Wir könnten dieselbe durch Bildung der Bedingung ermitteln, unter welcher die quadratische Gleichung des Artikel 34 gleiche Wurzeln hat. Da aber die Wurzeln dieser Gleichung stets reell sind, so

Wenn die Ebene xy die Tangentenebene in einem Umbilicus ist, so ist die Gleichung der Fläche von der Form

$$z + A(x^2 + y^2) + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + \text{etc.} = 0,$$

und wenn wir von ihr die Gleichung einer berührenden Kugel

$$z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

subtrahieren, so ist es möglich, λ so zu wählen — nämlich indem man es gleich A nimmt — dass alle Glieder des Restes durch z theilbar werden. Wenn also

$$u_1 + u_2 + \text{etc.} = 0$$

die Fläche und

$$u_1 + \lambda v_2 = 0$$

eine sie berührende Kugel bezeichnet, so ist es unter der Voraussetzung, dass der Anfangspunkt der Coordinaten ein Kreispunkt sei, möglich, λ so zu wählen, dass

$$u_2 - \lambda v_2$$
$$u_1$$

als einen Factor enthält. Durch eine wie in Artikel 34 vollzogene Transformation der Coordinaten erkennt man so, dass ein Punkt (x', y', z') ein Kreispunkt ist, wenn man λ so wählen kann, dass

$$(U_{11}-\lambda)x^2 + (U_{22}-\lambda)y^2 + (U_{33}-\lambda)z^2 + 2U_{23}yz + 2U_{13}zx + 2U_{12}xy$$

die Grösse

$$U_1x + U_2y + U_3z$$

als einen Factor enthält. Wenn diess geschehen soll, so muss der andere Factor sein

$$\frac{U_{11}-\lambda}{U_1}\,x + \frac{U_{22}-\lambda}{U_2}\,y + \frac{U_{33}-\lambda}{U_3}\,z$$

und die Entwickelung des Products und Vergleichung der Coefficienten von yz, zx und xy liefert die Bedingungen

$$(U_{22}-\lambda)\frac{U_3}{U_2} + (U_{33}-\lambda)\frac{U_2}{U_3} = 2U_{23},$$

---

ist sie zu der in den „Vorlesungen über die Algebra“ etc. behandelten Klasse gehörig und ihre Discriminante kann als Summe von Quadraten ausgedrückt werden. Wollen wir also nur von reellen Kreispunkten sprechen, so ist das Resultat der Vergleichung der Discriminante mit Null zweien Bedingungen äquivalent, welche einfacher so wie im Text erhalten werden können.

$$(U_{33}-\lambda)\frac{U_1}{U_3}+(U_{11}-\lambda)\frac{U_3}{U_1}=2U_{13},$$

$$(U_{11}-\lambda)\frac{U_2}{U_1}+(U_{22}-\lambda)\frac{U_1}{U_2}=2U_{12};$$

man erhält somit durch Elimination von λ zwischen diesen Gleichungen die beiden Bedingungen

$$\frac{U_{22}U_3^2+U_{33}U_2^2-2U_{23}U_2U_3}{U_3^2+U_2^2}=\frac{U_{33}U_1^2+U_{11}U_3^2-2U_{13}U_3U_1}{U_1^2+U_3^2}$$

$$=\frac{U_{11}U_2^2+U_{22}U_1^2-2U_{12}U_1U_2}{U_2^2+U_1^2}.$$

Da nur zwei Bedingungen zu erfüllen sind, so enthält eine Fläche n^{ter} Ordnung allgemein eine bestimmte Zahl von Kreispunkten; denn jede derselben repräsentiert eine Fläche und beide bestimmen mit der gegebenen Fläche zusammen eine Anzahl von Durchschnittspunkten, welche Kreispunkte sein müssen. Es kann aber insbesondere auch geschehen, dass die durch beide Bedingungen repräsentierten Flächen sich in einer ganz auf der ursprünglichen Fläche gelegenen Curve schneiden; dann existiert somit in der Fläche eine Linie, deren sämmtliche Punkte Kreispunkte derselben sind; man nennt eine solche Linie eine Linie sphärischer Krümmung.

Beispiel. Man untersuche, ob in der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$$

ein Kreispunkt enthalten ist.

38. Es giebt einen Fall, in welchem die Bedingungen des letzten Artikels nicht in der Form anwendbar sind, in welcher sie geschrieben wurden. Sie sind erfüllt für

$$U_1=0,\quad U_{11}=\frac{U_{22}U_3^2+U_{33}U_2^2-2U_{23}U_2U_3}{U_3^2+U_2^2}$$

und wir könnten daraus schliessen, dass die Fläche

$$U_1=0,\ \text{d. i.}\ \left(\frac{dU}{dx}=0\right)$$

stets durch Kreispunkte der gegebenen Fläche hindurchgehe. Man erkennt aber geometrisch leicht, dass diess nicht der Fall ist; denn

$$U_1=0$$

ist die Polare des Punktes (y, z, w) in Bezug auf die Fläche, sodass, wenn sie nothwendig durch Kreispunkte hindurch ginge, aus einer einfachen Coordinaten-Transformation geschlossen werden müsste, dass die erste Polare jedes Punktes Kreispunkte der Fläche enthielte.

Aus dem letzten Artikel geht dagegen hervor, dass es eine stillschweigende Voraussetzung seiner Untersuchung ist, dass keine der Grössen

$$U_1, \; U_2, \; U_3$$

verschwinde; denn wenn diess statt fände, so enthielte eine der gebrauchten Gleichungen unendliche Glieder.

Setzen wir

$$U_1 = 0,$$

so müssen wir vielmehr direct die Bedingung bestimmen, unter der

$$U_2y + U_3z$$

ein Factor in

$$(U_{11}-\lambda)x^2 + (U_{22}-\lambda)y^2 + (U_{33}-\lambda)z^2 + 2U_{23}yz + 2U_{13}zx + 2U_{12}xy$$

ist.

Offenbar muss dazu

$$\lambda = U_{11}$$

und wie man leicht sieht, wie vorher

$$U_{11} = \frac{U_{22}U_3^2 + U_{33}U_2^2 - 2U_{23}U_2U_3}{U_3^2 + U_2^2}$$

sein, während überdiess, damit die Glieder

$$2U_{13}zx + 2U_{12}xy$$

durch

$$U_2y + U_3z$$

theilbar sind,

$$U_2U_{13} = U_3U_{12}$$

sein muss.

Wenn man mit den so erhaltenen beiden Bedingungen

$$U_1 = 0$$

und die Gleichung der Fläche combiniert, so hat man vier Bedingungen, welche, specielle Fälle ausgenommen, nicht durch die Coordinaten eines Punktes erfüllt werden können.

Wenn wir die im letzten Artikel gegebenen Bedingungen von Brüchen befreien, so finden wir, dass jede von ihnen U_1, U_2 oder U_3 als einen Factor enthält, und was wir in diesem Artikel bewiesen haben, ist, dass diese Factoren als der Frage nach den Kreispunkten fremd beseitigt werden können.*)

Wir gehen zur Herleitung einiger anderer Folgerungen aus dem in Artikel 33 Bewiesenen über, wonach die beiden mit den Hauptkrümmungsradien beschriebenen Kugeln mit der Fläche stationäre Berührung haben.

---

*) Aus dem Entwickelten können wir die Zahl der Kreispunkte bestimmen, welche eine Fläche von der n^{ten} Ordnung im Allgemeinen haben kann.

Die Kreispunkte sind, so sahen wir, als Durchschnittspunkte der gegebenen Fläche mit einer Curve bestimmt, deren Gleichungen die Form

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

haben; sind A, B, C vom Grade l, A', B', C' aber vom Grade m, so sind

$$AB' - A'B = 0, \quad AC' - A'C = 0$$

vom Grade $(l + m)$ und durchschneiden sich in einer Curve vom Grade $(l + m)^2$; und da der Durchschnitt dieser zwei Flächen die Curve

$$A = 0, \quad A' = 0$$

vom Grade lm einschliesst, welche die Fläche

$$BC' - B'C = 0$$

nicht enthält, so ist die fragliche Curve von der Ordnung

$$l^2 + lm + m^2,$$

d. h. im gegenwärtigen Falle, wo l und m durch

$$(3n - 4) \quad \text{und} \quad (2n - 2)$$

respective zu ersetzen sind,

$$= 19n^2 - 46n + 28.$$

Das discutierte System schliesst aber, wie wir gesehen haben, drei Curven ein, wie

$$U_1 = 0, \quad U_{11}(U_2^2 + U_3^2) - (U_{22}U_3^2 + U_{33}U_2^2 - 2U_{23}U_2U_3) = 0,$$

welche die Kreispunkte nicht enthalten; man hat hiermit die Grösse

$$3(n - 1)(3n - 4)$$

von der vorher gefundenen Zahl zu subtrahieren, um zu finden, dass die Kreispunkte als Durchschnitte der gegebenen Fläche mit einer Curve von der Ordnung

$$(10n^2 - 25n + 16)$$

bestimmt sind und dass somit die Anzahl derselben für eine Fläche n^{ter} Ordnung allgemein

$$= n(10n^2 - 25n + 16)$$

ist.

39. **Wenn zwei Flächen eine stationäre Berührung haben, so berühren sie sich in zwei auf einander folgenden Punkten.**

Wenn die Gleichungen beider Flächen wie in Artikel 33 geschrieben werden, so sind die Tangentenebenen im nächstfolgenden Punkte nach Artikel 7 durch

$$z + 2\,(Ax' + By')\,x + 2\,(Bx' + Cy')\,y = 0,$$
$$z + 2\,(A'x' + B'y')\,x + 2\,(B'x' + C'y')\,y = 0$$

dargestellt. Sie sind identisch, wenn

$$Ax' + By' = A'x' + B'y', \quad Bx' + Cy' = B'x' + C'y'$$

ist, d. i. durch Elimination von $x' : y'$, wenn

$$(A - A')\,(C - C') = (B - B')^2$$

ist, d. h. unter der Bedingung der stationären Berührung.

Die mit einem der Hauptkrümmungsradien beschriebene Kugel berührt somit die Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten; oder zwei auf einander folgende Normalen der Fläche sind auch Normalen der Kugel und durchschneiden sich folglich im Centrum derselben.

Nun wissen wir, dass bei ebenen Curven das Centrum des Krümmungskreises als der Durchschnitt zweier auf einander folgender Normalen der Curve betrachtet werden kann. **Bei den Flächen schneidet die Normale in einem Punkte die einem beliebigen benachbarten Punkte entsprechende Normale im Allgemeinen nicht.** Wir sahen aber so eben, **dass die zwei auf einander folgenden Normalen sich durchschneiden, wenn der nächstbenachbarte Punkt in der Richtung eines der Hauptschnitte des gegebenen Punktes gewählt ward. Die gemeinschaftliche Länge beider Normalen gleicht dann dem entsprechenden Hauptkrümmungsradius.**

Der Wichtigkeit dieses Theorems halber geben wir eine directe Untersuchung desselben.

40. **Man soll untersuchen, in welchen Fällen die Normale in irgend einem Punkte einer Fläche durch die nächstfolgende Normale geschnitten wird.**

Wir wählen die Tangentenebene zur Ebene xy und setzen die Gleichung der Fläche in der Form

$$z + Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + \text{etc.} = 0$$

voraus. In Artikel 7 sahen wir dann, dass die Gleichung einer nächstfolgenden Tangentenebene ist

$$z + 2\,(Ax' + By')\,x + 2\,(Bx' + Cy')\,y = 0;$$

eine Normale zu ihr durch den Punkt (x', y') ist somit

$$\frac{x - x'}{Ax' + By'} = \frac{y - y'}{Bx' + Cy'} = 2z,$$

und dieselbe schneidet die Achse der z, d. i. die ursprüngliche Normale, wenn man hat

$$\frac{x'}{Ax' + By'} = \frac{y'}{Bx' + Cy'}.$$

Die Richtung nach einem nächstfolgenden Punkte, dessen Normale die gegebene Normale schneidet, ist somit durch die Gleichung

$$Bx'^2 + (C - A)\,x'y' - By'^2 = 0$$

bestimmt, d. i. durch die Gleichung des Artikel 30, welche die Richtungen des Maximums und des Minimums der Krümmung giebt.

In jedem Punkt einer Fläche giebt es somit zwei zu einander rechtwinklige Richtungen, in denen die Normale des nächstfolgenden Punktes die ursprüngliche Normale durchschneidet. Diese Richtungen sind die der beiden Hauptschnitte des Punktes.

Wenn wir zur Vergrösserung der Einfachheit die Richtungen der Hauptschnitte als Coordinatenachsen wählen, d. h. in den vorigen Gleichungen.

$$B = 0$$

setzen, so wird die Gleichung einer nächstfolgenden Normale

$$\frac{x - x'}{Ax'} = \frac{y - y'}{Cy'} = 2z,$$

und man sieht leicht, dass die den Punkten $y' = 0$, $x' = 0$ entsprechenden Normalen die Achse der z in Entfernungen

$$z = \frac{1}{2A},\quad z = \frac{1}{2C}$$

respective durchschneiden, d. h. in den Endpunkten der entsprechenden Hauptkrümmungsradien.*)

---

*) **Bertrand** berechnet in seiner Theorie der Krümmung der Flächen den Winkel, welchen die folgende Normale und die durch ihren Fusspunkt und die ursprüngliche Normale bestimmte Ebene bilden.

41. Wir können auch zu denselben Ergebnissen gelangen, indem wir den Ort derjenigen Punkte der Fläche suchen, deren Normalen eine feste zur Achse der z genommene Normale schneiden.

Durch die Substitution $x = 0$, $y = 0$ in die Gleichung einer andern Normale erkennen wir, dass der Punkt der Fläche, zu welchem sie gehört, der Bedingung

$$\frac{x}{\frac{dU}{dx}} = \frac{y}{\frac{dU}{dy}}$$

genügen muss. Die Curve, in welcher diese Fläche die gegebene Fläche schneidet, hat den Endpunkt der gegebenen Normale zum Doppelpunkt und die beiden Tangenten desselben sind die Haupttangenten der Fläche in diesem Punkte.

Der specielle Fall, in welchem die feste Normale einem Kreispunkte entspricht, verdient besondere Erwähnung.

Da die Gleichung der Fläche von der Form

$$z + A\,(x^2 + y^2) + \text{etc.} = 0$$

ist, so ist das niedrigste Glied der Gleichung

$$x\,\frac{dU}{dy} = y\,\frac{dU}{dx}$$

für

$$z = 0$$

vom dritten Grade und der Kreispunkt ist ein dreifacher Punkt in der Ortscurve. Während also jede der Normale des Kreispunktes nächstfolgende Normale die erstere schneidet, giebt es drei Richtungen von ihm aus, längs welcher auch die darauf folgende Normale die dem Kreispunkte entsprechende Normale noch schneidet.

Indem wir immer die Richtungen der Hauptschnitte als Coordinatenachsen voraussetzen, sind die Richtungscosinus der folgenden Normale zu $2Ax'$, $2Cy'$, 1 respective proportional, während die einer zum Radius vector normalen Tangente zu $-y'$, x', 0 proportional sind. In Folge dessen ist der cosinus des Winkels zwischen diesen beiden Linien oder der sinus des Winkels der folgenden Normale mit dem Normalschnitt zu $(C - A)\,x'y'$ proportional, oder proportional zu $(C - A)\sin 2\alpha$, wenn α der Winkel ist, welchen die Richtung des nächstfolgenden Punktes mit einer der Haupttangenten bildet. Ist $\alpha = 0$ oder $\alpha = 90^0$, so verschwindet dieser Winkel und die folgende Normale liegt in der Ebene der ursprünglichen Normale.

42. Eine Krümmungslinie*) in einer Fläche ist eine so auf derselben verzeichnete Linie, dass die Normalen in irgend zweien in ihr auf einander folgenden Punkten sich durchschneiden.

So können wir von irgend einem Punkte M der Fläche zu jedem der beiden folgenden Punkte N, N' übergehen, von deren Normalen wir bewiesen, dass sie die Normale in M schneiden. Die Normale in N ihrerseits wird durch die beiden folgenden Normalen in P, P' geschnitten, wobei wir das Element NP als eine Fortsetzung von dem Element MN denken, während NP' nahezu rectangulär zu demselben ist. In der nämlichen Art können wir vom Punkte P zu einem andern benachbarten Punkte Q übergehen und so eine Krümmungslinie $MNPQ$ bilden.

Und wir hätten ferner in derselben Weise vorschreiten können, indem wir in der Richtung MN' begannen.

Durch jeden Punkt M einer Fläche gehen somit zwei Krümmungslinien, welche sich in ihm rechtwinklig durchschneiden und von den entsprechenden beiden Haupttangenten berührt werden.

Eine Krümmungslinie ist im Allgemeinen keine ebene Curve, und in dem speciellen Falle selbst, in welchem sie eben ist, fällt ihre Ebene nicht nothwendig mit der eines Hauptschnittes in M zusammen, obgleich sie mit demselben die gemeinschaftliche Haupttangente hat. Der Hauptschnitt ist normal zur Fläche, die Ebene der Krümmungslinie kann geneigt gegen dieselbe sein.

Die Flächen, welche durch die Umdrehung einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene enthaltene Achse entstehen, bieten eine gute Erläuterung verschiedener hier einschlagender Umstände dar.

In jedem Punkte P einer solchen Fläche fällt die eine Krümmungslinie mit dem durch ihn und die Achse gehenden ebenen Schnitt oder mit der entsprechenden Lage der erzeugenden Curve zusammen.

Alle Normalen dieser Curve sind auch Normalen der Fläche und durchschneiden sich. Der entsprechende Hauptkrümmungsradius ist auch der Krümmungsradius dieses ebenen Schnittes.

Die andere durch P gehende Krümmungslinie ist der Kreis,

---

*) Die ganze Theorie der Krümmungslinien, der Umbilics, etc. gebührt Monge. Vgl. seine „Application de l'Analyse à la Géométrie" p. 124 (Liouville's Ausgabe).

welchen die durch ihn gelegte Normalebene zur Achse mit der Fläche bestimmt; denn die Normalen der Fläche in allen Punkten dieses Schnittes durchschneiden die Achse derselben und daher sich selbst in dem nämlichen Punkte; sein Abstand von den Punkten der Peripherie, insbesondere von dem Punkte P ist der zweite Hauptkrümmungsradius der Fläche.

Die durch P gehende erzeugende Curve (der Meridian) ist ein Hauptschnitt der Fläche, weil sie die Normale derselben enthält und eine Krümmungslinie berührt; der zur Achse normale Schnitt (der Parallelkreis) ist kein Hauptschnitt, weil er die Normale der Fläche nicht enthält; vielmehr ist der zweite Hauptschnitt der durch diese Normale und die demselben Kreise in P entsprechende Tangente bestimmte ebene Schnitt der Fläche.

Gleichzeitig erläutert dieses Beispiel das Theorem von Meunier; denn der Radius des durch P gehenden Kreises, d. i. eines schiefen Schnittes der Fläche, ist die Projection des zwischen dem Punkte P und der Achse enthaltenen Stückes der Normale auf seine Ebene, eines Stückes, von welchem wir so eben bewiesen haben, dass es der Krümmungsradius des entsprechenden Normalschnittes ist.

43. Es ist im Artikel 36 bewiesen worden, dass die Richtungscosinus der Tangente eines Hauptschnittes der Fläche die Relation

$$\begin{aligned}&(U_2 \cos\gamma - U_3 \cos\beta)(U_{11}\cos\alpha + U_{12}\cos\beta + U_{13}\cos\gamma)\\ +\,&(U_3 \cos\alpha - U_1 \cos\gamma)(U_{12}\cos\alpha + U_{22}\cos\beta + U_{23}\cos\gamma)\\ +\,&(U_1 \cos\beta - U_2 \cos\alpha)(U_{13}\cos\alpha + U_{23}\cos\beta + U_{33}\cos\gamma) = 0\end{aligned}$$

erfüllen.

Wir wissen nun, dass die Tangente des Hauptschnittes auch die Tangente der Krümmungslinie ist. Ist ds das Bogenelement einer Curve und bezeichnen dx, dy, dz die Projectionen desselben auf die Achsen, so sind die cosinus der von ds mit den Achsen gebildeten Winkel zu

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}$$

respective proportional. Die Differentialgleichung der Krümmungslinie wird daher erhalten, indem man

$$dx,\ dy,\ dz$$

für

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

in die vorhergehende Formel substituiert.

Diese Gleichung kann direct auch folgendermassen abgeleitet werden.*) Sind α, β, γ die Coordinaten eines zweien auf einander folgenden Normalen gemeinschaftlichen Punktes, so folgt aus den Gleichungen der Normale für x, y, z als die Coordinaten ihres Fusspunktes in der Fläche die Relation

$$\frac{\alpha - x}{U_1} = \frac{\beta - y}{U_2} = \frac{\gamma - z}{U_3},$$

und wenn wir den gemeinschaftlichen Werth dieser Brüche durch θ bezeichnen

$$\alpha = x + U_1\theta, \quad \beta = y + U_2\theta, \quad \gamma = z + U_3\theta.$$

Wenn aber die zweite Normale die Fläche in dem Punkte

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz$$

durchschneidet, so erhalten wir, indem wir ausdrücken, dass α, β, γ den Gleichungen der zweiten Normale genügen, dieselben Resultate, als wenn wir die vorigen Gleichungen differentiieren, indem wir α, β, γ als constant betrachten, d. i.

$$\begin{aligned} dx + U_1 d\theta + \theta dU_1 &= 0, \\ dy + U_2 d\theta + \theta dU_2 &= 0, \\ dz + U_3 d\theta + \theta dU_3 &= 0, \end{aligned}$$

und durch Elimination von θ, $d\theta$ aus diesen Gleichungen die Determinante des Artikel 36

$$\begin{vmatrix} dx\ , & dy\ , & dz \\ U_1\ , & U_2\ , & U_3 \\ dU_1, & dU_2, & dU_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Uebrigens hat man

$$\begin{aligned} dU_1 &= U_{11}dx + U_{12}dy + U_{13}dz, \\ dU_2 &= U_{12}dx + U_{22}dy + U_{23}dz, \\ dU_3 &= U_{13}dx + U_{23}dy + U_{33}dz, \end{aligned}$$

Beispiel. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

zu finden.

---

*) Vergl. Gregory's „Solid Geometry" p. 256.

Man hat

$$U_1 = \frac{x}{a^2}, \quad U_2 = \frac{y}{b^2}, \quad U_3 = \frac{z}{c^2};$$

$$dU_1 = \frac{dx}{a^2}, \quad dU_2 = \frac{dy}{b^2}, \quad dU_3 = \frac{dz}{c^2},$$

und erhält durch Substitution in die vorige Gleichung und Entwickelung

$$(b^2 - c^2)\, x\, dy\, dz + (c^2 - a^2)\, y\, dz\, dx + (a^2 - b^2)\, z\, dx\, dy = 0.$$

Da wir wissen, dass die Krümmungslinien des Ellipsoids die Durchschnittslinien desselben mit einem System concentrischer Flächen zweiten Grades sind (Band I, Artikel 206), so können wir für das Integral dieser Gleichung die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

voraussetzen und die Constanten durch Substitution bestimmen.

Wenn wir die Form des Integrals nicht als bekannt voraussetzen, so können wir z und dz mit Hilfe der Gleichung der Fläche eliminieren und so eine Differentialgleichung mit zwei Veränderlichen bilden, welche die Gleichung der Projection der Krümmungslinien auf die Ebene der xy ist. So erhalten wir nach Multiplication mit $\frac{z}{c^2}$ und Reduction durch die Gleichung des Ellipsoids und ihr Differential

$$\left\{(b^2 - c^2)\, x\, dy + (c^2 - a^2)\, y\, dx\right\} \left(\frac{x\, dx}{a^2} + \frac{y\, dy}{b^2}\right)$$
$$= (a^2 - b^2) \left\{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right\} dx\, dy,$$

d. i. für

$$\frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)} = A, \qquad \frac{a^2 (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2} = B$$

$$Axy \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - Ay^2 - B) \frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

eine Gleichung, deren Integral nach G. Boole's „Differential Equations" Ex. 3, p. 135 und 124 ist

$$\frac{x^2}{B} - \frac{y^2}{BC} = \frac{1}{AC + 1}.$$

Die Krümmungslinien werden somit auf die Hauptebene in eine Reihe von Kegelschnitten projiciert, deren Achsen a', b' durch die Relation

$$\frac{a'^2 (a^2 - c^2)}{a^2 (a^2 - b^2)} + \frac{b'^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (b^2 - a^2)} = 1$$

verbunden sind. Man erkennt leicht, dass diess mit dem in Bd. I, Art. 206 gegebenen Abriss der Theorie der Krümmungslinien übereinstimmt.

44. Das Theorem, nach welchem confocale Flächen zweiten Grades sich in Krümmungslinien durchschneiden, ist ein specieller Fall des Theorems von Dupin,*) welches wir so ausdrücken: Wenn drei Flächen sich in einem Punkte rechtwinklig durchschneiden, und wenn jedes Paar derselben sich auch in dem nächstfolgenden gemeinschaftlichen Punkte rechtwinklig schneidet, so sind die Richtungen der Durchschnitte die Richtungen der Krümmungslinie in jeder derselben.

Wir denken den allen drei Flächen gemeinschaftlichen Punkt als Anfang der Coordinaten und die drei rectangulären Tangentenebenen als Coordinatenebenen, so dass die Gleichungen der Flächen von der Form

$$\begin{aligned} x + ay^2 + 2byz + cz^2 + 2dzx + \text{etc.} &= 0, \\ y + a'z^2 + 2b'zx + c'x^2 + 2d'xy + \text{etc.} &= 0, \\ z + a''x^2 + 2b''xy + c''y^2 + 2d''yz + \text{etc.} &= 0 \end{aligned}$$

sind. In einem nächstfolgenden den ersten beiden Flächen gemeinschaftlichen Punkte hat man

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = z',$$

wo z' nothwendig sehr klein ist; die nächstfolgenden Tangentenebenen sind daher

$$\begin{aligned} (1 + 2dz')\, x + 2bz'y + 2cz'z &= 0, \\ 2b'z'x + (1 + 2d'z')\, y + 2a'z'z &= 0, \end{aligned}$$

und man erhält

$$b + b' = 0$$

als die Bedingung, unter welcher dieselben rechtwinklig zu einander sind, indem man nur diejenigen Glieder berücksichtigt, welche die kleine Grösse z' im ersten Grade enthalten.

In gleicher Weise müssen, damit die andern Paare von Flächen sich in einem folgenden Punkte rechtwinklig durchschneiden, die Bedingungen

$$\begin{aligned} b' + b'' &= 0, \\ b'' + b &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt seien, d. i. man muss zur gleichzeitigen Rechtwinkligkeit aller drei Flächenpaare

*) „Développements de Géométrie", cinquième Mémoire. Der hier gegebene Beweis rührt von W. Thomson her; vgl. Gregory's „Solid Geometry," p. 263. „Cambridge Mathematical Journal," Vol. IV, p. 62.

$$b = b' = b'' = 0$$

haben. Dann aber zeigt die Form der Gleichungen, dass die Achsen der Coordinaten die Richtungen der Krümmungslinien in jeder von ihnen sind. Man erhält also die von Dupin gegebene Form des Theorems: Wenn in drei Systemen von Flächen jede Fläche des einen Systems von allen Flächen der beiden anderen Systeme rechtwinklig durchschnitten wird, so ist die Durchschnittslinie irgend zweier Flächen derselben, welche verschiedenen Systemen angehören, in jeder von ihnen eine Krümmungslinie. Denn in jedem ihrer Punkte ist es nach der Voraussetzung möglich, eine dritte Fläche anzugeben, welche die beiden ersten rechtwinklig durchschneidet.

45. Wenn zwei Flächen sich rechtwinklig durchschneiden,*) so ist ihre Durchschnittscurve, wenn sie eine Krümmungslinie der einen ist, zugleich auch eine Krümmungslinie der anderen.

Indem wir den Coordinatenanfangspunkt als einen Punkt der Durchschnittscurve wählen, erhalten wir als die Bedingung des rechtwinkligen Durchschnitts auf dem Wege des letzten Artikels

$$b + b' = 0,$$

d. i. wenn

$$b = 0,$$

auch

$$b' = 0.$$

Oder: Da die Richtungscosinus der Tangentenebenen der beiden Flächen zu

$$U_1,\ U_2,\ U_3;\quad U'_1,\ U'_2,\ U'_3$$

proportional sind, so sind die Richtungscosinus ihrer Durchschnittslinie proportional zu

$$U_2U'_3 - U'_2U_3,\quad U_2U'_1 - U'_2U_1,\quad U_1U'_2 - U'_1U_2;$$

und damit die so bezeichnete Richtung die Richtung einer Krümmungslinie der ersten Fläche sei, muss nach Artikel 43 die Bedingung

---

*) Der Satz gilt auch, wenn sie sich überhaupt unter einem constanten Winkel durchschneiden.

$$\begin{vmatrix} U_2U'_3 - U'_2U_3, & U_3U'_1 - U'_3U_1, & U_1U'_2 - U'_1U_2 \\ U_1 \quad , & U_2 \quad , & U_3 \\ dU_1 \quad , & dU_2 \quad , & dU_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(U_1U'_1 + U_2U'_2 + U_3U'_3)\,(U_1dU_1 + U_2dU_2 + U_3dU_3)$$
$$-\,(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)\,(U'_1dU_1 + U'_2dU_2 + U'_3dU_3) = 0$$

erfüllt sein. Sind beide Flächen rechtwinklig zu einander, so ist

$$U_1U'_1 + U_2U'_2 + U_3U'_3 = 0,$$

und die vorige Bedingung reduciert sich auf

$$U'_1dU_1 + U'_2dU_2 + U'_3dU_3 = 0;$$

wir folgern aus beiden Gleichungen die dritte

$$U_1dU'_1 + U_2dU'_2 + U_3dU'_3 = 0,$$

welche zugleich die Bedingung ist, unter der die Durchschnittscurve auch eine Krümmungslinie der zweiten Fläche ist.

46. Eine Krümmungslinie hat nach der Definition den wesentlichen Character, dass die Normalen der Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten von ihr sich durchschneiden. Die durch alle Normalen der Fläche längs einer Krümmungslinie gebildete Fläche ist somit eine abwickelbare Fläche (Anmerkung des Artikel 109 im I. Bande), denn je zwei auf einander folgende gerade Erzeugende derselben schneiden sich. Diese Abwickelungsfläche schneidet natürlich die gegebene Fläche unter rechten Winkeln.

Der Ort derjenigen Punkte, in welchen zwei auf einander folgende Erzeugende dieser Fläche sich schneiden, ist eine Curve, welche wir als die Cuspidal- oder Rückkehrkante der Fläche bezeichnen und deren Eigenschaften im nächsten Kapitel weiter betrachtet werden sollen.

Jede Erzeugende der besprochenen Fläche ist eine Tangente dieser Curve, weil sie zwei auf einander folgende Punkte derselben mit einander verbindet, nämlich die Punkte, in denen sie selbst die vorhergehende und nächstfolgende Erzeugende durchschneidet. (Vergl. Band I, Artikel 119.)

Denken wir nun die Normale in irgend einem Punkte M der Fläche, so gehen durch diesen zwei Krümmungslinien $MNPQ$ etc., $MN'P'Q'$ etc., und sind die Durchschnittspunkte der auf einander folgenden Normalen in M, N, P, Q, etc.

C, D, E, etc.

und die der Normalen in M, N', P', Q', etc.

C', D', E', etc.,

so ist die Curve CDE etc. die Cuspidalkante der Abwickelungsfläche, welche von der der Krümmungslinie $MNPQ$ etc. entsprechenden Normalen gebildet wird, und ebenso $C'D'E'$ etc. die Cuspidalkante der Abwickelungsfläche der Normalen von $MN'P'Q'$ etc. Die Normale in M berührt nach dem Vorigen diese Curven in den Punkten C, C' respective, welche die beiden dem Punkte M entsprechenden Krümmungscentra sind.

Wir haben somit bewiesen, was folgt: Die Cuspidalkante der durch die Normalen einer Fläche in den Punkten einer Krümmungslinie erzeugten Abwickelungsfläche ist der Ort des einen Systems der Krümmungscentra welche allen Punkten dieser Linie angehören.

47. Die Vereinigung der Krümmungscentra C, C' aller Punkte einer Fläche ist eine Fläche von zwei Mänteln, welche man die Fläche der Centra der gegebenen Fläche nennt. (Siehe Bd. I, Art. 208.) Die Curve CDE etc. liegt auf dem einen, die Curve $C'D'E'$ etc. auf dem anderen Mantel derselben. Jede Normale der gegebenen Fläche berührt beide Mäntel derselben, denn es ist bewiesen, dass sie die auf ihnen respective gelegenen Curven CDE etc., $C'D'E'$ etc. berührt. Wenn aber von einem nicht in der Fläche gelegenen Punkte zwei auf einander folgende Tangenten derselben ausgehen, so ist ihre Ebene eine Tangentenebene der Fläche, weil sie den dem Punkte entsprechenden Tangentenkegel berührt. Wenn dagegen zwei auf einander folgende Tangenten sich in der Fläche selbst durchschneiden, so ist ihre Ebene nicht allgemein eine Tangentenebene der Fläche, weil jeder ebene Schnitt der Fläche in seinen Tangenten in zwei auf einander folgenden Punkten zwei gerade Linien dieser Art bestimmt, welche doch in seiner d. i. in einer die Fläche schneidenden Ebene liegen.

Betrachten wir nun die zwei auf einander folgenden Normalen in den Punkten M, N der Fläche, so sind sie beide Tangenten beider Mäntel der Fläche der Centra. Und da der Punkt C, in welchem sie sich durchschneiden, dem ersten Mantel, aber im Allgemeinen nicht zugleich dem zweiten Mantel angehört, so ist die Ebene beider Normalen eine Tangentenebene des zweiten Mantels der Fläche der Centra.

Ebenso ist die Ebene der Normalen in den Punkten M N'

die Tangentenebene des ersten Mantels der Fläche der Centra; und auf Grund der Rechtwinkligkeit der beiden durch den Punkt M gehenden Krümmungslinien ergiebt sich, dass diese beiden Ebenen rechtwinklig zu einander sind; d. i. die Tangentenebenen der Fläche der Centra in den beiden Punkten C, C', welche eine Normale der Fläche mit ihr gemein hat, schneiden einander rechtwinklig.

Für jeden Kreispunkt der ursprünglichen Fläche haben die beiden Mäntel der Fläche der Centra einen gemeinschaftlichen Punkt, oder in anderen Worten, hat die Fläche der Centra einen Doppelpunkt; und wenn die Originalfläche eine Linie sphärischer Krümmung hat, so besitzt die Fläche der Centra eine Doppellinie, die derselben entspricht; ihre beiden Mäntel schneiden einander längs derselben überall rechtwinklig.

48. Es erscheint angemessen, an dieser Stelle zu erklären, was unter einer geodätischen Linie einer Fläche verstanden wird, und die Fundamentaleigenschaft solcher Linien anzugeben, nach welcher die osculierende Ebene derselben in jedem ihrer Punkte eine Normalebene der Fläche ist. (Band I, Artikel 119.)

Eine geodätische Linie ist die Form, welche ein zwischen zwei Punkten der Fläche in ihr und über sie hin ausgespannter Faden annimmt, sie ist daher gewöhnlich die kürzeste Linie in der Fläche, welche zwischen den beiden gewählten Punkten gezogen werden kann. Da nun die Resultante der Spannungen, welche längs zweien auf einander folgenden Elementen der durch den Draht gebildeten Curve stattfinden, in der Ebene dieser Elemente liegt, und die Normale der Fläche sein muss, um von dem Widerstand derselben aufgehoben zu werden, so enthält die Ebene zweier auf einander folgender Elemente der geodätischen Linie die Normale der Fläche in ihrem gemeinschaftlichen Punkte.*)

---

*) Ich bin in diesem Beweise Monge gefolgt, da die bei ihm angewandten mechanischen Grundsätze so einfach sind, dass es pedantisch erschiene, ihre Benutzung zu beanstanden. Für diejenigen, die einen rein geometrischen Beweis vorziehen, wird die Fortsetzung im Texte genügen.

Für die mit der Theorie der Maxima und Minima vertrauten Leser bedarf es kaum der Erwähnung, dass die geodätische Linie nicht nothwendig die kürzeste Linie sein muss, die auf der Fläche zwischen den

Das Nämliche kann auch geometrisch leicht bewiesen werden; denn zuerst, wenn zwei Punkte A, C in verschiedenen Ebenen mit einem Punkte B der Durchschnittslinie dieser Ebene verbunden werden, so ist die Summe von AB und BC kleiner als die Summe jeder anderen

$$AB' + B'C,$$

wenn AB und BC gleiche Winkel mit der Durchschnittslinie TT' einschliessen; denn wenn die eine Ebene um diese Letztere bis zum Zusammenfallen mit der anderen gedreht wird, so fallen AB und BC in eine gerade Linie wegen der vorausgesetzten Gleichheit der Winkel TBA und $T'BC$, und die Gerade AC ist die kürzeste Linie, durch welche die Punkte A und C verbunden werden können. Sind demnach AB und BC auf einander folgende Elemente einer auf der Fläche verzeichneten Curve, so ist diese Curve die kürzeste Linie zwischen A und C, wenn AB und BC mit BT, der Durchschnittslinie der Tangentenebenen in A und C, gleiche Winkel bilden. Somit sind AB oder seine Verlängerung und BC auf einander folgende Kanten eines geraden Kegels, welcher die Linie BT zur Achse hat; ihre Ebene ABC ist eine Tangentenebene des Kegels und als solche normal zu der Ebene, welche die Achse und die Berührungskante enthält; d. i. die Ebene ABC, die osculierende Ebene der geodätischen Linie, ist normal zur Ebene ABT, der Tangentenebene in A, so dass das Theorem dieses Artikels bewiesen ist.

Bertrand hat bemerkt,*) dass diese Fundamentaleigenschaft der geodätischen Linie aus Meunier's Theorem folgt. (Siehe Artikel 32.) Denn es ist offenbar, dass für einen unendlich kleinen Bogen der gegebenen Sehne der Ueberschuss seiner Länge über die der Sehne um so kleiner wird, je grösser der Krümmungsradius ist; der kürzeste Bogen zwischen zwei unendlich nahen Punkten A, B einer Fläche ist somit der, welcher den

---

beiden Punkten gezogen werden kann; beide Theile des grössten Kreises, der durch zwei Punkte einer Kugel bestimmt ist, sind geodätisch, aber nur der unter 180° bleibende ist eine kürzeste Linie. Die geodätische Linie ist aber zugleich die kürzeste, wenn die beiden Punkte hinreichend nahe gelegen sind.

*) „Liouville's Journal", t. XIII, p. 73. Cayley, „Quarterly Journal", vol. I, p. 186.

grössten Krümmungsradius hat, und wir haben gesehen, dass diese Eigenschaft dem entsprechenden Normalschnitt zukommt.

49. Indem ich nun zur Fläche der Centra zurückkehre, sage ich, dass die Curve CDE (Artikel 47), der Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Normalen längs einer Krümmungslinie, eine geodätische Linie für den Mantel der Fläche der Centra ist, welchem sie angehört.

Denn wir sahen (Artikel 47), dass die Ebene zweier auf einander folgender Normalen der Fläche, d. i. zugleich die Ebene zweier auf einander folgender Tangenten dieser Curve, eine Tangentenebene des zweiten Mantels der Fläche der Centra und normal zur Tangentenebene des Punktes C für den Mantel der Fläche ist, auf welchem C liegt. Da sonach die osculierende Ebene der Curve CDE stets normal zur Fläche der Centra ist, so ist die Curve eine geodätische Linie dieser Fläche.

50. Wir haben die auf die Theorie der Krümmungslinien bezüglichen Gleichungen unter der Voraussetzung gegeben, dass die Gleichung der Fläche in der gewöhnlichen Form

$$\Phi\,(x,\,y,\,z) = 0$$

bekannt sei. Damit jedoch der Leser hier auch die sonst üblichen Formeln vereinigt finde, schliessen wir diess Kapitel mit der Darstellung der Hauptgleichungen in der durch Monge gegebenen und durch die meisten nachfolgenden Schriftsteller beibehaltenen Form, welche sich auf die Gleichung

$$z = \Phi\,(x,\,y)$$

als allgemeine Form der Gleichung der Fläche bezieht. Wir gebrauchen die gewöhnlichen Bezeichnungen

$$dz = pdx + qdy,\quad dp = rdx + sdy,\quad dq = sdx + tdy;$$

und könnten die Resultate, welche dieser Form entsprechen, aus den früher gefundenen ableiten, indem wir wegen

$$U = \Phi\,(x,\,y) - z = 0$$

haben

$$\frac{dU}{dx} = p,\ \frac{dU}{dy} = q,\ \frac{dU}{dz} = 1,$$

mit den entsprechenden Ausdrücken für die zweiten Differentialquotienten. Wir ziehen es vor, die bezüglichen Untersuchungen in der veränderten Form zu wiederholen. Die Gleichung der Tangentenebene ist

$$z - z' = p\,(x - x') + q\,(y - y'),$$

und die Gleichungen der Normale sind

$$(x - x') + p\,(z - z') = 0,\quad y - y' + q\,(z - z') = 0.$$

Ist somit (α, β, γ) ein Punkt der Normale und (x, y, z) der Fusspunkt derselben in der Fläche, so hat man

$$(\alpha - x) + p\,(\gamma - z) = 0,\quad (\beta - y) + q\,(\gamma - z) = 0.$$

Und wenn α, β, γ auch den Gleichungen einer zweiten Normale genügen, so müssen die Differentiale dieser Gleichungen verschwinden, d. i.

$$dx + pdz = (\gamma - z)\,dp,\quad dy + qdz = (\gamma - z)\,dq;$$

daraus entspringt durch Elimination von $(\gamma - z)$ die Bedingungsgleichung

$$(dx + pdz)\,dq = (dy + qdz)\,dp.$$

Durch Substitution der für dz, dp, dq gegebenen Werthe und nachmalige Ordnung erhält man dann

$$\frac{dy^2}{dx^2}\left\{(1 + q^2)\,s - pqt\right\} + \frac{dy}{dx}\left\{(1 + q^2)\,r - (1 + p^2)\,t\right\}$$
$$- \left\{(1 + p^2)\,s - pqr\right\} = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt die Projectionen der beiden Richtungen, in denen die nächstfolgenden Punkte liegen, deren Normalen die gegebene Normale durchschneiden, auf die Ebene xy.

Für

$$\alpha = \beta = 0,\quad p = q = 0,$$

d. h. die Normale als Achse der z, erhält man

$$\frac{dy^2}{dx^2}\,s + \frac{dy}{dx}\,(r - t) - s = 0;$$

das Product der Wurzeln dieser Gleichung ist -1, d. h. die durch einen Punkt gehenden Krümmungslinien schneiden sich rechtwinklig.

51. Wir können aus den Gleichungen des vorigen Artikels auch die Längen der Hauptkrümmungsradien bestimmen. Die Gleichungen

$$dx + pdz = (\gamma - z)\,dp,\quad dy + qdz = (\gamma - z)\,dq$$

gehen nach der obigen Transformation in

$$\left\{1 + p^2 - (\gamma - z)\,r\right\}dx + \left\{pq - (\gamma - z)\,s\right\}dy = 0,$$
$$\left\{1 + q^2 - (\gamma - z)\,t\right\}dy + \left\{pq - (\gamma - z)\,s\right\}dx = 0$$

über und die Elimination von $dx : dy$ giebt

$$(\gamma - z)^2 (rt - s^2) - (\gamma - z) \left\{(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t\right\} + (1 + p^2 + q^2) = 0.$$

Nun ist $(\gamma - z)$ die Projection des Krümmungsradius auf die Achse der z, und da der Cosinus des von der Normale mit diesem Radius gebildeten Winkels

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$

ist, so haben wir

$$R = (\gamma - z) \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}.$$

Indem man $(\gamma - z)$ mit Hülfe der letzten Gleichung eliminiert, erhält man zur Bestimmung von R die Gleichung

$$R^2 (rt - s^2) - R \left\{(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t\right\} \sqrt{(1 + p^2 + q^2)} + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Wenn man die Bedingung aufstellt, unter welcher diese Gleichung gleiche Wurzeln von einerlei Zeichen besitzt, so erhält man die Differentialgleichung der Fläche, für welche überall die beiden Hauptkrümmungscentra zusammen fallen in der Form

$$\left\{(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t\right\}^2 - 4 (rt - s^2)(1 + p^2 + q^2) = 0.$$

Man betrachtet zuerst den Specialfall

$$(1 + q^2) s - pqt = 0, \quad (1 + p^2) s - pqs = 0,$$
$$(1 + q^2) r - (1 + p^2) t = 0$$

(jedes Paar dieser Gleichungen zieht die dritte nach sich) und findet dann leicht, dass der allgemeine Fall nicht von ihm verschieden ist. Denn für die Substitution

$$r (1 + q^2) - t (1 + p^2) = X, \quad s (1 + p^2) - pqr = Y$$

findet man

$$t = \frac{r (1 + q^2) - X}{1 + p^2}, \quad s = \frac{Y + pqr}{1 + p^2}$$

und somit durch Einsetzen in die Gleichung, deren ersten Theil man mit V bezeichnen kann, nach einiger Reduction

$$V (1 + p^2) = X^2 + 4 Y^2 + (pX + 2qY)^2,$$

so dass $V = 0$ die Bedingungen $X = 0$, $Y = 0$ erfordert. Schreibt man die obigen Bedingungsgleichungen in der Form

$$\frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}$$

oder

$$\frac{d\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dx} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)}{dy} = 0,$$

so gelangt man zur Gleichung der Kugel

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Durch Substitution derselben Werthe in X, Y für s, t in die allgemeine Gleichung des Artikel 50 für die zwei sich in einem Punkte der Fläche schneidenden Krümmungslinien erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-X(1+p^2) \pm \sqrt{(1+p^2)\left\{X^2+4Y^2+(pX+2qY)^2\right\}}}{Y(1+q^2)+pqX},$$

woraus zwei stets reelle Werthe entspringen.

Nennt man ferner R_1 und R_2 die beiden Wurzeln der die Hauptradien bestimmenden Gleichung, so hat man

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1+p^2)\,t - 2pqs + (1+q^2)\,r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$$

und wenn man den Halbmesser a einer Kugel so bestimmt, dass

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ist, so findet man durch ihn das Centrum derjenigen Kugel bestimmt, welche die Fläche osculiert und mit ihr im Berührungspunkt dieselbe Krümmung hat. Man hat diese die **mittlere Krümmung der Fläche** genannt. Aehnlich ist

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Wir wollen ferner bemerken, dass der Ausdruck für

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

in die Form

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)$$

gebracht und durch

$$-\left(\frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dy}\right)$$

dargestellt werden kann, wenn L und M die cosinus der Winkel bezeichnen, welche der nach der positiven Achse der z gerichtete

Theil der Normale mit den Achsen der x und y macht. Endlich wird für die allgemeine Gleichungsform

$$U = \Phi\,(x,\,y,\,z) = 0$$

die nämliche Grösse durch den Ausdruck

$$-\frac{\Sigma\left\{U_1^2\,(U_{22} + U_{33}) - 2\,U_2\,U_3\,U_{23}\right\}}{(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

gegeben, wo das Σ die drei Glieder umfasst, welche aus der cyclischen Vertauschung der Indices hervorgehen.

52. Aus den vorigen Ergebnissen kann das Theorem von Joachimsthal*) abgeleitet werden, *wornach, wenn eine Krümmungslinie eine ebene Curve ist, die Ebene derselben und die Tangentenebene der Fläche in jedem ihrer Punkte einen constanten Winkel bilden.*

Ist die Ebene der Krümmungslinie durch

$$z = 0$$

dargestellt, so wird die Gleichung des Artikel 50

$$(dx + pdz)\,dq = (dy + qdz)\,dp$$

in die einfachere übergeführt

$$dx\,dq = dy\,dp;$$

und da auch

$$pdx + qdy = 0$$

ist, so hat man

$$pdp + qdq = 0,$$

d. h.

$$p^2 + q^2 = \text{const.},$$

oder das Quadrat der Tangente des Winkels, welchen die Tangentenebene mit der Ebene der xy macht, ist unveränderlich, denn es ist

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2 + {}^2q)}}.$$

Oder auch so: Es seien MM' und $M'M''$ zwei auf einander folgende und einander gleiche Elemente einer Krümmungslinie, so sind die auf einander folgenden Normalen Perpendikel zu die-

*) „Crelle's Journal", Bd. XXX, p. 347.

sen Linien in ihren Mittelpunkten J, J', und der Durchschnittspunkt C derselben ist von den Linien MM', $M'M''$ gleich weit entfernt.

Wenn wir aber von C die Normale CO auf die Ebene $MM'M''$ fällen, so ist auch O gleich weit von diesen Elementen entfernt, d. i.

$$\angle CJO = \angle CJ'O.$$

Es ist somit bewiesen, dass die Neigung der Normale zur Ebene der Krümmungslinie unverändert bleibt, wenn wir in dieser Linie von Punkt zu Punkt übergehen.*)

Ist allgemeiner die Krümmungslinie nicht eben, so machen wie vorher die Tangentenebenen durch MM' und $M'M''$ mit der Ebene $MM'M''$ gleiche Winkel, und der Winkel, welchen die zweite Tangentenebene mit der nächstfolgenden osculierenden Ebene $M'M''M'''$ bildet, differiert von dem Winkel, welchen sie mit der ersten bildet, um den Winkel der zwei osculierenden Ebenen. So erhalten wir Lancret's Theorem: Längs einer jeden Krümmungslinie ist die Variation in dem Winkel zwischen der Tangentenebene der Fläche und der osculierenden Ebene der Curve gleich dem Winkel zwischen den beiden osculierenden Ebenen.

Wenn beispielsweise eine Krümmungslinie zugleich eine geodätische Linie ist, so muss sie eben sein; denn dann variiert der Winkel zwischen der Tangenten- und der osculierenden Ebene nicht, weil er stets ein rechter ist, und die osculierende Ebene selbst kann somit auch nicht variieren.

Mit Hülfe derselben Principien erhalten wir einen einfachen Beweis des im Artikel 45 gegebenen Theorems.

53. Wir bestimmen endlich noch unter derselben Voraussetzung über die Form der Gleichung den Krümmungsradius eines Normalschnittes.

Weil das Krümmungscentrum (α, β, γ) in der Normale liegt, so ist

$$(\alpha - x) + p\,(\gamma - z) = 0, \quad (\beta - y) + q\,(\gamma - z) = 0.$$

Dann ist die Länge des gesuchten Radius bestimmt durch

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 = R^2,$$

*) „Liouville's Journal", t. XI, p. 87.

und da diese Relation für drei auf einander folgende Punkte des Schnittes gilt, welcher durch den betrachteten Kreis osculiert wird, so gelten zugleich die beiden Relationen

$$(\alpha - x)\, dx + (\beta - y)\, dy + (\gamma - z)\, dz = 0,$$
$$(\alpha - x)\, d^2x + (\beta - y)\, d^2y + (\gamma - z)\, d^2z = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Wir erhalten also durch Combination dieser letzten mit den vorigen Gleichungen

$$\frac{\alpha - x}{p} = \frac{\beta - y}{q} = \frac{\gamma - z}{1} = \frac{R}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}$$
$$= \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{pd^2x + qd^2y - d^2z}.$$

Durch Differentiieren von

$$dz = pdx + qdz$$

wird aber

$$d^2z - pd^2x - qd^2y = rdx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2,$$

also

$$R = \pm \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}\ \frac{dx^2 + dy^2 + (pdx + qdy)^2}{rdx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}.$$

Der Krümmungsradius eines Schnittes, dessen Spur in der Ebene xy zu

$$y = mx$$

parallel ist, wird daher bestimmt durch

$$\pm \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}\ \frac{(1 + p^2) + 2pqm + (1 + q^2)\, m^2}{r + 2sm + tm^2}.$$

Die Bedingungen für die Existenz eines Kreispunktes erhält man, indem man ausdrückt, dass dieser Werth von m unabhängig sei, welches fordert

$$\frac{1 + p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1 + q^2}{t}.$$

In Folge dessen wird die Gleichung der Krümmungslinien für einen solchen Punkt unbestimmt. (Vergl. Artikel 51, für $X = Y = 0$.)

Für die Kugel ergiebt sich nach dem Obigen, das jeder ihrer Punkte ein Kreispunkt ist.

Beispiel 1. Bestimme die Kreispunkte der Fläche

$$xyz = a^3$$

und zeige, dass der Krümmungsradius des Normalschnitts in einem solchen der Entfernung desselben vom Anfangspunkt der Coordinaten gleich ist.

Beispiel 2. Man soll zeigen, dass die aus dem Anfangspunkt der Coordinaten beschriebene Kugel vom Halbmesser r die Fläche

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1$$

in den Kreispunkten berührt, wenn

$$r^{\frac{2n}{n-2}} = a^{\frac{2n}{n-2}} + b^{\frac{2n}{n-2}} + c^{\frac{2u}{n-2}}$$

ist; und dass der normale Krümmungsradius der Fläche in diesen Punkten $= \dfrac{r}{n-1}$ ist.

Eine andere Richtung der Untersuchung kann auf die Bestimmung des osculierenden Rotationsellipsoids ausgehen, welches irgend einem Punkte der Fläche entspricht; ein osculierendes Rotationsellipsoid unterliegt und entspricht gerade sechs Bedingungen — allgemein fordert eine Berührung n^{ter} Ordnung $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ Bedingungen. Die Mittel dieser Untersuchung sind im Früheren enthalten.

Für die Fläche

$$\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 = \frac{z^2}{c^2} + 1$$

entspricht dem Schnittpunkte der Achse der z ein elliptisches Paraboloid, welches in seinem Scheitel mit ihr eine Berührung dritter Ordnung hat.

II. Kapitel.

Gewundene Curven und abwickelbare Flächen.

I. Abschnitt. Projectivische Eigenschaften.

54. Es ward bereits im ersten Bande dieses Werkes (Artikel 19, II) bewiesen, dass zwei Gleichungen zwischen den Raumcoordinaten eine Curve im Raume repräsentieren; so z. B. die Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0$$

die Durchschnittscurve der Oberflächen U und V.

Die Ordnung einer Curve im Raume wird durch die Zahl von Punkten gemessen, in welchen sie von irgend einer Ebene geschnitten wird. Wenn U und V respective von den Graden m und n sind, so werden die von ihnen repräsentierten Flächen von einer beliebigen Ebene in Curven derselben Ordnungen geschnitten, welche mit einander mn Schnittpunkte bestimmen; die Curve UV ist somit von der mn^{ten} Ordnung.

Indem man nach einander je eine der Veränderlichen zwischen den zwei gegebenen Gleichungen eliminiert, erhält man drei Gleichungen

$$\varphi\,(y,\, z) = 0, \quad \psi\,(z,\, x) = 0, \quad \chi\,(x,\, y) = 0,$$

welche die Gleichungen der Projectionen der Curve auf die drei Coordinatenebenen sind. Jede einzelne der Gleichungen repräsentiert den Cylinder (Band I, Artikel 22), welcher durch die Curve geht und dessen Erzeugende derjenigen unter den Coordinatenachsen parallel ist, welche nicht zu ihrer Ebene gehört. Die Theorie der Elimination zeigt, dass die Gleichung $\varphi\,(y, z) = 0$, welche durch Elimination von x zwischen den gegebenen Gleichungen erhalten wird, vom mn^{ten} Grade ist. Es ist aber auch geometrisch evident, dass ein über einer Curve n^{ter} Ordnung stehender Kegel oder Cylinder*) vom n^{ten} Grade ist; denn wenn wir irgend eine Ebene durch den Scheitel des Kegels oder parallel den Erzeugenden des Cylinders legen, so schneidet dieselbe den Kegel in n Linien, nämlich den geraden Verbindungslinien des Scheitels mit den n Punkten, in welchen sie die Curve schneidet.

55. Wenn umgekehrt eine Curve im Raume gegeben ist und durch Gleichungen repräsentiert werden soll, so haben wir nur die drei ebenen Curven durch solche auszudrücken, welche die Projectionen der Curve auf die drei Coordinatenebenen sind; dann repräsentieren irgend zwei dieser Gleichungen

$$\varphi\,(y,\,z) = 0,\quad \psi\,(z,\,x) = 0,\quad \chi\,(x,\,y) = 0$$

die gegebene Curve. Sie bilden jedoch gewöhnlich nicht das einfachste System von Gleichungen, durch welches dieselbe ausdrückbar ist; denn wenn r die Ordnung der Curve bezeichnet, so ist auch jeder der projicierenden Cylinder vom r^{ten} Grade und irgend zwei derselben durchschneiden sich daher in einer Curve von der Ordnung r^2, d. h. nicht allein in der Curve r^{ter} Ordnung, welche sie bestimmen sollen, sondern ausserdem noch in einer fremden Curve von der Ordnung $(r^2 - r)$. Und wenn wir ein System von Gleichungen verlangen, welches nicht nur für die Punkte der gegebenen Curve erfüllt ist, sondern auch alle ihr nicht angehörigen Punkte ausschliesst, so müssen wir das System der drei Projectionen festhalten; denn die Projection der erwähnten fremden Curve, in welcher sich die beiden ersten projicierenden Cylinder unserer Curve schneiden, auf die dritte der Coordinatenebenen wird von der entsprechenden Projection der gegebenen Curve verschieden sein.

Es kann möglich sein, durch die Combination der Gleichungen der drei Projectionen zu zwei Gleichungen

$$U = 0,\quad V = 0$$

zu gelangen, welche durch die Punkte der Curve und durch keine anderen Punkte erfüllt werden; aber es ist nicht im Allgemeinen wahr, dass jede Curve im Raum der vollständige Durchschnitt

---

*) Ein Cylinder ist offenbar der Grenzfall eines Kegels, dessen Spitze in unendlicher Entfernung gelegen ist.

zweier Oberflächen ist. Betrachten wir, um das einfachste Beispiel zu wählen, zwei Oberflächen zweiten Grades, welche eine gerade Linie gemein haben, z. E. zwei Kegel mit einer gemeinschaftlichen Erzeugenden. Der Durchschnitt dieser Flächen, der im Allgemeinen von der 4ten Ordnung ist, muss aus dieser gemeinschaftlichen geraden Linie und einer Curve dritter Ordnung bestehen. Und da die einzigen ganzen Factoren von 3 die Drei und die Eins sind, so kann eine Curve dritter Ordnung nur dann der vollständige Durchschnitt zweier Flächen sein, wenn die eine von ihnen eine Ebene ist. Die von uns betrachtete Curve dritter Ordnung kann dagegen keine ebene Curve*) sein, weil sonst eine in ihrer Ebene willkürlich gezogene gerade Linie sie in drei Punkten schneiden müsste, während doch eine solche jede der beiden Oberflächen nur in zwei Punkten schneiden, und somit auch mit ihrer Durchdringungscurve nicht drei Punkte gemein haben kann.

56. Wenn eine Curve der vollständige oder theilweise Durchschnitt zweier Flächen U, V ist, so ist die Tangente dieser Curve in irgend einem ihrer Punkte die Durchschnittslinie der Tangentenebenen beider Flächen in demselben Punkte und somit durch die Gleichungen

$$x\frac{dU'}{dx'}+y\frac{dU'}{dy'}+z\frac{dU'}{dz'}+w\frac{dU'}{dw'}=0,$$
$$x\frac{dV'}{dx'}+y\frac{dV'}{dy'}+z\frac{dV'}{dz'}+w\frac{dV'}{dw'}=0$$

repräsentiert. Die Richtungscosinus der Tangente sind offenbar den Grössen

$$U_2U_3'-U_2'U_3,\quad U_3U_1'-U_3'U_1,\quad U_1U_2'-U_1'U_2$$

proportional, in welchen U_1, U_2, etc. die ersten Differentialcoefficienten vorstellen.

Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn die beiden Flächen sich berühren; in diesem Falle ist der Berührungspunkt ein Doppel-

*) Curven im Raum, welche nicht zugleich ebene Curven sind, werden gewöhnlich als „Curven von doppelter Krümmung“ bezeichnet. Wir werden im Folgenden oft das Wort „Curve“ zur Bezeichnung einer Curve im Raum gebrauchen, welche im Allgemeinen nicht eben ist; wir fügen etwa das Beiwort „gewunden“ hinzu, wenn wir die Curve ausdrücklich als eine nicht ebene hervorzuheben wünschen.

punkt in der Durchdringungscurve, wie diess Alles im ersten Bande dieses Werkes (Artikel 128) auseinander gesetzt worden ist.

Als ein specieller Fall des Vorigen ergiebt sich, dass die Projection der Tangente einer Curve die entsprechende Tangente ihrer Projection ist; wenn also die Curve als Durchschnitt der Cylinder

$$y = \varphi(z), \quad x = \psi(z)$$

gegeben ist, so sind die Gleichungen der Tangente

$$y - y' = \frac{d\varphi}{dz}(z - z'), \quad x - x' = \frac{d\psi}{dz}(z - z').$$

Man kann das Nämliche auch aussprechen wie folgt: Betrachten wir irgend ein Element der Curve ds, welches auf die Coordinatenachsen in dx, dy, dz projiciert ist, so sind die Richtungscosinus des Elements

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$$

und die Gleichungen der Tangente

$$\frac{x - x'}{\frac{dx}{ds}} = \frac{y - y'}{\frac{dy}{ds}} = \frac{z - z'}{\frac{dz}{ds}}.$$

Da die Summe der Quadrate der drei Cosinus der Einheit gleich ist, so hat man

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Indem wir die Theorie der Normalen, der Krümmungsradien, etc., überhaupt Alles das, was die Betrachtung von metrischen Verhältnissen, insbesondere von Winkeln einschliesst, einem späteren Abschnitt vorbehalten, betrachten wir in dem gegenwärtigen nur diejenigen Eigenschaften der Curven, welche als die descriptiven oder die projectivischen Eigenschaften derselben bezeichnet werden können, d. i. diejenigen, welche sich auf die Punkte, Tangenten, Osculationsebenen, die allgemeinen Singularitäten, die Bestimmungsstücke und deren Relationen mit den übrigen und die Classification der Curven beziehen.

57. Die Theorie der Curven ist zu einem grossen Theile mit der Theorie der developpablen Flächen identisch, und es ist deshalb nothwendig für sie, zugleich in diese letztere Theorie weiter einzugehen. Im Artikel 119 des ersten Bandes ist gezeigt

worden, dass einer Reihe von Punkten, welche eine Curve bilden, nach dem Gesetze der Reciprocität eine Reihe von Ebenen entspricht, welche eine abwickelbare Fläche umhüllen.

Die Punkte der Curve, als ein System von Punkten 1, 2, 3, etc. betrachtet, geben einem System gerader Linien, nämlich den Linien 12, 23, 34, etc., den Ursprung, deren jede einen Punkt der Curve mit dem nächstfolgenden derselben verbindet und welche daher die Tangenten der Curve sind; die Punkte der Curve bestimmen auch ein System von Ebenen, nämlich die Ebenen 123, 234, etc., deren jede drei auf einander folgende Punkte des Systems enthält und welche daher die osculierenden (oder Schmiegungs-) Ebenen der Curve sind.

Von der Gesammtheit der geraden Linien des Systems wird eine Fläche gebildet, deren Gleichung gefunden werden kann aus der gegebenen Gleichung der Curve. Denn die beiden Gleichungen der Tangente der Curve enthalten die drei Coordinaten x', y', z' des Berührungspunktes, welche als selbst durch zwei Relationen verbunden auf einen einzigen Parameter reducierbar sind; durch die Elimination dieses Parameters aus den beiden Gleichungen der Tangente erhält man die Gleichung der abwickelbaren Fläche.

In anderen Worten, man muss zwischen den zwei Gleichungen der Tangente und denen der Curve die Grössen x', y', z' eliminieren, um die Gleichung der abwickelbaren Tangentenfläche zu erhalten.

Wir haben a. a. O. gesagt, dass die durch die Tangenten erzeugte Fläche eine abwickelbare Fläche sei, weil jede zwei auf einander folgende Lagen der erzeugenden Linie sich durchschneiden. Der Name, durch welchen diese Art von Flächen bezeichnet wird, ist von der Eigenschaft abgeleitet, nach welcher sie ohne Uebereinanderlagerung oder Zerreissung ungefaltet in eine Ebene ausgebreitet werden können. Denken wir eine Reihe von Linien Aa, Bb, Cc, Dd, etc. (für den Augenblick in endlichen Entfernungen von einander), deren jede die darauf folgende, in den Punkten a, b, c, etc. respective durchschneidet, und betrachten wir die Vereinigung der Flächenstreifen AaB, BbC, CcD, etc. als eine Fläche, so ist es offenbar, dass eine solche Fläche in eine Ebene entwickelt werden kann; denn man vollzieht diess, indem man die Fläche AaB um aB als feste Achse dreht, bis sie eine Fortsetzung von BbC bildet; indem man darauf die beiden nun in einer Ebene vereinigten Elemente um cC dreht, bis sie in die Verlängerung des nächsten Flächenstreifens fallen, u. s. w. Wenn in der Grenze die Linien Aa, Bb, etc. einander unendlich nahe sind, so bildet ihre Vereinigung eine developpable Fläche, welche also nach den eben gemachten Ueberlegungen in eine Ebene ausgebreitet werden kann.

Diejenigen Beispiele von abwickelbaren Flächen, mit denen der Leser am meisten vertraut ist, nämlich der Kegel und der Cylinder, dienen auch am einfachsten zur Erläuterung dieser Verhältnisse. Es ist ohne Schwierigkeit, ein Blatt Papier in die Form irgend einer solchen Oberfläche zu falten und es dann wieder in eine Ebene auszubreiten. Aber man sieht leicht, dass es unmöglich ist, ein Blatt Papier in die Form einer Kugelfläche, als einer nicht abwickelbaren Fläche, zu bringen oder umgekehrt, die beiden Theile einer zerschnittenen Kugelfläche in eine Ebene flach auszubreiten.

58. Die zwei auf einander folgende erzeugende Linien enthaltende Ebene AaB ist offenbar beim Grenzübergang zu unendlich naher Nachbarschaft eine **Tangentenebene der abwickelbaren Fläche.** Wir können die Fläche selbst als durch die Bewegung der Ebene AaB nach einem gewissen Gesetze erzeugt denken, in der Art nämlich, dass die Enveloppe dieser Ebene in allen ihren Lagen die abwickelbare Fläche ist. Wenn wir die abwickelbare Fläche als durch die Tangenten einer räumlichen Curve erzeugt denken, so sind offenbar die Gleichungen der Tangente in einem Punkt (x', y', z') Functionen dieser Coordinaten, und die Gleichung der Ebene, welche eine Tangente und die auf sie nächstfolgende enthält, mit anderen Worten die Gleichung der Osculationsebene im Punkte (x', y', z') ist auch eine Function dieser Coordinaten. Weil aber x', y', z' durch zwei Relationen, nämlich die Gleichungen der Curve, verbunden sind, so können wir irgend zwei derselben eliminieren und gelangen so zu dem Ergebniss, **dass eine abwickelbare Fläche die Enveloppe einer Ebene ist, deren Gleichung einen einzigen veränderlichen Parameter enthält.**

Um diese Ausdrucksweise vollständiger zu verdeutlichen, wollen wir eine wichtige Differenz näher entwickeln, welche zwischen den beiden Fällen stattfindet, wenn eine **ebene Curve als die**

Enveloppe einer beweglichen geraden Linie, und wenn eine Fläche im Allgemeinen als die Enveloppe einer beweglichen Ebene betrachtet wird.

59. Die Gleichung der Tangente einer ebenen Curve ist eine Function der Coordinaten des Berührungspunktes; und da diese beiden Coordinaten durch die Gleichung der Curve verbunden sind, so können wir entweder eine von ihnen eliminieren, oder auch beide in Gliedern einer dritten Veränderlichen ausdrücken, so dass wir die Gleichung der Tangente als Function eines einzigen veränderlichen Parameters erhalten. Das umgekehrte Problem, die Enveloppe einer geraden Linie zu bestimmen, deren Gleichung einen veränderlichen Parameter einschliesst, wird durch folgende Betrachtungen gelöst.

Wenn $u = 0$ die Gleichung einer geradlinigen Tangente bezeichnet, so ist u in Bezug auf x und y vom ersten Grade und die Constanten sind Functionen eines Parameters α. Dann entspricht dem Werthe des Parameters $(\alpha + h)$ die gerade Linie

$$u + \frac{du}{d\alpha}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{d\alpha^2}\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \text{etc.} = 0,$$

und der Durchschnittspunkt beider Geraden ist durch die Gleichungen

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} + \frac{h}{1 \cdot 2}\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \text{etc.} = 0$$

bestimmt. Beim Uebergang zur Grenze ist daher der Durchschnittspunkt einer Geraden mit der ihr nächst benachbarten, oder in anderen Worten der Berührungspunkt derselben mit der Enveloppe durch die Gleichungen

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 0$$

gegeben. Und wenn man aus diesen beiden Gleichungen die Grösse α eliminiert, so erhält man die Gleichung für den Ort der Durchschnittspunkte der geraden Linien des Systems mit den jedesmaligen nächstfolgenden, d. h. die Gleichung der Enveloppe aller geraden Linien des Systems. Man beweist leicht, dass das Resultat dieser Elimination eine Curve repräsentiert, für welche $u = 0$ eine Tangente ist; denn wenn in u der Parameter α durch seinen Werth in Function von x und y ersetzt wird, wie er aus der Gleichung $\frac{du}{d\alpha} = 0$ hervorgeht, so haben wir

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}$$

und

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{du}{dy}\right) + \frac{du}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy},$$

wo $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$ die unter der Voraussetzung eines constanten α gebildeten Differentiale von u sind; und wegen $\frac{du}{d\alpha} = 0$ ist dann offenbar, dass $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ von den unter Voraussetzung eines constanten α gebildeten Differentialen nicht verschieden sind. Daraus folgt aber, dass die fragliche Resultante eine von $u = 0$ berührte Curve bezeichnet.

Wenn verlangt wäre, von einem beliebigen Punkte aus eine Tangente dieser Curve zu ziehen, so haben wir nur die Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung $u = 0$ einzusetzen, und α so zu bestimmen, dass es der entstehenden Bedingungsgleichung genügt. Diese Aufgabe hat eine bestimmte Zahl von Auflösungen, welche offenbar die Zahl der Tangenten bestimmt, die von einem beliebigen Punkte an die Curve gezogen werden können, d. h. die Klasse der Curve. So ist z. B. die Enveloppe der geraden Linie

$$a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 3c\alpha + d = 0,$$

in welcher Gleichung a, b, c, d lineare Functionen der Coordinaten sind, eine Curve der dritten Klasse.

60. In derselben Art wollen wir nun mit einer Fläche verfahren.

Die Gleichung der Tangentenebene einer Fläche ist eine Function der drei Coordinaten und enthält somit in ihrer einfachsten Form, weil jene durch eine einzige Relation, nämlich die Gleichung der Fläche selbst verbunden sind, zwei veränderliche Parameter.

Das umgekehrte Problem verlangt die Bestimmung der Enveloppe einer Ebene, deren Gleichung $u = 0$ zwei veränderliche Parameter α, β enthält. Die Gleichung einer anderen Ebene, die den Parameterwerthen $(\alpha + h)$, $(\beta + k)$ entspricht, ist sodann

$$u + \left(h\frac{du}{d\alpha} + k\frac{du}{d\beta}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(h^2\frac{d^2u}{d\alpha^2} + \text{etc.}\right) = 0.$$

Beim Uebergang zur Grenze bewahren h und k, obzwar unendlich klein werdend, ein endliches Verhältniss zu einander $k = \lambda h$. Wir sehen also, dass der Durchschnitt irgend einer Ebene mit einer darauf folgenden nicht eine bestimmte gerade Linie ist, sondern irgend eine der durch die Gleichungen

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} + \lambda \frac{du}{d\beta} = 0,$$

als in welchen λ einen unbestimmten Werth hat, ausgedrückten Linien.

Wir sehen auch, dass alle auf $u = 0$ folgenden Ebenen durch denjenigen Punkt gehen, den die coexistierenden Gleichungen

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 0, \quad \frac{du}{d\beta} = 0$$

bestimmen.

Wir können zwischen diesen drei Gleichungen die Parameter α, β eliminieren und finden so den Ausdruck des Ortes, welchem alle die Punkte angehören, in welchen eine Ebene des Systems durch die Reihe der darauf folgenden Ebenen geschnitten wird. Es wird genau wie im letzten Artikel bewiesen, dass die durch jene Resultante dargestellte Fläche von $u = 0$ berührt ist. Wird sodann verlangt, eine Tangentenebene zu dieser Fläche durch irgend einen Punkt zu legen, so haben wir nur die Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung $u = 0$ zu substituieren und erkennen, dass die entspringende Gleichung, weil sie zwei unbestimmte α, β enthält, auf unendlich viele Arten erfüllt werden kann; oder dass, wie wir wissen, durch einen gegebenen Punkt unendlich viele Tangentenebenen an eine Fläche gelegt werden können, welche alle einen Kegel umhüllen.

Setzen wir hingegen β als constant oder als eine bestimmte Function von α voraus, so enthält die Gleichung der Tangentenebene in ihrer einfachsten Form nur einen unbestimmten Parameter, und die Enveloppe der besonderen Tangentenebenen, welche der angenommenen Bedingung genügen, ist eine abwickelbare Fläche.

Auf demselben Wege erkennen wir sehr deutlich die Analogie zwischen einer abwickelbaren Fläche und einer gewundenen Curve. Wenn eine Fläche als Ort einer Zahl von Punkten betrachtet wird, welche durch eine gegebene Relation verbunden sind, so erhalten wir durch Hinzufügung einer zweiten die Punkte verbindenden Relation eine auf der gegebenen Fläche verzeichnete Curve. Und wenn wir eine Fläche als Enveloppe einer Reihe von Ebenen betrachten, welche durch eine einzige Relation verbunden sind, so erhalten wir durch Hinzufügung einer zweiten die Ebenen verbindenden Relation eine abwickelbare Fläche, die die gegebene Fläche umhüllt.

Diese zweite Bedingung kann darin bestehen, dass die bewegliche Ebene zugleich auch eine zweite feste Fläche stets berühren soll.

Dass man dann an Stelle der beiden Flächen zwei ebene Curven — Directrixen, Querschnitte der abwickelbaren Fläche — setzen kann, leuchtet ein; durch jede Tangente der einen Curve ist die Lage der sie enthaltenden Ebenen bestimmt, die zugleich eine Tangente der anderen Curve enthalten. Das Problem der Beleuchtung einer Oberfläche durch eine andere in der darstellenden Geometrie veranschaulicht diese Entstehung; die gemeinschaftlich umgeschriebene Abwickelungsfläche bestimmt die Curven auf der beleuchteten Fläche, welche die Regionen der vollen Beleuchtung, des Halbschattens und des Vollschattens von einander trennen.

61. Sehen wir nun, welche Eigenschaften abwickelbarer Flächen aus ihrer Betrachtung als Enveloppen von Ebenen abgeleitet werden können, deren Gleichungen einen einzigen veränderlichen Parameter enthalten.

Es erhellt zuerst, dass durch einen beliebig gewählten Punkt nicht wie vorher eine Unendlichkeit von Ebenen des Systems hindurchgehen, sondern nur eine bestimmte Zahl solcher Ebenen. So ist es für die Enveloppe von

$$a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 3c\alpha + d = 0,$$

wo a, b, c, d Ebenen bestimmen, offenbar, dass nur je drei Ebenen des Systems durch einen gegebenen Punkt gehen, weil die Substitution der Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung zur Bestimmung von α eine cubische Gleichung liefert. Ferner wird jede Ebene des Systems von der nächstbenachbarten in einer bestimmten geraden Linie geschnitten, nämlich in der durch

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 0$$

bestimmten; wenn wir α zwischen diesen beiden Gleichungen eliminieren, so erhalten wir die von allen solchen Durchschnittslinien erzeugte Fläche, welche die verlangte Abwickelungsfläche ist.

Es wird endlich wie im Artikel 59 bewiesen, dass die Ebene $u = 0$ die abwickelbare Fläche in jedem den Gleichungen

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 0$$

genügenden Punkte berührt, d. h. längs der ganzen u entsprechenden geraden Linie des Systems. Im ersten Bande dieses Werkes Artikel 107 ward bewiesen, dass im Allgemeinen, wenn eine Fläche eine gerade Linie enthält, die Tangentenebene in jedem anderen Punkte der geraden Linie eine andere ist. In dem Falle der abwickelbaren Flächen ist hingegen die Tangentenebene in allen Punkten einer ihrer Geraden dieselbe. Ist x der Ausdruck der Ebene, welche längs der Linie xy die Fläche berührt, so kann ihre Gleichung in die Form

$$x\varphi + y^2\psi = 0$$

gebracht werden.*) (Siehe Artikel 107 des ersten Bandes.)

62. Betrachten wir nun drei auf einander folgende Ebenen des Systems, so ist, wie vorher gewiss, dass ihr Durchschnittspunkt den Gleichungen

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2u}{d\alpha^2} = 0$$

---

*) Es erscheint unnöthig, des Weiteren auf die Theorie der Enveloppen im Allgemeinen einzugehen, weil das im Text Gesagte gleichmässig gilt, wenn u, anstatt eine Ebene zu repräsentieren, eine Fläche darstellt, deren Gleichung einen veränderlichen Parameter einschliesst. Monge hat die Curve $u = 0, \frac{du}{dx} = 0$, in welcher irgend eine Fläche des Systems durch die nächstfolgende durchschnitten wird, die Characteristik der Enveloppe genannt. Denn die Natur dieser Curve hängt nur von der Art ab, in welcher die Veränderlichen x, y, z in die Function u eingehen, nicht aber von der Art der Abhängigkeit, in welcher die Constanten zum Parameter stehen. Wenn also u eine Ebene repräsentiert, so ist die Characteristik stets eine gerade Linie und die Enveloppe ist der Ort eines Systems von geraden Linien. Wenn u eine Kugel darstellt, so ist die Characteristik als Durchschnitt zweier auf einander folgender Kugeln ein Kreis und die Enveloppe ist der Ort eines Systems von Kreisen. Enveloppen können also allgemein in Familien eingetheilt werden, je nach der Natur der Characteristik.

zugleich genügt. Für jeden Werth von α wird so der Punkt bestimmt, in welchem eine gerade Linie des Systems von der nächstfolgenden geschnitten wird; der Ausdruck des Ortes dieser Punkte wird erhalten, indem man α zwischen diesen Gleichungen eliminiert. Wir erhalten so zwei Gleichungen in x, y, z, deren eine die Gleichung der abwickelbaren Fläche ist. Durch beide Gleichungen wird eine auf der abwickelbaren Fläche verzeichnete Curve repräsentiert, und man sieht so, dass man von der Definition einer abwickelbaren Fläche als der Enveloppe einer beweglichen Ebene unmittelbar zu ihrer Erzeugung als Ort der Tangenten einer Curve übergeführt wird, denn die auf einander folgenden Durchschnitte der Ebenen bilden eine Reihe von geraden Linien und die Durchschnitte der auf einander folgenden Linien eine Reihe von Punkten, welche eine Curve bestimmen, deren Tangenten jene Linien sind. Wir werden zeigen, dass diese Curve eine Cuspidal- oder Rückkehrkante*) der Fläche ist.

63. Vier auf einander folgende Ebenen des Systems schneiden sich nur dann in einem Punkt, wenn die vier Bedingungsgleichungen

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2u}{d\alpha^2} = 0, \quad \frac{d^3u}{d\alpha^3} = 0$$

gleichzeitig erfüllt sind. Es ist im Allgemeinen möglich, gewisse Werthe von α zu finden, welche ihnen entsprechen. Denn wenn wir x, y, z eliminieren, so erhalten wir die Bedingung, unter welcher die vier Ebenen, deren Gleichungen so eben geschrieben worden sind, sich in einem Punkte schneiden; diese Bedingung ist eine Function von α, und indem man sie mit Null vergleicht,

---

*) Monge hat sie die „arête de rebroussement" der abwickelbaren Fläche genannt. Es existiert in jeder Enveloppe eine ähnliche Curve, nämlich der Ort der Punkte, in welchen jede Characteristik von der ihr nächst benachbarten geschnitten wird. Der auf der einen Seite dieser Curve liegende Theil der Characteristik erzeugt den einen Mantel der Enveloppe, der auf der anderen Seite liegende den anderen Mantel. Beide Mäntel berühren sich längs dieser Curve, welche ihre gemeinschaftliche Grenze ist und eine Cuspidalkante der Enveloppe heissen muss. So bilden in dem sehr einfachen Falle eines Kegels die erzeugenden Linien auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels entgegengesetzte Mäntel des Kegels und die Cuspidalkante erscheint auf den einzigen Punkt des Scheitels reduciert.

erhält man im Allgemeinen eine bestimmte Zahl von Werthen von α, für welche die Bedingung erfüllt ist. Es giebt somit im Allgemeinen eine gewisse Zahl von Punkten des Systems, durch welche je vier Ebenen des Systems hindurch gehen; oder mit anderen Worten, eine gewisse Zahl von Punkten, in deren jedem drei auf einander folgende Linien des Systems sich durchschneiden. Wir werden dieselben, wie in der Theorie der höheren ebenen Curven geschieht, die stationären Punkte des Systems nennen, weil in dem besprochenen Falle der als Durchschnitt zweier auf einander folgender Linien bestimmte Punkt mit dem als Durchschnitt des nächstfolgenden Paares von Linien bestimmten Punkt zusammen fällt.

Es entspricht dem Vorigen nach dem Gesetze der Reciprocität, dass es im Allgemeinen eine gewisse Anzahl von Ebenen des Systems giebt, welche stationäre Ebenen genannt werden dürfen, als Ebenen, welche vier auf einander folgende Punkte des Systems enthalten, und für welche also zwei auf einander folgende Ebenen, wie 123, 234 zusammen fallen;*) man nennt sie auch die Wendungsberührebenen der Curve.

64. Wir zeigen nun, wie nach Plücker's die gewöhnlichen Singularitäten der ebenen Curven verbindenden Gleichungen**)

---

*) Man vergleiche die klare und elegante Darstellung der Grundlagen einer allgemeinen Theorie der gewundenen Curven als Punktreihen nach dem System der tetraedrischen Plancoordinaten in dem Werke von Möbius· „Der barycentrische Calcul". 1827. (p. 114—124.)

**) Diese Gleichungen sind die folgenden: Ist μ die Ordnung einer Curve, ν ihre Klasse, δ die Zahl ihrer Doppelpunkte, τ die ihrer Doppeltangenten, $\varkappa$ die Zahl ihrer Cuspidal- oder Rückkehrpunkte, ι die ihrer Inflexionspunkte, so ist

$$\nu = \mu(\mu-1) - 2\delta - 3\varkappa; \quad \mu = \nu(\nu-1) - 2\tau - 3\iota;$$
$$\iota = 3\mu(\mu-2) - 6\delta - 8\varkappa; \quad \varkappa = 3\nu(\nu-2) - 6\tau - 8\iota.$$

Also auch

$$\iota - \varkappa = 3(\nu-\mu), \quad 2(\tau-\delta) = (\nu-\mu)(\nu+\mu-9).$$

Oder statt der Letzteren die Plücker'schen Gleichungen

$$\tau = \tfrac{1}{2}\mu(\mu-2)(\mu^2-9) - (2\delta+3\varkappa)\left\{\mu(\mu-1)-6\right\}$$
$$+ 2\delta(\delta-1) + \tfrac{9}{2}\varkappa(\varkappa-1) + 6\delta\varkappa,$$
$$\delta = \tfrac{1}{2}\nu(\nu-2)(\nu^2-9) - (2\tau+3\iota)\left\{\nu(\nu-1)-6\right\}$$
$$+ 2\tau(\tau-1) + \tfrac{9}{2}\iota(\iota-1) + 6\tau\iota.$$

Cayley*) Gleichungen abgeleitet hat, welche zwischen den Zahlen der gewöhnlichen Singularitäten der abwickelbaren Flächen bestehen.

Wir zählen zuerst diese Singularitäten auf. Wir sprechen von „Punkten des Systems", von „Linien des Systems" und von „Ebenen des Systems" in dem Sinne, welcher im Artikel 119 des ersten Bandes gegeben ist.

Sei m die Anzahl der Punkte des Systems, welche in irgend einer Ebene liegen, oder in anderen Worten, die Ordnung des Systems und der Curve, welche die abwickelbare Fläche erzeugt.

Sei n die Zahl der Ebenen des Systems, welche durch einen beliebigen Punkt gelegt sind, eine Zahl, von welcher im Artikel 61 bewiesen ist, dass sie bestimmt sein muss; wir werden diese Zahl die Klasse des Systems nennen.

Sei ferner r die Anzahl von Linien des Systems, welche eine willkürlich gewählte gerade Linie schneiden. Wenn wir die Bedingung bilden, unter welcher die Gerade des Systems

$$u = 0, \quad \frac{du}{d\alpha} = 0$$

und irgend eine angenommene gerade Linie sich schneiden, so ist das Resultat eine Function von α, welche mit Null verglichen, eine bestimmte Zahl von Werthen des α liefert, die jener Bedingung entsprechen. Die Zahl der Auflösungen dieser Gleichung ist r. Wir werden sie als den Rang des Systems bezeichnen und es wird sich ergeben, dass alle anderen Singularitäten des Systems sich vermittelst der drei eben aufgezählten Charaktere bestimmen lassen.

Sei α die Zahl der stationären Ebenen und β die Zahl der stationären Punkte. (Artikel 63.)

Zwei nicht auf einander folgende Linien des Systems können sich durchschneiden; wenn diess geschieht, so soll der Schnittpunkt als ein „Punkt in zwei Linien" und die Ebene dieser Linien als eine „Ebene durch zwei Linien" bezeichnet werden. Sei x die Zahl der „Punkte in zwei Linien", welche in einer gegebenen Ebene liegen und y die Zahl der „Ebenen durch zwei Linien", welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

In derselben Art wollen wir die Verbindungslinie irgend zweier

*) Siehe „Liouville's Journal", Vol. X, p. 245; „Cambridge and Dublin Mathematical Journal", Vol. V, p. 18.

Punkte des Systems eine „Linie durch zwei Punkte“ und den Durchschnitt irgend zweier Ebenen des Systems eine „Linie in zwei Ebenen“ nennen. Sei g die Zahl der „Linien in zwei Ebenen“, welche in einer gegebenen Ebene liegen und h die Zahl der „Linien durch zwei Punkte“, welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

Die abwickelbaren Flächen besitzen andere Singularitäten, welche in einem folgenden Kapitel bestimmt werden sollen, aber es sind die aufgezählten, welche Plücker's Gleichungen zu bestimmen erlauben.

65. Betrachten wir nun den Durchschnitt der abwickelbaren Fläche mit irgend einer Ebene. Es ist offenbar, dass die Punkte der Durchdringungscurve die Spuren oder Durchgangspunkte der „Linien des Systems“ in ihrer Ebene und die Tangenten der Schnittcurve die Spuren der „Ebenen des Systems“ in derselben sind. Die Ordnung des Schnittes ist daher r, weil sie die Zahl der Punkte bezeichnet, welche eine willkürliche Gerade in der Ebene des Schnittes mit demselben bestimmt, und solche Punkte alle diejenigen sind, in denen die gegebene Gerade eine „Linie des Systems“ schneidet.

Die Klasse der Schnittcurve ist offenbar durch n bezeichnet; denn die Zahl der durch einen willkürlichen Punkt ihrer Ebene gehenden Tangenten der Schnittcurve ist nothwendig dieselbe, wie die Zahl der „Ebenen des Systems“, welche denselben Punkt enthalten. Ein Doppelpunkt der Schnittcurve entspringt überall da, wo zwei Linien des Systems die Schnittebene in demselben Punkte schneiden; die Zahl solcher Punkte ist nach den vorigen Bestimmungen x. Die Tangenten der Schnittcurve in einem solchen Doppelpunkt sind im Allgemeinen verschieden; sie sind es so lange, als die zwei Ebenen des Systems, welche den beiden sich in ihm schneidenden Linien des Systems correspondieren, selbst verschieden sind.

Die Zahl der Doppeltangenten der Schnittcurve ist in gleicher Weise g, weil eine Doppeltangente überall da entsteht, wo zwei Ebenen des Systems die Schnittebene in derselben geraden Linie schneiden.

Die m Punkte des Systems, welche der Schnittebene angehören, sind Cuspidalpunkte der Schnittcurve. Denn sie sind Doppelpunkte, weil jeder von ihnen der Durchschnitt zweier „Linien des Systems“ ist, und die Tangentenebenen in diesen Punkten fallen zusammen, weil die zwei auf einander folgenden Linien, die sich in einem der Punkte m durchschneiden, in derselben Ebene des Systems liegen. Diess beweist, was früher schon ausgesprochen ist, dass die Curve, deren Tangenten die abwickelbare Fläche erzeugen, eine Cuspidal- oder Rückkehrkante dieser Letzteren ist; denn jede Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, welche die Punkte zu Cuspidal- oder Rückkehrpunkten hat, in denen ihre Ebene jene Curve schneidet.

Wir erhalten endlich einen Inflexionspunkt oder eine stationäre Tangente überall da, wo zwei auf einander folgende Ebenen des Systems zusammen fallen; die Zahl der Inflexionspunkte ist daher α.

Wir haben daher in die Plücker'schen Gleichungen der Note zu Artikel 64 die folgenden Substitutionen zu machen:

$$\mu = r, \quad \nu = n, \quad \delta = x, \quad \tau = g, \quad \varkappa = m, \quad \iota = \alpha,$$

und erhalten somit

$$n = r\,(r-1) - 2x - 3m; \quad r = n\,(n-1) - 2g - 3\alpha;$$
$$\alpha = 3r\,(r-2) - 6x - 8m; \quad m = 3n\,(n-2) - 6g - 8\alpha;$$

oder auch

$$m - \alpha = 3\,(r-n) \quad ; \quad 2\,(x-g) = (r-n)\,(r+n-9);$$

und

$$g = \tfrac{1}{2}\,r\,(r-2)\,(r^2-9) - (2x+3m)\,\{r\,(r-1)-6\} + 2x\,(x-1)$$
$$+ \tfrac{9}{2}\,m\,(m-1) + 6xm,$$
$$x = \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,(n^2-9) - (2g+3\alpha)\,\{n\,(n-1)-6\} + 2g\,(g-1)$$
$$+ \tfrac{9}{2}\,\alpha\,(\alpha-1) + 6g\alpha.$$

66. Ein anderes System von Gleichungen wird gefunden, indem man den Kegel betrachtet, dessen Scheitel ein willkürlich gewählter Punkt ist und der über der gegebenen Curve steht, oder dieselbe zur Leitcurve hat. Man erkennt sofort aus der Betrachtung eines beliebigen ebenen Schnittes eines solchen Kegels, dass die nämlichen Gleichungen die Zahlen der Doppelkanten, Doppeltangentenebenen etc. der Kegel verbinden, welche zwischen den Zahlen der Doppelpunkte, Doppeltangenten etc. der ebenen Curven stattfinden.

Die Kanten des Kegels, welchen wir jetzt betrachten, sind die geraden Verbindungslinien seines Scheitels mit allen Punkten des Systems, und die Tangentenebenen des Kegels sind die von den „Linien des Systems" mit demselben bestimmten Ebenen; denn die Ebene, welche zwei auf einander folgende Kanten des Kegels enthält, geht nothwendig durch zwei auf einander folgende „Punkte des Systems".

Die Ordnung des Kegels ist die nämliche, wie der Grad der Curve und ist daher $= m$.

Die Klasse des Kegels ist die Zahl der Tangentenebenen, welche durch eine beliebige den Scheitel enthaltende Gerade an den Kegel gelegt werden können; da aber jede Tangentenebene eine „Linie des Systems" enthält, so existieren ebenso viele Tangentenebenen unseres Kegels durch die gedachte willkürliche Gerade, als es „Linien des Systems" giebt, welche dieselbe schneiden. Die gesuchte Zahl derselben ist daher r.*)

Eine Doppelkante des Kegels entsteht, wenn dieselbe Kante durch zwei Punkte des Systems geht, oder es ist $\delta = h$. Die Tangentenebenen längs dieser Kante sind die Ebenen, welche der Scheitel des Kegels mit den „Linien des Systems" bestimmt, welche jedem dieser Punkte entsprechen.

Eine Doppeltangentenebene des Kegels entsteht, wenn dieselbe Ebene durch den Scheitel zwei „Linien des Systems" enthält, oder $\tau = y$. Eine stationäre oder eine Cuspidalkante des Kegels entspringt aus der Existenz eines stationären Punktes im System, d. i. $\varkappa = \beta$.

Endlich existiert eine stationäre Tangentenebene, wenn eine Ebene, welche zwei auf einander folgende Linien des Systems enthält, durch den Scheitel des Kegels geht, d. i. $\iota = n$.

Wir haben also

$$\mu = m, \quad \nu = r, \quad \delta = h, \quad \tau = y, \quad \varkappa = \beta, \quad \iota = n$$

und erhalten somit aus den Plücker'schen Formeln die Gleichungen

---

*) Man erkennt leicht, dass die Klasse dieses Kegels die nämliche ist, wie die Ordnung der abwickelbaren Fläche, welche den Punkten des gegebenen Systems nach dem Gesetz der Reciprocität entspricht. Die Ordnung der durch die Tangenten einer Curve erzeugten abwickelbaren Fläche ist somit dieselbe, wie die Ordnung der abwickelbaren Fläche, welche die Reciproke der Punkte der Curve ist. (Siehe Note des Artikel 161 im ersten Bande.)

$$r = m(m-1) - 2h - 3\beta; \quad m = r(r-1) - 2y - 3n;$$
$$n = 3m(m-2) - 6h - 8\beta; \quad \beta = 3r(r-2) - 6y - 8n;$$

also auch

$$(n-\beta) = 3(r-m) \quad \text{und} \quad 2(y-h) = (r-m)(r+m-9);$$

und

$$y = \tfrac{1}{2} m(m-2)(m^2-9) - (2h+3\beta)\{m(m-1)-6\}$$
$$+ 2h(h-1) + \tfrac{9}{2}\beta(\beta-1) + 6h\beta;$$
$$h = \tfrac{1}{2} r(r-2)(r^2-9) - (2y+3n)\{r(r-1)-6\}$$
$$+ 2y(y-1) + \tfrac{9}{2}n(n-1) + 6yn.$$

Die Vergleichung dieser Formeln mit den entsprechenden des vorigen Artikels zeigt das Entsprechen der beiden Reihen von Grössen

$$m,\ r,\ n,\quad g,\ h,\quad \alpha,\ \beta,\quad x,\ y,$$
$$n,\ r,\ m,\quad h,\ g,\quad \beta,\ \alpha,\quad y,\ x;$$

und man darf, da dasselbe Ordnung und Klasse, „Linien in zwei Ebenen“ in einer Ebene und „Linien durch zwei Punkte“ aus einem Punkt, stationäre Ebenen und stationäre Punkte, „Punkte in zwei Linien“ in einer Ebene und „Ebenen durch zwei Linien“ aus einem Punkte gegen einander setzt, diess Entsprechen als ein reciprokes bezeichnen.

Und indem man diese Gleichungen mit den im letzten Artikel gefundenen combinirt, erhält man noch

$$\alpha - \beta = 2(n-m); \quad x - y = n - m;$$
$$2(g-h) = (n-m)(n+m-7).$$

Plücker's Gleichungen erlauben uns, wenn drei der Singularitäten einer ebenen Curve gegeben sind, alle übrigen zu bestimmen. Nun sind die Grössen r, m, n den Gleichungen dieses und des letzten Artikels gemeinsam. *Wenn also irgend drei der aufgezählten Singularitäten einer Curve im Raume gegeben sind, so können die übrigen gefunden werden.*

So findet man zur Bestimmung aus m, β und h, welche Letztere man innerhalb der gehörigen Grenzen wählt,

$$r = m(m-1) - (2h+3\beta); \quad n = 3m(m-2) - (6h+8\beta);$$
$$\alpha = 2m(3m-7) - 3(4h+5\beta);$$
$$g = \tfrac{1}{2}m(3m-7)(3m^2-5m-7) + \tfrac{1}{2}(6h+8\beta)(6h+8\beta+1)$$
$$- 3m(m-2)(6h+8\beta) + 19h - 24\beta;$$
$$x = \tfrac{1}{2}m(m-1)(m^2-m-4) + \tfrac{1}{2}(2h+3\beta)(2h+3\beta+1)$$
$$- m(m-1)(2h+3\beta) + 3h + 4\beta;$$
$$y = \tfrac{1}{2}m(m-2)(m^2-9) - (2h+3\beta)\{m(m-1)-6\}$$
$$+ 2h(h-1) + \tfrac{9}{2}\beta(\beta-1) + 6h\beta.$$

Man findet für $m = 2$ sofort

$$n = 0, \quad h = 0, \quad \beta = 0, \quad r = 2,$$

einen Kegelschnitt und seine Ebene; für $m = 3$

$$\beta = 0, \quad h = 1, \quad r = 4, \quad n = 3, \quad g = 1, \quad \alpha = x = y = v;$$

für $m = 4$ scheint zulässig

$$h = 2, \quad \beta = 0;$$
$$h = 3, \quad \beta = 0;$$
$$h = 2, \quad \beta = 1$$

und finden sich die Werthe

$$r = 8,\ 6,\ 5; \quad n = 12,\ 6,\ 4; \quad y = 8,\ 4,\ 2;$$
$$x = 16,\ 6,\ 2; \quad \alpha = 16,\ 4,\ 1; \quad g = 38,\ 6,\ 2 \text{ respective.}$$

Wir bemerken, dass diess keineswegs ausreicht, um etwa als Basis einer Classification zu dienen. (Vergl. Art. 82.)

67. Zur Erläuterung dieser Theorie betrachten wir die abwickelbare Fläche, welche die Enveloppe der Ebene

$$at^k + kbt^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2} ct^{k-2} + \text{etc.} = 0$$

ist, wenn t einen veränderlichen Parameter, k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet und a, b, c, etc. Ebenen bestimmen.

Die Klasse dieses Systems ist offenbar k, und die Gleichung der abwickelbaren Fläche ist als die Discriminante der vorhergehenden Gleichung nothwendig vom Grade $2(k-1)$; man hat somit

$$r = 2(k-1).$$

Man erkennt auch leicht, dass diese abwickelbare Fläche keine stationären Ebenen besitzen kann. Denn damit zwei Ebenen identisch sind, müssen im Allgemeinen, wegen der Gleichheit der Coefficienten in ihren Gleichungen, drei Bedingungen erfüllt sein. Wenn wir aber t so zu bestimmen suchen, dass irgend eine Ebene des Systems mit der darauf folgenden zusammen falle, so finden wir, dass zur Erfüllung von drei Bedingungen nur eine Constante t zu unserer Verfügung ist.

Aus den Werthen

$$n = k, \; r = 2(k-1), \quad \alpha = 0$$

erlauben die Gleichungen der letzten zwei Artikel die Bestimmung der übrigen Singularitäten. Das Ergebniss ist

$$m = 3\,(k-2)\quad;\qquad \beta = 4\,(k-3)\quad;$$
$$x = 2\,(k-2)\,(k-3);\quad y = 2\,(k-1)\,(k-3);$$
$$g = \frac{(k-1)\,(k-2)}{2};\quad h = \frac{9k^2 - 53k + 80}{2}.$$

Der grössere Theil dieser Werthe hätte auch nach der Theorie der höheren ebenen Curven unabhängig bestimmt werden können. Die Ordnung des Systems und seiner Rückkehrkante z. B. ist der Grad der Bedingung, unter welcher die Gleichung

$$at^k + kbt^{k-1} + \ldots = 0 \quad \text{oder} \quad T = 0$$

drei gleiche Wurzeln hat, d. h. es muss zugleich

$$T = 0,\quad \frac{dT}{dt} = 0,\quad \frac{d^2T}{dt^2} = 0$$

sein.

Und die stationären Punkte sind durch die Bedingung bezeichnet, dass die vier auf einander folgenden Ebenen

$$T = 0,\quad \frac{dT}{dt} = 0,\quad \frac{d^2T}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^3T}{dt^3} = 0$$

denselben Punkt enthalten; $4\,(k-3)$ entspricht dem Grade dieser Bedingung. Wir sparen den Raum, welchen ein Eingehen in weitere Details fordern würde.

68. Der im letzten Artikel betrachtete Fall, als derjenige, in welchem der veränderliche Parameter nur rational in die Gleichung eingeht, erlaubt uns, in sehr einfacher Weise manche Eigenschaften der abwickelbaren Flächen zu bestätigen.

Weil das System

$$u = 0,\quad \frac{du}{dt} = 0$$

offenbar auf

$$at^{k-1} + (k-1)\,bt^{k-2} + \text{etc.} = 0,$$
$$bt^{k-1} + (k-1)\,ct^{k-2} + \text{etc.} = 0,$$

und das System

$$u = 0,\quad \frac{du}{dt} = 0,\quad \frac{d^2u}{dt^2} = 0$$

auf

$$at^{k-2} + (k-2)\,bt^{k-3} + \text{etc.} = 0,$$
$$bt^{k-2} + (k-2)\,ct^{k-3} + \text{etc.} = 0,$$
$$ct^{k-2} + (k-2)\,dt^{k-3} + \text{etc.} = 0$$

sich reduciert, so folgt, dass a selbst eine „Ebene des Systems“

giebt, nämlich die dem Werthe $t = \infty$ entsprechende; es ist ab die entsprechende Linie und abc der entsprechende Punkt. Wir wissen aber aus der Theorie der Discriminanten (vergl. „Vorlesungen“, Artikel 68), dass die Gleichung der abwickelbaren Fläche von der Form

$$a\varphi + b^2\psi = 0$$

ist, wo ψ die Discriminante von u für den Werth $a = 0$ bezeichnet. Wir bewähren so, was im Artikel 61 ausgesprochen ist, dass die Ebene a die abwickelbare Fläche längs der ganzen Erstreckung der Linie ab berührt. Ferner ist aber ψ selbst von der Form

$$b\varphi' + c^2\psi',$$

und wenn wir den Durchschnitt der abwickelbaren Fläche mit einer der „Ebenen des Systems“ betrachten — wir erhalten ihn, wenn wir in der Gleichung der abwickelbaren Fläche $a = 0$ machen, — so besteht derselbe aus der zweifach zu zählenden Linie ab und einer Curve von der Ordnung $(r-2)$, und diese Curve berührt, wie die Form der Gleichung zeigt, die Linie ab im Punkte abc und schneidet sie folglich in $(r-4)$ anderen Punkten; diese alle sind „Punkte in zwei Linien“, als die Punkte, in welchen die Linie ab andere „Linien des Systems“ schneidet.

Und es ist allgemein wahr, dass, wenn r der Rang einer abwickelbaren Fläche ist, jede „Linie des Systems“ $r-4$ andere Linien des Systems durchschneidet. Der Ort dieser Punkte ist eine Doppelcurve der abwickelbaren Fläche, deren Ordnung x ist, und deren übrige Eigenschaften in einem folgenden Kapitel gegeben werden sollen, wo wir auch gewisse andere Singularitäten der abwickelbaren Fläche bestimmen wollen.

Wir fügen eine Tafel der Singularitäten einiger specieller Schnitte der abwickelbaren Fläche hinzu. Der Leser, welcher den Gegenstand weiter untersuchen will, wird keine Schwierigkeit darin finden, sie vollständig zu begründen;*) einige Andeutungen werden genügen.

1. Schnitt durch eine „Ebene des Systems“:

$$\mu = r-2,\quad \nu = n-1,\quad \iota = \alpha,\quad \varkappa = m-3,\quad \tau = g-n+2,$$
$$\delta = x-2r+8.$$

*) Vgl. „Cambridge and Dublin Mathematical Journal“ Vol. V, p. 24.

Denn jede Ebene des Systems berührt die Fläche längs einer Linie und schneidet sie daher in einer Curve $(r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung; immer fällt eine der durch einen Punkt des Schnittes gehenden Ebenen des Systems mit der Schnittebene zusammen; die Zahl der Inflexionspunkte bleibt als von der Zahl der stationären Ebenen abhängig ungeändert; die Zahl der Spitzen als Zahl der Schnittpunkte mit der Curve des Systems vermindert sich um 3; die gerade Linie des Systems in der Schnittebene schneidet die Curve von der Ordnung $(r-2)$, da sie sie berührt, noch in $(r-4)$ Punkten, deren jeder für zwei Doppelpunkte der Schnittfigur zu zählen ist.

2. Kegel, dessen Scheitel ein „Punkt des Systems“ ist:

$$\mu = m-1,\ \nu = r-2,\ \iota = n-3,\ \varkappa = \beta,\ \tau = y-2r+8,$$
$$\delta = h-m+2.$$

Die Zahl der Cuspidalkanten des Kegels ist die Zahl der stationären Punkte des Systems; die Ordnung desselben ist die Zahl der Erzeugenden, welche eine durch die Spitze gehende Ebene bestimmt, also $(m-1)$. Die Klasse ist $(\nu-2)$, weil sie die Zahl der Linien des Systems ist, die eine Gerade durch die Spitze schneiden, durch welche selbst bereits zwei dieser Linien gehen; die Zahl der stationären Tangentenebenen ist $(n-3)$ als die Zahl der Ebenen des Systems durch den Scheitel, der selbst dreien solchen angehört.

3. Schnitt durch eine Ebene, welche eine „Linie des Systems“ enthält:

$$\mu = r-1,\ \nu = n,\ \iota = \alpha+1,\ \varkappa = m-2,\ \tau = g-1,$$
$$\delta = x-r+4.$$

Die Zahl der Inflexionspunkte wächst um Eins, weil eine „Linie in zwei Ebenen“ in der Schnittebene mit der gegebenen Linie des Systems zusammen fällt; darin liegt zugleich der Grund für die entsprechende Verminderung der Zahl der Doppeltangenten.

4. Kegel, dessen Scheitel in einer „Linie des Systems“ liegt:

$$\mu = m,\ \nu = r-1,\ \iota = n-2,\ \varkappa = \beta+1,\ \tau = y-r+4,$$
$$\delta = h-1.$$

5. Schnitt mit einer „Ebene durch zwei Linien“:

$$\mu = r - 2,\quad \nu = n,\quad \iota = \alpha + 2,\quad \varkappa = m - 4,\quad \tau = g - 2,$$
$$\delta = x - 2r + 9.$$

6. Kegel, dessen Scheitel ein „Punkt in zwei Linien“ ist:

$$\mu = m,\ \nu = r - 2,\ \iota = n - 4,\ \varkappa = \beta + 2,\ \tau = y - 2r + 9,$$
$$\delta = h - 2.$$

7. Schnitt durch eine „stationäre Ebene“:

$$\mu = r - 3,\quad \nu = n - 2,\quad \iota = \alpha - 1,\quad \varkappa = m - 4,$$
$$\tau = g - 2n + 6,\quad \delta = x - 3r + 13.$$

8. Kegel, dessen Scheitel ein „stationärer Punkt“ ist:

$$\mu = m - 2,\quad \nu = r - 3,\quad \iota = n - 4,\quad \varkappa = \beta - 1,$$
$$\tau = y - 3r + 13,\quad \delta = h - 2m + 6.$$

Die Grössen μ, ν, ι, $\varkappa$ sind um eine Einheit kleiner als in den beiden ersten Fällen dieser Zusammenstellung nach der Natur der stationären Elemente.

Für das System

$$m = 3,\ n = 3,\ g = h = 1,\ r = 4,\ \alpha = \beta = x = y = 0$$

hat man für den Schnitt mit einer Ebene des Systems die Charactere

$$\mu = 1,\ \nu = 2,\ \iota = \varkappa = \tau = \delta = 0,$$

derselbe ist ein Kegelschnitt; und der Kegel aus einem Punkte des Systems

$$\mu = 2,\ \nu = 1,\ \iota = \varkappa = \tau = \delta = 0,$$

ein Kegel zweiter Ordnung.

Für das System

$$m = 4,\ h = 2,\ \beta = 1,\ n = 4,\ r = 5,$$
$$g = x = y = 2,\ \alpha = 1$$

entsprechen denselben Fällen beidemale

$$\mu = 3,\ \nu = 3,\ \iota = 1,\ \varkappa = 1,\ \tau = \delta = 0;$$

den beiden letzten Fällen der stationären Ebene und des stationären Punktes die Werthe

$$\mu = \nu = 2,\ \iota = \varkappa = \tau = \delta = 0;$$

Anderes ist leicht hinzuzufügen.

II. Abschnitt. Classification der Curven.

69. Die folgende Darlegung beruht auf dem Princip, dass eine Curve der Ordnung r eine Fläche p^{ter} Ordnung in pr Punkten durchschneidet. Die Gültigkeit desselben ist offenbar, wenn die Curve der vollständige Durchschnitt zweier Oberflächen von den respectiven Ordnungen m und n ist. Denn wir haben dann $r = mn$ und die drei Oberflächen durchschneiden sich in mnp Punkten. Das Princip ist nach der Definition ebenso unmittelbar wahr, wenn die Fläche in p Ebenen zerfällt. Wir betrachten nach dem Gesetz der Continuität diess Princip als allgemein wahr.

Ebenso sprechen wir aus, dass eine abwickelbare Fläche der Klasse n mit einer Fläche der Klasse q gemeinschaftliche Tangentenebenen in der Zahl nq hat.

Der Gebrauch, welchen wir von dem Princip machen werden, ist dieser. Angenommen, dass in einer Curve von der Ordnung r so viel Punkte angenommen werden, als zur Bestimmung einer Fläche von der Ordnung p hinreichend sind, so muss, wenn die Zahl der so gewählten Punkte grösser als pr ist, die durch dieselben beschriebene Fläche die Curve vollständig enthalten; wäre diess nicht der Fall, so erschiene das Princip verletzt.

Und andererseits muss eine abwickelbare Fläche n^{ter} Klasse einer Fläche q^{ter} Klasse umgeschrieben sein, wenn sie mehr als nq Tangentenebenen mit derselben gemein hat.

Wir setzen dabei voraus, dass die Curve eine eigentliche Curve der r^{ten} Ordnung ist; denn wenn wir zwei Curven von den Ordnungen m und n angenommen hätten, wo $m + n = r$ ist, so könnten dieselben in ihrer Vereinigung als eine complexe Curve von der Ordnung r betrachtet werden, und wenn jede ganz in irgend einer Fläche von der Ordnung p enthalten wäre, so könnten wir folglich in dieser Curve eine beliebige Zahl von Punkten wählen, welche der Curve und der Fläche gemein wären. Alles das wird hinreichend erläutert werden durch die folgenden Beispiele.

70. Es existiert keine Linie des ersten Grades ausser der geraden Linie. Denn durch irgend zwei Punkte einer Linie des ersten Grades und einen dritten willkürlich angenommenen Punkt können wir eine Ebene beschreiben, welche

die Linie ganz enthalten muss, weil wir sonst eine Linie vom ersten Grade haben würden, welche die Ebene in mehr als einem Punkte durchschnitte. In derselben Art können wir eine zweite Ebene bestimmen, welche die Linie ganz enthält; die Linie ersten Grades muss daher der Durchschnitt zweier Ebenen, d. h. eine gerade Linie sein.

Es existiert keine eigentliche Linie des zweiten Grades ausser den Kegelschnitten. Denn durch irgend drei Punkte einer solchen Linie können wir eine Ebene legen, welche aus denselben Gründen wie vorher die Linie ganz enthalten muss. Dieselbe muss somit eine ebene Curve des zweiten Grades sein.

Die am Ende des letzten Artikels bezeichnete Ausnahme tritt hier ein, wenn die Linie des zweiten Grades aus zwei geraden Linien besteht, die nicht in derselben Ebene liegen; denn dann enthält die Ebene durch drei Punkte des Sytems nur eine der geraden Linien. Wir halten es für unnöthig, in dem Folgenden die Fälle dieser Art ferner ausdrücklich zu erwähnen, und werden nur von den eigentlichen Curven ihrer respectiven Ordnungen sprechen.

71. Eine Curve dritter Ordnung ist entweder eine ebene Curve von der dritten Ordnung oder der theilweise Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades, welche eine gerade Linie gemeinschaftlich haben.*) (Art. 55.)

Denn wird durch sieben Punkte der Curve und durch zwei ausser ihr willkürlich gewählte Punkte eine Fläche zweiten Grades bestimmt, so muss dieselbe, wie vorher, die Curve ganz

---

*) Nicht ebene Curven dritter Ordnung sind zuerst von Möbius in seinem „barycentrischen Calcul“, 1827, bezeichnet und einige ihrer wichtigsten Eigenschaften dargelegt worden. Zahlreiche andere Eigenschaften derselben wurden durch Chasles in der XXXIII. Note seines „Aperçu historique“ 1837 und in einer Abhandlung von Liouville's Journal, 1857, p. 397 gegeben. Neuerdings sind die Eigenschaften dieser Curven behandelt worden von Schröter, „Journal f. Math.“ Bd. LVI, und von L. Cremona „Annali di Matematica“, t. I, p. 164, 278; II, p. 19; V, 1. „Journal f. Math.“, Bd. LVIII, p. 138. LX, p. 188. LXIII, p. 141. In den Artikeln, welche unmittelbar folgen, ist von den Ergebnissen der trefflichen Cremona'schen Abhandlungen (besonders „Journal f. Math.“, Bd. LVIII) mehrfach Gebrauch gemacht.

enthalten. Wenn die Fläche zweiten Grades in zwei Ebenen zerfällt, so kann die Curve eine ebene Curve sein, die in einer dieser Ebenen enthalten ist. Da wir offenbar ebene Curven jeder Ordnung in analoger Weise erhalten können, so halten wir es für unnöthig, diess in späteren Fällen besonders hervorzuheben.

Vorausgesetzt, dass die Fläche zweiten Grades nicht in zwei Ebenen zerfalle, so können wir eine zweite Fläche zweiten Grades durch die sieben Punkte legen, und die gegebene Curve ist dann nothwendig ein Theil der Durchschnittslinie beider Flächen. Der vollständige Durchschnitt muss, als von der vierten Ordnung, ausser ihr noch eine gerade Linie enthalten. Es ist somit bewiesen, dass die einzige nicht ebene Curve von der dritten Ordnung die im Artikel 55 erwähnte ist.

72. Der Kegel, welcher eine Curve m^{ter} Ordnung enthält und dessen Scheitel ein Punkt derselben ist, ist vom Grade $(m-1)$, somit ist der Kegel, welcher eine Curve dritter Ordnung enthält und seinen Scheitel in einem Punkte derselben hat, vom zweiten Grade.*)

Wir können somit eine Curve dritter Ordnung im Raume durch sechs gegebene Punkte beschreiben. Denn wir können einen Kegel zweiten Grades beschreiben, für welchen der Scheitel und fünf seiner Kanten gegeben sind, weil offenbar so fünf Punkte des Schnittes gegeben sind, welchen eine Ebene mit diesem Kegel bestimmt. Wenn nun sechs Punkte a, b, c, d, e, f gegeben werden, so können wir aus dem Punkte a als Scheitel einen Kegel beschreiben, welcher die Linien ab, ac, ad, ae, af zu Kanten hat, und in gleicher Art aus dem Punkte

---

*) Chasles hatte behauptet, dass umgekehrt der Ort des Scheitels eines Kegels vom 2^{ten} Grade, welcher durch sechs Punkte geht, die durch diese Punkte gehende Curve dritter Ordnung sei. Aber, wie schon Weddle im „Cambridge and Dublin Mathematical Journal", Vol. V, p. 69 ausführte, der Ort dieses Scheitels ist nicht eine Curve, sondern eine Fläche, nämlich diejenige, deren Gleichung durch Elimination von λ, μ, ν zwischen den vier Differentialen von $S + \lambda U + \mu V + \nu W$ erhalten wird, wo S, U, V, W beliebige durch die sechs Punkte gehende Flächen darstellen. Der Ort des Scheitels für einen Kegel 2^{ter} Ordnung, welcher durch sieben Punkte geht, ist eine Curve und von der 6^{ten} Ordnung. Wenn acht Punkte gegeben sind, so können vier Kegel durch sie beschrieben werden. Vgl. den Anfang des Kapitel VI „Ueber die Ordnung von Systemen von Gleichungen".

b als Scheitel einen Kegel, für welchen die Linien *ba, bc, bd, be, bf* die Kanten sind. Der Durchschnitt dieser Kegel besteht aus der gemeinschaftlichen Kante *ab* und einer Curve dritter Ordnung, welche die durch die sechs Punkte gehende verlangte ist.

Die Construction der Curve durch andere Bedingungen erfordert die Kenntniss anderer Eigenschaften; durch drei Punkte und drei gerade Linien durch zwei Punkte des Systems ist die Curve bestimmt, weil jene Punkte mit je zweien der Geraden ein Hyperboloid bestimmen; durch zwei Punkte und vier Linien durch zwei Punkte, weil diese mit den Geraden zwei homographische Büschel bestimmen (Artikel 77), etc.

Der Satz, nach welchem die geraden Linien, welche sechs Punkte einer Curve dritter Ordnung mit einem siebenten Punkte derselben Curve verbinden, Kanten eines Kegels vom zweiten Grade sind, führt vermittelst des Pascal'schen Satzes zu dem folgenden: Die Durchschnittslinien der Ebenen 712, 745; 723, 756; 734, 761 liegen in einer Ebene.*)

Wenn diess Gesetz für zwei Ecken eines Siebenecks erfüllt ist, so muss es auch für alle übrigen gelten; denn dann sind diese beiden Ecken die Scheitel von Kegeln des zweiten Grades, welche die übrigen Eckpunkte enthalten und diese müssen daher in der Curve dritter Ordnung liegen, welche der Durchschnitt der Kegel ist.

73. Eine Curve dritter Ordnung, welche auf einem einfachen Hyperboloid verzeichnet ist, schneidet alle Erzeugenden des einen Systems einfach und alle Erzeugenden des anderen Systems zweifach.

Jede Erzeugende einer Fläche zweiten Grades schneidet ihre Durchschnittscurve mit einer anderen Fläche zweiten Grades in zwei Punkten, nämlich in denjenigen, in welchen sie diese andere Fläche schneidet; wenn nun die Durchschnittscurve aus einer geraden Linie und einer Curve dritter Ordnung besteht, so ist offenbar, dass die Erzeugenden der Fläche, welche mit der geraden Linie von demselben System sind, da sie diese eben deshalb nicht schneiden können, die cubische Curve in zwei Punk-

---

*) Cremona fügt hinzu, dass wenn sechs Punkte als fest und ein siebenter als veränderlich angenommen sind, diese Ebene durch eine feste Sehne der Curve dritter Ordnung geht.

ten schneiden müssen, während die Erzeugenden der Fläche, welche dem anderen System angehören, weil sie deshalb jene gerade Linie in je einem Punkte schneiden, die cubische Curve nur in einem Punkte schneiden können.

Umgekehrt können wir ein System von Hyperboloiden durch eine Curve dritter Ordnung und eine beliebige ihrer Sehnen (welche sie zweimal schneidet) beschreiben. Denn wenn wir sieben Punkte in der Curve und einen achten in der irgend zwei von ihnen verbindenden Sehne annehmen, so können durch diese acht Punkte unendlich viele Flächen zweiten Grades bestimmt werden. Weil aber drei von diesen Punkten in einer geraden Linie liegen, so muss dieselbe allen so zu bestimmenden Flächen gemeinschaftlich sein, ebenso wie auch die cubische Curve, welcher die sieben Punkte angehören.

74. Die Aufgabe, die Enveloppe von

$$at^3 - 3bt^2 + 3ct - d = 0$$

zu bestimmen, wo a, b, c, d Ebenen repräsentieren und t ein veränderlicher Parameter ist, erkennen wir als einen speciellen Fall der im Artikel 67 discutierten allgemeineren. Wir haben

$$r = 4, \quad m = n = 3, \quad \alpha = \beta = 0, \quad x = y = 0, \quad g = h = 1.$$

Das durch die Gleichung dargestellte System ist also von der nämlichen Natur, wie das nach dem Gesetz der Reciprocität entsprechende System, und alle auf dasselbe bezüglichen Sätze sind folglich zweifach.

Als ein System des dritten Grades muss es von der Art sein, die wir eben betrachten und diess geht auch aus der Gleichung der Enveloppe

$$(ad - bc)^2 = 4\,(b^2 - ac)\,(c^2 - bd)$$

hervor; denn sie zeigt sofort, dass irgend ein Paar der Flächen

$$ad - bc = 0, \quad b^2 - ac = 0, \quad c^2 - bd = 0$$

eine gerade Linie gemeinschaftlich haben, während eine Curve dritter Ordnung ihnen allen zugleich gemeinschaftlich und somit eine Doppellinie der Enveloppe ist.

Betrachtet man die Kegel

$$ac = b^2, \quad bd = c^2$$

für welche

$$b = 0, \quad c = 0$$

die Tangentenebenen nach ihrer gemeinschaftlichen Kante und

$$a = 0, \quad d = 0$$

die Tangentenebenen der zweiten Durchschnittskanten dieser Ebenen sind, so ist für einen Punkt der räumlichen Curve dritter Ordnung

$$a : b : c : d = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$$

— den Scheiteln der Kegel entsprechen die Parameterwerthe $\omega = \infty$, $\omega = 0$. Die Linie durch zwei Punkte ω_1, ω_2 ist

$$a - (\omega_1 + \omega_2)\, b + \omega_1 \omega_2 c = 0,$$
$$b - (\omega_1 + \omega_2)\, c + \omega_1 \omega_2 d = 0$$

und die Ebene durch drei Punkte ω_1, ω_2, ω_3

$$a - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\, b + (\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_3 + \omega_3\omega_1)\, c - \omega_1\omega_2\omega_3 d = 0.\text{*)}$$

Eine Linie des Systems ist daher

$$a - 2\omega b + \omega^2 c = 0, \quad b - 2\omega c + \omega^2 d = 0,$$

und eine Ebene desselben

$$a - 3\omega b + 3\omega^2 c - \omega^3 d = 0.$$

Die Gleichung der Enveloppe entsteht wie vorher aus der Elimination des Parameters zwischen den Gleichungen einer Linie des Systems. Darin liegen die Grundlagen der rein analytischen Behandlung dieser Theorie.

Aus der oben gegebenen Tafel erkennt man, dass jede Ebene eine „Linie in zwei Ebenen“ enthält, oder dass der Schnitt der abwickelbaren Fläche mit einer beliebigen Ebene eine Doppeltangente besitzt; während reciprok entsprechend durch jeden Punkt eine Linie gezogen werden kann, welche die cubische Curve zweimal schneidet, so dass der Kegel, welcher diesen Punkt zum Scheitel hat und über der Curve steht, nothwendig eine Doppelkante besitzt. In anderen Worten giebt diess den Satz: **Eine Curve dritter Ordnung im Raume hat zu ihrer Projection auf irgend eine Ebene eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt.**

Die drei Inflexionspunkte einer ebenen Curve dritter Ordnung sind in einer geraden Linie. Da nun im Artikel 66 bewiesen ward, dass die Inflexionspunkte den drei Ebenen des Systems entsprechen, die durch den Scheitel des Kegels gehen, so schliessen

*) Vergl. „Analytische Geom. d. Kegelschn.“ Art. 295 f., 59.

wir, dass die drei Punkte des Systems, welche den drei durch irgend einen Punkt O gehenden Ebenen desselben entsprechen, in einer durch diesen Punkt gehenden Ebene liegen.*)

Dieser Doppelpunkt ist der harmonische Pol der Verbindungslinie der Inflexionspunkte in Bezug auf das Dreieck der Inflexionstangenten; daher ist die Ebene der stationären oder Inflexionskanten des über der Curve stehenden Kegels die harmonische Polarebene der Doppelkante des Kegels in Bezug auf die von den stationären Tangentenebenen des Kegels gebildete dreiseitige Ecke. Jene stationären Tangentenebenen sind aber die durch den Punkt des Raumes gehenden Ebenen des Systems und die Doppelkante ist die ihn enthaltende Linie durch zwei Punkte, die Ebene der Inflexionskanten aber die Ebene der zugehörigen drei Punkte des Systems.

Andererseits bildet die Doppeltangente einer Curve vierter Ordnung mit drei Rückkehrpunkten, deren Tangenten sich in einem Punkte durchschneiden, die harmonische Polare dieses Durchschnittspunktes in Bezug auf das Dreieck der Rückkehrpunkte. Daher ist die einzige „Linie in zwei Ebenen", welche eine Ebene enthält, die harmonische Polare desjenigen ihrer Punkte in Bezug auf das Dreieck der ihr angehörigen Punkte des Systems, in welchem sich die entsprechenden Ebenen des Systems durchschneiden.**)

Ferner ist bekannt, dass wenn eine ebene Curve dritter Ordnung einen conjugierten Punkt hat, ihre drei Inflexionspunkte reell sind, dass aber, wenn sie einen Doppelpunkt besitzt, dessen Tangenten reell sind, zwei der Inflexionspunkte imaginär sind. Wenn also die Sehne, welche durch einen Punkt O gelegt werden kann, die Curve dritter Ordnung im Raume in zwei reellen Punkten schneidet, so sind zwei der Ebenen des Systems, welche durch diesen Punkt gehen, imaginär. Und reciprok, wenn durch eine gegebene Gerade zwei reelle Ebenen des Systems gelegt werden können, so schneidet jede durch diese Gerade gehende

---

*) Chasles, Liouville, 1857. Schröter, „Journal f. Math." Bd. LVI.

**) Cremona, Annali II, 1859. Diese Gesetze zeigen dieselbe Reciprocität, die wir schon von den Charakteren der Curve im Allgemeinen bemerkt haben.

Ebene die Curve in zwei imaginären Punkten und nur in einem reellen Punkte.*)

75. Diese Sätze können auch leicht algebraisch begründet werden. Denn der Berührungspunkt der Ebene

$$at^3 - 3bt^2 + 3ct - d = 0,$$

als durch die Gleichungen

$$at = b, \quad bt = c, \quad ct = d$$

gegeben, kann durch die Coordinaten

$$a = 1, \quad b = t, \quad c = t^2, \quad d = t^3$$

bezeichnet werden.

Da nun die drei Werthe von t, welche den drei durch irgend einen Punkt gehenden Ebenen des Systems entsprechen, durch die cubische Gleichung

$$a't^3 - 3b't^2 + 3c't - d' = 0$$

bestimmt werden, so ist aus den eben gefundenen Werthen offenbar, dass die Berührungspunkte in der Ebene

$$a'd - 3b'c + 3c'b - d'a = 0$$

liegen, welche ihrerseits den gegebenen Punkt enthält: Der Durchschnittspunkt von drei Ebenen des Systems liegt in der Ebene der entsprechenden Punkte des Systems.

Da die eben geschriebene Gleichung durch eine Vertauschung der accentuierten mit den nicht accentuierten Buchstaben ungeändert bleibt, so schliessen wir: Wenn ein Punkt A in der dem Punkte B entsprechenden Ebene liegt, so liegt auch B in der dem Punkte A entsprechenden Ebene. Und ferner: Die Ebenen, welche allen Punkten einer geraden Linie AB entsprechen, gehen durch eine feste gerade Linie, nämlich durch die Durchschnittslinie der den Punkten A und B entsprechenden Ebenen. Die Relation zwischen diesen geraden Linien ist offenbar reciprok. Jeder „Ebene des Systems" entspricht in diesem Sinne der correspondierende Punkt des Systems und einer „Linie in zwei Ebenen" entspricht eine Sehne, welche zwei Punkte verbindet.

Ueberhaupt: Das System dritter Ordnung ist sich selbst re-

---

*) Joachimsthal, „Journal f. Math." Bd. LVI, p. 45. Cremona, ibid., Bd. LVIII, p. 146.

ciprok, es ist hinsichtlich der Theorie der Reciprocität das vollständige räumliche Analogon der Kegelschnittslinien in der Ebene.*)

Die drei Punkte, in denen eine Ebene $Aa + Bb + Cc + Dd$ die Curve schneidet, entsprechen den Werthen des Parameters t, welche durch die cubische Gleichung

$$Dt^3 + Ct^2 + Bt + A = 0$$

bestimmt sind, und wenn diese ein vollkommener Cubus ist, so ist die Ebene eine „Ebene des Systems“. Daraus folgt sogleich, wie es Joachimsthal bemerkt hat, dass jede durch den Durchschnitt zweier reellen Ebenen des Systems gelegte Ebene die Curve nur in einem reellen Punkte schneidet. Denn in solchem Falle wird die eben geschriebene cubische Gleichung die Summe zweier Cuben und hat daher nur einen reellen Factor.

76. Wir haben im Artikel 124 des I. Bandes gesehen, dass eine doppeltgekrümmte Curve dritter Ordnung der Ort der Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle Flächen zweiten Grades ist, die eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve haben.

Allgemeiner wird eine derartige Curve durch das Resultat der Elimination von λ zwischen dem System der Gleichungen

$$\lambda a = a', \quad \lambda b = b', \quad \lambda c = c'$$

ausgedrückt. Da nun das Doppelschnittsverhältniss von vier Ebenen, deren Gleichungen von der Form

$$\lambda a = a', \quad \lambda' a = a', \text{ etc.}$$

nur von den Coefficienten λ, λ', etc. abhängt (vgl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Artikel 56), so kann diese Entstehungsart der Gleichung der Curve dritter Ordnung folgendermassen interpretiert werden: Wenn ein System von Ebenen durch eine ge-

*) In Cremona's Abhandlungen t. I und II der „Annali“ ist diese Reciprocität vollständig dargelegt, nachdem sie in den Abhandlungen von Chasles und Schröter näher erkannt war. Auch hier hat Möbius in seiner Statik und in einer Abhandlung im X. Bande von „Crelle's Journal“ (p. 317) schon sehr früh tiefe Blicke gethan.

Jedem Punkte im Raume entspricht eine Ebene — Focalebene, Nullebene des Punktes — und eine Gerade — Directrix; auch jeder Ebene ein Punkt — Focalpunkt, Nullpunkt der Ebene — und eine Gerade. Einem System von Ebenen entspricht das System ihrer Focalpunkte, einem Punktesystem das ihrer Focalebenen, und die beiderseitigen Directrixen sind auch reciproke Gerade in Bezug auf die Curve dritter Ordnung.

rade Linie aa' gegeben ist und durch eine andere Linie bb', sowie durch eine dritte cc' respective Ebenensysteme gelegt werden, welche jenem ersten einzeln homographisch sind, so ist der Ort des Durchschnittspunktes von je drei entsprechenden Ebenen der Systeme eine doppelt gekrümmte Curve dritter Ordnung. Die geraden Linien aa', bb', cc' sind offenbar „Linien durch zwei Punkte" oder Sehnen der Curve. Es gilt aber auch der reciproke Satz: Wenn drei gerade Linien homographisch getheilt sind, so umhüllt die Ebene von irgend drei entsprechenden Punkten die durch eine doppeltgekrümmte Curve dritter Ordnung erzeugte abwickelbare Fläche, und die drei gegebenen geraden Linien sind „Linien in zwei Ebenen" in dem System.

Die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte von zwei homographisch getheilten Geraden umhüllt einen Kegelschnitt, wenn jene Geraden in einer Ebene liegen und erzeugt ein einfaches Hyperboloid, wenn sie es nicht thun. Wenn also eine Reihe von Punkten in gerader Linie und eine homographische Reihe entweder von Tangenten eines Kegelschnitts oder von Erzeugenden eines Hyperboloids gegeben sind, so umhüllt die Ebene, welche jeden Punkt mit der entsprechenden Geraden verbindet, eine abwickelbare Fläche, wie sie vorher bezeichnet ist.

Beispiel. Wenn die vier Flächen eines Tetraeders durch feste gerade Linien gehen und drei seiner Ecken sich in festen geraden Linien bewegen, so ist der Ort der letzten Ecke eine doppeltgekrümmte Curve dritter Ordnung.

Eine beliebige Anzahl von Lagen der Basis bildet ein System von Ebenen, welche die drei geraden Linien homographisch theilen, in denen die Basisecken sich bewegen; daraus folgt, dass die drei Ebenen, die sich in der Spitze durchschneiden, die entsprechenden Ebenen von drei homographischen Systemen sind.

77. Aus den Sätzen des letzten Artikels folgt umgekehrt, dass die Ebenen, welche vier feste „Punkte des Systems" mit einer veränderlichen „Linie durch zwei Punkte" verbinden, ein constantes Doppelschnittverhältniss bestimmen, und dass vier feste „Ebenen des Systems" irgend eine Linie in zwei Ebenen in constantem Doppelschnittverhältniss theilen.

Es ist sehr leicht, diese Sätze unabhängig zu beweisen. So wissen wir, dass der Durchschnitt der abwickelbaren Fläche durch eine Ebene A*) des Systems aus der doppelt zu zählenden entsprechenden Linie a des Systems in Verbindung mit einem Kegelschnitt besteht, welchen alle anderen Ebenen des Systems tangieren. Die homographische Eigenschaft der Tangenten eines Kegelschnitts zeigt dann sogleich, dass vier Ebenen des Systems irgend zwei Linien in zwei Ebenen AB, AC nach demselben Doppelschnittverhältniss schneiden, und ebenso, dass AC nach demselben Verhältniss getheilt wird wie CD.

Ein bemerkenswerther specieller Fall dieser Sätze ergiebt sich aus dem Umstande, dass die „Linien des Systems" gleichzeitig „Linien in zwei Ebenen" und „Linien durch zwei Punkte" sind: Vier feste „Ebenen des Systems" schneiden alle „Linien des Systems" nach demselben Doppelschnittverhältniss; und die Ebenen, welche vier feste „Punkte des Systems" mit allen „Linien des Systems" verbinden, bilden Systeme von constantem Doppelschnittverhältniss.

Manche specielle Erkenntnisse können aus diesen Sätzen ebenso erschlossen werden, wie es in der „Anal. Geom. d. Kegelschnitte" Artikel 406 f. geschehen ist.

Betrachten wir z. B. vier Punkte des Systems α, β, γ, δ, und drücken aus, dass die Ebenen, welche sie mit den Linien a, b verbinden, und $\alpha\beta$ die Linie $\gamma\delta$ homographisch theilen; nehmen wir an, die Ebenen A, B schneiden $\gamma\delta$ in den Punkten t, t', die Ebenen, welche die Linie a mit β und die Linie b mit α verbinden, schneiden $\gamma\delta$ in den Punkten k, k', so haben wir

$$\{tk\gamma\delta\} = \{k't'\gamma\delta\} = \{kk'\gamma\delta\}.$$

Wenn die Punkte t, k' zusammen fallen, so folgt aus der ersten Gleichung, dass auch die Punkte k, t' sich decken und aus der zweiten, dass die Punkte t, t', γ, δ ein harmonisches System bilden. So erhalten wir den Satz von Cremona, dass, wenn eine Reihe von Sehnen die Durchschnittslinie einer Ebene A mit der Ebene, die den correspondierenden Punkt α mit einer Linie b des Systems verbindet, durchschneiden, sie auch die Durchschnittslinie

*) Es ist oft zweckmässig, die Ebenen des Systems durch grosse, die entsprechenden Linien desselben durch kleine römische, und die entsprechenden Punkte durch griechische Buchstaben zu bezeichnen.

der Ebene B mit der Ebene schneiden, die der Punkt β mit der Linie a bestimmt; dass sie überdiess in den Schnittpunkten mit diesen zwei Linien und in ihren Durchschnittspunkten mit der Curve harmonisch getheilt werden.

Der Leser wird ohne Schwierigkeit zu dem Falle übergehen, wo eine dieser Linien in unendlicher Entfernung liegt, und wo daher die andere Linie ein Durchmesser wird.

78. Wir haben gesehen, dass die Schnitte der abwickelbaren Fläche, durch die Ebenen des Systems Kegelschnitte sind. Ihre Punkte sind die Durchschnittspunkte der Linien, ihre Tangenten die Schnittlinien der Ebenen des Systems mit der bezüglichen Ebene, und die Durchschnittslinie zweier Ebenen des Systems ist eine gemeinschaftliche Tangente der beiden entsprechenden Kegelschnitte. Daher: Die Ebenen, welche zwei Kegelschnitte berühren, die die Durchschnittslinie ihrer Ebenen zur gemeinschaftlichen Tangente haben, sind Osculationsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung und vierter Klasse und Tangentenebenen einer abwickelbaren Fläche vierter Ordnung und dritter Klasse.

Wir können den Ort der Centra aller solcher Kegelschnitte untersuchen, oder allgemeiner den Ort der in Bezug auf sie genommenen Pole der Durchschnittslinien ihrer Ebenen mit einer festen Ebene. Da wir in jeder Ebene eine Linie in zwei Ebenen ziehen können, so dürfen wir voraussetzen, dass die feste Ebene durch den Durchschnitt zweier Ebenen des Systems A, B gehe.

Betrachten wir nun den Schnitt, den irgend eine andere Ebene C bestimmt, so sind die Spuren der Ebenen A und B in ihr Tangenten des Schnittes und der Pol irgend einer durch ihren Durchschnitt gehenden Linie in Bezug auf denselben liegt in ihrer Berührungssehne, d. h. in der geraden Verbindungslinie der Punkte, in denen die Linien des Systems a, b die Ebene C durchschneiden. Da aber alle Ebenen des Systems die Linien a, b homographisch schneiden, so bilden jene Verbindungslinien ein einfaches Hyperboloid, von welchem die Linien a, b Erzeugende sind. Wenn also die Ebene durch die Linie AB gelegt wird, so ist der Ort der Pole eben dieses Hyperboloid. Es ist aber ferner offenbar, dass der Pol einer durch die Gerade AB gehenden Ebene in der

Ebene liegt, welche ihre harmonisch conjugierte in Bezug auf jene Tangentenebenen ist. Der von uns gesuchte Ort ist somit ein ebener Kegelschnitt. Es ist auch aus der Construction offenbar, dass so wie die Pole in Bezug auf eine feste Ebene $A + \lambda B = 0$ in einem Kegelschnitt in der Ebene $A - \lambda B = 0$ liegen, auch umgekehrt der Ort der Pole in Bezug auf die letztere als feste Polarebene ein in der ersteren Ebene enthaltener Kegelschnitt ist.*)

79. Es ist endlich offenbar genug, dass die betrachteten Curven dritter Ordnung in vier Species zerfallen, je nach der verschiedenen Art, in welcher die Curve durch die Ebene der unendlich entfernten Punkte geschnitten wird. Dieselbe kann die Curve entweder in drei reellen Punkten schneiden, oder in einem reellen Punkte und zwei imaginären, oder in einem reellen und zwei zusammenfallenden Punkten, so dass eine „Linie des Systems“ in unendlicher Entfernung liegt, oder endlich in drei zusammenfallenden Punkten, so dass eine Ebene des Systems mit der unendlich entfernten Ebene zusammenfällt. Diese Species sind als cubische Hyperbel, cubische Ellipse, cubisch-hyperbolische Parabel und cubische Parabel benannt worden.**)

Offenbar hat die Curve, wenn sie reelle Punkte in unendlicher Entfernung besitzt, zum Unendlichen fortschreitende Zweige, und die „Linien des Systems“, welche den unendlich entfernten Punkten entsprechen, sind Asymptoten der Curve. Wenn aber, wie im dritten und vierten Falle, eine Linie des Systems selbst im Unendlichen ist, so sind die Zweige der Curve von parabolischer Form, zum Unendlichen fortschreitend, ohne einer angebbaren Asymptote unbegrenzt sich zu nähern.

Da die Kegel zweiten Grades, welche die Curve enthalten, zu Cylindern werden, wenn ihre Scheitel in unendliche Entfernung hinaus rücken, so ist es möglich, drei Cylinder zweiten Grades zu beschreiben, welche die Curve enthalten und deren Erzeugende den Asymptoten derselben respective parallel sind. In

---

*) Die Sätze dieses Artikels sind aus Cremona's Abhandlung genommen.

**) Die central-projectivische Darstellung zweier Kegel zweiten Grades mit einer gemeinschaftlichen Erzeugenden durch diese Letztere, die Spitzen und ihre Fluchtlinien lässt diese Eintheilung ganz besonders bequem übersehen, welche übrigens zuerst von Seydewitz in „Grunert's Archiv“, Bd. 10, p. 211 f. gegeben wurde.

dem Falle der cubischen Ellipse sind zwei dieser Cylinder imaginär, in dem Falle der hyperbolischen Parabel existieren nur zwei Cylinder, deren einer parabolisch ist, und in dem Falle der cubischen Parabel lässt sich nur ein parabolischer Cylinder durch die Curve legen.

Es folgt aus dem Artikel 74, dass in dem Falle der cubischen Ellipse die unendlich entfernte Ebene eine reelle „Linie in zwei Ebenen“ enthält, dass dieselbe aber in dem Falle der cubischen Hyperbel imaginär ist; mit anderen Worten, in dem ersten Falle, aber nicht im zweiten, existieren zwei parallele „Ebenen des Systems“. Aus der homographischen Eigenschaft, welche im Artikel 77 entwickelt wurde, erkennen wir, dass in dem Fall der cubischen Parabel irgend drei feste „Ebenen des Systems“ alle „Linien des Systems“ nach gleichem Verhältniss theilen. In Folge dessen schneiden alle Ebenen des Systems die abwickelbare Fläche in Parabeln. Das System kann als die Enveloppe von $xt^3 - 3yt^2 + 3zt - d = 0$ betrachtet werden, wo d eine Constante ist. Für weitere Details verweisen wir auf die Abhandlung von Cremona.

Man kann andererseits nach den **Umdrehungshyperboloiden fragen, welche durch eine gegebene Curve dritter Ordnung gehen.** Wenn σ, σ', σ'' die drei unendlich entfernten Punkte der Curve sind, so schneidet ihre Ebene das sie enthaltende Umdrehungshyperboloid in einem dem Dreieck $\sigma\sigma'\sigma''$ umgeschriebenen Kegelschnitt, welcher mit dem imaginären Kreis K dieser Ebene eine doppelte Berührung hat; die Berührungssehne bezeichnet die Stellung der cyclischen oder Parallelkreisebenen dieser Fläche.

Die Untersuchung dieser Frage geht daher auf ein einfaches planimetrisches Problem zurück, für welches die Hauptgrundlage der Lösung in dem Satze liegt, dass jede Sehne einer Schaar von Kegelschnitten, welche in zwei festen Punkten einander doppelt berühren, mit denselben eine Involution bestimmt, die in der Berührungssehne einen Doppelpunkt hat; und wobei man findet, dass vier dem Dreieck $\sigma\sigma'\sigma''$ umgeschriebene Kegelschnitte einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren und dass die Berührungssehnen ein vollständiges Viereck bilden, welches die Linien $\sigma\sigma'$, $\sigma'\sigma''$, $\sigma''\sigma$ zu Diagonalen hat.

Also: **Durch die cubische Hyperbel gehen vier reelle Umdrehungshyperboloide; wenn man durch einen**

Punkt die sechs Halbierungslinien der von den drei Asymptoten der Curve bestimmten Winkel legt, so sind dieselben zu dreien in vier Ebenen enthalten, welche die Stellungen der Kreisschnitte dieser Hyperboloide bezeichnen. Der hyperbolischen Parabel entsprechen wie der Ellipse zwei reelle Umdrehungshyperboloide, und der Parabel ein einziges.*)

80. Wir schreiten nun zur Classification der Curven höherer Ordnungen vor. Wir haben im Artikel 69 bewiesen, dass durch irgend eine Curve zwei Flächen beschrieben werden können, für welche in jedem Falle die niedrigsten Werthe ihrer Ordnungen leicht zu bestimmen sind.

Wenn wir mit den einfachsten Werthen von μ und ν beginnen und alle die verschiedenen Fälle des Durchschnitts zweier Flächen von den Ordnungen μ und ν untersuchen, so schliessen wir nothwendig alle möglichen Curven bis zur r^{ten} Ordnung hinauf ein, wo der Werth dieser Grenze r in jedem Falle leicht zu finden ist, wenn μ und ν gegeben sind. Wir beginnen mit dem Hinblick auf eine solche Discussion, indem wir die Characteristica der Durchschnittscurve zweier Flächen untersuchen.**)

Offenbar ist $m = \mu\nu$, und wenn die Flächen sich nicht berühren, wie wir diess zunächst voraussetzen, so hat ihre Durchschnittscurve keine vielfachen Punkte (Band I, Artikel 128) und es ist daher $\beta = 0$. Um die Charactere des Systems vollständig zu bestimmen, ist es nöthig, von ihren Singularitäten noch eine weitere zu kennen, und wir wählen r, die Ordnung der durch die Tangenten erzeugten abwickelbaren Fläche, zur Bestimmung. Nun wird die Gleichung dieser abwickelbaren Fläche durch Elimination von x', y', z' zwischen den vier Gleichungen

$$U' = 0, \quad U_1x + U_2y + U_3z + U_4w = 0,$$
$$V' = 0, \quad V_1x + V_2y + V_3z + V_4w = 0$$

erhalten, in welcher U_1, U_2, etc. die ersten Differentialcoefficien-

*) Cremona, „Journal f. Math.“ Bd. LXIII, p. 141. Vergl. auch „Annali di Mat.“ t. V.

**) Die in dem nachfolgenden Theile dieses Abschnitts auseinandergesetzte Theorie ist einer vom Juli 1849 datierten Abhandlung entnommen, welche der Verfasser im „Cambridge and Dublin Mathematical Journal“, Vol. V, p. 23 veröffentlichte.

ten der Polynome der Flächengleichungen sind. Diese Gleichungen sind offenbar von den Graden μ, ν, $(\mu-1)$, $(\nu-1)$ respective, und da nur die zwei letzten von ihnen x, y, z enthalten, so gehen diese Variabeln in dem Grade

$$\mu\nu\,(\nu-1)+\mu\nu\,(\mu-1)=\mu\nu\,(\mu+\nu-2)$$

in das Resultat ein.

Oder auch so: Die Bedingung, unter welcher eine „Linie des Systems" die willkürliche Linie

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta w=0,\quad \alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta' w=0$$

schneidet, ist

$$\begin{vmatrix} \alpha\,, & \beta\,, & \gamma\,, & \delta \\ \alpha'\,, & \beta'\,, & \gamma'\,, & \delta' \\ U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ V_1, & V_2, & V_3, & V_4 \end{vmatrix}=0,$$

und dieselbe ist offenbar vom Grade $(\mu+\nu-2)$. Diese Resultante bezeichnet eine Fläche, welche der Ort derjenigen Punkte ist, für welche der Durchschnitt ihrer Polarebenen bezüglich der Flächen U und V die gegebene gerade Linie schneidet. Und die Punkte, in welchen dieser Ort die Curve UV schneidet, sind diejenigen Punkte, für welche die Tangenten der Curve jene Gerade schneiden.

Aus $m=\mu\nu$, $\beta=0$, $r=\mu\nu\,(\mu+\nu-2)$ finden wir dann nach Artikel 66

$$\begin{aligned} \mu &= 3\mu\nu\,(\mu+\nu-3);\\ \alpha &= 2\mu\nu\,(3\mu+3\nu-10);\\ 2h &= \mu\nu\,(\mu-1)\,(\nu-1);\\ 2g &= \mu\nu\left\{\mu\nu\,(3\mu+3\nu-9)^2-22\,(\mu+\nu)+71\right\};\\ 2x &= \mu\nu\left\{\mu\nu\,(\mu+\nu-2)^2-4\,(\mu+\nu)+8\right\};\\ 2y &= \mu\nu\left\{\mu\nu\,(\mu+\nu-2)^2-10\,(\mu+\nu)+28\right\}. \end{aligned}$$

Man erhält für $\mu=\nu=2$; $\mu=\nu=3$; $\mu=2$, $\nu=3$ die respectiven Werthgruppen

$$\begin{aligned} m &= 4,\ 9,\ 6; & n &= 12,\ 81,\ 36; & \alpha &= 16,\ 144,\ 60;\\ \beta &= 0,\ 0,\ 0; & g &= 38,\ 3051,\ 531; & h &= 2,\ 18,\ 6;\\ x &= 16,\ 576,\ 126; & y &= 8,\ 504,\ 96; & r &= 8,\ 36,\ 18. \end{aligned}$$

81. Wir bestätigen diese Resultate durch die unabhängige Bestimmung der Zahl h der „Linien durch zwei Punkte", welche durch einen gegebenen Punkt gehen können, d. h. der Zahl von

Linien, welche durch einen gegebenen Punkt so gelegt werden können, dass sie je durch zwei Punkte der Durchschnittslinie von U und V gehen. Dazu ist es nöthig, an die Methode zu erinnern, welche im I. Bande im 12. Beispiele des Artikel 117 angewendet worden ist, um die Gleichung eines Kegels zu finden, dessen Scheitel ein beliebiger Punkt ist und welcher durch die Durchschnittslinie zweier Flächen U und V geht. Wir setzen voraus, der Scheitel des Kegels sei in der Curve genommen, so dass wir ebensowohl $U = 0$ als $V = 0$ für seine Coordinaten haben. Dann erhellt aus der citierten Stelle, dass die Gleichung des Kegels das Resultat der Elimination von λ zwischen den Gleichungen

$$\delta U + \frac{\lambda}{1.2}\,\delta^2 U + \frac{\lambda^2}{1.2.3}\,\delta^3 U + \text{etc.} = 0,$$

$$\delta V + \frac{\lambda}{1.2}\,\delta^2 V + \frac{\lambda^2}{1.2.3}\,\delta^3 V + \text{etc.} = 0$$

ist. Diese Gleichungen sind in λ von den Graden $(\mu - 1)$, $(\nu - 1)$; δU, $\delta^2 U$, etc. enthalten die Coordinaten x', y', z', xyz in den Graden $(\mu - 1)$, 1, $(\mu - 2)$, 2, etc. Die Form der Glieder der Resultante zeigt das Glied $(\delta U)^{\nu-1}\,V^{\mu-1}$. Man erkennt somit, dass dieselbe die Variabeln x, y, z in dem Grade

$$\nu - 1 + \nu(\mu - 1) = \mu\nu - 1$$

enthält, während sie x', y', z' im Grade $(\mu - 1)$ $(\nu - 1)$ enthält. Jede Kante dieses Kegels vom Grade $(\mu\nu - 1)$, dessen Scheitel ein Punkt der Curve ist, ist nothwendig eine „Linie durch zwei Punkte“. Wenn wir nun die Coordinaten eines Punktes x, y, z auf dieser Kegelfläche als bekannt betrachten und x', y', z' als gesucht, so bestimmt diese Gleichung vom Grade $(\mu - 1)$ $(\nu - 1)$ durch ihre Combination mit den Gleichungen $U = 0$ und $V = 0$ die Punkte, welche den durch den angenommenen Punkt gehenden „Linien durch zwei Punkte“ entsprechen. Die Gesammtzahl solcher Punkte ist daher $\mu\nu(\mu - 1)$ $(\nu - 1)$ und die Anzahl der Linien durch zwei Punkte ist natürlich die Hälfte von ihr.

Die in diesem Artikel bestimmte Zahl werde ich die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte in der Durchschnittscurve zweier Flächen nennen; denn einem in irgend einem Punkte gedachten Auge scheinen sich zwei Zweige einer Curve zu durchschneiden, wenn irgend eine von ihm ausgehende gerade Linie jene beiden Zweige schneidet.

82. Wir betrachten nun den Fall, wenn die Curve UV auch wirkliche Doppelpunkte besitzt, d. h. wenn die beiden Flächen sich in einem Punkte oder in mehreren Punkten berühren. In diesem Falle bleibt die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte genau dieselbe, wie im letzten Artikel, und der Kegel, welcher über der Durchschnittscurve steht und einen beliebigen Punkt des Raumes zum Scheitel hat, hat die Verbindungslinien des Scheitels mit den Berührungspunkten und mit den scheinbaren Doppelpunkten überdiess als Doppelkanten. Denn es ist leicht zu zeigen, dass die Untersuchung des letzten Artikels die Verbindungslinien eines willkürlichen Punktes mit den Berührungspunkten nicht umfasst. Sie bestimmt die Anzahl derjenigen Fälle, in denen der Radius vector von irgend einem Punkte aus zwei verschiedene den beiden Flächen gemeinschaftliche Werthe hat; der Radius vector eines Berührungspunktes hat dagegen nur einen für beide Flächen zugleich geltenden Werth, weil der Berührungspunkt in keiner der Flächen ein Doppelpunkt ist. Jeder Berührungspunkt fügt somit zur Zahl der Doppelkanten des Kegels eine Einheit hinzu und vermindert somit den Grad der abwickelbaren Fläche um zwei Einheiten. Diess könnte auch aus Artikel 80 abgeleitet werden, weil die von den Tangenten der Durchschnittscurve erzeugte Fläche die Tangentenebene in einem Berührungspunkt als einen Factor einschliessen muss, da jede Tangentenlinie in dieser Ebene die Durchschnittscurve berührt.

Wenn die Flächen in irgend einem Punkt eine stationäre Berührung haben (s. Band I, Artikel 129), so ist die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Scheitel des Kegels eine Cuspidalkante dieses Letzteren. Wenn die Flächen in t Punkten einfache Berührung und in β Punkten stationäre Berührung haben, so gelten die Formeln

$$m = \mu\nu; \quad \beta = \beta; \quad 2h = \mu\nu\,(\mu-1)\,(\nu-1) + 2t;$$
$$r = \mu\nu\,(\mu+\nu-2) - 2t - 3\beta,$$

und der Leser kann unschwer berechnen, wie die übrigen Zahlen des Artikel 80 modificiert werden. Man findet

$$n = 3\mu\nu\,(\mu+\nu-3) - 6t - 8\beta,$$
$$\alpha = \mu\nu\,\{6\,(\mu+\nu) - 20\} - 12t - 15\beta,$$
$$2g = \mu\nu\,\{9\,(\mu+\nu-3)^2 - 22\,(\mu+\nu) + 71\}$$
$$+ 4\,(11t + 14\beta) + 4(3t + 4\beta)\,\{3t + 4\beta - 3\mu\nu\,(\mu+\nu-3)\}.$$

$$2x = \mu\nu \left\{\mu\nu(\mu + \nu - 2)^2 - 4(\mu + \nu) + 8\right\} + 8t + 11\beta$$
$$+ (2t + 3\beta)\left\{2t + 3\beta - 2\mu\nu(\mu + \nu - 2)\right\},$$
$$2y = \mu\nu \left\{\mu\nu(\mu + \nu - 2)^2 - 10(\mu + \nu) + 28\right\} + 20t + 27\beta$$
$$+ (2t + 3\beta)\left\{2t + 3\beta - 2\mu\nu(\mu + \nu - 2)\right\}.$$

Der Ausdruck für α zeigt, dass zwei Flächen zweiter Ordnung immer nur entweder eine einfache, oder eine stationäre Berührung haben können, wenn nicht ihre Durchschnittscurve eine uneigentliche Curve ihrer Ordnung werden soll. Für

$$m = 4, \quad t = 1, \quad \beta = 0$$

und

$$m = 4, \quad t = 0, \quad \beta = 1$$

sind

$$n = 6, 4; \quad g = 6, 2; \quad h = 3, 2; \quad \alpha = 4, 1;$$
$$x = 6, 2; \quad y = 4, 2; \quad r = 6, 5.$$

Andere Fälle sind nicht möglich.

Wir können so eine **Grenze der Zahl von Punkten erhalten, in welchen zwei Flächen sich berühren können, wenn ihre Durchschnittscurve nicht in Curven niedrigerer Ordnungen zerfällt**; denn wir haben nur die Zahl scheinbarer Doppelpunkte von der Maximalzahl der Doppelpunkte zu subtrahieren, welche eine Curve vom Grade $\mu\nu$ haben kann.

Jene ist aber durch

$$\frac{\mu\nu(\mu - 1)(\nu - 1)}{2},$$

diese durch

$$\frac{(\mu\nu - 1)(\mu\nu - 2)}{2}$$

ausgedrückt; ihre Differenz, d. h. die Maximalzahl der aus Berührungen hervorgehenden Doppelpunkte, ist also

$$\frac{\mu\nu(\mu + \nu - 4)}{2} + 1;$$

für	$\mu = \nu = 2$	also	$=$	$1;$
für	$\mu = \nu = 3$	„	$=$	$10;$
für	$\mu = 2, \nu = 3$	„	$=$	$4.$

83. **Wir wollen nun zeigen, dass wenn die Durchschnittscurve zweier Flächen in zwei einfachere Curven**

zerfällt, die Characteristica dieser Curven so verbunden sind, dass aus den bekannten der einen die der anderen gefunden werden können.

Es ward im Artikel 81 bewiesen, dass die Punkte der Durchschnittscurve, welche zu den durch einen gegebenen Punkt gehenden „Linien durch zwei Punkte“ gehören, den Durchschnitt dieser Curve UV mit einer Fläche von der Ordnung $(\mu-1)(\nu-1)$ bilden. Setzen wir nun voraus, dass die Durchschnittscurve in zwei Curven von den Ordnungen m und m' zerfällt, so dass

$$m + m' = \mu\nu$$

ist, so müssen die zwei Punkte in irgend einer von jenen Linien entweder beide der Curve m oder beide der Curve m', oder es muss der eine jener, der andere dieser angehören. Sei die Zahl der Linien durch zwei Punkte in der ersten Curve h, in der zweiten h', und bezeichne H die Zahl der Linien, welche je einen Punkt in jeder der Curven haben, oder mit anderm Ausdruck die Zahl der scheinbaren Durchschnittspunkte beider Curven. Indem wir dann die Punkte betrachten, in denen jede der beiden Curven die Fläche von der Ordnung $(\mu-1)(\nu-1)$ schneidet, erhalten wir offenbar die Gleichungen

$$m(\mu-1)(\nu-1) = 2h + H, \quad m'(\mu-1)(\nu-1) = 2h' + H;$$

also

$$2(h-h') = (m-m')(\mu-1)(\nu-1).$$

Wenn also m und h bekannt sind, so können m' und h' gefunden werden. Um ein Beispiel zu nehmen, welches wir früher discutiert haben, denken wir den Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades aus einer geraden Linie, für welche $m' = 1$, $h' = 0$ ist, und einer Curve dritter Ordnung bestehen, also $m = 3$, und finden aus der vorher geschriebenen Gleichung $h = 1$.

84. In gleicher Art ward im Artikel 80 bewiesen, dass der Ort der Punkte, für welche die Durchschnittslinie der in Bezug auf U und V genommenen Polarebenen eine willkürlich gewählte Linie schneidet, eine Fläche von der Ordnung $(\mu + \nu - 2)$ ist. Die erste Curve schneidet diese Fläche in den t Punkten, in welchen die Curven m und m' sich durchschneiden, weil U und V sich in diesen Punkten berühren, und in den r Punkten, für welche die Tangenten der Curve die gegebene Linie schneiden. Man

hat dann

$$m(\mu + \nu - 2) = r + t, \quad m'(\mu + \nu - 2) = r' + t,$$
$$(m - m')(\mu + \nu - 2) = r - r',$$

eine Gleichung, welche leicht als aus der des letzten Artikels hervorgehend bewiesen werden kann.

Der Durchschnitt der concentrischen Kegel, welche über den Curven m, m' stehen, wird gebildet von den t Linien nach den wirklichen Durchschnittspunkten der Curven und den H Linien, die den scheinbaren Durchschnittspunkten entsprechen; und die Gleichung

$$H + t = mm'$$

wird leicht durch die Werthe bestätigt, die eben für H und t gefunden worden sind, indem man erinnert, dass auch die Relationen gelten

$$m' = \mu\nu - m, \quad r = m(m-1) - 2h.$$

85. Nachdem nun die zur Anwendung kommenden Principien begründet sind, wenden wir uns zur Aufzählung der verschiedenen Species von Curven der vierten Ordnung.

Jede doppelt gekrümmte Curve vierter Ordnung liegt auf einer Fläche zweiten Grades. Denn die durch neun Punkte der Curve bestimmte Fläche zweiten Grades muss nach Artikel 69 die Curve vollständig enthalten. Aber es ist nicht allgemein wahr, dass durch eine solche Curve eine zweite Fläche zweiten Grades beschrieben werden kann. Es giebt daher zwei Hauptfamilien von Curven vierten Grades, nämlich diejenigen, welche Durchschnittscurven zweier Flächen zweiten Grades sind, und die andern, durch welche nur eine Fläche zweiten Grades gelegt werden kann.*)

Wir beginnen die Betrachtung mit den Curven der ersten Familie.

Die Charactere der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades, die sich nicht berühren, sind nach Artikel 80

$$m = 4, \quad n = 12, \quad r = 8, \quad \alpha = 16, \quad \beta = 0, \quad x = 16,$$
$$y = 8, \quad g = 38, \quad h = 2.$$

---

*) Die Existenz dieser zweiten Familie von Curven vierten Grades ward zuerst in der vorher angezogenen Abhandlung bewiesen.

Mehrere von diesen Resultaten können unabhängig begründet werden. So haben wir im Artikel 160 des I. Bandes die Gleichung der abwickelbaren Fläche gegeben, welche durch die Tangenten der Curve gebildet wird, und die vom achten Grade ist; eben dort ist auch bewiesen, dass die abwickelbare Fläche in jeder der vier Flächen des gemeinschaftlichen sich selbst conjugierten Tetraeders eine Doppellinie von der vierten Ordnung hat; in Folge dessen ist $x = 16$.*)

Jede von diesen Curven vierter Ordnung geht durch die vier Punkte der Raumcurve, in denen sie von Erzeugenden desjenigen die Curve enthaltenden Kegels zweiten Grades berührt wird, dessen Spitze der Pol ihrer Ebene ist. Die entsprechenden Berührungsebenen desselben sind die stationären Osculationsebenen der Curve.

Ferner ist im Artikel 160 des I. Bandes gezeigt worden, dass die Gleichung der Osculationsebene von der Form $S'U = SV$ ist, wenn U und V die Tangentenebenen zu U und V in dem Punkte bezeichnen; sie enthält die Coordinaten des Berührungspunktes im dritten Grade.

Wenn dann gefordert wird, durch irgend einen angenommenen Punkt eine Osculationsebene zu legen, so sind die Berührungspunkte durch die Durchschnitte der Curve UV mit einer Fläche vom dritten Grade bestimmt, und die Aufgabe nimmt daher zwölf Auflösungen an, d. i. man hat $n = 12$.

Endlich ist offenbar jede gerade Erzeugende einer die Curve enthaltenden Fläche zweiten Grades eine „Linie durch zwei Punkte" (Artikel 73); und da wir durch einen beliebigen Punkt eine Fläche zweiten Grades von der Familie $U + \lambda V = 0$ beschreiben können, so sind die beiden durch diesen Punkt gehenden geradlinigen Erzeugenden derselben zwei „Linien durch zwei Punkte", d. i. $h = 2$.

Die „Linien durch zwei Punkte" können überdiess durch folgende Construction gefunden werden, deren Begründung leicht zu erkennen ist: Man legt durch den gewählten Punkt O und durch die Durchschnittslinie seiner Polarebenen in Bezug auf die

---

*) Es hätte auch ausgesprochen werden mögen, dass die zweien Flächen zweiten Grades gemeinschaftlich umschriebene abwickelbare Fläche einen Kegelschnitt in jeder der Hauptebenen als Doppellinie hat; siehe Band I, Artikel 158. Die Zahl $y = 8$ geht daraus hervor.

beiden Flächen zweiten Grades eine Ebene; sie bestimmt mit der Curve vierter Ordnung vier Punkte, welche in zwei sich in O durchschneidenden geraden Linien liegen.

Eine Curve dieser Art wird nach Band I, Artikel 120 durch acht Punkte bestimmt.

86. Wenn zweitens die beiden Flächen zweiten Grades sich berühren, so besitzt nach Artikel 82 der über der Curve stehende Kegel eine Doppelkante mehr als im ersten Falle und die abwickelbare Fläche ist von einem um zwei Einheiten niedrigerem Grade.

Also hat man

$$m = 4, \quad n = 6, \quad r = 6, \quad g = 6, \quad h = 3, \quad \alpha = 4,$$
$$\beta = 0, \quad x = 6, \quad y = 4.$$

Die Doppelcurve sechster Ordnung wird von zwei ebenen Curven dritter Ordnung gebildet, die in den Polarebenen der Spitzen der beiden Kegel zweiten Grades liegen, welche die Curve enthalten — abgesehen von demjenigen, welcher aus dem Doppelpunkt beschrieben ist und dessen Polarebene natürlich durch diesen selbst geht; jede derselben begegnet der Curve in zwei Punkten, denen als zugehörige Tangentenebenen des Kegels stationäre Ebenen entsprechen.

Drittens können sich die Flächen zweiten Grades in einem stationären Punkt berühren, und wir haben

$$m = 4, \quad n = 4, \quad r = 5, \quad g = 2, \quad h = 2, \quad \alpha = 1,$$
$$\beta = 1, \quad x = 2, \quad y = 2.$$

Die Ebene des Doppelkegelschnitts ist die Polarebene des Scheitels von dem einzigen Kegel zweiten Grades, der, ausser dem vom Rückkehrpunkt bestimmten, die Curve enthält; der Kegelschnitt schneidet die Curve in dem der stationären Ebene entsprechenden Punkte.

Diess System kann als die Enveloppe von

$$at^4 + 6ct^2 + 4dt + e = 0$$

angesehen werden, wo t einen veränderlichen Parameter bezeichnet.*) Die Enveloppe ist

$$(ae + 3c^2)^3 = 27\,(ace - ad^2 - c^3)^2,$$

welche in entwickelter Form den allen Gliedern gemeinschaft-

*) Diese Bemerkung verdankt der Autor A. Cayley.

lichen Factor a auszuscheiden gestattet und sich so auf den fünften Grad reduciert. Die Cuspidalkante ist der Durchschnitt von $ae + 3c^2 = 0$ mit $4ce - 3d^2 = 0$.

Weil ein Kegel vom vierten Grade nicht mehr als drei Doppelkanten haben kann, so können zwei Flächen zweiten Grades sich nicht in mehr als einem Punkte berühren, ohne dass ihre Durchschnittscurve in einfachere Curven zerfällt. Wenn sie sich in zwei Punkten derselben geraden Erzeugenden berühren, so ist dieselbe nothwendig den Flächen gemeinschaftlich, und der Durchschnitt zerfällt in eine gerade Linie und eine Curve dritter Ordnung. Wenn sie sich in zwei Punkten berühren, die nicht derselben Erzeugenden angehören, so zerfällt die Durchschnittscurve in zwei ebene Kegelschnitte, deren Ebenen sich in der geraden Verbindungslinie jener Punkte durchschneiden.

87. Wir erinnern hier an die am Schlusse des Artikel 60 gemachte Bemerkung von der Erzeugung der abwickelbaren Flächen durch die gemeinschaftliche Berührungsebene zweier Directrixen; sie ist schon bei dem System dritter Ordnung bestätigt worden (Art. 78), und wir wollen hier das der vierten Ordnung im Rückblick auf Artikel 160 des ersten Bandes nach Massgabe derselben Idee kurz betrachten. Wir fügen so zu dem Vorigen die reciproken Gesichtspunkte.

Denken wir zwei Kegelschnitte k, k_1 in parallelen Ebenen, bezogen auf ein Coordinatensystem aus der Ebene des ersten und den Ebenen der parallelen conjugierten Durchmesser b, c und b', c' bei dem in der Achse der x gemessenen Abstande a von beiden, und sind ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' die Coordinaten der derselben „Linie des Systems“ angehörigen Punkte der Directrixen, so hat man

$$\xi = 0, \quad \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1; \quad \xi' = a, \quad \frac{\eta'^2}{b'^2} + \frac{\zeta'^2}{c'^2} = 1;$$

der Parallelismus der Tangenten fordert

$$\frac{c^2}{b^2}\,\frac{\eta}{\zeta} = \frac{c'^2}{b'^2}\,\frac{\eta'}{\zeta'}$$

und die Gleichungen der Linien des Systems sind

$$y - \eta = \frac{\eta' - \eta}{\zeta' - \zeta}(z - \zeta), \quad x = \frac{a}{\zeta' - \zeta}(z - \zeta);$$

also für $z = 0$

$$(\zeta' - \zeta)\, y = \eta\zeta' - \eta'\zeta, \quad (\zeta' - \zeta)\, x = -\, a\zeta.$$

Die Elimination von η, η', ζ, ζ' zwischen diesen Gleichungen liefert

$$\frac{a^2}{b^2c'^2 - b'^2c^2}\, y^2 + \frac{x^2}{c^2} - \frac{(x-a)^2}{c'^2} = 0;$$

und ähnlich

$$\frac{a^2}{c^2b'^2 - c'^2b^2}\, z^2 + \frac{x^2}{b^2} - \frac{(x-a)^2}{b'^2} = 0.$$

Diese Curven sind Doppelcurven der Fläche, wie die Directrixen selbst und können zugleich als Kegelschnitte durch k_2, k_3 bezeichne twerden. Sie liegen in den Ebenen der parallelen conjugierten Durchmesser der ersten und haben ihre Centra in der Verbindungslinie der Centra von jenen, etc. Man hat die Abscisse des Centrums von k_2 und die halben Längen der den Achsen x und y parallelen conjugierten Durchmesser

$$n = \frac{ac^2}{c^2 - c'^2}, \quad p^2 = \frac{a^2c^2c'^2}{(c^2 - c'^2)^2}, \quad q^2 = \frac{c^2b'^2 - c'^2b^2}{c^2 - c'^2}.$$

Die Gleichungen der Linie des Systems zeigen leicht, dass das Doppelverhältniss der vier Punkte constant ist, welche eine solche mit den vier Doppelcurven der abwickelbaren Fläche gemein hat. Wenn die zwei Kegelschnitte k_1, k_2 concentrisch sind, so liegt eine der Doppelcurven im Unendlichen, während die letzte gleichfalls mit jenen concentrisch ist und das besagte Doppelverhältniss verwandelt sich in ein einfaches Verhältniss.

Die Ebene

$$Ax + By + Cz = 1$$

ist eine Ebene des Systems, wenn sie die Tangenten der Directrixen in zwei Punkten derselben Linie des Systems enthält, also für

$$A = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{b'^2}{b^2}\frac{\eta}{\eta'}\right), \quad B = \frac{\eta}{b^2}, \quad C = \frac{\zeta}{c^2}.$$

Eine Fläche zweiter Ordnung, deren Centrum der Achse x angehört

$$\frac{(x-x_1)^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\nu^2} = 1$$

berührt diese Ebene für

$$A^2(\lambda^2 - x_1^2) + B^2\mu + C^2\nu^2 + 2Ax_1 - 1 = 0.$$

Die Elimination von η, η', ζ aus dieser Gleichung mit Hilfe des Früheren liefert die Bedingungen, unter welchen alle Ebenen des Systems diese Fläche zweiter Ordnung berühren, in der Form

$$\lambda^2 = x_1{}^2 - ax_1, \quad \mu^2 = \frac{a - x_1}{a}\, b^2 + \frac{x_1}{a}\, b'^2,$$

$$\nu^2 = \frac{a - x_1}{a}\, c^2 + \frac{x_1}{a}\, c'^2,$$

und ihre Einführung in die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung die allgemeine Gleichung der Flächen zweiter Ordnung, welche der Abwickelungsfläche eingeschrieben sind,

$$\frac{(x - x_1)^2}{x_1{}^2 - ax_1} + \frac{ay^2}{x_1\,(b'^2 - b^2) + ab^2} + \frac{az^2}{x_1\,(c'^2 - c^2) + ac^2} = 1.$$

Ordnet man diese Gleichung nach Potenzen von x_1,

$$Ax_1{}^3 + Bx_1{}^2 + Cx_1 + D = 0,$$

$$A = \frac{c'^2 - c^2}{a}\, y^2 + \frac{b'^2 - b^2}{a}\, z^2 - \frac{(b'^2 - b^2)\,(c'^2 - c^2)}{a^2}\,(2x - a),$$

$$B = \frac{(b'^2 - b^2)\,(c'^2 - c^2)}{a^2}\, x^2 + (2c^2 - c'^2)\, y^2 + (2b^2 - b'^2)\, z^2$$
$$- \frac{b'^2c^2 + b^2c'^2 - 2b^2c^2}{a}\,(2x - a),$$

$$C = \frac{b'^2c^2 + b^2c'^2 - 2b^2c^2}{a}\, x^2 - ac^2y^2 - ab^2z^2 - b^2c^2\,(2x - a),$$

$$D = b^2c^2x^2,$$

so liefert die Elimination von x_1 zwischen ihr und der derivierten Gleichung

$$3Ax_1{}^2 + 2Bx_1 + C = 0$$

in der Form

$$27\,A^2D^2 - 18\,ABCD - B^2C^2 + 4\,B^3D + 4\,C^3A = 0$$

die Gleichung der abwickelbaren Fläche, vom achten Grade.

Die Rückkehrkante derselben ist durch

$$B^2 - 3\,AC = 0, \quad C^2 - 3\,BD = 0$$

dargestellt.

Verschiedene bekannte Resultate lassen sich hiermit verbinden, z. B. dass die Pole einer beliebigen Ebene in Bezug auf alle der Abwickelungsfläche eingeschriebenen Flächen zweiter Ordnung in einer geraden Linie liegen; dass jede solche eingeschriebene Fläche mit ihr acht gerade Linien, vier von jedem System der Erzeugenden, gemein hat.

Wenn die dritte Directrix die Ebene der ersten berührt, so hat man

$$n^2 = p^2,$$

und die zweite der Directrixen deckt die erste von ihnen und die vierte berührt gleichfalls die Ebene der ersten. Man hat

$$a = 0, \quad \lambda^2 = \mu^2,$$

d. h. alle die eingeschriebenen Flächen berühren einander und die Ebene der vereinigten Directrixen im Anfangspunkt. Man findet

$$A = -\frac{c^2}{p} y^2 + \frac{q^2 - b^2}{p} z^2 + 2 \frac{q^2 - b^2}{p^2} c^2 x,$$

$$B = -\frac{q^2 - b^2}{p^2} c^2 x^2 + c^2 y^2 + b^2 z^2 - 2 \frac{q^2 - 2b^2}{p} c^2 x,$$

$$C = C' c^2 x, \quad C' = \frac{q^2 - 2b^2}{p} x - 2b^2,$$

$$D = b^2 c^2 x^2,$$

und kann die allgemeine Gleichung der Fläche danach modificieren. Da eine zweite eingeschriebene Fläche zweiten Grades im allgemeinen Fall durch ihre Parameter λ', μ', ν' und den Abstand $\varDelta x_1$ ihres Centrums von dem der ersten Fläche mittelst der Formeln

$$\lambda'^2 = (x_1 + \varDelta x_1)^2 - (x_1 + \varDelta x_1)\, a,$$

$$\mu'^2 = b^2 - \frac{x_1 + \varDelta x_1}{a} (b^2 - b'^2),$$

$$\nu'^2 = c^2 - \frac{x_1 + \varDelta x_1}{a} (c^2 - c'^2)$$

bestimmt ist, so gehen umgekehrt aus den Gleichungen zweier solcher eingeschriebenen Flächen die Charactere der Abwickelungsfläche hervor. Die Flächen unterliegen dabei der Bedingung, dass die der Verbindungslinie ihrer Centra conjugierten Diametralebenen einander parallel sind; aber durch die Bildung eines centralcollinearen Systems erhalten wir ohne Veränderung der Resultate den allgemeinen Fall; die vier Doppellinien zweiten Grades in der abwickelbaren Fläche liegen in Ebenen, deren jede in Bezug auf beide gegebene Flächen den Durchschnittspunkt der drei übrigen zum Pol hat.

Denkt man sich die beiden gegebenen Flächen als confocal, also concentrisch, von gleichen Achsenrichtungen und denselben Brennpunkten der Hauptschnitte, so findet man, dass die umgeschriebene Abwickelungsfläche den imaginären Kreis in der unendlich entfernten Ebene zu einer Doppelcurve hat. (Vgl. Band I, Artikel 156 f.)

88. Diese Umhüllungsfläche entspricht der räumlichen Curve vierter Ordnung, welche aus dem Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades hervorgeht, nach dem Gesetze der Reciprocität. Die Eigenschaften der einen liefern daher auch Eigenschaften der andern.

Die Rückkehrkante dieser Fläche ist von der Ordnung 12 und der Klasse 4. Da die Fläche selbst von der achten Ordnung ist, so wird ihr Durchschnitt 16ter Ordnung mit einer eingeschriebenen Fläche zweiten Grades von jenen 8 Erzeugenden und der doppelt zählenden Berührungscurve 4ter Ordnung zwischen beiden, die auch von jenen berührt wird, zusammengesetzt.

Der betrachteten Erzeugung durch zwei Kegelschnitte gemäss wird jeder der vier Kegelschnitte von vier Erzeugenden der Fläche berührt, ihre Berührungspunkte sind stationäre Punkte der Fläche. Die Ebenen, welche durch die von demselben Punkt eines Kegelschnitts ausgehenden Erzeugenden paarweis bestimmt sind, umhüllen den aus dem Pol seiner Ebene beschriebenen Kegel 4ter Klasse. Der ebene Querschnitt der Fläche ist von der Ordnung 8, der Klasse 4, und besitzt 8 Doppelpunkte, 12 Rückkehrpunkte, 2 Doppeltangenten. Der Kegel, der aus einem Punkte der Rückkehrkante der Fläche von den durch ihre Erzeugenden bestimmten Ebenen umhüllt wird, ist von der Klasse 8 und der Ordnung 12 und hat 4 Inflexionstangentenebenen, 16 Rückkehrtangentenebenen, 16 Doppeltangentenebenen und 38 Doppelkanten.*)

Den beiden speciellen Fällen der Curve vierter Ordnung entsprechen specielle Fälle der umgeschriebenen Abwickelungsfläche; sie entspringen aus der einfachen und der stationären Berührung der dirigierenden Flächen. Die erstere ist von der Ordnung und Klasse 6, zeigt ebene Schnitte derselben Art mit 4 Rückkehrpunkten und Inflexionstangenten und 6 Doppelpunkten und Doppeltangenten.

Die andere ist von der 5ten Ordnung und der 4ten Klasse, hat eine Inflexionserzeugende, eine Rückkehrkante 4ter Ordnung (*C*)

---

*) Von den Curven vierter Ordnung aus zwei Flächen zweiten Grades und den entsprechenden abwickelbaren Flächen hat Chasles gehandelt in „Comptes rendus", t. LIV. p. 317, 418, 715.

mit einem stationären Punkte (a), die von jener Inflexionskante in b berührt werde, und eine Doppelcurve 2ter Ordnung. Schneidet die Inflexionserzeugende dann die dem Punkte a entsprechende Ebene des Systems C in c, und die Erzeugende der Fläche aus a die durch b gehende Ebene des Systems C in d, so ist $abcd$ ein Tetraeder, dessen Flächen acd und bcd Tangentenebenen und dessen Kanten ad, bc Erzeugende der abwickelbaren Fläche sind.

Jede Erzeugende der Fläche schneidet eine andere, und man kann sie, wie die zugehörigen Berührungsebenen der Fläche und die zugehörigen Berührungspunkte der Rückkehrkante als conjugierte Linien, Ebenen und Punkte respective bezeichnen.*)

Die geraden Verbindungslinien conjugierter Punkte gehen durch c und bilden einen die Rückkehrkante doppelt berührenden Kegel zweiten Grades. Denselben Kegel umhüllt die Ebene zweier conjugierter Geraden; dabei beschreibt der Durchschnittspunkt derselben in der Ebene abd den Doppelkegelschnitt der Fläche; derselbe wird von der Durchschnittslinie conjugierter Ebenen umhüllt.**) Das Ebenenbüschel, welches die Paare conjugierter Punkte mit der Kante ad bestimmen, ist involutorisch und acd, abd sind seine Doppel- oder Brennebenen; dieselben Ebenen bilden in der Inflexionserzeugenden bc eine Involution von den Doppelpunkten b und c.

Dass die Fläche die abwickelbare Umhüllung zweier Kegelschnitte ist, die einen gemeinschaftlichen Punkt haben und von denen der eine die Durchschnittslinie ihrer Ebenen berührt, folgt aus dem Vorigen.

89. Wenn eine Curve vierter Ordnung nicht der Durchschnitt zweier Flächen vom zweiten Grade ist, so muss sie der **theilweise Durchschnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ordnung** sein. Wir haben bereits gesehen, dass sich eine Fläche zweiten Grades immer durch die Curve legen lässt; wenn wir alsdann durch dreizehn Punkte in ihr und durch sechs andere, welche nicht in der nämlichen Ebene liegen dürfen,***) eine Fläche dritter Ordnung beschreiben, so muss

---

*) L. Cremona, „Comptes rendus“, t. LIV, p. 604.

**) Wie sich darauf ein System geometrischer Verwandtschaft gründen lässt, vergleiche man in der interessanten Ausführung a. a. O.

***) Diese Einschränkung ist deshalb nothwendig, weil sonst die Fläche dritter Ordnung aus einer Ebene und einer Fläche zweiten Gradieselbe die gegebene Curve vollständig enthalten. Der Durchschnitt dieser cubischen mit der vorher bestimmten quadratischen Fläche muss die gegebene Curve vierter Ordnung in Verbindung mit einer Linie zweiten Grades sein, und die scheinbaren Doppelpunkte der beiden Curven sind durch die Relation $h - h' = 2$ verbunden, wie man durch Einsetzung der Werthe

$$m = 4, \quad m' = 2, \quad \mu = 3, \quad \nu = 2$$

in die Formeln des Artikel 83 erkennt. Wenn die Linie zweiten Grades eine ebene Curve ist, d. h. ein Kegelschnitt oder ein Paar sich schneidende gerade Linien, so ist $h' = 0$ und daher $h = 2$; die Curve vierter Ordnung ist somit eine von der vorher besprochenen Art, welche zwei scheinbare Doppelpunkte besitzt. Es ist ausserdem leicht zu erkennen, dass immer, wenn eine cubische und eine quadratische Fläche eine ebene Curve gemein haben, durch den übrigen Theil der Durchschnittscurve eine zweite quadratische Fläche gelegt werden kann; denn die Gleichungen der Flächen sind respective von den Formen

$$zw = u_2, \quad zv_2 = u_2 x;$$

sie durchschneiden sich also in

$$v_2 = xw.$$

Wenn dagegen die quadratische und die cubische Fläche zwei gerade Linien gemein haben, die nicht in derselben Ebene liegen, so bilden diese ein System mit einem scheinbaren Doppelpunkt, weil durch jeden Punkt eine beiden Geraden gemeinschaftliche Transversale gezogen werden kann. Weil somit $h' = 1$, so ist $h = 3$, d. h. diese Curven vierter Ordnung haben drei scheinbare Doppelpunkte und sind daher wesentlich von den vorher discutierten verschieden, welche deren nicht mehr als 2 haben können.

Die numerischen Charactere dieser Curven sind genau die nämlichen, wie die der ersten Species in Artikel 86, da der über einer solchen Curve stehende Kegel drei Doppelkanten besitzt, und der Unterschied besteht nur darin, dass eine der Doppel-

---

des bestehen könnte. So kann, wenn eine Curve fünfter Ordnung in einer Fläche vom zweiten Grade liegt, nicht bewiesen werden, dass eine von jener verschiedene Fläche dritter Ordnung die gegebene Curve enthalten könne; siehe „Cambridge and Dublin Mathematical Journal“, Vol. V, p. 27.

kanten in dem einen Falle aus einem wirklichen Doppelpunkte hervorgeht, während sie im anderen ebenso wie die übrigen aus einem scheinbaren Doppelpunkte entspringt.

Diess System von Curven vierter Ordnung ist das reciproke von dem durch die Enveloppe von

$$at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e = 0$$

gegebenen. Diess letztere System hat ausser seiner Cuspidalcurve der sechsten Ordnung noch eine Nodalcurve oder Knotenlinie der vierten Ordnung, welche von der jetzt behandelten Art ist. Umgekehrt ist die Doppelcurve unseres Systems von der Ordnung 6. Sie bestimmt in der Rückkehrkante die 4 Punkte, denen stationäre Ebenen entsprechen; ausser diesen existieren 4 Schnittpunkte beider Curven, welche für die Doppelcurve stationär sind.

Es wird wie im Artikel 73 bewiesen, dass diese Curven vierter Ordnung durch alle diejenigen Erzeugenden der durch sie möglichen quadratischen Fläche in drei Punkten geschnitten werden, welche mit den geraden Linien von demselben System sind, die beiden Flächen gemeinschaftlich angehören; dass sie aber von den Erzeugenden des jedesmaligen andern Systems immer in nur einem Punkte geschnitten werden. Daraus folgt, dass das Doppelverhältniss von vier Ebenen, welche durch vier Punkte der Curve und eine jener sie dreifach schneidenden Erzeugenden bestimmt sind, von der Lage dieser letzteren unabhängig ist.

Der über der Curve stehende Kegel, welcher zugleich einen ihrer Punkte zum Scheitel hat, ist dann ein Kegel dritten Grades mit einer Doppelkante, welche eine der beiden durch den Scheitel gehenden Erzeugenden der quadratischen Fläche ist, die durch die Curve gelegt werden kann.

Während so eine beliebige Curve dritter Ordnung als die Projection des Durchschnitts zweier quadratischen Flächen angesehen werden kann, können Curven vierter Ordnung, welche dieser zweiten Familie angehören, nur in Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt projiciert werden. Die Fläche zweiten Grades kann als die Fläche betrachtet werden, welche durch die sämmtlichen „Linien durch drei Punkte“ der Curve erzeugt wird.

Da die Linien dritter Ordnung mit Doppelpunkt 3 Inflexionspunkte in einer Geraden haben, welche die harmonische Polare des Doppelpunktes in Bezug auf das Dreieck der Inflexionstangenten ist (Art. 74), so gehen durch einen beliebigen Punkt unserer Curve 3 Ebenen ihres Systems, deren Berührungspunkte mit dem gegebenen in derselben Ebene liegen, welche die harmonische Polare der durch den gegebenen Punkt gehenden dreifach schneidenden Erzeugenden in Bezug auf die dreiseitige Ecke jener Ebenen des Systems ist.

Aus dem Gesagten ist endlich offenbar, dass jede Curve vierter Ordnung, welche drei scheinbare Doppelpunkte hat, als der Durchschnitt einer Fläche zweiten Grades mit einem Kegel dritten Grades betrachtet werden kann, für welchen eine der Erzeugenden der Fläche zweiten Grades eine Doppelkante ist.

90. Cayley hat bemerkt, dass es möglich ist, durch acht Punkte eine Curve vierter Ordnung von dieser zweiten Familie zu beschreiben. Das Problem erfordert, dass wir durch die acht Punkte einen Kegel dritten Grades legen, welcher einen von ihnen zum Scheitel hat und eine Doppelkante besitzt, welche zugleich eine Erzeugende einer durch diese acht Punkte gehenden Fläche zweiten Grades ist. Nun ward im Artikel 85 bewiesen, dass wenn ein System von Flächen zweiten Grades durch acht Punkte gelegt wird, alle durch irgend einen dieser Punkte gehenden Erzeugenden seiner Flächen in einem Kegel dritten Grades liegen, welcher durch die von denselben acht Punkten bestimmte Curve vierter Ordnung von der ersten Familie hindurchgeht. Wenn sodann $S = 0$, $S' = 0$, $S'' = 0$ drei cubische Kegel sind, welche den nämlichen Scheitel besitzen und durch sieben andere Punkte gehen, so ist $\lambda S + \mu S' + \nu S'' = 0$ der allgemeine Ausdruck für einen dieselben Bedingungen erfüllenden Kegel, und wenn derselbe eine Doppelkante haben soll, so geht

$$\lambda \frac{dS}{dx} + \mu \frac{dS'}{dx} + \nu \frac{dS''}{dx} = 0$$

durch diese Kante. Wenn man daher λ, μ, ν zwischen den drei Differentialen eliminiert, so ist der Ort der Doppelkanten der Kegel vom sechsten Grade

$$\frac{dS}{dx}\left(\frac{dS'}{dy} \cdot \frac{dS''}{dz} - \frac{dS''}{dy} \cdot \frac{dS'}{dz}\right) + \text{etc.} = 0.$$

Der Durchschnitt dieses Kegels vom sechsten Grade mit dem andern vom dritten Grade bestimmt gerade Linien, durch deren jede eine Kegelfläche zweiten und eine Kegelfläche dritten Grades beschrieben werden können, welche die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen.

Man wird endlich bemerken, dass die geraden Linien, welche den angenommenen Scheitel mit den sieben andern Punkten verbinden, einfache Kanten eines dieser Kegel und Doppelkanten des andern sind, und dass sie, mit vierzehn Durchschnittslinien gleichwerthig, der Auflösung des Problems fremd sind. In Folge dessen können vier Curven vierter Ordnung von der zweiten Familie durch die gegebenen Punkte beschrieben werden.*)

91. In der Ausdehnung dieser Classification auf Curven höherer Ordnungen liegt keine wesentliche Schwierigkeit.

Die Curven fünfter Ordnung bestehen aus drei Familien, welche vier, fünf oder sechs scheinbare Doppelpunkte besitzen, während die erste Familie überdiess einen oder zwei, und die zweite einen wirklichen Doppelpunkt oder Cuspidalpunkt haben kann.

Curven 5ter Ordnung im Raume entstehen nämlich zuerst als theilweiser Durchschnitt einer Fläche zweiter und einer Fläche dritter Ordnung, welche eine Gerade gemein haben. Ist dieselbe durch

$$x = 0, \quad y = 0$$

dargestellt, so sind

$$xw - yz = 0$$

und

$$xV - yU = 0$$

die Gleichungen dieser Flächen für

$$V = 0, \quad \text{und} \quad U = 0$$

als Gleichungen von Flächen zweiten Grades. Daraus erhellt, dass die Curve auch auf der Fläche dritter Ordnung

$$zV - wU = 0$$

gelegen ist, welche mit jener die Curve vierter Ordnung

$$U = 0, \quad V = 0$$

gemein hat.

Die Curve hat 4 scheinbare Doppelpunkte, kann also 0, 1, 2 Doppel- oder Rückkehrpunkte besitzen, so dass man drei Klassen derselben erhält.

---

*) Die Theorie dieser Curven ist ausführlich dargestellt von L. Cremona in „Annali di Matematica“ t. IV p. 71 f.

Setzt man voraus, dass

$$xV - yU = 0 \quad \text{und} \quad xw - yz = 0$$

noch eine zweite Erzeugende desselben Systems gemein haben, so erhält man statt der Curve 5^{ter} Ordnung eine Curve 4^{ter} Ordnung zweiter Art.

Eine Curve 5^{ter} Ordnung entsteht ferner als Durchschnitt einer Fläche 2^{ten} Grades mit einer Fläche 4^{ter} Ordnung, die mit ihr 3 Erzeugende desselben Systems gemein hat. Ist jene durch

$$xw - yz = 0$$

und sind die Erzeugenden durch

$$x - \lambda y = 0, \quad \lambda w - z = 0; \quad x - \mu y = 0, \quad \mu w - z = 0;$$
$$x - \nu y = 0, \quad \nu w - z = 0$$

dargestellt, so ist die Gleichung der Fläche vierter Ordnung eine nach $(x-\lambda y)$, $(\lambda w - z)$; $(x - \mu y)$, $(\mu w - z)$; etc. lineare Function, deren Coefficienten lineare Functionen der Veränderlichen sind. Diese Curve hat 6 scheinbare Doppelpunkte.

Sie entsteht dann als Durchschnitt zweier Flächen dritter Ordnung, die eine Curve dritter Ordnung und eine sie nicht schneidende Gerade gemein haben. Wenn hierbei p, q, r, s, t, u, P, Q lineare Functionen der Coordinaten und $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ lineare Functionen von P, Q, d. i. $\alpha = 0, \beta = 0, \ldots$ die Gleichungen von sechs die Gerade (P, Q) enthaltenden Ebenen bezeichnen, so haben die Flächen dritter Ordnung

$$\begin{vmatrix} p, & s, & \alpha \\ q, & t, & \beta \\ r, & u, & \gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} p, & s, & \alpha' \\ q, & t, & \beta' \\ r, & u, & \gamma' \end{vmatrix} = 0$$

ie Curve dritter Ordnung

$$\left\| \begin{matrix} p, & q, & r \\ s, & t, & u \end{matrix} \right\| = 0$$

und die Gerade (P, Q) gemein und ihr übriger Durchschnitt ist die bezeichnete Curve 5^{ter} Ordnung. Sie besitzt 6 scheinbare Doppelpunkte.

Sie wird endlich erhalten als partieller Schnitt zweier Flächen dritter Ordnung, welche eine Curve 4^{ter} Ordnung zweiter Art mit einander gemein haben. Wenn man die letztere als Schnitt einer Fläche 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung annimmt, die die Geraden

$$x = 0, \quad y = 0; \quad z = 0, \quad w = 0$$

gemein haben, so sind

$$xw - yz = 0, \quad (U = 0),$$
$$axz + byz + cxw + dyw = 0, \quad (V = 0),$$

wo a, b, c, d lineare Functionen der Coordinaten sind.

Denn für

$$V = (ax + by)\, z + (cx + dy)\, w$$
$$U = \qquad - yz + xw$$

erhält man

$$xV + (cx + dy)\, U = z \left\{ax^2 + (b + c)\, xy - dy^2\right\};$$

und für $\quad V = (az + cw)\, x + (bz + dw)\, y$

$$U = \qquad wx - zy$$

$$zV + (bz + dw)\, U = x \left\{az^2 + (b + c)\, zw + dw^2\right\}$$

und sieht somit, dass den Voraussetzungen

$$U = 0, \quad V = 0$$

die Gleichungen

$$ax^2 + (b + c)\, xy - dy^2 = 0,$$
$$az^2 + (b + c)\, zw + dw^2 = 0$$

entsprechen, so dass sich die Flächen U, V in der Curve vierter Ordnung zweiter Art und den Geraden $x = y = 0$; $z = w = 0$ schneiden, von denen die Flächen

$$ax^2 + (b + c)\, xy - dy^2 = 0,$$
$$az^2 + (b + c)\, zw + dw^2 = 0$$

nur je eine, die erste und zweite, enthalten. Ihr übriger Durchschnitt ist eine Curve der betrachteten Art.

Da diese Flächen je eine doppelte Gerade enthalten, so sind sie Regelflächen. Die Curven dieser Art haben 5 scheinbare Doppelpunkte, erscheinen aber verschieden, je nachdem sie andere Singularitäten nicht haben, oder einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt besitzen.*)

92. Wir werden aber diesen Abschnitt schliessen, indem wir einige der vorher erhaltenen Resultate zur Auflösung einer Aufgabe verwenden, welche sich gelegentlich derselben darbietet.

D r e i F l ä c h e n v o n d e n r e s p e c t i v e n O r d n u n g e n μ, ν, ϱ h a b e n e i n e g e w i s s e C u r v e g e m e i n s c h a f t l i c h; w i e v i e l e

*) Vergl. „Cambridge and Dublin Mathem. Journ.“, Vol. V, p. 41. „Comptes rendus“ t. LIV, p. 672.

ihrer $\mu\nu\varrho$ Durchschnittspunkte werden von dieser Curve absorbiert, oder mit anderen Worten, in wie vielen Punkten durchschneiden sich diese drei Flächen noch ausser der gemeinschaftlichen Curve?

Nehmen wir an, die beiden ersten Flächen durchschneiden sich in der allen dreien gemeinsamen Curve von der Ordnung m und in einer anderen ergänzenden Curve von der Ordnung $(\mu\nu - m)$, so sind die Durchschnittspunkte aller drei Flächen, welche nicht der ersteren Curve angehören, nothwendig in den $(\mu\nu - m)\ \varrho$ Durchschnittspunkten der letzteren mit der dritten Fläche mit inbegriffen. Einige der gemeinschaftlichen Punkte aber liegen in der Curve m, weil im Artikel 84 bewiesen ward, dass die letztere Curve die Ergänzungscurve in $m\ (\mu + \nu - 2) - r$ Punkten schneidet. Indem wir diese Zahl von $(\mu\nu - m)\ \varrho$ abziehen, finden wir, dass die drei Flächen sich in

$$\mu\nu\varrho - m\ (\mu + \nu + \varrho - 2) + r$$

Punkten schneiden, welche der Curve m nicht angehören; oder dass die gemeinschaftliche Curve

$$m\ (\mu + \nu + \varrho - 2) - r$$

Durchschnittspunkte absorbiert.

Auf demselben Wege lösen wir die entsprechende Aufgabe, wenn die gemeinschaftliche Curve insbesondere in der Fläche ϱ eine Doppelcurve ist. Wir haben dann von der Zahl $(\mu\nu - m)\ \varrho$ die Zahl von

$$2\ \{m\ (\mu + \nu - 2) - r\}$$

Punkten zu subtrahieren und finden, dass die gemeinschaftliche Curve die Zahl der Durchschnittspunkte um

$$m\ (\varrho + 2\mu + 2\nu - 4) - 2r$$

vermindert.

Diese Zahlen mit Hilfe der Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve m ausgedrückt, sind respective

$$m\ (\mu + \nu + \varrho - m - 1) + 2h$$

und
$$m\ (\varrho + 2\mu + 2\nu - 2m - 2) + 4h.$$

93. Der letzte Artikel erlaubt uns, die Frage zu beantworten: Wenn der eine Theil des Durchschnitts zweier Flächen eine Curve der m^{ten} Ordnung ist, welche eine Doppelcurve in einer dieser Flächen ist, in wie viel Punkten durchschneidet sie den andern Theil der Durchdringungscurve?

So schneiden sich in dem zuletzt betrachteten Beispiel die Flächen μ, ϱ in einer Doppelcurve m und einer complementären Curve $(\mu\varrho - 2m)$, und die Zahl der Durchschnittspunkte der drei Flächen wird erhalten, indem man von $(\mu\varrho - 2m)\,\nu$ die Zahl der Durchschnittspunkte abzieht, welche die Doppelcurve mit der complementären Curve bestimmt. Also ist

$$(\mu\varrho - 2m)\,\nu - \iota = \mu\nu\varrho - m\,(\varrho + 2\mu + 2\nu - 4) + 2r,$$

und

$$\iota = m\,(\varrho + 2\mu - 4) - 2r.$$

Wir können diese Formel prüfen, indem wir annehmen, die Curve m sei der vollständige Durchschnitt zweier Flächen U und V von den respectiven Ordnungen k und l. Alsdann ist ϱ von der Form $AU^2 + BUV + CV^2$, wo A vom Grade $(\varrho - 2k)$ ist, etc.; und μ ist von der Form $DU + EV$, wo D vom Grade $(\mu - k)$ ist.

Die Durchschnitte der Doppelcurve mit der complementären Curve sind die Punkte, für welche eine der Tangentenebenen der einen von den Flächen in einem Punkt der Doppelcurve mit der Tangentenebene der anderen Fläche zusammenfällt; sie sind daher die Durchschnittspunkte der Curve UV mit der Fläche

$$AE^2 - 2BDE + CD^2,$$

welche von der Ordnung $\{\varrho + 2\mu - 2\,(k + l)\}$ ist. Die Zahl der Durchschnittspunkte ist somit $kl\,\{\varrho + 2\mu - 2\,(k + l)\}$, welches mit der vorher erhaltenen Formel übereinstimmt, indem man darin setzt

$$kl = m, \quad kl\,(k + l - 2) = r.$$

94. Aus dem vorigen Artikel können wir endlich ableiten, in welcher Weise die Singularitäten einer Curve, die den theilweisen Durchschnitt zweier Flächen bildet und in der einen von ihnen eine Doppelcurve ist, mit den Singularitäten der complementären Curve verbunden sind.

Die erste Gleichung des Artikel 84 hört auf anwendbar zu sein, weil die Fläche $\mu + \nu - 2$ die Doppelcurve ganz enthält; aber die zweite Gleichung giebt uns

$$m'\,(\mu + \nu - 2) = 2\iota + r' = r' + 2m\,(\mu + 2\nu - 4) - 4r,$$

also

$$4r - r' = (2m - m')\,(\mu + \nu - 2) + 2m\,(\nu - 2).$$

In gleicher Weise finden wir, dass die Anzahlen der scheinbaren Doppelpunkte beider Curven durch die Relation

$$8h - 2h' = (2m - m')(\mu - 1)(\nu - 1) - 2m(\nu - 1)$$

verbunden sind.

Wenn z. B. eine Fläche zweiten Grades durch eine Doppellinie einer cubischen Fläche geht, so ist der übrig bleibende Durchschnitt von der vierten Ordnung, vom Range sechs und hat drei scheinbare Doppelpunkte.*)

III. Abschnitt. Nicht-projectivische Eigenschaften der Curven.

95. Da wir in diesem Abschnitt wiederholt Anlass haben werden, gerade Linien zu betrachten, welche einander unendlich nahe sind, so erscheint es passend, dass wir damit beginnen zu zeigen, wie einige der im ersten Kapitel des ersten Bandes gefundenen Formeln durch die Voraussetzung der unendlichen Annäherung modificiert werden. Wir bewiesen (Artikel 13), dass der Neigungswinkel zweier Linien durch die Formel

$$\sin^2\theta = (\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma)^2 + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha)^2 + (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta)^2$$

gegeben ist. Wenn die Linien einander unendlich nahe sind, so können wir für $\cos\alpha'$ substituieren $(\cos\alpha + \delta\cos\alpha)$, etc. und haben $\sin\theta = \delta\theta$, erhalten also

$$\delta\theta^2 = (\cos\beta\,\delta\cos\gamma - \cos\gamma\,\delta\cos\beta)^2 + (\cos\gamma\,\delta\cos\alpha - \cos\alpha\,\delta\cos\gamma)^2 + (\cos\alpha\,\delta\cos\beta - \cos\beta\,\delta\cos\alpha)^2.$$

---

*) Besondere Aufmerksamkeit ist den auf dem einfachen Hyperboloid und andern Regelflächen gelegenen räumlichen Curven neuerdings gewidmet worden; das Coordinatensystem auf dem Hyperboloid war schon von Plücker („Crelle's Journal", Bd. 34; 1847) erörtert, von Cayley („Philosophical Magazin", Juli 1861) eine wichtige Eigenthümlichkeit der darauf bezüglichen Gleichungen entdeckt worden, als Chasles in wiederholten Mittheilungen („Comptes rendus", t. LII, p. 1103, LIII, p. 985, 1077, 1203) dieselben behandelte. Die Ergebnisse lassen sich mit Leichtigkeit aus der allgemeinen Theorie ableiten, welche hier entwickelt ist. Vergleiche besonders L. Cremona, „Comptes rendus", t. LII, p. 1319.

Eigenthümliche Betrachtungen über die Raumcurven gab noch Cayley, „Comptes rendus", t. LIV, p. 55, 396. „Comptes rendus" t. LVIII p. 994

Wenn die Richtungscosinus einer geraden Linie durch

$$\frac{l}{r}, \quad \frac{m}{r}, \quad \frac{n}{r}$$

ausgedrückt sind, wo $l^2 + m^2 + n^2 = r^2$ ist, so giebt die vorige Formel

$$r^4 \delta\theta^2 = (m\delta n - n\delta m)^2 + (n\delta l - l\delta n)^2 + (l\delta m - m\delta l)^2.$$

Aus den Relationen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos\alpha\ \delta\cos\alpha + \cos\beta\ \delta\cos\beta + \cos\gamma\ \delta\cos\gamma = 0$$

ergiebt sich durch Quadrieren der letzteren Gleichung und Addition derselben zu dem für $\delta\theta^2$ gefundenen Ausdruck die nützliche Formel

$$\delta\theta^2 = (\delta\cos\alpha)^2 + (\delta\cos\beta)^2 + (\delta\cos\gamma)^2.$$

Es ward im Artikel 14 bewiesen, dass

$$\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma, \text{ etc.}$$

den Richtungscosinus der Senkrechten zur Ebene zweier Linien proportional sind; wir folgern jetzt daraus, dass die Richtungscosinus der Senkrechten zur Ebene zweier auf einander folgenden Linien, wie sie eben betrachtet wurden, zu

$$m\delta n - n\delta m, \quad n\delta l - l\delta n, \quad l\delta m - m\delta l$$

proportional sind, wobei der gemeinschaftliche Divisor $= r^2\delta\theta$ ist. Endlich ist im Artikel 43 bewiesen, dass die Richtungscosinus der Linie, welche den von zwei geraden Linien gebildeten stumpfen Winkel halbiert, proportional sind zu

$$\cos\alpha - \cos\alpha', \quad \cos\beta - \cos\beta', \quad \cos\gamma - \cos\gamma', \text{ etc.}$$

Wenn also zwei Linien einander unendlich nahe sind, so sind die Richtungscosinus einer Geraden in ihrer Ebene und senkrecht zu ihrer gemeinschaftlichen Richtung proportional zu $\delta\cos\alpha$, $\delta\cos\beta$, $\delta\cos\gamma$ mit dem entsprechenden gemeinschaftlichen Divisor $\delta\theta$.

96. Wir bewiesen im Artikel 56 dieses Bandes, dass die Richtungscosinus der Tangente einer Curve respective gleich

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

sind, weil dieselben, wenn die Curve als Durchschnittslinie zweier Flächen gegeben ist, den Werthen

$$U_2U'_3 - U'_2U_3, \quad U_3U'_1 - U'_3U_1, \quad U_1U'_2 - U'_1U_2$$

proportional sind, wo U_1, U_2, etc. die ersten Differentialcoefficienten bezeichnen.

In jedem Punkte einer Curve können zu ihr unendlich viele Normalen gelegt werden. Zwei von ihnen sind durch specielle Namen unterschieden und hervorgehoben worden; nämlich die in der Osculationsebene gelegene Normale, welche gewöhnlich die Hauptnormale genannt wird, und die zu dieser Ebene senkrechte Normale, welche als normal zu zwei auf einander folgenden Elementen der Curve von de Saint-Venant die Binormale genannt worden ist.

Alle Normalen liegen in der zur Tangente senkrechten Ebene

$$(x - x')\,dx + (y - y')\,dy + (z - z')\,dz = 0,$$

nach der einen, oder

$$(U_2U'_3 - U'_2U_3)\,(x - x') + (U_3U'_1 - U'_3U_1)\,(y - y') \\ + (U_1U'_2 - U'_1U_2)\,(z - z') = 0$$

in der anderen Bezeichnung.

Beispiel 1. Finde die Gleichungen der Tangente von

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Beispiel 2. Ebenso diejenigen der Tangente von

$$y^2 = ax - x^2, \quad z^2 = a^2 - ax.$$

Beispiel 3. Die Coordinaten des Fusspunktes der vom Anfang der Coordinaten auf eine Tangente der Curve in (x, y, z) gefällten Normale sind

$$x' = x - \frac{dx}{ds}\left(x\,\frac{dx}{ds} + y\,\frac{dy}{ds} + z\,\frac{dz}{ds}\right),$$
$$y' = y - \frac{dy}{ds}\left(x\,\frac{dx}{ds} + y\,\frac{dy}{ds} + z\,\frac{dz}{ds}\right),$$
$$z' = z - \frac{dz}{ds}\left(x\,\frac{dx}{ds} + y\,\frac{dy}{ds} + z\,\frac{dz}{ds}\right).$$

Wie bestimmt man den Ort dieser Fusspunkte für eine gegebene Curve?

97. Betrachten wir nun die Gleichung der Osculationsebene. Weil sie zwei auf einander folgende Tangenten der Curve enthält, so sind ihre Richtungscosinus (Artikel 95) proportional zu

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z, \quad dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

Grössen, welche wir zur Abkürzung durch X, Y, Z bezeichnen wollen. Die Gleichung der osculierenden Ebene ist daher

$$X(x - x') + Y(y - y') + Z(z - z') = 0.$$

Dieselbe Gleichung würde nach Artikel 26 des ersten Bandes erhalten worden sein, indem man die Gleichung der Ebene bildete, welche die drei auf einander folgenden Punkte

$$(x', y', z'); \quad (x' + dx', \ y' + dy', \ z' + dz');$$
$$(x' + 2dx' + d^2x', \ y' + 2dy' + d^2y', \ z' + 2dz' + d^2z')$$

enthält.

Bei Anwendung dieser Formeln kann man eine Vereinfachung erreichen, indem man willkürlich eine der Coordinaten als unabhängige Veränderliche wählt und so d^2x, d^2y oder $d^2z = 0$ macht.

Die Verbindung dieser Gleichung der Osculationsebene mit der der Normalebene liefert die Gleichung der Hauptnormale.

98. Um im Stande zu sein, durch ein Beispiel die Anwendung der Formeln dieses Abschnittes zu erläutern, ist es passend, hier die Gleichungen der Schraubenlinie oder Helix, der durch die Schärfe einer Schraube gebildeten Curve, aufzustellen und einige der Eigenschaften dieser Curve zu entwickeln.

Die Helix kann als die von einer geraden Linie in einer Ebene angenommene Form definiert werden, wenn diese Ebene um die Fläche eines geraden Cylinders aufgewickelt wird.*)

Nach dieser Definition werden die Gleichungen der Curve leicht gefunden. Die Gleichung einer geraden Linie $y = mx$ drückt aus, dass die Ordinate dem von ihrem Fusspunkt in der Achse der x bezeichneten Abschnitt proportional ist. Denken wir die Ebene der geraden Linie um einen geraden Cylinder so aufgewickelt, dass die Achse der x mit der kreisförmigen Basis zusammen fällt, so wird die gerade Linie zur Schraubenlinie, und die Ordinate irgend eines Punktes der Curve ist dem längs des Kreises gemessenen Abschnitt proportional, welchen, von einem festen Punkte aus gerechnet, seine Ordinate in der kreisförmigen Basis macht.

Somit sind die Coordinaten der Projection irgend eines Punktes der Schraubenlinie auf die Ebene der Basis von der Form

*) Umgekehrt verwandelt sich die Helix in eine gerade Linie, wenn der Cylinder, auf welchen sie gezeichnet ist, in eine Ebene abgewickelt wird, sie ist daher eine geodätische Linie des Cylinders. (Art. 48.)

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta,$$

wenn a der Radius der kreisförmigen Basis ist. Die Höhe z ist aber als proportional dem Bogen θ gezeigt worden. Die Gleichungen der Schraubenlinie sind daher

$$x = a \cos \frac{z}{h}, \quad y = a \sin \frac{z}{h}, \quad \text{also auch } x^2 + y^2 = a^2.$$

Wir erhalten offenbar dieselben Werthe für x und y, wenn der Bogen um 2π oder wenn z um $2\pi h$ wächst; d. h. das Intervall zwischen den Gängen der Schraubenlinien ist $2\pi h$. Weil wir haben

$$dx = -\frac{a}{h} \sin \frac{z}{h}\, dz = -\frac{y}{h}\, dz,$$

$$dy = \frac{a}{h} \cos \frac{z}{h}\, dz = \frac{x}{h}\, dz,$$

so haben wir auch

$$ds^2 = \frac{a^2 + h^2}{h^2}\, dz^2.$$

Es folgt daraus, dass $\frac{dz}{ds}$ constant ist, oder dass der von der Tangente der Schraubenlinie mit der Achse der z, d. i. mit der Richtung der Erzeugenden des Cylinders, gebildete Winkel unveränderlich ist. Es ist leicht zu sehen, dass diess derselbe Winkel ist, wie der, welchen die Erzeugenden mit der geraden Linie machen, in die durch die Abwickelung des Cylinders in eine Ebene der Schraubenlinie sich verwandelt.

Die Länge des Curvenbogens ist offenbar in einem constanten Verhältniss zu der Steighöhe, die demselben entspricht.

Die Gleichungen der Tangente sind (Artikel 56)

$$\frac{x - x'}{y'} = -\frac{y - y'}{x'} = -\frac{z - z'}{h}.$$

Wenn alsdann x und y die Coordinaten des Punktes sind, in welchem die Tangente die Ebene der Basis schneidet, so haben wir aus den vorigen Gleichungen

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = (x'^2 + y'^2)\frac{z'^2}{h^2} = a^2 \frac{z'^2}{h^2},$$

oder die Entfernung zwischen dem Fusspunkt der Tangente und der Projection des Berührungspunktes ist dem Bogen gleich, welcher längs des Kreises von dieser Projection bis zum Anfangspunkt gemessen wird. Diess kann auch geometrisch bewiesen werden; denn wenn wir den Cylinder in die Tangentenebene abgewickelt denken, so fällt die Schraubenlinie mit der Tangente zusammen und die Verbindungslinie des Fusspunktes der Tangente mit der Projection des Berührungspunktes ist der in eine gerade Linie abgewickelte Bogen des Kreises. Somit ist der Ort der Punkte, in welchen die Tangente die Basis schneidet, die Involute oder Evolvente des Kreises.

Die Gleichung der Normalebene ist

$$x'y - y'x = h\,(z - z').$$

Um die Gleichung der osculierenden Ebene zu finden, haben wir

$$d^2x = -\frac{1}{h^2}\,x dz^2, \quad d^2y = -\frac{1}{h^2}\,y dz^2, \quad d^2z = 0,$$

so dass diese Gleichung ist

$$h\,(y'x - x'y) = a^2\,(z - z').$$

Die Form der Gleichung zeigt, dass die osculierende Ebene mit der Ebene des Grundkreises einen constanten Winkel bildet.

Wir überlassen es dem Leser als eine Uebung, die Tangente, die Normalebene und osculierende Ebene der Durchschnittscurve zweier centrischen Flächen zweiten Grades zu bestimmen.

Beispiel. Die sphärische Ellipse hat die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Wenn man z^2 zwischen beiden Gleichungen eliminiert und x_1, y_1 als zwei entsprechende Werthe von x und y betrachtet, so hat man

$$x^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{r^2}{c^2} - 1,$$

$$x_1^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + y_1^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{r^2}{c^2} - 1$$

und daher

$$\frac{x^2 - x_1^2}{a^2\,(b^2 - c^2)} = \frac{y^2 - y_1^2}{b^2\,(c^2 - a^2)} = \frac{z^2 - z_1^2}{c^2\,(a^2 - b^2)}$$

eine symmetrische der Gleichung der Geraden analoge Gleichungsform. Die Gleichungen der Tangente im Punkte x', y', z' sind

$$\frac{x\,(x' - x)}{a^2\,(b^2 - c^2)} = \frac{y\,(y' - y)}{b^2\,(c^2 - a^2)} = \frac{z\,(z' - z)}{c^2\,(a^2 - b^2)},$$

oder

$$\frac{xx' - x_1^2}{a^2\,(b^2 - c^2)} = \frac{yy' - y_1^2}{b^2\,(c^2 - a^2)} = \frac{zz' - z_1^2}{c^2\,(a^2 - b^2)};$$

die der Normalebene

$$a^2 (b^2 - c^2) \frac{x'}{x} + b^2 (c^2 - a^2) \frac{y'}{y} + c^2 (a^2 - b^2) \frac{z'}{z} = 0$$

— sie geht also durch das Centrum der Kugel; für

$$a^2 (b^2 - c^2) = A, \quad b^2 (c^2 - a^2) = B, \quad c^2 (a^2 - b^2) = C$$

$$Cy^2 - Bz^2 = Cy_1^2 - Bz_1^2 = L,$$
$$Az^2 - Cx^2 = Az_1^2 - Cx_1^2 = M,$$
$$Bx^2 - Ay^2 = Bx_1^2 - Ay_1^2 = N$$

ist die Gleichung der osculierenden Ebene

$$\frac{L}{A} x^3 (x' - x) + \frac{M}{B} y^3 (y' - y) + \frac{N}{C} z^3 (z' - z) = 0.$$

99. Wir können die Gleichung der osculierenden oder Schmiegungsebene in einer mehr praktischen Form geben, indem wir die Curve als Durchschnitt von zwei Flächen

$$u = 0, \quad v = 0$$

gegeben betrachten. Sie rührt von O. Hesse her*) und wir benutzen bei ihrer Entwickelung und für das Nachfolgende eine neuerliche Abhandlung von A. Clebsch**), um uns zugleich der Bezeichnungsweise zu bedienen, welche sich so vorzüglich den Hilfsmitteln der neueren Algebra anbequemt und auf die daher noch mehrfach zurück zu kommen sein wird. Nach ihr sind u und v homogene Polynome m^{ten} und n^{ten} Grades in vier Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 — an Stelle der x, y, z, w die sonst gebräuchlich sind — und es bezeichnen u_i, v_i, u_{ik}, v_{ik} die Grössen

$$u_i = \frac{1}{m} \frac{du}{dx_i}, \quad v_i = \frac{1}{n} \frac{dv}{dx_i},$$

$$u_{ik} = \frac{1}{m(m-1)} \frac{d^2u}{dx_i dx_k}, \quad v_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{d^2v}{dx_i dx_k},$$

so dass man hat

$$u_i = \Sigma_k u_{ik} x_k, \quad u = \Sigma u_k x_k,$$
$$v_i = \Sigma_k v_{ik} x_k, \quad v = \Sigma v_k x_k.$$

Die Gleichung der Schmiegungsebene, d. h. die Ebene der drei auf einander folgenden Punkte x, $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$, (Art. 97) ist durch

---

*) „Crelle's Journal", Bd. XL, p. 283.

**) „Journal f. Math.", Bd. LXIII, p. 1.

$$\begin{vmatrix} X_1, & X_2, & X_3, & X_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3, & dx_4 \\ d^2x_1, & d^2x_2, & d^2x_3, & d^2x_4 \end{vmatrix} = 0$$

dargestellt. Die Differentiation von $u = 0$, $v = 0$ liefert aber für die dx, d^2x die Relationen

$$\text{a)}\quad 0 = \Sigma u_i dx_i,\quad 0 = \Sigma v_i dx_i,$$
$$0 = \Sigma u_i d^2x_i + (m-1)\,\Sigma\Sigma u_{ik}\, dx_i dx_k,$$
$$0 = \Sigma v_i d^2x_i + (n-1)\,\Sigma\Sigma\, v_{ik}\, dx_i dx_k$$

und nach der Relation

$$k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + k_4x_4 = 1,$$

welche die homogenen Coordinaten verbindet,

$$\text{a*)}\qquad \Sigma k_i dx_i = 0,\quad \Sigma k_i d^2x_i = 0.$$

Daher sind die dx den Determinanten proportional, welche das System

$$\begin{Vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ k_1, & k_2, & k_3, & k_4 \end{Vmatrix}$$

liefert. Wenn man dann die Determinante der Gleichung der Schmiegungsebene mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1, & u_2, & u_3, & u_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \end{vmatrix}$$

multipliciert, in der die α, β beliebige Grössen bedeuten, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \Sigma u_i X_i, & \Sigma v_i X_i, & \Sigma \alpha_i X_i, & \Sigma \beta_i X_i \\ 0, & 0, & \Sigma \alpha_i x_i, & \Sigma \beta_i x_i \\ 0, & 0, & \Sigma \alpha_i dx_i, & \Sigma \beta_i dx_i \\ \Sigma u_i d^2x_i, & \Sigma v_i d^2x_i, & \Sigma \alpha_i d^2x_i, & \Sigma \beta_i d^2x_i \end{vmatrix},$$

d. h. mit Uebergehung eines überflüssigen Factors

$$\Sigma v_i X_i \,.\, \Sigma u_i d^2x_i - \Sigma u_i X_i \,.\, \Sigma v_i d^2x_i = 0$$

oder nach den obigen Relationen

$$(m-1)\,\Sigma\Sigma u_{ik}\, dx_i dx_k \,.\, \Sigma v_i X_i = (n-1)\,\Sigma\Sigma v_{ik}\, dx_i dx_k \,.\, \Sigma u_i X_i.$$

Wenn hier an Stelle von dx_i, dx_k die ihnen proportionalen Werthe eingeführt werden, so treten an die Stelle der Doppelsummen die Determinanten

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}, & u_1, & v_1, & k_1 \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}, & u_2, & v_2, & k_2 \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34}, & u_3, & v_3, & k_3 \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44}, & u_4, & v_4, & k_4 \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & 0, & 0, & 0 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & 0, & 0, & 0 \\ k_1, & k_2, & k_3, & k_4, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & v_{14}, & v_1, & u_1, & k_1 \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & v_{24}, & v_2, & u_2, & k_2 \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & v_{34}, & v_3, & u_3, & k_3 \\ v_{41}, & v_{42}, & v_{43}, & v_{44}, & v_4, & u_4, & k_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & 0, & 0, & 0 \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & 0, & 0, & 0 \\ k_1, & k_2, & k_3, & k_4, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Wenn man in diesen die ersten vier Horizontal- und Verticalreihen mit x_1, x_2, . . . multipliciert, und die Producte von der fünften abzieht, so verschwinden die Reihen der u_i in der ersten, die der v_i in der zweiten Determinante, an Stelle der Nullen treten

$$\begin{matrix} 0, & 0, & -1, \\ 0, & 0, & 0, \\ -1, & 0, & 0 \end{matrix}$$

und die Determinanten werden sonach mit

$$-\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}, & v_1 \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}, & v_2 \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34}, & v_3 \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44}, & v_4 \\ v_1, & v_2, & v_3, & v_4, & 0 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} v_{11}, & v_{12}, & v_{13}, & v_{14}, & u_1 \\ v_{21}, & v_{22}, & v_{23}, & v_{24}, & u_2 \\ v_{31}, & v_{32}, & v_{33}, & v_{34}, & u_3 \\ v_{41}, & v_{42}, & v_{43}, & v_{44}, & u_4 \\ u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & 0 \end{vmatrix}$$

identisch und man erhält, wenn man diese Determinanten (Covarianten) durch $\frac{U}{m-1}$, $\frac{U}{n-1}$ respective bezeichnet, die Gleichung der Schmiegungsebene in der Form von Hesse

$$U\,(v_1X_1 + v_2X_2 + v_3X_3 + v_4X_4)$$
$$= V\,(u_1X_1 + u_2X_2 + u_3X_3 + u_4X_4).$$

100. Wenn wie früher U_1, U_2, U_3, U_4 die ersten und U_{11}, U_{22}, U_{33}, U_{44}, U_{12}, U_{13}, U_{14}, U_{23}, U_{24}, U_{34} die zweiten Differentialquotienten der Gleichung der ersten Fläche selbst und U_1', U_2', . . . die entsprechenden Differentialquotienten der Gleich-

ung der zweiten Fläche bezeichnen, so erhält man die Gleichung der Schmiegungsebene in der Form

$$\frac{S'}{(n-1)^2}(U_1x+U_2y+U_3z+U_4w)=\frac{S}{(m-1)^2}(U_1'x+U_2'y+U_3'z+U_4'w),$$

wobei S und S' die Determinanten

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_{14}, & U_1' \\ U_{21}, & U_{22}, & U_{23}, & U_{24}, & U_2' \\ U_{31}, & U_{32}, & U_{33}, & U_{34}, & U_3' \\ U_{41}, & U_{42}, & U_{43}, & U_{44}, & U_4' \\ U_1', & U_2', & U_3', & U_4', & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} U_{11}', & U_{12}', & U_{13}', & U_{14}', & U_1 \\ U_{21}', & U_{22}', & U_{23}', & U_{24}', & U_2 \\ U_{31}', & U_{32}', & U_{33}', & U_{34}', & U_3 \\ U_{41}', & U_{42}', & U_{43}', & U_{44}', & U_4 \\ U_1, & U_2, & U_3, & U_4, & 0 \end{vmatrix}$$

bezeichnen. Die bezügliche Determinantenreduction ist vollkommen analog der oben angegebenen. Sie gehen aus

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_{14}, & U_1, & U_1', & k_1 \\ U_{21}, & U_{22}, & U_{23}, & U_{24}, & U_2, & U_2', & k_2 \\ U_{31}, & U_{32}, & U_{33}, & U_{34}, & U_3, & U_3', & k_3 \\ U_{41}, & U_{42}, & U_{43}, & U_{44}, & U_4, & U_4', & k_4 \\ U_1, & U_2, & U_3, & U_4, & 0, & 0, & 0 \\ U_1', & U_2', & U_3', & U_4', & 0, & 0, & 0 \\ k_1, & k_2, & k_3, & k_4, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

und der entsprechenden hervor.

In dieser Form und für Flächen zweiten Grades ist die Gleichung in einer Anmerkung des Artikel 160 im ersten Bande verificiert worden.

Beispiel 1. Man soll die Schmiegungsebene von

$$ax^2+by^2+cz^2+dw^2=0, \quad a'x^2+b'y^2+c'z^2+d'w^2=0$$

bestimmen.

Sie ist

$$\begin{aligned}(ab'-a'b)(ac'-a'c)(ad'-a'd)x'^3x+(ba'-b'a)(bc'-b'c)(bd'-b'd)y'^3y \\ +(ca'-c'a)(cb'-c'b)(cd'-c'd)z'^3z \\ +(da'-d'a)(db'-d'b)(dc'-d'c)w'^3w=0.\end{aligned}$$

Beispiel 2. Die Schmiegungsebene der Krümmungslinie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}-1=0$$

zu bestimmen.

Sie ist

$$\frac{a''^2xx'}{a^2a'^2}+\frac{b''^2yy'}{b^2b'^2}+\frac{c''^2zz'}{c^2c'^2}=1.$$

101. Die Bedingung, unter welcher vier Punkte in einer Ebene liegen, oder in anderen Worten, dass ein Punkt der Curve

der Berührungspunkt einer stationären oder Wendeberührebene sei, wird durch die Substitution der Coordinaten eines nächsten vierten Punktes in die Gleichung der Osculationsebene oder durch die Vergleichung zweier auf einander folgenden Schmiegungsebenen ermittelt. Aus Artikel 97 folgt die geforderte Bedingung in der Form

$$d^3x\,(dy\,d^2z - dz\,d^2y) + d^3y\,(dz\,d^2x - dx\,d^2z) + d^3z\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0;$$

oder die Schmiegungsebene im Punkte x muss mit der im Punkte $x + dx$ zusammen fallen, d. h.

$$0 = \Sigma X_i\,(Uv_i - Vu_i) \quad \text{und}$$
$$0 = \Sigma X_i \left\{(U + dU)(v_i + dv_i) - (V + dV)(u_i + du_i)\right\}$$

müssen identisch sein. Die bezüglichen Bedingungen sind mit Hilfe eines willkürlichen Differentials dt in den vier Gleichungen

$$\text{b)} \qquad v_i dU + U dv_i - u_i dV - V du_i = (Uv_i - Vu_i)\,dt$$

enthalten, welche vier lineare Gleichungen für dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dt sind, zwischen denen ausserdem noch die Relationen a) und a*) bestehen.

Durch Elimination jener fünf Grössen wird man daher auf drei Gleichungen geführt, welche die Lage der fraglichen Punkte x völlig bestimmen; zwei derselben sind aber

$$u = 0, \quad v = 0$$

selbst, da mit Hilfe derselben sich die Gleichungen b) auf zwei allein verschiedene reducieren. Da nämlich aus

$$\Sigma u_i dx_i = 0, \quad \Sigma v_i dx_i = 0$$

auch

$$\Sigma x_i du_i = 0, \quad \Sigma x_i dv_i = 0$$

folgen, so verschwindet die Summe der Producte der Gleichungen b) mit x_1, x_2, x_3, x_4. Die analoge Multiplication und Addition mit dx_1, etc. giebt

$$0 = U \Sigma dx_i dv_i - V \Sigma dx_i du_i$$
$$= U \Sigma\Sigma\,(n-1)\,v_{ik}\,dx_i dx_k - V \Sigma\Sigma\,(m-1)\,u_{ik}\,dx_i dx_k,$$

wo die Doppelsummen zu V und U proportional sind, so dass auch diese Combination verschwindet. An Stelle der Gleichungen b) dürfen also zwei Combinationen derselben gesetzt werden.

Wir denken U und V geordnet nach Gliedern einer Reihe

$$U = \Sigma v_k A_k, \quad V = \Sigma u_k B_k,$$

wo

$$\Sigma A_i u_i = 0\,, \quad \Sigma A_i du_i = 0,$$
$$\Sigma B_i v_i = 0\,, \quad \Sigma B_i dv_i = 0$$

die Coefficienten bestimmen.

Multipliciert man nun die Gleichnungen b) beziehungsweise mit $A_1, A_2, \ldots$ oder mit $B_1, B_2, \ldots$ so erhält man, mit Weglassung je eines Factors

$$dU + \Sigma A_i dv_i = U dt,$$
$$dV + \Sigma B_i du_i = V dt.$$

Setzen wir

$$U_i = \frac{1}{3m + 2n - 8} \frac{dU}{dx_i}, \quad V_i = \frac{1}{3n + 2m - 8} \frac{dV}{dx_i},$$

so erhalten wir aus diesen Gleichungen die neuen

$$\Sigma dx_i \left\{ (3m + 2n - 8)\, U_i + (n-1)\, \Sigma A_k v_{ik} \right\} = U dt,$$
$$\Sigma dx_i \left\{ (3n + 2m - 8)\, V_i + (m-1)\, \Sigma B_k u_{ik} \right\} = V dt,$$

und können nun aus diesen mit den Gleichungen a) des vorigen Artikels $dx_1, dx_2, \ldots, dt$ eliminieren. Wir erhalten die Determinante

$$\begin{vmatrix} (3m+2n-8)U_1+(n-1)\Sigma A_k v_{1k}, & (3n+2m-8)V_1+(m-1)\Sigma B_k u_{1k}, & u_1, & v_1, & k_1 \\ (3m+2n-8)U_2+(n-1)\Sigma A_k v_{2k}, & (3n+2m-8)V_2+(m-1)\Sigma B_k u_{2k}, & u_2, & v_2, & k_2 \\ (3m+2n-8)U_3+(n-1)\Sigma A_k v_{3k}, & (3n+2m-8)V_3+(m-1)\Sigma B_k u_{3k}, & u_3, & v_3, & k_3 \\ (3m+2n-8)U_4+(n-1)\Sigma A_k v_{4k}, & (3n+2m-8)V_4+(m-1)\Sigma B_k u_{4k}, & u_4, & v_4, & k_4 \\ U, & V, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie kann durch Multiplication der ersten vier Reihen mit x_1, x_2, x_3, x_4 respective und Subtraction von der mit $(3m+3n-9)$ multiplicierten letzten Reihe in folgende einfachere verwandelt werden

$$\begin{vmatrix} (3m+2n-8)U_1+(n-1)\Sigma A_k v_{1k}, & (3n+2m-8)V_1+(m-1)\Sigma B_k u_{1k}, & u_1, & v_1 \\ (3m+2n-8)U_2+(n-1)\Sigma A_k v_{2k}, & (3n+2m-8)V_2+(m-1)\Sigma B_k u_{2k}, & u_2, & v_2 \\ (3m+2n-8)U_3+(n-1)\Sigma A_k v_{3k}, & (3n+2m-8)V_3+(m-1)\Sigma B_k u_{3k}, & u_3, & v_3 \\ (3m+2n-8)U_4+(n-1)\Sigma A_k v_{4k}, & (3n+2m-8)V_4+(m-1)\Sigma B_k u_{4k}, & u_4, & v_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diess ist die Gleichung einer Fläche $(6m + 6n - 20)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Curve $u = 0$, $v = 0$ in den $mn\,(6m + 6n - 20)$ Berührungspunkten von Wendeberührebenen durchschneidet. (Man vergleiche den Werth von α im Artikel 80.)

Für Flächen 2^{ter} Ordnung sind die $\Sigma A_k v_{ik}$, $\Sigma B_k u_{ik}$ von U_i, V_i nicht verschieden und man erhält die einfachere Gleichung

$$\Sigma \pm U_1 V_2 u_3 v_4 = 0$$

zur Lösung des Problems.

Ist die betrachtete Curve eben, so ist die hier betrachtete Bedingung durch die Coordinaten jedes Punktes in ihr erfüllt.

102. Wir betrachten hiernach den durch drei auf einander folgende Punkte der Curve bestimmten Kreis, welcher, wie bei ebenen Curven, der Krümmungskreis genannt wird. Er liegt offenbar in der Osculationsebene, sein Centrum ist der Durchschnitt der in dieser Ebene durch zwei auf einander folgende Normalebenen bestimmten Spuren, und sein Radius wird gewöhnlich der Radius der absoluten Krümmung genannt, um ihn von dem Radius der sphärischen Krümmung zu unterscheiden, welcher der Radius der durch vier auf einander folgende Punkte der Curve bestimmten Kugel ist, und welcher alsbald untersucht werden soll.

Wenn durch das Centrum eines Kreises eine zu seiner Ebene normale Linie gezogen wird, so liegt jeder Punkt in ihr von allen Punkten des Kreises gleichweit entfernt und kann als der Pol desselben bezeichnet werden. Nun ist die Durchschnittslinie zweier auf einander folgenden Normalebenen offenbar senkrecht zur Ebene des Krümmungskreises und geht durch seinen Mittelpunkt. Monge hat deshalb die Durchschnittslinien je zweier auf einander folgenden Normalebenen die Polarlinien der Fläche genannt. Es ist offenbar, dass alle Normalebenen eine abwickelbare Fläche umhüllen, für welche diese Polarlinien die Erzeugenden sind und welche daher auch wohl die Polarfläche genannt worden ist. Wir werden zunächst einige Eigenschaften dieser Fläche darlegen.

Die Polarlinie ist offenbar zu der als Binormale bezeichneten Linie parallel. (Artikel 96.)

103. Um den Krümmungsradius zu erhalten, berechnen wir zuerst den Winkel der Berührung, d. h. den Winkel, welcher von zwei auf einander folgenden Tangenten der Curve mit einander gebildet wird (Contingenzwinkel der Tangenten). Da die Richtungscosinus der Tangente

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds},\quad \frac{dz}{ds}$$

sind, so folgt aus Artikel 92, dass der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten $d\theta$ durch eine der Formeln

$$d\theta^2 = \left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2,$$

oder

$$ds^4\,d\theta^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

wo

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y, \text{ etc. ist.*})$$

Die Wahrheit der letzteren Formel kann geometrisch gezeigt werden: Die rechte Seite der Gleichung bezeichnet das Quadrat von dem Doppelten des Inhalts des von den drei auf einander folgenden Punkten gebildeten Dreiecks (Band I, Artikel 27); und da zwei seiner Seiten die Länge ds haben und den Winkel $d\theta$ einschliessen, so ist sein doppelter Inhalt $ds^2 d\theta$.

Wenn nun ds das Bogenelement ist, für welches die Tangenten in den Endpunkten den Winkel $d\theta$ mit einander bilden, so gilt, weil der Winkel zwischen zwei Tangenten eines Kreises dem von ihren Berührungspunkten am Centrum bestimmten Winkel gleich ist, die Relation $\varrho d\theta = ds$; und da das Bogenelement und die beiden Tangenten der Curve und dem Krümmungskreis gemeinschaftlich sind, so ist der Krümmungsradius durch die Formel $\varrho = \frac{ds}{d\theta}$ bestimmt, somit

$$\varrho^2 = \frac{ds^2}{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

oder

$$\varrho^2 = \frac{ds^6}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Beispiel. Den Krümmungsradius der Schraubenlinie zu finden. Mit den Formeln des Artikel 98 finden wir

---

*) Indem man die in der ersten Formel angezeigten Differentiationen vollzieht, wird ohne Schwierigkeit ein anderer Werth für $d\theta^2$ gefunden:

$$ds^2 d\theta^2 = (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2,$$

welcher geometrisch abgeleitet werden kann.

Sind AB, BC zwei auf einander folgende Elemente der Curve und bezeichnet AD eine mit BC gleiche und parallele Gerade, so folgt aus den Werthen der Projectionen von BC auf die Achsen

$$dx + d^2x,\quad dy + d^2y,\quad dz + d^2z,$$

dass die Projectionen der Diagonale BD auf die Achsen durch d^2x, d^2y, d^2z dargestellt werden, so dass man hat

$$BD^2 = (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2.$$

Aber es ist BD, auf das Bogenelement projiciert, $= d^2s$ und auf eine zu demselben senkrechte Linie $= ds\,d\theta$; man hat also

$$(d^2s)^2 + (ds\,d\theta)^2 = (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2.$$

$$\varrho = \frac{a^2 + h^2}{a},$$

oder der Krümmungsradius ist constant.

Die Ebene

$$(x' - x)\,\frac{d^2x}{ds^2} + (y' - y)\,\frac{d^2y}{ds^2} + (z' - z)\,\frac{d^2z}{ds^2} = 1$$

enthält die Durchschnittslinie zweier auf einander folgenden Normalebenen und ist selbst normal zur ersten derselben; der Krümmungsradius ist die vom ersten Punkte der Curve auf sie gefällte Normale.

104. Nachdem wir so die Grösse des Krümmungsradius bestimmt haben, sind wir durch die Formeln des Artikel 95 auch im Stande, seine Lage zu bestimmen. Denn die Richtungscosinus einer in der Ebene zweier auf einander folgenden Tangenten senkrecht zu ihrer gemeinschaftlichen Richtung gezogenen Geraden sind nach diesem Artikel

$$\frac{1}{d\vartheta}\,d\,\frac{dx}{ds},\quad \frac{1}{d\vartheta}\,d\,\frac{dy}{ds},\quad \frac{1}{d\vartheta}\,d\,\frac{dz}{ds},$$

oder

$$\varrho\,\frac{d\,\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \varrho\,\frac{d\,\frac{dy}{ds}}{ds},\quad \varrho\,\frac{d\,\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Wenn x', y', z' die Coordinaten eines Punktes der Curve sind, und x, y, z die des Krümmungscentrums bezeichnen, so sind $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ die Projectionen des Krümmungsradius auf die Achsen; aber sie sind auch $\varrho \cos\alpha$, $\varrho \cos\beta$, $\varrho \cos\gamma$. Indem wir daher für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre so eben gefundenen Werthe einsetzen, finden wir die Coordinaten des Krümmungscentrums bestimmt durch die Gleichungen

$$x - x' = \varrho^2\,\frac{d\,\frac{dx}{ds}}{ds},\quad y - y' = \varrho^2\,\frac{d\,\frac{dy}{ds}}{ds},$$

$$z - z' = \varrho^2\,\frac{d\,\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Der Ort der Krümmungscentra der Schraubenlinie ist eine Schraubenlinie von derselben Achse; ihre Tangenten bilden die Polarfläche der ersteren. Diese Relationen sind gegenseitig.

105. Wenn eine Curve als der Durchschnitt zweier sich rechtwinklig schneidenden Flächen gegeben ist, so kann ein Aus-

druck für den Radius der Krümmung leicht erhalten werden. Sind r und r' die Krümmungsradien der Normalschnitte jener zwei Flächen, welche längs der Tangente der Curve gelegt sind, und ist φ der Winkel, den die Osculationsebene mit der ersten Normalebene macht, so haben wir nach Meunier's Theorem

$$\varrho = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad \varrho = r' \sin \varphi,$$

so

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2}.$$

Dieselben Gleichungen bestimmen die Osculationsebene durch die Formel

$$\tan \varphi = \frac{r}{r'}.$$

Wenn der von den Flächen mit einander gebildete Winkel ω ist, so wird die entsprechende Formel

$$\frac{\sin^2 \omega}{\varrho^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2 \cos \omega}{rr'}.$$

Wir können auch einen Ausdruck für den Krümmungsradius einer Curve erhalten, die allgemein als Durchschnitt zweier Flächen gegeben ist. Wir können nach früheren Bezeichnungen

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = R^2, \quad U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 = R'^2$$

setzen und haben

$$\cos \omega = \frac{U_1 U_1' + U_2 U_2' + U_3 U_3'}{RR'},$$

$$\sin^2 \omega = \frac{(U_2 U_3' - U_2' U_3)^2 + (U_3 U_1' - U_3' U_1)^2 + (U_1 U_2' - U_1' U_2)^2}{R^2 R'^2}.$$

Wir müssen daher in die Formel des Artikel 33 die Werthe

$$\cos \alpha = \frac{U_2 U_3' - U_2' U_3}{RR' \sin \omega}, \quad \cos \beta = \frac{U_3 U_1' - U_3' U_1}{RR' \sin \omega},$$

$$\cos \gamma = \frac{U_1 U_2' - U_1' U_2}{RR' \sin \omega}$$

substituieren und der Nenner der Formel verwandelt sich in

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_1, & U_1' \\ U_{21}, & U_{22}, & U_{23}, & U_2, & U_2' \\ U_{31}, & U_{32}, & U_{33}, & U_3, & U_3' \\ U_1, & U_2, & U_3, & 0, & 0 \\ U_1', & U_2', & U_3', & 0, & 0 \end{vmatrix},$$

welche Determinante, wie im Artikel 100 reduciert, auf $\frac{1}{(m-1)^2}\,S$ gebracht wird. Wir erhalten so

$$r = \frac{(m-1)^2\; R^3 R'^2 \sin^2 \omega}{S},$$

und in gleicher Art

$$r' = \frac{(n-1)^2\; R^2 R'^3 \sin^2 \omega}{S'},$$

also

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{S^2}{(m-1)^4 R^6 R'^4 \sin^6 \omega} + \frac{S'^2}{(n-1)^4\; R^4 R'^6 \sin^6 \omega}$$
$$- \frac{2\,SS' \cos \omega}{(m-1)^2\,(n-1)^2\; R^5 R'^5 \sin^6 \omega}.$$

106. Wir betrachten ferner den Winkel, welchen zwei auf einander folgende Osculationsebenen mit einander bilden, einen Winkel, den wir den Torsionswinkel nennen und den wir mit $d\eta$ bezeichnen werden.

Die Richtungscosinus der Osculationsebene sind proportional zu X, Y, Z und die zweite Formel des Artikel 95 giebt

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2\; d\eta^2 = (YdZ - ZdY)^2 + (ZdX - XdZ)^2$$
$$+ (XdY - YdX)^2.$$

Nun ist

$$Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z, \qquad Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$
$$dY = dz\,d^3x - dx\,d^3z, \quad dZ = dx\,d^3y - dy\,d^3x;$$

daher (vergl. „Vorlesungen“, Artikel 17)

$$YdZ - ZdY = Mdx,$$

wo M die Determinante

$$Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z$$

bezeichnet. Darnach ist

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2\; d\eta^2 = M^2 ds^2$$

und

$$d\eta = \frac{Mds}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

eine Formel, welche auch eines einfachen geometrischen Beweises fähig ist. Denn M bezeichnet das sechsfache Volumen der Pyramide, welche von vier auf einander folgenden Punkten der Curve gebildet wird, während $X^2 + Y^2 + Z^2$ das vierfache Quadrat der Fläche des Dreiecks ist, welches drei auf einander folgende Punkte der Curve bilden. Wenn nun A die dreiseitige

Basis einer Pyramide, A' die anliegende Fläche derselben unter dem Winkel η gegen die Basis, s die beiden Flächen gemeinschaftliche Seite und p die von der Spitze auf dieselbe gefällte Senkrechte bezeichnet, so dass $2A' = sp$ ist, so haben wir für das Volumen der Pyramide $3V = Ap \sin \eta$ und

$$6Vs = 2Aps \sin \eta = 4AA' \sin \eta.$$

In dem betrachteten Falle ist aber die gemeinschaftliche Seite ds und beim Uebergang zur Grenze $A = A'$, so dass man erhält

$$6Vds = 4A^2 d\eta,$$

wie zu beweisen war.

Nach Analogie des Krümmungsradius, welcher gleich $\frac{ds}{d\vartheta}$ ist, haben neuere französische Schriftsteller die Grösse*) $\frac{ds}{d\eta}$ durch den Buchstaben r und mit dem Namen **Radius der Torsion** bezeichnet. Der Leser wird jedoch bemerken, dass diese Grösse nicht, gleich dem Radius der Krümmung, den Radius eines reellen Kreises bezeichnet, welcher mit der Curve eng vereinigt ist.

Für die Schraubenlinie ist auch die Torsion constant, sie ist in sich selbst verschiebbar.

Wenn das Maass der Torsion $\frac{d\eta}{ds}$ sein Vorzeichen wechselt, wenn sein Werth Null oder Unendlich wird, so erhält man besondere Punkte der Curve, die leicht näher zu characterisieren sind. Der Nullwerth characterisiert, wenn er für alle Punkte der Curve stattfindet, die ebene Natur derselben; diess Kennzeichen stimmt mit dem in Artikel 101 gegebenen Kennzeichen zusammen.

In gleicher Weise kann man das Maass der Krümmung $\frac{d\vartheta}{ds}$ betrachten.

Endlich lassen sich an die Bemerkung, dass die Gestalt der Curve von ihrer Lage unabhängig bestimmt ist, wenn ihre Krümmung und Torsion als Functionen ihres Bogens gegeben sind, Untersuchungen anknüpfen.**)

---

*) Die Grösse $\frac{d\eta}{ds}$ wird auch zuweilen als die **zweite Krümmung** der Curve bezeichnet.

**) R. Hoppe, „Journal f. Math.“ Bd. LX, p. 182. LXIII, p. 122.

107. In derselben Art aber, wie wir einen Osculationskreis als durch drei auf einander folgende „Punkte des Systems“ bestimmt angesehen haben, können wir einen osculierenden geraden Kegel betrachten, welcher durch drei auf einander folgende „Ebenen des Systems“ bestimmt wird (Schmiegungskegel). Denken wir von dem Punkte des Systems, in welchem die drei Ebenen sich schneiden, als Centrum eine Kugel beschrieben, welche von den durch jenen Punkt gehenden Linien des Systems in A und B und von den entsprechenden Ebenen des Systems in AT, BT geschnitten wird, und beschreiben wir auf dieser Kugel einen durch A und B gehenden und von AT, BT berührten Kreis, so osculiert nothwendig der Kegel, welcher das Centrum zum Scheitel hat und der über diesem kleinen Kreise steht, die gegebene Curve. Uns ist damit das Problem gegeben, aus dem Winkel $d\eta$ zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten eines kleinen Kreises einer Kugel und dem entsprechenden Bogen des Kreises $d\vartheta$ den Radius desselben H zu finden.

Ist C das Centrum des Kreises, so liefert das rechtwinklige Dreieck CAT die Relation

$$\sin AT = \frac{\tan AC}{\tan ATC};$$

ist dann φ der äussere Winkel zwischen zwei Tangenten eines Kreises, s die Länge derselben, so ist der Radius des Kreises H durch die Formel

$$\tan H = \frac{\sin \frac{1}{2} s}{\tan \frac{1}{2} \varphi}$$

gegeben. Beim Uebergang zur Grenze wird s das Bogenelement des Kreises und somit

$$\tan H = \frac{ds}{d\varphi},$$

oder nach der gebrauchten Bezeichnung

$$\tan H = \frac{d\vartheta}{d\eta} = \frac{r}{\varrho}. \text{ *)}$$

108. Denken wir durch jede Linie des Systems zur entsprechenden Osculationsebene eine Normalebene gelegt, so erzeugt die Vereinigung dieser Ebenen eine abwickelbare Fläche, welche

*) Es ist durch Bertrand bewiesen worden, dass für ein constantes Verhältniss $r : \varrho$ die Curve nothwendig eine auf einem Cylinder ver-

die **rectificierende** Abwickelungsfläche genannt wird. Die Veranlassung dieser Benennung ist der Umstand, dass die gegebene Curve eine geodätische Linie dieser Abwickelungsfläche ist, weil nach der gegebenen Construction ihre Osculationsebene in jedem Punkte normal zu dieser Fläche liegt. Wenn die abwickelbare Fläche in eine Ebene ausgebreitet wird, so verwandelt sich in Folge dessen die gegebene Curve in eine gerade Linie.

Der Durchschnitt zweier auf einander folgenden Ebenen der rectificierenden Abwickelungsfläche ist die **rectificierende Linie**.

Da nun die durch die Kante eines geraden Kegels senkrecht zu seiner entsprechenden Tangentenebene gelegte Ebene nothwendig seine Achse enthält, so gehen die rectificierenden Ebenen durch die Achse des zuletzt betrachteten osculierenden Kegels und **die rectificierende Linie ist somit die Achse des osculierenden Kegels.** Sie kann daher construiert werden, indem man in der rectificierenden Ebene eine Linie zieht, welche mit der Tangente einen Winkel H bildet, wo H den in letzten Artikel bestimmten Werth bezeichnet.

Die rectificierende Fläche ist die Fläche der Centra der ursprünglichen abwickelbaren Fläche. Denn es ward im Artikel 47 bewiesen, dass die Normalebenen der Originalfläche längs der zwei Haupttangenten die Fläche der Centra berühren; da nun die erzeugende Linie selbst in jedem ihrer Punkte eine der Haupttangenten ist, so berührt die rectificierende Ebene die Fläche der Centra, welche die Enveloppe aller dieser rectificierenden Ebenen ist.

Das Krümmungscentrum irgend eines Punktes für den andern zur erzeugenden Geraden rechtwinkligen Hauptschnitt der abwickelbaren Fläche, ist der Punkt, wo diese Ebene die entsprechende rectificierende Linie schneidet; denn die Spuren zweier auf einander folgender rectificierender Ebenen in dieser Ebene sind zwei auf einander folgende Normalen der Schnittcurve. Wenn

---

zeichnete Schraubenlinie, und durch **Puiseux**, dass für constante Werthe von r und ϱ sie die Schraubenlinie speciell eines Kreiscylinders sein muss. Immer lässt sich eine Schraubenlinie finden, die mit einer räumlichen Curve eine Berührung zweiter Ordnung nach Krümmung und Torsion bildet; die Schraubenlinie ersetzt in diesem Sinne den Kreis in seiner Rolle als Krümmungskreis ebener Curven. (Art. 106).

daher l die längs der Erzeugenden gemessene Entfernung irgend eines Punktes der abwickelbaren Fläche von der Cuspidalkante ist, so wird der Krümmungsradius des transversalen Schnittes durch l tan H ausgedrückt. Wenn l verschwindet, so wird auch dieser Krümmungsradius Null oder der Punkt ist eine Spitze.

In dem Fall der Schraubenlinie ist die rectificierende Fläche offenbar der Cylinder, auf welchem die Curve gezeichnet ist.

109. Man soll den Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Krümmungsradien bestimmen.

Seien AB, BC die in einer Kugelfläche vom Radius Eins von zwei zu der Osculations- und der Normalebene parallelen Ebenen gebildeten Spuren, so giebt der Radius des Punktes B die Richtung des Radius der Krümmung; wenn sodann AB', $B'C$ die nächstfolgenden Positionen der Osculations- und der Normalebene bezeichnen, so liegt B' vom Centrum aus in der Richtung des dem vorigen nächstfolgenden Krümmungsradius und der Bogen BB' misst den Winkel zwischen beiden. Sei dann O der Durchschnittspunkt der Bogen AB', BC, so haben wir, da das Dreieck BOB' ein sehr kleines rechtwinkliges Dreieck ist,

$$BB'^2 = BO^2 + OB'^2.$$

Der Winkel ABC ist aber ein rechter, BO misst folglich BAB', welches $d\eta$, der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Osculationsebenen ist; und OB' misst OCB', d. i. $d\theta$, den Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Normalebenen. Der geforderte Winkel ist somit durch die Formel

$$BB'^2 = d\eta^2 + d\theta^2$$

gegeben, in welcher $d\eta$ und $d\theta$ die früher gefundenen Werthe haben.

Die Folgen der Krümmungsradien in allen Punkten einer Curve erzeugen eine Fläche, auf deren Eigenschaften näher einzugehen uns hier der Raum nicht erlaubt. Sie ist offenbar eine windschiefe Fläche (vgl. Anmerkung des Artikel 109 im ersten Bande), weil zwei auf einander folgende Krümmungshalbmesser sich im Allgemeinen nicht schneiden.

Beispiel 1. Die Gleichung der Fläche der Krümmungsradien in dem Fall der Schraubenlinie zu finden.

Der Radius der Krümmung als der Durchschnitt der Osculations- und der Normalebene hat zu seinen Gleichungen (Artikel 98)

$$x'y = y'x, \quad z = z';$$

wir haben aus denselben mit Hilfe der Gleichungen der Curve x', y', z' zu eliminieren. Aus den Gleichungen der Schraubenlinie

$$x = a \cos nz, \quad y = a \sin nz$$

folgt so die Gleichung der verlangten Fläche

$$y \cos nz = x \sin nz.$$

Die Gleichung ihrer Tangentenebene im Punkte (x', y', z') ist

$$\sin nz\,(x' - x) - \cos nz\,(y' - y) + n\,(x \cos nz + y \sin nz)\,(z' - z) = 0,$$

oder mit Hilfe der Gleichung der Fläche reduciert

$$x'y - xy' + n\,(x^2 + y^2)\,(z' - z) = 0.$$

Beispiel 2. Die Gleichung der durch die Tangenten einer Schraubenlinie erzeugten abwickelbaren Fläche zu finden.

Die Gleichungen der Tangente

$$x - a \cos nz' = - na \sin nz'\,(z - z'),$$
$$y - a \sin nz' = \quad na \cos nz'\,(z - z')$$

liefern durch Elimination von z' das Ergebniss

$$x \cos\left\{nz \pm \frac{(x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right\} + y \sin\left\{nz \pm \frac{(x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right\} = a.$$

Da diese Gleichung für $x^2 + y^2 < a^2$ imaginär wird, so schliessen wir, dass kein Theil der Fläche innerhalb des Cylinders liegen kann, auf welchem die Schraube gezeichnet ist.

Ihr Schnitt mit der Ebene der x, y ist die Evolvente des Grundkreises. Die Neigung ihrer Tangentenebene gegen jene ist constant, der Cosinus des Neigungswinkels nämlich

$$= \frac{na}{(1 + n^2a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Schraubenlinie ist die Rückkehrkante der Fläche. Denn der Form der Flächengleichung

$$x \cos\theta + y \sin\theta = a$$

entsprechen als Derivierte nach x, y, z respective

$$\cos\theta - \frac{x\,(y \cos\theta - x \sin\theta)}{a\,(x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin\theta - \frac{y\,(y \cos\theta - x \sin\theta)}{a\,(x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}},$$
$$n\,(y \cos\theta - x \sin\theta),$$

welche alle wegen

$$y \cos\theta - x \sin\theta = (x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

für die Punkte der Schraubenlinie gleichzeitig verschwinden und so den Ort singulärer Punkte bezeichnen. Der Tangentenkegel jedes Punktes in ihr degeneriert in ein Ebenenpaar, denn seine Gleichung ist in der Form bestimmt

$$(xx' + yy')\,(x'y - xy' + na^2z') = 0.$$

110. Wir handeln im Folgenden von der abwickelbaren Polarfläche, die durch die Normalebenen der gegebenen Curve erzeugt wird. Fourier hat bemerkt, dass der „Torsionswinkel" des einen Systems gleich dem „Winkel der Berührung" des andern ist, wie vollkommen deutlich wird, weil die Ebenen des neuen Systems senkrecht zu den Linien des alten sind, und umkehrt. Der Leser wird dagegen bemerken, dass daraus nicht folgt, die Grösse $\frac{d\theta}{ds}$ des einen Systems sei gleich der Grösse $\frac{d\eta}{ds}$ des andern, weil ds in beiden Fällen nicht dasselbe ist.

Weil der Durchschnitt der Normalebenen in zwei auf einander folgenden Punkten K, K' der Curve die Achse eines Kreises ist, welchem K, K' als Punkte angehören (Artikel 102), so folgt, dass die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes D in ihr mit K, K' gleich lang sind und mit der Achse gleiche Winkel machen.

Offenbar durchschneiden sich drei auf einander folgende Normalebenen in dem Centrum der osculierenden Kugel: Die Cuspidalkante der abwickelbaren Polarfläche ist somit der Ort der Centra der sphärischen Krümmung.

In dem Falle einer ebenen Curve reduciert sich diese abwickelbare Polarfläche auf einen über der Evolute der Curve stehenden Cylinder.

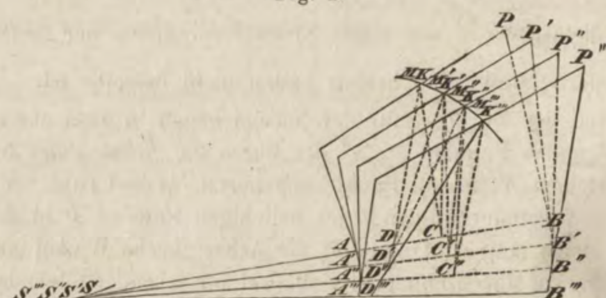
Die Hauptnormalen beider Linien sind parallel; denn sie liegen in derselben Ebene, der Normalebene der ersten Curve, die eine osculierende Ebene der zweiten ist, und sind beide rechtwinklig zu der Polarlinie der ersten Curve, welche eine Tangente der zweiten ist.

Beispiel. Die Fläche der Tangenten der Schraubenlinie B, welche nach Artikel 104 der Ort der Krümmungsmittelpunkte einer Schraubenlinie A ist, ist die Polarfläche der Curve A; die Schraube B ist die Rückkehrkante dieser Polarfläche. Zwischen den Curven A und B besteht eine vollkommene Reciprocität. Die Osculationsebenen, welche entsprechenden Punkten der beiden Schraubenlinien angehören, scheiden sich rechtwinklig in der gemeinschaftlichen Hauptnormale. Die Punkte, in welchen diese die beiden Schraubenlinien schneidet, sind jeder das Krümmungscentrum der Schraubenlinie des andern für ihn. Der gemeinschaftliche Krümmungsradius der Schraubenlinien A und B ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen ihren Radien der Torsion nach der Erklärung des Artikel 106.

111. **Jede Curve hat eine unendliche Zahl von Evoluten, die in der abwickelbaren Polarfläche liegen;***) d. h. die gegebene Curve kann in unendlich vielen Arten erzeugt werden, indem man einen auf eine Curve in dieser abwickelbaren Fläche aufgewundenen Faden abwickelt.

Bezeichnen MM', $M'M''$, etc. die successiven Elemente der Curve, K, K', etc. die Mittelpunkte dieser Elemente, so sind die

Fig. 1.



durch die Punkte K senkrecht zu den Elementen gelegten Ebenen die Normalebenen.

Die Linien AB, $A'B'$, etc. sind die Linien, in welchen jede Normalebene durch die darauf folgende geschnitten wird; sie sind die Erzeugenden der abwickelbaren Polarfläche und daher Tangenten der Cuspidalkante $SS'S''$ dieser Fläche. Ziehen wir nun willkürlich eine Linie KD in der ersten Normalebene, welche die erste Erzeugende in D schneidet, und DK', welches als in der zweiten Normalebene die zweite Erzeugende $A'B'$ in D' schneidet; ebenso $K''D''$, welches $A''B''$ in D'' schneidet. Dann erhalten wir eine in der abwickelbaren Polarfläche liegende Curve $DD'D''$, welche eine Evolute der gegebenen Curve ist. Denn die Linien DK, $D'K'$, etc., die Tangenten der Curve $DD'D''$, sind Normalen der Curve $KK'K''$, und die Längen $DK = DK'$, $D'K' = D'K''$, etc. (siehe Artikel 110). Wenn somit DK ein Theil eines um $DD'D''$ aufgewundenen Drathes ist, so bewegt sich bei seiner Abwindung der Punkt K längs der gegebenen Curve.

---

*) Siehe Monge, p. 396.

Wegen der Willkürlichkeit der ersten Linie DK besitzt die Curve eine unendliche Zahl von Evoluten. So hat eine ebene Curve unendlich viele Evoluten, welche alle in der Fläche des Cylinders liegen, der über der in ihrer eigenen Ebene gelegenen Evolute steht. In dem speciellen Falle, in welchem die Evolute sich auf einen Punkt reduciert, d. h. in dem des Kreises, sehen wir in der That, dass die Curve durch Abwickelung eines Drathes von constanter Länge aus einem beliebigen Punkte der durch das Centrum des Kreises gehenden Achse beschrieben werden kann.

Im allgemeinen Falle sind die sämmtlichen Evoluten $DD'D''$, etc. geodätische Linien der abwickelbaren Polarfläche.

Denn wir wissen (Artikel 48), dass eine Curve eine geodätische Linie ist, wenn zwei ihrer auf einander folgenden Tangenten mit dem Durchschnitt der entsprechenden Tangentenebenen der Fläche gleiche Winkel bilden, und es ist so eben (Art. 110) bewiesen worden, dass DK, DK', welches zwei auf einander folgende Tangenten der Evolute sind, mit AB, d. i. dem Durchschnitt zweier auf einander folgenden Ebenen der abwickelbaren Fläche, gleiche Winkel einschliessen. Eine Evolute kann daher gefunden werden, indem man einen Faden als tangierend zur abwickelbaren Polarfläche von K aus legt und die Fortsetzung dieser Tangente um die abwickelbare Fläche auf windet.

112. Der Ort der Krümmungscentra ist eine in der abwickelbaren Polarfläche gelegene Curve, aber nicht eine solche, welche dem System der Evoluten angehört.*)

Die erste osculierende Ebene $MM'M''$ schneide die ersten zwei Normalebenen in KC, $K'C$, so ist C das erste Krümmungscentrum; in gleicher Art ist C', der Durchschnittspunkt von $K'C'$ und $K''C'$, den Durchschnittslinien der zweiten osculierenden Ebene $M'M''M'''$ mit der zweiten und dritten Normalebene,

*) Das „Rêsumé des leçons d'analyse" von Navier giebt (t. I, n. 247 der Ausgabe von Wittstein) falsche Vorstellungen von dem Zusammenhang dieser Polarfläche mit der Abwickelungsfläche der Curve und der Linie der Krümmungscentra. ~~Man vergleiche die soeben erschienene treffliche neue Ausgabe dieses Werkes von de Saint-Venant.~~

das zweite Krümmungscentrum. Nun sind die Radien $K'C$, $K'C'$ verschieden, weil sie die Durchschnitte derselben Normalebene mit zwei verschiedenen osculierenden Ebenen sind; $K'C'$ schneidet daher die Linie AB in einem Punkte J, welcher von C verschieden ist. Die zwei Krümmungsradien KC, $K'C'$ in den Ebenen P, P' haben keinen gemeinschaftlichen Punkt in der Durchschnittslinie AB dieser Ebene; zwei auf einander folgende Krümmungsradien schneiden sich daher nicht, ausser in dem speciellen Falle, wo zwei auf einander folgende osculierende Ebenen sich decken.

Da somit die Centra der Krümmung nicht als die Durchschnitte der auf einander folgenden Radien gegeben sind, so sind diese auch nicht Tangenten des Ortes der Centra. Irgend ein Radius KC ist daher nicht die Fortsetzung eines um $CC'C''$ aufgewundenen Drathes und die Abwickelung eines solchen Drathes bringt nicht die Curve $KK'K''$ hervor, ausgenommen in dem Falle, wo diese Letztere eine ebene Curve ist.*)

Man kann ferner zeigen, dass bei der Entwickelung der Polarfläche der Curve in eine Ebene der Ort der Krümmungscentra sich in die einem bestimmten Ursprung O entsprechende Fusspunktencurve der Abwickelungsgestalt der Rückkehrkante transformiert; so dass die Entfernungen entsprechender Punkte den Radien der Schmiegungskugel und des Krümmungskreises respective gleich sind, welche dem entsprechenden Punkte der Originalcurve angehören.

Denn wenn $ss's''\ldots$, $cc'c''\ldots$ die transformierten von $SS'S''\ldots$ (Rückkehrkante der Polarfläche) und $CC'C''\ldots$ (Ort der Krümmungscentra) sind, so geht die Curve $DD'D''\ldots$ (Evolute) in eine gerade Linie über und daher fallen alle die Punkte $K, K', K'', \ldots$ in einen Punkt O zusammen. Die Punkte C findet man vor der Entwickelung aber durch Normalen MC von den M auf die verlängerten Elemente SS' und die Entfernungen MC, MS sind von den Halbmessern des Krümmungskreises und der Schmiegungskugel unendlich wenig verschieden; und da die MC und MS in

*) Die Charactere der abwickelbaren Polarfläche können durch einfache Schlüsse untersucht werden; so ist leicht zu sehen, dass die Klasse dieser abwickelbaren Fläche ist $m + r$, wo m und r die im Artikel 64 ihnen beigelegte Bedeutung haben.

der Ebene von zwei Nachbarelementen der Rückkehrkante liegen, so ist die Entwickelung der Linie der Centra eine Fusspunktencurve der Rückkehrkante nach dem obigen Gesetze.

Auch die Umkehrung des Satzes ist wahr.

113. Den Radius der durch vier auf einander folgende Punkte bestimmten Kugel zu finden. (Schmiegungskugel.)

Ist R der Radius einer Kugel, ϱ der Radius des von ihr mit einer Ebene, die gegen die Normalebene in irgend einem Punkte den Winkel η bildet, bestimmten Schnittes, so ist nach dem Satze von Meunier

$$R \cos \eta = \varrho;$$

und für eine darauf folgende Ebene, welche den Winkel $\eta + \delta\eta$ macht,

$$\delta\varrho = - R \sin \eta\delta\eta.$$

Also ist

$$R^2 = \varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\eta}\right)^2.$$

In diesen Ausdruck sind nun die früher (Artikel 103, 106) gefundenen Werthe von ϱ und $d\eta$ einzusetzen. $\frac{d\varrho}{d\eta}$ ist offenbar die Länge der senkrechten Entfernung des Kugelmittelpunktes von der Ebene des Krümmungskreises.

114. Die Coordinaten des Centrums der osculierenden Kugel zu finden.

Sei die Gleichung einer Normalebene

$$(\alpha - x)\, dx + (\beta - y)\, dy + (\gamma - z)\, dz = 0,$$

für (x, y, z) als einen Punkt der Curve und (α, β, γ) als einen veränderlichen Punkt in der Ebene, so giebt die Gleichung der darauf folgenden Normalebene durch ihre Verbindung mit der vorigen

$$(\alpha - x)\, d^2x + (\beta - y)\, d^2y + (\gamma - z)\, d^2z = ds^2;$$

und die Gleichung der dritten Ebene giebt

$$(\alpha - x)\, d^3x + (\beta - y)\, d^3y + (\gamma - z)\, d^3z = 3\, ds\, d^2s.$$

Bezeichnen wir nun wie vorher $dy\,d^2z - dz\,d^2y$, etc. durch X, Y, Z; $dy\,d^3z - dz\,d^3y$, etc. durch X', Y', Z' und die Determinante

$$Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z$$

durch M, so giebt die Auflösung der vorigen Gleichungen

$$M(\alpha - x) = - X' ds^2 + 3 X ds d^2 s,$$
$$M(\beta - y) = - Y' ds^2 + 3 Y ds d^2 s,$$
$$M(\gamma - z) = - Z' ds^2 + 3 Z ds d^2 s.$$

Indem wir diese Gleichungen quadrieren und addieren, erhalten wir für R^2 einen andern Ausdruck, welcher mit dem des letzten Artikels übereinstimmt, wenn man darin für ϱ und $\frac{d\varrho}{d\eta}$ ihre Werthe substituiert.

Dieselben Gleichungen von drei auf einander folgenden Normalebenen bestimmen die Rückkehrkante der Polarfläche und liefern durch die leicht daraus entspringenden Relationen

$$dx\,d\alpha + dy\,d\beta + dz\,d\gamma = 0, \quad dx\,d^2\alpha + dy\,d^2\beta + dz\,d^2\gamma = 0,$$
$$\frac{dx}{dz} = \frac{d\gamma\,d^2\beta - d\beta\,d^2\gamma}{d\beta\,d^2\alpha - d\alpha\,d^2\beta}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{d\alpha\,d^2\gamma - d\gamma\,d^2\alpha}{d\beta\,d^2\alpha - d\alpha\,d^2\beta}$$

die Sätze wieder: Die Tangenten in entsprechenden Punkten der Curve und der Rückkehrkante ihrer Polarfläche sind orthogonal. Die Tangente der einen und die Osculationsebene der andern Curve in entsprechenden Punkten sind orthogonal.

Wir fügen eine Reihe anderer Ausdrücke hinzu, deren grösserer Theil einfacher geometrischer Beweise fähig ist, deren Details wir der Raumersparniss wegen unterdrücken.

Beispiel 1. Wenn σ den Bogen der Curve bezeichnet, die den Ort der Centra der absoluten Krümmung bildet, so ist

$$d\sigma^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\eta^2, \quad \text{oder} \quad d\sigma = R\,d\eta.$$

Beispiel 2. Ist Σ die Länge des Bogens des Ortes der Centra der sphärischen Krümmung, so hat man $d\Sigma = \frac{R\,dR}{\delta}$, wo $\delta = \frac{d\varrho}{d\eta}$ die Distanz zwischen den Centren des osculierenden Kreises und der osculierenden Kugel ausdrückt. Wir erhalten aus diesem Ausdruck unmittelbar Werthe der Radien der Krümmung und Torsion dieses Ortes, indem wir erinnern, dass der Torsionswinkel desselben der Winkel der Berührung des Originals ist und umgekehrt.

Beispiel 3. Der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden rectificierenden Geraden ist dH.

Beispiel 4. Der Winkel ψ zwischen zwei auf einander folgenden Lagen von R ist durch die Formel

$$R^2\psi^2 = ds^2 + d\Sigma^2 - dR^2$$

bestimmt.*)

---

*) Vgl. W. Besant, „Quarterly Journal of Mathem.", Vol. VI, p. 140.

Beispiel 5. Die kürzeste Entfernung zwischen den Tangenten zweier auf einander folgenden Punkte der Curve ist

$$= \frac{(ds)^2 d\eta}{4R}.*)$$

115. Und eine andere an den vorigen Abschnitt anknüpfende Seite der Untersuchung sei bezeichnet durch folgende Sätze: 1) Die entwickelbare Polarfläche der Durchschnittscurve zweier Flächen

---

*) Der Leser wird weitere Details über die in diesem Abschnitt behandelten Gegenstände in einem Memoir von de Saint-Venant im „Journal de l'école polytechnique", Cah. XXX finden, welcher in einer Tafel an hundert Formeln der Transformation und Reduction der Berechnungen in Bezug auf die Theorie der nicht ebenen Curven vereinigt hat; und in einer Abhandlung von Frenet, „Liouville's Journ.", t. XVII, p. 437. Ich entnehme die folgende historische Skizze dem Mém. von de Saint-Venant: Unebene krumme Linien sind nach einander studiert worden durch Clairaut („Recherches sur les courbes à double Courbure," 1731), welcher den zu ihrer Bezeichnung gebräuchlichsten Namen in Anwendung brachte (den jedoch vorher schon Pitot in Gebrauch hatte) und für die Projectionen dieser Curven, für ihre Tangenten, Normalen, Bögen, etc. Ausdrücke gegeben hat; durch Monge („Mémoir sur les développées," etc. 1771 vorgelegt und im t. X, 1785 der „Savants étrangers" aufgenommen; auch in seinem „Applications de l'Analyse à la Géométrie"), welcher Ausdrücke gab für die Normalebene, das Centrum und den Radius der Krümmung, die Evoluten, die Polarlinien und abwickelbaren Polarflächen, das Centrum der osculierenden Kugel, für das Kriterium der Punkte einfacher Inflexion, in welchen vier auf einander folgende Punkte in einer Ebene liegen, und der Punkte doppelter Inflexion, wo drei auf einander folgende Punkte einer geraden Linie angehören; durch Tinseau („Solution de quelques problèmes", etc. vorgelegt 1774, „Savants étrangers", Vol. IX, 1781), der zuerst die Osculationsebene und die durch die Tangenten erzeugte Abwickelungsfläche betrachtete; durch Lacroix („Calcul differentiel"), der der erste war, welcher den Formeln durch Einführung der Differentiale der drei Coordinaten symmetrische Gestalt gab; und durch Lancret („Mémoire sur les courbes à double courbure," gelesen 1802 und im t. I, 1805 der „Savants étrangers de l'Institut" veröffentlicht), welcher den Torsionswinkel berechnete und die Betrachtung der rectificierenden Linien und der rectificierenden Fläche einführte. In neuester Zeit sind zwei besondere Werke über diese Theorie erschienen, welche man mit Vortheil studieren mag, nämlich W. Schell, „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung", Leipzig 1859. und P. Serret, „Théorie nouvelle géométrique et mécanique des lignes a double courbure", Paris 1860.

von der m^{ten} und n^{ten} Ordnung ist durch eine Gleichung vom Grade $mn\,(3m + 3n - 4)$ dargestellt.

Diese Gleichung entsteht durch Elimination zwischen den Gleichungen der Fläche und den Gleichungen von zwei unendlich nahen Normalebenen, die von den Graden $(m + n - 1)$ und $(2m + 2n - 3)$ sind.

2) Die Gleichung der durch die Tangente der Curve und die Normale ihrer Osculationsebene im Berührungspunkt bestimmten Ebene ist vom Grade $(3m + 3n - 5)$; sie umhüllt eine abwickelbare Fläche, deren Gleichung vom Grade $3mn\,(2m + 2n - 3)$ ist.

3) Die Fläche der Hauptnormalen ist eine Regelfläche von der Ordnung $2mn\,(2m + 2n - 3)$; ebenso die Fläche der Normalen zu den Osculationsebenen in den Berührungspunkten.

4) Die Rückkehrkante der abwickelbaren Polarfläche ist auf einer Fläche gelegen, deren Gleichung vom Grade $mn\,(5m + 5n - 8)$ ist.

IV. Abschnitt. Die Curven auf den Flächen.

116. Es bleibt uns übrig, Einiges von den Eigenschaften der Curven zu sagen, insofern man sie als auf einer besondern Fläche gelegen betrachtet.

Wir wissen, dass die Kugel ihre eigene Geometrie hat, in welcher die grössten Kreise die Stelle der geraden Linien in einer Ebene vertreten; *in derselben Art hat jede Fläche ihre eigene Geometrie, in welcher die geodätischen Linien der Fläche den geraden Linien entsprechen.*

Wir haben früher durch Anticipation die Fundamentaleigenschaft der geodätischen Linien gegeben (Artikel 48). Aus dieser Eigenschaft, nach welcher die Normale der Fläche in der Ebene zweier auf einander folgender Elemente der Curve liegt und den Winkel zwischen ihnen halbiert, ergiebt sich die Differentialgleichung der Curve; U_1, U_2, U_3, welche den Richtungscosinus der Normale proportional sind, müssen nach ihr zu

$$d\,\frac{dx}{ds},\quad d\,\frac{dy}{ds},\quad d\,\frac{dz}{ds}$$

proportional sein, die die Richtungscosinus der Halbierungslinie sind (Artikel 95). Wenn daher die Tangenten einer geodätischen Linie mit einer festen Linie gleiche Winkel bilden, so sind die Normalen längs derselben einer festen Ebene parallel, und umgekehrt.*) Denn aus der Gleichung

$$a \frac{dx}{ds} + b \frac{dy}{ds} + c \frac{dz}{ds} = \text{const.},$$

welche ausdrückt, dass die Tangenten mit einer festen Linie einen constanten Winkel bilden, können wir die andere

$$aU_1 + bU_2 + cU_3 = 0$$

ableiten, welche den Parallelismus der Normalen mit einer festen Ebene bezeichnet.

117. Wenn durch einen beliebigen Punkt einer Fläche zwei unendlich nahe und gleichlange geodätische Linien gelegt sind, so ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig zu beiden.**)

Sind $AB = AC$ die beiden unendlich nahen gleichen geodätischen Linien, und ist dem Satze entgegen der Winkel bei B nicht ein rechter, sondern $= \theta$, so nehme man auf BA einen Punkt D so an, dass $BD = \frac{BC}{\cos\theta}$ ist; dann darf man das Dreieck BCD, da alle seine Seiten unendlich klein sind, als ein ebenes Dreieck behandeln, so dass $\angle\, DCB$ ein rechter ist. Daher haben wir $DC < DB$, $AD + DC < AB$ und daher $< AC$, d. h. AC ist nicht der kürzeste Weg auf der Fläche von A nach C, was der Voraussetzung von der geodätischen Natur der beiden Curven entgegen ist.

Oder der Beweis kann auch geführt werden, wie folgt: Die kürzeste Linie, welche man von einem Punkte A nach einer gegebenen Curve in einer Fläche ziehen kann, schneidet diese Curve rechtwinklig. Denn wenn sie es nicht thäte, so nehmen wir in dem Radius vector von A und unendlich nahe der Curve einen

---

*) Dickson, „Cambridge and Dublin Mathematical Journal", Vol. V, p. 168.

**) Diess Theorem gebührt Gauss, welcher es durch die Variationsrechnung bewiesen hat; siehe den Anhang zu Liouville's Ausgabe von Monge, p. 528.

Punkt D und fällen von ihm eine Senkrechte zur Curve (indem wir längs BC ein Stück $= BD \cos \theta$ abtragen und den so gefundenen Punkt mit D verbinden). Wir können dann von D auf kürzerem Wege zur Curve gelangen, indem wir längs der Senkrechten gehen, als indem wir den angenommenen Radius vector verfolgen, welcher daher nicht die kürzeste Linie ist.

Wenn also jede geodätische Linie durch A die Curve rechtwinklig durchschneidet, so ist die Länge der geodätischen Linie von A bis zu ihr constant. Es ist auch mechanisch offenbar, dass der auf einer Fläche von einem festen Punkt aus durch einen gespannten Faden beschriebene Kreis überall rechtwinklig zur Richtung des Fadens ist.

118. Der eben bewiesene Satz ist das Analogon des Fundamentalsatzes der Methode des unendlich Kleinen in ihrer Anwendung auf gerade Linien („Analyt. Geom. der Kegelschnitte" Art. 219); alle die am angeführten Orte mit Hilfe dieses Princips bewiesenen Sätze bleiben daher wahr, wenn wir in ihnen von geodätischen Linien auf irgend einer Fläche statt von geraden Linien in der Ebene sprechen. Z. B. Wenn wir auf irgend einer Fläche die einer Ellipse oder Hyperbel entsprechende Curve construieren, d. h. den Ort eines Punktes, für welchen die Summe oder Differenz seiner geodätischen Entfernungen von zwei festen Punkten der Fläche constant ist, so halbiert die Tangente in irgend einem Punkte des Ortes den Winkel zwischen den geodätischen Linien, welche den Berührungspunkt mit den beiden festen Punkten verbinden. Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht minder wahr.

Ferner, wenn zwei geodätische Tangenten einer Curve durch irgend einen Punkt P mit der Tangente einer Curve, längs welcher sich P bewegt, gleiche Winkel bilden, so ist die Differenz zwischen der Summe dieser Tangenten und dem von ihnen auf der berührten Curve begrenzten Bogen constant. (Vergl. a. a. O. Artikel 262.)

Oder, wenn man in den geodätischen Normalen einer Curve gleiche Stücke abträgt, so schneidet die Verbindungslinie ihrer Endpunkte alle diese rechtwinklig. Wenn zwei verschiedene Curven ein System geodätischer Linien gleichzeitig rechtwinklig schneiden, so fassen sie auf jedem Vector der Reihe eine constante Länge zwischen sich.

Wir werden zunächst diese Principien auf die Theorie der geodätischen Linien auf Flächen zweiten Grades anwenden.

119. So wie die Krümmung einer ebenen Curve durch das Verhältniss gemessen wird, in welchem der Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Tangenten zum Bogenelement steht, so wird auch die geodätische Krümmung einer auf einer Fläche verzeichneten Curve durch den Grenzwerth des Verhältnisses gemessen zwischen dem Element des Bogens und dem Winkel zwischen zwei auf einander folgenden geodätischen Tangenten. Die folgende Bestimmung des Radius der geodätischen Krümmung verdankt man Liouville;*) sie enthält gleichzeitig einen Beweis von Meunier's Theorem.

Seien mn, np zwei auf einander folgende und gleiche Elemente der Curve, so verlängere man mn nach $nt = mn$ und fälle die Senkrechte tq auf die Ebene mnp; ist dann θ der Winkel der Berührung, so ist

$$tp = \theta ds.$$

Nun ist nq das zweite Element des Normalschnittes und für

$$tnq = \theta'$$

ist θ' der Winkel der Berührung des Normalschnittes und

$$tq = \theta' ds.$$

Der Winkel qtp $(= \varphi)$ ist aber der Winkel zwischen der Osculationsebene der Curve und der Ebene des Normalschnittes, und da

$$tq = tp \cos \varphi$$

ist, so haben wir

$$\theta' = \theta \cos \varphi$$

und

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos \varphi}{\varrho},$$

d. i. Meunier's Theorem; R ist der Krümmungsradius des Normalschnittes und ϱ der der gegebenen Curve.

---

*) Siehe den Anhang zu Monge, p. 576.

In derselben Art haben wir, da $pnq = \theta''$ der geodätische Winkel der Berührung ist,

$$pq = \theta'' ds \quad \text{und} \quad pq = tp \sin \varphi,$$

oder

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin \varphi}{\varrho}.$$

Der geodätische*) Radius der Krümmung ist also $\frac{\varrho}{\sin \varphi}$. Man sieht leicht, dass dieser geodätische Radius mit dem Radius der absoluten Krümmung derjenigen ebenen Curve übereinstimmt, in welche die gegebene Curve transformiert wird, wenn die längs derselben der gegebenen Fläche umschriebene Abwickelungsfläche in eine Ebene ausgebreitet wird.

120. Man kann die Theorie der geodätischen Linien auf den Flächen zweiten Grades von Joachimsthal's Fundamentalsatz abhängig machen, nach welchem in jedem Punkt einer solchen Curve die Grösse pD constant ist, wo p wie im Artikel 174 des ersten Bandes die Senkrechte auf die Tangentenebene des Punktes und D den zur Tangente der Curve in demselben Punkt parallelen Durchmesser der Fläche zweiten Grades bezeichnet.

Derselbe kann von folgenden zwei Principien aus bewiesen werden:

1) Wenn man von irgend einem Punkte aus an eine Fläche zweiten Grades zwei Tangenten zieht, so sind ihre Längen den parallelen Durchmessern proportional (vergl. Art. 70, Bd. I);

2) Wenn man von zwei Punkten A, B einer Fläche zweiten Grades von einem auf die Tangentenebene des jedesmaligen anderen Perpendikel fällt, so sind die Längen derselben denen der senkrechten Abstände des Centrums von denselben Ebenen proportional. Denn die Länge der Senkrechten von (x'', y'', z'') auf die Tangentenebene in (x', y', z') ist

$$p\left(\frac{x'x''}{a^2} + \frac{y'y''}{b^2} + \frac{z'z''}{c^2} - 1\right)$$

*) Ich habe den durch O. Bonnet eingeführten Namen „zweite geodätische Krümmung" nicht angenommen. Es ist beabsichtigt, die Grenze des Verhältnisses auszudrücken, welches durch das Bogenelement und den Winkel der Normale des einen Endpunktes gegen die Ebene des Elementes und der Normale am anderen Endpunkte bestimmt ist.

und die der Senkrechten von (x', y', z') auf die Tangentenebene in (x'', y'', z'')

$$p'\left(\frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}+\frac{z'z''}{c^2}-1\right).$$

Wenn nun von den Punkten A, B nach irgend einem Punkte in der Durchschnittslinie der Tangentenebenen in A und B die Geraden AT, BT gezogen werden und AT mit jener Durchschnittslinie den Winkel i bildet, während die Tangentenebenen selbst einen Winkel ω einschliessen, so ist die Senkrechte von A auf die Durchschnittslinie der Ebenen $AT \sin^2 i$ und die von A auf die Tangentenebene in B $AT \sin i \sin \omega$; ebenso ist die Senkrechte von B auf die Tangentenebene in A $BT \sin i' \sin \omega$.

Wenn nun die Linien AT, BT mit der Durchschnittslinie der Ebenen gleiche Winkel bilden, so sind ihre Längen den senkrechten Entfernungen der Punkte A und B von beiden Ebenen proportional. AT und BT sind aber proportional zu D und D' und die bezeichneten senkrechten Entfernungen sind proportional zu den Senkrechten vom Centrum p und p'. Also ist

$$Dp = D'p'.$$

In Artikel 48 ward aber bewiesen, dass die successiven Elemente AT, BT einer geodätischen Linie mit der Durchschnittslinie der Tangentenebenen in A und B gleiche Winkel bilden; in Folge dessen bleibt die Grösse Dp unverändert, wenn wir in einer geodätischen Linie von Punkt zu Punkt gehen; q. e. d.*)

Diese Bemerkung des Artikel 48 kann, genauer festgestellt, eine andere Betrachtung begründen. Wenn die Normalen der Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten der Curve gegen die betreffende Schmiegungsebene derselben gleich geneigt sind, so bilden sie auch gleiche Winkel mit jener Geraden und die Winkel, welche derselbe Theil dieser Linie mit ihnen oder den Elementen selbst bildet, sind gleich oder supplementär, je nach dem die Normalen auf derselben Seite der Schmiegungsebene liegen oder nicht. Liegen sie auf derselben Seite, so durchschneiden sie sich und die betrachteten Elemente gehören einer Krümmungslinie an. Ihre Lage auf verschiedenen Seiten wird beim Uebergang zur Grenze zur Lage in der Schmiegungsebene selbst

*) Dieser Beweis rührt von Graves her, „Crelle's Journal", Bd. XLII, p. 279.

und die Curve zur geodätischen Linie. Auf einander folgende Elemente einer Krümmungslinie machen also mit denselben Seiten der Schnittlinie der bezüglichen Tangentenebenen der Fläche gleiche Winkel, solche einer geodätischen Linie supplementäre Winkel. Daraus ergiebt sich die Bündigkeit der Schlüsse dieses Artikels für beide Fälle. Aber auch so:

Sind also MN, NP auf einander folgende Elemente, NO die Schnittlinie der Tangentenebenen, so hat man entweder

$$\angle ONM = \angle ONP, \quad \text{oder} \quad \angle ONM + \angle ONP = 180^0;$$

ist dann Cn der zu NO parallele Halbmesser des Ellipsoids und legt man durch n parallel zur Schmiegungsebene MNP eine Ebene, so schneidet diese das Ellipsoid in einer Ellipse, welche der in der Schmiegungsebene enthaltenen ähnlich ist und die auf einander folgenden Tangenten derselben mn, np sind zu MN, NP respective parallel, also

$$\angle Cnm = \angle Cnp \quad \text{oder} \quad \angle Cnm + \angle Cnp = 180^0.$$

Daher sind die Perpendikel von C auf mn, np gleich lang und wenn man also parallel der Tangentenebene in einem Punkte der Curve eine Ebene durch das Centrum legt, so ist die Senkrechte vom Centrum auf die der Tangente der Curve parallele Tangente des Centralschnitts constant $= q$. Dann ist pdq das Volumen des umhüllenden Parallelepipeds, d. h. constant und somit pd auch eine constante Grösse.

121. Aber einige andere Folgerungen ergeben sich mit Leichtigkeit für Flächen jeder Ordnung. Wenn eine Krümmungslinie eben ist, so bilden die Normalen der Fläche längs derselben mit einer festen Geraden denselben Winkel. Denn die auf einander folgenden Normalen sind gleichgeneigt zur Ebene der Curve, also auch zu ihrer Normale, und schneiden sich.

Wenn die Normalen einer Fläche längs einer geodätischen Linie einer festen Ebene parallel sind, so bilden die Tangenten der Curve mit einer festen Geraden gleiche Winkel. Denn eine Normale jener Ebene ist zu allen Tangentenebenen, also auch zu ihren Schnittlinien parallel, zu denen ja die Elemente der geodätischen Linie supplementäre Winkel bilden.

Wenn die Durchschnittslinie zweier Flächen eine Krümmungslinie für beide ist, so schneiden sich diese unter constantem Winkel.*)

Sind MN und NP auf einander folgende Elemente der Durchdringungscurve, so beschreibe man aus N mit $NM = NP$ als Halbmesser eine Kugel, welche die Durchschnittslinien der Tangentenebenen beider Flächen in O und Q respective durchschneidet. Dann sind nach der Natur der Krümmungslinie die Bogen $OM = OP$, $QM = QP$, und da OQ den sphärischen Dreiecken OMQ und OPQ gemeinsam ist, so ist $\angle\, OMQ = \angle\, OPQ$, d. h. der Winkel der Tangentenebenen beider Flächen durch dasselbe Element ist constant.**)

Das Nämliche gilt für eine geodätische Linie, aber die Flächen berühren dann einander oder schneiden sich in einer Geraden.

Denn dann sind die Bogen OM und OP, QM und QP supplementär; liegen dann die Linien MN, NO und NP nicht in einer Ebene, d. h. ist MNP nicht gerade, so fallen nothwendig NO, NQ zusammen und die Flächen berühren einander. Wenn aber die Elemente MN, NP in dieselbe Gerade fallen, so decken

---

*) Derselbe Satz kann auch aus der Gleichung

$$(dx + pdz)\, dq = (dy + qdz)\, dp$$

des Artikel 50 geschlossen werden. Denn für

$$z = \Phi\,(x, y) \quad , \quad z = \Phi_1\,(x, y)$$

sind

$$dz = pdx + qdy, \quad dz = p_1dx + q_1dy,$$

somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p - p_1}{q - q_1};$$

durch Einsetzen in die obige Gleichung von Monge

$$(q_1 - q + p^2q_1 - pp_1q)\; dq + (p_1 - p + p_1q^2 - pqq_1)\, dp = 0,$$
$$(q - q_1 + p_1^2q - pp_1q_1) dq_1 + (p - p_1 + pq_1^2 - p_1qq_1)\, dp_1 = 0.$$

Aus ihrer Addition erkennt man aber das Verschwinden des vollständigen Differentials von

$$\frac{1 + pp_1 + qq_1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,.\,\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}},$$

d. h. die Unveränderlichkeit des Winkels der beiden Flächen.

**) Man kann daraus schliessen, dass für jede Krümmungslinie die Grösse $\frac{d\eta}{ds}$ den Werth Null hat. (Vergl. Artikel 106.)

sich auf einander folgende Tangentenebenen jeder Fläche und die Flächen schneiden einander in einer Geraden unter constantem Winkel.

Als specielle Fälle treten hinzu die Sätze:

Wenn eine Krümmungslinie einer Fläche eben oder sphärisch ist, so schneidet die Fläche die Ebene oder Kugel längs derselben unter constantem Winkel und umgekehrt.

Für eine kreisförmige Krümmungslinie bilden die an ihr aufstehenden Normalen der Fläche und ebenso die Tangentenebenen derselben einen Drehungskegel.

Wenn zwei Flächen sich unter constantem Winkel durchschneiden, während die Durchschnittscurve eine Krümmungslinie der einen ist, so ist sie auch eine Krümmungslinie der andern. (Art. 45.)

Wenn zwei Flächen einander berühren, während die Berührungscurve eine geodätische Linie der einen ist, so ist sie auch eine geodätische Linie der andern.

Dieselbe Grundidee giebt noch zu folgenden allgemeinen Ergebnissen Anlass.

Die Durchschnittslinie der auf einander folgenden Tangentenebenen der Fläche in Punkten der Curve und die Tangente der Curve selbst sind conjugierte Tangenten der Fläche. (Vergl. Artikel 7.) Sie alle bilden eine der Curve zugehörige Abwickelungsfläche. Für eine geodätische Linie ist sie von solcher Beschaffenheit, dass diese bei ihrer Abwickelung gerade wird oder die geodätische Linie ist auch für diese abwickelbare Fläche eine geodätische Linie.

Die Rückkehrkante der entwickelbaren Fläche der conjugierten Tangenten in Punkten einer Krümmungslinie ist eine geodätische Linie auf der entwickelbaren Polarfläche derselben.

122. Wegen der Wichtigkeit des Joachimsthal'schen Satzes wollen wir überdiess zeigen, wie er aus den Differentialgleichungen einer geodätischen Linie abgeleitet werden kann.*)

Indem man die Gleichung

$$\frac{U_1^2}{R^2} + \frac{U_2^2}{R^2} + \frac{U_3^2}{R^2} = 1,$$

in welcher U_1, U_2, U_3 die Differentialcoefficienten sind, differentiiert

*) Siehe Joachimsthal, „Crelle's Journal", Bd. XXVI, p. 155. Bonnet, „Journal de l'école polytechnique," t. XIX, p. 138. Dickson, „Cambridge and Dublin Mathematical Journal", Vol. V, p. 168.

und dann für U_1, etc. $d\,\frac{dx}{ds}$, etc. (Art. 116) substituiert, erhält man

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)d\left(\frac{U_1}{R}\right)+d\left(\frac{dy}{ds}\right)d\left(\frac{U_2}{R}\right)+d\left(\frac{dz}{ds}\right)d\left(\frac{U_3}{R}\right)=0.$$

Wir bemerken dabei, dass diese Gleichung auch für eine Krümmungslinie wahr ist, denn da $\frac{U_1}{R}$, etc. die Richtungscosinus der Normale sind, so sind die Richtungscosinus einer Linie in derselben Ebene mit zwei auf einander folgenden Normalen und senkrecht zu ihnen (Artikel 95) zu $d\left(\frac{U_1}{R}\right)$, etc. proportional; es sind also die $\frac{dx}{ds}$, etc. einer Krümmungslinie den $d\left(\frac{U_1}{R}\right)$, etc. proportional.

Wenn wir aber ferner

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}=1$$

differentiieren und für $\frac{dx}{ds}$ den eben gegebenen Werth einführen, so erhalten wir die Gleichung

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)d\left(\frac{U_1}{R}\right)+d\left(\frac{dy}{ds}\right)d\left(\frac{U_2}{R}\right)+d\left(\frac{dz}{ds}\right)d\left(\frac{U_3}{R}\right)=0.$$

Durch wirkliche Ausführung der angedeuteten Differentiationen und Reduction des Resultats mittelst der Differentialgleichung der Fläche

$$U_1dx+U_2dy+U_3dz=0$$

und ihrer Consequenz

$$dU_1dx+dU_2dy+dU_3dz=-(U_1d^2x+U_2d^2y+U_3d^2z)$$

erhalten wir

$$(dU_1dx+dU_2dy+dU_3dz)(dRds-Rd^2s)$$
$$+(dU_1d^2x+dU_2d^2y+dU_3d^2z)Rds=0,$$

oder

$$\frac{dU_1d^2x+dU_2d^2y+dU_3d^2z}{dU_1dx+dU_2dy+dU_3dz}+\frac{dR}{R}-\frac{d^2s}{ds}=0.$$

Diese Gleichung ist das Product der beiden folgenden

$$(U_2dz-U_3dy)\,d^2x+(U_3dx-U_1dz)\,d^2y+(U_1dy-U_2dx)\,d^2z=0,$$
$$(U_2dz-U_3dy)\,dU_1+(U_3dx-U_1dz)\,dU_2+(U_1dy-U_2dx)\,dU_3=0,$$

von denen die erste die Gleichung der geodätischen Linien, die andere die Gleichung der Krümmungslinien ist; da jene ausdrückt, dass die Hauptnormale in der durch die Tangente gelegten Normalebene der Fläche liegt, oder dass zwei auf einander folgende Elemente und die Flächennormale in einer Ebene liegen, während diese sagt, dass zwei auf einander folgende Normalen in einer Ebene liegen. (Vergl. Artikel 43.)

123. Die vorige Gleichung ist also für eine geodätische oder eine Krümmungslinie in einer beliebigen Fläche wahr; wenn aber die Fläche nur vom zweiten Grade ist, so kann ein erstes Integral der Gleichung gefunden werden. In der That, wir haben

$$dU_1 d^2x + dU_2 d^2y + dU_3 d^2z = \tfrac{1}{2} d\,(dU_1 dx + dU_2 dy + dU_3 dz),$$

wie man leicht durch Anwendung der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades oder einfacher durch die der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestätigen kann; im letzteren Falle ist

$$U_1 = \frac{x}{a^2}, \quad U_2 = \frac{y}{b^2}, \quad U_3 = \frac{z}{c^2},$$

$$dU_1 = \frac{dx}{a^2}, \quad dU_2 = \frac{dy}{b^2}, \quad dU_3 = \frac{dz}{c^2}$$

und durch Substitution dieser Werthe ist die obige Gleichung begründet. Somit besteht die Gleichung des vorigen Artikels aus Theilen, welche einzeln integrierbar sind. Die Integration liefert

$$R^2\,(dU_1 dx + dU_2 dy + dU_3 dz) = C ds^2.$$

Nach den vorhergehenden Werthen ist aber

$$R^2 = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{p^2},$$

$$\frac{dU_1}{ds}\frac{dx}{ds} + \frac{dU_2}{ds}\frac{dy}{ds} + \frac{dU_3}{ds}\frac{dz}{ds}$$

$$= \frac{1}{a^2}\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{1}{b^2}\frac{dy^2}{ds^2} + \frac{1}{c^2}\frac{dz^2}{ds^2}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bezeichnet nun den reciproken Werth von dem Quadrate eines Centralradius, dessen Richtungscosinus durch die Grössen $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ gegeben sind. Die geometrische Bedeutung des Integrals besteht daher darin, dass pD einer Constanten gleich sei.*)

*) Hart beweist den Satz folgendermassen: Betrachten wir irgend einen ebenen Schnitt eines Ellipsoids, bezeichnen durch ω die Senk-

124. Die Constante pD hat für alle geodätischen Linien, welche durch denselben Kreispunkt gehen, den nämlichen Werth.

Denn in dem Kreispunkte ist die Grösse p allen gemein und hat den Werth

$$\frac{ac}{b};$$

da aber überdiess der der Tangentenebene des Kreispunktes parallele Centralschnitt ein Kreis ist, so ist der der Tangente der geodätischen Linie parallele Durchmesser constant, nämlich stets gleich der mittleren Achse b. Wir haben daher für eine durch einen Kreispunkt gehende geodätische Linie

$$pD = ac.$$

Denken wir nun einen beliebigen Punkt der Fläche zweiten Grades mit zwei Kreispunkten derselben durch geodätische Linien verbunden, so muss, weil wir zeigten, dass pD für beide geodätische Linien das nämliche ist, und weil in ihrem Durchschnittspunkt die Grösse p für beide denselben Werth hat, auch das D für beide den nämlichen Werth haben; d. h. die Durchmesser, welche den Tangenten der geodätischen Linien in ihrem Durchschnittspunkte parallel gezogen sind, haben gleiche Länge. Zwei gleiche Durchmesser eines Kegelschnitts machen aber gleiche Winkel mit den Achsen desselben, und wir wissen anderseits, dass die Achsen eines der Tangentenebene eines gewissen Punktes parallelen Centralschnittes einer Fläche zweiten Grades den Richtungen der Krümmungslinien in diesem Punkte parallel sind. Oder: Die geodätischen Linien, welche irgend einen Punkt in einer Fläche zweiten Grades mit zwei Kreispunkten

---

rechte vom Centrum des Schnittes auf die Tangente, mit d den zu dieser Tangente parallelen Durchmesser des Schnittes und mit i den Winkel, welchen die Schnittebene mit der Tangentenebene in einem seiner Punkte bildet; so ist längs des ganzen Schnittes ωd constant und es ist offenbar, dass pd in einem festen Verhältniss zu $\omega d \sin i$ ist. Die Grösse pd variiert also längs der Schnittcurve wie $\sin i$ und ist da ein Maximum, wo die Ebene die Fläche rechtwinklig schneidet. Eine geodätische Linie osculiert aber eine Reihe von Normalschnitten, deshalb ist für eine solche Linie pd constant und seine Differentiale verschwinden. „Cambridge and Dublin Mathematical Journal," Vol. IV, p. 84.

derselben verbinden, bilden mit den durch diesen Punkt gehenden Krümmungslinien gleiche Winkel.*)

Es folgt daraus, dass von den beiden geodätischen Linien, welche irgend einen Punkt der Fläche mit den beiden entgegengesetzten Kreispunkten verbinden, welche in demselben Durchmesser liegen, die eine die Fortsetzung der andern ist; denn die Scheitelwinkel sind gleich gross, welche diese geodätischen Linien mit jeder Krümmungslinie durch diesen Punkt bilden.

Nach Artikel 119 ergiebt sich auch, dass die Summe oder Differenz der geodätischen Entfernungen von zwei Kreispunkten für alle Punkte derselben Krümmungslinie constant ist. Die Summe ist constant, wenn beide Kreispunkte in Bezug auf die Krümmungslinie innerhalb gewählt sind, die Differenz, wenn durch Einführung des entgegengesetzten für einen der Kreispunkte der eine derselben innerhalb, der andere ausserhalb der Krümmungslinie ist.

Sind A, A' zwei entgegengesetzte Kreispunkte und bezeichnet B einen andern Kreispunkt, so folgt aus der Constanz der Summe

$$PA + PB \quad \text{und der der Differenz} \quad PA' - PB$$

auch, dass $PA + PA'$ constant ist, d. h. alle geodätischen Linien, welche zwei entgegengesetzte Kreispunkte vereinigen, sind von gleicher Länge. In der That, es ist offenbar, dass zwei unendlich nahe geodätische Linien, welche dieselben beiden Punkte in irgend einer Fläche verbinden, von gleicher Länge sein müssen.

Die geodätischen Tangenten PQ, PR einer Krümmungslinie vom Punkte P aus machen mit den durch P gehenden Krümmungslinien gleiche Winkel.

Denn das Product pD ist für die Krümmungslinie QR und die geodätischen Linien PQ, PR von gleichem Werthe. Im Punkte P ist aber p für beide geodätischen Linien dasselbe und daher auch D für beide gleich gross oder die Tangenten zu PQ, PR in P sind gleichen Durchmessern des Diametralschnitts des Ellipsoids parallel, machen also mit den Krümmungslinien durch P, welche den Achsen dieses Centralschnitts parallel sind (vergl. Band I, Artikel 171), gleiche Winkel.

---

*) Diess Theorem und seine in den folgenden Artikeln entwickelten Consequenzen gab Michael Roberts, „Liouville's Journ.", t. XI, p. 1.

125. Die Constante pD hat für alle geodätischen Linien, welche die nämliche Krümmungslinie berühren, denselben Werth.

Im Artikel 174 des I. Bandes ward gezeigt, dass pD längs einer ganzen Krümmungslinie den nämlichen Werth behalte; in den Punkten, in denen eine Krümmungslinie von irgend welchen geodätischen Linien berührt wird, haben beide Grössen p und D für die geodätische und für die Krümmungslinie denselben Werth.

In Folge dessen hat ein System von Krümmungslinien in einer Fläche zweiten Grades Eigenschaften, welche vollständig denen eines Systems confocaler Kegelschnitte in einer Ebene analog sind, indem die Kreispunkte den Brennpunkten entsprechen. Z. B. Zwei geodätische Tangenten, die von irgend einem Punkte der einen an eine andere gezogen sind, machen mit der Tangente der ersteren in diesem Punkte gleiche Winkel. Auch der Satz von Graves für ebene Kegelschnitte („Analytische Geometrie der Kegelschnitte", Artikel 262) bleibt für ein System von Krümmungslinien gültig: Der Ueberschuss der Summe zweier Tangenten einer Krümmungslinie über den von ihnen gespannten Bogen derselben ist constant, so lange der Durchschnittspunkt derselben eine Krümmungslinie der nämlichen Art durchläuft.

126. Die Gleichung $pD =$ const. ist von Liouville in einer anderen vortheilhaften Form geschrieben worden.*)

Seien a', a'' die primären Halbachsen zweier confocaler Flächen durch irgend einen Punkt der Curve und bezeichne i den Winkel, welchen die Tangente der geodätischen Linie mit einer der Haupttangenten macht, so ist, weil nach Band I, Artikel 172

$$a^2 - a'^2, \quad a^2 - a''^2$$

die Halbachsen des zur Tangentenebene parallelen Centralschnittes sind, jeder andere Halbdurchmesser dieses Schnittes durch die Gleichung

$$\frac{1}{D^2} = \frac{\cos^2 i}{a^2 - a''^2} + \frac{\sin^2 i}{a^2 - a'^2}$$

gegeben, und überdiess

$$\frac{1}{p^2} = \frac{(a^2 - a'^2)\,(a^2 - a''^2)}{a^2 b^2 c^2}. \quad \text{(Bd. I, Art. 173.)}$$

*) S. „Journal de Mathém.", t. IX, p. 401.

Die Gleichung

$$pD = \text{const.}$$

ist daher mit der anderen

$$(a^2 - a'^2) \cos^2 i + (a^2 - a''^2) \sin^2 i = \text{const.}$$

oder

$$a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \text{const.}$$

identisch.

127. Der Ort des Durchschnittspunktes zweier geodätischer Tangenten einer Krümmungslinie, welche sich rechtwinklig schneiden, ist ein sphärischer Kegelschnitt.

Dieser Satz kann in derselben Art, wie der entsprechende Satz für ebene Kegelschnitte bewiesen werden. Wir haben für a', a'' als die dem Durchschnittspunkt entsprechenden Halbachsen

$$a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \text{const.},$$

$$a'^2 \sin^2 i + a''^2 \cos^2 i = \text{const.},$$

also auch

$$a'^2 + a''^2 = \text{const.}$$

In Folge dessen ist die Entfernung des Durchschnittspunktes vom Centrum der Fläche constant (Bd. I, Art. 169); und der Ort desselben ist die Durchschnittscurve der gegebenen Fläche zweiten Grades mit einer concentrischen Kugel.

Der Beweis bleibt gültig, wenn die geodätischen Linien Tangenten verschiedener Krümmungslinien sind; und als einen speciellen Fall erhalten wir den Satz, dass der Ort des Fusspunktes der geodätischen Senkrechten von einem Kreispunkt zu den Tangenten einer Krümmungslinie ein sphärischer Kegelschnitt ist.

128. Den Ort des Durchschnittspunktes derjenigen geodätischen Tangenten einer Krümmungslinie zu bestimmen, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden.*)

Die Tangenten einer gegebenen Krümmungslinie von irgend einem Punkte a', a'' aus sind durch die Gleichung

$$a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \beta$$

bestimmt, und da sie mit jedem der durch den Punkt gehenden Hauptradien gleiche Winkel bildet, so ist der Winkel i, den sie mit dem einen dieser Radien einschliesst, die Hälfte des von

*) Besge, „Liouville's Journal", t. XIV, p. 247.

beidem mit einander gebildeten Winkels. Wir haben daher

$$\tan \tfrac{1}{2}\,\theta = \frac{\sqrt{(\beta - a''^2)}}{\sqrt{(a'^2 - \beta)}}, \quad \tan \theta = \frac{2\sqrt{(\beta - a''^2)}\,\sqrt{(a'^2 - \beta)}}{a'^2 + a''^2 - 2\beta},$$

$$(a'^2 + a''^2 - 2\beta)^2 \tan^2 \theta = 4\beta\,(a'^2 + a''^2) - 4a'^2 a''^2 - 4\beta^2.$$

Durch die Gleichungen (Band I, Artikel 168, 169)

$$a'^2 + a''^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 - a^2,$$

$$a'^2 a''^2 = \frac{x^2\,(a^2 - b^2)\,(a^2 - c^2)}{a^2},$$

wird diese Gleichung auf gewöhnliche Coordinaten reduciert und man erkennt, dass der fragliche Ort der Durchschnitt der gegebenen Fläche zweiten Grades mit einer Fläche vierter Ordnung ist.

Michael Roberts hat („Liouville's Journal", t. XV, p. 291) durch die Methode des Artikel 197 im Bande I bewiesen, dass die Projection dieser Curve auf die Ebene der Kreisschnitte der Ort des Durchschnitts der unter constantem Winkel sich schneidenden Tangenten für den Kegelschnitt ist, in welchen die Krümmungslinie projiciert wird.

Wenn man also von einem beliebigen Punkte des Ellipsoids zwei geodätische Tangenten an eine Krümmungslinie zieht, so ist der von ihnen gebildete Winkel demjenigen Winkel gleich, welchen die von der Projection des Punktes durch Parallelen zur kleinsten Achse auf die cyclische Ebene an die entsprechende Projection der Krümmungslinie gehenden Tangenten bilden.

Da die Kreispunkte als Durchschnitte der Fläche mit einer Grenzfläche der Familie confocaler Hyperboloide (Band I, Artikel 166) eine Krümmungslinie repräsentieren, so überträgt sich dieser Satz auf die geodätischen Linien, welche einen Punkt mit zwei Kreispunkte verbinden, und ihre Projectionen. Für die Constanz des Winkels wird der Ort der Projection des Punktes ein Kreis; insbesondere für den Fall des Artikel 127 der Hauptkreis der Projection der Krümmungslinie. Auch ist der Winkel, welchen die geodätische Tangente einer Krümmungslinie aus P mit der geodätischen Verbindungslinie des Punktes P mit einem Kreispunkt bildet, gleich seiner Projection; und der Winkel, welchen die geodätischen Tangenten zweier Krümmungslinien aus einem Punkte bilden, dem Winkel gleich, welchen die von der Projection des Punktes an die Projectionen dieser Krümmungslinien gehenden entsprechenden Tangenten bilden.

129. Im Artikel 186 Band I, wurde bewiesen, dass zwei confocale Flächen existieren, welche eine gegebene gerade Linie berühren; dass, wenn die Achsen der drei durch irgend einen Punkt der Linie gehenden confocalen Flächen durch a, a', a'' und die Winkel, welche die Linie mit den drei Normalen in diesem Punkte bildet, durch α, β, γ bezeichnet werden, die grosse Achse der berührten confocalen Fläche durch die quadratische Gleichung

$$\frac{\cos^2 \alpha}{a^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a'^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a''^2 - \mathrm{a}^2} = 0$$

bestimmt wird.

Setzen wir nun voraus, die gegebene Linie sei eine Tangente der Fläche von der Achse a, so ist $\cos \alpha = 0$, weil die Linie dann zur Normale der ersten Fläche senkrecht ist und wir haben

$$\cos \beta = \sin \gamma,$$

weil die Tangentenebene der Fläche a ebensowohl die Linie als auch die beiden andern Normalen enthält. Der Winkel γ ist derselbe, den wir in den unmittelbar vorhergehenden Artikeln i genannt haben. Die Achse der zweiten von unserer geraden Linie berührten confocalen Fläche wird durch die Gleichung

$$\frac{\sin^2 i}{a'^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{\cos^2 i}{a''^2 - \mathrm{a}^2} = 0, \quad \text{oder} \quad a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \mathrm{a}^2$$

bestimmt. Wenn wir nun die Gleichung einer geodätischen Linie nach Artikel 127 in der Form

$$a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = \mathrm{a}^2$$

schreiben, so erhellt aus diesem Artikel, dass diese Gleichung den Satz ausspricht: Alle Tangenten längs der nämlichen geodätischen Linie berühren eine confocale Fläche von der primären Achse a.*)

Die geodätische Linie selbst berührt die Krümmungslinie, in welcher diese confocale die ursprüngliche Fläche durchschneidet; denn die Tangente der geodätischen Linie in dem Punkte, in welchem sie die confocale Fläche schneidet, berührt nach dem eben Bewiesenen auch die confocale Fläche selbst in diesem

---

*) Die Sätze dieses Artikels sind einem Mémoir von Chasles, „Liouville's Journ.", t. XI, p. 5, entnommen.

Punkte. Somit haben die geodätische Linie und die Durchschnittscurve der ursprünglichen mit der confocalen Fläche eine gemeinschaftliche Tangente.

Die osculierenden Ebenen der geodätischen Linie sind offenbar Tangentenebenen derselben confocalen Fläche, weil sie die Ebenen zweier auf einander folgenden Tangenten dieser Fläche sind.

Nach Artikel 124 ist der Werth von pD, welcher einer durch einen Kreispunkt gehenden geodätischen Linie entspricht $= ac$ und die entsprechende Gleichung ist daher

$$a'^2 \cos^2 i + a''^2 \sin^2 i = a^2 - b^2.$$

Die confocale Fläche, deren primäre Achse $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$ ist, reduciert sich aber auf den durch die Kreispunkte gehenden Focalkegelschnitt. Wir erhalten somit als einen speciellen Fall des eben bewiesenen Satzes den folgenden: *Alle Tangenten einer geodätischen Linie, die durch einen Kreispunkt geht, durchschneiden den Focalkegelschnitt, welcher die Kreispunkte enthält.*

Wenn umgekehrt von irgend einem Punkte O dieses Focalkegelschnitts an die Fläche geradlinige Tangenten gezogen und dieselben auf der Fläche geodätisch verlängert werden, so gehen die so erzeugten Linien durch den entgegengesetzten Kreispunkt und die Gesammtlängen derselben von O bis zu diesem letzteren gerechnet, sind gleich gross.

130. Aus dem in Band I, Artikel 186 bewiesenen Satze, dass die Tangentenebenen, welche durch irgend eine gerade Linie zu den zwei sie berührenden confocalen Flächen gelegt werden, zu einander rechtwinklig sind, hätten wir, genau so wie im Artikel 49 direct erkennen mögen, dass die Tangenten einer geodätischen Curve eine confocale Fläche berühren. Denn da die Ebene zweier auf einander folgender Tangenten einer geodätischen Linie zur Fläche normal ist, so berührt sie die confocale Fläche, welche von der ersten jener Tangenten berührt wird. Die zweite Tangente der geodätischen Linie berührt in Folge dessen diese nämliche confocale Fläche und in derselben Art thun es alle folgenden Tangenten derselben. Von dieser Begründung des im letzten Artikel gegebenen Satzes aus hätten wir durch Umkehrung der Schritte des Beweises zu einem unabhängigen Beweis des Satzes

$$pD = \text{const.}$$

gelangen können.

131. Die einer Fläche zweiten Grades längs einer geodätischen Linie umgeschriebene abwickelbare Fläche hat ihre Cuspidalkante in einer andern Fläche zweiten Grades, welche für alle dieselbe Krümmungslinie berührenden geodätischen Curven die nämliche ist.

Denn jeder Punkt der Cuspidalkante ist der Durchschnitt von drei auf einander folgenden Tangentenebenen der gegebenen Fläche zweiten Grades und die drei Berührungspunkte bestimmen nach der Voraussetzung eine Osculationsebene einer geodätischen Curve, welche nach Artikel 129 eine feste confocale Fläche berührt. Der Punkt in der Cuspidalkante ist der Pol dieser Ebene in Bezug auf die gegebene Fläche zweiten Grades und der Pol der Tangentenebene einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf eine andere Fläche zweiten Grades liegt in einer dritten festen Fläche vom zweiten Grade.

132. Chasles hat an das im Artikel 124 gegebene Theorem von Michael Roberts die folgende Erweiterung angeschlossen: Wenn ein in zwei festen Punkten einer Fläche zweiten Grades A befestigter Faden durch ein längs einer confocalen Fläche zweiten Grades B sich bewegendes Gewicht gespannt wird (sodass derselbe in geodätischen Linien aufgewunden ist, wo er die Flächen berührt und in geraden Linien in dem Raume zwischen beiden), so beschreibt der schwere Punkt desselben eine Krümmungslinie der Fläche zweiten Grades B.

Denn die zwei geodätischen Linien der Fläche B, welche sich in dem zum Orte gehörigen Punkte P schneiden, machen daselbst mit dem Orte von P gleiche Winkel; diese geodätischen Linien haben aber die geradlinigen Theile des Fadens, welche beide dieselbe confocale Fläche berühren, zu Tangenten und in Folge dessen ist nach Artikel 129 die Grösse pD für beide geodätischen Linien dieselbe und die Halbierungslinie des von ihnen gebildeten Winkels demnach eine Krümmungslinie.

Ein specieller Fall dieses Satzes ist derjenige, nach welchem die Focalellipse einer Fläche zweiten Grades mittelst eines in zwei festen Punkten in entgegengesetzten Zweigen ihrer Focalhyperbel befestigten undehnbaren Fadens beschrieben werden kann.

133. Elliptische Coordinaten. Die in den Artikeln 127, 128 angewendete Methode, in welcher die Lage eines Punktes auf dem Ellipsoid durch die primären Achsen der beiden Hyperboloide bestimmt wird, welche sich in ihm schneiden, wird die Methode der elliptischen Coordinaten genannt. (Vgl. Artikel 197, Band I.) Um Accente zu vermeiden, folge ich Liouville in der Bezeichnung der bisher durch a', a'' ausgedrückten Grössen durch die Buchstaben μ, ν.*)

In dieser Bezeichnung ist die Gleichung einer Krümmungslinie des einen Systems von der Form

$$\mu = \text{const.},$$

und die einer Krümmungslinie des andern Systems von der Form

$$\nu = \text{const.}$$

Die Gleichung einer geodätischen Linie (Artikel 126) wird

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mu'^2,$$

und für eine geodätische Linie, welche durch einen Kreispunkt geht, hat man speciell

$$\mu'^2 = a^2 - b^2 = h^2.$$

Man erinnert sich (Artikel 166, Band I), dass μ zwischen den Grenzen h und k, ν zwischen den Grenzen k und 0 enthalten ist.

Indem man die Gleichung einer geodätischen Linie in die Form

$$\mu^2 + \nu^2 \tan^2 i = \mu'^2 (1 + \tan^2 i)$$

bringt, erkennt man, dass die Werthe

$$\mu^2 = \nu^2, \quad \tan^2 i = -1$$

unabhängig von μ' ihr genügen; es folgt daraus, dass das nämliche Paar von einem Kreispunkte ausgehender imaginärer Tangenten alle Krümmungslinien berührt — worin eine weitere Analogie dieser Punkte mit den Brennpunkten ebener Kegelschnitte erkannt ist.**)

---

*) Ich kann ihm dagegen nicht darin nachahmen, die Achse des Ellipsoids ϱ und die Grössen $a^2 - b^2$, $a^2 - c^2$ (die ich h^2, k^2 nennen werde), b^2 und c^2 zu nennen, weil ich das verwirrend finde.

**) M. Roberts, „Liouville's Journal", t. XV, p. 289.

134. Man soll das Bogenelement irgend einer Curve in der Fläche in elliptischen Coordinaten ausdrücken.

Wir betrachten zuerst das Element einer Krümmungslinie

$$\mu = \text{const.}$$

Sei diese Linie von den beiden auf einander folgenden Hyperboloiden mit den Achsen ν und $(\nu + d\nu)$ geschnitten, so ist, weil sie von denselben rechtwinklig durchschnitten wird, das zwischen ihnen liegende Element derselben zugleich die Differenz zwischen den centralen Senkrechten auf die Tangentenebenen der beiden Hyperboloide. Nach Artikel 190, Band I ist

$$(p'' + dp'')^2 - p''^2 = (\nu + d\nu)^2 - \nu^2,$$

oder

$$p''\,dp'' = \nu d\nu.$$

Da aber nach dem Vorigen

$$dp'' = d\sigma$$

dem Element des betrachteten Bogens ist, so haben wir

$$p''^2 = \frac{a''^2 b''^2 c''^2}{(a^2 - a''^2)\,(a'^2 - a''^2)} = \frac{\nu^2\,(h^2 - \nu^2)\,(k^2 - \nu^2)}{(a^2 - \nu^2)\,(\mu^2 - \nu^2)},$$

also

$$d\sigma^2 = \frac{(a^2 - \nu^2)\,(\mu^2 - \nu^2)}{(h^2 - \nu^2)\,(k^2 - \nu^2)}\,d\nu^2.$$

In derselben Art finden wir das Element des Bogens der Krümmungslinie

$$\nu = \text{const.},$$

durch die Formel gegeben

$$d\sigma'^2 = \frac{(a^2 - \mu^2)\,(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - h^2)\,(k^2 - \mu^2)}\,d\mu^2.$$

Wenn man nun durch die Endpunkte des Bogenelements irgend einer Curve Krümmungslinien beider Systeme legt, so entsteht ein elementares Rechteck, von welchem $d\sigma$, $d\sigma'$ die Seiten sind, während ds die Diagonale ist.

Man erhält daher für das Bogenelement irgend einer Curve

$$ds^2 = \frac{(a^2 - \mu^2)\,(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - h^2)\,(k^2 - \mu^2)}\,d\mu^2 + \frac{(a^2 - \nu^2)\,(\mu^2 - \nu^2)}{(h^2 - \nu^2)\,(k^2 - \nu^2)}\,d\nu^2.$$

135. In gleicher Art können wir den Inhalt irgend eines durch vier Krümmungslinien μ_1, μ_2; ν_1, ν_2 begrenzten

Flächentheils ausdrücken. Für das Flächenelement erhält man

$$d\sigma_1 d\sigma_2 = \frac{(\mu^2 - \nu^2) \sqrt{\{(a^2 - \mu^2)(a^2 - \nu^2)\}}}{\sqrt{\{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)\}}} d\mu d\nu,$$

und das Integral dieses Ausdrucks ist

$$\int\limits_{\mu_2}^{\mu_1} \frac{\mu^2 \sqrt{(a^2 - \mu^2)}\, d\mu}{\sqrt{\{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)\}}} \int\limits_{\nu_2}^{\nu_1} \frac{\sqrt{(a^2 - \nu^2)}\, d\nu}{\sqrt{\{(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)\}}}$$

$$- \int\limits_{\mu_2}^{\mu_1} \frac{\sqrt{(a^2 - \mu^2)}\, d\mu}{\sqrt{\{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)\}}} \int\limits_{\nu_2}^{\nu_1} \frac{\nu^2 \sqrt{(a^2 - \nu^2)}\, d\nu}{\sqrt{\{(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)\}}}. \text{*)}$$

So können wir ferner die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorie einer Curve finden, deren Differentialgleichung

$$M d\mu + N d\nu$$

ist.

Denn die orthogonale Trajectorie zu

$$P d\sigma + Q d\sigma'$$

ist offenbar

$$\frac{d\sigma}{P} - \frac{d\sigma'}{Q},$$

weil $d\sigma$, $d\sigma'$ ein System rechtwinkliger Coordinaten bilden; wenn man also

$$M d\mu + N d\nu$$

durch die Formeln des letzten Artikels in die Form

$$P d\sigma + Q d\sigma'$$

bringt, so wird die Gleichung der orthogonalen Trajectorie gefunden; wir erhalten sie in der Form

$$\frac{a^2 - \mu^2}{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)} \frac{d\mu}{M} - \frac{a^2 - \nu^2}{(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)} \frac{d\nu}{N} = 0.$$

136. Das erste Integral einer geodätischen Linie

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \mu'^2$$

kann in eine Form gebracht werden, in welcher die Veränderlichen getrennt sind und aus der sich das zweite Integral ableiten lässt.

---

*) So ward der Inhalt der Fläche des Ellipsoids zuerst durch Legendre ausgedrückt, „Traité des Fonctions elliptiques“, t. I, p. 352.

Diese Gleichung giebt

$$\tan i = \sqrt{\left(\frac{\mu^2 - \mu'^2}{\mu'^2 - \nu^2}\right)}.$$

Anderseits ist aber

$$\tan i = \frac{d\sigma'}{d\sigma} = \frac{\sqrt{\left\{(a^2 - \mu^2)\ (h^2 - \nu^2)\ (k^2 - \nu^2)\right\}}}{\sqrt{\left\{(a^2 - \nu^2)\ (\mu^2 - h^2)\ (k^2 - \mu^2)\right\}}}\ \frac{d\mu}{d\nu},$$

und man erhält somit durch Vergleichung beider Werthe die Gleichung

$$\frac{\sqrt{(a^2 - \mu^2)}\ d\mu}{\sqrt{\left\{(\mu^2 - \mu'^2)\ (\mu^2 - h^2)\ (k^2 - \mu^2)\right\}}} \pm \frac{\sqrt{(a^2 - \nu^2)}\ d\nu}{\sqrt{\left\{(\mu'^2 - \nu^2)\ (h^2 - \nu^2)\ (k^2 - \nu^2)\right\}}} = 0,$$

deren Glieder getrennt integriert werden können.*)

Wenn die geodätische Linie durch die Kreispunkte geht, so haben wir

$$\mu'^2 = h^2 \quad \text{(Artikel 133)}$$

und die Gleichung derselben wird

$$\frac{\sqrt{(a^2 - \mu^2)}}{(\mu^2 - h^2)\ \sqrt{(k^2 - \mu^2)}}\ d\mu \pm \frac{\sqrt{(a^2 - \nu^2)}}{(h^2 - \nu^2)\ \sqrt{(k^2 - \nu^2)}}\ d\nu = 0.$$

137. Einen Ausdruck für die Länge eines Theils einer geodätischen Linie zu entwickeln.

Das Element der geodätischen Linie ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Catheten $d\sigma$, $d\sigma'$ sind und welches i zum Basiswinkel hat. Wir haben daher

$$ds = \sin i\ d\sigma' \pm \cos i\ d\sigma,$$

und erhalten durch Einführung der Werthe

$$\sin i = \frac{\sqrt{(\mu^2 - \mu'^2)}}{\sqrt{(\mu^2 - \nu^2)}}, \quad \cos i = \frac{\sqrt{(\mu'^2 - \nu^2)}}{\sqrt{(\mu^2 - \nu^2)}}$$

und der im Artikel 134 gegebenen Werthe von $d\sigma$, $d\sigma'$

$$ds = d\mu \sqrt{\left\{\frac{(\mu^2 - \mu'^2)\ (a^2 - \mu^2)}{(\mu^2 - h^2)\ (k^2 - \mu^2)}\right\}} \pm d\nu \sqrt{\left\{\frac{(\mu'^2 - \nu^2)\ (a^2 - \nu^2)}{(h^2 - \nu^2)\ (k^2 - \nu^2)}\right\}}.$$

Wenn ϱ das Element einer durch die Kreispunkte gehenden Linie bezeichnet, so ist ferner

$$d\varrho = d\mu \sqrt{\left(\frac{a^2 - \mu^2}{k^2 - \mu^2}\right)} \pm d\nu \sqrt{\left(\frac{a^2 - \nu^2}{k^2 - \nu^2}\right)},$$

---

*) Die Gleichung einer geodätischen Linie ward zuerst durch Jacobi „Crelle's Journal", Bd. XIX, p. 309 integriert.

und es mag bemerkt werden, dass wir, wenn dem Radical im letzten Artikel das Zeichen $+$ gegeben ist, dem Radical dieses Artikels das Zeichen — geben müssen; diess erhellt, indem man nach Artikel 135 die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorie einer durch einen Kreispunkt gehenden geodätischen Linie bildet, eine Gleichung, welche mit $d\varrho = 0$ äquivalent sein muss. (Artikel 118.)

138. Anstatt die Lage eines Punktes auf einem Ellipsoid durch die elliptischen Coordinaten μ, ν zu bezeichnen, können wir geodätische Polarcoordinaten anwenden und einen Punkt durch seine geodätische Entfernung ϱ von einem Kreispunkt und den Winkel ω bestimmen, welchen der Radius vector mit der Verbindungslinie der Kreispunkte bildet.

Die Gleichung einer durch einen Kreispunkt gehenden geodätischen Linie (Art. 136) giebt die Summe zweier Integrale gleich einer Constanten. Diese Constante kann nicht eine Function von ϱ sein, weil sie längs derselben geodätischen Linie sich nicht ändert; sie muss also eine Function von ω allein sein, und wenn wir von irgend einem Punkte zu einem unendlich nahe gelegenen übergehen, der nicht in dem nämlichen geodätischen Radius vector liegt, so haben wir

$$\frac{\sqrt{(a^2-\mu^2)}\,.\,d\mu}{(\mu^2-h^2)\sqrt{(k^2-\mu^2)}} \pm \frac{\sqrt{(a^2-\nu^2)}\,.\,d\nu}{(h^2-\nu^2)\sqrt{(k^2-\nu^2)}} = \Phi'(\omega)\,d\omega.$$

Wir bestimmen die Form der Function durch Berechnung ihres Werthes für einen Punkt, der dem Kreispunkt $\mu = \nu = h$ unendlich nahe ist; dann wird die linke Seite der Gleichung

$$\sqrt{\left(\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}\right)} \times \text{Grenze von} \left(\frac{d\mu}{\mu^2-h^2} + \frac{d\nu}{h^2-\nu^2}\right),$$

und für

$$\mu = h + \eta,\quad \nu = h - \varepsilon$$

ist die Grösse, deren Grenze wir zu finden wünschen,

$$\frac{d\eta}{2h\eta + \eta^2} - \frac{d\varepsilon}{2h\varepsilon - \varepsilon^2},$$

welches, wenn η und ε unbegrenzt abnehmen, in

$$\frac{1}{2h}\left(\frac{d\eta}{\eta} - \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}\right)$$

übergeht, dessen Grenze

$$\frac{1}{2h}\, d \log \frac{\eta}{\varepsilon}$$

ist.

Da nun der Aussenwinkel des Scheitelwinkels in dem von den Verbindungslinien eines beliebigen Punktes mit zwei Kreispunkten gebildeten Dreieck durch die Richtung der Krümmungslinie halbiert wird, so ist derselbe das Doppelte des Winkels i in

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = h^2.$$

Wenn beim Uebergang zur Grenze die Spitze des Dreiecks sich dem Kreispunkt nähert, so wird der Aussenwinkel desselben gleich ω und im Kreispunkt gilt die Gleichung

$$(h + \eta)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega + (h - \varepsilon)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega = h^2,$$

also für verschwindende η, ε

$$\tan^2 \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Die linke Seite der Gleichung ist somit in der Grenze

$$\frac{1}{2h}\sqrt{\left(\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}\right)}\, d\,(\log \tan^2 \tfrac{1}{2}\omega).$$

Wir haben daher

$$\frac{\sqrt{(a^2-\mu^2)}\, d\mu}{(\mu^2-h^2)\sqrt{(k^2-\mu^2)}} + \frac{\sqrt{(a^2-\nu^2)}\, d\nu}{(h^2-\nu^2)\sqrt{(k^2-\nu^2)}}$$
$$= \frac{1}{h}\sqrt{\left(\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}\right)}\,\frac{d\omega}{\sin\omega}.$$

Und die Constante, welche in der integrierten Gleichung der durch einen Kreispunkt gehenden geodätischen Linie auftritt, ist von der Form

$$\frac{1}{2h}\sqrt{\left(\frac{a^2-h^2}{k^2-h^2}\right)} \log \tan^2 \tfrac{1}{2}\omega + C.$$

139. Wenn P, Q zwei auf einander folgende Punkte einer Curve sind, und wenn PP' zu dem geodätischen Radius vector OQ rechtwinklig ist, so ist offenbar

$$PQ^2 = PP'^2 + P'Q^2.$$

Weil aber nach Artikel 117

$$OP = OP'$$

ist, so ist auch

$$P'Q = d\varrho.$$

während PP' als das Bogenelement eines geodätischen Kreises, für welchen ϱ constant d. h. $d\varrho = 0$ ist, von der Form

$$Pd\omega$$

sein muss. Das Bogenelement einer Curve in irgend einer Fläche kann somit durch eine Formel

$$ds^2 = d\varrho^2 + P^2 d\omega^2$$

ausgedrückt werden. Wir untersuchen die Form der Function P für den Fall der durch den Kreispunkt eines Ellipsoids gehenden Radien vectoren, indem wir die Krümmungslinie

$$\mu = \mu'$$

betrachten. Wir haben dann (Artikel 137)

$$ds^2 = d\nu^2 \frac{(\mu'^2 - \nu^2)\,(a^2 - \nu^2)}{(h^2 - \nu^2)\,(k^2 - \nu^2)},$$

und nach demselben Artikel

$$d\varrho^2 = d\nu^2 \frac{a^2 - \nu^2}{k^2 - \nu^2},$$

also

$$P^2 d\omega^2 = \frac{(\mu'^2 - h^2)\,(a^2 - \nu^2)}{(h^2 - \nu^2)\,(k^2 - \nu^2)}\, d\nu^2.$$

Aber nach Artikel 138 ist für μ als eine Constante

$$\frac{\sqrt{(a^2 - \nu^2)}\, d\nu}{(h^2 - \nu^2)\sqrt{(k^2 - \nu^2)}} = \frac{1}{h}\sqrt{\left(\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}\right)}\,\frac{d\omega}{\sin\omega},$$

und man erhält somit durch Substitution

$$P^2 = \frac{(a^2 - h^2)\,(h^2 - \nu^2)\,(\mu'^2 - h^2)}{h^2(k^2 - h^2)\sin^2\omega} = \frac{b^2 b'^2 b''^2}{(b^2 - a^2)\,(b^2 - c^2)\sin^2\omega}$$
$$= \frac{y^2}{\sin^2\omega}$$

(Band I, Artikel 168); daher

$$P = \frac{y}{\sin\omega}.$$

Es ist bei dieser Untersuchung nicht unumgänglich, das Resultat des letzten Artikels vorauszusetzen. Wenn wir für die rechte Seite der Gleichung desselben eine unbestimmte Function von ω substituieren, so wird in derselben Art bewiesen, dass

$$P = y\Phi(\omega)$$

ist. Wir bestimmen dann die Form der Function durch die Bemerkung, dass in der Nachbarschaft des Kreispunktes die Oberfläche sich der Form einer Kugel nähert; da für die Kugel die Formel der Rectification

$$ds^2 = d\varrho^2 + \sin^2 \varrho \; d\omega^2$$

ist, so muss

$$P = \sin \varrho$$

sein und da für dieselbe überdiess

$$y = \sin \varrho \sin \omega$$

ist, so hat die y multiplicierende Function den Werth

$$\frac{1}{\sin \omega}.$$

140. Betrachten wir nun das durch Verbindung eines Punktes P mit den beiden Kreispunkten O, O' gebildete Dreieck, so haben wir für den Bogen OP die Function

$$P = \frac{y}{\sin \omega}$$

und für den P mit dem andern Kreispunkte vereinigenden Bogen $O'P$ die Function

$$P' = \frac{y}{\sin \omega'},$$

d. i.

$$P : P' = \sin \omega : \sin \omega';$$

eine Gleichung analog derjenigen, welche ausdrückt, dass die Sinus der Seiten eines sphärischen Dreiecks den Sinus der Gegenwinkel proportional sind, da P und P' in der Rectification der elliptischen Bogen den $\sin \varrho$, $\sin \varrho'$ auf der Kugel entsprechen.

141. Ist ferner P ein Punkt einer Krümmungslinie, so haben wir (Artikel 124)

$$d\varrho \pm d\varrho' = 0,$$

wo ϱ und ϱ' die Entfernungen von den Kreispunkten bezeichnen; ist dann θ der Winkel, welchen der Radius vector OP mit der Tangente bildet, so ist das normale Element $Pd\omega$ offenbar

$$d\varrho \tan \theta.$$

Da aber der Radius vector $O'P$ auch den Winkel θ mit der Tangente bildet, so haben wir

$$Pd\omega \pm P'd\omega' = 0, \quad \text{d. i.} \quad \frac{d\omega}{\sin \omega} \pm \frac{d\omega'}{\sin \omega'} = 0;$$

oder $\tan \frac{1}{2} \omega \, . \, \tan \frac{1}{2} \omega'$ ist constant, wenn die Summe der Seiten des Dreiecks gegeben ist, und tan $\frac{1}{2}\,\omega$ ist zu tan $\frac{1}{2}\,\omega'$ in einem gegebenen Verhältniss, wenn die Differenz der Seiten gegeben ist. Wird die Entfernung zwischen zwei Kreispunkten als Basis des Dreiecks genommen, so ist der Ort seines Scheitels eine Krümmungslinie, eben so wohl wenn das Product als wenn der Quotient der Tangenten seiner halben Basiswinkel gegeben ist.*)

Aus diesem Satze entspringen mehrere Zusätze, z. B. Wenn eine geodätische Linie durch einen Kreispunkt O eine Krümmungslinie in Punkten P, P' schneidet, so ist je nach der Art der Krümmungslinie entweder das Product oder der Quotient von tan $\frac{1}{2}\,PO'O$ und tan $\frac{1}{2}\,P'O'O$ constant.

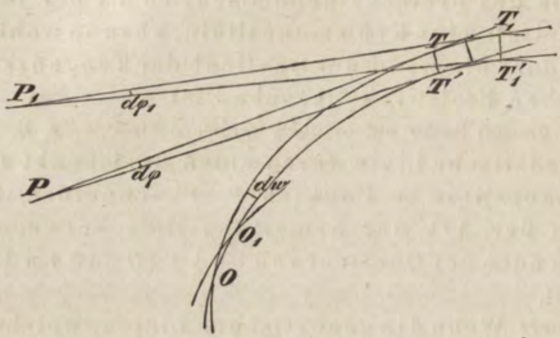
Ferner: Wenn die geodätischen Linien, welche zwei Kreispunkte mit irgend einem Punkte P einer Krümmungslinie verbinden, dieselbe überdiess in den Punkten P', P'' schneiden, so ist der Ort des Durchschnittspunkts der transversalen geodätischen Linien $O'P'$, OP'' eine Krümmungslinie derselben Art.

142. M. Roberts' Ausdruck für das Element des zu einer umbilicalen geodätischen Linie normalen Bogens ist von Hart in folgender Art erweitert worden: Sind OT, OT' zwei auf einander folgende geodätische Linien, welche die im Durchschnitt der Fläche mit einer confocalen Fläche B gebildete Krümmungslinie berühren, und ist $d\omega$ der Winkel, unter welchem sie sich durchschneiden, so berührt die Tangente in dem Punkte T einer von ihnen die Fläche B in einem Punkte P (Artikel 129), und wenn TT' als conjugiert zu TP genommen ist, so geht die Tangentenebene in T' durch TP (Artikel 7), und die Tangente der geodätischen Linie in T' berührt die confocale Fläche B in demselben Punkte P. Wir wünschen nun die normale Entfernung von T' und TP in der Form $Pd\omega$ auszudrücken. Vorausgesetzt, dass die Tangenten der geodätischen Linien in den nächstfolgenden Punkten sich in P_1 unter einem Winkel $d\varphi_1$ schneiden, dass

*) Dieser Satz ebenso wie die in Art. 138 u. f. enthaltenen Sätze, von denen sein Beweis abhängt, gehört M. Roberts, welchem dieser Theil der Geometrie so viel verdankt. („Liouville's Journal“, t. XIII, p. 1 und t. XV, p. 275.)

ferner die Normalen in den Punkten T_1, T_1' die Tangenten PT, PT' in den Punkten T_2, T_2' schneiden, so sind, da die Differenz zwi-

Fig. 2.



schen $T_1 T_1'$, $T_2 T_2'$ ein unendlich Kleines der dritten Ordnung ist, $PT_2 d\varphi$ und $P_1 T_1 d\varphi_1$ mit demselben Grade der Annäherung einander gleich, und da PT_1, $P_1 T_2$ den Durchmessern D, D_1 der Fläche B proportional sind, welche den zwei auf einander folgenden Tangenten der geodätischen Linien parallel laufen, so ist

$$Dd\varphi = D_1 d\varphi_1,$$

d. i. diese Grösse bleibt unverändert, wenn wir längs der geodätischen Linie vorwärts gehen. Nun ist in dem Punkte O

$$d\varphi = d\omega;$$

wenn also D_0 den Durchmesser der Fläche B bezeichnet, welcher der Tangente der geodätischen Linie in O parallel ist, so hat man

$$Dd\varphi = D_0 d\omega,$$

und daher die auszudrückende Entfernung

$$PTd\varphi = \frac{D_0}{D} t d\omega,$$

wenn t ($= PT$) die Länge der von T an die confocale Fläche B gehenden Tangente, oder $\frac{D_0}{D} t$ das Mittel zwischen den Segmenten einer durch T parallel der Tangente in O gehenden Sehne von B ist.

Wenn die geodätische Linie durch einen Kreispunkt geht, so reduciert sich die Fläche B auf die Ebene der Kreispunkte und $\frac{D_0}{D} t$

ist die durch T parallel der Tangente in O bis zum Durchschnitt mit dieser Ebene gezogene Gerade, d. h. man erhält den Ausdruck von Roberts wieder.

Durch einen Beweis, der mit dem für die entsprechende Eigenschaft der Kegelschnitte („Analytische Geometrie der Kegelschnitte", Artikel 264) übereinstimmt, erhält man von hier aus den Satz: Wenn ein geodätisches Polygon einer Krümmungslinie umgeschrieben bleibt, während alle seine Ecken bis auf eine sich in Krümmungslinien bewegen, so durchläuft auch diese eine Krümmungslinie und der Umfang des Polygons ist unveränderlich, wenn diese Krümmungslinien von derselben Art sind.

143. Wenn eine geodätische Linie, die einen Kreispunkt mit dem diametral entgegengesetzten verbindet, und einen Winkel ω mit der Ebene der Kreispunkte macht, fortgesetzt wird, bis sie zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt, so geht sie damit nicht zugleich wie in dem Fall der Kugel auf ihren ersten Weg zurück, d. h. sie bildet bei ihrer Rückkunft einen von ω verschiedenen Winkel mit der Ebene der Kreispunkte.

Um diess zu beweisen, werden wir einen Ausdruck für den Winkel θ untersuchen, den die Ebene der Kreispunkte mit der osculierenden Ebene in irgend einem Punkte dieser geodätischen Linie macht.

Dabei ist es nützlich, das folgende Lemma vorauszuschicken.

Wenn in einem sphärischen Dreieck eine Seite und der anstossende Winkel endlich bleiben, während die Basis unbegrenzt abnimmt, so kann die Grenze des Verhältnisses der Basis zur Differenz der in demselben Sinne gemessenen Basiswinkel bestimmt werden. Die Formel

$$\cos \tfrac{1}{2}(A + B) = \sin \tfrac{1}{2} C \, \frac{\cos \frac{1}{2}(a + b)}{\cos \frac{1}{2} c}$$

der sphärischen Trigonometrie giebt in der Grenze, also für das Dreieck von den Seiten α, $d\varphi$ und dem eingeschlossenen Winkel θ, in welchem der Winkel $d\psi$ der Seite $d\varphi$ gegenüber liegt und $(\theta + d\theta)$ den der Seite α gegenüber liegenden Aussenwinkel bezeichnet

$$d\theta = \cos \alpha \, d\psi;$$

es ist aber auch

$$\sin \alpha \, d\psi = \sin \theta \, d\varphi,$$

also

$$\frac{d\vartheta}{\sin\theta} = \frac{d\varphi}{\tan\alpha}.$$

Nun wissen wir (Artikel 129), dass die Tangente in einem Punkte der durch einen Kreispunkt gehenden geodätischen Linie die Ebene der Kreispunkte in einem Punkt der Focalhyperbel schneidet, und die osculierende Ebene der geodätischen Linie in diesen Punkt ist daher die durch den Punkt und die entsprechende Tangente der Focalhyperbel bestimmte Ebene.

Wir wissen auch, dass der einem Ellipsoid aus einem Punkt der Focalhyperbel umgeschriebene Kegel ein gerader Kegel ist. (Band I, Artikel 194.)

Sei dann PP' ein Element der geodätischen Linie durch einen Kreispunkt, welches verlängert in H die Focalhyperbel schneidet, und schneide die Verlängerung des nächstfolgenden Elements $P'P''$ dieselbe in H', so sind PHh, $P'H'h'$ zwei auf einander folgende osculierende Ebenen, wenn Hh, $H'h'$ die zwei entsprechenden auf einander folgenden Tangenten der Focalhyperbel sind. Denken wir jetzt um H' eine Kugel beschrieben und betrachten das sphärische Dreieck, welches die Radien nach den Punkten h, h', P' bestimmen, so ist, wenn $d\varphi$ den Winkel $hH'h'$, den Berührungswinkel der Focalhyperbel, und θ den Winkel zwischen der osculierenden Ebene und der Ebene $hH'h'$ der Kreispunkte bezeichnet, während $hH'P'$ der halb Winkel α des Kegels ist, das sphärische Dreieck das in dem Lemma betrachtete und wir erhalten

$$\frac{d\vartheta}{\sin\theta} = \frac{d\varphi}{\tan\alpha}.$$

Um diese Gleichung zu integrieren, müssen wir $d\varphi$ in Function von α ausdrücken und diess können wir als ein Problem der ebenen Geometrie betrachten; denn α ist die Hälfte des zwischen den von H an den in der Ebene der Kreispunkte enthaltenen Hauptschnitt gelegten Tangenten enthaltenen Winkels, während $d\varphi$ der Berührungswinkel der Focalhyperbel in demselben Punkte ist. Wenn nun a', b'; a'', b'' die Achsen je einer durch H gehenden zu einer Ellipse von den Achsen a und b confocalen Ellipse und Hyperbel sind, und wenn 2α der von den Tangenten der letzteren Ellipse von H aus eingeschlossene Winkel ist, so haben wir (vgl. „Analyt. Geometrie der Kegelschnitte", Art. 228, Aufg. 10)

$$\tan^2 \alpha = \frac{a^2 - a''^2}{a'^2 - a^2}.$$

Durch Differentiieren unter der Voraussetzung, dass a'' constant sei (da wir zu einem benachbarten Punkte der Focalhyperbel fortschreiten), erhalten wir

$$d\alpha = -\tan \alpha \frac{a' da'}{a'^2 - a''^2}.$$

Wenn aber p, p' die vom Centrum auf die Tangenten der Ellipse und Hyperbel in H gefällten Senkrechten sind, so haben wir (Artikel 134)

$$a' da' = p dp;$$

dp ist das Bogenelement der Focalhyperbel, und es ist, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser in demselben Punkt bezeichnet,

$$dp = \varrho d\varphi,$$

und
$$\varrho = \frac{a'^2 - a''^2}{p'};$$

also
$$d\alpha = -\tan \alpha \frac{p d\varphi}{p'},$$

oder
$$d\alpha = \tan \alpha \frac{a' b' d\varphi}{a'' b''}.$$

Da aber

$$a'^2 = a^2 + (a^2 - a''^2) \cot^2 \alpha, \quad b'^2 = b^2 + (a^2 - a''^2) \cot^2 \alpha$$

ist, so hat man

$$\frac{d\varphi}{\tan \alpha} = \frac{a'' b'' d\alpha}{\sqrt{(a^2 - a''^2 + a^2 \tan^2 \alpha)} \sqrt{(a^2 - a''^2 + b^2 \tan^2 a)}}.$$

In dem betrachteten Falle sind die Achsen der berührten Ellipse a, c, während die Quadrate der Achsen der confocalen Hyperbel sind $(a^2 - b^2)$, $(b^2 - c^2)$; wir haben also die Gleichung

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \sqrt{(b^2 - c^2)} d\alpha}{\sqrt{(b^2 + a^2 \tan^2 \alpha)} \sqrt{(b^2 + c^2 \tan^2 \alpha)}}.$$

Indem wir sie integrieren und die eine Grenze des Integrals in dem Kreispunkt wählen, wo

$$\theta = \omega, \quad \alpha = \tfrac{1}{2} \pi$$

ist, so erhalten wir

$$\log \frac{\tan \frac{1}{2} \theta}{\tan \frac{1}{2} \omega} = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\alpha} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)} \sqrt{(b^2 - c^2)} d\alpha}{\sqrt{(b^2 + a^2 \tan^2 \alpha)} \sqrt{(b^2 + c^2 \tan^2 \alpha)}};$$

und wenn J den Werth dieses Integrals bezeichnet, so haben wir

$$\tan \tfrac{1}{2}\,\theta = k \tan \tfrac{1}{2}\,\omega,$$

wo

$$k = e^{J}$$

ist.

Jenes Integral behält zwischen den Grenzen $+\frac{1}{2}\pi$ und $-\frac{1}{2}\pi$, d. h. beim Uebergang von einem Kreispunkt zum andern, sein Vorzeichen.

Ist also ω' der Werth von θ für den Kreispunkt, welcher dem entgegengesetzt ist, von welchem wir ausgingen, so hat an dieser Grenze das Integral J einen von Null und k einen von Eins verschiedenen Werth, und wir erhalten

$$\tan \tfrac{1}{2}\,\omega' = k' \tan \tfrac{1}{2}\,\omega,$$

d. h. ω' ist stets von ω verschieden. Ebenso kehrt die geodätische Linie zu dem ursprünglichen Kreispunkt zurück unter einem Winkel ω'', für welchen

$$\tan \tfrac{1}{2}\,\omega'' = k^2 \tan \tfrac{1}{2}\,\omega;$$

sie geht und kehrt zurück, indem sie eine Reihe von Winkeln bildet, für welche die Tangenten ihrer Hälften in stetiger Proportion sind.*)

144. Für alle Kanten desselben Tangentenkegels aus einem Punkt H in der Focalhyperbel ist α und daher k constant, die Gleichung

$$\tan \tfrac{1}{2}\,\theta = k \tan \tfrac{1}{2}\,\omega$$

giebt

$$\frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{d\omega}{\sin\omega}.$$

Da nun die osculierende Ebene der geodätischen Linie normal zur Fläche ist, somit auch normal zum Tangentenkegel, so geht sie durch die Achse dieses Kegels und wenn wir den Kegel durch eine zur Achse normale Ebene schneiden, so ist der Schnitt ein Kreis vom Radius

$$\frac{y}{\sin\theta}$$

---

*) Die Sätze dieses Artikels gehören Hart an, „Cambridge and Dublin Mathematical Journal", Vol. IV, p. 82; in der Beweismethode bin ich W. Roberts Darstellung, „Liouville's Journal", t. II (1857) p. 213, gefolgt.

und das Bogenelement ist

$$y \frac{d\theta}{\sin\theta} \quad \text{oder} \quad y \frac{d\omega}{\sin\omega}.$$

Diess Element aber, als die Entfernung zweier auf einander folgenden Seiten des Berührungskegels im Berührungspunkt, ist das, was wir im Artikel 139 durch

$$Pd\omega$$

bezeichnet haben und wir haben so aus der Untersuchung des letzten Artikels einen unabhängigen Beweis des für P dort gefundenen Werthes.

145. Niveaulinien. Die Verschiedenheiten der Höhe eines Landes können in einer Karte durch eine Reihe von Curven dargestellt werden, welche die Punkte von gleicher Höhe verbinden. Wenn eine Reihe solcher Curven verzeichnet sind, welche gleichen Höhendifferenzen entsprechen, so bezeichnet die dichtere Zusammendrängung dieser Curven die Stellen, wo die Höhe des Landes am schnellsten wechselt.

Allgemein sind die Niveaulinien einer Fläche die Durchschnitte derselben durch eine Reihe von Horizontalebenen, welche wir der Ebene der xy parallel voraussetzen dürfen. Die Gleichungen der Horizontalprojectionen einer solchen Reihe erhält man durch die Substitution

$$z = c$$

in die Gleichung der Fläche; und eine Differentialgleichung, welche allen diesen Projectionen gemein ist, entspringt aus der Annahme

$$dz = 0$$

in der Differentialgleichung der Fläche, d. i. man hat

$$\frac{dU}{dx} dx + \frac{dU}{dy} dy = 0.$$

Man kann sie auf eine Function von x und y allein reducieren, indem man die in den Differentialquotienten enthaltene Veränderliche z mit Hilfe der Gleichung der Fläche eliminiert.

146. Linien der grössten Neigung. Die Linie der grössten Neigung durch irgend einen Punkt ist die Linie, welche alle Niveaulinien normal durchschneidet, die Differentialgleichung ihrer Projection ist somit

$$\frac{dU}{dx}\,dy - \frac{dU}{dy}\,dx = 0.$$

Die Linie der grössten Neigung wird gewöhnlich als diejenige Linie definiert, für welche die Tangente in jedem Punkte den grössten Winkel mit dem Horizont macht; es ist in der That offenbar, dass die Falllinie der Tangentenebene, d. h. die Linie in ihr, welche die grösste Neigung gegen den Horizont hat, normal ist zur horizontalen Spur dieser Ebene. Wir erhalten die nämliche Gleichung wie vorher, indem wir ausdrücken, dass die Projection des Curvenelements, dessen Richtungscosinus zu dx, dy proportional sind, normal zu der Spur ist, deren Gleichung durch

$$\frac{dU}{dx'}\,(x - x') + \frac{dU}{dy'}\,(y - y') - \frac{dU}{dz'}\,z' = 0\ ^{*)}$$

dargestellt wird.

Beispiel. Die Falllinie der Fläche zweiter Ordnung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

zu finden.

Die Differentialgleichung ist

$$Ax\,dy = By\,dx,$$

welche durch Integration giebt

$$\left(\frac{x}{x'}\right)^B = \left(\frac{y}{y'}\right)^A,$$

wo die Constante durch die Bedingung bestimmt ist, dass die Linie durch den Punkt

$$x = x', \quad y = y'$$

geht. Somit ist die Falllinie die Durchschnittslinie der Fläche zweiter Ordnung mit dem Cylinder, dessen Gleichung so eben geschrieben ward, ist also eine Curve doppelter Krümmung, so lange nicht der Punkt $(x'y')$ in einer der Hauptebenen liegt, als wodurch die eben gefundene Gleichung sich auf $x = 0$ oder $y = 0$ reduciert.

---

*) Die Differentialgleichung der Curve, die immer normal ist zur Durchschnittslinie der Tangentenebene von den Richtungscosinus U_1, U_2, U_3 mit einer festen Ebene von den Richtungscosinus a, b, c, ist offenbar

$$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ U_1, & U_2, & U_3 \\ a\ , & b\ , & c \end{vmatrix} = 0.$$

V. Abschnitt. Die Theorie der Krümmung und Deformation der Flächen und die der geradlinigen Strahlensysteme.

147. Wir werden diess Kapitel beendigen, indem wir einen Abriss von Gauss' Theorie der Krümmung der Flächen und von den mit ihr eng verbundenen Lehren von der Deformation der Flächen und von den geradlinigen Strahlensystemen geben.*)

In ebenen Curven messen wir die Krümmung eines Bogens von gegebener Länge durch den Winkel zwischen den Tangenten oder den Normalen in seinen Endpunkten; in andern Worten, wenn wir einen Kreis vom Radius Eins und in ihm Radien parallel den Normalen in den Endpunkten des Bogens denken, so bietet das Verhältniss des von ihnen begrenzten Kreisbogens zu dem Bogen der Curve ein Maass der Krümmung des Bogens dar.

Wenn wir einen durch eine geschlossene Curve begrenzten Theil einer Fläche haben, und parallel den Normalen in den Punkten der begrenzenden Curve Radien einer Kugel vom Halbmesser Eins ziehen, so ward in gleicher Art der Inhalt des entsprechenden Theils der Kugelfläche durch Gauss als die totale Krümmung des betrachteten Flächentheils bezeichnet. Und wenn wir in einem Punkte der Fläche die totale Krümmung des anliegenden Flächenelements durch den Inhalt des Elements selbst dividieren, so ist der Quotient das, was als das Maass der Krümmung für diesen Punkt bezeichnet wird.

148. Wir gehen dazu über, das Maass der Krümmung durch eine Formel auszudrücken.

Weil die Tangentenebenen in irgend einem Punkt der Oberfläche und in dem entsprechenden Punkt der Kugel vom Halbmesser Eins der Voraussetzung gemäss parallel sind, so sind die Flächen irgend welcher elementaren Theile von beiden ihren Projectionen auf eine der Coordinatenebenen proportional. Betrachten wir also ihre Projectionen auf die Ebene der xy und setzen wir die Gleichung der Fläche in der Form

*) Der Leser findet seine Abhandlung wieder gedruckt im Anhang zu Liouville's Ausgabe von Monge. Auch in „Nouvelles Annales de Mathematiques", t. XI, p. 195—252 in französischer Uebersetzung auf Grund dieses Abdrucks.

$$z = \Phi\,(x,\, y)$$

gegeben voraus.

Wenn dann x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Fläche und X, Y, Z die des entsprechenden Punktes der Kugeleinheit sind, und $x + dx$, $x + \delta x$, $X + dX$, $X + \delta X$, etc. die zweier benachbarter Punkte in jeder bezeichnen, so sind die Flächen der durch die betrachteten Punkte gebildeten elementaren Dreiecke offenbar in dem Verhältniss

$$(dX\,\delta Y - dY\,\delta X) : (dx\,\delta y - dy\,\delta x).$$

Da aber dX, dY, δX, δY mit dx, dy, etc. durch dieselben linearen Transformationen vereinigt sind, nämlich

$$dX = \frac{dX}{dx}\,dx + \frac{dX}{dy}\,dy, \quad dY = \frac{dY}{dx}\,dx + \frac{dY}{dy}\,dy;$$

$$\delta X = \frac{dX}{dx}\,\delta x + \frac{dX}{dy}\,\delta y, \quad \delta Y = \frac{dY}{dx}\,\delta x + \frac{dY}{dy}\,\delta y,$$

so erhält man nach der Theorie der linearen Transformationen oder durch wirkliche Multiplication

$$dX\,\delta Y - dY\,\delta X = (dx\,\delta y - dy\,\delta x)\left(\frac{dX}{dx}\,\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\,\frac{dY}{dx}\right),$$

und die Grösse

$$\frac{dX}{dx}\,\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\,\frac{dY}{dx},$$

ist somit das Maass der Krümmung.

Da aber X, Y, Z die Projectionen der der Normale parallelen Lineareinheit auf die Achsen sind, so sind sie den Cosinus der Winkel proportional, welche die Normale mit den Achsen bildet; wir haben daher

$$X = \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}}, \qquad Y = \frac{q}{\sqrt{(1 + p^2 + q^2)}},$$

$$\frac{dX}{dx} = \frac{(1 + q^2)\,r - pqs}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \frac{dX}{dy} = \frac{(1 + q^2)\,s - pqt}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{(1 + p^2)\,s - pqt}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{dY}{dy} = \frac{(1 + p^2)\,t - pqs}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}};$$

also

$$\frac{dX}{dx}\,\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy}\,\frac{dY}{dx} = \frac{(rt - s^2)}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Damit geht aus einer Gleichung des Artikel 51 hervor, dass der für das Maass der Krümmung gefundene Werth

$$= \frac{1}{RR'}$$

ist, wo R und R' die beiden Hauptkrümmungsradien des Punktes bezeichnen.

149. Es ist leicht, den so gefundenen Werth geometrisch zu bestätigen.

Wir betrachten dazu das elementare Rechteck, dessen Seiten die Richtungen der Haupttangenten haben. Seien die Längen derselben λ, λ', so dass sein Inhalt durch $\lambda\lambda'$ ausgedrückt ist. Die Normalen in den Endpunkten von λ durchschneiden sich, und wenn θ den von ihnen gebildeten Winkel bezeichnet, so ist

$$\theta = \frac{\lambda}{R},$$

wo R den entsprechenden Krümmungsradius ausdrückt.

Die entsprechenden Normalen der Kugel bilden mit einander denselben Winkel und ihre Länge ist die Einheit; für die Länge μ des dem Element λ entsprechenden sphärischen Elements haben wir daher

$$\frac{\lambda}{R} = \mu;$$

ebenso ist

$$\frac{\lambda'}{R'} = \mu',$$

also auch

$$\frac{\mu\mu'}{\lambda\lambda'} = \frac{1}{RR'},$$

was zu beweisen war.

150. Gauss hat bewiesen, dass, wenn eine biegsame aber nicht ausdehnbare Fläche auf irgend eine Weise deformiert wird, d. i. wenn die Form der Fläche so verändert wird, dass die längs der Fläche gemessene Distanz zwischen irgend zwei Punkten dieselbe bleibt, das Maass der Krümmung in jedem Punkte unverändert bleibt.

Wir haben ein Beispiel einer solchen Veränderung in dem Falle einer abwickelbaren Fläche in ihrer Ausbreitung in eine Ebene kennen gelernt (Artikel 57); und das Maass der Krümmung verschwindet sowohl für die abwickelbare Fläche als für die Ebene, da in jedem Fall einer der Hauptkrümmungsradien unendlich gross ist (Artikel 108).

Um den Satz allgemein zu beweisen, setzen wir voraus, dass ein Punkt der Fläche, anstatt durch drei durch die Gleichung der Fläche bedingte Coordinaten gegeben zu sein, durch zwei unabhängige Coordinaten bestimmt ist. Sei

$$dx = a du + a' dv, \quad dy = b du + b' dv, \quad dz = c du + c' dv,$$

so ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2) du^2 + 2 (aa' + bb' + cc') du dv + (a'^2 + b'^2 + c'^2) dv^2.$$

Wir schreiben diese Gleichung in der Form

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

und haben zu beweisen, dass das Maass der Krümmung oder das Product der Hauptkrümmungsradien eine Function von E, F, G ist.

Sei (x', y', z') der Punkt der deformierten Fläche, welcher dem Punkt (x, y, z) der gegebenen Fläche entspricht, so sind x', y', z' gegebene Functionen von x, y, z und können somit auch in Gliedern von u und v ausgedrückt werden. Das Bogenelement der deformierten Fläche kann in der Form

$$ds'^2 = E' du^2 + 2 F' du dv + G' dv^2$$

dargestellt werden, und die Bedingung, dass dasselbe durch die Transformation nicht verändert sei, fordert offenbar

$$E = E', \quad F = F', \quad G = G'.$$

Jede Function von E, F, G bleibt somit bei einer Deformation, wie die von uns betrachtete, unverändert.

Nun sind in Artikel 34 die Hauptkrümmungsradien durch eine quadratische Gleichung gegeben worden, in welcher der Coefficient von λ^2

$$(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)$$

und das absolute Glied

$$(U_{22} U_{33} - U_{23}^2) U_1^2 + (U_{33} U_{11} - U_{13}^2) U_2^2 + (U_{11} U_{22} - U_{12}^2) U_3^2$$
$$+ 2 (U_{13} U_{12} - U_{11} U_{23}) U_2 U_3 + 2 (U_{12} U_{23} - U_{22} U_{13}) U_3 U_1$$
$$+ 2 (U_{23} U_{13} - U_{33} U_{12}) U_1 U_2$$

ist. Wir werden jede dieser Grössen einzeln in Function von E, F, G ausdrücken.

151. Wenn wir in die Gleichung der Fläche

$$U_1 dx + U_2 dy + U_3 dz = 0,$$

die im letzten Artikel gegebenen Werthe von dx, dy, dz substituieren, und erinnern, dass die Coefficienten von du und dv getrennt verschwinden müssen, weil u und v unabhängige Veränderliche sind, so haben wir

$$U_1 a + U_2 b + U_3 c = 0, \quad U_1 a' + U_2 b' + U_3 c' = 0,$$

somit

$$U_1 = \lambda(bc' - b'c), \quad U_2 = \lambda(ca' - c'a), \quad U_3 = \lambda(ab' - a'b),$$

wenn λ ein unbestimmter Coefficient ist, und

$$U_1{}^2 + U_2{}^2 + U_3{}^2 = \lambda^2 \left\{(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2) - (aa'+bb'+cc')^2\right\}$$
$$= \lambda^2 (EG - F^2).*)$$

152. Wir untersuchen nun das Ergebniss derselben Substitution

$$U_1 = \lambda(bc' - b'c), \text{ etc.}$$

in den Ausdruck des absoluten Gliedes im Artikel 150.

Eine Gleichung, welche in der Theorie der Kegelschnitte Anwendung findet, erlaubt uns, diess Resultat in einfacherer Form zu schreiben. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“, Artikel 331, 365; 400, Beispiel 2.)

Sei

$$\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}y^2 + \mathbf{c}z^2 + 2\mathbf{l}yz + 2\mathbf{m}zx + 2\mathbf{n}xy = 0$$

die Gleichung des Kegelschnitts und sei das Resultat der Substitution

$$a + ka', \quad b + kb', \quad c + kc' \quad \text{für} \quad x, y, z$$
$$S + 2kV + k^2 S',$$

so ist

$$SS' - V^2 = (\mathbf{bc} - \mathbf{l}^2)(bc' - cb')^2 + (\mathbf{ca} - \mathbf{m}^2)(ca' - ac')^2 + \text{etc.};$$

---

*) Vergl. „Vorlesungen“, Artikel 14.

Die Gauss'schen Bezeichnungen werden vervollständigt durch die folgenden Angaben:

$$bc' - b'c = A, \quad ca' - c'a = B, \quad ab' - a'b = C,$$

so dass

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \Delta$$

ist; und

$$m' = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dv}, \quad n' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{du}.$$

denn jede Seite dieser Gleichung drückt durch ihre Gleichsetzung mit Null die Bedingung aus, unter welcher die Verbindungslinie der Punkte abc, $a'b'c'$ den Kegelschnitt berührt. Die Gleichung kann überdiess durch wirkliche Multiplication bestätigt werden.

In unserm Falle soll die Grösse

$$\lambda^2\,(SS' - V^2)$$

berechnet werden, wo

$$\begin{aligned} S &= U_{11}a^2 + U_{22}b^2 + U_{33}c^2 + 2\,U_{23}bc + 2\,U_{31}ca + 2\,U_{12}ab,\\ S' &= U_{11}a'^2 + U_{22}b'^2 + U_{33}c'^2 + 2\,U_{23}b'c' + 2\,U_{31}c'a' + 2\,U_{12}a'b',\\ V &= U_{11}aa' + U_{22}bb' + U_{33}cc' + U_{23}(b'c + b'c) + U_{31}(ca' + c'a)\\ &\quad + U_{12}(ab' + a'b) \end{aligned}$$

ist.

Differentiieren wir die Gleichung

$$U_1dx + U_2dy + U_3dz = 0,$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} &U_1d^2x + U_2d^2y + U_3d^2z\\ &= -(U_{11}\,dx^2 + U_{22}dy^2 + U_{33}dz^2 + 2\,U_{23}dydz + 2\,U_{31}dzdx\\ &\quad + 2\,U_{12}dx\,dy); \end{aligned}$$

und wenn wir schreiben

Mit den nachher auftretenden

$$\frac{d^2x}{du^2} = \alpha,\quad \frac{d^2x}{du\,dv} = \alpha',\quad \frac{d^2x}{dv^2} = \alpha'',$$
$$\frac{d^2y}{du^2} = \beta,\quad \frac{d^2y}{du\,dv} = \beta',\quad \frac{d^2y}{dv^2} = \beta'',$$
$$\frac{d^2z}{du^2} = \gamma,\quad \frac{d^2z}{du\,dv} = \gamma',\quad \frac{d^2z}{dv^2} = \gamma''$$

bildet man dann noch

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta + C\gamma &= D,\\ A\alpha' + B\beta' + C\gamma' &= D',\\ A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' &= D''. \end{aligned}$$

Mit diesen Bezeichnungen erhält man das Maass der Krümmung in der Form

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} = \frac{DD'' - D'^2}{\Delta^2}.$$

Man hat in den Symbolen A, B, C, D, D', D'' die Determinantenform erkannt und kann auch Δ in diese Form leicht übertragen; es ist

$$\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} a, & b, & c\\ a', & b', & c'\\ A, & B, & C \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma\\ a, & b, & c\\ a', & b', & c' \end{vmatrix},\quad D' = \begin{vmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma'\\ a, & b, & c\\ a', & b', & c' \end{vmatrix},\quad D'' = \begin{vmatrix} \alpha'', & \beta'', & \gamma''\\ a, & b, & c\\ a', & b', & c' \end{vmatrix}.$$

$$d^2x = \alpha\, du^2 + \alpha'\, du\, dv + \alpha''\, dv^2,$$
$$d^2y = \beta\, du^2 + \beta'\, du\, dv + \beta''\, dv^2,$$
$$d^2z = \gamma\, du^2 + \gamma'\, du\, dv + \gamma''\, dv^2,$$

und diese Substitutionen in die linke Seite der vorigen Gleichung vollziehen, während wir zugleich für dx, dy, dz nach Artikel 150 ihre Werthe einsetzen, so erhalten wir durch Vergleichung der Coefficienten von du^2, $du\,dv$, dv^2

$$U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma = -S, \quad U_1\alpha' + U_2\beta' + U_3\gamma' = -V,$$
$$U_1\alpha'' + U_2\beta'' + U_3\gamma'' = -S',$$

und haben den Werth von

$$\lambda^2 \left\{(U_1\alpha + U_2\beta + U_3\gamma)\,(U_1\alpha'' + U_2\beta'' + U_3\gamma'') - (U_1\alpha' + U_2\beta' + U_3\gamma')^2\right\}$$

zu berechnen, wenn für U_1, U_2, U_3 die Werthe des Artikel 151 substituiert werden.

Das Resultat ist das Product aus λ^4 in die Grösse

$$\begin{vmatrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha'', & \beta'', & \gamma'' \\ a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha', & \beta', & \gamma' \\ a, & b, & c \\ a', & b', & c' \end{vmatrix}^2.$$

Nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten*) giebt die Entwickelung dieser Producte die Differenz zwischen

$$\begin{vmatrix} \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'', & a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'', & a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' \\ a\alpha + b\beta + c\gamma, & a^2 + b^2 + c^2, & aa' + bb' + cc' \\ a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, & aa' + bb' + cc', & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2, & a\alpha' + b\beta' + c\gamma', & a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' \\ a\alpha' + b\beta' + c\gamma', & a^2 + b^2 + c^2, & aa' + bb' + cc' \\ a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma', & aa' + bb' + cc', & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix}$$

153. Die Elemente dieser Determinanten werden aber leicht als Functionen von E, F, G und ihren Differentialen erkannt. Mit Erinnerung an die Definitionen von a, b, c, α, α', α'', etc. (Artikel 150, 152) ist offenbar, dass

$$\alpha = \frac{da}{du}, \quad \alpha' = \frac{da}{dv} = \frac{da'}{du}, \quad \alpha'' = \frac{da'}{dv}, \text{ etc.}$$

sind, so dass man durch

*) Die Bemerkung, dass die Anwendung dieser Regel das Ergebniss in einer die Wahrheit von Gauss' Theorem beweisenden Form bestimmt, verdanke ich Williamson.

$$E = a^2 + b^2 + c^2, \quad F = aa' + bb' + cc', \quad G = a'^2 + b'^2 + c'^2$$

erhält

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{du}, \quad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dv},$$

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{du}, \quad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{dv},$$

$$a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = \frac{dF}{dv} - (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma') = \frac{dF}{dv} - \tfrac{1}{2}\frac{dG}{du},$$

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = \frac{dF}{du} - (a\alpha' + b\beta' + c\gamma') = \frac{dF}{du} - \tfrac{1}{2}\frac{dE}{dv}.$$

Man sieht, alle Elemente der beiden vorigen Determinanten, mit Ausnahme der leitenden Elemente von ihnen

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'', \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2,$$

sind in diesen Gleichungen in Function von E, F, G ausgedrückt.

Um auch diese so darzustellen, differentiieren wir die letztgeschriebene Gleichung in Bezug auf v und erhalten

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = \frac{dF}{du\,dv} - \tfrac{1}{2}\frac{d^2E}{dv^2} - \left(a'\frac{d\alpha}{dv} + b'\frac{d\beta}{dv} + c'\frac{d\gamma}{dv}\right);$$

wir differentiieren sodann die Gleichung

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = \tfrac{1}{2}\frac{dG}{du}$$

in Bezug auf u und erhalten

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \tfrac{1}{2}\frac{d^2G}{du^2} - \left(a'\frac{d\alpha'}{du} + b'\frac{d\beta'}{du} + c'\frac{d\gamma'}{du}\right).$$

In Folge der Relationen

$$\frac{d\alpha}{dv} = \frac{d\alpha'}{du}, \text{ etc.}$$

sind die in den Parenthesen der letzten beiden Gleichungen enthaltenen Grössen gleichwerthig und man erkennt aus der Entwickelung der beiden Determinanten sofort, dass die Producte, in welche diese Grössen eintreten, in der Differenz verschwinden, weil auch ihre anderen Factoren übereinstimmen — sie sind beide gleich

$$\begin{vmatrix} E, & F \\ F, & G \end{vmatrix}$$

— dass somit die gesuchte Entwickelung die mit λ^4 multiplicierte Differenz der Determinanten

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{d^2F}{du\,dv} - \frac{1}{2}\frac{d^2E}{dv^2}, & \frac{dF}{dv} - \frac{1}{2}\frac{dG}{du}, & \frac{1}{2}\frac{dG}{dv} \\ \frac{1}{2}\frac{dE}{du}\quad , & E\ , & F \\ \frac{dF}{du} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dv}, & F\ , & G \end{array}\right|,$$

und

$$\left|\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\frac{d^2G}{du^2}, & \frac{1}{2}\frac{dE}{dv}, & \frac{1}{2}\frac{dG}{du} \\ \frac{1}{2}\frac{dE}{dv}, & E\ , & F \\ \frac{1}{2}\frac{dG}{du}, & F\ , & G \end{array}\right|$$

ist.

Indem wir die so gebildete Grösse durch den im Artikel 151 gegebenen Werth von

$$(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2)^2$$

dividieren, erhalten wir das Maass der Krümmung; da der gemeinschaftliche Factor λ^4 verschwindet, als eine Function der Grössen E, F, G und ihrer Differentiale, womit Gauss' Theorem bewiesen ist.

Wir fügen dem Beweis die wirkliche Entwickelung der Determinanten hinzu. Indem wir das Maass der Krümmung durch K bezeichnen, erhalten wir

$$\begin{aligned} 4\,(EG-F^2)^2\,K = E &\left\{\frac{dE}{dv}\,\frac{dG}{dv} - 2\,\frac{dF}{du}\,\frac{dG}{dv} + \left(\frac{dG}{du}\right)^2\right\} \\ + F &\left\{\frac{dE}{du}\,\frac{dG}{dv} - \frac{dE}{dv}\,\frac{dG}{du} - 2\,\frac{dE}{dv}\,\frac{dF}{dv} + 4\,\frac{dF}{du}\,\frac{dF}{dv} - 2\,\frac{dF}{du}\,\frac{dG}{du}\right\} \\ &+ G\left\{\frac{dE}{du}\,\frac{dG}{du} - 2\,\frac{dE}{du}\,\frac{dF}{dv} + \left(\frac{dE}{dv}\right)^2\right\} \\ &- 2\,(EG-F^2)\left(\frac{d^2E}{dv^2} - 2\,\frac{d^2F}{du\,dv} + \frac{d^2G}{du^2}\right). \end{aligned}$$

(Vergl. Liouville's Ausgabe von Monge, p. 523.)*)

---

*) Bertrand, Diguet und Puiseux (vergl. „Liouville's Journ.", t. XIII, p. 80; Appendix zu Monge, p. 583), haben das Theorem von Gauss durch Berechnung des Umfangs und Inhalts eines geodätischen Kreises in einer beliebigen Fläche bewiesen, dessen Radius s unendlich klein gedacht ist. Sie finden für den Umfang

154. Man kann zwei Systeme von Curven auf jeder Fläche bilden, für deren eines u, und für deren anderes v constant ist; jeder Punkt der Fläche ist der Durchschnitt zweier solcher Curven, einer aus jedem System.

Der Ausdruck

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2$$

zeigt, dass

$$\sqrt{(E)}\, du$$

das Element der durch den Punkt gehenden Curve ist, für welche v constant ist; während zugleich

$$\sqrt{(G)}\, dv$$

$$2\pi s - \frac{\pi s^3}{RR'},$$

und für den Inhalt

$$\pi s^2 - \frac{\pi s^4}{12 RR'}.$$

Die Voraussetzung, dass beide durch die möglichen Deformationen der bezeichneten Art unverändert bleiben, fordert, dass RR' constant sei.

Man kann die allgemeinen Gleichungen der Krümmungslinien und der Hauptkrümmungsradien mit den eingeführten Bezeichnungen leicht folgendermassen ausdrücken. Wenn ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes der Normale in x, y, z ausdrücken und durch R die Entfernung beider Punkte bezeichnet wird, so hat man

$$\xi = x + \frac{R}{\sqrt{\Delta}} A, \quad \eta = y + \frac{R}{\sqrt{\Delta}} B, \quad \zeta = z + \frac{R}{\sqrt{\Delta}} C.$$

Damit dann (x, y, z) einer Krümmungslinie angehöre, müssen die Derivierten der vorigen Gleichungen für ξ, η, ζ als Constanten nach den Veränderlichen u, v bestehen und R wird dann ein Krümmungs halbmesser sein. Man hat also

$$\frac{dx}{du} u' + \frac{dx}{dv} v' + \frac{R}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{dA}{du} u' + \frac{dA}{dv} v'\right) + \left(\frac{R}{\sqrt{\Delta}}\right)' A = 0,$$

$$\frac{dy}{du} u' + \frac{dy}{dv} v' + \frac{R}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{dB}{du} u' + \frac{dB}{dv} v'\right) + \left(\frac{R}{\sqrt{\Delta}}\right)' B = 0,$$

$$\frac{dz}{du} u' + \frac{dz}{dv} v' + \frac{R}{\sqrt{\Delta}} \left(\frac{dC}{du} u' + \frac{dC}{dv} v'\right) + \left(\frac{R}{\sqrt{\Delta}}\right)' C = 0.$$

Indem man aber diese Gleichungen der Reihe nach erst mit

$$\frac{dx}{du}, \ \frac{dy}{du}, \ \frac{dz}{du},$$

dann mit

$$\frac{dx}{dv}, \ \frac{dy}{dv}, \ \frac{dz}{dv}$$

multipliciert und die Producte addiert, erhält man die beiden Summen das Element der entsprechenden Curve bezeichnet, in welcher u constant ist. Wenn diese beiden Curven sich unter dem Winkel ω durchschneiden, so haben wir, da ds die Diagonale des Parallelogramms ist, welches $\sqrt{(E)}\,du$ und $\sqrt{(G)}\,dv$ zu Seiten hat,

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{(EG)}},$$

und für den Inhalt des Parallelogramms

$$d\sigma\, d\sigma' \sin\omega = \sqrt{(EG - F^2)}\, du\, dv.$$

Wenn die Curven des Systems u die des Systems v rechtwinklig durchschneiden sollen, so muss

$$F = 0$$

sein.

Es ist ein specieller Fall dieser Formeln, wenn wir geodä-

$$Eu' + Fv' - \frac{R}{\sqrt{\Delta}}(Du' + D'v') = 0,$$

$$Fu' + Gv' - \frac{R}{\sqrt{\Delta}}(D'u' + D''v') = 0,$$

zwischen denen man nun entweder R oder das Verhältniss $u' : v'$ eliminieren kann; jenes liefert die Gleichung der Krümmungslinien in der Form

$$(Eu' + Fv')(D'u' + D''v') - (Fu' + Gv')(Du' + D'v') = 0;$$

dieses die Gleichung der Krümmungsradien in der Form

$$\left(\frac{E}{R} - \frac{D}{\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{G}{R} - \frac{D''}{\sqrt{\Delta}}\right) - \left(\frac{F}{R} - \frac{D'}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 = 0,$$

oder

$$\frac{1}{R^2}\Delta - \frac{1}{R}\,\frac{DG - 2D'F + D''E}{\sqrt{\Delta}} + \frac{DD'' - D'^2}{\Delta} = 0.$$

Man erkennt hier den Ausdruck für das Krümmungsmass wieder, den wir in der Anmerkung des Artikel 151 gaben und erhält ferner

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{DG - 2D'F + D''E}{\Delta^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Bedingungen für die Existenz eines Kreispunktes sind

$$E : D = F : D' = G : D'';$$

Gleichheit der Hauptkrümmungsradien findet statt für die Relation

$$(DG - 2D'F + D''E)^2 = 4(EG - F^2)(DD'' - D'^2)$$

oder für die auch aus der Gleichung der Krümmungslinien hervorgehende identische

$$(GD - ED'')^2 = 4(FD - ED')(GD' - FD'').$$

dätische Polarcoordinaten anwenden;*) wir haben dann immer einen Ausdruck von der Form

$$ds^2 = d\varrho^2 + P^2 d\omega^2.$$

Und wenn wir in der allgemeinen Formel des letzten Artikels

$$F = 0, \quad E = \text{const.}$$

setzen, so erhalten wir

$$4E^2G^2K = E\left(\frac{dG}{du}\right)^2 - 2\,EG\,\frac{d^2G}{du^2},$$

also für

---

*) Man kann diese sich an den Ausdruck des Curvenelements anschliessenden Betrachtungen mit denen des Artikel 118 vereinigen und erhält damit Bestätigungen und Vervollständigungen der dort gegebenen Sätze. Denken wir auf einer krummen Fläche eine Linie A und durch jeden ihrer Punkte eine zu ihr normale geodätische Linie B, zählen wir die Längen v von jener von einem festen Punkte in ihr, nennen u die Längen von diesen, so ist

$$v = \text{const.}$$

die Gleichung einer zu A normalen geodätischen Linie,

$$u = \text{const.}$$

die Gleichung einer Curve C, die den Ort der Enden gleich langer B bildet. Die Curven B und C sind orthogonal; denn es ist

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

und für den betrachteten Fall erhält man die Gleichung einer beliebigen geodätischen Linie, die mit B ($v = \text{const.}$) den Winkel ϑ macht, in der Form

$$\sqrt{\Delta}\; d\vartheta = -\frac{dF}{du}\,du - \tfrac{1}{2}\,\frac{dG}{dv}\,dv.$$

Damit also A eine geodätische Linie sei, muss

$$\frac{dF}{du} = 0,$$

F also eine Function von v sein, und man hat daher $F = 0$, d. h. die Curven B und C sind orthogonal. Man erhält von da aus die Gauss'schen und die Sätze des Artikel 118 wieder, die auch Betti wohl gleichzeitig gegeben hat („Annali di Matematica," t. III, p. 336; vgl. Weingarten, „Journ. f. Math.", Bd. LXII, p. 160) und kann sie vervollständigen: Auf einer beliebigen Fläche durchschneiden sich confocale geodätische Ellipsen und Hyperbeln rechtwinklig. Auf einer beliebigen Fläche bildet die Tangente einer geodätischen Parabel gleiche Winkel mit dem geodätischen Radius vector und der geodätischen Normale zur Directrix. Vergl. auch Böklen, „Grunerts Archiv", Bd. 39, p. 189 u. 204, wo am letzteren Orte die Gauss'sche Lehre vom Entsprechen zwischen Linien auf den Flächen und sphärischen Linien etwas weiter ausgeführt ist.

$$E = 1, \quad G = P^2, \quad u = \varrho, \quad K = \frac{1}{RR'},$$

$$\frac{d^2P}{d\varrho^2} + \frac{P}{RR'} = 0,$$

eine Gleichung, welche für jede Fläche durch die Function P erfüllt sein muss, wenn

$$P d\omega$$

das Bogenelement eines geodätischen Kreises ausdrückt.

Roberts hat gezeigt („Cambridge and Dublin Mathem. Journal“, Vol. III, p. 161), dass dieser Gleichung für eine Fläche zweiter Ordnung durch die Function

$$\frac{y}{\sin \omega}$$

Genüge geleistet wird.

Der allgemeine Ausdruck des Linienelements

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

kann in verschiedener Weise vereinfacht werden. Wenn die Curven $u = 0$ geodätische Linien sind, so ist $E = 1$, sind die Curven $u = 0$, $v = 0$ orthogonal zu einander, so ist $F = 0$, wie wir sahen. Das Linienelement für ein System geodätischer Linien u und das ihrer orthogonalen Trajectionen v ist also

$$ds^2 = du^2 + G dv^2.$$

Die Linien v können in diesem Falle nicht selbst geodätisch sein, den einzigen Fall entwickelbarer d. h. auf eine Ebene abwickelbarer Flächen ausgenommen.

Wenn man

$$F = 0, \quad E = G = \lambda$$

setzt, so ist

$$ds^2 = \lambda \, (du^2 + dv^2),$$

wie Gauss gezeigt hat; es giebt unendlich viele orthogonale Curvenfamilien dieser Art auf jeder Fläche (Isothermen); sie theilen die Fläche in unendlich kleine Quadrate. Durch die Substitution

$$u + iv = 2x, \quad u - iv = 2y$$

giebt man dem Ausdruck des Linienelements dann die Form

$$ds^2 = 4 \lambda \, dx dy.$$

Man kann überdiess x durch eine beliebige Function von x und y durch eine solche von y ersetzen, ohne die Form dieses Ausdrucks zu ändern.

155. Gauss wendete diese Formeln auf die Bestimmung der totalen Krümmung — in seinem Sinn des Ausdrucks — für ein geodätisches Dreieck einer beliebigen Fläche an.

Da

$$P\,d\omega\,d\varrho$$

den Inhalt und

$$-\frac{1}{P}\,\frac{d^2P}{d\varrho^2}$$

das Maass der Krümmung ausdrücken, so wird die totale Krümmung durch zweimalige Integration von

$$-\frac{d^2P}{d\varrho^2}\,d\varrho\,d\omega$$

gefunden; nun giebt die erste Integration in Bezug auf ϱ

$$\left(C-\frac{dP}{d\varrho}\right)d\omega,$$

und das Integral verschwindet für $\varrho = 0$, wenn die Radien von einer Ecke des Dreiecks aus gemessen werden; auch muss für $\varrho = 0$

$$\frac{dP}{d\varrho} = 1$$

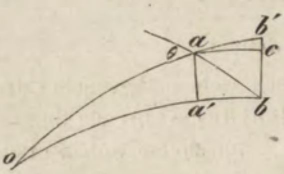
sein, weil für ein der Null sich näherndes ϱ die Länge des zu dem Radius normalen Elements der Grenze

$$\varrho\,d\omega$$

zustrebt. Das erste Integral ist somit

$$d\omega\left(1-\frac{dP}{d\varrho}\right).$$

Fig. 3.



Es kann in einer passenderen Form, wie folgt, geschrieben werden: Sei θ der Winkel, welchen ein Radius vector mit dem Element der geodätischen Linie ab macht, so ist, weil

$$aa' = P\,d\omega, \quad bb' = (P + dP)\,d\omega$$

und wenn

$$cb = aa',$$

$$b'c = dP\,d\omega,$$

$$\angle\, b'ac = \frac{dP}{d\varrho}\,d\omega.$$

Da aber $b'ac$ die Verminderung ist, welche der Winkel θ beim

Uebergang zu einem folgenden Punkte erfährt, so hat man damit

$$d\theta = -\frac{dP}{d\varrho}\, d\omega,$$

und das gefundene Integral ist somit

$$d\omega + d\theta,$$

und liefert durch die zweite Integration

$$\omega + \theta' - \theta'',$$

wenn ω der von den zwei äussersten Radien vectoren, welche wir betrachten, eingeschlossene Winkel ist und θ', θ'' die entsprechenden Werthe von θ sind.

Wenn wir durch A, B, C die inneren Winkel des durch die zwei äussersten Radien und die Basis gebildeten Dreiecks bezeichnen, so ist

$$\omega = A, \quad \theta' = B, \quad \theta'' = \pi - C,$$

und die totale Krümmung ist

$$A + B + C - \pi.$$

Der Ueberschuss der Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks über 180^0 wird somit durch den Inhalt desjenigen Theils einer Kugel vom Halbmesser Eins gemessen, welcher den Richtungen der Normalen längs den Seiten des gegebenen Dreiecks entspricht.

Der Theil der Kugel vom Halbmesser Eins, welcher dem durch eine in sich selbst zurückkehrende geodätische Linie umschlossenen Inhalt entspricht, ist die Halbkugel; denn wenn der Radius vom Ausgangspunkte bis in denselben zurück sich bewegt, so sind die äussersten Werthe von θ', θ'' einander gleich, während ω um 2π gewachsen ist. Das Maass der Krümmung ist daher für diesen Fall 2π, d. i. die halbe Oberfläche der Kugel.*)

156. Die Frage, ob eine Fläche auf eine gewisse andere

---

*) Für einige andere interessante Sätze, welche auf die Deformation der Flächen bezüglich sind, vergleiche man Jellet's Abhandlung „On the Properties of Inextensibles Surfaces", „Transactions of the Royal Irish Academy", Vol. XXII.

Die Theorie der auf einander applicabeln Flächen betraf die Preisfrage der französischen Academie für 1860, und der Bericht der entscheidenden Commission giebt Anlass zu glauben, dass die zur Bewerbung eingesendeten Abhandlungen bei ihrer Veröffentlichung zu dem was bisher bekannt war, Bemerkenswerthes hinzufügen werden.

Diese Arbeiten liegen auch jetzt (Sommer 1864) noch nicht vollständig vor.

Fläche ohne Verdoppelung und Dehnung ausgebreitet oder abgewickelt werden kann, findet ihren analytischen Ausdruck nach Artikel 150 durch die Gleichung

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2,$$

von deren Coefficienten E, F, G das Krümmungsmaass allein abhängig war. Ist also für die neue Fläche

$$ds_1{}^2 = E_1 dx^2 + 2 F_1 du dv + G_1 dv^2,$$

so muss gleichzeitig

$$E = E_1, \quad F = F_1, \quad G = G_1$$

sein, d. h. die neuen Coordinaten X, Y, Z müssen die Gleichungen

$$\frac{dx^2}{du^2} + \frac{dy^2}{du^2} + \frac{dz^2}{du^2} = E,$$

$$\frac{dx}{du}\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du}\frac{dy}{dv} + \frac{dz}{du}\frac{dz}{dv} = F,$$

$$\frac{dx^2}{dv^2} + \frac{dy^2}{dv^2} + \frac{dz^2}{dv^2} = G,$$

ebenso erfüllen, wie die alten x, y, z. Man hat also, um das Problem zu lösen, drei Functionen X, Y, Z von zwei Veränderlichen u, v so zu bestimmen, dass sie mit den gegebenen Grössen E, F, G durch diese Gleichungen vereinigt sind.

Denken wir das Linienelement in die Form

$$ds^2 = 4 \lambda dx dy$$

transformiert, so dass $E = 0$, $F = 2\lambda$, $G = 0$ sind, so hat man die Gleichungen zu integrieren,

$$\frac{dX^2}{du^2} + \frac{dY^2}{du^2} + \frac{dZ^2}{du^2} = 0,$$

$$\frac{dX}{du}\frac{dX}{dv} + \frac{dY}{du}\frac{dY}{dv} + \frac{dZ}{du}\frac{dZ}{dv} = 2\lambda,$$

$$\frac{dX^2}{dv^2} + \frac{dY^2}{dv^2} + \frac{dZ^2}{dv^2} = 0.$$

Sind dann p, q die partiellen Derivierten von Z in Bezug auf u und v; r, s, t aber die zweiten Derivierten derselben Grössen, so können wir durch Einführung zweier Hilfswinkel θ, θ_1 setzen

$$\frac{dX}{du} = ip \cos\theta, \quad \frac{dX}{dv} = iq \cos\theta_1,$$

$$\frac{dY}{du} = ip \sin\theta, \quad \frac{dY}{dv} = iq \sin\theta_1;$$

denn die Elimination der θ liefert die vorigen Gleichungen wieder und

$$\lambda = pq \sin^2 \tfrac{1}{2} (\theta - \theta_1) = pq \sin^2 \psi,$$

für $\theta - \theta_1 = 2\psi$; daraus aber durch Differentiation

$$\frac{d\psi}{du} = -\tfrac{1}{2} \tan \psi \left(\frac{r}{p} + \frac{s}{q} - \frac{d \log \lambda}{du}\right),$$

$$\frac{d\psi}{dv} = -\tfrac{1}{2} \tan \psi \left(\frac{s}{p} + \frac{t}{q} - \frac{d \log \lambda}{dv}\right).$$

Differentiiert man aber die Substitutionsgleichungen mit θ nach u, die mit θ_1 nach v, so erhält man aus der Vergleichung der Doppelwerthe von $\frac{d^2x}{du\,dv}$ und $\frac{d^2y}{du\,dv}$ die Relationen

$$s \cos\theta - p \sin\theta \frac{d\theta}{dv} = s \cos\theta_1 - q \sin\theta_1 \frac{d\theta_1}{du},$$

$$s \sin\theta + p \cos\theta \frac{d\theta}{dv} = s \sin\theta_1 + q \cos\theta_1 \frac{d\theta_1}{du}$$

und daraus

$$p \frac{d\theta}{dv} = -s \tan\psi, \quad q \frac{d\theta_1}{du} = s \tan\psi,$$

mittelst welcher die vorigen Gleichungen für $\frac{d\psi}{du}$ und $\frac{d\psi}{dv}$ in die neuen

$$\frac{d\theta}{du} = -\left(\frac{r}{p} - \frac{d \log \lambda}{du}\right) \tan\psi, \quad \frac{d\theta_1}{du} = \frac{s}{q} \tan\psi,$$

$$\frac{d\theta}{dv} = -\frac{s}{p} \tan\psi \quad , \quad \frac{d\theta_1}{dv} = \left(\frac{t}{q} - \frac{d \log \lambda}{dv}\right) \tan\psi$$

übergehen. Man eliminiert aus ihnen θ, θ_1 durch Differentiation, ψ durch die vorigen Gleichungen und erhält

$$2\,(pq - \lambda) \frac{d^2 \log \lambda}{du\,dv} - s^2 + \left(r - p \frac{d \log \lambda}{du}\right)\left(t - q \frac{d \log \lambda}{dv}\right) = 0,$$

als die Differentialgleichung, welche zu integrieren wäre.

Sie hat die Gleichung erster Ordnung

$$pq = \lambda$$

zur singulären Lösung.

Will man die Flächen von der Krümmung $= 1$ untersuchen, so erhält man

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\,dv} = \mp 2\lambda,$$

und als ihr Integral

$$\lambda = \mp \frac{\varphi'(u)\ \psi'(v)}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2},$$

also

$$ds^2 = \mp \frac{4\,\varphi'(u)\ \psi'(v)\ du\,dv}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2},$$

und für

$$\varphi(u) = \xi, \quad \psi(v) = \eta,$$
$$\varphi'(u)\,du = d\xi, \quad \psi'(v)\,dv = d\eta,$$

also

$$ds^2 = \mp \frac{4\,d\xi\,d\eta}{(\xi + \eta)^2}.$$

Alle Flächen, deren Krümmung constant $= 1$ ist, sind auf einander abwickelbar, z. B. auf die Kugel.

Für abwickelbare Flächen hat man ebenso

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\,dv} = 0,$$

und erhält

$$ds^2 = 4\,du\,dv.$$

157. Hätte man andererseits

$$E = 1, \quad F = 0,$$

also

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

oder für

$$g^2 = G, \quad \frac{dg}{du} = g_1,$$
$$ds^2 = du^2 + g^2 dv^2;$$

so seien l, m, n die Richtungscosinus der Normale der Fläche in u, v, ebenso λ, μ, ν und λ_1, μ_1, ν_1 diejenigen der Tangenten der beiden Curven $u =$ const., $v =$ const., die als normale Trajectorie einer geodätischen Linie und als geodätische Linien bekannt sind. Dann sind

$$\text{a)} \begin{cases} \dfrac{dx}{g\,dv} = \cos\lambda, & \dfrac{dy}{g\,dv} = \cos\mu, \quad \dfrac{dz}{g\,dv} = \cos\nu; \\[2mm] \dfrac{dx}{du} = \cos\lambda_1, & \dfrac{dy}{du} = \cos\mu_1, \quad \dfrac{dz}{du} = \cos\nu_1; \end{cases}$$

man eliminiert x, y, z durch Differentiation und findet

$$\text{b)} \quad \begin{cases} \dfrac{d \cos \lambda_1}{g\,dv} = \dfrac{d \cos \lambda}{du} + \dfrac{g_1}{g} \cos \lambda, \\[2mm] \dfrac{d \cos \mu_1}{g\,dv} = \dfrac{d \cos \mu}{du} + \dfrac{g_1}{g} \cos \mu, \\[2mm] \dfrac{d \cos \nu_1}{g\,dv} = \dfrac{d \cos \nu}{du} + \dfrac{g_1}{g} \cos \nu. \end{cases}$$

Daraus aber durch Multiplication mit $\cos \lambda_1$, $\cos \mu_1$, $\cos \nu_1$ und Addition nach bekannten Relationen

$$\cos \lambda_1 \frac{d \cos \lambda}{du} + \cos \mu_1 \frac{d \cos \mu}{du} + \cos \nu_1 \frac{d \cos \nu}{du} = 0,$$

so dass die $\cos \lambda_1$, $\cos \mu_1$, $\cos \nu_1$ eliminiert werden können.

Setzt man

$$T^2 = \left(\frac{d \cos \lambda}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \mu}{du}\right)^2 + \left(\frac{d \cos \nu}{du}\right)^2,$$

so ist

$$T \cos \lambda_1 = \cos \mu \frac{d \cos \nu}{du} - \cos \nu \frac{d \cos \mu}{du},$$

$$T \cos \mu_1 = \cos \nu \frac{d \cos \lambda}{du} - \cos \lambda \frac{d \cos \nu}{du},$$

$$T \cos \nu_1 = \cos \lambda \frac{d \cos \mu}{du} - \cos \mu \frac{d \cos \lambda}{du},$$

also

$$\text{c)} \quad T \frac{g_1}{g} = \begin{vmatrix} \cos \lambda, & \dfrac{d \cos \lambda}{g\,dv}, & \dfrac{d \cos \lambda}{du} \\[2mm] \cos \mu, & \dfrac{d \cos \mu}{g\,dv}, & \dfrac{d \cos \mu}{du} \\[2mm] \cos \nu, & \dfrac{d \cos \nu}{g\,dv}, & \dfrac{d \cos \nu}{du} \end{vmatrix}.$$

Für $\cos \lambda = \cos a \sin b$, $\cos \mu = \sin a \sin b$, $\cos \nu = \cos b$ wird

$$T^2 = \left(\frac{db}{du}\right)^2 + \sin^2 b \left(\frac{da}{du}\right)^2,$$

und man kann setzen

$$\sin b \frac{da}{du} = T \cos \theta, \quad \frac{db}{du} = T \sin \theta,$$

also

$$\begin{aligned} \cos \lambda_1 &= - \sin a \sin \theta - \cos a \cos b \cos \theta, \\ \cos \mu_1 &= \cos a \sin \theta - \sin a \cos b \cos \theta, \\ \cos \nu_1 &= \sin b \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\cos\theta\,\frac{db}{dv} - \sin\theta\,\sin b\,\frac{da}{dv} = g_1,$$

und
$$\begin{aligned}\cos l &= -\cos a\cos b\sin\theta + \sin a\cos\theta,\\ \cos m &= -\sin a\cos b\sin\theta - \cos a\cos\theta,\\ \cos n &= \quad\sin b\sin\theta,\end{aligned}$$

deren absolute Werthe sich dann aus ihrer Rechtwinkligkeit gegen die Geraden $\lambda, \ldots, \lambda_1, \ldots$ bestimmen. Man kann gleichzeitig

$$\begin{aligned}&\cos\lambda = 1, \quad \cos\mu_1 = 1, \quad \cos a = 1,\\ &\sin b = 1, \quad \sin\theta = 1, \quad \cos n = 1\end{aligned}$$

machen, d. h. die drei Linien mit den Achsen eines dreirechtwinkligen Systems zur Deckung bringen.

Von den Gleichungen b) erhält man dann

$$\frac{d\theta}{g\,dv} - \cos b\,\frac{da}{g\,dv} = T.^{*)}$$

158. Führen wir endlich zwei neue Functionen H, H_1 ein, welche durch

$$\sin\theta\,\frac{db}{g\,dv} + \cos\theta\sin b\,\frac{da}{g\,dv} = -H,$$

$$\frac{1}{g}\,\frac{dg_1}{du} = T^2 - HH_1$$

definiert sind, so kann man die Derivierten von a, b, θ nach u und v, sowie die neun Cosinus mittelst derselben ausdrücken. Diess giebt

$$\text{d)}\quad\left\{\begin{aligned}&\sin b\,\frac{da}{du} = T\cos\theta, & &\sin b\,\frac{da}{g\,dv} = -H\cos\theta - \frac{g_1}{g}\sin\theta,\\ &\frac{db}{du} = T\sin\theta, & &\frac{db}{g\,dv} = -H\sin\theta + \frac{g_1}{g}\cos\theta,\\ &\frac{d\theta}{du} = -H_1 + T\cos\theta\cot b, & &\frac{d\theta}{g\,dv} = T - \left(K\cos\theta + \frac{g_1}{g}\sin\theta\right)\cot b;\end{aligned}\right.$$

---

*) Auf die weiteren Untersuchungen von E. Bour („Journal de l'école polytechnique“, t. XXII), O. Bonnet (ibid., t. XIX), Weingarten („Journal für Math.“, Bd. LIX, p. 382; Bd. LXII), ist zu verweisen; wir widmen jenen nur noch die beiden nächsten Artikel; von ihnen knüpft die letztere insbesondere an die Eigenschaft der Krümmungslinien an, dass die abwickelbare Fläche der in ihren Punkten errichteten Normalen die Fläche der Krümmungsmittelpunkte in einer geodätischen Linie schneidet und führt zu dem Resultate, dass die Flächen der Krümmungscentra aller der Flächen, bei denen in jedem Punkte der eine Hauptkrümmungsradius eine Function des andern ist, auf einander abwickelbar sind.

$$
\text{e)}\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{d\cos\lambda}{du} = -T\cos l \quad , & \dfrac{d\cos\lambda}{g\,dv} = -\dfrac{g_1}{g}\cos\lambda_1 + H\cos l, \\
\dfrac{d\cos\mu}{du} = -T\cos m \quad , & \dfrac{d\cos\mu}{g\,dv} = -\dfrac{g_1}{g}\cos\mu_1 + H\cos m, \\
\dfrac{d\cos\nu}{du} = -T\cos n \quad , & \dfrac{d\cos\nu}{g\,dv} = -\dfrac{g_1}{g}\cos\nu_1 + H\cos n, \\
\dfrac{d\cos\lambda_1}{du} = H_1\cos l \quad , & \dfrac{d\cos\lambda_1}{g\,dv} = -T\cos l + \dfrac{g_1}{g}\cos\lambda, \\
\dfrac{d\cos\mu_1}{du} = H_1\cos m \quad , & \dfrac{d\cos\mu_1}{g\,dv} = -T\cos m + \dfrac{g_1}{g}\cos\mu, \\
\dfrac{d\cos\nu_1}{du} = H_1\cos n \quad , & \dfrac{d\cos\nu_1}{g\,dv} = -T\cos n + \dfrac{g_1}{g}\cos\nu, \\
\dfrac{d\cos l}{du} = T\cos\lambda - H_1\cos\lambda_1, & \dfrac{d\cos l}{g\,dv} = -H\cos\lambda + T\cos\lambda_1, \\
\dfrac{d\cos m}{du} = T\cos\mu - H_1\cos\mu_1, & \dfrac{d\cos m}{g\,dv} = -H\cos\mu + T\cos\mu_1, \\
\dfrac{d\cos n}{du} = T\cos\nu - H_1\cos\nu_1, & \dfrac{d\cos n}{g\,dv} = -H\cos\nu + T\cos\nu_1.
\end{array}\right.
$$

Endlich durch Substitution in die Determinante

$$
1 = \begin{vmatrix} \cos\lambda, & \cos\lambda_1, & \cos l \\ \cos\mu, & \cos\mu_1, & \cos m \\ \cos\nu, & \cos\nu_1, & \cos n \end{vmatrix}.
$$

Wenn man ausser g und ihren Derivierten die H, H_1, T kennt, so findet man durch Integration von e) die Werthe der neun Cosinus und durch Quadraturen die Endgleichungen der entsprechenden Fläche mittelst der Relationen a). Damit jene Integration möglich sei, müssen die Functionen H, H_1, T gewisse Bedingungsgleichungen erfüllen, die man durch Bildung der zweiten Derivierten erhält. Sie sind

$$
\text{f)}\quad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{g}\,\dfrac{dg_1}{du} = T^2 - HH_1, \\
\dfrac{dT}{g\,dv} + \dfrac{dH}{du} + \dfrac{g_1}{g}\,(H - H_1) = 0, \\
\dfrac{dT}{du} + \dfrac{dH_1}{g\,dv} + 2\,\dfrac{g_1}{g}\,T = 0;
\end{array}\right.
$$

oder

$$
\text{f*)}\quad \begin{cases} \dfrac{1}{g}\dfrac{dg_1}{du} = T^2 - HH_1, \\ \dfrac{dT}{dv} + \dfrac{d\,(Hg)}{du} - H_1 g_1 = 0, \\ \dfrac{d\,(Tg^2)}{du} + g\,\dfrac{dH_1}{dv} = 0. \end{cases}
$$

Die Bestimmung eines Systems von Werthen der H, H_1, T, welche diesen Gleichungen genügen, löst das Problem; sie giebt die analytische und geometrische Definition einer auf die gegebene Fläche abwickelbaren Fläche oder einer Familie von solchen Flächen.

159. Ist dann R einer der Hauptkrümmungsradien in einem beliebigen Punkte der Fläche, sind also die Gleichungen der entsprechenden Krümmungslinie

$$
dX + R\,d\cos l = 0, \quad dY + R\,d\cos m = 0,
$$
$$
dZ + R\,d\cos n = 0,
$$

so ersetzen wir die Differentiale durch ihre Werthe aus den Gruppen a) und e) und erhalten

$$
-\frac{1}{g}\frac{du}{dv} = \frac{\left(\frac{1}{R} - H\right)\cos\lambda + T\cos\lambda_1}{\left(\frac{1}{R} - H_1\right)\cos\lambda_1 + T\cos\lambda}
$$
$$
= \frac{\left(\frac{1}{R} - H\right)\cos\mu + T\cos\mu_1}{\left(\frac{1}{R} - H_1\right)\cos\mu_1 + T\cos\mu}
$$
$$
= \frac{\left(\frac{1}{R} - H\right)\cos\nu + T\cos\nu_1}{\left(\frac{1}{R} - H_1\right)\cos\nu_1 + T\cos\nu},
$$

also auch

$$
-\frac{1}{g}\frac{du}{dv} = \frac{\frac{1}{R} - H}{T} = \frac{T}{\frac{1}{R} - H_1}.
$$

Daraus folgt, dass die beiden Hauptkrümmungsradien der Fläche die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{1}{R^2} - (H + H_1)\frac{1}{R} + (HH_1 - T)^2 = 0$$

sind, dass also ihr Product

$$= (HH_1 - T^2)$$

oder

$$(\mathfrak{f}^1) \quad = - \frac{1}{g}\frac{dg_1}{du}$$

ist.

Indem man ferner bemerkt, dass $\frac{du}{g\,dv}$ die Tangente des Winkels ist, den eine Krümmungslinie mit der Coordinatenlinie bildet, welche wir die perpendiculare genannt haben, und durch ω_1, ω_2 die den beiden Krümmungslinien entsprechenden Winkel dieser Art bezeichnet, hat man

$$\tan 2\omega_1 = \tan 2\omega_2 = \frac{2T}{H_1 - H},$$

und erhält ferner

$$H = \frac{1}{R_1}\cos^2\omega_1 + \frac{1}{R_2}\sin\omega_1{}^2,$$

$$H_1 = \frac{1}{R_1}\sin^2\omega_1 + \frac{1}{R_2}\cos^2\omega_1,$$

$$T = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)\sin\omega_1\cos\omega_1.$$

Diese Formeln geben die geometrische Bedeutung der Grössen H, H_1, T an: H ist die Krümmung des Normalschnittes, welcher die Tangente zu (u) enthält; H_1 die Krümmung des zum vorigen rechtwinkligen Normalschnittes, welcher die Tangente der geodätischen Coordinate (v) enthält, oder die Krümmung der geodätischen Linie; T ist die Torsion derselben geodätischen Linie. Mittelst dieser erkannten Bedeutungen liefern die vorigen Gleichungen Sätze über den Zusammenhang der Krümmungen beim Vorgang der Deformation.

Die Krümmung eines beliebigen Normalschnitts der Fläche, der gegen die Perpendiculare um den Winkel ω geneigt ist, erhält man

$$= H\cos^2\omega + H_1\sin^2\omega - 2T\sin\omega\cos\omega$$

$$= \frac{H_1\,du^2 - 2Tg\,du\,dv + Hg^2dv^2}{du^2 + g^2dv^2},$$

und damit sie gleich Null sei, muss

$$\frac{du}{g\,dv} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - HH_1}}{H_1}$$

sein; diess ist die Differentialgleichung der Linien auf der Fläche, in deren Punkten die Krümmung gleich Null ist.

160. Eine mit der Theorie der Krümmung der Flächen nahe zusammenhängende und sie als einen speciellen Fall enthaltende Theorie ist die Theorie der geradlinigen Strahlensysteme, d. i. der Systeme gerader Linien, welche einen Raum so erfüllen, dass durch jeden Punkt ein Strahl oder eine gewisse Anzahl von Strahlen hindurchgeht. Sie ist in voller Allgemeinheit zuerst durch R. Hamilton in einem Anhang zu einer den optischen regelmässigen Strahlensystemen gewidmeten Abhandlung*) und später mit grosser analytischer Eleganz vollständiger durch E. Kummer**) behandelt und damit der analytischen Geometrie angeschlossen worden.

Der letzteren Darstellung schliessen wir uns hier an. Wir denken einen Strahl durch die Coordinaten x, y, z eines Punktes in ihm und seine Richtungscosinus l, m, n und einen zweiten benachbarten durch die Werthe

$$x + \varDelta x,\quad y + \varDelta y,\quad z + \varDelta z;\quad l + \varDelta l,\quad m + \varDelta m,\quad n + \varDelta n$$

bestimmt, und bezeichnen den Winkel beider Strahlen durch θ, ihre kürzeste Entfernung durch e und durch λ, μ, ν ihre Richtungscosinus, endlich durch r die längs desselben gehende Abscisse des Fusspunkts derselben im ersten Strahl. Das Gesetz, welches die Geraden zum System verbindet, wird gegeben, indem man die Grössen x, y, z, l, m, n als Functionen zweier Veränderlichen u, v betrachtet. Dann gelten nach den Elementen (vergl. besonders Band I, Artikel 14, 49) die Formeln

$$\sin^2\theta = (m\varDelta n - n\varDelta m)^2 + (n\varDelta l - l\varDelta n)^2 + (l\varDelta m - m\varDelta l)^2,$$

$$e\sin\theta = (m\varDelta n - n\varDelta m)\,\varDelta x + (n\varDelta l - l\varDelta n)\,\varDelta y + (l\varDelta m - m\varDelta l)\,\varDelta z,$$

$$\lambda = \frac{m\varDelta n - n\varDelta m}{\sin\theta},\quad \mu = \frac{n\varDelta l - l\varDelta n}{\sin\theta},\quad \nu = \frac{l\varDelta m - m\varDelta l}{\sin\theta},$$

$$e = \lambda\varDelta x + \mu\varDelta y + \nu\varDelta z,$$

$$r\sin\theta = \left\{\nu(m + \varDelta m) - \mu(n + \varDelta n)\right\}\varDelta x$$
$$+ \left\{\lambda(n + \varDelta n) - \nu(l + \varDelta l)\right\}\varDelta y + \left\{\mu(l + \varDelta l) - \lambda(m + \varDelta m)\right\}\varDelta z;$$

---

*) „Transactions of the Royal Irish Akademy," Vol. XVI.

**) „Journal f. Math.", Band LVII, p. 189 f.

und wegen

$$l^2+m^2+n^2=1,\quad (l+\Delta l)^2+(m+\Delta m)^2+(n+\Delta n)^2=1,$$

also

$$l\Delta l+m\Delta m+n\Delta n=-\tfrac{1}{2}(\Delta l^2+\Delta m^2+\Delta n^2),$$
$$\cos\theta=1-\tfrac{1}{2}(\Delta l^2+\Delta m^2+\Delta n^2),$$
$$\sin^2\theta=\Delta l^2+\Delta m^2+\Delta n^2-\tfrac{1}{4}(\Delta l^2+\Delta m^2+\Delta n^2)^2,$$
$$e\sin^2\theta=-(\Delta x\,\Delta l+\Delta y\,\Delta m+\Delta z\,\Delta n)$$
$$+\tfrac{1}{2}(\Delta l^2+\Delta m^2+\Delta n^2)\left\{\Delta x(l+\Delta l)+\Delta y(m+\Delta m)+\Delta z(n+\Delta n)\right\}.$$

Ist ferner p die Länge einer von einem beliebigen Punkte des zweiten Strahles nach dem ersten gezogenen Senkrechten und R die Abscisse ihres Fusspunktes in diesem, sowie λ', μ', ν' ihre Richtungscosinus, so sind für

$$P=l\Delta x+m\Delta y+n\Delta z,$$
$$p\lambda'=\Delta x-Rl+\frac{(R-P)(l+\Delta l)}{\cos\theta},$$
$$p\mu'=\Delta y-Rm+\frac{(R-P)(m+\Delta m)}{\cos\theta},$$
$$p\nu'=\Delta z-Rn+\frac{(R-P)(n+\Delta n)}{\cos\theta}.$$

Und wenn der zweite Strahl dem ersten unendlich nahe rückt, so dass die Differenzen in Differentiale

$$dx,\ dy,\ dz,\ dl,\ dm,\ dn$$

übergehen, so werden e, p und θ zu de, dp, $d\theta$ und man erhält (vergl. Artikel 95)

$$d\theta^2=dl^2+dm^2+dn^2;$$
$$\lambda=\frac{mdn-ndm}{d\theta},\quad \mu=\frac{ndl-ldn}{d\theta},\quad \nu=\frac{ldm-mdl}{d\theta};$$
$$de=\lambda dx+\mu dy+\nu dz,\quad \xi=-\frac{dx\,dl+dy\,dm+dz\,dn}{dl^2+dm^2+dn^2};$$
$$\lambda' dp=dx+R\,dl-l\,(ldx+mdy+ndz),$$
$$\mu' dp=dy+R\,dm-m\,(ldx+mdy+ndz),$$
$$\nu' dp=dz+R\,dn-n\,(ldx+mdy+ndz).$$

Wendet man nun die Gauss'schen Bezeichnungen der Artikel 150 und 152, also

$$a,\ a',\ b,\ b',\ c,\ c',\ A,\ B,\ C,\ E,\ F,\ G$$

an und bildet ihnen analog die andern

$$dl = \mathfrak{a}du + \mathfrak{a}'dv, \quad dm = \mathfrak{b}du + \mathfrak{b}'dv, \quad dn = \mathfrak{c}du + \mathfrak{c}'dv,$$
$$\mathfrak{b}\mathfrak{c}' - \mathfrak{b}'\mathfrak{c} = \mathrm{A}, \quad \mathfrak{c}\mathfrak{a}' - \mathfrak{c}'\mathfrak{a} = \mathrm{B}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}' - \mathfrak{a}'\mathfrak{b} = \mathrm{C},$$
$$\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2 = \mathrm{E}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}\mathfrak{c}' = \mathrm{F}, \quad \mathfrak{a}'^2 + \mathfrak{b}'^2 + \mathfrak{c}'^2 = \mathrm{G},$$
$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = \mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \Delta^2,$$
$$a\mathfrak{a} + b\mathfrak{b} + c\mathfrak{c} = \mathfrak{e}, \quad a'\mathfrak{a} + b'\mathfrak{b} + c'\mathfrak{c} = \mathfrak{f},$$
$$a\mathfrak{a}' + b\mathfrak{b}' + c\mathfrak{c}' = \mathfrak{f}', \quad a'\mathfrak{a} + b'\mathfrak{b} + c'\mathfrak{c} = \mathfrak{g},$$

und setzt man endlich

$$\frac{dv}{du} = t,$$

so erhält man aus

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

durch Differentiation nach u und v

$$l\mathfrak{a} + m\mathfrak{b} + n\mathfrak{c} = 0, \quad l\mathfrak{a}' + m\mathfrak{b}' + n\mathfrak{c}' = 0,$$

und somit

$$l = \frac{\mathrm{A}}{\Delta}, \quad m = \frac{\mathrm{B}}{\Delta}, \quad n = \frac{\mathrm{C}}{\Delta}.$$

161. Mit diesen Bezeichnungen kann nun zuerst der Werth der Abscisse r des kürzesten Abstands zweier unendlich naher Strahlen in der Form

$$r = -\frac{\mathfrak{e} + (\mathfrak{f} + \mathfrak{f}')\,t + \mathfrak{g}t^2}{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t + \mathrm{G}t^2}$$

dargestellt werden. Für einen bestimmten Werth des t giebt dieser Ausdruck den Abstand des ersten Strahls von einem bestimmten unendlich nahen Strahle und für alle Werthe von t von $-\infty$ bis $+\infty$ erhält man die Werthe r für alle nächstbenachbarten Strahlen; da nach der Natur des Nenners — weil

$$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2$$

nie negativ sein und nicht Null werden kann, ohne den speciellen hier auszuschliessenden Fall $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = 0$ herbeizuführen — r nie unendlich werden kann, so liegen alle r zwischen bestimmten Grenzen; sie werden durch Vergleichung des nach t gebildeten Differentialquotienten von r mit Null gewonnen, sind also die Wurzeln t_1 und t_2 der Gleichung

$$\left\{\mathfrak{g}\mathrm{F} - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{f} + \mathfrak{f}')\mathrm{G}\right\} t^2 - (\mathfrak{e}\mathrm{G} - \mathfrak{g}\mathrm{E})\,t + \left\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{f} + \mathfrak{f}')\mathrm{E} - \mathfrak{e}\mathrm{F}\right\} = 0,$$

so dass

$$t_1 + t_2 = \frac{\mathfrak{e}\mathrm{G} - \mathfrak{g}\mathrm{E}}{\mathfrak{g}\mathrm{F} - \frac{1}{2}(\mathfrak{f} + \mathfrak{f}')\,\mathrm{G}}, \quad t_1 t_2 = \frac{\frac{1}{2}(\mathfrak{f} + \mathfrak{f}')\,\mathrm{E} - \mathfrak{e}\mathrm{F}}{\mathfrak{g}\mathrm{F} - \frac{1}{2}(\mathfrak{f} + \mathfrak{f}')\,\mathrm{G}}$$

sind. Ebenso findet man die entsprechenden Abscissen r_1 und r_2

$$r_1 = -\frac{e + \frac{1}{2}(f + f')\,t_1}{E + Ft_1} = -\frac{\frac{1}{2}(f + f') + gt_1}{F + Gt_1},$$

$$r_2 = -\frac{e + \frac{1}{2}(f + f')\,t_2}{E + Ft_2} = -\frac{\frac{1}{2}(f + f') + gt_2}{F + Gt_2}$$

und durch Elimination der t_1, t_2 hieraus

$$(EG - F^2)\,r^2 + \{gE - (f + f')\,F + eG\}\,r + eg - \tfrac{1}{4}(f + f')^2 = 0$$

oder

$$r_1 + r_2 = -\frac{gE - (f + f')\,F + eG}{\varDelta^2}, \quad r_1 r_2 = \frac{eg - \frac{1}{4}(f + f')^2}{\varDelta^2}.$$

Die kürzesten Abstände eines Strahles von den ihn rings umgebenden unendlich nahen Strahlen liegen also in einem durch zwei Punkte begrenzten Theile dieses Strahles.

162. Wenn man sodann in die für λ, μ, ν gewonnenen Ausdrücke des Artikel 160 für die dx, dy, dz, dl, dm, dn die partiellen Differentiale du, dv und ihren Quotienten t einführt, so erhält man

$$\lambda = \frac{mc - nb + (mc' - nb')\,t}{(E + 2Ft + Gt^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\mu = \frac{na - lc + (na' - lc')\,t}{(E + 2Ft + Gt^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\nu = \frac{lb - ma + (lb' - ma')\,t}{(E + 2Ft + Gt^2)^{\frac{1}{2}}},$$

und wegen

$$l = \frac{A}{\varDelta}, \quad m = \frac{B}{\varDelta}, \quad n = \frac{C}{\varDelta},$$

sowie

$$Bc - Cb = a'E - aF, \quad Bc' - Cb' = a'F - aG, \text{ etc.},$$

$$\lambda = \frac{a'(E + Ft) - a(F + Gt)}{\varDelta\,(E + 2Ft + Gt^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\mu = \frac{b'(E + Ft) - b(F + Gt)}{\varDelta\,(E + 2Ft + Gt^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\nu = \frac{c'(E + Ft) - c(F + Gt)}{\varDelta\,(E + 2Ft + Gt^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die besonderen Werthe in den Grenzpunkten sind für

$$V_1 = (E + 2Ft_1 + Gt_1^2)^{\frac{1}{2}}, \quad V_2 = (E + 2Ft_2 + Gt_2^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_1 = -\frac{(\mathrm{a} + \mathrm{a}'t_2)(\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)}{\Delta V_1},$$

$$\mu_1 = -\frac{(\mathrm{b} + \mathrm{b}'t_2)(\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)}{\Delta V_1},$$

$$\nu_1 = -\frac{(\mathrm{c} + \mathrm{c}'t_2)(\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)}{\Delta V_1},$$

und da aus den Ergebnissen des vorigen Artikels die Relationen

$$\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t_1 + \mathrm{G}t_1^2 = (t_1 - t_2)(\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1),$$

$$(\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)(\mathrm{F} + \mathrm{G}t_2) = -\Delta^2,$$

$$(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t_1 + \mathrm{G}t_1^2)(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t_2 + \mathrm{G}t_2^2) = \Delta^2 (t_2 - t_1)^2,$$

$$\mathrm{E} + \mathrm{F}(t_1 + t_2) + \mathrm{G}t_1 t_2 = 0$$

hervorgehen, so erhält man

$$V_1 V_2 = \Delta (t_2 - t_1), \quad \frac{\Delta V_1}{\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1} = V_2, \quad \frac{\Delta V_2}{\mathrm{F} + \mathrm{G}_2} = -V_1,$$

also

$$\lambda_1 = -\frac{\mathrm{a} + \mathrm{a}'t_2}{V_2}, \quad \mu_1 = -\frac{\mathrm{b} + \mathrm{b}'t_2}{V_2}, \quad \nu_1 = -\frac{\mathrm{c} + \mathrm{c}'t_2}{V_2},$$

$$\lambda_2 = -\frac{\mathrm{a} + \mathrm{a}'t_1}{V_1}, \quad \mu_2 = -\frac{\mathrm{b} + \mathrm{b}'t_1}{V_1}, \quad \nu_2 = -\frac{\mathrm{c} + \mathrm{c}'t_2}{V_1},$$

und somit für den Ausdruck

$$\lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2$$

den Werth

$$-\frac{(\mathrm{a} + \mathrm{a}'t_2)(\mathrm{a} + \mathrm{a}'t_1) + (\mathrm{b} + \mathrm{b}'t_2)(\mathrm{b} + \mathrm{b}'t_1) + (\mathrm{c} + \mathrm{c}'t_2)(\mathrm{c} + \mathrm{c}'t_1)}{V_1 V_2},$$

oder

$$-\frac{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}(t_1 + t_2) + \mathrm{G}t_1 t_2}{V_1 V_2}, \quad \text{d. i.} = 0;$$

d. h. die kürzesten Abstände eines Strahles von denjenigen unendlich nahen Strahlen, für welche sie in den Grenzpunkten liegen, sind zu einander rechtwinklig.

Man nennt die zu ihnen normalen den Strahl enthaltenden Ebenen die Hauptebenen desselben, sie sind auf einander rechtwinklig und auf sie bezieht man naturgemäss die Richtung der kürzesten Abstände. Nennt man ω den Winkel, welchen ein solcher kürzester Abstand mit dem im Grenzpunkt r_1 stattfindenden bildet, so ist

$$\cos\omega = \lambda_1\lambda + \mu_1\mu + \nu_1\nu$$
$$= -\frac{\mathrm{E} + \mathrm{F}t_1 + t(\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)}{V_1(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t + \mathrm{G}t^2)^{\frac{1}{2}}},$$
$$= \frac{(\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)(t_2 - t)}{V_1(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t + \mathrm{G}t^2)^{\frac{1}{2}}};$$

also

$$\sin\omega = \frac{\Delta(t - t_1)}{V_1(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t + \mathrm{G}t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

und mittelst tan ω

$$t = \frac{\Delta t_1 \cos\omega + (\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)\, t_2 \sin\omega}{\Delta\cos\omega + (\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)\sin\omega}.$$

Wenn man diess in den Ausdruck von r im Artikel 161 substituiert, so erhält man

$$\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t + \mathrm{G}t^2 = \frac{\Delta^2 V_1^{\,2}}{\left\{\Delta\cos\omega + (\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)\sin\omega\right\}^2},$$
$$\mathrm{e} + (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\,t + \mathrm{g}t^2 =$$
$$\frac{\Delta^2\left\{\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_1+\mathrm{g}t_1^{\,2}\right\}\cos^2\omega + (\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)\left\{\mathrm{e}+(\mathrm{f}+\mathrm{f}')t_2+\mathrm{g}t_2^{\,2}\right\}\sin^2\omega}{\left\{\Delta\cos\omega + (\mathrm{F} + \mathrm{G}t_1)\sin\omega\right\}^2}$$

und durch Division und mit Rücksicht für die Ausdrücke von r_1 und r_2

$$r = r_1\cos^2\omega + r_2\sin^2\omega.$$

Diese Formel drückt eine sehr einfache Beziehung der Grenzpunkte eines Strahls zum kürzesten Abstande eines beliebigen unendlich nahen Strahls aus.

Es ist offenbar, dass dieselbe eine allgemeine Eigenschaft der Normalen einer Fläche ausspricht.

163. Der kürzeste Abstand de zweier unendlich nahen Strahlen und der unendlich kleine Winkel $d\theta$, den dieselben mit einander bilden, sind gegeben durch

$$de = du\,(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t + \mathrm{G}t^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$d\theta = \frac{du\left\{(\mathrm{f}' + \mathrm{g}t)(\mathrm{E} + \mathrm{F}t) - (\mathrm{e} + \mathrm{f}t)(\mathrm{F} + \mathrm{G}t)\right\}}{\Delta(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t + \mathrm{G}t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

so dass

$$\frac{d\theta}{de} = \frac{(\mathrm{f}' + \mathrm{g}t)(\mathrm{E} + \mathrm{F}t) - (\mathrm{e} + \mathrm{f}t)(\mathrm{F} + \mathrm{G}t)}{\Delta(\mathrm{E} + 2\mathrm{F}t + \mathrm{G}t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ist.

Für

$$(\mathrm{f}' + \mathrm{g}t)\,(\mathrm{E} + \mathrm{F}t) - (\mathrm{e} + \mathrm{f}t)\,(\mathrm{F} + \mathrm{G}t) = 0,$$

oder die aus

$$(\mathrm{gF} - \mathrm{fG})\,t^2 + \left\{\mathrm{gE} - (\mathrm{f} - \mathrm{f}')\,\mathrm{F} - \mathrm{eG}\right\} t + \mathrm{f}'\mathrm{E} - \mathrm{eF} = 0$$

hervorgehenden Werthe von t wird der betrachtete Strahl von den betreffenden unendlich nahen Strahlen geschnitten. Sind τ_1, τ_2 die Wurzeln dieser Gleichung, so ist

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{-\,\mathrm{gE} + (\mathrm{f} - \mathrm{f}')\,\mathrm{F} + \mathrm{eG}}{\mathrm{gF} - \mathrm{fG}},$$

$$\tau_1 + \tau_2 = \frac{\mathrm{f}'\mathrm{E} - \mathrm{eF}}{\mathrm{gF} - \mathrm{fG}}.$$

Sie sind je nach den Gesetzen, welche die Strahlen zu einem System verbinden, reell oder imaginär und darnach sind die Strahlensysteme in Gattungen zu unterscheiden.

Man nennt diese Punkte die **Brennpunkte des Strahls** und findet ihre Abscissen ϱ_1, ϱ_2 aus dem allgemeinen Werthe von r durch Einführung der Werthe von τ_1, τ_2 für t

$$\varrho_1 = -\,\frac{\mathrm{e} + (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\,\tau_1 + \mathrm{g}\tau_1{}^2}{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\tau_1 + \mathrm{G}\tau_1{}^2},$$

$$\varrho_2 = -\,\frac{\mathrm{e} + (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\,\tau_2 + \mathrm{g}\tau_2{}^2}{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\tau_2 + \mathrm{G}\tau_2{}^2},$$

oder

$$\varrho_1 = -\,\frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}\tau_1}{\mathrm{E} + \mathrm{F}\tau_1} = -\,\frac{\mathrm{f}' + \mathrm{g}\tau_1}{\mathrm{F} + \mathrm{G}\tau_1},$$

$$\varrho_2 = -\,\frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}\tau_2}{\mathrm{E} + \mathrm{F}\tau_2} = -\,\frac{\mathrm{f}' + \mathrm{g}\tau_2}{\mathrm{F} + \mathrm{G}\tau_2}.$$

Wenn man zwischen diesen Werthen τ_1 oder τ_2 eliminiert, so erhält man die Gleichung

$$(\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)\,\varrho^2 + \left\{\mathrm{gE} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\,\mathrm{F} + \mathrm{eG}\right\} \varrho + \mathrm{eg} - \mathrm{ff}' = 0,$$

deren Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 also die Relationen

$$\varrho_1 + \varrho_2 = -\,\frac{\mathrm{gE} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\,\mathrm{F} + \mathrm{eG}}{\varDelta^2}, \quad \varrho_1\varrho_2 = \frac{\mathrm{eg} - \mathrm{ff}'}{\varDelta^2}$$

erfüllen; so dass man aus der Vergleichung mit den Werthen r_1, r_2 der Abscissen der Grenzpunkte

$$\varrho_1 + \varrho_2 = r_1 + r_2, \quad \varrho_1\varrho_2 = r_1 r_2 + \frac{(\mathrm{f} - \mathrm{f}')^2}{4\varDelta^2}$$

findet. Setzt man noch

$$d = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad \delta = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{2},$$

so findet man

$$d^2 - \delta^2 = \frac{(\mathfrak{f} - \mathfrak{f}')^2}{4\varDelta^2};$$

so dass die Sätze gelten: Der Mittelpunkt der Brennpunkte eines Strahls fällt mit demjenigen der Grenzpunkte der kürzesten Abstände zusammen. Man nennt ihn daher den Mittelpunkt des Strahls.

Der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte ist nie grösser, als der Abstand der Grenzpunkte der kürzesten Entfernungen von demselben.

Die beiden den Strahl durchschneidenden unendlich nahen Strahlen bestimmen mit ihm zwei Ebenen, die als seine Brenn- oder Focalebenen bezeichnet werden. Ihre Lage bestimmt die Gleichung

$$r = r_1 \cos^2 \omega + r_2 \sin^2 \omega,$$

durch

$$\cos^2 \omega = \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \quad \sin^2 \omega = \frac{r - r_1}{r_2 - r_1},$$

indem für $r = \varrho_1$ und $r = \varrho_2$ die Winkel ω_1, ω_2 der ersten und zweiten Focalebene mit der ersten Hauptebene daraus hervorgehen

$$\cos^2 \omega_1 = \frac{r_2 - \varrho_1}{r_2 - r_1}, \quad \sin^2 \omega_1 = \frac{\varrho_1 - r_1}{r_2 - r_1},$$

$$\cos^2 \omega_2 = \frac{r_2 - \varrho_2}{r_2 - r_1}, \quad \sin^2 \omega_2 = \frac{\varrho_2 - r_1}{r_2 - r_1},$$

welches endlich in

$$\cos \omega_1 = \sin \omega_2 = \sqrt{\frac{d + \delta}{2d}}, \quad \sin \omega_1 = \cos \omega_2 = \sqrt{\frac{d - \delta}{2d}}$$

übergeht, so dass

$$\omega_1 = \frac{\pi}{2} - \omega_2$$

ist, und nach der senkrechten Lage der Hauptebenen gegen einander der Satz entspringt: Die beiden Focalebenen des Strahls liegen symmetrisch gegen die Hauptebenen in der Art, dass die Halbierungsebenen des Winkels der Focalebenen mit denen des rechten Winkels der Hauptebenen zusammen fallen.

Der Winkel der Focalebenen $\gamma = \omega_1 - \omega_2$ liefert wegen

$$\tfrac{1}{2}\pi = \omega_1 + \omega_2$$

$$\sin\gamma = \cos 2\omega_1 = \cos^2\omega_1 - \sin^2\omega_1,$$
$$\cos\gamma = \sin 2\omega_1 = 2\sin\omega_1\cos\omega_1,$$

also

$$\sin\gamma = \frac{\delta}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2}}{d}.$$

164. Als die geometrischen Oerter der fünf in jedem Strahl so bestimmten Punkte für alle Strahlen des Systems erhält man fünf Flächen, die mit dem Strahlensystem in engen Beziehungen stehen.

Die beiden Flächen F_1, F_2, in welchen die Grenzpunkte der kürzesten Abstände liegen, theilen den ganzen Raum in der Weise ab, dass zwischen denselben die kürzesten Abstände aller unendlich nahen Strahlen des ganzen Systems liegen, ausserhalb derselben aber keine.

Wenn man von einem Strahle des Systems zu dem unendlich nahen Strahle übergeht, dessen kürzester Abstand von ihm in der Fläche F_1 liegt und von diesem zum nächsten in derselben Weise, und so fort, so bilden alle diese auf einander folgenden Strahlen eine Regelfläche O_1, welche in F_1 die aus den kürzesten Abständen der auf einander folgenden Strahlen gebildeten Curve a_1, in F_2 eine andere Curve b_2 bestimmt. Dieselbe Operation in der Fläche F_2 erzeugt eine Regelfläche O_2, die in F_2 die aus den kürzesten Abständen der auf einander folgenden Strahlen a_2 und in F_1 eine andere Curve b_1 bestimmt. Da alles das für jeden beliebigen Strahl auszuführen ist, so existiert eine Schaar von Regelflächen O_1 und eine Schaar der O_2 von dem nämlichen Charakter.

Sind x', y', z' die Coordinaten des ersten Grenzpunkts in dem durch (x, y, z) gehenden Strahl, so sind

$$x' = x + r_1 l, \quad y' = y + r_1 m, \quad z' = z + r_1 n,$$

d. i. die Coordinaten jedes Punktes als Functionen von u und v, die Gleichungen der Fläche F_1; und ebenso

$$x' = x + r_2 l, \quad y' = y + r_2 m, \quad z' = z + r_2 n$$

die Gleichungen der Fläche F_2. Integriert man die beiden Gleichungen

$$\frac{dv}{du} = t_1, \qquad \frac{dv}{du} = t_2,$$

so erhält man die Schaaren der Regelflächen O_1, O_2. Sind ihre vollständigen eine willkürliche Constante enthaltenden Integrale gefunden und eliminiert man mittelst eines derselben aus den Gleichungen

$$\frac{x' - x}{l} = \frac{y' - y}{m} = \frac{z' - z}{n}$$

die Grössen u und v, so erhält man eine Gleichung in x', y', z' mit einer willkürlichen Constanten, welche die ganze Schaar der Regelflächen O_1, O_2 darstellt, je nachdem die eine oder die andere Integralgleichung angewendet wurde. Die Schaaren der Curven a_1, b_1, a_2, b_2 geben aus den drei Gleichungen einer der Flächen F_1, F_2 durch Verbindung mit der einen oder andern Integralgleichung hervor.

Die Brennflächen des Strahlensystems Φ_1, Φ_2, d. i. die Flächen der Brennpunkte seiner Strahlen, sind natürlich nur mit diesen selbst reell. Wenn man von einem beliebigen Strahle aus zu demjenigen fortgeht, der ihn in dem auf Φ_1 gelegenen Brennpunkte schneidet, von diesem zum nächsten in derselben Weise und so fort, so erhält man in den Strahlen die Erzeugenden einer abwickelbaren Regelfläche Ω_1, deren Rückkehrkante α_1 in Φ_1 liegt und die auch Φ_2 in einer Curve β_2 schneidet. Daraus entspringt eine Schaar abwickelbarer Flächen Ω_1, deren Rückkehrkanten eine Schaar von Curven α_1 in Φ_1 und welche in Φ_2 die Schaar von Curven β_2 bestimmen; und eine Schaar abwickelbarer Flächen Ω_2, deren Rückkehrkanten eine Schaar von Curven α_2 auf Φ_2 und die in Φ_1 eine Schaar von Curven β_2 bestimmen. Diese Möglichkeit, die Strahlen des Systems in doppelter Weise zu einer Schaar abwickelbarer Flächen zusammen zu fassen, die ihre Rückkehrcurven in den Brennflächen haben, charakterisiert die Strahlensysteme mit reellen Brennflächen. Man sieht auch: Alle Strahlen eines Systems mit reellen Brennflächen sind gemeinschaftliche Tangenten der Brennflächen; ein solches System kann also als das System der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Flächen oder als das System der Doppeltangenten einer Fläche, endlich als das System aller Tangenten einer auf einer Fläche (F) liegenden Schaar von Curven (α) geometrisch definiert werden. Da jede der beiden Schaaren abwickelbarer Flächen, in welche alle Strahlen des Systems zusammen gefasst werden können, eine der Brennflächen einhüllt, so schneiden sich die beiden Schaaren von Curven, welche durch die beiden Schaaren der abwickelbaren Flächen auf den Brennflächen des Systems bestimmt werden, in conjugierten Richtungen. Endlich ist die Schnittcurve der beiden Brennflächen die Enveloppe für alle auf den beiden Brennflächen liegenden Rückkehrcurven der abwickelbaren Flächen, die die Strahlen des Systems umfassen.

Die Gleichungen der Brennflächen Φ_1, Φ_2 erhält man in den Systemen

$$x' = x + \varrho_1 l, \quad y' = y + \varrho_1 m, \quad z' = z + \varrho_1 n,$$
$$x' = x + \varrho_2 l, \quad y' = y + \varrho_2 m, \quad z' = z + \varrho_2 n;$$

die der abwickelbaren Flächen Ω_1, Ω_2 und der Curvenschaaren α_1, β_1, α_2, β_2 durch die Integration der Differentialgleichungen

$$\frac{dv}{du} = \tau_1, \quad \frac{dv}{du} = \tau_2,$$

wie oben.

Eine stets reelle Fläche ist endlich der Ort der Mittelpunkte aller Strahlen, die Mittelfläche des Systems. Wenn man von ihr aus die Abscissen der Punkte in den Strahlen rechnet, so hat man

$$r_1 = -r_2, \quad \varrho_1 = -\varrho_2, \quad \mathsf{gE} - (\mathsf{f} + \mathsf{f}')\,\mathsf{F} + \mathsf{eG} = 0,$$

also wesentliche Vereinfachung.

Ihre Gleichungen sind aus der Abscisse des Mittelpunktes

$$M = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{\mathsf{gE} - (\mathsf{f} + \mathsf{f}')\,\mathsf{F} + \mathsf{eG}}{2\Delta^2},$$

in der Form

$$x' = x + Ml, \quad y' = y + Mm, \quad z' = z + Mn$$

zu bilden.

Durch die Degeneration einer oder mehrerer unter diesen Flächen zu Linien oder Punkten, ihr Zusammenfallen oder ihr Verschwinden im Unendlichen werden Grenzfälle des allgemeinen Strahlensystems characterisiert. Ein solches ist das System

$$\Delta = 0, \quad \mathsf{A} = 0, \quad \mathsf{B} = 0, \quad \mathsf{C} = 0,$$

das von der allgemeinen Untersuchung ausgeschlossen ist (vergl.

Artikel 161); die Grenzflächen der kürzesten Abstände, die Mittelfläche und eine der Brennflächen sind unendlich entfernt, die andere existiert. Die eine der Flächenschaaren Ω, deren Rückkehrkanten auf der unendlich entfernten Brennfläche liegen, ist eine Schaar cylindrischer Flächen und das System kann somit definiert werden als das System aller der Tangenten einer Fläche, welche den Tangenten einer bestimmten Curve in ihr parallel sind.

165. Wenn man die Grössen l, m, n, welche die Relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

erfüllen, als rechtwinklige Coordinaten einer Kugel vom Radius Eins betrachtet, so ist nach dem in Artikel 147 dargelegten Grundgedanken von Gauss jedem Strahl des Systems ein Punkt der Kugel zugeordnet, und wenn man durch einen Punkt des Strahls eine zu ihm normale Ebene und in ihr um jenen eine unendlich kleine geschlossene Curve denkt, so entspricht ihr mittelst der durch die Punkte ihrer Peripherie gehenden Strahlen auf der Kugel eine gleichfalls einen unendlich kleinen Flächenraum φ einschliessende Curve. Das Verhältniss $\frac{\varphi}{f}$ beider unendlich kleiner Flächen heisst das Dichtigkeitsmaass des Systems. Seine Berechnung lässt sich auf Grund der im Artikel 160 gegebenen Formeln

$$\begin{aligned}
\lambda' dp &= dx + Rdl - l\,(ldx + mdy + ndz), \\
\mu' dp &= dy + Rdm - m\,(ldx + mdy + ndz), \\
\nu' dp &= dz + Rdn - n\,(ldx + mdy + ndz)
\end{aligned}$$

ausführen, wenn in ihnen dp den unendlich kleinen Abstand eines Punktes der Curve f von dem durch x, y, z, l, m, n, R gegebenen Fusspunkte des Strahls in ihrer Ebene, λ', μ', ν' aber seine Richtungscosinus bedeuten; ist dann α der Winkel des dp mit der Normale der ersten Hauptebene, so ist

$$\cos\alpha = \lambda_1\lambda' + \mu_1\mu' + \nu_1\nu', \quad \sin\alpha = \lambda_2\lambda' + \mu_2\mu' + \nu_2\nu',$$

und darnach auf Grund der vorigen Gleichungen und wegen

$$\begin{aligned}
\lambda_1 l + \mu_1 m + \nu_1 n = 0, \quad & \lambda_2 l + \mu_2 m + \nu_2 n = 0, \\
dp \cos\alpha &= \lambda_1 dx + \mu_1 dy + \nu_1 dz + R\,(\lambda_1 dl + \mu_1 dm + \nu_1 dn), \\
dp \sin\alpha &= \lambda_2 dx + \mu_2 dy + \nu_2 dz + R\,(\lambda_2 dl + \mu_2 dm + \nu_2 dn);
\end{aligned}$$

hieraus aber nach den im Artikel 162 für $\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \lambda_2, \mu_2, \nu_2$ gefundenen Werthen und für die Substitutionen

$$A_1 = \frac{\mathbf{e} + \mathbf{f}'t_1 + R\,(\mathbf{E} + \mathbf{F}t_1)}{V_1},\quad A_2 = \frac{\mathbf{e} + \mathbf{f}'t_2 + R\,(\mathbf{E} + \mathbf{F}t_2)}{V_2},$$

$$B_2 = \frac{\mathbf{f} + \mathbf{g}t_1 + R\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}t_1)}{V_1},\quad B_2 = \frac{\mathbf{f} + \mathbf{g}t_2 + R\,(\mathbf{F} + \mathbf{G}t_2)}{V_2},$$

$$dp \cos\alpha = -A_2 du - B_2 dv,\quad dp \sin\alpha = A_1 du + B_1 dv;$$

also

$$\tan\alpha = -\frac{A_1 + B_1 t}{A_2 + B_2 t},\quad t = -\frac{A_1\cos\alpha + A_2\sin\alpha}{B_1\cos\alpha + B_2\sin\alpha};$$

ferner

$$dt = \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)\,d\alpha}{(B_1\cos\alpha + B_2\sin\alpha)^2},\quad dp = \frac{(A_1B_2 - A_2B_1)\,du}{B_1\cos\alpha + B_2\sin\alpha},$$

also

$$dp^2 d\alpha = (A_1B_2 - A_2B_1)\,du^2 dt.$$

Diese Formel verbindet man mit der, wie folgt, für die Kugel erhaltenen Endgleichung. Entspricht den dp auf der Kugel das Bogenelement $d\sigma$, so ist aus den Coordinaten

$$l,\ m,\ n;\quad l + dl,\ m + dm,\ n + dn$$

seiner Endpunkte

$$d\sigma = (dl^2 + dm^2 + dn^2)^{\frac{1}{2}} = du\,(\mathbf{E} + 2\mathbf{F}t + \mathbf{G}t^2)^{\frac{1}{2}}$$

und seine Richtungscosinus sind

$$\frac{dl}{d\sigma} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}'t}{(\mathbf{E} + 2\mathbf{F}t + \mathbf{G}t^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \frac{dm}{d\sigma} = \frac{\mathbf{b} + \mathbf{b}'t}{(\mathbf{E} + 2\mathbf{F}t + \mathbf{G}t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{dn}{d\sigma} = \frac{\mathbf{c} + \mathbf{c}'t}{(\mathbf{E} + 2\mathbf{F}t + \mathbf{G}t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ist dann t_0 der Werth des t für $\alpha = 0$, also

$$t_0 = -\frac{A_1}{B_1},$$

und α' der dem Winkel α entsprechende Bogen auf der Kugel, so hat man

$$\cos\alpha' = \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{a}'t_0)(\mathbf{a}+\mathbf{a}'t) + (\mathbf{b}+\mathbf{b}'t_0)(\mathbf{b}+\mathbf{b}'t) + (\mathbf{c}+\mathbf{c}'t_0)(\mathbf{c}+\mathbf{c}'t)}{(\mathbf{E}+2\mathbf{F}t_0+\mathbf{G}t_0^2)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}+2\mathbf{F}t+\mathbf{G}t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\mathbf{E}+\mathbf{F}t_0 + (\mathbf{F}+\mathbf{G}t_0)\,t}{(\mathbf{E}+2\mathbf{F}t_0+\mathbf{G}t_0^2)^{\frac{1}{2}}(\mathbf{E}+2\mathbf{F}t+\mathbf{G}t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

also

$$\tan\alpha' = \frac{\varDelta\,(t - t_0)}{\mathbf{E} + \mathbf{F}t_0 + (\mathbf{F} + \mathbf{G}t_0)\,t},\quad d\alpha' = \frac{\varDelta dt}{\mathbf{E} + 2\mathbf{F}t + \mathbf{G}t^2},$$

und somit

$$d\sigma^2 d\alpha' = \Delta\, du^2 dl,$$

jene Gleichung für die Kugel. Die angedeutete Verbindung giebt

$$d\sigma^2 d\alpha' = \frac{\Delta}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\, dp^2 d\alpha.$$

Man hat aber für die Flächen f und φ die Ausdrücke

$$f = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} dp^2 d\alpha\,, \quad \varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma^2 d\alpha',$$

so dass man erhält

$$\frac{\varphi}{f} = \Theta = \frac{\Delta}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

und durch Umformung nach den Werthen der A und B und den Ausdrücken des Artikel 163 für die Abscissen ϱ_1, ϱ_2 der Brennpunkte

$$\Theta = \frac{1}{(\varrho_1 - R)\ (\varrho_2 - R)};$$

das Dichtigkeitsmaass in jedem Punkte eines Strahles ist gleich dem reciproken Werthe des Products der Entfernungen dieses Punktes von den Brennpunkten des Strahls.

Das Dichtigkeitsmaass ist daher stets reell. Es ist für Strahlensysteme mit reellen Brennflächen für alle zwischen ihnen gelegenen Punkte negativ, für alle ausserhalb gelegenen positiv, hat in dem Mittelpunkte jedes Strahls den grössten negativen Werth und ist in den Brennpunkten unendlich gross. Sind die Brennflächen imaginär, so ist es stets positiv und hat in dem Mittelpunkte eines jeden Strahls sein Maximum. Die Strahlen, welche der Peripherie von f angehören, bilden ein unendlich dünnes Strahlenbündel und f ist der der Abscisse R entsprechende Querschnitt. Ist dann f' der der Abscisse R' entsprechende Querschnitt desselben, so bleibt φ unverändert und man findet, dass die Flächeninhalte zweier Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels sich umgekehrt, wie die Dichtigkeitsmaasse der entsprechenden Stellen verhalten. Diess rechtfertigt die Benennung Dichtigkeitsmaass, da hiernach die Dichtigkeiten in demselben Verhältniss stehen, wie die Dichtigkeitsmaasse.

Wenn man verschiedene Strahlen betrachtet, so gelangt man zu dem Begriff eines Ortes von Punkten gleichen Dichtigkeitsmaasses und damit zu dem einer **Schaar von Flächen gleichen Dichtigkeitsmaasses.**

Da

$$R^2 - (\varrho_1 + \varrho_2) R + \varrho_1 \varrho_2 = \frac{1}{\Theta},$$

also

$$R = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Theta}}$$

ist, so sind für diese beiden Werthe von R

$$x' = x + Rl, \quad y' = y + Rm, \quad z' = z + Rn$$

die Coordinaten der Punkte des Systems, deren Dichtigkeitsmaass den Werth θ hat; die Coordinaten jedes Punktes einer Fläche jener Schaar sind als Functionen von u und v bestimmt.

Die beiden Brennflächen gehören zu den Flächen gleichen Dichtigkeitsmaasses, sie entsprechen dem Werthe $\Theta = \infty$; die Flächen sind reell, so lange $\frac{1}{\Theta}$ nicht negativ und grösser als $\left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^2$ ist.

Nach der Constanz des Products der Abstände von den Brennpunkten sind aus den bekannten Brennflächen die Flächen gleicher Dichtigkeit leicht zu construieren.

166. Ein für die Untersuchung der Strahlensysteme wichtiger Begriff ist der des **Drehungswinkels eines zweiten Strahls gegen den ersten für eine bestimmte Strecke** ab; es ist der Winkel der zwei aus Punkten des zweiten Strahls gegen den ersten gefällten Normalen, die in a und b diesen treffen; also entspricht der ganzen unbegrenzten Geraden der Drehungswinkel von zwei Rechten. Wir zählen die Drehungswinkel vom Ausgangspunkte des Strahls, d. i. von dem Punkte der Abscisse $R = 0$; ist dann dp die Länge der Normale im Punkte der Abscisse R, α der Winkel, den es mit der Normale der ersten Hauptebene macht, und entsprechen die Werthe dp_0 und α_0 dem Perpendikel im ersteren Punkte, so gelten nach Artikel 165 die Gleichungen

$$dp \cos\alpha = -A_2 du - B_2 dv,$$
$$dp \sin\alpha = A_1 du + B_1 dv$$

und nach den eben dort gegebenen Werthen von A_1, A_2, etc.

$$dp_0 \cos\alpha_0 = -\frac{\mathfrak{e} + \mathfrak{f}' t_2}{V_2} du - \frac{\mathfrak{f} + \mathfrak{g} t_2}{V_2} dv,$$

$$dp_0 \sin\alpha_0 = \frac{\mathfrak{e} + \mathfrak{f}' t_1}{V_1} du + \frac{\mathfrak{f} + \mathfrak{g} t_1}{V_1} dv;$$

also auch

$$dp \cos\alpha - dp_0 \cos\alpha_0 = -\frac{R(\mathbf{E} + \mathbf{F} t_2)}{V_2} du - \frac{R(\mathbf{F} + \mathbf{G} t_2)}{V_2} dv,$$

$$dp \sin\alpha - dp_0 \sin\alpha_0 = \frac{R(\mathbf{E} + \mathbf{F} t_1)}{V_1} du + \frac{R(\mathbf{F} + \mathbf{G} t_1)}{V_1} dv,$$

und daher

$$du = \frac{dp \sin\alpha - dp_0 \sin\alpha_0}{R V_1} - \frac{dp \cos\alpha - dp_0 \cos\alpha_0}{R V_2},$$

$$dv = \frac{(dp \sin\alpha - dp_0 \sin\alpha_0)\, t_1}{R V_1} - \frac{(dp \cos\alpha - dp_0 \cos\alpha_0)\, t_2}{R V_2}.$$

Durch Einführung dieser Werthe in die vorher für

$$dp_0 \cos\alpha_0, \quad dp_0 \sin\alpha_0$$

gefundenen Ausdrücke und durch Reduction erhält man dann

$$R\, dp_0 \cos\alpha_0 = -r_2 (dp \cos\alpha - dp_0 \cos\alpha_0) + \left(\frac{\mathfrak{f} - \mathfrak{f}'}{2\Delta}\right)(dp \sin\alpha - dp_0 \sin\alpha^0),$$

$$R\, dp_0 \sin\alpha_0 = -\left(\frac{\mathfrak{f} - \mathfrak{f}'}{2\Delta}\right)(dp \cos\alpha - dp_0 \cos\alpha_0) - r_1 (dp \sin\alpha - dp_0 \sin\alpha_0);$$

daraus

$$dp \cos\alpha = \left(1 - \frac{R r_1}{\varrho_1 \varrho_2}\right) dp_0 \cos\alpha_0 - \frac{R\sqrt{d^2 - \delta^2}}{\varrho_1 \varrho_2} dp_0 \sin\alpha_0,$$

$$dp \sin\alpha = \frac{R\sqrt{d^2 - \delta^2}}{\varrho_1 \varrho_2} dp_0 \cos\alpha_0 + \left(1 - \frac{R r_2}{\varrho_1 \varrho_2}\right) dp_0 \sin\alpha_0,$$

und

$$\tan\alpha = \frac{R\sqrt{d^2 - \delta^2} \cos\alpha_0 + (\varrho_1 \varrho_2 - R r_2) \sin\alpha_0}{(\varrho_1 \varrho_2 - R r_1) \cos\alpha_0 - R\sqrt{d^2 - \delta^2} \sin\alpha_0}.$$

Setzt man nun

$$\beta = \alpha - \alpha_0, \quad \alpha = \beta + \alpha_0,$$

so erhält man den Ausdruck des Drehungswinkels

$$\tan\beta = \frac{R(\sqrt{d^2 - \delta^2} - d \sin 2\alpha_0)}{\varrho_1 \varrho_2 - R(r_1 \cos^2\alpha_0 + r_2 \sin^2\alpha_0)}.$$

Daraus erkennt man den Werth $\tan\beta = 0$ als zugehörig den in den Focalebenen gelegenen Strahlen ($\alpha_0 = \omega_1$, $\alpha_0 = \omega_2$), was auch aus dem Begriff des Drehungswinkels selbst hervorgeht.

In den Strahlensystemen mit imaginären Brennflächen kann der Drehungswinkel für endliche Strecken nie Null werden, d. h. die Drehung der Strahlen kann ihren Sinn nicht ändern. Bei den Strahlensystemen mit imaginären Brennflächen hat man daher solche mit Rechtsdrehung von solchen mit Linksdrehung zu unterscheiden.

Für reelle Brennpunkte erhält man die Drehungswinkel β_1, β_2 vom Ausgangspunkte bis zu den Brennpunkten für die Substitutionen

$$R = \varrho_1, \quad R = \varrho_2$$

und mittels der Relation

$$r_1 \cos^2\alpha_0 + r_2 \sin^2\alpha_0 = M - d\cos 2\alpha_0$$

$$\tan\beta_1 = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0}{\delta + d\cos 2\alpha_0},$$

$$\tan\beta_2 = \frac{\sqrt{d^2-\delta^2} - d\sin 2\alpha_0}{-\delta + d\cos 2\alpha_0},$$

d. i. nach den Formeln des Artikel 163

$$\tan\beta_1 = \tan(\omega_1 - \alpha_0), \quad \tan\beta_2 = \tan(\omega_2 - \alpha_0),$$

oder

$$\beta_2 - \beta_1 = \omega_2 - \omega_1 = \gamma,$$

d. h. die Drehungswinkel von einem Brennpunkte eines Strahls bis zum andern Brennpunkte desselben haben für alle unendlich nahen Strahlen denselben Werth, dem Neigungswinkel der Focalebenen gleich.

Man leitet ferner aus dem allgemeinen Werthe von $\tan\beta$ den Ausdruck der Abscisse ab

$$R = \frac{\varrho_1\varrho_2\sin\beta}{M\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d\sin(2\alpha_0+\beta)}$$

und erkennt, dass für constantes β den Grenzen

$$\sin(2\alpha_0+\beta) = \pm 1, \quad \alpha_0 = \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\beta, \quad \alpha_0 = \tfrac{3}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\beta$$

der grösste Werth R_1 und der kleinste Werth R_2 der Abscisse erhalten werden, nämlich

$$R_1 = \frac{\varrho_1\varrho_2 \sin\beta}{M\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta - d},$$

$$R_2 = \frac{\varrho_1\varrho_2 \sin\beta}{M\sin\beta + \sqrt{d^2-\delta^2}\cos\beta + d},$$

woraus sich durch Bestimmung von

$$\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) \text{ und } \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R}\right)$$

der Werth ergiebt

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi)}{R_1} + \frac{\sin^2(\alpha_0 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4}\pi)}{R_2};$$

speciell für

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha_0}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha_0}{R_2}.$$

Wenn man also von einem beliebigen Punkte eines Strahls ausgehend jeden unendlich nahen Strahl in der Länge nimmt, in welcher er mit diesem einen gegebenen constanten Drehungswinkel macht, so wird diese Länge jedes unendlich nahen Strahls aus der Länge des grössten und des kleinsten und aus dem Winkel, welchen die Richtung seines Ausgangspunktes mit der Richtung des Ausgangspunktes des grössten Strahls macht, durch die nämliche Gleichung bestimmt, wie der Krümmungshalbmesser eines Normalschnittes einer Fläche durch den grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser und durch den Winkel, den dieser Normalschnitt mit einem der Hauptschnitte macht — d. i. durch die Euler'sche Gleichung.

167. Von den Gleichungen des vorigen Artikels aus

$$dp\cos\alpha = \left(1 - \frac{Rr_1}{\varrho_1\varrho_2}\right) dp_0\cos\alpha_0 - \frac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}\, dp_0\sin\alpha_0,$$

$$dp\sin\alpha = \frac{R\sqrt{d^2-\delta^2}}{\varrho_1\varrho_2}\, dp_0\cos\alpha_0 + \left(1 - \frac{Rr_2}{\varrho_1\varrho_2}\right) dp_0\sin\alpha_0,$$

in denen dp und α als Polarcoordinaten der der Abscisse R entsprechenden Querschnittscurve des unendlich dünnen Strahlenbündels, dp_0, α_0 als die Coordinaten der dem Ausgangspunkte entsprechenden anzusehen sind, kann man zu rechtwinkligen Coordinaten übergehen, die auf die Hauptebenen des Strahls bezogen sind, durch die Substitutionen

$$dp \cos\alpha = x, \quad dp \sin\alpha = y,$$
$$dp_0 \cos\alpha_0 = x_0, \quad dp_0 \sin\alpha_0 = y_0$$

und erhält

$$x = \left(1 - \frac{Rr_1}{\varrho_1 \varrho_2}\right) x_0 - \frac{R\sqrt{d^2 - \delta^2}}{\varrho_1 \varrho_2} y_0,$$
$$y = \frac{R\sqrt{d^2 - \delta^2}}{\varrho_1 \varrho_2} x_0 + \left(1 - \frac{Rr_2}{\varrho_1 \varrho_2}\right) y_0,$$

mit entsprechenden Werthen von x_0, y_0. Die umgrenzenden Curven der Querschnitte eines unendlich dünnen Strahlenbündels sind somit Curven desselben Grades und stehen zu einander in der Beziehung der Collineation, als Elementartheile insbesondere in der specielleren der Affinität.*)

Die Querschnitte in den beiden Brennpunkten, für welche das Dichtigkeitsmaass unendlich gross war (Artikel 165), die also unendlich Kleine einer höhern Ordnung sein müssen, finden sich durch $R = \varrho_1$, $R = \varrho_2$ nach der dann eintretenden Identität der Gleichungen für x und y, ausgedrückt durch

$$y = x\sqrt{\frac{d-\delta}{d+\delta}}, \quad y = x\sqrt{\frac{d+\delta}{d-\delta}};$$

sie sind also unendlich kleine gerade Linien, die Brennlinien des Bündels.

Durch Rückgang zu den Polarcoordinaten zeigt man, dass sie in den Focalebenen gelegen sind. Ihre Längen können nur Null, d. h. in einer höhern als der ersten Ordnung unendlich klein sein, wenn $d = 0$, also auch $\delta = 0$ ist; oder für $r_2 = r_1$, $\varrho_2 = \varrho_1$, d. h. wenn die Grenzpunkte der kürzesten Abstände und die Brennpunkte mit dem Mittelpunkte zusammen fallen. Man nennt solche Strahlen Hauptstrahlen und sieht, dass sie nur da statt haben, wo die Grenzflächen und mit ihnen zugleich die Brennflächen gemeinschaftliche Punkte haben. Es giebt nur ein Strahlensystem aus lauter Hauptstrahlen, bei welchem sämmtliche Strahlen durch einen Punkt gehen. Es giebt aber unendlich viele Strahlensysteme, deren Hauptstrahlen

---

*) Ein System von Geraden, deren jede zwei nicht in derselben Ebene liegende Gerade trifft, schneidet je zwei zu diesen Geraden zugleich parallele Ebenen in zwei affinen Systemen von Punkten.

eine Fläche der Hauptstrahlen bilden und unendlich viele solche, welche isolierte Hauptstrahlen haben; von jener Art ist das System der gemeinschaftlichen Tangenten zweier confocaler Flächen zweiten Grades, seine Hauptstrahlen sind die Tangenten der Durchschnittscurve beider Flächen. Im Allgemeinen aber hat ein Strahlensystem keine Hauptstrahlen, weil die Unbestimmtheit der Hauptebenen nach Artikel 162 den beiden unabhängigen Veränderlichen u und v die für zwei zählenden Bedingungen

$$\mathbf{g}\mathbf{F} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{f} + \mathbf{f}')\,\mathbf{G} = 0,\quad \mathbf{e}\mathbf{G} - \mathbf{g}\mathbf{E} = 0,\quad \tfrac{1}{2}(\mathbf{f} + \mathbf{f}')\,\mathbf{E} - \mathbf{e}\mathbf{F} = 0$$

und dazu wegen $\delta = 0$ die dritte Bedingung

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}'$$

auferlegt.

Mit grosser Einfachheit hat neuestens Möbius in einer in den Berichten der „Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig“, Mathemat. phys. Klasse im XIV. Bande abgedruckten Abhandlung, die Eigenschaften unendlich dünner Strahlenbündel aus der a priori nothwendigen Affinität ihrer Querschnitte abgeleitet und dabei einige neue Resultate erhalten.

168. Es bleibt übrig, die Zusammenhänge dieser Lehren mit der Theorie der Krümmung der Flächen näher zu bezeichnen, an die schon einzelne Ergebnisse erinnert haben.

Wenn es eine Fläche giebt, für welche jeder durch

$$x,\ y,\ z,\ l,\ m,\ n$$

bestimmte Strahl eine Normale (im Punkte x', y', z) ist, so hat man

$$x' = x + rl,\quad y' = y + rm,\quad z' = z + rn,$$
$$l\,dx' + m\,dy' + n\,dz' = 0;$$

also

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz + dr\,(l^2 + m^2 + n^2) + r\,(l\,dl + m\,dm + n\,dn) = 0,$$

und somit

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = -\,dr,$$

d. i.

$$(la + mb + nc)\,du + (la' + mb' + nc')\,dv = -\,dr.$$

Die linke Seite dieser Gleichung muss also ein vollständiges Differential einer Function $-r$ von u und v sein, oder

$$\frac{\partial\,(la + mb + nc)}{\partial v} = \frac{\partial\,(la' + mb' + nc)}{\partial u},$$

und somit wegen

$$\frac{\partial a}{dv}=\frac{\partial a'}{du},\ \frac{\partial b}{dv}=\frac{\partial b'}{du},\ \frac{\partial c}{dv}=\frac{\partial c'}{du},$$

$$a\mathfrak{a}'+b\mathfrak{b}'+c\mathfrak{c}'=a'\mathfrak{a}+b'\mathfrak{b}+c'\mathfrak{c},$$

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{f}'$$

eine Identität sein. Diese Bedingung ist nöthig und hinreichend, damit die Strahlen des Systems Normalen einer Fläche sind.

Wenn sie erfüllt ist, so werden die quadratischen Gleichungen der Artikel 161 und 163 von den Wurzeln

$$\tau_1,\ \tau_2\quad\text{und}\quad t_1,\ t_2$$

und ebenso die derselben Artikel von den Wurzeln

$$\varrho_1,\ \varrho_2\quad\text{und}\quad r_1,\ r_2$$

mit einander identisch: Die Focalebenen eines Strahls fallen mit den Hauptebenen, die Brennpunkte mit den Grenzpunkten der kürzesten Abstände zusammen. Für eine der Flächen, deren Normalen die Strahlen des Systems sind, sind die Grenz- und Brennpunkte die beiden Hauptkrümmungscentra und die Theorie der Krümmung ist also ein specieller Fall der Theorie der Strahlensysteme, ohne dass jedoch ihren Lehren wesentlich neue Ergebnisse anzuschliessen wären.

Die Existenz der Brennlinien kann so ausgesprochen werden: Die beiden Hauptnormalebenen eines Punktes einer Fläche werden von allen diesem Punkte unendlich nahen Normalen derselben so geschnitten, dass die Entfernungen der Schnittpunkte vom gegebenen Punkte der Fläche in der einen Hauptebene gleich dem grössten, in der andern gleich dem kleinsten Krümmungshalbmesser sind.

Aber die Sätze der Theorie der Krümmung sind in der allgemeineren Theorie enthalten. Den Hauptnormalschnitten in einem Flächenpunkte entsprechen die Hauptebenen und die Focalebenen des unendlich dünnen Strahlenbündels; von ihren Eigenschaften erhalten jene die beiden, stets reell und zu einander normal zu sein, diese die andere, die schneidenden unendlich nahen Strahlen zu enthalten. Den Hauptkrümmungsmittelpunkten entsprechen die Grenzpunkte und die Brennpunkte des unendlich dünnen Bündels und ihren Flächen die Flächen F_1, F_2, Φ_1, Φ_2; die Grenzflächen erhalten die in ihrem Namen ausgesprochene Eigenschaft; die Brennflächen die Eigenschaft, von allen Strahlen des Systems tangiert zu werden. Die beiden schönen Eigenschaften der Flächen der Hauptkrümmungscentra, dass ihre Umrisse sich stets rechtwinklig schneiden, von welchem Punkte des Raumes man sie auch betrachten mag und dass die Rückkehrcurven der abwickelbaren Flächen, in welche die Normalen sich zusammen fassen lassen, geodätische Linien auf den Flächen der Hauptkrümmungsmittelpunkte sind, gehören dem System der Normalen einer Fläche speciell an und fehlen in der allgemeinen Theorie. Die Schaaren von Flächen O_1, O_2, Ω_1, Ω_2 fallen mit den Flächen der Normalen der Krümmungslinien zusammen. Die Normalen der Kreis- oder Nabelpunkte sind Hauptstrahlen des Systems. Die Euler'sche Gleichung ist für

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \quad r_1 = \varrho_1, \quad r_2 = \varrho_2$$

in der allgemeinen Gleichung des Artikels 166 enthalten. Die dort geführte Untersuchung liefert ferner für die Theorie der Krümmung den Satz: Wenn man an zwei unendlich nahen Punkten einer Fläche die Normalen zieht und ihnen die bestimmte Länge giebt, in welcher ihr Drehungswinkel gleich einem Rechten ist, so stellen sie die Krümmungshalbmesser der Fläche in den beiden unendlich nahen Punkten für den durch sie gehenden Normalschnitt dar. Man sieht endlich, dass der Ausdruck des Dichtigkeitsmaasses im Artikel 165 auf das Gauss'sche Krümmungsmaass zurück kommt.

III. Kapitel.

Familien von Flächen.

169. Wenn die Gleichungen einer Curve

$$\Phi\,(x,\, y,\, z,\, c_1,\, c_2,\, \ldots\, c_n) = 0,$$
$$\Psi\,(x,\, y,\, z,\, c_1,\, c_2,\, \ldots\, c_n) = 0$$

n Parameter oder unbestimmte Constanten enthalten, so wird die Curve vollständig bestimmt, wenn n durch diese Parameter zu erfüllende Gleichungen gegeben sind. Wenn dagegen nur $(n-1)$ Gleichungen zur Bestimmung der n Parameter gegeben sind, so können die obigen Gleichungen unendlich viele Curven gleichmässig repräsentieren, und die Vereinigung aller dieser Curven bestimmt eine Fläche, deren Gleichung durch Elimination der n Parameter zwischen den $(n+1)$ gegebenen Gleichungen — nämlich den $(n-1)$ Relationen und den zwei Gleichungen der Curve — gefunden wird. Wenn z. B. die beiden obigen Gleichungen eine veränderliche Curve bezeichnen, deren Bewegung durch die Bedingung bestimmt ist, dass sie $(n-1)$ feste Leitcurven stets durchschneidet, so ist die Bestimmung der erzeugten Fläche ein Problem der gedachten Art. Denn durch Elimination der Veränderlichen x, y, z zwischen den zwei Gleichungen der veränderlichen Curve und den beiden Gleichungen einer der Leitcurven drücken wir die Bedingung aus, unter welcher diese Curven sich schneiden und erhalten damit eine Relation zwischen den n Parametern; mit $(n-1)$ Relationen dieser Art erhalten wir die Gleichungen der erzeugten Fläche in der angegebenen Art.

Wir haben im I. Bande Artikel 109 f. einen speciellen Fall dieser allgemeinen Aufgabe behandelt.

Flächen, für welche die Form der Functionen Φ und Ψ die nämliche ist, werden als von derselben Familie bezeichnet, wenn auch die die Parameter verbindenden Gleichungen verschieden sind; d. i. wenn z. B. dieselbe veränderliche Curve mit verschiedenen Reihen von Leitcurven verbunden wird, so sind alle so zu erzeugenden Flächen als zu derselben Familie gehörig anzusehen.

In verschiedenen wichtigen Fällen können die Gleichungen aller zu derselben Familie gehörigen Flächen in eine einzige Gleichung vereinigt werden, welche eine willkürliche Function oder mehrere solche Functionen enthält; die Gleichung jeder individuellen Fläche der Familie wird dann durch Specialisierung der Form dieser Functionen erhalten.

Wenn wir dieselben durch Differentiation eliminieren, so erhalten wir eine partielle Differentialgleichung, die allen Flächen der Familie gemeinsam angehört und gewöhnlich der Ausdruck irgend einer geometrischen, allen Flächen der Familie gemeinsamen Eigenschaft ist; sie leitet directer als die Functionalgleichung zur Lösung für einige Klassen von Aufgaben.

170. Es ist der einfachste Fall, wenn die Gleichungen der veränderlichen Curve zwei Constanten einschliessen. Denn wenn sie nur eine Constante enthielten, so würde die Elimination derselben die Gleichung einer bestimmten Fläche, aber nicht die einer Flächenfamilie liefern.

Wenn man nach einander für jede dieser Constanten auflöst, so bringt man die beiden gegebenen Gleichungen in die Form

$$u = c_1, \quad v = c_2,$$

wo u und v bekannte Functionen von x, y, z sind.

Wenn diese Curve eine Fläche erzeugen soll, so müssen die c_1, c_2 durch eine gegebene Relation verknüpft sein, die von der Form

$$c_1 = \Phi\,(c_2)$$

sein wird; indem man für c_1 und c_2 ihre Werthe setzt, erkennt man, dass die allgemeine Gleichung der erzeugten Fläche von der Form

$$u = \Phi\,(v)$$

ist.

Wir können in diesem Falle auch leicht die partielle Differentialgleichung bilden, welcher von allen Flächen der Familie genügt werden muss. Denn wenn $U = 0$ eine Fläche der Familie darstellt, so kann U nur durch einen constanten Factor von $u - \Phi(v)$ verschieden sein, d. h. man hat

$$\lambda U = u - \Phi(v)$$

und durch Differentiation

$$\lambda \frac{dU}{dx} = \frac{du}{dx} - \Phi'(v)\frac{dv}{dx},$$

nebst zwei analogen Gleichungen für die Differentiale nach y und z.

Durch Elimination von λ und $\Phi'(v)$ erhält man dann die partielle Differentialgleichung in der Determinantenform

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \\ v_1, & v_2, & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher zur Abkürzung $U_1, U_2, U_3, \ldots$ für

$$\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}, \ldots$$

gesetzt sind. In diesem Falle sind u und v als bekannte Functionen der Coordinaten vorausgesetzt und die eben geschriebene Gleichung begründet eine Relation ersten Grades zwischen den Differentialen $\frac{dU}{dx}, \frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dz}$.

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$z - \Phi(x, y) = 0$$

geschrieben wurde, so wäre

$$\frac{dU}{dz} = 1, \quad \frac{dU}{dx} = -p, \quad \frac{dU}{dy} = -q,$$

nach den schon wiederholt bezeichneten Bedeutungen von p und q, und die partielle Differentialgleichung der Familie wäre von der Form

$$Pp + Qq = R,$$

wo P, Q, R bekannte Functionen der Coordinaten sind.

Und umgekehrt repräsentiert das Integral einer solchen partiellen Differentialgleichung,*) welches von der Form

---

*) Vgl. George Boole, „A Treatise on differential Equations“ — Cambridge 1859 — Kapitel XIV, insbesondere p. 322 f.

$$u = \Phi(v)$$

ist, geometrisch eine Fläche, welche durch die Bewegung einer Curve von den Gleichungen

$$u = c_1, \quad v = c_2$$

erzeugt wird.

Die partielle Differentialgleichung bietet das einfachste Mittel dar, um zu prüfen, ob eine gegebene Fläche zu einer bestimmten Familie gehöre. Wir haben nur die aus der Gleichung der Fläche hervorgehenden Werthe von U_1, U_2, U_3 darauf zu prüfen, ob sie die partielle Differentialgleichung der Familie identisch erfüllen; geschieht diess, so gehört auch die betrachtete Fläche dieser Familie an.

171. Wenn gefordert ist, eine specielle Fläche der gegebenen Familie

$$u = \Phi(v)$$

durch die Bedingung zu bestimmen, dass dieselbe eine gegebene Curve enthalte, so kann die Form der Function in diesem Falle gefunden werden, indem man die Gleichungen

$$u = c_1, \quad v = c_2$$

bildet und zwischen diesen und denen der festen Curve die Grössen x, y, z eliminiert; man erhält eine Relation zwischen c_1 und c_2 oder zwischen u und v, welche die Gleichung der verlangten Fläche ist. Die geometrische Bedeutung dieses Verfahrens besteht darin, dass wir die Bewegung einer veränderlichen Curve

$$u = c_1, \quad v = c_2$$

durch die Bedingung vorschreiben, dass sie die gegebene feste Curve immer durchschneidet. Dann sind alle Punkte der letzteren auch Punkte der erzeugten Fläche.

172. Ist gefordert, eine Fläche der Familie

$$u = \Phi(v)$$

so zu bestimmen, dass sie eine gegebene Fläche umhülle, so wissen wir, dass in jedem Punkte der Berührungscurve die

$$U_1, \; U_2, \; U_3, \text{ etc.}$$

dieselben Werthe für die feste und die umhüllende Fläche besitzen. Wenn wir also in die partielle Differentialgleichung der gegebenen Familie für U_1, U_2, U_3 ihre aus der Gleichung der festen Fläche bestimmten Werthe substituieren, so erhalten wir eine Gleichung, welche für jeden Punkt der Berührungscurve erfüllt sein muss und welche daher in Verbindung mit der Gleichung der festen Fläche diese Curve bestimmt. Das Problem ist damit auf das Vorhergehende zurückgeführt, welches eine Fläche der gegebenen Familie durch eine gegebene Curve zu legen verlangt.

Diese Theorie wird besser verstanden werden durch die folgende Betrachtung der Beispiele der wichtigsten Flächenfamilien der hier besprochenen Klasse, d. h. derjenigen, deren Gleichungen in der Form

$$u = \Phi\,(v)$$

ausgedrückt werden können.

173. Cylindrische Flächen. Eine cylindrische Fläche wird durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, wenn dieselbe ohne Richtungsänderung fortschreitet. Da die Gleichungen einer geraden Linie vier unabhängige Constanten enthalten, und die Bestimmung der Richtung zwei dieser Constanten feststellt, so bleiben nur die zwei übrigen unbestimmt und die Familie der cylindrischen Flächen gehört zu der Klasse von Flächen, welche in den letzten zwei Artikeln betrachtet wurden.

Wenn die Gleichungen der geraden Linie in der Form

$$x = lz + p, \quad y = mz + q$$

gegeben sind, so dass l und m, welche die Richtung bestimmen, gegeben sind, und wenn die Bewegung der Geraden durch irgend eine Bedingung geregelt ist — wie dass sie sich längs einer gewissen festen Curve bewege oder eine feste Fläche berühre — so begründet diess eine Relation zwischen p und q und die Gleichung der Fläche wird in der Form

$$x - lz = \Phi\,(y - mz)$$

erhalten.

Wenn allgemeiner die erzeugende gerade Linie der Durchschnittslinie der beiden Ebenen

$$ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0$$

parallel bleiben soll, so dass ihre Gleichungen von der Form

$$ax + by + cz = \alpha, \quad a'x + b'y + c'z = \beta$$

sind, so wird die Gleichung der erzeugten Fläche in der Form

$$ax + by + cz = \Phi\,(a'x + b'y + c'z)$$

erhalten.

Indem wir in die Gleichung des Artikel 171 für u und v die Werthe

$$ax + by + cz \quad \text{und} \quad a'x + b'y + c'z$$

einführen, erhalten wir die partielle Differentialgleichung der Cylinderflächen

$$(bc' - b'c)\, U_1 + (ca' - c'a)\, U_2 + (ab' - a'b)\, U_3 = 0,$$

oder nach der dritten Aufgabe des Artikel 41 im I. Bande

$$U_1 \cos\alpha + U_2 \cos\beta + U_3 \cos\gamma = 0,$$

wenn α, β, γ die Richtungswinkel der erzeugenden Geraden sind.

Wenn wir erinnern, dass U_1, U_2, U_3 den Richtungscosinus der Normale der Fläche proportional sind, so erkennt man, dass die geometrische Bedeutung dieser Gleichung darin besteht, dass die Tangentenebene der Fläche die Richtung der erzeugenden Geraden immer enthält.

Die Hauptschnitte und zugleich die Krümmungslinien in jedem Punkte einer Cylinderfläche sind der Normalschnitt und die Erzeugende; die eine der Hauptkrümmungen ist gleich Null.

Beispiel 1. Man soll die Gleichung des Cylinders bestimmen, dessen Erzeugende parallel zu

$$x = lz, \quad y = mz$$

sind und welcher die ebene Curve

$$z = 0, \quad \Phi(x, y) = 0$$

zur Leitcurve hat.

Auflösung.

$$\Phi(x - lz, \quad y - mz) = 0.$$

Beispiel 2. Man soll die Gleichung des Cylinders bestimmen, dessen Erzeugende zur Durchschnittslinie von

$$ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0$$

parallel ist und die Schnittlinie von

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta, \quad F(x, y, z) = 0$$

zur Leitcurve hat.

Man löse die Gleichungen

$$ax + by + cz = u, \; a'x + b'y + c'z = v, \; \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

für x, y, z auf und substituiere die erhaltenen Werthe in die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0.$$

Beispiel 3. Die Gleichung des Cylinders zu bestimmen, dessen Erzeugende die Richtungscosinus l, m, n haben und dessen Leitcurve die

Durchschnittslinie der Flächen

$$U = 0, \quad V = 0$$

ist.

Die Elimination kann zweckmässig folgendermassen vollzogen werden: Wenn x', y', z' die Coordinaten des Punktes sind, in dem eine Erzeugende des Cylinders die Leitcurve schneidet, während x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes derselben Erzeugenden sind, so gelten die Relationen

$$\frac{x - x'}{l} = \frac{y - y'}{m} = \frac{z - z'}{n},$$

und wenn θ den gemeinsamen Werth dieser Quotienten bezeichnet, so ist

$$x' = x - l\theta, \quad y' = y - m\theta, \quad z' = z - n\theta.$$

Durch die Substitution dieser Werthe in die Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0,$$

denen die x', y', z' genügen müssen, erhält man zwei Gleichungen, zwischen welchen θ eliminiert werden kann. Die Resultante ist die Gleichung des Cylinders.

Beispiel 4. Den Cylinder zu bestimmen, dessen Erzeugenden die Richtungscosinus l, m, n entsprechen und welcher die Fläche zweiter Ordnung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$$

umhüllt.

Nach der partiellen Differentialgleichung ist die Berührungscurve der Durchschnitt der Fläche mit der Ebene

$$Alx + Bmy + Cnz = 0.$$

Indem man dann wie im letzten Beispiel verfährt, erhält man die Gleichung des Cylinders in der Form

$$(Al^2 + Bm^2 + Cn^2)\,(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1) = (Alx + Bmy + Cnz)^2.$$

Allgemein für die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung

$$\Phi\,(x, y, z) = 0, \quad (u = 0)$$

und die Richtungscosinus l, m, n ist die Gleichung des umhüllenden Cylinders durch

$$2u\left\{l^2\frac{d^2u}{dx^2} + m^2\frac{d^2u}{dy^2} + n^2\frac{d^2u}{dz^2} + 2lm\frac{d^2u}{dx\,dy} + 2mn\frac{d^2u}{dy\,dz}\right.$$
$$\left. + 2nl\frac{d^2u}{dzdx}\right\} = \left\{l\frac{du}{dx} + m\frac{du}{dy} + n\frac{du}{dz}\right\}^2$$

gegeben.

174. Conische oder Kegelflächen. Kegelflächen werden erzeugt durch die Bewegung einer geraden Linie, welche stets durch einen festen Punkt geht. Indem wir ausdrücken, dass die Coordinaten dieses Punktes den Gleichungen der geraden Linie genügen, erhalten wir zwei Relationen zwischen den vier Constanten der allgemeinen Gleichungen der geraden Linie. Da somit die Gleichungen der erzeugenden Linie nur zwei unbestimmte Constanten enthalten, so ist das Problem von der im Artikel 170 discutierten Klasse.

Seien die Gleichungen der erzeugenden Linie

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n},$$

wo α, β, γ die bekannten Coordinaten des Scheitels des Kegels und l, m, n den Richtungscosinus der erzeugenden Geraden proportional sind; so enthalten diese Gleichungen, obwohl dem Scheine nach drei, in Wahrheit nur zwei unbestimmte Constanten, weil sie nur die Verhältnisse der Grössen l, m, n bestimmen.

Schreiben wir die Gleichungen in der Form

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = \frac{l}{n}, \quad \frac{y-\beta}{z-\gamma} = \frac{m}{n},$$

so sehen wir, dass die Bedingungen des Problems eine Relation zwischen $\frac{l}{n}$ und $\frac{m}{n}$ begründen müssen und dass daher die Gleichung des Kegels von der Form

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = \Phi\left(\frac{y-\beta}{z-\gamma}\right)$$

sein wird.

Man erkennt leicht, dass diess gleichbedeutend ist damit, dass die Gleichung des Kegels eine homogene Function der drei Grössen

$$x-\alpha, \quad y-\beta, \quad z-\gamma$$

sei; man kann diess auch direct aus der Bemerkung schliessen, dass die Bedingungen des Problems eine Relation zwischen den Richtungscosinus der Generatrix begründen müssen und dass eine solche, da diese Cosinus durch

$$\frac{l}{\sqrt{(l^2 + m^2, n^2)}}, \text{ etc.}$$

ausgedrückt sind, nothwendig eine homogene Function von l, m, n und daher von den zu ihnen proportionalen Grössen

$$x-\alpha, \quad y-\beta, \quad z-\gamma$$

sein wird.

Wenn der Scheitel des Kegels im Anfangspunkt der Coordinaten liegt, so ist seine Gleichung von der Form

$$\frac{x}{z} = \Phi\left(\frac{y}{z}\right),$$

oder sie ist eine homogene Function von x, y, z.

Die partielle Differentialgleichung wird gefunden, indem man in die Gleichung des Artikels 170

$$u = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \quad v = \frac{y-\beta}{z-\gamma}$$

substituiert und ist daher von Brüchen befreit

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ z-\gamma, & 0, & -(x-\alpha) \\ 0, & (z-\gamma), & -(y-\beta) \end{vmatrix} = 0$$

oder $\quad (x-\alpha)\dfrac{dU}{dx} + (y-\beta)\dfrac{dU}{dy} + (z-\gamma)\dfrac{dU}{dz} = 0.$

Sie drückt offenbar aus, dass die Tangentenebene in jedem Punkte der Fläche durch den festen Punkt (α, β, γ) gehen muss.

Im Artikel 117 (Beispiel 12) des ersten Bandes ist die Methode zur Bildung des über einer gegebenen Curve stehenden Kegels und im Artikel 16 dieses Bandes die zur Bildung der Gleichung desjenigen Kegels gegeben, welcher eine gegebene Fläche umhüllt.

Die Hauptschnitte einer Kegelfläche sind die Erzeugende des Punktes und der zu ihr normale Querschnitt. Die Krümmungslinien sind die Erzeugenden und ihre orthogonalen Trajectorien.

Beispiel. Für die Gleichung der Fläche zweiter Ordnung

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

ist die Gleichung des umhüllenden Kegels vom Scheitel (α, β, γ) für die Bezeichnung

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma) = u$$

$$\begin{aligned} 2u\Big\{&(x-\alpha)^2\frac{d^2u}{d\alpha^2} + (y-\beta)^2\frac{d^2u}{d\beta^2} + (z-\gamma)^2\frac{d^2u}{d\gamma^2} \\ &+ 2(x-\alpha)(y-\beta)\frac{d^2u}{d\alpha\, d\beta} + 2(y-\beta)(z-\gamma)\frac{d^2u}{d\beta\, d\gamma} \\ &+ 2(z-\gamma)(x-\alpha)\frac{d^2u}{d\gamma\, d\alpha}\Big\} \\ = \Big\{&(x-\alpha)\frac{du}{d\alpha} + (y-\beta)\frac{du}{d\beta} + (z-\gamma)\frac{du}{d\gamma}\Big\}^2. \end{aligned}$$

175. Conoidflächen. Dieselben werden durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, die eine feste Achse stets schneidet und zu einer festen Ebene immer parallel bleibt. Diese Bedingungen lassen zwei von den vier Constanten in den allgemeinen Gleichungen der Geraden unbestimmt und diese Flächen gehören daher zu der im Artikel 170 betrachteten Klasse.

Wenn die Achse die Durchschnittslinie der Ebenen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

ist und die Erzeugende der Ebene

$$\gamma = 0$$

parallel bleibt, so sind die Gleichungen der Erzeugenden

$$\alpha = c_1 \beta, \quad \gamma = c_2$$

und die allgemeine Gleichung der Conoidflächen ist offenbar

$$\frac{\alpha}{\beta} = \Phi(\gamma).$$

In derselben Art findet man die allgemeine Gleichung der Flächen, welche durch die Bewegung einer Geraden längs zweier festen geraden Linien

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

entstehen, in der Form

$$\frac{\alpha}{\beta} = \Phi\left(\frac{\gamma}{\delta}\right).$$

Die partielle Differentialgleichung der Conoidflächen ist nach Artikel 170

$$\begin{vmatrix} U_1 \quad , & U_2 \quad , & U_3 \\ \beta\alpha_1 - \beta_1\alpha, & \beta\alpha_2 - \beta_2\alpha, & \beta\alpha_3 - \beta_3\alpha \\ \gamma_1 \quad , & \gamma_2 \quad , & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0,$$

wo

$$\alpha = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4, \text{ etc.}$$

sind. Wir bemerken, dass die linke Seite dieser Gleichung als die Differenz zweier Determinanten darstellbar ist, so dass sie wird

$$\beta\,(U_1 \alpha_2 \gamma_3) - \alpha\,(U_1 \beta_2 \gamma_3) = 0.$$

Diese Gleichung kann auch direct abgeleitet werden, indem man ausdrückt, dass die Tangentenebene in irgend einem Punkte der Fläche die Erzeugende enthält, so dass die Tangentenebene

16*

eines Punktes der Fläche, die durch ihn gehende Parallelebene zur Directorebene und die durch ihn und die Achse gelegte Ebene

$$\alpha'\beta - \alpha\beta' = 0$$

eine gemeinschaftliche Durchschnittslinie haben. Die Elemente der oben geschriebenen Determinante sind die Coefficienten von x, y, z in den Gleichungen dieser drei Ebenen. Diejenigen Conoide, welchen man in den Anwendungen am häufigsten begegnet, sind gerade, d. h. die feste Achse oder Directrix ist normal zur festen Directorebene.

Wenn man für diesen Fall die Directrix als Achse z und die Directorebene als Ebene xy wählt, so wird die Functionalgleichung der Fläche

$$y = x\Phi(z)$$

und ihre partielle Differentialgleichung

$$x\frac{dU}{dx} + y\frac{dU}{dy} = 0.$$

Die Linien grösster Neigung werden in diesem Falle in Kreisen projiciert; denn in Folge der eben geschriebenen partiellen Differentialgleichung wird die Gleichung des Artikels 146

$$\frac{dU}{dy}dx - \frac{dU}{dx}dy = 0$$

in die Form

$$xdx + ydy = 0$$

gebracht, welche eine Reihe concentrische Kreise repräsentiert.

Das Nämliche erkennt man auch geometrisch, denn die Niveaulinien sind die Erzeugenden des Systems und da sie in eine Reihe von Strahlen aus dem Anfangspunkt projiciert werden, so sind sie durch die Reihe concentrischer Kreise orthogonal geschnitten.

Beispiel 1. Die Gleichung des geraden Conoids zu finden, welches durch die Achse der z und durch eine ebene Curve von den Gleichungen

$$x = a, \quad F(y, z) = 0$$

bestimmt ist.

Indem wir x, y, z zwischen diesen Gleichungen und

$$y = c_1 x_1, \quad z = c_2$$

eliminieren, erhalten wir

$$F(c_1 a, c_2) = 0$$

oder die verlangte Gleichung

$$F\left(\frac{ay}{x}, z\right) = 0.$$

Ist die feste Curve ein Kreis

$$x = a, \quad y^2 + z^2 = r^2,$$

so ist die Gleichung der Fläche (Cono-cuneus von Wallis)

$$a^2y^2 + x^2z^2 = r^2x^2.$$

Sie liegt zwischen den Ebenen

$$z = \pm r,$$

ihre Tangentenebene

$$\zeta x^2 z + \eta a^2 y - (r^2 - z^2)\, x\xi = x^2z^2,$$

schneidet die Fläche in einer Erzeugenden und einer Curve dritter Ordnung.

Da die ersten Differentiale derselben für $x = y = 0$ unabhängig von z verschwinden, so ist die Achse der z eine singuläre Linie in dieser Fläche. Der Tangentenkegel eines in ihr gelegenen Punktes wird nach den Werthen der zweiten Differentialquotienten durch

$$a^2y'^2 - (c^2 - z^2)\, x'^2 = 0$$

dargestellt, d. h. er degeneriert in ein Ebenenpaar.

Beispiel 2. Sei die Leitcurve eine Schraubenlinie und die gerade Directrix die Achse ihres Cylinders. Das gerade Conoid ist die untere Fläche einer Wendeltreppe oder es bildet die flachgängige Schraube. Seine Gleichung ist im 1. Beispiel des Artikel 109 gegeben.

176. Umdrehungsflächen. Es ist die Fundamentaleigenschaft einer Umdrehungsfläche, dass jeder zu ihrer Achse normale ebene Querschnitt ein Kreis ist, dessen Centrum in der Achse liegt, oder aus mehreren solchen Kreisen besteht (Parallelkreise). In Folge dessen kann man eine solche Fläche betrachten als erzeugt durch die Bewegung eines Kreises von veränderlichem Halbmesser, dessen Centrum eine feste gerade Linie (Achse) durchläuft, während seine Ebene stets zu ihr normal bleibt.

Sind

$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}$$

die Gleichungen der Achse, so kann der erzeugende Kreis in irgend einer seiner Lagen dargestellt werden als der Durchschnitt der zur Achse normalen Ebene

$$lx + my + nz = c_1$$

mit der aus irgend einem festen Punkte der Achse beschriebenen

Kugel

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=c_2.$$

Da diese Gleichungen zwei unbestimmte Constanten enthalten, so ist das Problem von der im Artikel 170 betrachteten Klasse und die Gleichung der Fläche muss von der Form sein

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\Phi(lx+my+nz).$$

Ist die Achse der z die Umdrehungsachse und wählen wir den Anfangspunkt der Coordinaten als den Punkt (α, β, γ), so wird diese Gleichung in die Form

$$x^2+y^2+z^2=\Phi(z), \quad \text{oder} \quad z=\Psi(x^2+y^2)$$

übergeführt.

Die partielle Differentialgleichung ist nach der Formel des Artikel 170

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ l, & m, & n \\ x-\alpha, & y-\beta, & z-\gamma \end{vmatrix}=0,$$

oder

$$\{m(z-\gamma)-n(y-\beta)\}\frac{dU}{dx}+\{n(x-\alpha)-l(z-\gamma)\}\frac{dU}{dy}$$
$$+\{l(y-\beta)-m(x-\alpha)\}\frac{dU}{dz}=0,$$

und für die Achse der z als Umdrehungsachse

$$y\frac{dU}{dx}-x\frac{dU}{dy}=0.$$

Sie drückt aus, dass die Normale der Fläche stets die Achse derselben durchschneidet. Denn wenn wir die Bedingung ausdrücken wollten, unter welcher die beiden Geraden

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n},$$
$$\frac{x-x'}{U_1}=\frac{y-y'}{U_2}=\frac{z-z'}{U_3}$$

sich durchschneiden, so können wir die gemeinschaftlichen Werthe dieser Brüche respective durch θ, θ' bezeichnen. Indem wir aber für x, y, z auflösen und die aus den Gleichungen jeder von beiden Geraden erhaltenen Werthe einander gleich setzen, erhalten wir

$$\alpha+\theta l=x'+U_1\theta', \quad \beta+\theta m=y'+U_2\theta', \quad \gamma+\theta n=z'+U_3\theta'$$

und daraus durch Elimination von θ, θ' die Determinante

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ l, & m, & n \\ x'-\alpha, & y'-\beta, & z'-\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Die Krümmungslinien sind der Meridian und der Parallelkreis des Punktes; die Hauptkrümmungshalbmesser der Krümmungshalbmesser des Meridians und der von der Achse begrenzte Theil der Normale des Punktes.

177. Die Gleichung einer Fläche, welche durch die Umdrehung einer gegebenen Curve um eine feste Achse erzeugt wird, findet man nach Artikel 171 durch Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen

$$lx + my + nz = u, \quad (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = v,$$

und den beiden Gleichungen der Curve, indem man sodann u und v durch ihre Werthe ersetzt.

Wir haben ein Beispiel dieses Verfahrens im ersten Bande Artikel 117 gehabt und wählen als ein weiteres die Aufgabe: Die Gleichung der Fläche zu bestimmen, welche durch Umdrehung eines Kreises

$$y = 0, \quad (x - a)^2 + z^2 = r^2$$

um eine in seiner Ebene gelegene Achse z erzeugt wird.

Indem man

$$z = u, \quad x^2 + y^2 = v$$

setzt und zwischen diesen Gleichungen und denen des Kreises eliminiert, erhält man

$$\{\sqrt{v} - a\}^2 + u^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \{\sqrt{(x^2 + y^2)} - a\}^2 + z^2 = r^2,$$

oder von der Wurzelgrösse befreit (Artikel 30, Beispiel 1)

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2 (x^2 + y^2).$$

Die Fläche liegt zwischen den Ebenen

$$z = \pm r,$$

und man erkennt, dass ihre Gestalt verschieden ist für die Voraussetzungen

$$a \gtreqless r.$$

Wenn der rotierende Kreis die Achse nicht schneidet ($a > r$), so thut diess auch diess auch die Fläche selbst nicht, sie hat die Form eines Ringes, der die Achse frei umschliesst. Schneidet der Kreis die Achse, so erzeugen die Segmente, in welche er durch sie zerlegt wird, verschiedene Mäntel der Fläche, indem sie die Achse in Punkten

$$z = \sqrt{(r^2 - a^2)}$$

schneiden, welche Knotenpunkte der Fläche sind.

Die Schnitte der Ringfläche durch der Achse parallele Ebenen sind durch Einführung von

$$y = \text{const.}$$

in die vorige Gleichung ausgedrückt und ihre Gleichung kann sofort in die Form

$$SS' = \text{const.}$$

gebracht werden, wo

$$S = 0, \quad S' = 0$$

Kreise bezeichnen; es sind Lemniscaten verschiedener Art. Man erkennt geometrisch, dass die von der Achse sich entfernende Schnittebene zuerst die Fläche in zwei getrennten Ovalen, dann in dem Augenblicke, wo sie die Fläche berührt ($y = a - r$) in einer Curve mit einem Doppelpunkte, der Lemniscate von Bernouilli, weiterhin in einer einfach geschlossenen Curve schneidet.

Beispiel 1. Bestätige, dass

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = r^3$$

eine Umdrehungsfläche darstellt.

Die Achse derselben ist

$$x = y = z.$$

Beispiel 2. Welches ist die Gleichung einer Umdrehungsfläche, deren Achse die Achse z ist und welche das Rotationsellipsoid

$$\frac{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1$$

umhüllt?

Sie ist

$$\frac{\left\{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)} \mp \sqrt{(x^2+y^2)}\right\}^2}{a^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{c^2} = 1.$$

178. Man kann auch voraussetzen, dass die Punkte einer erzeugenden Curve sich auf Kreisen bewegen, deren Centra in einer festen Geraden liegen, die zu ihren Ebenen nicht normal, sondern unter einem constanten Winkel geneigt ist.

Sind dann l, m, n die Richtungscosinus der Achse, λ, μ, ν die der Kreisebenen, so gelten für r als den Halbmesser eines Kreises und e als den Abstand seines Centrums von einem festen Anfangspunkt (α, β, γ) in der Achse die Gleichungen

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - 2e\left\{l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)\right\},$$
$$\lambda(x-\alpha) + \mu(y-\beta) + \nu(z-\gamma) = e\,(l\lambda + m\mu + n\nu).$$

Aus ihnen erhält man durch Differentiation

$$\begin{aligned}(x-\alpha-el)\,dx + (y-\beta-em)\,dy + (z-\gamma-en)\,dz &= 0,\\ \lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz &= 0,\end{aligned}$$

so dass dx, dy, dz zu

$$\begin{aligned}&\mu\,(z-\gamma) - \nu\,(y-\beta) + e\,(m\nu - n\mu),\\ &\nu\,(x-\alpha) - \lambda\,(z-\gamma) + e\,(n\lambda - l\nu),\\ &\lambda\,(y-\beta) - \mu\,(x-\alpha) + e\,(l\mu - m\lambda)\end{aligned}$$

respective proportional sind und in

$$U_1 dx + U_2 dy + U_3 dz = 0,$$

unter Benutzung von

$$e = \frac{\lambda\,(x-\alpha) + \mu\,(y-\beta) + \nu\,(z-\gamma)}{l\lambda + m\mu + n\nu},$$

eingesetzt die Differentialgleichung der Familie solcher Flächen ergeben.

Für $\lambda = l$, $\mu = m$, $\nu = n$ kommt man auf die Gleichung des vorigen Artikels zurück.

Man erhält daraus mit Leichtigkeit z. B. die Bestimmung der Lage der Kreisschnitte der Flächen zweiten Grades und hat hier die bezügliche Generation derselben.

179. Die Flächenfamilien, welche wir betrachtet haben, sind die Beachtenswerthesten unter denen, deren Gleichungen in der Form

$$u = \Phi\,(v)$$

ausgedrückt werden können.

Wir gehen zu dem Falle weiter, wo die **Gleichungen der erzeugenden Curve mehr als zwei willkürliche Parameter enthalten.**

Da wir immer mit Hilfe der sie verbindenden Gleichungen alle diese Parameter in Function eines unter ihnen darstellen können, so lassen sich die Gleichungen der erzeugenden Curve in der Form

$$\begin{aligned}F\left\{x,\ y,\ z,\ c,\ \varphi(c),\ \psi(c),\ \ldots\right\} &= 0,\\ f\left\{x,\ y,\ z,\ c,\ \varphi(c),\ \psi(c),\ \ldots\right\} &= 0\end{aligned}$$

setzen und die Gleichung der erzeugten Fläche wird erhalten, indem man zwischen ihnen die Grösse c eliminiert. Und wie schon früher gezeigt ist, alle Flächen, für welche die Form der Functionen F, f dieselbe ist, gleichgültig wie die Formen der Functionen φ, ψ, ... sie unterscheiden, werden als zu derselben Familie gehörig bezeichnet.

Da aber offenbar die Elimination von c nicht vollzogen werden kann, ohne dass bestimmte Formen der Functionen φ, ψ, ... festgesetzt werden, so ist es nicht im Allgemeinen möglich, eine einzige Functionalgleichung zu bilden, welche alle Flächen der Familie umfasst; wir können sie nur durch ein Paar von Gleichungen darstellen, aus denen eine Constante zu eliminieren bleibt.

Wir können aber die willkürlichen Functionen durch Differentiation eliminieren und eine partielle Differentialgleichung erhalten, die allen Flächen derselben Familie gemeinsam ist. Die Ordnung dieser Gleichung ist, wie gegenwärtig bewiesen werden soll, der Anzahl der willkürlichen Functionen φ, ψ, ... gleich.

Es ist dabei zu bemerken wichtig, dass im Allgemeinen die Ordnung der partiellen Differentialgleichung, welche man durch Elimination einer Anzahl willkürlicher Functionen aus einer Gleichung erhält, höher als die Anzahl der eliminierten Functionen ist. Wenn z. B. eine Gleichung zwei willkürliche Functionen φ, ψ enthält, so liefert die Differentiation nach x, y, die wir als unabhängige Veränderliche ansehen, mit der Originalgleichung ein System von drei Gleichungen mit vier unbekannten Functionen

$$\varphi,\ \psi,\ \varphi',\ \psi'.$$

Die zweite Differentiation d. h. eine zweifache nach x, eine solche nach y, eine nach x und y in Succession — giebt uns drei neue Gleichungen und es ist im Allgemeinen nicht möglich, die sechs Grössen φ, ψ, φ', ψ', φ'', ψ'' unter den sechs Gleichungen des Systems zu eliminieren. Wir müssen daher zur dritten Differentiation schreiten, um die Elimination vollziehen zu können.

In derselben Art findet man leicht, dass die Elimination von n willkürlichen Functionen die $(2n - 1)$ fache Differentiation erfordert. Und wenn im gegenwärtigen Falle die Ordnung der Differentialgleichung geringer ist, so entspringt diess daraus, dass die zu eliminierenden Functionen sämmtlich Functionen der nämlichen Grösse sind.

180. Um diess nachzuweisen, ist es geeignet, den speciellen Fall zuerst zu betrachten, in welchem eine Familie von Flächen durch eine einzige Functionalgleichung dargestellt werden kann.

Diess wird dann stattfinden, wenn es möglich ist, durch Combination der Gleichungen der erzeugenden Curve eine der Constanten so zu trennen, dass die Gleichungen die Form

$$u = c_1, \quad F(x, y, z, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$$

erhalten. Indem man dann mittelst der Bedingungsgleichungen die übrigen Constanten in Function von c_1 ausdrückt, erhält man das Eliminationsresultat in der Form

$$F\left\{x, y, z, u, \varphi(u), \psi(u), \ldots\right\} = 0.$$

Wenn nun durch U_1 das Differential der Gleichung der Fläche nach x und durch F_1 das in der Voraussetzung

$$u = \text{const.}$$

gebildete Differential, mit U_2, F_2, ... aber die entsprechenden Differentiale nach y und z bezeichnet werden, so gelten die Gleichungen

$$U_1 = F_1 + \frac{dF}{du} u_1,$$

$$U_2 = F_2 + \frac{dF}{du} u_2,$$

$$U_3 = F_3 + \frac{dF}{du} u_3;$$

Gleichungen, in welche die derivierten Functionen φ', ψ', ... nur in das Glied $\frac{dF}{du}$ eingehen, aus denen sie daher mit diesem sämmtlich zugleich eliminiert werden können. Man erhält so die in U_1, U_2, U_3 homogene Gleichung

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ F_1, & F_2, & F_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welche nur die ursprünglichen Functionen φ, ψ, ... enthält.

Bezeichnen wir sie durch

$$V = 0,$$

so können wir in gleicher Weise die neue Gleichung

$$\begin{vmatrix} U_1, & U_2, & U_3 \\ V_1, & V_2, & V_3 \\ u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

bilden, welche ausser den ursprünglichen φ, ψ, . . . keine willkürlichen Functionen enthält, in die aber in V_1, V_2, V_3 die zweiten Differentialquotienten von U eingehen.

Aus dieser Gleichung können wir in derselben Art eine neue bilden und so fortfahren, bis wir aus der Reihe der so gebildeten Gleichungen — wenn die letzte von ihnen von der n^{ten} Ordnung der Differentiation ist — die n Functionen φ, ψ, . . . eliminieren können.

Wenn wir die letzte dieser Gleichungen unterdrücken, so können wir die willkürlichen Functionen alle bis auf eine eliminieren und können je nach unserer Wahl der zu bewahrenden Function n verschiedene Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung erhalten, von denen jede eine willkürliche Function enthält. Sie sind die ersten Integrale der endlichen Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung. In derselben Art können wir $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ Gleichungen der zweiten Ordnung bilden, deren jede zwei willkürliche Functionen enthält, u. s. w.

181. Wenn wir x und y als die unabhängigen Veränderlichen betrachten und wie gewöhnlich

$$dz = pdx + qdy, \quad dp = rdx + sdy, \text{ etc.}$$

schreiben, so kann der Bildungsprozess dieser Gleichungen zweckmässig wie folgt bezeichnet werden: „Man nehme das totale Differential der gegebenen Gleichung in der Voraussetzung, dass u constant ist,

$$F_1 dx + F_2 dy + F_3 (pdx + qdy) = 0;$$

setze $dy = mdx$ und substituiere für m seinen aus dem Differential von $u = 0$, nämlich

$$u_1 dx + u_2 dy + u_3 (pdx + qdy) = 0$$

abgeleiteten Werth.

Denn wenn wir die gegebene Gleichung in Bezug auf x und y differentiieren, so erhalten wir

$$F_1 + pF_3 + \frac{dF}{du}(u_1 + pu_3) = 0,$$

$$F_2 + qF_3 + \frac{dF}{du}(u_2 + qu_3) = 0,$$

und das Resultat der Elimination von $\frac{dF}{du}$ aus diesen Gleichungen ist dasselbe, wie das Resultat der Elimination von m zwischen den Gleichungen

$$F_1 + pF_3 + m\,(F_2 + qF_3) = 0,$$
$$u_1 + pu_3 + m\,(u_2 + qu_3) = 0.$$

Es ist practisch, für eine der Gleichungen, welche die erzeugende Curve darstellen, ihre Projection auf die Ebene xy zu wählen; da diese Gleichung z nicht enthält, so gehen in den aus ihr abgeleiteten Werth von m die Grössen p und q nicht ein und die erste Differentialgleichung ist von der Form

$$p + qm = R,$$

wo R auch eine Function ist, die p und q nicht enthält. Dann sind die einzigen Glieder der zweiten Differentialgleichung, welche r, s oder t enthalten, diejenigen, welche aus der Differentiation von $p + qm$ hervorgehen, und diese Gleichung ist von der Form

$$r + 2sm + tm^2 = S,$$

wo S die Grössen x, y, z, p, q, aber nicht r, s oder t enthalten kann.

Wenn wir nun zwei Functionen zu eliminieren hätten, so würden wir für diese Constanten aus der ursprünglichen Functionalgleichung der Fläche und aus der Gleichung

$$p + qm = R$$

auflösen, diese Werthe in m und in S einsetzen und die Form der endlichen zweiten Differentialgleichung würde bleiben

$$r + 2sm' + tm'^2 = S',$$

wo m' und S' die Grössen x, y, z, p, q enthalten können.

In derselben Weise würde, wenn drei willkürliche Functionen zu eliminieren wären, und die partiellen Differentiale dritter Ordnung von z durch α, β, γ, δ bezeichnet werden, die partielle Differentialgleichung von der Form

$$\alpha + 3m\beta + 3m^2\gamma + m^3\delta = T$$

sein. Und in analoger Weise für höhere Ordnungen.

Die folgenden Beispiele werden zur näheren Erläuterung dieser Theorie nützlich sein.

182. **Regelflächen mit einer Directorebene.** Diess ist eine Familie von Flächen, welcher als ein specieller Fall auch die Conoidflächen angehören.

Nehmen wir zuerst die feste Ebene als Ebene xy an, so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden von der Form

$$z = c_1, \quad y = c_2 x + c_3.$$

Die Functionalgleichung der Fläche wird gebildet, indem man in die letztere Gleichung für c_2 und c_3 respective $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ einsetzt.

Da bei der Bildung der partiellen Differentialgleichung z als constant zu betrachten ist, so können wir die Gleichungen in der Form

$$z = c_1, \quad y = c_2 x + c_3$$

lassen und erhalten

$$p + qm = 0, \quad m = c_2.$$

Je nach dem wir dann c_2 oder c_3 eliminieren, geben diese Gleichungen die andern

$$p + qc_2 = 0, \quad px + qy = qc_3.$$

Es existieren daher zwei Gleichungen erster Ordnung, deren jede eine willkürliche Function enthält, nämlich

$$p + q\varphi(z) = 0, \quad px + qy = q\psi(z).$$

Um die willkürlichen Functionen vollständig zu eliminieren, differentiieren wir

$$p + qm = 0,$$

in Erinnerung, dass wegen

$$m = c_2$$

diess als eine Constante zu betrachten ist; wodurch wir erhalten

$$r + 2sm + tm^2 = 0,$$

und woraus durch Elimination von m mittelst

$$pq + m = 0$$

die geforderte Gleichung hervorgeht

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Ist dagegen die Directorebene durch

$$ax + by + cz = 0$$

dargestellt, so sind die Gleichungen der Erzeugenden

$$ax + by + cz = c_1, \quad y = c_2 x + c_3;$$

Die Functionalgleichung der Familie der Flächen wird erhalten, indem man für c_2 und c_3 Functionen von $(ax + by + cz)$ einsetzt. Durch Differentiation erhält man

$$a + cp + m\,(b + cq) = 0\,,\quad m = c_2.$$

Die durch die Elimination je einer der willkürlichen Functionen entstehenden Gleichungen sind daher

$$a + cp + (b + cq)\,\varphi\,(ax + by + cz) = 0\,,$$
$$(a + cp)\,x + (b + cq)\,y = (b + cq)\,\psi\,(ax + by + cz).$$

Wenn man aber

$$a + bm + c\,(p + mq) = 0$$

differentiiert, indem man m als eine Constante betrachtet, so wird

$$r + 2sm + tm^2 = 0$$

und durch Einführung des früher für m gefundenen Werthes

$$(b + cq)^2\,r - 2\,(a + cp)\,(b + cq)\,s + (a + cp)^2\,t = 0.$$

183. Man kann auch zu dieser Gleichung gelangen, indem man ausdrückt, dass die Tangentenebenen der Fläche in zwei Punkten derselben Erzeugenden sich in dieser Erzeugenden durchschneiden.

Sind α, β, γ die laufenden, x, y, z die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist jede Erzeugende der Durchschnitt der Tangentenebene

$$\gamma - z = p\,(\alpha - x) + q\,(\beta - y)$$

mit einer durch den Berührungspunkt gehenden Parallelebene

$$a\,(\alpha - x) + b\,(\beta - y) + c\,(\gamma - z) = 0$$

zur festen Directorebene, und somit

$$(a + cp)\,(\alpha - x) + (b + cp)\,(\beta - y) = 0.$$

Wenn wir nun zur Durchschnittslinie dieser Tangentenebene mit einer folgenden Ebene übergehen, so ändern sich x, y, z, p, q während α, β, γ unverändert bleiben. Die Differentiation der Gleichung der Tangentenebene giebt

$$(rdx + sdy)\,(\alpha - x) + (sdx + tdy)\,(\beta - y) = 0$$

und die Elimination von $(\alpha - x)$, $(\beta - y)$

$$(b + cq)\,(rdx + sdy) = (a + cp)\,(sdx + tdy).$$

Da aber der Berührungspunkt sich längs der Erzeugenden bewegt, welche einer festen Ebene parallel ist, so haben wir

$$adx + bdy + cdz = 0$$

oder

$$(a + cp)\,dx + (b + cq)\,dy = 0.$$

Die Elimination von dx, dy aus der letzten Gleichung liefert dann wie vorher

$$(b + cq)^2 r - 2(a + cp)(b + cq) s + (a + cp)^2 t = 0.$$

184. **Regelflächen mit einer festen Achse oder geraden Directrix.**

Auch diese Klasse schliesst die Familie der Conoide ein.

Nehmen wir zuerst an, die feste Achse sei die Achse der z, so sind die Gleichungen der erzeugenden Linie von der Form

$$y = c_1 x, \quad z = c_2 x + c_3$$

und die Gleichung der Familie dieser Flächen wird erhalten, indem wir in die letztere Gleichung für c_2 und c_3 willkürliche Functionen von $\frac{y}{x}$ einführen. Durch Differentiation haben wir

$$m = c_1, \quad p + mq = c_2,$$

also

$$px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{und} \quad z - px - qy = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Durch nochmalige Differentiation erhalten wir

$$r + 2sm + tm^2 = 0$$

und durch Einführung des Werthes

$$m = c_1 = \frac{y}{x},$$

die verlangte Differentialgleichung in der Form

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung wäre auch erhalten worden, indem man ausdrückte, dass zwei auf einander folgende Tangentenebenen sich in einer Erzeugenden durchschneiden. Wie im Artikel 183 erhalten wir für den Durchschnitt zweier auf einander folgenden Tangentenebenen

$$(rdx + sdy)(\alpha - x) + (sdx + tdy)(\beta - y) = 0.$$

Aber irgend eine Erzeugende liegt in der Ebene

$$\alpha y = \beta x$$

oder es ist

$$(\alpha - x) y = (\beta - y) x,$$

und die Elimination liefert

$$x(rdx + sdy) + y(sdx + tdy) = 0;$$

und da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{y}{x}$$

ist, so erhalten wir wie vorher

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = 0.$$

Wenn allgemeiner die Erzeugende durch die Linie

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

geht, wo

$$\alpha = ax + by + cz + d, \quad \beta = a'x + b'y + c'z + d'$$

ist, so sind die Gleichungen der Erzeugenden

$$\alpha = c_1\beta, \quad y = c_2x + c_3,$$

und die Gleichung der Familie von Flächen ist

$$y = x\varphi\,\frac{\alpha}{\beta} + \psi\,\frac{\alpha}{\beta}.$$

Daraus entspringt durch Differentiation

$$m = c_2,$$

$$a + cp + m(b + cq) = c_1\left\{a' + c'p + m(b' + c'q)\right\};$$

und durch weitere Differentiation

$$r + 2sm + tm^2 = 0,$$

d. h. nach Einführung des für m aus der letzten Gleichung entspringenden Werthes die geforderte partielle Differentialgleichung

$$\left\{(a+cp)\beta - (a'+c'p)\,\alpha\right\}^2 t - 2\left\{(a+cp)\beta - (a'+c'p)\alpha\right\} \times$$
$$\left\{(b+cq)\,\beta - (b'+c'q)\,\alpha\right\} s + \left\{(b+cq)\beta - (b'+c'q)\alpha\right\}^2 r = 0.$$

185. Wenn die Gleichung einer Flächenfamilie n willkürliche Functionen derselben Grösse enthält, und wenn verlangt wird, eine Fläche der Familie zu bestimmen, welche durch n feste Curven geht, so schreiben wir die Gleichungen der erzeugenden Curve

$$u = c_1, \quad F(x, y, z, c_1, c_2, \ldots) = 0,$$

und erhalten eine zur Elimination von $c_1, c_2, \ldots$ hinreichende Anzahl von Gleichungen, indem wir ausdrücken, dass die erzeugende Curve jede der festen Curven schneidet. Sei z. B. die Gleichung der Fläche der Familie

$$x + y\varphi(z) + \psi(z) = 0$$

zu bestimmen, welche durch die festen Curven

$$y = a, \quad F(x, z) = 0; \quad y = -a, \quad F_1(x, z) = 0$$

hindurchgeht. Sind dann

$$z = c_1, \quad x = yc_2 + c_3$$

die Gleichungen der erzeugenden Linie; so erhalten wir durch Substitution

$$F\,(ac_2 + c_3, c_1) = 0, \quad F_1\,(c_3 - ac_2, c_1) = 0,$$

oder durch Ersetzung der c_1, c_3 durch ihre Werthe

$$F\left\{x + c_2\,(a - y), z\right\} = 0, \quad F_1\left\{x - c_2\,(a + y), z\right\} = 0;$$

Gleichungen, aus denen durch Elimination von c_2 die Gleichung der fraglichen Fläche gefunden wird.

Beispiel 1. Sind die Directrixcurven insbesondere

$$y = a, \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad y = -a, \quad x^2 + z^2 = c^2,$$

so eliminieren wir c_2 zwischen

$$\frac{\left\{x + c_2\,(a - y)\right\}^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \left\{x - c_2\,(a + y)\right\}^2 + z^2 = c^2,$$

und erhalten, indem wir c_2 aus jeder von beiden bestimmen,

$$\frac{\frac{b}{c}\sqrt{(c^2 - z^2)} - x}{a - y} = \frac{x - \sqrt{(c^2 - z^2)}}{a + y}.$$

Das Resultat ist scheinbar vom achten Grade; es ist aber in zwei Factoren auflösbar, welche — durch die Gleichheit oder den Gegensatz der Vorzeichen der Radicale der letzten Gleichung unterschieden — zwei Conoide darstellen.

Beispiel 2. Die Erzeugende soll die Achse z und die Raumcurve

$$y^2 + x^2 = r^2, \quad z^2 + x^2 = R^2$$

in zwei Punkten durchschneiden.

Wir eliminieren zwischen den Gleichungen der Geraden

$$y = c_1 x, \quad z = c_2 x + c_3$$

und denen der Curve y und z und erhalten die Gleichungen in x

$$(c_1^2 + 1)\,x^2 - r^2 = 0, \quad (c_2^2 + 1)\,x + 2c_2c_3x + c_3^2 - R^2 = 0.$$

Die Bedingung des zweifachen Durchschnitts mit der Curve fordert die Uebereinstimmung beider Wurzelpaare dieser Gleichungen, d. h. die Bedingungen

$$c_2c_3 = 0, \quad \frac{R^2 - c_3^2}{c_2^2 + 1} = \frac{r^2}{c_1^2 + 1}.$$

Die erste giebt entweder $c_3 = 0$ oder $c_2 = 0$, und dann die zweite im ersten Falle

$$R^2\,(c_1^2 + 1) = r^2\,(c_2^2 + 1), \quad y = c_1 x, \quad z = c_2 x,$$

also

$$R^2\,(x^2 + y^2) = r^2\,(x^2 + z^2),$$

eine Kegelfläche zweiten Grades, für welche der Anfangspunkt der Coordinaten der Scheitel ist. Im zweiten Falle aber

$$(R^2 - c_3^2)(c_1^2 + 1) = r^2, \quad y = c_1 x, \quad z = c_3,$$

also

$$(R^2 - z^2)(x^2 + y^2) = r^2 x^2$$

eine Fläche vom vierten Grade, deren Erzeugende stets der Ebene xy parallel bleibt.

Es mag ferner bemerkt werden, dass die oft auftretende Bedingung für die Erzeugende, mit einer festen Geraden einen bestimmten Winkel zu bilden, identisch ist mit der andern, stets einer Erzeugenden eines gewissen Drehungskegels parallel zu sein, welcher diese Gerade zur Achse hat, oder den unendlich entfernten Parallelkreis dieses Kegels zur Leitcurve zu haben. So wird allgemeiner eine unendlich entfernte Leitcurve durch einen Director-Kegel vertreten.*) Und manche andere Bedingungen kommen darauf zurück. So erzeugt eine Gerade, welche zwei feste Gerade so schneidet, dass das Segment der Schnittpunkte von unveränderlicher Länge ist, eine Regelfläche 4[ten] Grades, welche einen Directorkegel hat, dessen Achse zu der zu beiden Leitlinien parallelen Ebene normal ist.

Die zu ihr normalen Querschnitte der Fläche sind Ellipsen, welche in der Linie des kürzesten Abstandes beider Leitgeraden ihre Centra haben; der entsprechende unendlich ferne Querschnitt ist ein Kreis. (Vergl. a. a. O. p. 428, 439.)

186. Wir haben nun gesehen, dass es zur Bildung der partiellen Differentialgleichung einer Flächenfamilie, deren Gleichung eine Anzahl willkürlicher Functionen derselben Grösse enthält, zweckmässig ist, für die Gleichung der Fläche die beiden Gleichungen der erzeugenden Curve zu substituieren.

Es ist aber leicht zu erkennen, dass dieser Prozess gleichmässig anwendbar bleibt, wenn die Flächenfamilie nicht durch eine einzige Functionalgleichung ausgedrückt werden kann.

Die willkürlichen Functionen, welche in die Gleichungen des Artikel 179 eingehen, sind sämmtlich Functionen derselben Grösse, obwohl der Ausdruck dieser Grösse in Function der Coordinaten unbekannt ist. Wenn wir diese Grösse differentiieren, so erhalten wir

$$dy = m dx,$$

und können die unbekannte Grösse m zwischen den totalen Dif-

*) Ein reiches Uebungsmaterial kann man in Magnus „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes", p. 425—517 vereinigt finden.

ferentialen der beiden Gleichungen der erzeugenden Curve eliminieren und so die verlangte partielle Differentialgleichung bilden. Es ist vortheilhaft, für eine der Gleichungen dieser Curve die Gleichung ihrer Projection in der Ebene xy zu wählen.

Sei z. B. die allgemeine Gleichung der Regelflächen zu finden, d. h. die Gleichung aller der Flächen, welche durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden können.

Die Gleichungen der erzeugenden geraden Linie sind

$$z = c_1 x + c_3, \quad y = c_2 x + c_4,$$

und die Familie der Flächen wird erhalten, indem man für c_2, c_3, c_4 willkürliche Functionen von c_1 substituiert.

Die Differentiation liefert

$$p + mq = c_1, \quad m = c_2.$$

Aus der Differentiation der ersten dieser Gleichungen geht, da m als eine Constante durch die zweite characterisiert ist,

$$r + 2sm + tm^2 = 0$$

hervor. Da diese Gleichung noch immer m oder c_2 enthält, dessen Ausdruck in Function der Coordinaten unbekannt ist, so müssen wir nochmals differentiieren und erhalten

$$\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 = 0,$$

wenn α, β, γ, δ die dritten Differentialquotienten bezeichnen. Die Elimination von m zwischen dieser cubischen und der vorigen quadratischen Gleichung liefert die verlangte partielle Differentialgleichung.

Sie löst sich offenbar in die zwei linearen Gleichungen dritter Ordnung auf, welche man erhält, indem man nach einander in die cubische Gleichung die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung für m einsetzt.

Man erhält dieselbe Gleichung auf geometrischem Wege, indem man ausdrückt, dass die Tangentenebenen in drei auf einander folgenden Punkten einer Erzeugenden sich in derselben durchschneiden. Die Gleichung

$$dz = pdx + qdy$$

ist eine Relation zwischen den Grössen 1, p, q, die den Richtungscosinus einer Tangentenebene proportional sind, während dx, dy, dz ihrerseits den Richtungscosinus irgend einer Linie in dieser Ebene proportional sind, welche durch den Berührungspunkt geht.

Wenn wir zu einer zweiten Tangentenebene übergehen, die durch einen nächstfolgenden Punkt derselben Linie geht, so lassen wir p, q variieren, während die gegenseitigen Verhältnisse von dx, dy, dz unverändert bleiben. Diess giebt

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Um dann zu einer dritten Tangentenebene überzugehen, differentiieren wir nochmals, indem wir $dx : dy$ als constant betrachten und erhalten so

$$\alpha\,dx^3 + 3\beta\,dx^2dy + 3\gamma\,dx\,dy^2 + \delta\,dy^3 = 0.$$

Die Elimination des Verhältnisses $dx : dy$ zwischen diesen beiden Gleichungen liefert dieselbe allgemeine Gleichung der Regelflächen wie vorher.

Man erhält sie in der Form

$$\begin{vmatrix} \alpha\,, & 3\beta & , 3\gamma & , \delta \\ 3\beta r, & 6\beta s - \alpha t + 3\gamma r, & 6\gamma s + \delta r, & 2\delta s \\ r\,, & 2s & , t & , 0 \\ 0\,, & r & , 2s & , t \end{vmatrix} = 0,$$

welche noch reducierbar ist; entwickelt

$$\alpha^2t^3 + \delta^2r^3 + 9rt\,(\beta^2t + \gamma^2r) + 2\alpha\delta s\,(3rt - 4s^2)$$
$$+ 6\,(2s^2 - rt)\,(\alpha\gamma t + \beta\delta r) - 6s\,(\alpha\beta t^2 + \gamma\delta r^2) - 18\beta\gamma rst = 0.$$

Die ersten Integrale dieser Gleichung werden nach der Angabe des Artikel 180 gefunden, indem man die letzte der vorigen Gleichungen unterdrückt und alle Constanten bis auf eine eliminiert. Wir haben so die Gleichung

$$p + mq = c_1,$$

aus welcher hervorgeht, dass eines der Integrale

$$p + mq = \varphi\,(m)$$

ist, für m als eine der Wurzeln von

$$r + 2sm + tm^2 = 0.$$

Die andern beiden ersten Integrale sind

$$y - mx = \psi\,(m), \quad z - px - mqx = \chi\,(m).$$

Die drei zweiten Integrale werden gebildet, indem man m zwischen je einem Paar dieser Gleichungen eliminiert.

187. Enveloppen. Wenn die Gleichung einer Fläche n Parameter enthält, welche durch $(n-1)$ Relationen verbunden sind, so können wir in Function irgend eines von ihnen alle übrigen

ausdrücken und die Gleichung in die Form bringen

$$z = F\left\{x, y, c, \varphi(c), \psi(c), \ldots\right\}.$$

Wenn wir dann c zwischen dieser Gleichung und

$$\frac{dF}{dc} = 0$$

eliminieren, so erhalten wir die Enveloppe aller der Flächen, welche den verschiedenen Werthen von c entsprechen. Die so gefundenen Enveloppen sind von derselben Familie, so lange die Form der Function F dieselbe bleibt, wie auch die Formen der Functionen $\varphi, \psi, \ldots$ sich verändern.

Die Durchschnittscurve der gegebenen Fläche mit

$$\frac{dF}{dc} = 0$$

wird die Characteristik genannt (vergl. die Anmerkung des Artikel 62); sie ist die Durchschnittslinie zweier auf einander folgender Flächen des Systems.

Wenn man die Characteristik als eine bewegliche Curve betrachtet, die durch die beiden Gleichungen dargestellt ist, zwischen denen man c zu eliminieren hat, so erkennt man, dass das Problem der Enveloppen in dem enthalten ist, welches wir im Artikel 179 und den folgenden discutiert haben.

Wenn die Function F eine Anzahl n von willkürlichen Functionen $\varphi, \psi, \ldots$ enthält, so wird nach jener Discussion, weil dann $\frac{dF}{dc}$ die $\varphi', \psi', \ldots$ enthalten muss, die partielle Differentialgleichung der Familie von der Ordnung $2n$; bei näherer Betrachtung der Art jedoch, in welcher diese Functionen in die Gleichungen eingehen, findet man, dass jene Ordnungszahl sich auf n reduciert. Denn wir erhalten durch Differentiation von

$$z = F$$

$$p = F_1 + \frac{dF}{dc} c_1, \quad q = F_2 + \frac{dF}{dc} c_2,$$

also wegen

$$\frac{dF}{dc} = 0$$

$$p = F_1, \quad q = F_2;$$

und da F_1, F_2 die unter der Voraussetzung $c =$ const. gebildeten Differentiale sind, so enthalten diese Grössen nur die Originalfunctionen φ, ψ, ... aber nicht ihre Derivierten φ', ψ', ...

Aus diesem Paar von Gleichungen können wir wie im Artikel 186 andere bilden und so fortfahren und erhalten eine zur Elimination aller Parameter hinreichende Zahl von Gleichungen, wenn wir bis zur n^{ten} Ordnung aufgestiegen sind, wie aus dem Folgenden noch näher bewiesen wird.

188. Wir haben den Fall nicht weiter zu betrachten, wo die gegebene Gleichung nur einen Parameter enthält, weil die Elimination desselben zwischen der Gleichung und ihrem Differential nur der Gleichung einer bestimmten Fläche, nicht aber der einer Flächenfamilie Ursprung giebt.

Wenn aber die Gleichung zwei Parameter a und b enthält, welche durch eine Gleichung verbunden sind, die b als eine Function von a bestimmt, so können wir zwischen den Gleichungen

$$z = F, \quad p = F_1, \quad q = F_2$$

die Grössen a und b eliminieren und erhalten die Resultante in der Form

$$f(x, y, z, p, q) = 0.$$

Untersuchen wir z. B. die Enveloppe einer Kugel von unveränderlichem Halbmesser, deren Centrum eine in der Ebene xy gelegene Curve beschreibt; ein specieller Fall der allgemeinen Klasse der Röhrenflächen, von dem gleich nachher zu handeln sein wird.

Da die Gleichung einer solchen Kugel

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = r^2$$

ist und die Bedingungen des Problems einen Ort bezeichnen, längs dessen der Punkt (α, β) sich bewegt, also β in Function von α bestimmen, so wird die Gleichung der Enveloppe gebildet, indem man die Grösse α zwischen den Gleichungen

$$(x-\alpha)^2 + \{y-\varphi(\alpha)\}^2 + z^2 = r^2,$$
$$(x-\alpha) + \{y-\varphi(\alpha)\}\,\varphi'(\alpha) = 0$$

eliminiert. Da die Elimination nicht ohne die Bestimmung der Form der Function φ ausgeführt werden kann, so lässt sich diese Familie von Flächen eben nur durch die Combination der beiden eben geschriebenen Gleichungen definieren.

Wir hätten dieselben Gleichungen auch bilden können, indem wir ausdrückten, dass die Fläche durch einen Kreis erzeugt werde, welcher sich so bewegt, dass seine Ebene immer normal zur Bahn seines Centrums bleibt. Denn die Gleichung der Tangente des Ortes von (α, β) ist

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha) \quad \text{oder} \quad y - \varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha)(x - \alpha),$$

und die Normalebene zu ihr wird durch

$$(x - \alpha) + \varphi'(\alpha)\left\{y - \varphi(\alpha)\right\} = 0$$

ausgedrückt.

Um die partielle Differentialgleichung zu erhalten, differentiieren wir die Gleichung der Kugel unter der Voraussetzung der α und β als Constanten, und erhalten

$$x - \alpha + pz = 0, \quad y - \beta + qz = 0.$$

Lösen wir diese für $(x - \alpha)$, $(y - \beta)$ auf und substituieren die Werthe in die Gleichung der Kugel, so entsteht die fragliche Gleichung in der Form

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = r^2.$$

Wir hätten diese Gleichung auch bilden können als den Ausdruck der geometrischen Wahrheit, dass die Länge der Normale constant und gleich r ist.

189. Ehe wir weiter gehen, soll gezeigt werden, wie die willkürlichen Functionen, welche in der Gleichung einer Familie von Enveloppen erscheinen, durch die Bedingung bestimmt werden können, dass die fragliche Fläche durch gegebene Curven hindurch gehen müsse.

Die Tangente einer der gegebenen Curven in irgend einem Punkte ihres Laufes liegt in der Tangentenebene der betrachteten Fläche; und da die umhüllende Fläche in jedem ihrer Punkte die nämliche Tangentenebene hat, wie die umhüllte Fläche, welche durch diesen Punkt geht, so folgt, dass jede der gegebenen Curven in jedem ihrer Punkte die umhüllte Fläche berührt, welche durch diesen Punkt geht.

Ist dann die Gleichung der umhüllten Fläche

$$z = F(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n),$$

so kann sie durch $(n - 1)$ gegebene Curven geführt werden; denn indem man ausdrückt, dass die durch diese Gleichung bestimmte Fläche jede der gegebenen Curven berührt, erhält man

$(n-1)$ Relationen zwischen den Constanten $c_1, c_2, \ldots$ welche mit den beiden Gleichungen der Characteristik verbunden diese Constanten zu eliminieren gestatten.

So enthält z. B. die Gleichung der im letzten Artikel discutierten Flächenfamilie nur zwei Constanten und eine willkürliche Function und man kann sie daher durch eine gegebene Curve hindurchgehen machen.

Sei die Enveloppe der Kugel

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = r^2$$

zu finden, welche stets durch die gerade Linie

$$x = mz, \quad y = 0$$

geht. Da die Durchschnittspunkte dieser Linie mit der Kugel durch die quadratische Gleichung

$$(mz-\alpha)^2 + \beta^2 + z^2 = r^2$$

oder

$$(1+m^2)\, z^2 - 2mz\alpha + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

gegeben sind, so ist die Bedingung der Berührung der Geraden mit der Kugel

$$(1+m^2)\,(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = m^2\alpha^2,$$

d. h. der Ort der Centra der jene Linie berührenden Kugeln ist eine Ellipse. Die fragliche Enveloppe ist dann eine Art von elliptischer Ringfläche, deren Gleichung erhalten wird, indem man α, β zwischen den Gleichungen

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = r^2, \quad (1+m^2)\,(\alpha^2+\beta^2-r^2) = m^2\alpha^2,$$
$$(x-\alpha)\, d\alpha + (y-\beta)\, d\beta = 0, \quad \alpha d\alpha + (1+m^2)\, \beta d\beta = 0$$

eliminiert, aus deren beiden letzten

$$(1+m^2)\, \beta\, (x-\alpha) = \alpha\, (y-\beta)$$

hervorgeht. Die Resultante bezeichnet eine Fläche der achten Ordnung.

190. Sei ferner gefordert, die willkürliche Function so zu bestimmen, dass die umhüllende Fläche zugleich eine gegebene Fläche umhülle.

In jedem Punkte der Berührung zwischen der geforderten Fläche und der festen Fläche

$$z = f\,(x, y)$$

hat die bewegliche Fläche

$$z = F\,(x, y, c_1, c_2, \ldots),$$

welche durch diesen Punkt geht, die nämliche Tangentenebene mit der festen Fläche; d. h. die aus den Gleichungen der festen und der beweglichen Fläche abgeleiteten Werthe von p und q müssen dieselben sein. So erhalten wir

$$f_1 = F_1, \quad f_2 = F_2,$$

und wenn wir zwischen diesen Gleichungen und den beiden Gleichungen

$$z = F, \quad z = f,$$

welche für den Berührungspunkt erfüllt sind, die Grössen x, y, z eliminieren, so stellt die Resultante eine Relation der Parameter dar.

In Folge dessen kann eine Enveloppe durch die Umhüllung ebenso vieler fester Flächen näher bestimmt werden, als ihre Gleichung willkürliche Functionen enthält.

Sei z. B. verlangt, eine Röhrenfläche der im Artikel 189 discutierten Art zu bestimmen, welche die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

berühre; so muss die Fläche

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2$$

berühren und wir erhalten

$$\frac{x}{z} = \frac{x - \alpha}{z}, \quad \frac{y}{z} = \frac{y - \beta}{z},$$

Bedingungen, welche fordern

$$z = 0, \quad \frac{x}{y} = \frac{x - \alpha}{y - \beta} \quad \text{oder} \quad \beta x = \alpha y.$$

Wenn wir mit Hilfe dieser Gleichungen die Grössen x und y zwischen den Gleichungen der festen und der beweglichen Kugel eliminieren, so erhalten wir

$$4\,(\alpha^2 + \beta^2)\,R^2 = (R^2 - r^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2.$$

Die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung für $(\alpha^2 + \beta^2)$ sind

$$(R \pm r)^2,$$

und zeigen, dass das Centrum der beweglichen Kugel sich in einem von zwei Kreisen bewegen muss, deren Radien sind

$$R \pm r.$$

Die fragliche Fläche ist daher einer oder der andere von zwei Ringen, deren Oeffnungen den eben bezeichneten Werthen entsprechen.

191. Wir fügen ein Paar weitere Beispiele von Flächenfamilien hinzu, deren Gleichungen nur eine willkürliche Function enthalten.

Man soll die Enveloppe eines geraden Kegels finden, dessen Achse der Achse der z parallel ist und dessen Scheitel eine gegebene Curve in der Ebene xy durchläuft. Ist die Gleichung des Kegels in seiner ursprünglichen Lage

$$z^2 = m^2 (x^2 + y^2),$$

so wird sie beim Uebergang des Scheitels nach dem Punkte (α, β) in die Form

$$z^2 = m^2 \left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2\right\}$$

verändert, und wenn die Curve gegeben ist, längs welcher der Scheitel sich bewegt, so ist β in Function von α bestimmt.

Die Differentiation giebt

$$pz = m^2 (x-\alpha), \quad qz = m^2 (y-\beta)$$

und die Elimination sodann

$$p^2 + q^2 = m^2.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Tangentenebene der Fläche einen constanten Winkel mit der Ebene der xy bildet, wie diess aus der Erzeugungsart sich ergiebt. Man kann leicht auch beweisen, dass der Inhalt eines Theils der Fläche zu seiner Projection auf die Ebene xy in einem constanten Verhältniss steht.

192. Die in den Artikeln 188, 191 betrachteten Flächenfamilien sind beide in der folgendermassen characterisierten Familie von Flächen enthalten: Man soll die Enveloppe einer Fläche finden, welche sich ohne Rotation so bewegt, dass ein gegebener Punkt derselben längs einer bestimmten Curve fortschreitet.

Ist

$$z = F(x, y)$$

die Gleichung der Fläche in ihrer ursprünglichen Lage, so ist ihre Gleichung für die neue ohne Drehung eingenommene Lage, in der der zuerst im Anfangspunkt der Coordinaten befindliche Punkt nach (α, β, γ) übergegangen ist,

$$z - \gamma = F(x-\alpha, y-\beta).$$

Wenn dann eine Curve gegeben ist, längs welcher der Punkt (α, β, γ) sich bewegt, so können wir α, β in Function von γ

ausdrücken, und das Problem erscheint als zu der im nächsten Artikel zu betrachtenden Klasse von Problemen gehörig, bei welcher die Gleichung der Enveloppe zwei willkürliche Functionen enthält.

Ist dagegen bestimmt, dass diese Leitcurve auf einer gewissen bekannten Fläche liegt, so ist von den beiden Gleichungen derselben die eine bekannt und nur die andere willkürlich und die Gleichung der Enveloppe enthält nur eine willkürliche Function.

Wenn wir dann β als eine willkürliche Function von α ansehen, so giebt die Gleichung der festen Fläche γ als eine bekannte Function von α, β.

Man findet leicht, wie in diesem Falle die partielle Differentialgleichung zu bilden ist. Löst man die drei Gleichungen

$$z-\gamma = F(x-\alpha,\, y-\beta), \quad p = F_1(x-\alpha,\, y-\beta),$$
$$q = F_2(x-\alpha,\, y-\beta)$$

für

$$x-\alpha,\; y-\beta,\; z-\gamma$$

und erhält

$$x-\alpha = f(p,q), \quad y-\beta = {}'f(p,q), \quad z-\gamma = {}''f(p,q),$$

und ist

$$\Gamma(\alpha,\beta,\gamma) = 0$$

die Gleichung der Fläche, auf welcher der Punkt (α, β, γ) sich bewegt, so ist die verlangte partielle Differentialgleichung

$$\Gamma\left\{x-f(p,q),\; y-{}'f(p,q),\; z-{}''f(p,q)\right\} = 0.$$

Die drei Functionen f, $'f$, $''f$ sind offenbar durch die Relation

$$d''f = pdf + qd'f$$

mit einander verbunden.

Man erkennt, dass die eben gefundene partielle Differentialgleichung das geometrische Factum ausdrückt, dass die Tangentenebene in jedem Punkte der Enveloppe derjenigen im entsprechenden Punkte der Originalfläche parallel ist.

Beispiel. Die partielle Differentialgleichung der Enveloppe einer Kugel von constantem Halbmesser zu finden, welche sich so bewegt, dass ihr Centrum längs einer auf einer festen gleichen Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

gelegenen Curve fortschreitet.

Die Gleichung der beweglichen Kugel ist

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2,$$

also

$$x - \alpha + p\,(z - \gamma) = 0,\; y - \beta + q\,(z - \gamma) = 0,$$

und daher

$$x - \alpha = \frac{-pr}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}},\quad y - \beta = \frac{-qr}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$z - \gamma = \frac{r}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Schreiben wir

$$1 + p^2 + q^2 = \varrho^2,$$

so zeigt sich durch wirkliche Differentiation leicht die Relation

$$d\,\frac{1}{\varrho} = -\,pd\left(\frac{p}{\varrho}\right) - qd\left(\frac{q}{\varrho}\right)$$

erfüllt.

Die partielle Differentialgleichung ist

$$(x\varrho + pr)^2 + (y\varrho + qr)^2 + (z\varrho - r)^2 = \varrho^2 r^2,$$

oder

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2)\,(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} + 2\,(px + qy - z)\,r = 0.$$

Der eine der beiden Hauptkrümmungsradien hat in allen Punkten der Fläche denselben Werth r.

193. Wir gehen dazu weiter, die Form der partiellen Differentialgleichung der Enveloppe für den Fall zu untersuchen, in welchem die Gleichung der beweglichen Fläche drei Constanten enthält, die durch zwei Relationen verbunden sind.

Ist die Gleichung der Fläche

$$z = F\,(x,\, y,\, a,\, b,\, c),$$

so haben wir

$$p = F_1,\quad q = F_2.$$

Durch fernere Differentiation wie im Artikel 181 erhalten wir

$$r + sm = F_{11} + mF_{12},\quad s + tm = F_{12} + mF_{22}$$

und durch Elimination von m die geforderte Gleichung in der Form

$$(r - F_{11})\,(t - F_{22}) = (s - F_{12})^2.$$

Die Functionen F_{11}, F_{12}, F_{22} enthalten a, b, c, für welche ihre Werthe in Function von p, q, x, y, z, wie sie aus den vorigen drei Gleichungen hervorgehen, zu substituieren sind. Wir erhalten dadurch eine Gleichung von der Form

$$Rr + 2Ss + Tt + U(rt - s^2) = V,$$

in welcher die Coefficienten durch die Relation

$$RT + UV = S^2$$

verbunden sind. Diese Ergebnisse hat G. Boole in einer neuerdings veröffentlichten Abhandlung*) begründet, auf die wir für das Weitere verweisen.

194. Aus den wichtigsten unter den Fällen, wo die Gleichung drei Parameter enthält, wählen wir die folgenden Beispiele.

Entwickelbare Flächen. Sie sind Enveloppen der Ebene

$$z = ax + by + c,$$

wenn wir für b und c die Werthe $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ setzen dürfen. Durch Differentiation erhalten wir

$$p = a, \quad q = b,$$

also

$$q = \varphi(p).$$

Somit ist eine Fläche abwickelbar, wenn p und q durch eine von x, y, z unabhängige Relation vereinigt sind. So ist die Familie des Artikel 191, für welche wir

$$p^2 + q^2 = m^2$$

gefunden haben, eine Familie von entwickelbaren Flächen.

Wir erhalten auch

$$z - px - qy = \psi(p),$$

welches das andere erste Integral der endlichen Differentialgleichung ist. Diese letztere wird erhalten durch Differentiation der Gleichungen

$$p = a, \quad q = b,$$

d. h.

$$r + sm = 0, \quad s + tm = 0$$

und somit durch Elimination von m

$$rt - s^2 = 0\text{**)}$$

als die fragliche Gleichung.

---

*) „Journal f. Math.“ Bd. LXI, p. 309 f.

**) Schreibt man sie in der Form

$$r : s = s : t$$

oder

$$\frac{dp}{dx} : \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} : \frac{dq}{dy},$$

so sagt auch sie aus, was vorher bemerkt ward (Artikel 58 f.).

Nach Artikel 148, 150 drückt diese Gleichung die abwickelbare Natur der Fläche aus, nach Artikel 51 sagt sie, dass in jedem Punkte der Fläche eine der Hauptkrümmungen gleich Null ist. Die andere variiert längs der Erzeugenden. Die Hauptschnitte sind die Erzeugende und der zu ihr normale Schnitt, die Krümmungslinien dieselben und ihre orthogonalen Trajectorien; die zwischen ihnen enthaltenen Theile der Erzeugenden sind gleich lang. Ist eine dieser orthogonalen Trajectorien sphärisch oder noch specieller eben, so schneidet die entsprechende Kugel oder Ebene alle Erzeugende unter gleichen Winkeln. In Folge dessen sind dann auch alle andern Linien dieser Art sphärisch oder eben, nämlich in concentrischen Kugeln oder parallelen Ebenen gelegen. Solche Flächen sind nothwendig einer Kugel umgeschrieben. Dem speciellen Falle der Parallelebenen entspricht die abwickelbare Schraubenfläche.

Im Rückblick auf die Artikel 34, 51 erkennt man, dass die Bedingung

$$rt = s^2$$

in jedem parabolischen Punkt einer beliebigen Fläche erfüllt ist. Diess hätte sich auch direct erweisen lassen, indem man die Gleichung

$$rt - s^2 = 0$$

in eine Function der Differentialquotienten von U transformierte, mittelst der Relationen

$$\begin{aligned}
&U_1 + pU_3 = 0, \quad U_2 + qU_3 = 0,\\
&U_{11} + 2U_{13}p + U_{33}p^2 = -rU_3,\\
&U_{12} + pU_{23} + qU_{13} + pqU_{33} = -sU_3,\\
&U_{22} + 2U_{23}q + U_{33}q^2 = -tU_3;
\end{aligned}$$

die Function

$$rt - s^2$$

wird dadurch mit der Hesse'schen Determinante der Fläche identisch.

Wir sehen daraus, dass jeder Punkt einer abwickelbaren Fläche ein parabolischer Punkt ist, wie diess auch daraus hervorgeht, dass nach Artikel 68 die Tangentenebene irgend eines Punktes die Fläche in zwei zusammenfallenden geraden Linien schneidet, so dass die Inflexionstangenten des Punktes in eine einzige zusammenfallen.

Die Hesse'sche Determinante einer abwickelbaren Fläche enthält daher die Gleichung der Fläche selbst als einen Factor und da die erste für eine Fläche n^{ter} Ordnung von der Ordnung $(4n - 8)$ ist, so ist sie für eine abwickelbare Fläche aus dieser selbst und einer Fläche $(3n - 8)^{\text{ter}}$ Ordnung zusammengesetzt. Wir werden später auf diesen Umstand zurückkommen.

195. Röhrenflächen. Man soll die Differentialgleichung der Enveloppe einer Kugel von unveränderlichem Radius bestimmen, deren Centrum sich in einer Curve bewegt.

Wie im Artikel 192 ist

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2,$$
$$x - \alpha + p(z-\gamma) = 0, \quad y - \beta + q(z-\gamma) = 0,$$

also

$$1 + p^2 + (z-\gamma)r + m\{pq + (z-\gamma)s\} = 0,$$
$$pq + (z-\gamma)s + m\{1 + q^2 + (z-\gamma)t\} = 0.$$

Und daher

$$\{1 + p^2 + (z-\gamma)r\}\,\{1 + q^2 + (z-\gamma)t\} = \{pq + (z-\gamma)s\}^2.$$

Indem man für $z-\gamma$ seinen Werth

$$\frac{R}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(Artikel 192)}$$

substituiert, wird

$$R^2(rt - s^2) - R\{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t\}\sqrt{(1+p^2+q^2)}$$
$$+ (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

welche Gleichung ausdrückt (vergl. Artikel 51), dass in jedem Punkte der fraglichen Enveloppe einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser gleich R ist, wie diess geometrisch evident erscheint.

196. Wir wollen in der Kürze zeigen, welches die Form der Differentialgleichung der Enveloppe dann ist, wenn die Gleichung der umhüllten Fläche vier Constanten enthält.

Wie vorher gelten ausser der Gleichung der Fläche die drei Gleichungen

$$p = F_1, \quad q = F_2, \quad (r - F_{11})(t - F_{22}) = (s - F_{12})^2.$$

Schreiben wir zur Abkürzung die letztere Gleichung in der Form

$$\varrho\tau = \sigma^2$$

und setzen

$$\alpha - F_{111} = A, \quad \beta - F_{112} = B,$$
$$\gamma - F_{122} = C, \quad \delta - F_{222} = D,$$

so entsteht durch Differentiation von

$$\varrho\tau = \sigma^2$$

$$(A + Bm)\,\tau + (C + Dm)\,\varrho - 2\,(B + Cm)\,\sigma = 0.$$

Und indem wir für m den aus der Gleichung

$$\sigma + \tau m = 0$$

abgeleiteten Werth substituieren und erinnern, dass

$$\varrho\tau = \sigma^2$$

ist, erhalten wir

$$A\tau^3 - 3\sigma\tau^2 + 3C\sigma^2\tau - D\sigma^3 = 0,$$

in welcher Gleichung für die implicite in sie eintretenden Parameter ihre aus den vorigen Gleichungen abgeleiteten Werthe einzusetzen sind. Die Gleichung ist daher von der Form

$$\alpha + 3\beta m + 3\gamma m^2 + \delta m^3 = U,$$

wo m und U Functionen von x, y, z, p, q, r, s, t sind.

In derselben Art kann die Differentialgleichung gebildet werden, wenn die Gleichung der bewegten Fläche eine grössere Zahl von Parametern enthält.

197. Nachdem wir in den vorigen Artikeln dargelegt haben, wie die partiellen Differentialgleichungen gebildet werden, zeigen wir nun, wie aus einer gegebenen partiellen Differentialgleichung eine andere Differentialgleichung abgeleitet werden kann, welcher durch jede Characteristik der durch jene dargestellten Familie von Flächen genügt wird.*)

Sei zuerst die gegebene Gleichung von der ersten Ordnung, d. h. von der Form

$$f\,(x, y, z, p, q) = 0.$$

Wenn diese Gleichung der Enveloppe einer bewegten Fläche angehört, so wird sie nicht nur durch die Enveloppe, sondern auch durch die bewegliche Fläche in jeder ihrer Lagen erfüllt; denn die Enveloppe berührt diese Fläche und in dem Berührungspunkte sind x, y, z, p, q für beide Flächen dieselben Grössen.

Sind speciell x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Characteristik, so muss die Gleichung

*) Vergl. Monge, p. 53.

$$f(x, y, z, p, q) = 0$$

durch diese Werthe von x, y, z erfüllt sein, ob p und q die aus einer Lage der bewegten Fläche oder der nächstfolgenden Lage derselben abgeleiteten Werthe besitzen, weil jeder Punkt der Characteristik Durchschnitt zweier auf einander folgender Lagen der bewegten Fläche ist. Wenn wir also die gegebene Gleichung nach p und q als den allein Veränderlichen differentiieren, so müssen die Punkte der Characteristik der Gleichung

$$Pdp + Qdq = 0$$

genügen.

Oder in anderer Darstellung: Ist die Gleichung der bewegten Fläche

$$z = F(x, y, \alpha),$$

wo wir die Constanten sämmtlich als Functionen eines einzigen Parameters α ausgedrückt denken; so haben wir nach Artikel 187

$$p = F_1(x, y, \alpha), \quad q = F_2(x, y, \alpha),$$

Werthe von p und q, die in die gegebene Gleichung substituiert werden. Dann wird die Characteristik ausgedrückt, indem man mit der gegebenen Gleichung ihr nach α genommenes Differential combiniert; da aber α in die gegebene Gleichung nur eingeht, weil es in den Werthen von p und q enthalten ist, so haben wir wie vorher

$$P\frac{dp}{d\alpha} + Q\frac{dq}{d\alpha} = 0.$$

Da ferner die Tangente der Characteristik in irgend einem Punkte in der Tangentenebene von jeder der beiden Flächen liegt, welche sich in diesem Punkte schneiden, so wird die Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

erfüllt, ob p und q die einer bestimmten oder die der nächstfolgenden Lage der beweglichen Fläche entsprechenden Werthe haben und es ist daher

$$\frac{dp}{d\alpha}dx + \frac{dq}{d\alpha}dy = 0.$$

Die Combination dieser Gleichung mit der vorher gefundenen giebt endlich die Differentialgleichung der Characteristik

$$P\,dy - Q\,dx = 0.$$

Wenn beispielsweise die gegebene Gleichung von der Form

$$Pp + Qq = R$$

ist, so genügt die Characteristik der Gleichung

$$Pdy - Qdx = 0,$$

aus welcher durch Combination mit der gegebenen Gleichung und mit

$$dz = pdx + qdy$$

abgeleitet wird

$$Pdz = Rdx, \quad Qdz = Rdy.$$

Es ist bekannt, welcher Gebrauch von diesen Gleichungen bei der Integration dieser Klasse von Differentialgleichungen gemacht wird.*)

Wenn das obige System simultaner Gleichungen durch Integration giebt

$$u = c_1, \quad v = c_2,$$

so sind diess die Gleichungen der Characteristik oder erzeugenden Curve in irgend einer ihrer Lagen, weil, damit v constant sei, sobald u constant ist, eine Relation

$$u = \varphi(v)$$

bestehen muss.

Beispiel. Sei die Gleichung die im Artikel 188 betrachtete, d. i.

$$z^2 (1 + p^2 + q^2) = r^2.$$

Jede Characteristik genügt dann der Gleichung

$$pdy = qdx,$$

die nach Artikel 146 anzeigt, dass die Characteristik immer eine Linie grösster Neigung in der Fläche ist, wie diess auch geometrisch erhellt.

198. Die eben gefundene Gleichung der Characteristik enthält im Allgemeinen die Grössen p und q; man kann dieselben aber eliminieren, indem man mit jener die gegebene partielle Differentialgleichung und die Gleichung

$$dz = pdx + qdy$$

combiniert. So leiten wir in dem letztbetrachteten Beispiel aus den Gleichungen

$$z^2 (1 + p^2 + q^2) = r^2, \quad qdx = pdy$$

die neue Gleichung ab

$$z^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) = r^2 (dx^2 + dy^2).$$

*) Vergl. G. Boole, „Differential Equations“, p. 322.

Es ist bekannt, dass es zwei Klassen von Differentialgleichungen erster Ordnung giebt, von denen die eine aus der Gleichung einer einzigen Fläche, z. B. durch die Elimination einer Constanten aus einer Gleichung und ihrem Differential

$$U = 0, \quad U_1 dx + U_2 dy + U_3 dz = 0,$$

abgeleitet ist; während die andere durch Combination der Gleichungen zweier Flächen gebildet wird, z. B. indem man zwischen den Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0$$

und ihren Differentialen drei Constanten eliminiert.

Eine Gleichung von jener Klasse drückt eine zwischen den Richtungscosinus irgend einer Tangente der Fläche stattfindende Relation aus; während eine Gleichung der zweiten Klasse eine Relation darstellt, welche durch die Richtungscosinus einer Tangente von irgend einer der Curven erfüllt werden, die das System

$$U = 0, \quad V = 0$$

darstellt.

Die hier zu betrachtenden Gleichungen gehören zur letzteren Klasse. So ist die geometrische Bedeutung der als Beispiel gewählten Gleichung die, dass die Tangente jeder der durch sie dargestellten Curven mit der Ebene xy einen Winkel macht, dessen Cosinus gleich $\frac{z}{r}$ ist. Diese Eigenschaft ist für jeden in einer Verticalebene gelegenen Kreis erfüllt, dessen Radius r ist, und die gedachte Gleichung hätte in der That gebildet werden können, indem man die Constanten α, β, m zwischen den Gleichungen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2, \quad x - \alpha + m(y - \beta) = 0$$

eliminiert.

199. Die Differentialgleichung, welche nach dem angegebenen Verfahren gefunden wird, ist nicht nur für jede Characteristik einer Flächenfamilie wahr, sondern weil jede Characteristik die Cuspidalkante der erzeugten Fläche berührt, so sind die Verhältnisse $dx : dy : dz$ für irgend eine Characteristik und die entsprechende Rückkehrkante dieselben und die gefundene Gleichung wird daher für die Rückkehrkante jeder Fläche der betrachteten Familie gleichfalls erfüllt.

So ist in dem gewählten Beispiel die durch die Differentialgleichung ausgedrückte geometrische Eigenschaft nicht nur für einen in einer Verticalebene gelegenen Kreis wahr, sondern sie bleibt auch wahr, wenn dieser Kreis auf einen verticalen Cylinder aufgewickelt wird, und die Rückkehrkante der dadurch gegebenen Familie von Flächen gehört immer zu der Familie so erzeugter Curven.

Ebenso wie die partielle Differentialgleichung in p, q, welche eine Relation zwischen den Richtungscosinus der Tangentenebene ausdrückt, sowohl für die Enveloppe als für die einzelnen umhüllten Flächen wahr ist, so sind die hier betrachteten totalen Differentialgleichungen zugleich wahr für die Rückkehrkante und für die Reihe der Characteristiken, welche dieselbe berühren. Dieselbe Wahrheit kann auch so ausgesprochen werden: Das System der Gleichungen

$$U = 0, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0,$$

welches, wenn α als Constante betrachtet wird, die Characteristik repräsentiert, stellt die Rückkehrkante dar, wenn α eine neue bekannte Function der Veränderlichen ist, welche mittelst der Gleichung

$$\frac{d^2 U}{d\alpha^2} = 0$$

zu eliminieren ist. Aber die Gleichungen

$$U = 0, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0$$

haben offenbar dieselben Differentiale, wenn α als veränderlich und dieser Bedingung unterworfen oder wenn es als constant betrachtet wird.

So sind im Beispiel des letzten Artikels, wenn wir in die Gleichungen

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = r^2, \quad (x - \alpha) + m\,(y - \beta) = 0$$
$$\beta = \varphi\,(\alpha) \quad \text{und} \quad m = \varphi'\,(\alpha)$$

einsetzen und diese mit der Gleichung

$$1 + \varphi'\,(\alpha)^2 = (y - \beta)\,\varphi''\,(\alpha)$$

verbinden, die Differentiale der ersten und zweiten Gleichungen dieselben, wenn α gemäss der dritten Gleichung veränderlich als wenn es constant ist; und daher bleibt die Differentialgleichung, welche durch die Elimination α, β, m zwischen den ersten beiden Gleichungen und ihren unter der Voraussetzung der Constanz dieser Grössen gebildeten Differentialen entsteht, gleichmässig wahr, wenn dieselben nach den dargelegten Gesetzen veränderlich wären. Und wir erhalten die Gleichungen einer Curve, die dieser Differentialgleichung genügt, indem wir eine Form etwa $\varphi(\alpha)$ willkürlich wählen und dann zwischen den Gleichungen

$$(x-\alpha)^2 + \{y-\varphi(\alpha)\}^2 + z^2 = r^2,$$
$$x-\alpha + \varphi'(\alpha)\{y-\varphi(\alpha)\} = 0,$$
$$1 + \{\varphi'(\alpha)\}^2 = \{y-\varphi(\alpha)\}\varphi''(\alpha),$$

die Grösse α eliminieren.

M. Roberts hat bemerkt, dass durch die Substitution von

$$x + \lambda dx, \quad y + \lambda dy, \quad z + \lambda dz \quad \text{für} \quad x, y, z$$

in die Gleichung einer Fläche und nachmalige Bildung der Discriminante in Bezug auf λ ein Resultat erhalten wird, welches die Differentialgleichung der Rückkehrkante einer der gegebenen Fläche umgeschriebenen abwickelbaren Fläche darstellt. In der That ist es nach Artikel 16 offenbar, dass die Discriminante die Bedingung ausdrückt, unter welcher die durch die Gleichung dargestellte Curve die gegebene Fläche berührt.

So ist die allgemeine Gleichung der Rückkehrkante der einer Kugel umgeschriebenen Abwickelungsflächen

$$(x^2+y^2+z^2-a^2)(dx^2+dy^2+dz^2) = (xdx+ydy+zdz)^2,$$

oder

$$(ydz-zdy)^2 + (zdx-xdz)^2 + (xdy-ydx)^2$$
$$= a^2(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Die letztere Form zeigt an, dass dieselbe Gleichung für jede geodätische Linie eines Kegels erfüllt ist, der den Scheitel im Anfangspunkt der Coordinaten hat. Denn bei der Entwickelung des Kegels auf eine Ebene wird die geodätische zur geraden Linie, und wenn die Entfernung derselben vom Anfangspunkt gleich a ist, so ist die Fläche des Dreiecks, welches durch Verbindung des Elements ds mit dem Anfangspunkt gebildet wird, $= \frac{a\,ds}{2}$, und diess ist offenbar die durch die vorige Gleichung ausgedrückte Eigenschaft.

Beispiel. Allgemeiner ist die Differentialgleichung der Rückkehrkante der einem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

umgeschriebenen abwickelbaren Flächen — von der partiellen Differentialgleichung

$$z - px - qy = (a^2p^2 + b^2q^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} -$$

$$a^2 (ydz - zdy)^2 + b^2 (zdx - xdz)^2 + c^2 (xdy - ydx)^2$$
$$= b^2c^2dx^2 + c^2a^2dy^2 + a^2b^2dz^2,$$

oder

$$\left(\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} + \frac{z\,dz}{c^2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} + \frac{dz^2}{c^2}\right),$$

und sie gehört einer Characteristik jener Familie von Flächen gleichfalls an. Denken wir dann die Rückkehrkante der der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2} + \frac{z^2}{c^2 - k^2} = 1$$

umgeschriebenen abwickelbaren Fläche auf der Fläche des ursprünglichen Ellipsoids, so tritt die Gleichung

$$(a^2-k^2)\,(ydz-zdy)^2 + (b^2-k^2)\,(zdx-xdz)^2 + (c^2-k^2)\,(xdy-ydx)^2$$
$$= (b^2-k^2)\,(c^2-k^2)\,dx^2 + (c^2-k^2)\,(a^2-k^2)\,dy^2 + (a^2-k^2)\,(b^2-k^2)\,dz^2$$

hinzu und man erhält

$$(xdy - ydx)^2 + (zdx - xdz)^2 + (xdy - ydx)^2$$
$$= (b^2 + c^2 - k^2)\;dx^2 + (c^2 + a^2 - k^2)\;dy^2 + (a^2 + b^2 - k^2)\;dz^2.$$

Da aber die beiden confocalen Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2 - k^2} + \frac{y^2}{b^2 - k^2} + \frac{z^2}{c^2 - k^2} = 1$$

als die beiden Mäntel einer Fläche betrachtet werden können, welche der Ort der Centra für eine andere Fläche ist,*) so gehört die letztere Gleichung einer geodätischen Linie des Ellipsoids an. (Vergl. Artikel 129 den Satz von Chasles über die Tangenten einer geodätischen Linie.)

Hiermit hängt der Satz von M. Roberts zusammen: Wenn man die Tangenten einer geodätischen Linie auf einer centrischen Fläche zweiter

---

*) Vergl. Artikel 47. Monge hat bewiesen, dass wenn eine Fläche V mit einem dreiachsigen Ellipsoid zusammen den Ort der Krümmungscentra einer andern Fläche bildet, die geodätischen Linien jener Fläche V, welche ihre Durchschnittscurve mit dem Ellipsoid berühren, der Gleichung

$$a^2(ydz - zdy) + b^2(zdx - xdz) + c^2(xdy - ydx) = b^2c^2dx^2 + c^2a^2dy^2 + a^2b^2dz^2$$

genügen.

Ordnung bis zu ihren respectiven Durchschnittspunkten mit den zu ihnen normalen Tangentenebenen derselben Fläche verlängert, so erhält man Punkte einer mit ihr concentrischen Kugel; für alle geodätischen Linien, welche dieselbe Krümmungslinie berühren, bleibt sie die nämliche.

200. Die Differentialgleichung der Characteristik kann in derselben Weise gefunden werden, wenn die gegebene Gleichung von der zweiten Ordnung ist.*)

Wir können in diesem Falle zwei auf einander folgende Flächen denken, welche der gegebenen Differentialgleichung genügen und einander längs ihrer Durchschnittslinie berühren. Wenn wir z. B. eine Oberfläche haben, die durch die Bewegung einer Curve erzeugt wird, während dieselbe zwei feste Directrixcurven stets schneidet, so denken wir eine neue durch dieselbe Curve erzeugte Fläche, während diese zwei neue Directrixcurven beständig schneidet; wenn dann diese letzteren Leitcurven die ersteren in den Punkten berühren, wo die erzeugende Curve sie schneidet, so berühren sich die beiden Flächen längs dieser Linie.

In diesem Falle haben die beiden Flächen längs ihrer Durchschnittslinie die Grössen x, y, z, p, q gemein und können nur in Bezug auf r, s, t von einander abweichen.

Differentiieren wir daher die gegebene Differentialgleichung, indem wir diese Grössen als allein veränderlich betrachten, so sei

$$Rdr + Sds + Tdt = 0$$

das Ergebniss. Da nun p und q längs dieser Linie constant sind, so sind

$$dr\,dx + ds\,dy = 0, \quad ds\,dx + dt\,dy = 0,$$

und die Elimination von dr, ds, dt liefert die Gleichung der Characteristik

$$Rdy^2 - S\,dx\,dy + Tdy^2 = 0.$$

In den Fällen von Gleichungen zweiter Ordnung, welche wir früher betrachtet haben, ergiebt sich diese Gleichung als ein vollständiges Quadrat. Wenn diess nicht der Fall ist, so zerfällt sie in zwei Factoren, welche, wenn sie rational sind, zu zwei unabhängigen Characteristiken gehören, welche durch getrennte Gleichungen repräsentiert werden; die dagegen, wenn sie nicht

*) Siehe Monge, p. 74.

rational sind, zwei Zweige derselben Curve bezeichnen, welche sich in dem betrachteten Punkte der Fläche durchschneiden.*)

201. In der That, wenn die Bewegung einer Fläche durch einen einzigen Parameter geregelt ist (vergl. Artikel 60), so enthält die Gleichung ihrer Enveloppe, wie wir sahen, nur Functionen einer einzigen Grösse und die Differentialgleichung gehört zu der einfachern eben vorher betrachteten Art.

Wenn aber die Bewegung der Fläche durch zwei Parameter geregelt ist, so ist der Ort ihrer Berührung mit der Enveloppe nicht eine Curve, sondern ein Punkt; die Gleichung der Enveloppe enthält im Allgemeinen Functionen von zwei Grössen und die Differentialgleichung ist von der allgemeineren Form.

Wir wählen als ein Beispiel des Vorkommens der letzteren Klasse von Gleichungen in geometrischen Untersuchungen die Gleichung der Familie von Flächen, für welche ein System der Krümmungslinien einer festen Ebene

$$y = mx$$

parallel ist. Indem man in die Gleichung des Artikel 50 die Substitution

$$dy = mdx$$

vollzieht, erhält man die Differentialgleichung der Familie

$$m^2 \left\{(1 + q^2)\, s - pqt\right\} + m \left\{(1 + q^2)\, r - (1 + p^2)\, t\right\} \\ - \left\{(1 + p^2)\, s - pqr\right\} = 0.$$

Für eine sehr interessante Discussion dieser Gleichung ist auf Monge p. 161 zu verweisen, da die Lehre von der Integration solcher Gleichungen nicht in den Plan dieses Werks gehört. Um zu zeigen, wie solche Differentialgleichungen in der Geometrie selbst sich darstellen, wollen wir nachweisen, wie diese Gleichung aus der Elimination von α, β zwischen der Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \left\{z - \varphi\,(\alpha + m\beta)\right\}^2 = \psi\,(\beta - m\alpha)^2$$

und ihren nach α und β gebildeten Differentialen entsteht.

---

*) Zu neuer Darlegung und Vervollständigung der Theorie von Monge erscheint soeben (Sommer 1864): P. du Bois-Reymond „Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln. I. Die Theorie der Characteristiken“.

Jene Differentiale sind

$$(x-\alpha) + \quad (z-\varphi)\,\varphi' = m\psi'\psi,$$
$$(y-\beta) + m\,(z-\varphi)\,\varphi' = -\,\psi'\psi,$$

so dass

$$(x-\alpha) + m\,(y-\beta) + (1+m^2)\,(z-\varphi)\,\varphi' = 0$$

ist. Es ist aber auch

$$(x-\alpha) + p\,(z-\varphi) = 0, \quad (y-\beta) + q\,(z-\varphi) = 0,$$

also

$$(x-\alpha) + m\,(y-\beta) + (p+mq)\,(z-\varphi) = 0.$$

Die Vergleichung mit der vorigen Gleichung liefert dann

$$p + mq = (1+m^2)\,\varphi'\,(\alpha + m\beta),$$

und wenn wir $(\alpha + m\beta)$ durch γ ersetzen, so ist noch übrig, die Elimination von γ zwischen den Gleichungen

$$x + my - \gamma + (p+mq)\,\{z - \varphi\,(\gamma)\} = 0,$$
$$p + mq = (1+m^2)\,\varphi'\,(\gamma)$$

zu vollziehen. Die Differentiation nach x und y giebt

$$(1+p^2+mpq) + (r+ms)\,\{z - \varphi(\gamma)\} - \{1 + (p+mq)\,\varphi'\}\,\gamma_1,$$
$$\{m(1+q^2)+pq\} + (s+mt)\,\{z-\varphi(\gamma)\} - \{1 + (p+mq)\,\varphi'\}\,\gamma_2,$$

und nach der zweiten Gleichung hat man

$$r + ms : s + mt = \gamma_1 : \gamma_2,$$

so dass das Resultat ist

$$(1+p^2+mpq)\,(s+mt) = \{m\,(1+q^2)+pq\}\,(r+ms),$$

wie zu beweisen war.

202. Als ein Beispiel der Anwendung der hier nach einander entwickelten Begriffe wollen wir hier eine Untersuchung führen, welche die Lehre Dupins von den conjugierten Tangenten (Art. 7) als einen besonderen Fall enthält und sonst neue Einblicke in die Theorie der Krümmung der Flächen eröffnet.

Ist

$$u = f\,(x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer Fläche, bezeichnen

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_{11},\ u_{22},\ u_{33},\ u_{23},\ u_{31},\ u_{12},$$

ihre Differentialquotienten und stellt

$$U = F\,(X, Y, Z, c_1, c_2, c_3) = 0$$

die Gleichung einer Flächenfamilie dar, so sollen zunächst die Parameter derselben c_1, c_2, c_3 so bestimmt werden, dass U und u

sich im Punkte x, y, z in erster Ordnung berühren. Sind U_1, U_2, U_3 die betreffenden Werthe der Differentiale von U, so müssen

$$F(x, y, z, c_1, c_2, c_3) = 0, \quad U_1 : U_2 : U_3 = u_1 : u_2 : u_3$$

— setzen wir für später

$$\frac{U_1}{u_1} = \frac{U_2}{u_2} = \frac{U_3}{u_3} = k,$$

woraus

$$k^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2$$

folgt — sein und man erhält

$$c_1 = \varphi(x, y, z), \quad c_2 = \psi(x, y, z), \quad c_3 = \chi(x, y, z),$$

d. h. die Gleichung der berührenden Fläche

$$U = F(X, Y, Z, \varphi, \psi, \chi) = 0.$$

Sind dann

$$x = f_1(s), \quad y = f_2(s) = z = f_3(s)$$

die Gleichungen einer auf der Fläche u gelegenen Linie L für s als ihren Bogen, so wird $U = 0$ die Familie der Flächen U repräsentieren, welche u längs dieser Curve in erster Ordnung berühren, wenn man in

$$F(X, Y, Z, \varphi, \psi, \chi)$$

in die Functionen φ, ψ, χ diese Werthe von x, y, z substituiert denkt. Aus

$$U = F = 0$$

und dem nach s gebildeten vollständigen Differential derselben Gleichung

$$F' = 0$$

erhält man die Gleichung der Enveloppe dieser Flächen, wenn man s zwischen beiden eliminiert, und dieselben Gleichungen repräsentieren die Characteristik dieser Enveloppe, wenn man s als Constante betrachtet.

Denken wir ferner die laufenden Coordinaten X, Y, Z als Functionen des Bogens S der Characteristik, so gelten die Relationen

$$\frac{dF}{dX}\frac{dX}{dS} + \frac{dF}{dY}\frac{dY}{dS} + \frac{dF}{dZ}\frac{dZ}{dS} = 0, \quad \frac{dF'}{dX}\frac{dX}{dS} + \ldots = 0,$$

d. h. für $X = x$, $Y = y$, $Z = z$ und λ_2, μ_2, ν_2 als die Cosinus der Winkel, welche die Tangente der Characteristik C

im Punkte (x, y, z) mit den Achsen bildet,

$$u_1\lambda_2 + u_2\mu_2 + u_3\nu_2 = 0,$$

$$\text{a)}\quad \left(\frac{dF'}{dX}\right)\lambda_2 + \left(\frac{dF'}{dY}\right)\mu_2 + \left(\frac{dF'}{dZ}\right)\nu_2 = 0,$$

wenn in der letzteren Gleichung die in Klammern gesetzten Differentiale die Werthe bezeichnen, welche den $\frac{dF'}{dX}, \ldots$ für $X = x, \ldots$ entsprechen.

Mit den bekannten Bezeichnungen U_{11} etc. kann man dann die nach s genommenen Differentiale von

$$U_1 = ku_1, \quad U_2 = ku_2, \quad U_3 = ku_3$$

folgendermassen schreiben

$$\left(\frac{dF'}{dX}\right) + U_{11}x' + U_{12}y' + U_{31}z' = k'u_{11} + k\,(u_{11}x' + u_{12}y' + u_{31}z'),$$

$$\left(\frac{dF'}{dY}\right) + U_{12}x' + U_{22}y' + U_{23}z' = k'u_{22} + k\,(u_{12}x' + u_{22}y' + u_{23}z'),$$

$$\left(\frac{dF'}{dZ}\right) + U_{31}x' + U_{23}y' + U_{33}z' = k'u_{33} + k\,(u_{31}x' + u_{23}y' + u_{33}z'),$$

wo die Indices Derivierte nach s bezeichnen, und aus ihnen durch Multiplication mit λ_2, μ_2, ν_2 und Summierung der Resultate mit Rücksicht auf die Gleichungen a) und für λ_1, μ_1, ν_1 als die Cosinus der Winkel, welche die Tangente der Linie L in der Fläche im Punkte (x, y, z) mit den Achsen bildet, die Relation erhalten

$$\begin{aligned} &(U_{11} - ku_{11})\,\lambda_1\lambda_2 + (U_{23} - ku_{23})\,(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) \\ \text{b)}\quad &+ (U_{22} - ku_{22})\,\mu_1\mu_2 + (U_{31} - ku_{31})\,(\nu_1\lambda_2 - \nu_2\lambda_1) \\ &+ (U_{33} - ku_{33})\,\nu_1\nu_2 + (U_{12} - ku_{12})\,(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) = 0, \end{aligned}$$

als welche die Cosinus der Tangente einer Linie L der Fläche und die der Tangente der Characteristik C der Enveloppe für irgend einen Punkt verbindet.*)

Für den Fall der U als Berührungsebenen und der U als der entsprechenden abwickelbaren Enveloppe wird man auf die Relation der conjugierten Tangenten von Dupin zurückkommen müssen. Der Weg dazu führt durch die Betrachtung der Krümmungsverhältnisse der Fläche u, U, die wir nun kurz darstellen wollen.**)

---

*) Vgl. Bordoni, „Opuscoli matematici e fisici“, t. I, Milano 1832.

**) Vgl. L. Cremona, „Annali di Matem.“, t. III, p. 328 f.

Denken wir durch die gemeinschaftliche Normale der Flächen u und U und die Tangenten von L und C im Punkte (x, y, z) die Ebenen E_1 und E_2 und bezeichnen wir durch r_1, r_2 und R_1, R_2 die Krümmungshalbmesser der entsprechenden Normalschnitte von u und U, so gelten die Formeln

$$\text{c)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}}{r_1}\\
&=u_{11}\lambda_1^2+u_{22}\mu_1^2+u_{33}\nu_1^2+2u_{23}\mu_1\nu_1+2u_{31}\nu_1\lambda_1+2u_{12}\lambda_1\mu_1,\\
&\frac{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}}{r_2}\\
&=u_{11}\lambda_2^2+u_{22}\mu_2^2+u_{33}\nu_2^2+2u_{23}\mu_2\nu_2+2u_{31}\nu_2\lambda_2+2u_{12}\lambda_2\mu_2,\\
&\frac{(U_1^2+U_2^2+U_3^2)^{\frac{1}{2}}}{R_1}\\
&=U_{11}\lambda_1^2+U_{22}\mu_1^2+U_{33}\nu_1^2+2U_{23}\mu_1\nu_1+2U_{31}\nu_1\lambda_1+2U_{12}\lambda_1\mu_1,\\
&\frac{(U_1^2+U_2^2+U_3^2)^{\frac{1}{2}}}{R_2}\\
&=U_{11}\lambda_2^2+U_{22}\mu_2^2+U_{33}\nu_2^2+2U_{23}\mu_2\nu_2+2U_{31}\nu_2\lambda_2+2U_{12}\lambda_2\mu_2,
\end{aligned}\right.$$

und nach ihnen mit Rücksicht auf die Identität

$$k^2(u_1^2+u_2^2+u_3^2) = U_1^2+U_2^2+U_3^2$$

die Relationen

$$\begin{aligned}
k(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{r_1}\right)&=(U_{11}-ku_{11})\lambda_1^2+2(U_{23}-ku_{23})\mu_1\nu_1\\
&+(U_{22}-ku_{22})\mu_1^2+2(U_{31}-ku_{31})\nu_1\lambda_1\\
&+(U_{33}-ku_{33})\nu_1^2+2(U_{12}-ku_{12})\lambda_1\mu_1,\\
k(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{r_2}\right)&=(U_{11}-ku_{11})\lambda_2^2+2(U_{23}-ku_{23})\mu_2\nu_2\\
&+(U_{22}-ku_{22})\mu_2^2+2(U_{31}-ku_{31})\nu_2\lambda_2\\
&+(U_{33}-ku_{33})\nu_2^2+2(U_{12}-ku_{12})\lambda_2\mu_2.
\end{aligned}$$

Wenn man diese beiden Gleichungen multipliciert und das Quadrat der Gleichung b) davon subtrahiert, so erhält man mit den bekannten Relationen

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1\nu_2-\nu_1\mu_2}{\sin\omega}&=\frac{u_1}{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}},\\
\frac{\nu_1\lambda_2-\lambda_1\nu_2}{\sin\omega}&=\frac{u_2}{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}},\\
\frac{\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2}{\sin\omega}&=\frac{u_3}{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

das Resultat in der Form

$$\frac{k^2\,(u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2})^2}{\sin^2\omega}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$=\begin{vmatrix} u_1, & U_{11}-ku_{11}, & U_{12}-ku_{12}, & U_{31}-ku_{31} \\ u_2, & U_{12}-ku_{12}, & U_{22}-ku_{22}, & U_{23}-ku_{23} \\ u_3, & U_{31}-ku_{31}, & U_{23}-ku_{23}, & U_{33}-ku_{33} \\ 0, & u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} = \Phi + k\Omega + k^2\Theta,$$

wenn man es nach den Potenzen von k ordnet. Sind dann ϱ_1, ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche u, so ist nach Gauss

$$\Theta = \frac{(u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2})^2}{\varrho_1\varrho_2};$$

und da Φ die entsprechende Bedeutung für die umhüllende Fläche hat, so ergiebt sich für die Voraussetzung, dass diese im Punkte (x, y, z) einen Kreispunkt besitzt,

$$\Phi = \frac{k^2\,(u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2})^2}{R^2},$$

wenn
$$R_1 = R_2 = R$$
ist. Die Grösse

$$\begin{aligned}\Omega = & -u_{11}(U_{33}u_2^{\,2}+U_{22}u_3^{\,2}-2\,U_{23}u_2u_3)\\ & +2u_{23}\{u_1(U_{23}u_1-U_{31}u_2-U_{12}u_3)+U_{11}u_2u_3\}\\ & -u_{22}(U_{11}u_3^{\,2}+U_{33}u_1^{\,2}-2\,U_{31}u_3u_1)\\ & +2u_{31}\{u_2(U_{31}u_2-U_{12}u_3-U_{23}u_1)+U_{22}u_3u_1\}\\ & -u_{33}(U_{22}u_1^{\,2}+U_{11}u_2^{\,2}-2\,U_{12}u_1u_2)\\ & +2u_{12}\{u_3(U_{12}u_3-U_{23}u_1-U_{31}u_2)+U_{33}u_1u_2\}\end{aligned}$$

erhält man dann mit Hilfe der die Kreispunkte characterisierenden Relationen (Art. 37)

$$\begin{aligned} & \frac{U_{33}u_2^{\,2}+U_{22}u_3^{\,2}-2\,U_{23}u_2u_3}{u_2^{\,2}+u_3^{\,2}}\\ & =\frac{u_1\,(U_{23}u_1-U_{31}u_2-U_{12}u_3)+U_{11}u_2u_3}{u_2u_3}\\ & =\frac{U_{11}u_3^{\,2}+U_{33}u_1^{\,2}-2\,U_{31}u_3u_1}{u_3^{\,2}+u_1^{\,2}}\\ & =\frac{u_2\,(U_{31}u_2-U_{12}u_3-U_{23}u_1)+U_{22}u_3u_1}{u_3u_1}\\ & =\frac{U_{22}u_1^{\,2}+U_{11}u_2^{\,2}-2\,U_{12}u_1u_2}{u_1^{\,2}+u_2^{\,2}}\\ & =\frac{u_3\,(U_{12}u_3-U_{23}u_1-U_{31}u_2)+U_{33}u_1u_2}{u_1u_2}=\frac{k\,(u_1^{\,2}+u_2^{\,2}+u_3^{\,2})^{\frac{1}{2}}}{R},\end{aligned}$$

in der Form

$$\Omega = -\frac{k(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}}{R} \times$$
$$\{(u_{22}+u_{33})u_1^2+(u_{33}+u_{11})u_2^2+(u_{11}+u_{22}) - 2u_{23}u_2u_3 - 2u_{31}u_3u_1 - 2u_{12}u_1u_2\}$$
$$= -\frac{k(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^2}{R}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right),$$

d. h. als Endresultat die Formel

$$\text{d)}\quad \left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_2}\right) = \sin^2\omega\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Aus denselben Relationen leitet man aber auch die Gleichung ab

$$\frac{(u_1^2+u_2^2+u_3^2)^{\frac{1}{2}}}{R}\cos\omega = u_{11}\lambda_1\lambda_2 + u_{22}\mu_1\mu_2 + u_{33}\nu_1\nu_2$$
$$+ u_{23}(\mu_1\nu_2+\nu_1\mu_2) + u_{31}(\nu_1\lambda_2+\lambda_1\nu_2) + u_{12}(\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2);$$

und durch die Subtraction ihres Quadrats von dem Product der beiden ersten Gleichungen der Gruppe c) die Gleichung

$$\text{e)}\quad \frac{1}{r_1r_2} - \frac{\cos^2\omega}{R^2} = \frac{\sin^2\omega}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Aus d) und e) aber folgt die Gruppe

$$\text{f)}\quad \begin{aligned} \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{2}{R} &= \sin^2\omega\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}-\frac{2}{R}\right), \\ \frac{1}{r_1r_2}-\frac{1}{R^2} &= \sin^2\omega\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}-\frac{1}{R^2}\right); \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}-\frac{1}{R^2}\right) - \frac{1}{r_1r_2}\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}-\frac{2}{R}\right)$$
$$+\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R\varrho_1}+\frac{1}{R\varrho_2}-\frac{2}{\varrho_1\varrho_2}\right) = 0,$$

die letztere durch Elimination von $\sin^2\omega$ zwischen den beiden ersteren.

Die Tangenten $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ dürfen nach der vorausgesetzten Natur der Enveloppe als s p h ä r i s c h c o n j u g i e r t bezeichnet werden.

Für $\omega = 90^0$ zeigen die ersten Gleichungen f) die Identität von r_1, r_2 mit ϱ_1, ϱ_2, d. h. d i e d u r c h e i n e n P u n k t g e h e n d e n K r ü m m u n g s l i n i e n e i n e r F l ä c h e — und zwar sie allein unter allen orthogonalen Systemen — h a b e n s p h ä r i s c h c o n j u g i e r t e T a n g e n t e n.

Denken wir die Geraden $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$, $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ gegen die Krümmungslinie der Fläche unter den Winkeln θ_1, θ_2 geneigt, so ist nach dem Satze von Euler

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\cos^2\theta_1}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta_1}{\varrho_2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\cos^2\theta_2}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\theta_2}{\varrho_2},$$

und nach der ersten Gleichung der Gruppe f)

$$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -\frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho_1}}{\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho_2}},$$

wornach erstens das Product der Tangenten der bezeichneten Winkel constant ist in jedem Punkte der Fläche, und zweitens die Paare sphärisch conjugierter Tangenten eine Involution bilden, deren Doppelstrahlen die Tangenten zweier Normalschnitte sind, die gegen die Krümmungslinie gleich geneigt den Krümmungshalbmesser R besitzen. Für

$$\frac{1}{R} = 0$$

erhält man die Gesetze von Dupin, die den ebenen Berührungsflächen entsprechen. Man erkennt ferner die Krümmungslinien als die einzigen Linien auf den Flächen, welche zugleich sphärisch und eben conjugiert sind.*)

203. Regelflächen. Wegen der hervorragenden Wichtigkeit der Regelflächen schliessen wir hier ferner einige Details aus ihrer besonderen Theorie an.**)

Die Tangentenebene in irgend einem Punkte der Fläche enthält nothwendig die erzeugende Gerade, welche durch diesen Punkt hindurchgeht, weil dieselbe eine der Inflexionstangenten der Fläche in demselben ist. (Vergl. Artikel 4.) Jedem anderen Punkte der Erzeugenden entspricht eine andere Tangentenebene (Band I, Artikel 107), welche wie folgt construiert werden kann: Bekanntlich geht durch jeden Punkt des Raumes eine gerade Linie, welche zwei beliebig im Raume gelegene Gerade

*) Wir verweisen auf die elegante Cremona'sche Abhandlung.

**) Die Theoreme dieses Abschnitts sind vorzüglich aus Chasles's Mémoir im XI. Bande der „Correspondance" von Quetelet (p. 50) und aus Cayley's Abhandlung, „Cambridge and Dublin Mathematical Journal," Vol. VII, p. 171 entnommen.

schneidet, nämlich die Durchschnittslinie der beiden Ebenen, welche durch den Punkt und jene beiden Geraden bestimmt sind. Denken wir daher drei auf einander folgende gerade Erzeugende der Fläche, und durch einen Punkt A in einer von ihnen eine gerade Linie gezogen, welche die beiden andern schneidet; so ist dieselbe, da sie drei auf einander folgende Punkte der Fläche mit einander verbindet, die zweite Inflexionstangente in A, und die Ebene dieser Linie und der Erzeugenden durch A ist daher die Tangentenebene der Fläche in A.

Es ist in dieser Construction vorausgesetzt, dass, wie diess im Allgemeinen stets der Fall ist, je zwei auf einander folgende Erzeugende sich nicht schneiden. Giebt es jedoch in der Fläche singuläre Erzeugende, welche durch eine nächstfolgende Erzeugende geschnitten werden, dann ist die Ebene, welche beide enthält, eine Tangentenebene in jedem Punkte der Erzeugenden. Insbesondere können endlich zwei auf einander folgende Erzeugende zusammenfallen, und dann ist diese Gerade eine doppelte Linie der Fläche.

Die Berührungsebenen in den unendlich entfernten Punkten bilden eine developpable Fläche, die der Regelfläche selbst eng verbunden ist.

204. Das Doppelverhältniss (anharmonische Verh.) von vier Tangentenebenen, welche durch dieselbe gerade Erzeugende gehen, ist dem Doppelverhältniss ihrer vier Berührungspunkte gleich.

Denken wir die drei festen Linien A, B, C durch vier geradlinige Transversalen in den Punkten

$$aa'a''a''', \quad bb'b''b''', \quad cc'c''c'''$$

geschnitten, so gilt zunächst die Doppelverhältnissgleichheit

$$\{bb'b''b'''\} = \{cc'c''c'''\},$$

da jedes von diesen beiden Doppelverhältnissen das Doppelverhältniss der vier Ebenen misst, welche durch A und die vier Transversalen gehen. Ebenso ist

$$\{cc'c''c'''\} = \{aa'a''a'''\},$$

als Ausdrücke des Doppelverhältnisses der vier Ebenen durch B. (Vergl. Band I, Artikel 112.)

Wenn nun die drei festen Linien die auf einander folgenden Erzeugenden einer Regelfläche sind, so schneiden nach dem letzten Artikel die Transversalen eine dieser Erzeugenden A in vier Punkten, für welche die durch A und die Transversalen bestimmten Ebenen die Tangentenebenen sind. Und es ist also hierdurch bewiesen, dass das Doppelverhältniss der vier Ebenen dem Doppelverhältniss der vier Punkte gleich ist, in denen die Transversale A schneidet.

205. Wenn eine Erzeugende einer Regelfläche gegeben ist, so können wir ein einfaches Hyperboloid construieren, welches diese Erzeugende mit der Regelfläche gemein und längs derselben in allen Punkten die nämlichen Tangentenebenen mit ihr besitzt.

Denn aus der Construction des Artikel 203 folgt, dass die Tangentenebene in jedem Punkte der Erzeugenden bestimmt ist durch die zwei nächstfolgenden Erzeugenden der Regelfläche und also, dass zwei Regelflächen sich längs einer Erzeugenden berühren, wenn sie diese und die zwei nächstfolgenden Erzeugenden gemein haben. Irgend drei sich nicht durchschneidende gerade Linien bestimmen aber ein einfaches Hyperboloid (Band I, Artikel 76), und das durch die betrachtete Erzeugende und die zwei nächstfolgenden Erzeugenden bestimmte Hyperboloid berührt also die Fläche wie vorgeschrieben ist.

Setzen wir, um die volle Bedeutung des ausgesprochenen Satzes zu erläutern, voraus, dass die Achse der z ganz in der Fläche n^{ten} Grades liege, so muss jedes Glied ihrer Gleichung entweder x oder y enthalten, so dass diese, nach den Potenzen von x und y geordnet und von der Form

$$u_{n-1}x + v_{n-1}y + u_{n-2}x^2 + v_{n-2}xy + w_{n-2}y^2 + \text{etc.} = 0$$

sein wird, wo u_{n-1}, v_{n-1} Functionen von z vom Grade $(n-1)$, u_{n-2}, v_{n-2}, w_{n-2} solche Functionen vom Grade $(n-2)$, etc. bezeichnen.

Dann ist (vergl. Band I, Artikel 107) die Gleichung der Tangentenebene in irgend einem Punkte der Achse

$$u'_{n-1}x + v'_{n-1}y = 0,$$

wenn wir durch u'_{n-1} und v'_{n-1} das Resultat der Substitution der Coordinaten des Berührungspunktes in u_{n-1}, v_{n-1} respective bezeichnen.

Umgekehrt folgt, dass eine Ebene

$$y = mx$$

die Fläche in $(n-1)$ Punkten berührt, welche durch die Gleichung

$$u_{n-1} + mv_{n-1} = 0$$

bestimmt werden.

Wenn aber u_{n-1}, v_{n-1} einen gemeinschaftlichen Factor u_p haben, so dass die Glieder vom ersten Grade in x und y in der Form

$$u_p\,(u_{n-p-1}x + v_{n-p-1}y) = 0$$

geschrieben werden können, so ist die Gleichung der Tangentenebene

$$u'_{n-p-1}x + v'_{n-p-1}y = 0,$$

und eine Ebene

$$y = mx$$

berührt die Fläche in $(n-p-1)$ Punkten.

Man erkennt leicht, dass die Punkte der Achse, für welche

$$u_p = 0$$

ist, Doppelpunkte der Fläche darstellen.

Nun ist in dem Theorem dieses Artikels ausgesprochen, dass, so lange die Achse der z nicht eine isolierte gerade Linie der Fläche ist, sondern vielmehr eine von einem System von geraden Erzeugenden, welche die Fläche besitzt, die Form der Gleichung sein müsse

$$u_{n-2}\,(ux + vy) + \ldots = 0,$$

so dass die Tangentenebene der Fläche in irgend einem Punkte der Achse die nämliche ist wie für das Hyperboloid

$$ux + vy = 0,$$

nämlich

$$u'x + v'y = 0.$$

Irgend eine Ebene

$$y = mx$$

berührt somit die Fläche in nur einem Punkte. Der Factor u_{n-2} zeigt aber an, dass in jeder Erzeugenden $(n-2)$ Punkte liegen, welche Doppelpunkte der Fläche sind.

206. Wir können diess für eine wichtige Klasse der Regelflächen bestätigen, nämlich für diejenigen, deren geradlinige Erzeugende durch zwei Gleichungen

$$at^m + bt^{m-1} + ct^{m-2} + \ldots = 0,$$
$$a't^n + b't^{n-1} + c't^{n-2} + \ldots = 0$$

ausgedrückt werden können, in denen a, a', b, b', ... lineare Functionen der Coordinaten und t einen veränderlichen Parameter vorstellen.

Die durch Elimination von t erhaltene Gleichung der Fläche kann nach den Gesetzen der Elimination *) in der Form einer Determinante dargestellt werden, deren erste Vertical- und Horizontalreihe identisch sind, nämlich

$$(ab'), \quad (ac'), \quad (ad'), \ \ldots$$

Nun ist die Linie

$$a = 0, \quad a' = 0$$

eine Erzeugende, nämlich die dem Parameterwerth $t = \infty$ entsprechende, und wir sahen eben, dass jedes Element der ersten Horizontal- und Verticalreihe entweder a oder a' enthält; da nun jedes Glied der Entwickelung der Determinante einen Factor aus der ersten Verticalreihe sowohl als aus der ersten Horizontalreihe enthält, so ist diese Entwickelung vom zweiten Grade in a und a', denjenigen Theil nur ausgenommen, welcher mit dem ersten Elemente in beiden Reihen, d. i. mit (ab') multiplicirt ist. Dieser Theil der Gleichung aber, der in a, a' nur vom ersten Grade ist, bestimmt die Tangente in irgend einem Punkte der geraden Linie aa', und die Regelfläche wird daher längs dieser Erzeugenden von dem Hyperboloid

$$ab' - a'b = 0$$

berührt.

Wenn

$$a = 0, \quad b = 0$$

oder

$$a' = 0, \quad b' = 0$$

dieselbe Ebene darstellen, so durchschneidet die betrachtete Erzeugende die nächstfolgende und die Ebene

$$a = 0$$

berührt die Fläche nach ihrer ganzen Länge.

Wenn

$$b = ka, \quad b' = ka'$$

sind, so verschwinden die Glieder, welche in a, a' vom ersten Grade sind, aus der Gleichung der Fläche und die Erzeugende aa' ist eine Doppellinie derselben.

207. Indem wir zur allgemeinen Theorie der Regelflächen zurückkehren, erkennen wir, dass jede durch eine Erzeugende gehende Ebene mit der Fläche ausser dieser Geraden eine Curve vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade gemein haben wird, die die Erzeugende in

---

*) Vergl. „Vorlesungen", Artikel 46 f.

$(n-1)$ Punkten schneidet. Jeder dieser Punkte ist als ein Doppelpunkt in der Schnittcurve nach Artikel 205 in gewissem Sinne ein Berührungspunkt der Ebene mit der Fläche. Aber nach Artikel 205 haben wir gesehen, dass nur einer von ihnen ein eigentlicher Berührungspunkt der Ebene ist, dass dagegen die übrigen $(n-2)$ feste Punkte der Erzeugenden sind, welche mit der Drehung der Ebene um dieselbe nicht variieren. Es sind die Punkte, in welchen diese Erzeugende andere nicht nächstfolgende Erzeugende durchschneidet, also Punkte einer Doppelcurve auf der Fläche. Eine windschiefe Regelfläche hat daher im Allgemeinen eine Doppelcurve, welche jede Erzeugende in $(n-2)$ Punkten durchschneidet. Es kann geschehen, dass zwei oder mehrere von diesen $(n-2)$ Punkten zusammenfallen und dass die vielfache Curve der Fläche von einer höhern als der zweiten Ordnung ist. In dem im letzten Artikel betrachteten Falle kann bewiesen werden,*) dass die vielfache Curve von der Ordnung

$$\frac{(m+n-1)(m+n-2)}{1 \cdot 2}$$

ist und dass in ihr

$$\frac{(m+n-2)(m+n-3)(m+n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

dreifache Punkte existieren.

Eine Regelfläche, welche eine Doppellinie besitzt, wird im Allgemeinen keine Cuspidal- oder Rückkehrkante haben, ohne dass sie abwickelbar ist und ihr ebener Querschnitt ist daher eine Curve mit Doppelpunkten, aber ohne Spitzen.

208. Betrachten wir nun den Kegel, der aus irgend einem Punkte als Scheitel der Regelfläche umgeschrieben ist.

Da jede Ebene, welche eine Erzeugende enthält, die Fläche in einem Punkte berührt, so sind die Tangentenebenen des Kegels die Ebenen, welche seine Spitze mit den Erzeugenden der Fläche bestimmt. Der Kegel hat im Allgemeinen keine stationären Tangentenebenen, da eine solche Ebene erfordert, dass zwei auf einander folgende Erzeugende in einer Ebene liegen, die zugleich die Spitze des Kegels enthält; es liegen aber nur in spe-

---

*) Vergl. die Untersuchung „Ueber die Ordnung von Systemen von Gleichungen.“ im letzten Kapitel dieses Werkes.

ciellen Fällen zwei auf einander folgende Erzeugende in einer Ebene, die Zahl solcher Ebenen ist somit beschränkt und im Allgemeinen kann nicht eine von ihnen durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen. Die Klasse des Kegels, da sie ausgedrückt ist durch die Zahl seiner Tangentenebenen, welche durch eine beliebige seine Spitze enthaltende Gerade gehen, ist in Folge dessen gleich der Anzahl der Erzeugenden der Fläche, welche diese Linie schneiden, d. h. gleich der Ordnung oder, wie wir wegen dieser Zusammenstimmung sagen wollen, gleich dem **Grade** der Fläche. (Vergl. Band I, Artikel 161, Anmerkung.)

Wir haben nun bewiesen, dass die Klasse des Kegels dem Grade oder der Ordnung eines ebenen Querschnitts der Fläche gleich ist, und dass der erstere keine stationären Tangentenebenen, der letztere keine stationären oder Cuspidalpunkte hat. Dann beweisen aber die Gleichungen, welche die Anzahlen von irgend dreien der Singularitäten einer Curve verbinden, dass die Zahl der Doppeltangentenebenen des Kegels der Zahl der Doppelpunkte eines Schnittes der Fläche gleich sein muss; mit andern Worten, dass die Zahl der durch einen angenommenen Punkt gehenden Ebenen, welche zwei Erzeugende enthalten, gleich der Zahl der Durchschnittspunkte zweier Erzeugenden ist, welche in einer angenommenen Ebene liegen.*)

209. Wir erläutern die vorige Theorie durch Aufzählung einiger von den **Singularitäten der Regelfläche, welche durch eine gerade Linie erzeugt wird, die stets drei feste Leitcurven schneidet,** deren respective Grade m_1, m_2, m_3 sind.**)

Der Grad oder die Ordnung der erzeugten Fläche ist der Zahl der Erzeugenden gleich, welche eine angenommene gerade Linie durchschneiden, also gleich der Zahl der Durchschnittspunkte der Curve m_1 mit der Regelfläche, welche die Curven m_2, m_3 und die angenommene Gerade zu Leitlinien hat, d. h. das $m_1$fache des Grades der letztern Fläche. Dieser letztere ist ferner in gleicher Weise das $m_2$fache vom Grade einer Regelfläche, welche zwei gerade Linien und die Curve m_3 zu Leitlinien hat, und der Grad der letzten endlich aus demselben Grunde

*) Diese Theoreme verdankt man Cayley. „Cambridge and Dublin Math. Journ.“, Vol. VII, p. 171.

**) Der Verfasser gab eine Discussion dieser Fläche im „Cambridge and Dublin Math. Journ.“, Vol. VIII, p. 45.

$= 2m_3$. Somit ist der Grad der Regelfläche von den Directrixcurven m_1, m_2, m_3

$$= 2m_1 m_2 m_3.$$

Die drei Curven m_1, m_2, m_3 selbst sind vielfache Linien in der Fläche, deren Ordnungen respective $m_2 m_3$, $m_3 m_1$, $m_1 m_2$ sind. Denn durch irgend einen Punkt der ersten Curve gehen $m_2 m_3$ Erzeugende, die Durchschnittslinien der über den Curven m_2, m_3 stehenden Kegel, welche diesen Punkt zum Scheitel haben.

210. Aus der Ordnungszahl der Regelfläche und dem Artikel 207 folgt, dass jede Erzeugende von

$$(2m_1 m_2 m_3 - 2)$$

andern Erzeugenden geschnitten wird. Da sie aber in den Punkten, die sie mit den Leitcurven gemein hat,

$$(m_2 m_3 - 1) + (m_3 m_1 - 1) + (m_1 m_2 - 1)$$

andere Erzeugende schneidet, so muss sie ausserhalb der Leitcurven noch

$$2m_1 m_2 m_3 - (m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2) + 1$$

Erzeugende durchschneiden.

Wir können diess Resultat unabhängig begründen, indem wir die Zahl der Erzeugenden untersuchen, welche eine gegebene Erzeugende durchschneiden. Wir bestimmen zuerst den Grad der Regelfläche, deren Leitlinien die Curven m_1, m_2 und die gegebene Erzeugende sind, d. h. eine gerade Linie, welche beide durchschneidet.

Diese gerade Linie ist zuerst eine vielfache Linie von der Ordnung $(m_1 m_2 - 1)$, weil offenbar durch jeden Punkt in ihr diese Zahl von geraden Linien — die gegebene Gerade selbst ungerechnet — gezogen werden kann, welche die Curven m_1, m_2 durchschneiden. Dann ist der Schnitt der Fläche mit einer durch jene Gerade gelegten Ebene zusammengesetzt aus der $(m_1 m_2 - 1)$fach gezählten Geraden selbst und den $(m_1 - 1)(m_2 - 1)$ Erzeugenden, die man erhält, indem man einen der Durchschnittspunkte der Ebene mit der Curve m_1 mit einem ihrer Durchschnittspunkte mit der Curve m_2 verbindet; somit ist der Grad dieses Schnittes und damit der Grad der Fläche selbst

$$= (m_1 m_2 - 1) + (m_1 - 1)(m_2 - 2) = 2m_1 m_2 - m_1 - m_2.$$

Indem wir diese Zahl mit m_3 multiplicieren, erhalten wir die Zahl der Punkte, in denen diese Regelfläche durch die Curve m_3

geschnitten wird, unter ihnen jedoch den $(m_1 m_2 - 1)$fach gezählten Punkt, in welchem die Curve m_3 die betrachtete Erzeugende schneidet. Die Subtraction dieser Zahl lässt

$$2 m_1 m_2 m_3 - m_2 m_3 - m_1 m_3 - m_1 m_2 + 1$$

als die Zahl der Punkte der Curve m_3, durch welche eine Gerade so gezogen werden kann, dass sie die Curven m_1, m_2 und die angenommene Erzeugende schneiden, d. h. die gesuchte Zahl.

211. Die Regelfläche wird eine gewisse Anzahl von doppelten Erzeugenden enthalten, diejenigen nämlich, welche die eine der Leitcurven zweifach, die beiden übrigen aber einfach durchschneiden.

Die Zahl solcher Geraden, welche die Curve m_1 zweifach schneiden, wird durch ganz den vorigen ähnliche Schlüsse als das $m_2 m_3$fache des Grades der Regelfläche erkannt, welche durch eine Gerade erzeugt wird, die die Curve m_1 zweifach und ausserdem eine willkürliche Gerade schneidet. Ist nun h_1 die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte der Curve m_1, d. h. die Zahl der Geraden, die durch einen angenommenen Punkt so gezogen werden, dass sie die Curve zweimal schneiden, so erhellt, dass die angenommene Gerade in dieser Regelfläche eine vielfache Linie vom Grade h_1 sein würde und dass also der Schnitt einer sie enthaltenden Ebene mit der Fläche aus der $h_1$fach gezählten Geraden und den $\frac{m_1}{2}(m_1 - 1)$ Geraden bestehen würde, welche die Durchschnittspunkte der Ebene mit der Curve m_1 paarweise verbinden. Der Grad dieser Regelfläche ist daher

$$= \frac{m_1}{2}(m_1 - 1) + h_1,$$

und die Gesammtzahl doppelter Erzeugenden in der ursprünglichen Regelfläche ist somit

$$m_2 m_3 \left\{h_1 + \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right\} + m_3 m_1 \left\{h_2 + \tfrac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)\right\} + m_1 m_2 \left\{h_3 + \tfrac{1}{2} m_3 (m_3 - 1)\right\}.$$

Die Ordnung der Doppelcurve im Allgemeinen ist durch eine andere Richtung der Betrachtung zu bestimmen, für welche man die letzten Artikel dieses Bandes vergleichen wolle; aber in dem speciellen Falle, in welchem eine der Leitcurven eine gerade Linie ist, während die beiden andern Curven von den respectiven Ordnungen m_1, m_2 sind, besteht offenbar der durch jene Gerade gehende ebene Schnitt aus der $m_1 m_2$fach zu zählenden Geraden zusammen mit $m_1 m_2$ Geraden, die sich in $\frac{1}{2} m_1 m_2 (m_1 - 1)(m_2 - 1)$ Punkten durchschneiden, welche nicht in den Leitcurven liegen. Diese letztere Zahl ist also in diesem Falle die Ordnung der Knoten- oder Doppelcurve, sobald sie nicht die geradlinige Directrix in einer gewissen Zahl von Punkten schneidet, welche dann, wenn diess geschieht, zu der Ordnung der Curve addiert werden muss. Es giebt übrigens ausserdem doppelte Erzeugende, wie es im ersten Theil dieses Artikels bestimmt ist.

Man erkennt in gleicher Weise, dass die Fläche, welche durch eine gerade Linie erzeugt wird, die eine Curve von der Ordnung m zweifach und überdiess eine feste Gerade schneidet, ausser ihren doppelten Erzeugenden eine Doppelcurve enthalten wird, deren Ordnung mindestens $= \frac{1}{8} m (m-1)(m-2)(m-3)$ ist.

212. Der Grad der Regelfläche, wie man ihn nach Artikel 209 berechnet, reduciert sich, sobald ein Paar der Leitcurven gemeinschaftliche Punkte besitzt.*)

Wenn die Curven m_2, m_3 einen Punkt gemein haben, so ist offenbar der Kegel, der aus diesem Punkte durch m_1 beschrieben wird, ein Theil des Systems und die Ordnung der eigentlichen Regelfläche wird daher um m_1 vermindert. Und allgemein, wenn die drei Leitcurven m_1, m_2, m_3 respective eine Anzahl von α, β, γ Punkten paarweis gemein haben, so wird die Ordnung der eigentlichen Regelfläche um

$$m_1\alpha + m_2\beta + m_3\gamma$$

reduciert. Wenn also z. B. die Leitlinien zwei gerade Linien und eine Curve dritter Ordnung sind, so ist die Fläche im Allgemeinen von der sechsten Ordnung; aber ihre Ordnung ist vier, wenn jede der Geraden die Curve dritter Ordnung schneidet; sie ist zwei, wenn jede der Geraden sie zweifach durchschneidet; wenn die eine derselben die Curve dritter Ordnung zweifach, die andere sie einfach schneidet, so ist die Fläche von der dritten Ordnung und die erste der beiden Geraden ist in ihr eine Doppellinie. Denken wir ferner als die Leitcurven irgend drei ebene Querschnitte eines einfachen Hyperboloids. Nach der allgemeinen Theorie müsste die entstehende Fläche von der sechzehnten Ord-

*) Des Verfassers Aufmerksamkeit ward durch **Cayley** auf diese Reduction gelenkt.

nung sein; da aber jedes Paar der Leitcurven zwei Punkte mit einander gemein haben, nämlich die Punkte, in welchen die Durchschnittslinie ihrer Ebenen das Hyperboloid durchschneidet, so enthält die Fläche der sechzehnten Ordnung sechs Kegel zweiten Grades, die durch die doppelt zählende Originalfläche zweiter Ordnung zur sechzehnten Ordnung ergänzt werden. Dass diese doppelt zählen muss, geht aus dem Umstande hervor, dass die vier Erzeugenden, welche durch einen Punkt in einer der Leitcurven hindurchgehen, aus zwei Kegelseiten und zwei Erzeugenden des Hyperboloids bestehen.

Wenn wir allgemeiner drei ebene Schnitte einer Regelfläche als Leitcurven wählen, so enthält die Gleichung der erzeugten Regelfläche ausser den die Kegelflächen und die Originalfläche darstellenden Factoren einen Factor, der eine andere durch die gegebenen Curven gehende Regelfläche darstellt. Denn es ist im Allgemeinen möglich, gerade Linien, welche alle drei Curven durchschneiden, zu bestimmen, die nicht unter den Erzeugenden der Originalfläche sind.

213. Wir kehren zu der allgemeinen Theorie der Regelflächen zurück. Es ist bekannt, dass die Ebenen eines Büschels und die durch ihre gemeinsame Scheitelkante gehenden Normalebenen derselben ein involutorisches System bilden, so dass das Doppelverhältniss von beliebigen vier Ebenen desselben stets dem Doppelverhältniss ihrer conjugierten gleich ist. Daraus folgt nach Artikel 204, dass das System der Berührungspunkte einer um eine Erzeugende sich drehenden Ebene und der zu ihr stets normalen Ebene, welche dieselbe Erzeugende enthält, ein involutorisches System ist; in andern Worten, die Systeme der Berührungspunkte der Ebenen eines Büschels mit der Regelfläche und der Punkte, in welchen dieselben Ebenen zur Fläche normal sind, bilden eine Involution. Das Centrum des Systems ist derjenige Punkt, in welchem diejenige Ebene, welche die Fläche in unendlicher Entfernung berührt, zu ihr normal ist. Nach den bekannten Eigenschaften der Involution bilden die Entfernungen dieses Punktes von den Punktepaaren, in denen eine und dieselbe Ebene die Fläche berührt und zu ihr normal ist, Rechtecke von constanter Fläche.

214. Die Normalen einer Regelfläche in den Punkten einer Erzeugenden bilden ein hyperbolisches Paraboloid.

Denn sie sind zuerst alle einer Ebene, nämlich der Normalebene der erzeugenden Geraden, parallel. Man kann von dem Doppelverhältniss von vier zur nämlichen Ebene parallelen Geraden sprechen, indem man das von vier Parallelen durch denselben Punkt meint. In diesem Sinne ist dann das Doppelverhältniss von vier Normalen dem der vier entsprechenden Tangentenebenen gleich, d. i. gleich dem ihrer Berührungspunkte nach Artikel 204 und dem der Fusspunkte der Normalen in der Erzeugenden nach Artikel 212. Aber ein System von Linien, die einer gegebenen Ebene parallel sind und eine gegebene Gerade schneiden, erzeugt ein hyperbolisches Paraboloid, wenn das Doppelverhältniss von beliebigen vier unter ihnen dem Doppelverhältniss der Punkte gleich ist, welche sie in jener Geraden bestimmen. Die Umkehrung des Satzes ist leicht zu erweisen und daraus ergiebt sich auch seine Richtigkeit.

Die Punkte, in welchen vier Erzeugende eines hyperbolischen Paraboloids von der ersten eine Erzeugende der zweiten Art durchschneiden, sind die Berührungspunkte der vier Tangentenebenen, welche sie enthalten, und das Doppelverhältniss der vier Punkte ist daher dem dieser vier Ebenen gleich. Das Letztere wird aber durch das Doppelverhältniss der vier Linien gemessen, in denen diese vier Ebenen durch eine den vier Erzeugenden parallele Ebene geschnitten werden, und diese Geraden sind den Erzeugenden parallel.

Man beweist leicht den Satz: Wenn man eine Regelfläche durch eine Schaar von Parallelebenen schneidet, so bilden die in Punkten einer Erzeugenden gelegten Tangenten der Schnittcurven ein hyperbolisches Paraboloid. Denkt man den von Parallelen der Erzeugenden gebildeten Kegel, der als Richtungskegel bezeichnet werden darf, so haben seine Tangentenebenen die gleiche Stellung mit den Tangentenebenen der Regelfläche in den unendlich entfernten Punkten der parallelen Erzeugenden.

Daher lassen sich zu einer jeden Regelfläche längs einer Erzeugenden unendlich viele berührende Paraboloide bestimmen, die zu einer Richtungsebene die entsprechende Tangentenebene des Richtungskegels der Fläche haben, während die andere willkürlich ist; nimmt man sie in einer der zu jener rechtwinkligen Lagen, so wird das Paraboloid gleichseitig.

Bei einer Drehung um 90^0 um die Erzeugende wird das

Berührungsparaboloid normal zur Fläche; die feste Richtungsebene ist die entsprechende Normalebene des Richtungskegels. Das Paraboloid der Normalen ist gleichseitig.

Der Centralpunkt der Erzeugenden (Artikel 213) ist der Scheitel des Paraboloids der Normalen.

215. Der Centralpunkt der im Artikel 213 betrachteten Involution ist der Punkt, in welchem jede Erzeugende der nächstfolgenden Erzeugenden am meisten genähert ist, d. h. der Punkt, in dem sie durch die kürzeste Entfernung der beiden Erzeugenden geschnitten wird.

Der Ort der Punkte der Erzeugenden einer Regelfläche, in denen jede der nächstfolgenden Erzeugenden am nächsten ist, wird die Strictionslinie der Fläche genannt. Um einen naheliegenden Fehlschluss zu corrigieren,*) wollen wir bemerken, dass die kürzeste Entfernung zweier auf einander folgenden Erzeugenden kein Element der Strictionslinie ist; denn wenn

$$Aa, \quad Bb, \quad Cc$$

drei auf einander folgende Erzeugende sind, während ab die kürzeste Entfernung der beiden ersten von ihnen ist, so schneidet diese die kürzeste Distanz der zweiten und dritten $b'c$ im Allgemeinen nicht, weil diese Bb in einem von b verschiedenen Punkte b' trifft, und das Element der Strictionslinie ist nicht ab, sondern ab'.

Beispiel 1. Man soll die Strictionslinie des hyperbolischen Paraboloids

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \quad \text{bestimmen.}$$

Die Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda z, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu z, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\mu}$$

drücken ein Paar Erzeugende aus; sie sind der Ebene

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

parallel und ihre kürzeste Entfernung ist daher zu dieser Ebene normal und liegt in der Ebene

---

*) Vergl. Lacroix, t. III, p. 668.

$$(a^2 + b^2)\left\{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \mu z\right\} + (a^2 - b^2)\left\{\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{1}{\mu}\right\} = 0,$$

welche die erste Erzeugende im Punkte

$$z = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\frac{1}{\lambda\mu}$$

durchschneidet. Wenn beide Erzeugende dem Zusammenfallen sich unbegrenzt nähern, so erhalten wir für die Coordinaten des Durchschnittspunktes derselben mit der kürzesten Distanz

$$z = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\frac{1}{\lambda^2},\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\,\frac{1}{\lambda},$$

und also

$$(a^2 + b^2)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = (a^2 - b^2)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

oder

$$\frac{x}{a^3} + \frac{y}{b^3} = 0.$$

Die Strictionslinie ist daher die Parabel, in welcher diese Ebene die Fläche durchschneidet. Wenn man dieselbe Fläche als durch die Erzeugenden des andern Systems gebildet denkt, so hat sie eine zweite Strictionslinie in der Ebene

$$\frac{x}{a^3} - \frac{y}{b^3} = 0.$$

Für das gleichseitige Paraboloid werden die dem Scheitel entsprechenden Erzeugenden die Strictionslinie.

Beispiel 2. Man soll die Strictionslinie des Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmen.

Sie ist die Durchschnittslinie der Fläche mit der durch

$$\frac{a^2}{x^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{b^2}{y^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{c^2}{z^2}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)$$

dargestellten Fläche.

216. Wir haben bei den Betrachtungen dieses Kapitels vielfach auf die Theorie der Krümmung zurückgewiesen, welche in den vorigen Kapiteln entwickelt worden ist. Für die **Regelflächen** wollen wir insbesondere die **Frage der Deformation** oder der Abwickelungsfähigkeit auf andere Flächen noch näher erörtern.*) Wir knüpfen sie an die Formeln f*) des Artikel 158.

*) Sie ist zuerst von **Minding** im XVIII. Bande von „Crelle's Journal", dann von **O. Bonnet** in t. XIX des „Journal de l'école po-

Besitzt die betrachtete Fläche geradlinige Erzeugende, so bilden diese ein System geodätischer Linien, welches für die Coordinatenlinien (v) gewählt werden kann; dann ist nach den Schlussergebnissen des Artikel 159 in jenen Formeln $H_1 = 0$, und man erhält aus der letzten derselben durch Integration

$$Tg^2 = A,$$

wo A eine Function von v allein ist; damit aber aus der ersten

$$\frac{d^2g}{du^2} = \frac{A^2}{g^3}$$

und durch Integration und Ersetzung der Constanten durch Functionen von v für G die Form

$$G = Lu^2 + Mu + N,$$

in welcher $L = 1$, $L = 0$ die beiden einzig zu unterscheidenden Werthe des Coefficienten von u^2 sind.

Damit also auf eine gegebene Fläche Regelflächen abwickelbar seien, ist es nöthig und hinreichend, dass das Quadrat der Entfernung zweier Punkte auf der Fläche in die Form

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

gebracht werden kann, wo G ein Polynom zweiten Grades in u ist.

Beschränkt man sich auf den Fall, in welchem die Fläche reelle gerade Erzeugende besitzt, so kann man diesen Ausdruck für das Quadrat von ds direct geometrisch nachweisen. Sei OO_1 die kürzeste Entfernung zweier unendlich nahe benachbarten Erzeugenden OG, O_1G_1 — also O der Centralpunkt der ersteren — sei O_1G' parallel zu OG und von einem Punkte M der letzteren auf $G'O_1G_1$ die Normale MP gefällt, sowie von T aus PQ normal zu O_1G_1, so dass MQ auch normal zu O_1G_1 ist. Zeichnen

---

lytechnique" und zuletzt von E. Bour (ibid. t. XXII, p. 31 f.) speciell untersucht worden.

O. Bonnet hat auf Grund von allgemeinen Formeln, welche Codazzi bei Gelegenheit des Concurs von 1860 gegeben hat, die Frage untersucht, ob die Regelflächen bei jeder Deformation ihre geradlinigen Erzeugenden behalten müssen und ob diese nicht etwa in ungerade geodätische Linien übergehen können und sie ist natürlich auch so dahin entschieden, dass das erstere stets stattfinden muss. (Vgl. „Comptes rendus" t. LVII, p. 805.)

wir dann auf der Fläche eine beliebige Curve MM_1 und beziehen sie auf ein System geodätischer Coordinaten, das von den geraden Erzeugenden (v) und ihren orthogonalen Trajectorien (u) gebildet wird, so dass also u die Länge der Erzeugenden zwischen dem betrachteten Punkt und einer Anfangstrajectorie und v der Parameter der allgemeinen Gleichung der geradlinigen Erzeugenden ist. Wir denken zur näheren Bestimmung den Richtungskegel der Fläche, d. h. den von Parallelen zu ihren Erzeugenden gebildeten Kegel, und schneiden ihn durch eine concentrische Kugel vom Radius Eins; dann ist v der Bogen der entstehenden sphärischen Curve von einem gewissen Anfangspunkt aus, also der unendlich kleine Winkel $G'O_1G_1 = dv$.

Ist dann $u = \alpha$ die Gleichung der Strictionslinie, also α eine bei der Deformation unveränderliche Function von v und $(u - \alpha)$ die Entfernung des gewählten Punktes M vom zugehörigen Centralpunkt, so ist

$$OM = O_1P = O_1Q = u - \alpha,$$
$$PQ = (u - \alpha)\, dv, \quad QM_1 = du.$$

Aber es ist auch

$$\overline{MM_1}^2 = ds^2 = du^2 + \overline{MQ^2} = du^2 + (u - \alpha)^2\, dv^2 + \overline{MP^2},$$

und die Grösse MP als die kürzeste Entfernung zweier benachbarten Erzeugenden kann durch $\beta\, dv$ vertreten werden, wo β eine bei der Deformation unveränderte Function von v ist. Man hat also

$$G = (u - \alpha)^2 + \beta^2.$$

Die Bedeutung von β giebt sofort für den Winkel der Tangentenebene in einem beliebigen Punkt gegen die Tangentenebene im entsprechenden Centralpunkt den Ausdruck von Chasles

$$\tan J = -\frac{u - \alpha}{\beta}.$$

Da man ferner findet, dass die Krümmung der betrachteten Fläche

$$-\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{du^2} = -\frac{\beta^2}{\left\{(u - \alpha)^2 + \beta^2\right\}^2}$$

ist, so erkennt man, dass für die auf eine Ebene entwickelbaren Regelflächen insbesondere $\beta = 0$ und G ein vollständiges Quadrat sei. Für alle andern Regelflächen mit reellen geraden Erzeugenden ist die Krümmung wesentlich negativ, d. h. es sind die beiden Hauptkrümmungen jedes Punktes wesentlich entgegengesetzt; es sind die windschiefen Flächen, welche dem entsprechen.

Wenn an Stelle von β in dieser Formel $\pm\,\beta\sqrt{-1}$ treten, so sind die Erzeugenden imaginär, aber die Fläche selbst kann in dem Falle der Zulässigkeit beider Vorzeichen, d. h. des Vorhandenseins zweier Systeme gerader Erzeugenden oder in dem einzigen Falle der Flächen zweiten Grades reell sein. Dem Falle $L = 0$ entspricht endlich allein das elliptische Paraboloid.

217. Die beiden letzten allgemeinen Formeln sind der näheren Betrachtung werth. Die erste von ihnen

$$\tan J = -\frac{v-\alpha}{\beta}$$

zeigt, dass die Tangentenebene im unendlich entfernten Punkte der Erzeugenden rechtwinklig zu der im Centralpunkte ist und zwischen beiden Grenzen alle möglichen Lagen gegen diese annimmt. (Artikel 213.) Für jene ist sie parallel der entsprechenden Tangentenebene des Richtungskegels.

Ist der Winkel der Tangentenebene im Centralpunkt und der zweiten durch dieselbe Erzeugende gehenden Tangentenebene $\pm\,45^0$, so erhält man als Berührungspunkte der Letzteren die Brennpunkte oder Doppelpunkte der Involution des Artikel 213.

Dagegen zeigt die zweite

$$-\frac{1}{g}\frac{d^2g}{du^2} = -\frac{\beta^2}{\left\{(v-v)^2+\beta^2\right\}^2},$$

dass die Krümmung im Centralpunkt einen Maximalwerth der absoluten Grösse hat und nach dem unendlich entfernten Punkte der Null zustrebt. Nimmt man auf zwei Erzeugenden Punkte in gleicher Entfernung von den Centralpunkten, so hängen die entsprechenden Krümmungen nur von β ab, von dem auch die gegenseitige Lage der Tangentenebenen abhängt und das bei der Deformation unveränderlich ist.

Für die developpabeln Flächen ist die Grösse β für alle Erzeugenden gleich Null; im Allgemeinen ist sie es nur für eine gewisse Anzahl von Erzeugenden; in der nächsten Nähe derselben hat die Fläche die Eigenschaft, auf eine Ebene entwickelbar zu sein, weil in ihr die Krümmung gleich Null ist. Die Verbindung beider Formeln hebt auch den scheinbaren Widerspruch, der für die Centralpunkte dieser letzteren Erzeugenden stattfindet, da für diese $u - \alpha = 0$, also die Krümmung scheinbar unendlich wird. Diese Punkte vergleichen sich den Rückkehrpunkten der developpabeln Flächen; sie treten hier isoliert auf, während sie dort die Rückkehrcurve bilden. Die Tangentenebene ist in ihnen unbestimmt.*) Alle Curven der scheinbaren Umrisse einer windschiefen Fläche gehen durch diese Punkte und tangieren in ihnen die entsprechenden Erzeugenden.

Die Krümmung ist ferner Null für die Erzeugenden, denen $\beta = \infty$ entspricht; und für dieselben Werthe ist $\tan J = \infty$, so lange nicht $(v - \alpha)$ selbst unendlich wird. Diese Erzeugenden sind zu allen Curven der scheinbaren Umrisse asymptotisch. Jene Punkte und diese Geraden erscheinen also wie Ecken und Kanten eines Polyeders stets im scheinbaren Umriss.**)

In jeder windschiefen Regelfläche bestimmen irgend vier asymptotische Linien auf den geraden Erzeugenden Punktesysteme von constantem Doppelverhältniss, oder die asymptotischen Linien bestimmen in den geraden Erzeugenden homographische Theilungen. Hat die Fläche eine Directorebene, so werden diese Theilungen proportional. Die wohlbekannten Eigenschaften der Flächen zweiten Grades sind hierin enthalten.***)

218. Für das Problem der Abwickelung der Regelflächen sind die (v) Gerade und somit die λ_1, μ_1, ν_1 für die ganze Erstreckung einer (v) constant, also von v allein abhängig. Die Coordinaten X_0, Y_0, Z_0 der Punkte der Strictionslinie werden Functionen von v allein sein, deren Werth man aus den allgemeinen Ausdrücken von X, Y, Z findet für $u = \alpha$. Umgekehrt gehen aus X_0, Y_0, Z_0 die X, Y, Z hervor, indem man jenen die Projectionen der Länge $(u - \alpha)$ nach der Richtung $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ hinzufügt; d. h. die allgemeinen Gleichungen der windschiefen Flächen sind

*) Das allereinfachste Beispiel bietet die Spitze des Kegels.

**) Diese Beziehungen der scheinbaren Umrisse der Regelflächen zu gewissen Punkten und Linien sind von de la Gournerie („Journal de l'école polytechnique", t. XX) zuerst gegeben.

***) Vergl. P. Serret, „Theorie nouvelle des lignes a double courbure", p. 167, 169.

$$\text{a)}\quad X = (u-\alpha)\cos\lambda_1 + X_0,\quad Y = (u-\alpha)\cos\mu_1 + Y_0,\quad Z = (u-\alpha)\cos\nu_1 + Z_0.$$

Durch Differentiation erhält man daraus

$$dX = \cos\lambda_1\, du + \left\{(u-\alpha)\frac{d\cos\lambda_1}{dv} - \frac{d\alpha}{dv}\cos\lambda_1 + \frac{dX_0}{dv}\right\} dv,$$
$$dY = \cos\mu_1\, du + \left\{(u-\alpha)\frac{d\cos\mu_1}{dv} - \frac{d\alpha}{dv}\cos\mu_1 + \frac{dY_0}{dv}\right\} dv,$$
$$dZ = \cos\nu_1\, du + \left\{(u-\alpha)\frac{d\cos\nu_1}{dv} - \frac{d\alpha}{dv}\cos\nu_1 + \frac{dZ_0}{dv}\right\} dv.$$

Wegen der Relation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = du^2 + \left\{(u-\alpha)^2 + \beta^2\right\} dv^2$$

müssen somit zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichungen und den Parametern α, β die folgenden Gleichungen stattfinden:

$$\left(\frac{d\cos\lambda_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu_1}{dv}\right)^2 = 1,$$
$$\text{b)}\quad \cos\lambda_1\frac{dX_0}{dv} + \cos\mu_1\frac{dY_0}{dv} + \cos\nu_1\frac{dZ_0}{dv} = \frac{d\alpha}{dv},$$
$$\frac{d\cos\lambda_1}{dv}\frac{dX_0}{dv} + \frac{d\cos\mu_1}{dv}\frac{dY_0}{dv} + \frac{d\cos\nu_1}{dv}\frac{dZ_0}{dv} = 0,$$
$$\left(\frac{dX_0}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dY_0}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dZ_0}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{dv}\right)^2 + \beta^2.$$

Da die drei Cosinus nur zwei verschiedene Functionen repräsentieren, so kann man setzen

$$\cos\lambda_1 = \cos a_1 \sin b_1,\quad \cos\mu_1 = \sin a_1 \sin b_1,\quad \cos\nu_1 = \cos b_1,$$

und die erste der vorigen Gleichungen geht über in

$$db_1^2 + \sin^2 b_1\, da_1^2 = dv^2.$$

Dabei bleibt der eine der Winkel a_1, b_1 willkürlich und da diese Gleichung einfach ausdrückt, dass dv der Bogen der sphärischen Schnittcurve sei, welche der Richtungskegel bestimmt, so kann dieser letztere völlig beliebig gewählt werden, so lange man die gesuchte Fläche nur der Bedingung unterwirft, dass sie auf eine gegebene Fläche (α, β) abwickelbar sei. Man kann also eine Regelfläche immer in der Art deformieren, dass ihre Erzeugenden denen eines beliebigen Richtungskegels parallel werden; insbesondere also auch einer Ebene.

219. Hat man diesen Kegel willkürlich gewählt*), so kennt man $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ in Function von v; α und β sind gegeben und man leitet aus den drei vorher nicht benutzten Bedingungsgleichungen für die drei Unbekannten die Formeln ab

$$\text{c)}\quad \begin{aligned} \frac{dX_0}{dv} &= \frac{d\alpha}{dv}\cos\lambda_1 + \beta\left(\cos\mu_1\frac{d\cos\nu_1}{dv} - \cos\nu_1\frac{d\cos\mu_1}{dv}\right), \\ \frac{dY_0}{dv} &= \frac{d\alpha}{dv}\cos\mu_1 + \beta\left(\cos\nu_1\frac{d\cos\lambda_1}{dv} - \cos\lambda_1\frac{d\cos\nu_1}{dv}\right), \\ \frac{dZ_0}{dv} &= \frac{d\alpha}{dv}\cos\nu_1 + \beta\left(\cos\lambda_1\frac{d\cos\mu_1}{dv} - \cos\mu_1\frac{d\cos\lambda_1}{dv}\right).^{**)} \end{aligned}$$

Die binomischen Factoren von β sind hier die Richtungscosinus λ_0, μ_0, ν_0 der gemeinschaftlichen Normalen der Erzeugenden (v) und der nächstfolgenden Erzeugenden. Diese Gerade ist die Tangente der orthogonalen Trajectorie der Erzeugenden, welche durch den betrachteten Centralpunkt geht, während die Grössen

$$\frac{d\cos\lambda_1}{dv},\quad \frac{d\cos\mu_1}{dv},\quad \frac{d\cos\nu_1}{dv}$$

die Richtungscosinus einer zur vorigen und zur Erzeugenden (λ_1, μ_1, ν_1) normalen Geraden sind, die die äussere Normale im Centralpunkt ist; und sie können daher analog zu Artikel 157 durch l_0, m_0, n_0 bezeichnet werden. Jene Gleichungen werden

$$\text{d)}\quad \begin{aligned} \frac{dX_0}{dv} &= \frac{d\alpha}{dv}\cos\lambda_1 + \beta\cos\lambda_0, \\ \frac{dY_0}{dv} &= \frac{d\alpha}{dv}\cos\mu_1 + \beta\cos\mu_0, \\ \frac{dZ_0}{dv} &= \frac{d\alpha}{dv}\cos\nu_1 + \beta\cos\nu_0 \end{aligned}$$

*) Man kann statt dessen die Erzeugende einer andern Bedingung unterwerfen, z. B. eine gegebene gerade oder krumme Directrix zu schneiden; oder eine gegebene Fläche stets zu tangieren. Denn die λ_1, μ_1, ν_1 repräsentieren die Winkel der Erzeugenden (v) mit den Achsen und sind daher nur den zwei Bedingungen

$$\cos^2\lambda_1 + \cos^2\mu_1 + \cos^2\nu_1 = 1,$$
$$\left(\frac{d\cos\lambda_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu_1}{dv}\right)^2 = 1$$

unterworfen.

**) Die Substitution ihrer Integrale in die Gleichungen a) führt zur Darstellung aller auf einander abwickelbaren Regelflächen.

und es ist zu bemerken, dass β durch $-\beta$ ersetzt werden kann, unter gleichmässiger Erfüllung der Gleichungen a). Die beiden Flächen, welche diesem Zeichenwechsel entsprechen, sind auf einander abwickelbar und können als symmetrische Flächen bezeichnet werden. Man erhält daraus ferner

$$g\cos\lambda = \beta\cos\lambda_0 + (u-\alpha)\cos l_0,\; g\cos l = \beta\cos l_0 - (u-\alpha)\cos\lambda_0,$$
$$g\cos\mu = \beta\cos\mu_0 + (u-\alpha)\cos m_0,\; g\cos m = \beta\cos m_0 - (u-\alpha)\cos\mu_0,$$
$$g\cos\nu = \beta\cos\nu_0 + (u-\alpha)\cos n_0,\; g\cos n = \beta\cos n_0 - (u-\alpha)\cos\nu_0,$$

und durch Einführung des Winkels J, den die Tangentenebene im Punkte (u, v) mit der im Centralpunkte bildet, (Artikel 216) wegen $\beta = g\cos J$, $u-\alpha = -g\sin J$, also

$$\cos\lambda = \cos\lambda_0\cos J - \cos l_0\sin J,\; \cos l = \cos l_0\cos J + \cos\lambda_0\sin J,$$
$$\cos\mu = \cos\mu_0\cos J - \cos m_0\sin J,\; \cos m = \cos m_0\cos J + \cos\mu_0\sin J,$$
$$\cos\nu = \cos\nu_0\cos J - \cos n_0\sin J,\; \cos n = \cos n_0\cos J + \cos\nu_0\sin J.$$

Mit Hilfe der Formeln der Artikel 157, 158 kann man dann die Werthe von H, H_1, T bestimmen und erhält für v_1 als eine willkürliche Function von v

$$H_1 = 0,\quad T = -\frac{\beta}{g^2},\quad H = -\frac{d(J+v_1)}{g\,dv},$$

oder

$$H = -\frac{\frac{dv_1}{dv}\left\{(u-\alpha)^2+\beta^2\right\} + \frac{d\beta}{dv}(u-\alpha) + \beta\frac{d\alpha}{dv}}{g^3}.$$

Somit erfährt die Torsion der geradlinigen Erzeugenden durch die Deformation keinerlei Veränderung, während in den Ausdruck von H die von der Wahl des Richtungskegels abhängige Grösse dv_1 eintritt, welche geometrisch als der Winkel der kürzesten Entfernung OO_1 gegen die nächstfolgende Lage der kürzesten Entfernung, der Contingenzwinkel des Richtungskegels, das Element des sphärischen Schnittes des Supplementarkegels und analytisch durch die Formeln definiert ist

$$\begin{aligned} dv_1 &= \cos\lambda_0\, d\cos l_0 + \cos\mu_0\, d\cos m_0 + \cos\nu_0\, d\cos n_0 \\ &= -\cos l_0\, d\cos\lambda_0 - \cos m_0\, d\cos\mu_0 - \cos n_0\, d\cos\nu_0 \\ &= (d\cos^2\lambda_0 + d\cos^2\mu_0 + d\cos^2\nu_0)^{\frac{1}{2}} \\ &= (d\cos^2 l_0 + d\cos^2 m_0 + d\cos^2 n_0)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da H die Krümmung des zur Erzeugenden normalen Schnittes und $g\,dv$ der Bogen dieses Schnittes ist, so ist $-(dJ + dv_1)$

sein Contingenzwinkel; es verändert sich aber J nicht bei der Deformation der Fläche, und man erhält nach dem eben erläuterten Wesen der Grösse dv_1 den Satz: Wenn man eine windschiefe Fläche deformiert, so variiert der Contingenzwinkel aller zur nämlichen Erzeugenden normalen Schnitte genau nach der Grösse, um welche der entsprechende Contingenzwinkel des Richtungskegels wächst oder abnimmt.

220. Wenn man die gefundenen Werthe von H, H_1, T in die Schlussgleichung des Artikel 159 einsetzt, so erhält man einerseits die geraden Erzeugenden, andererseits Curven von der Differentialgleichung

$$\frac{du}{g\,dv} = -\frac{Hg^2}{2\beta} = \frac{1}{2\cos J}\,\frac{d\,(J+v_1)}{dv},$$

oder

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{dv_1}{dv}(u-\alpha)^2 + \frac{d\beta}{dv}(u-\alpha) + \beta^2\frac{dv_1}{dv} + \beta\,\frac{d\alpha}{dv}\right\}$$

als Ort der Punkte von der Krümmung Null. Wir setzen

$$\tan\delta = \frac{du}{g\,dv},$$

indem wir δ als den Winkel dieser Linie mit der Perpendicularen betrachten. Man kann die Gleichung der Krümmungslinien nicht allgemein integrieren, kann aber für den Fall der Regelflächen an ihrer Statt gewisse andere Curven betrachten, welche in jedem Punkte die Elemente der Krümmung der Fläche bestimmen. Ihre Gleichung ist

$$J + v_1 = w,$$

mit w als einer willkürlichen Constanten; nennt man γ den Winkel, unter welchem diese Linien (w) die Perpendiculare schneiden, so ist

$$\tan\gamma = \frac{dv}{g\,du} = -\frac{\dfrac{d\,(J+v_1)}{dv}}{g\,\dfrac{dJ}{du}} = \frac{1}{\cos J}\,\frac{d\,(J+v_1)}{dv}$$

und somit

$$\tan\delta = \tfrac{1}{2}\tan\gamma,$$

d. h. die Richtung der Perpendicularen und die der Linie (w) sind in jedem Punkte die Richtungen von

Tangenten der hyperbolischen Indicatrix der Fläche nach zwei conjugierten Durchmessern.

Wenn man also die Linie w gezeichnet denkt, so kennt man für den betreffenden Punkt der Fläche zwei conjugierte Durchmesser der Indicatrix und erhält die Richtungen der Asymptoten und der Hauptachsen, und selbst die Grösse dieser Letzteren, da ihr Product bekannt ist.

Denken wir beispielsweise eine Fläche, deren Erzeugende einer festen Ebene parallel sind und diese Ebene in einen Kegel transformiert. Sei OM die Erzeugende, MN die Perpendiculare bis zu nächsten Erzeugenden O_1N, MN' die Tangente der Curve (w) und MP die zweite Asymptote der Indicatrix, d. h. P die Mitte von NN'. Man kann nun die Ebene der wagerechten Achsen in zweierlei Art auf einen Kegel aufrollen; nämlich im positiven Sinne, so dass H auf Grund des negativen $-dv_1$ vermindert wird, und im negativen Sinne, mit wachsendem H und also unter Annäherung der Linien MN', MP an MO.

Dreht man immer im nämlichen Sinn, indem man die Contingenzwinkel des Kegels stetig wachsen lässt, so schneiden sich die Asymptoten der Indicatrix unter einem stetig abnehmenden Winkel, welcher wegen der Unbeschränktheit von $\frac{dv_1}{dv}$ unter jeden beliebigen Werth gebracht werden kann. Wir haben also hier eine unbeschränkte Annäherung, obwohl nie vollständiges Zusammenfallen mit einer developpabeln Fläche, je mehr der Richtungskegel sich zusammenzieht.

221. Wir haben gesehen, dass während der fortschreitenden Deformation der Fläche die zweite Asymptote der Indicatrix um den Punkt M drehend alle möglichen Lagen annehmen kann. Unter allen Formen, die man der Fläche in der Nachbarschaft der Erzeugenden M geben kann, ist daher immer eine, in welcher diese Asymptote mit der Tangente MN der Perpendiculare zusammenfällt. Dann ist in diesem Punkte M der Erzeugenden die Krümmung H gleich Null, die Osculationsebene der Perpendiculare fällt in die Tangentenebene der Fläche, und die Erzeugende ist die Hauptnormale derselben Curve (u).

Für jede Erzeugende einer beliebigen Regelfläche giebt es zwei Punkte, in welchen sie mit der Hauptnormale von (u) zusammenfällt. Die Gleichung für H im Artikel 220 giebt für $H = 0$

$$\frac{dv_1}{dv}(u-\alpha)^2 + \frac{d\beta}{dv}(u-\alpha) + \beta^2\frac{dv_1}{dv} + \beta\frac{d\alpha}{dv} = 0,$$

eine Gleichung vom zweiten Grade für u. Für $dv_1 = 0$ ist eine ihrer Wurzeln unendlich gross, d. h. einer jener Punkte ist in jeder Erzeugenden unendlich entfernt, wenn der Fläche der besondere Fall einer Richtungsebene entspricht. Wenn die zweite Wurzel gleichfalls den Werth Null haben soll, so muss $\frac{d\beta}{dv} = 0$ sein.

Man kann mit Bertrand die Frage aufwerfen, unter welcher Bedingung diese Eigenschaft für alle Punkte einer gewissen orthogonalen Trajectorie der Erzeugenden stattfinden kann? Dazu ist nöthig, dass eine der Wurzeln der obigen Gleichung von v unabhängig sei. Sind diess beide Wurzeln, so sind die Erzeugenden der Fläche gleichzeitig die Hauptnormalen zweier Curven. Ist die Gleichung eine Identität, so besitzen die Erzeugenden der Fläche diese Eigenschaft in Bezug auf alle ihre orthogonalen Trajectorien. Ein constanter Werth, also wegen der Willkürlichkeit des Anfangspunktes $u = 0$, befriedigt die Gleichung für

$$\frac{dv_1}{dv} = -\frac{\beta\frac{d\alpha}{dv} - \alpha\frac{d\beta}{dv}}{\alpha^2 + \beta^2},$$

oder

$$v_1 + \text{arc. tan}\,\frac{\alpha}{\beta} = \text{const.},$$

d. h. man kann dieser Bedingung stets durch schickliche Annahme der Function v_1 genügen, von welcher der Richtungskegel und die specielle Form der Fläche abhängt.

Hat man sie erfüllt, so wird die Gleichung der Curven von der Krümmung Null (Artikel 220)

$$2\beta\frac{du}{dv} = u\left\{\frac{dv_1}{dv}(u-2\alpha) + \frac{d\beta}{dv}\right\},$$

also linear, wenn man $\frac{1}{u}$ zur Veränderlichen macht.

Damit die Erzeugenden die Hauptnormalen zweier Curven seien, sind die Bedingungen

$$\alpha - \frac{1}{2}\frac{d\beta}{dv_1} = p, \quad \frac{1}{4}\left(\frac{d\beta}{dv_1}\right)^2 - \beta^2 - \beta\frac{d\alpha}{dv_1} = n^2$$

zu erfüllen, in denen p und n willkürliche Constanten bezeichnen. Die Integration führt zu

$$\alpha = p + m\cos 2v_1, \quad \beta = q + m\sin 2v_1,$$

mit m und q als Constanten, die durch die Relation $n^2 = m^2 - q^2$ verbunden sind.

Die Parameter der Fläche α und β müssen dann die Bedingungsgleichung

$$(\alpha - p)^2 + (\beta - q)^2 = m^2$$

erfüllen für drei schicklich gewählte Constanten p, q, m.

Die Grundgleichung wird endlich eine Identität für die gleichzeitigen Bedingungen

$$v_1 = 0, \quad \frac{d\beta}{dv} = 0, \quad \frac{d\alpha}{dv} = 0,$$

welche nur für die flachgängige Schraubenfläche erfüllt sind. Alle Linien der Krümmung Null sind dann solche orthogonale Trajectorien, welche die Erzeugenden zu Hauptnormalen haben.*)

222. Man kann als Schrauben-Regelflächen alle diejenigen Flächen bezeichnen, welche durch diejenige Bewegung einer Geraden längs einer gegebenen Schraubenlinie erzeugt werden können, bei der sämmtliche Punkte der Geraden Schraubenlinien derselben Neigung und von gleicher Achse durchlaufen. Für dieselben ist die Strictionslinie eine Schraubenlinie, unter allen auf ihr liegenden diejenige, deren Cylinder den kleinsten Halbmesser hat.**) Dieser Halbmesser, die gemeinsame Steigung der Schraubenlinien und der Winkel der Erzeugenden gegen die Achse des Cylinders, d. h. die Grösse b_1, bestimmen die Schrauben-Regelfläche.

---

*) Für die Theorie der Linien auf den windschiefen Flächen vergleiche man P. Serret's „Théorie nouvelle des lignes à double courbure" (p. 143 f.).

**) Für den sehr speciellen Fall der scharfgängigen Schrauben der Technik ist dieser Halbmesser gleich Null und der Cylinder auf seine Achse reduciert, die dadurch zur Directrix wird.

Der Richtungskegel ist ein Umdrehungskegel um jene Achse. Die Centralebene für jede Erzeugende, d. h. die entsprechende Normalebene des Richtungskegels, ist zur Achse parallel, also den Cylinder des scheinbaren Umrisses tangierend. Die Strictionslinie der Fläche ist ihre Berührungslinie mit diesem Cylinder.

Lässt man b_1 von Null bis 180^0 wachsen, so erhält man alle möglichen Flächen dieser Art. Man hat daher für diese Flächen

$$G = (u - rv)^2 + \beta^2,$$

mit r und β als linearen Constanten, von denen β wesentlich positiv ist. Sie sind deshalb auf einfache Umdrehungshyperboloide abwickelbar, welchen dieselbe Form von G entspricht; diese gehören als specielle Fälle der Familie an.

In der That für $\alpha = rv$, $\beta = \text{const.}$, $db_1 = 0$, also $dv = \pm \sin b_1 da_1$ liefert die Integration der Gleichungen c) des Artikel 219 die Gleichungen der Strictionslinie in der Form

$$\begin{aligned} X_0 &= (-\beta \cos b_1 \pm r \sin b_1) \sin b_1 \sin a_1, \\ Y_0 &= -(-\beta \cos b_1 \pm r \sin b_1) \sin b_1 \cos a_1, \\ Z_0 &= (\beta \sin b_1 \pm r \cos b_1) \sin b_1 (a_1 + c). \end{aligned}$$

Um die gewöhnliche Form der Gleichungen der Schraubenlinie zu erhalten, hat man an Stelle des die Richtung des Grundrisses der Erzeugenden bestimmenden Winkels a_1 den entsprechenden Winkel des Radius des Cylinders ω einzuführen, für den

$$a_1 = \frac{\pi}{2} + \omega, \quad \omega = \pm \frac{v}{\sin b_1}, \ \sin a_1 = \cos \omega, \ \cos a_1 = -\sin \omega$$

sind. Für

$$R = (-\beta \cos b_1 \pm r \sin b_1) \sin b_1 \ \text{ u. } \ \frac{h}{2\pi} = (\beta \sin b_1 \pm r \cos b_1) \sin b_1$$

sind sie dann

$$X_0 = R \cos \omega, \quad Y_0 = R \sin \omega, \quad Z_0 = \frac{h}{2\pi} \omega.$$

Man erhält aus den Elementen R, h, b_1 die Constanten r und β des Bogenelements ds^2

$$R + \frac{h}{2\pi} \cot b_1 = \pm r, \quad \frac{h}{2\pi} - R \cot b_1 = \beta.\text{*)}$$

---

*) Für $\beta = 0$ entsteht die entwickelbare Schraubenfläche.

Kennt man nur r und β, so ist eines der drei Elemente der Schrauben-Regelfläche unbestimmt. Die folgende Construction ersetzt die Rechnung: Man trägt auf OX die Länge $OA = \pm r$, auf OZ die Länge $OB = \pm \beta$ ab und beschreibt die vier Kreise OAB. Zieht man dann durch A eine beliebige Sekante AM, welche den Kreis AOB in M schneidet; so erhält man eine Schrauben-Regelfläche, für welche

$$R = OP, \quad \frac{h}{2\pi} = MP, \quad \angle MAP = b_1$$

ist, wenn P den Fusspunkt der von M auf OX gefällten Senkrechten bezeichnet. Jeder Lage der Sekante entsprechen zwei Lösungen, und, da die durch den zweiten Punkt A parallel zur ersten gehende Sekante auch zu berücksichtigen ist, eigentlich vier Lösungen des Problems für jeden Winkel b_1; jedoch hat man nur auf die in der positiven Achse projicierten Punkte M Rücksicht zu nehmen nöthig, da sonst jede Lösung zweimal vorkommt. Unter den besonderen Fällen kann man hervorheben

1) $b_1 = 90^0$, die Schraubenregelfläche mit Richtungsebene; $\cot b_1 = 0, \; R = r, \; \frac{h}{2\pi} = \pm \beta.$

2) $\tan b_1 = \pm \frac{\beta}{r}, \; R = 0, \; \frac{h}{2\pi} = \pm \beta$; die Schraubenregelfläche mit geradliniger Directrix.

3) $\tan b_1 = \pm \frac{r}{\beta}, \; R = r, \; h = 0$; eine Umdrehungsfläche, nämlich ein einfaches Hyperboloid.

Die allgemeinen Formeln liefern die folgende Form der Gleichungen der Schraubenregelflächen für

$$PM = \varrho = (u - rv) \sin b_1,$$

$$X = R \cos \omega - \varrho \sin \omega, \quad Y = R \sin \omega + \varrho \cos \omega,$$

$$Z = \frac{h}{2\pi} \omega + \varrho \cot b_1.$$

Dann ist

$$\begin{array}{lll}
\cos\lambda_1 = -\sin b_1 \sin\omega, & \cos l_0 = \mp \cos\omega, & \cos\lambda_0 = \pm \cos b_1 \sin\omega, \\
\cos\mu_1 = \sin b_1 \cos\omega, & \cos m_0 = \mp \sin\omega, & \cos\mu_0 = \mp \cos b_1 \cos\omega, \\
\cos\nu_1 = \cos b_1 \quad , & \cos n_0 = 0 \quad , & \cos\nu_0 = \pm \sin b_1 \quad ;
\end{array}$$

$$dv_1 = \pm \cot b_1 \, dv = \cos b_1 \, d\omega \quad ;$$

$$T = -\frac{\beta}{g^2}, \quad H = -\frac{d(J+v_1)}{g\,dv} = \mp \frac{\cot b_1}{g} - \frac{\beta r}{g^3}.$$

Die Gleichung der Linien von der Krümmung Null ist

$$\frac{du}{dv} = -\frac{Hg^3}{2\beta} = \frac{r}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{g^2 \cot b_1}{\beta},$$

welche durch Einführung der Grössen ϱ und ω in

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cot b_1}{\beta}\,\varrho^2 - R\right)$$

übergeht und allgemein integriert werden kann.

Die Gleichung der Krümmungslinien wird

$$\beta d\varrho^2 + (\varrho^2 \cot b_1 - \beta R)\,d\omega d\varrho - \frac{h}{2\pi}(\varrho^2 + \beta^2 \sin^2 b_1)\,d\omega^2 = 0$$

und integriert sich im Allgemeinen durch elliptische Functionen; durch gewöhnliche Functionen aber für $h = 0$ oder $\cot b_1 = 0$, welches den Umdrehungsflächen und den Flächen mit Richtungsebene entspricht.*)

223. Einige andere Bemerkungen widmen wir noch den Flächen des Artikel 182 und den Conoidflächen des Artikel 175, um das dort Gegebene zu ergänzen.

Die bezeichneten Flächen sind windschiefe Regelflächen mit Richtungsebenen. Von den Schraubenregelflächen gehört die der flachgängigen Schraube zu ihnen und zwar insbesondere zu den geraden Conoiden, denn ihre gerade Directrix ist normal zu ihrer Richtungsebene. Das Paraboloid ist ein Conoid in zweierlei Art; deshalb hat es auch zwei Strictionslinien. (Artikel 215, Beisp. 1.) Nach Artikel 214 ist die Richtungsebene die gemeinschaftliche Richtungsebene aller berührenden Paraboloide der Regelfläche mit Richtungsebene. Jede Fläche dieser Art hat eine unendlich entfernte Erzeugende, die Stellung ihrer Richtungsebene.

Die Geraden, in welchen die kürzesten Entfernungen der auf einander folgenden Erzeugenden enthalten sind, bilden einen zur Richtungsebene normalen Cylinder, welcher der Fläche nach ihrer Strictionslinie umgeschrieben ist. Diese giebt also den sichtbaren Umriss der orthogonalen Projection der Fläche auf die Richtungs-

---

**) Für die Abwickelung der Umdrehungsflächen verweisen wir auf das Mémoir von E. Bour, a. a. O. p. 78 f.

ebene; sie wird umhüllt von den Projectionen der Erzeugenden. Die Berührungsebenen der Fläche in den Centralpunkten der Erzeugenden sind normal zur Richtungsebene.

Die Conoide mit geradliniger Directrix (Artikel 175), normal zur Richtungsebene, haben die letztere zur Strictionslinie; die Centralpunkte der Erzeugenden liegen also in dieser.

Die nähere Erläuterung dieser Verhältnisse giebt am bequemsten die darstellende Geometrie.

IV. Kapitel.

Von den Flächen, welche aus Flächen zweiter Ordnung abgeleitet werden.

224. Es erscheint angemessen, vor dem Uebergang zur Theorie der Flächen dritter Ordnung einige mit dem Inhalt der vorigen Kapitel näher verbundene Flächen zu untersuchen, welche aus den Flächen zweiten Grades abgeleitet werden. Ableitungen dieser Art sind sehr mannichfaltig und es ist geboten, sich auf die wichtigsten zu beschränken. So erwähnen wir nur gelegentlich der folgenden: In einer auf ihre Hauptachsen bezogenen Fläche zweiten Grades fällt man von den Coordinatenfusspunkten eines Punktes der Fläche auf seinen centralen Radius vector Normalen und sucht den geometrischen Ort der Fusspunkte derselben.

Man findet leicht, dass aus der Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

der Originalfläche allgemein die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$f(xu, yu, zu) = 0$$

hervorgeht für

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2}$$

bei Betrachtung der Fusspunkte der z; für

$$u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^2 + z^2}$$

bei der der x, etc. Und ferner, dass die successive Ableitung einer dritten, vierten, etc. Fläche aus der so erhaltenen zweiten, etc. auf die allgemeine Gleichung

$$f\,(xu^n,\ yu^n,\ zu^n) = 0$$

führt. Insbesondere für das dreiachsige Ellipsoid allgemein

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) u^{2n} = 1,$$

und speciell

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 + y^2)^2;$$

für die Kugel vom Radius r

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = r^2\,(x^2 + y^2)^2.$$

225. Wir handeln hier zuerst von der Wellenfläche von Fresnel.*)

Wenn man auf der Ebene eines beliebigen Centralschnittes einer Fläche zweiten Grades eine Normale im Centrum errichtet und auf ihr von diesem aus die Achsenlängen des Querschnitts abträgt, so ist der Ort der erhaltenen Endpunkte eine Fläche von zwei Mänteln, die Wellenfläche. Ihre Gleichung wird daher direct aus der Formel der Artikel 97, 98 des ersten Bandes abgeleitet, in welcher die Längen der Achsen eines Querschnitts in Function der von der Normale desselben mit den Achsen der Fläche gebildeten Winkel dargestellt wurden. Die nämliche Gleichung drückt die Relation aus, in welcher die Länge des Radius vectors der Wellenfläche zu den Winkeln steht, die er mit den Achsen bildet. Die Gleichung der Wellenfläche ist daher

$$\frac{a^2x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2z^2}{c^2 - r^2} = 0,$$

für

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Oder entwickelt

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)$$
$$-\left\{a^2x^2(b^2+c^2) + b^2y^2(c^2+a^2) + c^2z^2\,(a^2+b^2)\right\} + a^2b^2c^2 = 0.\text{**)}$$

---

*) Mémoires de l'Institut, t. VII, p. 136; 1827 veröffentlicht.

**) Man erhält dieselbe Gleichung auch als diejenige der Enveloppe einer Ebene

$$lx + my + nz = \varphi,$$

deren Coefficienten den Bedingungen

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

$$\frac{l^2}{\varphi^2 - a^2} + \frac{m^2}{\varphi^2 - b^2} + \frac{n^2}{\varphi^2 - c^2} = 0$$

unterworfen sind.

Aus der ersten Form erhellt zugleich, dass der Durchschnitt der Wellenfläche mit einer concentrischen Kugel ein sphärischer Kegelschnitt ist.

226. Der Querschnitt der Fläche durch eine der Hauptebenen, z. B. die Ebene der z, zerfällt in einen Kreis und eine Ellipse; denn seine Gleichung ist

$$(x^2 + y^2 - c^2)(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2) = 0.$$

Diess ergiebt sich auch geometrisch; denn wenn wir einen die Achse der z enthaltenden Schnitt der erzeugenden Fläche zweiten Grades betrachten, so ist eine der Achsen desselben gleich c, während die andere Achse in der Ebene xy liegt. Wenn wir daher im Centrum eine Normale zur Schnittebene errichten und auf ihr die Längen dieser Achsen abtragen, so beschreibt der eine Endpunkt einen Kreis vom Halbmesser c, während den Ort des andern der Hauptschnitt der erzeugenden Fläche zweiten Grades, nur um 90^0 gedreht, wiedergiebt.

Die Fläche hat daher in jeder der Hauptebenen vier Doppelpunkte, nämlich die Durchschnittspunkte des Kreises und der Ellipse, die oben erwähnt sind. Wenn x', y' die Coordinaten eines dieser Durchschnittspunkte sind, so hat der Tangentenkegel, welcher diesem Doppelpunkt entspricht, nach Artikel 9 die Gleichung

$$4(xx' + yy' - c^2)(a^2xx' + b^2yy' - a^2b^2) + z^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) = 0.$$

Wenn wir die erzeugende Fläche zweiten Grades als ein Ellipsoid voraussetzen, so ist offenbar, dass in dem Falle des durch die Achse z geführten Schnittes der Kreis vom Radius c ganz innerhalb der Ellipse von den Achsen a und b, und im Falle des durch die Achse x geführten Schnittes der Kreis vom Radius a ganz ausserhalb der Ellipse von den Achsen b und c liegt; in Folge dessen erscheinen nur in den durch die Achse y geführten Schnitten reelle Doppelpunkte, offenbar die Punkte, welche den Kreisschnitten des erzeugenden Ellipsoids entsprechen; denn man erhält

$$x^2 = c^2\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad z^2 = a^2\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.\text{*)}$$

---

*) Für diese Werthe und $y = 0$, $r^2 = b^2$ verschwinden die drei ersten Differentiale der Gleichung der Fläche zugleich mit dieser selbst,

Die unendlich entfernten Punkte der Fläche, d. i. ihren Schnitt mit der unendlich entfernten Ebene, stellt das Product der Factoren

$$x^2 + y^2 + z^2, \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

dar, und jener Schnitt kann daher als die Verbindung eines imaginären Kreises und einer Ellipse angesehen werden, welche vier imaginäre Doppelpunkte der Fläche in unendlicher Entfernung bedingt. Die Wellenfläche hat daher in Allem sechszehn Doppel- oder conische Punkte, jedoch sind nur vier von ihnen reell. Sie sind nach der vorausgesetzten Entstehung die gemeinschaftlichen Punkte beider Mäntel der Fläche.

227. Die Wellenfläche gehört zu einer Klasse von Flächen, welche man als Apsidalflächen bezeichnen kann.

Wenn irgend eine Fläche gegeben ist, und durch einen beliebigen als Pol genommenen Punkt ein ebener Schnitt der Fläche geführt wird, um dann die Apsidal-Radien, d. h. den Maximal- und Minimalwerth der Radien vectoren auf der im Pol errichteten Normale der Schnittebene abzutragen, so ist der Ort der Endpunkte dieser Normalen die aus der gegebenen Fläche hervorgehende Apsidalfläche.

Die Gleichung der Apsidalfläche kann immer so wie im Artikel 98 des ersten Bandes gefunden werden. Man bildet zuerst die Gleichung der Kegelfläche, welche den Pol zum Scheitel hat und die Durchschnittslinie der gegebenen Fläche mit einer Kugel vom Radius r enthält. Wie am angeführten Orte wird bewiesen, dass jede Kante dieses Kegels ein Apsidalradius des mit der Fläche

---

$$U_1 = 2x\left\{a^2(r^2-b^2-c^2) + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right\}, \text{ etc.}$$

zum Zeichen der Singularität der Punkte.

Die zweiten Differentiale werden

$$U_{11} = 8a^2c^2\,\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad U_{22} = -\,2\,(a^2-b^2)\,(b^2-c^2),$$

$$U_{33} = 8a^2c^2\,\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}, \quad U_{12} = U_{23} = 0,$$

$$U_{13} = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}\left\{(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

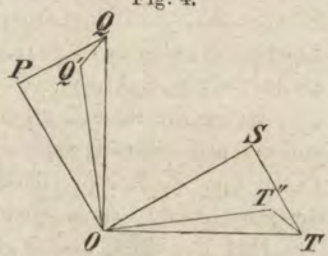
Aus ihnen entspringt die Gleichung des zugehörigen Tangentenkegels in der Form

$$\frac{x^2}{b^2-c^2} - \frac{a^2-c^2}{4a^2c^2}\,y^2 + \frac{z^2}{a^2-b^2} + \frac{a^2+c^2}{\left\{(a^2-b^2)\,(b^2-c^2)\right\}^{\frac{1}{2}}}\,\frac{xz}{ac} = 0.$$

durch die zugehörige Tangentenebene desselben gebildeten Schnittes ist. Wenn man dann die Gleichung des Reciprocalkegels bildet, dessen Kanten zu den Tangentenebenen des ersten normal sind, so erhält man alle die Punkte der Apsidalfläche, welche den Tangentenebenen des angenommenen Kegels entsprechen. Betrachtet man r in der Gleichung dieses letztern Kegels als veränderlich, so stellt sie die Gleichung der Apsidalfläche dar.

228. Wenn OQ ein Radius vector der erzeugenden Fläche und OP die Normale zur Tangentenebene derselben im Punkte Q ist, so ist OQ ein Apsidalradius desjenigen Schnittes der Fläche, welcher durch OQ und durch die zur Ebene POQ normale Gerade OR hindurchgeht. Denn die Tangentenebene in Q geht durch PQ und ist zur Ebene POQ normal, die Tangente des Schnittes QOR liegt in der Tangentenebene und ist daher auch normal zur Ebene POQ. Weil endlich OQ zur Tangente im Schnitt QOR normal ist, so ist sie ein Apsidalradius dieses Schnittes. Daraus folgt auch, dass der dem Punkt Q entsprechende Radius der Apsidalfläche in der Ebene POQ liegt, und normal und gleich mit OQ ist.

Fig. 4.



229. Die Normale der Tangentenebene der Apsidalfläche in T liegt auch in der Ebene POQ und ist normal zu und gleich mit OP.*)

Betrachten wir zuerst einen zu OT unendlich nahen Radius OT' der Apsidalfläche in der zu POQ normalen Ebene TOR, so ist nach der Definition OT' einem Apsidalradius des Schnittes der Originalfläche durch eine zu OT' normale Ebene gleich und diese Ebene muss durch OQ gehen. Ferner ist ein Apsidalradius eines Schnittes dem nächstfolgenden Radius gleich und der Apsidalradius eines durch OQ gehenden und der Ebene QOR unendlich nahen Schnittes also gleich OQ. Daraus folgt, dass $OT = OT'$ und somit die Tangente des Schnittes TOR normal zu OT und somit normal zur Ebene POQ ist. Die Normale der Tangenten-

*) Diese Sätze verdankt man Mac-Cullagh, „Transactions of the Royal Irish Academy", vol. XVI.

ebene in T muss daher in der Ebene POQ liegen, welches der erste Theil der Behauptung ist.

Wir betrachten dann zweitens einen unendlich nahen Radius OT'' in der Ebene POQ; er ist einem Apsidalradius des Schnittes ROQ' gleich, wo OQ' unendlich nahe bei OQ ist. Und da dieser Apsidalradius wie vorher als unendlich nahe OQ' diesem gleich ist, so ist OT'' sowohl gleich als normal zu OQ'. Daher ist der Winkel $T''TO$ dem Winkel $Q'QO$ gleich und die Normale OS gleich und normal zu OP.

Die Symmetrie der Construction zeigt, dass, wenn eine Fläche A die Apsidalfläche von B ist, umgekehrt B die Apsidalfläche von A sein muss.

230. Die reciproke Polare einer Apsidalfläche in Bezug auf den Anfangspunkt O ist identisch mit der Apsidalfläche der reciproken Polare der Originalfläche in Bezug auf O.

Wenn wir in OP, OQ Stücke Op, Oq abtragen, die zu jenen indirect proportional sind, so erhalten wir in diesen einen Radius vector und die entsprechende Normale zur Tangentenebene der Reciprocalfläche der gegebenen Fläche.

Und wenn wir diesen gleiche Stücke in den Linien OS, OT abtragen, welche in ihrer Ebene liegen und auf ihnen respective rechtwinklig sind, so haben wir nach dem letzten Artikel einen Radius vector und die entsprechende Normale zur Tangentenebene der Apsidalfläche der Reciprocalfläche bestimmt. Aber dieselben Längen sind als indirect proportional zu OS, OT auch ein Radius vector und eine Normale zur Tangentenebene der Reciproken der Apsidalfläche. Die Apsidalfläche der Reciproken ist daher identisch mit der Reciproken der Apsidalfläche.

Insbesondere ist die Reciproke der aus einem gegebenen Ellipsoid abgeleiteten Wellenfläche die Wellenfläche des Reciprocal-Ellipsoids.

Man erkennt auch in anderer Weise, dass die Reciproke einer Wellenfläche eine Fläche vierter Ordnung sein muss. Denn die Reciproke einer Fläche vierter Ordnung ist nach Artikel 20 im Allgemeinen von der sechs und dreissigsten Ordnung; diese Ordnungszahl wird aber durch jeden Doppelpunkt der Fläche um zwei Einheiten reduciert und kommt somit durch die sechszehn Doppelpunkte der Wellenfläche auf vier herab.

Beispiel. Man beweist leicht den folgenden Satz: Die beiden Mäntel der Wellenfläche sind reciproke Polaren in Bezug auf das Ellipsoid

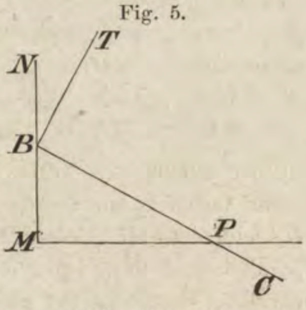
$$\frac{x^2}{bc} + \frac{y^2}{ca} + \frac{z^2}{ab} = 1.$$

Manche andere Ergebnisse folgen aus ihm.

Da einem Knotenpunkt oder conischen Punkt einer Fläche, als einem Punkte, welchem unendlich viele einen Kegel zweiten Grades umhüllende Tangentenebenen derselben entsprechen, eine Tangentenebene der Reciprocalfläche entspringt, welche mit dieser eine unendliche Zahl von Berührungspunkten in einem Kegelschnitt gemein hat, so folgt aus der Existenz von vier reellen Doppelpunkten der Wellenfläche und der Wahrheit, dass die Reciproke einer Wellenfläche wieder eine Wellenfläche ist, die Existenz von vier reellen Tangentenebenen der Wellenfläche, welche diese in je einem Kegelschnitt berühren.*)

231. Die folgenden Hilfssätze fördern den Beweis: 1) Wenn zwei zu einander normale und durch einen festen Punkt gehende Gerade sich in festen Ebenen bewegen, so umhüllt die Ebene derselben einen Kegel zweiten Grades, welcher von den festen Ebenen in Parabeln geschnitten wird.

Fig. 5.



Wenn wir die Ebene der Zeichnung als parallel zu der einen festen Ebene voraussetzen, während die andere feste Ebene durch die Linie MN in dieser geht, und der feste Durchschnittspunkt O der Geraden über derselben vorausgesetzt wird, so dass P den Fusspunkt der von ihm auf die Ebene der Zeichnung gefällten Senkrechten bezeichnet, so sei OB eine der Lagen der Geraden, die sich in der Ebene OMN bewegt; dann ist die andere Gerade OA, welche der Ebene der

*) Die Existenz der vier Knotenpunkte, deren Tangentenebenen Kegel zweiten Grades umhüllen und der vier nach Kreisen berührenden Tangentenebenen der Wellenfläche ward zuerst von R. Hamilton gezeigt. („Transactions of the Royal Irish Academy", Vol. XVII, p. 132.) Dr. Lloyd bestätigte experimentell die daraus entspringenden optischen Ergebnisse. Die hier folgenden geometrischen Untersuchungen verdankt man Mac-Cullagh (p. 248).

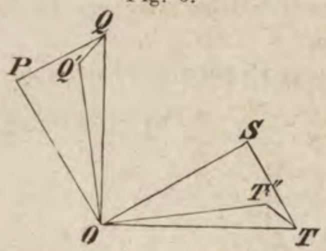
Zeichnung parallel bleibt und normal zu OB, zugleich auch zu OP ist, normal zur Ebene OBP. Aber die Ebene OAB schneidet die Ebene der Zeichnung in einer zu OA parallelen Geraden BT, welche daher zu BP normal ist. Und die Enveloppe von BT ist somit eine Parabel, für welche P der Brennpunkt und MN die Tangente im Scheitel ist.

2) Wenn eine Gerade OC zur Ebene OAB normal bleibt, so erzeugt sie einen Kegel, dessen Kreisschnitte den festen Ebenen parallel sind. (Vergl. Beispiel 5 im Artikel 117 des ersten Bandes.) Wie im Artikel 143, Band 1 wird bewiesen, dass der Ort von C die reciproke Polare der Enveloppe von BT in Bezug auf den Punkt P ist; er ist also ein durch P gehender Kreis.

3) Wenn ein Centralradius einer Fläche zweiten Grades sich in einer festen Ebene bewegt, so bleibt die Normale zur entsprechenden Tangentenebene auch in einer festen Ebene. Nämlich in der Normalebene des zur ersten Ebene conjugierten Durchmessers, als welchem die Tangentenebene stets parallel ist.

232. Setzen wir nun voraus, dass die Ebene OQR (wo OR zur Ebene POQ normal ist) ein Kreisschnitt einer Fläche zweiten Grades sei, so ist OT der Radius des Knotenpunktes der Wellenfläche, und bleibt unverändert, während OQ sich in der Ebene des Kreisschnittes bewegt. Uns bleibt der durch OS erzeugte Kegel zu bestimmen. Aber OS ist normal zu OR, welches sich in der Ebene des Kreisschnittes und zu OP, welches sich in einer festen Ebene bewegt nach dem 3. Hilfssatz; somit erzeugt OS einen Kegel, dessen Kreisschnitte den Ebenen POR, QOR parallel sind. Nun ist T ein fester Punkt und TS der Ebene POR parallel, somit der Ort von S ein Kreis.

Fig. 6.



Der dem Knotenpunkt entsprechende Tangentenkegel ist offenbar der Reciprocalkegel des von OS erzeugten Kegels und ist daher ein Kegel, der von den Parallelen derselben Ebenen in Parabeln geschnitten wird. Setzen wir zweitens voraus, dass die Linie OP von constanter Länge sei, welches stattfindet, wenn die Ebene POR der Querschnitt eines der zwei geraden Cylinder ist, welche dem Ellipsoid umgeschrieben werden können, so ist der Punkt S ein fester Punkt und man beweist ganz in derselben Weise, dass der Ort von T ein Kreis ist.*)

233. Die Gleichungen des Artikel 231 im ersten Bande liefern sofort eine andere Form der Gleichung der Wellenfläche. Offenbar sind die Längen des Radius vectors für den einen Mantel der Wellenfläche, wenn θ, θ' die Winkel bezeichnen, welche ein Radius vector mit den Linien nach den Knotenpunkten bildet, durch

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta')}{a^2},$$

und für den andern Mantel derselben durch

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\theta + \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta + \theta')}{a^2}$$

ausgedrückt, also dass

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin\theta \ \sin\theta'$$

ist. Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Durchschnitte der Wellenfläche mit einer Reihe concentrischer Kugeln eine Schaar confocaler sphärischer Kegelschnitte bilden. Denn wenn ϱ und ϱ' in denselben constant gedacht werden, so erhält man

$$\theta \pm \theta' = \text{const.}$$

234. Die Gleichung der Wellenfläche kann nach W. Roberts in folgender Weise in elliptischen Coordinaten ausgedrückt werden.

Die Form der Gleichung

$$\frac{a^2x^2}{a^2 - r^2} + \frac{b^2y^2}{b^2 - r^2} + \frac{c^2z^2}{c^2 - r^2} = 0$$

zeigt an, dass sie als Resultat der Elimination von r^2 zwischen den Gleichungen

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

zu erhalten ist. Wenn man aber dem r^2 eine Reihe constanter Werthe beilegt, so bezeichnet die erste Gleichung eine Reihe von confocalen Flächen zweiten Grades, für welche die Achse z die

*) Die analytische Untersuchung liefert für das Halbmesserquadrat dieses Kreises den Ausdruck

$$\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{b^2}.$$

primäre und die Achse der x die kleinste Achse ist. Da r^2 stets kleiner als a^2 und grösser als c^2 ist, so bezeichnet die Gleichung stets ein Hyperboloid, und zwar ein einfaches oder zweifaches, je nachdem r^2 grösser oder kleiner als b^2 ist. Die Durchschnitte der Hyperboloide der ersten Reihe mit den concentrischen Kugeln erzeugen den einen, diejenigen der andern Reihe mit denselben den andern Mantel der Wellenfläche.

Wenn nun die Fläche ein einfaches Hyperboloid bezeichnet, und λ, μ, ν die primären Achsen der drei confocalen Flächen des betrachteten Systems für irgend einen Punkt sind, so giebt uns die Gleichung

$$r^2 - c^2 = \mu^2,$$

und da nach Band I, Artikel 169

$$r^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - h^2 - k^2$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung des einen Mantels der Fläche in elliptischen Coordinaten

$$\lambda^2 + \nu^2 = c^2 + h^2 + k^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

In gleicher Weise ist die Gleichung des andern Mantels

$$\lambda^2 + \mu^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Die allgemeine Gleichung der Wellenfläche giebt auch

$$\mu^2 + \nu^2 = a^2 + b^2 - c^2,$$

eine Gleichung jedoch, welche einen imaginären Ort bezeichnet.

Da für constantes λ auch μ für den einen und ν für den andern Mantel der Fläche constant ist, so folgt, dass, wenn durch irgend einen Punkt der Fläche ein demselben System angehöriges Ellipsoid gelegt wird, diess den einen Mantel in einer Krümmungslinie des einen Systems und den andern Mantel in einer solchen des andern Systems schneidet.*)

---

*) W. Roberts hat auch die Cubatur der Wellenfläche elegant gegeben in den „Annali di Matem.“, t. IV, p. 345.

Die Volumen beider Mäntel sind nach unseren Bezeichnungen

$$V_1 = \tfrac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta,$$

$$V_2 = \tfrac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - \nu^2)^{\frac{2}{3}} \sin \alpha \, d\alpha \, d\beta,$$

Wenn die Gleichungen zweier Flächen in Function der λ, μ, ν ausgedrückt sind, so giebt die Differentiation derselben

$$P d\lambda + Q d\mu + R d\nu = 0, \quad P' d\lambda + Q' d\mu + R' d\nu = 0$$

und die Bedingung, unter welcher sie sich rechtwinklig durchschneiden, ist nach Artikel 135

$$\frac{PP' (\lambda^2 - h^2)(\lambda^2 - k^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} + \frac{QQ' (\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)}{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}$$
$$+ \frac{RR' (h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)}{(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} = 0,$$

eine Bedingung, welche für $P = 0$, $Q = 0$, $R' = 0$ erfüllt ist. Daher schneidet eine Fläche

$$\nu = \text{const.}$$

eine andere Fläche von der Gleichungsform

$$\Phi(\lambda, \mu) = 0$$

rechtwinklig. Das Hyperboloid

$$\nu = \text{const.}$$

---

wenn α und β die Richtungswinkel der Normale des Ellipsoids im Punkt μ, ν bezeichnen.

Da nun das Flächenelement des Ellipsoids durch

$$\frac{a^2 (a^2 - h^2)(a^2 - k^2) \sin \alpha d\alpha d\beta}{p^4}$$

und andererseits in elliptischen Coordinaten durch die Formel des Artikel 135 ausgedrückt wird, so erhält man nach dem Werthe von μ^2 für

$$\sin \alpha d\alpha d\beta$$

den Ausdruck

$$\frac{a^2 (a^2 - h^2)(a^2 - k^2)(\mu^2 - \nu^2) d\mu d\nu}{(a^2 - \mu^2)^{\frac{3}{2}} (a^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}} \left\{(\mu^2 - h^2)(k^2 - \mu^2)(h^2 - \nu^2)(k^2 - \nu^2)\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Seine Substitution, die Trennung der Veränderlichen und die Reduction auf die elliptischen Functionen durch die complementären Moduli m, m', n, n', wo

$$m^2 = \frac{h^2 (a^2 - k^2)}{k^2 (a^2 - h^2)}, \qquad n = \frac{k^2 - h^2}{k^2}$$

sind, giebt endlich die eleganten Ausdrücke

$$V_1 = \frac{8 a^2 (a^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}}{3} \left\{F(m)E(n) + F(n)E(m) - F(m)F(n) - \frac{k^2}{a^2} E(m)E(n)\right\},$$

$$V_2 = \frac{8 (a^2 - k^2)(a^2 - h^2)^{\frac{1}{2}}}{3} \left\{F(m')E(n') + F(n')E(m') - F(m')F(n') + \frac{k^2}{a^2 - k^2} E(m')E(n')\right\}.$$

schneidet somit den einen Mantel der Wellenfläche rechtwinklig, während es mit dem andern eine Krümmungslinie auf dem Hyperboloid gemein hat.

235. **Die Ebene irgend eines Radius vectors der Wellenfläche und der entsprechenden Normale auf die Tangentenebene bildet gleiche Winkel mit den Ebenen, welche den Radius vector und die Knotenlinien enthalten.**

Denn nach Artikel 228 ist die erste Ebene normal zu OR, welches eine Achse des Schnittes QOR des erzeugenden Ellipsoids bezeichnet, und die beiden andern Ebenen sind normal zu denjenigen Radien dieses Schnittes, deren Länge die mittlere Halbachse b des Ellipsoids ist; diese aber bilden mit der Achse gleiche Winkel.

Offenbar sind diejenigen Ebenen rechtwinklig zu einander, welche durch irgend einen Radius vector und durch je eine der Normalen der Tangentenebenen bestimmt sind, die den Endpunkten des Radius vectors in beiden Mänteln der Fläche entsprechen.

Nach dem Gesetz der Reciprocität ergiebt sich aus dem Theorem dieses Artikels, dass die Ebene, welche durch einen Radius vector und je einen der Punkte bestimmt ist, in denen die Tangentenebene der Fläche zu diesem Radius vector normal sind, mit denjenigen Ebenen gleiche Winkel bildet, welche durch denselben Radius vector mit den vom Centrum auf die Ebenen der kreisförmigen Berührung gefällten Normalen bestimmt sind. (Artikel 232.)

236. Wenn x', y', z' die Coordinaten eines Punktes des erzeugenden Ellipsoids, und a', a'' die primären Achsen der durch ihn hindurchgehenden confocalen Flächen ausdrücken, so sind $(a^2 - a'^2)$, $(a^2 - a''^2)$ die Quadrate der Achsen des der Tangentenebene parallelen Schnittes; wir wollen sie durch ϱ^2, ϱ'^2 bezeichnen. Sie geben die beiden Werthe des Radius vectors der Wellenfläche an, deren Richtungscosinus

$$\frac{px'}{a^2},\ \frac{py'}{b^2},\ \frac{pz'}{c^2}$$

sind. Berechnen wir die Länge und die Richtungscosinus der Normale der Tangentenebene in jedem der Punkte, in denen dieser Radius vector die Fläche schneidet.

Nach Artikel 229 wissen wir, dass die verlangte Normale gleich und normal ist zu der Normale in demjenigen Punkte, wo das Ellipsoid durch eine der Achsen des Schnittes getroffen wird; die Richtungscosinus dieser Achse sind

$$\frac{p'x'}{a'^2},\quad \frac{p'y'}{b'^2},\quad \frac{p'z'}{c'^2}.$$

Die Coordinaten dieses Endpunktes sind die Producte dieser Richtungscosinus mit ϱ und die Richtungscosinus der entsprechenden Normale des Ellipsoids sind respective

$$P\varrho\,\frac{p'x'}{a^2a'^2},\qquad P\varrho\,\frac{p'y'}{b^2b'^2},\qquad P\varrho\,\frac{p'z'}{c^2c'^2},$$

wenn

$$\frac{1}{P^2}=\varrho^2p'^2\left\{\frac{x'^2}{a^4a'^4}+\frac{y'^2}{b^4b'^4}+\frac{z'^2}{c^4c'^4}\right\}$$

ist. Das Product der in den Klammern stehenden Grösse mit $(a^2-a'^2)^2$ ist aber

$$=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p'^2},$$

so dass

$$\frac{1}{P^2}=\frac{p^2+p'^2}{p^2\varrho^2},\qquad P^2=\frac{p^2\varrho^2}{p^2+p'^2}.$$

Diess giebt die Länge der Normalen auf die Tangentenebene in dem betrachteten Punkte der Wellenfläche. Ihre Richtungscosinus werden aus der Bemerkung abgeleitet, dass sie zu den zwei Linien normal ist, welche die respectiven Richtungscosinus

$$\frac{p''x'}{a''^2},\quad \frac{p''y'}{b''^2},\quad \frac{p''z'}{c''^2};\quad P\varrho\,\frac{p'x'}{a^2a'^2},\quad P\varrho\,\frac{p'y'}{b^2b'^2},\quad P\varrho\,\frac{p'z'}{c^2c'^2}$$

besitzen; indem man nach der Formel des Artikel 14 im ersten Bande die Richtungscosinus ihrer gemeinschaftlichen Normalen bestimmt, erhält man nach einigen Reductionen

$$\frac{Px'}{p\varrho}\left(1-\frac{p''^2}{a''^2}\right),\quad \frac{Py'}{p\varrho}\left(1-\frac{p''^2}{b''^2}\right),\quad \frac{Pz'}{p\varrho}\left(1-\frac{p''^2}{c''^2}\right).$$

Die Richtigkeit des Ergebnisses kann leicht bestätigt werden. Daher ist die Gleichung der Tangentenebene in demselben Punkt

$$xx'\left(1-\frac{p''^2}{a''^2}\right)+yy'\left(1-\frac{p''^2}{b''^2}\right)+zz'\left(1-\frac{p''^2}{c''^2}\right)=p\varrho.$$

In derselben Art findet man die Gleichung der Tangentenebene der Fläche in demjenigen Punkte, wo der nämliche Radius vector zum zweiten Male die Fläche schneidet, durch

$$xx'\left(1-\frac{p'^2}{a'^2}\right)+yy'\left(1-\frac{p'^2}{b'^2}\right)+zz'\left(1-\frac{p'^2}{c'^2}\right)=p\varrho'$$

ausgedrückt.

237. Wenn θ den Winkel bezeichnet, welchen die Normale der Tangentenebene mit dem Radius vector bildet, so ist

$$P=\varrho\cos\theta;$$

und da nach dem letzten Artikel

$$P^2=\frac{p^2\varrho^2}{p^2+p'^2}$$

ist, so muss

$$\cos^2\theta=\frac{p^2}{p^2+p'^2},\quad \tan^2\theta=\frac{p'^2}{p^2}$$

sein. Mittelst der im Artikel 173 des ersten Bandes für p und p' gegebenen Werthe erhalten wir

$$p^2=\frac{a^2b^2c^2}{\varrho^2\varrho'^2},\quad p'^2=\frac{(a^2-\varrho^2)\,(b^2-\varrho^2)\,(c^2-\varrho^2)}{\varrho^2\,(\varrho^2-\varrho'^2)},$$

und somit

$$\tan^2\theta=\frac{\left(1-\frac{\varrho^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{c^2}\right)}{1-\frac{\varrho^2}{\varrho'^2}}.$$

In dieser Form ist der Ausdruck das Analogon desjenigen, welchen die Theorie der Kegelschnitte für den Winkel bildet, der von der Normale und dem centralen Radius vector des Punktes einer Ellipse eingeschlossen wird, nämlich

$$\tan^2\theta=-\left(1-\frac{\varrho^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{\varrho^2}{b^2}\right).$$

In dem Falle der Wellenfläche ist offenbar, dass θ für die Specialfälle

$$\varrho=a,\quad \varrho=b,\quad \varrho=c$$

verschwindet, und für den Fall

$$\varrho=\varrho'=b$$

unbestimmt wird.

238. Der Ausdruck

$$\tan\theta=\frac{p'}{p}$$

führt zu einer Construction für die Normalen der Tangentenebenen, welche den Punkten entsprechen, in denen ein gegebener Radius vector die zwei Mäntel der Fläche schneidet.

Die Normalen müssen in der einen oder andern der zwei festen Ebenen der Artikel 235, 236 liegen, und wenn eine Ebene normal zum Radius vector in der Entfernung p gelegt wird, so ist aus dem Ausdruck für tan θ offenbar, dass p' die Entfernung des Radius vector von dem Punkte ist, wo die Normale zur Tangentenebene diese Ebene schneidet. So erhalten wir diese Construction: „Man lege normal zu dem gegebenen Radius vector eine Tangentenebene des erzeugenden Ellipsoids, fälle von ihrem Berührungspunkt Normalen auf die festen Ebenen des Artikel 235; dann sind die Geraden, welche die Fusspunkte dieser Normalen mit dem Centrum verbinden, die fraglichen Normalen der Tangentenebenen."

Nach dem Gesetz der Reciprocität erhält man hieraus eine analoge Construction zur Bestimmung der Punkte, in welchen die einer gegebenen Ebene parallelen Tangentenebenen der Fläche ihre beiden Mäntel berühren.

239. Es ist zuweilen von Vortheil, die Gleichung der Fläche — analog zu Artikel 180 des ersten Bandes — so zu transformieren, dass der irgend einem Punkte der Fläche entsprechende Radius vector die Achse der z ist und die Achsen des entsprechenden Schnittes des erzeugenden Ellipsoids die Achsen x und y sind. Wir schreiben die Gleichung der Fläche in der Form

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$+ a^2b^2c^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1\right) = 0;$$

nun bleibt

$$x^2 + y^2 + z^2$$

durch Transformation ungeändert und in den Artikeln 183, 184 des ersten Bandes sind die Transformationen von

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

und

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

gegeben. Folglich ist die transformierte Gleichung

$$\{p^2z^2+(p'^2+\varrho^2)x^2+(p''^2+\varrho'^2)y^2+2pp'xz+2pp''yz+2p'p''xy\}$$
$$\times(x^2+y^2+z^2)-p^2z^2(\varrho^2+\varrho'^2)-x^2(p^2\varrho^2+p'^2\varrho'^2+p''^2\varrho^2+\varrho^2\varrho'^2)$$
$$-y^2(p^2\varrho'^2+p'^2\varrho'^2+p''^2\varrho^2+\varrho^2\varrho'^2)-2pp'\varrho'^2xz-2pp''\varrho^2yz+p^2\varrho^2\varrho'^2$$
$$=0.$$

Dabei ist die a. a. O. mit γ^2 bezeichnete Grösse durch ihren aus der Gleichung

$$\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\varrho'^2}$$

bestimmten Werth ersetzt und die Identität

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=p^2(\varrho^2+\varrho'^2)+p'^2\varrho'^2+p''^2\varrho^2+\varrho^2\varrho'^2$$

benutzt worden.

Man erkennt leicht, dass für $x=0$ und $y=0$ diese transformierte Gleichung für z^2 die Werthe ϱ^2, ϱ'^2 ergiebt, wie zu erwarten war.

Wenn wir die Gleichung zu parallelen Achsen durch den Punkt $z=\varrho$ transformieren, so wird der lineare Theil der Gleichung

$$2p\varrho(\varrho^2-\varrho'^2)(pz+p'x)$$

und die vorher über die Lage der Tangentenebene abgeleiteten Resultate können daraus unabhängig begründet werden.

Die analoge Entwickelung der Glieder vom zweiten Grade erlaubt, die Werthe der Hauptkrümmungsradien und die Richtung der Krümmungen zu bestimmen, ohne dass Resultate von besonderer Wichtigkeit sich ergäben.

240. Die Gleichung der Reciprocalfläche der Wellenfläche wird erhalten, indem man $\frac{\lambda^2}{a}$ für a, etc. in die Gleichung der Wellenfläche substituiert; wenn das Resultat nach der Methode des vorigen Artikels transformiert wird, so entsteht die Gleichung

$$(x^2+y^2+z^2)\times$$
$$\{p^2\varrho'^2x^2+p^2\varrho^2y^2-2pp'\varrho'^2xz-2pp''\varrho^2yz+z^2(p'^2\varrho'^2+p''^2\varrho^2+\varrho^2\varrho'^2)\}$$
$$-\lambda^4(p^2+p''^2+\varrho'^2)x^2-\lambda^4(p^2+p'^2+\varrho^2)y^2-\lambda^4(p'^2+p''^2+\varrho^2+\varrho'^2)z^2$$
$$+2\lambda^4p'p''xy+2\lambda^4pp'xz+2\lambda^4pp''yz+\lambda^8=0.$$

Wir wissen, dass die Fläche durch die Ebene

$$z=\frac{\lambda^2}{\varrho}$$

berührt wird, und erhalten in der That durch Einführung dieses Werthes von z in die Gleichung den Ausdruck einer Curve, die in

$$y = 0, \quad x = \frac{p'\lambda^2}{p\varrho}$$

einen Doppelpunkt hat. Wenn wir ferner in der Gleichung der Curve

$$y = 0$$

machen, so erhalten wir

$$\left(px - \frac{p'\lambda^2}{\varrho}\right)^2 \left\{\varrho'^2 x^2 + \frac{\lambda^4}{\varrho^2}(\varrho'^2 - \varrho^2)\right\},$$

und lernen daraus, dass die Sehne des äussern Mantels der Wellenfläche, welche irgend einen Punkt des innern Mantels derselben mit dem Fusspunkt der Normalen vom Centrum auf die Tangentenebene verbindet, in diesem Punkte des innern Mantels halbiert wird.

Die Inflexionstangenten sind parallel zu

$$\left\{p'^2\varrho'^2 + p^2(\varrho'^2 - \varrho^2)\right\}x^2 - 2p'p''\varrho^2 xy + \left\{p'^2\varrho^2 + \varrho^2(\varrho'^2 - \varrho^2)\right\}y^2 = 0,$$

ein Ergebniss, dessen geometrische Bedeutung wir nicht erhalten haben.*)

---

*) Eine irrthümliche Bemerkung von Zech über die Krümmungslinien der Wellenfläche im „Journal für Math.", Bd. LIV, p. 72 hat zu einer interessanten mathematischen Discussion den Anlass gegeben, bei welcher Bertrand „Comptes rendus", Nov. 1858, Brioschi, „Annali di Matem." t. IV, p. 135, 245, Combescure, ibid. p. 278 zu bemerkenswerthen Ergebnissen gekommen sind. (Vergl. auch Cayley, „Quarterly Journ.", Vol. III, p. 16.)

Wir citieren die Bemerkung von Brioschi, dass die Ebene

$$lx + my + nz = \varphi,$$

in deren Gleichung l, m, n, φ Functionen zweier unabhängigen Veränderlichen u, v sind (wie im Artikel 150), eine Fläche umhüllt, in welcher die Curvenfamilien

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$

in ihren Durchschnitten durch conjugierte Tangenten der Fläche berührt werden, wenn

$$\begin{vmatrix} l, & m, & n, & \varphi \\ l_1, & m_1, & n_1, & \varphi_1 \\ l_2, & m_2, & n_2, & \varphi_2 \\ l_{12}, & m_{12}, & n_{12}, & \varphi_{12} \end{vmatrix} = 0,$$

und auf einander normal sind, wenn

$$(l^2 + m^2 + n^2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = (ll_1 + mm_1 + nn_1)(ll_2 + mm_2 + nn_2)$$

ist; wobei $l_1, l_2, \ldots l_{12}$ die Differentiale nach u und v bezeichnen, wie früher.

241. Es ist der Hauptcharacter der Wellenfläche, von der vierten Ordnung zu sein und sechszehn Doppelpunkte zu haben, von denen vier in einer Hauptebene liegende reell, acht in den beiden andern Hauptebenen liegende imaginär, und vier in der unendlich entfernten Ebene enthalten sind.

Darum ist ihre Reciproke statt von der 36ten auch nur von der vierten Ordnung.

Durch collineare Transformation] gelangt man von ihr zu der allgemeineren Auffassung einer Flächenfamilie mit sechszehn singulären Punkten, die zunächst in vier Ebenen vertheilt sind. Es ist allgemeiner, von der Lage dieser Punkte gegen einander abzusehen, und die allgemeinen Eigenschaften der Flächen vierter Ordnung mit sechszehn singulären Punkten zu untersuchen.*)

Die Betrachtung des Tangentenkegels der Fläche aus einem ihrer singulären Punkte giebt die folgenden Resultate. Er ist für die allgemeine Lage seines Scheitels vom zwölften, für die im singulären Punkte vom sechsten Grade; die fünfzehn Geraden, die den singulären Punkt mit den fünfzehn andern Punkten dieser Art verbinden, sind nothwendig Doppelkanten, und da er als eigentlicher Kegel seines Grades nicht mehr als zehn Doppelkanten haben kann, so muss er aus Kegeln niedrigerer Grade zusammengesetzt, und zwar insbesondere aus sechs Ebenen zusam-

---

Für
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \varphi = u$$
werden jene Bedingungen
$$\begin{vmatrix} m_2, & n_2 \\ m_{12}, & n_{12} \end{vmatrix} = 0, \quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$
d. h.
$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}$$
bezeichnen Krümmungslinien, wenn
$$\frac{l_{12}}{l_2} = \frac{m_{12}}{m_2} = \frac{n_{12}}{n_2}$$
sind. Da der Wellenfläche die Werthe
$$l^2 = \frac{(a^2 - u^2)\,(a^2 - v^2)}{(a^2 - b^2)\,(a^2 - c^2)}, \text{ etc.}$$
entsprechen, so sind jene Curven für sie nicht Krümmungslinien, sondern nur orthogonal.

*) Kummer, „Monatsbericht der königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin", 1864, p. 246 f.

mengesetzt sein, die durch denselben Punkt gehen. Jede dieser Ebenen muss eine singuläre Tangentenebene der Fläche sein, und sie in einem Kegelschnitt berühren. Ebenso liegen in jeder dieser Ebenen sechs von den singulären Punkten und man hat den Satz: Jede Fläche vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten hat zugleich 16 singuläre Tangentenebenen, und diese Punkte und Ebenen liegen so, dass jede der 16 Ebenen 6 von den Punkten enthält und durch jeden der 16 Punkte 6 von den Ebenen hindurchgehen.

Da die sechs in einer Ebene liegenden singulären Punkte dieser und der Fläche gemeinschaftlich sind, so müssen sie in einem Kegelschnitt liegen. Ebenso müssen die sechs singulären Tangentenebenen, welche durch einen singulären Punkt gehen, Tangentenebenen des Kegels zweiten Grades sein, welcher die Fläche in dem singulären Punkte osculiert.

242. Zur Bildung der allgemeinen Gleichung solcher Flächen denken wir vier der singulären Tangentenebenen so gewählt, dass die Ecken ihres Tetraeders vier singuläre Punkte sind und lassen

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

ihre Gleichungen sein. Dann ist

$$\begin{aligned} & a^2x_2^2x_3^2 + b^2x_3^2x_1^2 + c^2x_1^2x_2^2 + d^2x_1^2x_4^2 + e^2x_2^2x_4^2 + f^2x_3^2x_4^2 \\ & + 2bcx_1^2x_2x_3 - 2acx_1x_2^2x_3 - 2abx_1x_2x_3^2 - 2cdx_1^2x_2x_4 \\ & + 2cex_1x_2^2x_4 - 2dex_1x_2x_4^2 + 2bdx_1^2x_3x_4 + 2bfx_1x_3^2x_4 \\ & + 2dfx_1x_3x_4^2 + 2aex_2^2x_3x_4 + 2afx_2x_3^2x_4 + 2efx_2x_3x_4^2 \\ & - 4gx_1x_2x_3x_4 = 0 \end{aligned}$$

ihre allgemeine Gleichung. Denn da die Ecken des Tetraeders singuläre Punkte sind, so muss die linke Seite der Gleichung mit ihren vier ersten Derivierten zugleich verschwinden, wenn drei der Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 gleich Null gesetzt werden und sie kann daher weder Cuben noch vierte Potenzen der Variabeln enthalten; da ferner die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, etc. singuläre Tangentenebenen sind, die in Kegelschnitten berühren, so muss für das Verschwinden einer der Veränderlichen die linke Seite der Flächengleichung das vollständige Quadrat einer homogenen Function zweiten Grades der drei übrigen werden; damit die Zahl der singulären Punkte gerade 16 sei, muss dann die gegebene Form gewählt werden. Sie enthält 18 Constanten. Man kann ihr für

$$\varphi = ax_2x_3 + bx_3x_1 + cx_1x_2 + dx_1x_4 + ex_2x_4 + fx_3x_4,$$
$$\psi = abx_3^2 + dex_4^2 + acx_2x_3 + cdx_1x_4 + g'x_3x_4,$$
$$g' = g + \tfrac{1}{2}(ad + be + cf)$$
die Form
$$\varphi^2 = 4x_1x_2\psi$$
und in gleicher Weise fünf andere entsprechende Formen geben, in denen rechts an Stelle von x_1x_2 die Producte
$$x_1x_3,\ x_2x_3,\ x_1x_4,\ x_2x_4,\ x_3x_4$$
erscheinen.

Durch Addition von
$$4kx_1x_2\varphi + 4k^2x_1^2x_2^2$$
auf beiden Seiten erhält man dann
$$(\varphi + 2kx_1x_2)^2 = 4x_1x_2(\psi + k\varphi + k^2x_1x_2);$$
wenn man nun k so bestimmt, dass
$$\psi + k\varphi + k^2x_1x_2 = 0$$
eine Kegelfläche darstellt, so erhält man eine Gleichung sechsten Grades, die das Quadrat von
$$cfk^3 + \left(g - \frac{ad}{2} - \frac{be}{2} - \frac{3cf}{2}\right)k^2$$
$$+ \left(g - \frac{3ad}{2} + \frac{be}{2} + \frac{cf}{2}\right)k - ad = 0$$
ist; giebt man aber dem k einen der drei dieser Gleichung genügenden Werthe, so wird
$$\psi + k\varphi + k^2x_1x_2 = 0$$
das Product zweier linearen Factoren y_1, y_2, wo
$$y_1 = cx_2 + \frac{bx_3}{k+1} + \frac{dx_4}{k},\quad y_2 = cx_1 + \frac{ax_3}{k} + \frac{ex_4}{k+1}$$
und die allgemeine Gleichung unserer Flächen nimmt die Form an
$$\left\{ax_2x_3 + bx_3x_1 + c(1+2k)x_1x_2 + dx_1x_4 + ex_2x_4 + fx_3x_4\right\}^2$$
$$- 4k(k+1)x_1x_2y_1y_2 = 0.$$

Es existieren fünf andere entsprechende Formen, in denen nach den Bedeutungen
$$y_3 = fx_4 + \frac{bx_1}{k+1} - \frac{ax_2}{k},\quad y_4 = fx_3 - \frac{dx_1}{k} + \frac{ex_2}{k+1}$$
an Stelle von y_1y_2 die Factoren y_1y_3, y_1y_4, y_2y_3, y_2y_4, y_3y_4 erscheinen.

Mit der vorigen Form identisch ist die irrationale

$$\sqrt{kx_1y_1} + \sqrt{(k+1)\,x_2y_2} + \sqrt{-x_3y_3} = 0.$$

Wenn in y_1, y_2, y_3, y_4 für k die drei zugehörigen Werthe nach einander substituiert werden, so erhält man in

$$y_1 = 0,\quad y_2 = 0,\quad y_3 = 0,\quad y_4 = 0$$

die zwölf übrigen singulären Tangentenebenen, ausser den Flächen des Fundamentaltetraeders.

Wählt man die vier Ebenen

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0,\quad y_1 = 0,\quad y_2 = 0$$

als Fundamentalebenen, so kann man die Gleichung der Flächen in der Form

$$\Phi^2 = 16 K x_1 x_2 y_1 y_2$$

darstellen, wo

$$\Phi = x_1{}^2 + x_2{}^2 + y_1{}^2 + y_2{}^2 + 2a\,(x_2y_1 + y_2x_1) + 2b\,(x_1y_1 + x_2y_2) + 2c\,(x_1x_2 + y_1y_2),$$

und

$$K = a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1$$

sind; hier erscheinen nur drei Constanten explicite, zu den 15, welche in den Gleichungen der vier Fundamentalebenen enthalten sind.

Die singulären Punkte, Tangentenebenen und Berührungskegelschnitte werden sämmtlich reell, wenn man die sämmtlichen Constanten reell und a, b, c insbesondere numerisch grösser als Eins annimmt.*)

243. Die Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten sind doch noch hinreichend allgemein, um als ebene Schnitte alle möglichen Curven vierter Ordnung zu erzeugen.

Von der allgemeinen Gleichung der Curven vierter Ordnung aus, welche bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über ihre

---

*) Für $a = b = c = 2$ und ein reguläres Fundamentaltetraeder werden die vier Berührungskegelschnitte in den Fundamentalebenen Kreise; von den singulären Punkten liegen 12 in den Endpunkten der um gleiche Stücke verlängerten Tetraederkanten und in der Kegelfläche der Berührungskreise, die 4 übrigen in den über die Spitzen verlängerten Höhen des Tetraeders. Die übrigen zwölf Berührungskegelschnitte sind Hyperbeln. Die Fläche selbst besteht aus 12 gesonderten Theilen, die unter einander nur mittelst der 16 singulären Punkte in Verbindung stehen; etc.

Doppeltangenten von Hesse*) gegeben ist, beweist man**) den Satz: Durch jede gegebene ebene Curve vierter Ordnung kann man sechs verschiedene vierfach unendliche Schaaren von Flächen vierter Ordnung mit 16 singulären Punkten hindurchlegen.

Jede singuläre Tangentenebene der Fläche schneidet dann aus der Ebene der Curve eine Doppeltangente derselben aus und wenn man alle sechs Flächen dieser Art durch eine solche Curve hindurchlegt, so bestimmen ihre singulären Tangentenebenen alle 28 Doppeltangenten derselben in mehrfacher Wiederholung.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen (Artikel 18) 12 Gerade, welche die allgemeine Fläche vierter Ordnung zweimal berühren. Alle solche Linien bilden ein Strahlensystem, das man als von der 12ten Ordnung bezeichnen kann und welches die Fläche vierter Ordnung zur Brennfläche hat. Wird die Fläche durch eine beliebige Ebene geschnitten, so enthält dieselbe 28 Strahlen des Systems, die 28 Doppeltangenten der bezüglichen Schnittcurve; man kann also das Strahlensystem als von der 28ten Klasse bezeichnen.

Ist insbesondere die Brennfläche des Strahlensystems von der hier betrachteten Art, so kann man die Strahlen aussondern, welche die 16 singulären Tangentenebenen vollständig erfüllen, da jede Linie in einer solchen eine Doppeltangente ist; und das Strahlensystem wird dann ebenso von der 12ten Klasse wie von der 12ten Ordnung. Die Untersuchung zeigt ferner, dass dieses Strahlensystem zusammengesetzt ist aus vier Strahlensystemen 2ter Ordnung und Klasse und einem Strahlensystem vierter Ordnung und Klasse. Das vollständige Strahlensystem 12ter Ordnung und 28ter Klasse, welches eine allgemeine Fläche 4ter Ordnung zur Brennfläche hat, besteht, wenn diese 16 singuläre Punkte enthält, erstens aus 16 ebenen Strahlensystemen, zweitens aus 4 Strahlensystemen 2ter Ordnung und Klasse und drittens aus einem Strahlensystem 4ter Ordnung und Klasse.

Für die Fresnel'sche Wellenfläche und ihre Collinearver-

*) „Crelle's Journal", Bd. IL, p. 301.

**) Vgl. Kummer, a. a. O. p. 255.

wandten zerfällt das Strahlensystem 4ter Ordnung und Klasse noch in 2 Strahlensysteme 2ter Ordnung und Klasse.

Denkt man die beliebige Ebene, in welcher die 12 Strahlen der 4 Systeme 2ter und des Systems 4ter Ordnung und Klasse liegen, als eine Tangentenebene der Brennfläche, so fallen je zwei der 12 Strahlen zusammen und man erhält die sechs Tangenten der Fläche in jenem Berührungspunkte, welche sie zugleich noch an je einem zweiten Punkte berühren.

244. Wir betrachten ferner die Parallelfläche einer Fläche zweiten Grades, d. h. die Fläche, welche als Enveloppe derjenigen Ebenen zu definieren ist, die den Tangentenebenen der Fläche zweiten Grades parallel und in einem gegebenen normalen Abstande von ihnen liegen; oder auch als der Ort der Punkte, welche auf den Normalen der Fläche durch eine constante Entfernung von ihr bezeichnet werden.

Offenbar berührt die Kugel von einem dieser Entfernung gleichen Radius stets die Originalfläche, so lange ihr Centrum der Parallelfläche angehört. Und wir bilden am einfachsten die Gleichung der Parallelfläche, indem wir nach Artikel 127, Band I die Bedingung ausdrücken, unter welcher die Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

durch die Kugel

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = k^2$$

berührt wird. Diess geschieht durch die Bildung der Discriminante nach t von einer biquadratischen Gleichung, deren Coefficienten Band I, Artikel 147 gegeben worden sind, welche sich aber in der einfachen Form

$$\frac{t\alpha^2}{a^2 + t} + \frac{t\beta^2}{b^2 + t} + \frac{t\gamma^2}{c^2 + t} = t + k^2$$

schreiben lässt.

Das Resultat repräsentiert eine Fläche von der zwölften Ordnung.

Für den speciellen Fall $k = 0$ reduciert sie sich auf die doppelt zu zählende Fläche zweiten Grades und die imaginäre abwickelbare Fläche, welche alle der gegebenen confocalen Flächen zweiten Grades umhüllt (vergleiche Band I, Artikel 203).

22*

Diess geht direct aus der Form hervor, in welcher soeben die fragliche biquadratische Gleichung geschrieben worden ist.*)

Man erhält dabei die Gleichung der Fläche in der Form

$$S^3 = 27\,T^2,$$

wenn S und T die Invarianten der biquadratischen Form bezeichnen.

245. Der Ort der Fusspunkte der Normalen, die man von einem festen Punkte auf die Tangentenebenen einer Fläche fällen kann, wird als die Fusspunktfläche der Originalfläche (Podaire bei den Franzosen, Pedal bei den englischen Schriftstellern) bezeichnet.

Beispiel. Für das auf seine Achsen a, b, c bezogene Ellipsoid und den Punkt (α, β, γ) als Pol erhält man die Gleichung der Fusspunktfläche durch Elimination von x_1, y_1, z_1 aus den Gleichungen des Ellipsoids, der Tangentenebenen desselben und der Normale der letztern vom Pol in der Form

$$\{x(x-\alpha)+y(y-\beta)+z(z-\gamma)\}^2 = a^2(x-\alpha)^2+b^2(y-\beta)^2+c^2(z-\gamma)^2.$$

Die Fusspunktflächen der Cylinderflächen reducieren sich auf ebene Curven, die Fusspunktcurven ihrer Normalschnitte; die der Kegelflächen auf sphärische Linien der aus dem Pol beschriebenen Supplementarkegel und derjenigen Kugel, welche über der Verbindungslinie der Spitze mit dem Pol steht; ebenso die aller abwickelbaren Flächen auf Curven, die auf dem Supplementarkegel des Pols liegen.

Wenn man aus der Fusspunktfläche nach demselben Verfahren eine neue Fläche ableitet und auf diese wieder das nämliche Verfahren anwendet, so erhält man eine Reihe derivierter Flächen, die man als die erste, zweite, dritte, etc. Fusspunktfläche bezeichnet. Wenn man ferner die Enveloppe der zu den Radien vectoren der Fläche in ihren Endpunkten normalen Ebenen, d. i. eine Fläche, von welcher die gegebene Fläche die erste Fusspunktfläche ist, die erste negative Fusspunktfläche nennt, so kann man von dieser nach derselben Methode zur zweiten, dritten, etc. negativen Fusspunktfläche fortschreiten.**)

---

*) Vgl. Cayley, „Annali di Matem.", t. III, p. 345, wo auch eine andere interessante Auflösung von W. Roberts mitgetheilt ist. Oder die Abhandlung des Herausgebers im „Archiv der Mathem. und Physik", Bd. XXXIX, p. 19 f.

**) Von der reichen Literatur der Fusspunktflächen sind zu nennen die Arbeiten von W. Roberts, „Journal de Mathem.", t. X, XII;

Von den allgemeinen Eigenschaften solcher Flächen mögen hier die wesentlichsten dargestellt werden, sofern sie nicht die Quadratur, Cubatur, etc. derselben betreffen.

Wenn Q der Fusspunkt der Normalen ist, welche von O auf die Tangentenebene im Punkte P gefällt wird, so berührt die über OP als Durchmesser beschriebene Kugel die Fusspunktfläche in Q; daher geht die Normale der Fusspunktfläche in irgend einem Punkte Q durch den Mittelpunkt des entsprechenden Radius vector OP.

Daraus folgt auch sofort, dass die Normale OR auf die Tangentenebene in Q in der Ebene POQ liegt, und dass die Winkelgleichheit

$$\angle QOR = \angle POQ$$

besteht, so dass die rechtwinkligen Dreiecke QOR und POQ einander ähnlich sind. Für die Bezeichnung des Winkels QOR durch

---

B. Tortolini, „Journal für Mathem.“, Bd. XXXI; T. A. Hirst, „Annali di Matem.“, t. II; „Quarterly Journal of Math.“, Vol. III; „Journal für Math.“, Bd. LXII. Die letztere Arbeit kann die besondere Literatur der Quadratur und Cubatur, etc. der derivierten Flächen repräsentieren, auf die hier nur hingedeutet werden kann; die vorletzte behandelt besonders die Krümmungsverhältnisse derselben. In der letzten werden die Sätze von Steiner („Journal für Math.“, Bd. XXI, p. 57) und Raabe (ibid. Bd. L, p. 193) über die Fusspunktcurven auf Flächen ausgedehnt. Wenn man unter Volumen der Fusspunktfläche den Inhalt des Kegels aus dem Anfangspunkt versteht, dessen Basis der Theil der Fusspunktfläche ist, welcher dem betrachteten Theil der gegebenen Fläche entspricht, so zeigt Hirst: Die Anfangspunkte für alle Fusspunktflächen von constantem Volumen liegen, welches auch die Natur der Originalfläche sei, auf einer Fläche dritter Ordnung.

Der Ort derselben Punkte für alle geschlossenen Flächen ist vom zweiten Grade und alle Oerter dieser Art bilden ein System ähnlicher und ähnlich gelegener Flächen, dessen Centrum der Anfangspunkt der Fusspunktfläche des kleinsten Volumens ist.

Zahlreiche specielle Sätze entspringen dem sehr einfachen Beweise noch für die Flächen zweiten Grades. Vgl. auch Magener, „Cubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoids“, „Grunert's Archiv“, Bd. 34, p. 450 f. und Fischer „de superficierum pedalium theorematibus quibusdam.“ Berlin 1859. Uebrigens geht der Ursprung der Theorie der successiven Derivation auf Mac-Laurin zurück. (Vergl. „Philosophical Transactions“ vom Jahre 1718, No. 356.)

α ist somit die erste Normale OQ mit dem Radius vector durch die Gleichung

$$p = \varrho \cos \alpha$$

verbunden; die zweite Normale OR ist sodann

$$= \varrho \cos^2 \alpha$$

u. s. w. Der Radius vector der n^{ten} Fusspunktfläche ist durch

$$\varrho \cos^n \alpha$$

gegeben, und bildet mit dem Radius vector des Originals den Winkel $n\alpha$.*)

Wenn wir die reciproken Polaren einer Fläche A und ihrer Fusspunktfläche B bilden, so erhalten wir eine Fläche a und eine Fläche b, welche letztere jene zur Fusspunktfläche hat. Die Reciprocalflächen einer Fläche S und ihrer auf einander folgenden Fusspunktflächen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ bilden somit eine Reihe

$$S', \; S'_{-1}, \; S'_{-2}, \ldots, \; S'_{-n},$$

da offenbar die letzten Derivierten zu den negativen Fusspunktflächen gehören.

Man erkennt auch, dass die erste Fusspunktfläche die inverse Fläche der reciproken Polare der gegebenen Fläche ist, d. h. die Fläche, welche aus ihr durch die Substitution des reciproken Werths des Radius vector an Stelle des letztern in ihre Gleichung hervorgeht; so dass die Reihe der Fläche $S_1, S_2, \ldots, S_n$ durch Inversion die andere Reihe $S', S'_{-1}, S'_{-2}, \ldots, S'_{-n}$ erzeugt.

---

*) Nach dieser Definition der Ableitung, die wir betrachten, hat W. Roberts die Theorie auf gebrochene Derivierte so zu sagen ausgedehnt. Für $n = \frac{1}{2}$ erhält man aus dem Ellipsoid eine Fläche, der er den Namen Cassinoide giebt, weil sie den Cassini'schen Curven ganz entspricht, die für denselben Werth aus der Ellipse abgeleitet werden. Ihre Gleichung ist für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{2x^2}{r^2 + a^2} + \frac{2y^2}{r^2 + b^2} + \frac{2z^2}{r^2 + c^2} = 1,$$

wenn

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist. Man sieht daraus, dass sie der Ort eines Systems sphärischer Kegelschnitte ist, das durch confocale Ellipsoide bestimmt wird. Ueber die interessanten Eigenschaften dieser Fläche vergleiche man die schöne Arbeit von W. Roberts, „Annali di Matem.", t. V, p. 133—153.

Man kommt so zu den allgemeinen Sätzen: Die Reciprocalfläche der n^{ten} Fusspunktfläche von S ist die $-n^{\text{te}}$ Fusspunktfläche der Reciprocalfläche von S und die $(-n-1)^{\text{te}}$ Fusspunktfläche der inversen Fläche von S. Die inverse Fläche der n^{ten} Fusspunktfläche von S ist die $-n^{\text{te}}$ Fusspunktfläche der inversen Fläche von S und die $(-n+1)^{\text{te}}$ Fusspunktfläche der Reciprocalfläche von S.

Wenn S vom zweiten Grade ist, so ist es auch die inverse Fläche S' und ebenso sind S_{-n} und S'_{-n} von derselben Ordnung und S_n ist daher die Reciprocalfläche, S_{n+1} die inverse Fläche einer Fläche von derselben Ordnung.

Die centralen Fusspunktflächen des Ellipsoids geben dazu eine gute Erläuterung; seine erste positive Fusspunktfläche ist die Elasticitätsfläche von Fresnel, die erste negative eine von Tortolini und Cayley untersuchte Fläche. Wir kommen auf beide sogleich zurück. (Artikel 247 u. 248.)

246. Zuvor stellen wir übersichtlich die allgemeinen Eigenschaften der inversen Flächen zusammen.*)

1) Drei Paare entsprechender Punkte in zwei inversen Flächen liegen in der nämlichen Kugelfläche, sowie zwei Punkte entsprechender Punkte in dem nämlichen Kreise; jene schneidet die mit einem der Einheit gleichen Halbmesser aus dem Anfangspunkt beschriebene Kugel orthogonal.

2) Nach der Eigenschaft eines dem Kreise eingeschriebenen Vierecks bildet die gerade Verbindungslinie irgend zweier Punkte a, b einer Curve mit dem Radius vector Oa denselben Winkel, wie die gerade Verbindungslinie der entsprechenden Punkte a', b' mit dem Radius vector Ob'. Wenn also ab die Tangente in irgend einem Punkte a ist, so schliesst sie denselben Winkel mit dem Radius vector von a ein, wie die Tangente der inversen Curve in dem entsprechenden Punkte a'.

3) Die analogen Eigenschaften ergeben sich für die Flächen. Entsprechende Tangentenebenen sind gleich geneigt gegen den Radius vector; die entsprechenden Normalen liegen mit ihm in derselben Ebene. Sie bilden mit ihm ein gleichschenkliges Dreieck, welches den Abschnitt des Radius vectors zur Basis hat.

4) Der Winkel, welchen zwei Curven in irgend einem Punkte

*) Vergl. Hirst, „Annali di Matemat.", t. II, p. 165 f.

mit einander bilden, ist stets dem Winkel der inversen Curven im entsprechenden Punkte gleich. Diess folgt aus 2).

5) Der Winkel, welchen zwei Flächen mit einander in irgend einem Punkte bilden, ist dem Winkel gleich, welchen die in inversen Flächen im entsprechenden Punkte einschliessen. Diess folgt aus 3).

6) Einer geraden Linie und einer Ebene entspringen durch Inversion ein Kreis und eine Kugel respective, die den Anfangspunkt enthalten.

7) Da ein Kreis stets als Durchschnitt einer Ebene und einer durch den Anfangspunkt gehenden Kugelfläche A angesehen werden kann, so ist die inverse Curve stets ein Kreis; derselbe ist einer der Kreisschnitte zweiter Art desjenigen Kegels, welcher aus dem Anfangspunkt über dem gegebenen Kreis beschrieben ist.

8) Das Centrum des zweiten Kreises liegt in der geraden Linie, welche den Anfangspunkt mit dem Scheitel a des geraden Kegels verbindet, der der Kugel A nach dem ersten Kreise umgeschrieben ist.

Denn A ist das Centrum einer Kugel B, welche die Kugel A orthogonal durchschneidet. Die Ebene, welche durch Inversion aus A entspringt, schneidet die Inverse B' von B orthogonal, d. h. in einem grössten Kreise, dessen Centrum mit dem ihren also zusammenfällt. Aber die Centra von B und von B' liegen nothwendig in einer den Anfangspunkt enthaltenden Geraden.

Dieser Satz ist die Grundlage der stereographischen Projection.*)

9) Einem Kreise, welcher eine Curve osculiert, entspricht ein Kreis, welcher die inverse Curve osculiert.

10) Für inverse Flächen liegen die Krümmungscentra zweier entsprechender Normalschnitte in gerader Linie mit dem Anfangspunkte. Dem Normalschnitt α in irgend einem Punkte m entspricht eine Curve α' auf einer durch den Anfangspunkt gehenden Kugel A; der osculierende Kreis c' von α' ist die inverse Curve des osculierenden Kreises c von α. Ist nun α_1 der Normalschnitt, welcher α' im Punkte m' berührt, so ist nach dem Theorem von

*) Sein letzter Theil ist wohl von Chasles zuerst ausgesprochen worden (1817). Uebrigens haben W. Thompson, „Journal de Mathém.“, t. X und Liouville „ibid.“, t. XII, die nämliche Methode der Transformation, der letztere als Methode der reciproken Radien vectoren in analytischer Form studiert.

Meunier das Centrum von c' die Projection des Centrums von c_1 oder vom osculierenden Kreise von α_1 auf seine Ebene. Aber die Normale $m'c_1$ berührt offenbar die Kugel A in m', so dass c_1 der Scheitel des ihr nach c' umgeschriebenen Kegels ist; somit ergiebt sich 10) aus 8).

11) Den beiden Normalschnitten in m, deren Krümmungscentra äusserste Lagen in der Normale von m einnehmen, entsprechen nothwendig zwei Schnitte der inversen Fläche von derselben Eigenschaft. Die beiden Hauptschnitte der einen Fläche entsprechen daher den Hauptschnitten der andern und einer Krümmungslinie der einen Fläche entspricht eine Krümmungslinie der andern. Dadurch lassen sich auch die Krümmungsverhältnisse dieser Flächenfamilie allgemein erledigen.

247. Die erste Fusspunktfläche des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat als Inverse des reciproken Ellipsoids die Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Sie ist die Elasticitätsfläche von Fresnel. Das inverse System einer Reihe von confocalen Flächen, welche sich rechtwinklig schneiden, ist offenbar eine Reihe von Elasticitätsflächen, die zu einander orthogonal sind. Die Krümmungslinien der Elasticitätsfläche sind daher bestimmt als die Durchschnittslinien derselben mit zwei Flächenfamilien derselben Natur, die aus concyclischen Flächen zweiten Grades abgeleitet sind.

Der Anfangspunkt ist ein Doppelpunkt der Fläche und der imaginäre Kreis, welchen eine beliebige Kugel mit der unendlich entfernten Ebene gemein hat, ist eine Doppellinie derselben.

248. Die Gleichung der ersten negativen Fusspunktfläche einer Fläche zweiten Grades, d. h. der Enveloppe der Ebenen, welche zu den centralen Radien vectoren derselben in ihren Endpunkten normal sind, ist zuerst von Cayley gegeben worden.

Wenn wir durch das Centrum der Fläche zweiten Grades eine Kugel beschrieben denken, welche dieselbe in einem Punkte (x', y', z') berührt, so ist offenbar der Punkt (x, y, z) der derivierten Fläche, welcher dem Punkte (x', y', z') entspricht, der Endpunkt desjenigen Durchmessers dieser Kugel, welcher durch das Centrum der Fläche geht. Wir erhalten also für

$$t = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

die Ausdrücke

$$x = x'\left(2 - \frac{t}{a^2}\right), \quad y = y'\left(2 - \frac{t}{b^2}\right),$$

$$z = z'\left(2 - \frac{t}{c^2}\right).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen für x', y', z' und die Substitution der erhaltenen Werthe in die beiden Gleichungen

$$xx' + yy' + zz' = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

liefert die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\left(2 - \frac{t}{a^2}\right)} + \frac{y^2}{\left(2 - \frac{t}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{\left(2 - \frac{t}{c^2}\right)} = t,$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(2 - \frac{t}{a^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2\left(2 - \frac{t}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(2 - \frac{t}{c^2}\right)} = 1.$$

Da die zweite dieser Gleichungen durch Differentiation der ersten nach t entsteht, so ist die betrachtete Fläche durch die Discriminante dieser Gleichung darstellbar. Wir bilden dieselbe leicht, da die Gleichung vom vierten Grade ist. Sie ist

$$\begin{aligned} t^4 &- 2(a^2 + b^2 + c^2)t^3 + \left\{4(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) + a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2\right\}t^2 \\ &- \left\{8a^2b^2c^2 + 2(b^2 + c^2)a^2x^2 + 2(c^2 + a^2)b^2y^2 + 2(a^2 + b^2)c^2z^2\right\}t \\ &+ 4a^2b^2c^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0. \end{aligned}$$

Wenn wir sie in der Form

$$At^4 + 4Bt^3 + 6Ct^2 + 4Dt + E = 0$$

schreiben, so sehen wir, dass A und B die Grössen x, y, z nicht enthalten, während jede der Grössen C, D, E sie im zweiten Grade enthält. Nun ist die Discriminante vom sechsten Grade in den Coefficienten und von der Form

$$A\Phi + B^2\Psi;$$

sie kann also x, y, z nur im zehnten Grade enthalten und diess ist daher die Ordnungszahl der betrachteten Fläche.

Ihr Querschnitt in einer der Hauptebenen besteht aus der ersten negativen Fusspunktcurve des entsprechenden Hauptschnittes des Ellipsoids, einer Curve sechster Ordnung, und einem zweifach zu zählenden Kegelschnitt, welcher eine Doppelcurve der Fläche ist.

Die Doppelpunkte in den Hauptebenen entsprechen den Punkten des Ellipsoids, für welche

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2a^2, \quad \text{oder} \quad t = 2b^2, \quad t = 2c^2$$

respective ist, wie diess leicht aus den oben für x, y, z gegebenen Ausdrücken hervorgeht. Ueberdiess besitzt die Fläche einen Cuspidalkegelschnitt in unendlicher Entfernung und eine endliche Cuspidalcurve von der sechszehnten Ordnung. Dieselbe entspricht der Durchschnittscurve des Ellipsoids mit der Fläche vierter Ordnung

$$4\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}\right) - 2(x'^2 + y'^2 + z'^2)\left(\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2}\right)$$
$$+ 3(x'^2 + y'^2 + z'^2)\frac{1}{a^2b^2c^2} = 0.^{*)}$$

249. Das nämliche Problem ist von W. Roberts auf einem anderen Wege gelöst worden. Er hat bewiesen, dass die Bestimmung der ersten negativen Fusspunktfläche identisch ist mit der Bildung der Gleichung der Parallelfläche. Jenes fordert die Bestimmung der Enveloppe der Ebene

$$xx' + yy' + zz' = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

wo x', y', z' der Gleichung der Fläche genügen; dieses, als die Bestimmung der Enveloppe einer Kugel, deren Centrum in der Fläche liegt und deren Radius $= a$ ist, fordert die Enveloppe von

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = k^2$$

oder

$$2xx' + 2yy' + 2zz' = x^2 + y^2 + z^2 - k^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2$$

darzustellen. Bei der Bestimmung dieser Enveloppe sind die nicht accentuierten Buchstaben als Constante zu behandeln und es geht daraus hervor, dass beide Probleme specielle Fälle desjenigen sind, in welchem unter denselben Bedingungen die Enveloppe von

---

*) Eine Discussion der Fläche mit Untersuchung der verschiedenen Formen, die sie und die Cuspidal- und Doppelcurven derselben für verschiedene Werthe von a^2, b^2, c^2 annehmen, gab Cayley. (Vgl. „Philosoph. Transactions“, 1858, oder „Annali di Matem.“, t. II, p. 168.)

$$ax' + by' + cz' = x'^2 + y'^2 + z'^2 + d$$

verlangt wird. Und ferner, dass aus der Gleichung der Parallelfläche die Gleichung der ersten negativen Fusspunktfläche hervorgeht, indem man in ihr für k^2, x, y, z die Substitutionen

$$(x^2 + y^2 + z^2),\ \tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{1}{2}y,\ \tfrac{1}{2}z$$

respective vollzieht.

Wenn wir so nach Artikel 244 die Gleichung der Parallelfläche einer Fläche zweiten Grades erhalten haben, so können wir durch die hier angegebenen Substitutionen die Gleichung der ersten negativen Fusspunktfläche finden, für einen beliebigen Anfangspunkt eben so wohl als für den im Centrum gedachten.

Wenn wir ferner für k die Substitution $k + k'$ und dann für k die vorige Substitution machen, so erhalten wir die einem beliebigen Anfangspunkt entsprechende erste negative Fusspunktfläche der Parallelfläche der Fläche zweiten Grades, d. h. die Lösung eines Problems, welches schwerlich in anderer Weise zu lösen sein möchte.

Haben wir wie oben die Gleichung der ersten negativen Fusspunktfläche der Fläche zweiten Grades gefunden, so brauchen wir nur die Gleichung der inversen Fläche derselben zu bilden, um nach Artikel 245 darin die Gleichung ihrer zweiten positiven Fusspunktfläche zu bilden.

Beispiel 1. Man soll die Enveloppe der Ebenen bestimmen, welche normal zu den Radien vectoren der Ebene

$$ax + by + cz + d = 0$$

in ihren Enden gelegt sind.

Da die Parallelfläche hier aus einem Ebenenpaar besteht, dessen Gleichung

$$(ax + by + cz + d)^2 = k^2$$

ist, so ist die der Enveloppe

$$(ax + by + cz + d)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Beispiel 2. Man soll die erste negative Fusspunktfläche der Kugel

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$$

bestimmen.

Die Parallelfläche besteht aus dem Paar von concentrischen Kugeln

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = (r \pm k)^2;$$

die Enveloppe ist daher

$$(x - 2\alpha)^2 + (y - 2\beta)^2 + (z - 2\gamma)^2 = \left\{2r \pm \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2}\right\}^2,$$

d. h. eine Umdrehungsfläche zweiten Grades.

250. Durch Dupin ist die Fläche studiert worden,*) welche die Enveloppe aller derjenigen Kugeln ist, welche drei gegebene Kugeln berühren. Er hat ihr den Namen Cyclide gegeben. Die Eigenschaften derselben können mit Leichtigkeit durch Inversion aus denen der Ringfläche abgeleitet werden, welche durch Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Achse erzeugt wird. (Vergl. Artikel 177.) Denn aus den allgemeinen Grundsätzen der Inversion im Artikel 246 geht sofort hervor, dass eine Gruppe von drei Kugeln stets in eine Gruppe von drei andern Kugeln transformiert werden kann, deren Centra in einer geraden Linie liegen. Der Ort der Anfangspunkte der Inversion ist die Peripherie des Orthogonalkreises der in der Ebene ihrer Centra liegenden grössten Kreise der Kugeln. Sind aber die Centra der Kugeln in gerader Linie, so ist die Enveloppe der berührenden Kugeln offenbar aus vier Kreisringflächen zusammengesetzt, für welche jene Gerade die gemeinschaftliche Achse ist. Die Berührungspunkte der festen Kugeln mit der veränderlichen bilden Kreise im speciellen wie im allgemeinen Fall. Daher besteht die Cyclide im Allgemeinen aus vier Mänteln; dieselben schneiden sich paarweise nach Kreisperipherien, welche Krümmungslinien der Fläche sind, unter constanten Winkeln.

Alle Krümmungslinien der Cyclide sind Kreise; denn auf jenen Ringflächen sind sie Meridian und Parallelkreise. Die Ebene einer Krümmungslinie schneidet die Fläche unter constantem Winkel.

Da man durch einen beliebigen Punkt des Raumes stets zwei Kugelflächen legen kann, welche die Ringfläche berühren und zwar nach je zwei Curven, nämlich nach Meridianen oder Parallelkreisen, so besitzt die Cyclide nothwendig zwei Tangentenebenen, welche sie nach Krümmungslinien berühren.

Wenn man ebenso die Kugeln betrachtet, welche durch einen beliebigen Punkt des Raumes und die Kreise der Ringfläche bestimmt sind, so findet man, dass sie zwei Schaaren bilden, deren jede eine Kreislinie gemeinschaftlich enthält und erhält den Satz: Die Ebenen der kreisförmigen Krümmungslinien der Cyclide bilden zwei Büschel, deren Scheitelkanten zu einander rechtwinklig sind. Die Centra dieser Kreise bilden zwei ebene Curven, welche

*) Vergl. „Applications de Géométrie", p. 200.

Fusspunktcurven von Kegelschnitten sind. Die Krümmungscentra der Cyclide bilden zwei Kegelschnitte in Ebenen, welche zu einander normal sind.

Da die Kreisringfläche durch jede doppelt berührende Ebene in zwei Kreisen geschnitten wird, so muss jede die Cyclide doppelt berührende Kugel sie in zwei Kreisen durchschneiden, deren Ebenen selbst die Cyclide doppelt berühren.

Die Gleichung der Cyclide ist

$$(A-\alpha^2)^2 = 4\,(B + 2bc\alpha x)$$

für α als einen willkürlichen Parameter und

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2,$$
$$B = (b^2 + c^2)\,x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2.$$

(Vgl. den Anhang „Ueber die Systeme der Orthogonalflächen“, Artikel 5. pag. 568).

Ihre erste negative Fusspunktfläche wird durch Substitution von $(\alpha + k)$ für α und nach dem Theorem des vorigen Artikels in der Form

$$\left\{(\alpha^2-b^2-c^2)\,x^2 + (\alpha^2-c^2)\,y^2 + (\alpha^2-b^2)\,z^2 - 4\alpha bcx \right.$$
$$\left. + \alpha^4 - 2\alpha^2\,(b^2+c^2) + (c^2-b^2)^2\right\}^2 =$$
$$4\,(bcx + \alpha b^2 + \alpha c^2 - \alpha^3)\,(x^2+y^2+z^2)$$

erhalten. Durch die Substitution von $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ für x, y, z respective erhält man sie statt für den Anfangspunkt der Coordinaten für einen beliebigen Punkt im Raume.

251. Die Ergebnisse des vorigen Artikels können vervollständigt werden durch eine allgemeinere Theorie der Flächen vierter Ordnung, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten gelegen sind.*)

Wenn eine Fläche vierter Ordnung einen Kegelschnitt enthält, so muss die Ebene desselben aus ihr noch einen zweiten Kegelschnitt herausschneiden; die vier reellen oder imaginären Punkte, welche beide Kegelschnitte mit einander gemein haben, müssen nothwendig entweder Doppelpunkte der Fläche oder Berührungspunkte derselben mit der Ebene der Kegelschnitte sein. Andererseits bedingt die Existenz von vier Doppelpunkten im ebenen Schnitt einer Fläche vierter Ordnung die Zusammen-

*) Man verdankt diese Theorie Kummer. Vgl. „Monatsberichte der kön. Preuss. Akad. d. W. zu Berlin“, 1863, p. 324.

setzung derselben aus Curven niederer Ordnungen, da eine eigentliche Curve vierter Ordnung nur drei Doppelpunkte haben kann; liegen drei von den Doppelpunkten in gerader Linie, so sind jene eben diese Gerade und eine Curve dritter Ordnung. Bei mehr als vier Doppelpunkten ist der betrachtete Schnitt nothwendig eine Verbindung zweier Geraden und eines Kegelschnitts, als welcher Fall fünf, oder eine Verbindung von vier Geraden, als welcher Fall sechs Doppelpunkten entspricht.

Die uneigentlichen Flächen vierter Ordnung, welche durch die Verbindung zweier Flächen zweiter Ordnung repräsentiert werden, und die Kegelflächen vierten Grades, als welche für alle durch einen Punkt (im letzteren Falle die Spitze) gehende Ebenen Kegelschnittpaare ergeben, bleiben hier ausgeschlossen.

Es bleiben folgende Fälle zu unterscheiden: 1) Die Schaar der Ebenen der Kegelschnittpaare berührt die Fläche nicht.

2) Sie besteht aus einfachen Tangentenebenen der Fläche.

3) Sie besteht aus Doppeltangentenebenen der Fläche.

Die Fälle der dreifach berührenden Ebenen und der längs einer Geraden berührenden Ebenen sind unwichtig, der Letztere insbesondere beschränkt auf die osculierenden Ebenen der abwickelbaren Flächen vierter Ordnung.

252. 1) Wenn die Ebenen der Kegelschnittpaare die Fläche nicht berühren, so enthält jede derselben nothwendig vier Doppelpunkte der Fläche. Ist keiner dieser Doppelpunkte für alle Ebenen der Schaar gemeinschaftlich, so besitzt die Fläche eine Doppelcurve vierter Ordnung und muss aus zwei Flächen zweiten Grades bestehen.

Ist einer der Doppelpunkte allen den Ebenen der Kegelschnittpaare gemeinschaftlich, d. h. bilden dieselben ein Netz, so besitzt die Fläche nothwendig eine Doppelcurve dritter Ordnung, die jenen Punkt nicht enthält; auch diess ist nur möglich in den ausgeschlossenen Fällen der uneigentlichen Flächen vierter Ordnung.

Die Gemeinsamkeit von zwei Doppelpunkten für alle Ebenen der Schaar oder die Voraussetzung, dass diese ein Büschel bilden, erfordert eine Doppelcurve zweiten Grades, welche jene festen Punkte nicht enthält. Und die Existenz einer solchen Doppelcurve und zweier Doppelpunkte ausser ihr macht die Ebenen des durch diese bestimmten Büschels zu Ebenen der Kegelschnittpaare, wenn nicht die Verbindungslinie jener Doppelpunkte den Doppelkegelschnitt schneidet, wo sie dann der Fläche ganz angehört.

Die Gleichung einer solchen Fläche ist von der Form

$$\varphi^2 = 4p^2\psi,$$

wenn φ und ψ ganze rationale Functionen zweiten Grades und p eine lineare Function der drei Veränderlichen bezeichnen. Nimmt man hier ψ als Product der linearen Functionen q und r, also

$$\varphi^2 = 4p^2qr,$$

so hat man die allgemeine Gleichung der Flächen vierter Ordnung, die ausser dem Doppelkegelschnitt zwei Doppelpunkte haben, ohne dass ihre gerade Verbindungslinie der Fläche angehört. Hier ist

$$\varphi = 0, \quad p = 0$$

die Doppelcurve und die Punkte

$$q = 0, \quad r = 0, \quad \varphi = 0,$$

die Schnitte einer Geraden mit einer Fläche zweiten Grades, sind die Doppelpunkte der Fläche. Alle Ebenen des Büschels

$$q = 0, \quad r = 0$$

schneiden Kegelschnittpaare, die Ebenen

$$q = 0, \quad r = 0$$

selbst sind singuläre Tangentenebenen, denn sie berühren die Flächen nach den Kegelschnitten, welche sie enthalten.

Denken wir ausser dem Doppelkegelschnitt zwei Paare von Doppelpunkten in der Fläche, so entspringen zwei Büschel von Ebenen der Kegelschnittpaare; man hat die allgemeine Gleichung solcher Flächen

$$(p^2 + qr - st)^2 = 4p^2qr,$$

oder was dasselbe ist

$$(p^2 - qr + st)^2 = 4p^2st,$$

oder

$$p + \sqrt{qr} + \sqrt{st} = 0$$

wenn p, q, r, s, t lineare Functionen der Veränderlichen sind.

Die Ebenenbüschel

$$q + \lambda r = 0, \quad s + \mu t = 0$$

sind die Ebenen der Kegelschnittpaare, die vier Ebenen

$$q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0, \quad t = 0$$

berühren die Fläche nach Kegelschnitten.

Die Doppelcurve ist durch

$$p = 0, \quad qr - st = 0$$

bestimmt und die vier einzelnen Doppelpunkte sind in Paaren durch

$$q = 0, \quad r = 0, \quad p^2 - st = 0,$$
$$s = 0, \quad t = 0, \quad p^2 - qr = 0$$

dargestellt. Bei genauerer Untersuchung ihrer Lage findet man, dass von den sechs Geraden, welche sie verbinden, vier die Doppelcurve zweiten Grades schneiden und also der Fläche selbst angehören, so dass eben nur die übrigen zwei Verbindungslinien

$$q = 0, \quad r = 0; \quad s = 0, \quad t = 0$$

als Achsen der Ebenenbüschel der Kegelschnittpaare bleiben.

Zu dieser Gruppe von Flächen gehört die Dupin'sche Cyclide, wie die Vergleichung mit den Sätzen des Artikel 250 zeigt; ihre Doppelcurve liegt ganz im Unendlichen und von den vier Doppelpunkten sind stets zwei imaginär. Ihrer Gleichung kann die Form

$$b^2 = \{(ax - ek)^2 + b^2y^2\}^{\frac{1}{2}} + \{(ex - ak)^2 - b^2z^2\}^{\frac{1}{2}}$$

gegeben werden.

253. Wenn jede Ebene der Kegelschnittpaare durch mehr als zwei feste Doppelpunkte geht, so muss die gemeinsame Achse ihres Büschels der Fläche selbst als eine gerade Doppellinie angehören. Aus jeder Fläche vierter Ordnung mit einer geraden Doppellinie schneiden die Ebenen, welche dieselbe enthalten, Kegelschnitte aus. Die Gleichung solcher Flächen hat die Form

$$p^2\varphi + 2\,pq\varphi_1 + q^2\varphi_2 = 0,$$

wenn φ, φ_1, φ_2 Functionen zweiten Grades, p, q lineare Functionen der Veränderlichen sind. Die Doppellinie ist

$$p = 0, \quad q = 0.$$

Es bleibt hiernach nur die Untersuchung der Fälle übrig, wo die Kegelschnittpaare der Fläche als einander berührend vorausgesetzt werden. Daraus entspringt zuerst eine specielle Art der Flächen

$$\varphi^2 = 4\,p^2qr,$$

bei welcher die beiden einzelnen Doppelpunkte sich unendlich nahe liegen. Bemerkenswerther ist die Familie von Flächen, deren Kegelschnittpaare eine doppelte Berührung haben, Flächen also, die in zwei verschiedenen Punkten sich selbst berühren. Alle durch diese beiden Selbstberührungspunkte gehenden Ebenen schneiden die Fläche in Kegelschnittpaaren, die sich in ihnen berühren. Sie haben die Gleichung

$$\varphi^2 = ap^4 + 4\,bp^3q + 6\,cp^2q^2 + 4\,dpq^3 + eq^4,$$

wo φ eine Function zweiten Grades, p, q lineare Functionen, a, b, c, d, e Constanten bezeichnen. Die Schnittpunkte der Fläche zweiten Grades und der Geraden

$$\varphi = 0, \quad p = 0, \quad q = 0$$

sind die Punkte der Berührung.

Die vier Ebenen, deren algebraische Ausdrücke die linearen Factoren der Function vierten Grades sind, die die rechte Seite der Gleichung bildet, sind singuläre Tangentenebenen der Fläche; sie schneiden aus ihr Kegelschnittpaare aus, welche sich decken. Wenn die bezeichnete biquadratische Function zwei gleiche lineare Factoren hat, so fallen zwei jener Ebenen zusammen und die Fläche besitzt dann in dieser eine Doppelcurve.

Diess ist aber das allgemeine Resultat der Untersuchung: Alle Flächen vierter Ordnung, aus denen Schaaren von nicht berührenden Ebenen Kegelschnittpaare schneiden, können als erzeugt durch Drehung eines veränderlichen Kegelschnitts um eine feste Achse angesehen werden.

Es liegt hier nahe, an die Umdrehungsflächen zu denken, welche durch Drehung eines Kegelschnitts um eine nicht in seiner Ebene gelegene Achse erzeugt werden.*) Sie besitzen einen doppelten Parallelkreis, der zu einem conjugierten und zu einem imaginären Kreise werden kann. Eine zweite Schaar von generierenden Kegelschnitten wird bestimmt durch den zu einem von der ersten Schaar in Bezug auf eine beliebige Meridianebene symmetrischen Kegelschnitt. Jede Ebene, welche einen Kegelschnitt der ersten Schaar enthält, schnei-

*) Ueber die allgemeine Fläche dieser Art mag man die Note von de la Gournerie vergleichen, „Liouville's Journ.“, t. VIII, 2ième Serie p. 52.

det die Fläche ferner in einem Kegelschnitt der zweiten Schaar und berührt sie in zwei Punkten. Jede Fläche zweiten Grades, welche einen dieser Kegelschnitte und den Doppelkreis enthält, geht durch einen Kegelschnitt der andern Reihe und berührt die Fläche in den zwei Schnittpunkten beider.

Die doppelt berührenden Ebenen der Fläche theilen sich in drei Schaaren und jeder solchen Schaar entsprechen zwei Reihen identischer erzeugender Kegelschnitte; es gehen also durch jeden Punkt der Fläche sechs Kegelschnitte ausser dem Parallelkreis des Punktes; etc.

Wenn eine der Achsen des erzeugenden Kegelschnitts bei der Rotation eine Ebene beschreibt, so ist der Doppelparallelkreis unendlich entfernt; etc.

Man kann durch die collineare Transformation zum allgemeineren Falle übergehen.

254. 2) Wenn die Ebenen der Kegelschnittpaare die Fläche einfach berühren, so gehen sie nothwendig durch drei Doppelpunkte der Fläche hindurch und diese Bedingung ist zugleich hinreichend, wenn nicht der Berührungspunkt mit zweien dieser Doppelpunkte in einer Geraden liegt, die dann ganz der Fläche angehören muss. Wenn die Ebenen der Schaar nicht sämmtlich einen festen Doppelpunkt der Fläche enthalten, so muss der Ort der drei Doppelpunkte, welche jede enthält, eine Doppelcurve dritter Ordnung in der Fläche sein. Der Fall, dass der Berührungspunkt mit zweien der übrigen Doppelpunkte in einer Geraden liegt, tritt stets und nur dann ein, wenn die Fläche eine Regelfläche ist. Alle Flächen vierter Ordnung also, welche eine Doppelpunktscurve dritter Ordnung haben, werden von ihren sämmtlichen Tangentenebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten; aus den Regelflächen vierten Grades schneiden die einfach berührenden Ebenen stets Gerade mit Curven dritter Ordnung aus.

Die Doppelcurve kann entweder eine Raumcurve dritter Ordnung, oder die Vereinigung einer Geraden und eines Kegelschnitts oder die von drei Geraden sein. Die Flächen der ersten Art sind nothwendig Regelflächen. Die Flächen der zweiten Art sind ebenfalls Regelflächen und es ist nöthig, dass die gerade Doppellinie den Doppelkegelschnitt in einem Punkte schneidet.

Drei Doppelgerade können existieren im Falle der Regelflächen, einmal als zusammenfallend in eine dreifache Linie der Fläche;

das anderemal als ein Paar Gerade, die nicht in einer Ebene liegen, aber von der dritten geschnitten werden. Nur der Fall, dass die drei Doppelgeraden durch einen Punkt gehen, bleibt zu betrachten. Die allgemeine Gleichung der Fläche ist dann

$$Aq^2r^2 + Br^2p^2 + Cp^2q^2 + 2Dpqrs = 0$$

mit p, q, r, s als linearen Functionen der Coordinaten und A, B, C, D als Constanten. Die drei Ebenen

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0$$

schneiden sich in den Doppelgeraden der Fläche und bestimmen den dreifachen Punkt derselben.

Unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten liegen auf dieser Fläche. Durch jeden beliebigen Punkt des Raumes geht eine Schaar von Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus ihr schneiden; alle Ebenen einer solchen Schaar umhüllen einen Kegel sechsten Grades, welcher die Fläche einhüllt. Durch jeden Punkt auf der Fläche gehen unendlich viele Kegelschnitte derselben, deren Ebenen einen Kegel vierten Grades einhüllen; wenn der Punkt auf einer der drei Doppellinien liegt, so wird derselbe zu einem Kegel zweiten Grades.

Diese merkwürdige Art von Flächen hatte J. Steiner entdeckt und ihre Haupteigenschaften erkannt. An den Satz anknüpfend: Wenn man durch einen Punkt einer Fläche zweiten Grades drei Sehnen parallel zu einem System conjugierter Durchmesser einer andern Fläche zweiten Grades zieht, so liegen ihre Endpunkte in einer Ebene, die stets durch einen festen Punkt p geht*) — betrachtete er die Punkte p, welche den Flächen eines Büschels entsprechen und fand, dass sie einen Kegelschnitt bilden. Denkt man dann drei Flächen zweiten Grades und durch die Schnittlinie der beiden ersten eine neue gelegt, sodann wieder eine durch den Durchschnitt dieser und der dritten, so erhält man ein System von Flächen zweiten Grades, die den Punkten einer Ebene so entsprechen, dass jeder Geraden in ihr ein Büschel von Flächen entspricht. Die Pole derselben bilden eine Fläche, auf der unendlich viele Schaaren von Kegelschnitten lie-

*) Von Hesse bereits 1837 bewiesen in „Crelle's Journal", Bd. XVIII, p. 110. Im I. Bande, Artikel 117, Beispiel 9 ist ein specieller Fall desselben gegeben, von dem man durch Transformation zum allgemeinen leicht übergehen kann.

gen, oder die auf unendlich viele Arten durch Bewegung eines Kegelschnitts erzeugt werden kann.*)

Die Gleichung

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2cxyz = 0$$

giebt eine solche Steiner'sche Fläche, in der die drei Doppelgeraden auf einander senkrecht stehen, und gleiche Abschnitte in derselben besitzen; sie setzen sich weiterhin als isolierte Linien fort. Die vier singulären Tangentenebenen, welche sie nach Kreisen berühren, — d. i. in zwei zusammenfallenden Kegelschnitten schneiden — trennen durch diese die convex-convexen Theile der Fläche von den convex-concaven; die Tangentenebenen in jenen Theilen bestimmen mit der Fläche nur imaginäre, die in diesen Theilen reelle Kegelschnittpaare. Die allgemeinste Steiner'sche Fläche geht hieraus durch collineare Transformation hervor; ihre Gleichung enthält fünfzehn wesentliche Constanten.

255. Die Voraussetzung, dass die Schaar der Tangentenebenen der Kegelschnittpaare einen festen Doppelpunkt der Fläche enthält, bedingt die Existenz einer Doppelcurve zweiten Grades in der Fläche. Ihre allgemeine Gleichung ist

$$\varphi^2 = 4\,p^2\psi,$$

wenn

$$\psi = 0$$

einen Kegel zweiten Grades und

$$\varphi = 0$$

eine durch seinen Scheitel gehende Fläche zweiten Grades darstellt. Der Scheitel des Kegels ist ein Doppelpunkt der Fläche und die Schaar der den Kegel zweiten Grades berührenden Ebenen schneidet Kegelschnittpaare aus derselben aus und berührt sie.

Der Berührungskegel zweiten Grades, welcher der Fläche für den Doppelpunkt entspricht, kann auch als ein solcher betrachtet werden, dessen Tangentenebenen zugleich die Fläche — jedoch sämmtlich im Doppelpunkte — berühren; die von ihnen in der Fläche bestimmten Curven haben in diesem Punkte eine

*) Eine synthetische Untersuchung dieser Fläche ist von Schröter ausgeführt worden; „Monatsberichte der kön. Preuss. Akad. d. W. zu Berlin“, 1863, p. 520.

Spitze und ausser ihm zwei Doppelpunkte, sind also eigentliche Curven vierter Ordnung.

Der Fall des Büschels einfach berührender Ebenen durch zwei Doppelpunkte kann nur statt haben, wenn die gerade Verbindungslinie der Doppelpunkte der Fläche ganz angehört, und giebt keine neue Art solcher Flächen.

256. Wenn eine zweifach berührende Ebene aus der Fläche ein Kegelschnittpaar schneiden soll, so muss sie durch zwei Doppelpunkte der Fläche gehen; und soll eine Schaar von Ebenen dieser Art existieren, so muss die Fläche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen.

Die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen, werden von allen doppelt berührenden Ebenen in Kegelschnittpaaren geschnitten. Man kann die Gleichung solcher Flächen

$$\varphi^2 = 4\,p^2\psi$$

in der Form

$$(\varphi + 2\lambda p^2)^2 = 4\,p^2\,(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2)$$

darstellen, in der λ eine beliebige Constante bedeutet. Bestimmt man diese so, dass

$$\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2 = 0$$

eine Kegelfläche darstellt, so wird die Fläche vierter Ordnung von derselben doppelt eingehüllt; jede ihrer Tangentenebenen ist eine Doppeltangentenebene der Fläche und schneidet ein Kegelschnittpaar aus ihr heraus.

Die Bedingung, unter welcher

$$\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2 = 0$$

eine Kegelfläche ist, führt auf eine Gleichung fünften Grades für λ, d. h. es giebt im Allgemeinen fünf verschiedene Kegel zweiten Grades, deren Tangentenebenen eine Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiten Grades zweifach berühren und Kegelschnittpaare aus ihr schneiden.

Einer imaginären Wurzel dieser Gleichung entspricht eine Schaar imaginärer Ebenen dieser Art; der Gleichheit zweier Wurzeln derselben entsprechen an Stelle der Schaaren doppelt berührender Ebenen zwei singuläre Tangentenebenen, welche sie in Kegelschnitten berühren, oder eine Schaar einfach berührender Ebenen, welche durch einen festen Doppelpunkt der Fläche gehen. Hat die Fläche ausser der Doppelcurve noch ein oder zwei Paar von Doppelpunkten, deren Verbindungslinien sie nicht schneiden, und daher eine oder zwei Schaaren von nicht berührenden Ebenen, welche Kegelschnittpaare aus ihr schneiden, so bleiben von den fünf Schaaren doppelt berührender Ebenen stets nur drei oder eine übrig und die übrigen werden zu singulären Tangentenebenen der Fläche.

Für die Dupin'sche Cyclide hat jene Gleichung zwei Paare gleicher Wurzeln, denen die vier — zwei sind stets imaginär — singulären Tangentenebenen entsprechen; die fünfte Wurzel giebt einen reellen doppelt berührenden Kegel zweiten Grades, dessen Tangentenebenen Kegelschnittpaare — es sind Kreise — aus der Fläche schneiden. Sie sind von denen verschieden, deren Existenz im Artikel 250 erkannt worden ist.

Die Regelflächen vierter Ordnung besitzen doppelt berührende Ebenen, die ausser den beiden Erzeugenden, die sie enthalten, Kegelschnitte auf der Fläche bestimmen.

257. Eine interessante Gruppe von Flächen verbindet sich mit einer Fläche zweiten Grades durch die allgemeine Theorie, welche das Normalenproblem als einen speciellen Fall enthält. Wir haben im I. Bande nur gelegentlich dieses Problems gedacht (Art. 135) und die allgemeinere Untersuchung erwähnt, deren auf Flächen bezügliche Resultate hierher gehören.*)

Man wird finden, dass die im I. Bande in den Artikeln 208—210 kurz gegebene Theorie der Fläche der Krümmungscentra hier in einen allgemeineren Zusammenhang tritt.**)

---

*) A. Clebsch, „Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen zweiter Ordnung." „Journal f. Math.", Bd. LXII, p. 64 f.

**) Zu der im Artikel 208 des ersten Bandes gegebenen Methode zur Bestimmung der Gleichung der Fläche der Centra fügen wir die folgende hinzu, welche aus den Artikeln 129 Band I und 33 des gegenwärtigen ihre Begründung empfängt. Man bilde die Discriminante von

$$\lambda U + \left\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - k^2\right\}$$

für $U = 0$ als die Gleichung der Fläche; sie ist vom vierten Grade in λ und ihre beiden Invarianten seien S und T. Dann entspringt aus

$$S = 0, \quad T = 0$$

durch Elimination von k^2 die Gleichung der Fläche der Centra.

Wenn man das Problem der Normalen für Flächen nach den Gesetzen der Transformation verallgemeinert, so wie diess in den Artikeln 478, 479 der „Analyt. Geom. der Kegelschnitte" für Curven zweiter Ordnung gezeigt worden ist, so entspringt die Aufgabe: Auf der Oberfläche zweiter Ordnung $U=0$ soll ein Punkt X so gefunden werden, dass die Polare eines gegebenen Punktes x in Bezug auf den von X an die Fläche zweiter Ordnung $v=0$ gehenden Tangentenkegel mit der Tangentenebene von $U=0$ im Punkte X zusammenfällt.

Die Fläche $v=0$ vertritt den imaginären Kreis der unendlich entfernten Ebene, in Bezug auf welchen die Richtung der Normale und die Stellung der Tangentenebene Pol und Polare sind.

Bezeichnen U, V homogene Functionen zweiten Grades mit den Veränderlichen X — nämlich X_1, X_2, X_3, X_4 statt X, Y, Z, W — und u, v dieselben mit den Veränderlichen x und sind

$$U_1,\ U_2,\ \ldots,\ V_1,\ \ldots,\ u_1,\ \ldots,\ v_1,\ \ldots$$

ihre durch 2 dividierten partiellen Differentiale nach diesen Veränderlichen, so ist das Problem durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} v_1 &= \lambda U_1 + \mu V_1, \\ v_2 &= \lambda U_2 + \mu V_2, \\ v_3 &= \lambda U_3 + \mu V_3, \\ v_4 &= \lambda U_4 + \mu V_4 \end{aligned}$$

mit λ, μ als unbestimmten Factoren ausgedrückt. Die Elimination von X_1, X_2, X_3, X_4 zwischen ihnen führt auf eine Gleichung sechsten Grades für $\frac{\lambda}{\mu}$, welche in der den confocalen Flächen entsprechenden Form von Joachimsthal untersucht worden ist.*)

Sind u_{ik} und v_{ik} die Coefficienten von u, v und Δ die aus den Elementen $(\lambda u_{ik} + \mu v_{ik})$ gebildete Determinante, Δ_{ik} aber ihre Unterdeterminante, so folgt aus den vorigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \,.\, X_1 &= v_1 \Delta_{11} + v_2 \Delta_{12} + v_3 \Delta_{13} + v_4 \Delta_{14}, \\ &\vdots \\ \Delta \,.\, X_4 &= v_1 \Delta_{41} + v_2 \Delta_{42} + v_3 \Delta_{43} + v_4 \Delta_{44} \end{aligned}$$

*) Vergl. ibid. Bd. LIII, p. 153 f., dazu die schöne letzte Arbeit Joachimsthal's, ibid. Bd. LIX, p. 111 f.

und somit durch Einführung in $U = 0$ die gesuchte Endgleichung

$$\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik} v_p \Delta_{pi} v_q \Delta_{qk} = 0.$$

Bemerkt man, dass für eine Unterdeterminante zweiter Ordnung $\Delta_{ik,qp}$

$$\Delta_{ip}\Delta_{qk} = \Delta_{ik}\Delta_{qp} - \Delta \,.\, \Delta_{ik,qp}{}^{*}),$$

so geht sie über in

$$\Sigma\Sigma u_{ik}\Delta_{ik} \,.\, \Sigma\Sigma v_q v_p \Delta_{qp} - \Delta \,.\, \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik} v_q v_p \Delta_{ik,qp} = 0.$$

Da ferner u_{ik} als Differential des Elements $(\lambda u_{ik} + \mu v_{ik})$ nach λ erscheint, so ist

$$\Sigma\Sigma u_{ik}\Delta_{ik} = \frac{d\Delta}{d\lambda}, \quad \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma u_{ik} v_q v_p \Delta_{ik,qp} = \frac{d\,(\Sigma\Sigma v_q v_p \Delta_{qp})}{d\lambda}$$

und für

$$\Omega = \Sigma\Sigma v_q v_p \Delta_{qp}$$

daher die Endgleichung

$$1) \quad \Omega\,\frac{d\Delta}{d\lambda} - \Delta\,\frac{d\Omega}{d\lambda} = 0.$$

Betrachtet man λ, μ als Constante, die x als Veränderliche, so ist der Ausdruck links eine homogene Function zweiten Grades und die Gleichung bezeichnet eine Fläche zweiten Grades von folgender Entstehung: Wenn man durch die Schnittcurve von $u = 0$, $v = 0$ die Fläche des Büschels $\lambda u + \mu v = 0$ legt, in Bezug auf sie die Polaren der Punkte von $u = 0$ und die Pole der Letzteren in Bezug auf $v = 0$ nimmt.

258. Soll die Gleichung 1) zwei gleiche Wurzeln besitzen, so muss ihr Differentialquotient nach λ zugleich mit ihr selbst verschwinden, d. h.

$$\Omega\,\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} - \Delta\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} = 0$$

sein. Die Bedingungen

$$\Omega = 0, \quad \Delta = 0$$

erfüllen beide Gleichungen, und man sieht daraus, dass die Discriminante von 1) den Ausdruck als Factor enthält, welcher gleich Null gesetzt das Resultat der Elimination aus $\Omega = 0$, $\Delta = 0$ bildet.

Ist wie hier, der Grad von Ω um Eins geringer als der von Δ, so lässt sich der übrig bleibende Factor leicht bilden. Nach

---

*) Vergl. „Vorlesungen", Artikel 19.

Potenzen von λ geordnet hat man

$$\Omega = a\lambda^{n-1} + (n-1)\, a'\lambda^{n-2}\mu + \ldots,$$
$$\varDelta = b\lambda^n + nb'\lambda^{n-1}\mu + \ldots,$$

also statt 1)

$$2)\quad 0 = ab\,.\,\lambda^{2n-2} + 2\,(n-1)\, a'b\lambda^{2n-3}\mu + \ldots$$

und für zwei gleiche Wurzeln durch Differentiation nach λ und μ

$$3)\ \begin{cases} 0 = \Omega\, \dfrac{d^2\varDelta}{d\lambda^2} - \varDelta\, \dfrac{d^2\Omega}{d\lambda^2} \\ = 2(n-1)\, ab\,\lambda^{2n-3} + 2\,(n-1)\,(2n-3)\, a'b\,\lambda^{2n-4}\mu + \ldots \\ 0 = \dfrac{d\left(\Omega\, \dfrac{d\varDelta}{d\lambda} - \varDelta\, \dfrac{d\Omega}{d\lambda}\right)}{d\mu} = 2\,(n-1)\, a'b\,\lambda^{2n-3} + \ldots \end{cases}$$

Da die beiden letzten Gleichungen für $\mu = 0$, $b = 0$ verschwinden, so ist b ein fernerer Factor der Discriminante.

Und, wenn der Fall $\Omega = 0$, $\varDelta = 0$ als Bedingung von zwei gleichen Wurzeln ausgeschlossen werden soll, so folgt aus 2) und der ersten 3)

$$0 = \frac{d\Omega}{d\lambda}\,\frac{d^2\varDelta}{d\lambda^2} - \frac{d\varDelta}{d\lambda}\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2}$$
$$= n\,(n-1)\, ab\,\lambda^{2n-4} + 2n\,(n-1)\,(n-2)\, ab'\lambda^{2n-5}\mu + \ldots,$$

wodurch in Verbindung mit der ersten Gleichung 3) die durch μ theilbare Gleichung

$$0 = \left(n\Omega - 2\lambda\,\frac{d\Omega}{d\lambda}\right)\frac{d^2\varDelta}{d\lambda^2} - \left(n\varDelta - 2\lambda\,\frac{d\varDelta}{d\lambda}\right)\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2}$$
$$= 2n\,(n-1)\, a'b\,\lambda^{2n-4}\mu + \ldots$$

entspringt. Mit ihrer Hilfe geht auch aus der zweiten Gleichung 3) eine solche Gleichung hervor, in der die Division durch μ nach den Formeln für homogene Functionen Ω, $\varDelta$ und ihre Differentialquotienten ausgeführt wird,

$$0 = n\,\frac{d\left(\Omega\,\dfrac{d\varDelta}{d\lambda} - \varDelta\,\dfrac{d\Omega}{d\lambda}\right)}{d\mu} - \frac{\lambda}{\mu}\left(n\Omega - 2\lambda\,\frac{d\Omega}{d\lambda}\right)\frac{d^2\varDelta}{d\lambda^2}$$
$$+ \frac{\lambda}{\mu}\left(n\varDelta - 2\lambda\,\frac{d\varDelta}{d\lambda}\right)\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2}.$$

Man erhält die drei Gleichungen $(2n-4)^{\text{ten}}$ — in unserem Falle 4^{ten} — Grades

$$4)\begin{cases} \lambda \dfrac{d^2\varDelta}{d\lambda^2}\dfrac{d^2\Omega}{d\lambda^2} + (n-1)\,\mu \dfrac{d^2\varDelta}{d\lambda^2}\dfrac{d^2\Omega}{d\lambda\, d\mu} - (n-2)\,\mu \dfrac{d^2\varDelta}{d\lambda\, d\mu}\dfrac{d^2\Omega}{d\lambda^2} \\ \qquad = 0, \\ 2\lambda \dfrac{d^2\varDelta}{d\lambda\, d\mu}\dfrac{d^2\Omega}{d\lambda\, d\mu} + n\mu \dfrac{d^2\varDelta}{d\lambda\, d\mu}\dfrac{d^2\Omega}{d\mu^2} - (n-1)\,\mu \dfrac{d^2\Omega}{d\lambda\, d\mu}\dfrac{d^2\varDelta}{d\mu^2} \\ \qquad - \lambda \dfrac{d^2\Omega}{d\lambda^2}\dfrac{d^2\varDelta}{d\mu^2} = 0, \\ 2\lambda \dfrac{d^2\varDelta}{d\lambda^2}\dfrac{d^2\Omega}{d\lambda\, d\mu} + n\mu \dfrac{d^2\varDelta}{d\lambda^2}\dfrac{d^2\Omega}{d\mu^2} - (n-2)\,\mu \dfrac{d^2\varDelta}{d\mu^2}\dfrac{d^2\Omega}{d\lambda^2} = 0. \end{cases}$$

Multipliciert man sie mit λ^{n-3}, $\lambda^{n-4}\mu, \ldots, \mu^{n-3}$, so erhält man $3(n-2)$ Gleichungen vom Grade $3n-7$, aus denen die $3(n-2)$ Grössen λ^{3n-7}, $\lambda^{3n-6}\mu, \ldots, \mu^{3n-7}$ durch Bildung einer Determinante

$$G = 0$$

eliminiert werden, die für die Coefficienten von Ω sowohl als von $\varDelta$ von der Ordnung $3(n-2)$ ist. Ist dann $F = 0$ die aus $\Omega = 0$, $\varDelta = 0$ erhaltene Endgleichung, so ist

$$R = b\,.\,F\,.\,G$$

die gesuchte Determinante; sie ist im Allgemeinen von der Ordnung $(4n-6)$ in den Coefficienten von Ω und $\varDelta$, in unserem Falle von der 10ten Ordnung.

259. Die Grösse F ist das vollständige Quadrat eines in lineare Factoren zerfällbaren Ausdrucks.

Denn man kann die Gleichung $F = 0$ bilden, indem man die aus $\varDelta = 0$ für $\dfrac{\lambda}{\mu}$ entspringenden Werthe in den Ausdruck

$$\Sigma\Sigma\varDelta_{pq}v_p v_q = \Omega$$

einführt und alle so erhaltenen Werthe von Ω mit einander multipliciert. Wenn $\varDelta = 0$ ist, kann man aber stets Zahlen α so bestimmen, dass

$$\varDelta_{pq} = \alpha_p\,.\,\alpha_q$$

ist und damit geht Ω in das Quadrat eines in den x linearen Ausdrucks über.

Diese linearen Ausdrücke aber haben zugleich die Eigenschaft, dass durch sie beide Functionen u, v gleichzeitig in die Summen ihrer Quadrate übergeführt werden. Denn ist für $\xi_1, \xi_2, \ldots$ als solche lineare Functionen der x

$$u = p_1 \xi_1^2 + p_2 \xi_2^2 + \ldots + p_n \xi_n^2,$$
$$v = q_1 \xi_1^2 + q_2 \xi_2^2 + \ldots + q_n \xi_n^2,$$

so wird, wenn Δ, Ω für die ξ ebenso wie vorher für die x gebildet werden,

$$\Delta = (\lambda p_1 + \mu q_1)(\lambda p_2 + \mu q_2) \ldots (\lambda p_n + \mu q_n),$$
$$\Omega = \Delta \left\{ \frac{q_1^2 \xi_1^2}{\lambda p_1 + \mu q_1} + \frac{q_2^2 \xi_2^2}{\lambda p_2 + \mu q_2} + \ldots \right\},$$

und somit, wenn man die Wurzel

$$\frac{\lambda}{\mu} = -\frac{q_i}{p_i} \quad \text{aus} \quad \Delta = 0$$

einführt, Ω mit ξ_i^2 proportional. Nach der Theorie der Invarianten kann aber der so erhaltene Ausdruck von dem ursprünglichen nur durch einen constanten Factor verschieden sein, und es sind also die ξ von den oben gefundenen linearen Ausdrücken nur ebenso verschieden. Diess enthält für unseren Fall $n = 4$ den Satz: **Die Punkte, für welche zwei Lösungen des Problems zusammenfallen, bilden das doppelt gerechnete gemeinsame Polartetraeder der Oberflächen $u = 0$, $v = 0$** (vgl. Band I, Artikel 126, 146), **und ausserdem eine Fläche zwölfter Ordnung $G = 0$.** Macht man $u = 0$, $v = 0$ confocal, so wird die Fläche G mit der Fläche der Hauptkrümmungscentra von u identisch. Im Falle des ebenen Kegelschnitts tritt an ihre Stelle die Evolute desselben.

260. Eine andere Bildung der Gleichung $G = 0$ wird weiteres Licht über die Frage verbreiten.

Die Gleichungen des Artikel 258, aus denen $G = 0$ abgeleitet worden, können in der Form

$$\Delta + \mu m \Omega = 0,$$
$$\frac{d\Delta}{d\lambda} + \mu m \frac{d\Omega}{d\lambda} = 0, \qquad \frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} + \mu m \frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} = 0$$

geschrieben werden und erscheinen so als Bedingungen, unter denen eine Zahl m so bestimmbar ist, dass die Gleichung 4[ten] Grades

$$\Delta + m\mu\Omega = 0$$

drei gleiche Wurzeln besitze. Die Existenz von drei gleichen Wurzeln der biquadratischen Gleichung wird aber durch das Verschwinden beider Fundamentalinvarianten angezeigt.*)

---

*) Vergl. des Herausgebers „Elemente der neueren Geometrie der Algebra der binären Formen“, p. 206.

Für
$$\varDelta = b\lambda^4 + 4b'\lambda^3\mu + 6b''\lambda^2\mu^2 + 4b'''\lambda\mu^3 + b''''\mu^4,$$
$$\Omega = a\lambda^3 + 3a'\lambda^2\mu + 3a''\lambda\mu^2 + a'''\mu^3$$
sind sie
$$i = 6(b'''' + ma''') + 4\left(b' + m\frac{a}{4}\right)\left(b''' + 3m\frac{a''}{4}\right) + 3\left(b'' + m\frac{a'}{2}\right)^2,$$
$$j = \begin{vmatrix} b & , b' + m\frac{a}{4}, & b'' + m\frac{a'}{2} \\ b' + m\frac{a}{4}, & b'' + m\frac{a'}{2}, & b''' + 3m\frac{a''}{4} \\ b'' + m\frac{a'}{2}, & b''' + 3m\frac{a''}{4}, & b'''' + ma''' \end{vmatrix};$$
und wenn man sie in der kurzen Form
$$i = A + 2mA_1 + m^2A_2,$$
$$j = B + 3mB_1 + 3m^2B_2 + m^3B_3$$
darstellt, so ist $G = 0$ als das Eliminationsresultat von
$$i = 0, \quad j = 0$$
zu bilden, d. i.
$$5)\quad G = 0 = \begin{vmatrix} A, & 2A_1, & A_2, & 0, & 0 \\ 0, & A, & 2A_1, & A_2, & 0 \\ 0, & 0, & A, & 2A_1, & A_2 \\ B, & 3B_1, & 3B_2, & B_3, & 0 \\ 0, & B, & 3B_1, & 3B_2, & B_3 \end{vmatrix}$$
oder auch in der äquivalenten Form*) als Resultante von drei quadratischen Gleichungen
$$6)\quad G = 0 = \begin{vmatrix} 3B_1A - 2A_1B, & 3B_2A - A_2B, & B_3A \\ BA_2 & , 3B_1A_2 - AB_3, & 3B_2A_2 - 2A_1B_3 \\ A & , 2A_1 & , A_2 \end{vmatrix}.$$

Da endlich unsere Gleichung
$$\varDelta\frac{d\Omega}{d\lambda} - \Omega\frac{d\varDelta}{d\lambda} = 0$$
ausdrückt, dass die Gleichung
$$\varDelta + m\mu\Omega = 0$$

---

*) Vergl. für beide die „Elemente“, p. 107, 110 f.

zwei gleiche Wurzeln habe, so kann sie durch die Discriminante dieser Gleichung vierten Grades $i^3 - 27j^2 = 0$ ersetzt werden, d. i. durch

7) $(A + 2mA_1 + m^2A_2)^3 - 27(B + 3mB_1 + 3m^2B_2 + m^3B_3)^2 = 0.$

261. Diese Form führt auf einige Fälle, in denen das Problem algebraisch lösbar ist. Zuerst für

$$AA_2 - A_1^2 = 0.$$

Denn die vorige Gleichung giebt mit A multipliciert das Product der beiden cubischen Gleichungen

$$(A + mA_1)^3 = \pm \sqrt{27A}\,.\,(B + 3B_1m + 3B_2m^2 + B_3m^3).$$

Dem entsprechend giebt der Werth von G mit A^3 multipliciert

$$(BA_1^3 - 3B_1AA_1^2 + 3B_2A^2A_1 - B_3A^3)^2 = 0.$$

Diess giebt den Satz: Das Problem ist algebraisch lösbar für alle Punkte einer Fläche vierter Ordnung F

$$AA_2 - A_1^2 = 0,$$

welche die Fläche $G = 0$ in einer Curve D' berührt, durch die eine Fläche sechster Ordnung

$$BA_1^3 - 3B_1AA_1^2 + 3B_2A^2A_1 - B_2A^3 = 0$$

sich legen lässt.

Sodann für

$$B : B_1 = B_1 : B_2 = B_2 : B_3 \quad \text{oder} \quad B_1^2 = BB_2,\ B_1B_2 = B_3B.$$

Denn dann giebt die Gleichung durch Multiplication mit B^4 das Product der drei quadratischen Gleichungen

$$(A + 2A_1m + A_2m^2)\sqrt[3]{B^4} = 3(B + mB_1)^2,$$

und $G = 0$ verwandelt sich mit B^4 multipliciert eben dadurch in

$$(B^2A_2 - 2BB_1A_1 + B_1^2A)^3 = 0,$$

so dass man den Satz erhält: Das Problem ist algebraisch lösbar für alle Punkte einer Curve vier und zwanzigster Ordnung, die sich als Schnitt zweier Flächen vierter und sechster Ordnung

$$B_1^2 - BB_2 = 0,\quad B_1B_2 - BB_3 = 0$$

darstellt; sie berührt die Fläche $G = 0$ dreipunktig in den sechs und neunzig Punkten, in denen sie ihr begegnet und die Berührungspunkte liegen auf der

Fläche vierter Ordnung

$$B^2A_2 - 2BB_1A_1 + B_1{}^2A = 0.$$

Endlich für den Fall, wo die sechs Wurzeln der Gleichung 7) eine Involution bilden. Man kann dann die ungeraden Potenzen der Unbekannten durch eine lineare Transformation verschwinden machen; aber durch die Substitution

$$m = \frac{\alpha\mu + \beta}{\gamma\mu + \delta}$$

geht die Gleichung in die neue

$$(\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}_1\mu + \mathfrak{A}_2\mu^2)^3 - 27(\mathfrak{B} + 3\mathfrak{B}_1\mu + 3\mathfrak{B}_2\mu^2 + \mathfrak{B}_3\mu^3)^2 = 0$$

über und man erhält also die Fläche durch die Elimination von α, β, γ, δ aus dem System

$$\mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_1 = 27\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1, \quad 4\mathfrak{A}_1{}^3 + 6\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A} = 27(\mathfrak{B}\mathfrak{B}_3 + 9\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2),$$
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2{}^2 = 27\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3,$$

welches die Eliminationsresultanten der Systeme

$$\mathfrak{A}_1 = 0, \ \mathfrak{B} = 0, \ \mathfrak{B}_2 = 0; \quad \mathfrak{A}_1 = 0, \ \mathfrak{B}_1 = 0, \ \mathfrak{B}_3 = 0$$

als Factoren enthalten muss, weil diese Systeme auch jene Gruppe erfüllen.

262. Wir betrachten ferner die Werthsysteme der x, für welche drei Lösungen des Problems zusammenfallen.

Ersetzt man die Gleichung

$$\varDelta \frac{d\Omega}{d\lambda} - \Omega \frac{d\varDelta}{d\lambda} = 0$$

durch die beiden Gleichungen

8) $$\varDelta + m\Omega = 0, \quad \frac{d\varDelta}{d\lambda} + m\frac{d\Omega}{d\lambda} = 0 \quad (\mu = 1 \text{ gesetzt}),$$

so hat jene zwei gleiche Wurzeln, wenn diese noch bestehen, während man von λ und m zu $\lambda + d\lambda$ und $m + dm$ übergeht. Diess giebt die Bedingungen

$$\Omega\,.\,dm = 0, \quad \left(\frac{d^2\varDelta}{d\lambda^2} + m\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2}\right)d\lambda + \frac{d\Omega}{d\lambda}dm = 0,$$

und man erhält daraus entweder

$$\varDelta = 0, \quad \Omega = 0,$$

d. h.

$$F = 0,$$

oder

$$9)\quad \begin{aligned}&\Delta + m\Omega = 0, \quad \frac{d\Delta}{d\lambda} + m\,\frac{d\Omega}{d\lambda} = 0,\\ &\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} + m\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} = 0, \quad \text{d. h.} \quad G = 0.\end{aligned}$$

Sollen drei Wurzeln gleich werden, so kann man in dem vorigen System der Bedingungen wieder λ und m durch

$$\lambda + d\lambda, \quad m + dm$$

ersetzen und erhält

$$\frac{d\Omega}{d\lambda}\,d\lambda dm + \Omega\,d^2m = 0, \quad \left(\frac{d^3\Delta}{d\lambda^3} + m\,\frac{d^3\Omega}{d\lambda^3}\right)d\lambda^2$$
$$+\left(\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} + m\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2}\right)d^2\lambda + 2\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2}\,dm d\lambda + \frac{d\Omega}{d\lambda}\,d^2m = 0,$$

so dass es zwei Klassen von Werthsystemen giebt, denen drei gleiche Wurzeln λ entsprechen. Die erste genügt den ersten Bedingungen beider Gruppen durch

$$\Omega = 0, \quad dm = 0,$$

die andere durch

$$dm = 0, \quad d^2m = 0;$$

jene liefert ferner

$$10)\quad \begin{aligned}&\Omega = 0, \quad \Delta = 0, \quad \frac{d\Delta}{d\lambda} + m\,\frac{d\Omega}{d\lambda} = 0,\\ &\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} + m\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} = 0;\end{aligned}$$

für sie verschwinden also gleichzeitig F und G und sie stellen somit den unvollständigen Schnitt des Polartetraeders mit der Fläche $G = 0$ dar.

Die zugehörigen Werthsysteme der x besitzen eine merkwürdige allgemeine Eigenschaft. Setzen wir

$$\delta f = \frac{df}{dx_1}\,dx_1 + \frac{df}{dx_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{df}{dx_n}\,dx_n,$$

so folgt aus den Gleichungen 5) das Paar

$$11)\quad \begin{aligned}&\Omega dm + m\delta\Omega = 0,\\ &\left(\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} + m\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2}\right)d\lambda + \frac{d\Omega}{d\lambda}\,d\lambda dm + m\delta\,\frac{d\Omega}{d\lambda}\,d\lambda = 0,\end{aligned}$$

und hier reduciert sich die zweite Gleichung auf

$$\frac{d\Omega}{d\lambda}\,dm + \delta\,\frac{d\Omega}{d\lambda}\,m = 0,$$

wenn man sich so fortbewegt, dass die x stets der Gleichung

$G = 0$ genügen; somit erhält man für diesen Fall aus beiden Gleichungen

$$\Omega \,.\, \delta \frac{d\Omega}{d\lambda} - \frac{d\Omega}{d\lambda} \,.\, \delta\Omega = 0.$$

Die Tangentenebene der Fläche $G = 0$ ist daher durch die Formel

$$12)\qquad \Omega \,.\, \Sigma X_i' \frac{d^2\Omega}{d\lambda\, dx_i} - \frac{d\Omega}{d\lambda} \Sigma X_i' \frac{d\Omega}{dx_i} = 0$$

dargestellt. Diese Gleichung wie die vorige wird aber für gewisse Systeme der x, welche den Gleichungen $F = 0$, $G = 0$ zugleich genügen, illusorisch, da für sie Ω zu einem vollständigen Quadrat wird, und daher $\delta\Omega$ mit Ω zugleich verschwindet.

Gehen wir daher in 11) zu unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung über, so erhalten wir mit Hinweglassung der verschwindenden Glieder Ω, $\delta\Omega$

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} dm\, d\lambda + m\delta \frac{d\Omega}{d\lambda} \,.\, d\lambda + m\delta\delta\Omega = 0,$$

welches nach der zweiten Gleichung der Gruppe 11) auf

$$\delta\delta\Omega = 0$$

reduciert wird. Und diess ist für

$$\Omega = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n)^2,$$

wie es in diesen Punkten ist, wenn man statt dx die Veränderliche X' setzt,

$$(\alpha_1 X_1' + \alpha_2 X_2' + \ldots + \alpha_n X_n')^2 = 0,$$

oder für einen Theil der Werthsysteme, welche zugleich $F = 0$, $G = 0$ erfüllen, fallen beide Gleichungen bis auf Grössen zweiter Ordnung zusammen; und für $u = 4$: Die Schnittcurven der Fläche $G = 0$ mit dem Polartetraeder sind zum Theil ebene Rückkehrcurven R der Flächen, deren Tangentenebenen die Flächen des Tetraeders selbst sind.

Die zweite Gruppe

$$dm = 0, \quad d^2m = 0$$

liefert ferner

$$13)\qquad \begin{aligned} &\Delta + m\Omega = 0, \quad \frac{d\Delta}{d\lambda} + m\frac{d\Omega}{d\lambda} = 0, \\ &\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} + m\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^3\Delta}{d\lambda^3} + m\frac{d^3\Omega}{d\lambda^3} = 0, \end{aligned}$$

was sich kurz dadurch ersetzen lässt, dass bei passender Bestimmung von m die Gleichung

$$\varDelta + m\Omega = 0$$

vier gleiche Wurzeln besitze.

Die analoge Untersuchung der Werthsysteme von x, für welche vier Lösungen des Problems zusammenfallen, führt zu der Einsicht, dass diess für $u = 4$ nur möglich ist in den Schnittpunkten der Curven des vorher besprochenen Systems mit denen des so eben aufgestellten. (Vergl. Artikel 266.)

263. Die Werthsysteme der x, für welche zwei Wurzelpaare der gegebenen Gleichung zusammenfallen, sondern sich in drei Klassen, je nachdem für beide Wurzelpaare F, oder für beide G, oder für das eine F und für das andere G verschwindet.

Der ersten Klasse entspricht der Satz: Für die Punkte der Kanten des Polartetraeders fallen zweimal zwei Lösungen des Problems zusammen.

Für die zweite Klasse sind die Gleichungen 9) im Artikel 262 auf doppelte Weise erfüllbar und man kann für beide Werthe von λ dann die Gleichung 11) bilden, d. h. man erhält zwei Tangentenebenen, die betreffenden Punkte bilden eine Doppelcurve D von $G = 0$.

Die zweite Determinantenform von G im Artikel 260 setzt als dritte der Gleichungen

$$A + 2A_1 m + A_2 m^2 = 0$$

voraus, diese muss somit in der cubischen Gleichung

$$B + 3B_1 m + 3B_2 m^2 + B_3 m^3 = 0$$

als ein Factor enthalten sein, d. h. man hat für den andern Factor

$$(p + qm)$$

die Bedingungen

$$B = pA, \quad 3B_1 = 2pA_1 + qA,$$
$$3B_2 = pA_2 + 2qA_1, \quad B_3 = qA_3,$$

und kommt damit durch Elimination der p, q zu den Gleichungen

$$14) \quad \begin{cases} P = B(4A_1^2 - AA_2) - 6B_1AA_1 + 3B_2A^2 = 0, \\ Q = 2BA_1A_2 - 3B_1AA_2 + B_3A^2 = 0. \end{cases}$$

Sie sind Gleichungen von Flächen vierter und sechster Ordnung, deren Durchschnittslinie die Doppelcurve D vier und zwanzigsten Grades von $G = 0$ ist.

Man kann in Folge dessen G darstellen wie folgt

$$A^2 \,.\, G = A_2 P^2 - 2 A_1 PQ + AQ^2.$$

Aber diese Curve $P = 0$, $Q = 0$ hat noch eine andere Eigenschaft, welche wir bemerken wollen. Es ist

$$A^3 G = (AQ - A_1 P)^2 + (AA_2 - A_1{}^2)\, P^2,$$

d. h. die Curve $P = 0$, $Q = 0$ liegt mit der Curve D', in welcher die Fläche $AA_2 - A_1{}^2 = 0$ (Artikel 261) die Fläche $G = 0$ berührt, auf der nämlichen Fläche sechster Ordnung $AQ - A_1 P = 0$.

Die dritte Klasse von Systemen, für welche zwei Wurzelpaare zusammenfallen, bildet mit den aus der Gruppe 10, Artikel 262 erhaltenen Systemen zusammen den vollständigen Schnitt des Polartetraeders mit $G = 0$. Derselbe zerfällt in vier Paar ebener Curven, von denen je eine eine Rückkehrcurve der Fläche ist. Für die zweite Gruppe jener Curven liefert die erwähnte Gruppe 10, Artikel 262, ausser $\varDelta = 0$, $\Omega = 0$ noch

$$\frac{d\varDelta}{d\lambda}\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} - \frac{d^2\varDelta}{d\lambda^2}\,\frac{d\Omega}{d\lambda} = 0.$$

Für λ als eine Wurzel von $\varDelta = 0$, also $\Omega = \eta^2$, erhält man ausser $\eta = 0$, d. i. der Gleichung einer Fläche des Polartetraeders noch in dieser letzten Gleichung die Gleichung einer Fläche zweiten Grades und die vier Rückkehrcurven R sind also Kegelschnitte.

264. Die anderen Curven erhält man, indem man die Gleichungen

$$15)\quad \varDelta + m\Omega = 0, \quad \frac{d\varDelta}{d\lambda} + m\frac{d\Omega}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2\varDelta}{d\lambda^2} + m\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} = 0,$$

aus welchen G hervorging, mit

$$\varDelta' = 0, \quad \Omega' = 0,$$

in denen λ', verschieden von λ, an Stelle von λ gesetzt gedacht ist. Setzt man

$$\overline{\varDelta} = \frac{\varDelta - \varDelta'}{\lambda - \lambda'}, \quad \overline{\Omega} = \frac{\Omega - \Omega'}{\lambda - \lambda'},$$

so giebt die vorige Gruppe

$$\overline{\varDelta} + m\overline{\Omega} = 0, \quad \frac{d\overline{\varDelta}}{d\lambda} + m\frac{d\overline{\Omega}}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d^2\overline{\varDelta}}{d\lambda^2} + m\frac{d^2\overline{\Omega}}{d\lambda^2} = 0.$$

Das Resultat der Elimination ist eine Fläche sechster Ordnung, welche von der Ebene $\eta = 0$ in der fraglichen Curve geschnitten wird.

Die vier Curven sechster Ordnung S, für deren Punkte so zweimal zwei Lösungen λ zusammenfallen, stehen mit den Rückkehrcurven in einfacher Verbindung; jede von ihnen schneidet die drei Kegelschnitte, welche nicht in ihrer Ebene liegen, in je zwei Punkten, in denen nämlich, in welchen die Gleichungen

$$\Delta' = 0, \quad \Omega' = 0, \quad \Delta = 0, \quad \Omega = 0,$$

16) $$\frac{d\Delta}{d\lambda}\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} - \frac{d\Omega}{d\lambda}\,\frac{d^2\Delta}{d\lambda^2} = 0$$

gleichzeitig bestehen. Sie liegen wegen $\Omega' = 0$, $\Omega = 0$ in den Kanten des Polartetraeders und somit hat jede der Curven sechster Ordnung sechs Rückkehrpunkte, deren Tangenten drei Kanten des Polartetraeders sind und welche zu zweimal zwei auf den sechs Kegelschnitten liegen. Die Durchschnittspunkte derselben Curven mit der Doppelcurve $P = 0$, $Q = 0$ liefern für jede von ihnen vier Doppelpunkte.

Ebenso gehören zum Schnitt einer Fläche des Polartetraeders mit der Doppelcurve die zwölf Punkte, in denen die betreffende Curve sechster Ordnung den entsprechenden Kegelschnitt schneidet. Denn für sie bestehen die Gleichungen 15) für zwei Werthsysteme λ, m und die Gleichungen $\Delta = 0$, $\Omega = 0$, in denen λ einen der beiden gedachten Werthe selbst annimmt, d. h. die Bedingungen der Doppelcurve, sind zugleich erfüllt. Andere Schnittpunkte der Doppelcurve mit dem Polartetraeder existieren nicht, und in der That zeigt die nähere Untersuchung, dass jede der vier Curven sechster Ordnung S den ihr entsprechenden Kegelschnitt R in vier verschiedenen Punkten T berührt, in denen beide auch von der Doppelcurve berührt werden.

Diese Berührungspunkte zählen doppelt; die übrigen vier Schnittpunkte P des Kegelschnitts mit der Curve sechster Ordnung sind Rückkehrpunkte der Doppelcurve und daher dreifach zu zählen, so dass die richtige Zahl $24 = 4 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3$ erhalten wird.

Die Doppelcurve wird von jeder Seitenfläche des Polartetraeders in vier Punkten berührt; sie hat überdiess sechszehn Rückkehrpunkte, deren immer vier in einer Fläche des Polartetraeders liegen, mit dieser Fläche als gemeinsamer Tangentenebene.*)

265. Es giebt ausser den Rückkehrcurven noch andere, für deren Punkte drei Wurzeln λ zusammenfallen. Sie sind durch die Gleichungen 13) des Artikel 262 bestimmt, oder für sie wird

$$\varDelta + m\Omega = (p + q\lambda)^4.$$

Sind $\lambda', \ldots, \lambda''''$ die Wurzeln von $\varDelta = 0$ und $\eta'^2, \ldots, \eta''''^2$ die entsprechenden Werthe von Ω, so hat man durch Substitution

$$17) \qquad \eta' \sqrt{m} = (p + q\lambda')^2, \ \ldots, \ \eta'''' \sqrt{m} = (p + q\lambda'''')^2$$

und die Elimination von p^2, $2pq$, q^2 aus diesen vier Gleichungen giebt

$$\begin{vmatrix} \eta', & 1, & \lambda', & \lambda'^2 \\ \eta'', & 1, & \lambda'', & \lambda''^2 \\ \eta''', & 1, & \lambda''', & \lambda'''^2 \\ \eta'''', & 1, & \lambda'''', & \lambda''''^2 \end{vmatrix} = 0;$$

sie repräsentiert für alle Vorzeichenwechsel der η acht verschiedene Ebenen, in welchen die fraglichen Punkte Curven bilden. Man bildet aber aus denselben Gleichungen auch

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\eta^{(i)}}, & 1, & \lambda^{(i)} \\ \sqrt{\eta^{(k)}}, & 1, & \lambda^{(k)} \\ \sqrt{\eta^{(h)}}, & 1, & \lambda^{(h)} \end{vmatrix} = 0,$$

wo i, k, h irgend drei verschiedene der Indices $'$, $''$, $'''$, $''''$ bezeichnen; d. h.

$$\begin{aligned} &\eta^{(i)2} (\lambda^{(k)} - \lambda^{(h)})^4 - 2\eta^{(k)}\eta^{(h)} (\lambda^{(i)} - \lambda^{(k)})^2 (\lambda^{(i)} - \lambda^{(h)})^2 \\ + &\eta^{(k)2} (\lambda^{(h)} - \lambda^{(i)})^4 - 2\eta^{(h)}\eta^{(i)} (\lambda^{(k)} - \lambda^{(h)})^2 (\lambda^{(k)} - \lambda^{(i)})^2 \\ + &\eta^{(h)2} (\lambda^{(i)} - \lambda^{(k)})^4 - 2\eta^{(i)}\eta^{(k)} (\lambda^{(h)} - \lambda^{(i)})^2 (\lambda^{(h)} - \lambda^{(k)})^2 = 0. \end{aligned}$$

Das ist die Gleichung eines Kegels zweiter Ordnung von der Spitze ($\eta^{(i)} = 0$, $\eta^{(k)} = 0$, $\eta^{(h)} = 0$) in einer Ecke des Polar-

---

*) Man vergleiche die im Band I, Artikel 209 entwickelten Beziehungen der Fläche der Hauptkrümmungscentra zu den Hauptebenen und der unendlich entfernten Ebene. Betreffs der Realität fügen wir hinzu: Von einem Punkte lassen sich an ein Ellipsoid sechs, vier oder zwei Normalen ziehen, je nachdem er innerhalb beider Theile der Fläche der Krümmungscentra oder innerhalb des einen und ausserhalb des andern, oder ausserhalb beider gelegen ist.

tetraeders, welcher durch alle Punkte jener Art geht, die in zweien der obigen acht Ebenen liegen, nämlich in denen, welche durch das Vorzeichen des vierten η unterschieden sind. Es existieren also ausser den Rückkehrcurven auf der Fläche $G = 0$ noch acht Kegelschnitte C, für deren Punkte drei Wurzeln λ zusammenfallen. Von ihren acht Ebenen E schneiden sich viermal zwei in jeder Fläche des Tetraeders, und die in zwei solchen Flächen enthaltenen Kegelschnitte liegen auf einem Kegel zweiter Ordnung, dessen Spitze die gegenüberliegende Ecke des Tetraeders ist, so dass von jeder Ecke des Tetraeders vier Kegel ausgehen und jeder Kegelschnitt in vier Kegeln enthalten ist, deren Spitzen die vier Ecken des Tetraeders sind.

Die gegenseitige Abhängigkeit solcher Ebenen kann man so darstellen: Ist E eine derselben und sind E_1, E_2, E_3, E_4 die Geraden, die sie mit den Flächen des Tetraeders bestimmt, so bestimmt jede von ihnen mit der Gegenecke des Tetraeders eine Ebene und man sucht zu den drei so durch diese Gerade gehenden Ebenen die vierte harmonische Ebene, was vier Ebenen ergiebt; indem man dann die Schnittpunkte der ersten Ebene E mit zwei Gegenkanten des Tetraeders durch eine Gerade verbindet, durch diese und je eine der besagten Kanten zwei Ebenen legt, um dann zu diesen drei Gruppen von drei Ebenen eines Büschels die vierten harmonischen Ebenen zu suchen, so sind diese die drei letzten Ebenen des Systems.

266. Diese acht Ebenen enthalten zugleich fernere Punkte, für welche das Problem algebraisch lösbar ist. Denn ihre Gleichung ist die Bedingung, unter der

$$\Delta + m\Omega = 0$$

zwei Paar gleiche Wurzeln besitzt, d. h.

$$18) \quad \Delta + m\Omega = (p + 2q\lambda + r\lambda^2)^2$$

ist. Da aber jede Doppelwurzel dieser Gleichung eine Wurzel von

$$\Delta \frac{d\Omega}{d\lambda} - \Omega \frac{d\Delta}{d\lambda} = 0$$

ist, so hat man zwei Wurzeln dieser Gleichung, welche demselben m entsprechen, ohne dass die entsprechenden λ einander gleich sind.

Betrachten wir ferner zwei der acht Ebenen, die sich in einer Ebene η schneiden; da die auf ihnen liegenden Kegelschnitte einem Kegel angehören, so schneiden sich beide Kegelschnitte in zwei Punkten der Ebene η. Wenn man aber ihre Coordinaten aus den Gleichungen 17) bestimmt, indem man das η verschwinden lässt, durch dessen Vorzeichen jene Ebenen sich unterscheiden, so ergeben sich aus ihnen für die übrigen η eindeutige Verhältnisse: Von den acht Kegelschnitten berühren sich viermal zwei in jeder Tetraederseite, so dass jeder Kegelschnitt sämmtliche Flächen berührt. Die so auf jeder Tetraederseite entstehenden vier Berührungspunkte sind dieselben Punkte T, in denen die entsprechende Curve sechster Ordnung den in derselben Ebene liegenden Rückkehrkegelschnitt berührt.

Es giebt sechszehn Punkte, für welche vier Lösungen des Problems zusammenfallen; von ihnen liegen je vier in jeder Tetraederseite, und sie sind die Berührungspunkte jedes Rückkehrkegelschnitts mit der betreffenden Curve sechster Ordnung.

Wenn man die Richtung des Elements in dem betreffenden Punkte untersucht, so findet man für die Rückkehrcurven aus dem System 10) des Artikel 262 die Bedingungen

$$\delta\Omega = 0, \quad \frac{d\Omega}{d\lambda}\,\delta\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} - \delta\,\frac{d\Omega}{d\lambda}\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} = 0,$$

und für die Kegelschnitte aus dem System 13) an demselben Orte

$$\delta\Omega + \Omega\,dm = 0, \quad \delta\,\frac{d\Omega}{d\lambda} + \frac{d\Omega}{d\lambda}\,dm = 0,$$
$$\delta\,\frac{d^2\Omega}{d\lambda^2} + \frac{d^2\Omega}{d\lambda^2}\,dm = 0,$$

d. i. für $\Omega = 0$ dieselben Gleichungen, die den Punkten selbst entsprechen.

Also: Die vier Geraden t, in denen sich auf einer Tetraederseite immer zwei der acht Ebenen E schneiden, und immer zwei der acht Kegelschnitte C berühren, sind Tangenten der Rückkehrcurve R in den Berührungspunkten derselben mit der betreffenden Curve sechster Ordnung S und mit der Doppelcurve. Sie bilden ein Viereck, dessen Diagonalen die drei entsprechenden Kanten des Tetraeders sind.

267. Die Punkte, in welchen dreimal zwei Wurzeln der gegebenen Gleichung zusammenfallen, liegen entweder auf $G = 0$ oder auf dem Polartetraeder. Sollen sie nur auf der ersten Fläche liegen, so muss auch die Gleichung in m drei Paare gleicher Wurzeln zulassen und da solche gleiche Wurzeln für Punkte von $G = 0$ überhaupt aus der Coexistenz der Gleichungen

$$A + 2A_1m + A_2m^2 = 0,$$
$$B + 3B_1m + 3B_2m^2 + B_3m^3 = 0$$

hervorgehen, so kann diess dreifach nur geschehen für das gleichzeitige Verschwinden aller Coefficienten in der ersten von ihnen, d. h. es ist im Allgemeinen nicht möglich, da A constant ist.*) Solche Punkte liegen also nur auf dem Polartetraeder und zwar entweder in seinen Ecken, für die drei Wurzeln von $\Delta = 0$ Doppelwurzeln der Gleichung sechsten Grades sind; oder in den Schnittpunkten seiner Kanten mit $G = 0$ oder denen seiner Fläche mit der Doppelcurve. Unter den Letzteren zählen die Punkte nicht, in denen sie die Flächen des Tetraeders berührt, denn sie geben vier zusammenfallende Lösungen, und diejenigen nicht, in denen die Rückkehrcurven von den entsprechenden Curven sechster Ordnung geschnitten werden — ihnen entsprechen eine doppelte und eine dreifache Wurzel. Also: Es giebt zwanzig Punkte, für die dreimal zwei Lösungen des Problems zusammenfallen; sie sind die vier Ecken des Tetraeders und sechszehn Punkte, die zu vier auf seinen Flächen liegen und die Doppelpunkte der Curven sechster Ordnung sind.

Die Punkte der Fläche $G = 0$ in den Tetraederkanten sind je vier dreipunktige Berührungspunkte und ihnen entsprechen

---

*) Ist $A = 0$, so bestimmen die vier Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ ein Doppelverhältniss, dessen Werth eine imaginäre Cubikwurzel aus -1 ist, oder eine Reihe, deren fundamentale Doppelverhältnisse einander gleich sind. Dann wird

$$G = BA_2^3 - 6B_1A_1A_2^2 + 12B_2A_1^2A_2 - 8B_3A_1^3 = 0;$$

die Fläche G hat also eine dreifache Curve im Durchschnitt der Flächen zweiter und vierter Ordnung $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. In diesem Falle hat jede der vier Curven S_1 ihre vier Doppelpunkte im Durchschnitt des entsprechenden Kegelschnitts C mit einem anderen Kegelschnitt und diese zwei Kegelschnitte berühren in ihnen die zugehörigen Tangenten von S'.

nach den Gleichungen 16), die sie repräsentieren, eine Wurzel von $\varDelta = 0$ als Doppelwurzel und eine andere als dreifache Wurzel.

268. Punkte dieser Art — mit einer doppelten und einer dreifachen Wurzel — bilden die letzte Klasse von besondern Lösungen des Problems. Sie liegen einerseits nothwendig auf den Rückkehrcurven oder auf einem der acht Kegelschnitte, andererseits auf der Doppelcurve oder auf den Curven sechster Ordnung oder auf den Tetraederkanten. Von den so bezeichneten Punkten gehören die wirklich hierher, in denen die Rückkehrcurven, die Curven sechster Ordnung, die Kegelschnitte und die Doppelcurve sich berühren, so wie die sonstigen Schnittpunkte der letztern mit den acht Kegelschnitten, welche in den ferneren Schnittcurven der acht Ebenen mit der Fläche $G = 0$ liegen müssen.

In folgender Weise lassen sich diese Verhältnisse aufhellen.

Die Gleichung 18) des Artikel 266 liefert durch Einführung der verschiedenen Zeichen der Wurzeln für die Ebenen die Gruppe der vier Gleichungen

$$\eta' \sqrt{m} = p + 2q\lambda' + r\lambda'^2, \ldots,$$
$$\eta'''' \sqrt{m} = p + 2q\lambda'''' + r\lambda''''^2.$$

Nach ihnen kann man p, q, r als Coordinaten eines Punktes in einer der acht Ebenen ansehen, bezogen auf ein in ihr liegendes Coordinatensystem. Wir untersuchen den Schnitt einer solchen Ebene mit der Fläche $G = 0$. Wird $(p + 2q\lambda + r\lambda^2)^2$ ein Biquadrat, so erhält man den betreffenden Kegelschnitt, dessen Gleichung also

$$pr - q^2 = 0 = D$$

ist; er wird von $p = 0$, $q = 0$ in den Punkten von $r = 0$ berührt. Die Identität

$$(p + 2q\lambda + r\lambda^2)(p + 2q\mu + r\mu^2) - \left\{p + q(\lambda + \mu) + r\lambda\mu\right\}^2$$
$$= (pr - q^2)(\lambda - \mu)^2$$

zeigt, dass er auch von den vier Geraden seiner Ebene in den Tetraederseiten berührt wird, wie schon nachgewiesen ist.

Den Schnitt der betrachteten Ebene mit $G = 0$ findet man im Allgemeinen durch die Forderung, dass für einen gewissen Werth von m' die Gleichung

$$\varDelta + m'\Omega = 0$$

drei gleiche Wurzeln habe. Diess geht, weil für die betrachtete Ebene

$$\varDelta + m\Omega = (p + 2q\lambda + r\lambda^2)^2$$

identisch ist, in

$$\varDelta + 3\varkappa\,(p + 2q\lambda + r\lambda^2)^2 = 0$$

über, für $3\varkappa = \dfrac{m'}{m - m'}$; und für die Gleichheit dreier Wurzeln in dieser Gleichung müssen ihre beiden Invarianten verschwinden; d. h. es sind

$$\begin{gathered} i = (b + 3\varkappa p^2)\,(b'''' + 3\varkappa r^2) - 4\,(b' + 3\varkappa pq)\,(b''' + 3\varkappa qr) \\ + 3\left\{b'' + \varkappa\,(pr + 2q^2)\right\}^2 = 0, \end{gathered}$$

$$j = \begin{vmatrix} b + 3\varkappa p^2 & , b' + 3\varkappa pq & , b'' + \varkappa(pr + 2q^2) \\ b' + 3\varkappa pq & , b'' + \varkappa(pr + 2q^2), & b''' + 3\varkappa qr \\ b'' + \varkappa(pr + 2\varkappa q)^2, & b''' + \varkappa qr & , b'''' + 3\varkappa r^2 \end{vmatrix} = 0$$

die betreffenden Bedingungen.

269. Für

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= bb'''' - 4b'b''' + 3b''^2 = A, \\ 2\mathbf{A}_1 &= 3\left\{br^2 - 4b'qr + 2b''(pr + 2q^2) - 4b'''pq + b'''p^2\right\} = 3M, \\ \mathbf{A}_2 &= 12\,(pr - q^2)^2 = 12D^2, \\ \mathbf{B} &= bb''b'''' + 2b'b''b''' - bb'''^2 - b''''b'^2 - b''^3 = B, \end{aligned}$$

$$3\mathbf{B}_1 = -3\begin{vmatrix} b\,, & b'\,, & b''\,, & p \\ b'\,, & b''\,, & b'''\,, & q \\ b''\,, & b'''\,, & b''''\,, & r \\ p\,, & q\,, & r\,, & 0 \end{vmatrix} + (pr - q^2)A = -3\Theta + AD,$$

$3\mathbf{B}_2 = 3DM,\quad \mathbf{B}_3 = 9D^3,$

erhält man

$$19)\quad \begin{cases} i = A + 3M\varkappa + 12D^2\varkappa^2 = 0, \\ j = B + (AD - 3\Theta)\,\varkappa + 3DM\varkappa^2 + 9D^3\varkappa^3 = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\varkappa$ zwischen beiden entspringt die Gleichung des Schnittes in der Form

$$D^2\,.\begin{vmatrix} A^2D - 3A\Theta - 3BM, & 3ADM - 12BD^2, & 9D^3A \\ 4B & , \quad AD - 12\Theta & , \ 3DM \\ A & , \quad 3M & , \ 12D^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bildet man erst die quadratische Gleichung

$$4j - 3Di = 4B + (AD - 12\Theta)\,\varkappa + 3DM\varkappa^2 = 0,$$

so findet man durch Combination mit $i = 0$ für den zweiten

Factor die Form

$$0 = D \,.\, \{4(12BM - A^2D + 12A\Theta)(4AD^2 - 48D\Theta - 3M^2) \\ - D(16BD - AM)^2\},$$

so dass

$$0 = D^3 \,.\, \psi$$

die vollständige Gleichung des Schnittes ist für

$$\psi = 0 = 4(12BM - A^2D + 12A\Theta) \times \\ (4AD^2 - 48D\Theta - 3M^2) - D(16BD - AM)^2. \tag{20}$$

Also: Jede der acht Ebenen berührt die Fläche $G = 0$ längs des in ihr liegenden Kegelschnitts C und diese Berührung ist von der zweiten Ordnung.

Die Einführung von $D = 0$ in $\psi = 0$ giebt

$$0 = M^2(BM + A\Theta),$$

d. h. die Curve sechster Ordnung S', welche mit jedem Kegelschnitt C in einer Ebene liegt, berührt denselben in vier Punkten und schneidet ihn in vier andern P'. Jene liegen auf $M = 0$ und sind die vier Punkte, in denen auch das Tetraeder berührt wird. Die letzteren aber geben den Satz: Es giebt zwei und siebzig Punkte, für welche einmal zwei und einmal drei Wurzeln des Problems zusammenfallen; es sind die vier und zwanzig Punkte, in denen die Curven sechster Ordnung in den Tetraederflächen von den Kanten derselben berührt werden, die sechszehn Punkte, in denen jene Curven sich mit den entsprechenden Rückkehrkegelschnitten schneiden, und die zwei und dreissig Punkte, in denen die acht Berührungskegelschnitte von den in ihren Ebenen liegenden Curven geschnitten werden.

Die Gleichung $\psi = 0$ lässt die vier Doppelpunkte Q' leicht bestimmen, welche diese Curven sechster Ordnung besitzen. Denn die quadratischen Gleichungen

$$i = 0, \quad 4j - 3Di = 0,$$

aus denen sie entsprangen, geben zwei gemeinsame Wurzeln für

$$4B : A = (AD - 12\Theta) : 3M = M : 4D,$$

oder

$$16BD - AM = 0, \quad A^2D - 12A\Theta - 12MB = 0, \\ 4AD^2 - 48\Theta D - 3M^2 = 0;$$

dann lehrt die Vergleichung der Form $\psi = 0$, dass die Doppelpunkte die Durchschnitte der Curven zweiten Grades

$$16BD - AM = 0, \quad A^2D - 12\Theta A - 12MB = 0$$

sind. Sie vervollständigen das Punktsystem, in dem jede der acht Ebenen die Doppelcurve trifft, auf 24, wenn man die Berührungspunkte mit den Rückkehrcurven dreifach zählt.

Endlich sei bemerkt:

Die Curve D' des Artikel 263 berührt die Geraden t in den Punkten T, geht durch die Punkte Q, Q', und berührt die Ebenen E in der zweiten Ordnung in den Punkten P'; in den Punkten P hat sie ihre Rückkehrpunkte und berührt die Tetraederseiten.

270. Die sechs Geraden, welche von dem Punkte x nach den sechs Punkten X, den Lösungen des Problems, gezogen werden, liegen immer in einem Kegel zweiter Ordnung.*)

Da für die Punkte x die Gleichungen

$$\lambda U_i + \mu V_i = v_i$$

stattfinden, so genügen sie der Bedingung

$$K = \begin{vmatrix} U_1, & V_1, & u_1, & v_1 \\ U_2, & V_2, & u_2, & v_2 \\ U_3, & V_3, & u_3, & v_3 \\ U_4, & V_4, & u_4, & v_4 \end{vmatrix} = 0;$$

da aber für $X = x$ zweimal zwei Reihen dieser Determinante identisch werden, so verschwindet nicht nur K selbst, sondern auch seine Differentialquotienten sind Null, und die sechs Punkte X liegen also auf einem Kegel zweiten Grades, dessen Spitze in x liegt.

Derselbe Kegel geht durch die Ecken des Polartetraeders. Denn wenn X in eine solche Ecke rückt, so wird

$$\lambda U_i + \mu V_i = 0,$$

für $\frac{\lambda}{\mu}$ als eine Wurzel von $\Delta = 0$. Es werden also zwei Reihen von K proportional und K mit Null identisch.

Rückt x auf einer Geraden nach einer Ecke des Tetraeders fort, so schneiden die entsprechenden Kegel die gegenüberliegende Seite des Tetraeders in

*) Vergl. Band I, Artikel 135.

demselben Kegelschnitt und eine gewisse durch jene Ecke gehende Ebene ist gemeinsame Tangentenebene derselben.

Denn bezeichnet $\overline{x}$ eine Tetraederecke, so hat man, um aus K das System solcher Kegel zu finden, nur x durch $x + \varrho\overline{x}$ zu ersetzen; dadurch geht $K = 0$ in die Form

$$0 = \Sigma \pm U_1 V_2 u_3 v_4 + \varrho \left\{\Sigma \pm U_1 V_2 u_3 \overline{v}_4 + \Sigma \pm U_1 V_2 \overline{u}_3 v_4\right\} + \varrho^2 . \Sigma \pm U_1 V_2 \overline{u}_3 \overline{v}_4$$

über, wo das letzte Glied nach den die Tetraederecke definierenden Gleichungen

$$\lambda\overline{u}_i + \mu\overline{v}_i = 0$$

verschwindet. Daher schneiden sich sämmtliche Kegel in der Schnittcurve der Flächen, welche durch das Verschwinden des ersten Gliedes und des Coefficienten von ϱ dargestellt werden. Betrachtet man ferner die unentwickelte Form von K nach der Substitution

$$0 = \Sigma \pm U_1 V_2 (u_3 + \varrho\overline{u}_3) (v_4 + \varrho\overline{v}_4),$$

multipliciert die einzelnen Reihen der Determinante mit $\overline{x}_i$ und addiert, so entsteht die Reihe

$$\Sigma U_i\overline{x}_i, \quad \Sigma V_i\overline{x}_i, \quad \Sigma u_i\overline{x}_i + \varrho\Sigma\overline{u}_i\overline{x}_i, \quad \Sigma v_i\overline{x}_i + \varrho\Sigma\overline{v}_i\overline{x}_i$$

oder $\Sigma\overline{u}_i X_i, \quad \Sigma\overline{v}_i X_i, \quad \Sigma\overline{u}_i (x_i + \varrho\overline{x}_i), \quad \Sigma\overline{v}_i (x_i + \varrho\overline{x}_i).$

In der Tetraederfläche, welche $\overline{x}$ gegenüber liegt als der Polare dieses Punktes für u und v, verschwinden die beiden ersten Glieder, die beiden andern kann man durch passende Wahl von ϱ nach

$$\lambda\overline{u}_i + \mu\overline{v}_i = 0$$

gleichzeitig verschwinden machen. Wenn man also diesen Werth von ϱ in die durch Substitution aus K gebildete Determinante einsetzt, so zerfällt der Kegel in zwei Ebenen, deren eine

$$\Sigma\overline{u}_i X_i = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma\overline{v}_i X_i = 0,$$

d. i. eine Tetraederseite ist, während die andere durch x und die Tetraederecke gehend die Schnittcurve der Tetraederfläche mit $K = 0$ berührt.

Speciell: Die sechs von einem Punkte an eine Fläche zweiter Ordnung gehenden Normalen liegen in einem Kegel, welcher das Centrum enthält und drei den Hauptachsen parallele Kanten hat, und der also unendlich viele Systeme von drei auf einander rechtwinkligen

Kanten besitzt. Rückt die Spitze dem Centrum in gerader Linie zu, so bleibt der Kegel sich stets parallel; rückt sie in einer Parallelen zu einer Achse fort, so enthält der Kegel stets einen in der entsprechenden Hauptebene gelegenen Kegelschnitt.*)

Endlich ist hinzuzufügen, wie der Uebergang zu Ebenencoordinaten zeigt, dass das Problem völlig ungeändert bleibt, wenn man für $v = 0$ eine Fläche zweiter Ordnung setzt, die von den zu $u = 0$, $v = 0$ gemeinsamen Tangentenebenen berührt wird. Deshalb ist es für das engere Normalenproblem gleichgültig, welche zu $u = 0$ confocale Fläche man an Stelle von $v = 0$ wählt, um seine Lösung zu entwickeln und erlaubt, den imaginären Kreis im Unendlichen als solche zu nehmen, der der abwickelbaren Fläche des Systems der Confocalen als eine Grenzfläche eingeschrieben ist. (Vergl. Artikel 88, und Band I, Artikel 203.)

*) Für die Erörterung der Ausnahmefälle, manche analytische Partien und allgemeine Betrachtungen, verweisen wir auf die Originalabhandlung. Man findet in ihr auch die gründliche Erledigung des Normalenproblems der Kegelschnitte.

V. Kapitel.

Von den Flächen dritter Ordnung.

271. Die allgemeine Theorie der Flächen, wie sie in den Artikeln 15 f. entwickelt worden ist, liefert, auf Flächen dritter Ordnung angewendet, die folgenden Resultate.

Der aus einem beliebigen Punkte des Raumes beschriebene Tangentenkegel der Fläche ist im Allgemeinen von der sechsten Ordnung und besitzt sechs Rückkehrkanten, aber keine eigentliche Doppelkante; er ist daher von der zwölften Klasse und hat vier und zwanzig stationäre und sieben und zwanzig Doppeltangentenebenen.

Die Reciprocalfläche ist im Allgemeinen von der zwölften Ordnung. Ihre Gleichung wird erhalten, indem man die Bedingung sucht, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

die Fläche berührt. Multipliciert man die Gleichung der Fläche mit δ^3 und eliminiert δw mit Hilfe der Gleichung der Ebene, so ist das Resultat eine in x, y, z homogene cubische Gleichung, welche auch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ im dritten Grade enthält. Die Discriminante dieser Gleichung ist vom zwölften Grade in ihren Coefficienten und daher vom sechs und dreissigsten Grade in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, und sie ist das Product der Gleichung der Reciprocalfläche mit dem der Frage fremden Factor δ^{24}.

Die Form der Discriminante einer homogenen Function dritten Grades in x, y, z ist

$$64\sigma^3 = \tau^2,$$

und diess ist daher auch die Form der Gleichung der Reciprocalfläche einer Fläche dritter Ordnung, oder die Gleichung einer solchen Fläche in Ebenencoordinaten. Die Function σ ist vom vierten, die Function τ vom sechsten Grade in α, β, γ, δ, d. h. sie sind beide Contravarianten der gegebenen Gleichung der Fläche von den angegebenen Graden. Man erkennt leicht, dass sie auch in den Coefficienten der gegebenen Gleichung von denselben Graden sind.*)

272. Fragen wir nach den vielfachen Punkten oder Linien der Fläche.

Wenn eine Fläche eine Doppellinie von der Ordnung p enthält, so ist der Schnitt derselben mit jeder Ebene nothwendig eine Curve mit p Doppelpunkten (Artikel 251 f.). Die Ordnung der Doppelcurve in einer Fläche n^{ter} Ordnung ist daher ganz in derselben Weise beschränkt, wie die Zahl der Doppelpunkte in einer Curve n^{ter} Ordnung. Weil also eine Curve dritter Ordnung nur einen Doppelpunkt haben kann, so kann die Doppellinie einer Fläche dritter Ordnung, sofern sie eine solche enthält, nur eine gerade Linie sein.**)

---

*) Sie stellen selbst nach Ebenencoordinaten interpretiert durch Gleichsetzung mit Null Flächen dar.

Wenn S und T die entsprechenden Invarianten der Gleichung der ebenen Curve dritter Ordnung bezeichnen, so schneiden die Tangentenebenen der Fläche

$$\sigma = 0$$

die Fläche dritter Ordnung in Curven, für welche

$$S = 0$$

ist, d. h. für welche die Inflexionstangenten zu dreien durch einen Punkt gehen; ebenso schneiden die Tangentenebenen der Fläche

$$\tau = 0$$

dieselbe in Curven, für welche

$$T = 0$$

ist, d. h. für welche die Inflexionstangenten der Curve die Hesse'sche Determinante derselben und die der letzteren die erste berühren. (Vgl. A. Clebsch, „Journal f. Math.“, Bd. LVIII, p. 238.) Die gemeinschaftlichen Tangentenebenen der Flächen σ, τ sind auch Tangentenebenen der Fläche dritter Ordnung selbst. Für solche verschwinden für ihre Schnittcurve mit der Fläche S und T gleichzeitig, und dieselbe hat daher im Berührungspunkte einen Rückkehrpunkt, d. h. diese letzteren Punkte bilden die Curve der parabolischen Punkte der Fläche. (Ibid. Bd. LIX, p. 59.)

**) In dem Falle, in welchem die Fläche eine doppelte oder andere vielfache Linie enthält, verschwindet die nach der Methode des

Eine Fläche dritter Ordnung, welche eine Doppellinie enthält, ist eine Regelfläche,*) da jede die Doppelgerade enthaltende Ebene die Fläche ausser ihr, als welche doppelt zu zählen ist, nur in einer Geraden schneiden kann; diese Geraden bilden ein System von Erzeugenden, welche die Doppellinie durchschneiden. Denken wir die Doppellinie als Achse der z, so ist die Gleichung der Fläche nothwendig von der Form

$$(ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3) + z\,(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2) + (a''x^2 + 2b''xy + c''y^2) = 0,$$

welches abkürzend in der Form

$$u_3 + zx_2 + v_2 = 0$$

geschrieben werden kann. In irgend einem durch die Coordinate z' bestimmten Punkt der Doppellinie ist das Paar der Tangentenebenen durch

$$z'u_2 + v_2 = 0$$

dargestellt, und mit der Veränderung des z' entspringt daraus ein Büschel von Ebenen in Involution. Das Paar der Tangentenebenen in irgend einem Punkte der Doppellinie ist ein Paar von conjugierten Ebenen eines involutorischen Systems. Für zwei reelle oder imaginäre Werthe von z' wird $(z'u_2 + v_2)$ ein vollständiges Quadrat, d. h. es giebt zwei Punkte in der Doppellinie, deren beide Tangentenebenen zusammenfallen; jede durch einen dieser Punkte gehende Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, die in ihm einen Cuspidalpunkt hat.

Wenn X^2 und Y^2 die Werthe dieser Quadrate sind, so kann offenbar jede der beiden Grössen u_2 und v_2 in der Form (lX^2+mY^2) dargestellt werden. Denken wir also zu den Ebenen $X=0$, $Y=0$ oder den Tangentenebenen der Cuspidalpunkte als Coordinaten-

---

vorigen Artikels gebildete Gleichung der Reciprocalfläche identisch, weil dann jede Ebene der Fläche in einer Curve mit Doppelpunkt schneidet, d. h. berührt, so dass die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

unabhängig von irgend einer zwischen α, β, γ, δ bestehenden Relation als Berührungsebene anzusehen ist. Man findet in diesem Falle die Reciprocalgleichung durch Elimination von x, y, z, w zwischen den Gleichungen

$$U = 0,\quad U_1 = \alpha,\quad U_2 = \beta,\quad U_3 = \gamma,\quad U_4 = \delta.$$

*) Flächen dieser Art sind im Artikel 91 bei Gelegenheit der Classification der Curven 5ter Ordnung erwähnt worden.

ebenen transformiert, so wird jedes Glied der Gleichung durch x^2 oder y^2 theilbar und dieselbe kann in der Form

$$zx^2 = wy^2$$

dargestellt werden.*)

In dieser Form erkennt man, dass die Fläche durch Gerade

$$y = \lambda x, \quad z = \lambda^2 w$$

erzeugt wird, welche die zwei geraden Directrixen

$$x = 0, \quad y = 0; \quad z = 0, \quad w = 0$$

so schneiden, dass die Punkte des Systems zw durch sie mit den nach gleichem Doppelverhältniss entsprechenden Punktepaaren einer Involution in xy verbunden werden.

Jede Tangentenebene der Fläche schneidet sie in einer geraden Erzeugenden und einem Kegelschnitt, welcher jene im Berührungspunkte und in der Doppellinie durchschneidet. Diese Doppellinie schneidet alle in der Fläche gelegenen Kegelschnitte. Man erkennt daraus die Entstehung der Fläche durch Bewegung einer Geraden, welche zwei Kegelschnitte K, K_1 und eine Gerade D stets durchschneidet, welche je einen Punkt paarweise gemein haben. Die Ordnung einer solchen Fläche ist in der That

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 - 2 - 1 = 3.$$

Jede durch $z = 0$, $w = 0$ gehende Ebene schneidet die Fläche in einem Paar von geraden Linien und ist als eine Tangentenebene der Fläche in den Punkten zu betrachten, wo diese Geraden $z = 0$, $w = 0$ durchschneiden. So wie also die Linie

---

*) Es ist dabei vorausgesetzt, dass die Ebenen X und Y, die Doppelebenen der Involution, reell sind. Die Reduction auf die Form

$$w\,(x^2 \pm y^2) + 2zxy = 0$$

ist dagegen stets ausführbar, und in ihr entspricht das untere Zeichen den imaginären, das obere den reellen Doppelebenen. Im ersteren Fall liegt die Doppellinie ganz als reelle Gerade in der Fläche, im letzteren Falle findet diess nur für einen begrenzten Theil der geraden Linie statt. In jenem Falle schneidet jede Ebene die Fläche in einer Curve mit reellem Doppelpunkt, in diesem findet diess nur für diejenigen Schnitte statt, welche die Doppelgerade in jener Strecke treffen, während für alle andern diese Linie einen conjugierten Punkt des Schnittes bestimmt. Die Cuspidalpunkte begrenzen diese Strecke der Doppellinie. Eine gerade Linie, in welcher jeder Punkt ein Cuspidalpunkt ist, kann nur dann in der Fläche dritter Ordnung existieren, wenn dieselbe eine Kegelfläche ist.

$x = 0$, $y = 0$ eine Gerade ist, in welcher jeder Punkt ein Doppelpunkt ist, so ist die Linie $z = 0$, $w = 0$ eine Gerade, für welche jede sie enthaltende Ebene eine Doppeltangentenebene ist. Die Reciproke dieser Fläche, welche im Artikel 212 erwähnt worden ist, ist von gleicher Natur mit ihr selbst.

Der vorigen Erzeugung entspricht die andere durch die Bewegung einer Geraden, die einen festen Kegelschnitt K und zwei feste Gerade D und E stets schneidet, wovon die eine D den Kegelschnitt K einfach schneidet.

Der aus irgend einem Punkte des Raumes bestimmte Tangentenkegel, welcher die Fläche umhüllt, besteht aus der den Punkt mit der Doppellinie verbindenden Ebene, welche doppelt zu zählen ist und einem eigentlichen Tangentenkegel vierter Ordnung. Wenn der Punkt in der Doppellinie gewählt wird, so reduciert sich dadurch der Kegel auf die zweite Ordnung.

273. Die erste Polarfläche eines Punktes in Bezug auf eine Regelfläche dritter Ordnung ist ein die Doppellinie D enthaltendes Hyperboloid (Artikel 11). Die Berührungsebenen der Fläche in den Rückkehrpunkten der Doppellinie berühren stets auch dieses Hyperboloid.

Da die ebenen Querschnitte der Fläche im Allgemeinen Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte, also von der vierten Klasse sind, und bei solchen Curven die Verbindungslinie des Doppelpunktes mit dem Pol und die Tangente der conischen Polare den Tangenten der Curve im Doppelpunkte harmonisch conjugiert sind, so folgt, dass die Tangentenebenen der Fläche in einem Punkte der Doppellinie D mit den beiden Ebenen, welche als das Polarhyperboloid berührend und durch den Pol gehend bestimmt sind, ein harmonisches Büschel bilden; dass die gerade Directrix E durch die Tangentenebenen der Rückkehrpunkte und das Polarhyperboloid eines beliebigen Punktes harmonisch getheilt wird; und dass also diese Gerade E die Polarhyperboloide aller der Punkte berührt, welche in einer der durch die Rückkehrpunkte und E selbst bestimmten Ebenen liegen.

Das Polarhyperboloid wird insbesondere zu einem Kegel zweiten Grades für die Punkte der die Fläche in den Rückkehrpunkten berührenden Ebenen und diese Punkte selbst sind ihre Scheitel. Jene beiden Ebenen bilden somit die Fläche der Hesse'schen Determinante oder die Kernfläche der Regelfläche dritter Ordnung

(Artikel 24). Die zweite oder ebene Polare eines Punktes schneidet die Directrix D in demjenigen Punkte, in welchem eine den Pol enthaltende Ebene die Fläche berührt.

Wir erörtern noch die Frage nach den besonderen Kegelschnitten, d. h. den Parabeln, Kreisen und gleichseitigen Hyperbeln, welche unter den ebenen Schnittcurven der Regelfläche dritter Ordnung auftreten, die eine Erzeugende enthalten.

Die unendlich entfernten Punkte der Fläche bilden eine Curve dritter Ordnung und vierter Klasse mit einem Doppelpunkte, der Richtung von D. Diese schneidet den unendlich entfernten imaginären Kreis in sechs Punkten, welche paarweis drei reelle Gerade bestimmen; jede der Letzteren schneidet die Curve in einem dritten reellen Punkte, der als Richtung einer Erzeugenden der Fläche gefasst mit ihr eine Tangentenebene der Fläche bestimmt, die diese offenbar nach einem Kreise schneiden muss. Unter den einer Regelfläche dritter Ordnung eingeschriebenen Kegelschnitten sind also drei Kreise. Hat die Fläche eine Erzeugende in unendlicher Entfernung, so reduciert sich die Zahl der Kreisschnitte auf zwei.

In ähnlicher Weise erkennt man, dass drei gleichseitige Hyperbeln unter jenen Kegelschnitten sind.

Die Bemerkung, dass jede Gerade ab, welche jene unendlich entfernte Curve in einem Punkte a berührt, sie noch in einem andern Punkte b schneidet, und dass eine Ebene von der durch ab bezeichneten Stellung, welche die Erzeugende von der Richtung b enthält, die Fläche in einem Kegelschnitt schneidet, welcher ab in a berührt, zeigt uns, dass durch jede Erzeugende zwei Ebenen parabolischer Schnitte gelegt werden können. Alle diese Ebenen umhüllen eine abwickelbare Fläche von der Ordnung sechs und der Klasse vier, welche der Fläche selbst nach einer Raumcurve sechster Ordnung umgeschrieben ist.

Wenn die parabolischen Schnittebenen reell sind, so bestimmen ihre Berührungspunkte in ihrer Erzeugenden ein Segment, dessen inneren Punkten nur elliptische und dessen äusseren Punkten nur hyperbolische Schnitte entsprechen; fallen sie zusammen, so sind alle Schnitte, den einen parabolischen ausgenommen, hyperbolisch; sind sie imaginär, so giebt es nur hyperbolische Schnitte.

Je nachdem der Doppelpunkt der unendlich fernen ebenen

Schnittcurve ein Knotenpunkt oder ein isolierter Punkt ist, erhält man zwei Gattungen von Regelflächen dritter Ordnung, die man als solche mit zwei reellen Rückkehrpunkten und solche ohne reelle Rückkehrpunkte unterscheiden kann. (Artikel 272.) Sind c, d jene Punkte, so kann entweder die zwischen a und b gelegene Strecke oder die ausserhalb dieser Punkte gelegene der Ort der Schnittpunkte je zweier reeller Erzeugenden sein, und in jenem Falle gehen durch jede Erzeugende der Fläche zwei parabolische Ebenen; in diesem geschieht diess nur für die auf das unendliche Segment der Doppelgeraden sich stützenden Erzeugenden und es giebt dann zwei der Doppellinie parallele Erzeugende, durch welche nur je ein parabolischer Schnitt möglich ist. Sind die Rückkehrpunkte nicht reell, so ist jeder Punkt der Doppellinie der Durchschnitt von zwei reellen Erzeugenden, von denen immer die eine zwei parabolische Schnitte giebt, mit Ausnahme der beiden ihr parallelen, deren jeder ein parabolischer Schnitt entspricht.*)

274. Es giebt einen von Cayley zuerst hervorgehobenen Fall, in welchem die Reduction auf die Form

$$zx^2 = wy^2$$

nicht möglich ist. Wenn die im Artikel 272 mit u_2 und v_2 bezeichneten Polynome einen gemeinschaftlichen linearen Factor haben, so kann man die Gleichung der Fläche, indem man die durch jenen Factor repräsentierte Ebene zu einer Coordinatenebene macht, auf die Form

$$y^3 + x(zx + wy) = 0$$

bringen. Die Ebene $x = 0$ berührt dann die Fläche längs der ganzen Erstreckung der Doppellinie und schneidet die Fläche zugleich in ihr in drei zusammenfallenden Geraden. Die andere Tangentenebene in irgend einem Punkte derselben fällt mit der Tangentenebene des Hyperboloids

$$zx + wy = 0$$

zusammen. Dieser Fall kann als ein Grenzfall des vorigen Arti-

*) Man vergleiche die hier mit benutzten trefflichen Arbeiten, welche L. Cremona über diese Fläche veröffentlicht hat. „Atti del R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti“, Vol. II, 1861. „Journal für Mathematik“, Bd. LX.

kels betrachtet werden; nämlich als derjenige Fall desselben, wo die Doppeldirectrix D oder $x = y = 0$ mit der einfachen E oder $w = z = 0$ zusammenfällt.

Diese Fläche kann folgendermassen erzeugt werden: Man nehme in $x = y = 0$ eine Reihe von Punkten und lege durch diese Gerade eine dieser Reihe nach gleichem Doppelverhältniss entsprechende oder homographische Reihe von Ebenen. Dann liegt die Erzeugende der Fläche dritter Ordnung, welche von irgend einem Punkte der Doppellinie ausgeht, in der jenem Punkte entsprechenden Ebene und schneidet eine ebene Curve dritter Ordnung, welche den Durchschnittspunkt ihrer Ebene mit der Doppeldirectrix zum Doppelpunkt hat.

Oder die Kegelschnitte K, K_1 besitzen in ihren Schnittpunkten mit D Tangenten, welche sich schneiden. Dann existiert ein einziger Rückkehrpunkt in D, der Berührungspunkt der Ebene jener Tangenten mit der Fläche; er theilt die Gerade D in zwei unendliche Segmente, in deren einem sie von den Erzeugenden mit zwei reellen parabolischen Querschnitten getroffen wird.

275. Die Gründe, welche beweisen, dass eine eigentliche Curve dritter Ordnung nicht mehr als einen Doppelpunkt haben kann, sind auf Flächen nicht anwendbar. Allerdings muss die Verbindungslinie zweier Doppelpunkte, weil sie als eine Gerade zu betrachten ist, welche die Fläche dritter Ordnung in vier Punkten schneidet, ganz in der Fläche enthalten sein. Daraus folgt jedoch nicht, dass die Fläche nun in Flächen geringerer Ordnung zerfallen müsste.

Die Betrachtung des Tangentenkegels liefert aber für die Zahl der Doppelpunkte irgend einer Fläche eine Grenze; denn wir sahen im Artikel 18, dass der Tangentenkegel nothwendig eine gewisse Anzahl Doppelkanten und Rückkehrkanten besitzt, und da jeder Doppelpunkt der Fläche die Zahl der Doppelkanten des Tangentenkegels um Eins vermehrt, so kann die Fläche nie mehr Doppelpunkte besitzen, als welche die Gesammtzahl der Doppelkanten des Tangentenkegels zu der Maximalzahl ergänzen, welche ein solcher Kegel haben kann. Nun kann eine Curve sechster Ordnung mit sechs Rückkehrpunkten höchstens vier Doppelpunkte besitzen und die Fläche dritter Ordnung kann also, weil ihr Tangentenkegel vom sechsten Grade ist und sechs Rückkehrkanten hat, höchstens vier Doppelpunkte haben.

Wenn eine Fläche einen Doppelpunkt hat, so ist die Gerade, die diesen mit einem willkürlich gewählten Punkt verbindet, eine Doppelkante des Tangentenkegels aus diesem Punkt und die Tangentenebenen desselben längs dieser Doppelkante sind, wie man leicht erkennt, die Ebenen, welche durch diese Linie so gelegt sind, dass sie den durch die Tangenten der Fläche im Doppelpunkt erzeugten Kegel berühren. Wenn daher dieser Kegel in zwei Ebenen zerfällt, so muss der bezügliche Doppelpunkt in dem durch den angenommenen Punkt gehenden Tangentenkegel eine Rückkehrkante erzeugen. Eine Fläche dritter Ordnung kann daher nicht mehr als drei solcher Doppelpunkte besitzen, deren Tangenten in zwei Ebenen enthalten sind.

Die Reciprocalfläche kann also, je nachdem ein Doppelpunkt oder mehrere derselben vorhanden sind, von irgend einer Ordnung zwischen zehn und drei sein, da jeder gewöhnliche Doppelpunkt diese Ordnungszahl um zwei, jeder solche specielle biplanare um drei Einheiten erniedrigt.

Wenn die beiden Ebenen der Berührung in einem solchen biplanaren Doppelpunkt in eine Ebene zusammenfallen, so erzeugt dieser Punkt im Tangentenkegel eines beliebigen Punktes eine dreifache Kante und die Ordnungszahl der Reciprocalfläche wird um sechs Einheiten reduciert.

Beispiel 1. Welches ist die Ordnung der Reciprocalfläche von

$$xyz = w^3?$$

Da diese Fläche in der Ebene $w = 0$ drei biplanare Doppelpunkte enthält, so ist ihre Reciprocalfläche von der dritten Ordnung. Für ein constantes w, d. h. die Lage jener Doppelpunkte in unendlicher Entfernung, ist diese Fläche der Ort der Durchschnittspunkte der Geraden, welche die Paare der Gegenkanten aller der Tetraeder halbieren, die — von den Coordinatenebenen mit einer veränderlichen Ebene gebildet — einen constanten Inhalt haben.

Beispiel 2. Welches ist die Reciprocalfläche von

$$\frac{l}{x} + \frac{m}{y} + \frac{n}{z} + \frac{p}{w} = 0?$$

Da diese Fläche dritter Ordnung die Eckpunkte der Pyramide

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

zu Doppelpunkten hat, so muss die Reciprocalfläche von der vierten Ordnung sein.

Betrachtet man dann die Gleichung der Tangentenebene der Fläche in einem Punkte (x', y', z', w'), welche in der Form

$$\frac{lx}{x'^2} + \frac{my}{y'^2} + \frac{nz}{z'^2} + \frac{pw}{w'^2} = 0$$

darstellbar ist, so erhält man als die Bedingung, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

die Fläche berührt, d. h. als Gleichung der Reciprocalfläche

$$(l\alpha)^{\frac{1}{2}} + (m\beta)^{\frac{1}{2}} + (n\gamma)^{\frac{1}{2}} + (p\delta)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

die als vom vierten Grade durch Beseitigung der Wurzelgrössen erkannt wird.

Allgemein ist die Gleichung der Reciprocalfläche von

$$ax^n + by^n + cz^n + pw^n = 0$$

von der Form

$$A\alpha^{\frac{n}{n-1}} + B\beta^{\frac{n}{n-1}} + C\gamma^{\frac{n}{n-1}} + D\delta^{\frac{n}{n-1}} = 0.$$

Eine Fläche dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten ist auch die Enveloppe von

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta = 0,$$

wo a, b, c, l, m, n durch Gleichsetzung mit Null Ebenen repräsentieren und $\alpha : \gamma$, $\beta : \gamma$ zwei veränderliche Parameter sind. Die Enveloppe ist offenbar von der dritten Ordnung, und dass sie von der vierten Klasse ist, geht daraus hervor, dass wir für die Substitution der Coordinaten zweier Punkte vier Ebenen des Systems aus der Gleichung erhalten, welchen dieselben angehören.

Der aus irgend einem Punkte der Fläche aus einem beliebigen Punkte derselben enthält vier Doppelkanten und zerfällt daher, weil er vom vierten Grade ist, nothwendig in zwei Kegel zweiten Grades.

276. Die Gleichung einer Fläche dritter Ordnung ohne vielfachen Punkt kann in die Form

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dv^3 + ew^3 = 0$$

gebracht werden, wo

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

Ebenen repräsentieren und die implicite in ihnen enthaltenen Constanten so gewählt sind, dass die identische Relation, welche nach Band I, Artikel 34 die Gleichungen von fünf beliebigen Ebenen mit einander verbindet, in der Form

$$x + y + z + v + w = 0$$

geschrieben werden kann.

In der That enthält die allgemeine Gleichung dritten Grades zwanzig Glieder und somit neunzehn unabhängige Constanten, und die gedachte Form fünf Glieder mit vier unabhängigen Constanten, während überdiess jedes dieser Glieder drei andere Constanten implicite enthält. Die Zahl der Constanten ist also in beiden Formen die nämliche. Damit ist jedoch die Möglichkeit der Reduction der allgemeinen Form in die specielle nicht streng erwiesen.*) Das von Sylvester 1851**) ohne Entwickelung seines Beweises nur mit dem Bemerken veröffentlichte Theorem, dass er einen solchen Beweis besitze, aus dem hervorgeht, wie die Reduction in einer einzigen Weise vollzogen werden könne, ist dann von Clebsch***) zuerst bewiesen worden und wir kommen auf diesen Beweis zurück.

Die so reducierte Form ist für die Untersuchung der Eigenschaften der Flächen dritter Ordnung die zumeist vortheilhafte.

277. Wenn wir die Gleichung der ersten Polare irgend eines Punktes in Bezug auf die Fläche n^{ter} Ordnung $U = 0$ in der Form

$$x'U_1 + y'U_2 + z'U_3 + w'U_4 = 0$$

schreiben, so wird die Existenz eines Doppelpunktes in ihr durch die Erfüllung der Gleichungen

$$\begin{aligned}
U_{11}x' + U_{12}y' + U_{13}z' + U_{14}w' &= 0,\\
U_{12}x' + U_{22}y' + U_{23}z' + U_{24}w' &= 0,\\
U_{13}x' + U_{23}y' + U_{33}z' + U_{34}w' &= 0,\\
U_{14}x' + U_{24}y' + U_{34}z' + U_{44}w' &= 0
\end{aligned}$$

in diesem Punkte bedingt. (Vergl. Artikel 24.) Wenn man zwischen denselben die Grössen x', y', z', w' eliminiert, welche in den zweiten Differentialen $U_{11}, \ldots$ auftreten, so ist die Resultante, weil jede der vier Gleichungen vom Grade $(n-2)$ ist, in x', y', z', w' vom Grade $4(n-2)^3$ und repräsentiert, gleich Null

*) Vergl. A. Clebsch, „Ueber Curven vierter Ordnung," „Journ. f. Math.", Bd. LIX, p. 143.

**) Vgl. „Cambridge and Dublin Math. Journ.", Vol. VI, p. 199.

***) Vgl. „Journal f. Math.", Bd. LIX, p. 193. J. Steiner gab dasselbe Theorem 1856 (ibid. Bd. LIII, p. 133) in der inhaltreichen Abhandlung, „Ueber die Flächen dritten Grades". Doch waren die meisten der schönen Resultate, die er fand, eine Reihe von Jahren vorher von englischen Geometern gefunden, die sich schon früher mit dem Gegenstande beschäftigt hatten. (Vergl. Artikel 85.)

gesetzt, den Ort derjenigen Punkte, deren erste Polaren Doppelpunkte besitzen. (Vgl. Artikel 24, p. 25.) Oder auch: Repräsentieren wir die erstere, d. i. die Hesse'sche Fläche, durch

$$H = 0$$

und die letztere, die conjugierte Kernfläche Steiner's, mit

$$K = 0,$$

so ist jene der Ort der Punkte, deren quadratische Polaren Kegelflächen sind und diese der Ort der Scheitel solcher Kegel. In dem Fall der Flächen dritter Ordnung sind die vier obigen Gleichungen nach x, y, z, w und x', y', z' w' symmetrisch und daher die beiden Flächen H und K identisch, d. h. wenn die Polarfläche zweiten Grades von einem Punkte A in Bezug auf eine Fläche dritter Ordnung ein Kegel vom Scheitel B ist, so ist die Polarfläche zweiten Grades vom Punkte B in Bezug auf dieselbe ein Kegel vom Scheitel A. Die Punkte A und B sind entsprechende Punkte der Hesse-Steiner'schen Fläche vierter Ordnung oder reciproke Pole.

278. Die Tangentenebene der Hesse'schen Determinantenfläche der Fläche dritter Ordnung im Punkte A ist die Polarebene von B in Bezug auf diese Fläche dritter Ordnung.

Denn wenn wir irgend einen dem Punkte A unendlich nahen Punkt A' der Hesse'schen Fläche betrachten, so muss der Pol irgend einer durch AA' gehenden Ebene in der Durchschnittslinie der ersten Polaren von A und A' gelegen sein und da diese einander unendlich nahe und zugleich beide Kegel sind, so muss der Scheitel B dieses Kegels der Pol einer durch A, A' gehenden, d. h. der Pol der Tangentenebene in A sein.

Und ebenso ist die Polarebene eines Punktes A der Hesse'schen Fläche H allgemein die Tangentenebene der conjugierten Kernfläche K im entsprechenden Punkte B. Insbesondere sind die Tangentenebenen der Fläche U längs der Curve parabolischer Punkte derselben Tangentenebenen der Fläche K, d. h. in dem Falle der Fläche dritter Ordnung: Die der Fläche dritter Ordnung nach der Curve ihrer parabolischen Punkte umgeschriebene abwickelbare Fläche ist zugleich auch ihrer Hesse'-

schen Fläche (H, K) umgeschrieben.*) Wenn eine gerade Linie diese Hesse'sche Fläche in zwei entsprechenden Punkten A und B und überdiess in zwei andern Punkten C und D schneidet, so durchschneiden sich die Tangentenebenen in A und B nach der Verbindungslinie der beiden Punkte, welche den Punkten C und D entsprechen.

279. Wir wollen die vorhergehenden Sätze auch mittelst der reducierten Gleichungsform untersuchen.

Die Gleichung der quadratischen Polare eines Punktes in Bezug auf

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dv^3 + ew^3 = 0,$$

wird nach den gewöhnlichen Regeln gebildet, wenn man an Stelle von w seinen Werth

$$-(x + y + z + v)$$

substituiert, da dann die Gleichung in Function von vier Veränderlichen erscheint. Wir finden so

$$ax'x^2 + by'y^2 + cz'z^2 + dv'v^2 + ew'w^2 = 0.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach x giebt, weil

$$dw = - dx$$

ist

$$ax'x = ew'w,$$

und da der Scheitel der conischen Polarfläche den vier nach x, y, z, v gebildeten Differentialen genügen muss, so erkennen wir, dass die Coordinaten x', y', z', v', w' eines Punktes A der Hesse'schen Fläche mit den Coordinaten x, y, z, v, w des entsprechenden Punktes B, des Scheitels der Polarkegelfläche durch die Relationen

$$ax'x = by'y = cz'z = dv'v = ew'w$$

verbunden sind. Wenn wir den gemeinschaftlichen Werth dieser Grössen gleich Eins setzen, was erlaubt ist, weil es sich nur um die Verhältnisse der Coordinaten handelt, so können wir die Werthe der Coordinaten von B durch

$$= \frac{1}{ax'}, \ \frac{1}{by'}, \ \frac{1}{cz'}, \ \frac{1}{dv'}, \ \frac{1}{ew'}$$

---

*) Der Satz gilt allgemein: Die einer Fläche nach ihrem Durchschnitt mit der Hesse'schen Fläche derselben umgeschriebene abwickelbare Fläche ist auch der Steiner'schen Kernfläche derselben umgeschrieben.

ausdrücken und erhalten, da sie der Identität

$$x + y + z + v + w = 0$$

genügen müssen,

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} + \frac{1}{dv} + \frac{1}{ew} = 0,$$

oder

$$bcdeyzvw + cdeazvwx + deabvwxy + eabcwxyz + abcdxyzv = 0$$

als Gleichung der Hesse'schen Fläche.

Die Form dieser Gleichung zeigt, dass z. B. die Gerade $v = 0$, $w = 0$ ganz in der Hesse'schen Fläche liegt und dass der Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ein Doppelpunkt in ihr ist. Da aber die fünf Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $v = 0$, $w = 0$ zehn Combinationen erlauben, sowohl wenn sie zu zweien als wenn sie zu dreien genommen werden, so entspringt Sylvester's Theorem, nach welchem die fünf Ebenen ein Pentaeder bilden, dessen zehn Eckpunkte Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche und dessen zehn Kanten ganz in derselben enthalten sind.

Die quadratische Polare des Punktes $x = y = z = 0$ ist nach dem Obigen

$$dv'v^2 + ew'w^2 = 0$$

und zerfällt also in zwei Ebenen, welche sich in der den Ebenen $v = 0$, $w = 0$ gemeinschaftlichen Geraden durchschneiden; jeder Punkt dieser Linie kann daher als der dem Punkt A $(x = y = z = 0)$ entsprechende Punkt B angesehen werden. Es existieren also für eine Fläche dritter Ordnung zehn Punkte, deren quadratische Polarflächen in Paare von Ebenen degenerieren; dieselben sind Doppelpunkte der Hesse'schen Fläche und die Durchschnittslinien der entsprechenden Paare von Ebenen liegen in derselben; die Ebenenpaare sind harmonisch conjugiert in Bezug auf die entsprechenden Flächen des Pentaeders.

Die Gleichung der Tangentenebene der Hesse'schen Fläche in irgend einem Punkte kann in der Form

$$\frac{x}{ax'^2} + \frac{y}{by'^2} + \frac{z}{cz'^2} + \frac{v}{dv'^2} + \frac{w}{ew'^2} = 0$$

dargestellt werden, welche für die Substitutionen $\frac{1}{ax'}$, . . . für x', . . . in

$$ax'^2x + by'^2y + cz'^2z + dv'^2v + ew'^2w = 0$$

übergeht; diess ist aber nach Artikel 278 die Polarebene des entsprechenden Punktes in Bezug auf U.

Indem man diese Sätze unabhängig beweist,*) gelangt man zu dem Nachweis, dass die Reduction der allgemeinen Gleichung auf die Form einer Summe von fünf Cuben immer möglich ist.

280. Diesen Beweis geben wir hier nach Clebsch's Darstellung,**) bevor wir zu weiteren Untersuchungen schreiten, weil das Pentaeder für das Verständniss der Theorie der Flächen dritter Ordnung von der grössten Wichtigkeit ist.

Wir gehen von den Gleichungen des Artikel 277 aus, indem wir x, y, z, w durch x_1, x_2, x_3, x_4 und x', y', z', w' durch y_1, y_2, y_3, y_4 der Operation mit Determinanten mehr entsprechend ersetzen. Wenn jene vier Gleichungen sich durch besondere Werthe der x auf zwei von einander verschiedene reducieren, so liegt der Pol im Durchschnitt zweier Ebenen an beliebiger Stelle. Für einen solchen Punkt x verschwindet aber ausser der Determinante H auch das System ihrer zehn Unterdeterminanten

$$1) \qquad H_{ik} = 0.$$

Es ist zu untersuchen, wie viele gemeinschaftliche Lösungen diese zehn Gleichungen zulassen, und man kann von den gemeinschaftlichen Lösungen irgend dreier unter ihnen ausgehen, um zu zeigen, welche von ihnen auch den sieben übrigen entsprechen.

Wählen wir als solche die von

$$A, \quad H_{11} = 0, \quad H_{22} = 0, \quad H_{12} = 0,$$

welche als Oberflächen $3(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung darstellend $27(n-2)^3$ Schnittpunkte ergeben. Die Relationen der Unterdeterminanten geben dann

---

*) Der Abschnitt des letzten Kapitels „Ueber die Ordnung eines Systems von Gleichungen“ beweist, dass eine symmetrische Determinante von p Reihen und Zeilen, deren Elemente sämmtlich Functionen der n^{ten} Ordnung in den Veränderlichen sind, eine Fläche von der np^{ten} Ordnung darstellt, welche $\frac{1}{2}p(p^2-1)n^3$ Doppelpunkte enthält; dass somit die Hesse'sche Fläche für eine Fläche n^{ter} Ordnung stets $10(n-2)^3$ Doppelpunkte enthält. Die Vergleichung mit dem hier Folgenden ist von Interesse.

**) Vergl. „Journ. f. Math.“, Bd. LIX, p. 193.

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} u_{31}H_{31} + u_{41}H_{41} &= H, \\ u_{32}H_{31} + u_{42}H_{41} &= 0, \\ u_{33}H_{31} + u_{43}H_{41} &= 0, \\ u_{34}H_{31} + u_{44}H_{41} &= 0, \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{aligned} u_{31}H_{32} + u_{41}H_{42} &= 0, \\ u_{32}H_{32} + u_{42}H_{42} &= \varDelta, \\ u_{33}H_{32} + u_{43}H_{42} &= 0, \\ u_{34}H_{32} + u_{44}H_{42} &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können im Allgemeinen nur bestehen für

$$2)\quad H = 0,\quad H_{31} = 0,\quad H_{41} = 0,\quad H_{32} = 0,\quad H_{42} = 0;$$

Ausnahmen bilden nur die Fälle, in denen jedes der Systeme a), b) sich auf ein Paar von Gleichungen zur Bestimmung der vier letztern Grössen reduciert, bei deren einer wenigstens rechts nicht Null steht; diess kann nur für

$$3)\quad u_{33} = 0,\quad u_{34} = 0,\quad u_{44} = 0$$

der Fall sein. Es müsste denn $H = 0$ sein, und jedes der Systeme a), b) sich auf eine Gleichung reducieren, was nur möglich ist, wenn eine Grösse λ sich so bestimmen lässt, dass

$$4)\quad u_{31} = \lambda u_{41},\quad u_{32} = \lambda u_{42},\quad u_{33} = \lambda u_{43},\quad u_{34} = \lambda u_{44}$$

wird.

Von den drei Möglichkeiten gemeinschaftlicher Lösungen entspricht der ersten, bei welcher die Gleichungen 3) bestehen, die Anzahl $(n-2)^3$ einfacher Lösungen der Gleichungen A, ohne eine gemeinsame Lösung von 1).

Denn wenn das gleichzeitige Bestehen der Gleichungen 1) durch das Verschwinden von

$$\Theta = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}, & y_1 \\ u_{12}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}, & y_2 \\ u_{13}, & u_{23}, & u_{33}, & u_{34}, & y_3 \\ u_{14}, & u_{24}, & u_{34}, & u_{44}, & y_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & 0 \end{vmatrix}$$

für alle y ersetzt wird, so zeigt die aus 3) entspringende Form

$$\Theta = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14}, & y_1 \\ u_{12}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24}, & y_2 \\ u_{13}, & u_{23}, & 0, & 0, & y_3 \\ u_{14}, & u_{24}, & 0, & 0, & y_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & 0 \end{vmatrix},$$

dass nur die Coefficienten von y_1^2, y_2^2, $y_1 y_2$ verschwinden.

281. Den Gleichungen 4) entspricht das Verschwinden von H_{13}, H_{14}, H_{23}, H_{24}, so dass nur H_{33}, H_{34}, H_{44} von Null verschieden bleiben; die Elimination der x aus 4) giebt eine Resul-

tante, welche für die Coefficienten jeder der Gleichungen vom Grade $(n-2)^3$, also für die Coefficienten von u und für λ vom Grade $4\,(n-2)^3$ ist, d. h. sie geben $4\,(n-2)^3$ Werthsysteme der x. Dieselben gehören aber überdiess den Gleichungen A) mehrfach an. Denn wenn man die Differentiale von H_{11}, H_{22}, H_{12} bildet, indem man etwa in Θ die Grössen y_3, y_4 durch Null ersetzt, so dass

$$\Theta = -\left\{H_{11}y_1^2 + H_{22}y_2^2 + 2H_{12}y_1y_2\right\}$$

wird, und $d\Theta$ bildet, so entspringt mit Rücksicht auf 4)

$$d\Theta = \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & du_{13}, & u_{14}, & y_1 \\ u_{12}, & u_{22}, & du_{23}, & u_{24}, & y_2 \\ u_{13}, & u_{23}, & du_{33}, & u_{34}, & 0 \\ u_{14}, & u_{24}, & du_{43}, & u_{44}, & 0 \\ y_1, & y_2, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & du_{14}, & y_1 \\ u_{12}, & u_{22}, & u_{23}, & du_{24}, & y_2 \\ u_{13}, & u_{23}, & u_{33}, & du_{34}, & 0 \\ u_{14}, & u_{24}, & u_{34}, & du_{44}, & 0 \\ y_1, & y_2, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & du_{13} & , u_{14}, & y_1 \\ u_{12}, & u_{22}, & du_{23} & , u_{24}, & y_2 \\ u_{13}, & u_{23}, & du_{33} & , u_{34}, & 0 \\ 0, & 0, & du_{43} - \dfrac{du_{33}}{\lambda}, & 0, & 0 \\ y_1, & y_2, & 0 & , 0, & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & du_{14} & , y_1 \\ u_{12}, & u_{22}, & u_{23}, & du_{24} & , y_2 \\ u_{13}, & u_{23}, & u_{33}, & du_{34} & , 0 \\ 0, & 0, & 0, & du_{44} - \dfrac{du_{34}}{\lambda}, & 0 \\ y_1, & y_2, & 0, & 0 & , 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{du_{44} - 2\,\frac{du_{34}}{\lambda} + \frac{du_{33}}{\lambda^2}\right\} \begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & y_1 \\ u_{12}, & u_{22}, & u_{23}, & y_2 \\ u_{13}, & u_{23}, & u_{33}, & 0 \\ y_1, & y_2, & 0, & 0 \end{vmatrix}.$$

Die Differentialien von H_{11}, H_{22}, H_{12} unterscheiden sich also für die Gleichungen 4) nur durch einen Factor und die drei durch Gleichsetzung dieser Grössen mit Null dargestellten Oberflächen haben in jedem den 4) entsprechenden Schnittpunkte eine gemeinsame Tangentenebene; daraus folgt, dass diese Punkte vierfach zu zählen sind, da in einem Berührungspunkte dreier Flächen im Allgemeinen vier Schnittpunkte derselben zusammenfallen.*) Die Gleichungen 4) vertreten also 16 $(n-2)^3$ gemeinschaftliche Punkte der A.

Wenn weder die Gleichungen 3) noch die 4) stattfinden, so geben die letzten Gleichungen der Systeme a), b)

$$H_{13}=0;\quad H_{23}=0,\quad H_{14}=0,\quad H_{24}=0,$$

also

$$H=0;$$

also kann man zu a), b) noch hinzufügen

$$u_{33}H_{33}+u_{34}H_{34}=0,\quad u_{33}H_{34}+u_{34}H_{44}=0,$$
$$u_{43}H_{33}+u_{44}H_{34}=0,\quad u_{43}H_{34}+u_{44}H_{44}=0,$$

so dass nothwendig

$$H_{33}=0,\quad H_{34}=0,\quad H_{44}=0$$

sind, d. h. sämmtliche H_{ik} verschwinden. Und die Anzahl solcher Lösungen ist

$$=27\,(n-2)^3-(n-2)^3-16\,(n-2)^3=10\,(n-2)^3;$$

also speciell für Flächen dritter Ordnung $=10$.

282. Eben für diese kann die Gleichung der zehn Knotenpunkte in Ebenencoordinaten leicht aufgestellt werden. Sind v_1, v_2, v_3, v_4 die Coordinaten einer durch den Knotenpunkt x_1, x_2, x_3, x_4 gelegten Ebene, so ist

$$5)\qquad v_1x_1+v_2x_2+v_3x_3+v_4x_4=0.$$

Multipliciert man diese Gleichung mit den zehn Quadraten und Producten der x, so erhält man zehn in den Producten $x_ix_kx_h$ lineare Gleichungen und kann aus ihnen zusammen mit den zehn in denselben Grössen linearen Gleichungen $H_{ik}=0$ die zwanzig Grössen $x_ix_kx_h$ eliminieren. Die entspringende Determinante ist das Product der Gleichungen der zehn Knotenpunkte.

Setzt man

$$v_i=a_i+\lambda b_i\ (i=1,2,3,4),$$

wo die a, b beliebige Constanten sind, so dass nach 5)

$$\lambda=-\frac{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4}{b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4}$$

ist, so verwandelt sich jene Gleichung in eine Gleichung zehnten

*) Wir wollen bemerken, dass die drei Tangentenpaare der Schnittcurven der gemeinschaftlichen Tangentenebene mit den Flächen ein involutorisches Büschel bilden, dessen Doppelstrahlen den möglichen stationären Berührungen entsprechen.

Grades für λ,

$$6)\qquad F(\lambda) = 0,$$

deren Wurzeln vorläufig durch

$$\lambda_{123},\ \lambda_{124},\ \lambda_{125},\ \lambda_{134},\ \lambda_{135},\ \lambda_{145},\ \lambda_{234},\ \lambda_{235},\ \lambda_{245},\ \lambda_{345}$$

bezeichnet werden mögen.

Für μ als einen unbestimmten Factor hat man zugleich

$$7)\qquad \mu x_1 = f_1(\lambda),\quad \mu x_2 = f_2(\lambda),\quad \mu x_3 = f_3(\lambda),\quad \mu x_4 = f_4(\lambda).$$

Sie ist auflösbar mit Hilfe einer Gleichung fünften Grades. Ihre Eigenschaften geben geometrische Eigenschaften der Fläche dritter Ordnung wieder.

Ist x' einer der zehn Knotenpunkte, so ist die Gleichung seiner Polare

$$\Sigma\Sigma u'_{ik} x_i x_k = 0,$$

wenn u'_{ik} das bezeichnet, was durch Substitution der Coordinaten von x' aus u_{ik} hervorgeht; diese Polare ist ein Ebenenpaar, weil die aus den u'_{ik} zu bildenden Partialdeterminanten sämmtlich verschwinden, so dass stets

$$\Sigma\Sigma u'_{ik} x_i x_k = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4)(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4)$$

ist; da für die Schnittlinie des Ebenenpaars die Differentialquotienten links wie rechts nach sämmtlichen x verschwinden, so bestehen die auf zwei verschiedene zurückkommenden vier Gleichungen

$$8)\qquad u'_{i1} x_1 + u'_{i2} x_2 + u'_{i3} x_3 + u'_{i4} x_4 = 0,$$

die Gleichungen der dem Knotenpunkte entsprechenden Geraden. Diess giebt den Hauptsatz des Artikel 279.

In jenen Geraden liegen aber selbst Doppelpunkte der Fläche $H = 0$. Der durch die Gleichungen 7) nicht völlig bestimmte Punkt x lässt sich so wählen, dass für ihn selbst sämmtliche H_{ik} verschwinden, oder dass die symmetrische Determinante Θ des Artikel 280 unabhängig von den Werthen der y gleich Null wird. Multipliciert man die Determinante Θ mit dem Quadrate von

$$D = \begin{vmatrix} x'_1, & x'_2, & x'_3, & x'_4, & 0 \\ p_1, & p_2, & p_3, & p_4, & 0 \\ q_1, & q_2, & q_3, & q_4, & 0 \\ r_1, & r_2, & r_3, & r_4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix},$$

wo die p, q, r Constanten sind, für welche D nicht verschwindet, so erhält man für

$$u_{pq} = \Sigma\Sigma u_{ik} p_i q_k, \quad y_p = y_1 p_1 + y_2 p_2 + y_3 p_3 + y_4 p_4, \text{ etc.}$$

$$\Theta . D^2 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & 0, & 0, & y_x' \\ 0, & u_{pp}, & u_{pq}, & u_{pr}, & y_p \\ 0, & u_{pq}, & u_{qq}, & u_{qr}, & y_q \\ 0, & u_{pr}, & u_{qr}, & u_{rr}, & y_r \\ y_x', & y_p, & y_q, & y_r, & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -(y_x')^2 \begin{vmatrix} u_{pp}, & u_{pq}, & u_{pr} \\ u_{pq}, & u_{qq}, & u_{qr} \\ u_{pr}, & u_{qr}, & u_{rr} \end{vmatrix};$$

d. h. man erhält bei Geltung der Gleichungen 8) die Erfüllung sämmtlicher Gleichungen $H_{ik} = 0$ für die Gleichheit der letztgeschriebenen Determinante mit Null für beliebige Werthe von p, q, r. Da jene beiden linear sind und diese vom dritten Grade ist, so genügen ihnen drei Werthsysteme, d. h. es giebt auf jeder der zehn Geraden drei Knotenpunkte. Auch muss x' nach 8) auf der dem Knotenpunkt x entsprechenden Geraden liegen, mithin auf allen drei Geraden, welche den so eben bestimmten Punkten entsprechen. Denken wir das Coordinaten-Tetraeder so gewählt, dass für den Knotenpunkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ und für die entsprechende Gerade $x_3 = x_4 = 0$ ist, so kann man die zehn Gleichungen $H_{ik} = 0$ durch das System

$$9) \qquad u_{ik} = \alpha_i \beta_k + \beta_i \alpha_k$$

ersetzen, wo α, β Constante und

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$
$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen sind, in welche die Polare des aus 8) gefundenen Knotenpunktes zerfällt.

Darnach liegen dann auf den durch einen Knotenpunkt a gehenden Geraden im Ganzen sieben Punkte und die zugehörige Gerade α enthält die drei übrigen b, c, d; denken wir ihnen die Geraden β, γ, δ entsprechend, so gehen durch b, c, d noch je zwei andere Gerade, die zu zweien auch durch die ausser a auf β, γ, δ liegenden Punkte gehen. Die durch b gehenden Geraden, welche den auf β liegenden Punkten entsprechen, dürfen die Linie β selbst nicht treffen, jede von ihnen geht durch einen Punkt in γ und einen in δ, so dass beide zusammen beide Punkte von γ und beide von δ treffen. Ebenso treffen die durch c gehenden Geraden die Punkte von β und δ, die durch d gehenden die Punkte von β und γ. So entstehen drei vollständige Vierecke, gebildet aus je zweien der Geraden β, γ, δ und aus je einem der durch b, c, d gehenden Paare; zu ihnen treten dann noch zwei eben solche, die durch α gehen und von den durch b, c, d gehenden andern Geraden immer je eine enthalten. Sie bilden das Pentaeder.

Sind 1, 2, 3, 4, 5 die Ebenen desselben, so sind

123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345
und 45, 35, 34, 25, 24, 23, 15, 14, 13, 12

die entsprechenden Ecken und Kanten. Jene entsprechen den Wurzeln der Gleichung.

283. Die Eigenschaften dieser Gleichung ergeben sich darnach mit Leichtigkeit.

Bezeichnen λ', λ'', λ''' drei Wurzeln entsprechend drei Punkten derselben Geraden und λ die Wurzel für den entsprechenden Punkt, so finden zwischen den Coordinaten eines der ersten drei Gleichungen, zwei lineare und eine cubische, statt, deren Coefficienten nur von den zu λ gehörigen Coordinaten abhängen. Verbindet man etwa die zu λ' gehörigen drei Gleichungen mit

$$0 = (a_1 x_1' + a_2 x_2' + a_3 x_3' + a_4 x_4') + \lambda' (b_1 x_1' + b_2 x_2' + b_3 x_3' + b_4 x_4')$$

und eliminiert x_1', x_2', x_3', x_4', so erhält man für λ' eine cubische Gleichung, deren Wurzeln λ', λ'', λ''' sind; ihre Coefficienten hängen von den Coordinaten von λ oder ihren Verhältnissen ab und lassen sich mit Hilfe der Gleichungen 7) durch λ ausdrücken. Man kann also alle symmetrischen Verbindungen von λ', λ'', λ''' als rationale Functionen von λ darstellen. Und ebenso für die neun übrigen Combinationen dieser Art, also jede symmetrische Function

von λ_{123}, λ_{124}, λ_{125} durch λ_{345},
von λ_{134}, λ_{135}, λ_{132} durch λ_{245}, etc.;
endlich von λ_{351}, λ_{352}, λ_{354} durch λ_{124}
und von λ_{451}, λ_{452}, λ_{453} durch λ_{123}.

Ist dann

$$\lambda'^3 - \lambda'^2 \varphi(\lambda) + \lambda' \psi(\lambda) - \chi(\lambda) = 0$$

die cubische Gleichung von den Wurzeln λ', λ'', λ''', so besteht eine ähnliche Gleichung, die ebenfalls λ' zur Wurzel hat, für jedes λ, dessen entsprechende Gerade durch den zu λ' gehörigen

26*

Punkt geht; solcher Geraden giebt es drei und wenn λ, λ_1, λ_2 die entsprechenden Wurzeln sind, so gelten auch die Gleichungen

$$\lambda'^3 - \lambda'^2\varphi(\lambda_1) + \lambda'\psi(\lambda_1) - \chi(\lambda_1) = 0,$$
$$\lambda'^3 - \lambda'^2\varphi(\lambda_2) + \lambda'\psi(\lambda_2) - \chi(\lambda_2) = 0.$$

Aus ihnen bestimmt sich λ' vollständig, denn es giebt nur einen Punkt, welcher auf den drei zu λ, λ_1, λ_2 gehörigen Geraden liegt. Man erhält aber

$$\lambda' = \Omega(\lambda, \lambda_1, \lambda_2),$$

wo Ω eine rationale symmetrische Function ist, d. h. jede Wurzel der Gleichung 6) ist eine rationale symmetrische Function von drei andern.

Wenn nun φ eine symmetrische Function von vier Argumenten bezeichnet und

$$y_1 = \varphi(\lambda_{234}, \lambda_{235}, \lambda_{245}, \lambda_{345}), \quad y_2 = \varphi(\lambda_{134}, \lambda_{135}, \lambda_{145}, \lambda_{345}),$$
$$y_3 = \varphi(\lambda_{124}, \lambda_{125}, \lambda_{145}, \lambda_{245}), \quad y_4 = \varphi(\lambda_{123}, \lambda_{125}, \lambda_{135}, \lambda_{235}),$$
$$y_5 = \varphi(\lambda_{123}, \lambda_{124}, \lambda_{134}, \lambda_{234}),$$

so können mit Hilfe des vorletzten Satzes diese Grössen y transformiert werden; man kann z. B. y_1 ebensowohl als eine symmetrische Function von

$\lambda_{234}, \lambda_{235}$ und zugleich von $\lambda_{245}, \lambda_{345}$,
als von $\lambda_{234}, \lambda_{245}$ und zugleich von $\lambda_{235}, \lambda_{345}$
und von $\lambda_{234}, \lambda_{345}$ und zugleich von $\lambda_{245}, \lambda_{235}$

ansehen, also nach jenem Satze als eine symmetrische Function

von $\lambda_{451}, \lambda_{231}$, von $\lambda_{351}, \lambda_{421}$, von $\lambda_{251}, \lambda_{341}$,

so dass

$$y_1 = \Omega(\lambda_{451}, \lambda_{231}) = \Omega(\lambda_{351}, \lambda_{421}) = \Omega(\lambda_{251}, \lambda_{341})$$

und somit

$$3y_1^n = \Omega^n(\lambda_{451}, \lambda_{231}) + \Omega^n(\lambda_{351}, \lambda_{421}) + \Omega^n(\lambda_{251}, \lambda_{341})$$

ist. Ebenso findet man

$$3y_2^n = \Omega^n(\lambda_{152}, \lambda_{234}) + \Omega^n(\lambda_{124}, \lambda_{235}) + \Omega^n(\lambda_{123}, \lambda_{245}), \text{ etc.},$$
$$3y_5^n = \Omega^n(\lambda_{345}, \lambda_{125}) + \Omega^n(\lambda_{245}, \lambda_{135}) + \Omega^n(\lambda_{145}, \lambda_{235})$$

und daraus die Summe

$$\begin{aligned} & 6(y_1^n + y_2^n + \cdots + y_5^n) \\ = {} & \Omega^n(\lambda_{123}, \lambda_{145}) + \Omega^n(\lambda_{123}, \lambda_{245}) + \Omega^n(\lambda_{123}, \lambda_{345}) \\ + {} & \Omega^n(\lambda_{124}, \lambda_{135}) + \Omega^n(\lambda_{124}, \lambda_{235}) + \Omega^n(\lambda_{124}, \lambda_{435}) \\ & \vdots \\ + {} & \Omega^n(\lambda_{345}, \lambda_{312}) + \Omega^n(\lambda_{345}, \lambda_{412}) + \Omega^n(\lambda_{345}, \lambda_{512}), \end{aligned}$$

in welcher sich die Zeilen der rechten Seite nach eben jenem Satze als je eine symmetrische Function von λ_{123}, λ_{124}, etc. ergeben, so dass die ganze rechte Seite auf rationale Weise durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrückbar ist. Da nun also die Potenzsummen der y sich für jedes φ durch bekannte Grössen ausdrücken lassen, so kann man stets eine Gleichung fünften Grades

$$10)\quad f(y) = y^5 - Ay^4 + By^3 - Cy^2 + Dy - E$$

aufstellen, deren Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 sind. Nach Auflösung derselben sind aber sämmtliche Wurzeln λ der Gleichung zehnten Grades 6) bekannt. Denn man kann fünf Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\lambda^4 - \alpha_1\lambda^3 + \beta_1\lambda^2 - \gamma_1\lambda + \delta_1 = 0,\\
&\lambda^4 - \alpha_2\lambda^3 + \beta_2\lambda^2 - \gamma_2\lambda + \delta_2 = 0,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\lambda^4 - \alpha_5\lambda^3 + \beta_5\lambda^2 - \gamma_5\lambda + \delta_5 = 0
\end{aligned}$$

bilden von den respectiven Wurzelgruppen

$$\begin{aligned}
&\lambda_{234},\ \lambda_{235},\ \lambda_{245},\ \lambda_{345};\quad \lambda_{134},\ \lambda_{135},\ \lambda_{145},\ \lambda_{345};\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\lambda_{123},\ \lambda_{124},\ \lambda_{134},\ \lambda_{234};
\end{aligned}$$

um z. B. die α zu berechnen, bildet man die Summe

$$a_n = y_1^n\alpha_1 + y_2^n\alpha_2 + y_3^n\alpha_3 + y_4^n\alpha_4 + y_5^n\alpha_5,$$

in welcher jedes Glied eine symmetrische Function derselben Art, wie vorher φ ist, so dass sich die Summe wie vorher die aller y^n durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung ausdrückt und man also erhält

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5\ ,\\
a_1 &= \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 y_4 + \alpha_5 y_5\ ,\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
a_4 &= \alpha_1 y_1^4 + \alpha_2 y_2^4 + \alpha_3 y_3^4 + \alpha_4 y_4^4 + \alpha_5 y_5^4,
\end{aligned}$$

Gleichungen, deren linke Seiten sich durch bekannte Grössen rational ausdrücken lassen. Mittelst derselben drückt man die α durch die y und die Coefficienten der gegebenen Gleichung aus; durch ähnliche Systeme die β, γ, δ. Man kann also, wenn sämmtliche Wurzeln von 10) bekannt, die fünf gedachten Gleichungen bilden und ihre Wurzeln, d. h. die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung zehnten Grades bestimmen, da je zwei von ihnen stets eine und nur eine gemeinsame Wurzel haben.

284. Sind nun x, x', x'' drei in einer Geraden gelegene Knotenpunkte, so hat man nach 9) folgende drei Systeme von zehn Gleichungen

$$u_{ik} = \alpha_i\beta_k + \beta_i\alpha_k, \quad u_{ik}' = \alpha_i'\beta_k' + \beta_i'\alpha_k',$$
$$u_{ik}'' = \alpha_i''\beta_k'' + \beta_i''\alpha_k'',$$

in denen die α, β die Coordinaten der drei Ebenenpaare sind, in welche die Polaren der Punkte x, x', x'' zerfallen. Da diese Punkte aber in einer Geraden liegen, so giebt es Factoren μ, μ', μ'', so dass für jedes i

$$\mu x_i + \mu' x_i' + \mu'' x_i'' = 0$$

und somit, da die u_{ik} lineare Functionen der x sind, auch

$$\mu u_{ik} + \mu' u_{ik}' + \mu'' u_{ik}'' = 0$$

ist. Setzt man hier die Werthe von u_{ik}, etc. ein, multipliciert die Gleichung mit den laufenden Coordinaten $X_i X_k$ und summiert nach i und k, so erhält man für

$$A = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \alpha_4 X_4 = 0,$$
$$B = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 = 0,$$

etc. als die Gleichungen der Ebenen, in welche die Polaren zerfallen,

$$11) \qquad \mu AB + \mu' A'B' + \mu'' A''B'' = 0,$$

welche für alle Werthe der X bestehen muss, also eine der gegenseitigen Lage der sechs Ebenen zukommende Eigenschaft ausspricht. In der That kann man aus ihnen mit Beachtung dessen, was man von dieser Lage schon weiss, drei lineare Ausdrücke E, E', E'' so bestimmen, dass

$$AB = \mu' E''^2 - \mu'' E'^2, \quad A'B' = \mu'' E^2 - \mu E''^2,$$
$$A''B'' = \mu E'^2 - \mu' E^2$$

ist, oder darf setzen

$$A = E''\sqrt{u'} + E'\sqrt{u''}, \quad B = E''\sqrt{u'} - E'\sqrt{u''},$$
$$A' = E\sqrt{u''} + E''\sqrt{u}, \quad B' = E\sqrt{u''} - E''\sqrt{u},$$
$$A'' = E'\sqrt{u} + E\sqrt{u'}, \quad B'' = E'\sqrt{u} - E\sqrt{u'},$$

d. h. man hat den letzten Satz des Artikel 279.

Man kann die Coefficienten der E und x so bestimmen, dass in ihnen nur Summen und Differenzen der E erscheinen. Setzt man dann

$$E^{(i)} = c_1^{(i)} x_1 + c_2^{(i)} x_2 + c_3^{(i)} x_3 + c_4^{(i)} x_4,$$

so erhält man aus 9) das System der zehn Gleichungen

$$\text{12)}\quad \begin{array}{l} u_{ik}^{123}\,\sigma^{123} = c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)}, \quad u_{ik}^{124}\,\sigma^{124} = c_i^{(5)} c_k^{(5)} - c_i^{(3)} c_k^{(3)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{ik}^{345}\,\sigma^{345} = c_i^{(1)} c_k^{(1)} - c_i^{(2)} c_k^{(2)}, \end{array}$$

in welchen die σ constante Factoren bedeuten und stets

$$x_i^{\alpha\beta\gamma} = - x_i^{\beta\alpha\gamma}, \text{ etc.}$$

ist, überdiess aber

$$u_{ik}^{\alpha\beta\gamma}\sigma^{\alpha\beta\gamma} = c_i^{(\delta)} c_k^{(\delta)} - c_i^{(\varepsilon)} c_k^{(\varepsilon)}$$

so gebildet ist, dass $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$ eine positive Permutation der Reihe $(1\,2\,3\,4\,5)$ ist.

Sie sind aus vieren unter ihnen, die vermöge der passenden Annahme der absoluten Werthe der c angenommen werden können, bestimmt durch die in den Gleichungen

$$\text{13)}\quad \sigma^{\alpha\beta\gamma} \,.\, x_i^{\alpha\beta\gamma} + \sigma^{\alpha\beta\delta} \,.\, x_i^{\alpha\beta\delta} + \sigma^{\alpha\beta\varepsilon} \,.\, x_i^{\alpha\beta\varepsilon} = 0$$

gegebenen Bedingungen, dass zehnmal drei Punkte x in einer Geraden liegen.

Dass die σ diesen Gleichungen gemäss bestimmbar sind, zeigt folgende Betrachtung. Man kann die absoluten Werthe der x so bestimmen, dass unabhängig von den Werthen der z

$$\Sigma_i z_i x_i^{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ c_1^{\alpha}, & c_2^{\alpha}, & c_3^{\alpha}, & c_4^{\alpha} \\ c_1^{\beta}, & c_2^{\beta}, & c_3^{\beta}, & c_4^{\beta} \\ c_1^{\gamma}, & c_2^{\gamma}, & c_3^{\gamma}, & c_4^{\gamma} \end{vmatrix};$$

womit zugleich die obige Bedingung erfüllt ist, dass durch Vertauschung zweier Indices die Coordinaten eines Punktes x ihr Zeichen ändern sollen. Dann aber reducieren sich die Gleichungen 13) auf die für alle z erfüllte Relation

$$\begin{vmatrix} c_1^{\alpha}, & c_1^{\beta}, & c_1^{\gamma}\sigma^{\alpha\beta\gamma} + c_1^{\delta}\sigma^{\alpha\beta\delta} + c_1^{\varepsilon}\sigma^{\alpha\beta\varepsilon}, & z_1 \\ c_2^{\alpha}, & c_2^{\beta}, & c_2^{\gamma}\sigma^{\alpha\beta\gamma} + c_2^{\delta}\sigma^{\alpha\beta\delta} + c_2^{\varepsilon}\sigma^{\alpha\beta\varepsilon}, & z_2 \\ c_3^{\alpha}, & c_3^{\beta}, & c_3^{\gamma}\sigma^{\alpha\beta\gamma} + c_3^{\delta}\sigma^{\alpha\beta\delta} + c_3^{\varepsilon}\sigma^{\alpha\beta\varepsilon}, & z_3 \\ c_4^{\alpha}, & c_4^{\beta}, & c_4^{\gamma}\sigma^{\alpha\beta\gamma} + c_4^{\delta}\sigma^{\alpha\beta\delta} + c_4^{\varepsilon}\sigma^{\alpha\beta\varepsilon}, & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese erfordert die Voraussetzungen

$$
14)\quad \begin{cases} \sigma^{\alpha\beta\gamma} = \tau^{\alpha} \,.\, \tau^{\beta} \,.\, \tau^{\gamma}, \\ \tau^{(1)} c_1^{(1)} + \tau^{(2)} c_1^{(2)} + \tau^{(3)} c_1^{(3)} + \tau^{(4)} c_1^{(4)} + \tau^{(5)} c_1^{(5)} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \tau^{(1)} c_4^{(1)} + \tau^{(2)} c_4^{(2)} + \tau^{(3)} c_4^{(3)} + \tau^{(4)} c_4^{(4)} + \tau^{(5)} c_4^{(5)} = 0. \end{cases}
$$

Damit sind die absoluten Werthe der x bis auf einen in den τ enthaltenen allen gemeinsamen Factor fixiert und ebenso können die c nur noch die Quadratwurzel dieses Factors enthalten. Die Polare von $x^{\alpha\beta\gamma}$ geht in die Form

$$(\Gamma^{(\delta)} + \Gamma^{(\varepsilon)})\,(\Gamma^{(\delta)} - \Gamma^{(\varepsilon)}) = 0$$

über; diese beiden Ebenen sollen die Ebenen F heissen, und wir wollen ebenso die Ebenen G, H, J diejenigen nennen, deren Gleichungen in den Formeln

$$\Gamma^{(i)} \pm \Gamma^{(k)} \pm \Gamma^{(h)} = 0,$$
$$\Gamma^{(i)} \pm \Gamma^{(k)} \pm \Gamma^{(h)} \pm \Gamma^{(m)} = 0,$$
$$\Gamma^{(1)} \pm \Gamma^{(2)} \pm \Gamma^{(3)} \pm \Gamma^{(4)} \pm \Gamma^{(5)} = 0$$

respective enthalten sind. Dann erhält man die von Clebsch zuerst ausgesprochenen Sätze:

Solche 6 Ebenen F, in welche die Polaren dreier in einer Geraden liegenden Knotenpunkte zerfallen, schneiden sich viermal zu drei in einer Geraden f; solcher Geraden giebt es 40, jede der Ebenen F enthält 3 Paare derselben. Betrachtet man zwei durch eine Gerade f gehende Ebenen F als zugeordnet harmonisch, so geht die der dritten zugeordnete vierte harmonische immer durch eine von 60 Geraden g, in welcher die mit der dritten in einer Polare vereinigte Ebene F von der durch die Doppellinien derjenigen Polaren gelegten Pentaederfläche geschnitten wird, welche in den beiden einander zugeordneten Ebenen des harmonischen Büschels liegen. Diese 60 Geraden g liegen in den 40 Ebenen G, jede in zweien derselben; je vier Ebenen G gehen durch jede Ecke des Pentaeders, und je zwei solcher vier, die mit einer Ebene F und einer Ebene E sich durchschneiden, bilden mit einander ein harmonisches Büschel. Die Ebenen G werden überdiess von den Ebenen E in 80 Geraden h geschnitten, durch welche ausserdem noch immer zwei der 40 Ebenen H gehen; und 4 so durch eine Gerade h gehende Ebenen bilden stets ein harmonisches Büschel.

Es schneiden sich 180mal zwei Ebenen G in einer Ebene F. Die vierte harmonische zu solchen 3 Ebenen geht immer durch eine von 60 Geraden i, in denen sich zwei Ebenen H mit zwei Ebenen F schneiden; und zwar gehen durch jede Gerade i vier Ebenen der gedachten Art, die zugleich immer mit einer Ebene H und den beiden Ebenen F ein harmonisches Büschel bilden; auch bilden die zwei Ebenen F immer mit den zwei Ebenen H selbst ein harmonisches Büschel. Die Geraden i, f bilden mit den Kanten des Pentaeders das vollständige System der Schnittlinien der Ebenen F. Die Ebenen H werden von den Ebenen E ausser in den h in 40 anderen Geraden k geschnitten, die zugleich unter den Durchschnittslinien der Ebenen J sind, und zwar bilden solche durch eine Gerade k gehende vier Ebenen immer ein harmonisches Büschel. Diese Ebenen J durchschneiden sich ausserdem noch in 80 Geraden l, deren jede zugleich einer der Ebenen F und einer der Ebenen G angehört, welche dann mit den durch die Schnittlinie gehenden Ebenen J ein harmonisches Büschel bilden. Auf jeder Ebene F liegen vier, auf jeder G zwei dieser Geraden.

285. Endlich ergiebt sich aus den Gleichungen 12) die Darstellung der Function u als Summe von fünf Cuben. Bestimmt man fünf Grössen w so, dass sie für alle z

$$15) \qquad \Sigma z^{(i)} w^{(i)} = \begin{vmatrix} z^{(1)}, & c_1^{(1)}, & c_2^{(1)}, & c_3^{(1)}, & c_4^{(1)} \\ z^{(2)}, & c_1^{(2)}, & c_2^{(2)}, & c_3^{(2)}, & c_4^{(2)} \\ \vdots & & & & \\ z^{(5)}, & c_1^{(5)}, & c_2^{(5)}, & c_3^{(5)}, & c_4^{(5)} \end{vmatrix}$$

machen, so nehmen die Gleichungen 12) mit Rücksicht auf 14) die Form an

$$16) \qquad m \begin{vmatrix} u_{ik_1}, & u_{ik_2}, & u_{ik_3}, & u_{ik_4} \\ c_1^{(1)}, & c_2^{(1)}, & c_3^{(1)}, & c_4^{(1)} \\ c_1^{(2)}, & c_2^{(2)}, & c_3^{(2)}, & c_4^{(2)} \\ c_1^{(3)}, & c_2^{(3)}, & c_3^{(3)}, & c_4^{(3)} \end{vmatrix} = w^{(4)} w^{(5)} \left\{ c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)} \right\}, \text{etc.},$$

wo m einen unbestimmten Factor bedeutet. Sieht man in diesen Gleichungen die Grössen c als bekannt, die u als unbekannt an, so muss u_{ikh} sich immer als lineare Function von $c_i c_k$ darstellen, ebenso auch von $c_i c_h$ und von $c_k c_h$ und zwar können bei jener Darstellung die Coefficienten nur noch vom Index h, bei der zweiten von k, bei der dritten von i abhängig sein. Diess ist nur möglich, wenn u_{ikh} die Form annimmt

$$17)\quad u_{ikh} = \Sigma_\alpha \varrho^{(\alpha)} c_i^{(\alpha)} c_k^{(\alpha)} c_h^{(\alpha)}.$$

Durch Einführung in 16) erhält man

$$\varrho^{(4)} c_i^{(4)} c_k^{(4)} \begin{vmatrix} c_1^{(4)}, & c_2^{(4)}, & c_3^{(4)}, & c_4^{(4)} \\ c_1^{(1)}, & c_2^{(1)}, & c_3^{(1)}, & c_4^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^{(3)}, & c_2^{(3)}, & c_3^{(3)}, & c_4^{(3)} \end{vmatrix}$$

$$+ \varrho^{(5)} c_i^{(5)} c_k^{(5)} \begin{vmatrix} c_1^{(5)}, & c_2^{(5)}, & c_3^{(5)}, & c_4^{(5)} \\ c_1^{(1)}, & c_2^{(1)}, & c_3^{(1)}, & c_4^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^{(3)}, & c_2^{(3)}, & c_3^{(3)}, & c_4^{(3)} \end{vmatrix} = \frac{\tau^{(4)} \tau^{(5)}}{m} \left\{ c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)} \right\},$$

etc., oder nach 15)

$$- \varrho^{(4)} c_i^{(4)} c_k^{(4)} \,.\, w^{(5)} + \varrho^{(5)} c_i^{(5)} c_k^{(5)} \,.\, w^{(4)}$$
$$= \frac{w^{(4)} w^{(5)}}{m} \left\{ c_i^{(4)} c_k^{(4)} - c_i^{(5)} c_k^{(5)} \right\}$$

für alle Werthe von i und k, d. h.

$$- \varrho^{(4)} = \frac{w^{(4)}}{m}, \quad - \varrho^{(5)} = \frac{w^{(5)}}{m}, \quad \text{etc.}, \quad \varrho^{(\alpha)} = - \frac{w^{(\alpha)}}{m}.$$

Aus 17) erhält man somit, indem allen Gleichungen 16) genügt ist,

$$u_{ikh} = - \frac{1}{m} \Sigma_\alpha w^{(\alpha)} c_i^{(\alpha)} c_k^{(\alpha)} c_h^{(\alpha)}$$

und durch Multiplication mit x_i, x_k, x_h und Summierung nach i, h, k

$$u = - \frac{1}{6m} \left\{ w^{(1)} E^{(1)3} + w^{(2)} E^{(2)3} + w^{(3)} E^{(3)3} + w^{(4)} E^{(4)3} + w^{(5)} E^{(5)3} \right\},$$

die Darstellung als Summe von fünf Cuben. Zwischen den fünf Grössen E besteht eine lineare Beziehung, denn indem man in 15) die Substitution

$$z^{(1)} = E^{(1)}, \quad z^{(2)} = E^{(2)}, \ldots$$

vollzieht, verschwindet die rechte Seite der Gleichung und bleibt

$$0 = w^{(1)} E^{(1)} + w^{(2)} E^{(2)} + w^{(3)} E^{(3)} + w^{(4)} E^{(4)} + w^{(5)} E^{(5)}.$$

(Vergl. Artikel 276.)

286. Wir gehen in der am Ende des Artikel 279 abgebrochenen Betrachtung der Eigenschaften der Fläche dritter Ordnung weiter.

Die Polarebenen aller Punkte einer Ebene umhüllen eine Fläche, welche zugleich der Ort der Punkte ist, deren Polarflächen zweiten Grades die gegebene Ebene berühren. Da die Parameter im zweiten Grade in der Gleichung der veränderlichen Ebene auftreten, so ist das Problem das im 2. Beispiel des Artikel 275 betrachtete und die Enveloppe ist eine Fläche dritter Ordnung mit vier Doppelpunkten, also von der vierten Klasse.

Da die Polarebenen der Durchschnittspunkte der Ebene mit der Fläche dritter Ordnung selbst die Tangentenebenen derselben in diesen Punkten sind, so ist diese cubische Polarfläche der gegebenen Ebene der abwickelbaren Fläche eingeschrieben, welche die Tangentenebenen der Fläche dritter Ordnung längs ihres Schnittes mit der gegebenen Ebene erzeugen.

Die Polarebene irgend eines Punktes A des Durchschnitts der Ebene mit der Hesse'schen Fläche berührt nach Artikel 278 diese Letztere und ist daher eine gemeinschaftliche Tangentenebene derselben mit der hier betrachteten cubischen Polarfläche. Da aber die Polarfläche zweiten Grades von dem entsprechenden Punkte B ein Kegel vom Scheitel A und somit als die betrachtete Ebene berührend anzusehen ist, so ist auch B der Berührungspunkt dieser Polarebene mit der cubischen Polarfläche. D. h. wir erhalten den Steiner'schen Satz: Die cubische Polarfläche irgend einer Ebene berührt die Hesse'sche Fläche längs einer gewissen Curve. Diese Curve ist der Ort der Punkte B, welche den Punkten der Schnittcurve der Hesse'schen Fläche mit der gegebenen Ebene entsprechen.

Wenn aber Punkte in einer Ebene

$$lx + my + nz + pv + qw = 0$$

liegen, so liegen die entsprechenden Punkte in der Fläche vierter Ordnung

$$\frac{l}{ax} + \frac{m}{by} + \frac{n}{cz} + \frac{p}{dv} + \frac{q}{ew} = 0;$$

der Durchschnitt dieser Fläche mit der Kernfläche ist von der sechszehnten Ordnung und enthält die zehn Geraden

$$x = y = 0, \quad z = w = 0, \text{ etc.}$$

Die übrigbleibende Curve sechster Ordnung ist daher die Curve, längs welcher die cubische Polarfläche der gegebenen Ebene die Kernfläche berührt. Die vier Doppelpunkte jener Polarfläche liegen in dieser Curve, sie sind diejenigen Punkte, deren Polarflächen zweiten Grades Kegel sind, welche die gegebene Ebene berühren.

287. Wenn wir in der geraden Verbindungslinie zweier Punkte $(x'y'z')$, $(x''y''z'')$ einen Punkt $(x' + \lambda x'', y' + \lambda y'', \ldots)$ willkürlich annehmen, so ist die Gleichung seiner Polarebene von der Form

$$P_{11} + \lambda P_{12} + \lambda^2 P_{22} = 0,$$

wenn $P_{11} = 0$, $P_{22} = 0$ die Polarebenen der gegebenen Punkte darstellen, und $P_{12} = 0$ die Polarebene des einen Punktes in Bezug auf die quadratische Polarfläche des andern bezeichnet. Wenn man λ als veränderlich betrachtet, so ist die Enveloppe der betrachteten Polarebene offenbar ein Kegel zweiten Grades, welcher den Durchschnittspunkt der drei bezeichneten Ebenen zum Scheitel hat.

Dieser Kegel ist Tangentenkegel der cubischen Polarfläche irgend einer durch jene gerade Linie gehenden Ebene und sein Scheitel ist ein Punkt in dieser Polarfläche.

Sind die beiden angenommenen Punkte entsprechende Punkte der Hesse'schen Fläche, so verschwindet P_{12} identisch, denn die Gleichung der Polarebene des Scheitelpunktes eines Kegels in Bezug auf diesen selbst ist eine Identität. Man hat also den Satz: Die Polarebene eines beliebigen Punktes in der geraden Verbindungslinie zweier entsprechenden Punkte der Hesse'schen Fläche geht durch den Durchschnitt der Tangentenebenen der Hesse'schen Fläche in diesen Punkten.*)

---

*) J. Steiner sagt (a. a. O. p. 141), dass es 100 Gerade gebe, deren zweite Polare sich auf eine Gerade reduciert. Der Satz im Texte scheint an Stelle dieses Ausspruchs treten zu müssen.

In einer beliebigen Ebene liegen drei gerade Linien, welche entsprechende Punkte der Hesse'schen Fläche mit einander verbinden, denn die im letzten Artikel betrachtete Curve sechster Ordnung schneidet jene Ebene in drei Paaren entsprechender Punkte. Somit enthält die cubische Polarfläche einer Ebene immer drei gerade Linien. Wir werden aus der allgemeinen Theorie der geraden Linien in Flächen dritter Ordnung, zu der wir uns nun wenden, das Nämliche bestätigen.

288. Schon in der Anmerkung, Artikel 1, ist bemerkt worden, dass eine Fläche dritter Ordnung nothwendig gerade Linien enthalten müsse; wir sind jetzt im Stande, die Zahl dieser Geraden im allgemeinen Falle zu bestimmen.*)

Wir bemerken zuerst, dass jede durch eine solche in der Fläche enthaltene Gerade gehende Ebene eine Doppeltangentenebene der Fläche sein muss, weil sie die Fläche in einer Geraden und einem Kegelschnitt, d. h. in einer Curve mit drei Doppelpunkten, durchschneidet. Somit sind die Ebenen, welche einen beliebig angenommenen Punkt mit den geraden Linien der Fläche verbinden, Doppeltangentenebenen der Fläche und somit auch Doppeltangentenebenen des aus dem gewählten Punkte an die Fläche gehenden Tangentenkegels. Die Zahl solcher Ebenen ist aber im Artikel 271 nach der allgemeinen Theorie (Artikel 15 f.) bestimmt worden, sie ist sieben und zwanzig und diess somit die Anzahl der fraglichen Geraden.

Diess Resultat kann aber ferner wie folgt begründet werden. Angenommen, dass eine Fläche dritter Ordnung eine gerade Linie enthalte, so untersuchen wir, in wie vielen Lagen eine durch dieselbe gehende Ebene die Fläche in einem in zwei gerade Linien degenerierten Kegelschnitt schneidet.

Sei $w = z = 0$ diese gerade Linie und

$$wU = zV$$

*) Die Theorie der geraden Linien auf Flächen dritter Ordnung ward zuerst im Jahre 1849 in einer Correspondenz zwischen Cayley und Salmon studiert, und die Ergebnisse derselben sind im „Cambridge and Dublin Math. Journ.", Vol. IV, p. 118, 252 veröffentlicht worden. Von Cayley ward zuerst die Bemerkung gemacht, dass eine bestimmte Zahl von geraden Linien in der Fläche liegen müsse; die Bestimmung dieser Zahl in der im Text gegebenen Art und die Discussion des Artikel 291 ward von Salmon gegeben.

die Gleichung der Fläche, so substituieren wir $w = \mu z$, dividieren durch z und bilden die Discriminante der resultierenden Gleichung zweiten Grades in x, y, z. Die Coefficienten von x^2, xy, y^2 in derselben enthalten μ nur im ersten Grade, die von xz und yz enthalten dieselbe Grösse im zweiten und das Glied von z^2 enthält sie im dritten Grade. Die Gleichung, welche man durch Gleichsetzung der Discriminante mit Null erhält, ist daher vom fünften Grade und man erhält den Satz: Durch jede gerade Linie in einer Fläche dritter Ordnung gehen fünf Ebenen, welche die Fläche in einem andern Paar von geraden Linien durchschneiden. Also auch: Jede gerade Linie in einer Fläche dritter Ordnung wird von zehn andern Geraden in dieser Fläche geschnitten.

Betrachten wir nun den Schnitt der Fläche mit einer der eben gefundenen Ebenen. Jede gerade Linie in der Fläche muss in irgend einem Punkte diesen Schnitt treffen, d. h. irgend eine der drei geraden Linien dieser Ebenen durchschneiden. Jede dieser Linien wird aber von acht geraden Linien in der Fläche geschnitten, ausser den beiden, die mit ihr in jener Ebene liegen; es liegen also ausser der Ebene vier und zwanzig Gerade in der Fläche, d. h. dieselbe enthält in Allem sieben und zwanzig Gerade.

Wir werden nachher zeigen, wie eine Fläche neunter Ordnung gebildet wird, welche die gegebene Fläche in dieser Geraden durchschneidet.

289. Da die Gleichung einer Ebene drei unabhängige Constanten enthält, so kann eine Ebene durch irgend drei Bedingungen bestimmt werden, und es giebt daher eine endliche Zahl von Ebenen, welche eine gegebene Fläche in drei Punkten berühren. Wir können diese Zahl in dem Falle einer Fläche dritter Ordnung bestimmen. Denn wir sahen, dass durch jede der sieben und zwanzig geraden Linien fünf dreifach berührende Ebenen gehen, da jede Ebene, welche die Fläche in drei geraden Linien schneidet, sie in den drei Ecken des von ihnen gebildeten Dreiecks berührt, weil dieselben Doppelpunkte des Schnittes sind.

Die Zahl 5×27 muss aber durch drei dividiert werden, weil jede der betrachteten Ebenen drei Gerade enthält. Es existieren daher in Allem fünf und vierzig dreifach berührende Ebenen.

290. **Jede Ebene, welche eine gerade Linie der Fläche enthält, ist eine Doppeltangentenebene und die Paare der Berührungspunkte bilden ein involutorisches System.**

Wenn wir annehmen, dass die Achse z in der Fläche enthalten ist und dass der Theil ihrer Gleichung, welcher in x und y vom ersten Grade ist,

$$x\,(az^2 + bz + c) + y\,(a'z^2 + b'z + c')$$

sei, so werden die beiden Berührungspunkte der Fläche mit der Ebene

$$y = \mu x$$

durch die Gleichung

$$(az^2 + bz + c) + \mu\,(a'z^2 + b'z + c') = 0$$

bestimmt, welche ein involutorisches System bezeichnet. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte", Artikel 423.) Aus den bekannten Eigenschaften der Involution ergiebt sich dann, dass durch eine gerade Linie der Fläche zwei Ebenen gelegt werden können, welche sie in zwei zusammenfallenden Punkten berühren, d. h. welche sie ausser ihr in einem Kegelschnitt durchschneiden, der sie berührt. Die Berührungspunkte dieser besonderen Doppeltangentenebenen mit der Fläche gehören nothwendig der parabolischen Curve der Fläche an und es ist im Artikel 26 bewiesen worden, dass die geraden Linien diese Curve berühren; wir haben hier die erste Bestätigung dafür, dass diese Berührung $2\,(n-2)$ fach sei. **Die beiden Punkte, in welchen eine der sieben und zwanzig Geraden die parabolische Curve der Fläche berührt, bilden mit den Berührungspunkten irgend einer durch sie gehenden Ebene ein harmonisches System.** Sie sind entsprechende Punkte der **Hesse**'schen oder Kernfläche. Diese beiden Berührungspunkte können übrigens imaginär werden.

291. Die Zahl der geraden Linien kann auch in folgender Weise bestimmt werden.

Die Form

$$ace = bdf,$$

wo $a = 0$, $b = 0$, etc. Ebenen repräsentieren, ist eine der Formen, auf welche die allgemeine Gleichung der Fläche dritter Ordnung reduciert werden kann, da sie implicite neunzehn unabhängige Constanten enthält; man findet speciell, dass diese Reduction in 120 verschiedenen Arten möglich ist.*)

Nach jener Gleichungsform enthält die Fläche die neun geraden Linien

$$a = b = 0,\quad c = d = 0,\ \text{etc.}$$

Eine durch die erste von ihnen gelegte Ebene

$$a = \mu b,$$

welche die Fläche in geraden Linien schneidet, schneidet offenbar das Hyperboloid

$$\mu ce = df$$

in den nämlichen Geraden, dieselben sind also Erzeugende dieser Fläche von verschiedenen Systemen. Die eine von ihnen schneidet die Geraden

$$c = d = 0,\quad e = f = 0,$$

die andern die Geraden

$$c = f = 0,\quad d = e = 0.$$

Und da μ drei Werthe hat, so giebt es drei Linien, welche

$$a = b = 0,\quad c = d = 0,\quad e = f = 0$$

durchschneiden. Das Nämliche ergiebt sich auch daraus, dass das durch diese Geraden bestimmte Hyperboloid die Fläche in drei weiteren Geraden schneiden muss. (Artikel 83.)**)

---

*) Dem entspringen die $\frac{45\,.\,32}{6\,.\,2} = 120$ Paare conjugierter Trieder von Steiner (a. a. O. p. 137). Die Scheitel irgend eines Paares derselben sind entsprechende Punkte der Kernfläche.

**) Die Entstehung der Hyperboloide als Durchschnittsort collinearer Ebenenbüschel leitet zu der Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung aus den Grundgebilden der Geometrie der Lage. Wenn man den Inbegriff aller durch einen Punkt gehenden Ebenen ein Ebenenbündel und zwei Ebenenbündel projectivisch nennt, wenn jeder Ebene des einen nur eine Ebene des andern entspricht und umgekehrt, eine Beziehung, welche durch vier willkürlich als entsprechend angenommene Paare von Ebenen (von denen sich nicht je drei in derselben Geraden schneiden) vollständig bestimmt ist, so gilt der Satz: Drei beliebig im Raume liegende collineare Ebenenbündel erzeugen eine allgemeine Fläche dritter Ordnung als Ort des Schnittpunktes je dreier entsprechender Ebenen. Die Ableitung der 27 Geraden aus dieser Entstehungsart beruht auf dem allgemeinen Satze: Bei drei beliebig gegebenen collinearen Ebenenbündeln kommt es im Allgemeinen sechsmal vor, dass drei entspre-

Es existieren aber sechs derartige Hyperboloide, nämlich

$$ab,\ cd,\ ef;\quad ab,\ cf,\ de;\ \text{etc.},$$

durch welche somit achtzehn gerade Linien bestimmt werden zu den neun, welche in der Form der Gleichung direct enthalten sind; d. h. sowie vorher sie enthält sieben und zwanzig Gerade.*)

Wenn wir jede der achtzehn Geraden durch die drei unter jenen neun bezeichnen, welche sie schneidet, so können die sieben und zwanzig Geraden folgendermassen aufgezählt werden. Die ursprünglichen neun sind

$$ab,\ ad,\ af,\ cb,\ cd,\ cf,\ eb,\ ed,\ ef;$$

dazu kommen die drei Linien wie

$$(ab\,.\,cd\,.\,ef)_1,\quad (ab\,.\,cd\,.\,ef)_2,\quad (ab\,.\,cd\,.\,ef)_3$$

von jeder der sechs Gruppen

$$(ab\,.\,cd\,.\,ef),\quad (ab\,.\,cf\,.\,de),\quad (ad\,.\,bc\,.\,ef),$$
$$(ad\,.\,be\,.\,cf),\quad (af\,.\,bc\,.\,de),\quad (af\,.\,be\,.\,cd).$$

Die fünf Ebenen, welche durch eine der Geraden z. B. ab gehen, sind die Ebenen a und b, welche die Fläche respective in den Linienpaaren ad, af; bc, be schneiden, und die drei Ebenen, welche sie in

$$(ab\,.\,cd\,.\,ef)_1,\quad (ab\,.\,cf\,.\,de)_1;$$
$$(ab\,.\,cd\,.\,ef)_2,\quad (ab\,.\,cf\,.\,de)_2;$$
$$(ab\,.\,cd\,.\,ef)_3,\quad (ab\,.\,cf\,.\,de)_3$$

schneiden. Die fünf Ebenen, welche durch eine der übrigen Geraden, z. B. $(ab\,.\,cd\,.\,ef)_1$ gehen, schneiden sie in den Paaren

$$ab,\ (ab\,.\,cf\,.\,de)_1;\quad cd,\ (af\,.\,cd\,.\,be)_1;\quad ef,\ (ad\,.\,bc\,.\,ef)_1$$

und in

$$(ad\,.\,be\,.\,cf)_2,\quad (af\,.\,bc\,.\,de)_3;\quad (ad\,.\,be\,.\,cf)_3,\quad (af\,.\,bc\,.\,de)_2.$$

---

chende Ebenen sich in einer Geraden schneiden. Man vergleiche die schöne Abhandlung von Schröter im LXII. Bde. des „Journal für die Mathematik" (p. 265 f.). In dieser Entstehung liegt der einem bekannten Satz der Planimetrie analoge Satz: Wenn die vier Flächen eines Tetraeders durch feste Punkte gehen und die drei Kanten einer Fläche auf festen Ebenen sich bewegen, so beschreibt die ihr gegenüberliegende Ecke eine Fläche dritter Ordnung. (Vergl. das Beispiel des Artikel 76 oben und im I. Bande dieses Werkes Artikel 117, Beispiel 23.)

*) Andere Betrachtungen über das System dieser Geraden gaben Hart und Brioschi. (Vergl. „Annali di Scienze matem.", t. VI.)

292. Eine neue Anordnung der Linien des Systems, welche zu einer einfachen Bezeichnung und einer klaren Vorstellung desselben leitet, ist von Schläfli gegeben worden.*)

Wenn wir die beiden Gruppen von nicht sich schneidenden Geraden wie folgt schreiben

$$ab,\ cd,\ ef,\ (ad\,.\,be\,.\,cf)_1,\ (ad\,.\,be\,.\,cf)_2,\ (ad\,.\,be\,.\,cf)_3,$$
$$cf,\ be,\ ad,\ (ab\,.\,cd\,.\,ef)_1,\ (ab\,.\,cd\,.\,ef)_2,\ (ab\,.\,cd\,.\,ef)_3,$$

so wird leicht erkannt, dass irgend eine Linie der einen Gruppe die mit ihr in derselben Verticale stehende Linie der andern nicht, aber alle übrigen Linien derselben durchschneidet. Schreiben wir diese beiden Gruppen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6;$$

sie bilden, was Schläfli einen Doppelsechs genannt hat. Man sieht leicht aus der vorhergehenden Bezeichnung, dass die Linie, welche in der Ebene von a_1, b_2 liegt, die nämliche ist, welche in der Ebene von a_2, b_1 liegt; daher können die fünfzehn andern geraden Linien durch die Bezeichnung c_{12}, c_{34}, etc. dargestellt werden, wo c_{12} die in der Ebene von a_1, b_2 gelegene Gerade bezeichnet. Es giebt offenbar fünfzehn Combinationen zu zweien aus den sechs Zahlen 1, 2, 3, etc. Die fünf Ebenen, welche durch c_{12} so gelegt werden können, dass sie in Paaren von geraden Linien die Fläche schneiden, enthalten als solche die Paare

$$a_1 b_2,\ a_2 b_1, \quad \text{und} \quad c_{34}c_{56},\ c_{35}c_{46},\ c_{36}c_{45}.$$

Es giebt dreissig Ebenen, von denen jede eine der Geraden von den Systemen a, b, c enthält, und fünfzehn Ebenen, welche drei Gerade c enthalten. Aus den sieben und zwanzig Geraden können sechs und dreissig $\left(=\frac{216}{6}\right)$ Doppelsechssysteme gebildet werden, denn es giebt $\frac{27\,.\,16}{2} = 216$ Linienpaare, die sich nicht schneiden.

293. Wir können nun ein System von sieben und zwanzig Geraden, welches zu einer Fläche dritter Ordnung gehört, geometrisch construieren.

---

*) Vergl. „Quarterly Journal of Mathem.“, Vol. II p. 116.

Wir wählen eine Gerade a_1 willkürlich und ebenso fünf andere, welche sie durchschneiden, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6. Dieselben bestimmen eine Fläche dritter Ordnung, denn wenn wir eine solche Fläche durch vier von den Punkten beschrieben denken, in denen a_1 durch die andern Geraden geschnitten wird, und durch drei weitere Punkte in jeder dieser Geraden, so enthält diese durch neunzehn Punkte bestimmte Fläche alle diese Geraden, weil jede Linie vier Punkte mit der Fläche gemein hat. Wir können aber, wenn vier Linien gegeben sind, von denen keine zwei sich durchschneiden, im Allgemeinen zwei Transversalen bestimmen, welche alle vier durchschneiden; denn das durch drei von ihnen bestimmte Hyperboloid schneidet die vierte in zwei Punkten, durch welche die fraglichen Transversalen als Erzeugende der andern Art gehen.*) Durch jede vier der Linien, z. B. b_3, b_4, b_5, b_6 können wir daher ausser der Linie a_1 eine andere Transversale a_2 legen, welche auch in der Fläche liegen muss, da sie vier Punkte mit derselben gemein hat. In dieser Art construieren wir die fünf neuen Geraden a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.

---

*) Wenn das Hyperboloid der drei ersten die vierte Gerade berührt, so giebt es nur eine solche gemeinschaftliche Transversale; und es ist offenbar, dass das durch irgend drei andere unter ihnen bestimmte Hyperboloid die letzte ebenfalls berührt, — was von Cayley zuerst bemerkt zu sein scheint.

Wenn wir die Linien durch 1, 2, 3, 4 und die Bedingung des Durchschnitts von zweien unter ihnen z. B. 1 und 2 durch (12) bezeichnen, so ist die Bedingung, unter welcher vier Gerade nur eine gemeinschaftliche Transversale besitzen, durch die Vergleichung der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0, & (12), & (13), & (14) \\ (21), & 0, & (23), & (24) \\ (31), & (32), & 0, & (34) \\ (41), & (42), & (43), & 0 \end{vmatrix}$$

mit Null dargestellt. Das Verschwinden der in derselben Art aus fünf Geraden gebildeten Determinante ist die Bedingung, unter welcher sie alle eine gemeinschaftliche Transversale besitzen. Das Verschwinden der gleichen Determinante für sechs Linien drückt eine Relation dieser Linien aus, welche man als „Involution der sechs Linien" bezeichnet hat und welche dann immer erfüllt ist, wenn diese Linien die Wirkungslinien von sechs Kräften sein können, die Gleichgewicht hervorbringen. Verschiedene interessante Mittheilungen über diesen Gegenstand gaben Sylvester, Cayley und Chasles in den „Comptes rendus", 1861, I.

Wenn wir dann irgend eine Transversale bestimmen, welche die vier ersten unter diesen Geraden schneidet, so zeigt die vorher auseinander gesetzte Theorie, dass sie eine Linie b_1 sein wird, welche auch die fünfte schneidet. Damit ist ein Doppelsechssystem construiert.

Alle übrigen Geraden gehen aus demselben hervor, denn indem man die Ebene $a_1 b_2$ nimmt, erhält man in ihren Schnittpunkten mit den Linien a_2, b_1 Punkte, welche in der Linie $c_1 c_2$ liegen.

294. **Die verschiedenen Arten der Fläche dritter Ordnung in Bezug auf die Realität der sieben und zwanzig Geraden** sind gleichfalls von **Schläfli** (a. a. O.) untersucht worden. Er erhält fünf Arten, nämlich:

A) Alle Linien und Ebenen sind reell.

B) Fünfzehn Linien und fünfzehn Ebenen sind reell; die zwölf imaginären Geraden bilden ein Doppelsechssystem, in dessen beiden Gruppen je eine von zwei conjugierten sich findet, so dass neun der imaginären Linien einen reellen Punkt besitzen. Zwei Paare von conjugierten imaginären Linien werden durch eine reelle Gerade geschnitten.

C) Sieben Linien und fünf Ebenen sind reell. Es giebt nämlich eine reelle Gerade, durch welche fünf reelle Ebenen gehen, von denen aber nur drei reelle Dreiecke enthalten; in jeder der beiden andern bestehen die Dreiecke aus der reellen Originallinie und zwei imaginären Linien, die sich in einem reellen Punkte durchschneiden.

D) Drei Linien und dreizehn Ebenen sind reell; jene bilden ein reelles Dreieck, durch dessen Seiten ausser der seinen je vier reelle Ebenen gehen.

E) Drei Linien und sieben Ebenen sind reell; jene bilden ein reelles Dreieck, durch dessen Seiten ausser der seinen je zwei reelle Ebenen gehen.

Bezüglich der Gleichungsform

$$ace = bdf$$

gehen daraus dreizehn verschiedene Fälle der Realität und der imaginären Zuordnung der linearen Polynome derselben hervor. Sie können sämmtlich reell sein in den Arten A und B; a und b, c und d, e und f sind einander conjugiert in den Arten B und C; d und f sind einander conjugiert, die übrigen reell in den Arten

D und E; c und e, d und f sind conjugiert, a, b reell in C und E; etc. Alle sind imaginär und nicht conjugiert, a und b haben einen reellen Punkt, c und d so wie e und f eine reelle Gerade mit einander gemein im Falle C; etc. Alle sind imaginär und nicht conjugiert und a, b; c, d; e, f haben je einen reellen Punkt gemein in E.

Der Verfasser hat früher*) eine Aufzählung der Modificationen gegeben, welche die allgemeine Theorie der Fläche in dem Falle erfährt, wenn die Fläche einen Doppelpunkt oder mehrere Doppelpunkte besitzt. Dass die Fläche dritter Ordnung sieben und zwanzig gerade Linien enthält, und fünf und vierzig dreifach berührende Ebenen hat, bleibt wahr, wenn man eine Linie oder Ebene zweifach zählt, die durch einen Doppelpunkt geht, eine solche vierfach, die durch zwei Doppelpunkte geht, und diejenige achtfach, welche drei Doppelpunkte enthält.

Wenn die Fläche einen Doppelpunkt besitzt, so giebt es sechs gerade Linien in ihr, welche ihn enthalten und fünfzehn andere Gerade in den durch dieselben paarweis bestimmten Ebenen; ferner fünfzehn dreifach berührende Ebenen, die jenen Punkt nicht enthalten. Man hat so

$$2 \cdot 6 + 15 = 27, \quad 2 \cdot 15 + 15 = 45.$$

Wenn die Fläche vier Doppelpunkte enthält, so werden die Linien von den sechs sie verbindenden Geraden, welche vierfach zählen, und von drei andern in einer Ebene liegenden Geraden gebildet, deren jede zwei Gegenkanten der Pyramide der Doppelpunkte schneidet. Die dreifach berührenden Ebenen sind die Ebene dieser drei Geraden, welche einfach zählt, die sechs Ebenen, welche je eine dieser Geraden und eine Kante der Pyramide enthalten, welche zweifach, und die vier Flächen der Pyramide, welche achtfach gezählt werden müssen.**)

Beispiel. Eben diese Fläche mag hier noch als Beispiel dienen. (Vergl. Artikel 275, Beispiel 2.) Nimmt man die vier Doppelpunkte als Ecken des Fundamentaltetraeders, so ist

---

*) Vergl. „Cambridge and Dublin Mathem. Journ.“, Vol. IV, p. 256.

**) Die andern Fälle vergleiche man in der angeführten Abhandlung.

$$\frac{la^2}{x} + \frac{mb^2}{y} + \frac{nc^2}{z} + \frac{pd^2}{w} = 0$$

ihre Gleichung. Sie enthält die acht und zwanzig Punkte, welche die den Punkten einer Ebene

$$lx + my + nz + pw = 0$$

conjugiert harmonischen Punkte der Verbindungslinien der acht Punkte bezeichnen, deren Coordinaten die nachfolgenden Verhältnisse haben

$$a:b:c:d \quad ; \; -a:b:c:d \quad ; \; a:-b:c:d \quad ; \; a:b:-c:d \quad ;$$
$$a:b:c:-d; \; -a:b:c:-d; \; -a:b:-c:d; \; -a:-b:c:d.$$ *)

Für eine Tangentenebene der Fläche im Punkte (x, y, z, w) hat man

$$(mb^2zw + nc^2wy + pd^2yz)\,X + (la^2zw + nc^2wx + pd^2xz)\,Y$$
$$+ (la^2yw + mb^2wx + pd^2xy)\,Z + (la^2yz + mb^2zx + nc^2xy)\,W = 0,$$

wenn $X, Y, \ldots$ die laufenden Coordinaten bezeichnen; also für die den Kanten $x = y = 0$, $z = w = 0$ entsprechenden respective

$$\frac{X}{la^2} + \frac{Y}{mb^2} = 0, \qquad \frac{Z}{nc^2} + \frac{W}{pd^2} = 0,$$

welche einerseits zeigen, dass die Durchschnittslinien der drei entsprechenden Paare von Tangentenebenen in der einen Ebene

$$\frac{X}{la^2} + \frac{Y}{mb^2} + \frac{Z}{nc^2} + \frac{W}{pd^2} = 0,$$

als auch, dass sie in der Fläche dritter Ordnung selbst gelegen sind.**)

---

*) Für $a = b = c = d$ werden jene Punkte die Centra der acht eingeschriebenen Kugeln des Doppelpunkttetraeders. Die Mittelpunkte der 28 Segmente zwischen ihnen gehören der Fläche

$$\frac{l}{x} + \frac{m}{y} + \frac{n}{z} + \frac{p}{w} = 0$$

an. (Vergl. Beltrami, „Giornale di Matem.“, t. I, p. 208.)

Dieser Satz verbindet sich der Theorie der conjugierten Tetraeder. Man erhält dieselbe Fläche, wenn man die jene für sieben zählenden acht Centra der Kugeln enthaltende Fläche zweiten Grades bestimmt und den Ort ihrer Centra sucht. (Vgl. Band I, Beispiel 2, Artikel 147.) Und allgemeiner: Wenn eine Schaar demselben Tetraeder conjugierte Flächen zweiten Grades durch denselben Punkt gehen, so beschreibt der Pol einer festen Ebene in Bezug auf dieselben eine Fläche dritter Ordnung, die die Kanten des Tetraeders enthält und seine Ecken zu Doppelpunkten hat. (Vergl. Painvin, „Journal f. Math.“, Bd. LXIII, p. 88. Theorem XVII.)

**) Vergl. Cayley, „Liouville's Journ.“, Vol. IX.

Die vier Kegel zweiten Grades, welche aus den Doppelpunkten der Fläche umgeschrieben sind, werden durch die Gleichungen

$$\frac{mb^2}{y} + \frac{nc^2}{z} + \frac{pd^2}{w} = 0, \quad \frac{la^2}{x} + \frac{nc^2}{z} + \frac{pd^2}{w} = 0,$$
$$\frac{la^2}{x} + \frac{mb^2}{y} + \frac{pd^2}{w} = 0, \quad \frac{la^2}{x} + \frac{mb^2}{y} + \frac{nc^2}{z} = 0$$

repräsentiert; sie schneiden sich also paarweis in sechs ebenen Kegelschnitten, deren Ebenen mit den Tetraederflächen und der Tangentenebene der Fläche längs der betreffenden Kante harmonische Büschel bilden; diese sechs Ebenen gehen durch einen Punkt. Die Kegelschnitte, welche jene Kegelflächen in den respectiven Gegenflächen des Tetraeders bestimmen, gehören sämmtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung an, die dem Tetraeder umgeschrieben ist. Die Tangentenebenen dieser Letzteren in den Eckpunkten schneiden die Gegenflächen in vier Geraden, welche in einer Ebene liegen; etc.

Insbesondere noch: Die Fusspunkte der von einem Punkte der Fläche auf die Flächen des Tetraeders gefällten Normalen sind in derselben Ebene. (Vergl. „Analyt. Geometrie d. Kegelschn.“, Artikel 134.)

Ein anderes Beispiel liefern die Flächen dritter Ordnung, deren Gleichung von der Form

$$f_3\,(x, y, w) + f_2\,(x, y, w) + f_1\,(x, y, w) + pw^3 = z$$

ist, wenn f_3, f_2, f_1 homogene Functionen von den respectiven Graden 3, 2, 1 bezeichnen. Diese Gleichung ist reducierbar entweder auf die eine oder die andere der beiden Formen

$$(x + Ay)\,(x^2 \pm By^2) = zw^2,$$
$$(x + Ay + Cw)\,(x^2 \pm By^2) = zw^2$$

und giebt, weil in beiden Fällen die Differentiale U_{13}, U_{23}, U_{33} verschwinden, die Hesse'sche Fläche als zerfallend in eine zweifach zu zählende Ebene und einen Kegel zweiten Grades.

Invarianten und Covarianten einer Fläche dritter Ordnung.

295. Bei den Entwickelungen, welche folgen, müssen einige elementare Eigenschaften der Invarianten als bekannt vorausgesetzt werden; wir verweisen für ihr Studium auf die „Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen“.

Wir erinnern, dass nach jenen eine Invariante der Gleichung einer Fläche eine Function der Coefficienten derselben ist, deren Verschwinden irgend eine permanente, d. i. von der Lage des

Coordinatensystems unabhängige Eigenschaft der Fläche bezeichnet, wie z. B. die Existenz eines Doppelpunktes; dass eine Covariante derselben, wie es beispielsweise die Hesse'sche Determinante ist, durch ihr Verschwinden eine Fläche darstellt, die mit der gegebenen eine von der Wahl des Coordinatensystems unabhängige Beziehung hat; dass eine Contravariante oder zugeordnete Form eine Relation zwischen den Grössen α, β, γ, δ ist, welche ausdrückt, dass die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

zur Fläche in einer permanenten Relation steht, z. B. sie berührt.

Von einer Eigenschaft dieser Grundformen machen wir im Folgenden zumeist Gebrauch; nämlich von derjenigen, nach welcher die Substitution von $\frac{d}{dx}$, $\frac{d}{dy}$, etc. für α, β, etc. in eine Contravariante und die Ausführung der so bezeichneten Operationen an der Originalfunction oder einer ihrer Covarianten stets eine neue Covariante erzeugt, welche zur Invariante wird, wenn die Veränderlichen aus dem Ergebniss verschwinden. (Vgl. a. a. O. Artikel 94.)

Wenn man in der nämlichen Art in eine Covariante für x, y, etc. die Symbole $\frac{d}{d\alpha}$, $\frac{d}{d\beta}$, etc. substituiert und an einer Contravariante die bezüglichen Operationen ausführt, so erhält man eine neue Contravariante.

Wir benutzen bei dieser Discussion die als allgemein erwiesene Form der Gleichung, in welcher sie als Summe von fünf dritten Potenzen erscheint. (Vergl. Artikel 276, 285.)

Die Hesse'sche Determinante ist im Artikel 279 für diese Voraussetzung bereits gegeben worden und es wäre nicht schwer, andere Covarianten zu berechnen.

Es bleibt übrig zu zeigen, in welcher Weise in dieser Voraussetzung Contravarianten berechnet werden können.

Setzen wir voraus, dass U eine in Gliedern von vier unabhängigen Veränderlichen dargestellte Function und irgend eine Contravariante derselben in α, β, γ, δ entwickelt sei, so untersuchen wir die Form, welche dieselbe annimmt, wenn die Function in fünf Veränderlichen ausgedrückt, die durch eine lineare Relation verbunden sind.

Wir können offenbar die Function von fünf Veränderlichen auf eine solche von vier Veränderlichen reducieren, indem wir für die fünfte Variable ihren durch die übrigen vier ausgedrückten Werth einsetzt, nämlich

$$w = -(x + y + z + v).$$

Um also die Bedingung zu finden, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \varepsilon w = 0$$

eine bestimmte Beziehung zur Fläche hat, hat man nur diejenige Bedingung aufzustellen, unter welcher die Ebene

$$(\alpha - \varepsilon)\, x + (\beta - \varepsilon)\, y + (\gamma - \varepsilon)\, z + (\delta - \varepsilon)\, v = 0$$

die nämliche Beziehung zur Fläche hat, deren Gleichung in Function von vier Veränderlichen dargestellt ist; d. h. die Contravariante in Function von fünf linear verbundenen Veränderlichen wird aus der in vier unabhängigen Veränderlichen gegebenen durch die Substitution von $(\alpha - \varepsilon)$, $(\beta - \varepsilon)$, $(\gamma - \varepsilon)$, $(\delta - \varepsilon)$ für α, β, γ, δ respective abgeleitet.

Jede solche Contravariante ist daher eine Function der Differenzen zwischen den Grössen α, β, γ, δ, ε.

Das folgende Beispiel wird zum vollständigern Verständniss der Methode beitragen.

Beispiel. Sei

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + ew^2 = 0$$

bei

$$x + y + z + v + w = 0$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades; so soll die Bedingung entwickelt werden, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \varepsilon w = 0$$

dieselbe berührt. Wenn wir die Gleichung der Fläche auf eine Function von vier Variabeln reducieren, indem wir für w seinen Werth als negative Summe der übrigen substituieren, so werden die Coefficienten von x^2, y^2, z^2, v^2 respective $(a + e)$, $(b + e)$, $(c + e)$, $(d + e)$, während jeder andere Coefficient gleich e ist. Substituiert man diese Werthe in die bekannte Bedingungsgleichung (vergl. Band I, Artikel 75), so erhält man die Bedingung für die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v = 0$$

in der Form

$$\begin{gathered}\alpha^2 (bcd + bce + cde + dbe) + \beta^2 (cda + cde + dae + ace) \\ + \gamma^2 (dab + dae + abe + bde) + \delta^2 (abc + abe + bce + cae) \\ - 2e\, (ad\beta\gamma + bd\gamma\alpha + cd\alpha\beta + bc\alpha\delta + ca\beta\delta + ab\gamma\delta) = 0.\end{gathered}$$

Wenn wir dann die Substitution $(\alpha-\varepsilon)$, $(\beta-\varepsilon)$, etc. für α, β, etc. vollziehen, so wird sie

$$\begin{aligned} & bcd\,(\alpha-\varepsilon)^2+cda\,(\beta-\varepsilon)^2+dab\,(\gamma-\varepsilon)^2+abc\,(\delta-\varepsilon)^2\\ +\, & bce\,(\alpha-\delta)^2+cae\,(\beta-\delta)^2+abe\,(\gamma-\delta)^2+ade\,(\beta-\gamma)^2\\ +\, & bde\,(\alpha-\gamma)^2+cde\,(\alpha-\beta)^2=0; \end{aligned}$$

man kann sie in der Form abgekürzt darstellen

$$\Sigma cde\,(\alpha-\beta)^2=0.$$

296. Es ist auf den Satz Bezug genommen worden, nach welchem aus einer Contravariante in vier Veränderlichen durch die Substitution

$$\frac{d}{dx},\ \frac{d}{dy},\ \frac{d}{dz},\ \frac{d}{dw}$$

für α, β, γ, δ und Ausführung der Operationen an irgend einer Covariante eine neue Covariante erhalten wird. Wir suchen die Form, in welcher diess Gesetz auf die vorausgesetzte Darstellung in fünf linear verbundenen Veränderlichen x, y, z, v, w angewendet werden kann.

Da x in dieselbe in zwei Arten, nämlich explicite und überdiess implicite durch w eintritt, so ist das Differential nach x

$$\frac{d}{dx}+\frac{d}{dw}\frac{dw}{dx}$$

oder in Folge der linearen Relation unter den Veränderlichen

$$\frac{d}{dx}-\frac{d}{dw}.$$

Eine Contravariante in vier Veränderlichen wird in ein Operationssymbol für fünf linear verbundene Veränderliche transformiert durch die Substitution von

$$\frac{d}{dx}-\frac{d}{dw},\quad \frac{d}{dy}-\frac{d}{dw},\quad \frac{d}{dz}-\frac{d}{dw},\quad \frac{d}{dv}-\frac{d}{dw}$$

für

$$\alpha\quad,\quad\beta\quad,\quad\gamma\quad,\quad\delta.$$

Wir sahen aber im letzten Artikel, dass die Contravariante in fünf Veränderlichen aus einer in vier Veränderlichen abgeleitet wird, indem man für

$$\begin{matrix}\alpha\ , & \beta\ , & \gamma\ , & \delta\\ \alpha-\varepsilon, & \beta-\varepsilon, & \gamma-\varepsilon, & \delta-\varepsilon\end{matrix}$$

substituiert. Daraus folgt sofort, dass aus jeder Contravariante in fünf Veränderlichen durch die Substitution von

$$\frac{d}{dx}, \frac{d}{dy}, \frac{d}{dz}, \frac{d}{dv}, \frac{d}{dw}$$

für

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$$

ein Operationssymbol hervorgeht, welches durch Anwendung auf die Originalfunction oder irgend eine Covariante derselben neue Covarianten oder Invarianten erzeugt.

Wenn also eine Contravariante der Form in fünf Veränderlichen gefunden ist, so können aus ihr ohne den mühsamen Uebergang zu der Darstellung in vier Veränderlichen neue Covarianten abgeleitet werden.

Beispiel. Wir haben

$$\Sigma cde\ (\alpha - \beta)^2$$

als eine Contravariante von

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + ew^2 = 0$$

gefunden. Wenn wir daher an der quadratischen Form mit dem Symbol

$$\Sigma cde \left(\frac{d}{dx} - \frac{d}{dy}\right)^2$$

operieren, so ist das Resultat, welches nur durch einen numerischen Factor von

$$bcde + cdea + deab + eabc + abcd$$

verschieden sein kann, eine Invariante derselben. Es ist in der That ihre Discriminante und würde aus dem Ausdruck derselben im Artikel 63 des ersten Bandes erhalten worden sein, indem man für die Coefficienten a, b, c, d die Summen $a + e$, $b + e$, $c + e$, $d + e$ einführte, während man alle andern Coefficienten durch e ersetzt.

297. In derselben Art wird bewiesen, dass man in eine Covariante der Form für x, y, z, v, w Differentialsymbole nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ substituieren und mit dem so erhaltenen Symbol an einer beliebigen Contravariante operieren darf, um eine neue Contravariante zu erhalten.

Denn wenn wir die Function zuerst in eine Function von vier Veränderlichen verwandeln und dann die entsprechende Substitution der Differentiale vollziehen, so sind für

$$x, \ y, \ z, \ v \quad \text{und} \quad w$$

$$\frac{d}{d\alpha}, \frac{d}{d\beta}, \frac{d}{d\gamma}, \frac{d}{d\delta} \quad \text{und} \quad -\left(\frac{d}{d\alpha} + \frac{d}{d\beta} + \frac{d}{d\gamma} + \frac{d}{d\delta}\right)$$

substituiert worden. Da aber die Contravariante in fünf Veränderlichen aus der in vier durch die Substitution $(\alpha - \varepsilon)$ für α, etc. erhalten wurde, so ist offenbar, dass die Differentiale von beiden nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die nämlichen sind, während das Differential der in fünf Veränderlichen ausgedrückten nach ε der negativen Summe der Differentiale den in vieren gegebenen nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleich ist. Diess begründet aber das Theorem.

Durch diess und das Theorem des letzten Artikels können wir, wenn irgend eine Covariante und Contravariante gegeben sind, andere Formen dieser Art erzeugen, welche wieder mit jenen combiniert immer neuen Formen derselben Art den Ursprung geben.

298. Die quadratische Polarfläche irgend eines Punktes in Bezug auf die Fläche dritter Ordnung

$$ax^3 + by^3 + cz^3 + dv^3 + dw^3 = 0, \qquad (1)$$

ist

$$axx'^2 + byy'^2 + czz'^2 + dvv'^2 + eww'^2 = 0.$$

Die Hesse'sche Determinante als die Discriminante dieser quadratischen Form ist daher nach dem Beispiel des Artikel 296

$$\Sigma bcdeyzvw = 0, \qquad (2)$$

wie schon im Artikel 279 bewiesen ist.

Die Form, welche wir im Artikel 286 als die cubische Polare einer Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \varepsilon w = 0$$

bezeichnet haben, d. i. die Bedingung, unter welcher diese Ebene die quadratische Polarfläche berührt, ist nach dem Beispiel des Artikel 295

$$\Sigma cdezvw\, (\alpha - \beta)^2 = 0.$$

Sie ist eine gemischte Concomitante oder Zwischenform, weil sie beide Reihen von Veränderlichen x, y, etc. und α, β, etc. zugleich enthält.

Wenn wir in ihr die Substitution

$$\frac{d}{dx}, \ \frac{d}{dy}, \text{ etc. für } \alpha, \beta, \text{ etc.}$$

vollziehen und die angedeuteten Operationen an der cubischen Originalform vollziehen, so erhalten wir die Hesse'sche Determinante.

Behandeln wir diese Letztere auf dieselbe Weise, so entsteht eine Covariante von der fünften Ordnung in den Veränderlichen und von der siebenten in den Coefficienten, welche wir als die Covariante Φ bezeichnen wollen,

$$\Phi = abcde\,\Sigma abx^2y^2z.$$

Um die in den Artikeln 296, 297 entwickelte Methode anzuwenden, ist es nothwendig, eine Contravariante zu besitzen; für diesen Zweck entspricht die Berechnung der Contravariante σ, welche in der Gleichung der Reciprocalfläche erschien, die, wie wir im Artikel 271 sahen, von der Form

$$64\sigma^3 = \tau^2$$

ist. Die Contravariante σ drückt, mit Null gleichgesetzt, die Bedingung aus, unter welcher irgend eine Ebene

$$\alpha x + \beta y + \text{etc.} = 0$$

die Fläche in einer Curve dritter Ordnung schneidet, für die die Aronhold'sche Invariante S verschwindet. Sie ist in α, β, etc. ebenso wie in den Coefficienten der cubischen Form vom vierten Grade.

In dem Falle von vier Variabeln ist das leitende Glied das Product von α^4 in das S der ternären cubischen Form, die für $x = 0$ aus der Gleichung der Fläche hervorgeht. Die übrigen Glieder werden mit Hilfe der Differentialgleichung der Invarianten berechnet. (Vgl. „Vorlesungen", p. 150 f.) Aus der für vier Veränderliche gefundenen Form wird dann nach Artikel 295 die für fünf linear verbundene Veränderliche abgeleitet. Wir unterdrücken die Einzelheiten der Berechnung, welche weitläufig aber ohne Schwierigkeit ist. Das Resultat ist

$$\sigma = \Sigma abcd\,(\alpha - \varepsilon)\,(\beta - \varepsilon)\,(\gamma - \varepsilon)\,(\delta - \varepsilon). \qquad [1]^{*)}$$

Nach dem Vorigen können wir nun als aus einer gegebenen Covariante und Contravariante eine neue Form dieser Art erzeugen, indem wir in diejenige, welche die Veränderlichen in den niedrigeren Dimensionen enthält, Differentialsymbole für dieselben einsetzen und die damit geforderten Operationen an der andern

*) Zur leichtern Verweisung sollen die Contravarianten durch Ordnungsziffern in eckigen, die Covarianten durch solche in runden Klammern bezeichnet werden.

Dabei betrachten wir die cubische Form selbst und ihre Hesse'sche Determinante als die Covarianten (1) und (2) respective.

vollziehen. Das Resultat ist von der Differenz ihrer Grade in den Veränderlichen und von der Summe derselben in den Coefficienten. Wenn beide von derselben Dimension sind, so ist es gleichgültig, mit welchem von beiden wir operieren; das Resultat ist in diesem Falle eine Invariante von der Summe ihrer Grade in den Coefficienten.

Die Ergebnisse dieses Verfahrens sind im nächsten Artikel vereinigt.

299. a) Indem wir (1) und [1] combinieren, erwarten wir eine in den Veränderlichen lineare Contravariante vom Grade fünf in den Coefficienten zu finden; aber dieselbe verschwindet identisch.

b) Die Combination von (2) und [1] giebt eine Invariante, welche wir als die Invariante A bezeichnen wollen,

$$A = \Sigma b^2c^2d^2e^2 - 2\, abcde\, \Sigma abc.$$

Nach der symbolischen Methode, welche in den „Vorlesungen", p. 163 f. entwickelt ist, wird der Ausdruck derselben

$$A = (1235)\,(1246)\,(1347)\,(2348)\,(5678)^2.$$

c) Indem wir [1] mit dem Quadrat von (1) verbinden, erhalten wir eine quadratische Covariante von der sechsten Ordnung in den Coefficienten

$$abcde\,(ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + ew^2). \qquad (3)$$

Ihr symbolischer Ausdruck ist

$$(1234)\,(1235)\,(1456)\,(2456).$$

d) Die Verbindung von (3) und [1] giebt eine quadratische Contravariante

$$a^2b^2c^2d^2e^2\,\Sigma\,(\alpha - \beta)^2. \qquad [2]$$

e) (1) und [2] geben eine lineare Covariante von der elften Ordnung in den Coefficienten

$$a^2b^2c^2d^2e^2\,(ax + by + cz + dv + ew). \qquad (4)$$

f) (3) und [2] geben eine Invariante B

$$B = a^3b^3c^3d^3e^3\,(a + b + c + d + e).$$

g) Die Combination von (3) mit der gemischten Concomitante im Artikel 298 giebt eine cubische Covariante von der neunten Ordnung in den Coefficienten

$$abcde\,\Sigma cde\,(a + b)\,zvw. \qquad (5)$$

h) Die Combination von (5) und [1] giebt eine lineare Contravariante der dreizehnten Ordnung, nämlich

$$abcde\,\Sigma(a-b)\,(\alpha-\beta)\,\{(a+b)c^2d^2e^2-abcde\,(cd+de+ec)\}\ ^*). \quad [3]$$

Es scheint unnöthig, weitere Details zu dieser Ableitungsmethode der covarianten Formen zu geben und wir können uns daher zu den hauptsächlichsten Resultaten wenden.

300. Jede Invariante ist eine symmetrische Function der Grössen a, b, c, d, e. Nennen wir die Summe dieser Grössen p, die Summe ihrer Producte in Paaren q, die Summe ihrer Producte zu dreien r, die ihrer Producte zu vieren s und ihr Product t, so kann jede Invariante in Function dieser fünf Grössen dargestellt werden und sie gehen also sämmtlich aus den folgenden fünf Fundamentalinvarianten hervor, die man durch das Verfahren des letzten Artikels bildet:

$$A = s^2 - 4rt, \quad B = t^3p,$$
$$C = t^4s, \quad D = t^6q, \quad E = t^8,$$

also auch

$$C^2 - AE = 4t^9r.$$

Es giebt jedoch auch Invarianten, welche nicht selbst rational in Function dieser fünf Fundamentalinvarianten darstellbar sind, obgleich ihre Quadrate diese Darstellung gestatten. (Vergl. „Vorlesungen", p. 216.)

Die einfachste Invariante dieser Art wird erhalten, indem man die Discriminante der Gleichung, deren Wurzeln a, b, c, d, e sind, in Function ihrer Coefficienten ausdrückt. Man findet, dass diess einen Ausdruck für das Product von t^{36} in das Product der sämmtlichen Differenzen der Grössen a, b, c, d, e in Function der Fundamentalinvarianten A, B, C, D, E ergiebt. Da diese Invariante ein vollständiges Quadrat ist, so giebt ihre Quadratwurzel eine Invariante F der Form vom Grade hundert.**)

Die Discriminante kann unschwer in Function der Fundamentalinvarianten dargestellt werden. Sie wird durch Elimination

*) Der Coefficient von α in derselben ist

$$abcde\,\{A - 5b^2c^2d^2e^2 + 5abcde\,(bcd + cde + bce + bde)\}.$$

**) Für ihren Ausdruck in Function der Fundamentalinvarianten verweisen wir wegen seiner Länge auf die in den „Philosoph. Transactions", 1860, gegebene Abhandlung (p. 233).

der Veränderlichen zwischen den vier Differentialen nach x, y, z, v, d. h.

$$ax^2 = by^2 = cz^2 = dv^2 = ew^2$$

erhalten, d. h. x^2, y^2, etc. sind den Producten $bcde$, $cdea$, etc. proportional. Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung

$$x + y + z + v + w = 0$$

giebt die Discriminante in der Form

$$(bcde)^{\frac{1}{2}} + (cdea)^{\frac{1}{2}} + (deab)^{\frac{1}{2}} + (eabc)^{\frac{1}{2}} + (abcd)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

und die Entwickelung dieses Ausdrucks in Function der Invarianten giebt

$$(A^2 - 64\,B)^2 = 16384\,(D + 2\,AC).$$

301. Die cubische Form hat vier fundamentale lineare Covarianten, d. h. Covarianten-Ebenen, welche respective von den Ordnungen 11, 19, 27, 43 in den Coefficienten sind; nämlich

$$L = a^2b^2c^2d^2e^2\left\{ax + by + cz + dv + ew\right\} = t^2\,\Sigma ax,$$
$$L' = t^3\,\Sigma bcdex, \quad L'' = t^5\,\Sigma a^2x, \quad L''' = t^8\,\Sigma a^3x.$$

Jede andere Covariante, die Form selbst eingeschlossen, kann im Allgemeinen in Function dieser vier Covarianten ausgedrückt werden, so dass die Coefficienten Invarianten sind. Die Bedingung, unter welcher diese vier Ebenen sich in einem Punkte schneiden, ist die Invariante F vom Grade hundert.

Es existieren lineare Contravarianten, von denen die einfachste, vom Grade dreizehn, in den Coefficienten vorher schon gegeben ist; die nächste, vom Grade ein und zwanzig, ist

$$t^4\,\Sigma\,(a - b)\,(\alpha - \beta);$$

dann folgt, vom Grade neun und zwanzig, diese

$$t^5\,\Sigma cde\,(a - b)\,(\alpha - \beta);\ \text{etc.}$$

Es giebt quadratische Covarianten der sechsten, vierzehnten, zwei und zwanzigsten, etc. Ordnung und Contravarianten der Ordnungen zehn, achtzehn, etc., so zwar, dass die Ordnungen um acht wachsen. Jene sind

$$t\,\Sigma ax^2, \quad t^2\,\Sigma ab\,(cd + de + ec)\,xy,$$
$$t^4\,\Sigma a^2x^2, \quad t^6\,\Sigma x^2,\ \text{etc.}$$

Diese sind

$$[2]\ \text{Artikel } 299, \quad t^3\,\Sigma cde\,(\alpha - \beta)^2,\ \text{etc.}$$

Cubische Covarianten sind von der neunten, siebenzehnten Ordnung etc., nämlich

$$\Sigma cde\,(a + b)\; tzvw,$$
$$t^3\,\Sigma a^3 x^3, \text{ etc.}$$

Wenn wir die ursprüngliche cubische Form durch U und diese letztere Covariante durch V bezeichnen, und eine Covariante oder Invariante von

$$U + \lambda V$$

bilden, so sind die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ in derselben nothwendig Invarianten und Covarianten der cubischen Form. Es folgt daraus, dass aus einer gegebenen Covariante oder Invariante der cubischen Form eine neue Form derselben Art gebildet werden kann, deren Grad in den Coefficienten um sechszehn höher ist, indem man die Operation

$$t^3\left(a^2\frac{d}{da} + b^2\frac{d}{db} + c^2\frac{d}{dc} + d^2\frac{d}{dd} + e^2\frac{d}{de}\right)$$

an ihr ausführt.

Von den Contravarianten der dritten Ordnung ist die einfachste aus der Invariante A als Evectante (vergl. „Vorlesungen", p. 139, 148) abzuleiten

$$\Sigma c^2d^2e^2(a-b)\,(\alpha-\beta)^3 - t\,\Sigma de\,(2\alpha-\beta-\gamma)\,(2\beta-\gamma-\alpha)\,(2\gamma-\alpha-\beta);$$

dann folgt

$$t^2\,\Sigma bcde\,(a-b)\,(\alpha-\gamma)\,(\alpha-\delta)\,(\alpha-\varepsilon).$$

Eine biquadratische Covariante ist

$$t^2\,\Sigma a^2x^4,$$

während die einfachste biquadratische Contravariante die früher erwähnte Contravariante σ ist. Die Contravariante sechsten Grades τ, welche mit ihr die Gleichung der Reciprocalfläche constituiert, ist

$$\tau = \Sigma c^2d^2e^2\,(\alpha-\beta)^6 - 2\,\Sigma bcd^2e^2\,(\alpha-\beta)^3\,(\alpha-\gamma)^3$$
$$+ 2\,t\,\Sigma e\,\{\varepsilon-\varepsilon'\}\,\{\varepsilon'-\varepsilon''\}\,\{\varepsilon''-\varepsilon\},$$

wo

$$\varepsilon = (\alpha-\gamma)\,(\beta-\delta),\quad \varepsilon' = (\alpha-\delta)\,(\gamma-\beta),\quad \varepsilon'' = (\alpha-\beta)\,(\delta-\gamma).$$

Von Covarianten fünfter Ordnung erwähnen wir nur ausser Φ (Artikel 298) die Covariante

$$t^3\,xyzvw$$

vom Grade fünfzehn in den Coefficienten, welche die fünf Ebenen des Pentaeders darstellt; und eine Covariante neunter Ordnung Θ, welche der Ort aller der Punkte ist, deren Polarebenen in Bezug auf die Hesse'sche Determinantenfläche H ihre quadratischen Polarflächen in Bezug auf die Fläche dritter Ordnung U selbst berühren. Darnach ist (vgl. Artikel 75, Band I) ihr Ausdruck durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_{14}, & H_1 \\ U_{12}, & U_{22}, & U_{23}, & U_{24}, & H_2 \\ U_{13}, & U_{23}, & U_{33}, & U_{34}, & H_3 \\ U_{14}, & U_{24}, & U_{34}, & U_{44}, & H_4 \\ H_1, & H_2, & H_3, & H_4, & 0 \end{vmatrix}$$

gegeben.

Die Gleichung einer Covariantenfläche, deren Durchschnitt mit der gegebenen Fläche dritter Ordnung die sieben und zwanzig geraden Linien derselben bestimmt, ist

$$\Theta = 4 H\Phi,$$

wo Φ die im Artikel 298 gegebene Bedeutung hat.

Ehe wir den vollständig allgemeinen Beweis dafür geben, seien die folgenden einfachen Betrachtungen angeführt, welche zuerst auf die Erkenntniss dieser Form geleitet haben. Wenn man als Ebenen x und y die Tangentenebenen der Fläche dritter Ordnung in den zwei Punkten, in denen irgend eine der Geraden die parabolische Curve der Fläche schneidet, und irgend zwei bestimmte durch diese Punkte gehende Ebenen zu Ebenen w, z wählt, so erhält die Gleichung der Fläche die Form

$$z^2y + w^2x + 2xyz + 2xyw + ax^2y + by^2x + cx^2z + dy^2w \\ + exw^2 + fyz^2 = 0.$$

Für dieselbe ist derjenige Theil der Hesse'schen Determinante, welcher x, y nicht enthält,

$$z^2w^2;$$

die entsprechenden Theile von Φ und Θ sind

$$-2\,(cz^5 + dw^5),$$
$$-8\,w^2z^2\,(cz^5 + dw^5),$$

und die Fläche

$$\Theta - 4H\Phi = 0 \quad \text{oder} \quad S = 0$$

zeigt somit in ihrer Gleichung keine Glieder, welche nicht entweder x oder y enthalten, d. h. die Linie $x = y = 0$ liegt ganz in ihr, und in derselben Weise die Schaar der übrigen sechs und zwanzig Geraden.*)

*) Dieser Abschnitt giebt den Hauptinhalt einer Abhandlung des Verfassers in den „Philosophical Transactions", 1860, p. 229 f. „On Quaternary Cubics" wieder, die im Juni 1860 gelesen ward. Mehrere Resultate derselben, namentlich die Aufstellung der fünf Fundamentalinvarianten und der Ausdruck der übrigen durch sie, so wie die Gleichung der Fläche $S = 0$, welche die sieben und zwanzig Geraden der Fläche bestimmt, wurden durch zwei nahe gleichzeitige (März 1860), aber vor jener publicierte („Journal für Math.", Bd. LVIII, p. 93 f., 109 f.) Abhandlungen von Clebsch vorausgenommen. Die von ihm befolgte Methode war jedoch wesentlich verschieden, die Discussion der Covarianten und die Entdeckung der Invariante F blieben jener vorbehalten.

Die letzten vier Invarianten sind von Clebsch als Functionen der Coefficienten der Hesse'schen Determinante gegeben. Die zweite ist die Invariante $(1234)^4$ derselben.

VI. Kapitel.

Allgemeine Theorie der Flächen.

302. Indem wir uns zur allgemeinen Entwickelung zurückwenden, scheint es erforderlich, die Erörterung einiger Probleme vorauszuschicken, welche schon in dem Früheren nahegelegt und deren Ergebnisse für den Fortschritt der Untersuchung förderlich sind.

Sie betreffen zuerst die Frage von der Bestimmung der Flächen durch gegebene Elemente, sagen wir durch Punkte, die ihnen angehören; eine Frage, welche in den ersten Artikeln dieses Bandes berührt, aber nicht erschöpft ist. Im Folgenden geben wir das Wesentlichste von dem, was Jacobi in einer schönen Abhandlung für dieselbe geleistet hat.*)

Im Artikel 1 ist gezeigt, dass die Durchschnittscurve von zwei Flächen n^{ter} Ordnung durch

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 2$$

ihrer Punkte völlig bestimmt ist; wir erweitern die Untersuchung zunächst auf die Durchschnittscurve von Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung (unter der Annahme $m \geqq n$). Indem man die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung durch eine Function $(m-n)^{\text{ten}}$ Grades mit willkürlichen Coefficienten multipliciert, erhält man eine Gleichung m^{ten} Grades, die zu der gegebenen Gleichung m^{ten} Grades so addiert werden kann, dass so viele Glieder aus der Summe verschwinden, als willkürliche Constanten eingeführt wurden, also

*) Vergl. „Crelle's Journal", Bd. XV, p. 285. „De relationibus" (1835).

$$\frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2 \cdot 3}$$

Die reducierte Gleichung enthält also

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2 \cdot 3}$$

Glieder und ihre Bestimmung erfolgt durch eine um Eins kleinere Anzahl von Punkten; d. h. die Schnittcurve einer Fläche n^{ter} mit einer Fläche m^{ter} Ordnung ($m \geqq n$) ist durch

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3}$$
$$- \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2 \cdot 3} - 1$$

ihrer Punkte bestimmt. Oder alle Flächen m^{ter} Ordnung, welche durch so viel Punkte einer Fläche n^{ter} Ordnung gehen, haben mit dieser dieselbe Schnittcurve gemein.

303. An demselben Orte haben wir gezeigt, dass alle Flächen n^{ter} Ordnung, die durch

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3} - 3$$

feste Punkte gehen, ausser derselben

$$n^3 + 3 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3},$$

d. h.

$$\frac{(n-1)(5n^2-n-12)}{2 \cdot 3}$$

Punkte gemein haben; oder wie der algebraische Ausdruck lauten wird: Sind n^3 Systeme von Werthen dreier Unbekannten gegeben, so müssen, damit man durch dieselben drei Gleichungen n^{ten} Grades genügen kann, zwischen den Werthen jener Unbekannten

$$\frac{(n-1)(5n^2-n-12)}{2}$$

Bedingungen stattfinden.

Wir dehnen jetzt die Untersuchung auf den Durchschnitt von Flächen verschiedener Ordnungen aus und nehmen zunächst an, dass zwei der Flächen von der n^{ten} und die dritte von der m^{ten} Ordnung für $m > n$ sind. Die vorigen Betrachtungen lassen dann zunächst schliessen, dass man mit Hilfe der zwei Gleichungen n^{ten} Grades aus der Gleichung m^{ten} Grades

$$2 \cdot \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2 \cdot 3}$$

Glieder beseitigen kann; diess ist jedoch nur richtig für $m-n < n$. Sind nämlich

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

die beiden gegebenen Gleichungen n^{ten} und ist

$$f = 0$$

die Gleichung m^{ten} Grades, bezeichnen u, v Functionen $(m-n)^{\text{ten}}$ Grades mit willkürlichen Coefficienten, so kann man zu f den Ausdruck $(u\varphi + v\psi)$ addieren und dadurch in $f + u\varphi + v\psi$ so viele Glieder zerstören, als $(u\varphi + v\psi)$ willkürliche Constanten enthält; ist aber $m - n \geqq n$, so ändert sich $(u\varphi + v\psi)$ nicht, wenn man an Stelle von u und v die Ausdrücke $u + \lambda\psi$ und $v - \lambda\varphi$ setzt, in denen λ einen beliebigen Ausdruck $(m - 2n)^{\text{ten}}$ Grades mit willkürlichen Coefficienten bezeichnet. Es muss also von der Anzahl der Coefficienten in u und v die Anzahl derjenigen in λ abgezogen werden, damit man die wahre Anzahl der Grössen erhält, welche in $(u\varphi + v\psi)$ willkürlich sind. Somit ist für $m \geqq 2n$ die Zahl der Glieder, welche in einem Ausdruck m^{ten} Grades mit Hilfe zweier Gleichungen n^{ten} Grades zerstört werden können, gleich

$$\frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{3}$$
$$-\frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{3}$$
$$+\frac{(m-2n+1)(m-2n+2)(m-2n+3)}{2 \cdot 3},$$

d. i. $\qquad = n^2 (m-n+2)$.

Ist aber $m < 2n$, so ist die Zahl dieser Glieder gleich

$$\frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{3}.$$

Daraus folgt, dass für $m \geqq n$, $m < 2n$ der Ausdruck m^{ten} Grades mit Hilfe zweier Gleichungen n^{ten} Grades auf eine Anzahl von

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{3}$$
$$= n^2 (m-n+2) - \frac{(2n-m+1)(2n-m+2)(2n-m+3)}{3}$$

Gliedern reduciert werden kann. Man erkennt, dass die Anzahl $n^2(m-n+2)$ auch für $m \geqq 2n-3$ richtig ist. Man hat also den Satz: Ist $m \geqq n$ und ist die Schnittcurve zweier Flächen n^{ter} Ordnung gegeben, so dürfen von den in derselben gelegenen Punkten, durch welche eine Fläche m^{ter} Ordnung sich legen lässt, die die Curve selbst nicht enthält, nicht mehr willkürlich gewählt werden, als

$$n^2(m-n+2)-1 \quad \text{für} \quad m \geqq 2n-3,$$

und nicht mehr als

$$n^2(m-n+2)+\frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2 \cdot 3}-1$$

für

$$m < 2n;$$

und umgekehrt kann

$$\text{für} \quad m \geqq 2n-3 \quad \text{durch} \quad n^2(m-n+2)-1$$

$$\text{und für} \quad m < 2n \quad \text{durch} \quad n^2(m-n+2)$$

$$+\frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2 \cdot 3}-1$$

beliebig gewählte Punkte auf derselben eine Fläche m^{ter} Ordnung gelegt werden, die die Curve selbst nicht enthält.

304. Drei Flächen von den Ordnungen m, n und n $(m > n)$ schneiden sich mn^2 Punkten. Ist dann 1) $m \geqq 2n-3$, so sind nach dem vorigen Artikel diese mn^2 Punkte durch

$$n^2(m-n+2)-1$$

von ihnen bestimmt, die in der Schnittlinie zweier Flächen n^{ter} Ordnung liegen, und zwischen ihren Coordinaten müssen also

$$2\left\{n^2(m-n+2)-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3}+1\right\}$$

Bedingungen erfüllt sein; denn

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2 \cdot 3}-2$$

Punkte bestimmen die Schnittcurve zweier Flächen n^{ter} Ordnung. Die Gesammtzahl der Bedingungen, welche zwischen den Coordinaten aller mn^2 Punkte stattfinden müssen, ist daher

$$3\left\{mn^2 - n^2(m-n+2) + 1\right\}$$
$$+ 2\left\{n^2(m-n+2) - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 3} + 1\right\}$$
$$= 2n^2(m-2n) + (n-1)\frac{(14n^2+2n-9)}{3}.$$

Ist aber 2) $m < 2n$, so sind alle mn^2 Schnittpunkte durch

$$n^2(m-n+2) + \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2\cdot 3} - 1$$

von ihnen bestimmt, welche in der Schnittlinie zweier Flächen n^{ter} Ordnung liegen und es müssen zwischen den Coordinaten

$$2\left\{n^2(m-n+2) + \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2\cdot 3}\right.$$
$$\left. - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 3} + 1\right\}$$

Relationen stattfinden; also in allem zwischen den Coordinaten der mn^2 Punkte

$$3\left\{mn^2 - n^2(m-n+2) - \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2\cdot 3} + 1\right\}$$
$$+ 2\left\{n^2(m-n+2) + \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2\cdot 3}\right.$$
$$\left. - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 3} + 1\right\}$$
$$= 3mn^2 - n^2(m-n+2) - \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2\cdot 3}$$
$$- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} + 5$$
$$= 3mn^2 - \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2\cdot 3}$$
$$+ \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{3} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} + 5$$

Für $m = n$ wird

$$n^2(m-n+2) + \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2\cdot 3} - 1$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 3} - 3,$$

welche Anzahl von Punkten immer in der Schnittlinie zweier Flächen n^{ter} Ordnung liegen kann, da diese durch

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 2$$

Punkte bestimmt ist. Daher ist hier die Anzahl der Bedingungen

$$2\left\{n^2(m-n+2) + \frac{(2n-m-1)(2n-m-2)(2n-m-3)}{2.3} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} + 1\right\} = -2$$

und für $m = n$ muss also die vorher gegebene Gesammtzahl der Bedingungen um 2 vermehrt werden. Sie war

$$= 3mn^2 - \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3}$$
$$+ \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{3} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} + 5$$
$$= 3n^3 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2} + 7 = \frac{5n^3 - 6n^2 - 11n + 8}{2},$$
$$\text{oder} \quad = \frac{5n^3 - 6n^2 - 11n + 12}{2} - 2.$$

305. Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem eine der Flächen von der n^{ten} Ordnung ist, während die beiden andern von der m^{ten} Ordnung sind ($m \geqq n$). Dann können in der Gleichung einer Fläche m^{ter} Ordnung durch die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung

$$\frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2.3}$$

Glieder zerstört werden, und es ergiebt sich durch den vorhergehenden ganz ähnliche Betrachtungen, dass für $m \geqq n$ in einer Fläche n^{ter} Ordnung

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2.3} - 2$$

und nicht mehr Punkte angenommen werden können, durch welche eine Schnittcurve von zwei Flächen m^{ter} Ordnung gelegt werden kann, die nicht ganz in jener Fläche n^{ter} Ordnung liegt. Man kann also m^2n Punkte für $m > n$ als Schnittpunkte einer Fläche n^{ter} Ordnung mit zwei Flächen m^{ter} Ordnung ansehen, sobald zwischen ihren Coordinaten

$$3\left\{m^2 n - \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3}\right.$$
$$\left. + \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2.3} + 2\right\}$$
$$+ \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2.3}$$
$$- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 1$$
$$= 3m^2 n - \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} + \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{3}$$
$$- \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} + 5$$
$$= mn(2m+n-4) - \frac{n^3 - 2n + 11n - 8}{2}$$

Bedingungen erfüllt. Und die Anzahl dieser Bedingungen muss für $m = n$ um 2 vermehrt werden.

306. Sind endlich alle drei Oberflächen von verschiedenen Ordnungen n, m, l, so gehen wir davon aus, dass

$$lmn - \frac{(l+1)(l+2)(l+3)}{2.3} + 1$$

Bedingungen erfüllt sein müssen, damit lmn Punkte in einer Fläche l^{ter} Ordnung liegen. Die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung kann durch diejenige der Fläche l^{ter} Ordnung auf

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - \frac{(n-l+1)(n-l+2)(n-l+3)}{2.3}$$

Glieder reduciert werden; und damit daher dieser Gleichung die Coordinaten von lmn Punkten genügen, müssen

$$lmn - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} + \frac{(n-l+1)(n-l+2)(n-l+3)}{2.3} + 1$$

Bedingungen erfüllt sein. Was endlich die Gleichung m^{ten} Grades betrifft, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Es sei 1) $m \geqq n + l$. Dann wird durch dieselben Betrachtungen wie vorher bewiesen, dass die Gleichung m^{ten} Grades auf

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2.3} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)(m-n+3)}{2.3}$$
$$- \frac{(m-l+1)(m-l+2)(m-l+3)}{2.3}$$
$$+ \frac{(m-n-l+1)(m-n-l+2)(m-n-l+3)}{2.3} = \frac{nl(2m-n-l+4)}{2}$$

Glieder reduciert werden könne. Und damit einer solchen Gleichung durch lmn Punkte genügt werde, müssen

$$lmn - \frac{nl\,(2m-n-l+4)}{2} + 1 = \frac{nl\,(n+l-4)}{2} + 1$$

Bedingungen erfüllt sein. Daher wird die Gesammtzahl der Bedingungen, welchen lmn Punkte genügen müssen, damit sie als die gemeinsamen Schnittpunkte von drei Oberflächen l^{ter}, m^{ter} und n^{ter} Ordnung betrachtet werden können, die keine gemeinschaftliche Schnittcurve haben, für $n > l$, $m \geqq n + l$

$$= 2lmn - \frac{(l+1)\,(l+2)\,(l+3)}{2\,.\,3} - \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{2\,.\,3}$$

$$+ \frac{(n-l+1)\,(n-l+2)\,(n-l+3)}{2\,.\,3} + \frac{nl\,(n+l-4)}{2} + 3$$

$$= 2lmn + nl^2 - 4nl - 2l^2 - \frac{(l-1)\,(l-2)\,(l-3)}{3}.$$

Diese Zahl muss für $n = l$ um die Einheit vermehrt werden, damit sie mit der oben für diesen Fall gefundenen Zahl übereinstimmt. Denn für $n = l$ kann die Gleichung l^{ten} Grades durch die vom n^{ten} Grade auf eine um Eins kleinere Gliederanzahl reduciert werden, nämlich auf

$$\frac{(l+1)\,(l+2)\,(l+3)}{2\,.\,3} - 1;$$

und die Zahl der Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit die Coordinaten von lmn Punkten solcher Gleichung genügen, ist

$$lmn - \frac{(l+1)\,(l+2)\,(l+3)}{2\,.\,3} + 2,$$

d. h. um Eins grösser als vorher.

Es sei 2) $m < n + l$. Dann bleibt alles übrige wie vorher; nur ist die Zahl

$$(m-n-l+1)\,(m-n-l+2)\,(m-n-l+3)$$

nicht abzuziehen. Die Zahl der Bedingungen wird daher

$$= 2lmn + n^2l - 4nl - 2l^2 - \frac{(l+1)\,(l+2)\,(l+3)}{3}$$

$$- \frac{(n+l-m-1)\,(n+l-m-2)\,(n+l-m-3)}{2\cdot 3}.$$

Diese Zahl ist für $m = n$ oder $n = l$ um Eins, für $n = m = l$ um Drei zu vermehren.

Ist $m \geqq n + l$, so wird die Zahl der Punkte, die man in der Schnittcurve zweier Flächen n^{ter} und l^{ter} Ordnung annehmen darf, damit durch dieselbe eine Fläche m^{ter} Ordnung möglich sei,

$$= nl\left(m + 2 - \frac{n+l}{2}\right) - 1.$$

Ist $m > n$, $m > l$ und $m < n + l$, so wird deren Anzahl

$$nl\left(m + 2 - \frac{n+l}{2}\right)$$

$$+ \frac{(n+l-m-1)(n+l-m-2)(n+l-m-3)}{2 \cdot 3} - 1.*)$$

307. Sie betreffen ferner die Frage nach der Ordnung von Systemen von Gleichungen.**)

Wir zeigten im Artikel 80, wie die Charactere einer Curve zu bestimmen sind, welche als Durchschnitt zweier Flächen gegeben ist, hatten aber schon vorher im Artikel 55 bemerkt, dass es Curven giebt, welche nicht als solche Durchschnitte zweier Flächen darstellbar sind. Es giebt aber keine algebraische Curve, welche nicht mittelst der Gleichungen eines Systems von Flächen vollständig dargestellt werden könnte, weil nach Artikel 69 bei zweckmässiger Wahl von m stets eine Zahl von Flächen m^{ter} Ordnung gefunden werden kann, welche die Curve ganz enthalten. Dagegen wird die Curve dann durch irgend zwei Flächen des Systems nicht bestimmt, weil der Durchschnitt derselben im Allgemeinen aus dieser und einer andern Curve bestehen wird; so dass die fragliche Curve nicht der vollständige Durchschnitt von irgend zweien unter diesen Flächen, sondern nur derjenige Theil desselben ist, welcher auch allen übrigen Flächen des Systems angehört. Und so ist es der nächste Zweck dieser Untersuchungen, zu zeigen, wie die Charactere einer Curve bestimmt

*) Ueber die algebraische Bedeutung dieser Ergebnisse vergleiche man die oben erwähnte Abhandlung, namentlich Artikel 10 und die im 14. Bande von „Crelle's Journal", p. 281 veröffentlichte Abhandlung Jacobi's, „Theoremata nova algebraica"; für den ganz allgemeinen Beweis des Hauptsatzes, den Jacobi nur für den speciellen Fall von drei Gleichungen ohne Beweis ausgesprochen hat, sehe man die neuerliche Abhandlung von A. Clebsch, „Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie." („Journal für Mathem.", Bd. 63, p. 224 f.)

**) Vergl. „Quarterly Journ.", Vol. I, p. 246 f.

werden können, welche als die gemeinschaftliche Curve aller durch ein System von Gleichungen bestimmten Flächen gegeben ist.

Ebenso können wir, wenn r Punkte im Raume gegeben sind, immer, indem wir m gross genug wählen, eine Anzahl von Flächen m^{ter} Ordnung bestimmen, welche durch diese Punkte gehen. Gewöhnlich wird aber der Durchschnitt von irgend dreien unter diesen Flächen ausser den gegebenen Punkten noch andere Punkte enthalten, so dass wir die gegebenen Punkte eben nur durch ein System von mehr als drei Gleichungen definieren können, als diejenigen, welche allen diesen Gleichungen genügen.

Es ist umgekehrt die Aufgabe dieser Untersuchung, für ein gegebenes System von Gleichungen die Zahl der Punkte zu bestimmen, welche ihnen allen zugleich entsprechen.

308. Die einfachste Erläuterung hierzu liefert die Betrachtung der vier Ebenen

$$a + \lambda\alpha = 0, \quad b + \lambda\beta = 0, \quad c + \lambda\gamma = 0, \quad d + \lambda\delta = 0,$$

wo a, α, b, β, etc. gleich Null gesetzt Ebenen repräsentieren und λ ein unbestimmter Coefficient ist. Wenn wir die Bedingung bilden, unter welcher diese vier Ebenen sich in einem Punkte schneiden, so ist dieselbe offenbar vom vierten Grade in Bezug auf λ. Man kann somit vier Werthe von λ bestimmen, für welche diese Gleichungen Ebenen darstellen, die durch einen Punkt gehen. Die so gefundenen vier Punkte müssen nun nothwendig gleichzeitig den sechs Gleichungen von der Form

$$a\beta = b\alpha$$

genügen, welche durch Elimination von λ zwischen irgend zweien unter den gegebenen Gleichungen entstehen. Dieselben repräsentieren aber Flächen zweiter Ordnung, von denen je drei sich in acht Punkten durchschneiden. Das System von Gleichungen, welches wir durch

$$\begin{Vmatrix} a, & b, & c, & d \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \end{Vmatrix} = 0$$

darstellen — dieser Ausdruck bezeichnet das Verschwinden aller der Determinanten, welche aus irgend zwei Verticalreihen der zwischen den Klammern vereinigten Elemente gebildet werden können — stellt also ein System von Flächen dar, welche vier Punkte gemeinschaftlich haben, während jede drei unter denselben sich in vier weiteren Punkten durchschneiden.

Allgemeiner also, wenn wir $(i + 3)$ Gleichungen als gegeben voraussetzen, welche i Parameter enthalten, so erhellt, dass durch Elimination der Veränderlichen eine Zahl von Gleichungen gewonnen werden kann, welche hinreicht, Systeme von Werthen der Parameter zu bestimmen, für welche jene Gleichungen Flächen darstellen, die einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Solche Punkte genügen nothwendig auch den Gleichungen, welche durch Elimination der i Parameter zwischen irgend $(i + 1)$ der gegebenen Gleichungen entstehen. Und irgend drei dieser letztern Gleichungen bezeichnen Flächen, welche sich nicht nur in diesen Punkten durchschneiden, die allen Flächen gemeinschaftlich sind, sondern in einer Anzahl anderer Punkte überdiess.

309. Ebenso geben die drei Ebenen

$$a + \lambda\alpha = 0, \quad b + \lambda\beta = 0, \quad c + \lambda\gamma = 0$$

für jeden bestimmten Werth von λ einen Punkt als ihnen gemeinschaftlich und die unendliche Reihe der Werthe von λ giebt als die Aufeinanderfolge derselben eine räumliche Curve. Dieselbe ist nothwendig den drei Flächen zweiter Ordnung gemeinschaftlich, deren Gleichungen

$$a\beta - b\alpha = 0, \quad b\gamma - c\beta = 0, \quad c\alpha - a\gamma = 0$$

durch Elimination von λ zwischen irgend zweien der vorigen entspringen. Wir haben im Artikel 55 gesehen, dass, obgleich irgend zwei derselben sich in einer Curve vierter Ordnung durchschneiden, doch nur eine Curve dritter Ordnung ihnen allen gemeinschaftlich ist.

Allgemeiner also kann, wenn $(i + 2)$ Gleichungen mit i Parametern gegeben sind, eine Unendlichkeit von Werthen dieser Parameter bestimmt werden, für welche die Gleichungen Flächen mit einem gemeinschaftlichen Punkte repräsentieren. Der Ort dieser Punkte ist eine Curve, welche allen den Flächen gemeinschaftlich ist, deren Gleichungen durch Elimination der i Parameter zwischen $(i + 1)$ der gegebenen Gleichungen gebildet werden. Irgend zwei unter diesen Flächen durchschneiden sich aber nicht nur in dieser Curve, sondern überdiess in einer andern Curve, die den übrigen nicht angehört. Setzen wir voraus, dass $(i + 1)$ Gleichungen mit i Parametern gegeben sind, welche nur im ersten Grade in jene eingehen, so giebt die Elimination derselben einem Determinantensystem

$$\begin{vmatrix} A_{00}\ , & A_{10}\ , & A_{20}\ , & \ldots & A_{i,0} \\ A_{01}\ , & A_{11}\ , & A_{21}\ , & \ldots & A_{i,1} \\ A_{02}\ , & A_{12}\ , & A_{22}\ , & \ldots & A_{i,2} \\ \vdots & & & & \\ A_{0,i-1}\ , & A_{1,i-1}\ , & A_{2,i-1}\ , & \ldots & A_{i,i-1} \end{vmatrix} = 0$$

den Ursprung, in welchem die Anzahl der Horizontalreihen der Voraussetzung gemäss i, die der Verticalreihen aber $(i + 1)$ ist. Wir setzen uns vor, die Charactere der Curve zu bestimmen, welche allen den durch das Verschwinden dieser Determinanten repräsentierten Flächen gemeinschaftlich ist.

310. Um die Ideen zu fixieren, betrachten wir den Fall, in welchem die Matrix der Determinanten aus vier Horizontal- und fünf Verticalreihen besteht, d. h.

$$\begin{vmatrix} A_{00}, & A_{10}, & A_{20}, & A_{30}, & A_{40} \\ A_{01}, & A_{11}, & A_{21}, & A_{31}, & A_{41} \\ A_{02}, & A_{12}, & A_{22}, & A_{32}, & A_{42} \\ A_{03}, & A_{13}, & A_{23}, & A_{33}, & A_{43} \end{vmatrix}$$

ist; die auf diesen Fall anzuwendende Methode wird für den allgemeinen Fall gültig bleiben.

Wir setzen die Functionen A_{00}, A_{10}, etc. von beliebigem Grade voraus, nehmen aber an, dass die Grade der entsprechenden Functionen in derselben Horizontalreihe ebenso wie in derselben Verticalreihe gleiche Differenzen geben. Wenn also die Buchstaben A_{00}, A_{10}, A_{20}, etc. zugleich die Grade dieser Functionen anzeigen, so setzen wir die Grade der Functionen A_{01}, A_{11}, etc. als respective gleich $A_{00} + a_0$, $A_{10} + a_0$, etc., und die von A_{02}, A_{12}, etc. als $A_{00} + a_1$, $A_{10} + a_1$, etc., etc. voraus. Sind dann S_1 und S_{12} die Summe der Grössen A_{00}, A_{10}, etc. und die Summe ihrer Producte in Paaren, und bezeichnen s_1, s_{12} dieselben Summen für die Grössen a_0, a_1, etc., so gilt der Satz: Die Ordnung der Curve, welche allen durch die Determinanten des Systems bestimmten Flächen gemeinschaftlich angehört, ist

$$= S_{12} + s_1 (S_1 + s_1) - s_{12}.$$

Wir bemerken zuerst, dass aus der vorausgesetzten Wahrheit dieser Formel sich ergiebt, dass für

$$A_{00} + a'_0,\ \ A_{01} + a'_0,\ \ A_{02} + a'_0,$$

als die Ordnungen der Functionen A_{10}, A_{11}, A_{12}, etc.,

$$A_{00} + a'_1, \quad A_{01} + a'_1, \quad A_{02} + a'_1, \text{ etc.}$$

als die der Functionen A_{20}, A_{21}, A_{22}, etc., etc. und für S'_1, S'_{12}, als Summe der Grössen A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, und als Summe ihrer Producte zu zweien, sowie s'_1, s'_{12} als die entsprechenden Summen für die Grössen a'_0, a'_1, etc. die Ordnung der untersuchten Curve

$$= s'_{12} + S'_1 (s'_1 + S'_1) - S'_{12}$$

sein müsste. Denn da die Elemente der ersten Verticalreihe von den respectiven Graden

$$A_{00}, \quad A_{00} + a'_0, \quad A_{00} + a'_1, \quad A_{00} + a'_2, \quad A_{00} + a'_3$$

sind, so werden S_1 und S_{12} respective gleich

$$5A_{00} + s'_1 \quad \text{und} \quad 10A_{00}^2 + 4A_{00}s'_1 + s'_{12},$$

während die Grössen s_1 und s_{12}, weil die Differenzen zwischen den Ordnungen der Elemente der ersten und der folgenden Reihe gleich

$$A_{01} - A_{00}, \quad A_{02} - A_{00}, \quad A_{03} - A_{00}$$

sind, die respectiven Werthe

$$S'_1 - 4A_{00}, \quad S'_{12} - 3S'_1A_{00} + 6A_{00}^2$$

erhalten. Die Substitution dieser Werthe in den Ausdruck

$$S_{12} + s_1 (S_1 + s_1) - s_{12}$$

giebt aber

$$s'_{12} + S'_1 (s'_1 + S'_1) - S'_{12}.$$

In dem allgemeinen Falle, wo die Zahl der Reihen durch i bezeichnet werden mag, ist

$$S_1 = (i+1)A_{00} + s'_1, \quad S_{12} = \tfrac{1}{2}i(i+1)A_{00}^2 + iA_{00}s'_1 + s'_{12};$$
$$s_1 = S'_1 - iA_{01}, \quad s_{12} = S'_{12} - (i-1)A_{00}S'_1 + \tfrac{1}{2}(i-1)iA_{00}^2,$$

und die eine Formel geht aus der andern hervor, wie vorher.

311. Um nun die Wahrheit der Formel zu begründen, reicht es hin, zu zeigen, dass aus ihrer Gültigkeit für ein System von $(i-1)$ Reihen die Gültigkeit für ein System von i Reihen hervorgeht. Die Curve, welche wir betrachten, ist ein Theil des Durchschnitts der Flächen, welche durch das Verschwinden der Determinanten

$$(A_{00}A_{11}A_{22}A_{33}), \quad (A_{00}A_{11}A_{22}A_{44})$$

dargestellt werden; diese Flächen gehen aber beide durch die Curve

$$\begin{Vmatrix} A_{00}, & A_{01}, & A_{02}, & A_{03} \\ A_{10}, & A_{11}, & A_{12}, & A_{13} \\ A_{20}, & A_{21}, & A_{22}, & A_{23} \end{Vmatrix} = 0,$$

welche den übrigen durch die andern Determinanten des Systems bestimmten Flächen nicht angehört. Bezeichnen wir nun die Summe der Grössen A_{00}, A_{10}, A_{20} und die Summe der Producte derselben in Paaren durch S''_1, S''_{12} respective, so sind die Ordnungen der beiden Determinanten respective

$$S''_1 + s_1 + A_{30}, \quad S''_1 + s_1 + A_{40},$$

während nach dem letzten Artikel die Ordnung der fremden Curve durch

$$s_{12} + S''_1 (s_1 + S''_1) - S''_{12}$$

ausgedrückt wird. Subtrahieren wir aber diese Grösse von dem Product der beiden vorigen Grössen, so bleibt

$$s_1^2 - s_{12} + (S''_1 + A_{30} + A_{40})\, s_1 + S''_{12} + S''_1 (A_{30} + A_{40}) + A_{30}A_{40}$$

oder

$$S_{12} + s_1 (S_1 + s_1) - s_{12}.$$

Nun ist die Wahrheit des Satzes für eine Matrix von zwei Horizontal- und drei Verticalreihen leicht zu erkennen und er ist daher allgemein gültig.

Es mag gut sein zu bemerken, dass die Formel eben durch Vorschreiten von dem einfacheren zum allgemeinen Fall gefunden worden ist. Denn

$$\begin{Vmatrix} A_{00}, & A_{10}, & A_{20} \\ A_{01}, & A_{11}, & A_{21} \end{Vmatrix} = 0$$

repräsentiert drei Gleichungen von den respectiven Graden

$$A_{00} + A_{10} + a_0, \quad A_{10} + A_{20} + a_0, \quad A_{20} + A_{00} + a_0;$$

die Durchschnittscurven der bezüglichen Flächenpaare, welche der allen gemeinsamen Curve fremd sind, haben also die Ordnungen

$$A_{10} (A_{10} + a_0), \quad A_{20} (A_{20} + a_0), \quad A_{00} (A_{00} + a_0)$$

und die Ordnung dieser letzteren ist daher

$$= (A_{00} + A_{10} + a_0)(A_{10} + A_{20} + a_0) - A_{10} (A_{10} + \pi)$$

$= \text{etc.}$

$$= A_{00}A_{10} + A_{10}A_{20} + A_{20}A_{00} + a_0 (A_{00} + A_{10} + A_{20}) + a_0^2,$$

d. i.

$$= S_{12} + s_1 (S_1 + s_1);$$

in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Formel, da $s_{12} = 0$ ist.

Wenn alle Horizontalreihen von der nämlichen Ordnung sind, so ist

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \text{ etc. und somit } s_1 = s_{12} = 0$$

und die Ordnung des Systems ist daher

$$= S_{12}.$$

312. Wir stellen uns ferner die Aufgabe, die Ordnung der Abwickelungsfläche zu finden, welche von den Tangenten der in den vorigen Artikeln betrachteten Curve gebildet wird, d. i. nach der früheren Bezeichnung den Rang des Systems.

Ist S_{123} die Summe der Producte von je dreien der Grössen A_{00}, A_{10}, A_{20}, etc. (Artikel 310) und s_{123} die entsprechende Productensumme für die Grössen a_0, a_1, a_2, etc., so wird die Ordnung der fraglichen Abwickelungsfläche durch die Formel

$$\{S_{12} + s_1(S_1 + s_1) - s_{12}\}(S_1 + 2s_1 - 2) - s_{12}(S_1 + s_1) + S_{123} + s_{123}$$

ausgedrückt.

Wir bemerken zuerst, dass bei Voraussetzung der Wahrheit der Formel und für S'_1, S'_{12}, S'_{123} als Vertreter der analog aus A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03}, den Ordnungszahlen der Elemente der ersten Verticalreihe, gebildeten Aggregate, etc., die grossen und die kleinen Buchstaben der Formel einfach ihre Plätze vertauschen, so dass die Ordnung der abwickelbaren Fläche durch

$$\{s'_{12} + S'_1(s'_1 + S'_1) - S'_{12}\}(s'_1 + 2S'_1 - 2)$$
$$- S'_{12}(s'_1 + S'_1) + s'_{123} + S'_{123}$$

gegeben wird. Der Beweis dafür wird genau in derselben Art geführt, wie im Artikel 310. Wir wissen ferner aus Artikel 84, dass die Rangzahlen zweier Systeme, welche zusammen den Durchschnitt zweier Flächen bilden, durch die Relation

$$\varrho - \varrho' = (m - m')(\mu + \nu - 2)$$

verbunden sind. Nach den Ergebnissen des vorhergehenden Artikels haben wir aber für μ, ν, m, m' die folgenden Werthe zu substituieren

$$\mu = S''_1 + s_1 + A_{30}, \quad \nu = S''_1 + s_1 + A_{40},$$
$$m = S_{12} + s_1(s_1 + S_1) - s_{12}, \quad m' = s_{12} + S''_1(S''_1 + s_1) - S''_{12},$$

sowie für

$$\varrho' = \{s_{12} + S''_1(S''_1 + s_1) - S''_{12}\}(s_1 + 2S'_1 - 2)$$
$$- S''_{12}(s_1 + S''_1) + S''_{123} + s_{123};$$

wenn wir diese Substitutionen vollziehen und die Identitäten

$$S_1 = S''_1 + A_{30} + A_{40},\ S_{12} = S''_{12} + (A_{30} + A_{40})\, S''_1 + A_{30}A_{40},$$
$$S_{123} = S''_{123} + (A_{30} + A_{40})\, S''_{12} + A_{30}A_{40}S''_1$$

zur Reduction benutzen, so erhalten wir

$$\varrho = \left\{S_{12} + s_1\,(s_1 + S_1) - s_{12}\right\}(S_1 + 2s_1 - 2) - s_{12}\,(s_1 + S_1)$$
$$+ S_{123} + s_{123}.$$

Daraus geht hervor, dass die Formel für eine Matrix von $(i + 1)$ Reihen gültig ist, wenn sie für eine solche von i Reihen als wahr erwiesen war. Da sie nun für drei Reihen unschwer als wahr erkannt wird, so ist sie allgemein gültig.

Man findet in diesem Falle den fraglichen Rang direct

$$= (A_{00} + A_{10} + a_0)\,(A_{10} + A_{20} + a_0)\,(A_{00} + 2A_{10} + A_{20} + 2a_0 - 2)$$
$$- A_{10}\,(A_{10} + a_0)\,(2A_{10} + a_0 - 2) = \text{etc.}$$
$$= \left\{(A_{00}A_{10} + A_{10}A_{20} + A_{20}A_{00}) + a_0\,(A_{00} + A_{10} + A_{20}) + a_0^2\right\}$$
$$(A_{00} + A_{10} + A_{20} + 2a_0 - 2) + A_{00}A_{10}A_{20}$$
$$= \left\{S_{12} + s_1\,(S_1 + s_1)\right\}(S_1 + 2s_1 - 2) + S_{123},$$

d. h. in Uebereinstimmung mit der allgemeinen Formel wegen

$$s_{12} = s_{123} = 0.$$

Beispiel. Die Ebenenbüschel

$$A + \lambda\mathbf{A} = 0,\quad B + \lambda\mathbf{B} = 0$$

und das Büschel von Flächen 2ten Grades

$$S + \lambda\mathbf{S} = 0$$

erzeugen als Durchschnitt der entsprechenden Flächen eine Curve

$$\left\|\begin{matrix} A, & B, & S \\ \mathbf{A}, & \mathbf{B}, & \mathbf{S} \end{matrix}\right\| = 0,$$

für welche wegen

$$s_1 = s_{12} = s_{123} = 0,\quad S_1 = 4,\quad S_{12} = 5,\quad S_{123} = 2$$

die Ordnung $= 5$ und der Rang $= 12$ ist.

313. Wir wollen hiernach weiter eine Matrix von der Form

$$\left\|\begin{matrix} A_{00}, & A_{10}, & A_{20}, & A_{30}, & A_{40}, & A_{50} \\ A_{01}, & A_{11}, & A_{21}, & A_{31}, & A_{41}, & A_{51} \\ A_{02}, & A_{12}, & A_{22}, & A_{32}, & A_{42}, & A_{52} \\ A_{03}, & A_{13}, & A_{23}, & A_{33}, & A_{43}, & A_{53} \end{matrix}\right\|$$

betrachten, in welcher die Anzahl der Horizontalreihen von der der Verticalreihen um zwei übertroffen wird; wir wollen untersuchen, wie viele Punkte allen den durch die Determinanten des Systems bestimmten Flächen gemeinschaftlich sind.

Irgend drei Flächen

$(A_{00} A_{11} A_{22} A_{33}) = 0$, $(A_{00} A_{11} A_{22} A_{43}) = 0$, $(A_{00} A_{11} A_{22} A_{53}) = 0$

haben die Curve

$$\left\| \begin{matrix} A_{00}, & A_{01}, & A_{02}, & A_{03} \\ A_{10}, & A_{11}, & A_{12}, & A_{13} \\ A_{20}, & A_{21}, & A_{22}, & A_{23} \end{matrix} \right\| = 0$$

gemein, und wenn m, n, p die Ordnungen der Flächen, μ und ϱ die Ordnung und der Rang dieser Curve sind, so durchschneiden sich diese Flächen in einer Anzahl von nicht zu dieser Curve gehörigen Punkten, welche nach Artikel 92 durch

$$mnp - \mu(m + n + p - 2) + \varrho$$

ausgedrückt ist.

Wir haben aber unter Anwendung der vorigen Bezeichnungsweise die Substitutionen

$$m = S''_1 + s_1 + A_{30},\ n = S''_1 + s_1 + A_{40},\ p = S''_1 + s_1 + A_{50},$$
$$\mu = s_{12} + S''_1 (S''_1 + s_1) - S''_{12},$$
$$\varrho = \left\{ s_{12} + S''_1 (S''_1 + s_1) - S''_{12} \right\} (s_1 + 2S''_1 - 2) - S''_{12} (S''_1 + s_1)$$
$$+ S''_{123} + s_{123}$$

zu vollziehen und das dadurch nach der Reduction entspringende Resultat ist

$$S_{123} + s_1 S_{12} + (s_1^2 - s_{12}) S_1 + s_1^3 - 2 s_1 s_{12} + s_{123}$$

oder

$$S_{123} + s_{123} + s_1 (S_{12} - s_{12}) + (S_1 + s_1)(s_1^2 - s_{12}).$$

Wenn die Ausdrücke S_1, S_{12}, S_{123}, etc. auf die Elemente der ersten Verticalreihe A_{00}, A_{01}, A_{02}, A_{03} bezogen werden, so entspringt ein Resultat, das einfach durch Vertauschung der grossen und kleinen Buchstaben von dem Vorigen verschieden ist.

Wenn die Elemente der verschiedenen Horizontalreihen dieselben Grade haben, d. h. wenn a_0, a_1, etc. sämmtlich gleich Null sind, so ist die Anzahl der durch das System dargestellten Punkte gleich S_{123}.

314. Man beweist, dass die durch eine symmetrische Determinante dargestellte Fläche immer eine bestimmte Anzahl von Doppelpunkten besitzt.

Sind die Summe, die Summe der Producte zu zweien und die Summe der Producte zu dreien von den Graden der Leitglieder a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. der betrachteten Determinante durch S_1, S_{12}, S_{123} repräsentiert, so ist die Zahl solcher Doppelpunkte

$$= \tfrac{1}{2}(S_1 S_{12} - S_{123}).$$

Nun gilt nach Artikel 19 der „Vorlesungen" die identische Gleichung

$$\mathbf{D}_{11}\mathbf{D}_{22} - (\mathbf{D}_{12})^2 = \mathbf{D}_{11,22} \cdot \mathbf{D},$$

wenn $\mathbf{D}_{11}$ die Minordeterminante bezeichnet, welche durch Unterdrückung der Horizontal- und der Verticalreihe des Elements a_{11} aus der gegebenen Determinante entsteht, $\mathbf{D}$ die Determinante selbst und $\mathbf{D}_{11,22}$ die zweite Minordeterminante ist, welche der Unterdrückung der Reihen von a_{11}, a_{22} entspricht. Es ist offenbar, dass die durch

$$\mathbf{D}_{11}\mathbf{D}_{22} - (\mathbf{D}_{12})^2 = 0$$

repräsentierte Fläche die Durchschnittspunkte von

$$\mathbf{D}_{11} = 0, \quad \mathbf{D}_{22} = 0, \quad \mathbf{D}_{12} = 0$$

zu Doppelpunkten hat, und da die Grade dieser Gleichungen respective

$$S_1 - A_{00}, \quad S_1 - A_{01}, \quad S_1 - \tfrac{1}{2}(A_{00} + A_{01})$$

sind, so ist die Zahl der Doppelpunkte das Product dieser drei Zahlen. Sind die Summe und die Summe der Producte zu zweien von den Elementen mit Ausschluss von A_{00} und A_{01} durch s''_1 und s''_{12} bezeichnet, so ist das Product

$$(S_1 - A_{00})\,(S_1 - A_{01})\,\left\{S_1 - \tfrac{1}{2}(A_{00} + A_{01})\right\}$$

durch $\tfrac{1}{2}\left\{S_1 S_{12} + s''_1 S_{12} + (s''^2_1 - s''_{12})\,S_1 + s''^3_1 - s''_1 s''_{12}\right\}$

entwickelt dargestellt. Diess ist die Zahl der Doppelpunkte des zusammengesetzten Systems

$$\mathbf{D}_{11,22} \cdot \mathbf{D} = 0,$$

also eine Zahl, die aus der Zahl der Doppelpunkte in $\mathbf{D}_{11,22} = 0$, der Zahl der Doppelpunkte in $\mathbf{D} = 0$ und einer Zahl von Punkten der Curve $\mathbf{D}_{11,22}.\mathbf{D} = 0$ zusammengesetzt sein kann. Wenn wir aber in der Determinantenmatrix die ersten beiden Horizontalreihen unterdrücken, so besitzen die durch die Determinanten des übrigbleibenden Systems bestimmten Flächen, unter denen $\mathbf{D}_{11,22} = 0$ sich findet, eine Anzahl gemeinschaftlicher Punkte, welche mittelst der Formel des letzten Artikels berechnet werden kann, indem man

$$\tfrac{1}{2}(A_{02} + A_{00}),\ \tfrac{1}{2}(A_{02} + A_{01}),\ \text{etc.},$$
$$\tfrac{1}{2}(A_{03} + A_{00}),\ \tfrac{1}{2}(A_{03} + A_{01}),\ \text{etc.}$$

für die Grade der Horizontalreihen nimmt. Das Ergebniss ist

$\frac{1}{8}\left\{S_{123}+s''_1 S_{12}+(s''^2_1-s''_{12})\,S_1+(s''^3_1-2s''_1 s''_{12}+s''_{123})\right\}.$

Diese Punkte aber, deren Anzahl so eben bestimmt worden ist, sind Punkte, in welchen die Flächen

$$\mathbf{D}_{11}=0,\quad \mathbf{D}_{22}=0,\quad \mathbf{D}_{12}=0$$

sich berühren und sie zählen daher als je vier unter den Durchschnitten dieser Flächen (vergl. Artikel 281). Indem man aber das vierfache der eben gefundenen Zahl von der Gesammtzahl der Schnittpunkte subtrahiert, erhält man

$$\tfrac{1}{2}\,(s''_1 s''_{12}-s''_{123}+S_1 S_{12}-S_{123}),$$

und erkennt daraus, dass, wenn die Anzahl der Doppelpunkte der Fläche, welche die symmetrische Determinante $\mathbf{D}_{11,22}$ bestimmt, gleich $\frac{1}{2}\,(s''_1 s''_{12}-s''_{123})$ ist, die Anzahl der Doppelpunkte der Fläche $\mathbf{D}=0$ durch $\frac{1}{2}\,(S_1 S_{12}-S_{123})$ dargestellt wird. Da aber jenes in dem einfachsten Falle leicht berührt werden kann, so gilt das Letztere, d. h. der Satz dieses Artikels allgemein. In Artikel 279 ist eine Anwendung von diesem Satze berührt.

315. In Bezug auf die im Artikel 310 betrachteten Curven kann aber noch eine andere Aufgabe gestellt werden.

Denken wir die Gleichungen von vier Flächen von den respectiven Graden λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, deren Coefficienten eine neue Veränderliche in den Graden μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 respective enthalten, so tritt diese letztere Veränderliche in die Resultante dieser Gleichungen — durch deren Verschwinden die Existenz eines allen gemeinschaftlichen Punktes bezeichnet wird — im Grade

$$\lambda_1\lambda_2\,(\mu_3\lambda_4+\mu_4\lambda_3)+\lambda_3\lambda_4\,(\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_1)$$

ein. Nun sind $\lambda_1\lambda_2$, λ_3, λ_4 die Ordnungen der Durchschnittscurven der ersten und zweiten und der dritten und vierten Fläche; und wenn wir die Grössen

$$\mu_1\lambda_2+\mu_2\lambda_1,\quad \mu_3\lambda_4+\mu_4\lambda_3$$

als die Gewichte derselben Curven bezeichnen, so können wir den Satz aussprechen: *Das Gewicht der Bedingung, unter welcher zwei Curven sich durchschneiden, ist die Summe der Producte des Gewichts einer jeden in die Ordnung der andern Curve.*

Nun haben wir entwickelt, wie die Ordnung der durch ein Determinantensystem nach Art des Artikel 310 bestimmten Curve gefunden wird und es bleibt jetzt zu zeigen, in welcher Weise man das Gewicht desselben Systems bestimmen kann.

Man sieht leicht, dass das Gewicht einer complexen, d. h. aus Curven einfacherer Arten zusammengesetzten Curve der Summe der Gewichte seiner Componenten gleich ist. Darnach kann man wie im Artikel 310 stufenweis vorgehen und erhält folgendes Resultat. Enthalten die Functionen A_{00}, A_{10}, A_{20}, A_{30}, etc. die neue Veränderliche in den respectiven Graden $\mathbf{A}_{00}$, $\mathbf{A}_{10}$, etc., die Functionen A_{01}, A_{11}, A_{21}, etc. in den Graden $\mathbf{A}_{00}+\alpha_0$, $\mathbf{A}_{10}+\alpha_0$, etc., bezeichnen $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_{12}$, $\mathbf{S}_{123}$ die Summe der Grössen $\mathbf{A}_{00}$, $\mathbf{A}_{10}$, etc., die Summe ihrer Producte zu zweien und die Summe ihrer Producte zu dreien, und $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_{12}$, $\mathbf{s}_{123}$ die entsprechenden Aggregate für die Grössen α_0, α_1, etc., stellt endlich Σ die Summe aller $(A_{00}\,\mathbf{A}_{10})$ dar, d. h. die Summe aller Producte, in denen ein A_{i0} mit allen $\mathbf{A}_{j0}$ multipliciert ist, so dass

$$\Sigma = \mathbf{S}_1 S_1 - \Sigma\,(A_{00}\mathbf{A}_{00})$$

ist, und σ die Summe aller $(\alpha_0\alpha_1)$, welche in derselben Art die Relation

$$\sigma = s_1 \mathbf{s}_1 - \Sigma\,(a_0\alpha_0)$$

giebt; so ist das Gewicht des Systems durch

$$\Sigma - \sigma + s_1\mathbf{S}_1 + \mathbf{s}_1 S_1 + 2s_1\mathbf{s}_1$$

ausgedrückt, was auch in der Form

$$(S_1 + s_1)\,(\mathbf{S}_1 + \mathbf{s}_1) + \Sigma\,(a_0\alpha_0) - \Sigma\,(A_{00}\mathbf{A}_{00})$$

geschrieben werden kann.

Wenn wir S_1 zur Bezeichnung der Summe der Grade für die Elemente der ersten Verticalreihe statt für die der ersten Horizontalreihe gebraucht hätten, etc., so würde die Formel mit der entsprechenden Buchstabenvertauschung auch dann noch gültig sein.

Man findet in ähnlicher Weise das Gewicht des Systems einer Matrix wie im Artikel 313, in welcher die Zahl der Verticalreihen diejenige der Horizontalreihen um 2 überschreitet, in folgender Formel:

$$\left\{S_{12} + s_1(S_1 + s_1) - s_{12}\right\}(\mathbf{S}_1 + \mathbf{s}_1) - (S_1 + s_1)\,(\Sigma A_{00}\mathbf{A}_{00} - \Sigma a_0\alpha_0)$$
$$+ \Sigma A_{00}{}^2\mathbf{A}_{00} + \Sigma a_0{}^2\alpha_0.$$

Und wenn die Matrix ebenso viel Horizontalreihen als Verticalreihen enthält, so ist Ordnung und Gewicht respective durch die Summen

$$s_1 + S_1, \quad \mathbf{s}_1 + \mathbf{S}_1$$

gegeben.

316. Diese Ergebnisse sind einer grossen Menge wichtiger Anwendungen fähig.

Wir untersuchen zuerst Ordnung und Gewicht des Systems von Bedingungen, unter welchen die beiden Gleichungen

$$a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + a_2 t^{m-2} + \text{etc.} = 0,$$
$$a'_0 t^n + a'_1 t^{n-1} + a'_2 t^{n-2} + \text{etc.} = 0$$

zwei gemeinschaftliche Wurzeln besitzen.

Damit diess der Fall sei, müssen offenbar zwei Bedingungen erfüllt sein, und wenn t ein Parameter ist, a_0, a_1, etc. aber Functionen der Coordinaten bezeichnen, so bestimmen diese Bedingungen eine Curve im Raume.

In der That aber erhalten wir nicht zwei Bedingungen, sondern ein System von solchen, von denen keine zwei hinreichen, um jene Curve zu bestimmen. Diese Bedingungen sind nach dem Artikel 45 der „Vorlesungen" die Determinanten des Systems

$$\left\|\begin{array}{llll} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots \\ 0, & a_0, & a_1, & \ldots \\ 0, & 0, & a_0, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a'_0, & a'_1, & a'_2, & \ldots \\ 0, & a'_0, & a'_1, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\|.$$

in welchem die erste Linie $(n-1)$ fach, die zweite $(m-1)$ fach wiederholt ist, die also $(m+n-2)$ Horizontalreihen und $(m+n-1)$ Verticalreihen hat.

Das Problem ist somit ein specieller Fall des im Artikel 310 betrachteten.

Wir setzen die Grade der eingeführten Functionen als äquidifferent voraus, d. h. wenn die Grade von a_0, a'_0 respective gleich λ und μ sind, so sollen die Grade von a_1, a'_1 gleich $\lambda + \alpha$, $\mu + \alpha$, die von a_2, a'_2 gleich $\lambda + 2\alpha$, $\mu + 2\alpha$ sein, etc.

Um die Ordnung des Systems zu finden, benutzen wir die Formel des Artikel 310

$$s_{12} + S_1 (s_1 + S_1) - S_{12}.$$

In derselben ist s_1 die Summe von $(m+n-2)$ Gliedern der Reihe α, 2α, 3α, etc., d. h. für $m+n=k$

$$s_1 = \frac{(k-1)\,(k-2)}{1\,.\,2}\,\alpha.$$

Ebenso ist s_{12} die Summe der Producte derselben Grössen zu zweien, d. h.

$$s_{12} = \frac{(k-1)\,(k-2)\,(k-3)\,(3k-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\alpha^2.$$

Ferner ist S_1 die Summe von $(n-1)$ Gliedern der Reihe λ, $\lambda-\alpha$, $\lambda-2\alpha$, etc. und von $(m-1)$ Gliedern der Reihe μ, $\mu-\alpha$, $\mu-2\alpha$, etc., also

$$S_1 = (n-1)\,\lambda + (m-1)\,\mu - \tfrac{1}{2}\alpha\left\{(n-1)\,(n-2) + (m-1)\,(m-2)\right\}.$$

Endlich S_{12} die Summe der Producte derselben Grössen in Paaren, also

$$\begin{aligned} S_{12} = {} & \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\,(m-1)\,(m-2)\,\mu^2 + (m-1)\,(n-1)\,\lambda\mu \\ & - \tfrac{1}{2}\,\lambda\alpha\left\{(n-1)\,(n-2)^2 + (n-1)\,(m-1)\,(m-2)\right\} \\ & - \tfrac{1}{2}\,\mu\alpha\left\{(m-1)\,(m-2)^2 + (m-1)\,(n-1)\,(n-2)\right\} \\ & + \tfrac{1}{4}\,\alpha^2\,(m-1)\,(m-2)\,(n-1)\,(n-2) \\ & \qquad + \frac{(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(3m-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\alpha^2 \\ & \qquad + \frac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(3n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\alpha^2. \end{aligned}$$

Durch Vereinigung dieser Glieder erhält man die Ordnung des fraglichen Systems

$$\begin{aligned} & = \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\,m\,(m-1)\,\mu^2 + (m-1)\,(n-1)\,\lambda\mu \\ & + \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,(2m-1)\,\lambda\alpha + \tfrac{1}{2}\,m\,(m-1)\,(2n-1)\,\mu\alpha \\ & + \tfrac{1}{2}\,mn\,(m-1)\,(n-1)\,\alpha^2. \end{aligned}$$

Wenn die Resultante der Gleichungen

$$a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \text{etc.} = 0, \quad a'_0 t^n + a'_1 t^{n-1} + \text{etc.} = 0$$

eine Fläche bestimmt, so ist die hier betrachtete Curve eine Doppelcurve in derselben.

Wenn alle die Functionen a_0, a_1, etc. vom ersten Grade sind, so ist die erzeugte Fläche eine Regelfläche und indem man $\lambda=\mu=1$ und $\alpha=0$ in die vorige Formel einsetzt, erhält man die Ordnung der Doppelcurve

$$= \tfrac{1}{2}\,(m+n-1)\,(m+n-2).$$

Setzen wir beide betrachteten Gleichungen als von demselben Grade $m = n$ voraus, so können wir $\lambda + \mu = p$, $\lambda\mu = q$ setzen und die nämliche Formel giebt für die Ordnung der Doppelcurve die Formel

$$\tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)\,(p + n\alpha)\left\{p + (n-1)\,\alpha\right\} - (n-1)\,q.$$

317. In derselben Weise können wir die Ordnung des Systems von Bedingungen bestimmen, unter welchen die Gleichungen

$$a_0 t^m + \text{etc.} = 0, \quad a'_0 t^n + \text{etc.} = 0$$

drei gemeinschaftliche Wurzeln haben können.

Geometrisch interpretiert bestimmen diese Bedingungen dreifache Punkte in der durch die Resultante beider Gleichungen dargestellten Fläche. Sie werden durch ein System von Determinanten gegeben, deren Matrix ganz wie im letzten Artikel gebildet ist, nämlich so, dass die Reihe a_0, a_1, a_2 in $(n-2)$ facher, die Reihe a'_0, a'_1, a'_2 in $(m-2)$ facher Wiederholung erscheint und die Matrix $(m + n - 2)$ Verticalreihen, aber $(m + n - 4)$ Horizontalreihen enthält. In Folge dessen ist die Ordnung des Systems nach der Formel des Artikel 313 zu berechnen und wird gefunden

$$\begin{aligned}
&= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1.2.3}\,\lambda^3 + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}\,\mu^3 \\
&+ \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,(n-2)\,(m-2)\,\lambda^2\mu + \tfrac{1}{2}\,(m-1)\,(m-2)\,(n-2)\,\lambda\mu^2 \\
&+ \tfrac{1}{2}\,(m-1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,\lambda^2\alpha + \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,m\,(m-1)\,(m-2)\,\mu^2\alpha \\
&+ \tfrac{1}{2}\,(m-2)\,(n-2)\left\{m\,(n-1) + n\,(m-1)\right\}\lambda\mu\alpha \\
&+ \left\{\tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,m\,(m-2) + \tfrac{1}{3}\,n\,(n-1)\,(n-2)\right\}\alpha^2\lambda \\
&+ \left\{\tfrac{1}{2}\,m\,(m-1)\,(m-2)\,n\,(n-2) + \tfrac{1}{3}\,n\,(m-1)\,(m-2)\right\}\alpha^2\mu \\
&+ \tfrac{1}{6}\,m\,(m-1)\,(m-2)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,\alpha^3.
\end{aligned}$$

In dem Falle, wo die Fläche eine Regelfläche ist, d. h. für $\lambda = \mu = 1$, $\alpha = 0$ erhalten wir als die Zahl der dreifachen Punkte

$$\frac{(m + n - 2)\,(m + n - 3)\,(m + n - 4)}{1.2.3}. \quad \text{(Vergl. Artikel 207.)}$$

Die Ordnung der durch die Doppelcurve des Artikel 316 erzeugten Abwickelungsfläche, der Rang des Systems ist in derselben Weise nach der Formel des Artikel 314 zu berechnen; jedoch muss die so gefundene Zahl um das Vierfache der eben gefundenen Zahl der dreifachen Punkte, welche auch dreifache Punkte dieser Curve sind, vermindert werden.

So ist in dem Fall der Regelfläche der Rang der Doppelcurve

$$= 2\,(m + n - 2)\,(m + n - 3).$$

Um das Gewicht desselben Systems zu finden, haben wir nur dieselbe Methode auf die Formel des Artikel 315 anzuwenden. Enthält das Glied a_0 die zu eliminierende Veränderliche im Grade λ und die nicht eliminierte im Grade λ', und nehmen diese Grade für die Glieder a_1, a_2, etc. regelmässig ab in den ersteren und ebenso zu in den letzteren, so dass ihre Grade respective

$$\lambda - 1, \quad \lambda - 2, \quad \lambda' + 1, \quad \lambda' + 2, \text{ etc.}$$

sind, so ist das Gewicht des Systems

$$= n(n-1)\lambda\lambda' + m(m-1)\mu\mu' + (m-1)(n-1)(\lambda\mu' + \lambda'\mu)$$
$$+ \tfrac{1}{2}n(n-1)(2m-1)(\lambda-\lambda') + \tfrac{1}{3}m(m-1)(2n-1)(\mu-\mu')$$
$$- mn(m-1)(n-1).$$

318. Das nächste System, welches wir discutieren wollen, ist dasjenige, welches durch die Bedingungen gebildet wird, unter denen die drei Gleichungen

$$a_0 t^l + a_1 t^{l-1} + \text{etc.} = 0, \quad a'_0 t^m + a'_1 t^{m-1} + \text{etc.} = 0,$$
$$a''_0 t^n + a''_1 t^{n-1} + \text{etc.} = 0$$

einen gemeinschaftlichen Factor besitzen.

Das System kann durch die drei Gleichungen repräsentiert werden, welche man durch die Elimination von t zwischen den Paaren der gegebenen Gleichungen erhält, und ist zwei Gleichungen äquivalent. Systeme von Gleichungen von geringerem Grade können erhalten werden, indem man die gegebenen Gleichungen mit t, t^2, etc. multipliciert, etc.; ohne dass doch ihrer eine zur dialytischen Elimination aller Potenzen von t hinreichende Anzahl zu erlangen wäre. Die Ordnung des Systems kann gefunden werden, indem man aus den Gleichungen x, y, z eliminiert, welche implicite in a_0, a_1, a_2 enthalten sind, wobei die Ordnung der resultierenden Gleichung in t die Ordnung des Systems bestimmt.

Setzen wir voraus, dass die Ordnungen von a_0, a'_0, a''_0 gleich λ, μ, ν und die von a_1, a'_1, a''_1 respective gleich $\lambda - 1$, $\mu - 1$, etc. sind, so findet man die Ordnung des Systems

$$= \lambda\mu\nu - (\lambda - l)(\mu - m)(\nu - n)$$

und sein Gewicht

$$= l(\mu\nu' + \mu'\nu) + m(\nu\lambda' + \nu'\lambda) + n(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + mn(\lambda - \lambda')$$
$$+ nl(\mu - \mu') + lm(\nu - \nu') - 2lmn.\text{*)}$$

---

*) Der Verfasser bemerkt, dass diess Letztere durch Induction erhalten ist. Vergl. „Quarterly Journ.“ a. a. O.

319. Es ist ein specieller Fall der vorhergehenden Aufgabe, das Gewicht und die Ordnung des Systems von Bedingungen zu finden, welches erfüllt sein muss, damit eine Gleichung

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \text{etc.} = 0$$

drei gleiche Wurzeln habe. Denn diese Bedingungen werden gefunden, indem man ausdrückt, dass die drei zweiten Differentialgleichungen einen gemeinschaftlichen Factor besitzen. Man hat daher in die vorigen Ausdrücke die Substitutionen

$n-2$ für l, m und n; $\lambda - 1$ für μ und $\lambda - 2$ für ν

zu machen und findet die Ordnung des Systems

$$= 3(n-2)\,\lambda\,(\lambda - n) + n\,(n-1)\,(n-2)$$

und sein Gewicht

$$= 6\,(n-2)\,\lambda\lambda' + 3n\,(n-2)\,(\lambda - \lambda') - 2n\,(n-1)\,(n-2).$$

Um ferner Ordnung und Gewicht des Systems von Bedingungen zu finden, für welches dieselbe Gleichung zwei verschiedene Paare gleicher Wurzeln hat, bilden wir zuerst nach Artikel 316 die Ausdrücke für Ordnung und Gewicht des Systems von Bedingungen, für welches die zwei ersten Differentiale

$$a_0 t^{n-1} + \text{etc.} = 0, \quad a_1 t^{n-1} + \text{etc.} = 0$$

zwei gemeinschaftliche Factoren besitzen, und subtrahieren nachher respective Ordnung und Gewicht des im ersten Theil dieses Artikels betrachteten Systems. Das Ergebniss ist, dass die Ordnung

$$= 2\,(n-2)\,(n-3)\,\lambda\,(\lambda - n) + \tfrac{1}{2}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$$

und das Gewicht

$$= 4\,(n-2)\,(n-3)\,\lambda\lambda' + 2n\,(n-2)\,(n-3)\,(\lambda - \lambda')$$
$$- \,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$$

ist.

Es ist eine Ausdehnung der vorigen Untersuchungen nach mehreren Richtungen möglich. Man kann algebraisch-homogene Gleichungen mit einem Parameter mehr als zwei Bedingungen unterworfen denken, z. B. das System von Bedingungen untersuchen, unter welchen zwei Gleichungen drei gemeinschaftliche Factoren haben; es wäre aber besonders wünschenswerth, in derselben Art die Ordnung und das Gewicht der Systeme von Bedingungen aufzustellen, unter welchen drei Curven zwei gemeinschaftliche Punkte besitzen, oder vier Curven sich in einem

Punkte durchschneiden, oder unter denen eine Curve einen Cuspidalpunkt, oder zwei Paare von Doppelpunkten hat, etc.; aber diese Probleme sind bis jetzt nicht gelöst worden.

320. Wir fügen aber gleich hier noch für jede der beiden Hauptprobleme der Bestimmung der Ordnung und des Gewichts in den Artikeln 310 und 313 ein geometrisches Beispiel hinzu, aus der Theorie der Regelflächen entnommen, auf welche wir später noch ausführlich zurückkommen müssen. Man soll die Ordnung einer Regelfläche bestimmen, deren gerade Erzeugende ihre als vollständiger Durchschnitt zweier Flächen U und V gegebene Directrixcurve dreifach durchschneidet. Man soll sodann die Zahl der Geraden bestimmen, welche dieselbe Curve vierfach durchschneiden.

Das erste dieser Probleme führt zur Betrachtung einer Matrix, in welcher die Zahl der Verticalreihen die der Horizontalreihen um Eins übertrifft. Sind

$$U = 0, \quad V = 0$$

die Gleichungen der zwei Oberflächen p^{ter} und q^{ter} Ordnung, welche jene Curve erzeugen, x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten eines Punktes der Curve, so substituieren wir in jene für diese Coordinaten die Ausdrücke

$$x_1 + \varrho x'_1, \quad x_2 + \varrho x'_2, \quad x_3 + \varrho x'_3, \quad x_4 + \varrho x'_4,$$

und schreiben die Entwickelungen mit Hilfe des Symbols $\varDelta$ für die Operation

$$\left(x'_1 \frac{d}{dx_1} + x'_2 \frac{d}{dx_2} + x'_3 \frac{d}{dx_3} + x'_4 \frac{d}{dx_4}\right) \text{ (vergl. Artikel 11)}$$

in der Form

$$\varDelta U + \frac{\varDelta^2 U}{1.2}\varrho + \frac{\varDelta^3 U}{1.2.3}\varrho^2 + \text{etc.} + \frac{\varDelta^p U}{1.2\ldots p}\varrho^{p-1} = 0,$$

$$\varDelta V + \frac{\varDelta^2 V}{1.2}\varrho + \frac{\varDelta^3 V}{1.2.3}\varrho^2 + \text{etc.} + \frac{\varDelta^q V}{1.2\ldots q}\varrho^{q-1} = 0.$$

Denken wir nun x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 als die laufenden Coordinaten eines Punktes in der durch (x_1, x_2, x_3, x_4) gehenden Geraden, welche die Curve in zwei weiteren Punkten schneidet, so müssen die beiden Gleichungen in ϱ zwei gemeinschaftliche Wurzeln besitzen; daraus entspringt ein System von Bedingungen

$$\left\| \begin{array}{ll} \varDelta U, & \varDelta^2 U, \ldots \\ & \varDelta U, \ldots \\ \ldots & \\ \ldots & \\ \varDelta V, & \varDelta^2 V, \ldots \\ & \varDelta V, \ldots \\ \ldots & \\ \ldots & \end{array} \right\| = 0,$$

von $(q-2)+(p-2)=(p+q-4)$ horizontalen und $(p+q-3)$ verticalen Reihen, in deren Elementen die Grade von x_1, x_2, x_3, x_4 die Ordnung und die von x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 das Gewicht bestimmen. Wenn man nun aus diesem System, welches zwei Gleichungen äquivalent ist, und den Gleichungen $U=0$, $V=0$ die Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 eliminiert, so erhält man eine Gleichung

$$R = 0$$

in den Veränderlichen x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, welche die Gleichung der Regelfläche in der Art darstellt, dass die Ordnung derselben ein Drittel ihrer Ordnung ist. Indem man bemerkt, dass die Coordinaten x'_1, x'_2, etc. nicht in die Functionen U, V eingehen, erkennt man, dass der Grad von R dem Gewicht des Systems gleich ist, aus welchem sie durch Elimination hervorgeht, d. h. gleich dem Producte der Grade von U und V in das Gewicht des obigen Determinantensystems. Man findet für diess Letztere *)

$$S_1 + s_1 = pq - 2(p+q) + 4, \quad \mathbf{S}_1 + \mathbf{s}_1 = pq - 4,$$
$$\Sigma A_{00}\mathbf{A}_{00} - \Sigma a_0\alpha_0 = -\tfrac{1}{2}pq(p+q) + 5(p+q) - 12,$$

also das Gewicht selbst

$$= \tfrac{1}{2}(pq-2)(2pq-3p-3q+4);$$

und damit die fragliche Ordnung der Regelfläche

$$= \tfrac{1}{6}pq(pq-2)(2pq-3p-3q+4).$$

Für $p=q=2$ existiert daher eine solche Regelfläche nicht. Für die Curve sechster Ordnung, die der vollständige Durchschnitt zweier Flächen zweiter und dritter Ordnung ist, wird sie von der vierten Ordnung.

321. Für die andere Aufgabe von der Bestimmung der Zahl von Geraden, welche die Curve viermal durchschneiden, gehen

---

*) Man vergleiche die nähere Ausführung bei Cayley, „On skew surfaces“, „Philosoph. Transactions“, 1863, p. 477.

wir von denselben Gleichungen aus; wir denken aber x_1, x_2, x_3, x_4 als die Coordinaten eines Punktes der Curve, durch welchen eine jener Geraden geht und haben dann offenbar die Bedingungen aufzustellen, unter denen die beiden Gleichungen in ϱ drei gemeinschaftliche Wurzeln besitzen; das System derselben ist drei Gleichungen äquivalent und liefert eine Matrix von

$$(q-3) + (p-3) = (p+q-6)$$

horizontalen und $(p+q-4)$ Verticalreihen, d. h. ein Determinantensystem von der im Artikel 313 betrachteten Art, in welcher die Grade der Elemente in x_1, x_2, etc. das Gewicht und die Grade in x'_1, x'_2, etc. die Ordnung bestimmen. Es ist das System

$$\left\| \begin{matrix} \varDelta U, & \varDelta^2 U, \ldots \\ . & \varDelta U\,, \\ . & \\ . & \\ \varDelta V, & \varDelta^2 V, \ldots \\ . & \varDelta V\,, \\ . & \\ . & \end{matrix} \right\| = 0.$$

Man kann aus ihm die Coordinaten x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 eliminieren; wenn man mit ihm die Gleichung einer beliebigen Ebene verbindet

$$a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + a_3 x'_3 + a_4 x'_4 = 0$$

und x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 eliminiert, so ist das Resultat von der Form

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4)^\theta \, \mathbf{S} = 0,$$

wo $\mathbf{S}$ eine Function von x_1, x_2, x_3, x_4 allein ist. Indem man den Grad von x_1, x_2, x_3, x_4 als das Gewicht betrachtet, ist θ die Ordnung des Systems, der Grad des Products $(a_1 x_1 + \text{etc.})^\theta \, \mathbf{S}$ in x_1, etc. das Gewicht des Systems und daher der Grad von $\mathbf{S}$ bestimmt durch die Differenz von Gewicht und Ordnung des Systems der Determinanten. Die drei Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \mathbf{S} = 0$$

bestimmen dann die Punkte der Curve, durch welche vierfach schneidende Gerade gehen, die Anzahl solcher Geraden ist also der vierte Theil des Products von pq in jene Differenz. Zur Berechnung derselben kann die Form dienen

$$\left\| \begin{array}{ll} 1_{p-1}\,, & 2_{p-2}\,,\;.\;. \\ 0_p \quad , & 1_{p-1}\,,\;.\;. \\ . & \\ . & \\ 1_{q-1}\,, & 2_{q-2}\,,\;.\;. \\ 0_q \quad , & 1_{q-1}\,,\;.\;. \end{array} \right\|,$$

in welcher in $(p+q-3)$ Verticalreihen und in $(q-3)+(p-3)$ Horizontalreihen die Grade der Elemente der Matrix in den Veränderlichen x'_1, y'_1, etc. und in x_1, x_2, etc. durch die Ziffern und ihre Indices bezeichnet sind; sie liefert

$$s_1 = 2(q-3) - \tfrac{1}{2}(q-3)(q-2) + 2(p-3) - \tfrac{1}{2}(p-3)(p-2),$$

$$S_1 = \tfrac{1}{2}(p+q-5)(p+q-4),$$

$$s_{12} = \tfrac{1}{2}p^2q^2 + \frac{pq}{2}\left\{-(p+q)^2 + 10(p+q) - 45\right\} + \tfrac{1}{8}(p+q)^4$$
$$- \frac{29}{12}(p+q)^3 + \frac{171}{8}(p+q)^2 - \frac{1093}{12}(p+q) + 191,$$

$$S_{12} = \tfrac{1}{8}(p+q)^4 - \frac{29}{12}(p+q)^3 + \frac{139}{8}(p+q)^2 - \frac{661}{12}(p+q) + 65,$$

$$s_{123} = \tfrac{1}{6}p^3q^3 + p^2q^2\left\{-\tfrac{1}{4}(p+q)^2 + \frac{11}{4}(p+q) - \frac{41}{3}\right\}$$
$$+ pq\left\{\tfrac{1}{8}(p+q)^4 - \tfrac{8}{3}(p+q)^3 + \frac{629}{24}(p+q)^2\right.$$
$$\left. - \frac{749}{6}(p+q) + \frac{1753}{6}\right\} - \frac{1}{48}(p+q)^6 + \frac{31}{48}(p+q)^5$$
$$- \frac{445}{48}(p+q)^4 + \frac{3617}{48}(p+q)^3 - \frac{8969}{24}(p+q)^2$$
$$+ 1071(p+q) - 1560,$$

$$S_{123} = \frac{1}{48}(p+q)^6 - \frac{31}{48}(p+q)^5 + \frac{397}{48}(p+q)^4 - \frac{2689}{48}(p+q)^3$$
$$+ \frac{5081}{24}(p+q)^2 - \frac{1270}{3}(p+q) + \frac{1050}{3},$$

etc., daher

$$S_1 + s_1 = pq - 8,\quad \mathbf{S}_1 + \mathbf{s}_1 = pq - 3(p+q) + 8,$$

$$S_{12} - s_{12} = -\tfrac{1}{2}p^2q^2 + pq\left\{\tfrac{1}{2}(p+q)^2 - 5(p+q) + \frac{45}{2}\right\}$$
$$- 4(p+q)^2 + 36(p+q) - 126, \text{ etc.}$$

und das Gewicht des Systems also

$$= \tfrac{1}{6}\left[3p^3q^3 + p^2q^2\{-9(p+q)+2\} + pq\{5(p+q)^2 + 15(p+q) - 13\}\right.$$
$$\left. - 66(p+q) + 108\right]$$

und die Ordnung

$$= \tfrac{1}{6}\left[p^3q^3 + p^2q^2\left\{-3(p+q)+2\right\} + pq\left\{2(p+q)^2 - 3(p+q) + 13\right\} - 36\right],$$

so dass endlich die Zahl der fraglichen Geraden

$$= \frac{pq}{24}\left[2p^3q^3 + 6p^2q^2(p+q) + pq\left\{3(p+q)^2 + 18(p+q) - 26\right\} - 66(p+q) + 144\right]$$

wird. In der Curve des vorigen Artikels existieren daher keine Geraden dieser Art. Erst bei den Durchschnittscurven der Flächen dritter Ordnung mit denen vierter und fünfter Ordnung existieren sie in den respectiven Anzahlen 27 und 135. Jene sind z. B. die 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung, die die Curve $U = 0$, $H = 0$ zweifach berühren.

Die folgenden Artikel werden mehrfach weitere Beispiele für die Anwendung dieser Methoden liefern.

322. Der Ort der Punkte, deren Polarebenen in Bezug auf vier Flächen

$$M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0$$

von den respectiven Ordnungen m, n, p, q sich in einem Punkte schneiden, ist eine Fläche von der Ordnung

$$m + n + p + q - 4.$$

Denn die Gleichung dieses Ortes wird erhalten, indem man die Determinante mit Null vergleicht, welche die vier Differentiale jeder der vier Flächen zu ihren Elementen hat

$$\begin{vmatrix} M_1, & M_2, & M_3, & M_4 \\ N_1, & N_2, & N_3, & N_4 \\ P_1, & P_2, & P_3, & P_4 \\ Q_1, & Q_2, & Q_3, & Q_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn eine Fläche des durch M, N, P bestimmten Netzes, d. h. eine der durch die Gleichung

$$aM + bN + cP = 0,$$

in welcher a, b, c willkürliche Constanten sind, bestimmten Flächen die Fläche

$$Q = 0$$

berührt, so ist der Berührungspunkt nothwendig ein Punkt des eben betrachteten Ortes und alle Berührungspunkte solcher Art, d. h. alle die Punkte, in welchen Flächen des Netzes

$$aM + bN + cP = 0$$

die Fläche $Q = 0$ berühren, liegen in der Curve der

$$q\,(m + n + p + q - 4)^{\text{ten}}$$

Ordnung, in welcher die vorige Ortsfläche und die Fläche $Q = 0$ sich schneiden. Für $m = n = p$, d. h. für alle durch

$$\frac{(n + 1)\,(n + 2)\,(n + 3)}{1\,.\,2\,.\,3} - 3$$

feste Punkte gehende Flächen erhält man eine Curve $q\,(3n + q - 4)^{\text{ter}}$ Ordnung als Ort der Punkte, in denen sie eine Fläche von der Ordnung q berühren.

In gleicher Art giebt es $pq\,(m + n + p + q - 4)$ Flächen des Büschels

$$aM + bN = 0,$$

welche die Durchschnittscurve der Flächen $P = 0$, $Q = 0$ berühren. Denn der Berührungspunkt muss nothwendig einer der Durchschnittspunkte sein, welche die vorher betrachtete Ortsfläche mit der bezeichneten Curve bestimmt.*)

Es ergiebt sich auch leicht, dass die Bedingung, unter welcher zwei der Durchschnittspunkte der drei Flächen

$$M = 0,\quad N = 0,\quad P = 0$$

zusammenfallen, d. h. unter welcher die Durchschnittscurve von zweien unter ihnen von der dritten berührt wird, die Coefficienten der Gleichung einer jeden dieser Flächen im Grade

$$np\,(2m + n + p - 4)$$

enthält.**) Denn wenn man in diese Bedingung für jeden Coefficienten a der Gleichung von M die Summe $(a + \lambda a')$ substituiert, in welcher a' der entsprechende Coefficient der Gleichung einer andern Fläche M' von demselben Grade m ist, so ist nothwendig der Grad des Substitutionsresultats in λ gleich der Anzahl der Flächen des Büschels $M + \lambda M' = 0$, welche die Durchschnittscurve der Flächen $N = 0$, $P = 0$ berühren.

---

*) Für $m = n = 1$, d. h. ein Ebenenbüschel, kommt man auf den Satz zurück, dass durch eine Gerade $pq\,(p + q - 2)$ Tangentenebenen an die Schnittcurve zweier Flächen von den Ordnungen p und q gehen.

**) Vergl. Moutard, „Nouvelles Annales de Mathém.", t. XIX, p. 58 und E. de Jonquières, „Annali di Matematica", t. V, p. 24 f. „Etudes sur les courbes à double courbure".

Derselbe Satz lässt sich auch in folgender Art beweisen:*) Es fallen zwei Durchschnittspunkte zusammen, wenn die Durchschnittscurve von M und N die Durchschnittscurve von M und P berührt. In diesem Berührungspunkt haben sodann die Tangentenebenen der drei Flächen eine gerade Linie gemein, d. h. sie bestimmen mit einer beliebigen vierten Ebene

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

einen Punkt. Für den Berührungspunkt verschwinden also die Determinanten $(a_1 M_2 N_3 P_4)$, deren erste Horizontalreihe die Elemente a_1, a_2, a_3, a_4 enthält, während die folgenden von den Differentialen der Polynome M, N, P gebildet sind. Die Bedingung, unter welcher dieses Verschwinden der Determinante für einen den drei Flächen gemeinschaftlichen Punkt stattfindet, wird offenbar durch Elimination zwischen ihr und den Gleichungen der drei Flächen $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ erhalten und die fragliche Resultante enthält die Coefficienten a_1, a_2, etc. im Grade mnp, die Coefficienten von M aber im Grade

$$np\,(m + n + p - 3) + mnp.$$

Aber diese Resultante enthält als einen Factor den Ausdruck der Bedingung, unter welcher die Ebene a_1x_1 + etc. $= 0$ durch einen der Durchschnittspunkte der Flächen $M = 0$, $N = 0$, $P = 0$ hindurchgeht, und diese letztere enthält die Coefficienten a_0, a_1, etc. im Grade mnp und die Coefficienten von M im Grade np. Beseitigt man diesen Factor durch Division, so enthält der Quotient die Coefficienten von M im Grade $np\,(2m + n + p - 4)$, wie oben gezeigt war.

Daraus folgt: Die Enveloppe aller Flächen der Ordnung μ, deren Coefficienten Functionen m^{ten} Grades von drei veränderlichen, durch zwei Gleichungen n^{ten} und p^{ten} Grades verbundenen Parametern sind, ist eine Fläche von der Ordnung

$$\mu np\,(2m + n + p - 4).$$

323. D e r O r t d e r P u n k t e , d e r e n P o l a r e b e n e n i n B e z u g a u f d r e i F l ä c h e n $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ e i n e g e m e i n s c h a f t l i c h e G e r a d e e n t h a l t e n , ist nach den Betrachtungen des letzten Artikels die durch das Determinantensystem

*) Vgl. Salmon, „Quarterly Journal", Vol. I, p. 339.

$$\begin{Vmatrix} U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ V_1, & V_2, & V_3, & V_4 \\ W_1, & W_2, & W_3, & W_4 \end{Vmatrix} = 0$$

bestimmte Curve — wenn wie bisher schon die U_1, V_1, etc. die Differentiale der Polynome U, V, W nach x_1, etc. bezeichnen.

Diese Curve ist nach der vorher gegebenen Entwickelung von der Ordnung

$$m'^2 + n'^2 + p'^2 + m'n' + n'p' + p'm',$$

wenn m', n', p' die respectiven Ordnungen von U_1, V_1, etc., d. h. die Grössen $m-1$, etc. bezeichnen. Die Ordnung der ihr entsprechenden Abwickelungsfläche wird ebenso gefunden

$$2\,(m'+n'+p'-1)\,(m'^2+n'^2+p'^2+m'n'+n'p'+p'm')$$
$$-\,(m'n'+n'p'+p'm')\,(m'+n'+p')+m'n'p'$$

und würde ihre Characteristik vollenden.

Wenn eine Fläche des Büschels

$$aM + bN = 0 \quad \text{die Fläche} \quad P = 0$$

berühren soll, so gehört der Berührungspunkt nothwendig dieser Curve an und die Zahl der Flächen des Büschels, welche eine Fläche $P = 0$ berühren, ist daher die Zahl der Schnittpunkte, welche diese Fläche mit jener Curve bestimmt, d. h. das $p$fache von der Ordnung dieser Curve. Durch eine der im letzten Artikel gegebenen analogen Schlussreihe erkennen wir daraus, dass die Bedingung, unter welcher zwei Flächen M und N sich berühren ($m' = p'$), die Coefficienten der Gleichung von M im Grade

$$n\,(n'^2 + 2m'n' + 3m'^2)$$

oder

$$n\,(n^2 + 2mn + 3m^2 - 4n - 8m + 6)$$
$$= n\left\{(n+2m-3)^2 - (m-1)\,(m+2n-3)\right\}$$
$$= n\left\{2\,(m-1)^2 + (m+n-2)^2\right\}$$
$$= n\left\{(n-1)^2 + 2\,(n-1)\,(m-1) + 3\,(m-1)^2\right\}$$

enthält; ebenso die der Gleichung von N im Grade

$$m\,(m^2 + 2mn + 3n^2 - 4m - 8n + 6)$$
$$= m\left\{(m+2n-3)^2 - (n-1)\,(n+2m-3)\right\}.^{*)}$$

---

*) In einer neuerlichen Mittheilung der „Comptes rendus“ (t. LVIII, p. 1074), hat Sylvester diese Formel als einen sehr speciellen Fall

Und ferner: Die Enveloppe aller Flächen μ^{ter} Ordnung, deren Coefficienten Functionen vom Grade m von drei veränderlichen, unter sich durch eine Relation n^{ten} Grades verbundenen Parametern sind, ist eine Fläche der Ordnung

$$\mu n\,(n^2 + 2mn + 3m^2 - 4n - 8m + 6).$$

Wenn also ein Punkt eine Fläche n^{ter} Ordnung durchläuft, so ist die Enveloppe seiner Polarflächen von der Ordnung $(p-m)$ in Bezug auf eine gegebene Fläche p^{ter} Ordnung eine Fläche der Ordnung

$$(p-m)\,n\left\{n^2 + 2m + 3m^2 - 4n - 8m + 6\right\}, \text{ etc.}$$

324. Wir wollen in der Form von Beispielen hier eine Reihe von Ergebnissen vereinigen, die mit den vorigen Untersuchungen zusammenhängen.

---

einer allgemeinen Lehre aufgezeigt, die auch die der Resultanten und Discriminanten umfasst. Sind $U_1, U_2, \ldots, U_i$ Functionen von n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und gelten die Gleichungen

$$U_1 = 0,\quad U_2 = 0, \ldots, U_i = 0,$$
$$\lambda_1\delta U_1 + \lambda_2\delta U_2 + \ldots + \lambda_i\delta U_i = 0$$

für λ als unbestimmte Grössen und

$$\delta U = \frac{dU}{dx_1}\,\delta x_1 + \frac{dU}{dx_2}\,\delta x_2 + \ldots + \frac{dU}{dx_n}\,\delta x_n,$$

so dass die n Veränderlichen

$$(n - i + 1) + i = n + 1$$

homogenen Gleichungen zu genügen haben, so muss eine gewisse Function ihrer Coefficienten verschwinden, welche zu den Combinanten, d. h. einer bestimmten Klasse von Invarianten gehört (vgl. „Vorlesungen", Artikel 157), und die Sylvester die Osculante nennen will. Für $i = 1$ erhält man die Discriminante, für $i = n$ die Resultante; $n = 4$, $i = 2$ entspringt der gemeinschaftlichen Berührung dreier Flächen in einem Punkte (siehe oben) und $n = 4$, $i = 2$ der Berührung von zwei Flächen. Sind $m_1, m_2, \ldots, m_i$ die Ordnungen der i Functionen in den Veränderlichen, und ist für

$$m_1 = 1 + \mu_1,\quad m_2 = 1 + \mu_2, \ldots, m_i = 1 + \mu_i$$
$$H_w\,(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i)$$

die Summe der Potenzen und homogenen Producte von $\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i$, so ist G_k, der Grad der Osculante in Bezug auf die Coefficienten der Function U_k durch Formeln bestimmt wie

$$\frac{1}{m_2 m_3 \ldots m_i}\,G_1 = H_{n-i}\,(\mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_i) + 2H_{n-i-1}\,(\mu_2, \ldots, \mu_i)\,\mu_1$$
$$+ 3H_{n-i-2}\,(\mu_2, \ldots, \mu_i)\,\mu^2 \ldots + (n-i)\,H_1\,(\mu_2, \ldots, \mu_i)\,\mu_1^{\,n-i-1}$$
$$+ (n - i + 1)\,\mu_1^{\,n-1},$$

und die entsprechenden.

Beispiel 1. Zwei Flächen $U = 0$, $V = 0$ von den respectiven Ordnungen m und n durchschneiden sich und man soll die Anzahl der Tangenten ihrer Durchschnittscurve bestimmen, welche zugleich Inflexionstangenten der ersten Fläche sind.

Die Inflexionstangenten in irgend einem Punkte der Fläche $U = 0$ sind die geraden Erzeugenden der quadratischen Polarfläche dieses Punktes, jede durch sie gehende Ebene berührt also diese Letztere. Wenn wir daher die Bedingung bilden, unter welcher die Tangentenebene der Fläche $V = 0$ die quadratische Polarfläche in Bezug auf $U = 0$ berührt, welche Bedingung die zweiten Differentiale von U im dritten und die ersten Differentiale von V im zweiten Grade enthält (vergl. Band I, Artikel 75), so erhalten wir die Gleichung einer Fläche der $(3m + 2n - 8)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche die Durchschnittscurve in den gesuchten Punkten schneidet, deren Tangenten Inflexionstangenten von $U = 0$ sind. Die Zahl dieser Punkte ist

$$= mn\,(3m + 2n - 8).$$

Beispiel 2. Man soll die Ordnung der Fläche bestimmen, welche durch die Inflexionstangenten der Fläche $U = 0$ in den Punkten ihrer Durchschnittscurve mit einer Fläche $V = 0$ erzeugt wird.

Man hat die x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 zwischen den Gleichungen

$$U' = 0, \quad V' = 0, \quad \varDelta U' = 0, \quad \varDelta^2 U' = 0 \quad \text{(Artikel 11)}$$

zu eliminieren, welche in ihnen von den respectiven Graden

$$m,\ n,\ m - 1,\ m - 2; \quad \text{in} \quad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$$

aber von den Graden 0, 0, 1, 2 sind. Das Resultat ist daher vom Grade

$$mn\,(3m - 4).$$

Beispiel 3. Man soll die Ordnung der abwickelbaren Fläche finden, welche eine Fläche m^{ter} Ordnung längs der Schnittcurve mit ihrer Hesse'schen Determinantenfläche berührt.

Die Tangentenebenen der Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten ihrer parabolischen Curve durchschneiden sich nach Artikel 8 in einer Inflexionstangente. Da nun hier $n = 4\,(m - 2)$ ist, so wird die Ordnung der durch diese Inflexionstangenten erzeugten Fläche

$$= 4m\,(m - 2)\,(3m - 4).$$

Und weil die beiden Inflexionstangenten in den Punkten der parabolischen Curve zusammenfallen, so decken sich auch die beiden Flächen, die je eine durch eine jede von ihnen sonst erzeugt werden; d. h. die eben gefundene Zahl ist durch 2 zu dividieren, oder die fragliche Ordnung ist

$$= 2m\,(m - 2)\,(3m - 4).$$

Beispiel 4. Die Characteristik der abwickelbaren Fläche zu finden, welche einer Fläche m^{ter} Ordnung längs ihres ebenen Querschnitts umgeschrieben ist.

Der Schnitt der Abwickelungsfläche mit der Ebene des Querschnitts ist zusammengesetzt aus dem Schnitt der gegebenen Fläche, d. i. einer Curve m^{ter} Ordnung, und den Tangenten in ihren $3m\,(m-2)$ Inflexionspunkten. Wir finden daher gemäss den Bezeichnungen der Artikel 65 f. die Ausdrücke

$$\mu = 6m\,(m-2),\ \nu = m\,(m-1),\ r = m\,(3m-5),$$
$$\alpha = 0,\ \beta = 2m\,(5m-11),\ \text{etc.}$$

Beispiel 5. Man soll die Characteristik der abwickelbaren Fläche bestimmen, welche einer Fläche m^{ter} Ordnung längs ihres Durchschnitts mit einer Fläche n^{ter} Ordnung umgeschrieben ist.

Antwort. $\nu = mn\,(m-1)$, $\alpha = 0$, $r = mn\,(3m+n-6)$, so dass die übrigen Singularitäten nach Artikel 67 sich ergeben.

Beispiel 6. Man soll die Characteristik der zweien Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung gemeinschaftlich umgeschriebenen abwickelbaren Fläche unter der Voraussetzung bestimmen, dass keine der Flächen vielfache Linien hat.

Antwort.

$$\nu = mn\,(m-1)^2\,(n-1)^2,\ \alpha = 0,\ r = mn\,(m-1)\,(n-1)\,(m+n-2).$$

Beispiel 7. Welches sind die Charactere der Durchschnittscurve zweier abwickelbaren Flächen?

Die Flächen sind von den respectiven Ordnungen r und r', und da jede von ihnen eine Doppel- und Rückkehrcurve von den respectiven Ordnungen x und m, x' und m' besitzt, so hat die Durchschnittscurve respective $(rx' + r'x)$, $(rm' + r'm)$ wirkliche Doppel- und Rückkehrpunkte. Der aus einem beliebigen Punkte des Raumes über der Curve beschriebene Kegel hat daher ausser den im Artikel 81 betrachteten noch Doppel- und Rückkehrkanten, welche aus jenen entspringen, und die dort gegebenen Formeln müssen darnach modificiert werden.

Wir haben wie dort

$$\mu = rr',$$

aber der Grad der Reciproken dieses Kegels ist

$$\varrho = rr'\,(r + r' - 2) - r\,(2x' + 3m') - r'\,(2x + 3m)$$

oder nach den Formeln des Artikel 65

$$\varrho = n'r + nr'.$$

In derselben Art findet man

$$\nu = \alpha r' + \alpha' r + 3rr'.$$

Beispiel 8. Die Bestimmung der Charactere der abwickelbaren Fläche, welche durch eine Gerade erzeugt wird, die zwei gegebene Curven stets schneidet, ist die der vorigen nach dem Gesetze der Reciprocität entsprechende Aufgabe. Man erhält somit

$$\nu = rr',\ \varrho = rm' + r'm,\ \mu = \beta r' + \beta' r + 3rr'.$$

Von den singulären Tangenten der Flächen und ihren Berührungspunkten mit denselben.

325. Die Untersuchung der Tangenten einer Fläche hat gezeigt, dass jedem Punkte derselben unendlich viele Tangenten entsprechen, unter ihnen zwei, welche eine dreipunktige Berührung mit ihr bestimmen; dass ferner diese Letzteren für eine gewisse Curve in der Fläche, die parabolische Curve, zusammenfallen.

Und wir haben bereits im Artikel 10 die Klasse von Problemen, zu deren Betrachtung wir uns nun von Neuem wenden, durch die Aufgabe bezeichnet: Die Ordnung derjenigen Curve zu bestimmen, welche in einer Fläche durch die Berührungspunkte derjenigen Tangenten gebildet wird, die drei Bedingungen erfüllen.

Diejenigen Fälle des Problems, welche wir betrachten werden, sind folgende:

A) Die Curve der Berührungspunkte der Geraden zu finden, welche die Fläche in vier auf einanden folgenden Punkten schneiden.

Wenn eine Gerade die Fläche in einem Punkte dreipunktig, d. h. als Inflexionstangente, in einem andern aber einfach berührt, so gilt es,

B) die Curve der Punkte zu bestimmen, in welchen sie Inflexionstangente und

C) die Curve der Punkte, in welchen sie einfache Tangente ist.

Dazu tritt

D) die Curve der Punkte, in welchen die Fläche Tangenten besitzt, welche sie ausserdem noch in zwei andern Punkten einfach berühren. (Dreifache Tangenten.)

Mit ihnen sind zugleich die Fragen nach der Ordnung der Regelflächen aufgeworfen, a) welche durch die Geraden in A), b) welche durch die Geraden in B) und C), und c) welche durch die Geraden in D) erzeugt werden.

Wir beginnen die Untersuchung mit dem Problem A) der vierpunktigen Tangenten. Wenn eine gerade Linie die Fläche in vier auf einander folgenden Punkten schneiden soll, so müssen im Berührungspunkt gleichzeitig die vier Relationen erfüllt sein

$$U' = 0, \quad \Delta U' = 0, \quad \Delta^2 U' = 0, \quad \Delta^3 U' = 0.$$

Die Tangente desselben muss den durch die drei letzten Gleichungen bestimmten Flächen gemeinschaftlich sein. Man kann die Bedingung, unter welcher diess möglich ist, durch dieselbe Methode aufstellen, welche in der Theorie der algebraischen ebenen Curven zur Bestimmung der Inflexionspunkte und der Berührungspunkte der Doppeltangenten führt.

326. Wenn die Gleichungen von drei Flächen U, V, W die Veränderlichen x_1, x_2, x_3, x_4 in den respectiven Graden λ, λ', λ'' und die anderen x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 in den Graden μ, μ', μ'' enthalten und die $\lambda\lambda'\lambda''$ Durchschnittspunkte dieser Flächen sämmtlich mit dem Punkte (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) zusammenfallen, so fragen wir nach der ferneren Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit sie eine gerade Linie gemeinschaftlich enthalten. In diesem Falle muss offenbar eine beliebige Ebene

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

stets einen Punkt mit den drei Flächen gemeinschaftlich haben, nämlich denjenigen, in welchem sie jene Gerade durchschneidet, und die Resultante der Elimination zwischen U, V, W und der Gleichung der Ebene muss daher verschwinden. Diese Resultante ist aber vom Grade $\lambda\lambda'\lambda''$ in a_1, a_2, a_3, a_4 und vom Grade

$$\lambda'\lambda''\mu + \lambda''\lambda\mu' + \lambda\lambda'\mu'' \quad \text{in} \quad x'_1, x'_2, x'_3, x'_4.$$

Da sie gebildet wird, indem man nach einander die Coordinaten der Durchschnittspunkte von U, V, W in die lineare Gleichung einsetzt und die Substitutionsresultate mit einander multipliciert, so muss sie von der Form

$$\Pi \,.\, (a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3 + a_4x'_4)^{\lambda\lambda'\lambda''}$$

sein. Von den beiden Factoren derselben ist aber die Bedingung

$$a_1x'_1 + a_2x'_2 + a_3x'_3 + a_4x'_4 = 0$$

nur der Ausdruck des Umstandes, dass die willkürliche Ebene durch den Punkt (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) gehe, weil sie dann einen den drei Flächen gemeinschaftlichen Punkt enthält, ob diese nun eine gerade Linie gemein haben oder nicht; sie ist also der Frage fremd. Die Bedingung, unter welcher jene Flächen eine gerade Linie gemein haben, ist also

$$\Pi = 0$$

und ist somit von dem Grade

$$\lambda'\lambda''\mu + \lambda''\lambda\mu' + \lambda\lambda'\mu'' - \lambda\lambda'\lambda''.$$

In unserem Falle also, wo den Ausdrücken der Polynome $\varDelta U'$, $\varDelta^2 U'$, $\varDelta^3 U'$ entsprechend

$$\lambda = 1, \quad \lambda' = 2, \quad \lambda'' = 3;$$
$$\mu = n - 1, \quad \mu' = n - 2, \quad \mu'' = n - 3 \;.$$

ist, ergiebt sich für den Grad von Π die Zahl

$$11n - 24,$$

d. h. die Berührungspunkte der Geraden, welche die Fläche in vier auf einander folgenden Punkten schneiden, oder wie man sie nennen mag, der Doppel-Inflexionstangenten, liegen in dem Durchschnitt der Fläche mit einer derivierten Fläche S von der Ordnung $(11n - 24)$.*) (Vergl. oben p. 434, 435.)

327. Die Ausführung der bezeichneten Elimination kann erreicht werden, indem wir die Coordinaten der beiden Punkte bestimmen, in denen die willkürliche Ebene, die Tangentenebene $\varDelta U' = 0$ und die quadratische Polarfläche $\varDelta^2 U' = 0$ sich schneiden; diese Coordinaten nach einander in $\varDelta^3 U'$ substituieren und das Product der Substitutionsresultate bilden. Wir werden die Coordinaten des Berührungspunktes mit x_1, x_2, x_3, x_4, die laufenden Coordinaten mit y_1, y_2, y_3, y_4 bezeichnen und den schon gebrauchten Differentialsymbolen die damit verständlichen U_{12}, U_{123}, etc., die Letztern für die dritten Differentiale, hinzufügen. Durch jede der Durchschnittslinien von $\varDelta U' = 0$ und $\varDelta^2 U' = 0$ können wir eine Ebene legen, d. i. bei entsprechender Bestimmung von t_1, t_2, t_3, t_4 kann man in unendlich vielen

*) Dieser Satz ward zuerst vom Verfasser im Jahre 1849 im „Cambridge and Dublin Math. Journ." (Vol. IV, p. 260) gegeben. Er entwickelte sodann im „Quarterly Journal of Math.", Vol. I, p. 336, die Gleichung von S in einer unvollkommenen und in „Philosoph. Transactions", 1860, p. 239 in einer schicklicheren Form. Statt dieser Untersuchung theilen wir im Texte die schöne, auch für die Behandlung anderer Probleme lehrreiche Durchführung der geforderten Elimination mit, welche A. Clebsch im LVIII. Bande des „Journal f. Math." p. 93—108 gegeben hat. Wir verbinden damit weiterhin die wichtigen Ergänzungen, welche in der gleichnamigen Abhandlung im LXIII. Bande desselben Journals (p. 14 f.) von ihm hinzugefügt wurden.

Arten eine identisch erfüllte Gleichung bilden, wie folgt

$$\Delta^2 U' + (t_1 y_1 + t_2 y_2 + t_3 y_3 + t_4 y_4)\, \Delta U'$$
$$= (p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + p_4 y_4)\,(q_1 y_1 + q_2 y_2 + q_3 y_3 + q_4 y_4) \cdots \quad \text{A)}.$$

Wir setzen voraus, dass diese Transformation vollzogen sei, haben aber nicht nöthig, die wirklichen Werthe der t zu bestimmen, da sich findet, dass diese Grössen aus dem Ergebniss verschwinden.

Ist die willkürliche Ebene durch

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + c_4 y_4 = 0$$

dargestellt, so sind offenbar die Coordinaten der Durchschnittspunkte der willkürlichen Ebene, der Tangentenebene

$$U_1 y_1 + U_2 y_2 + U_3 y_3 + U_4 y_4 = 0$$

und der Fläche

$$\Delta^2 U' = 0$$

durch die vier Determinanten der beiden Systeme

$$\left\| \begin{matrix} c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \\ U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ p_1, & p_2, & p_3, & p_4 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} c_1, & c_2, & c_3, & c_4 \\ U_1, & U_2, & U_3, & U_4 \\ q_1, & q_2, & q_3, & q_4 \end{matrix} \right\|$$

bestimmt. Wir haben nun diese Coordinaten in die Form $\Delta^3 U'$ einzusetzen, welche wir in der symbolischen Gestalt

$$(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + a_4 y_4)^3$$

schreiben können, wenn die a_1, a_2, etc. die Symbole

$$\frac{d}{dx_1},\ \frac{d}{dx_2},\ \text{etc.}$$

bezeichnen, so dass wir nach der Entwickelung für irgend ein Glied $a_1 a_2 a_3 y_1 y_2 y_3$ das Product $U_{123}\, y_1 y_2 y_3$, etc., zu substituieren haben.

Es ergiebt sich daraus, dass das Resultat der Substitution der Coordinaten des ersten Punktes in $\Delta^3 U'$ als die dritte Potenz der symbolischen Determinante

$$\Sigma a_1 c_2 U_3 p_4$$

dargestellt werden kann, wenn nach der Potenzierung für die Potenzen der a in der eben angeführten Weise dritte Differentialquotienten eingesetzt werden, nämlich

$$\text{für} \quad a_i a_k a_m \quad \text{das Differential} \quad U_{ikm} = \frac{d^3 U}{dx_i\, dx_k\, dx_m}.$$

In derselben Weise bezeichnen wir das Resultat der Substitution der Coordinaten des zweiten Schnittpunktes durch

$$(\Sigma b_1 c_2 U_3 q_4)^3,$$

wo b_1 ein in derselben Weise wie a_1 gebrauchtes Symbol ist.*) Dann kann die fragliche Resultante in der Form

$$(\Sigma a_1 c_2 U_3 p_4)^3 \ (\Sigma b_1 c_2 U_3 q_4)^3 = 0$$

geschrieben werden. Man kann diess Ergebniss in mehr symmetrischer Gestalt schreiben

$$(\Sigma a_1 c_2 U_3 p_4)^3 \ (\Sigma b_1 c_2 U_3 q_4)^3 + (\Sigma b_1 c_2 U_3 p_4)^3 \ (\Sigma a_1 c_2 U_3 q_4)^3 = 0;$$

denn da die Grössen a und p nach der Entwickelung durch Differentiale ersetzt werden, so ist es gleichgültig, ob das ursprünglich gebrauchte Zeichen a oder b war und die linke Seite des letzten symmetrischen Ausdrucks ist somit nichts Anderes als das Doppelte der linken Seite des Vorigen.

Wir haben die Entwickelung zu bilden und sie von den noch unbekannten Grössen p und q mittelst der Gleichung A) zu befreien.

328. Wir setzen

$$F = (\Sigma a_1 c_2 U_3 p_4) \ (\Sigma b_1 c_2 U_3 q_4), \quad G = (\Sigma b_1 c_2 U_3 p_4) \ (\Sigma a_1 c_2 U_3 q_4),$$

so dass die Resultante durch

$$F^3 + G^3 = 0 \quad \text{oder} \quad (F + G)^3 - 3FG\,(F + G) = 0$$

dargestellt wird, und untersuchen nun getrennt $(F + G)$ und FG, um die p und q zu entfernen. Da die Factoren von F und G in Bezug auf die p und q linear sind, so würde die Trennung dieser Grössen in denselben ihnen die Form

$$F = (m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + m_4 p_4) \ (n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3 + n_4 q_4),$$
$$G = (n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4) \ (m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 + m_4 q_4)$$

geben, in welcher die Coefficienten m und n aus den Werthen von F und G zu entnehmen sind, so dass z. B.

$$m_4 = \Sigma a_1 c_2 U_3, \quad n_4 = \Sigma b_1 c_2 U_3$$

ist. Daraus folgt, dass der Coefficient von einem Gliede $m_i n_j$ in

*) Wir benutzen für die Symbole $\frac{d}{dx}$, etc. in beiden Determinanten verschiedene Zeichen, um das scheinbare Auftreten sechster Potenzen von a, d. h. sechster Differentiale zu vermeiden. Die hier gebrauchte Methode ist im Wesentlichen mit Cayley's „Rechnung mit Hyperdeterminanten" (vergl. „Vorlesungen", p. 163—192) identisch.

der Entwickelung von $(F + G)$

$$= p_i q_j + p_j q_i$$

ist, so dass wir schreiben können

$$F + G = \Sigma\Sigma m_i n_j\, (p_i q_j + p_j q_i),$$

wo die Summe sich über alle Werthe erstreckt, welche den Coefficienten 1 bis 4 entspringen.

Aus der Vergleichung der Coefficienten in der Gleichung A) folgt aber

$$p_i q_j + p_j q_i = 2\,U_{ij}\,(t_i U_j + t_j U_i),$$

also

$$F + G = 2\Sigma\Sigma m_i n_j U_{ij} + \Sigma\Sigma m_i n_j\,(t_i U_j + t_j U_i).$$

Wenn man sodann für jedes Glied von der Form $(p_i q_j + p_j q_i)$ den Ausdruck $(t_i U_j + t_j U_i)$ substituiert, so ist das Resultat offenbar dasselbe, als wenn in F und G die Grössen p und q mit t und U vertauscht werden. Durch die Vertauschung der q mit den U verschwinden aber die Determinanten $\Sigma a_1 c_2 U_3 q_4$, $\Sigma b_1 c_2 U_3 q_4$, weil sie dadurch zwei identische Reihen enthalten; es verschwindet somit in $(F + G)$ die letzte Reihe der Glieder und man erhält

$$\tfrac{1}{2}\,(F + G) = \Sigma\Sigma m_i n_j U_{ij},$$

was in Erinnerung der Werthe von m_i und n_j in der Determinantenform

$$- \begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_{14}, & a_1, & c_1, & U_1 \\ U_{21}, & U_{22}, & U_{23}, & U_{24}, & a_2, & c_2, & U_2 \\ U_{31}, & U_{32}, & U_{33}, & U_{34}, & a_3, & c_3, & U_3 \\ U_{41}, & U_{42}, & U_{43}, & U_{44}, & a_4, & c_4, & U_4 \\ b_1\ , & b_2\ , & b_3\ , & b_4\ , & 0\,, & 0\,, & 0 \\ c_1\ , & c_2\ , & c_3\ , & c_4\ , & 0\,, & 0\,, & 0 \\ U_1\ , & U_2\ , & U_3\ , & U_4\ , & 0\,, & 0\,, & 0 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden kann. Denn da diese Determinante aus jeder der letzten drei Horizontal- und Verticalreihen enthält, so ist sie vom ersten Grade in U_{11}, etc. und der Coefficient irgend eines Gliedes U_{14} ist

$$-\left\{\Sigma a_2 c_3 U_4 \Sigma b_1 c_2 U_3 + \Sigma a_1 c_2 U_3 \Sigma b_2 c_3 U_4\right\}$$

oder

$$-\,(m_1 n_4 + m_4 n_1).$$

In der eben geschriebenen Determinante ist die Matrix der Hesse'schen Determinante mit den verticalen und horizontalen

Elementenreihen der a, c, U; b, c, U verbunden, man kann sagen gesäumt. Da wir solche Determinanten noch oft benutzen werden, so scheint es zweckmässig, eine Abkürzung für sie einzuführen, und wir wollen durch solche das eben gewonnene Resultat in der Form

$$F + G = -2\begin{pmatrix} a, & c, & U \\ b, & c, & U \end{pmatrix}$$

darstellen.

329. In gleicher Art kann die Grösse FG transformiert werden. Sie ist das Product von

$$(m_1 p_1 + m_2 p_2 + m_3 p_3 + m_4 p_4)\ (m_1 q_1 + m_2 q_2 + m_3 q_3 + m_4 q_4)$$

und

$$(n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_4 p_4)\ (n_1 q_1 + n_2 q_2 + n_3 q_3 + n_4 q_4).$$

Wenn man das erste dieser Producte entwickelt und für jedes $(p_1 q_2 + p_2 q_1)$ seinen aus der Gleichung A) abgeleiteten Werth einsetzt, so ergiebt sich wie vorher, dass die Glieder sämmtlich verschwinden, welche t enthalten, so dass das Resultat durch

$$\Sigma\Sigma m_i n_j U_{ij}$$

oder wie vorher durch

$$\begin{pmatrix} a, & c, & U \\ a, & c, & U \end{pmatrix}$$

dargestellt ist, d. h. durch eine Determinante, welche aus der Hesse'schen durch Hinzufügung der nämlichen horizontalen und verticalen Elementenreihen hervorgeht. Die Transformation des zweiten Products giebt ein ganz analoges Resultat und wir finden so, dass die Gleichung

$$(F + G)^3 - 3FG\,(F + G) = 0$$

oder

$$(F + G)\left\{(F + G)^2 - 3FG\right\} = 0$$

in

$$\begin{pmatrix} a, & c, & U \\ b, & c, & U \end{pmatrix} \left\{4\begin{pmatrix} a, & c, & U \\ b, & c, & U \end{pmatrix}^2 - 3\begin{pmatrix} a, & c, & U \\ a, & c, & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b, & c, & U \\ b, & c, & U \end{pmatrix}\right\} = 0$$

übergeht. Es bleibt übrig, diesen symbolischen Ausdruck so umzuformen, dass er die c in einem dem Ganzen gemeinsamen Factor $(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4)$ enthält. Wir werden dabei an Stelle der Aggregate

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4),\quad (b_1 x_1 + \ldots),\quad (c_1 x_1 + \ldots)$$

die Buchstaben a, b, c verwenden.

330. Der Anblick der durch

$$\begin{pmatrix} a, & c, & U \\ b, & c, & U \end{pmatrix}$$

bezeichneten Determinante des Artikel 328 zeigt, dass nach den Relationen

$$U_{11}x_1 + U_{12}x_2 + U_{13}x_3 + U_{14}x_4 = (n-1)\ U_1, \text{ etc.}$$

eine Reduction derselben dadurch möglich ist, dass man die ersten vier Reihen respective mit x_1, x_2, x_3, x_4 multipliciert und die Summen der Producte von den entsprechenden mit $(n-1)$ multiplicierten Elementen der letzten Reihe abzieht; man erhält dadurch

$$-\frac{1}{(n-1)^2}\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_{14}, & a_1, & c_1, & 0 \\ U_{21}, & U_{22}, & U_{23}, & U_{24}, & a_2, & c_2, & 0 \\ U_{31}, & U_{32}, & U_{33}, & U_{34}, & a_3, & c_3, & 0 \\ U_{41}, & U_{42}, & U_{43}, & U_{44}, & a_4, & c_4, & 0 \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & 0, & 0, & -b \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & 0, & 0, & -c \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -a, & -c, & 0 \end{vmatrix},$$

welches durch theilweise Entwickelung giebt

$$-\frac{1}{(n-1)^2}\left\{c^2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} - ac\begin{pmatrix}c\\b\end{pmatrix} - b^2\begin{pmatrix}c\\a\end{pmatrix} + ab\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}\right\};$$

wenn nämlich $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ die Determinante bezeichnet, welche durch Verbindung der Matrix der Hesse'schen Determinante mit einer Verticalreihe der a und einer Horizontalreihe der b entsteht, etc.

In der nämlichen Weise erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a, & c, & U \\ a, & c, & U \end{pmatrix} = -\frac{1}{(n-1)^2}\left\{c^2\begin{pmatrix}a\\a\end{pmatrix} - 2ac\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix} + a^2\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}\right\},$$

$$\begin{pmatrix} b, & c, & U \\ b, & c, & U \end{pmatrix} = -\frac{1}{(n-1)^2}\left\{c^2\begin{pmatrix}b\\b\end{pmatrix} - 2bc\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} + b^2\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}\right\}.$$

Zur Vereinfachung dieser Ausdrücke behufs der Substitutionen bei den a setzen wir

$$d_i = cb_i - bc_i,$$

so dass also

$$d = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4$$

wird, und erhalten dann

$$\binom{d}{a} = c^2 \binom{b}{b} - 2bc \binom{b}{c} + b^2 \binom{c}{c},$$

$$\binom{c}{d} = c \binom{b}{c} - b \binom{c}{c},$$

$$\binom{a}{d} = c \binom{a}{b} - b \binom{a}{c};$$

somit aber

$$\begin{pmatrix} b, & c, & U \\ b, & c, & U \end{pmatrix} = - \frac{1}{(n-1)^2} \binom{d}{d},$$

$$\begin{pmatrix} a, & c, & U \\ b, & c, & U \end{pmatrix} = - \frac{1}{(n-1)^2} \left\{ c \binom{a}{d} - a \binom{c}{d} \right\};$$

so dass die am Ende des Artikel 239 gegebene Gleichung der Fläche sich in die Form

$$\left\{ c \binom{a}{d} - a \binom{c}{d} \right\} \left[4 \left\{ c \binom{a}{d} - a \binom{c}{d} \right\}^2 \right.$$
$$\left. - 3 \binom{d}{d} \left\{ c^2 \binom{a}{a} - 2ac \binom{a}{c} + a^2 \binom{c}{c} \right\} \right] = 0$$

überführt.

331. Auf Grund dieser Form können wir zur Entwickelung schreiten und für jedes Glied $a_1 a_2 a_3$, etc. derselben den entsprechenden Differentialquotienten substituieren. Dann ist zuerst offenbar, dass

$$a^3 = n\,(n-1)\,(n-2)\,U = 0, \quad a^2 a_1 = (n-1)\,(n-2)\,U_1, \text{ etc.}$$

ist, also

$$a^2 \binom{a}{c} = (n-1)\,(n-2) \binom{U}{c}.$$

Aber hier ist die letzte Determinante wie in vielen ähnlichen Fällen dadurch reducierbar, dass man die Producte der Elemente der vier ersten Reihen mit x_1, x_2, x_3, x_4 von denen der fünften Reihe subtrahiert; so erhalten wir

$$a^2 \binom{a}{c} = - (n-2)\, Hc.$$

Ferner ist nach dem Artikel 161 der „Vorlesungen“

$$\binom{a}{a} = - \Sigma \frac{dH}{dU_{mn}} a_m a_n,$$

so dass wir haben

$$a \binom{a}{a} = - (n-2)\, \Sigma \frac{dH}{dU_{mn}} U_{mn} = - 4\,(n-2)\, H.$$

Endlich ist $a\binom{a}{c}\binom{a}{d}$ zu berechnen. Bezeichnen wir mit H_{mn} die durch Unterdrückung der Horizontal- und Verticalreihe des Elements U_{mn} aus der Hesse'schen Determinante entspringende Minordeterminante, so erkennt man leicht, dass

$$a\binom{a}{c}\binom{a}{d} = -(n-2)\ \Sigma H_{mp} H_{nq} U_{mn} c_p d_q$$

ist, wenn in der Summe die Zahlen m, n, p, q alle möglichen Werthe von 1 bis 4 empfangen. Aber nach dem Artikel 19 der „Vorlesungen" ist

$$H_{mp} H_{nq} = H_{mn} H_{pq} - H\frac{dH_{pq}}{dU_{mn}},$$

so dass durch Substitution dieses Werthes und in Erinnerung, dass

$$\Sigma H_{mn} U_{mn} = 4H$$

ist,

$$a\binom{a}{c}\binom{a}{d} = -(n-2)\,H\binom{c}{d}$$

erhalten wird. Indem man die so gewonnenen Substitutionen vollzieht, erhält man

$$\left\{c\binom{a}{d} - a\binom{c}{d}\right\}^3 = c^3\binom{a}{d}^3 + 3(n-2)\,Hc^2\binom{c}{d}\binom{d}{d}$$
$$- 3(n-2)\,Hcd\binom{c}{d}^2,$$

$$\left\{c\binom{a}{d} - a\binom{c}{d}\right\}\left\{c^2\binom{a}{a} - 2ac\binom{a}{c} + a^2\binom{c}{c}\right\}$$
$$= c^3\binom{a}{d}\binom{a}{a} + 4(n-2)\,Hc^2\binom{c}{d} - (n-2)\,Hcd\binom{c}{c}.$$

Indem man die Bedeutung der Symbole d_1, etc. betrachtet, sieht man, dass d oder $d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4$ identisch verschwindet; wenn man also in die zu reducierende Gleichung die eben erhaltenen Werthe einsetzt, so wird sie durch c^3 theilbar und kommt dadurch auf die Form

$$4\binom{a}{d}^3 - 3\binom{a}{d}\binom{a}{a}\binom{d}{d} = 0.$$

332. Um diese Form weiter zu vereinfachen, setzen wir für d seinen Werth ein, wodurch sie wird

$$4\left\{c\binom{b}{a}-b\binom{c}{a}\right\}^3-3\binom{a}{a}\left\{c\binom{b}{a}-b\binom{c}{a}\right\}$$
$$\left\{c^2\binom{b}{b}-2bc\binom{b}{c}+b^2\binom{c}{c}\right\}.$$

Diess ist aber genau die nämliche Form, welche im letzten Artikel reduciert worden ist, mit dem einzigen Unterschiede, dass b an Stelle von a und a an Stelle von d steht. Wir können daher auf Grund desselben Verfahrens schreiben

$$4\left\{c\binom{b}{a}-b\binom{c}{a}\right\}^3$$
$$=4\left\{c^3\binom{b}{a}^3+3(n-2)\,Hc^2\binom{c}{a}\binom{a}{a}-3(n-2)\,Hca\binom{c}{a}^2\right\},$$

während der noch übrige Theil der Gleichung

$$=3\binom{a}{a}\left\{c^3\binom{b}{a}\binom{b}{b}+4(n-2)\,Hc^2\binom{c}{a}-(n-2)\,Hca\binom{c}{c}\right\}$$

wird. In beiden Ausdrücken können endlich die letzten Glieder mit Hilfe des Artikels 331 auf

$$12\,(n-2)^2\,H^2c\binom{c}{c}$$

reduciert werden. Subtrahieren wir dann, so erhalten wir nach Division durch c^3 allen das von der Frage fremden Factoren befreite Endresultat in der symbolischen Form

$$\binom{b}{a}\left\{4\binom{b}{a}^2-3\binom{b}{b}\binom{a}{a}\right\}=0.$$

333. Es bleibt übrig nachzuweisen, wie dasselbe in der gewöhnlichen Bezeichnungsweise dargestellt werden kann. Dazu transformieren wir es durch die bekannte Identität (vergl. „Vorlesungen", Artikel 19)

$$H\binom{a,\ b}{a,\ b}=\binom{a}{a}\binom{b}{b}-\binom{a}{b}^2$$

und erhalten

$$\binom{b}{a}\binom{a}{a}\binom{b}{b}-4H\binom{b}{a}\binom{a,\ b}{a,\ b}=0.$$

Hier drückt nun $\binom{b}{a}\binom{a}{a}\binom{b}{b}$ die früher im Artikel 301 mit Θ bezeichnete Covariante aus; denn wenn H_{mn} dieselbe Bedeutung behält wie vorher, so kann die Entwickelung des symbolischen Ausdrucks durch

$$\Sigma H_{mn} H_{pq} H_{rs} U_{mnr} U_{pqs}$$

dargestellt werden, wo jeder der Indices alle die Werthe von 1 bis 4 zu erhalten hat. Nun ist der Differentialquotient von H in Bezug auf x_r

$$\frac{dH}{dx_r} = \Sigma H_{mn} U_{mnr},$$

so dass

$$\Theta = \Sigma H_{rs} \frac{dH}{dx_r} \frac{dH}{dx_s}$$

ist, d. h. in abweichender Bezeichnung dasselbe, was im Artikel 301 durch Θ bezeichnet ward.

Die Covariante S ist daher auf die Form

$$\Theta - 4H\Phi$$

reduciert, in welcher

$$\Phi = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a, & b \\ a, & b \end{pmatrix} = \Sigma H_{mn} H_{pq,rs} U_{mpq} U_{nrs}$$

ist, wenn wir mit $H_{pq,rs}$ eine zweite Minordeterminante bezeichnen, die aus der Matrix der Hesse'schen Determinante durch Unterdrückung von zwei Columnen hervorgeht.

In ihr ist Θ vom Grade $(11n - 24)$ und Φ vom Grade

$$5(n-2) + (2n-3) = 7n - 16.$$

Für die Oberflächen dritter Ordnung reduciert sich Φ auf die einfachere Form

$$\Sigma H_{mn} \frac{d^2 H}{dx_m dx_n},$$

wie vorher erwähnt ist.

Wir fügen die Bemerkung von Cayley hinzu, dass die Gleichung der Fläche S ganz in derselben Weise die Transformation der im Artikel 186 gegebenen allgemeinen Gleichung ist, welche für jeden Punkt einer Regelfläche erfüllt ist, wie die Gleichung der Hesse'schen Determinantenfläche als Transformation der Differentialgleichung der developpabeln Flächen

$$rt - s^2 = 0$$

im Artikel 194 nachgewiesen worden ist.

334. Die Oberfläche $S = 0$ berührt die Hesse'sche Determinantenfläche $H = 0$ längs einer Curve.

Für den Schnitt mit $H = 0$ reduciert sich die Gleichung von S auf

$$\Theta = 0$$

und man hat zu zeigen, dass diese Fläche die Fläche $H = 0$ berührt.

Nun wird Θ gebildet, indem man die Matrix der Hesse'schen Determinante mit horizontalen und verticalen Elementenreihen aus den Differentialen der Hesse'schen Determinante erweitert, d. h. $\Theta = 0$ ist dem symbolischen Ausdruck

$$\binom{H}{H} = 0$$

äquivalent. Da nun nach einer mehrfach benutzten identischen Gleichung

$$H\begin{pmatrix} c, & H \\ c, & H \end{pmatrix} = \binom{H}{H}\binom{c}{c} - \binom{H}{c}^2$$

ist, für ein willkürliches c, so berührt $\Theta = 0$ die Fläche $H = 0$ längs ihres Durchschnitts mit der Fläche

$$\binom{H}{c} = 0,$$

welche von der Ordnung $(7n - 15)$ ist. Somit berührt die Fläche $S = 0$ die Fläche $H = 0$ und durch die Berührungscurve gehen unendlich viele Flächen der Ordnung $(7n - 15)$.

335. Die Schnittpunkte dieser Curve mit der Fläche $U = 0$ sind bemerkenswerth. Sie sind zuerst die Punkte der Curve

$$S = 0, \quad U = 0,$$

in denen beide Haupt- oder Inflexionstangenten zusammenfallen, da diese Eigenschaft allen Schnittpunkten von $H = 0$, $U = 0$ zukommt.

Sie sind aber zugleich die einzigen Punkte, in welchen die parabolische Curve

$$H = 0, \quad U = 0$$

eine Curve der Haupttangenten, d. h. eine Krümmungslinie berühren kann. Für solche Punkte sind nämlich die Gleichungen

$$\Sigma U_i dx_i = 0, \quad \Sigma U_{ik} dx_i dx_k = 0, \quad \Sigma k_i dx_i = 0,$$

die Gleichungen der Haupttangenten, zugleich mit

$$dH = H_1 dx_1 + H_2 dx_2 + H_3 dx_3 + H_4 dx_4$$

zu erfüllen, so dass durch die Elimination der dx die Bedingung

$$\begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_{14}, & H_1, & U_1, & k_1 \\ U_{21}, & U_{22}, & U_{23}, & U_{24}, & H_2, & U_2, & k_2 \\ U_{31}, & U_{32}, & U_{33}, & U_{34}, & H_3, & U_3, & k_3 \\ U_{41}, & U_{42}, & U_{43}, & U_{44}, & H_4, & U_4, & k_4 \\ H_1, & H_2, & H_3, & H_4, & 0, & 0, & 0 \\ U_1, & U_2, & U_3, & U_4, & 0, & 0, & 0 \\ k_1, & k_2, & k_3, & k_4, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sich ergiebt, die man mit Hilfe von

$$(n-1)\, U_i = U_{i1} x_1 + U_{i2} x_2 + U_{i3} x_3 + U_{i4} x_4$$

reducieren kann, so dass sie wegen $H = 0$

$$0 = \Theta\, (k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4)^2$$

liefert. Die Schnittpunkte von

$$H = 0, \quad U = 0, \quad \Theta = 0$$

sind also die einzigen Punkte dieser Art. Man hat also den Satz: Die Curve der parabolischen oder Wendepunkte der Fläche berührt die Curve der Berührungspunkte vierpunktiger Tangenten überall, wo sie ihr begegnet und zwar in $2n\,(n-2)\,(11n-24)$ verschiedenen Punkten; nämlich in der Hälfte der Zahl der Schnittpunkte von

$$U = 0, \quad \Theta = 0, \quad S = 0.$$

Durch diese Punkte lassen sich unzählig viele Flächen $\binom{H}{\alpha}$ der Ordnung $(7n-15)$ legen, welche die Curve der Wendepunkte noch in

$$4n\,(n-2)\,(7n-15) - 2n\,(n-2)\,(11n-24) = 6n\,(n-2)^2$$

und die Curve der vierpunktigen Berührungen noch in

$$n\,(7n-15)\,(11n-24) - 2n\,(n-2)\,(11n-24)$$
$$= n\,(5n-11)\,(11n-24)$$

andern Punkten schneiden. In diesen Punktesystemen wird jede der beiden Curven durch andere Curven berührt, welche sie ausserdem nicht mehr schneiden, nämlich die Curve der Wendepunkte durch den Schnitt von $U = 0$ und der Oberfläche $3\,(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\binom{\alpha}{\alpha} = 0$ und die Curve der vierpunktigen Berührungen durch den Schnitt von $U = 0$ mit der Fläche $(10n-22)^{\text{ter}}$ Ordnung $\binom{\alpha H}{\alpha H} = 0$. Daraus folgt sodann, da jede etwa in der Fläche $U = 0$ gelegene Gerade zugleich der Fläche $S = 0$ angehört und mit der Fläche $H = 0$ Punkte in der Zahl $4(n-2)$ gemein hat, der Satz: Wenn eine Fläche eine gerade Linie enthält, so ist diese eine $2(n-2)$ fache Tangente der parabolischen Curve. (Vergl. Artikel 26.)

Und eine Oberfläche n^{ter} Ordnung kann im Allgemeinen nicht mehr als $n(11n-24)$ Gerade enthalten, da die Zahl der Berührungspunkte mit der parabolischen Curve nicht $2n(n-2)(11n-24)$ übersteigen kann.

Für die Fläche dritter Ordnung ist S von der Ordnung neun, die Curve der vierpunktigen Berührungen zerfällt in Gerade und die Zahl derselben ist sieben und zwanzig. Sie berühren die parabolische Curve in $2n(n-2)(11n-24) = 54$ Punkten, den Asymptotenpunkten nach Steiner's Benennung oder den Doppelpunkten der in jener Geraden gelegenen Involutionssysteme. (Artikel 290.)

336. Die Gleichung der Fläche, welche durch die vierpunktigen oder Doppelinflexionstangenten erzeugt wird, erhält man durch die Elimination von x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 zwischen den Gleichungen

$$U' = 0, \quad \varDelta U' = 0, \quad \varDelta^2 U' = 0, \quad \varDelta^3 U' = 0;$$

die Resultante ist nach der gewöhnlichen Regel vom Grade

$$n(n-2)(n-3) + 2n(n-1)(n-3) + 3n(n-1)(n-2)$$
$$= 6n^3 - 22n^2 + 18n.$$

Nun characterisiert diess Ergebniss offenbar den Ort der Punkte, deren erste, zweite und dritte Polarflächen sich in der Fläche selbst durchschneiden und enthält somit die Fläche U selbst sechsfach, da für jeden Punkt der letztern die drei ersten Polaren sich in sechs in ihr gelegenen Punkten durchschneiden.

Denken wir also die Eliminationsresultante

$$= U^6 M,$$

so ist M vom Grade

$$2n(n-3)(3n-2).$$

Die betrachtete Fläche ist eine Regelfläche und ihre Ordnung daher gleich der Zahl von Erzeugenden, welche eine willkürlich angenommene Gerade durchschneiden. Man kann also durch eine gegebene Gerade im Allgemeinen $2n(n-3)\,3n-2)$

gerade Linien legen, welche eine gegebene Fläche n^{ter} Ordnung vierpunktig berühren.

337. Wir können in analoger Weise das Problem B) von der Aufsuchung derjenigen Tangenten untersuchen, welche in einem Punkte dreipunktig und zugleich in einem andern einfach berühren.

Für den Berührungspunkt einer Inflexionstangente gelten die drei Gleichungen

$$U' = 0, \quad \varDelta U' = 0, \quad \varDelta^2 U' = 0;$$

und wenn dieselbe die Fläche fernerhin berühren soll, so muss ausserdem

$$W' = 0$$

sein, wenn W' die Discriminante der Gleichung vom $(n-3)^{\text{ten}}$ Grade in $\lambda : \mu$ bezeichnet, welche nach dem Verschwinden der drei ersten Glieder von der Fundamentalgleichung des Artikel 11 und 320 übrig bleibt. Für W' sind also

$$\lambda'' = (n+3)(n-4), \quad \mu'' = (n-3)(n-4),$$

und da wie im letzten Artikel

$$\lambda = 1, \quad \mu = n-1; \quad \lambda' = 2, \quad \mu' = n-2$$

sind, so erhalten wir den Grad von Π

$$2(n-3)(n-4) + (n-2)(n+3)(n-4)$$
$$+ 2(n-1)(n+3)(n-4) - 2(n+3)(n-4);$$

die Ordnung der Fläche, welche durch die Punkte B) geht, ist somit

$$= (n-4)(3n^2 + 5n - 24).$$

Die Gleichung der Fläche, welche durch die Linien b) erzeugt wird, die an der einen Stelle Inflexionstangenten und überdiess an einer zweiten einfache Tangenten sind, wird gebildet, indem man die x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 zwischen den vier Gleichungen

$$U' = 0, \quad \varDelta U' = 0, \quad \varDelta^2 U' = 0, \quad W' = 0$$

eliminiert; und aus dem, was eben über den Grad der Veränderlichen in jeder dieser Gleichungen gesagt worden ist, ergiebt sich der Grad der Resultante

$$= n(n-2)(n-3)(n-4) + 2n(n-1)(n-3)(n-4)$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n+3)(n-4)$$
$$= n(n-4)(n^3 + 3n^2 - 20n + 18).$$

Man erkennt aber wie im letzten Artikel, dass diese Resultante die Form U in der Potenz $2(n+3)(n-4)$ als Factor enthalten muss, und erhält nach Ausscheidung desselben die Ordnung der Fläche b)

$$= n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4).$$

338. Damit eine Tangente im Punkte (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) an einer andern Stelle eine Inflexionstangente werde, ist nöthig, dass

$$\Delta U' = 0$$

sei — eine Gleichung, für welche $\lambda = 1$, $\mu = n-1$ ist — und dass überdiess das System der zwei Bedingungen erfüllt sei, welchen genügt sein muss, damit die Gleichung $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades in $\lambda : \mu$, die nach dem Verschwinden der zwei ersten Glieder aus der Fundamentalgleichung hervorgeht, drei gleiche Wurzeln habe. Wenn dann $\lambda', \mu'; \lambda'', \mu''$ die Grade bezeichnen, in welchen diese zwei Bedingungsgleichungen die Variabeln enthalten, so wird die Ordnung der durch die Punkte C) gehenden Fläche

$$= \lambda'\mu'' + \lambda''\mu' + (n-2)\lambda'\lambda''. \quad \text{(Vergl. Artikel 326.)}$$

Nach Artikel 319 sind aber

$$\lambda'\lambda'' = (n-4)(n^2+n+6),$$
$$\lambda'\mu'' + \lambda''\mu' = (n-2)(n-4)(n-6).$$

Die Ordnung der Fläche C ist daher

$$= (n-2)(n-4)(n^2+2n+12).$$

339. Der Ort der Berührungspunkte der dreifachen Tangenten wird in derselben Art untersucht, indem wir nur statt der Bedingungen für die Gleichheit dreier Wurzeln in der eben betrachteten Gleichung die andern Bedingungen zu benutzen haben, unter welchen dieselbe zwei verschiedene Paare von gleichen Wurzeln besitzt. Es ist im Artikel 319 bewiesen worden, dass für dieses System von Bedingungen

$$\lambda'\lambda'' = \tfrac{1}{2}(n-4)(n-5)(n^2+3n+6),$$
$$\lambda'\mu'' + \lambda''\mu' = (n-2)(n-4)(n-5)(n+3)$$

ist. Daher wird die Ordnung der Fläche, welche die Punkte D) bestimmen,

$$= \tfrac{1}{2}(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12).$$

Um die Gleichung der durch die dreifachen Tangenten erzeugten Regelfläche zu finden, haben wir die Grössen x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 zwischen den beiden gedachten Bedingungsgleichungen und den Gleichungen

$$U' = 0, \quad \Delta U' = 0$$

zu eliminieren. Da die Ordnung des Resultats

$$= n\mu'\mu'' + n(n-1)(\lambda'\mu'' + \lambda''\mu')$$

ist und dasselbe den Factor

$$U^{\lambda'\lambda''}$$

enthält, so dass von der vorigen Zahl die Zahl $n\lambda'\lambda''$ abzuziehen ist, um die Ordnung der Fläche c) zu finden, so erhalten wir durch Substitution der obigen Werthe für $\lambda'\lambda''$, $\lambda'\mu'' + \lambda''\mu'$, und weil

$$\mu'\mu'' = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$$

ist, jene Ordnung von c)

$$= n(n-3)(n-4)(n-5)(n^2 + 3n - 2),$$

welche Zahl wohl durch drei zu dividieren sein mag.*)

340. Es bleibt übrig, eine andere Gruppe von Problemen zu untersuchen; man kann kurz sagen, die Probleme von der Bestimmung der Anzahl der Tangenten einer Fläche, welche vier Bedingungen genügen.

Wir zählen sie auf. Man soll bestimmen

die Zahl der Punkte α der Fläche, in denen eine fünfpunktige Berührung möglich ist;

die Zahl der Punkte β, in welchen beide Inflexionstangenten vierpunktige Tangenten der Fläche sind;

die Zahl der Punkte γ in der Curve vierpunktiger Berührungen, deren Doppelinflexionstangente zugleich an einer andern Stelle eine einfache Tangente ist;

die Zahl der Geraden δ, welche an zwei verschiedenen Punkten Inflexionstangenten sind;

die Zahl der Geraden ε, welche an einer Stelle als Inflexionstangenten oder dreipunktig und an zwei andern Stellen einfach berühren;

die Zahl der Geraden ζ, welche an vier verschiedenen Stellen einfach berühren.

*) Alle diese Ergebnisse sind in der angeführten Abhandlung „Quarterly Journal of Mathem.", Vol. I entwickelt.

341. Zur Auflösung dieser Probleme bieten wir die folgenden Ergebnisse und Betrachtungen. Zuerst:

Es giebt in der Curve $S = 0$, $U = 0$ Punkte α, in denen eine fünfpunktige Berührung möglich ist. Für dieselben müssen die Durchschnittspunkte von

$$\varDelta U' = 0, \quad \varDelta^2 U' = 0$$

und einer willkürlichen Ebene zugleich den Bedingungen

$$\varDelta^3 U' = 0, \quad \varDelta^4 U' = 0$$

genügen. Die vorher verwendete Methode der Elimination kann auch auf diess Problem angewendet werden und hat zur Ausscheidung des Factors c^6 aus dem Resultat geführt,*) während jedoch der erhaltene Ausdruck die c noch im zweiten Grade enthält. Da derselbe vom Grade $(14n - 30)$ in den Veränderlichen ist, so schliesst man, dass durch diese Punkte — wir wollen sie als die Punkte α bezeichnen — unendlich viele Flächen von der Ordnung $(14n - 30)$ gelegt werden können und dass die Anzahl solcher Punkte α nicht grösser sein kann als

$$n\,(11n - 24)\,(14n - 30).$$

Es scheint nicht möglich, dieselben als vollständige Schnittpunktesysteme dreier Flächen darzustellen.

Andererseits ist offenbar, dass eine solche Linie fünfpunktiger Berührung die Fläche $S = 0$ berühren muss, weil sowohl im ersten als im zweiten der fünf unendlich nahe benachbarten Punkte eine Linie vierpunktiger Berührung gezogen werden kann. Nennen wir α die Zahl solcher Punkte, so sind sie also solche Punkte der Curve

$$U = 0, \quad S = 0,$$

in denen die Tangente dieser Curve mit einer der Inflexionstangenten von $U = 0$ zusammenfällt. Nach dem Beispiel 1) des Artikel 324 liegen diese Punkte also in einer derivierten Fläche von der Ordnung

$$\left\{3n + 2\,(11n - 24) - 8\right\} = 25n - 56.$$

In derselben Fläche liegen aber auch die Punkte β; denn sie sind Doppelpunkte der Curve $U = S = 0$, d. h. Punkte, in welchen diese Flächen einander berühren; in diesen Punkten geht daher auch die Tangentenebene von $S = 0$ durch eine

*) Vergl. a. a. O. p. 106.

Inflexionstangente von $U = 0$. Man erhält damit eine Gleichung

$$\alpha + \lambda\beta = n\,(11n - 24)\,(25n - 56),$$

in welcher λ ein numerischer Factor ist, der gleich 2 sein mag, möglicherweise aber auch grösser sein kann.

Zur Bestimmung der Zahl der Punkte β werden wir sogleich übergehen. Wir bemerken nur noch, dass die Zahlen der Punkte α und γ beide in der Zahl der Durchschnittspunkte der Flächen

$$U = 0, \quad S = 0, \quad T = 0$$

enthalten sein müssen, von denen die Letztere den Ort der Punkte B) (Artikel 337) bezeichnet. Und wenn wir die Punkte suchen, in denen die Tangente der Durchschnittscurve der Flächen

$$U = 0, \quad T = 0$$

eine Inflexionstangente von U ist, so enthält die Anzahl derselben die der Punkte γ, δ, ε und es ist zu beachten, dass die Punkte ε Doppelpunkte, die Punkte δ stationäre Punkte der Curve

$$U = 0, \quad T = 0$$

sind. Solche Relationen sind nicht hinreichend, um die Zahl der Punkte zu bestimmen, die den verschiedenen Problemen entsprechen.

342. Aber in der That lässt sich, wie A. Clebsch gezeigt hat,*) die Zahl β der Doppelpunkte der Curve

$$U = 0, \quad S = 0$$

streng bestimmen und damit fester Fuss zur Lösung dieser Probleme fassen.

Auch diese Entwickelung nimmt ihren Ausgang von derselben Fundamentalgleichung des Artikel 11, die hier schon immer benutzt ward.

Betrachtet man wie vorher

$$\Delta U = 0, \quad \Delta^2 U = 0, \quad \Delta^3 U = 0$$

als Gleichungen von Flächen, deren laufende Coordinaten die y sind, so müssen diese zwei Gerade mit einander gemein haben, d. h. die zwei Geraden, in welchen die Tangentenebene die Polarfläche zweiten Grades schneidet, müssen in der Polarfläche dritten Grades liegen. Darnach muss man stets solche Functionen A und B vom ersten und zweiten Grade in den y bestimmen

*) Vgl. „Journal für Mathem.“, Band LXIII, p. 14 f.

können, dass in Bezug auf die y eine Identität

$$\Delta^3 U = A\,.\,\Delta^2 U + B\,.\,\Delta U$$

stattfindet, welche zwanzig Gleichungen vertritt, die aus der Coefficientenvergleichung hervorgehen. Denken wir α_i, β_{ik} als die Coefficienten in A, B, d. h. setzen wir

$$A = \Sigma \alpha_i y_i, \quad B = \Sigma \beta_{ik} y_i y_k,$$

so ist

1) $\quad 3\,U_{hik} = \alpha_h U_{ik} + \alpha_i U_{kh} + \alpha_k U_{hi} + \beta_{hi} U_k + \beta_{ik} U_h + \beta_{kh} U_i$

der Repräsentant dieser Gleichungen, und ihre Verbindung mit $U = 0$ muss zur Bestimmung der fraglichen Doppelpunkte führen.

Setzt man

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots, \\ \beta &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots, \\ \beta_i &= \beta_{i1} x_1 + \beta_{i2} x_2 + \ldots, \end{aligned}$$

so liefert die Multiplication von 1) mit x_k und Summierung nach k zunächst

$$3\,U_{hi} = \alpha_h U_i + \alpha_i U_h + \alpha\, U_{hi} + \beta_h U_i + \beta_i U_h,$$

und wenn man nochmals mit x_i multipliciert und nach i summiert,

$$3\,U_h = 2\alpha\, U_h + \beta\, U_h,$$

welches fordert

$$3 = 2\alpha + \beta,$$

da nicht alle U_h verschwinden können. Für die Bezeichnung bemerken wir, das stets für φ als eine Function μ^{ten} Grades von x_1, x_2, x_3, x_4

$$\varphi_k = \frac{1}{\mu}\,\frac{d\varphi}{dx_k}$$

gesetzt ist.

Ist dann wieder H die aus den U_{ik} gebildete Hesse'sche Determinante und sind $\mathbf{U}_{ik}$ ihre Unterdeterminanten, so ist

$$4\,(n-2)\,H_h = \Sigma\Sigma \mathbf{U}_{ik}\,(n-2)\,U_{ikh},$$

oder

$$4\,H_h = \Sigma\Sigma \mathbf{U}_{ik}\,U_{ikh};$$

durch Einführung der Werthe 1) also

$$\begin{aligned} 12\,H_h = {} & \alpha_h \Sigma\Sigma \mathbf{U}_{ik} U_{ik} + 2\,\Sigma\Sigma \alpha_i \mathbf{U}_{ik} U_{kh} \\ & + U_h \Sigma\Sigma U_{ik} \beta_{ik} + 2\,\Sigma\Sigma U_i U_{ik} \beta_{kh}. \end{aligned}$$

Aber es ist nach bekannten Sätzen

$$\begin{aligned} &\Sigma\Sigma \mathbf{U}_{ik} U_{ik} = 4\,H, \quad \Sigma\Sigma \alpha_i \mathbf{U}_{ik} U_{kh} = \alpha_h H, \\ &\Sigma\Sigma U_i \mathbf{U}_{ik} \beta_{kh} = \Sigma\Sigma\Sigma U_{im} x_m \mathbf{U}_{ik} \beta_{kh} = \beta_k H, \end{aligned}$$

daher

$$12 H_h = 6\alpha_h H + 2\beta_h H + U_h \Sigma\Sigma \mathbf{U}_{ik}\beta_{ik}$$

und in Abkürzung

$$2)\qquad 12 H_h = (6\alpha_h + 2\beta_h) H + 4 U_h \,.\, M,$$

daraus aber durch Multiplication mit x_h und Summierung nach h

$$12 H = (6\alpha + 2\beta)\ H, \quad \text{d. h.} \quad 6 = 3\alpha + \beta,$$

so dass nun $\alpha = 3$, $\beta = -3$ sein muss und in der obigen Gleichung für $3 U_{hi}$ das U_{hi} ganz herausfällt, oder

$$0 = (\alpha_h + \beta_h)\ U_i + (\alpha_i + \beta_i)\ U_h$$

wird. Diess zeigt für $h = i$

$$\alpha_i = -\beta_i$$

und 2) giebt

$$\alpha_h = \frac{3 H_h - M U_h}{H}.$$

343. Führt man die erhaltenen Werthe in 1) ein und setzt man

$$H\beta_{ik} - M U_{ik} = 3\gamma_{ik},$$

so erhält man

$$3)\quad H \,.\, U_{hik} = H_h U_{ik} + H_i U_{kh} + H_k U_{hi} + U_h \gamma_{ik} + U_i \gamma_{kh} + U_k \gamma_{hi},$$

wo nur die γ noch als unbestimmte Coefficienten auftreten. Und die Combination der vorhergehenden Gleichungen liefert

$$\gamma_i = -H_i.$$

Multipliciert man die Gleichung 3) mit $y_i y_k y_h$ und summiert, so erhält man als Zusammenfassung dieser Gleichungen die eine

$$4)\qquad H \,.\, \Delta^3 U = 3 \Delta H \,.\, \Delta^2 U + 3 \Gamma \,.\, \Delta U.$$

Diese für die y identische Gleichung muss auch dann noch bestehen, wenn man für die y die Coordinaten eines Punktes setzt, der auf $\Delta U = 0$ und auf der Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte a, b liegt. Dann ist

$$y_i = \lambda a_i + \mu b_i$$

und das Verhältniss $\lambda : \mu$ geht aus der Gleichung

$$\lambda \Sigma a_i U_i + \mu \Sigma b_i U_i = 0$$

hervor, so dass für λ, μ selbst die Ausdrücke $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades

$$\Sigma b_i U_i \quad \text{und} \quad -\Sigma a_i U_i$$

gesetzt werden können. Setzt man dieselben in 4) ein, so stellt diese Gleichung eine Fläche der $(8n-14)^{\text{ten}}$ Ordnung dar, welche jene Doppelpunkte enthält, die wir suchen. Diess giebt bei der Unbestimmtheit von a und b den Satz: Durch die Doppelpunkte der Curve vierpunktiger Berührungen gehen unendlich viele Flächen $(8n-14)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Beachtet man ferner, dass

$$\Delta U = 0, \quad \Delta^2 U = 0, \quad \Delta^3 U = 0$$

respective die $(n-1)^{\text{te}}$, $(n-2)^{\text{te}}$, $(n-3)^{\text{te}}$ Polare des Punktes x in Bezug auf die Fläche $U = 0$ darstellen, während $\Delta H = 0$ die letzte Polare desselben Punktes in Bezug auf die Hesse'sche Determinantenfläche ist, so giebt 4) ferner den Satz: Die Tangentenebene der Fläche in einem Doppelpunkte der Curve vierpunktiger Berührungen schneidet die $(n-3)^{\text{te}}$ Polare dieses Punktes in drei geraden Linien, nämlich in den beiden Haupttangenten des Punktes und einer Geraden, die in der letzten Polare des Doppelpunktes in Bezug auf die Hesse'sche Fläche liegt.

344. Dieser Satz ist in dem allgemeineren enthalten: Die Ebene der Punkte, deren in Bezug auf die Hesse'sche Fläche genommene Polare durch einen gegebenen Punkt der Fläche $U = 0$ geht, schneidet die Schnittcurve der diesem Punkte entsprechenden Fläche dritter Ordnung $\Delta^3 U = 0$ und der Tangentenebene von $U = 0$ in diesem Punkte in der Verbindungslinie der drei Wendepunkte der Schnittcurve dritter Ordnung, welche nicht in den Berührungs- oder Doppelpunkt fallen.

Da in diesem Satze nicht höhere als dritte Differentialquotienten von $U = 0$ benutzt werden, so kann man die Fläche dritter Ordnung $\Delta^3 U = 0$ an Stelle von $U = 0$ betrachten und hat den Satz in der für Flächen dritter Ordnung gültigen Fassung zu beweisen: Die Ebene der Punkte, deren in Bezug auf die Hesse'sche Fläche genommene Polare durch einen gegebenen Punkt der Fläche dritter Ordnung $U = 0$ hindurchgeht, schneidet die Schnittcurve der Fläche mit der Tangentenebene des Punktes in der Verbindungslinie derjenigen drei ihrer Wendepunkte, die nicht in den Berührungspunkt fallen.

Zum Beweise denken wir unter $m = 0$ die Gleichung der

Tangentenebene des Punktes x, unter $a=0$, $b=0$ zwei durch seine Haupttangenten gelegte Ebenen, unter $c=0$ die Gleichung einer durch die drei Wendepunkte der Curve dritter Ordnung $U=0$, $m=0$ gehenden Ebene; dann muss für $m=0$ die Gleichung

$$U=0 \quad \text{auf} \quad a^3+b^3+6abc=0$$

zurückkommen, d. h. es muss

$$U=3mV+a^3+b^3+6abc$$

identisch sein, für V als eine Function der zweiten Ordnung. Dann ist

$$U_i = m_i V + 2mV_i + a^2 a_i + b^2 b_i + 2abc_i + 2acb_i + 2cba_i,$$
$$U_{ik} = m_i V_k + m_k V_i + aa_i a_k + bb_i b_k + a(b_i c_k + b_k c_i)$$
$$+ b(c_i a_k + c_k a_i) + c(a_i b_k + a_k b_i).$$

Für den Punkt x ist

$$a=0, \quad b=0, \quad m=0,$$

also wirklich U_i mit m_i proportional, d. h. $m=0$ die Tangentenebene in x; zugleich aber ist

$$U_{ik} = m_i V_k + m_k V_i + c(a_i b_k + a_k b_i).$$

Setzt man daher

$$r = \Sigma \pm m_1 V_2 a_3 b_4,$$

so ist für den Punkt x

$$H = c^2 r^2,$$

$$U_{ik} = c^2 \left(\frac{dr}{dm_i}\frac{dr}{dV_k} + \frac{dr}{dm_k}\frac{dr}{dV_i}\right) + c\left(\frac{dr}{da_i}\frac{dr}{db_k} + \frac{dr}{da_k}\frac{dr}{db_i}\right).$$

345. Bezeichnet man alles einem beliebigen Punkte $\overline{}$ Entsprechende durch einen übergesetzten Horizontalstrich, so ist die Gleichung der letzten Polare von x in Bezug auf H oder die Gleichung der Ebene, für deren Punkte die in Bezug auf H genommene Polare durch x hindurchgeht.

$$4\Sigma \overline{x}_i H_i = \Sigma\Sigma \overline{U}_{ik} \mathbf{U}_{ik} = 0$$

$$= \Sigma\Sigma \left\{c^2 \left(\frac{dr}{dm_i}\frac{dr}{dV_k} + \frac{dr}{dm_k}\frac{dr}{dV_i}\right) + c\left(\frac{dr}{da_i}\frac{dr}{db_k} + \frac{dr}{da_k}\frac{dr}{db_i}\right)\right\}$$
$$\times \left\{m_i \overline{V}_k + m_k \overline{V}_i + \overline{m} V_{ik} + \overline{a} a_i a_k + \overline{b} b_i b_k + \overline{a}(b_i c_k + b_k c_i)\right.$$
$$\left. + \overline{b}(c_i a_k + c_k a_i) + \overline{c}(a_i b_k + a_k b_i)\right\}$$

oder durch Ausführung der Summen einfacher

$$0 = c r \Sigma \overline{V}_i \frac{dr}{dV_i} + c\overline{m} \Sigma\Sigma V_{ik} \frac{dr}{dm_i} \frac{dr}{dV_k} + \overline{m} \Sigma\Sigma V_{ik} \frac{dr}{da_i} \frac{dr}{db_k}$$
$$+ r\overline{a} \Sigma c_i \frac{dr}{da_i} + r\overline{b} \Sigma c_i \frac{dr}{db_i} + \overline{c} r^2.$$

Da aber die Determinante

$$5) \quad \begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3, & m_4, & \overline{m} \\ V_1, & V_2, & V_3, & V_4, & \overline{V}_1 x_1 + \overline{V}_2 x_2 + \ldots \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \overline{a} \\ b_1, & b_2, & b_3, & b_4, & \overline{b} \\ c_1, & c_2, & c_3, & c_4, & \overline{c} \end{vmatrix}$$

$$= \overline{c} r - \overline{m} \Sigma c_i \frac{dr}{dm_i} - \Sigma \overline{V}_i x_i \Sigma c_k \frac{dr}{dV_k} - \overline{a} \Sigma c_i \frac{dr}{da_i} - \overline{b} \Sigma c_i \frac{dr}{db_i}$$

identisch verschwindet, so geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$6) \quad 0 = 2\overline{c} r^2 + M\overline{m} + r \left\{ r \Sigma \overline{V}_i \frac{dr}{dV_i} - \Sigma \overline{V}_i x_i \Sigma c_k \frac{dr}{dV_k} \right\},$$

in welcher der Ausdruck der Function M gleichgültig ist. Durch Auflösung der Gleichungen

$$m = 0, \quad V = 0, \quad a = 0, \quad b = 0$$

findet man

$$r x_i = V \frac{dr}{dV_i},$$

also ist auch

$$r \left\{ c \Sigma \overline{V}_i \frac{dr}{dV_i} - \Sigma \overline{V}_i x_i \Sigma c_k \frac{dr}{dV_k} \right\} = \Sigma \overline{V}_i \frac{dr}{dV_i} \left(rc - V \Sigma c_k \frac{dr}{dV_k} \right)$$

und dieser Ausdruck verschwindet, wie man erkennt, wenn man in 5) die x an Stelle der $\overline{x}$ setzt. In 6) bleiben somit nur die mit $\overline{c}$ und $\overline{m}$ multiplicierten Glieder übrig, die fragliche Ebene geht also durch die Verbindungslinie der in Rede stehenden drei Wendepunkte

$$\overline{c} = 0, \quad \overline{m} = 0.$$

Auch wird der Beweis nicht aufgehoben, wenn die Schnittcurve nicht eine Gleichung der Form

$$a^3 + b^3 + 6abc = 0$$

annehmen kann, d. i. erstens, wenn sie in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfällt oder für

$$a^3 + 6abc = 0,$$

und zweitens, wenn x selbst der parabolischen oder Wendecurve angehört und seine Berührungsebene also in einer Curve mit Rückkehrpunkt schneidet, oder für

$$a^3 + 3b^2c = 0$$

als Gleichung der Curve. Die Anschauung dieser Gleichungen zeigt die Wahrheit der beiden besonderen Sätze: Legt man durch eine der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung eine Ebene, die dann noch in einem Kegelschnitte schneidet, so stehen die beiden Schnittpunkte desselben mit der Geraden und die Tangenten desselben in ihnen in solcher Wechselbeziehung, dass die in Bezug auf die Hesse'sche Fläche genommene Polare jedes Punktes der einen Tangente durch den andern Schnittpunkt hindurchgeht.

Zerfällt der Kegelschnitt in ein Linienpaar, so erhält man den Satz des vorigen Artikels, weil die nach dem Wendepunkte gehende Gerade jetzt unbestimmt wird.

Und legt man in einem Punkte der parabolischen Curve einer Fläche dritter Ordnung an diese eine Tangentenebene, so schneidet diese in einer Curve mit Rückkehrpunkt, die ausser diesem nur noch einen einzigen Wendepunkt besitzt. Die Punkte der Verbindungslinie dieser beiden Punkte haben die Eigenschaft, dass ihre Polaren in Bezug auf die Hesse'sche Fläche durch den Rückkehrpunkt gehen, oder dass die Tangentenebene des Rückkehrpunktes für die Hesse'sche Fläche und die Tangente der Fläche U selbst sich in dieser Geraden schneiden.

Diese Sätze übertragen sich auf die Flächen n^{ter} Ordnung, wenn man statt der Schnittcurve der Tangentenebene $\varDelta U = 0$ mit $U = 0$ ihren Schnitt mit $\varDelta^3 U = 0$ setzt; ob man die Hesse'sche Fläche für $U = 0$ oder für $\varDelta^3 U = 0$ anwendet, bleibt im Resultat gleichgültig.

346. Mit Hilfe dieser Sätze gelangt man zur geometrischen Interpretation des Curvensystems, in welchem die im Artikel 343 bestimmten Flächen $(8n - 14)^{\text{ter}}$ Ordnung die Fläche $U = 0$ durchschneiden.

Denken wir uns in jedem Punkte x der Fläche $U = 0$ die entsprechende Fläche $\varDelta^3 U = 0$ construiert, deren Punkte die

Eigenschaft besitzen, dass ihre dritte Polare durch x geht. Die Tangentenebene von x an $U = 0$ fällt mit der an $\varDelta^3 U = 0$ zusammen und schneidet letztere Fläche in einer Curve mit Doppelpunkt. Denken wir dann die noch übrigen Wendepunkte dieser Curve mit x verbunden, so definiert die Bedingung, dass eine dieser Geraden eine bestimmt gegebene Gerade treffe, den Punkt x als der Curve angehörig, welche eine der Flächen $(8n - 14)^{\text{ter}}$ Ordnung mit $U = 0$ bestimmt.

Denn ist ab diese Gerade, so muss dann der Wendepunkt y Coordinaten von der Form $\lambda a_i + \mu b_i + \varrho x_i$ haben, wenn $\lambda a_i + \mu b_i$ die Coordinaten des Punktes sind, in dem die von x nach y gezogene Gerade die Linie ab schneidet. Der Wendepunkt soll auf

$$\varDelta H = 0, \quad \varDelta U = 0, \quad \varDelta^3 = 0$$

liegen oder man hat, bei Angabe der in den Operationen $\varDelta$ eingeführten Incremente,

$$\begin{aligned}\varDelta_y (H) &= \varDelta_{\lambda a + \mu b} (H) + \varrho H = 0,\\ \varDelta_y (U) &= \varDelta_{\lambda a + \mu b} (U) = 0,\\ \varDelta^3{}_{y^3}(U) &= \varDelta^3{}_{(\lambda a + \mu b)^3} (U) + 3\varrho \varDelta^2{}_{(\lambda a + \mu b)^2} (U) = 0,\end{aligned}$$

d. h. nach Elimination von ϱ

$$6^{a}) \quad \begin{cases} \varDelta_{\lambda a + \mu b} (U) = 0, \\ H \varDelta^3{}_{(\lambda a + \mu b)^3} (U) - 3 \varDelta_{\lambda a + \mu b} (H) \,.\, \varDelta^2{}_{(\lambda a + \mu b)^2} (U) = 0. \end{cases}$$

Hier bestimmen sich aus der ersten Gleichung λ und μ ganz wie im Artikel 343 und ihre Substitution in die zweite giebt die Gleichung derselben Fläche $(8n - 14)^{\text{ter}}$ Ordnung, die oben benutzt ward.

Die geometrische Definition zeigt auch, dass alle Flächen dieser Art durch die Doppelpunkte der Curve vierpunktiger Berührung gehen. Die Ebene $\varDelta U = 0$ schneidet die Fläche $\varDelta^3 U = 0$ für solche Punkte in drei Geraden; der Schnittpunkt von zweien unter ihnen ist der Doppelpunkt und jede von ihm nach der dritten gezogene Gerade ist als nach einem Wendepunkte gezogen zu betrachten; also giebt es stets eine solche Gerade, die ab schneidet, wie auch diese Gerade gelegen sei.

So hat das Curvensystem der Fläche $U = 0$, welches aus den Flächen $(8n - 14)^{\text{ter}}$ Ordnung entspringt, eine Anzahl Schnittpunkte gemein mit der Curve vierpunktiger Berührungen $U = 0$, $S = 0$. Unter ihnen sind die β Doppelpunkte, welche wir suchen und überdiess eine Anzahl σ anderer Schnittpunkte, welche näher zu characterisieren sein werden, und man hat

$$2\beta + \sigma = n\,(8n - 14)\,(11n - 24).$$

347. Das Bedenken, ob nicht vielleicht die Doppelpunkte β auch für die Curve des Systems Doppelpunkte seien, erledigt sich, wenn man die Doppelpunkte dieser Letzteren selbst characterisiert. Sie können offenbar nur entstehen, wenn von einem Punkte der Fläche mehrere Gerade nach der Linie ab gezogen werden können, die durch Wendepunkte des Schnittes von $\Delta U = 0$, $\Delta^3 U = 0$ hindurchgehen.

Diess ist möglich in den Schnittpunkten der Geraden ab mit $U = 0$, zweitens dann, wenn ab in der Tangentenebene von x liegt; drittens, wenn mehr als ein Wendepunkt der Curve

$$\Delta U = 0, \quad \Delta^3 U = 0$$

mit x in einer Geraden liegt, d. h. wenn x entweder ein Rückkehrpunkt oder ein Punkt von $H = 0$ ist, oder wenn die Gerade ab von einer vierpunktig berührenden Tangente geschnitten wird und damit die Curve dritter Ordnung in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt. Zu keiner dieser Abtheilungen gehören die Punkte β, d. h. sie sind einfache Punkte der Fläche $(8n - 14)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Für die übrigen Schnittpunkte dieser Fläche mit der Curve vierpunktiger Berührung muss eine der Geraden durch ab gehen, welche nach einem entsprechenden Wendepunkte gezogen wird. Die entsprechende vierpunktig berührende Gerade muss daher der Curve dritter Ordnung ganz angehören, d. h. diese muss in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfallen, und da für eine solche Curve alle Wendepunkte in der Geraden liegen, so muss diese selbst die Gerade ab schneiden; man erhält also die Zahl dieser Schnittpunkte σ, indem man die Zahl der vierpunktig berührenden Tangenten bestimmt, welche eine gegebene Gerade ab schneiden. Diese ist im Artikel 336 bestimmt worden und führt zu der Relation

$$2\beta + 2n\,(n - 3)\,(3n - 2) = n\,(8n - 14)\,(11n - 24).$$

Man hat nur noch zu zeigen, dass die letztbesprochenen Berührungspunkte nicht zu den vielfachen Punkten der Curve $n\,(8n - 14)^{\text{ter}}$ Ordnung gehören. Die Elimination von λ und μ aus den Gleichungen 6ᵃ) giebt die Gleichung der Fläche $(8n - 14)^{\text{ter}}$

Ordnung in der durch die Abkürzung

$$U_{aaa},\ U_a,\ \text{etc.}\quad \text{für}\quad \Delta^3{}_a{}^3 U,\ \Delta_a U,\ \text{etc.}$$

vereinfachten Form

$$H\,(U_{aaa}\,U_b^3 - 3\,U_{aab}\,U_b^2\,U_a + 3\,U_{abb}\,U_b\,U_a^2 - 2\,U_{bbb}\,U_a^3)$$
$$-\,3\,(H_a\,U_b - H_b\,U_a)\,(U_{aa}\,U_b^2 - 2\,U_{ab}\,U_b\,U_a + U_{bb}\,U_a^2) = 0.$$

Nehmen wir an, der Schnittpunkt der vierpunktig berührenden Geraden mit ab falle in a, so ist

$$U_a = 0,\quad U_{aa} = 0,\quad U_{aaa} = 0$$

und die Tangentenebene der Fläche im Punkte x hat die Gleichung

$$0 = H\left\{(n-3)\,\Delta U_{aaa}\,U_b - 3\,(n-1)\,U_{aab}\,\Delta U_a\right\}$$
$$-\,3\,H_a\left\{(n-2)\,U_b\,\Delta U_{aa} - 2\,(n-1)\,U_{ab}\,\Delta U_a\right\},$$

welche weder unbestimmt wird, noch in der Nähe von x mit dem Elemente der Curve vierpunktiger Berührung zusammenfällt.

Daher gilt die obige Relation und man findet

$$\beta = n\left\{(4n-7)\,(11n-24) - 3\,(n-2)\,(n-3)\right\}$$
$$= n\,(41n^2 - 162n + 162).$$

Für $n = 3$ wird $\sigma = 0$ und die Fläche $(8n-14)^{\text{ter}}$, hier zehnter Ordnung schneidet die sieben und zwanzig Geraden der Fläche, die Curve ihrer vierpunktigen Berührungen in den $3 \,.\, 5 \,.\, 9 = 135$ Schnittpunkten, die sie mit einander bestimmen.

Von singulären Tangentenebenen der Flächen.

348. Man kann eine analoge Untersuchungsmethode auf die verschiedenen Fälle der berührenden Ebenen anwenden.

Jede Ebene, welche eine Fläche berührt, schneidet sie in einer Curve, die einen Doppelpunkt besitzt; und da die Gleichung einer Ebene drei Constanten enthält, so kann eine bestimmte Zahl von Tangentenebenen gefunden werden, welche zwei weiteren Bedingungen entsprechen.

Wenn aber nur eine solche andere Bedingung gegeben ist, so umhüllen die Tangentenebenen, welche ihr genügen, eine abwickelbare Fläche und ihre Berührungspunkte bestimmen in der Fläche selbst eine Curve.

Daraus entspringen die beiden Aufgaben: Die Bestimmung der Zahl der Auflösungen, welche drei Bedingungen entsprechen, und die Bestimmung der Natur der Curven und bewickelungsflächen, welche aus zwei Bedingungen Antspringen, sofern immer die eine derselben die der Berührung ist.

Von den Aufgaben der letzteren Klasse werden wir nur zwei näher untersuchen, nämlich die Frage nach den Ebenen, deren Schnittcurve mit der Fläche eine Spitze besitzt und die Frage nach den Ebenen, welche die Fläche in einer Curve mit zwei Doppelpunkten durchschneiden.

Andere Fälle sind in dem vorigen Abschnitt gelegentlich zur Sprache gekommen, z. B. die Frage nach den Ebenen, welche die Fläche so berühren, dass die eine Tangente des Doppelpunktes eine Linie vierpunktiger Berührung ist. Die Untersuchung der Doppelpunkte der Curve vierpunktiger Berührung ist leicht denselben Gesichtspunkten unterzuordnen.

349. Sind x'_1, x'_2, x'_3, x'_4; $x''_1, x''_2, x''_3, x''_4$; x_1, x_2, x_3, x_4 die Coordinaten von drei Punkten, so sind die Coordinaten eines beliebigen Punktes der durch sie bestimmten Ebene

$$\begin{aligned} &\lambda x'_1 + \mu x''_1 + \nu x_1, \quad \lambda x'_2 + \mu x''_2 + \nu x_2, \\ &\lambda x'_3 + \mu x''_3 + \nu x_3, \quad \lambda x'_4 + \mu x''_4 + \nu x_4, \end{aligned}$$

und wenn wir diese Werthe für die laufenden Coordinaten in die Gleichung einer Fläche substituieren, so erhalten wir diejenige Relation, welche für alle Punkte des Schnittes jener Ebene mit dieser Fläche erfüllt sein muss.

Sei $[U] = 0$ das Resultat der Substitution; man kann es in der Form

$$\lambda^n U' + \lambda^{n-1}\mu \Delta_{\prime\prime} U' + \lambda^{n-1}\nu \Delta U' + \frac{\lambda^{n-2}}{1.2}(\mu \Delta_{\prime\prime} + \nu \Delta)^2 . U' + \text{etc.} = 0$$

darstellen, wenn

$$\begin{aligned} \Delta_{\prime\prime} &= x''_1 \frac{d}{dx_1} + x''_2 \frac{d}{dx_2} + x''_3 \frac{d}{dx_3} + x''_4 \frac{d}{dx_4}, \\ \Delta &= x_1 \frac{d}{dx'_1} + x_2 \frac{d}{dx'_2} + x_3 \frac{d}{dx'_3} + x_4 \frac{d}{dx'_4} \end{aligned}$$

sind.

Die betrachtete Ebene wird die Fläche berühren, wenn die Discriminante dieser Gleichung in λ, μ, ν verschwindet. Wenn wir zwei der drei Punkte als fest und den dritten als veränderlich betrachten, so repräsentiert diese Discriminante alle die

Tangentenebenen der Fläche, welche durch die gerade Verbindungslinie jener beiden Punkte gelegt werden können.

Wir wollen den Punkt (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) als in der Fläche selbst und den Punkt $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ als in der entsprechenden Tangentenebene derselben gelegen voraussetzen, so dass

$$U' = 0, \quad \varDelta_{''} U' = 0$$

ist und die Discriminante durch das Quadrat von $\varDelta U'$ theilbar wird, weil von den durch eine Tangente der Fläche gehenden Tangentenebenen derselben zwei mit der ihrem Berührungspunkt entsprechenden Tangentenebene selbst zusammenfallen.

Wenn die Tangentenebene in (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) aber eine Doppeltangentenebene ist, so muss die betrachtete Discriminante anstatt wie sonst das Quadrat des Ausdrucks der Tangentenebene vielmehr den Cubus derselben als Factor enthalten. Um die Bedingung zu untersuchen, unter welcher diess der Fall sein wird, schreiben wir abkürzend die Gleichung $[U] = 0$, in welcher wir die Coefficienten von λ^n, $\lambda^{n-1}\mu$ als verschwunden denken, wie folgt

$$T\lambda^{n-1}\nu + \frac{1}{1\,.\,2}\,\lambda^{n-2}\,(A\mu^2 + 2B\mu\nu + C\nu^2) + \text{etc.} = 0;$$

dann repräsentiert $T = 0$ die Tangentenebene der Fläche in dem betrachteten Punkte, $C = 0$ die quadratische Polarfläche desselben Punktes und $A = 0$ die Bedingung, unter welcher der Punkt $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ in derselben liegt.

Dann ist die Discriminante von $[U] = 0$ von der Form

$$T^2 A\,(B^2 - AC)^2\,\Phi + T^3\,(\qquad\qquad) = 0,$$

wo Φ den Werth der Discriminante für das Verschwinden von T mit U' und $\varDelta_{''} U'$ bezeichnet. Damit also die Discriminante durch T^3 theilbar sei, muss einer der Factoren von T^2 verschwinden oder selbst T als Factor enthalten.

350. Wir nehmen zuerst an, dass der Factor A gleich Null sei. Diess spricht aus, dass der Punkt $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ in der quadratischen Polarfläche von (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) gelegen sei, oder da er auch in der Tangentenebene enthalten ist, dass er in einer der Inflexionstangenten der Fläche in (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) liege.

Wir wissen, dass von den p Tangentenebenen, welche durch eine einfache Tangente an eine Fläche p^{ter} Klasse gelegt werden können, zwei mit der Tangentenebene ihres Berührungspunktes zusammenfallen, so dass ausser dieser noch $(p - 2)$ andere solche Tangentenebenen existieren, und lernen hier, dass von den durch eine Inflexionstangente gehenden Tangentenebenen drei mit der Tangentenebene des Berührungspunktes zusammenfallen und nur $(p - 3)$ ausser ihr existieren.

Nehmen wir an, dass $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ nicht in einer Inflexionstangente gelegen sei, so verschwindet der Factor A nicht und wir können diesen Factor, als der gegenwärtigen Discussion fremd, unberücksichtigt lassen.

Dann können wir gleichzeitig die Bedingungen untersuchen, unter welchen T ein Factor in

$$B^2 - AC \quad \text{oder in} \quad \Phi$$

sein kann. Beiden Fällen entspricht nämlich folgendes Problem: Setzen wir voraus, dass eine Function V gegeben sei, deren respective Grade in den (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), in $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ und in (x_1, x_2, x_3, x_4) durch λ, μ, ν bezeichnet sind, und dass dieselbe eine Fläche bestimme, welche die Verbindungslinie der beiden ersten Punkte zu einer vielfachen Linie der μ^{ten} Ordnung hat, oder in andern Worten, dass sie ein Ebenenbüschel sei, welche diese Linie zur Scheitelkante hat; so ist die Bedingung zu finden, unter welcher eine dieser Ebenen mit der Tangentenebene T zusammenfällt, für die die entsprechenden Grade

$$(n - 1,\ 0,\ 1)$$

sind.

Wenn diess der Fall ist, so muss eine beliebige Gerade mit T auch V durchschneiden und wenn man zwischen ihren Gleichungen

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= 0, \\ a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 + a'_4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

und den Gleichungen

$$T = 0, \quad V = 0$$

eliminiert, so muss deshalb die Resultante R identisch verschwinden. Dieselbe ist in den Grössen (a_1, a_2, a_3, a_4), (a'_1, a'_2, a'_3, a'_4) und $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ vom Grade μ und in den (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) vom Grade $\{\mu(n-1) + \lambda\}$.

Wenn aber die willkürlich angenommene Gerade die Verbindungslinie der Punkte (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4), $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$

durchschneidet, so verschwindet die Resultante R auch ohne dass T ein Factor in V wäre; da nun die Bedingung $M = 0$, unter welcher diese Geraden sich schneiden, in den betrachteten Grössen gleichmässig vom ersten Grade ist, so erkennen wir, dass die Form von R durch $M^\mu R'$ darzustellen ist, wo R' eine Function von (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) allein und vom Grade $\{\mu (n-2) + \lambda\}$ ist.

351. Indem wir diess auf den von uns betrachteten Fall anwenden, ergiebt sich, weil die Discriminante von $[U]$ ein Ebenenbüschel von der Scheitelkante (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) $(x''_1, x''_2, x''_3, x''_4)$ darstellt, dass auch $(B^2 - AC)$ und Φ gleichmässig Ebenen repräsentieren, welche durch diese Linie gehen.

Nun ist die erstere Grösse von den respectiven Graden

$$2(n-2),\ 2,\ 2,$$

während Φ von den Graden

$$(n-2)(n^2-6),\ (n^3-2n^2+n-6),\ (n^3-2n^2+n-6)$$

ist, wie sich ergiebt, indem man die Summe der Grade von T^2, A und $(B^2 - AC)$ von den Graden der Discriminante von $[U]$, d. h. von $n(n-1)^2$ für alle Veränderlichen, subtrahiert.

Dann ergiebt sich aus dem letzten Artikel, dass die Bedingung

$$H = 0$$

— denn sie ist nichts Anderes als die Hesse'sche Determinante — unter welcher T ein Factor in $(B^2 - AC)$ ist, vom Grade $4(n-2)$, und die Bedingung

$$K = 0,$$

unter welcher T ein Factor in Φ ist, vom Grade

$$(n-2)(n^3-n^2+n-12)$$

sein muss.

In allen Punkten der Curve

$$U = 0,\quad H = 0$$

ist also die Tangentenebene als eine Doppeltangentenebene zu zählen; in der That, die Tangentenebene in jedem Punkte des Durchschnitts der Fläche bestimmt mit ihrer Hesse'schen Determinantenfläche eine Schnittcurve mit Rückkehr- oder Cuspidalpunkt und ist als doppelt zu betrachten (Artikel 8).

Die Curve

$$U = 0,\quad K = 0$$

ist dagegen der Ort der Berührungspunkte von Ebenen, welche die Fläche in zwei verschiedenen Punkten berühren. Die Schnittcurve einer solchen Tangentenebene der Fläche besitzt zwei Doppelpunkte oder isolierte Punkte. Liegt der eine derselben in der parabolischen Curve der Fläche, so ist er ein Rückkehrpunkt und die Berührung ist an dem einen Punkte stationär. Sie ist es an beiden Punkten, wenn beide der parabolischen Curve angehören. Fallen endlich beide Doppelpunkte in einen zusammen, d. h. berühren sich zwei Zweige der Curve in diesem Punkte, so dass die gemeinschaftliche Tangente eine vierpunktig berührende ist, so ist die Tangentenebene stationär in zwei auf einander folgenden Punkten der parabolischen Curve.

Die Tangentenebenen der letzten Arten begründen den Uebergang zu den dreifachen, die der vorletzten Art speciell sind eine besondere Art von vierfachen Tangentenebenen.*)

352. Betrachten wir zunächst die Reihe der Tangentenebenen, welche die Fläche längs der Curve

$$U = 0, \quad H = 0$$

berühren. (Vergl. Artikel 278 und seine Anmerkung.) Sie bilden eine abwickelbare Fläche von der Ordnung

$$\varrho = 2n\,(n-2)\,(3n-4)$$

nach dem 3. Beispiele des Artikel 324. Die Klasse derselben oder die Zahl von Ebenen des Systems, welche durch einen willkürlich angenommenen Punkt gehen, ist

$$\nu = 4n\,(n-1)\,(n-2);$$

denn die Berührungspunkte sind offenbar die Durchschnittspunkte der Curve $U = 0$, $H = 0$ mit der ersten Polarfläche des betrachteten Punktes.

Wir können auch die Zahl der stationären Tangentenebenen des Systems bestimmen. Ist die Gleichung der Fläche U unter der Voraussetzung, dass die Ebene $z = 0$ sie in einem Punkte der Curve $U = 0$, $H = 0$ berühre, durch

$$z + y^2 + u_3 + \text{etc.} = 0$$

dargestellt, so kann man leicht zeigen, dass die Richtung der Tangente der Curve $U = 0$, $H = 0$ durch

*) Vergl. die Darstellung von E. de Jonquières in „Nouv. Annales de Mathém.", t. XXIII, p. 5 f.

$$\frac{d^2u_3}{dx^2} = 0$$

bestimmt ist. Nun sind die Tangentenebenen von U in zwei in der Richtung der Inflexionstangente $y = 0$ auf einander folgenden Punkten identisch. Wenn daher u_3 kein Glied x^3 enthält, d. h. wenn die Inflexionstangente die Fläche in vier auf einander folgenden Punkten schneidet, so ist die Richtung der Tangente der Curve $U = 0$, $H = 0$ dieselbe wie die der Inflexionstangente und die Tangentenebenen in zwei auf einander folgenden Punkten der Curve $U = 0$, $H = 0$ sind identisch. Die Zahl der stationären Tangentenebenen ist daher gleich der Zahl der Durchschnittspunkte der Curve $U = 0$, $H = 0$ mit der Fläche $S = 0$ und da diese Curve nach Artikel 335 diese Fläche berührt, gleich

$$\alpha = 2n\,(n-2)\,(11n-24).$$

Nunmehr können alle Singularitäten der abwickelbaren Fläche, welche einer Fläche $U = 0$ nach ihrem Durchschnitt mit der Hesse'schen Determinantenfläche umgeschrieben wird, nach Artikel 66 dargestellt werden. Diess giebt die Formelgruppe

$$\begin{gathered}
\mu = n\,(n-2)\,(28n-60),\\
\nu = 4n\,(n-1)\,(n-2);\\
\varrho = 2n\,(n-2)\,(3n-4);\\
\alpha = 2n\,(n-2)\,(11n-24), \quad \beta = n\,(n-2)\,(70n-160);\\
2g = n\,(n-2)\,(16n^4-64n^3+80n^2-108n+156),\\
2h = n\,(n-2)\,(784n^4-4928n^3+10320n^2-7444n+548).
\end{gathered}$$

Z. B. für die Fläche dritter Ordnung

$$\mu = 72,\ \nu = 24,\ \varrho = 30,\ \alpha = 54,\ \beta = 150,$$
$$g = 180,\ h = 2316,\ x = 315,\ y = 363.$$

Die hier betrachtete Abwickelungsfläche entspricht einer Rückkehrcurve in der Reciprokalfläche, deren Singularitäten durch Vertauschung der Buchstabenwerthe

$$\mu,\ \nu;\quad \alpha,\ \beta;\quad g,\ h;\ \text{etc.}$$

erhalten werden.

Die Klasse der der Fläche U nach der Curve

$$U = 0, \quad K = 0$$

umgeschriebenen Abwickelungsfläche, welche zugleich die Ordnung einer Doppelcurve in der Reciprokalfläche angiebt, ist wie oben bestimmt*)

$$= \tfrac{1}{2} n (n-1) (n-2) (n^3 - n^2 + n - 12)$$

— für $n = 3$ z. B. $= 27$. Die übrigen Singularitäten dieser Fläche werden bei den Untersuchungen des folgenden Abschnitts mit bestimmt werden, wo auch die Zahl der Lösungen in einigen Fällen sich ergeben wird, in denen man eine Tangentenebene sucht, welche zwei andere Bedingungen erfüllen soll.

Wir wollen noch bemerken, dass die Summe der Zahl von Doppeltangentenebenen, deren einer Berührungspunkt in der parabolischen Curve liegt, der zweifachen Zahl solcher, deren Berührungspunkte sich decken — d. h. $+ 4n (n-2) (11-24)$ — und der sechsfachen Zahl solcher, deren beide Berührungspunkte der parabolischen Curve angehören

$$= 4n (n-2)^2 (n^3 - n^2 + n - 12)$$

sein muss. Da die letzteren Punkte nicht zu den allgemeinen Singularitäten gehören, so muss die erste Zahl

$$= 4n (n-2) (n-3) (n^3 + 3n - 16)$$

sein.

Theorie der Reciprokalflächen.

353. Wenn wir unter den gewöhnlichen Singularitäten einer Fläche diejenigen verstehen, welche im Allgemeinen entweder in der Fläche selbst oder in ihrer Reciprokalfläche existieren, so können wir von denselben die folgende Aufzählung machen.

Eine Fläche kann eine Doppelcurve von der Ordnung b und eine Rückkehrcurve von der Ordnung c besitzen.

Der im Artikel 15 bestimmte Tangentenkegel enthält den über der Doppelcurve stehenden Kegel zweifach und den über der Rückkehrcurve stehenden dreifach, so dass für a als Grad des eigentlichen Tangentenkegels die Relation entsteht

$$a + 2b + 3c = n (n-1).$$

---

*) Das Doppelte derselben und das Dreifache der Zahl der stationären Tangentenebenen, d. h. von

$$4n (n-1) (n-2)$$

giebt zur Summe

$$n^2 (n-1) \left\{ (n-1)^3 - 1 \right\},$$

die Gesammtzahl der durch einen beliebigen Punkt möglichen Doppeltangentenebenen beider Arten.

Die Klasse des Kegels a ist der Ordnung der Reciprokalfläche gleich. Wir nehmen an, derselbe habe δ doppelte und $\varkappa$ Rückkehrkanten, die Curve b besitze k scheinbare Doppelpunkte und t dreifache Punkte, welche auch dreifache Punkte der Fläche selbst sind, und die Curve c endlich habe h scheinbare Doppelpunkte. Wir finden die Zahl der Punkte, in denen sich die Curven b und c durchschneiden, als die Summe von drei Zahlen, nämlich einer Zahl γ von Punkten, welche stationäre Punkte der ersten, einer Zahl β von Punkten, welche stationäre Punkte der zweiten, und einer Zahl i von Punkten, welche singuläre Punkte in beiden Curven sind. Wir denken endlich ϱ als die Zahl der Schnittpunkte der Berührungscurve des eigentlichen Tangentenkegels a mit der Doppelcurve und σ als die ihrer Schnittpunkte mit der Rückkehrcurve c.

Ueberdiess sollen die nämlichen Buchstaben in accentuierter Form die Singularitäten der Reciprokalfläche bezeichnen.

354. Wir haben im Artikel 17 gesehen, dass die Punkte, in welchen die Berührungscurve des Tangentenkegels

$$\Delta^2 U = 0$$

schneidet, den Rückkehrkanten des Tangentenkegels angehören. Wenn aber die Berührungscurve die complexe Curve

$$a + 2b + 3c$$

ist, so sind offenbar die Punkte, in welchen die Curven b und c die Fläche $\Delta^2 U = 0$ schneiden, der Frage nach den Rückkehrkanten des Kegels a fremd. Auch werden nicht alle die Durchschnittspunkte von a mit $\Delta^2 U = 0$ Rückkehrkanten des Kegels erzeugen, weil eine den Kegeln a und c gemeinschaftliche Kante wohl als eine Rückkehrkante des complexen Kegels, aber nicht als eine solche der beiden einzelnen Kegel anzusehen ist.

Die folgenden Formeln enthalten die Analyse der Durchschnitte der Curven a, b, c respective mit der Fläche $\Delta^2 U = 0$

$$\left.\begin{aligned} a\,(n-2) &= \varkappa + \varrho + 2\sigma \\ b\,(n-2) &= \varrho + 2\beta + 3\gamma + 3t \\ c\,(n-2) &= 2\sigma + 4\beta + \gamma \end{aligned}\right\} \;\ldots\; A).$$

Es ist nicht schwer, zu erkennen, dass die in diesen Formeln bezeichneten Punkte $\varkappa$, ϱ, σ, β, γ in den Durchschnitten der Fläche $\Delta^2 U = 0$ mit den Curven a, b, c respective enthalten sind; aber es scheint so leicht nicht, den Grund zu entdecken, weshalb sie gerade mit den numerischen Factoren eintreten, die sie zeigen. Obgleich es wahrscheinlich nicht unmöglich ist, diese Gründe a priori zu erkennen, so ziehen wir es doch vor, die Methode zu erklären, durch welche der Verfasser auf dem Wege der Induction zu ihnen gelangte.*)

355. Wir wissen aus Artikel 271, dass die Reciprokalfläche einer Fläche dritter Ordnung eine Fläche zwölfter Ordnung ist, die eine Rückkehrcurve von der vier und zwanzigsten Ordnung besitzt; denn die Form ihrer Gleichung ist

$$64\sigma^3 = \tau^2,$$

und σ ist vom vierten, τ vom sechsten in den Veränderlichen.

Jeder der sieben und zwanzig Geraden in der Fläche entspricht eine Doppellinie in der Reciprokalfläche (Artikel 272). Der eigentliche Tangentenkegel als die Reciprokalfläche einer ebenen Schnittcurve der ursprünglichen Fläche besitzt neun Rückkehrkanten und ist von der sechsten Ordnung.

Wir haben also

$$a' = 6,\ b' = 27,\ c' = 24,\ n' = 12,\ a' + 2b' + 3c' = 12.11.$$

Die Durchschnitte der Curven c' und b' mit der Berührungscurve des Kegels a', der einem beliebig gewählten Punkte entspricht, sind die Reciproken der Tangentenebenen der Originalfläche, deren Berührungspunkte die Durchschnitte einer angenommenen Ebene mit der parabolischen Curve $U = 0$, $H = 0$ und mit den 27 Geraden sind. Es giebt also 12 Punkte σ' und 27 Punkte ϱ'; von den letzteren Punkten liegt je einer in jeder der 27 Geraden, von denen die Doppellinie der Reciprokalfläche gebildet wird.

---

*) Der erste Versuch, die Wirkung der Doppelcurven und Rückkehrcurven auf die Ordnung der Reciprokalfläche zu bestimmen, ward im Jahre 1847 in zwei Abhandlungen gemacht, welche der Verfasser zu dem „Cambridge and Dublin Mathem. Journal“ (Vol. II, p. 65 und IV, p. 188) beitrug. Erst am Ende des Jahres 1849 leitete ihn jedoch die Entdeckung der 27 Geraden in der Fläche dritter Ordnung, welche zuerst eine klare Anschauung der Natur der Reciprokalfläche einer Fläche dritter Ordnung vermittelte, zu der hier aus einander gesetzten Theorie. Sie ward zuerst vollständiger in einer Abhandlung im Vol. XXIII der „Transactions of the Royal Irish Academy“ (p. 461 f.) bekannt gemacht.

Nun bestehen die 60 Durchschnittspunkte der Curve a' mit der zweiten Polarfläche, als welche von der zehnten Ordnung ist, aus den 9 Punkten $\varkappa'$, den 27 Punkten ϱ' und den 12 Punkten σ'. Es geht daraus hervor, dass die letzteren Punkte doppelt gezählt werden müssen, weil einer Gleichung von der Form

$$9a + 27b + 12c = 60$$

durch ganze Werthe von a, b, c nur für den Fall 1, 1, 2 genügt werden kann. Diess giebt die erste Gleichung A).

Betrachten wir nun die Punkte, in welchen irgend eine der 27 Linien b dieselbe Fläche zehnter Ordnung durchschneidet. Die Punkte β' entsprechen den Punkten, in denen die 27 Geraden die parabolische Curve berühren und wir wissen aus Artikel 290, dass in jeder dieser Geraden zwei solche Punkte existieren. In jeder derselben liegen ferner 5 Punkte t und wir haben eben gesehen, dass je ein Punkt ϱ ihr angehört. Da nun die Gleichung

$$a + 2b + 5c = 10$$

nur die Lösungen (1, 2, 1) und (3, 1, 1) in ganzen Zahlen besitzt, so müssen die zehn Durchschnittspunkte einer der Linien mit der zweiten Polarfläche entweder durch

$$\varrho' + 2\beta' + t' \quad \text{oder durch} \quad 3\varrho' + \beta' + t'$$

dargestellt sein, und hier ist die letztere Form offenbar unzulässig. Wenn man nun die Curve b' als von den 27 Geraden gebildet betrachtet, so erkennt man noch, dass die Punkte t' je dreien derselben angehören und ist so zu der Formel

$$b'(n-2) = \varrho' + 2\beta' + 3t'$$

geführt.

Das betrachtete Beispiel erlaubt uns nicht, den Coefficienten von γ in der zweiten der Formeln A) zu bestimmen, weil Punkte γ in der Reciprokalfläche einer Fläche dritter Ordnung nicht existieren. Endlich werden die 240 Punkte, in welchen die Curve c die zweite Polare schneidet, von den 12 Punkten σ' und den 54 Punkten β' gebildet; und da die Gleichung

$$12a + 54b = 240$$

nur die ganzzahligen Auflösungen (11, 2) und (2, 4) erlaubt, deren Letztere natürlich vorzuziehen ist, so sind durch die Betrachtung dieses Beispiels alle Coefficienten der Gleichungen A) mit Ausnahme des Coefficienten von γ in der zweiten von ihnen gefunden.

356. Wir wollen nun auf demselben Wege die Reciprokalfläche einer Fläche n^{ter} Ordnung untersuchen, welche keine vielfachen Punkte besitzt.

Wir haben dann

$$n' = n(n-1)^2, \quad n'-2 = (n-2)(n^2+1), \quad a' = n(n-1);$$

und nach Artikel 25 für die Doppelcurve und die Rückkehrcurve

$$b' = \tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12),$$
$$c' = 4n(n-1)(n-2).$$

Die Zahl der Rückkehrkanten des Tangentenkegels der Reciprokalfläche, welche der Zahl der Inflexionspunkte eines ebenen Schnittes der Originalfläche entspricht, giebt

$$\varkappa' = 3n(n-2).$$

Die Punkte ϱ' und σ', entsprechend den Durchschnittspunkten einer angenommenen Ebene mit den Curven

$$U = 0, \quad K = 0 \quad \text{und} \quad U = 0, \quad H = 0 \quad \text{(Artikel 351)}$$

werden gefunden

$$\varrho' = n(n-2)(n^3-n^2+n-12), \quad \sigma' = 4n(n-2).$$

Die Substitution dieser Werthe in die erste der Formeln A

$$a'(n'-2) = k' + \varrho' + 2\sigma'$$

macht dieselbe zu einer Identität und bestätigt sie somit. Wir wollen für denselben Fall zunächst die dritte der Formeln A) untersuchen.

Wir haben im Artikel 352 gefunden, dass die Zahl der Punkte β'

$$= 2n(n-2)(11n-24)$$

ist. Nun entsprechen die Durchschnitte der Doppel- und Rückkehrcurve der Reciprokalfläche den Ebenen, welche die Originalfläche in den Durchschnittspunkten der Curven

$$U = 0, \quad H = 0; \quad U = 0, \quad K = 0$$

berühren. Wenn aber eine Ebene die Fläche in einer Curve schneidet, die einen eigentlichen Doppelpunkt und einen Rückkehrpunkt besitzt, so ist sie schon wegen ihrer Berührung im letzteren Punkte allein eine Doppeltangentenebene und gehört daher dem System der längs der Curve $U = 0$, $K = 0$ berührenden Ebenen zweifach an, oder in anderen Worten, sie ist eine stationäre Ebene dieses Systems. Und da offenbar die

Punkte β' unter den Durchschnittspunkten der Doppel- und der Rückkehrcurve sind, so müssen die Punkte

$$U = 0, \quad H = 0, \quad K = 0$$

entweder Punkten β' oder Punkten γ' entsprechen. Indem wir, wie es naturgemäss ist, die Punkte β' unter den Durchschnitten der drei Flächen doppelt zählend denken, erhalten wir

$$\gamma' = n \left\{4\,(n-2)\right\} \left\{(n-2)\,(n^3 - n^2 + n - 12)\right\}$$
$$- 4n\,(n-2)\,(11n - 24) = 4n\,(n-2)\,(n-3)\,(n^3 + 3n - 16).$$

Wenn wir aber die vorher für c', n', σ', β' gefundenen Werthe in die Formel

$$\gamma' = c'\,(n' - 2) - 2\sigma' - 4\beta'$$

substituieren, so erhalten wir für γ' den eben gefundenen Werth wieder und haben dadurch die dritte der Formeln A) bestätigt. Es wäre hinreichend gewesen, anzunehmen, dass die Punkte β unter den Durchschnitten von $U = 0$, $H = 0$, $K = 0$ als μ fach und die Punkte γ als λ fach zu zählen wären, so dass

$$c\,(n' - 2) = 2\sigma' + \mu\beta' + \lambda\gamma'$$

wäre, und man würde gefunden haben, dass die Formel die Werthe $\lambda = 1$, $\mu = 4$ fordert, um erfüllt zu werden.

Nur die zweite der Formeln A) bleibt noch zu untersuchen. Wir haben aber die Werthe aller in sie eingehenden Grössen bis auf t' bereits gegeben. Durch Substitution finden wir dann, dass die Zahl der dreifachen Tangentenebenen der Fläche n^{ter} Ordnung durch die Formel

$$6t' = n\,(n-2)\,(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45n^4 + 114n^3 - 111n^2$$
$$+ 548n - 960)$$

gegeben ist. Man findet für $n = 3$

$$6t' = 3 \cdot 90, \quad \text{d. i.} \quad t' = 45$$

wie bekannt.

Man kann dieselbe allgemeine Formel direct bestätigen durch folgende Schlüsse. Die dreifachen Tangentenebenen der Fläche $U = 0$ sind diejenigen nach der Curve $U = 0$, $K = 0$ sie berührenden Ebenen, welche sie noch in einem andern Punkte berühren.

Nach Artikel 25 gehen durch einen beliebigen Punkt

$$\tfrac{1}{2}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n^3 - n^2 + n - 12)$$

solcher Ebenen und somit giebt es

$$\tfrac{1}{2}n\,(n-1)\,(n-2)\,(n^3-n^2+n-12)+n\,(n-1)^2$$

unter ihnen, welche zugleich eine zweite Fläche n^{ter} Ordnung berühren.

Denken wir beide Flächen sich ohne Ende nähernd und endlich zusammenfallend, so erscheint jede dieser Ebenen dreimal und für t'' als ihre Zahl gilt die Relation

$$3t''=\tfrac{1}{2}n\,(n-2)\,(n^7-4n^6+7n^5-19n^4+40n^3-37n^2+12n).$$

Von ihr hat man die Zahl der Durchschnittspunkte der Curve $U=0$, $K=0$ mit der Schnittcurve beider noch verschieden gedachten Flächen n^{ter} Ordnung, also

$$n^2\,(n-2)\,(n^3-n^2+n-12)$$

zu subtrahieren und erhält

$$3t'=\tfrac{1}{2}n\,(n-2)\,(n^7-4n^6+7n^5-21n^4+42n^3-39n^2+36n).$$

Man hat ferner die Zahl der Doppeltangentenebenen abzuziehen, deren einer Berührungspunkt der parabolischen Curve der Fläche angehört und die eine Klasse für sich bilden; also, da jede dieser Ebenen dreifach zählt, die Zahl

$$12n\,(n-2)^2\,(n^3-n^2+n-12)$$

oder

$$\tfrac{1}{2}n\,(n-2)\,(24n^4-72n^3+72n^2-336n+576).$$

Man hat endlich die Zahl

$$2\,.\,4n\,(n-2)\,(11n-24)$$

abzuziehen, die doppelte Zahl der Ebenen, welche den Berührungen der parabolischen Curve und der Curve vierpunktiger Berührungen entsprechen, und erhält

$$t=\tfrac{1}{6}n\,(n-2)\,(n^7-4n^6+7n^5-45n^4+114n^3-111n^2+548n-960)$$

wie oben.*)

357. Es ist im Artikel 18 bewiesen worden, dass die Berührungspunkte derjenigen Erzeugenden des Tangentenkegels aus einem gegebenen Punkte, welche die Fläche in zwei verschiedenen Punkten berühren, auf einer Fläche von der $(n-2)\,(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung liegen.

Wenn nun wie vorher der Tangentenkegel ein zusammengesetzter Kegel $(a+2b+3c)$ ist, so sind offenbar unter diesen Doppeltangenten diejenigen gemeinschaftlichen Erzeugenden der

*) Vergl. E. de Jonquières' Abhandlung a. a. O.

Kegel a, b; b, c; c, a mit gezählt, welche die Curven a und b etc. in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Wenn wir daher durch $[ab]$ die Zahl der scheinbaren Durchschnittspunkte der Curven a und b bezeichnen, d. h. die Zahl der Punkte, in welchen diese Curven von einem beliebigen Punkte des Raumes aus gesehen sich zu durchschneiden scheinen, ohne diess doch in Wirklichkeit zu thun, so geben die folgenden Formeln die Analyse der Durchschnittspunkte der Curven a, b, c mit der Fläche von der $(n-2)(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$\begin{aligned} a(n-2)(n-3) &= 2\delta + 3[ac] + 2[ab], \\ b(n-2)(n-3) &= 4k + [ab] + 3[bc], \\ c(n-2)(n-3) &= 6h + [ac] + 2[bc]. \end{aligned}$$

Nun ergiebt sich aber die Zahl der scheinbaren Durchschnitte zweier Curven aus der Zahl ihrer wirklichen Durchschnitte, denn wenn aus einem gemeinschaftlichen Scheitel über beiden Curven Kegel beschrieben werden, so entsprechen die gemeinschaftlichen Erzeugenden derselben nothwendig entweder den scheinbaren oder den wirklichen Durchschnittspunkten der Curven; daher hat man die Relationen

*) $[ab] = ab - 2\varrho, \quad [ac] = ac - 3\sigma, \quad [bc] = bc - 3\beta - 2\gamma - i.$

Durch Substitution ergeben sich dann die Formeln

$$\left.\begin{aligned} a(n-2)(n-3) &= 2\delta + 2ab + 3ac - 4\varrho - 9\sigma, \\ b(n-2)(n-3) &= 4k + ab + 3bc - 9\beta - 6\gamma - 3i - 2\varrho, \\ c(n-2)(n-3) &= 6h + ac + 2bc - 6\beta - 4\gamma - 2i - 3\sigma, \end{aligned}\right\} \ldots B).$$

Die erste und dritte unter diesen Gleichungen werden identisch erfüllt durch die Substitution der in den letzten Artikeln für $\beta, \gamma, \varrho, \sigma$, etc. gefundenen Werthe, wenn man zu denselben hinzufügt

$$2\delta = n(n-2)(n^2-9), \quad i = 0$$

und den im Artikel 352 gegebenen Werth von h, nämlich

$$2h = n(n-2)(16n^4 - 64n^3 + 80n^2 - 108n + 156).$$

---

*) Wenn die Fläche nur eine Doppelcurve aber keine Rückkehrcurve besässe, so existiert doch eine bestimmte Anzahl i von Rückkehrpunkten in der Doppelcurve und die obige Gleichung erleidet die Modification

$$[ab] = ab - 2\varrho - i.$$

Indem man dann die Ordnung der Reciprokalfläche bestimmt, wird die Grösse ab eliminiert.

Die zweite Gleichung erlaubt uns k zu bestimmen; man erhält die Gleichung

$$8k = n(n-2)(n^{10} - 6n^9 + 16n^8 - 54n^7 + 164n^6 - 288n^5 + 547n^4 - 1058n^3 + 1068n^2 - 1214n + 1464).$$

Beispielsweise für $n = 3$ ist $k = 216$, was mit den 135 wirklichen Doppelpunkten die Zahl von $\frac{27 \cdot 26}{1 \cdot 2}$ gemeinschaftlichen Kanten erfüllt.

Aus diesem Ausdruck lässt sich der Rang der Abwickelungsfläche, von welcher b die Rückkehrkante ist — er muss für $n = 3$ gleich Null sein — mittelst der Formel

$$R = b^2 - b - 2k - 6t - 3\gamma$$

bestimmen, und man erhält durch Substitution der gefundenen Werthe

$$R = 4n(n-2)(n-3)(n^2 + 2n - 4).$$

Diess ist daher der Rang der abwickelbaren Fläche, welche die Doppeltangentenebenen der gegebenen Fläche erzeugen.*)

358. Aus den Formeln A) und B) können wir die Verminderung der Ordnungszahl der Reciprokalfläche berechnen, welche

*) Um die Theorie zu bestätigen, wäre nöthig, zu zeigen, dass diese Zahl R mit derjenigen zusammenfällt, welche aus dem 5. Beispiel des Artikel 324 abgeleitet wird. Zuerst entspricht die Abwickelungsfläche, welche durch die Rückkehrcurve der Reciprokalfläche erzeugt wird, derjenigen, welche die gegebene Fläche $U = 0$ nach ihrer Schnittcurve mit der Determinantenfläche $H = 0$ umhüllt, und die nach dem citierten Beispiel von der Ordnung $28(n-2)^2$ sein muss; wenn wir aber von dieser Zahl die Zahl β subtrahieren, so erhalten wir in der That den vorher bestimmten Werth.

In gleicher Art betrachten wir die Abwickelungsfläche, welche der Fläche $U = 0$ nach ihrem Durchschnitt mit $K = 0$ umgeschrieben wird (Artikel 351); wenn wir aber von der nach der Regel des erwähnten Beispiels bestimmten Ordnungszahl die Summe $4\gamma + \beta + 6t$ abziehen, so erhalten wir nicht R, sondern $\frac{1}{2}R$. Vielleicht ist diess deshalb der Fall, weil alle die Tangentenebenen, welche diese Abwickelungsfläche umhüllen, Doppeltangentenebenen sind; es muss aber zugleich ausgesprochen werden, dass es noch einige Punkte in dieser ganzen Theorie giebt, welche weiterer Erklärung bedürfen. In seiner Abhandlung in „Quarterly Journal of Mathem.“, Vol. II gab Schläfli die Relation

$$4R + 6t' = n(n-2)\left\{n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45n^4 + 118n^3 - 115n^2 + 508n - 912\right\},$$

welche diese Werthe bestätigen.

durch die im Artikel 353 aufgezählten Singularitäten der Originalfläche erzeugt wird.

Wenn der Grad eines Kegels von m auf $(m - l)$ vermindert wird, so geht der der Reciprokalen von $m(m-1)$ auf $(m-l)(m-l-1)$ zurück, d. h. er wird um $l(2m-l-1)$ reduciert. Nun ist der Tangentenkegel einer Fläche im Allgemeinen vom Grade $n(n-1)$ und wir haben gesehen, dass dieser Grad um $(2b + 3c)$ vermindert wird, wenn die Fläche Doppel- und Rückkehrcurven, wie angenommen, besitzt. Daraus entspringt dann eine Verminderung in der Ordnungszahl der Reciprokalfläche um

$$D = (2b + 3c)(2n^2 - 2n - 2b - 3c - 1).$$

Aber die Existenz der Doppel- und Rückkehrcurven der Fläche bewirkt auch eine Verminderung der Zahl der Doppel- und Rückkehrkanten des Tangentenkegels. Man muss von der eben angegebenen Zahl D die doppelte Verminderung der Anzahl der Doppelkanten und die dreifache von der der Rückkehrkanten subtrahieren, um die wahre Verminderung der Ordnungszahl der Reciprokalfläche zu finden. Nun ist nach den Formeln A)

$$\varkappa = (a - b - c)(n - 2) + 6\beta + 4\gamma + 3t,$$

und wenn die Fläche keine vielfachen Linien besässe, so wäre die Zahl der Rückkehrkanten des Tangentenkegels

$$= (a + 2b + 3c)(n - 2);$$

die Verminderung der Anzahl der Rückkehrkanten ist daher

$$K = (3b + 4c)(n - 2) - 6\beta - 4\gamma - 3t.$$

Ferner erhalten wir nach dem ersten System der Formeln des Artikel 357

$$(a - 2b - 3c)(n - 2)(n - 3) = 2\delta - 8k - 18h - 12[bc]$$

und durch Einsetzen des Werthes von $[bc]$ daraus

$$2\delta = (a - 2b - 3c)(n-2)(n-3) + 8k + 18h + 12bc - 36\beta - 24\gamma - 12i.$$

Hätte die Fläche keine vielfachen Linien, so wäre

$$2\delta = (a + 2b + 3c)(n - 2)(n - 3);$$

die Verminderung in der Anzahl der Doppelkanten wird daher durch die Formel

$$2H = (4b + 6c)(n-2)(n-3) - 8k - 18h - 12bc + 36\beta + 24\gamma + 12i$$

bestimmt.

Und die ganze Verminderung der Ordnungszahl der Reciprokalfläche oder

$$D - 3K - 2H$$

wird nach entsprechender Reduction

$$= n(7b + 12c) - 4b^2 - 9c^2 - 8b - 15c + 8k + 18h$$
$$- 18\beta - 12\gamma - 12i + 9t.$$

Sie giebt für die Fläche 12[ter] Ordnung, welche die Reciproke der Fläche dritter Ordnung ist, wirklich die Verminderung um 1449 Einheiten, welche nöthig ist, damit die Ordnungszahl ihrer Reciprokalfläche von $12 \cdot 11^2 = 1452$ auf 3 zurückkomme.

359. Die Formeln $A)$ und $B)$ können in eine der Anwendung mehr bequeme Gestalt gebracht werden.

In Erinnerung daran, dass

$$a + 2b + 3c = n(n-1)$$

ist, kann nämlich die erste der Formeln $B)$ in der Gestalt

$$a^2 + a(-4n + 6) = 2\delta - 4\varrho - 9\sigma$$

geschrieben werden, und indem man das Dreifache der ersten Formel $A)$ hinzu addiert, erhält man

$$a^2 - na = 2\delta + 3\varkappa - \varrho - 3\sigma.$$

Aber es ist

$$a^2 - a - 2\delta - 3\varkappa = n',$$

der Ordnung der Reciprokalfläche, und somit

$$(n-1)\,a = n' + \varrho + 3\sigma.$$

Die Wahrheit dieser Gleichung kann auch überdiess aus der Bemerkung erkannt werden, dass a, die Curve der einfachen Berührungen für einen beliebigen Punkt, die erste Polare eines beliebigen andern Punktes ausser in den n' Berührungspunkten der durch die beiden betrachteten Punkte gehenden Tangentenebenen, in den ϱ Punkten, in denen die Curven a und b sich durchschneiden, und in den σ Punkten des Durchschnitts von a und c schneiden muss, weil jede erste Polarfläche durch die Curven b und c gehen muss.

Wenn wir die zweite der Formeln $B)$ zu dem Vierfachen der zweiten Formel $A)$ addieren und mit R die in Artikel 357 gegebene Bedeutung verbinden, so erhalten wir in gleicher Art

$$2\varrho = 2R + \beta + 3i,$$

eine Gleichung, deren geometrische Erläuterung uns nicht bekannt ist; wie auch offenbar die R Punkte in b, deren Tangenten eine beliebige Gerade schneiden, unter den ϱ Punkten in b mit gezählt sind, welche die Berührungspunkte der durch diese Linie gehenden Tangentenebenen sind.

Wenn die letzten Formeln beider Gruppen in derselben Art behandelt werden, und wenn wir durch S die Ordnung der abwickelbaren Fläche bezeichnen, welche durch die Curve c erzeugt wird, d. h.

$$S = c^2 - c - 2h - 3\beta,$$

so erhalten wir

$$c\,(n-6) = 12S + \gamma + 8i - 18\sigma.$$

360. Der Einfluss der vielfachen Linien auf die Verminderung der Ordnung der Reciprokalfläche kann noch in anderer Weise untersucht werden. Die Berührungspunkte der Tangentenebenen, welche durch eine gegebene Gerade an die Fläche gelegt werden können, sind die Durchschnittspunkte der Fläche mit derjenigen Curve von der Ordnung $(n-1)^2$, welche der Durchschnitt der ersten Polarflächen von irgend zwei Punkten der Linie ist. Betrachten wir nun zuerst den Fall, in welchem die Fläche nur eine gewöhnliche Doppelcurve von der Ordnung b hat. Da die ersten Polaren beider Punkte diese Curve enthalten müssen, so zerfällt die Durchschnittscurve derselben in diese Curve b^{ter} und eine complementäre Curve d^{ter} Ordnung. Als Berührungspunkte der durch die gegebene Gerade gehenden Tangentenebenen erhält man nun zuerst nicht die sämmtlichen Punkte der Fläche auf der complexen Curve $(b+d)$, sondern nur die der Curve d angehörenden; daraus entspringt eine Reduction der Ordnung der Reciprokalfläche um bn. Aber auch nicht alle die Punkte zählen als solche, in welchen die Curve d die Fläche schneidet; man hat diejenigen unter ihnen auszuscheiden, in welchen die Curve b von der Curve d geschnitten wird. Ihre Anzahl ist nach Artikel 81

$$= 2b\,(n-2) - r,$$

wenn r den Rang des Systems der Curve b bezeichnet. Nun bestehen diese Punkte aus den r Punkten der Curve b, deren Tangenten die willkürlich gewählte Gerade schneiden, welche die Scheitelkante des Tangentenebenenbüschels ist, und aus den

$$\left\{2b\,(n-2) - 2r\right\}$$

Punkten, in welchen die beiden Polarflächen sich berühren; die letzteren sind Rückkehrpunkte in der Doppelcurve b, d. h. Punkte, in welchen die beiden Tangentenebenen der Flächen zusammenfallen, und sie zählen dreifach unter den Durchschnitten der Curve d mit der gegebenen Fläche, da die drei Flächen sich in jedem solchen Punkte berühren; dagegen sind die r Punkte einfache Punkte der Doppelcurve und zählen daher für zwei. Die Gesammtreduction ist daher

$$nb + 2r + 3\left\{2b\,(n-2) - 2r\right\} = b\,(7n - 12) - 4r,$$

was mit der vorhergehenden Theorie übereinstimmt.

Wenn die Curve b nicht eine Doppelcurve, sondern eine vielfache Linie der Fläche ist und der Grad der Vielfachheit durch p bezeichnet wird, so findet man für die Reduction der Ordnungszahl der Reciprokalfläche*)

$$b\,(p-1)\,(3p+1)\,n - 2bp\,(p^2-1) - p^2\,(p-1)\,r.$$

Man erhält auch für die Reduction in der Zahl der Rückkehrkanten des Kegels der einfachen Berührung den Ausdruck

$$b\left\{3\,(p-1)^2\,n - p\,(p-1)\,(2p-1)\right\} - p\,(p-1)\,(p-2)\,r,$$

und für das Doppelte der Reduction in der Zahl seiner Doppelkanten

$$\begin{aligned}2bp\,(p-1)\,n^2 - b\,(p-1)\,(14p-8)\,n + bp\,(p-1)\,(8p-2)\\ - p^2\,(p-1)^2\,b^2 + p\,(p-1)\,(4p-6)\,r.\end{aligned}$$

Zur Bewährung der Formel denken wir uns die Fläche n^{ter} Ordnung aus p Flächen m^{ter} Ordnung gebildet, die eine gemeinschaftliche Curve b^{ter} Ordnung als ihren vollständigen Durchschnitt besitzen, also ein Büschel bilden. Dann ist

$$b = m^2,\ n = pm,\ r = 2m^2\,(m-1)$$

und die Reduction der Ordnung der Reciprokalfläche wird

$$\begin{aligned}m^2\left\{p\,(p-1)\,(3p+1)\,m - 2p\,(p^2-1) - 2p^2\,(p-1)\,(m-1)\right\}\\ = p\,(p^2-1)\,m^3 - 2p\,(p-1)\,m^2,\end{aligned}$$

also

$$= mp\,(mp-1)^2 - mp\,(p-1)^2,$$

wie es sein muss.

Es erübrigt, die Methode dieses Artikels auf den Fall anzuwenden, in welchem die Fläche eine Rückkehrcurve besitzt.

---

*) Vergl. „Transactions of the Royal Irish Academy", Vol. XXIII, p. 485.

361. Die entwickelte Theorie gestattet uns, bei ihrer Anwendung auf die abwickelbaren Flächen zuerst das Factum zu erklären, wonach die Ordnung der Reciprokalfläche einer solchen sich auf Null reducieren muss; sie erlaubt uns überdiess, einige der Singularitäten solcher Flächen zu bestimmen, welche in der früheren Darstellung ihrer Theorie nicht gegeben werden konnten. (Vergl. Artikel 68.) Wir gebrauchen die Bezeichnungen jenes Abschnitts.

Der Tangentenkegel einer abwickelbaren Fläche besteht aus n Ebenen und besitzt daher keine Rückkehrkanten, aber $\frac{1}{2}n(n-1)$ Doppelkanten. Die Linie der einfachen Berührung besteht aus n Geraden, n Linien des Systems, von denen jede die Rückkehrkante in m und die Doppellinie x in $(r-4)$ Punkten durchschneidet. Die Linien m und x durchschneiden einander in den α Punkten, in welchen sie die stationären Ebenen des Systems berühren; denn da in denselben drei auf einander folgende Linien des Systems in der nämlichen Ebene liegen, so giebt der Durchschnittspunkt der ersten und der dritten unter ihnen einen Punkt der Linie x.*)

Wenn wir also links die Bezeichnungen des gegenwärtigen Kapitels und rechts die des Kapitels II angeben, welche durch sie vertreten werden, so erhalten wir die folgende Tabelle:

$$n = r,\ a = n,\ b = x,\ c = m,\ \varrho = n(r-4),$$
$$\sigma = n,\ \varkappa = 0,\ \beta = \beta,\ h = h,\ i = \alpha;$$

und die Grössen t, y, k bleiben zu bestimmen.

Indem wir diese Werthe in die Formeln A) und B) der Artikel 353 und 357 einsetzen, erhalten wir das folgende System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
n(r-2) &= n\left\{2+(r-4)\right\},\\
x(r-2) &= n(r-4)+2\beta+3\gamma+3t,\\
m(r-2) &= 2n+4\beta+\gamma,\\
n(r-2)(r-3) &= n\left\{(n-1)+2x+3m-4(r-4)-9\right\},\\
x(r-2)(r-3) &= 4k+nx+3mx-9\beta-6\gamma-3\alpha-2n(r-4),\\
m(r-2)(r-3) &= 6h+mn+2mx-6\beta-4\gamma-2\alpha-3n.
\end{aligned}\right\}\ldots C)$$

*) Das Hervortreten dieser Punkte i in dem Beispiel der abwickelbaren Flächen veranlasste den Verfasser zu ihrer Einführung in die allgemeine Theorie.

Von diesen sechs Gleichungen ist die erste eine Identität und die vierte wird zu einer Identität auf Grund der im Artikel 65 bewiesenen Relation

$$r(r-1) = 2x + 3m + n.$$

Die Elimination von γ zwischen der dritten und sechsten Gleichung liefert die Gleichung

$$m(r-1)r = 6h + 10\beta - 2\alpha + n(m+5) + 2m(x+1),$$

welche durch die vorige auf

$$6h + 10\beta - 2\alpha + 5n - m(3m-2) = 0$$

oder auf die Summe von

$$6h + 8\beta + n = 3m(m-2) \quad \text{und} \quad 2(\beta - \alpha) = 4(m-n)$$

reduciert wird, die unter den Relationen des Artikel 66 stehen.

Die drei übrig bleibenden Gleichungen bestimmen die drei Grössen, deren Werthe früher nicht gegeben werden konnten, nämlich t, die Zahl der „Punkte in drei Linien“, die dem System angehören; γ, die Zahl solcher Punkte des Systems, durch welche je eine nicht zunächstfolgende Linie des Systems hindurchgeht; und k die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte in der Knotenlinie der abwickelbaren Fläche.

Wenn diese Grössen bestimmt sind, so kann man durch Buchstabenvertauschung die reciproken Singularitäten, nämlich die Zahl der „Ebenen durch drei Linien“, die dem System angehören, etc., erhalten.

Nach Artikel 359 ergiebt sich auch der Rang der Abwickelungsfläche, welche die Curve x zur Rückkehrkante hat. Denn es ist

$$2R = 2n(r-4) - \beta - 3\alpha.$$

Beispiel 1. Man soll die vorher entwickelte Theorie auf den Fall des Artikel 67 anwenden, d. h. auf die Enveloppe von

$$at^k + kbt^{k-1} + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} ct^{k-2} + \text{etc.} = 0.$$

Man findet

$$\gamma = 6(k-3)(k-4), \quad 3t = 4(k-3)(k-4)(k-5),$$
$$k = (k-3)(2k^3 - 18k^2 + 57k - 65), \quad R = 2(k-1)(k-3).$$

Und für die reciproken Singularitäten

$$\gamma' = 2(k-2)(k-3), \quad 3t' = 4(k-2)(k-3)(k-4),$$
$$k' = (k-2)(k-3)(2k^2 - 10k + 11), \quad R' = 6(k-3)^2.$$

Die Ordnung der Bedingungen, unter welchen die Gleichungen

$$at^{k-1} + (k-1)\, bt^{k-2} + \text{etc.} = 0,$$
$$bt^{k-1} + (k-1)\, ct^{k-2} + \text{etc.} = 0,$$

drei gemeinschaftliche Factoren besitzen, ist

$$= \frac{(2k-4)\,(2k-5)\,(2k-6)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

in der That die Summe der drei Zahlen β, γ, t.

Beispiel 2. Für die Durchschnittscurve zweier Flächen, für welche die Summe der Ordnungszahlen $= p$ und das Product derselben $= q$ ist, erhält man

$$\gamma = q\,(pq - 2q - 6p + 16).$$

Diess folgt aus den Formeln des Artikel 80, kann aber auch direct bewiesen werden. Denn sind $U = 0$, $V = 0$ die Gleichungen derselben von den respectiven Graden m und n und bildet man die Bestimmungsgleichungen der Punkte, in welchen die Verbindungslinie zweier beliebigen Punkte die Flächen schneidet,

$$\lambda^m U + \lambda^{m-1}\mu\, \Delta U + \frac{\lambda^{m-2}\mu^2}{1\,.\,2}\, \Delta^2 U + \text{etc.} = 0,$$

$$\lambda^n V + \lambda^{n-1}\mu\, \Delta V + \frac{\lambda^{n-2}\mu^2}{1\,.\,2}\, \Delta^2 V + \text{etc.} = 0,$$

so ist für jene Gerade als eine Linie des Systems und (x_1, x_2, x_3, x_4) als ihren Berührungspunkt zugleich

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \Delta U = 0, \quad \Delta V = 0.$$

Die Substitution dieser Werthe und die Elimination von λ, μ giebt die Bedingung, unter welcher dieselbe Linie die Curve $U = 0$, $V = 0$ ferner durchschneidet, als vom Grade $(m-2)\,(n-2)$ in (x_1, x_2, x_3, x_4) und vom Grade $(mn-4)$ in (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4). Da sie aber für jeden Punkt der Linie erfüllt sein muss, so wird das Resultat der Elimination von x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 zwischen ihr, den beiden Gleichungen der Linie $\Delta U = 0$, $\Delta V = 0$ und der Gleichung einer beliebigen Ebene

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$$

von der Form

$$\Pi\,(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4)^{mn-4}$$

sein, so dass Π vom Grade

$$(m-2)\,(n-2) + (mn-4)\,(m+n-3)$$

ist. Die Durchschnitte der Fläche $\Pi = 0$ mit $U = 0$, $V = 0$ sind aber die Punkte γ und ihre Zahl ist also für $m + n = p$, $mn = q$,

$$= q\,(pq - 2q - 6p + 16).$$

Ferner ist

$$R = 3q\,(p-2)\,\{q\,(p-3) - 1\}.$$

Beispiel 3. **Man soll die Singularitäten der abwickelbaren Fläche finden, welche durch eine Gerade erzeugt wird, die eine gegebene Curve stets zweimal schneidet.**

Die Ebenen dieses Systems sind „Ebenen durch zwei Linien" des Originalsystems, so dass die Klasse desselben gleich y ist. Die übrigen Singularitäten sind die reciproken von den Singularitäten des Systems, dessen Rückkehrkante x ist, und die oben berechnet worden sind. Der Rang des Systems oder die Ordnung der abwickelbaren Fläche ist daher durch die Formel

$$2R' = 2m(r-4) - \alpha - 3\beta$$

gegeben.

362. **Da die Ordnung der Reciproken einer Regelfläche immer der Ordnung der Originalfläche gleich sein muss, so hat die Theorie der Reciprokalflächen diese Reduction zu erklären.**

Wir beginnen mit speciellen Fällen dieser Theorie, um sodann allgemeine Ergebnisse darzubieten, die in neuester Zeit durch eine Untersuchung von Cayley*) gewonnen worden sind.

Die Gleichung der Fläche entspringe aus der Elimination des Parameters t zwischen den Gleichungen

$$at^k + bt^{k-1} + \text{etc.} = 0, \quad a't^l + b't^{l-1} + \text{etc.} = 0,$$

in welchen a, a', etc. lineare Functionen der Coordinaten sind.

Man hat $\mu = k + l$ als Ordnung der entstehenden Regelfläche; sie besitzt eine Doppellinie von der Ordnung

$$\tfrac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2),$$

in welcher dreifache Punkte in der Anzahl

$$\tfrac{1}{6}(\mu-2)(\mu-3)(\mu-4)$$

existieren. Die Anzahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte wird gefunden durch

$$2k = \tfrac{1}{4}(\mu-2)(\mu-3)(\mu^2-5\mu+8)$$

und die abwickelbare Fläche, welche durch sie erzeugt wird, ist von der Ordnung

$$2(\mu-2)(\mu-3).$$

Man findet dann

$$a = 2(\mu-1), \quad b = \tfrac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2), \quad \varkappa = 3(\mu-2),$$
$$\delta = 2(\mu-2)(\mu-3);$$

*) Vgl. „Philosophical Transactions", Vol. CLIII, 1863, p. 453—483. Der Herausgeber verdankt der Güte ihres Verfassers die rechtzeitige Kenntniss dieser Abhandlung.

Werthe, welche mit der Theorie übereinstimmen, nach welcher (Artikel 358) die Zahl der Rückkehrkanten des Tangentenkegels um

$$3b\,(\mu-2)-3t$$

und die der Doppelkanten um

$$2b\,(n-2)\,(n-3)-4k$$

vermindert werden. Bei der Prüfung der Formeln B) muss die Anmerkung des Artikel 357 (p. 514) berücksichtigt werden.

Wenn ferner die Regelfläche durch eine Gerade erzeugt wird, die in zwei festen Geraden und einer Curve von der Ordnung μ sich fort bewegt, so ist sie von der Ordnung 2μ (Artikel 209) und jede der beiden Geraden ist vielfach im Grade μ. Nun ist die Wirkung zweier vielfachen Linien, welche sich nicht durchschneiden, auf die Verminderung der Ordnungszahl der Reciprokalfläche nothwendig die Summe ihrer Einzelwirkungen. In Folge dessen sind die Formeln des Artikel 358 anzuwenden und man erhält für

$$p=\mu,\quad n=2\mu$$

die Reduction der Ordnungszahl der Reciprokalfläche

$$=8\mu\,(\mu-1),$$

welches eben wie es soll die Differenz zwischen

$$2\mu\,(2\mu-1)^2 \quad \text{und} \quad 2\mu \quad \text{ist.}$$

Man muss jedoch bemerken, dass die fragliche Regelfläche eine Anzahl vielfacher Erzeugenden ausser den vielfachen Directrixen besitzt (Artikel 211), und hat zu beweisen, dass diese auf die Ordnungszahl der Reciprokalfläche keinen Einfluss haben. Ist λ die Anzahl solcher Geraden, so ist der Grad des Tangentenkegels um 2λ kleiner als er sonst gewesen sein würde; aber zugleich ist auch die Zahl der Rückkehrkanten dieses Kegels um 6λ kleiner als sie sonst gewesen wäre. Denn es ist gezeigt worden, dass die Zahl der Rückkehrkanten um das Dreifache der Zahl von Punkten vermindert wird, wo eine Doppellinie die zweite Polarfläche, hier von der Ordnung $(2\mu-2)$, durchschneidet; da aber die Directrixen vielfache Linien in dieser Fläche vom Grade $(\mu-2)$ sind, so haben wir das Doppelte dieser Zahl von $(2\mu-2)$ zu subtrahieren und erhalten 2 als die Zahl der Punkte jeder Doppellinie, welche die Zahl der Rückkehrkanten beeinflussen. Da nun die Zahl der stationären Tangentenebenen nach wie vor gleich Null ist, so bleibt der Grad der Reciproken des Kegels unverändert, weil gleichzeitig der Grad desselben um eine Anzahl und die Zahl seiner Rückkehrkanten um das Dreifache derselben Anzahl vermindert werden.

363. Wir benutzen für die allgemeine Untersuchung die Bezeichnungen der Artikel 209, 211, so dass die Ordnungen der Directrixcurven respective m_1, m_2, etc. sind und wollen für die entsprechenden Rangzahlen die analoge Bezeichnung r_1, r_2, etc. hier einführen.

Die Untersuchung, die wir hier hinzufügen, hat als Hauptzweck die Bestimmung der Doppelcurven im allgemeinen Falle, also die Ergänzung dessen, was im Artikel 207 gelehrt ist. Dann ergiebt sich nach dem Vorigen die Anwendung auf die Theorie der Reciprokalflächen.

Wenn man die Regelfläche betrachtet, deren drei Directrixcurven von den Ordnungen m_1, m_2, m_3 sind, und jede derselben nach dem Grade ihrer Vielfachheit zählt, so bildet man die Summe

$$\begin{aligned}\mathrm{D}D\,(m_1, m_2, m_3) &= m_1 . \tfrac{1}{2} m_2 m_3 (m_2 m_3 - 1) + m_2 . \tfrac{1}{2} m_3 m_1 (m_3 m_1 - 1)\\ &\quad + m_3 . \tfrac{1}{2} m_1 m_2 (m_1 m_2 - 1)\\ &= \tfrac{1}{2} m_1 m_2 m_3 (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1 - 3).\end{aligned}$$

Soll dagegen jede Erzeugende eine Curve m_1 doppelt und eine Curve m_2 einfach durchschneiden, so werden die aus einem Punkte der ersteren respective beschriebenen Kegel von den Ordnungen $(m_1 - 1)$ und m_2 und bestimmen die erste Curve als $(m_1 - 1)\, m_2$ fach; aus einem Punkte der Curve m_2 geht ein Kegel nach m_1, welcher h_1 oder $\left\{\tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}\right\}$ Doppelkanten besitzt, so dass die zweite Curve in diesem Grade vielfach ist. Dieselbe Bildung wie vorher giebt nun

$$\begin{aligned}\mathrm{D}D\,(m_1^2, m_2) &= m_1 . \tfrac{1}{2} (m_1 - 1)\, m_2 \left\{(m_1 - 1)\, m_2 - 1\right\}\\ &\quad + m_2 . \tfrac{1}{2} \left\{\tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}\right\} \left\{\tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2} - 1\right\}\\ &= m_2 \left\{\tfrac{1}{8} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3) + m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2)\right.\\ &\quad \left. - \frac{r_1}{2}\left[\tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - \tfrac{1}{2}\right] + \frac{r_1^2}{8}\right\}\\ &\quad + m_2 (m_2 - 1) \left\{\tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2) + \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)\right\}.\end{aligned}$$

Die Fläche der Linien durch drei Punkte bei einer Curve m_1 zeigt durch die Bemerkung, dass die Zahl der Doppelkanten eines Kegels vom Grade $(m_1 - 1)$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - m_1 + 2 - \frac{r_1}{2}$$

ist, jene Curve als vielfach von demselben Grade und daher

$$\begin{aligned} \mathbf{D}D(m_1^3) &= m_1 \cdot \tfrac{1}{2} \left\{ \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - m_1 + 2 - \frac{r_1}{2} \right\} \times \\ &\qquad \left\{ \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - m_1 + 2 - \frac{r_1}{2} - 1 \right\} \\ &= \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2) \left\{ \tfrac{1}{4} (m_1 - 3)(m_1 - 4) + m_1 - 2 \right\} \\ &\quad - \tfrac{1}{4} m_1 r_1 \left\{ (m_1 - 1)(m_1 - 2) + 1 - \frac{r_1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Die Bezeichnung der Factoriellen

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-i-1) = [n]^i$$

gestaltet diese wie die folgenden Formeln etwas bequemer. Man hat

$$\begin{aligned} \mathbf{D}D(m_1^2, m_2) &= m_2 \left\{ \tfrac{1}{8} [m_1]^4 + [m_1]^3 - \frac{r_1}{4} ([m_1]^2 - 1) + \frac{r_1^2}{8} \right\} \\ &\quad + [m_2]^2 (\tfrac{1}{2} [m_1]^3 + \tfrac{1}{2} [m_1]^2). \end{aligned}$$

$$\mathbf{D}D(m_1^3) = \tfrac{1}{8}[m_1]^5 + \tfrac{1}{2}[m_1]^4 + \tfrac{1}{2}[m_1]^3 - \frac{r_1}{4}([m_1]^3 + m_1) + \frac{r_1^2}{8} m_1.$$

Die speciellen Werthe von

$$\mathbf{D}D(1, 1, m_1), \quad \mathbf{D}D(1, m_1, m_2), \quad \mathbf{D}D(1, m_1^2)$$

bildet man darnach leicht.

364. Wenn wir die Durchschnittspunkte einer Curve m_4 mit der Regelfläche betrachten, welche die Directrixcurven m_1, m_2, m_3 hat, so geht durch jeden dieser Punkte, deren Anzahl das m_4 fache der Ordnung der Regelfläche ist, eine Gerade, die die vier Curven m_1, m_2, m_3, m_4 schneidet. Bezeichnen wir durch $G(m_1, m_2, m_3, m_4)$ die Zahl jener Geraden und durch $R(m_1, m_2, m_3)$ diese Ordnungszahl, so ist

$$G(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_4 \cdot R(m_1, m_2, m_3).$$

Daraus folgen

$$\begin{aligned} R(m_1, m_2, m_3) = G(1, m_1, m_2, m_3) &= m_3 \cdot R(1, m_1, m_2) \\ = m_3 \cdot G(1, 1, m_1, m_2) &= m_3 m_2 \cdot R(1, 1, m_2) \\ = m_3 m_2 \cdot G(1, 1, 1, m_2) &= m_3 m_2 m_1 \cdot R(1, 1, 1) \\ = m_3 m_2 m_1 \cdot G(1, 1, 1, 1) &= 2 m_1 m_2 m_3, \end{aligned}$$

das Resultat des Artikel 209, und damit

$$G(m_1, m_2, m_3, m_4) = 2 m_1 m_2 m_3 m_4.$$

Ebenso ist

$$G(m_1^2, m_2, m_3) = m_2 m_3 G(1, 1, m_1^2) = m_2 m_3 . R(1, m^2).$$

Die Bestimmung der Zahl von Geraden, welche zwei Gerade einfach und eine Curve m_1^{ter} Ordnung zweifach schneiden, lässt sich an dem Fall der ebenen Curve dieser Ordnung erläutern. Die Ebene der Curve schneidet die beiden Geraden in zwei Punkten, deren Verbindungslinie mit der Curve m_1 Punkte gemein hat und die daher $\frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)$ Gerade vertritt, welche die beiden Geraden einfach und die Curve zweifach schneiden. Ausserdem geht durch jeden Doppelpunkt der Curve eine Gerade dieser Art und die gesuchte Zahl ist daher in diesem Falle

$$G(1, 1, m_1^2) = h_1 + \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1)$$

und daher allgemein nach der Anzahl der scheinbaren Doppelpunkte

$$h_1 = \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2},$$

$$G(1, 1, m_1^2) = m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}.$$

Also auch

$$G(m_1^2, m_2, m_3) = m_2 m_3 \left\{ m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2} \right\}.$$

Eine ähnliche Betrachtung führt noch zur Bestimmung von $G(m_1^2, m_2^2)$.

Sind beide Curven eben und h_1, h_2 die respectiven Anzahlen ihrer Doppelpunkte, so schneidet die Schnittlinie beider Ebenen die Curve m_1 in m_1, die Curve m_2 in m_2 Punkten, sie ist also als Vertreterin von

$$\tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) . \tfrac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)$$

Geraden zu betrachten, die die Curven je zweimal schneiden; zu ihnen kommen die $h_1 h_2$ Linien, welche die Doppelpunkte der einen mit denen der andern Curve verbinden; man hat also nach den Werthen von h_1, h_2 für räumliche Curven

$$G(m_1^2, m_2^2) = \tfrac{1}{4} m_1 m_2 (m_1 - 1)(m_2 - 1) - \frac{r_1}{2} \tfrac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)$$
$$- \frac{r_2}{2} \tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) + \frac{r_1 r_2}{4}.$$

365. Für die Ermittelung der Ausdrücke für $G(1, m_1^3)$ und $G(m_1^4)$ dienen gewisse Functionalgleichungen, welche die Ausdrücke G erfüllen müssen. Wenn die Curve m_1 durch das System

zweier Curven m_1, m_1' ersetzt wird, so tritt an Stelle von r_1 die Summe von $(r_1 + r_1')$. Bezeichnet $G(m_1)$ dann eine der Functionen $G(m_1, m_2, m_3, m_4)$, $G(m_1, m_2^2, m_3)$, $G(m_1, m_2^3)$, so ist immer

$$\text{a)}\quad G(m_1 + m_1') = G(m_1) + G(m_1').$$

Ebenso ist für $G(m_1^2)$ als Vertreter von $G(m_1^2, m_2, m_3)$, $G(m_1^2, m_2^2)$

$$\text{b)}\quad G[(m_1 + m_1')^2] = G(m_1^2) + G(m_1, m_1') + G(m_1'^2);$$

für $G(m_1^3)$ als Vertreter von $G(m_1^3, m_2)$

$$\text{c)}\quad G[(m_1 + m_1')^3] = G(m_1^3) + G(m_1^2, m_1') + G(m_1, m_1'^2) + G(m_1'^3),$$

und endlich

$$\text{d)}\quad G[(m_1 + m_1')^4] = G(m_1^4) + G(m_1^3, m_1') + G(m_1^2, m_1'^2) + G(m_1, m_1'^3) + G(m_1'^4).$$

Man kann diese Gleichungen durch die gegebenen Werthe bestätigen; sie führen aber zur Bestimmung der G Formeln unter der Voraussetzung, dass diese Zahlen als Functionen der m und r allein erscheinen müssen. Denn die Gleichung a) ist von der Form

$$\varphi(m_1 + m_1') = \varphi(m_1) + \varphi(m_1'),$$

und die allgemeine Lösung derselben ist

$$\varphi(m_1) = \alpha m_1 + \beta \cdot r_1;$$

die Gleichungen b), c) und d), die respective voraussetzen, dass $G(m_1, m_1')$, $G(m_1^2, m_1')$ und $G(m_1, m_1'^2)$, $G(m_1^3, m_1')$ und $G(m_1^2, m_1'^2)$ und $G(m_1, m_1'^3)$ bekannt seien, sind von der Form

$$\varphi(m_1 + m_1') = \varphi m_1 + \varphi m_1' + \text{funct.}(m_1, m_1')$$

und aus einer particulären Lösung ergiebt sich daher die allgemeine Lösung $\varphi(m_1)$ durch Addition von $(\alpha m_1 + \beta r_1)$.

Wir bestätigen zunächst den vorher gefundenen Ausdruck für $G(1, 1, m_1^2)$.

Bezeichnet $G(m_1^2)$ eben den fraglichen Ausdruck, so ist $G(m_1, m_1')$ der Ausdruck für $G(1, 1, m_1, m_1')$, somit gleich $2 m_1 m_1'$. Also ist

$$G[(m_1 + m_1')^2] - G(m_1^2) - G(m_1'^2) = 2 m_1 m_1'$$

und diess ist durch

$$G(m_1^2) = m_1(m_1 - 1)$$

befriedigt, so dass

$$G(1, 1, m_1^2) = m_1(m_1 - 1) + \alpha m_1 + \beta r_1$$

sein muss. Ist aber die Curve m_1 ein System von m_1 Geraden, so dass

$$m_1 = m_1, \quad r_1 = 0$$

ist, so wird

$$G(1, 1, m_1^2) = m_1(m_1 - 1)$$

und für die Curve als einen Kegelschnitt, oder $m_1 = 2$, $r_1 = 2$ ist $G(1, 1, m_1^2) = 1$; daher sind $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{2}$ die Werthe der Constanten und man erhält wie im Artikel 364

$$G(1, 1, m_1^2) = m_1(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}.$$

Bezeichnen wir ferner $G(1, m_1^3)$ durch $G(m_1^3)$, so stehen $G(m_1^2, m_1')$, $G(m_1, m_1'^2)$ für $G(1, m_1^2, m_1')$ und $G(1, m_1, m_1'^2)$, deren Werthe

$$= m_1' \left\{ m_1(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2} \right\} \quad \text{und}$$

$$= m_1 \left\{ m_1'(m_1' - 1) - \frac{r_1'}{2} \right\}$$

sind, und wir haben

$$G[(m_1 + m_1')^3] - G(m_1^3) - G(m_1'^3)$$

$$= m_1' \left\{ m_1(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2} \right\} + m_1 \left\{ m_1'(m_1' - 1) - \frac{r_1'}{2} \right\},$$

eine Gleichung, die die particuläre Lösung

$$G(m_1^3) = \tfrac{1}{3} m_1(m_1 - 1)(m_1 - 2) - m_1 \frac{r_1}{2}$$

zulässt. Es ist also

$$G(1, m_1^3) = \tfrac{1}{3} m_1(m_1 - 1)(m_1 - 2) - m_1 \frac{r_1}{2} + \alpha m_1 + \beta r_1.$$

Für ein Liniensystem oder $m_1 = 0$, $r_1 = 0$ ist nun

$$G(1, m_1^3) = \tfrac{1}{3} m_1(m_1 - 1)(m_1 - 2)$$

und für eine gewundene Curve dritter Ordnung, oder $m_1 = 3$, $r_1 = 4$

$$G(1, m_1^3) = 0,$$

also $\alpha = 0$, $\beta = 1$ und somit

$$G(1, m_1^3) = \left\{ \tfrac{1}{3} m_1(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2} \right\} (m_1 - 2)$$

366. Daraus ergeben sich die Werthe für

$$G(m_1^3, m_1'), \quad G(m_1^2, m_1'^2) \quad \text{und} \quad G(m_1, m_1'^3),$$

nämlich

$$m_1' \left\{\tfrac{1}{3} m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}\right\} (m_1 - 2),$$

$$\tfrac{1}{2} m_1' (m_1' - 1) \left\{m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}\right\} - \frac{r_1'}{4} \left\{m_1 (m_1 - 1) - r_1\right\},$$

$$m_1 \left\{\tfrac{1}{3} m_1' (m_1' - 1) - \frac{r_1'}{2}\right\} (m_1' - 2);$$

daraus also als die Summe dieser Grössen der Werth von

$$G\,[(m_1 + m_1')^4] - G\,(m_1^4) - G\,(m_1'^4)$$

und dem entsprechend die allgemeine Auflösung

$$G\,(m_1^4) = \frac{1}{12} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3)$$
$$- \frac{r_1}{2} m_1 \left\{\tfrac{1}{2} (m_1 - 1) - 2\right\} + \frac{r_1^2}{8} + \alpha m_1 + \beta r_1.$$

Zur Bestimmung der Constanten bemerken wir, dass für ein System gerader Linien oder $m_1 = m_1$, $r_1 = 0$ sich

$$G\,(m_1^4) = \frac{1}{12} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3) + m_1$$

ergeben muss, also $\alpha = 1$; während für einen Kegelschnitt oder $m_1 = 2$, $r_1 = 2$, $G\,(m_1^4) = 0$ sein muss, so dass $\beta = -\frac{11}{4}$ ist. Daher ist

$$G\,(m_1^4) = \frac{1}{12} m_1 (m_1 - 1)(m_1 - 2)(m_1 - 3) + m_1$$
$$- \frac{r_1}{8} \left\{2 m_1 (m_1 - 1) - 8 m_1 + 22 - r_1\right\}.$$

Unter den speciellen Fällen dieser Formel ist die Curve der Ordnung pq, welche der vollständige Durchschnitt zweier Flächen von den Ordnungen p und q ist, und für die daher

$$r_1 = pq\,(p + q - 2)$$

ist. (Artikel 80). Wir haben bereits im Artikel 321 von ganz anderen Betrachtungen aus dasselbe Ergebniss gefunden, welches der Vollzug dieser Substitutionen in die jetzt erhaltene allgemeine Formel liefert.

Sei ferner die Curve auf einem einfachen Hyperboloid gelegen und ihre Ordnung $m_1 = p + q$, wo p und q die Anzahlen der Punkte bezeichnen, welche sie mit den Erzeugenden der ersten und zweiten Art respective gemein hat, so ist $r_1 = 2pq$ und man findet

$$G(m_1^4) = \frac{1}{12}\left\{p(p-1)(p-2)(p-3) + q(q-1)(q-2)(q-3)\right\}$$
$$- 2q(p-1)(p-2)(p-3) - 2p(q-1)(q-2)(q-3).$$

Die Formel ist anwendbar auf die Fälle $p = q = 1$, oder den Kegelschnitt; auf die Curve dritter Ordnung $p = 1$, $q = 2$; die Curve vierter Ordnung aus zwei Flächen zweiter Ordnung $p = q = 2$; die Curve vierter Ordnung aus der Fläche dritter und der zweiter Ordnung $p = 1$, $q = 3$; die Curve fünfter Ordnung aus denselben Flächen $p = 2$, $q = 3$ und die Curve sechster Ordnung, welche aus ihnen als vollständiger Schnitt hervorgeht. Sie liefert für alle diese Curven den Werth Null, wie es sein muss, und ist auf alle Curven höherer Ordnung auf dem Hyperboloid nicht anwendbar, da bei diesen die Erzeugenden des Hyperboloids selbst unendliche Schaaren solcher Geraden geben, die also nicht in bestimmter Anzahl existieren.

Zudem liefert die nämliche Betrachtung die Anzahl der doppelten Erzeugenden, welche der Regelfläche angehören und damit theils Bestätigung, theils Ergänzung des im Artikel 211 Gegebenen. Man hat offenbar

$$\mathbf{D}G(m_1, m_2, m_3) = G(m_1^2, m_2, m_3) + G(m_1, m_2^2, m_3)$$
$$+ G(m_1, m_2, m_3^2),$$
$$\mathbf{D}G(m_1^2, m_2) = 3\,G(m_1^3, m_2) + G(m_1^2, m_2^2),$$
$$\mathbf{D}G(m_1^3) = 6\,G(m_1^3);$$

also durch Einsetzen

$$\mathbf{D}G(m_1, m_2, m_3) = m_1 m_2 m_3 (m_1 + m_2 + m_3 - 3)$$
$$- m_2 m_3 \frac{r_1}{2} - m_3 m_1 \frac{r_2}{2} - m_1 m_2 \frac{r_3}{2},$$

nur der Form nach verschieden von dem Resultate des Artikel 211.

Sodann

$$\mathbf{D}G(m_1^2, m_2) = m_2(m_1 - 2)\left\{m_1(m_1-1) - \frac{3r_1}{2}\right\}$$
$$+ m_2(m_2 - 1)\left\{\tfrac{1}{2} m_1(m_1 - 1) - \frac{r_1}{4}\right\} - \frac{r_2}{2}\left\{\tfrac{1}{2} m_1(m_1-1) - \frac{r_1}{2}\right\},$$
$$\mathbf{D}G(m_1^3) = \tfrac{1}{2} m_1(m_1-1)(m_1-2)(m_1-3) + 6m_1$$
$$- \frac{r_1}{2}\left\{3m_1(m_1-1) - 12m_1 + 33 - \frac{3r_1}{2}\right\}.$$

Insbesondere also

$$\mathfrak{D}G\,(1\,,\,1\,,\,m_1) = m_1\,(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2},$$

$$\mathfrak{D}G\,(1\,,\,m_1\,,\,m_2) = m_1 m_2\,(m_1 + m_2 - 2) - \frac{r_1}{2}\,m_2 - \frac{r_2}{2}\,m_1,$$

$$\mathfrak{D}G\,(1\,,\,m_1^2) = \left\{m_1\,(m_1 - 1) - \frac{3\,r_1}{2}\right\}(m_1 - 2).$$

Für Curven dritter Ordnung ist also beispielsweise

$\mathfrak{D}G\,(3,\,3,\,3) = 108,\quad \mathfrak{D}G\,(3^2,\,3) = 10,\quad \mathfrak{D}G\,(3^3) = 0,$
$\mathfrak{D}G\,(1,\,3,\,3) = 24\,,\quad \mathfrak{D}G\,(1\,,\,3^2) = 0.$

367. Bei der Untersuchung der vorigen Artikel sind überdiess die folgenden speciellen Fälle der Bestimmung der Ordnung einer Regelfläche mit erhalten worden

$$R\,(m_1^2,\,m_2) = m_2\left\{m_1\,(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}\right\},$$

$$R\,(m_1^3) = \left\{\tfrac{1}{3}\,m_1\,(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}\right\}(m_1 - 2).$$

Man hat speciell

$$R\,(1\,,\,m_1^2) = m_1\,(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2},$$

für die Curve dritter Ordnung $= 4$.

Setzt man die Curve als auf einem Hyperboloid gelegen voraus, so dass $m_1 = p + q$, $r_1 = 2pq$ ist, so wird

$$R\,(m_1^3) = \tfrac{1}{3}\,p\,(p-1)\,(p-2) + \tfrac{1}{3}\,q\,(q-1)\,(q-2);$$

die Fläche ist das $\left\{\tfrac{1}{6}\,p\,(p-1)\,(p-2) + \tfrac{1}{6}\,q\,(q-1)\,(q-2)\right\}$ fach zu zählende Hyperboloid. Ist die Curve ein Liniensystem, oder $m_1 = m_1$, $r_1 = 0$, so ist

$$R\,(m_1^3) = \tfrac{1}{3}\,m_1\,(m_1 - 1)\,(m_1 - 2);$$

die Fläche ist von den $\tfrac{1}{6}\,m_1\,(m_1 - 1)\,(m_1 - 2)$ Hyperboloiden gebildet, welche aus den möglichen Ternen dieser Linien entstehen können.

Ist die Curve der vollständige Durchschnitt zweier Flächen, also $m_1 = pq$, $r_1 = pq\,(p + q - 2)$, so erhält man dieselbe Formel für die in Rede stehende Ordnungszahl, wie sie im Artikel 320 durch directe Untersuchung hergeleitet worden ist.

Ist sie ferner von solcher Beschaffenheit, dass zwischen den Coordinaten jedes Punktes in ihr die Relationen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = A : B : C : D$$

bestehen, wo A, B, C, D rationale ganze Functionen eines Parameters ω sind, so kann ebenfalls die aus den dann geltenden Werthen $h = \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ und $r_1 = 2(m-1)$ hervorgehende Formel

$$R(m^3) = \tfrac{1}{3}(m-1)(m-2)(m-3)$$

direct bestätigt werden. Wenn man die Gleichung einer Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

so bestimmt, dass drei der Schnittpunkte, welche sie mit der Curve erzeugt, in gerader Linie sind, so erhält man zwischen den ξ eine Gleichung eines gewissen Grades, welche die Gleichung der Regelfläche in Ebenencoordinaten ist; jener Grad ist die Klassen- und somit auch die Ordnungszahl der Regelfläche.

Ist nun ω aus der Gleichung

$$\xi_1 A + \xi_2 B + \xi_3 C + \xi_4 D = 0$$

bestimmt, so sind die Wurzeln $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ derselben die den Durchschnittspunkten der Ebene und der Curve entsprechenden Parameter, und wenn drei unter ihnen in gerader Linie, d. h. mit einem willkürlichen vierten Punkte $(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4')$ in einer Ebene sind, so ist

$$\begin{vmatrix} \xi_1', & \xi_2', & \xi_3', & \xi_4' \\ A_1, & B_1, & C_1, & D_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & D_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Bildet man dann das Product Π aller den möglichen Ternen der m Wurzeln entsprechenden Gleichungen dieser Art, so ist dasselbe in Bezug auf alle Wurzeln symmetrisch und die darin erscheinenden symmetrischen Functionen derselben können durch ihre Werthe in den Coefficienten ersetzt werden; man erhält also die verlangte Relation zwischen den ξ. Sie enthält

$$\tfrac{1}{6}m(m-1)(m-2)$$

Glieder, wovon $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ die Functionen A_1, B_1, C_1, D_1 der Wurzel ω_1 enthalten; die Form von Π ist daher

$$(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4')^{\frac{1}{6}[m]^3} (\omega_1, 1)^{\frac{1}{2}[m]^3} (\omega_2, 1)^{\frac{1}{2}[m]^3} \ldots$$

oder nach der Substitution

$$(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4')^{\frac{1}{6}[m]^3} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^{\frac{1}{2}[m]^3}.$$

Die obige Determinante ist nach ihrer Form durch

$(\omega_1 - \omega_2)$ $(\omega_2 - \omega_3)$ $(\omega_1 - \omega_3)$, das Product Π also durch

$$\Pi \ (\omega_1 - \omega_2) \ (\omega_1 - \omega_3) \ (\omega_2 - \omega_3)$$

theilbar, und da diess Product $\frac{1}{2} m \ (m-1) \ (m-2)$ lineare Factoren, und das Product der Differenzenquadrate der Wurzeln $m \ (m-1)$ lineare Factoren enthält, so dass nach den Gesetzen der Discriminanten

$$\Pi \ (\omega_1 - \omega_2) \ (\omega_1 - \omega_3) \ (\omega_2 - \omega_3) = (\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \xi_4)^{[m-1]^2}$$

ist, so bleibt nach Unterdrückung dieses Factors Π von der Form

$$(\xi_1', \ \xi_2', \ \xi_3', \ \xi_4')^{\frac{1}{6}[m]^3} \ (\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \xi_4)^{\frac{1}{2}[m]^3 - [m-1]^2}.$$

Ferner verschwindet die Determinante für

$$\xi_1', \ \xi_2', \ \xi_3', \ \xi_4' = (A_1, \ B_1, \ C_1, \ D_1), \ (A_2, \ B_2, \ C_2, \ D_2), \\ (A_3, \ B_3, \ C_3, \ D_3),$$

und das Product Π enthält daher ferner den Factor

$$(\xi_1'\xi_1 + \xi_2'\xi_2 + \xi_3'\xi_3 + \xi_4'\xi_4)^{\frac{1}{6}[m]^3},$$

so dass endlich Π als von der Form

$$(\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3, \ \xi_4)^{\frac{1}{3}[m-1]^3}$$

übrig bleibt und der Grad der Regelfläche also $\frac{1}{3} \ [m-1]^3$ ist.

Dass in der That für diese Curve die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte $= \frac{1}{2} \ (m-1) \ (m-2)$ sei, bestätigt die folgende Untersuchung. Angenommen eine Gerade durch den Punkt $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ habe mit der Curve zwei Punkte von den Parametern ω_1, ω_2 gemein, so sind diese durch die Gleichungen

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

bestimmt. Schreibt man diese in der Form

$$\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\omega_1 - \omega_2} = 0, \qquad \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{\omega_1 - \omega_2} = 0$$

und behandelt die Parameter als Coordinaten, so gehört jede dieser Gleichungen zu einer Curve der Ordnung $2 \ (m-1)$, die je einen $(m-1)$ fachen Punkt in den unendlich entfernten Punkten der Achsen hat. Die Zahl ihrer Schnittpunkte ist somit

$$= 4 \ (m-1)^2 - 2 \ (m-1)^2 = 2 \ (m-1)^2,$$

und sie besteht aus den gesuchten und den $m \ (m-1)$ fremden Punkten, für welche $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ und für welche $\omega_1 = \omega_2$

ist; die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte ist daher

$$= \frac{1}{2} (m-1) (m-2).$$

Endlich kann auch $R(1, m^2)$ für diese Curve direct bestimmt werden; es ist die Zahl der Geraden, welche zwei gegebene Gerade $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$ und die Curve selbst zweifach durchschneiden. Man hat für sie die Bedingungen

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

und kann sie in der Form

$$\frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{\omega_1 - \omega_2} = 0, \qquad \frac{C_1 D_2 - C_2 D_1}{\omega_1 - \omega_2} = 0$$

schreiben und ω_1, ω_2 als Coordinaten behandeln. Die Zahl der Schnittpunkte beider Curven ist $2(m-1)^2$ und die Zahl der fraglichen Geraden oder

$$R(1, m^2) = (m-1)^2.$$

368. Wir kommen nun zur Untersuchung der Knotenlinien, welche die Regelflächen ausser den vielfachen Leitcurven und den doppelten Erzeugenden besitzen können. Die directe Bestimmung ihrer Ordnungen kann in den Fällen der

$$R(1, m_1, m_2) \quad \text{und} \quad R(1, m_1^2)$$

geleistet werden. In den allgemeineren Fällen

$$R(m_1, m_2, m_3), \quad R(m_1^2, m_2) \quad \text{und} \quad R(m_1^3)$$

führt eine indirecte Untersuchung zum Ziel.

Bezeichnen wir die gesuchte Ordnungszahl im ersten Falle durch $\mathbf{D}(1, m_1, m_2)$ — im zweiten durch $\mathbf{D}(1, m_1^2)$ — und denken durch die geradlinige Directrix eine Ebene gelegt, welche die erste Curve in m_1, die zweite in m_2 Punkten schneidet, so sind die Geraden, welche einen Punkt der ersten Gruppe mit irgend einem der zweiten verbinden, Erzeugende der Regelfläche $R(1, m_1, m_2)$ und ihre Schnittpunkte sind Punkte der Doppelcurve $\mathbf{D}(1, m_1, m_2)$, an Zahl $= 2 \cdot \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) \frac{1}{2} m_2 (m_2 - 1)$. Diese Zahl wird zur Ordnungszahl der Doppelcurve ergänzt, wenn man die a Punkte noch hinzufügt, welche der geraden Directrix selbst in der Doppelcurve angehören. Dann ist

$$\mathbf{D}(1, m_1, m_2) = \frac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) m_2 (m_2 - 1) + a.$$

Jene Punkte a sind unter den Rückkehrpunkten in der geraden Directrix, deren Gleichungen $x_1 = x_2 = 0$ sein mögen;

da sie eine $m_1 m_2$ fache Linie ist, so ist die Gleichung der Regelfläche von der Form

$$(A, \ldots \between x_1, x_2)^{m_1 m_2} = 0,$$

wenn $A, \ldots$ Functionen der Coordinaten vom Grade $m_1 m_2$ sind. Daher ist die Zahl der Rückkehrpunkte in jener Directrix

$$= 2\, m_1 m_2\, (m_1 m_2 - 1);$$

aber diese Zahl besteht aus vier verschiedenen Summanden, nämlich der Zahl a der Punkte, in denen die Gerade die Doppelcurve schneidet, der Zahl der Punkte, in denen sie die Regelfläche $R\,(m_1{}^2, m_2)$ und der Zahl derer, in denen sie die Regelfläche $R\,(m_1, m_2{}^2)$, endlich der Zahl derer, in denen sie die abwickelbare Fläche (m_1, m_2) schneidet. Die zweite und dritte unter diesen Zahlen sind

$$R\,(m_1{}^2, m_2) = m_2 \left\{ m_1\,(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2} \right\},$$

$$R\,(m_1, m_2{}^2) = m_1 \left\{ m_2\,(m_2 - 1) - \frac{r_2}{2} \right\},$$

die Ordnung der abwickelbaren Fläche ist*)

$$S = m_2 r_1 + m_1 r_2,$$

und man findet daher

---

*) Cayley a. a. O. p. 482 sagt zur Erläuterung und Demonstration Folgendes: Die Schnittcurve zweier Flächen von den Ordnungen p und q ist von der Klasse $pq\,(p + q - 2)$ oder $pq\,(q - 1) + qp\,(p - 1)$; reciprok ist die gemeinsam umgeschriebene Abwickelungsfläche zweier Flächen von den Klassen p und q von der Klasse pq und der Ordnung $pq\,(q - 1) + qp\,(p - 1)$. Ebenso wie eine Fläche p^{ter} Ordnung in eine Abwickelungsfläche p^{ter} Ordnung degeneriert, wird die Fläche p^{ter} Klasse in eine Curve dieser Klasse übergehen; von Singularitäten abgesehen, ist dann ihre Ordnung $= (p - 1)\,p$. Ersetzt man nun p und $p\,(p - 1)$ durch r_1 und m_1, und ebenso q und $q\,(q - 1)$ durch r_2 und m_2, so erhält man $(m_1 r_2 + m_2 r_1)$ als Ordnungszahl der Abwickelungsfläche, die von den Tangentenebenen der Curven von den Ordnungen m_1 und m_2 erzeugt wird; dabei ist als Tangentenebene der Curve jede Ebene betrachtet, die eine Tangente derselben enthält und der Durchschnitt zweier auf einander folgender Tangentenebenen ist eine Erzeugende der Abwickelungsfläche $S\,(m_1, m_2)$. Er bestätigt diess Raisonnement dann noch durch die Betrachtung des Falles zweier ebenen Curven von den Ordnungen m_1, m_2 und den Klassen r_1, r_2. Sind die Curven m_1, m_2 die Durchschnitte von Flächen der Ordnungen m, n; p, q respective, so hat man $mnpq\,(m + n + p + q - 4)$ als Ordnung der Developpabeln,

$$a = m_1 m_2 (m_1 m_2 - 1) - m_2 m_1 (m_1 - 1) - m_1 m_2 (m_2 - 1)$$
$$= m_1 (m_1 - 1) m_2 (m_2 - 1)$$

und die Ordnungszahl der Doppelcurve

$$\mathbf{D} (1, m_1, m_2) = \tfrac{3}{2} m_1 m_2 (m_1 - 1) (m_2 - 1).$$

Sodann für die Fläche $R (1, m_1^2)$. Wir denken durch die gerade Directrix eine Ebene, welche die Curve m_1 in m_1 Punkten schneidet. Denken wir irgend vier dieser Punkte, so liefern die drei Paare gerader Linien, die man zwischen ihnen zieht, drei Punkte der Doppelcurve und wir erhalten so

$$\frac{3}{24} m_1 (m_1 - 1) (m_1 - 2) (m_1 - 3)$$

Punkte derselben in jener Ebene. Ausserdem liegen a Punkte derselben in der geraden Directrix selbst und daher ist

$$\mathbf{D} (1, m_1^2) = \tfrac{1}{8} [m_1]^4 + a.$$

Die Punkte a sind unter den Rückkehrpunkten der Fläche, die in der geraden Directrix liegen. Stellen wir diese durch $x_1 = x_2 = 0$ dar, so ist wegen der Vielfachheit derselben im Grade $\left\{\tfrac{1}{2} [m_1^2] - \frac{r_1}{2}\right\}$ die Gleichung der Regelfläche von der Form

$$(A, \ldots \between x_1, x_2)^{\frac{1}{2} [m_1^4]^2 - \frac{r_1}{2}} = 0,$$

wo $A, \ldots$ Functionen der Coordinaten vom Grade $\frac{1}{2} [m_1]^2$ sind; die Zahl der Rückkehrpunkte in jener Linie ist daher

$$2 \cdot \tfrac{1}{2} [m_1]^2 \left\{\tfrac{1}{2} [m_1]^2 - 1 - \frac{r_1}{2}\right\}$$
$$= m_1 (m_1 - 1) \left\{\tfrac{1}{2} m_1 (m_1 - 1) - 1 - \frac{r_1}{2}\right\}.$$

Sie besteht aber aus drei Summanden, nämlich dem Doppelten von a, dem Dreifachen der Zahl von Punkten, welche die gerade Directrix mit der Regelfläche $R (m_1^3)$, und der Zahl der-

---

weil $r_1 = mn (m + n - 2)$ und $r_2 = pq (p + q - 2)$, $m_1 = mn, m_2 = pq$ sind. (Vergl. Artikel 322.)

Die Curve m_1 ist r_2 fach und m_2 ist r_1 fach in der Fläche und die Klasse derselben $m r_1 r_2$. Es ist nicht schwer, die Zahl ihrer Wendungsberührebenen und ihrer dreifachen Tangentenebenen, sowie die Ordnungen ihrer Rückkehr- und Doppelcurve zu bestimmen.

jenigen Punkte, welche sie mit der abwickelbaren Fläche $S\,(m_1^2)$ gemein hat. Da nun jene Anzahl als die Ordnung der Regelfläche $R\,(m_1^3)$

$$= \tfrac{1}{3}\, m_1\,(m_1-1)\,(m_1-2) - \frac{r_1}{2}\,(m_1-2)$$

und die Ordnung der bezeichneten abwickelbaren Fläche nach Artikel 361, Beispiel 3, wegen $\beta = 0$

$$= m\,(r-4) - \frac{\alpha}{2},$$

also weil

$$r = m\,(m-1) - 2h,\quad \frac{\alpha}{2} = n - m = 3m\,(m-2) - 6h - m$$

(Artikel 66)

$$= r_1\,(m_1-3)$$

ist, so finden wir nach leichter Reduction

$$2a = \tfrac{1}{2}\,[m_1]^4 + [m_1]^3 - \frac{r_1}{2}\,([m_1]^2 - m_1),$$

und also

$$\mathbf{D}\,(1,\, m_1^2) = \tfrac{1}{8}\, m_1\,(m_1-1)\,(m_1-2)\,\left\{3\,(m_1-3)+1\right\}$$
$$- \frac{m_1 r_1}{4}\,(m_1-2) = \frac{m_1\,(m_1-2)}{4}\,\left\{\tfrac{1}{2}\,(m_1-1)\,(3m_1-5) - r_1\right\}.$$

Man erhält noch für die gesammten vielfachen Linien der Fläche an Leitlinien, Erzeugenden und Doppelcurve die Summen

$$(\mathbf{D}G + \mathbf{D}D + \mathbf{D})\,(1,\, m_1,\, m_2) = \Sigma\mathbf{D}\,(1,\, m_1,\, m_2)$$
$$= 2m_1 m_2\,(m_1 m_2 - 1) - \frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{2},$$

$$(\mathbf{D}G + \mathbf{D}D + \mathbf{D})\,(1,\, m_1^2) = \Sigma\mathbf{D}\,(1,\, m_1^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\,(m_1+1)\,m_1\,(m_1-1)\,(m_1-2) - \frac{r_1}{8}\,\left\{4m_1^2 - 14 - r_1\right\}.$$

Bezeichnet R die jedesmalige Ordnung der Regelfläche, so kann man schreiben

$$\Sigma\mathbf{D}\,(1,\, m_1,\, m_2) = \tfrac{1}{2}\,R^2 - R - \frac{m_1 r_2 + m_2 r_1}{2},$$

$$\Sigma\mathbf{D}\,(1,\, m_1^2) = \tfrac{1}{2}\,R^2 - R - \frac{r_1}{2}\,(m_1 - \tfrac{5}{2}).$$

369. Um die Ordnungen der Doppelcurven der Regelflächen $R\,(m_1,\, m_2,\, m_3)$, $R\,(m_1^2,\, m_2)$, $R\,(m_1^3)$ zu bestimmen, bedienen wir uns einer ähnlichen Functionaluntersuchung wie im

Artikel 365. Wir beziehen sie auf die Summen der Ordnungen aller Doppellinien der Fläche $\Sigma \mathbf{D}\ (m_1, m_2, m_3)$, etc.

Bezeichne $R\ (m_1)$ eine der Regelflächen $R\ (m_1, m_2, m_3)$, $R\ (m_1, m_2^2)$ und angenommen, dass an Stelle der einfachen Curve m_1 die zusammengesetzte Curve $(m_1 + m_1')$ trete, so zerfällt $R\ (m_1 + m_1')$ in die Regelflächen $R\ (m_1)$ und $R\ (m_1')$ und ihr Durchschnitt ist ein Glied der Summe $\Sigma \mathbf{D}\ (m_1 + m_1')$, so dass für $R\ (m_1)$, etc. als Vertreter der Ordnungszahlen der betreffenden Regelflächen

$$\Sigma \mathbf{D}\ (m_1 + m_1') = \Sigma \mathbf{D}\ (m_1) + \Sigma \mathbf{D}\ (m_1') + R\ (m_1) \,.\, R\ (m_1')$$

ist; und ebenso bei der Anwendung von $R\ (m_1^2)$ für $R\ (m_1^2, m_2)$

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{D}\ [(m_1 + m_1')^2] &= \Sigma \mathbf{D}\ (m_1^2) + \Sigma \mathbf{D}\ (m_1, m_1') + \Sigma \mathbf{D}\ (m_1'^2) \\ &+ C_2 \left\{ R\ (m_1^2),\ R\ (m_1, m_1'),\ R\ (m_1'^2) \right\}, \end{aligned}$$

wenn C_2 die Summe der Combinationen zu zweien aus den eingeschlossenen drei Grössen bedeutet. Endlich ist ebenso

$$\begin{aligned} \Sigma \mathbf{D}\ [(m_1 + m_1')^3] &= \Sigma \mathbf{D}\ (m_1^3) + \Sigma \mathbf{D}\ (m_1^2, m_1') + \Sigma \mathbf{D}\ (m_1, m_1'^2) \\ &+ \Sigma \mathbf{D}\ (m_1'^3) + C_2 \left\{ R\ (m_1^3),\ R\ (m_1^2, m_1'),\ R\ (m_1, m_1'^2),\ R\ (m_1'^3) \right\}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun voraus, wie es den schon erhaltenen Ergebnissen gemäss ist,

$$\Sigma \mathbf{D} = \tfrac{1}{2} R^2 - R + \varphi,$$

so ergeben sich nach

$$R\ (m_1 + m_1') = R\ (m_1) + R\ (m_1'), \text{ etc.}$$

aus den vorigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi\ (m_1 + m_1') &= \varphi\ (m_1) + \varphi\ (m_1'), \\ \varphi\ (m_1 + m_1')^2 &= \varphi\ (m_1^2) + \varphi\ (m_1, m_1') + \varphi\ (m_1'^2), \\ \varphi\ (m_1 + m_1')^3 &= \varphi\ (m_1^3) + \varphi\ (m_1^2, m_1') + \varphi\ (m_1, m_1'^2) + \varphi (m_1'^3). \end{aligned}$$

Sie sind, wenn man in der zweiten $\varphi\ (m_1, m_1')$ und in der dritten $\varphi\ (m_1^2, m_1')$ und $\varphi\ (m_1, m_1'^2)$ als bekannt voraussetzt, alle von der Form

$$f\ (m_1 + m_1') - f\ (m_1) - f\ (m_1') = \text{Funct.}\ (m_1, m_1'),$$

so dass aus einer bekannten speciellen Lösung die allgemeine Lösung durch Addition von $(\alpha m_1 + \beta r_1)$ erhalten wird, so lange man voraussetzt, dass $f\ (m_1)$ als abhängig von der Curve m_1 eine Function von m_1 und r_1 allein ist.

Wenn nun zuerst $\varphi\ (m_1)$ für $\varphi\ (m_1, m_2, m_3)$ steht, so erhalten wir

$$\varphi(m_1, m_2, m_3) = \alpha m_1 + \beta r_1,$$

und da $\varphi(m_1, m_2, m_3)$ in Bezug auf alle drei Curven symmetrisch sein muss, so kann

$$\varphi(m_1, m_2, m_3) = \alpha m_1 m_2 m_3 + \beta(r_1 m_2 m_3 + r_2 m_3 m_1 + r_3 m_1 m_2)$$
$$+ \gamma(m_1 r_2 r_3 + m_2 r_3 r_1 + m_3 r_1 r_2) + \delta r_1 r_2 r_3$$

gesetzt werden und ist

$$\Sigma \mathbf{D}(m_1, m_2, m_3) = \tfrac{1}{2} R^2 - R + \varphi(m_1, m_2, m_3)$$
$$= 2 m_1 m_2 m_3 (m_1 m_2 m_3 - 1) + \varphi(m_1, m_2, m_3).$$

Für $m_3 = 1$ muss diess auf den Werth von $\Sigma \mathbf{D}(1, m_1, m_2)$ zurückkommen und fordert $\alpha = 0$, $\beta = -\tfrac{1}{2}$, $\gamma = 0$; wir werden nachher sehen, dass auch $\delta = 0$ sein muss und erhalten daher

$$\Sigma \mathbf{D}(m_1, m_2, m_3) = 2 m_1 m_2 m_3 (m_1 m_2 m_3 - 1)$$
$$- \tfrac{1}{2}(r_1 m_2 m_3 + r_2 m_3 m_1 + r_3 m_1 m_2).$$

Wenn ferner $\varphi(m_1^2)$ für $\varphi(m_1^2, m_2)$ gesetzt ist, so steht $\varphi(m_1, m_1')$ für $\varphi(m_1, m_1', m_2)$

$$= -\frac{r_2}{2} m_1 m_1' - m_2 \frac{m_1 r_1' + m_1' r_1}{2},$$

und die Gleichung ist

$$\varphi(m_1 + m_1')^2 - \varphi(m_1^2) - \varphi(m_1'^2) = -\frac{r_2}{2} m_1 m_1' - m_2 \frac{m_1 r_1' + m_1' r_1}{2}$$

mit der particulären Lösung

$$\varphi(m_1^2) = -\tfrac{1}{4}[m_1]^2 r_2 - \tfrac{1}{2} m_1 m_2 r_1;$$

wir haben daher

$$\varphi(m_1^2, m_2) = -\tfrac{1}{4}[m_1]^2 r_2 - m_1 m_2 \frac{r_1}{2} + \alpha m_1 + \beta r_1.$$

Bemerken wir endlich, dass $\varphi(m_1^2, m_2)$ als Function von m_2 betrachtet die Gleichung

$$\varphi(m_2 + m_2') = \varphi(m_2) + \varphi(m_2')$$

erfüllt, also eine lineare Function von m_2 und r_2 ist, so können wir schreiben

$$\varphi(m_1^2, m_2) = -\tfrac{1}{4}[m_1]^2 r_2 - \tfrac{1}{2} m_1 m_2 r_1 + \alpha m_1 m_2 + \beta m_2 r_1$$
$$+ \gamma m_1 r_2 + \delta r_1 r_2,$$

und haben

$$\Sigma \mathbf{D}(m_1^2, m_2) = \tfrac{1}{2} R^2 - R + \varphi(m_1^2, m_2)$$

für

$$R = R(m_1^2, m_2) = m_2 \left\{ m_1 (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2} \right\}.$$

Setzt man daher $m_2 = 1$, so giebt die Vergleichung mit dem bekannten Werthe von $\Sigma \mathbf{D}\ (1, m_1^2)$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \tfrac{5}{4}$$

und da wir sehen werden, dass $\gamma = 0$, $\delta = 0$ sind, so ist

$$\varphi\,(m_1^2, m_2) = \tfrac{1}{2}\, m_2 r_1\, (\tfrac{5}{2} - m_1) - \frac{r_2}{2} \left\{\tfrac{1}{2}\, m_1\, (m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}\right\},$$

und somit

$$\Sigma \mathbf{D}\,(m_1^2, m_2) = \tfrac{1}{2}\, R^2 - R + \varphi\,(m_1^2, m_2)$$

$$= m_2 \left\{\tfrac{1}{2}\,[m_1]^4 + 2\,[m_1]^3 - \frac{r_1}{2}\,([m_1]^2 + m_1 - \tfrac{7}{2}) + \frac{r_1^2}{8}\right\}$$

$$+ [m_2]^2 \left\{\tfrac{1}{2}\,[m_1]^4 + 2\,[m_1]^3 + [m_1]^2 - \frac{r_1}{2}\,[m_1]^2 + \frac{r_1^2}{8}\right\}$$

$$- \frac{r_2}{2}\left(\tfrac{1}{2}\,[m_1]^2 - \frac{r_1}{2}\right).$$

Zur Bestimmung von $\varphi\,(m_1^3)$ erhalten wir dann durch Substitution der Werthe von $\varphi\,(m_1^2, m_1')$ und $\varphi\,(m_1, m_1'^2)$

$$\varphi\,(m_1 + m_1')^3 - \varphi\,(m_1^3) - \varphi\,(m_1'^3) = m_1'\,\frac{r_1}{2}\,(\tfrac{5}{2} - m_1)$$

$$- \frac{r_1'}{2}\left(\tfrac{1}{2}\,[m_1]^2 - \frac{r_1}{2}\right) + m_1\,\frac{r_1'}{2}\,(\tfrac{5}{2} - m_1')$$

$$- \frac{r_1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\,[m_1']^2 - \frac{r_1'}{2}\right),$$

welcher Gleichung durch

$$\varphi\,(m_1^3) = \frac{r_1}{2}\,(\tfrac{5}{2}\, m_1 - \tfrac{1}{2}\,[m_1]^2) + \frac{r_1^2}{4}$$

genügt wird; der allgemeine Werth ist somit

$$\varphi\,(m_1^3) = \frac{r_1}{2}\,(\tfrac{5}{2}\, m_1 - \tfrac{1}{2}\,[m_1]^2) + \frac{r_1^2}{4} + \alpha m_1 + \beta r_1,$$

und daher

$$\Sigma \mathbf{D}\,(m_1^3) = \tfrac{1}{2}\, R^2 - R + \varphi\,(m_1^3)$$

für

$$R = R\,(m_1^3) = \tfrac{1}{3}\,[m_1]^3 - \frac{r_1}{2}\,(m_1 - 2).$$

370. Betrachten wir insbesondere die Curve auf dem Hyperboloid, für welche $m_1 = p + q$, $r_1 = 2pq$ ist, so wird $R\,(m_1^3)$ auf das $\tfrac{1}{6}\left\{[p]^3 + [q]^3\right\}$ oder k fach zu zählende Hyperboloid reduciert und seine Ordnung also $= 2k$; daher

$$\Sigma \mathbf{D}\,(m_1^3) = 4 \cdot \tfrac{1}{2}\,[k]^2 + \varphi\,(m_1^3).$$

Für alle Werthe von p und q, die nicht grösser als 3 sind, muss $\varphi\,(m_1^3)$ verschwinden, also $\alpha = 3$, $\beta = -\frac{11}{2}$ sein, dadann

$$\varphi\,(m_1^3) = -\tfrac{1}{2}\,(q\,[p-1]^3 + p\,[q-1]^3)$$

ist.

Daraus geht für $\varphi\,(m_1^3)$ im allgemeinen Fall der Werth

$$3m_1 - \frac{r_1}{2}\,(\tfrac{1}{2}\,[m_1]^2 - \tfrac{5}{2}\,m_1 + 11) + \frac{r_1^2}{4}$$

hervor, den wir, weil er für die sechs Curven

$$p = q = 1;\quad p = q = 2;\quad p = q = 3;$$
$$p = 1,\ q = 2;\quad p = 1,\ q = 3;\quad p = 2,\ q = 3$$

bestätigt ist, für correct ansehen dürfen.

Wir bemerken dann, dass für eine Vermehrung des vorigen Werthes von $\varphi\,(m_1, m_2, m_3)$ um $6\alpha r_1 r_2 r_3$ eine Vermehrung des Werthes von $\varphi\,(m_1^2, m_2)$ um $3\alpha r_1^2 r_2$ und des Werthes von $\varphi\,(m_1^3)$ um αr_1^3 hätte eintreten müssen; und ferner, dass aus dem Wachsthum von $\varphi\,(m_1^2, m_2)$ um $(\gamma m_1 r_2 + \delta r_1 r_2)$ nothwendig das von $\varphi\,(m_1^3)$ um $\gamma m_1 r_1 + \delta r_1^2$ hervorgehen musste. Denn es ist

$$\begin{aligned}
\varphi\,(m_1^3) &= \gamma m_1 r_1 + \delta r_1^2 + \alpha r_1^3,\\
\varphi\,(m_1^2, m_1') &= \gamma m_1 r_1' + \delta r_1 r_1' + 3\alpha r_1^2 r_1',\\
\varphi\,(m_1, m_1'^2) &= \gamma m_1' r_1 + \delta r_1 r_1' + 3\alpha r_1 r_1'^2,\\
\varphi\,(m_1'^3) &= \gamma m_1' r_1' + \delta r_1'^2 + \alpha r_1'^3;
\end{aligned}$$

und die Summe dieser Ausdrücke ist

$$= \gamma\,(m_1 + m_1')\,(r_1 + r_1') + \delta\,(r_1 + r_1')^2 + \alpha\,(r_1 + r_1')^3,$$

das correspondierende Glied von $\varphi\,(m_1^3)$.

Da aber der Werth von $\varphi\,(m_1^3)$ ohne die vorige Vermehrung richtig ist, so müssen $\alpha = \gamma = \delta = 0$ sein, zur Bestätigung der vorhergehenden Werthe von $\varphi\,(m_1, m_2, m_3)$ und $\varphi\,(m_1^2, m_2)$.

Man erhält also schliesslich

$$\begin{aligned}
\Sigma\mathbf{D}\,(m_1^3) &= \tfrac{1}{2}R^2 - R + 3m_1 - \frac{r_1}{2}\,(\tfrac{1}{2}\,[m_1]^2 - \tfrac{5}{2}\,m_1 + 11) + \frac{r_1^2}{4}\\
&= \frac{1}{18}\,[m_1]^6 + \tfrac{1}{2}\,[m_1]^5 + [m_1]^4 + 3m_1\\
&\quad - \frac{r_1}{2}\,(\tfrac{1}{3}\,[m_1]^4 + \tfrac{1}{3}\,[m_1]^3 + \tfrac{1}{2}\,[m_1]^2 - \tfrac{7}{2}\,m_1 + 13)\\
&\quad + \frac{r_1^2}{4}\,(\tfrac{1}{2}\,[m_1]^2 - \tfrac{3}{2}\,m + 3).
\end{aligned}$$

Und die entsprechenden Ordnungen der Doppelcurve, welche in jeder dieser Flächen zu den vielfachen Leitlinien und den doppelten Erzeugenden hinzutritt,

$$\mathrm{D}\,(m_1, m_2, m_3) = \tfrac{1}{2}\, m_1 m_2 m_3 \left\{4 m_1 m_2 m_3 - (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1) - 2\,(m_1 + m_2 + m_3) + 5\right\},$$

$$\mathrm{D}\,(m_1{}^2, m_2) \quad = m_2 \left\{\tfrac{3}{8}\,[m_1]^4 - \frac{r_1}{2}\,(\tfrac{1}{2}\,[m_1]^2 - 2 m_1 + 3)\right\}$$

$$+ [m_2]^2 \left\{\tfrac{1}{2}\,[m_1]^4 + \tfrac{3}{2}\,[m_1]^3 + [m_1]^2 - \frac{r_1}{2}\,([m_1]^2 - \tfrac{1}{2}) + \frac{r_1{}^2}{8}\right\},$$

$$\mathrm{D}\,(m_1{}^3) \quad = \frac{1}{18}\,[m_1]^6 + \tfrac{3}{8}\,[m_1]^5 - \tfrac{1}{2}\,[m_1]^3 + 3 m_1$$

$$- \frac{r_1}{2}\,(\tfrac{1}{3}\,[m_1]^4 - \tfrac{1}{6}\,[m_1]^3 - \tfrac{5}{2}\,[m_1]^2 + 8 m_1 - 20)$$

$$+ \frac{r_1{}^2}{4}\,(\tfrac{1}{2}\,[m_1]^2 - 2 m_1).$$

Und speciell

$$\mathrm{D}\,(1, m_1, m_2) \quad = \tfrac{3}{2}\, m_1\,(m_1 - 1)\, m_2\,(m_2 - 1),$$

$$\mathrm{D}\,(1, m_1{}^2) \quad = \tfrac{3}{8}\, m_1\,(m_1 - 1)\,(m_1 - 2)\,(m_1 - 3) - \frac{r_1}{4}\,(m_1{}^2 - 5 m_1 + 6);$$

$$\mathrm{D}\,(1, 1, m_1) \quad = 0.$$

371. **Jede Erzeugende einer Regelfläche schneidet die sämmtlichen Doppellinien derselben in einer Anzahl von Punkten, die der um zwei verminderten Ordnungszahl der Fläche gleich ist.** (Artikel 207.)

Man bestätigt diess direct in den Fällen $R\,(1, m_1, m_2)$ und $R\,(1, m_1{}^2)$. Denn in jener sind die Directrixcurven vielfach vom Grade m_1, m_2, m_2, m_1 und jede Erzeugende schneidet sie in je einem Punkte, der für $(m_1 m_2 - 1)$, $(m_2 - 1)$, $(m_1 - 1)$ Punkte zählt; sie schneidet die Doppelcurve in $(m_1 - 1)\,(m_2 - 1)$ Punkten, welche einfach zählen, und sie schneidet die doppelten Erzeugenden nicht. Die Summe von

$$(m_1 m_2 - 1) + (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + (m_1 - 1)\,(m_2 - 1)$$

ist aber

$$2 m_1 m_2 - 2 = R - 2.$$

In der zweiten sind die Directrixcurven von den Graden der Vielfachheit $\left\{\tfrac{1}{2}\, m_1\,(m_1 - 1) - \frac{r_1}{2}\right\}$, $(m_1 - 1)$; die Erzeugende schneidet jene in einem Punkte und diese in zwei Punkten, sie schneidet endlich die Doppelcurve in $\frac{1}{2}(m_1-2)(m_1-3)$ Punkten, die doppelten Erzeugenden aber nicht. Es ist aber

$$\tfrac{1}{2} m_1 (m_1-1) - \frac{r_1}{2} - 1 + 2(m_1-1) + \tfrac{1}{2}(m_1-2)(m_1-3)$$
$$= R - 2.$$

In den übrigen Fällen finden wir auf Grund dieses Satzes die Zahl der Punkte, welche jede Erzeugende mit der Doppelcurve gemein hat. Sie ist für die Regelfläche $R\,(m_1, m_2, m_3)$

$$= 2m_1m_2m_3 - (m_1m_2 + m_2m_3 + m_3m_1) + 1;$$

für die Regelfläche $R\,(m_1{}^2, m_2)$

$$= m_2\left(m_1{}^2 - 3m_1 + 2 - \frac{r_1}{2}\right) - \tfrac{1}{2} m_1 (m_1-1) + 1 - \frac{r_1}{2};$$

und endlich für $R\,(m_1{}^3)$

$$= \tfrac{1}{3}[m_1]^3 - \tfrac{3}{2}[m_1]^2 + 3m_1 - 5 - \frac{r_1}{2}(m_1-5).$$

Sie ist also insbesondere für $R\,(1, 1, m_1)$ gleich Null. (Artikel 211.)

372. Es ist hier zu erwähnen, dass die Hesse'sche Determinantenfläche einer Regelfläche diese selbst nur in ihren vielfachen Linien und in den erzeugenden Geraden durchschneidet, deren jede von einer nächstfolgenden Erzeugenden geschnitten wird.

Denn nach Artikel 205 ist für $x = 0$, $y = 0$ als eine solche Erzeugende der Theil der Gleichung, welcher in Bezug auf x und y vom ersten Grade ist, von der Form

$$(xz + yw)\,\Phi.$$

Dann ist nach Artikel 26 der Theil der Hesse'schen Determinante, welcher x und y nicht enthält,

$$\left\{\left(\Phi + z\frac{d\Phi}{dz}\right)\left(\Phi + w\frac{d\Phi}{dw}\right) - wz\frac{d\Phi}{dz}\frac{d\Phi}{dw}\right\}^2,$$

was sich auf Φ^4 reduciert. Aber die Gerade $x = 0$, $y = 0$ durchschneidet $\Phi = 0$ nur in solchen Punkten, in welchen sie vielfache Linien durchschneidet; und wenn die Gleichung von der Form $ux + vy^2$ ist (Artikel 26), so enthält die Determinantenfläche die Linie $x = y = 0$. So findet man in dem im Artikel 362 betrachteten Falle der Fläche

$$at^k + bt^{k-1} + \text{etc.} = 0, \quad a't^l + b't^{l-1} + \text{etc.} = 0$$

die Zahl der Erzeugenden, welche eine nächstfolgende durchschneiden, gleich $2(\mu-2)$; die Curve $U=0$, $H=0$ von der Ordnung $4\mu(\mu-2)$ besteht aus diesen Geraden, deren jede für zwei zu zählen ist, und der Doppellinie, deren Ordnungszahl

$$4(\mu-1)(\mu-2)$$

ist; man hat

$$4(\mu-1)(\mu-2) + 4(\mu-2) = 4\mu(\mu-2).$$

Wenn ferner die Fläche eine vielfache Linie von der Ordnung m und dem Grade der Vielfachheit p hat, so ist dieselbe eine Linie von der Ordnung $4(p-1)$ in der Hesse'schen Fläche und ist äquivalent $4mp(p-1)$ in der Curve

$$U=0, \quad H=0.$$

Nun ist die durch zwei Gerade und eine Curve m^{ter} Ordnung, die wir ohne wirkliche vielfache Punkte voraussetzen, als Directrixen bestimmte Regelfläche von der Ordnung $2m$ und die geraden Directrixen sind in ihr vom m^{ten} Grade der Vielfachheit; sie hat $\left\{\frac{1}{2}m(m-1)+h\right\}$ doppelte Erzeugende und $2r$ Erzeugende, welche eine nächstfolgende Erzeugende durchschneiden. Vergleichen wir also die Ordnung der Curve $U=0$, $H=0$ mit der Summe der Ordnungen der Curven, aus welchen sie gebildet wird, so haben wir

$$16m(m-1) = 8m(m-1) + 4m(m-1) + 8h + 4r$$

und diese Gleichheit ist nach Artikel 84 allerdings eine Identität.

373. Wenn wir die Hesse'sche Determinante der Gleichung der developpablen Fläche $xu + yv^2 = 0$ bilden, so erkennen wir in gleicher Art, dass wir als solche das Product der Gleichung selbst in eine Reihe von Gliedern erhalten, in denen der von x und y unabhängige Theil

$$v\left\{\frac{d^2u}{dz^2}\,\frac{d^2u}{dw^2} - \left(\frac{d^2u}{dz\,dw}\right)^2\right\}$$

ist. Diess beweist, dass die ergänzende Hesse'sche Fläche (Artikel 194) jede Erzeugende erstens in ihren Durchschnitten mit der Fläche $v=0$ schneidet, d. h. zweifach in dem in der Curve m gelegenen Punkte und in $(r-4)$ Punkten der Curve x; und zweitens da, wo sie die Determinantenfläche von $u=0$ schneidet, d. h. in der Hesse'schen Determinante des Systems, das aus diesen $(r-4)$ Punkten mit dem dreifach zählenden Punkte in m zusammengesetzt ist, in welcher Hesse'schen Determinante der letztere Punkt vierfach enthalten ist, so dass ihre Ordnung $2(r-3)$ wird. Der Durchschnitt der Erzeugenden mit der ergänzenden Hesse'schen Fläche besteht daher aus dem sechsfach zählenden Punkte in m, den $(r-4)$ Punkten in x und $2(r-5)$ anderen Punkten, d. h. in zusammen $(3r-8)$ Punkten; diess ist daher die Ordnungszahl der ergänzenden Hesse'schen Fläche. Zur Bewährung und Erläuterung dieser Gesetze hat neuestens A. Cayley dankenswerthe Beiträge*) geliefert, denen wir Einiges entnehmen. Sie schliessen sich an die developpabeln Flächen der im Artikel 67 zuerst betrachteten Art an, welche die Enveloppe von

$$at^k + kbt^{k-1} + \text{etc.} = 0$$

sind, wenn t einen veränderlichen Parameter und $a, b, c \ldots$ lineare Functionen der Coordinaten bedeuten, und die daher durch den Nullwerth der Discriminante dieser Gleichung dargestellt werden; so dass ihre Ordnung**) im Allgemeinen $2(k-1)$ ist, während sie sich doch auf $(2k-3)$ reduciert, sobald der zweite (oder der vorletzte) Coefficient der Gleichung entweder verschwindet oder ein numerisches Vielfaches des ersten (oder letzten) ist.

Dem Falle $k=3$ ohne Beschränkung entspricht die Gleichung der developpabeln Fläche

$$a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2 - 6abcd = 0;$$

und wenn wir $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$ als die Fundamentalebenen $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$ betrachten, so sind die von numerischen Factoren freien Derivierten und die aus ihnen gebildete Hesse'sche Determinante successive

$$u_1 = ad^2 - 3bcd + 2c^3,\quad u_2 = -3acd + 6b^2d - 3bc^2,$$
$$u_3 = -3abd + 6ac^2 - 3b^2c,\quad u_4 = a^2d - 3abc + 2b^3;$$

*) Vgl. „On certain developpable surfaces". In der „Royal Society", Nov. 1862 gelesen, abgedruckt im „Quarterly Journal", Vol. VI, p. 108 f.

**) Wir wollen dabei erinnern, dass nach der Definition der Artikel 64 f. die Ordnung des Systems zugleich die Ordnung der Curve (m), der Rang des Systems (r) einerseits gleich der Klasse der Curve andererseits gleich der Ordnung der Developpabeln, und endlich die Klasse des Systems gleich der Klasse der Developpabeln ist. Die Ordnungszahl unseres Falles ist daher das r des Artikel 67.

$$\begin{vmatrix} d^2, & -3cd, & -3bd+6c^2, & 2ad-3bc \\ -3cd, & 12bd-3c^2, & -3ad-6bc, & -3ac+6b^2 \\ -3bd+6c^2, & -3ad-6bc, & 12ac-3b^2, & -3ab \\ 2ad-3bc, & -3ac+6b^2, & -3ab, & a^2 \end{vmatrix}$$

und die Entwickelung derselben giebt wirklich

$$\begin{aligned} 27\,(a^4d^4 - 12a^3bcd^3 + 8a^3c^3d^2 + 8a^2b^3d^3 + 30a^2b^2c^2d^2 - 48a^2bc^4d \\ + 16a^2c^6 - 48ab^4cd^2 + 68ab^3c^3d - 24ab^2c^5 \\ + 16b^6d^2 - 24b^5c^2d + 9b^4c^4), \end{aligned}$$

d. i. u^2, so dass man erhält

$$H^*u = u = a^2d^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 3b^2c^2 - 6abcd,$$

wie voraus zu sehen war, da für $r = 4$ die Ordnungszahl $3r - 8 = 4$ ist.

374. In analoger Weise lässt sich die Entwickelung für die developpabeln Flächen durchführen, welche den Gleichungen

$$at^4 + 8bt^3 + 18ct^2 - 27e\text{*)} = 0,$$

oder
$$(a, 2b, 3c, 0, -27e \between t, 1)^4 = 0$$

und
$$(a, b, 0, d, e \between t, 1)^4 = 0$$

entsprechen. Wir betrachten in diesem Artikel die Erstere. Ihre Gleichung ist als Discriminante der gegebenen nach Ausscheidung fremder Factoren

$$u = a^3e^2 + 6a^2c^2e - 24ab^2ce + 9ac^4 + 16b^4e - 8b^2c^3 = 0.$$

Ihre Derivierten sind für a, b, c, d als Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines tetraedrischen Systems

$$\begin{aligned} u_1 &= 3a^2e^2 + 12ac^2e - 24b^2ce + 9c^4, \\ u_2 &= -48abce + 64b^3e - 16bc^3, \\ u_3 &= 12a^2ce - 24ab^2e + 36ac^3 - 24b^2c^2, \\ u_4 &= 2a^3e + 6a^2c^2 - 24ab^2c + 16b^4, \end{aligned}$$

und die Hesse'sche Determinante also

$$\begin{vmatrix} u_{11}, & u_{12}, & u_{13}, & u_{14} \\ u_{21}, & u_{22}, & u_{23}, & u_{24} \\ u_{31}, & u_{32}, & u_{33}, & u_{34} \\ u_{41}, & u_{42}, & u_{43}, & u_{44} \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \Sigma \pm u_{11}u_{22}u_{33}u_{44},$$

wo

$u_{11} = 3(ae^2 + 2c^2e)$, $u_{12} = u_{21} = -24bce$, $u_{22} = 8(-3ace + 12b^2e - c^3)$,
$u_{13} = u_{31} = 6(2ace - 2b^2e + 3c^3)$, $u_{23} = u_{32} = 24(-abe - bc^2)$,
$u_{33} = 6(a^2e + 9ac^2 - 4b^2c)$, $u_{14} = u_{41} = 3(a^2e + 2ac^2 - 4b^2c)$,
$u_{24} = u_{42} = 8(-3abc + 4b^3)$, $u_{34} = u_{43} = 6(a^2c - 2ab^2)$, $u_{44} = a^3$.

*) Die numerischen Coefficienten sind so gewählt, dass ihre Summe Null ist.

Die Entwickelung giebt nach Ausscheidung des Factors 1152 und Division durch u

$$H^* = 3a^4ce^2 + 10a^3c^3e - 24a^2b^2c^2e + 3a^2c^5 - 24ab^4ce + 24ab^2c^4 + 32b^6e - 24b^4c^3.$$

Die nähere Discussion hat dann Folgendes hervorzuheben.

Nach der Entstehung der Gleichung der developpabeln Fläche ist

$$cu = 27^3 \left\{(ae - c^2)^3 + (4b^2e - 3ace - c^3)^2\right\},$$

und da

$$4b^2e - 3ace - c^3 = c(ae - c^2) - 4e(ac - b^2)$$

ist, so wird als Rückkehrkante der developpabeln Fläche die Curve

$$ae - c^2 = 0, \quad ac - b^2 = 0$$

4^{ter} Ordnung erster Art erkannt. (Artikel 86.)

Man schreibt ferner

$$u = a(ae + 3c^2)^2 - 8b^2(3ace - 2b^2e + c^3) = 0$$

und sieht, dass der Kegelschnitt

$$b = 0, \quad ae + 3c^2 = 0$$

eine Doppelcurve der Fläche ist. Nach

$$u = c^3(9ac - 8b^2) + e(a^3e + 6a^2c^2 - 2ab^2c + 16b^4) = 0,$$

endlich gehört der Kegelschnitt

$$e = 0, \quad 9ac - 8b^2 = 0$$

als einfache Curve der Fläche an.

375. Man kann H^* in der Form einer quadratischen Function

$$(3a^2c, \ -3b^2c, \ e(ac + 2b^2) \between (ae - c^2), \ 4(ac - b^2))^2 = 0$$

schreiben und erhält als ihre Discriminante

$$3c\left\{(a^2e + 3b^2c)(ac - b^2) + 3ab^2(ae - c^2)\right\};$$

daher ist die Curve 4^{ter} Ordnung erster Art

$$ae - c^2 = 0, \quad ac - b^2 = 0$$

auch Rückkehrcurve von H^*.

Es ist ferner

$$H^* = (ac - b^2)\left\{16e(ac - b^2)^2 + 3a(ae - c^2)^2\right\} + b^2u$$
$$= (ac - b^2)\left\{a(ae + 3c^2)(3ae + c^2) - 32ab^2ce + 16b^4e\right\} + b^2u,$$

und erkennt nach der Letzteren, dass der Doppelkegelschnitt der Developpabeln $ae + 3c^2 = 0$, $b = 0$ als einfache Curve der Fläche H^* angehört.

Zur Vervollständigung betrachten wir endlich den Durchschnitt der Flächen $u = 0$, $H^* = 0$, der von der 35^{ten} Ordnung sein muss. Ihm entspricht die Darstellung

$$(ac - b^2)\left\{3c\,(ae - c^2) - 4e\,(ac - b^2)\right\} = 0, \quad u = 0,$$

oder was dem äquivalent ist

$$u = 0, \quad ac - b^2 = 0; \quad u = 0, \quad 3c\,(ae - c^2) - 4e\,(ac - b^2) = 0.$$

Aus dem Ersten entspringt die 4fach zu zählende Rückkehrcurve $ac - b^2 = 0$, $ae - c^2 = 0$ (16) und die ebenfalls 4fach zu zählende Gerade $a = 0$, $b = 0$ (4); aus dem Zweiten

$$(ae - c^2)\left\{4c\,(ac - b^2) + a\,(ae - c^2)\right\} = 0,$$
$$4e\,(ac - b^2) - 3c\,(ae - c^2) = 0,$$

d. h. die Rückkehrcurve $ae - c^2 = 0$, $ac - b^2 = 0$ einfach (4) und die gerade Linie $c = 0$, $e = 0$ zweifach (2), und überdiess

$$4c\,(ac - b^2) + a\,(ae - c^2) = 0,$$
$$4e\,(ac - b^2) - 3c\,(ae - c^2) = 0,$$

welches die Rückkehrcurve $ac - b^2 = 0$, $ae - c^2 = 0$ einfach enthält (4) und worin man überdiess nach der Schreibart

$$c\,(ae + 3c^2) - 4b^2e = 0, \quad a\,(ae + 3c^2) - 4b^2c = 0,$$

die Doppelcurve $ae + 3c^2 = 0$, $b = 0$ zweifach (4) und die gerade Linie $c = 0$, $e = 0$ einfach (1) erkennt. Es ist aber die Summe der in Parenthese gesetzten Ordnungszahlen

$$4.4 + 4 + 4 + 2 + 2.4 + 1 = 35.$$

376. Die zweite der Gleichungen des Artikel 374 giebt eine developpable Fläche von der Gleichung

$$(ae - 4bd)^3 - 27\,(-ad^2 - b^2e)^2 = 0 \quad \text{oder}$$
$$u = a^3e^3 - 12a^2bde^2 - 27a^2d^4 - 6ab^2d^2e - 27b^4e^2 - 64b^3d^3 = 0.$$

Man sieht, dass ihre Rückkehrcurve eine Curve sechster Ordnung ist.

Die Hesse'sche Determinante derselben ist

$$\Sigma \pm u_{11}u_{22}u_{33}u_{44},$$

wo

$u_{11} = 2(-ae^3 + 4bde^2 + 9d^4)$, $u_{12} = u_{21} = 4(2ade^2 + bd^2e)$,
$u_{22} = 4(ade^2 + 27b^2e^2 + 32bd^3)$, $u_{13} = u_{31} = 4(2abe^2 + 18ad^3 + b^2de)$,
$u_{23} = u_{32} = 4(a^2e^2 + 2abde + 48b^2d^2)$, $u_{33} = 4(27a^2d^2 + ab^2e + 32b^3d)$,
$u_{14} = u_{41} = (-3a^2e^2 + 16abde + 2b^2d^2)$,
$u_{24} = u_{42} = 4(2a^2de + abd^2 + 18b^3e)$, $u_{34} = u_{43} = 4(2a^2be + ab^2d)$,
$u_{44} = 2(-a^3e + 4a^2bd + 9b^4)$

und die Division der Entwickelung durch u giebt

$$\begin{aligned}H^* &= a^5e^5 + 16a^4bde^4 - 108a^4d^4e^2 - 524a^3b^2d^2e^3 - 432a^3bd^5e \\ &\quad - 108a^2b^4e^4 + 656a^2b^3d^3e^2 + 1512a^2b^2d^6 - 432ab^5de^3 \\ &\quad + 272ab^4d^4e + 1512b^6d^2e^2 + 1280b^5d^5 \\ &= -108(a^2e^2 + 4abde - 14b^2d^2)(ad^2 + b^2e) \\ &\quad + (a^2e^2 + 28abde - 20b^2d^2)(ae - 4bd)^3.\end{aligned}$$

Aus der letzteren Form sieht man, dass die Rückkehrcurve

$$ae - 4bd = 0, \quad ad^2 + b^2e = 0$$

der developpabeln Fläche auch die Rückkehrcurve der ergänzenden Hesse'schen Determinantenfläche ist. Schreibt man jene in der Form $A^3 - 27B^2 = 0$, so ist für diese die Form

$$CA^3 - 108DB^2 = 0$$

zulässig und man erhält $B^2(C^2 - 4D) = 0$, d. h. $A^3 = 0$, $B^2 = 0$ oder der Durchschnitt wird von der sechsfach zu zählenden Rückkehrcurve (36) und der Curve $A^3 - 27B^2 = 0$, $C - 4D = 0$ (24) gebildet. Nun ist aber durch Substitution $C - 4D$ identisch mit $(ae + 2bd)(ae - 6bd) = 0$, oder die letzte Curve wird vom Durchschnitt der developpabeln Fläche mit den beiden Flächen zweiten Grades $ae + 2bd = 0$, $ae - 6bd = 0$ gebildet. Die Combination von $ae + 2bd = 0$ mit der Gleichung der developpabeln Fläche giebt aber wegen der aus der andern Relation entspringenden Gleichheit $(ae - 4bd)^3 = -216b^3d^3 = 108ab^2d^2e$ das Resultat $(ad^2 - b^2e)^2 = 0$, oder wir erhalten die Curve

$$ae + 2bd = 0, \quad ad^2 - b^2e = 0$$

zweifach (12), welche aus den Geraden $a = b = 0$, $d = e = 0$ und einer Curve vierter Ordnung zweiter Art, der Doppelcurve der developpabeln Fläche besteht.

Die Combination von $u = 0$ mit $ae - 6bd = 0$ giebt wegen $(ae - 4bd)^3 = 8b^3d^3 = \frac{4}{3}ab^2d^2e$

$$(a^2d^2 + b^2e^2)^2 - \frac{4}{81}ab^2d^2e = 0,$$

d. h. $ad^2 + \theta b^2e = 0$ und $ad^2 + \frac{1}{\theta}b^2e = 0$, wenn

$$\theta + \frac{1}{\theta} = \frac{158}{81} \quad \text{ist.}$$

Die Curve $ae - 6bd = 0$, $ad^2 + \theta b^2e = 0$ besteht aber aus den Geraden $a = b = 0$, $d = e = 0$ und einer Curve vierter Ordnung zweiter Art, und ebenso besteht die Curve

$$ae - 6bd = 0, \quad ad^2 + \frac{1}{\theta} b^2 e = 0$$

aus denselben Linien und einer eben solchen Curve. Jene Linien zählen also jede vierfach, und zu der sechsfach zählenden Rückkehrcurve 6^{ter} Ordnung treten noch zwei einfache und eine Doppelcurve vierter Ordnung zweiter Art, um den Schnitt 60^{ter} Ordnung zusammen zu setzen.

Jede Erzeugende schneidet die Fläche H^* in 10 Punkten $(2r - 10)$, nämlich in dem sechsfach zählenden Punkte in der Rückkehrcurve, dem zweifachen in der Doppelcurve und den zwei einfachen in den einfachen Schnittcurven vierter Ordnung zweiter Art.*)

377. Die Polaren eines Punktes einer Fläche in Bezug auf dieselbe berühren diese und einander in diesem Punkte und werden von der letzten Polare oder der Tangentenebene in Curven geschnitten, welche die nämlichen Geraden zu Tangenten in jenem als einem Doppelpunkte haben. Wenn dann für irgend einen Punkt der Fläche die vorletzte Polare ein Kegel ist, so berührt die letzte oder die Tangentenebene denselben längs einer Erzeugenden, und die Schnittcurve derselben mit einer beliebigen Polare wie mit der Fläche selbst hat in ihm einen Rückkehrpunkt. Die analytische Bedingung für die Kegelnatur der vorletzten Polare ist $H = 0$ und somit für jeden Punkt einer abwickelbaren Fläche erfüllt, da für eine solche $H = H^* . U$ ist. (Artikel 194.) Insbesondere aber zerfällt für die developpabeln Flächen jene Schnittcurve aus der zweifach zählenden Erzeugenden der Fläche im betrachteten Punkte und einer Curve, deren Ordnung um 2 niedriger ist als die der Fläche. Ist dann (x_1, x_2, x_3, x_4) ein Punkt der developpabeln Fläche $u = 0$, sind u_{11}, u_{12}, etc. ihre zweiten, Derivierten nach jenen Veränderlichen und K ihre Determinante, d. i. $K = H_u = 0$ und bezeichnet man die entsprechenden

---

*) Von der developpabeln Fläche der allgemeinen Gleichung

$$(a, b, c, d, e \between t, 1)^4 = 0$$

oder

$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27\,(ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3)^2 = 0$$

handelt A. Cayley in einer Note des „Philos. Magazine", 1864, p. 437. Ihre Rückkehrkante ist offenbar von der sechsten Ordnung und ihre Doppelcurve eine Curve vierter Ordnung zweiter Art. (Artikel 89.)

Elemente der Reciprokaldeterminante derselben durch $U_{11}, U_{12}, \ldots$, so sind die Coordinaten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ für den Scheitel jenes Kegels durch

$$\begin{aligned} \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 &= U_{11} : U_{12} : U_{13} : U_{14} \\ &= U_{21} : U_{22} : U_{23} : U_{24} \\ &= U_{31} : U_{32} : U_{33} : U_{34} \\ &= U_{41} : U_{42} : U_{43} : U_{44} \end{aligned}$$

ausdrückbar, und für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ als willkürliche Multiplicatoren und

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) = \begin{vmatrix} U_{11}, & U_{12}, & U_{13}, & U_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ U_{41}, & U_{42}, & U_{43}, & U_{44} \end{vmatrix} (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

stehen die Coordinaten des Scheitels in den durch $X_1 : X_2 : X_3 : X_4$ gegebenen Verhältnissen und man erhält für die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Erzeugenden aus (x_1, x_2, x_3, x_4) die Werthe $x_1 + X_1$, $x_2 + X_2$, $x_3 + X_3$, $x_4 + X_4$.

Für die im Artikel 373 betrachtete developpable Fläche 4ter Ordnung erhält man für die Grössen X_1, X_2, X_3, X_4, welche die Verhältnisse der Coordinaten des Scheitels vom Polarkegel zweiten Grades bestimmen, die Coefficienten der cubischen Covariante der Form $(a, b, c, d \between t, 1)^3$.

Zusätze.

I. Zu den Abschnitten des zweiten Kapitels.

1. Zur Literatur der Raumcurven dritter Ordnung (Artikel 71—79) ist nachzutragen eine an interessanten Resultaten reiche Abhandlung von L. Cremona, „Nuove ricerche di geometria pura sulle cubiche gobbe ed in specie sulla parabola gobba“, veröffentlicht in den Abhandlungen des „Istituto di Bologna“, t. III (serie 2^a).

2. Zur Note des Artikel 94 füge ich bei, dass die Untersuchungen über die Raumcurven von A. Cayley in „Comptes rendus“, t. LVIII, p. 994 fortgesetzt und auf die Curven 5^{ter} Ordnung erstreckt worden sind.

3. Zu Artikel 112 bemerke ich, dass es Jacobi war, der zuerst gegen die trotz Monge's richtiger Angabe noch von Lagrange in der „Theorie der Functionen“ besprochene Möglichkeit, dass die Curve der Krümmungsmittelpunkte zur Evolute der gewundenen Curve werde, bestimmt nachweist, wie diess nur bei ebenen Curven stattfinden könne. Diess geschah in dem kurzen aber sehr lesenswerthen Aufsatz: „Zur Theorie der Curven“, „Crelle's Journal“, Bd. XIV, p. 56—63.

4. Zu der historischen Uebersicht in der Note des Artikel 114 mag noch hinzugefügt werden, dass die Osculationsebene einer Raumcurve wohl zum erstenmale von Joh. Bernoulli betrachtet worden ist; nämlich in dem Problem („Opera omnia“, t. IV, p. 113) „In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam“, dessen Lösung aus dem Jahre 1728 herrührt.

5. Zu den Formeln des dritten Abschnitts fügen wir eine Gruppe von Differentialformeln, die oft nützlich sein können.

Sind α, β, γ die Richtungswinkel der Tangente, λ, μ, ν der zugehörigen Haupt- und ξ, η, ζ die der Binormale der Curve und bezeichnet man durch $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{r}$ die beiden Krümmungen der Curve, so sind (Artikel 104)

$$d \cos \alpha = \frac{ds}{\varrho} \cos \lambda, \quad d \cos \beta = \frac{ds}{\varrho} \cos \mu, \quad d \cos \gamma = \frac{ds}{\varrho} \cos \nu.$$

Denken wir dann durch den Anfangspunkt der Coordinaten Normalen von der Länge Eins zu zwei auf einander folgenden Osculationsebenen gelegt, so ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte der Hauptnormale parallel und nach den Coordinaten jener Punkte

$(\cos \xi, \cos \eta, \cos \zeta)$, $(\cos \xi + d \cos \xi, \cos \eta + d \cos \eta, \cos \zeta + d \cos \zeta)$

gelten die Formeln

$$\cos \lambda = \frac{d \cos \xi}{\sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \eta)^2 + (d \cos \zeta)^2}},$$

$$\cos \mu = \frac{d \cos \eta}{\sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \eta)^2 + (d \cos \zeta)^2}},$$

$$\cos \nu = \frac{d \cos \zeta}{\sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \eta)^2 + (d \cos \zeta)^2}}.$$

Da aber der Winkel zweier unendlich naher Osculationsebenen (Artikel 106) gleich

$$\frac{ds}{r} = \sqrt{(d \cos \xi)^2 + (d \cos \eta)^2 + (d \cos \zeta)^2}$$

ist, so erhält man

$$d \cos \xi = \frac{ds}{r} \cos \lambda, \quad d \cos \eta = \frac{ds}{r} \cos \mu, \quad d \cos \zeta = \frac{ds}{r} \cos \nu.$$

Und wegen

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \lambda + \cos^2 \xi = 1$$

oder

$$\cos \alpha \, d \cos \alpha + \cos \lambda \, d \cos \lambda + \cos \xi \, d \cos \xi = 0,$$

$$d \cos \lambda = -\frac{\cos \alpha}{\cos \lambda} d \cos \eta - \frac{\cos \xi}{\cos \lambda} d \cos \xi,$$

$$d \cos \lambda = -\left(\frac{\cos \alpha}{\varrho} + \frac{\cos \xi}{r}\right) ds;$$

ebenso aber

$$d \cos \mu = -\left(\frac{\cos \beta}{\varrho} + \frac{\cos \eta}{r}\right) ds,$$

$$d \cos \nu = -\left(\frac{\cos \gamma}{\varrho} + \frac{\cos \zeta}{r}\right) ds.$$

Diese Formelgruppe ist wohl von Serret zuerst gegeben.

6. Zu den Beispielen des dritten Abschnitts sei hier ein weiteres hinzugefügt, welches eine andere bedeutende Richtung der Untersuchung

bezeichnen mag. Wir betrachten die Durchschnittscurve eines elliptischen Cylinders

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit einem coaxialen Umdrehungs-Paraboloid

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

Sei („Analyt. Geom. der Kegelschnitte“, Artikel 231 f.)

$$x = a \cos\theta,\ y = b \sin\theta,$$

so ist

$$2pz = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$$

und

$$dx = -a \sin\theta d\theta,\ dy = b \cos\theta d\theta,$$

$$dz = -\frac{a^2 - b^2}{p} \sin\theta \cos\theta d\theta;$$

$$d^2x = -a \cos\theta d\theta^2,\ d^2y = -b \sin\theta d\theta^2,$$

$$d^2z = -\frac{a^2 - b^2}{p} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\, d\theta^2;$$

$$d^3x = a \sin\theta d\theta^3,\ d^3y = -b \cos\theta d\theta^3,$$

$$d^3z = \frac{4\,(a^2 - b^2)}{p} \sin\theta \cos\theta d\theta^3.$$

Also

$$ds = \frac{d\theta}{p} \sqrt{\left\{b^2p^2 + (a^2 - b^2)(p^2 + a^2 - b^2)\sin^2\theta - (a^2 - b^2)\sin^4\theta\right\}}$$

$$= \frac{d\theta}{p} \sqrt{\left\{b^2p^2 + p^2(a^2 - b^2)\sin^2\theta + (a^2 - b^2)^2 \sin^2\theta \cos^2\theta\right\}}.$$

Sodann die Grössen X, Y, Z des Artikel 97

$$X = -\frac{b\,(a^2 - b^2)}{p} \cos^3\theta d\theta^3,\ Y = \frac{a\,(a^2 - b^2)}{p} \sin^3\theta d\theta^3,$$

$$Z = ab\, d\theta^3,$$

welche in die Gleichung der Osculationsebene eingehen; und die Summe (Artikel 103)

$$X^2 + Y^2 + Z^2$$

$$= \frac{d\theta^6}{p^2} \left\{a^2b^2p^2 + a^2 (a^2 - b^2)^2 \sin^6\theta + b^2 (a^2 - b^2)^2 \cos^6\theta\right\},$$

so wie daraus der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\left\{b^2p^2 + p^2 (a^2 - b^2) \sin^2\theta + (a^2 - b^2) \sin^2\theta \cos^2\theta\right\}^{\frac{3}{2}}}{p^2 \left\{a^2b^2p^2 + a^2 (a^2 - b^2) \sin^6\theta + b^2 (a^2 - b^2)^2 \cos^6\theta\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

d. i. in den Scheitelseiten des Cylinders oder für $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\varrho_1 = \frac{b^2p^2}{\sqrt{a^2p^2 + (a^2 - b^2)^2}}, \qquad \varrho_2 = \frac{b^2p}{\sqrt{b^2p^2 + (a^2 - b^2)^2}}.$$

Man erhält ferner die Grösse M des Artikel 106 oder

$$Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z \text{ und identisch } -dXd^2x - dYd^2y - dZd^2z$$
$$= \frac{3ab\,(a^2 - b^2)}{p} \sin\theta \cos\theta\, d\theta^6$$

und den Radius der Torsion

$$r = \frac{ds}{d\eta} = \frac{a^2b^2p^2 + a^2\,(a^2 - b^2)^2 \sin^6\theta + b^2\,(a^2 - b^2)^2 \cos^6\theta}{3abp\,(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta}.$$

Die Formeln des Artikel 114 geben für die Bestimmung der osculierenden Kugel die Gleichungen

$$\alpha - x = \frac{-X'ds^2 + 3Xdsd^2s}{M} = -\frac{\cos\theta}{ap^2}\left\{a^2p^2 + (a^2 - b^2)^2\cos^4\theta\right\},$$

$$\beta - y = \frac{-Y'ds^2 + 3Yds\,d^2s}{M} = -\frac{\sin\theta}{bp^2}\left\{b^2p^2 + (a^2 - b^2)^2\sin^4\theta\right\},$$

$$\gamma - z = \frac{-Z'ds^2 + 3Z\,ds\,d^2s}{M}$$
$$= \frac{1}{p}\left\{(p^2 + a^2 - b^2)\cos^2\theta + (p^2 + b^2 - a^2)\sin^2\theta\right\}$$
$$= \frac{p^2 - a^2 - b^2 + 4pz}{p};$$

man erhält daraus

$$\alpha = -\frac{(a^2 - b^2)^2}{ap^2}\cos^5\theta, \quad \beta = -\frac{(a^2 - b^2)^2}{bp^2}\sin^5\theta,$$
$$\gamma = p + 5z - \frac{a^2 + b^2}{p}$$

und als eine der Projectionen der Rückkehrkante der Polarfläche auf die Coordinatenebenen

$$\left\{\frac{ap^2\alpha}{(a^2 - b^2)^2}\right\}^{\frac{2}{5}} + \left\{\frac{bp^2\beta}{(a^2 - b^2)^2}\right\}^{\frac{2}{5}} = 1,$$

eine Curve vom zehnten Grade. Diese Curve selbst wird aus dem bezüglichen Cylinder von der Achse z als Richtung der Erzeugenden durch eine Fläche 4ter Ordnung geschnitten.

Die Summe der Quadrate von $(\alpha - x)$, $(\beta - y)$, $(\gamma - z)$ in Function von θ giebt das Quadrat des Halbmessers der osculierenden Kugel.

Man berechnet endlich aus

$$d\alpha^2 = \frac{25\,b^2\,(2pz - b^2)^3\,dz^2}{a^2b^2p^2\,(a^2 - b^2)}, \quad d\beta^2 = \frac{25\,a^2\,(a^2 - 2pz)^3\,dz^2}{a^2b^2p^2\,(a^2 - b^2)},$$
$$d\gamma^2 = 25\,dz^2$$

das Bogenelement der Rückkehrkante der Polarfläche.

Für die aus dem Durchschnitt des hyperbolischen Cylinders

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit dem Paraboloid hervorgehende Curve und die Substitutionen

$$x = a \sec\theta, \quad y = b\tan\theta$$

findet man

$$2pz\cos^2\theta = a^2 + b^2\sin^2\theta$$

und ganz analoge Resultate; für die Rückkehrkante der Polarfläche z. B.

$$\alpha = -\frac{(a^2+b^2)^2}{ap^2}\sec^5\theta, \quad \beta = -\frac{(a^2+b^2)^2}{bp^2}\tan^5\theta,$$
$$\gamma = p + 5z - \frac{a^2 - b^2}{p}.$$

Aehnliche Beispiele liefern die Durchschnittscurven anderer Specialfälle der Flächen zweiten Grades. Was wir aber besonders hier bemerken wollen, ist diess, dass die Rectification der obigen Curven selbst, wie die der Rückkehrkanten ihrer Polarflächen nur von elliptischen Functionen abhängt. In der That, wenn man den Ausdruck

$$ds^2 = \frac{d\theta^2}{p^2}\left\{b^2p^2 + (a^2 - b^2)(p^2 + a^2 - b^2)\sin^2\theta - (a^2 - b^2)^2\sin^4\theta\right\}$$

integriert, so wird

$$s = \frac{1}{p}\int d\theta\,(P + Q\sin^2\theta + R\sin^4\theta)^{\frac{1}{2}},$$

und indem man das Trinom in der Klammer als Product zweier quadratischen Factoren

$$(A + B\sin^2\theta)\,(C - B\sin^2\theta)$$

betrachtet,

$$AC = b^2p^2, \quad C - A = p^2 + a^2 - b^2, \quad B = a^2 - b^2;$$

setzt man nun

$$\tan^2\varphi = \frac{A+B}{A}\tan^2\theta,$$

so wird

$$s = \frac{AC}{p\sqrt{C\,(A+B)}}\int \frac{d\varphi\left\{1 - \frac{B}{C}\left(\frac{A+C}{A+B}\right)\sin^2\varphi\right\}}{\left\{1 - \frac{B}{A+B}\sin^2\varphi\right\}\sqrt{1 - \frac{B}{C}\left(\frac{A+C}{A+B}\right)\sin^2\varphi}}$$

und man findet durch Entwickelung, dass die Rectification der fraglichen

Curve nur von elliptischen Integralen der ersten, zweiten und dritten Art abhängt. In diesem Sinne hat J. Booth die Durchschnittscurven der Flächen zweiten Grades untersucht in einem besondern Werke: „The Theory of Elliptic Integrals, and the Properties of Surfaces of the second Order“ 1851 und einer grossen Abhandlung der „Philosoph. Transactions“ von 1852 (p. 311—416) und 1854. Auch B. Tortolini, der schon in früheren Arbeiten (von 1844 an) sich damit beschäftigt, ist in seinen „Annali“ mehrfach auf diese Untersuchungen zurückgekommen. (Vergl. t. II, 1859; t. III, 1860; p. 183. t. IV, 1862; p. 204. t. V, 1863; p. 305.) Die beiden Curven, welche hier näher betrachtet wurden, sind von Booth mit dem Namen „Logarithmische Ellipse und Hyperbel“ belegt worden.

Von hier aus ist zu verweisen auf die höchst bemerkenswerthe Abhandlung von A. Clebsch, „Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie“ im 63. Bande des „Journal f. Math.“ Die Raumcurven betreffen besonders die §§ 11—16. In den §§ 17 und 18 sind Anwendungen auf die Raumcurven 4^{ter} und 6^{ter} Ordnung gegeben,*) welche als vollständiger Durchschnitt von Flächen 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung entstehen. Jene führen auf elliptische Functionen, und wir wollen aus beiden Paragraphen einige Sätze anführen, um zum Studium der Abhandlung zu veranlassen. Durch jeden Punkt der Curve 4^{ter} Ordnung kann man 9 Schmiegungsebenen an die Curve legen (vergl. Artikel 85); durch je zwei Punkte der Curve ebenso 4 Tangentenebenen derselben. Es giebt vier Systeme von Ebenen, die die Curve zweimal berühren und durch jede Tangente geht eine Ebene jedes Systems. Durch zwei Punkte der Curve und die Berührungspunkte der durch sie an dieselbe gelegten Tangentenebenen lässt sich eine Schaar von Flächen zweiter Ordnung legen, welche in den gegebenen Punkten die Curve berühren. Wenn man einen Punkt der Curve mit den 9 Punkten verbindet, in denen eine durch ihn gehende Schmiegungsebene die Curve berührt, so schneidet jede Ebene diess System von 9 Strahlen in einem Punktesystem, welches das System der Wendepunkte einer Curve 3^{ter} Ordnung sein kann. (Vergl. in demselben Bande des „Journal f. Math.“, p. 111.) Jene 9 Punkte liegen auf einer Schaar von Flächen 3^{ter} Ordnung, die in dem gegebenen Punkte die Curve dreipunktig berühren.

Es giebt 120 Ebenen, welche eine Raumcurve 6^{ter} Ordnung in drei verschiedenen Punkten berühren. Es giebt 255 Systeme von Flächen 2^{ter} Ordnung, welche die Curve in 6 verschiedenen Punkten berühren; die Berührungspunkte je zweier Flächen desselben Systems liegen auf einer Fläche 2^{ter} Ordnung. In jedem dieser Systeme kommen 28 Flächen vor, welche in Paare dreifach berührender Ebenen zerfallen. Die 12 Berührungspunkte je zweier solcher Paare liegen auf einer Raumcurve 4^{ter} Ordnung. Solcher Curven 4^{ter} Ordnung giebt es 32130. Es giebt ferner

*) Die vorhergehenden §§ sind der Theorie der ebenen Curven gewidmet und enthalten unter anderen als Beispiel eine sehr schöne Darstellung der Theorie der Doppeltangenten der Curven 4^{ter} Ordnung.

6561 Raumcurven 4ter Ordnung, welche die Curve 6ter Ordnung in vier verschiedenen Punkten dreipunktig berühren. Legt man durch die Berührungspunkte zweier solcher Curven eine Fläche 2ter Ordnung, so schneidet sie die Curve 6ter Ordnung noch in den Berührungspunkten einer dritten Berührungscurve.

Bei diesen Untersuchungen ist A. Clebsch noch zu einem andern merkwürdigen Resultate gelangt, das wir unter Verweisung auf seine Mittheilung im 64. Bande des „Journals f. Math.“, p. 98 hier kurz angeben. Man kann die Curven in Geschlechter theilen nach der Klassenzahl p der Abel'schen Functionen, auf welche sie führen. Wenn man aber von der betrachteten Curve zu einer andern übergeht, welche ihr so entspricht, dass ein Punkt und eine Ebene der einen einem Punkte und einer Ebene der andern respective entsprechen, so führen beide Curven auf dieselben Abel'schen Integrale, oder gehören dem nämlichen Geschlechte mit demselben p an. Man hat aber mit den Bezeichnungen des Artikel 64 für p die folgenden Ausdrücke und damit Identitäten, welche sich nach den a. a. O. gegebenen Gleichungen leicht bestätigen

$$p = \frac{m-1.m-2}{2} - h - \beta = \frac{r-1.r-2}{2} - y - n$$

$$= \frac{r-1.r-2}{2} - x - m = \frac{n-1.n-2}{2} - g - \alpha.$$

Bezeichnen dann dieselben Buchstaben mit Strichen die nämlichen Charactere eines in der angegebenen Weise abgeleiteten Systems, so hat man

$$\frac{m'-1.m'-2}{2} - h' - \beta' = \frac{m-1.m-2}{2} - h - \beta,$$

$$\frac{r'-1.r'-2}{2} - y' - n' = \frac{r-1.r-2}{2} - y - n,$$

$$\frac{r'-1.r'-2}{2} - x' - m' = \frac{r-1.r-2}{2} - x - m,$$

$$\frac{n'-1.n'-2}{2} - g' - \alpha' = \frac{n-1.n-2}{2} - g - \alpha;$$

es genügt hiernach für ein solches Gebilde, zwei der characteristischen Zahlen zu kennen, von denen im Allgemeinen (Artikel 66) drei erforderlich sind, um alle übrigen zu bestimmen.

7. Zu Artikel 122 sei bemerkt, dass die Theorie der geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid neuerdings Gegenstand einer lichtvollen analytischen Darstellung von Weierstrass gewesen ist; man vergleiche „Monatsberichte der Akad. d. Wissensch. zu Berlin“ vom Jahre 1861 (p. 986—997). Sie erfordert bekanntlich die Kenntniss der Abel'schen Transcendenten. Für die in der Geodäsie so wichtige geodätische Linie des Umdrehungsellipsoids findet man die zur Berechnung zweckmässigsten Formeln zusammengestellt von Jacobi und abgeleitet von Luther im 53. Bande des „Journal f. Math.“, p. 335 und p. 342.

8. Zu Artikel 148 in seinem Zusammenhang mit Artikel 27 f. tragen wir nach eine neuliche Bemerkung Grunert's („Archiv", Bd. XLI, p. 294—296) in der kurzen Fassung, welche ihr E. Beltrami („Archiv", Bd. XLII, p. 117) gegeben hat.

Wenn die Indicatrix in einem Punkte der Fläche eine Ellipse ist, d. h. wenn das absolute Glied in der quadratischen Gleichung des Artikel 34 positiv ist, so sei ϱ einer ihrer centralen Radien vectoren, also ϱ^2 der Krümmungsradius des entsprechenden Normalschnittes; dann hat man für das arithmetische Mittel aller Radien um den Punkt herum

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{M}}(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varrho^2 \, d\omega.$$

Nun ist $\varrho^2 \, d\omega$ das Doppelte der Fläche des elliptischen Sectors zwischen den unendlich nahe benachbarten Vectoren $\varrho(\omega)$ und $\varrho(\omega + d\omega)$ und das

$$\int_0^\pi \varrho^2 \, d\omega$$

ist daher der Totalinhalt der Ellipse oder

$$= \pi \sqrt{R \,.\, R'},$$

so dass man hat

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{M}}(R) = \sqrt{R . R'},$$

d. h. das arithmetische Mittel aller Krümmungsradien um einen Punkt herum ist dem geometrischen Mittel der beiden Hauptkrümmungsradien gleich.

Man kann dasselbe als Halbmesser einer Kugel betrachten und leicht die Coordinaten ihres Mittelpunktes bestimmen. Nach Grunert soll sie den Namen „Kugel der mittleren Krümmung" erhalten. (Vergl. dazu Artikel 51 einerseits und die Gauss'schen Definitionen anderseits.)

9. Zu der in den Artikeln 160—168 dargelegten Theorie der Strahlensysteme, wollen wir für ihre optischen Anwendungen verweisen auf die Note von Kummer in „Monatsberichte der Kön. Preuss. Akad. d. W. zu Berlin", 1860, p. 496 f. und eine Abhandlung von O. Meibauer, „Theorie der geradlinigen Strahlensysteme des Lichts", Berlin 1864, 4. Weitere Veröffentlichungen von Kummer sind zu erwarten. In Bezug auf die im Artikel 243 berührten Strahlensysteme, welche Flächen 4[ter] Ordnung mit 16 singulären Punkten zu Brennflächen haben, bringt eine solche Mittheilung das Juli-Heft der „Monatsberichte", p. 495. Nach ihr zerfällt das Strahlensystem 4[ter] Ordnung und Klasse bei solchen Flächen stets in der Weise vom Schluss des Artikel 243; das vollständige Strahlensystem aller doppeltberührenden Geraden einer solchen Fläche besteht stets wie bei der Fresnel'schen Wellenfläche aus 6 Strahlensystemen zweiter Ordnung und Klasse.

II. Zu den Kapiteln III, IV, V.

Zu Artikel 212 bemerken wir, dass A. Cayley die Gleichung der Regelfläche von den Directrixen

$$(\alpha^3 + \beta^3)\,xy - (x^3 + y^3)\,\alpha\beta = 0,\quad x - mz = 0,\quad y - nz = 0,$$
$$x - \alpha = 0,\quad y - \beta = 0$$

bildete, indem er die Grössen A, B, x, y aus dem System von Gleichungen

$$(\alpha^3 + \beta^3)\,xy - (x^3 + y^3)\,\alpha\beta = 0,$$
$$X = x + AZ,\quad Y = y + BZ,$$
$$(n - B)\,x - (m - A)\,y = 0,\quad B\,(x - \alpha) - A\,(y - \beta) = 0$$

eliminierte. Er fand das Ergebniss in der Form

$$\left\{\alpha^2\,(X - \alpha) + \beta^2\,(Y - \beta)\right\}(X - mZ)\,(Y - nZ)$$
$$+ \left\{\beta\,(X - \alpha) - \alpha\,(Y - \beta)\right\}\left\{\alpha\,(X - mZ)^2 - \beta\,(Y - nZ)^2\right\} = 0,$$

welche die Leitlinien sehr deutlich erkennbar macht.

Zu Artikel 274 (p. 390, Zeile 4 f.) von der Erzeugung der besondern Regelfläche dritter Ordnung ist zu bemerken, dass die homographischen Reihen von Punkten und von Ebenen in und aus der Geraden $x = y = 0$ einander so entsprechen müssen, dass dem Doppelpunkt als einem Punkte der Reihe eine der durch seine Tangenten als Punkte der Curve gehenden Ebenen als Ebene des Büschels entspricht.

Zu Artikel 276 und den Anwendungen der dort eingeführten canonischen Form, namentlich auch in den Artikeln 295 f. liefert die Fläche

$$ax^3 + by^3 + c\,(z^3 + v^3 + w^3) = 0$$

mit

$$x + y + z + v + w = 0$$

ein interessantes Beispiel. Sie ist, wie A. Cayley in einer Note des „Philos. Magazine", 1864, (I, p. 493) nachweist, mit der Form

$$AX^3 + BY^3 + 6CRST = 0$$

für

$$X + Y + R + S + T = 0$$

stets zu identificieren und hat daher folgende besondere Eigenschaften: Jede der Ebenen $R = 0$, $S = 0$, $T = 0$ ist eine dreifache Tangentenebene, welche mit der Fläche drei durch einen Punkt gehende Gerade gemein hat; umgekehrt sind die Ebenen

$$AX^3 + BY^3 = 0$$

dreifache Tangentenebenen der Fläche, die sich in einer Geraden durchschneiden.

Zu Artikel 294. Schläfli hat seine Untersuchung über die Eintheilung der Flächen dritter Ordnung in Species nach der Realität ihrer Geraden und singulären Punkte wieder aufgenommen und weiter ausgeführt in einer Abhandlung in „Philosoph. Transactions", Vol. 153, (1863) p. 193—241. Er erhält 22 Species, unter denen je zwei von der 7^{ten}, 8^{ten} und 3^{ten} Klasse, je fünf von der 6^{ten} und 4^{ten} und drei von der 5^{ten} Klasse sind. Wir verweisen auf die Abhandlung selbst und erwähnen nur noch die Discussion der Arten conischer Punkte, welche eine Fläche dritter Ordnung haben kann; es sind ausser dem einfachen conischen Punkt, der die Klasse der Fläche um zwei vermindert, 4 Arten conischer Punkte möglich, deren Berührungskegel in ein Ebenenpaar degeneriert und denen die Reductionen der Klassenzahl um 3, 4, 5, 6 Einheiten respective entsprechen, je nachdem nämlich die Durchschnittslinie jener beiden Ebenen der Fläche nicht angehört, oder ihr angehört, ohne dass eine der beiden Ebenen längs derselben die Fläche berührt, oder endlich die Linie der Berührung oder zuletzt Osculation einer dieser Ebenen ist; und es sind conische Punkte möglich, deren Tangentenkegel in ein Paar zusammenfallender Ebenen degeneriert, welche nun entweder die Fläche in drei verschiedenen Graden schneidet, oder sie längs einer Geraden berührt oder osculiert; drei Fälle, denen die Reduction der Klassenzahl um 6, 7 und 8 Einheiten entspricht.

10. Zu dem Beispiel des Artikel 312 bemerke man, dass die übrigen Charactere des betrachteten Systems sich ergeben, wie folgt

$$h = 4, \quad u = 21, \quad y = 32, \quad x = 48, \quad \alpha = 32, \quad g = 156,$$

und vergleiche damit Artikel 91. Das System ist das der Curve 5^{ter} Ordnung von der ersten der dort aufgeführten Arten. (Vergl. Artikel 201.)

III. Ueber die Systeme der Orthogonalflächen.

1. Man möchte vielleicht aus Dupin's Theorem den Schluss ziehen, dass zu einer beliebigen Reihe von Flächen, welche einen veränderlichen Parameter enthalten, immer zwei andere Flächensysteme mit je einem solchen Parameter gefunden werden können von solcher Besonderheit, dass sie die Flächen des gegebenen Systems rechtwinklig und in ihren Krümmungslinien schneiden. Diess ist aber keineswegs der Fall. Vielmehr, damit eine gegebene Familie von Flächen mit einem Parameter ein dreifaches Orthogonalsystem erzeugen könne, müssen gewisse Bedingungen erfüllt sein.

J. A. Serret hat*) den Schluss begründet, dass die Gleichung

$$F(x, y, z) = \alpha,$$

in welcher α ein veränderlicher Parameter ist, dann einem Orthogonalsysteme den Ursprung gebe, wenn die Function zwei partiellen Differentialgleichungen der sechsten Ordnung genügt. Wir geben seine Untersuchung des speciellen Falls, in welchem die gegebene Function die Summe von drei Functionen von x, y, z respective ist.

*) Vgl. „Liouville's Journal", t. XII, p. 241.

Sei also die gegebene Gleichung von der Form

$$X + Y + Z = \alpha$$

und suchen wir die Bedingung, unter welcher die durch sie repräsentierte Flächenfamilie ein Paar conjugierte Systeme von Orthogonalflächen besitzt Vorausgesetzt, dass

$$F_1(x, y, z) = \beta, \quad F_2(x, y, z) = \gamma$$

die Gleichungen dieser Systeme sind, so folgt aus den Bedingungen des Problems und für X', Y', Z' als die ersten Derivierten von den Functionen X, Y, Z die Gruppe

$$X'\frac{d\beta}{dx} + Y'\frac{d\beta}{dy} + Z'\frac{d\beta}{dz} = 0,$$

$$X'\frac{d\gamma}{dx} + Y'\frac{d\gamma}{dy} + Z'\frac{d\gamma}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dx}\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\frac{d\gamma}{dy} + \frac{d\beta}{dz}\frac{d\gamma}{dz} = 0.$$

Wenn wir zur Integration der ersten beiden Gleichungen dieser Gruppe die gewöhnlichen Methoden der partiellen Differentialgleichungen anwenden, so finden wir, dass β und γ Functionen von u und v sind, wo

$$u = \int\frac{dx}{X'} - \int\frac{dy}{Y'}, \quad v = \int\frac{dx}{X'} - \int\frac{dz}{Z'}$$

sind. Daher wird die dritte Gleichung der Gruppe

$$\left(\frac{d\beta}{du} + \frac{d\beta}{dv}\right)\left(\frac{d\gamma}{du} + \frac{d\gamma}{dv}\right) + \frac{X'^2}{Y'^2}\frac{d\beta}{du}\frac{d\gamma}{du} + \frac{X'^2}{Z'^2}\frac{d\beta}{dv}\frac{d\gamma}{dv} = 0.$$

Da nun u und v Functionen von x, y, z sind, so können wir y und z als Functionen von u, v und x betrachten. Daher geht x in die vorige Gleichung als ein unbestimmter Parameter ein und die Grössen β und γ müssen nicht nur ihr, sondern auch ihren Derivierten genügen, welche man unter der Voraussetzung bildet, dass x die einzig Veränderliche ist. Wir finden unter dieser Voraussetzung und mit Beachtung der Relationen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y'}{X'}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z'}{X'}$$

die Gleichung

$$\frac{X'' - Y''}{Y'^2}\frac{d\beta}{du}\frac{d\gamma}{du} + \frac{X'' - Z''}{Z'^2}\frac{d\beta}{dv}\frac{d\gamma}{dv} = 0,$$

in welcher X'', Y'', Z'' die zweiten derivierten Functionen von X, Y, Z sind. Die nochmalige Differentiation giebt für X''', Y''', Z''' als die dritten derivierten Functionen

$$\frac{X'X''' - Y'Y''' - 2Y''(X'' - Y'')}{Y'^2}\frac{d\beta}{du}\frac{d\gamma}{du}$$
$$+ \frac{X'X''' - Z'Z''' - 2Z''(X'' - Z'')}{Z'^2}\frac{d\beta}{dv}\frac{d\gamma}{dv} = 0.$$

Daraus resultiert sogleich die gesuchte Bedingungsgleichung in der Form

$$X'X'''(Y''-Z'')+Y'Y'''(Z''-X'')+Z'Z'''(X''-Y'')$$
$$+2(X''-Y'')(Y''-Z'')(Z''-X'')=0.$$

Diese Relation drückt die Bedingung aus, unter welcher eine Familie von Flächen von der in der Gleichung

$$X+Y+Z=\alpha$$

gegebenen Form eine von einem dreifachen Orthogonalsystem sein kann. Sie ward zuerst von Bouquet („Liouville's Journal", t. XI, p. 446) gegeben, aber der mitgetheilte Beweis ist aus Serret's Abhandlung entnommen.

2. Aber aus der Erfüllung der Bedingungsgleichungen ergiebt sich noch nicht so leicht die Bestimmung der beiden conjugierten Systeme. So bemerkte Bouquet, dass die eben gefundene Bedingung für

$$x^m y^n z^p = \alpha$$

als das gegebene System erfüllt ist, aber er gab nicht den Weg zur Entdeckung der conjugierten Systeme. Diese Lücke ist durch Serret vollständig ausgefüllt worden, welcher viel Scharfsinn und analytische Kunst in der Ableitung der Gleichungen der conjugierten Systeme nach Erfüllung der Bedingungsgleichung offenbarte. Die wirklichen Ergebnisse sind von einem sehr complicierten Character und wir müssen uns beschränken, den einfachsten unter den durch ihn erhaltenen Fällen zu erwähnen, der auch ohne Schwierigkeit a posteriori bestätigt werden kann, indem wir im Uebrigen auf seine Abhandlung verweisen.*)

Die drei Gleichungen

$$\frac{yz}{x}=\alpha,$$
$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}+(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=\beta,$$
$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=\gamma$$

repräsentieren ein dreifaches System von Orthogonalflächen. In denselben sind die Flächen (α) hyperbolische Paraboloide; das System (β) wird von den geschlossenen und das System (γ) von den unbegrenzten Mantelflächen des Flächensystems vierter Ordnung

$$(z^2-y^2)^2-2\beta^2(2x^2+y^2+z^2)+\beta^4=0$$

gebildet. Serret hat bemerkt, wie aus dem oben Gesagten sich sofort ergiebt, dass in einem hyperbolischen Paraboloid, dessen Hauptparabeln gleich sind, die Summe oder Differenz der Entfernungen jedes Punktes derselben Krümmungslinie von zwei festen Erzeugenden constant ist.

*) Zuletzt hat Combescure im V. Bde. der „Annali di Matematica", p. 47 f. diese Systeme untersucht, besonders das specielle, welches die nächsten Formeln enthalten.

3. W. Roberts hat die Methode der elliptischen Coordinaten auf das Problem angewendet und bemerkenswerthe Ergebnisse erhalten.*)

Sei

$$1)\quad F(\varrho) + F_1(\mu) + F_{11}(\nu) = \alpha$$

die Gleichung einer der Flächenfamilien und α ein veränderlicher Parameter, während zwischen den elliptischen Coordinaten ϱ, μ, ν die Relationen zu den x, y, z bestehen

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1.$$

Ist dann

$$P d\varrho + M d\mu + N d\nu = 0$$

das Differential jener Gleichung, so dass P, M, N Functionen von ϱ, μ, ν respective sind, so werden alle dem System angehörigen Flächen durch die eines andern Systems von dem totalen Differential

$$P' d\varrho + M' d\mu + N' d\nu = 0$$

orthogonal geschnitten, wenn

$$\frac{PP'(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} + \frac{MM'(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}$$
$$+ \frac{NN'(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} = 0$$

ist; denn die Elemente ds, ds', ds'' der Krümmungslinien von drei confocalen Flächen ϱ, μ, ν

$$ds = d\varrho \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}},$$

$$ds' = d\mu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}},$$

$$ds'' = d\nu \sqrt{\frac{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}.$$

---

*) Vgl. „Comptes rendus", 1861, t. LIII, p. 546 u. weiterhin ibid. u. 1864, t. LVIII, p. 291. Vervollständigt im LXII. Bde. (p. 50) des „Journal f. Mathem."

Man genügt jener Bedingung offenbar durch

$$PP' = \frac{1}{\varrho^2 - b^2}, \quad MM' = \frac{1}{\mu^2 - b^2}, \quad NN' = -\frac{1}{b^2 - \nu^2};$$

und durch

$$PP' = \frac{1}{\varrho^2 - c^2}, \quad MM' = -\frac{1}{c^2 - \mu^2}, \quad NN' = -\frac{1}{c^2 - \nu^2}.$$

Setzt man also

$$u = \int \frac{d\varrho}{P(\varrho^2 - b^2)} + \int \frac{d\mu}{M(\mu^2 - b^2)} + \int \frac{d\nu}{N(b^2 - \nu^2)},$$

$$v = \int \frac{d\varrho}{P(\varrho^2 - c^2)} + \int \frac{d\mu}{M(c^2 - \mu^2)} + \int \frac{d\nu}{N(c^2 - \nu^2)},$$

und bezeichnen β, γ zwei willkürliche Constanten, so repräsentieren die Gleichungen

$$u = \beta, \quad v = \gamma, \quad u + \beta v = \gamma$$

drei Systeme, welche das gegebene System 1) rechtwinklig schneiden.

Alle Flächensysteme dieser Art liefert die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{P(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\varrho^2 - \nu^2)} - \frac{M(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}{(\varrho^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{d\varrho}{d\mu}$$
$$- \frac{N(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}{(\varrho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{d\varrho}{d\nu} = 0.$$

Da sie $u + \beta v = \gamma$ zum particulären Integral hat, so ist das allgemeine durch $\Phi(u, v) = 0$ gegeben.

4. Wir bestimmen den Fall, in welchem zwei Familien von Flächen, deren jede durch eine lineare Relation zwischen u und v gegeben ist, gegenseitig orthogonal sind. Wir setzen

$$u + fv = \beta, \quad u + gv = \gamma$$

mit f, g als Constanten und setzen voraus, dass die Familien (β) und (γ), sich selbst und die Familie (α), 1) rechtwinklig schneiden. Die Differentiation der Gleichung von β für β als Constante giebt

$$\frac{d\varrho}{P} \frac{\varrho^2 - \dfrac{c^2 + fb^2}{1 + f}}{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} + \frac{d\mu}{M} \frac{\dfrac{c^2 + fb^2}{1 + f} - \mu^2}{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)}$$
$$+ \frac{d\nu}{N} \frac{\nu^2 - \dfrac{c^2 + fb^2}{1 + f}}{(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)} = 0,$$

und ebenso entspringt aus (γ)

$$\frac{d\varrho}{P}\frac{\varrho^2-\dfrac{c^2+gb^2}{1+g}}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}+\frac{d\mu}{M}\frac{\dfrac{c^2+gb^2}{1+g}-\mu^2}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}$$
$$+\frac{d\nu}{N}\frac{\nu^2-\dfrac{c^2+gb^2}{1+g}}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}=0.$$

Nehmen wir dann

$$\frac{c^2+fb^2}{1+f}=\theta^2,\quad \frac{c^2+gb^2}{1+g}=\lambda^2,$$

so ergiebt sich nach Bemerkungen von Liouville (vergl. „Journal", t. XII, p. 418, 420), dass die Gleichungen der Systeme (β) und (γ) sich mit den Abkürzungen

$$l^2=\frac{(\varrho^2-\theta^2)(\varrho^2-\lambda^2)}{(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)},$$
$$m^2=\frac{(\theta^2-\mu^2)(\mu^2-\lambda^2)}{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)},$$
$$n^2=\frac{(\theta^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}$$

in der Form

$$\int\frac{l^2d\varrho}{P(\varrho^2-\lambda^2)}+\int\frac{m^2d\mu}{M(\mu^2-\lambda^2)}-\int\frac{n^2d\nu}{N(\lambda^2-\nu^2)}=\beta,$$
$$\int\frac{l^2d\varrho}{P(\varrho^2-\theta^2)}+\int\frac{m^2d\mu}{M(\theta^2-\mu^2)}-\int\frac{n^2d\nu}{N(\theta^2-\nu^2)}=\gamma$$

integrieren lassen. Die Bedingung der Orthogonalität dieser Systeme ist

$$2)\quad \frac{(\mu^2-\nu^2)\,l^2}{P^2}-\frac{(\varrho^2-\nu^2)\,m^2}{M^2}+\frac{(\varrho^2-\mu^2)\,n^2}{N^2}=0.$$

Die von W. Roberts betrachteten Fälle, in welchen diese Bedingungen erfüllt sind, wollen wir zusammenstellen. Sie sind

$$\text{a)}\quad \frac{l^2}{P^2}=\frac{m^2}{M^2}=\frac{n^2}{N^2},$$

was identisch ist mit

$$\frac{l}{P}=\frac{m}{M}=\frac{n}{N}=1;$$

$$\text{b)}\quad \varrho^2P^2=l^2,\ \mu^2M^2=m^2,\ \nu^2N^2=n^2;$$

$$\text{c)}\quad P^2=\frac{l^2}{h+k\varrho^2},\quad M^2=\frac{m^2}{h+k\mu^2},\quad N^2=\frac{n^2}{h+k\nu^2}$$

für h, k als beliebige Constanten, die den Bedingungen der elliptischen Coordinaten genügen.

5. Dem Falle a) entspricht das dreifache System

$$\int l d\varrho + \int m d\mu + \int n d\nu = \alpha,$$

$$\int \frac{l d\varrho}{\varrho^2 - \lambda^2} + \int \frac{m d\mu}{\mu^2 - \lambda^2} - \int \frac{n d\nu}{\lambda^2 - \nu^2} = \beta,$$

$$\int \frac{l d\varrho}{\varrho^2 - \theta^2} - \int \frac{m d\mu}{\theta^2 - \mu^2} - \int \frac{n d\nu}{\theta^2 - \nu^2} = \gamma;$$

die Flächen α) sind unter sich parallel und haben zwei durch die Constanten θ, λ repräsentierte confocale Flächen zweiten Grades zur Fläche der Centra; die Flächen β), γ) setzen sich aus den developpabeln Flächen der Normalen von α) längs ihren Krümmungslinien zusammen. Für

$$\theta = c, \quad \lambda = b$$

reducieren sich jene confocalen Flächen auf die Focalkegelschnitte des gegebenen Systems und die Flächen α) sind Cycliden (vergl. Artikel 250), während die Flächen β) und γ) Umdrehungskegel werden, welche ihre Scheitel in der Focalellipse (Focalhyperbel) haben und über der Focalhyperbel (Focalellipse) stehen. Die Gruppe

$$\varrho + \mu + \nu = \alpha, \quad \frac{(\varrho - b)(\mu - b)(b - \nu)}{(\varrho + b)(\mu + b)(b + \nu)} = \beta,$$

$$\frac{(\varrho - c)(c - \mu)(c - \nu)}{(\varrho + c)(c + \mu)(c + \nu)} = \gamma$$

giebt ihre Gleichungen. Aus der ersten derselben folgt die früher im Artikel 250 gegebene Gleichung der Cycliden und diese Construction derselben: Man beschreibt aus einem der Brennpunkte der Focalellipse oder Hyperbel einen Kreis, zieht in ihm einen Radius und beschreibt aus seinem Durchschnittspunkt mit der Focalcurve und durch den Schnitt mit jenem Kreise eine Kugel, so ist die Enveloppe der sämmtlichen so erzeugten Kugeln eine Cyclide; die Krümmungscentra derselben liegen in den Focalcurven.*)

---

*) Die Cyclide ist als ein Beispiel zu der im Artikel 249 gegebenen Methode von W. Roberts für die Bestimmung der ersten negativen Fusspunktfläche schon benutzt worden. Hier fügen wir bei, dass wegen

$$\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 = x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2$$

auch

$$\varrho + \mu + \nu = \alpha + (\varrho^2 + \mu^2 + \nu^2 - b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$$

oder

$$\varrho\mu + \mu\nu + \nu\varrho - \alpha(\varrho + \mu + \nu) + \tfrac{1}{2}(\alpha^2 + b^2 + c^2) = 0$$

diese Fläche darstellt, als die dem System der elliptischen Coordinaten entsprechende einfachere Form.

Der Fall b) giebt das System

$$\int\frac{l\,d\varrho}{\varrho} \pm \int\frac{m\,d\mu}{\mu} \pm \int\frac{n\,d\nu}{\nu} = \alpha,$$

$$\int\frac{l\varrho\,d\varrho}{\varrho^2-\lambda^2} \pm \int\frac{m\mu\,d\mu}{\mu^2-\lambda^2} \mp \int\frac{n\nu\,d\nu}{\lambda^2-\nu^2} = \beta,$$

$$\int\frac{l\varrho\,d\varrho}{\varrho^2-\theta^2} \mp \int\frac{m\mu\,d\mu}{\theta^2-\mu^2} \mp \int\frac{n\nu\,d\nu}{\theta^2-\nu^2} = \gamma;$$

ein System, welches keine Parallelflächen und keine developpabeln Flächen enthält.

Für $\theta = c$ und $\lambda < \mu > \nu$ wird die Gleichung β) algebraisch integrierbar und die Durchschnittscurven der β) mit den α) sowohl als den γ), d. h. die Krümmungslinien von β) sind algebraisch, obwohl die Flächen α) und γ) diess nicht sind.

Für $\theta = c$, $\lambda = b$ werden die obigen Differentialgleichungen

$$\frac{d\varrho}{\varrho} \pm \frac{d\mu}{\mu} \pm \frac{d\nu}{\nu} = 0,$$

$$\frac{\varrho\,d\varrho}{\varrho^2-b^2} \pm \frac{\mu\,d\mu}{\mu^2-b^2} \mp \frac{\nu\,d\nu}{b^2-\nu^2} = 0,$$

$$\frac{\varrho\,d\varrho}{\varrho^2-c^2} \mp \frac{\mu\,d\mu}{c^2-\mu^2} \mp \frac{\nu\,d\nu}{c^2-\nu^2} = 0.$$

6. Sie geben z. B. das System

$$\mu\nu = \alpha\varrho, \quad \frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{\varrho^2-b^2} = \beta, \quad \frac{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{\varrho^2-c^2} = \gamma;$$

mittelst der Relationen

$$bcx = \varrho\mu\nu, \quad b\sqrt{c^2-b^2}\,y = \sqrt{(\varrho^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)},$$
$$c\sqrt{c^2-b^2}\,z = \sqrt{(\varrho^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}$$

sieht man, dass das System mittelst einer Function ϱ von x, y, z

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2-b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2-c^2} = 1,$$

in der Form

$$\frac{x}{\varrho^2} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{y}{\varrho^2-b^2} = \frac{1}{\beta}, \quad \frac{z}{\varrho^2-c^2} = \frac{1}{\gamma}$$

dargestellt werden kann. Daraus folgt der Satz: Ist eine Reihe von confocalen Ellipsoiden gegeben, ein Punkt willkürlich auf einer der Achsen gewählt, und betrachten wir diesen als den Scheitel von Kegeln, die den Flächen der Reihe umgeschrieben sind, so ist der Ort der Berührungscurven dieser Letzteren eine bestimmte Fläche und bei der Bewegung des Scheitels in seiner Achse entspringt dem ein System von

Flächen mit einem willkürlichen Parameter. Analog diesem entstehen zwei andere Systeme von Flächen, welche den beiden andern Achsen des confocalen Systems entsprechen. Diese Systeme bilden ein dreifaches Orthogonalsystem.

Man kann leicht zeigen, dass die Krümmungslinien der vorerwähnten Flächen — sie sind von der dritten Ordnung — Kreise sind, deren Ebenen zu den Hauptebenen des Ellipsoids normal sind. Denken wir A, B als zwei feste Punkte respective auf zweien der Achsen des confocalen Systems gewählt, so entsprechen ihnen zwei Flächen, welche sich rechtwinklig durchschneiden und ihre Durchschnittscurve ist der Ort von Punkten M der confocalen Ellipsoide, deren Tangentenebenen durch die Linie AB gehen. Sei dann P der Punkt, in welchem die Normale zu einem der Ellipsoide in M die Hauptebene schneidet, welche die Gerade AB enthält, so ist derselbe als Pol von AB in Bezug auf den Focalkegelschnitt dieser Ebene (vgl. Bd. I, Art. 177, 182) ein gegebener Punkt. Der Ort von M oder eine Krümmungslinie des Systems ist daher ein Kreis in einer zu der AB enthaltenden Hauptebene normalen Ebene. Man beweist das Analoge auch für die andern Krümmungslinien.

Die Gleichungen

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y^2}{\alpha x - b^2} + \frac{z^2}{\alpha z - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\beta y + b^2} + \frac{y}{\beta} + \frac{z^2}{\beta y + b^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\gamma z + c^2} + \frac{y^2}{\gamma z + c^2 - b^2} + \frac{z}{\gamma} = 1$$

stellen das System dar.

Dem Falle c) entspricht für die Voraussetzung $\theta = c$, $\lambda = b$ ein System, in welchem die Flächen α) algebraisch sind, während wenigstens noch die Krümmungslinien von α auf algebraischen Flächen überdiess gelegen sind, obgleich β) und γ) diess im Allgemeinen nicht selbst sind.

7. Andere algebraische Orthogonalflächensysteme hat W. Roberts in einer spätern bereits angeführten Note der „Comptes rendus" bezeichnet. Endlich wollen wir bemerken, dass O. Bonnet in Mittheilungen der „Comptes rendus" t. LIV, p. 554, 655 einen andern Weg zur Untersuchung der Orthogonalflächensysteme eingeschlagen hat, und zugleich der einschlagenden Kapitel des Werkes von Lamé, „Leçons sur les coordonnées curvilignes" Erwähnung thun. Mit besonderer Rücksicht auf die Relationen von Lamé — die übrigens lange vor den „Leçons" von ihm gegeben worden waren — hat Combescure in der oben angeführten Abhandlung (p. 43 f.) das Beispiel behandelt, bei welchem oben seine Arbeit citiert ist und dessen geometrische Bedeutung direct ersichtlich ist: Die zwei ersten Flächensysteme sind die Ortsflächen von Punkten, für welche einmal die Summe, das anderemal die Differenz der Abstände von denselben zwei festen Geraden in einer Ebene constant ist; das dritte System

ist gebildet von Paraboloiden, welche jene beiden Geraden zu solchen Erzeugenden haben, von denen jede alle Erzeugenden des andern Systems rechtwinklig durchschneidet.

8. Jene Formeln von Lamé stehen in einem wichtigen Zusammenhange mit den Lehren des Abschnitts von den Linien auf den Flächen und wir wollen denselben hier darlegen, indem wir der schönen These von A. Picart, „Essai d'une théorie géométrique des surfaces“ (Paris 1863) Einiges entlehnen. Denken wir zwei Systeme von ebenen krummen Linien, und a, b' als die Schnittpunkte von zwei nächstbenachbarten Paaren derselben, so dass aa' und $a'm$ zwei auf einander folgende Elemente einer Linie des einen, ab und bn zwei solche von einer Linie des andern sind, während bb' und $a'b'$ die Anfangselemente der nächstfolgenden Linien derselben sind; bezeichnen wir aa' durch dx, ab durch $d'y$, indem wir durch die Zeichen d, d' die Variation nach x und y unterscheiden, nennen wir ν den Winkel, welchen sie bilden und ϱ_x, ϱ_y ihre Krümmungshalbmesser im Punkte a, so ergiebt eine einfache Betrachtung die Formel

$$\sin\nu . dd'y = dxd'y\left(\frac{1}{\varrho_y} - \frac{1}{\varrho_x}\cos\nu\right) - dxd'\nu - d'yd\nu\cos\nu,$$

für constantes ν und speciell für $\nu = 90^0$ respective

$$\sin\nu . dd'y = dxd'y\left(\frac{1}{\varrho_y} - \frac{1}{\varrho_x}\cos\nu\right)$$

und

$$\text{a)}\qquad dd'y = dxd'y\,\frac{1}{\varrho_y}\quad\text{und ebenso}\quad d'dx = -\,d'ydx\,\frac{1}{\varrho_x}\cdot$$

9. Betrachtet man dann die Linie ab' und ihr nächstfolgendes Element $b'c$ und bezeichnet die Winkel $b'aa'$ und $cb'p$ ($b'p$ ist das zweite Element von bb') durch i und $(i + di)$, bezeichnet das Element ab' durch ds und den Krümmungshalbmesser von $ab'c$ durch ϱ_s, so ist

$$\text{b)}\qquad di = d'\nu + \frac{ds}{\varrho_s} - \frac{dx}{\varrho_x} - \frac{d'y}{\varrho_y}.$$

Für den Fall, dass der Winkel ν der beiden Curvensysteme unveränderlich ist, verschwindet $d'\nu$ aus der Gleichung.

Soll jede Linie des einen Systems alle Linien des andern unter demselben Winkel schneiden, so muss in dem Elementarviereck $aa'b'b$ die Summe der Contingenzwinkel der Seiten gleich Null sein,

$$\frac{dx}{\varrho_x} + \left(\frac{d'y}{\varrho_y} + d.\frac{d'y}{\varrho_y}\right) - \left(\frac{dx}{\varrho_x} + d'\frac{dx}{\varrho_x}\right) - \frac{d'y}{\varrho_y} = 0,$$

oder

$$d.\frac{d'y}{\varrho_y} - d'\frac{dx}{\varrho_x} = \frac{1}{\varrho_y}dd'y + d'yd\frac{1}{\varrho_y} - \frac{1}{\varrho_x}d'dx - dxd'\frac{1}{\varrho_x} = 0.$$

Damit es orthogonale Curvensysteme sind, müssen die Werthe a) in diese Gleichung eintreten und wir erhalten

$$\text{c)}\quad \frac{d'\frac{1}{\varrho_x}}{d'y} = \frac{d\frac{1}{\varrho_y}}{dx} = \left(\frac{1}{\varrho_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_y}\right)^2.\text{*)}$$

10. Für eine Linie auf einer beliebigen Fläche heisst die geodätische Krümmung in einem ihrer Punkte die Krümmung ihrer Projection auf die Tangentenebene der Fläche, so dass sie das Product ihrer eigenen Krümmung in den Cosinus des Winkels ist, den die Osculationsebene mit der Tangentenebene bildet; auch heisst das Product des Elements ds der Linie in die geodätische Krümmung der geodätische Contingenzwinkel derselben, so dass dieser der Winkel zweier Normalebenen der Fläche ist, die durch benachbarte Elemente der Curve gehen. Dann hat eine geodätische Linie überall die geodätische Krümmung Null. (Artikel 48.)

Die Formeln a) des Artikel 8 bleiben gültig für ein System von Orthogonalcurven auf der Fläche, wenn ϱ_x, ϱ_y die geodätischen Krümmungen derselben bezeichnen. Sie zeigen, dass bei der Deformation einer Fläche die geodätische Krümmung einer beliebigen Linie auf ihr nicht verändert wird. Aus ihnen ergeben sich leicht die Sätze: Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten ist die geodätische Linie, die sie verbindet. Von allen gleichlangen Linien umschliesst die grösste Fläche diejenige, deren geodätische Krümmung constant ist. Damit die Fläche durch das System in quadratische Elemente zerfalle, muss

$$d\,\frac{1}{\varrho_x} + d'\,\frac{1}{\varrho_y} = 0$$

sein.

Wenn ϱ_s, ϱ_x, ϱ_y die Radien der geodätischen Krümmung ihrer Curven bezeichnen, so gilt auch die Formel b) des vorigen Artikels, insbesondere für constantes v

$$di = \frac{ds}{\varrho_s} - \frac{dx}{\varrho_x} - \frac{d'y}{\varrho_y},$$

und für $\dfrac{ds}{\varrho_s} = 0$ oder eine geodätische Linie

$$di + \frac{dx}{\varrho_x} + \frac{d'y}{\varrho_y} = 0.$$

11. Vergleicht man nun eine Linie der Fläche und die entsprechende sphärische Linie, so gelten für diese und jene die Formeln

$$di - \frac{ds}{\varrho_s} = -\frac{dx}{\varrho_x} - \frac{d'y}{\varrho_y},\qquad di_1 - \frac{ds_1}{\varrho_{s_1}} = -\frac{dx_1}{\varrho_{x_1}} - \frac{d'y_1}{\varrho_{y_1}},$$

sofern x und y die beiden Krümmungslinien der Fläche sind; wegen

---

*) Diese Quotienten sind nicht Differentiale; $d\,\dfrac{1}{\varrho_y}$, etc. sind die Variationen der bezüglichen Krümmungen einer Curve von einer Curve des andern Systems bis zur nächstfolgenden.

$$\frac{dx}{\varrho_x} = \frac{dx_1}{\varrho_{x_1}}, \quad \frac{d'y}{\varrho_y} = \frac{d'y_1}{\varrho_{y_1}}$$

ist dann

$$di - \frac{ds}{\varrho_s} = di_1 - \frac{ds_1}{\varrho_{s_1}}$$

und

$$i'' - i' - \int_{s'}^{s''} \frac{ds}{\varrho_s} = i_1'' - i_1' - \int_{s_1'}^{s_1''} \frac{ds_1}{\varrho_{s_1}},$$

also für eine geschlossene Contour wegen $i'' = i'$, $i_1'' = i_1'$

$$\int \frac{ds}{\varrho_s} = \int \frac{ds_1}{\varrho_{s_1}},$$

d. h. die Summe der geodätischen Contingenzwinkel ist für beide Contouren die nämliche. Ist S die umschlossene sphärische Fläche, so ist dieser Werth

$$= 2\pi - S.^{*})$$

Handelt es sich um ein krummliniges Polygon von den Winkeln $A, B, C, \ldots$, und das entsprechende sphärische von den Winkeln $A_1, B_1, C_1, \ldots$, so ist

$$A + B + C + \ldots - \int \frac{ds}{\varrho_s} = A_1 + B_1 + C_1 + \ldots - \int \frac{ds_1}{\varrho_{s_1}},$$

und wegen

---

*) Davon ist eine interessante Anwendung möglich, welche die Lehre von den Regelflächen mit dieser und der Theorie der Curven verbindet. Denken wir eine beliebige geschlossene Curve, so bilden ihre Binormalen eine windschiefe Regelfläche, für welche sie die Strictionslinie ist, und da sie alle Erzeugenden derselben rechtwinklig schneidet, so ist sie zugleich eine geodätische Linie der Fläche.

Nach dem obigen Satze ergiebt sich daher: Wenn man in einer Kugel zu den Hauptnormalen einer geschlossenen Curve parallele Radien zieht, so theilt der Ort ihrer Endpunkte die Kugelfläche in zwei gleiche Theile. (Jacobi.) Und: Die zu den Normalen einer windschiefen Regelfläche längs der Strictionslinie derselben parallelen Radien einer Kugel bestimmen auf ihr eine geschlossene Curve, welche die sphärische Fläche in zwei gleiche Theile theilt; mit andern Worten: Die Summe der geodätischen Contingenzwinkel der Strictionslinie einer windschiefen Regelfläche ist gleich Null.

Denn dass der Inhalt einer geschlossenen sphärischen Curve gleich 2π weniger der Summe der geodätischen Contingenzwinkel der Curve ist, kommt darauf zurück, dass die Endpunkte berührender grösster Kreise der sphärischen Curve, auf die man in einerlei Sinn vom Berührungspunkt aus die Länge des Quadranten abträgt, die Kugelfläche in zwei gleiche Theile zerlegen.

$$A_1 + B_1 + C_1 + \ldots - (n-2)\pi - \int \frac{ds_1}{\varrho_{s_1}} = S,$$

$$\text{d)} \quad A + B + C + \ldots - (n-2)\pi - \int \frac{ds}{\varrho_s} = S;$$

also insbesondere für eine durch geodätische Linien gebildete Contour, wie Gauss zuerst zeigte: In einem durch geodätische Linien gebildeten n Seit ist der Ueberschuss der Winkelsumme über $(2n - 4)$ Rechte der Fläche des entsprechenden sphärischen Polygons gleich.

12. Wenn man die Formel d) des vorigen Artikels auf ein unendlich kleines Rechteck $aa'b'b$ anwendet, so erhält man

$$\frac{dx}{\varrho_x} + \left(\frac{d'y}{\varrho_y} + d\,\frac{d'y}{\varrho_y}\right) - \left(\frac{dx}{\varrho_x} + d'\,\frac{dx}{\varrho_x}\right) - \frac{d'y}{\varrho_y} = -\frac{dx\,d'y}{RR'}$$

oder

$$d\,\frac{d'y}{\varrho_y} - d'\,\frac{dx}{\varrho_x} = -\frac{dx\,d'y}{RR'}.$$

Man sieht, wenn beide Systeme von Linien, die sich unter gleichen Winkeln durchschneiden, geodätische Linien sind, so muss die Krümmung der Fläche den Werth Null haben; diess ist also nur bei developpabeln Flächen möglich. Die Verbindung mit den Formeln a) verwandelt die vorige Gleichung in

$$\text{e)} \quad \frac{d'\,\frac{1}{\varrho_x}}{d'y} - \frac{d\,\frac{1}{\varrho_y}}{dx} = \left(\frac{1}{\varrho_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\varrho_y}\right)^2 + \frac{1}{RR'};$$

sie ist die Bedingung, unter welcher zwei Liniensysteme auf einer Fläche sich überall orthogonal schneiden. (Vergl. oben 9, c.)

13. Betrachten wir die beiden Systeme der Krümmungslinien einer Fläche und die Variation, welche eine Hauptkrümmung beim Uebergang von einer Krümmungslinie zur nächstbenachbarten erfährt. Einem unendlich kleinen Rechteck $aa'b'b$ entspricht auf der Kugel ein Rechteck $mm'n'n$; bezeichnen wir mm' und nn' durch ε und ζ respective, so sind die Hauptkrümmungen nach aa' und bb' respective $\frac{\varepsilon}{aa'}$, $\frac{\zeta}{bb'}$ und wenn R_x, R'_y die Hauptkrümmungsradien nach den Linien x und y sind, so ist

$$d'\,\frac{1}{R_x} = \frac{\zeta}{bb'} - \frac{\varepsilon}{aa'} = \frac{\zeta\,.\,aa' - \varepsilon\,.\,bb'}{aa'\,.\,bb'}$$

und nach der zweiten der Formeln a) im Artikel 8, p. 571

$$\zeta = \varepsilon - \varepsilon\,.\,mn\,.\,R_x\,.\,\frac{1}{\varrho_x}$$

und

$$bb' = aa' - aa'\,.\,ab\,.\,\frac{1}{\varrho_x},$$

also durch Substitution

$$d'.\frac{1}{R_x}=\frac{\varepsilon.aa'-\varepsilon.aa'.mn.R_x\frac{1}{\varrho_x}-\varepsilon.aa'+\varepsilon.aa'.ab.\frac{1}{\varrho_x}}{aa'.bb'}$$

und wegen

$$mn=ab.\frac{1}{R'_y},\quad \varepsilon=aa'.\frac{1}{R_x},$$

ebenso

$$\text{f)}\quad\begin{cases} d'.\dfrac{1}{R_x}= \dfrac{1}{\varrho_x}\left(\dfrac{1}{R_x}-\dfrac{1}{R_y'}\right)d'y;\\[2ex] d.\dfrac{1}{R_y'}=-\dfrac{1}{\varrho_x}\left(\dfrac{1}{R_y'}-\dfrac{1}{R_x}\right)dx.\end{cases}$$

14. Diese Formeln lassen sich auf die Orthogonalflächen anwenden, die sich bekanntlich in ihren Krümmungslinien durchschneiden. Sind F_x, F_y, F_z drei solche Flächen, die sich nach den Linien A_z, A_y, A_x durchschneiden, so sollen R_y, R_z' die Hauptkrümmungsradien der Fläche F_x, R_z, R_x' die von F_y und R_x, R_y' die von F_z sein. Nach dem Theorem von Hachette sind die Radien der geodätischen Krümmung der Linien x, y, z auf den Flächen F_y, F_z, F_z, F_x; F_x, F_y die Hauptkrümmungsradien R_x, R_x'; R_y, R_y'; R_z, R_z'. Die Anwendung der Formeln f) giebt daher die 6 Gleichungen

$$\text{g)}\quad\begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{R_x}}{dy}=\dfrac{1}{R_x'}\left(\dfrac{1}{R_x}-\dfrac{1}{R_y'}\right), & \dfrac{d\frac{1}{R_y'}}{dx}=\dfrac{1}{R_y}\left(\dfrac{1}{R_y'}-\dfrac{1}{R_x}\right);\\[3ex] \dfrac{d\frac{1}{R_y}}{dz}=\dfrac{1}{R_y'}\left(\dfrac{1}{R_y}-\dfrac{1}{R_z'}\right), & \dfrac{d\frac{1}{R_z'}}{dy}=\dfrac{1}{R_z}\left(\dfrac{1}{R_z'}-\dfrac{1}{R_y}\right);\\[3ex] \dfrac{d\frac{1}{R_z}}{dx}=\dfrac{1}{R_z'}\left(\dfrac{1}{R_z}-\dfrac{1}{R_x'}\right), & \dfrac{d\frac{1}{R_x'}}{dz}=\dfrac{1}{R_x}\left(\dfrac{1}{R_x'}-\dfrac{1}{R_z}\right).\end{cases}$$

Da die Krümmungslinien sich orthogonal durchschneiden, so ist die Formel e) (Artikel 12) auf sie anzuwenden und man erhält

$$\text{h)}\quad\begin{cases} \dfrac{d\frac{1}{R_x'}}{dy}+\dfrac{d\frac{1}{R_y}}{dx}=\left(\dfrac{1}{R_x'}\right)^2+\left(\dfrac{1}{R_y}\right)^2+\dfrac{1}{R_xR_y'},\\[3ex] \dfrac{d\frac{1}{R_y'}}{dz}+\dfrac{d\frac{1}{R_z}}{dy}=\left(\dfrac{1}{R_y'}\right)^2+\left(\dfrac{1}{R_z}\right)^2+\dfrac{1}{R_yR_z'},\\[3ex] \dfrac{d\frac{1}{R_z'}}{dx}+\dfrac{d\frac{1}{R_x}}{dz}=\left(\dfrac{1}{R_z'}\right)^2+\left(\dfrac{1}{R_x}\right)^2+\dfrac{1}{R_zR_x'}.\end{cases}$$

Durch die paarweise Verbindung der Gleichungen der ersten Gruppe erhält man ferner

$$\frac{1}{R_z R_y'}\left(\frac{1}{R_y}+\frac{1}{R_z'}\right)-\frac{d\frac{1}{R_z R_y'}}{dx}=\frac{1}{R_x R_y R_z}+\frac{1}{R_x' R_y' R_z'}$$

$$=\frac{1}{R_x R_z'}\left(\frac{1}{R_z}+\frac{1}{R_x'}\right)-\frac{d\frac{1}{R_x R_z'}}{dy}$$

$$=\frac{1}{R_y R_x'}\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y'}\right)-\frac{d\frac{1}{R_y R_x'}}{dz},$$

und durch Addition der drei Gleichungen der zweiten

$$\frac{d\left(\frac{1}{R_y}+\frac{1}{R_z'}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{1}{R_z}+\frac{1}{R_x'}\right)}{dy}+\frac{d\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y'}\right)}{dz}=$$

$$\left(\frac{1}{R_y}+\frac{1}{R_z'}\right)^2+\left(\frac{1}{R_z}+\frac{1}{R_x'}\right)^2+\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y'}\right)^2-\frac{1}{R_y R_z'}$$

$$-\frac{1}{R_z R_x'}-\frac{1}{R_x R_y'}$$

Diess sind die Formeln von Lamé.*)

---

*) Man vergleiche „Leçons sur les coordonnées curvilignes", § XLVI, XLVII (p. 79, 82); namentlich auch wegen der ausdrucksvollen Terminologie Lamé's, die im Artikel XXIX daselbst erläutert ist. Die letzte der Formeln giebt den Satz: Wenn man vom Quadrat der sphärischen Krümmung jeder Coordinatenfläche die Variation dieser sphärischen Krümmung nach dem zur Fläche normalen Bogen abzieht, so wird die Summe dieser drei Differenzen der Summe der drei Producte gleich, die man durch Multiplication der beiden Krümmungen jeder Fläche mit einander erhält.

Wir erinnern an die Gleichungen f) des Artikel 158, welche noch allgemeiner Relationen der Krümmungen der Flächen enthalten. Die zweite unter ihnen steht in einer Beziehung zu der Gruppe g) der obigen Formeln, die diess näher erläutert. Diese Formeln drückt Lamé durch den Satz aus: Die Variation einer Krümmung nach dem zu ihrer Ebene normalen Bogen ist das Product der ihr nach dem Bogen conjugierten Krümmung in den Ueberschuss dieser Letztern über die ihr nach der Fläche conjugierte. („Leçons", p. 81.) Man erhält diess Theorem aus der zweiten Formel f) Artikel 158, indem man voraussetzt, dass in einem Punkte die Coordinatenlinien die Krümmungslinien tangieren, so dass H, H_1 die Hauptkrümmungen repräsentieren und die Torsion T, sowie ihre Variation nach dv gleich Null ist. Denn $-\frac{g_1}{g}$ ist die geodätische Krümmung der Normalen oder die zu H

15. Betrachten wir endlich die Variation des zwischen zwei Paaren unendlich naher Orthogonalflächen gelegenen Flächenelements, so wird $dx\,dy$ in

$$dx\left(1-\frac{dz}{R_x}\right)dy\left(1-\frac{dz}{R_y'}\right)$$

übergeführt und die Variation ist

$$-\,dx\,dy\,dz\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y'}\right),$$

oder durch Einführung des Elements ω_z

$$d\,.\,\omega_z = -\,dz\,.\,\omega_z\left(\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_y'}\right);$$

ebenso

$$d\,.\,\omega_x = -\,dx\,.\,\omega_x\left(\frac{1}{R_y}+\frac{1}{R_z'}\right),$$

$$d\,.\,\omega_y = -\,dy\,.\,\omega_y\left(\frac{1}{R_z}+\frac{1}{R_x'}\right).$$

Man erkennt daraus, dass unter allen durch dieselbe Contour begrenzten Flächen diejenige die Minimalfläche hat, deren mittlere Krümmung Null ist oder für welche die Hauptkrümmungsradien gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind. Und unter allen von derselben Contour begrenzten Flächen derselben Ausdehnung ist diejenige, welche den Maximalinhalt giebt, die Fläche von constanter mittlerer Krümmung.

IV. Zur Theorie der Inversion und der Orthogonalflächen.

In den Artikeln 245, 246 sind die allgemeinen Beziehungen der durch Inversion oder durch die Transformation mittelst reciproker Radien vectoren abgeleiteten Flächen zu den Reciprocal- und den Fusspunktflächen dargestellt und im Artikel 250 sind dieselben zur Untersuchung der Dupin'schen Cyclide verwendet worden.*)

Dass die Inverse einer Fläche n^{ter} Ordnung im Allgemeinen von der Ordnung $2n$ ist, ist bekannt und erleidet nur Ausnahme, wenn der Pol oder das Centrum der Inversion ein vielfacher Punkt der Fläche oder der

---

nach dem Bogen conjugierte Krümmung. Während also der Lamé'sche Satz sich nur auf Hauptkrümmungen bezieht, erweitert ihn jene Gleichung von Bour auf die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes durch Hinzufügung eines von der Torsion der berührenden geodätischen Linie abhängigen Gliedes.

Die erste der Gleichungen f) Artikel 158 sagt darnach aus, dass das Product der Krümmungen von zwei beliebigen rectangulären geodätischen Linien mit dem Product ihrer Torsionen eine bei der Deformation constante Summe bildet.

*) Vergl. Mannheim, „Nouvelles Annales“, t. XIX, p. 67.

unendlich entfernte Kreis eine vielfache Linie der Fläche ist. Ist jene Vielfachheit p, diese q und sind n', p', q' die entsprechenden Zahlen für die inverse Fläche, so gelten die Relationen

$$n' = 2n - p - 2q, \quad p' = n - 2q, \quad q' = n - p - q$$

und umgekehrt

$$n = 2n' - p' - 2q', \quad p = n' - 2q', \quad q = n' - p' - q'.$$

Für $p + 2q = n$ erhält man gleichzeitig $n = n'$, $p = p'$, $q = q'$, d. h. die Ordnung der Fläche und die Grade der Vielfachheit des Pols und des imaginären Kreises bleiben unverändert.*) Eine Fläche kann insbesondere für entsprechende Wahl des Centrums und des Parameters der Inversion mit ihrer inversen sich decken. Nennen wir einen solchen Pol Hauptpol**) und die entsprechende Kugel Hauptkugel, so kann eine Fläche dieser Art eine Fläche dritter Ordnung sein, welche den unendlich entfernten imaginären Kreis enthält, oder eine Fläche vierter Ordnung (Artikel 297), welche ihn als Doppellinie enthält. Für jene müssen die Hauptpole der Fläche angehören, für diese können sie es nicht. Es giebt für beiderlei Flächen je fünf Hauptpole, von denen wenigstens drei reell sind. Die fünf Hauptkugeln schneiden sich paarweis orthogonal, so dass die Gerade, welche zwei der Hauptpole verbindet, normal ist auf der Ebene der drei andern, oder der fünfte Hauptpol immer der Durchschnittspunkt der vier Höhen des Tetraeders der vier übrigen ist.***)

Diejenigen Kugeln, welche eine solche zu sich selbst inverse Fläche dritter oder vierter Ordnung doppelt berühren, schneiden sie nach zwei Kreisen und bilden mit einander fünf verschiedene Systeme. Da man jede sich selbst inverse Fläche als den Ort der Durchschnitte auf einander folgender Kugeln ansehen kann, die der Hauptkugel orthogonal sind und deren Centra eine gewisse Fläche bilden, so ist bemerkenswerth, dass für die sich selbst inversen Flächen vierter Ordnung diese Ortsflächen der Centra confocale Flächen zweiten Grades sind und dass für die bezüglichen Flächen dritter Ordnung das Centrum dieses confocalen Systems unendlich entfernt ist. Den geradlinigen Erzeugenden dieser Flächen entsprechen circuläre der sich selbst inversen; sind jene abwickelbar, so werden die Kreise zu einem System der Krümmungslinien in dieser.

Jeder Hauptpol einer solchen Fläche vierter Ordnung ist Scheitel eines Kegels vom zweiten Grade, welcher der Fläche doppelt umgeschrieben ist; die Berührungscurve desselben mit der Fläche liegt auf einer Kugel aus dem Centrum jenes Systems von confocalen Flächen. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zehn Kreisschnitte oder die Doppeltangen-

---

*) Vgl. Moutard, „Nouvelles Annales", t. XXIII, p. 306.

**) Vgl. Mannheim, ibid. t. XX, p. 218.

***) Die zehn Höhendurchschnitte der Flächen dieser Tetraeder sind Pole, für welche die Transformierte zur gegebenen Fläche symmetrisch wird für die Tetraederfläche als Symmetrieebene. Auch sie liegen bei den Flächen dritter Ordnung in der Fläche.

tenebenen bilden fünf Kegel zweiten Grades. Die Hauptkugeln schneiden die Fläche in Curven, die unter andern die Kreispunkte der Fläche enthalten; sie schneiden die bezeichneten confocalen Flächen zweiten Grades in Curven, die den Namen Focallinien verdienen. Sie können als Oerter der Centra doppelt berührender Kugeln vom Radius Null betrachtet werden, oder sie sind Doppellinien der developpabeln Fläche, welche der Fläche und dem imaginären Kreis im Unendlichen umgeschrieben sind. Haben zwei solche Flächen eine derartige Focallinie gemein, so haben sie dieselben fünf Hauptkugeln und dieselben fünf Focallinien und sollen confocal heissen.

Zwei confocale sich selbst inverse Flächen vierter Ordnung schneiden sich überall rechtwinklig und ihre Schnittcurve ist eine Krümmungslinie für beide. Durch jeden Punkt im Raum gehen drei solche Flächen und die Vereinigung aller solcher confocalen sich selbst inversen Flächen vierter Ordnung bildet ein dreifaches Orthogonalsystem. Die gemeinsamen Focallinien schneiden die Flächen in ihren Kreispunkten.*)

V. Ueber den Quaternionen-Calcul.

1. Der Quaternionen-Calcul ist von seinem Erfinder W. R. Hamilton erfolgreich zur Herleitung geometrischer Sätze angewendet worden und es mag daher gerechtfertigt erscheinen, einen Abriss dieser Methode dem hinzuzufügen, was in diesem Buche über die Methoden zur Untersuchung der Eigenschaften des Raumes von drei Dimensionen entwickelt worden ist. Dabei beschränken wir unsere Absicht darauf, dem Leser zu zeigen, was Quaternionen sind und ihm eine Idee von ihrem Gebrauch in geometrischen Untersuchungen zu geben, indem wir für Begründung weiterer Einsicht auf W. R. Hamilton's Abhandlungen „On Symbolical Geometry" im „Cambridge and Dublin Mathematical Journal", auf seine

---

*) Vgl. Moutard, „Comptes rendus", t. LIX, p. 243. Dazu die a. a. O. unmittelbar vorausgehende Note von Darboux, welche die Ausdehnung der Focaleigenschaften der Orthogonalcurven auf Systeme von Orthogonalflächen von dem singulären Integral der Gleichung der Krümmungslinien $1+p^2+q^2=0$ herleitet. Wenn man an die Fläche Tangentenebenen parallel denen des Kegels $x^2+y^2+z^2=0$ legt, so bilden ihre Berührungspunkte eine Krümmungslinie und die durch die Gleichung $1+p^2+q^2=0$ dargestellten developpabeln Flächen haben die Eigenschaft (wie die Kugel), dass jede auf ihnen gezeichnete Linie eine Krümmungslinie ist; alle solche Linien haben die Rückkehrkante zur gemeinsamen Evolute. Die Flächen eines dreifachen Orthogonalsystems haben in Folge dessen eine Fläche der Familie $1+p^2+q^2=0$ zur Enveloppe; sie berühren sie nach einer Curve und schneiden sie nach Tangenten derselben in ihren Schnittpunkten mit der Rückkehrkante. Die Existenz von solchen geraden Erzeugenden, die dem Asymptotenkegel der Kugel parallel sind, ist den Flächen eines Orthogonalsystems wesentlich. Etc.

„Lectures“ und auf die in Aussicht stehenden „Elements of Quaternions“ verweisen.

Vectoren. In der algebraischen Geometrie treten die Symbole x, y, z, etc., obwohl sie mit Bezug auf in bestimmter Richtung gemessene Linien gebraucht sind, doch nur als die Grössen der von ihnen dargestellten Linien in die Rechnung, d. i. in die Gleichungen ein, mit denen sie zu thun hat; diese Gleichungen drücken nur aus, dass gewisse arithmetische Operationen mit den Zahlen zu vollziehen sind, welche die Verhältnisse jeder der Linien x, y, z zur Lineareinheit bezeichnen. Wenn wir die Summe $x + y + z$ von drei bekannten Linien bilden, so ist das Resultat eine Linie von bestimmter Länge, aber ohne bestimmte Richtung. Die consequente Entwickelung der algebraischen Geometrie schliesst in dieser Beziehung mit dem Gegensatz des Sinnes innerhalb derselben Richtung ab.

Im Quaternionen-Calcul muss jedes Symbol, das eine Linie bezeichnet, sowohl ihre Länge als ihre Richtung darstellen; und wenn wir z. B. die Summe $x + y + z$ bilden würden, so muss dadurch sowohl die Richtung als die Länge der resultierenden Linie bestimmt werden.

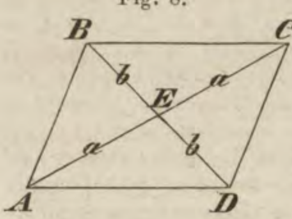
Die Zeichen $+$ und $-$ werden daher in diesem Calcul nicht als Zeichen numerischer Addition oder Subtraction, sondern zur Bestimmung der Richtungen verwandt — die Art und Weise dieser Verwendung erklären wir sogleich — und bezeichnen so zu sagen geometrische Addition und Subtraction.

2. Wenn die Linie oder der Vector AB den Uebergang vom Punkt A nach dem Punkte B bezeichnet, so wird in gleicher Weise BC den Uebergang von B nach C darstellen; das Zeichen $+$ kann naturgemäss gebraucht werden, um die auf einander folgende Ausführung dieser beiden Operationen auszudrücken, d. h. $AB + BC$ drückt aus, dass nach einander von A nach B und von B nach C gegangen werde. Da aber das Resultat dieser Operationen der Uebergang von A nach C ist, so gilt die Relation

$$AB + BC = AC,$$

oder die Summe zweier Vectoren ist die Diagonale des Parallelogramms, welches diese zu benachbarten Seiten hat.

Fig. 8.



Wenn AB und BC Strecken derselben Geraden sind, so ist ihre Summe die gewöhnliche algebraische Summe beider Linien; und durch successive Addition erkennt man, dass für a als einen beliebigen Vector und m als einen numerischen Factor ma einen in der Richtung mit a zusammenfallenden, in der Länge im Verhältniss $m : 1$ zu ihm stehenden Vector darstellt.

Man nennt zwei Vectoren einander gleich, wenn der eine ohne Drehung mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann, d. h. zwei gleiche in parallelen Linien gemessene Längen sind gleich. Auf Grund dieser Uebereinkunft können wir die Gleichung

$$a + b = b + a$$

erläutern. Ist der Vector a durch jede der gleichen Linien AE, EC und der Vector b durch jede der gleichen Linien DE, EB dargestellt, so ist mit Voraustritt von a

$$a + b = AB,$$

und mit Voraustritt von b

$$b + a = CD,$$

und da AB und CD gleiche Linien von derselben Richtung sind, so sind beide Resultate einander gleich.

Aus der Interpretation der Gleichung ist auch offenbar, dass

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

ist.

Wenn also das Zeichen $+$ geometrisch in der hier dargelegten Weise interpretiert wird, so gelten für seine Anwendungen die beiden Grundregeln der algebraischen Addition, nämlich das commutative Gesetz $a + b = b + a$ und das associative Gesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

3. Wenn man durch AB den Uebergang von A nach B bezeichnet, so bezeichnet natürlich $-AB$ die Rückwärtsvollziehung dieser Operation, somit den Uebergang von B nach A, so dass

$$AB + BA = 0$$

ist. Man beweist leicht, dass aus

$$a + b = c \quad \text{auch} \quad a = c - b$$

hervorgeht.

Da die Addition von Linien nach der eben aus einander gesetzten Methode der Zusammensetzung der auf einen Punkt wirkenden Kräfte in der Statik genau entspricht, so beweist man ganz ebenso wie in der Statik, dass jede Linie als die Summe dreier Linien dargestellt werden kann, deren Richtungen die Richtungen dreier zu einander rectangulären Achsen sind. Wenn nun die nach den drei Achsen gemessene Lineareinheit respective durch i, j, k bezeichnet wird, und wenn die numerischen Verhältnisse der Coordinaten eines Punktes P im Raume zu dieser Lineareinheit wie in der algebraischen Geometrie durch x, y, z bezeichnet werden, so sind jene Coordinaten in der hier entwickelten Methode durch ix, jy, kz respective dargestellt, und der Vector, welcher den Anfangspunkt des Systems mit dem Punkte P verbindet, ist durch

$$ix + jy + kz$$

ausgedrückt. Und da einem beliebigen Vector ein ihm paralleler und gleicher durch den Anfangspunkt entspricht, so kann jeder Vector in der Form $(ix + jy + kz)$ ausgedrückt werden.

Wenn α, β zwei Vectoren von demselben Anfangspunkt bezeichnen, so erkennt man leicht, dass

$$\frac{l\alpha + m\beta}{l + m}$$

ein von demselben Anfangspunkt ausgehender Vector ist, der in dem Punkte der Verbindungslinie der Endpunkte der beiden ersten Vectoren endigt, in welchem sie im Verhältniss $l : m$ getheilt wird; und dass ebenso

$$\frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n}$$

einen in der Ebene der Endpunkte der Vectoren α, β, γ endigenden Vector darstellt.

Wenn sowohl α als auch β von der Länge Eins sind, so macht $(l\alpha + m\beta)$ mit α und β Winkel, deren respective Sinus in dem Verhältniss $l : m$ stehen.

Diese Grundsätze können zur Entwickelung geometrischer Wahrheiten vielfach angewendet werden; so z. B. ist

$$\tfrac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

der Vector des Schwerpunkts eines Tetraeders, dessen Ecken durch die Enden der Vectoren α, β, γ, δ bestimmt sind, und man kann daraus wie im Bd. I, Artikel 9 geschehen ist, weitere Schlüsse ziehen.

4. Quaternionen. Nachdem gezeigt ist, wie Linien nach Richtung und Grösse addiert und subtrahiert werden können, ist ihre Multiplication und Division darzulegen.

Es ist nicht unmittelbar klar, welchen Sinn man dem Product zweier Linien beizulegen haben wird, aber es ist naturgemäss, den Quotienten

$$\frac{\alpha}{\beta}$$

als den Ausdruck der Operation anzusehen, durch welche die Linie β in die Linie α verwandelt wird, so dass

$$\frac{\alpha}{\beta}\beta = \alpha \text{ ist.}$$

Sind die Vectoren α und β Strecken derselben Geraden, so ist ihr Quotient eine numerische Constante, oder wie W. R. Hamilton sagt, ein Scalar; aber wenn diess nicht der Fall ist, so hat man, um β in α überzuführen, nicht nur seine Länge zu verändern, sondern auch eine Drehung um einen bestimmten Winkel in einer bestimmten Ebene zu vollziehen.

Wenn wir nun sahen, dass jeder Vector auf eine Summe von drei Gliedern zu reducieren ist, und erwägen wollen, wie diess vorauszusehen war auf Grund der Ueberlegung, dass drei Dinge zu seiner Bestimmung nöthig sind, nämlich seine Länge und die Richtungscosinus seiner Geraden, welches zweien weiteren Bedingungen äquivalent ist; so schliessen wir aus dem Umstande, dass zur Bestimmung eines geometrischen Quotienten vier Dinge offenbar gehören, nämlich das numerische Verhältniss der Längen der verglichenen Vectoren, der Winkel zwischen beiden und die Richtungscosinus seiner Ebene, welches zwei weiteren Bedingungen äquivalent ist; dass also ein solcher Quotient durch vier irreducible Glieder ausdrückbar ist. Wir werden diess zunächst streng beweisen und bemerken hier, dass darin der Grund zur Wahl des Namens Quaternionen liegt.

Es ist darin bereits ausgesprochen, dass die vier eben erwähnten Elemente zur Bestimmung eines solchen Quotienten hinreichen, d. h. dass zwei Quotienten dieser Art einander gleich sind

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta},$$

wenn 1) die Längen der Linien in Proportion sind,

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta;$$

wenn 2) der Winkel zwischen α und β dem Winkel zwischen γ und δ gleich ist; und wenn 3) alle vier Linien derselben Ebene parallel sind.

Das geometrische Verhältniss zweier Linien wird also als unverändert angesehen, wenn sie beide in demselben Verhältniss wachsen oder abnehmen und auch dann, wenn sie in ihrer Ebene so gedreht werden, dass der von ihnen bestimmte Winkel unverändert bleibt.

5. Zwei geometrische Brüche, die einerlei Nenner haben, können durch Addition ihrer Zähler addiert werden; d. h. es gilt wie in der Algebra die Relation

$$\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} = \frac{\alpha + \beta}{\delta}.$$

Man kann dadurch jeden derartigen Bruch in einen gleichwerthigen verwandeln, dessen beide Linien rechtwinklig zu einander sind. Denn wenn γ der Zähler und δ der Nenner des Bruches ist, so kann man immer γ als die Summe zweier Linien $\alpha + \beta$ darstellen, von denen die eine die Richtung von δ (sie ist die Projection von γ auf δ), die andere die zu ihr normale Richtung hat. Dann ist aber das Verhältniss $\frac{\alpha}{\delta}$ wegen der gemeinschaftlichen Richtung beider eine reine Zahl (scalar), während das Verhältniss $\frac{\beta}{\delta}$ das Verhältniss zweier rectangulären Linien ist. Wir können also jede Quaternion als eine Summe $(S + V)$ zweier Glieder darstellen, deren eines eine reine Zahl, das Scalen-Glied, ist, während das andere als das Verhältniss zweier rectangulärer Linien als das Vectorglied bezeichnet werden mag, weil das Verhältniss zweier rectangulären Linien durch den zu ihrer Ebene normalen Vector dargestellt werden kann.

Eben dieses Letztere ist hier noch zu begründen. Eine Quaternion kann noch in anderer Weise aufgelöst werden, nämlich in das Product eines numerischen Factors in das Verhältniss zweier gleicher Linien.

Offenbar ist

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma};$$

denn wenn wir zuerst γ in β und dann β in α überführen, so ist das

Resultat offenbar die Ueberführung von γ in α. Denken wir daher β als eine zu γ gleiche Linie in der Richtung von α, so ist das Verhältniss $\frac{\alpha}{\beta}$ eine reine Zahl und das Verhältniss $\frac{\alpha}{\gamma}$ ist als das Product derselben in das Verhältniss zweier gleichen Linien β und γ dargestellt.

W. R. Hamilton bezeichnete diese Darstellung als das Product aus Tensor und Versor; der Tensor sei die Zahl, welche ausdrückt, in welchem Verhältniss die Linie γ wächst oder abnimmt, um der Linie β gleich zu werden, und der Versor bezeichne den Winkel, um welchen sie zu drehen ist.

Setzen wir nun voraus, dass das Symbol J die Operation der Drehung einer Linie um einen rechten Winkel in einer zum Vector i normalen Ebene bezeichne (wobei wir festsetzen mögen, dass der Drehungssinn dem der Zeiger einer Uhr entspricht, die wir in der Richtung von i betrachten, während das Zifferblatt in die zugehörige Normalebene fällt), so stellt mJ die Operation derselben Drehung vor unter gleichzeitiger Veränderung der Länge im Verhältniss $m : 1$.

Ist daher der Nenner eines geometrischen Bruches eine Linie von der Länge Eins, der Zähler eine solche von der Länge l, ist θ der Winkel zwischen ihnen und ϱ der zu ihrer Ebene normale Vector von der Länge Eins, so können wir zuerst l in die Theile

$$l \cos \theta, \quad l \sin \theta$$

zerlegen, welche in der Richtung des Nenners und normal zu ihr gemessen sind; wenn dann V die Operation der Drehung um einen rechten Winkel um die Achse ϱ ohne Veränderung der Länge ausdrückt, so ist der gegebene Bruch in die Form $l \cos \theta + l \sin \theta \,.\, V$ gebracht.

Wären Zähler und Nenner mit einander vertauscht worden, so findet man $l \cos \theta - l \sin \theta \,.\, V$ als Ausdruck der Drehung um denselben Winkel im entgegengesetzten Sinne.

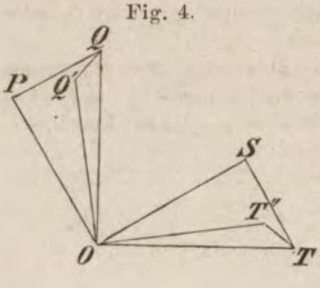
6. Bezeichnen ϱ, α, β drei Vectoren solcher Art, dass

$$\varrho = \alpha + \beta$$

ist, und V, A, B rechtwinklige Drehungen normal zu diesen Vectoren, wie sie vorher bezeichnet sind, so ist

$$V = A + B.$$

Fig. 4.



Denn die Figur 4 (vergl. Artikel 228) zeigt für

$$\varrho = OS, \quad \alpha = OT, \quad \beta = TS$$

und unter der Voraussetzung, dass OP, OQ, QP einander gleich und auf diesen Linien rechtwinklig sind, und dass OR eine zur Ebene des Papiers normale Linie von der Länge gleich OS ist, die Relationen

$$\frac{OP}{OR} = V, \quad \frac{OQ}{OR} = A, \quad \frac{QP}{OR} = B,$$

also

$$V = A + B.$$

Es folgt daraus, dass die Symbole der rectangulären Drehung in genau derselben Weise aufgelöst werden können, wie die Vectoren im Artikel 3, und dass also für I, J, K als Symbole von Rotationen um die drei Achsen ohne Veränderung der Längen die gleiche Drehung um die Achse ϱ von den auf sie bezogenen Richtungswinkeln α, β, γ in der Form

$$I \cos \alpha + J \cos \beta + K \cos \gamma$$

dargestellt wird.

Dann giebt die vollständige Auflösung des im letzten Artikel betrachteten Verhältnisses die Form

$$l \cos \theta + l \sin \theta \, (I \cos \alpha + J \cos \beta + K \cos \gamma)$$

und der allgemeinste Ausdruck eines geometrischen Bruches ist somit die viergliedrige Summe

$$a + bI + cJ + dK,$$

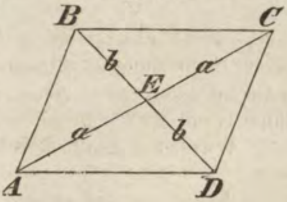
in welcher a, b, c, d numerische Constanten sind.

7. Multiplication von Brüchen bezeichnet, wie früher angedeutet ist, den successiven Vollzug der durch die Factoren dargestellten Operationen. So drückt $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\gamma}$ aus, dass wir zuerst die Operation der Ueberführung von γ in β, dann die von β in α ausführen; das Ergebniss ist also die Ueberführung von γ in α.

Um zwei beliebige Brüche mit einander zu multiplicieren $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta}$ ist eine Zwischenoperation nöthig. Man hat $\frac{\gamma}{\delta}$ in seiner Ebene so zu drehen, dass sein Zähler mit dem Durchschnitt der Ebenen beider Brüche zusammenfällt, $\frac{\alpha}{\beta}$ hingegen in seiner Ebene so, dass sein Nenner mit jenem Durchschnitt zusammenfällt.

Es ist offenbar, dass bei der Multiplication zweier Quaternionen die Ordnung der Factoren nicht gleichgültig ist. Denken wir A, B, C, D in Figur 8 als vier Punkte einer Kugelfläche vom Centrum O, so ist das Resultat der nach einander folgenden Drehungen von OD um einen Winkel b nach OE und von OE um einen Winkel a zu OC die Ueberführung von OD zu OC. Hätten wir aber mit der Drehung um den Winkel a begonnen, welche die Ueberführung von OA zu OE bezeichnet, und dann OE nach OB um den Winkel b gedreht, so ist das Resultat die Ueberführung von OA zu OB. Obwohl

Fig. 8.

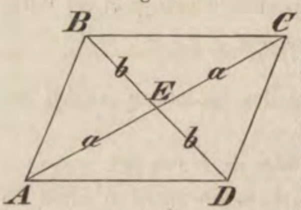


nun der Bogen AB dem Bogen CD gleich ist, so ist doch die Ebene von AB im Allgemeinen von der Ebene von CD verschieden und also das Product

$$\frac{OC}{OE} \cdot \frac{OE}{ED} \text{ nicht gleich } \frac{OB}{OE} \cdot \frac{OE}{OA},$$

obwohl das Letztere das Product zweier gleicher Factoren in entgegengesetzter Ordnung ist.

Fig. 8.



Wenn die Winkel a und b beide je 90^0 sind, so ist die Ebene von AB wohl dieselbe wie die Ebene von CD, aber der Drehungssinn des einen Products ist dem des andern entgegengesetzt. Wenn wir also zwei rectanguläre Quaternionen A, B (d. h. deren Drehung rechtwinklig ist) mit einander multiplicieren, so folgt aus Artikel 5, dass der Form von $A . B$

$$l \cos \theta + l \sin \theta \,.\, V$$

die Form von $A . B$

$$l \cos \theta - l \sin \theta \,.\, V$$

entspricht. Zwei so auf einander bezogene Quaternionen heissen conjugiert; wenn die eine von der Form $S + V$ ist, so entspricht der andern die Form $S - V$.

Dem speciellen Falle $\theta = 90^0$ entspricht das Gesetz: Das Product zweier rectangulären Quaternionen, deren Ebenen zu einander normal sind, giebt $A . B = - B . A$.

Seiner Wichtigkeit wegen wollen wir diess Gesetz unabhängig beweisen.

8. Man erkennt unschwer, dass die Multiplication von Quaternionen eine distributive Operation ist; so dass das Product

$$\frac{(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \mu)}{\lambda} \frac{\lambda}{\mu}$$

die Summe der Producte $\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu}$, $\frac{\beta}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\mu}$, etc. giebt. Ebenso wenn die Ordnung der Multiplication die umgekehrte ist.

Wenn wir also zwei Quaternionen*) multiplicieren, die in ihrer Normalform ausgedrückt sind

$$(a + bI + cJ + dK)\,(a' + b'I + c'J + d'K),$$

so ist ihr Product die Summe der 16 Glieder, welche man erhält, indem man jedes der ersten vier Glieder mit jedem der letzten vier Glieder combiniert, mit Rücksicht jedoch auf die Ordnung der Multiplication.

Wir haben die Bedeutung der Glieder II, IJ, etc. zu untersuchen,

---

*) Auch für das stetige Product von drei Quaternionen ist

$$(qq')\,q'' = q\,(q'q'').$$

welche in diesem Product auftreten. Dazu erinnern wir, dass I eine rectanguläre Drehung um die Achse der x bezeichnet, und dass die Wirkung einer solchen Drehung eine Linie von der Richtung der Achse y in die Richtung der Achse z und eine Linie von der Richtung der Achse z in die der Achse $-y$ überführt; in Folge dessen schreiben wir die Relationen $Ij = k$, $Ik = -j$.

Ebenso erhalten wir

$$Jk = i, \quad Ji = -k; \quad Ki = j, \quad Kj = -i.$$

Wir betrachten nun die Wirkung zweier solcher Operationen in ihrer successiven Ausführung. Wenn wir zuerst an j mit I und sodann an dem Resultat k mit I operieren, so erhalten wir

$$I^2 j = -j, \quad \text{oder} \quad I^2 = -1.$$

Ebenso folgt $J^2 = -1$, $K^2 = -1$.

Und weil offenbar für jede beliebige Achse der Drehung wahr ist, dass die Wirkung zweifacher rechtwinkliger Drehung die Umkehrung der Linie ist, an welcher man operiert, so ergiebt sich, dass das Quadrat jeder rectangulären Quaternion gleich -1 sein muss.

Ferner sahen wir, dass $Ij = k$, $Jk = i$, also auch $JIj = i$ ist; wegen $Kj = -i$ ist also $JI = -K$.

Ebenso schliessen wir aus den Gleichungen $Ji = -k$, $Ik = -j$, $Ki = j$ $IJ = K$.

Also ist auch $IJ = K = -JI$.

Ebenso findet man $Jk = I = -KJ$; $kI = J = -IK$.

Vergleichen wir dann die Relationen

$$Ij = k, \quad IJ = K, \quad \text{etc.},$$

so erkennen wir, dass die Gleichungen, welche die Wirkung der Operationen I, J, K an den Linien i, j, k darstellen, genau von derselben Form sind, wie die, welche die Wirkungen der successiven Vollziehung dieser Operationen bezeichnen. Und da wir in dem practischen Gebrauch des Calculs weit mehr mit den Gesetzen zu thun haben, nach welchen sich die Symbole mit einander combinieren, als mit ihrer Interpretation, so ist es unnöthig, weiter auf die Unterscheidung der Bezeichnung

$$I, J, K; \quad i, j, k$$

einzugehen. Alle Sätze, welche für die Symbole der einen Gruppe wahr sind, gelten auch für die der andern; und indem wir eine Gruppe der Vectoren als Linien und eine andere als Rotationen iterpretieren, entspringen für eine und dieselbe Gleichung eine grössere Anzahl gleichmässig wahrer Bedeutungen.

Wir können i nach Willkür als Ausdruck einer Linie Eins nach der Richtung der Achse x oder als eine Rotation um 90^0 um dieselbe Achse ansehen; ebenso ist eine Rechtwinkel-Drehung um den Einheitsvector α durch den Buchstaben α so dargestellt, wie früher in Artikel 5 angezeigt ward.

Wir schreiben die allgemeine Form einer Quaternion

$$a + bi + cj + dk$$

und combinieren die darin auftretenden Symbole nach den Gesetzen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ij = k = -ji,$$
$$jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik.$$

Wenn man das Product einer Anzahl von Factoren bildet, so ist die Ordnung derselben stets zu beachten; nur wenn einer der Factoren eine reine Zahl ist, so ist seine Ordnung indifferent und er kann als Factor des Ganzen links vorgesetzt werden. Wenn z. B. α, β, γ drei Einheit-Vectoren sind (oder irgend drei rectanguläre Quaternionen), und $\beta\gamma$ mit $\alpha\beta$ multipliciert wird, so ist das Resultat $\alpha\beta^2\gamma$ gleich $-\alpha\gamma$, weil $\beta^2 = -1$ ist.

Beispiel 1. Das Quadrat des Einheit-Vectors

$$i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma$$

zu bilden.

Die wirkliche Multiplication liefert

$$i^2 \cos^2\alpha + j^2 \cos^2\beta + k^2 \cos^2\gamma + (jk + kj) \cos\beta \cos\gamma$$
$$+ (ki + ik) \cos\gamma \cos\alpha + (ij + ji) \cos\alpha \cos\beta$$

und diess reduciert sich in Folge der zwischen i, j, k bestehenden Relationen auf

$$-(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \quad \text{oder} \quad -1,$$

wie es sein muss.

Wenn der Vector nicht von der Länge Eins ist, so findet man das Quadrat von $(ix + jy + kz)$ in derselben Art $= -(x^2 + y^2 + z^2)$, d. h. als das negative Quadrat der Länge der Linie, welche den Vector darstellt. Wir können diess ausdrücken, indem wir sagen, dass das Quadrat irgend eines Vectors das negative Quadrat seines Tensor's ist.

Beispiel 2. Das Product der beiden Einheit-Vectoren

$$(i \cos\alpha + j \cos\beta + k \cos\gamma), \quad (i \cos\alpha' + j \cos\beta' + k \cos\gamma')$$

zu finden.

Es ist

$$-(\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma')$$
$$+ i (\cos\beta \cos\gamma' - \cos\gamma \cos\beta') + j (\cos\gamma \cos\alpha' - \cos\alpha \cos\gamma')$$
$$+ k (\cos\alpha \cos\beta' - \cos\beta \cos\alpha').$$

Man sieht, für θ als den Winkel zwischen den beiden Vectoren und α'', β'', γ'' als die Richtungscosinus der Normalen zu ihrer Ebene kann das Product in Uebereinstimmung mit Artikel 5 in der Form

$$-\cos\theta + \sin\theta\, (i \cos\alpha'' + j \cos\beta'' + k \cos\gamma'')$$

geschrieben werden. Wären die Vectoren von den respectiven Längen l, l', so würde diess Product mit ll' multipliciert sein.

Wenn die Factorenordnung des Products umgekehrt worden wäre, so wäre der numerische oder Scala-Theil — $\cos\theta$ geblieben, aber der Vector-Theil würde sein Zeichen geändert haben, d. h. wenn die Zeichen S und V die Operation der Bildung dieser beiden Theile bezeichnen,

$$S(\alpha\beta) = S(\beta\alpha) = \cos\theta, \quad V(\alpha\beta) = -V(\beta\alpha)$$

und ferner

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2S(\alpha\beta).$$

Sind die beiden Vectoren rechtwinklig zu einander, so verschwindet $\cos\theta$ oder der Scalentheil des Products; die Bedingung, unter welcher zwei Vectoren α, β zu einander rechtwinklig sind, ist $S(\alpha\beta) = 0$.

Es kann also, wenn ϱ einen veränderlichen Vector durch den Anfangspunkt und α einen festen Vector bezeichnet, die Gleichung

$$S(\varrho\alpha) = 0$$

als die Gleichung einer Ebene angesehen werden, welche normal zu α durch den Anfangspunkt geht; denn ϱ ist in dieser Ebene begrenzt.

Wir nehmen an, es sei die Gleichung einer andern Ebene zu finden.

Bezeichne α nach Länge und Richtung die vom Anfangspunkte auf diese Ebene gefällte Normale und sei ϱ der Radius vector irgend eines Punktes in der Ebene; dann ist $(\varrho - \alpha)$ der Vector, welcher den Endpunkt dieses Radius vector mit dem Fusspunkt der Normalen verbindet, und da diese Linie nach der Voraussetzung zu α normal ist, so ist die fragliche Gleichung

$$S(\varrho - \alpha)\,\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad S(\varrho\alpha) = \alpha^2.$$

Da aber α^2 eine reine Zahl ist, so können wir mit ihm unter dem Zeichen S dividieren und die Gleichung also in der Form

$$S\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right) = 1$$

schreiben. Dieselbe Gleichung kann auch aus dem im vorigen Artikel nachgewiesenen Umstande abgeleitet werden, dass der Scalentheil des obigen Bruches die Projection der Linie ϱ auf die Linie α bezeichnet.

In derselben Art bezeichnet die Gleichung

$$S\left(\frac{\alpha}{\varrho}\right) = 1,$$

welche ausdrückt, dass die Projection der festen Linie α auf die Richtung ϱ die Länge ϱ habe, die Gleichung einer über dem Vector α als Durchmesser beschriebenen Kugel.

Ferner repräsentiert die Gleichung

$$S\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right) S\left(\frac{\beta}{\varrho}\right) = 1$$

einen Kegel, weil sie, wenn irgend ein Werth von ϱ ihr genügt, auch für jeden Werth $m\varrho$ für m als eine beliebige Constante erfüllt ist; insbesondere aber geht derselbe durch

$$S\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)=1, \quad S\left(\frac{\beta}{\varrho}\right)=1,$$

d. h. er ist der Kegel, dessen Basis der durch die eben geschriebenen Gleichungen bestimmte Kreis ist.

Beispiel 3. Man soll das Product zweier Quaternionen bestimmen.

Wir multiplicieren

$$a+bi+cj+dk \quad \text{mit} \quad a'+b'i+c'j+d'k.$$

Um aber eine klarere Auffassung des Products zu begründen, schreiben wir beide Quaternionen in der Form

$$S+V, \quad S'+V'$$

und ihr Product also

$$SS'+SV'+S'V+VV'.$$

Der Scalentheil des Products ist also, da SV' und $S'V$ reine Vectoren sind,

$$SS'+S(VV')$$

oder er ist die Summe aus dem Product der Scalentheile der Factoren und dem Scalentheil des Products der Vectoren.

Sind z. B. α, β, γ drei Radien vectoren einer Kugel, so besteht die identische Gleichung $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha}{\gamma}\cdot\dfrac{\gamma}{\beta}$.

Wenn dann a, b, c die Seiten des sphärischen Dreiecks sind, welches die Enden dieser Vectoren bestimmen, so sind $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Scalentheile der drei bezüglichen Quaternionen; und der Scalentheil des Products der Vectoren der rechten Seite der Gleichung ist das Product ihrer Tensoren $\sin a$, $\sin b$ in den Cosinus des von ihnen gebildeten Winkels, d. h. es ergiebt sich die Grundformel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

9. Wir können in derselben Art das Product von drei Vectoren bilden. Die Multiplication von

$$ix+jy+kz, \quad ix'+jy'+kz', \quad ix''+jy''+kz''$$

zeigt, dass der Scalentheil des Products die Determinante

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix}$$

ist. Sind α, β, γ die drei Vectoren, so ist die Bedingung, unter welcher sie in einer Ebene gelegen sind,

$$S(\alpha\beta\gamma)=0.*)$$

*) Vergl. Bd. I, Anmerkung zu Artikel 27.

Diess ergiebt sich auch aus folgender Bemerkung. Wenn $S(\alpha\beta\gamma)$ gleich Null ist, so ist $\alpha\beta\gamma$ ein reiner Vector und da diess

$$\alpha\beta\gamma = \alpha \,.\, S(\beta\gamma) + \alpha \,.\, V(\beta\gamma)$$

ist, so muss $\alpha V(\beta\gamma)$ ein reiner Vector, d. h. α normal zu $V(\beta\gamma)$ oder in der Ebene von $\beta\gamma$ gelegen sein. Das war zu beweisen.

So können wir die Gleichung der Ebene finden, welche die Endpunkte der drei Vectoren α, β, γ enthält. Die Verbindungslinien des Endpunktes eines veränderlichen Vectors ϱ, der der Ebene angehört, mit den Endpunkten von α, β, γ liegen in der fraglichen Ebene, d. h. man hat

$$S(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)(\varrho - \gamma) = 0.$$

Bei der Entwickelung können Glieder wie $S\varrho^2\gamma$ vernachlässigt werden, weil ϱ ein Scalentheil und $\varrho^2\gamma$ ein reiner Vector ist, dessen Scalentheil verschwindet; das entwickelte Product ist daher

$$S(\varrho\beta\gamma + \alpha\varrho\gamma + \alpha\beta\varrho) = S\alpha\beta\gamma,$$

und der zur Ebene normale Vector ist

$$V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta).$$

Geht man zu dem Product der drei Vectoren zurück, so ergiebt sich auch durch wirkliche Multiplication, dass

$$V(\alpha\beta\gamma) = \alpha S(\beta\gamma) - \beta S(\gamma\alpha) + \gamma S(\alpha\beta)$$

ist, eine Gleichung von grosser Anwendbarkeit.

In Verbindung hiermit mag die folgende identische Gleichung gegeben

$$\delta S(\alpha\beta\gamma) = \alpha S(\beta\gamma\delta) - \beta S(\gamma\alpha\delta) + \gamma S(\alpha\beta\delta)$$

und bemerkt werden, dass der Vectortheil des Products $V\alpha\beta \,.\, V\gamma\delta$ in den beiden Formen

$$\alpha S(\beta\gamma\delta) - \beta S(\gamma\alpha\delta) \quad \text{oder} \quad \gamma S(\alpha\beta\delta) - \delta S(\alpha\beta\gamma)$$

gleichmässig geschrieben werden kann. Denn $V\alpha\beta$ bezeichnet eine zu α und β normale Linie; der fragliche Vector muss daher zugleich in der Ebene von α und β und von γ und δ liegen.

10. Als ein Beispiel für die Art und Weise der Anwendung dieses Calculs auf ein geometrisches Problem untersuchen wir die Aufgabe von der Bestimmung der Gleichung der Regelfläche, welche drei gerade Directrixen hat.

Wir können dazu zuerst ein Verfahren verfolgen, das der Coordinatenmethode analog ist. Wenn man für α in die Gleichung der durch drei Punkte bestimmten Ebene $\frac{1}{l+m}(l\alpha + m\alpha')$ substituiert, so erhält man die Gleichung einer Ebene durch den Endpunkt des eben geschriebenen Vectors und eine gewisse feste Gerade, nämlich welche die Endpunkte der Vectoren β und γ verbindet, in der Form $lA + mB = 0$, wo A die Ebene durch $\alpha\beta\gamma$ und B die Ebene durch $\alpha'\beta\gamma$ bezeichnet.

Wenn wir also irgend einen Punkt des Vectors $\alpha\alpha'$ mit den andern beiden Linien verbinden, so erhalten wir die Gleichung zweier Ebenen in den Formen

$$lA + mB = 0, \quad lA' + mB' = 0,$$

und durch Elimination von l und m aus ihnen die Gleichung des Ortes in der Form

$$AB' = BA'.$$

Sodann. Wir drücken die Bedingung aus, unter welcher die Ebenen, die einen beliebigen Punkt des Ortes mit den drei Linien verbinden, eine gemeinschaftliche Gerade enthalten; die zu diesen Ebenen normalen Vectoren sind dann derselben Ebene parallel. Ist dann die erste Linie zur Linie α parallel und durch den Endpunkt eines Vectors α' gelegt, so ist der zu einer sie enthaltenden Ebene normale Vector als normal zu α und zu $\alpha' - \varrho$

$$V\alpha\,(\alpha' - \varrho)$$

und die fragliche Gleichung ist

$$S\left\{V\alpha\,(\alpha' - \varrho)\,.\,V\beta\,(\beta' - \varrho)\,.\,V\gamma\,(\gamma' - \varrho)\right\} = 0;$$

sie kann mit Hilfe der Ergebnisse des vorigen Artikels reduciert und entwickelt werden.

11. Wir geben ein weiteres Beispiel, um zu zeigen, wie das Unendlichkleine in diesen Calculus einzuführen ist.

Die Gleichung einer Kugel ist

$$\varrho^2 = -c^2.$$

Ist dann $d\varrho$ die Linie, welche den Endpunkt von ϱ mit einem unendlich nahe gelegenen Punkte verbindet, so ist $\varrho + d\varrho$ der entsprechende nächstfolgende Radius vector und wir haben

$$(\varrho + d\varrho)^2 = -c^2,$$

oder durch Entwickelung und Vernachlässigung des Quadrats von $d\varrho$

$$\varrho\, d\varrho + d\varrho\,.\,\varrho = 0, \quad \text{oder} \quad S\,(\varrho\,.\,d\varrho) = 0,$$

welches ausdrückt, dass der Radius ϱ zur Tangente $d\varrho$ normal ist.

Es wäre eine viel weitere Entwickelung nöthig, um einen vollständigen Abriss dieses Calculs zu geben, und z. B. auch zu zeigen, wie die Gleichungen von Tangenten und Normalen, von Krümmungslinien und geodätischen Linien etc. gebildet werden können.

Aber wir glauben genug gegeben zu haben, um der Bemerkung Zutrauen zu sichern, dass der betrachtete Calcul auf alle geometrischen Probleme anwendbar sei, dass er sehr reich an Transformationen ist und dass sein Verfahren, obgleich immer den Analogien der Coordinatenmethoden folgend, doch in keiner sclavischen Abhängigkeit von dem Verfahren dieser Letzteren steht.

VI. Von den Invarianten und Covarianten der Systeme von Flächen zweiten Grades.

1. Die Entwickelung und Anwendung der Invarianten und Covarianten der Systeme von Flächen zweiten Grades lässt sich einfach an die Bedingung anknüpfen, unter welcher die Fläche zweiter Ordnung eine Kegelfläche wird. Sie ist (Bd. I, Art. 63) das Verschwinden der Discriminante, also für

$$U = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \text{etc.}$$
$$= {}_1\Sigma_2\, a_{ij}x_ix_j = 0$$

als die Gleichung der Fläche

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 0.$$

Ist nun $\lambda U + U' = 0$ die Gleichung eines einfachen Systems von Flächen, so ist die Discriminante des Systems

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + a_{11}', & \lambda a_{12} + a_{12}', & \lambda a_{13} + a_{13}', & \lambda a_{14} + a_{14}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{41} + a_{41}', & \cdot\quad, & \cdot\quad, & \lambda a_{44} + a_{44}' \end{vmatrix}$$
$$= \Sigma \pm (\lambda a_{11} + a_{11}')(\lambda a_{22} + a_{22}')(\lambda a_{33} + a_{33}')(\lambda a_{44} + a_{44}')$$

in λ vom vierten Grade und kann durch Zerlegung der Determinante nach den Summanden ihrer Elemente entwickelt werden. Ihr Verschwinden liefert die vier Werthe von λ, welche den Kegelflächen des Systems entsprechen; wir schreiben die bezügliche Gleichung in der Form

$$\lambda^4\Delta + \lambda^3\Theta + \lambda^2\Phi + \lambda\Theta' + \Delta' = 0$$

und haben

$$\Delta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, \quad \Delta' = \Sigma \pm a_{11}'a_{22}'a_{33}'a_{44}',$$
$$\Theta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}' + \Sigma \pm a_{11}'a_{22}a_{33}a_{44}$$
$$+ \Sigma \pm a_{11}a_{22}'a_{33}a_{44} + \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}'a_{44},$$
$$\Theta' = \Sigma \pm a_{11}'a_{22}'a_{33}'a_{44} + \Sigma \pm a_{11}a_{22}'a_{33}'a_{44}'$$
$$+ \Sigma \pm a_{11}'a_{22}a_{33}'a_{44}' + \Sigma \pm a_{11}'a_{22}'a_{33}a_{44}',$$
$$\Phi = \Sigma \pm a_{11}'a_{22}'a_{33}a_{44} + \Sigma \pm a_{11}'a_{22}a_{33}'a_{44}$$
$$+ \Sigma \pm a_{11}'a_{22}a_{33}a_{44}' + \Sigma \pm a_{11}a_{22}'a_{33}'a_{44}$$
$$+ \Sigma \pm a_{11}a_{22}'a_{33}a_{44}' + \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}'a_{44}'.$$

Die Werthe von λ, welche die Gleichung $\lambda U + U' = 0$ zur Gleichung einer Kegelfläche machen, sind unabhängig von dem Coordinatensystem, nach welchem U und U' interpretiert werden, und die Coefficienten der Gleichung in λ, die Grössen Δ, Θ, Φ, Θ', Δ' sind daher Invarianten des Systems. Die folgenden Beispiele ihrer Berechnung schliessen einige der am häufigsten vorkommenden Fälle ein.

Beispiel 1. Wenn beide Flächen auf das ihnen gemeinschaftliche sich selbst conjugierte Tetraeder bezogen sind (Bd. I, Art. 146), so kann man ihre Gleichungen in der Form

$$U = \mathfrak{a}_{11}x_1^2 + \mathfrak{a}_{22}x_2^2 + \mathfrak{a}_{33}x_3^2 + \mathfrak{a}_{44}x_4^2 = 0,$$
$$U' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

schreiben, indem man in der zweiten Gleichung die Producte

$$x_1\sqrt{\mathfrak{a}_{11}},\quad x_2\sqrt{\mathfrak{a}_{22}},\quad x_3\sqrt{\mathfrak{a}_{33}},\quad x_4\sqrt{\mathfrak{a}_{44}}$$

durch die einfachen Symbole x_1, x_2, x_3, x_4 ersetzt; und man erhält durch das Verschwinden aller a_{ij} und a'_{ij} für verschiedene i und j und die Gleichheit der a'_{ii} mit Eins

$$\varDelta = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44},\quad \varDelta' = 1,\quad \Theta = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44}$$
$$+ \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44}\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{44}\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22},\quad \Theta' = \mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{22} + \mathfrak{a}_{33} + \mathfrak{a}_{44},$$
$$\Phi = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33} + \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44} + \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{33} + \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{44} + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{44}.$$

Beispiel 2. Sei wie vorher $U' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ und $U = a_{11}x_1^2 + \text{etc.} + 2a_{34}x_3x_4 = 0$ die allgemeine Gleichung. Man hat dann $\varDelta = \Sigma \pm a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ und $\varDelta' = 1$. Sind ferner A_{11}, A_{12}, A_{13}, etc. die den Elementen a_{11}, a_{12}, a_{13}, etc. der Discriminante $\varDelta$ entsprechenden Minoren (vergl. „Vorlesungen", Artikel 15—18) und ebenso A_{11}', A_{12}', etc. die den Elementen a_{11}', a_{12}', etc. der Discriminante $\varDelta'$ entsprechenden für den allgemeinen Fall, so hat man für diesen Letztern

$$\Theta = a_{11}'A_{11} + a_{22}'A_{22} + a_{33}'A_{33} + a_{44}'A_{44} + 2a_{12}'A_{12}$$
$$+ 2a_{13}'A_{13} + 2a_{14}'A_{14} + 2a_{23}'A_{23} + 2a_{24}'A_{24} + 2a_{34}'A_{34},$$
$$\Theta' = a_{11}A_{11}' + a_{22}A_{22}' + a_{33}A_{33}' + a_{44}A_{44}' + 2a_{12}A_{12}'$$
$$+ 2a_{13}A_{13}' + 2a_{14}A_{14}' + 2a_{23}A_{23}' + 2a_{24}A_{24}' + 2a_{34}A_{34}',$$

und man erhält für diesen speciellen Fall wegen

$$a_{ii}' = 1,\quad a_{ij}' = 0,\quad \text{und}\quad A_{ii}' = 1,\quad A_{ij}' = 0$$
$$\Theta = A_{11} + A_{22} + A_{33} + A_{44},\quad \Theta' = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}.$$

Die Determinanten von Φ reducieren sich für ihn auf einfachere zweireihige und geben entwickelt

$$\Phi = (a_{33}a_{44} - a_{34})^2 + (a_{44}a_{11} - a_{14}^2) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$
$$+ (a_{22}a_{33} - a_{23}^2) + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + (a_{22}a_{44} - a_{24}^2).$$

Wäre $U = \mathfrak{a}_{11}x_1^2 + \mathfrak{a}_{22}x_2^2 + \mathfrak{a}_{33}x_3^2 + \mathfrak{a}_{44}x_4^2 = 0$ und $U' = 0$ die allgemeine Gleichung, so erfahren die vorigen Ausdrücke nur durch Eintreten der gestrichenen Coefficienten an Stelle der ungestrichenen und durch Hinzutreten der Factoren $\mathfrak{a}_{11}$, etc., $\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}$, etc. Veränderungen. Es ist

$$\varDelta = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44},\quad \varDelta' = \Sigma \pm a_{11}'a_{22}'a_{33}'a_{44}',$$
$$\Theta = a_{11}'\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44} + a_{22}'\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44}\mathfrak{a}_{11} + a_{33}'\mathfrak{a}_{44}\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22} + a_{44}'\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33},$$
$$\Theta' = \mathfrak{a}_{11}A_{11}' + \mathfrak{a}_{22}A_{22}' + \mathfrak{a}_{33}A_{33}' + \mathfrak{a}_{44}A_{44}',$$
$$\Phi = \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}(a_{33}'a_{44}' - a_{34}'^2) + \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}(a_{44}'a_{11}' - a_{14}'^2)$$
$$+ \mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44}(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2) + \mathfrak{a}_{44}\mathfrak{a}_{11}(a_{22}'a_{33}' - a_{23}'^2)$$
$$+ \mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{44}(a_{11}'a_{33}' - a_{13}'^2) + \mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{33}(a_{22}'a_{44}' - a_{24}'^2).$$

Beispiel 3. Sind $U = 0$ und $U' = 0$ die Gleichungen zweier Kugeln, also respective

$$x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2 = 0, \ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \varrho'^2 = 0,$$

so erhält man für $D = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}$ als die Entfernung beider Centra

$$\varDelta = -\varrho^2, \ \varDelta' = -\varrho'^2, \ \Theta = D^2 - 3\varrho^2 - \varrho'^2,$$
$$\Theta' = D^2 - \varrho^2 - 3\varrho'^2, \ \varPhi = 2D^2 - 3\varrho^2 - 3\varrho'^2.$$

Die biquadratische Gleichung zur Bestimmung von λ erhält die specielle Form

$$(\lambda + 1)^2 \left\{ -\varrho^2\lambda^2 + (D^2 - \varrho^2 - \varrho'^2)\,\lambda - \varrho'^2 \right\} = 0.$$

Beispiel 4. Sei

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{und}$$
$$U' = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \varrho^2 = 0,$$

so erhält man

$$\varDelta = -\frac{1}{a^2b^2c^2}, \ \varDelta' = -\varrho^2;$$
$$\Theta = \frac{1}{a^2b^2c^2}\left\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right\},$$
$$\Theta' = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} - 1 - \varrho^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right),$$
$$\varPhi = \frac{1}{b^2c^2}(\beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2) + \frac{1}{c^2a^2}(\gamma^2 + \alpha^2 - \varrho^2)$$
$$+ \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Die biquadratische Gleichung für λ aus dem Verschwinden der Discriminante von $\lambda U + U' = 0$ ist in der speciellen Form

$$\frac{\alpha^2}{a^2 + \lambda} + \frac{\beta^2}{b^2 + \lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2 + \lambda} = 1 + \frac{\varrho^2}{\lambda}$$

darstellbar.

Beispiel 5. Ist $U = 0$ das Paraboloid $ax^2 + by^2 + 2rz = 0$ und $U' = 0$ eine Kugel in der Gleichungsform des letzten Beispiels, so erhält man

$$\varDelta = -abr^2, \ \varDelta' = -\varrho^2, \ \Theta = -r^2(a + b) + 2abr\gamma,$$
$$\Theta' = a\alpha^2 + b\beta^2 + 2r\gamma - (a + b)\varrho^2,$$
$$\varPhi = ab(\alpha^2 + \beta^2 - \varrho^2) + 2(a + b)r\gamma - r^2.$$

Die biquadratische Gleichung für λ ist

$$\frac{\lambda a\alpha^2}{\lambda a + 1} + \frac{\lambda b\beta^2}{\lambda b + 1} + 2\lambda r\gamma = \lambda^2 r^2 + \varrho^2.$$

2. Da die Bedeutungen von $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$ bekannt sind, so ist übrig, die geometrische Bedeutung der Bedingungen des Verschwindens der drei übrigen Invarianten zu untersuchen. Wir untersuchen zuerst die Bedeutung von $\Theta = 0$. Das Beispiel 2 des vorigen § zeigt, dass für die Beziehung der Flächen auf ein für $U = 0$ sich selbst conjugiertes Tetraeder

$$\Theta = a_{11}'\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44} + a_{22}'\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{44}\mathfrak{a}_{11} + a_{33}'\mathfrak{a}_{44}\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22} + a_{44}'\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33}$$

ist; es verschwindet also Θ für $a_{11}' = 0$, $a_{22}' = 0$, $a_{33}' = 0$, $a_{44}' = 0$, d. h. wenn die Form der Gleichung von $U' = 0$ durch $\Sigma a_{ij} x_i x_j = 0$ mit Ausschluss der gleichen Werthe von i und j dargestellt ist. Man sieht, Θ ist gleich Null, wenn es möglich ist, in die Fläche $U' = 0$ ein Tetraeder einzuschreiben, welches in Bezug auf die Fläche $U = 0$ sich selbst conjugiert ist. Ebenso verschwindet Θ', wenn die Minoren A_{11}', A_{22}', A_{33}', A_{44}' verschwinden und nach Bd. I, Art. 75 ist $A_{11}' = 0$ die Bedingung, unter welcher die Ebene $x_1 = 0$ die Fläche $U' = 0$ berührt. Also verschwindet Θ' immer dann, wenn es möglich ist, der Fläche $U' = 0$ ein Tetraeder zu umschreiben, welches zugleich in Bezug auf $U = 0$ sich selbst conjugiert ist. Aber nach dem Vorigen ist $\Theta' = 0$ zugleich die Bedingung, unter welcher es möglich ist, in die Fläche $U = 0$ ein in Bezug auf $U' = 0$ sich selbst conjugiertes Tetraeder einzuschreiben, und es muss also, wenn die eine dieser beiden geometrischen Constructionen möglich ist, stets auch die andere möglich sein. Endlich ist nach Bd. I, Art. 76 die Invariante Φ gleich Null, wenn die Kanten eines in Bezug auf die eine Fläche sich selbst conjugierten Tetraeders sämmtlich die andere Fläche berühren.

Beispiel 1. Die Ecken zweier in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades sich selbst conjugierten Tetraeder bilden ein System von Punkten von solcher Art, dass jede Fläche zweiten Grades, welche sieben von ihnen enthält, auch durch den achten hindurchgeht. (Hesse, „Crelle's Journal", Bd. XX, p. 297.)

Denken wir eine Fläche zweiten Grades durch die vier Ecken des einen Tetraeders und durch drei Ecken des zweiten beschrieben, dessen Flächen wir als die Fundamentalebenen des Coordinatensystems betrachten, so ist nach § 1, Beispiel 1 die Invariante

$$\Theta' = \mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{22} + \mathfrak{a}_{33} + \mathfrak{a}_{44} = 0,$$

weil die Fläche dem ersten Tetraeder umgeschrieben ist; da sie aber durch drei Ecken des Fundamental-Tetraeders geht, so müssen etwa

$$\mathfrak{a}_{11} = \mathfrak{a}_{22} = \mathfrak{a}_{33} = 0$$

sein und ist also in Folge der vorigen Bedingung auch $\mathfrak{a}_{44} = 0$, oder die Fläche enthält auch die vierte Ecke des Fundamental-Tetraeders, d. i. den achten Punkt der Gruppe. In der nämlichen Art wird bewiesen, dass eine Fläche zweiten Grades, welche von den acht Seitenflächen der beiden Tetraeder sieben berührt, auch durch die achte berührt wird.

Beispiel 2. Wenn eine Kugel einem in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades sich selbst conjugierten Tetraeder umgeschrieben ist, so ist die Länge der an sie vom Centrum der Fläche gezogenen Tangente constant. Denn nach dem 4. Beispiel in § 1 giebt die Bedingung $\Theta = 0$ für das Quadrat der bezeichneten Tangente $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2)$ den Werth $(a^2 + b^2 + c^2)$. Man kann auch sagen, die einem solchen Tetraeder umgeschriebene Kugel schneide die Kugel stets orthogonal, welche für die Fläche zweiten Grades der Ort der Durchschnittspunkte von je drei zu einander rechtwinkligen Tangentenebenen ist. (Bd. I, Art. 89.) Diess entspricht Faure's Theorem von den Kegelschnitten („Analyt. Geom. d. Kegelschn." p. 603).

Beispiel 3. Wenn für ein Hyperboloid die Relation

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$$

erfüllt ist, so ist das Centrum der Kugel, welche einem in Bezug auf dasselbe sich selbst conjugierten Tetraeder eingeschrieben ist, stets ein Punkt der Fläche. Diess ergiebt sich aus der Bedingung $\Theta' = 0$ im 4. Beispiel des § 1.

Beispiel 4. Der Ort des Centrums einer Kugel, welche einem in Bezug auf ein Paraboloid sich selbst conjugierten Tetraeder umgeschrieben ist, ist eine Ebene. Nach dem Beispiel 5 des § 1.

3.-Man soll die Bedingung aufstellen, unter welcher zwei Flächen zweiten Grades sich berühren. Wie in dem Falle der Kegelschnitte („Anal. Geom. d. Kegelschn.", Art. 364), so hat auch hier die dem Verschwinden der Discriminante des durch beide bestimmten einfachen Systems entsprechende Gleichung ein Paar gleiche Wurzeln im Falle der Berührung der Flächen. Man beweist diess am leichtesten, indem man den Anfangspunkt der Coordinaten im Berührungspunkt und die gemeinschaftliche Tangentenebene als Coordinatenebene $z = 0$ annimmt. Dann ist für beide Flächen $a_{44} = a_{14} = a_{24} = 0$ oder $d = 0$, $p = 0$, $q = 0$; die Discriminante der Fläche reduciert sich also auf $r^2 (n^2 - ab)$ (Bd. I, Art. 63) oder auf $a_{34}{}^2 (a_{12}{}^2 - a_{11} a_{22})$ und somit für das einfache System die aus ihr hervorgehende biquadratische Gleichung auf

$$(\lambda a_{34} + a_{34}')^2 \left\{(\lambda a_{12} + a_{12}')^2 - (\lambda a_{11} + a_{11}')(\lambda a_{22} + a_{22}')\right\} = 0,$$

welche offenbar zwei gleiche Wurzeln hat. Man findet also die geforderte Bedingung allgemein, indem man die Discriminante der biquadratischen Gleichung $\lambda^4 \Delta + \lambda^3 \Theta + \lambda^2 \Phi + \lambda \Theta' + \Delta' = 0$ bildet. Sie ist nach dem Bézout'schen Eliminationsverfahren („Vorlesungen", p. 82) gebildet allgemein

$$\begin{vmatrix} 8\Delta\Phi - 3\Theta^2, & 6\Delta\Theta' - \Theta\Phi \quad, & 16\Delta\Delta' - \Theta\Theta' \\ 6\Delta\Theta' - \Theta\Phi, & 4\Delta\Delta' + 2\Theta\Theta' - \Phi^2, & 6\Delta'\Theta - \Theta'\Phi \\ 16\Delta\Delta' - \Theta\Theta', & 6\Delta'\Theta - \Theta'\Phi \quad, & 8\Delta'\Phi - 3\Theta'^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt und reduciert

$$\left(4\Delta\Delta' - \Theta\Theta' + \frac{\Phi^2}{3}\right)^3$$
$$= \frac{1}{108}(72\Delta\Delta'\Phi + 9\Theta\Theta'\Phi - 27\Delta\Theta'^2 - 27\Delta'\Theta^2 - 2\Phi^3)^2.$$

Beispiel 1. Die Bedingung der Berührung zweier Kugeln zu finden. Nach § 1 Beispiel 3 hat die biquadratische Gleichung, welche diesem Falle entspricht, stets zwei gleiche Wurzeln; diess findet statt, weil zwei Kugeln stets einen ebenen Querschnitt in unendlicher Entfernung gemein, und also stets eine doppelte Berührung mit einander haben. (Bd. I, Art. 133.) Die Bedingung, unter welcher sie überdiess eine Berührung im endlichen Raume mit einander haben, wird erhalten, indem man die Gleichheit der beiden andern linearen Factoren der biquadratischen Gleichung bedingt, und ist daher $(D^2 - \varrho^2 - \varrho'^2)^2 = 4\varrho^2\varrho'^2$, d. h. $D = \varrho \pm \varrho'$.

Im Allgemeinen hat die biquadratische Gleichung in λ ein Paar gleiche Wurzeln, wenn beide Flächen eine gemeinschaftliche Erzeugende besitzen.

Beispiel 2. Man soll den Ort des Centrums einer Kugel von constantem Halbmesser bestimmen, welche eine Fläche zweiten Grades berührt.

Die durch Gleichsetzung der Discriminante der entsprechenden biquadratischen Gleichung des Beispiels 4 im § 1 erhaltene biquadratische Gleichung ist in x, y, z — denn diese treten an die Stelle von α, β, γ — vom zwölften Grade. Wenn wir in ihr $\varrho = 0$ machen, so reduciert sie sich auf ein Product aus dem Quadrat der Gleichung der Fläche in eine Gleichung vom achten Grade, welcher wir noch weiterhin begegnen werden. (Vgl. § 19.) Das in diesem Beispiel betrachtete Problem ist mit dem von der Bestimmung der Gleichung der Parallelfläche der Fläche zweiten Grades identisch, d.i. der Fläche, welche der Ort von Punkten ist, die man durch Abtragen der constanten Länge ϱ auf allen Normalen der Fläche von ihren Fusspunkten aus erhält. Die Gleichung ist in ϱ^2 vom sechsten Grade und liefert die Längen der sechs Normalen, welche man von einem beliebigen Punkte (x, y, z) aus an die Fläche ziehen kann.

Um den Schnitt der Fläche mit einer der Hauptebenen zu finden, benutzen wir das Princip, wornach die Discriminante eines algebraischen Ausdrucks von der Form $(\lambda - \alpha)\,\varphi(\lambda)$ in Bezug auf λ die Form eines Products von $\{\varphi(\alpha)\}^2$ mit der Discriminante von $\varphi(\lambda)$ haben muss. („Vorlesungen", Art. 67.) Macht man also in der Gleichung (§ 1, Beisp. 4) $z = 0$, so giebt die Discriminante von

$$(\lambda + c)\left\{\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} - 1 - \frac{\varrho^2}{\lambda}\right\}$$

den doppelt zählenden Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} - 1 - \frac{\varrho^2}{c} = 0,$$

welcher also eine Doppellinie der Fläche ist, zusammen mit der Discriminante der zwischen den Klammern stehenden Function; diese repräsentiert aber die Curve achter Ordnung, welche die Parallelcurve des Kegelschnitts ist. Sie ist die Enveloppe einer Reihe von Kegelschnitten, deren jeder sie in den vier Punkten berührt, wo sie die Curve

$$\frac{x^2}{(a+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b+\lambda)^2} - \frac{\varrho^2}{\lambda^2} = 0$$

schneidet; und da der Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} - 1 - \frac{\varrho^2}{c} = 0$$

der dem System für $\lambda = -c$ entsprechende Kegelschnitt ist, so berührt auch er die Curve achter Ordnung in vier Punkten. (Vgl. die nach Clebsch's Abhandlung gegebenen Entwickelungen der Art. 257 f. des Textes.)

Es sei für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ und mit der Abkürzung $c^2 = a^2 - b^2$ („Analyt. Geom. d. Kegelschn.“, Art. 161) die Gleichung der Parallelcurve vollständig angegeben; sie ist

$$\begin{aligned} &c^4\varrho^8 - 2c^2\varrho^6 \left\{c^2(a^2+b^2) + (a^2-2b^2)x^2 + (2a^2-b^2)y^2\right\} \\ &+ \varrho^4 \{c^4(a^4+4a^2b^2+b^4) - 2c^2(a^4-a^2b^2+3b^4)x^2 \\ &+ 2c^2(3a^4-a^2b^2+b^4)y^2 + (a^4-6a^2b^2+6b^4)x^4 \\ &+ (6a^4-6a^2b^2+b^4)y^4 + (6a^4-10a^2b^2+6b^4)x^2y^2\} \\ &+ \varrho^2 \{-2a^2b^2c^4(a^2+b^2) + 2c^2x^2(3a^4-a^2b^2+b^4) \\ &- 2c^2y^2(a^4-a^2b^2+3b^4) - b^2x^4(6a^4-10a^2b^2+6b^4) \\ &- a^2y^4(6a^4-10a^2b^2+6b^4) + x^2y^2(4a^6-6a^4b^2-6a^2b^4+4b^6) \\ &+ 2b^2(a^2-2b^2)x^6 - 2x^4y^2(a^4-a^2b^2+3b^4) - 2x^2y^4(3a^4-a^2b^2+b^4) \\ &+ 2a^2y^6(b^2-2a^2)\} + (b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)^2\left\{(x-c)^2+y^2\right\} \\ &\left\{(x+c)^2+y^2\right\} = 0. \end{aligned}$$

Nach ihr ist der Ort eines Punktes ein Kegelschnitt, für welchen die Summe der Quadrate seiner normalen Entfernungen von der Curve gegeben ist. Durch die Bildung der Bedingung, unter welcher die Gleichung in ϱ^2 gleiche Wurzeln hat, erhält man eine Gleichung, welche das Product der Quadrate der Achsen mit dem Cubus der Evolute darstellt. Für $\varrho = 0$ erhalten wir die Curve selbst doppelt gezählt und überdiess die Brennpunkte der Curve als Punkte, deren normale Entfernung von der Curve verschwindet. (Vergl. die Abhandlung des Herausgebers im 39ten Bande p. 33 von Grunert's „Archiv.“)

Beispiel 3. Die Gleichung der Parallelfläche eines Paraboloids wird in der nämlichen Art gebildet, indem man die Discriminante der biquadratischen Gleichung des 5. Beispiels im § 1 aufstellt. Das Resultat repräsentiert eine Fläche vom zehnten Grade und reduciert sich für $\varrho = 0$ auf die Verbindung des zweifach zu zählenden Paraboloids mit einer weiterhin zu betrachtenden Fläche sechsten Grades (§ 20). Die Gleichung ist in ϱ^2 vom fünften Grade zum Beweis, dass man von irgend einem Punkte aus nur fünf Normalen an die Fläche ziehen kann. Wie im letzten Beispiel sieht man, dass der Schnitt der Fläche mit einer jeden der Hauptebenen eine zweifach zählende Parabel mit der Parallelcurve einer Parabel zusammen ist. Die Letztere hat für $y^2 = 4mx$ als Gleichung der Parabel die Gleichung

$$\varrho^6 - \varrho^4 (3y^2 + x^2 + 8mx - 8m^2)$$
$$+ \varrho^2 \left\{ 3y^4 + y^2 (2x^2 - 2mx + 20m^2) + 8mx^3 + 8m^2x^2 - 32m^3x + 16m^4 \right\}$$
$$-(y^2 - 4mx)^2 \left\{ y^2 + (x-m)^2 \right\} = 0.$$

4. Im Artikel 128 Bd. I ist nachgewiesen, dass für die Berührung zweier Flächen der Berührungspunkt ein Doppelpunkt in der Durchschnittscurve derselben ist und man hat daran auch die Bestimmung der beiden bezüglichen Tangenten derselben geknüpft; aus ihrem Zusammenfallen ist ebenda im Art. 129 die Bedingung der stationären Berührung entwickelt und bewiesen worden, dass dieselbe in dem gleichzeitigen Verschwinden der Invarianten S und T der biquadratischen Gleichung des § 1 besteht, die in den dort vorausgesetzten Verhältnissen wegen $r = r'$ oder $a_{34} = a_{34}'$ die Wurzel — 1 dreifach besitzt.

Dadurch verbindet sich die Theorie der Hauptkrümmungsradien und Centra für Flächen zweiten Grades mit diesen Untersuchungen. Eine durch den Fusspunkt gehende Kugel aus einem Punkte der Flächennormale berührt die Fläche stationär, wenn der Radius einem der Hauptkrümmungshalbmesser gleich ist (Art. 33 des Textes). Machen wir die Tangentenebene zur Ebene xy und die beiden Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung zu Achsen x und y, so erscheint das Glied xy nicht in der Gleichung, da diese Richtungen den Achsen der parallelen Schnitte parallel sind, d. h. diese Gleichung ist von der Form

$$z + ax^2 + by^2 + \text{etc.} = 0,$$

und nach dem Vorhergehenden hat eine Kugel

$$z + \lambda (x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

eine stationäre Berührung mit der Fläche, wenn $(\lambda - a)(\lambda - b) = 0$ ist; also muss λ entweder gleich a oder gleich b sein. Für $y = 0$ aber ist der Kreis $z + a(x^2 + z^2) = 0$ osculierend zu dem Schnitt

$$z + ax^2 + \text{etc.} = 0,$$

und in gleicher Weise der Kreis $z + b(y^2 + z^2) = 0$ osculierend zu dem Schnitte $z + by^2 + \text{etc.} = 0$. Wenn man nun, um die Gleichung der Fläche der Centra zu bilden, für die biquadratische Gleichung im 4. Beispiel des § 1 die Invariantengleichungen $S = 0$, $T = 0$ aufstellt, so verbinden diese die Coordinaten α, β, γ der Krümmungscentra der Hauptschnitte mit dem Krümmungsradius; die eine der Gleichungen ist in ϱ^2 vom zweiten, die andere vom dritten Grade und die Elimination von ϱ^2 zwischen ihnen liefert die Gleichung des Ortes der Krümmungscentra aller Hauptschnitte. Wenn $U = 0$, $U' = 0$ irgend zwei algebraische Gleichungen von demselben Grade sind und k einen veränderlichen Parameter bezeichnet, so kann stets k so bestimmt werden, dass die Gleichung $U + kU' = 0$ zwei gleiche Wurzeln habe; man kann aber nur dann k so bestimmen, dass dieselbe Gleichung drei gleiche Wurzeln habe, wenn eine gewisse invariante Relation zwischen den Coefficienten von U und U' besteht. Diess Problem enthält als einen speciellen Fall das gegenwärtige, denn es ist die Bedingung zu finden, unter welcher die biquadratische Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{k}{\lambda}$$

drei gleiche Wurzeln in λ hat. Im Folgendem sind die Hauptglieder des Resultats gegeben, diejenigen, aus welchen die übrigen durch die Symmetrie hervorgehen und es ist dabei vorausgesetzt

$$b^2-c^2=\alpha,\ \ c^2-a^2=\beta,\ \ a^2-b^2=\gamma$$

und anstatt ax, by, cz sind respective x, y, z gesetzt.

$$\begin{aligned}
&\alpha^6x^{12}+3(\alpha^2+\beta^2)\alpha^4x^{10}y^2+3(\alpha^4+3\alpha^2\beta^2+\beta^4)\alpha^2x^8y^4\\
&+3(2\alpha^4+3\alpha^2\beta^2+3\alpha^2\gamma^2-7\beta^2\gamma^2)\alpha^2x^8y^2z^2+(\alpha^6+\beta^6+9\alpha^4\beta^2+9\alpha^2\beta^4)x^6y^6\\
&+3(\alpha^6+6\alpha^4\beta^2+3\alpha^4\gamma^2+3\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2-21\alpha^2\beta^2\gamma^2)x^6y^4z^2\\
&+9(\alpha^4\beta^2+\beta^4\alpha^2+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4-14\alpha^2\beta^2\gamma^2)x^4y^4z^4\\
&-3(\beta^2+\gamma^2)\alpha^6x^{10}-3(2\beta^4+3\beta^2\gamma^2+3\beta^2\alpha^2-7\gamma^2\alpha^2)\alpha^4x^8y^2\\
&-3(\beta^6+6\beta^4\alpha^2+3\beta^4\gamma^2+3\beta^2\alpha^4+\alpha^4\gamma^2-21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^2x^6y^4\\
&+3\left\{14(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4)+20\alpha^2\beta^2\gamma^2\right\}\alpha^2x^6y^2z^2\\
&+3\left\{4\gamma^8-7\gamma^6(\alpha^2+\beta^2)-198\gamma^4\alpha^2\beta^2+6\alpha^2\beta^2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)+42\alpha^4\beta^4\right\}x^4y^4z^2\\
&+3(\beta^4+3\beta^2\gamma^2+\gamma^4)\alpha^6x^8\\
&+3(\beta^6+6\beta^4\gamma^2+3\beta^4\alpha^2+3\beta^2\gamma^4+\alpha^2\gamma^4-21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^4x^6y^2\\
&+9(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4-14\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^2\beta^2x^4y^4\\
&-3\left\{4\alpha^8-7\alpha^6(\beta^2+\gamma^2)-198\alpha^4\beta^2\gamma^2+68\alpha^2\beta^2\gamma^2(\beta^2+\gamma^2)+42\beta^4\gamma^4\right\}\alpha^2x^4y^2z^2\\
&-(\beta^6+\gamma^6+9\beta^4\gamma^2+9\beta^2\gamma^4)\alpha^6x^6\\
&-3(\gamma^6+6\gamma^4\beta^2+3\gamma^4\alpha^2+3\gamma^2\beta^4+\alpha^2\beta^4-21\alpha^2\beta^2\gamma^2)\alpha^4\beta^2x^4y^2\\
&+3\left\{14(\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4+\beta^4\gamma^2+\beta^2\gamma^4+\gamma^4\alpha^2+\gamma^2\alpha^4)+20\alpha^2\beta^2\gamma^2\right\}\alpha^2\beta^2\gamma^2x^2y^2z^2\\
&+3(\beta^4+3\beta^2\gamma^2+\gamma^4)\alpha^6\beta^2\gamma^2x^4+3(2\gamma^4+3\gamma^2\alpha^2+3\gamma^2\beta^2-7\alpha^2\beta^2)\alpha^4\beta^4\gamma^2x^2y^2\\
&-3(\beta^2+\gamma^2)\alpha^6\beta^4\gamma^4x^2+\alpha^6\beta^6\gamma^6=0.
\end{aligned}$$

Für $z=0$ wird diese Gleichung auf

$$(\alpha^2x^2+\beta^2y^2-\alpha^2\beta^2)^3\left\{(x^2+y^2-\gamma^2)^3+27x^2y^2\gamma^2\right\}.$$

(Vergl. Bd. I, Art. 209.) Der Schnitt der Fläche mit der unendlich entfernten Ebene ist den Schnitten mit den Hauptebenen ähnlich, da die höchsten Glieder der Gleichung den Ausdruck bilden

$$(x^2+y^2+z^2)^3\left\{(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)^3-27\alpha^2\beta^2\gamma^2x^2y^2z^2\right\}.$$

Die Gleichung der Fläche der Centra für ein Paraboloid

$$ax^2+by^2+2rz=0$$

erhalten wir für $a-b=m$, $a+b=p$, $ab=q$, $bx^2+ay^2=V$, $x^2+y^2=\varrho^2$, $qz^2+prz+r^2=W$ in der Form

$$8\left\{q^2zV+qr(b^2x^2+a^2y^2)+2m^2rW\right\}^3+27T=0$$

mit

$$\begin{aligned}
T=\ &q^5rV^4-16m^2q^4rWx^2y^2+6m^2q^4r^2zV^3-56m^2q^5r^2zVx^2y^2\\
&+8m^4q^3r^3x^2y^2W+12m^4q^3r^3z^2V^2+6m^2q^4r^3\varrho^2V^2-152m^2q^5r^3x^2y^2\varrho^2\\
&+48m^2pq^4r^3x^2y^2V+8m^6q^2r^4z^3V+24m^4q^3r^4z\varrho^2V+24m^6q^2r^5\varrho^2z^2\\
&+12m^4q^3r^5\varrho^4+43m^6q^2r^5x^2y^2+24m^6zr^6q(ax^2+by^2)\\
&+8m^6(a^2x^2+b^2y^2)r^7.
\end{aligned}$$

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene x oder y ist eine dreifach zählende Parabel und die Evolute derselben.

5. Im Artikel 152 des ersten Bandes ist die Bedingung aufgestellt, unter welcher zwei Flächen zweiten Grades durch die Relation verbunden sind, dass zwei Paare von Gegenkanten des Tetraeders in der einen enthalten sind, während die andere von den vier Seitenflächen desselben berührt wird. Noch einfacher ergiebt sich die Bedingung, unter welcher die eine Fläche dem Tetraeder umgeschrieben ist, dessen zwei Paare Gegenkanten der andern angehören. Für die Voraussetzung des Coordinatentetraeders in solcher Relation zu beiden Flächen ist die Gleichung der einen

$$a_{23}'x_2x_3 + a_{14}'x_1x_4 = 0$$

und die der andern enthält die Quadrate der Veränderlichen nicht. Man hat also

$$\Delta = a_{23}'^2 a_{14}'^2, \quad \Theta = 2a_{23}'a_{14}'(a_{23}'a_{14} + a_{14}'a_{23}),$$
$$\Theta' = 2(a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34})(a_{23}'a_{14} + a_{14}'a_{23}),$$
$$\Phi = (a_{23}'a_{14} + a_{14}'a_{23})^2 + 2a_{23}'a_{11}'(a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34})$$

und die fragliche Bedingung ist ganz analog der a. a. O. erhaltenen

$$4\Delta\Theta\Phi = \Theta^3 + 8\Delta^2\Theta'.$$

6. Wenn $U' = 0$ eine Kegelfläche repräsentiert, so ist $\Delta' = 0$ und wir wollen die Bedeutung von Θ, Φ, Θ' in demselben Falle untersuchen. Wir denken vereinfachend den Scheitel des Kegels in der Ecke des Fundamentaltetraeders $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ oder im Anfangspunkt der Cartesischen Coordinaten, d. i. setzen

$$a_{44}' = 0, \quad a_{14}' = 0, \quad a_{24}' = 0, \quad a_{34}' = 0$$

und erhalten

$$\Theta' = a_{44} \begin{vmatrix} a_{11}', & a_{12}', & a_{13}' \\ a_{21}', & a_{22}', & a_{23}' \\ a_{31}', & a_{32}', & a_{33}' \end{vmatrix}$$

$$= a_{44}\left\{a_{11}'a_{22}'a_{33}' + 2a_{12}'a_{23}'a_{13}' - a_{11}'a_{23}'^2 - a_{22}a_{13}'^2 - a_{33}a_{12}'^2\right\},$$

d. h. Θ' verschwindet, wenn entweder der Kegel in zwei Ebenen zerfällt oder wenn der Scheitel des Kegels in der Fläche $U = 0$ liegt.

Schreiben wir die Gleichung des aus dem Coordinatenaufang der Fläche $U = 0$ umgeschriebenen Kegels

$$0 = a_{44}(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{12}x_1x_2)$$
$$- (a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3)^2$$

in der Form

$$\mathfrak{a}_{11}x_1^2 + \mathfrak{a}_{22}x_2^2 + \mathfrak{a}_{33}x_3^2 + 2\mathfrak{a}_{23}x_2x_3 + 2\mathfrak{a}_{13}x_1x_3 + 2\mathfrak{a}_{12}x_1x_2 = 0,$$

so kann Φ in der Form

$$\mathfrak{a}_{11}(a_{22}'a_{33}' - a_{23}'^2) + \mathfrak{a}_{22}(a_{33}'a_{11}' - a_{13}'^2) + \mathfrak{a}_{33}(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2)$$
$$+ 2\mathfrak{a}_{23}(a_{13}'a_{12}' - a_{11}'a_{23}') + 2\mathfrak{a}_{13}(a_{12}'a_{23}' - a_{22}'a_{13}')$$
$$+ 2\mathfrak{a}_{12}(a_{13}'a_{23}' - a_{33}'a_{12}').$$

geschrieben werden. Man erkennt leicht die geometrische Bedeutung dieser Bedingung; denn wenn die Kegelfläche $U' = 0$ auf ein in Bezug auf sie sich selbst conjugiertes System bezogen wäre, so würden die Coefficienten a_{23}', a_{13}', a_{12}' verschwinden und Φ würde auf

$$\mathfrak{a}_{11} a_{22}' a_{33}' + \mathfrak{a}_{22} a_{33}' a_{11}' + \mathfrak{a}_{33} a_{11}' a_{22}'$$

reduciert, würde also für die gleichzeitige Erfüllung von

$$\mathfrak{a}_{11} = 0, \quad \mathfrak{a}_{22} = 0, \quad \mathfrak{a}_{33} = 0$$

oder

$$a_{11}a_{44} = a_{14}^2, \quad a_{22}a_{44} = a_{24}^2, \quad a_{33}a_{44} = a_{34}^2$$

identisch verschwinden, d. h. nach Bd. I, Art. 76, wenn die durch

$$x_2 = x_3 = 0, \quad x_1 = x_3 = 0, \quad x_1 = x_2 = 0$$

dargestellten Kanten jenes Systems zugleich die Fläche $U = 0$ berühren.

In derselben Weise findet man

$$a_{44}\Theta = a_{11}' (\mathfrak{a}_{22}\mathfrak{a}_{33} - \mathfrak{a}_{23}^2) + a_{22}' (\mathfrak{a}_{33}\mathfrak{a}_{11} - \mathfrak{a}_{13}^2) + \text{etc.}$$

und erkennt, dass Θ verschwindet, sobald drei Tangentenebenen zu $U = 0$ aus dem Scheitel des Kegels möglich sind, welche ein in Bezug auf den Kegel $U' = 0$ sich selbst conjugiertes System bilden.

Die Discriminante der cubischen Gleichung in λ verschwindet, wenn der Kegel $U' = 0$ die Fläche $U = 0$ berührt.

Repräsentiert $U' = 0$ zwei Ebenen, so verschwindet sowohl Δ' als auch Θ' und sind die Ebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ diese Ebenen, so reduciert sich U' auf das Glied $a_{12}'x_1x_2$ und somit Φ auf

$$a_{12}'^2 (a_{34}^2 - a_{33}a_{44}),$$

d. h. Φ verschwindet, wenn die Durchschnittslinie beider Ebenen die Fläche $U = 0$ berührt. Wir haben ferner

$$\Theta = a_{12}'A_{12}$$

und $\Theta = 0$ drückt daher aus, dass die beiden Ebenen in Bezug auf $U = 0$ einander conjugiert sind, d. h. dass der Pol von jeder derselben in Bezug auf $U = 0$ in der andern liegt; denn die Coordinaten des Pols der Ebene $x_1 = 0$ sind zu A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14} proportional und für $A_{12} = 0$ liegt daher der Pol in der Ebene $x_2 = 0$.

Wenn jede der beiden Ebenen die Fläche $U = 0$ berührt, so wird die Bedingung

$$\Theta^2 = 4\Delta\Phi$$

erfüllt.

7. Die unendlich entfernte Ebene schneidet jede Kugel in einen imaginären Kreis, welcher durch den aus dem Coordinatenanfang über ihm beschriebenen Kegel in der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

dargestellt wird. Da diese Gleichung auch eine unendlich kleine Kugel repräsentiert, so ist jeder Durchmesser derselben und desselben zu der ihnen conjugierten Ebene normal. Bilden wir also die Invarianten von

$$x^2 + y^2 + z^2$$

und der allgemeinen Gleichung der Fläche zweiten Grades, so erhalten wir für $\Theta = 0$ den Ausdruck

$$A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

als die Bedingung, unter welcher der Anfangspunkt der Coordinaten ein Punkt von solcher Lage ist, dass von ihm drei zu einander rechtwinklige Tangentenebenen an die Fläche gelegt werden können, und $\Phi = 0$ oder

$$a_{11}a_{44} - a_{14}{}^2 + a_{22}a_{44} - a_{24}{}^2 + a_{33}a_{44} - a_{34}{}^2 = 0$$

als die Bedingung, unter welcher aus dem Coordinatenanfang drei zu einander rechtwinklige Tangenten an die Fläche gezogen werden können.

Wenn insbesondere der Coordinatenanfang das Centrum der Fläche ist, so dass a_{14}, a_{24}, a_{34} den Werth Null haben, während nicht auch zugleich $a_{44} = 0$ ist, so lange die Fläche keine Kegelfläche ist, so wird die cubische Gleichung in λ dieselbe, welche in Bd. I, Art. 78 aufgestellt worden ist. Die Bedingung $\Phi = 0$ reduciert sich auf

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0,$$

als die Bedingung, unter der es möglich ist, Systeme von je drei zu einander rechtwinkligen asymptotischen Linien zur Fläche zu ziehen; und die Bedingung $\Theta = 0$ wird

$$a_{44}\,(a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} - a_{12}{}^2 - a_{23}{}^2 - a_{13}{}^2) = 0,$$

die Bedingung, unter welcher Systeme von je drei zu einander rechtwinkligen asymptotischen Ebenen zur Fläche möglich sind.

Die beiden so bezeichneten Arten von Hyperboloiden entsprechen den gleichseitigen Hyperbeln in der Theorie der ebenen Curven. (Vgl. § 2, Beisp. 3.)

Beispiel. Jede durch drei feste Punkte gehende gleichseitige Hyperbel enthält überdiess bekanntlich einen vierten festen Punkt. (Vgl. unten § 26.) Welches Gesetz entspricht dem in der Theorie der Flächen zweiten Grades?

Die Untersuchung des Theorems über die gleichseitige Hyperbel lehrt, dass seine Wahrheit von dem Factum abhängt, wonach die Bedingung, unter welcher die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine gleichseitige Hyperbel repräsentiert, in den Coefficienten linear ist. In derselben Weise findet man für die gleichseitigen Hyperboloide der Gattung $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$, welchen Systeme von je drei zu einander rechtwinkligen asymptotischen Linien entsprechen, den Satz, dass jede Fläche dieser Art, welche durch sieben Punkte geht, eine feste Curve und jede, welche durch sechs feste Punkte geht, zwei feste Punkte überdiess enthält.

Denn die Bedingungen, unter denen die Fläche durch sieben feste Punkte geht, in Verbindung mit der gegebenen Relation erlauben die Bestimmung aller Coefficienten der allgemeinen Gleichung bis auf einen; die Gleichung der Fläche enthält daher eine unbestimmte Grösse k und ist von der Form $U + kU' = 0$, welche die feste Curve ($U = 0$, $U' = 0$) enthält. Wenn aber sechs Punkte gegeben sind, so beweist die Unbestimmtheit von zwei Coefficienten, dass man die Gleichung auf die Form

$U + kU' + lU''$ bringen kann, welche Flächen darstellt, die durch acht feste Punkte gehen.

8. Da jede Tangentenebene des Kegels $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ durch eine Gleichung $xx' + yy' + zz' = 0$ ausdrückbar ist für

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

und da alle zu einander parallelen Ebenen durch dieselbe unendlich entfernte Gerade gehen, so ist offenbar $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ die Bedingung, unter welcher eine Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

durch eine der Tangenten des imaginären Kreises im Unendlichen geht, den alle Kugelflächen enthalten.

In Folge dessen kann

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

als die Tangentialgleichung dieses Kreises angesehen werden.

Bildet man nun die Invarianten für diese Gleichung und die allgemeine Tangentialgleichung der Fläche (Bd. I, Art. 75)

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \alpha \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \beta \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \gamma \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \delta \\ \alpha\ , & \beta\ , & \gamma\ , & \delta\ , & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

so erhält man

$$\Theta = \Delta^2 (a_{11} + a_{22} + a_{33}),$$

$$\Phi = \Delta (a_{22}a_{33} - a_{23}{}^2 + a_{33}a_{11} - a_{13}{}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2)$$

und die geometrische Bedeutung ihres Verschwindens ist im vorhergehenden Artikel bereits angegeben.

Da die Bedingung (Bd. I, Art. 24) $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$, unter welcher zwei Ebenen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0$$

zu einander rechtwinklig sind, offenbar identisch ist mit der Bedingung, unter welcher diese Ebenen in Bezug auf

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$$

einander conjugiert sind, so erkennt man, dass zwei zu einander rechtwinklige Ebenen als in Bezug auf den imaginären Kreis im Unendlichen einander conjugiert anzusehen sind.

9. Allgemein drückt die Tangentialgleichung einer Curve im Raume die Bedingung aus, unter welcher eine Ebene durch eine der Tangenten der Curve hindurchgeht. Wenn z. B. Bd. I, Art. 76 die Bedingung gegeben ist, unter welcher die Durchschnittslinie der Ebenen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

eine Fläche zweiten Grades berührt, so kann man dieselbe auch als die

Tangentialgleichung des Kegelschnitts betrachten, in welchem diese Fläche durch die Ebene

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

geschnitten wird.

Nach Bd. I, Art. 119 ist die Reciproke einer ebenen Curve eine Kegelfläche und sowie eine gewöhnliche Gleichung zweiten Grades einen Kegel darstellt, wenn ihre Discriminante verschwindet, so repräsentiert eine Tangentialgleichung zweiten Grades einen ebenen Kegelschnitt, wenn ihre Discriminante verschwindet. Nach der bekannten Bezeichnung der Minoren der Discriminante Δ

$$A_{11} = \frac{d\Delta}{da_{11}}, \text{ etc.}$$

ist die allgemeine Tangentialgleichung zweiten Grades durch

$$A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + \ldots + 2A_{12}\xi_1\xi_2 = 0$$

darstellbar. Aus einer solchen Tangentialgleichung können wir die gewöhnliche Gleichung der Curve ableiten, indem wir zuerst die Reciproke der Tangentialgleichung nach den gewöhnlichen Regeln bilden, d. i.

$$(A_{22}A_{33}A_{44} + \ldots)\, x_1^2 + \ldots = 0;$$

sie ist ein vollständiges Quadrat, nämlich das Quadrat der Gleichung der Ebene der Curve. Wir bestimmen sodann den Kegelschnitt selbst, indem wir diese Gleichung mit der Gleichung

$$\begin{aligned} x_1^2\,(A_{22}A_{33} - A_{23}^2) &+ x_2^2\,(A_{33}A_{11} - A_{13}^2) + x_3^2\,(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) \\ &+ 2x_2x_3\,(A_{13}A_{12} - A_{11}A_{23}) + 2x_3x_1\,(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13}) \\ &+ 2x_1x_2\,(A_{23}A_{13} - A_{33}A_{12}) = 0 \end{aligned}$$

combinieren, die den Kegel repräsentiert, der aus dem Punkte

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

über ihm beschrieben wird.

10. Man soll die Gleichung des Kegels bestimmen, der eine Fläche zweiten Grades $U = 0$ in der Curve berührt, in der die Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

sie schneidet.

Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, welche $U = 0$ in dieser Schnittcurve berührt, ist von der Form

$$kU + (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + x_4 \xi_4)^2 = 0$$

und man hat hier k so zu bestimmen, dass diese Gleichung einen Kegel darstellt; man erhält aber in diesem Falle

$$\Phi = 0, \quad \Theta' = 0, \quad \Delta' = 0,$$

und wenn man

$$\sigma = A_{11}\xi_1^2 + A_{22}\xi_2^2 + A_{33}\xi_3^2 + \ldots$$

setzt, d. h. durch σ die Grösse ausdrückt, deren Verschwinden die Berührung der Ebene mit der Fläche bedingt, so ist die vierte Wurzel der

Bestimmungsgleichung für k zu den drei Wurzeln gleich Null, welche sie in diesem Falle hat, aus

$$k\varDelta + \sigma = 0$$

zu entnehmen. Die Gleichung des fraglichen Kegels ist somit

$$\sigma U = \varDelta\,(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4)^2.$$

Berührt die betrachtete Ebene die Fläche, so ist (Bd. I, Art. 75) $\sigma = 0$ und die Gleichung des Kegels reduciert sich auf die der doppelt zählenden Berührungsebene.

Unter dem hier behandelten Problem ist das von der Bestimmung der Gleichung des Asymptotenkegels der durch die allgemeine Gleichung gegebenen Fläche zweiten Grades mit eingeschlossen. Man hat nur die Ebene als die Ebene der unendlich entfernten Punkte zu specialisieren, d. h. die Coefficienten ihrer Gleichung den Flächenzahlen der Seiten des Fundamentaltetraeders proportional zu setzen. (Bd. I, Art. 34.)

11. Die Bedingung $\sigma = 0$, unter welcher die Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

die Fläche $U = 0$ berührt, ist eine Contravariante (vgl. „Anal. Geom. d. Kegelschn.“, Art. 377, 378. „Vorlesungen“, Art. 92, 93) von der Ordnung drei in den Coefficienten von U. Wenn man für jeden Coefficienten a_{ij} die Summe $(a_{ij} + \lambda a_{ij}')$ substituiert, welche der Bildung der Systems gleichung $U + \lambda U' = 0$ entspricht, so erhalten wir die Bedingung, unter welcher dieselbe Ebene eine Fläche dieses Systems berührt; sie ist von der Form

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0,$$

wie man hinsichtlich des ersten Gliedes durch die Zerlegung der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{11}', & a_{12} + \lambda a_{12}', & a_{13} + \lambda a_{13}', & a_{14} + \lambda a_{14}', & \xi_1 \\ a_{21} + \lambda a_{21}', & a_{22} + \lambda a_{22}', & a_{23} + \lambda a_{23}', & a_{24} + \lambda a_{24}', & \xi_2 \\ a_{31} + \lambda a_{31}', & a_{32} + \lambda a_{32}', & a_{33} + \lambda a_{33}', & a_{34} + \lambda a_{34}', & \xi_3 \\ a_{41} + \lambda a_{41}', & a_{42} + \lambda a_{42}', & a_{43} + \lambda a_{43}', & a_{44} + \lambda a_{44}', & \xi_4 \\ \xi_1 \quad , & \xi_2 \quad , & \xi_3 \quad , & \xi_4 \quad , & 0 \end{vmatrix}$$

nach ihren Summandendeterminanten leicht bestätigt, während man zugleich dadurch die entwickelten Formen von τ und τ' erhält.

Sie ist in λ vom dritten Grade, weil und zum Beweise dass unter den Flächen eines einfachen Systems mit gemeinschaftlicher Durchschnittscurve drei sind, die eine gegebene Ebene berühren. (Bd. I, Art. 130, 131.)

Die Functionen σ, σ', τ, τ' enthalten die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 im zweiten Grade und die Coefficienten von U und U' im dritten Grade und vermittelst derselben kann die Bedingung ausgedrückt werden, unter welcher die Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

irgend eine permanente Beziehung zu den beiden gegebenen Flächen $U = 0$, $U' = 0$ hat; z. B. dass sie dieselben in Curven $u = 0$, $u' = 0$ schneide, welche durch solche permanente Relationen verbunden sind, die durch die Coefficienten der Discriminante von $u + \lambda u' = 0$, d. h. durch die Invarianten des einfachen Systems von Kegelschnitten ausdrückbar sind. Wenn wir von

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma'$$

die Discriminante nach λ bilden, so erhalten wir in dieser Weise durch das Verschwinden derselben die Bedingung, unter welcher die Ebene

$$_1\Sigma_4\, \xi_i x_i = 0$$

die beiden Flächen in Curven schneidet, welche sich berühren, oder mit andern Worten die Bedingung, unter welcher diese Ebene eine Tangente der Schnittcurve von $U = 0$ und $U' = 0$ enthält. Sie ist („Vorlesungen", Art. 85, 136)

$$4\,(3\sigma'\tau - \tau'^2)\,(3\sigma\tau' - \tau^2) = (9\,\sigma\sigma' - \tau\tau')^2,$$

also in den ξ vom achten und in den Coefficienten von jeder der beiden Gleichungen der Flächen vom sechsten Grade. Ebenso drückt $\tau = 0$ die Bedingung aus, unter welcher die Ebene die Flächen in zwei Curven schneidet, in deren eine ein Dreieck eingeschrieben werden kann, was in Bezug auf die andere sich selbst conjugiert ist; etc.

Die Gleichung $\sigma = 0$ kann als die Tangentialgleichung der Fläche $U = 0$, d. h. als ihre Gleichung in tetraedrischen Plancoordinaten (Bd. I, Art. 38) ξ_1, ξ_1, etc. angesehen werden; ebenso $\sigma' = 0$ als die Tangentialgleichung von $U' = 0$. In derselben Weise sind dann

$$\tau = 0, \quad \tau' = 0$$

die Tangentialgleichungen von Flächen zweiten Grades, die zu den Flächen $U = 0$, $U' = 0$ gewisse unveränderliche Relationen haben. So ist $\tau = 0$ die Enveloppe einer Ebene, welche die beiden Flächen stets in Curven schneidet, die zu einander in der eben angeführten Beziehung stehen, also die Tangentialgleichung einer Fläche zweiten Grades, die durch diese Relation characterisiert ist. Die Discriminante von

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$$

ist ebenso die Tangentialgleichung der Durchschnittscurve der Flächen $U = 0$, $U' = 0$.

Man kann endlich $\sigma = 0$ als die Gleichung der Reciprocalfläche von $U = 0$ in Bezug auf die Fläche

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

ansehen (Bd. I, Art. 75. 59), und hat dann in derselben Art

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$$

als die Gleichung der Reciprocalfläche von $U + \lambda U' = 0$ zu betrachten. Da bei Veränderung von λ die Gleichung $U + \lambda U' = 0$ ein System von Flächen zweiten Grades bezeichnet, welche durch eine gemeinschaftliche Schnittcurve gehen, so bezeichnet die Reciprocalgleichung ein System, welches einer gemeinschaftlichen developpabeln Fläche eingeschrieben ist, die die Reciprocalform der Curve $U = 0$, $U' = 0$ ist. Die Discriminante von $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$ kann daher ebensowohl als die Tangentialgleichung der Curve $U=0$, $U'=0$ wie als die Gleichung der zu ihr reciproken developpabeln Fläche angesehen werden; sie ist wie erwähnt vom achten Grade in den neuen Veränderlichen und vom sechsten in den Coefficienten jeder der Gleichungen der Flächen.

12. Wir können zu dem im letzten Artikel betrachteten Verfahren das reciprok entsprechende befolgen. Sind

$$\sigma = 0, \quad \sigma' = 0$$

die Tangentialgleichungen der beiden Flächen zweiten Grades, so können wir in gewöhnlichen Coordinaten die Gleichung bilden, welche der Systemsgleichung

$$\sigma + \lambda\sigma' = 0$$

entspricht. Man eliminiert zwischen

$$(A_{11} + \lambda A_{11}')\,\xi_1^2 + \dots + 2\,(A_{34} + \lambda A_{34}')\,\xi_3\xi_4 + \text{etc.} = 0$$

oder kürzer

$$\mathbf{A}_{11}\xi_1^2 + \dots + 2\mathbf{A}_{34}\xi_3\xi_4 + \dots = 0$$

und den Gleichungen eines beliebigen Punktes

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

die Grösse ξ_4, so dass man die Gleichung des Tangentenkegels der Fläche aus ihm erhält, und stellt die Bedingung auf, unter welcher dieser in ein Paar (zusammenfallender) Ebenen degeneriert; sie ist die gesuchte Gleichung in Punkt-Coordinaten, und man kann sie in der Form

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1, & \mathbf{A}_{11}, & \mathbf{A}_{12}, & \mathbf{A}_{13}, & \mathbf{A}_{14} \\ x_2, & \mathbf{A}_{21}, & \mathbf{A}_{22}, & \mathbf{A}_{23}, & \mathbf{A}_{24} \\ x_3, & \mathbf{A}_{31}, & \mathbf{A}_{32}, & \mathbf{A}_{33}, & \mathbf{A}_{34} \\ x_4, & \mathbf{A}_{41}, & \mathbf{A}_{42}, & \mathbf{A}_{43}, & \mathbf{A}_{44} \end{vmatrix} = 0$$

darstellen. Setzt man endlich in ihr an Stelle der $\mathbf{A}_{ij}$ die Binome

$$(A_{11} + \lambda A_{11}'),$$

so entwickelt man diese Determinante durch Zerlegung in ihre Summanden nach Potenzen von k in der Form

$$\Delta^2 U + \lambda\Delta T + \lambda^2\Delta' T' + \lambda^3\Delta'^2 U' = 0$$

und hat in dieser die **Gleichung eines Systems von Flächen zweiten Grades in Punkt-Coordinaten, welche sämmtlich eine gemeinschaftliche Developpable berühren**, deren Gleichung man durch das Verschwinden der Discriminante dieser Letzteren ausdrückt. Ihre Gleichung ist also mit Unterdrückung des Factors $\Delta^2\Delta'^2$

$$4\,(3\,\Delta U'T - T'^2)\,(3\,\Delta' UT' - T^2) = (9\,\Delta\Delta' UU' - TT')^2$$

oder

$$27\Delta^2\Delta'^2U^2U'^2 + 4\Delta' UT'^3 + 4\Delta U'T^3 = T^2T'^2 + 18\Delta\Delta' UU'TT'.$$

Wir sprechen von ihr weiter, nachdem wir die Bildung der Gleichung des Systems

$$\Delta^2 U + \lambda\Delta T + \lambda^2\Delta' T' + \lambda^3\Delta'^2 U' = 0$$

und die Bedeutung der in ihr auftretenden Grössen durch Betrachtung reducierter Gleichungsformen näher beleuchtet haben werden. Wenn beide Flächen $U=0$, $U'=0$ auf ein sich selbst conjugiertes Tetraeder bezogen sind, so dass die Coefficienten a_{ij} und a'_{ij} mit ungleichen Indices sämmtlich Null sind, so verschwinden die Minoren der Discriminanten mit Ausnahme der Hauptminoren („Vorlesungen", Art. 22) und diese sind

$$A_{11}=a_{22}a_{33}a_{44},\ A_{22}=a_{33}a_{44}a_{11},\ A_{33}=a_{44}a_{11}a_{22},$$
$$A_{44}=a_{11}a_{22}a_{33},\ A_{11}'=a_{22}'a_{33}'a_{44}',\ \text{etc.};$$

die Tangentialgleichungen der beiden Flächen sind

$$\sigma=A_{11}\xi_1^2+A_{22}\xi_2^2+A_{33}\xi_3^2+A_{44}\xi_4^2=0,$$
$$\sigma'=A_{11}'\xi_1^2+A_{22}'\xi_2^2+A_{33}'\xi_3^2+A_{44}'\xi_4^2=0$$

und die Reciprocalgleichung von

$$\sigma+\lambda\sigma'=0$$

ist, da auch alle $\mathbf{A}_{ij}$ für ungleiche Indices verschwinden, durch

$$\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ x_1, & A_{11}+\lambda A_{11}', & 0, & 0, & 0 \\ x_2, & 0, & A_{22}+\lambda A_{22}', & 0, & 0 \\ x_3, & 0, & 0, & A_{33}+\lambda A_{33}', & 0 \\ x_4, & 0, & 0, & 0, & A_{44}+\lambda A_{44}' \end{vmatrix}=0,$$

d. h. durch die Entwickelung nach Potenzen von λ in der Form

$$\begin{aligned}&\{A_{22}A_{33}A_{44}x_1^2+A_{33}A_{44}A_{11}x_2^2+A_{44}A_{11}A_{22}x_3^2+A_{11}A_{22}A_{33}x_4^2\}\\ +\lambda&\{(A_{22}A_{33}A_{44}'+A_{33}A_{44}A_{22}'+A_{44}A_{22}A_{33}')x_1^2+(A_{33}A_{44}A_{11}'+\ldots)x_2^2+\text{etc.}\}\\ +\lambda^2&\{(A_{22}'A_{33}'A_{44}+A_{33}'A_{44}'A_{22}+A_{44}'A_{22}'A_{33})x_1^2+(A_{33}'A_{44}'A_{11}+\ldots)x_2^2+\text{etc.}\}\}\\ +\lambda^3&\{A_{22}'A_{33}'A_{44}'x_1^2+\text{etc.}\}=0\end{aligned}$$

dargestellt. Die Substitution der oben für die A_{ij}, A_{ij}' entwickelten Werthe liefert aber für das absolute Glied der Gleichung

$$A_{22}A_{33}A_{44}x_1^2+\text{etc.}=\Delta^2 U$$

und für den Coefficienten von λ^3 ebenso

$$A_{22}'A_{33}'A_{44}'x_1^2+\text{etc.}=\Delta'^2 U';\text{*})$$

---

*) Man hat allgemein für die Discriminante

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

der quadratischen Form U von n Variabeln $x_1, \ldots x_n$ und ihre Minoren A_{11}, A_{12}, etc. die Gleichung

$$U=-\frac{1}{\Delta^{n-2}}\begin{vmatrix} 0, & x_1, & x_2, & \ldots & x_n \\ x_1, & A_{11}, & A_{12}, & \ldots & A_{1n} \\ x_2, & A_{21}, & A_{22}, & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ x_n, & A_{n1}, & A_{n2}, & \ldots & A_{nn} \end{vmatrix};$$

dagegen ist der Coefficient von λ

$$\Delta\left\{a_{11}a_{11}'\,(a_{22}'a_{33}'a_{44}+a_{33}'a_{44}'a_{22}+a_{44}'a_{22}'a_{33})\,x_1^2+\text{etc.}\right\}$$

und der von λ^2

$$\Delta'\left\{a_{11}a_{11}'\,(a_{22}a_{33}a_{44}'+a_{33}a_{44}a_{22}'+a_{44}a_{22}a_{33}')\,x_1^2+\text{etc.}\right\}.$$

So wie alle Contravarianten des Systems $\sigma+\lambda\sigma'=0$ in Function der zwei festen Contravarianten τ, τ' und von σ, σ' ausgedrückt werden können, lassen sich alle Covarianten des Systems $U+\lambda U'=0$ in Function der beiden Covarianten T, T' verbunden mit U, U' und den Invarianten darstellen. Die reciproken Betrachtungen zu den entsprechenden des letzten Artikels zeigen, dass die Fläche zweiten Grades $T=0$ der Ort eines Punktes ist, für welchen die von ihm den Flächen

$$U=0,\quad U'=0$$

umgeschriebenen Kegel in solcher Beziehung zu einander stehen, dass drei Kanten des einen bestimmbar sind, welche ein in Bezug auf den andern sich selbst conjugiertes System bilden, und drei Tangentenebenen des zweiten, welche ein in Bezug auf den ersten sich selbst conjugiertes System bilden.

13. In der analytischen Geometrie der Kegelschnitte entsprechen diesen Entwickelungen diejenigen, welche sich auf die Gleichung der vier gemeinschaftlichen Tangenten in Punktcoordinaten und auf die der vier gemeinschaftlichen Schnittpunkte zweier Kegelschnitte in Tangentialcoordinaten beziehen. Man erhält für $\Sigma=0$, $\Sigma'=0$ als die Tangentialgleichungen zweier Kegelschnitte $S=0$, $S'=0$ als die der Gleichung $\Sigma+\lambda\Sigma'=0$ entsprechende Punktgleichung

$$\Delta S+\lambda F+\lambda^2\Delta'S'=0,$$

wo

$$\begin{aligned}F=&(A_{22}A_{33}'+A_{22}'A_{33}-2A_{23}A_{23}')\,x_1^2\\&+(A_{33}A_{11}'+A_{33}'A_{11}-2A_{13}A_{13}')\,x_2^2\\&+(A_{11}A_{22}'+A_{11}'A_{22}-2A_{12}A_{12}')\,x_3^2\\&+2\,(A_{13}A_{12}'+A_{13}'A_{12}-A_{11}A_{23}'-A_{11}'A_{23})\,x_2x_3\\&+2\,(A_{12}A_{23}'+A_{12}'A_{23}-A_{22}A_{13}'-A_{22}'A_{13})\,x_3x_1\\&+2\,(A_{23}A_{13}'+A_{23}'A_{13}-A_{33}A_{12}'-A_{33}'A_{12})\,x_1x_2\end{aligned}$$

ist. Die Enveloppe des Systems $\Delta S+\lambda F+\lambda^2\Delta'S'=0$ (vgl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“, Art. 400, Aufg. 3), d. i. die Vereinigung der vier gemeinschaftlichen Tangenten von $S=0$, $S'=0$ ist durch $F^2=4\Delta\Delta'SS'$ dargestellt, und man sieht, dass der Kegelschnitt $F=0$ durch die acht Berührungspunkte hindurchgeht. (Ibid. Aufg. 2.) Endlich zeigt man

---

denn die Entwickelung liefert die Producte zweiten Grades der Variabeln in die ersten Minoren der Reciprocaldeterminante der Discriminante; diese Letztern sind aber den Producten der entsprechenden Elemente der Discriminante in die $(n-2)^{te}$ Potenz dieser Discriminante gleich.

leicht, dass dieser Kegelschnitt $F = 0$ der Ort der Punkte ist, für welche das Büschel der entsprechenden zwei Tangenten an $S = 0$, $S' = 0$ harmonisch ist. Ebenso ist für $S + \lambda S' = 0$ die entsprechende Gleichung in Tangentialcoordinaten

$$\Sigma + \lambda \Phi + \lambda^2 \Sigma' = 0$$

mit

$$\begin{aligned}\Phi = & (a_{22}a_{33}' + a_{22}'a_{33} - 2a_{23}a_{23}')\xi_1^2 + (a_{33}a_{11}' + a_{33}'a_{11} - 2a_{13}a_{13}')\xi_2^2 \\ & + (a_{11}a_{22}' + a_{11}'a_{22} - 2a_{12}a_{12}')\xi_3^2 \\ & + 2(a_{13}a_{12}' + a_{13}'a_{12} - a_{11}a_{23}' - a_{11}'a_{23})\xi_2\xi_3 \\ & + 2(a_{12}a_{23}' + a_{12}'a_{23} - a_{22}a_{13}' - a_{22}'a_{13})\xi_3\xi_1 \\ & + 2(a_{23}a_{13}' + a_{23}'a_{13} - a_{33}a_{12}' - a_{33}'a_{12})\xi_1\xi_2\end{aligned}$$

und der Tangentialgleichung der vier Schnittpunkte $\Phi^2 = 4\Sigma\Sigma'$, so dass $\Phi = 0$ ein Kegelschnitt ist, der von den acht Tangenten in den Schnittpunkten beider Kegelschnitte berührt wird. Er ist zugleich die Enveloppe der Geraden, welche mit beiden Kegelschnitten je vier harmonische Schnittpunkte bestimmen. (Ibid. Art. 430.)

Mit Hilfe dieser Covarianten können die Gleichungen aller andern mit $S = 0$ und $S' = 0$ covarianten Kegelschnitte ausgedrückt werden. So ist der Ort der Pole der Tangenten von $S = 0$ in Bezug auf $S' = 0$ oder der Polarkegelschnitt von S in Bezug auf S' durch $\Theta S' = F$ und der von S' in Bezug auf S durch $\Theta' S = F$ dargestellt. Die Gleichung $\Phi = 0$ oder die der Enveloppe der harmonisch von $S = 0$, $S' = 0$ geschnittenen Geraden ist $\Theta S' + \Theta' S - F = 0$. Die Enveloppe der Basis eines Dreiecks, welches in $S = 0$ eingeschrieben ist und von welchem zwei Seiten $S' = 0$ berühren, ist

$$(\Theta'^2 - 4\Theta\Delta')\, S + 4\Delta\Delta' S' = 0,$$

und der Ort des Scheitels eines Dreiecks, welches $S = 0$ umgeschrieben ist und von welchem zwei Ecken auf $S' = 0$ liegen, ist

$$16\Delta^3\Delta' S' - 4\Delta\,(4\Delta\Theta' - \Theta^2)\, F + S\,(4\Delta\Theta' - \Theta^2)^2 = 0.$$

Und wenn man den Ort vom Scheitel eines Dreiecks sucht, von welchem zwei Seiten $S = 0$ berühren, während die dritte $aS + bS' = 0$ berührt und die Basisecken in $S' = 0$ liegen, so ist er der eine oder andere der Kegelschnitte $\Delta\Delta'\lambda^2 S' + \lambda\mu F + \mu^2 S = 0$, welche die gemeinschaftlichen Tangenten von $S = 0$, $S' = 0$ berühren und wo $\lambda : \mu$ aus der Gleichung

$$a\left\{4\Delta\Delta' b - (\Theta^2 - 4\Delta\Theta')a\right\}\lambda^2 + a\left\{4\Delta a + 2\Theta b\right\}\lambda\mu - b^2\mu^2 = 0$$

bestimmt wird; auf dasselbe reduciert sich das allgemeine Problem von der Bestimmung des Ortes der freien Ecke eines Polygons, dessen Seiten $S = 0$ berühren und dessen Ecken bis auf jene vier in $S' = 0$ sich bewegen. Man findet $F = 0$ und $\Phi = 0$ als ein Paar von geraden Linien und ein Paar von Punkten, wenn für die Kegelschnitte $S = 0$ und $S' = 0$ die Invarianten-Relation besteht $\Theta\Theta' = \Delta\Delta'$; sie ist z. B. erfüllt, wenn sie zwei sich rechtwinklig schneidende Kreise sind; dann ist jede durch einen der Mittelpunkte gehende Gerade durch beide Kreise harmonisch getheilt, etc.

An die Bemerkung, dass der Kegelschnitt $F=0$ mit $S=0$, $S'=0$ ein gemeinschaftliches sich selbst conjugiertes Dreieck besitzt, da für

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=0,\quad a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=0$$

als die Gleichungen beider Kegelschnitte

$$F=a_{11}(a_{22}+a_{33})x_1^2+a_{22}(a_{33}+a_{11})x_2^2+a_{33}(a_{11}+a_{22})x_3^2=0$$

wird, knüpft sich endlich die Reduction der allgemeinen Gleichungen zweier Kegelschnitte auf die Form von Summen der Quadrate der Veränderlichen. Da nämlich für jene Form die Invarianten des Systems die einfachen Werthe

$$\Delta=1,\quad \Delta'=a_{11}a_{22}a_{33},\quad \Theta=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$
$$\Theta'=a_{22}a_{33}+a_{33}a_{11}+a_{11}a_{22}$$

annehmen, so sind die Constanten a_{11}, a_{22}, a_{33} die Werthe von λ aus

$$\Delta\lambda^3-\Theta\lambda^2+\Theta'\lambda-\Delta'=0,$$

und die Lösung der drei quadratischen Gleichungen

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=S,\quad a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2=S',$$
$$a_{11}(a_{22}+a_{33})x_1^2+\text{etc.}=F \text{ für } x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2$$

giebt die Werthe dieser Grössen in Function der bekannten Ausdrücke S, S', F. Genau gesprochen müsste man S und S' vorher durch die Cubikwurzel von Δ dividieren, aber es kommt auf das Nämliche heraus, S und S' unverändert zu lassen und F, wie es aus ihnen sich ergiebt, durch Δ zu dividieren.

Für die Kegelschnitte

$$3x^2-6xy+9y^2-2x+4y=0,\quad 5x^2-14xy+8y^2-6x-z=0$$

findet man die Coefficienten der Tangentialgleichungen oder die Minoren der Discriminanten A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{23}, A_{13}, A_{12}; A_1', etc. respective $=-4$, -1, 18, -3, 3, -2; -16, -19, -9, 21, 24, -14; dann ist $\Delta=-9$, $\Theta=-54$, $\Theta'=-99$, $\Delta'=-54$, so dass $a_{11}=1$, $a_{22}=2$, $a_{33}=3$ gefunden wird. Es ist

$$F=-9(23x^2-50xy+44y^2-18x+12y-4),$$

und aus

$$X^2+Y^2+Z^2=3x^2-6xy+9y^2-2x+4y,$$
$$X^2+2Y^2+3Z^2=5x^2-14xy+8y^2-6x-2,$$
$$5X^2+8Y^2+9Z^2=23x^2-50xy+44y^2-18x+12y-4$$

findet man

$$X^2=(3y+1)^2,\quad Y^2=(2x-y)^2,\quad Z^2=-(x+y+1)^2.$$

Die Analoga alles dessen bei Flächen zweiten Grades werden sich im Laufe der Entwickelung ergeben.

14. Man kann an Stelle der Covarianten $T=0$, $T'=0$ die beiden Flächen zweiten Grades $S=0$, $S'=0$ benutzen (Bd. I, Art. 155), deren erste der Ort der in Bezug auf $U=0$ genommenen Pole der Tan-

gentenebenen von $U' = 0$ und die zweite der Ort der in Bezug auf $U' = 0$ genommenen Pole der Tangentenebenen von $U = 0$ ist. Mit Hilfe der canonischen Form der Gleichungen können die einfachen zwischen S und S' mit T und T' bestehenden Relationen leicht nachgewiesen werden. Man hat

$$S = a_{22}a_{33}a_{44}a_{11}'^2 x_1^2 + a_{33}a_{44}a_{11}a_{22}'^2 x_2^2 + a_{44}a_{11}a_{22}a_{33}'^2 x_3^2 + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}'^2 x_4^2 = 0$$

und kann T' nach dem oben gegebenen Werthe in der Form

$$(a_{22}a_{33}a_{44}a_{11}' + a_{33}a_{44}a_{11}a_{22}' + a_{44}a_{11}a_{22}a_{33}' + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}')$$
$$(a_{11}'x_1^2 + a_{22}'x_2^2 + \text{etc.}) - (a_{22}a_{33}a_{44}a_{11}'^2 x_1^2 + \text{etc.})$$

darstellen, d. i. man hat

$$T' = \Theta U' - S.$$

In derselben Weise erhält man

$$T = \Theta' U - S'.$$

Man erkennt daraus, dass die Flächen $U = 0$, $S' = 0$ und $T = 0$ eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve besitzen, etc.

Beispiel 1. Man soll den Ort eines Punktes bestimmen, dessen in Bezug auf die Fläche $U = 0$ genommene Polarebene die Fläche

$$U + \lambda U' = 0$$

berührt.

Wir haben dann in $\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau' + \lambda^3\sigma' = 0$ für $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ die Differentiale U_1, U_2, U_3, U_4 zu substituieren, und können das Resultat mittelst der canonischen Formen

$$U = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \quad U' = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2$$

in Function der Covarianten darstellen. Denn es ist

$$\begin{aligned} x_1^2 + \text{etc.} &+ \lambda \left\{(a_{22} + a_{33} + a_{44})\, x_1^2 + \text{etc.}\right\} \\ &+ \lambda^2 \left\{(a_{22}a_{33} + a_{33}a_{44} + a_{44}a_{22})\, x_1^2 + \text{etc.}\right\} \\ &+ \lambda^3 \left\{a_{22}a_{33}a_{44}\, x_1^2 + \text{etc.}\right\} = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\varDelta U + \lambda(\Theta U - \varDelta U') + \lambda^2(\Phi U - T') + \lambda^3(\Theta' U - T) = 0.$$

Ebenso ist der Ort eines Punktes, dessen Polarebene in Bezug auf $U' = 0$ die Fläche $U + \lambda U' = 0$ berührt, dargestellt durch

$$\Theta U' - T' + \lambda(\Phi U' - T) + \lambda^2(\Theta U' - \varDelta' U) + \lambda^3 \varDelta' U' = 0.$$

Beispiel 2. Man soll den Ort eines Punktes finden, dessen Polarebenen in Bezug auf die Flächen $U = 0$, $U' = 0$ ein in Bezug auf $U + \lambda U' = 0$ conjugiertes Paar bilden. In derselben Weise, in der die Bedingung

$$a_{11}x_1x_1' + a_{22}x_2x_2' + a_{33}x_3x_3' + a_{44}x_4x_4' = 0$$

die harmonisch conjugierte Lage zweier Punkte x, x' in Bezug auf die Fläche $U = 0$ ausdrückt, ist die Bedingung der harmonisch conjugierten Lage zweier Ebenen in Bezug auf diese Fläche

$$A_{11}\xi_1\xi_1' + A_{22}\xi_2\xi_2' + A_{33}\xi_3\xi_3' + A_{44}\xi_4\xi_4' = 0.$$

Wenn man diess auf den hier vorliegenden Fall anwendet, so erhält man für die canonische Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^2 + \text{etc.} &+ \lambda \left\{(a_{22}+a_{33}+a_{44})\, a_{11}x_1^2 + \text{etc.}\right\} \\ &+ \lambda^2 \left\{(a_{22}a_{33}+a_{33}a_{44}+a_{44}a_{22})\, a_{11}x_1^2 + \text{etc.}\right\} \\ &+ \lambda^3 \left\{a_{22}a_{33}a_{44}x_1^2 + \text{etc.}\right\} = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\Delta U' + \lambda T' + \lambda^2 T + \lambda^3 \Delta' U = 0.$$

15. Die Gleichung der zweien Flächen $U = 0$, $U' = 0$ gemeinschaftlich umgeschriebenen developpabeln Fläche

$$27\,\Delta^2\Delta'^2U^2U'^2 + 4\,\Delta' U T'^3 + 4\,\Delta U' T^3 = T^2T'^2 + 18\,\Delta\Delta' T T' U U'$$

ist vom achten Grade in den Veränderlichen und vom zehnten in den Coefficienten der Gleichung jeder Fläche. Indem man $U = 0$ setzt in ihrer Gleichung, erkennt man, dass die developpable Fläche sich mit $U = 0$ in der Curve $U = 0$, $T = 0$ berührt und dass sie diese Fläche überdiess schneidet in dem Durchschnitt von

$$U = 0 \quad \text{und} \quad T'^2 - 4\,\Delta U' T = 0.$$

Der letztere Ort repräsentiert acht gerade Linien, reelle oder imaginäre Erzeugende der Fläche zweiten Grades $U = 0$.

Was die Berührungscurve der developpabeln Fläche mit $U = 0$ ist, erkennt man leicht; denn der Berührungspunkt von $U = 0$ mit einer gemeinschaftlichen Tangentenebene von $U = 0$, $U' = 0$ ist der in Bezug auf $U = 0$ genommene Pol einer Tangentenebene von $U' = 0$ und daher ein Punkt der Fläche $S' = 0$, und wir haben im letzten Artikel bewiesen, dass die Curven $U = 0$, $S' = 0$; $T = 0$, $U = 0$ dieselben sind.

Der Schnitt der developpabeln Fläche mit einer der Hauptebenen $x_4 = 0$ wird am leichtesten gefunden, indem man den Entwickelungsprozess der Gleichung derselben wiederholt. Die gemeinschaftlich umgeschriebene Developpable zu den Flächen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$
$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0$$

wird als Discriminante von

$$\frac{a_{11}x_1^2}{\lambda + a_{11}} + \frac{a_{22}x_2^2}{\lambda + a_{22}} + \frac{a_{33}x_3^2}{\lambda + a_{33}} + \frac{a_{44}x_4^2}{\lambda + a_{44}} = 0$$

erhalten. Wenn man also $x_4 = 0$ macht, so ist wie im § 3 die Discriminante das Product von

$$\left(\frac{a_{11}x_1^2}{a_{11} - a_{44}} + \frac{a_{22}x_2^2}{a_{22} - a_{44}} + \frac{a_{33}x_3^2}{a_{33} - a_{44}}\right)^2$$

in die Discriminante von

$$\frac{a_{11}x_1^2}{\lambda + a_{11}} + \frac{a_{22}x_2^2}{\lambda + a_{22}} + \frac{a_{33}x_3^2}{\lambda + a_{33}}.$$

Um die Letztere zu bilden, differentiieren wir in Bezug auf λ und erhalten

$$\frac{a_{11}x_1^2}{(\lambda+a_{11})^2}+\frac{a_{22}x_2^2}{(\lambda+a_{22})^2}+\frac{a_{33}x_3^2}{(\lambda+a_{33})^2}=0,$$
$$\frac{a_{11}^2x_1^2}{(\lambda+a_{11})^2}+\frac{a_{22}^2x_2^2}{(\lambda+a_{22})^2}+\frac{a_{33}^2x_3^2}{(\lambda+a_{33})^2}=0,$$

also

$$\frac{a_{11}x_1^2}{(\lambda+a_{33})^2}=a_{22}-a_{33},\quad \frac{a_{22}x_2^2}{(\lambda+a_{22})^2}=a_{33}-a_{11},$$
$$\frac{a_{33}x_3^2}{(\lambda+a_{11})^2}=a_{11}-a_{22};$$

und durch Substitution in die gegebene Gleichung erhält man

$$x_1\left\{a_{11}(a_{22}-a_{33})\right\}^{\frac{1}{2}}\pm x_2\left\{a_{22}(a_{33}-a_{11})\right\}^{\frac{1}{2}}\pm x_3\left\{a_{33}(a_{11}-a_{22})\right\}^{\frac{1}{2}}=0.$$

Der fragliche Schnitt besteht daher aus einem zweifach zählenden Kegelschnitt und vier geraden Linien.

16. Man soll die Bedingung finden, unter der eine gegebene gerade Linie durch die Schnittcurve zweier Flächen zweiten Grades $U=0$, $U'=0$ hindurchgeht.

Angenommen, dass man wie in Bd. I, Art. 76 die Bedingung $\varrho=0$ gebildet habe, unter welcher jene Gerade die Fläche $U=0$ berührt, so wird durch die Substitution $a_{11}+\lambda a_{11}'$ für a_{11}, etc. dieselbe in

$$\varrho+\lambda\pi+\lambda^2\varrho'=0$$

übergeführt. Wenn also die Gerade willkürlich gegeben ist, so bestimmt man durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung für λ zwei Flächen, welche durch die Curve $U=0$, $U'=0$ gehen und diese Gerade berühren. Geht aber diese Letztere selbst durch die Curve, so müssen beide Flächen zusammenfallen, da die Linie im Allgemeinen nur in dem Punkte durch eine Fläche des Systems berührt werden kann, wo sie die Curve $U=0$, $U'=0$ schneidet. Die gesuchte Bedingung ist daher $\pi^2=4\varrho\varrho'$; sie ist von der zweiten Ordnung in den Coefficienten jeder der Flächen und von der vierten in den Coefficienten jeder der die gerade Linie bestimmenden Ebenen.

Die Bedingung $\pi=0$ wird erfüllt, wenn die gerade Linie durch beide Flächen in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. In dem Falle, in welchem beide Flächen durch Gleichungen von der Form

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+a_{44}x_4^2=0,$$
$$a_{11}'x_1^2+a_{22}'x_2^2+a_{33}'x_3^2+a_{44}'x_4^2=0$$

gegeben sind, während die gerade Linie durch

$$\xi_1x_1+\xi_2x_2+\xi_3x_2+\xi_4x_4=0,$$
$$\xi_1'x_1+\xi_2'x_2+\xi_3'x_3+\xi_4'x_4=0$$

dargestellt ist, ist nach Bd. I, Art. 76 $\varrho=\Sigma a_{11}a_{22}\,(\xi_3\xi_4'-\xi_3'\xi_4)^2$, d. h. die Summe von sechs Gliedern dieser Form, wie $a_{33}a_{44}(\xi_1\xi_2'-\xi_1'\xi_2)^2$, etc.

Alsdann ist

$$\pi = \Sigma\,(a_{11}a_{22}' + a_{11}'a_{22})\,(\xi_3\xi_4' - \xi_3'\xi_4)^2$$

und man hat

$$\begin{aligned}\pi^2 - 4\varrho\varrho' &= \Sigma\,(a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})^2\,(\xi_3\xi_4' - \xi_3'\xi_4)^4\\ &+ 2\Sigma(a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})(a_{11}a_{33}' - a_{11}'a_{33})(\xi_3\xi_4' - \xi_3'\xi_4)^2(\xi_2\xi_4' - \xi_2'\xi_4)^2\\ &+ 2\Sigma\{(a_{11}a_{44}' - a_{11}'a_{44})\,(a_{33}a_{22}' - a_{33}'a_{22})\\ &+ (a_{11}a_{33}' - a_{11}'a_{33})\,(a_{44}a_{22}' - a_{44}'a_{22})\}\,(\xi_1\xi_2' - \xi_1'\xi_2)^2(\xi_3\xi_4' - \xi_3'\xi_4)^2.\end{aligned}$$

17. Man soll die **Gleichung der developpabeln Fläche finden, welche durch die Tangenten der Durchschnittscurve von $U = 0$, $U' = 0$ gebildet wird.**

Wenn wir irgend einen Punkt in einer Tangente dieser Curve betrachten, so geht die Polarebene desselben in Bezug auf $U = 0$ oder $U' = 0$ nothwendig durch den Berührungspunkt der Tangente, in welcher er liegt; die Durchschnittslinie beider Polarebenen schneidet also die Curve $U = 0$, $U' = 0$. Wir erhalten daher die Gleichung der fraglichen Developpabeln, indem wir in die Bedingung des letzten § für ξ_1, ξ_2, etc., ξ_1', ξ_2', etc. die Differentialquotienten U_1, U_2, etc., U_1', U_2', etc. substituieren; sie ist vom achten Grade in den Variabeln und vom sechsten in den Coefficienten jeder Fläche. Unter Anwendung der canonischen Form der Gleichungen der Flächen ergiebt sich das Endresultat, wie folgt:

$$\begin{aligned}&\Sigma\,(a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})^4\,(a_{33}a_{44}' - a_{33}'a_{44})^4\,x_3^4x_4^4\\ &+ 2\Sigma(a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})(a_{11}a_{33}' - a_{11}'a_{33})(a_{33}a_{44}' - a_{33}'a_{44})(a_{22}a_{44}' - a_{22}'a_{44})\\ &\times x_2^2x_3^2x_4^4 + \{(a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})\,(a_{33}a_{44}' - a_{33}'a_{44})\\ &\qquad\qquad - (a_{11}a_{44}' - a_{11}'a_{44})\,(a_{22}a_{33}' - a_{22}'a_{33})\}\\ &\times\{(a_{11}a_{44}' - a_{11}'a_{44})\,(a_{22}a_{33}' - a_{22}'a_{33}) - (a_{22}a_{44}' - a_{22}'a_{44})\,(a_{33}a_{11}' - a_{33}'a_{11})\}\\ &\times\{(a_{22}a_{44}' - a_{22}'a_{44})\,(a_{33}a_{11}' - a_{33}'a_{11}) - (a_{11}a_{22}' - a_{11}'a_{22})\,(a_{33}a_{44}' - a_{33}'a_{44})\}\\ &\times 2x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2 = 0.\end{aligned}$$

Setzen wir in dieser Gleichung $x_4 = 0$, so erhalten wir ein vollständiges Quadrat, d. h. jede der vier Ebenen

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = 0$$

schneidet die developpable Fläche in einer ebenen Curve vierter Ordnung, welche eine Doppellinie der Fläche ist.

Diess ist a priori offenbar, weil die Symmetrie der Figur es bedingt, dass durch jeden Punkt in einer dieser vier Ebenen, welcher einer Tangente der Curve $U = 0$, $U' = 0$ angehört, auch eine zweite Tangente derselben gehen muss.

Man kann mit Hilfe der canonischen Form das vorige Ergebniss in Function der Covarianten ausdrücken, und erhält als Gleichung der betrachteten Developpabeln

$$\begin{aligned}4\,(\Theta UU' - T'U - \varDelta U'^2)\,(\Theta' UU' - TU' - \varDelta' U^2)\\ = (\Phi UU' - TU - T'U')^2.\end{aligned}$$

Die Curve $U = 0$, $U' = 0$ ist offenbar in dem durch diese Gleichung dargestellten Orte eine Doppellinie, wie auch sonst erkannt werden kann; und der Ort schneidet die Fläche $U = 0$ überdiess in der Linie achter

Ordnung, welche die Flächen $U = 0$ und $T'^2 - 4\Delta TU = 0$ mit einander gemein haben. Es ist dieselbe Curve, die wir schon im § 15 fanden.

Wie es dort ausgesprochen ist, so kann leicht geometrisch bewiesen werden, dass eine Erzeugende der Fläche $U = 0$ in jedem der acht Durchschnittspunkte der drei Flächen $U = 0$, $U' = 0$, $S' = 0$ oder $U = 0$, $U' = 0$, $T = 0$ auch eine Erzeugende der devoloppabeln Fläche ist und dass daher diese acht Linien den Ort von der achten Ordnung bilden, den die Gleichungen $U = 0$, $T'^2 - 4\Delta TU' = 0$ darstellen. Denn da die Fläche $S' = 0$ der Ort der Pole der Tangentenebenen von $U' = 0$ in Bezug auf die Fläche $U = 0$ ist, so ist die Tangentenebene zu $U' = 0$ in einem dieser acht Punkte auch eine Tangentenebene zu $U = 0$ und geht daher durch eine der Erzeugenden von $U = 0$ in diesem Punkte. Diese Erzeugende ist also die Durchschnittslinie der Tangentenebenen von $U = 0$, $U' = 0$ und daher auch eine Erzeugende der fraglichen developpabeln Fläche.

18. Die Berechnung des vorigen § kann auch in folgender Weise ausgeführt werden: Wenn wir die Bedingung der Berührung einer geraden Linie mit der Fläche $U = 0$ (Bd. I, Art. 76) mit der Discriminante Δ multiplicieren, so erhalten wir

$$(A_{11}\xi_1^2 + \text{etc.})\,(A_{11}\xi_1'^2 + \text{etc.}) = (A_{11}\xi_1\xi_1' + \text{etc.})^2.$$

Wir bilden dann die entsprechende Formel für die Bedingung, unter welcher der Durchschnitt von zwei Polarebenen $U + \lambda U' = 0$ berührt, multipliciert mit der Discriminante dieser Fläche; dadurch finden wir nach den Beispielen 1 und 2 des § 14

$$\begin{gathered}\{\Delta U + \lambda(\Theta U - \Delta U') + \lambda^2(\Phi U - T') + \lambda^3(\Theta' U - T)\}\\ \{(\Theta U' - T') + \lambda(\Phi U' - T) + \lambda^2(\Theta U' - \Delta' U) + \lambda^3 \Delta' U'\}\\ = (\Delta U' + \lambda T' + \lambda^2 T + \lambda^3 \Delta' U)^2;\end{gathered}$$

diess Resultat ist, wie es sein muss, durch

$$(\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Phi + \lambda^3\Theta' + \lambda^4\Delta')$$

theilbar und der Quotient ist

$$\begin{gathered}(\Theta UU' - T'U - \Delta U'^2) + \lambda(\Phi UU' - TU - T'U')\\ + \lambda^2(\Theta' UU' - TU' - \Delta' U^2) = 0.\end{gathered}$$

So erkennen wir, dass $\Theta UU' = T'U + \Delta U'^2$ die Bedingung ist, unter welcher die Durchschnittslinie von zwei Polarebenen die Fläche $U = 0$ berührt, während $\Phi UU = TU + T'U'$ die Bedingung ist, unter welcher sie durch die Flächen $U = 0$, $U' = 0$ harmonisch getheilt wird. Endlich ist die Gleichung der developpabeln Fläche

$$\begin{gathered}4\,(\Theta UU' - T'U - \Delta U'^2)\,(\Theta' UU' - TU' - \Delta' U^2)\\ = (\Phi UU' - TU - T'U')^2.\end{gathered}$$

19. Die Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 1$ bezeichnet nach Bd. I, Art. 100 ein System von concentrischen Flächen zweiten Grades mit gemeinschaftlichen Ebenen der Kreisschnitte. Die Form der Gleichung zeigt, dass die Flächen des fraglichen Systems die

imaginäre Curve gemeinschaftlich haben, in welcher die unendlich kleine Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ irgend eine unter ihnen schneidet.

Da ferner die Gleichung eines Systems confocaler Flächen zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1$$

in Tangentialcoordinaten

$$a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + \lambda(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1$$

ist, so ergiebt sich reciprok, dass ein System von confocalen Flächen zweiten Grades durch eine gemeinschaftliche imaginäre Developpable umhüllt ist; eine Developpable nämlich, welche durch die Tangentenebenen irgend einer Fläche des Systems gebildet wird, die je eine der Tangenten des imaginären Kreises im Unendlichen enthalten.

Wenn man die Discriminante der Gleichung des Flächensystems in Bezug auf λ bildet, so erhält man die Gleichung dieser developpabeln Fläche; sie ist für $b-c=f$, $c-a=g$, $a-b=h$ die folgende

$$\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2)^2\,(f^2x^4+g^2y^4+h^2z^4-2ghy^2z^2-2hfz^2x^2-2fgx^2y^2)\\
&+2f^2(g-h)x^6+2g^2(h-f)y^6+2h^2(f-g)z^6+2f(fh-3g^2)x^4y^2\\
&-2g(gh-3f^2)x^2y^4-2f(fg-3h^2)x^4z^2+2h(gh-3f^2)x^2z^4\\
&+2g(gf-3h^2)y^4z^2-2h(hf-3g^2)y^2z^4+2(f-g)(g-h)(h-f)x^2y^2z^2\\
&+(f^4-6f^2gh)x^4+(g^4-6g^2fh)y^4+(h^4-6h^2fg)z^4+2fg(fg-3h^2)x^2y^2\\
&+2gh(gh-3f^2)y^2z^2+2hf(hf-3g^2)z^2x^2+2f^2gh(h-g)x^2\\
&+2g^2fh(f-h)y^2+2h^2fg(g-f)z^2+f^2g^2h^2=0.
\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung oder auch wie in § 3 kann abgeleitet werden, dass die Focalkegelschnitte und der imaginäre Kreis in unendlicher Ferne Doppellinien in der Fläche sind.

20. Wenn $\sigma = 0$ die allgemeine Gleichung einer Fläche zweiten Grades ist, so erhalten wir in derselben Art durch Bildung der Reciproealform von $\sigma + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 U &+ \lambda\Delta\,\{[a(b+c)-m^2-n^2]x^2+[b(c+a)-n^2-l^2]y^2\\
&+[c(a+b)-l^2-m^2]z^2+[d(a+b+c)-p^2-q^2-r^2]\\
&+2xy(cn-lm)+2zx(bm-ln)+2yz(al-mn)\\
&+2x[(b+c)p-nq-mr]+2y[(c+a)q-np-lr]\\
&+2z[(a+b)r-lq-mp]\}\\
&+\lambda^2\{D(x^2+y^2+z^2)+A+B+C-2Px-2Qy-2Rz\}+\lambda^3=0,
\end{aligned}$$

wobei A, B, C, D, P, Q, R die nach a, b, c, d, p, q, r gebildeten Minoren der Discriminante (Bd. I, p. 76) bezeichnen,

$$\begin{vmatrix} a, & n, & m, & p \\ n, & b, & l, & q \\ m, & l, & c, & r \\ p, & q, & r, & d \end{vmatrix}.$$

Diess ist die Gleichung einer Reihe von confocalen Flächen und ihre Discriminante in Bezug auf λ repräsentiert, gleich Null gesetzt, die im letzten § betrachtete Developpable.

Bezeichnen wir die Coefficienten von λ und λ^2 respective durch T und T', so ist $T = 0$ der Ausdruck für den Ort der Punkte, von welchen aus drei zu einander rechtwinklige Tangenten an die gegebene Fläche zweiten Grades gezogen werden können, und $T' = 0$ die Gleichung des Ortes von Punkten, von welchen aus drei zu einander rechtwinklige Tangentenebenen an dieselbe gehen.

Wenn man die Gleichung des Paraboloids $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 2z = 0$ in derselben Weise behandelt, so erhält man die Gleichung des Systems der confocalen Flächen in der Form

$$(bx^2 + ay^2 + 2abz) + \lambda \left\{x^2 + y^2 + 2(a+b)z - ab\right\} + \lambda^2 \left\{2z - (a+b)\right\} - \lambda^3 = 0,$$

und die sie alle berührende Developpable ist für $a - b = m$ durch die Gleichung ausgedrückt

$$\begin{aligned} &4(x^2+y^2)^2(x^2+y^2+z^2) + 16mz(x^2+y^2+z^2)(x^2-y^2) \\ &+ 4z(x^2+y^2)(ax^2+by^2) + 16m^2z^4 + 32m^2z^2(x^2+y^2) \\ &+ 24m(bx^2+ay^2)z^2 + (ax^2+by^2)^2 + 8m(bx^2+ay^2)(x^2-y^2) \\ &+ 12m^2x^2y^2 + 16(a+b)m^2z(x^2+y^2+z^2) - 12m^2z(ax^2+by^2) \\ &+ 12mabz(x^2-y^2) + 4m^2z^2(a^2+4ab+b^2) + 4m^2(b^2x^2+a^2y^2) \\ &+ 2abm(ax^2-by^2) + 4m^2ab(a+b)z + a^2b^2m^2 = 0. \end{aligned}$$

Der Ort der Durchschnitte von drei zu einander rechtwinkligen Tangentenebenen des Paraboloids ist die Ebene $2z = a + b$, und der Ort des Schnittes von drei zu einander rechtwinkligen Tangenten desselben das Umdrehungsparaboloid

$$x^2 + y^2 + 2(a+b)z - ab = 0.$$

21. Verschiedene wichtige Eigenschaften von confocalen Flächen sind besondere Fälle der Eigenschaften von Flächen, welche in eine gemeinschaftliche Developpable eingeschrieben sind. Es ist zweckmässig, zuerst die reciproken Eigenschaften von Systemen auszusprechen, die eine gemeinschaftliche Schnittcurve besitzen. Da die Bedingung, unter welcher eine Fläche zweiten Grades eine Ebene berührt (Bd. I, Art. 75), die Coefficienten ihrer Gleichung im dritten Grade enthält, so folgt, dass es unter den Flächen eines solchen Systems mit gemeinschaftlicher Schnittcurve drei giebt, welche eine gegebene Ebene berühren, und reciprok daher, dass unter den Flächen eines derselben Developpabeln eingeschriebenen Systems stets drei durch einen gegebenen Punkt gehen. So wie in dem ersteren System durch jeden Punkt des Raumes eine Fläche, so geht im letztern zu jeder Ebene des Raumes berührend eine Fläche. In beiden Systemen existieren stets zwei Flächen, welche eine gegebene Gerade berühren, da die Bedingung, unter welcher solche Berührung stattfindet

(Bd. I, Art. 76), die Coefficienten der Fläche im zweiten Grade enthält. (Vergl. Bd. I, Art. 130, 131.) Und da (Bd. I, Art. 132) stets drei concentrische und concyclische Flächen zweiten Grades bestimmt werden können, welche eine Ebene berühren und die drei Verbindungslinien der Berührungspunkte mit dem Anfangspunkt der Coordinaten rechtwinklig zu einander sind, so gehen in dem zu einem solchen System reciproken System confocaler und concentrischer Flächen drei Flächen durch einen Punkt und schneiden einander rechtwinklig. Da endlich die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf ein System $S + \lambda (x^2 + y^2 + z^2) = 0$ durch eine gerade Linie gehen, welche mit dem Anfangspunkt eine Normalebene zu der Geraden bestimmt, die jenen Punkt selbst mit dem Anfangspunkt verbindet — wie diess aus der Betrachtung der speciellen Fälle $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ am directesten hervorgeht — so ist reciprok der Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf ein System von Confocalen eine zu dieser Ebene normale Gerade.

22. Wir sahen, dass $\sigma + \lambda (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0$ die Tangentialgleichung eines Systems von confocalen Flächen ist; wenn die Discriminante dieser Gleichung verschwindet, so stellt dieselbe somit einen der Focalkegelschnitte jener Flächen dar. Man kann also die **Tangentialgleichung der Focalkegelschnitte** einer gegebenen Fläche finden indem man λ aus der Gleichung

$$D\lambda^3 + (ab + bc + ca - l^2 - m^2 - n^2) \Delta\lambda^2 + (a + b + c) \Delta^2\lambda + \Delta^3 = 0$$

bestimmt.

Sei

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy + 10x + 4y + 6z + 4 = 0$$

die Gleichung der Fläche, so ist $\Delta = -972$ und die cubische Gleichung ist $162\lambda^3 + 99\lambda^2\Delta + 18\lambda\Delta^2 + \Delta^3 = 0$; ihre Factoren sind

$$3\lambda + \Delta, \quad 6\lambda + \Delta, \quad 9\lambda + \Delta,$$

d. h. $\lambda = 108, 162, 324$. Die durch 6 dividierte Tangentialgleichung der gegebenen Fläche ist

$$\alpha^2 - 8\beta^2 - 11\gamma^2 + 27\delta^2 + 26\beta\gamma + 46\gamma\alpha + 34\alpha\beta - 54\alpha\delta - 54\beta\delta - 54\gamma\delta = 0.$$

Man erhält somit die Tangentialgleichungen der drei Focalkegelschnitte der Fläche, indem man die ersten drei Glieder der letztgeschriebenen Gleichung verändert in

$$19\alpha^2 + 10\beta^2 + 7\gamma^2, \quad 28\alpha^2 + 19\beta^2 + 16\gamma^2, \quad 55\alpha^2 + 46\beta^2 + 43\gamma^2$$

respective. Die Punktgleichungen derselben werden ebenso wie in § 9 gefunden als durch die Paare

$$2x - 2y + z + w = 0, \quad 11x^2 + 44y^2 + 11z^2 - 32yz + 2zx - 40xy = 0;$$
$$x + 2y + 2z + 5w = 0, \quad 67x^2 + 68y^2 + 83z^2 - 24yz - 62zx - 32xy = 0;$$
$$2x + y - 2z + w = 0, \quad 5x^2 - 3y^2 + 9z^2 + 2yz - 16zx + 2xy = 0$$

dargestellt.

23. Um in tetraedrischen Plancoordinaten die Gleichung der Confocalen zu einer gegebenen Fläche zu finden, ist es nothwendig, die der

Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ entsprechende Gleichung in solchen tetraedrischen Ebenencoordinaten zu bilden, d. h. die Gleichung, welche ausdrückt, dass der normale Abstand eines Punktes von jeder der Bedingung genügenden Ebene unendlich gross ist.

Repräsentieren $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ irgend vier nicht durch denselben Punkt gehende Ebenen, welchen bezogen auf ein System rectangulärer Achsen die Gleichungen

$$X \cos A + Y \cos B + Z \cos C = p$$

entsprechen, so ist der Coefficient von X in

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

gleich

$$\xi_1 \cos A_1 + \xi_2 \cos A_2 + \xi_3 \cos A_3 + \xi_4 \cos A_4$$

und die Summe der Quadrate der Coefficienten von X, Y, Z ist durch

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos(x_2 x_3) - 2\xi_3\xi_1 \cos(x_3 x_1) - 2\xi_1\xi_2 \cos(x_1 x_2)$$
$$- 2\xi_1\xi_4 \cos(x_1 x_4) - 2\xi_2\xi_4 \cos(x_2 x_4) - 2\xi_3\xi_4 \cos(x_3 x_4)$$

dargestellt, wenn $(x_i x_j)$ den Winkel der Ebenen $x_i = 0$, $x_j = 0$ mit einander darstellt. Die Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit Null repräsentiert daher die Tangentialgleichung des imaginären Kreises im Unendlichen. Wenn man also die in den letzten §§ entwickelten Operationen unter Ersetzung des Trinoms $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ durch diesen allgemeinen Ausdruck wiederholt, so erhält man ohne Schwierigkeit die Bedingungen, unter denen die allgemeine Gleichung zweiten Grades in tetraedrischen Plancoordinaten eines der beiden rectangulären Hyperboloide darstellt; ferner die Gleichungen der Orte von Punkten, von welchen aus Systeme von je drei zu einander rechtwinkligen Tangenten oder Tangentenebenen der Fläche möglich sind; die Gleichungen der Focalkegelschnitte, etc. Die Bedingung für das hyperbolische Paraboloid ist die Bedingung der Berührung mit der unendlich entfernten Ebene.

24. In § 7 ist bemerkt, dass die Bedingung, unter welcher für rechtwinklige Coordinaten zwei Ebenen

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$$

rechtwinklig zu einander sind, nämlich die Bedingung

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

identisch ist mit der Bedingung, unter welcher dieselben Ebenen in Bezug auf den unendlich entfernten imaginären Kreis zu einander harmonisch conjugiert sind. Daraus folgt, dass die Bedingung der Orthogonalität in tetraedrischen Coordinaten, abgeleitet als Bedingung der harmonischen Relation zu dem durch die allgemeine Gleichung dargestellten imaginären Kreise, erhalten wird in der Form

$$\begin{aligned}
&\xi_1' \{ + \xi_1 - \xi_2 \cos(x_1 x_2) - \xi_3 \cos(x_1 x_3) - \xi_4 \cos(x_1 x_4) \} \\
+ &\xi_2' \{ - \xi_1 \cos(x_1 x_2) + \xi_2 - \xi_3 \cos(x_2 x_3) - \xi_4 \cos(x_2 x_4) \} \\
+ &\xi_3' \{ - \xi_1 \cos(x_1 x_3) - \xi_2 \cos(x_2 x_3) + \xi_3 - \xi_4 \cos(x_3 x_4) \} \\
+ &\xi_4' \{ - \xi_1 \cos(x_1 x_4) - \xi_2 \cos(x_2 x_4) - \xi_3 \cos(x_3 x_4) + \xi_4 \} = 0;
\end{aligned}$$

Sätze, welche sich auf orthogonale Ebenen beziehen, können daher projectivisch generalisiert werden, indem man an Stelle des imaginären unendlich fernen Kreises irgend einen festen Kegelschnitt substituiert; an Stelle einer Geraden und einer Ebene, die zu einander rechtwinklig sind, erhält man so eine Gerade und eine Ebene, welche die Ebene jenes festen Kegelschnitts in einem Punkte und einer Geraden schneiden, die harmonisch conjugiert sind in Bezug auf diesen Kegelschnitt, d. i. Pol und Polare in Bezug auf denselben. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.", Art. 478.) Man kann die erhaltenen Theoreme sodann noch weiter generalisieren, indem man an Stelle des festen Kegelschnitts eine Fläche zweiten Grades setzt; die Relation der Orthogonalität zwischen einer Geraden und einer Ebene geht dann in die Beziehung einer Linie und einer Ebene über, bei welcher jene durch den Pol von dieser in Bezug auf die feste Fläche zweiten Grades geht. Jedoch sind Theoreme, welche man so erhält, damit allein nicht bewiesen, sondern nur eben gebildet.

Beispiel. Jede Tangentenebene einer Kugel ist normal zum Radius des Berührungspunktes.

Jeder ebene Schnitt einer Fläche zweiten Grades wird durch eine Tangentenebene derselben und durch die Gerade, welche den Berührungspunkt derselben mit dem Pol der Schnittebene in Bezug auf sie verbindet, in einer Geraden und einem Punkte geschnitten, welche in Bezug auf ihn Polare und Pol sind.

25. Die Tangentialgleichung einer Kugel für ein rechtwinkliges Coordinatensystem schreibt man am einfachsten als Ausdruck der Bedingung, unter welcher jede Tangentenebene vom Centrum constante Entfernung hat; also für r als den Halbmesser und x', y', z' als Coordinaten des Centrums in der Form

$$(\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta)^2 = r^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Wenn dann x_1', x_2', x_3', x_4' die Coordinaten des Centrums einer Kugel sind, so muss die Tangentialgleichung der Kugel in tetraedrischen Coordinaten, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ sein

$$(\xi_1 x_1' + \xi_2 x_2' + \xi_3 x_3' + \xi_4 x_4')^2$$
$$= r^2 \left\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos(x_1 x_2) - \text{etc.}\right\}.$$

Wenn die Kugel insbesondere die vier Ebenen $x_1 = 0$, etc. berührt, so müssen die Coefficienten von $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2, \xi_4^2$ verschwinden und die Tangentialgleichung einer solchen Kugel muss daher die Form haben

$$(\xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3 \pm \xi_4)^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 - 2\xi_1\xi_2 \cos(x_1 x_2) - \text{etc.}$$

Es existieren daher acht Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren. Indem man insbesondere alle Zeichen positiv nimmt, erhält man die Tangentialgleichung der eingeschriebenen Kugel

$$\xi_1\xi_2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(x_1 x_2) + \xi_2\xi_3 \cos^2 \tfrac{1}{2}(x_2 x_3) + \xi_3\xi_1 \cos^2 \tfrac{1}{2}(x_3 x_1)$$
$$+ \xi_1\xi_4 \cos^2 \tfrac{1}{2}(x_1 x_4) + \xi_2\xi_4 \cos^2 \tfrac{1}{2}(x_2 x_4) + \xi_3\xi_4 \cos^2 \tfrac{1}{2}(x_3 x_4) = 0.$$

Wenn man zu ihr die Reciprocalgleichung bildet und die Coefficienten der Gleichung durch $a_{12}, a_{23}, a_{13}, a_{14}, a_{24}, a_{34}$ bezeichnet, so erhält man die entsprechende Punktgleichung in der Form

$$a_{12}a_{24}a_{34}x_1^2 + a_{23}a_{14}a_{34}x_2^2 + a_{13}a_{14}a_{24}x_3^2 + a_{12}a_{23}a_{13}x_4^2$$
$$+ (a_{12}a_{14} - a_{23}a_{24} - a_{13}a_{34})(a_{12}x_1x_4 + a_{14}x_2x_3)$$
$$+ (a_{23}a_{24} - a_{13}a_{34} - a_{12}a_{14})(a_{23}x_2x_4 + a_{24}x_1x_3)$$
$$+ (a_{13}a_{34} - a_{12}a_{14} - a_{23}a_{24})(a_{13}x_3x_4 + a_{34}x_1x_2) = 0.$$

Die Gleichung der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel ist in Bd. 1, Art. 153 abgeleitet worden und hat dazu gedient, die Bedingungen aufzustellen (ibid. Art. 154), unter welchen die allgemeine Gleichung in tetraedrischen Punktcoordinaten eine Kugel darstellt.

26. Es ist im § 11 gezeigt worden, dass man in der Bedingung, unter welcher die Ebene $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$ die Fläche $U + \lambda U' = 0$ berührt, eine Gleichung dritten Grades in λ erhält, deren Coefficienten die Invarianten Δ, Δ', Θ, Θ' der Schnitte jener Ebene mit den beiden Flächen $U = 0$ und $U' = 0$ sind. Wenn man nun, wie in den §§ 1, 2 für die Flächen zweiten Grades geschehen ist, für eine Curve zweiten Grades und das Paar der unendlich fernen imaginären Kreispunkte ihrer Ebene die Invarianten Θ und Θ' bildet, so ist $\Theta = 0$ die Bedingung, unter welcher der betrachtete Kegelschnitt eine Parabel und $\Theta' = 0$ die Bedingung, unter welcher er eine gleichseitige Hyperbel ist; es ist endlich $\Theta'^2 = 4\Theta$ die Bedingung, unter welcher der Kegelschnitt durch jeden von den imaginären Kreispunkten im Unendlichen geht, d. i. unter der er ein Kreis ist. Zur Ergänzung dessen, was in der „Analyt. Geom. d. Kegelschn." hierüber entwickelt ist, mögen die Ergebnisse einer solchen Berechnung für trimetrische Coordinaten angegeben werden. Es ist

$$\Theta' = a_{11} + a_{22} + a_{33} - 2a_{23}\cos A_1 - 2a_{13}\cos A_2 - 2a_{12}\cos A_3,$$
$$\Theta = A_{11}\sin^2 A_1 + A_{22}\sin^2 A_2 + A_{33}\sin^2 A_3 + 2A_{33}\sin A_2 \sin A_3$$
$$+ 2A_{13}\sin A_3 \sin A_1 + 2A_{12}\sin A_1 \sin A_2,$$

und die Relation $4\Theta = \Theta'^2$ lässt sich auf mehrerlei Art in eine Summe von Quadraten zerlegen, welche Quadrate getrennt gleich Null sein müssen, damit die Curve ein Kreis sei; sie ist nur für Kreise erfüllt, d. i. für Kegelschnitte, welche durch beide Kreispunkte der Ebene gehen.

Für den dem Fundamentaldreieck umgeschriebenen Kegelschnitt, also für $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = 0$ wird die Bedingung der gleichseitigen Hyperbel $a_{23}\cos A_1 + a_{13}\cos A_2 + a_{12}\cos A_3 = 0$, d. h. diese gleichseitige Hyperbel geht durch den Punkt

$$x_1 \cos A_1 = x_2 \cos A_2 = x_3 \cos A_3$$

oder durch den Durchschnittspunkt der Höhen. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.", Art. 230.) Für das sich selbst conjugierte Dreieck oder $a_{23} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{12} = 0$ ist dieselbe Bedingung $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$, d. h. die Curve geht durch die Punkte

$$x_1 = x_2 = x_3,\quad -x_1 = x_2 = x_3,\quad x_1 = -x_2 = x_3,\quad x_1 = x_2 = -x_3,$$

d. h. die gleichseitige Hyperbel geht durch die Centra der vier Berührungskreise eines Dreiecks, welches in Bezug auf sie sich selbst conjugiert ist. Die Ausführung der entsprechenden Operationen für Cartesische Coordinaten führt auf die bekannten Bedingungen für Parabel, gleichseitige Hyperbel und Kreis zurück.

In Erinnerung an die Entwickelungen des § 13 in Bezug auf die Theorie der Kegelschnitte sei noch hinzugefügt, dass die Covariante $F=0$ in Bezug auf ein System, welches aus einem Kegelschnitte und den Kreispunkten seiner Ebene besteht, den Ort derjenigen Punkte gibt, von welchen aus zwei zu einander rechtwinkelige Tangenten an den Kegelschnitt ergehen, also nach der bekannten Theorie einen mit ihm concentrischen Kreis, im Falle der Parabel die Directrix (und die unendlich entfernte Gerade). Für Cartesische Coordinaten sind $A_{11}' = A_{22}' = 1$ und $A_{12}' = A_{13}' = A_{23}' = A_{33}' = 0$, also

$$F = A_{33}(x^2+y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} = 0$$

und für die Parabel wegen $A_{33} = 0$

$$2(A_{13}x + A_{23}y) = A_{11} + A_{22}$$

als Gleichung der Directrix. In trimetrischen Punktcoordinaten dagegen

$$\begin{aligned}(A_{22} + A_{33} + 2A_{23}\cos A_1)\,x_1^2 + (A_{33} + A_{11} + 2A_{13}\cos A_2)\,x_2^2 \\ + (A_{11} + A_{22} + 2A_{12}\cos A_3)\,x_3^2 \\ + 2(A_{11}\cos A_1 - A_{23} - A_{13}\cos A_3 - A_{12}\cos A_2)\,x_2x_3 \\ + 2(A_{22}\cos A_2 - A_{13} - A_{12}\cos A_1 - A_{23}\cos A_3)\,x_3x_1 \\ + 2(A_{33}\cos A_3 - A_{12} - A_{23}\cos A_2 - A_{13}\cos A_1)\,x_1x_2 = 0,\end{aligned}$$

was man in die den Kreis bezeichnende Form

$$\begin{aligned}&(x_1\sin A_1 + x_2\sin A_2 + x_3\sin A_3)\Big(\frac{A_{22} + A_{23} + 2A_{23}\cos A_1}{\sin A_1}x_1 \\ &+ \frac{A_{33} + A_{11} + 2A_{13}\cos A_2}{\sin A_2}x_2 + \frac{A_{11} + A_{22} + 2A_{12}\cos A_3}{\sin A_3}x_3\Big) \\ &= (x_2x_3\sin A_1 + x_3x_1\sin A_2 + x_1x_2\sin A_3)\times \\ &\frac{A_{11}\sin^2 A_1 + A_{22}\sin^2 A_2 + A_{33}\sin^2 A_3 + 2A_{23}\sin A_2\sin A_3 + 2A_{13}\sin A_3\sin A_1 + 2A_{12}\sin A_1\sin A_2}{\sin A_1\sin A_2\sin A_3}\end{aligned}$$

bringen kann, in welcher die Bedingung der Parabel und die für ihre Erfüllung hervortretende Directrix, verbunden mit der unendlich entfernten Geraden deutlich erscheinen.

Von Werth ist die Bemerkung, dass die Gleichung dieses Ortes der Schnittpunkte orthogonaler Tangenten in den Coefficienten der Reciprocalgleichung linear ist, denn aus ihr geht hervor, dass der bezügliche Kreis für alle durch dieselben vier Geraden berührten Kegelschnitte durch zwei feste Punkte geht.

Wenn man dann dieselben Principien auf eine beliebige Fläche zweiten Grades in rectangulären Coordinaten

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + px + qy + rz + d = 0$$

und die entsprechende Tangentialgleichung des unendlich fernen imaginären Kreises $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$ anwendet, so erhält man die Bedingung $\Theta = 0$, unter welcher irgend ein ebener Schnitt derselben eine Parabel ist, in der Form

$$(bc - l^2)\,\alpha^2 + (ca - m^2)\,\beta^2 + (ab - n^2)\,\gamma^2 + 2\,(mn - al)\,\beta\gamma \\ + 2\,(nl - bm)\,\gamma\alpha + 2\,(lm - cn)\,\alpha\beta = 0;$$

die Bedingung $\Theta' = 0$, unter welcher derselbe eine gleichseitige Hyperbel ist

$$(b + c)\,\alpha^2 + (c + a)\,\beta^2 + (a + b)\,\gamma^2 - 2l\beta\gamma - 2m\gamma\alpha - 2n\alpha\beta = 0;$$

während endlich $\Theta'^2 = 4\Theta\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ die Bedingung ist, unter welcher die Schnittebene durch einen der vier unendlich entfernten Schnittpunkte geht, welche der Fläche zweiten Grades mit jeder Kugel gemeinsam sind.

27. Wenn $\Sigma = 0$ die Tangentialgleichung eines Kegelschnittes, und $\Sigma' = 0$ die Tangentialgleichung der imaginären Kreispunkte seiner Ebene bezeichnet, so ist $\Sigma + \lambda\Sigma' = 0$ die Tangentialgleichung eines zum ersten confocalen Kegelschnittes, d. i. eines Kegelschnittes, der mit jenem die nämlichen von den Kreispunkten ausgehenden Tangenten, und also die nämlichen Schnittpunkte dieser letztern, d. i. die nämlichen Brennpunkte hat. Die Brennpunkte selbst entsprechen den aus der Discriminante von $\Sigma + \lambda\Sigma = 0$, d. i. für Cartesische Coordinaten aus der Gleichung

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}{}^2)\,\lambda^2 + \Delta\,(a_{11} + a_{22})\,\lambda + \Delta^2 = 0$$

entspringenden Werthen von λ; für solche zerfällt die Gleichung $\Sigma + \lambda\Sigma' = 0$ in lineare Factoren

$$(\xi x' + \eta y' + \zeta z')\,(\xi x'' + \eta y'' + \zeta z'')$$

und die Brennpunkte sind durch

$$\frac{x'}{z'},\ \frac{y'}{z'};\ \frac{x''}{z''},\ \frac{y''}{z''}$$

bestimmt, durch den einen der Werthe von λ die reellen, durch den andern die imaginären Brennpunkte.

So findet man die Brennpunkte von

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 8y + 11 = 0$$

durch die Werthe

$$\lambda = -\Delta,\ \lambda = -\frac{\Delta}{3}$$

aus der Gleichung

$$3\lambda^2 + 4\lambda\Delta + \Delta^2 = 0$$

und wegen $\Delta = -9$ für $\lambda = 3$ die Gleichung

$$6\xi^2 + 21\eta^2 + 3\zeta^2 + 18\eta\zeta + 12\zeta\xi + 30\xi\eta + 3\,(\xi^2 + \eta^2) \\ 3\,(\xi + 2\eta + \zeta)\,(3\xi + 4\eta + \zeta)$$

also für die Brennpunkte die Coordinaten 1, 2; 3, 4. Der Werth $\lambda = 9$ ergibt die imaginären Brennpunkte $2 \pm i,\ 3 \mp i$.

Wenn allgemein $\Sigma + \lambda\,(\xi^2 + \eta^2) = 0$ einen zu $\Sigma = 0$ confocalen Kegelschnitt darstellt, so erhält man dieselbe insbesondere für Cartesische Coordinaten in der Form

$$\Delta S + \lambda \left\{ A_{33}(x^2+y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} \right\} + \lambda^2 = 0$$

und daraus die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangenten

$$\left\{ A_{33}(x^2+y^2) - 2A_{13}x - 2A_{23}y + A_{11} + A_{22} \right\}^2 = 4\Delta S,$$

welche in Factoren zerlegbar ist

$$\left\{ (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 \right\} \left\{ (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 \right\}$$

und in α, β; α' β' die Brennpunktscoordinaten bestimmt.

Für die Parabel in der Gleichung in trimetrischen Coordinaten ist die das Paar der Brennpunkte repräsentirende Gleichung

$$\Theta' \Sigma = \Delta(\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2 - 2\xi_2\xi_3 \cos A_1 - 2\xi_3\xi_1 \cos A_2 - 2\xi_1\xi_2 \cos A_3)$$

und da die Coordinaten des unendlich entfernten Brennpunktes als Coordinaten des Pols der unendlich entfernten Geraden bekannt sind, so sind die Coordinaten des endlichen Brennpunktes

$$\frac{\Theta' A_{11} - \Delta}{A_{11} \sin A_1 + A_{12} \sin A_2 + A_{13} \sin A_3}, \frac{\Theta' A_{22} - \Delta}{A_{21} \sin A_1 + A_{22} \sin A_2 + A_{23} \sin A_3},$$

$$\frac{\Theta' A_{33} - \Delta}{A_{31} \sin A_1 + A_{32} \sin A_2 + A_{33} \sin A_3}.$$

28. Nun ist die Tangentialgleichung des Punktepaares, in welchem der imaginäre Kreis $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0$ von der Ebene

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

geschnitten wird,

$$(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2 = 0$$

und die Tangentialgleichung aller zu dem Schnitt von

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

mit der Fläche

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$$

confocalen Kegelschnitte ist daher

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 \left\{ (cd\beta'^2 + db\gamma'^2 + bc\delta'^2) + \lambda(\beta'^2 + \gamma'^2) \right\} \\
&+ \beta^2 \left\{ (da\gamma'^2 + ac\delta'^2 + cd\alpha'^2) + \lambda(\gamma'^2 + \alpha'^2) \right\} \\
&+ \gamma^2 \left\{ (ab\delta'^2 + bd\alpha'^2 + da\beta'^2) + \lambda(\alpha'^2 + \beta'^2) \right\} \\
&+ \delta^2 (bc\alpha'^2 + ca\beta'^2 + ab\gamma'^2) - 2(ad + \lambda)\beta'\gamma'\beta\gamma \\
&- 2(bd + \lambda)\gamma'\alpha'\gamma\alpha - 2(cd + \lambda)\alpha'\beta'\alpha\beta - 2\,bc\alpha'\delta'\alpha\delta \\
&- 2\,ca\beta'\delta'\beta\delta - 2\,ab\gamma'\delta'\gamma\delta = 0.
\end{aligned}$$

Wenn man nach den gewöhnlichen Regeln die Reciproke dieser Gleichung bildet, so erhält man sie als das Product des Quadrats von $(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w)$ in

$$\left\{ \Sigma^2 + \lambda \Sigma \Theta' + \lambda^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \Theta \right\},$$

wo $\Sigma = 0$ die Bedingung ausdrückt, unter der die Ebene

$$\alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

die gegebene Fläche zweiten Grades berührt. Indem man den bezeichneten zweiten Factor gleich Null setzt, erhält man diejenigen zwei Werthe von λ, welche den Tangentialgleichungen der Brennpunkte des fraglichen ebenen Schnittes entsprechen.

Beispiel 1. Man soll die Brennpunkte des Schnittes von $4x^2 + y^2 - 4z^2 + 1 = 0$ mit $x + y + z = 0$ bestimmen.

Die Gleichung für λ wird gefunden als $3\lambda^2 + 2\lambda = 16$, so dass $\lambda = 2$ oder $= -\frac{8}{3}$ ist. Die Gleichung des Artikels für $\alpha' = \beta' = \gamma' = 1$ und die gegebenen Werthe von a, b, c, d ist

$$\alpha^2 (-3 + 2\lambda) + 2\lambda\beta^2 + (5 + 2\lambda)\gamma^2 - 16\delta^2 - 2(4 + \lambda)\beta\gamma - 2(1 + \lambda)\gamma\alpha + 2(4 - \lambda)\alpha\beta = 0$$

und gibt durch Substitution von $\lambda = 2$

$$(\alpha + 2\beta - 3\gamma)^2 - 16\delta^2 = 0,$$

d. h., die Coordinaten der Brennpunkte respective gleich $\pm\frac{1}{4}, \pm\frac{2}{4}, \mp\frac{3}{4}$. Der andere Werth von λ gibt die imaginären Brennpunkte.

Beispiel 2. Man soll den Ort der Brennpunkte aller Centralschnitte der Fläche zweiten Grades $ax^2 + by^2 + cz^2 + 1 = 0$ bestimmen. Indem man $\delta' = 0$ setzt, wird die Gleichung für λ gefunden wie folgt:

$$\frac{\alpha'^2}{a + \lambda} + \frac{\beta'^2}{b + \lambda} + \frac{\gamma'^2}{c + \lambda} = 0.$$

Mit Hilfe dieser Relation wird die Tangentialgleichung der Brennpunkte auf

$$\left(\frac{\alpha\alpha'}{a + \lambda} + \frac{\beta\beta'}{b + \lambda} + \frac{\gamma\gamma'}{c + \lambda}\right)^2 - \frac{bc\alpha'^2 + ca\beta'^2 + ab\gamma'^2}{(a+\lambda)(b+\lambda)(c+\lambda)} - \delta^2 = 0$$

reducirt, und die Coordinaten des Brennpunktes sind daher

$$x = \frac{\alpha'}{a + \lambda},\ y = \frac{\beta'}{b + \lambda},\ z = \frac{\gamma'}{c + \lambda},\ w^2 = \frac{bc\alpha'^2 + ca\beta'^2 + ab\gamma'^2}{(a + \lambda)(b + \lambda)(c + \lambda)}.$$

Wenn man aus den ersten drei Gleichungen für α', β', γ' auflöst und in die Gleichung für λ substituirt, so erhält man

$$(ax^2 + by^2 + cz^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0;$$

die Auflösung der letzteren Gleichung für λ und Substitution in den Ausdruck für w^2 giebt endlich bie Gleichung des Ortes

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left[bcx^2\{(a-b)y^2 + (a-c)z^2\}^2 + cay^2\{(b-c)z^2 + (b-a)x^2\}^2 + abz^2\{(c-a)x^2 + (c-b)y^2\}^2\right]$$
$$= w^2\{(a-b)y^2 + (a-c)z^2\}\{(b-c)z^2 + (b-a)x^2\}\{(c-a)x^2 + (c-b)y^2\};$$

der Ort ist also eine Fläche achter Ordnung, die das Centrum der Fläche zweiten Grades zu einem vielfachen (6fachen) Punkte hat. Die linke Seite der Gleichung kann in der einfacheren Form

$$(x^2 + y^2 + z^2)(ax^2 + by^2 + cz^2)\{a(b-c)^2y^2z^2 + b(c-a)^2z^2x^2 + c(a-b)^2x^2y^2\}$$

geschrieben werden. Die Tangentenebenen im vielfachen Centralpunkt bilden 3 Paare, von denen eines, das der cyclischen Ebene der Fläche zweiten Grades, allein reell ist. Die Achsen der Fläche zweiten Grades sind doppelte und isolirte Gerade in der Fläche und sie enthält überdies noch eine andere imaginäre Gerade. Jede cyclische Ebene schneidet sie nach einer doppelten und zwei dreifachen geraden Linien. Die Fläche hat drei asymptotische Kegel, deren einen aus dem Centrum über dem imaginären unendlich entfernten Kreise, den zweiten als den Asymptotenkegel der Fläche zweiten Grades, und den dritten als einen Kegel vierten Grades, für welchen die Achsen Doppelerzeugende sind, beide letzteren reell in dem Falle der Hyperboloide. (Für die Discussion vergleiche eine Abhandlung von Painvin in „Nouvelles Annales" t. XXIII, p. 481.)

Beispiel 3. Man soll den Ort der Brennpunkte der zu einer Achse der Fläche parallelen Schnitte bestimmen.

($\alpha' = 0$.) Die Gleichung, welche in diesem Falle in Factoren zerfallen muss, ist

$$\alpha^2 \left\{(c+\lambda)\beta'^2 + (b+\lambda)\gamma'^2 + bc\delta'^2\right\} + \beta^2\left\{(a+\lambda)\gamma'^2 + ac\delta'^2\right\}$$
$$+ \gamma^2\left\{(a+\lambda)\beta'^2 + ab\delta'^2\right\} + \delta^2 a\,(c\beta'^2 + b\gamma'^2) - 2\,(a+\lambda)\,\beta'\gamma'\beta\gamma$$
$$- 2ca\beta'\delta'\beta\delta - 2ab\gamma'\delta'\gamma\delta = 0$$

und die Bedingung der Zerlegbarkeit

$$(a+\lambda)\,(b\gamma'^2 + c\beta'^2) + abc\delta'^2 = 0.$$

Dieser Bedingung unterworfen wird die Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{bc\,(a+\lambda)}\left\{(c+\lambda)\beta'^2 + (b+\lambda)\gamma'^2 + bc\delta'^2\right\} = \left\{\frac{\beta\beta'}{b} + \frac{\gamma\gamma'}{c} + \frac{a\delta\delta'}{a+\lambda}\right\}^2,$$

so dass $\beta' = by$, $\gamma' = cz$, $a\delta' = (a+\lambda)\,w$ ist und durch Substitution dieser Werthe in die Bedingungsgleichung $(a+\lambda)\,w^2 + acz^2 + aby^2 = 0$ erhalten wird. Man erhält also endlich durch Substitution in

$$bc\,(a+\lambda)\,x^2 = (c+\lambda)\,\beta'^2 + (b+\lambda)\,\gamma'^2 + bc\delta'^2$$

die Gleichung des verlangten Ortes

$$(by^2 + cz^2)\left\{b^2(a-c)\,y^2 + c^2(a-b)\,z^2 - abcx^2\right\} = w^2\left\{b^2(a-c)y^2\right.$$
$$\left. + c^2\,(a-b)\,z^2\right\}.$$

Offenbar können die Methoden dieser letzten Artikel direct auf Gleichungen in tetraedrischen Coordinaten angewendet werden.

29. Wenn vier Flächen zweiten Grades gegeben sind, so ist der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf dieselben sich in einem Punkte schneiden, eine Fläche, welche als die Jacobi'sche Fläche des Systems bezeichnet werden kann. Denn man hat zur Bildung der Gleichung dieses Ortes zwischen den Gleichungen der vier Polarebenen in Bezug auf die Flächen

$$U = 0,\; U' = 0,\; U'' = 0,\; U''' = 0$$
$$U_1x_1 + U_2x_2 + U_3x_3 + U_4x_4 = 0,$$
$$U'_1x_1 + U'_2x_2 + U'_3x_3 + U'_4x_4 = 0, \text{ etc.}$$

die x_1, x_2, x_3, x_4 zu eliminiren und erhält als Ausdruck des Ortes das Verschwinden der Determinante $\Sigma \pm U_1\; U'_2\; U''_3\; U'''_4$, d. i. der Jacobi'schen Functionaldeterminante des Systems der Flächengleichungen. (Vergl. „Analyt. Geom. der Kegelsch." Art. 353).

Der fragliche Ort ist also eine Fläche vierten Grades. Es ist offenbar, dass, wenn die Polaren eines beliebigen Punktes in Bezug auf die vier Flächen $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$, $U''' = 0$ sich in einem Punkte schneiden, die Polare in Bezug auf $\lambda U + \mu U' + \nu U'' + \pi U''' = 0$

durch denselben Punkt gehen wird. Die Jacobi'sche Fläche des Systems ist auch der Ort aller der Punkte, welche die Scheitel der im System $\lambda U + \mu U' + \nu U'' + \pi U''' = 0$ enthaltenen Kegel sind.

Deshalb ist der Ort der Scheitel aller Kegel zweiten Grades, welche durch sechs gegebene Punkte gehen, eine Fläche vierter Ordnung (vergl. Art. 72, Anm.); denn für $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$, $U''' = 0$, als die Gleichungen von vier Flächen zweiten Grades, welche durch sie hindurchgehen, kann jede andere Fläche zweiten Grades, welche sie enthält, durch $\lambda U + \mu U' + \nu U'' + \pi U''' = 0$ dargestellt werden, als welche die drei unabhängigen Constanten enthält, die zur vollständigen Bestimmung der Fläche nothwendig sind.

Wenn die Gleichung $\lambda U + \mu U' + \nu U'' + \pi U''' = 0$ zwei Ebenen darstellen kann, so liegt die Durchschnittslinie derselben in der Jacobi'schen Fläche.

Haben die vier gegebenen Flächen ein gemeinsames sich selbst conjugiertes Tetraeder, so reducirt sich die Jacobi'she Fläche derselben auf die Gruppe von vier Ebenen, welche dasselbe bilden; denn dann sind die Gleichungen der vier Flächen von der Form

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0, \text{ etc.},$$

die Differentiale, $U_1 = a_{11}x_1$ etc. und die Jacobi'sche Determinante wird

$$= x_1x_2x_3x_4 . \Sigma \pm a_{11}a_{22}'a_{33}''a_{44}''' .$$

Wenn eine der Functionen U das vollständige Quadrat eines linearen Factors L wäre, so ist L ein Factor in den Differentialen derselben und somit besteht die Jacobi'sche Fläche aus einer Ebene und einer Fläche dritten Grades. Wenn die vier gegebenen Flächen vier Punkte in einer Ebene gemein haben, so ist geometrisch evident, dass diese Ebene ein Theil der Jacobi'schen Fläche ist. Haben sie aber sämmtlich eine ebene Schnittcurve gemein, so zählt die Ebene derselben doppelt in der Jacobi'schen Fläche und diese besteht aus ihr und einer Fläche zweiten Grades, welche jenen enthält. Darum ist die Jacobi'sche Fläche von vier Kugeln eine Kugel, welche die gegebenen überall rechtwinklig durchschneidet. (Vergl. „Analyt. Geom. der Kegelschn." Art. 355.)

Wenn eine Fläche des Systems $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ die Fläche $U''' = 0$ berührt, so ist der Berührungspunkt nothwendig ein Punkt des hier betrachteten Ortes und kann daher nur in der Curve liegen, welche die Fläche $U''' = 0$ mit der Jacobi'schen Fläche des Systems gemeinsam hat. Wenn ferner eine Fläche des Systems $\lambda U + \mu U' = 0$ die Durchschnittscurven von $U'' = 0$ und $U''' = 0$ berühren, d. h. wenn in einem der Punkte, wo $\lambda U + \mu U' = 0$ die Curve $U'' = 0$, $U''' = 0$ schneidet, die Tangentenebene der ersten Fläche die Durchschnittslinie der Tangentenebenen der beiden letzten Flächen enthält, so ist der Berührungspunkt offenbar ein Punkt in der Jacobi'schen Fläche des Systems. Es existieren daher sechzehn Flächen vom System $\lambda U + \mu U' = 0$, welche die Curve $U'' = 0$, $U''' = 0$ berühren, denn die Jacobi'sche Fläche der vierten Ordnung schneidet die Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung in sechzehn Punkten. (Vergl. a. a. O. Art. 353.)

Wären drei Flächen zweiten Grades gegeben, so ist der Ort eines Punktes, dessen Polarebenen in Bezug auf dieselben sich in einer Geraden schneiden, eine Curve sechster Ordnung, welche die Jacobi'sche Curve des Systems genannt werden kann. Denn jeder Punkt dieser Art muss den Gleichungen genügen, welche das Determinantensystem

$$\left\| \begin{matrix} U_1, & U_1', & U_1'', & U_1''' \\ U_2, & U_2', & U_2'', & U_2''' \\ U_3, & U_3', & U_3'', & U_3''' \end{matrix} \right\|$$

durch Gleichsetzung mit Null ergibt. Ein solches System repräsentirt aber nach Art. 310 eine Curve sechster Ordnung.

30. Man soll die Gleichungen zweier Flächen zweiten Grades $U = 0$, $U' = 0$ auf die einfachste Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \quad a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0$$

reducieren.

Nach den Werthen der Invarianten des Systems $U + \lambda U'$ im Beispiel 1 des § 1 sind die Werthe der Constanten a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} als die Wurzeln der biquadratischen Gleichung

$$\Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 - \Theta'\lambda + \Delta' = 0$$

gegeben. Man findet sodann durch Auflösung der vier Gleichungen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = U, \quad a_{11}(a_{22}a_{33} + a_{33}a_{44} + a_{44}a_{22})x_1^2 + \text{etc.} = T,$$
$$a_{11}(a_{22} + a_{33} + a_{44})x_1^2 + \text{etc.} = T', \quad a_{11}x_1^2 + \text{etc.} = U'$$

die Werthe von x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 in Gliedern der bekannten Functionen U, U', T, T'. Genau gesprochen müsste man zuerst U und U' durch die vierte Wurzel von Δ dividieren, um sie auf eine Form zu reducieren, in welcher die Discriminante von U gleich Eins ist, es kommt aber auf dasselbe Resultat hinaus, bei unverändertem U und U' die T und T' als aus ihren Coefficienten berechnet durch Δ zu dividieren.

Beispiel 1. Man soll die Gleichungen $5x_1^2 - 11x_2^2 - 11x_3^2 - 6x_4^2 + 24x_2x_3 + 22x_3x_1 - 20x_1x_2 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4 = 0$, $25x_1^2 - 10x_2^2 - 15x_3^2 - 5x_4^2 + 38x_2x_3 + 46x_3x_1 - 30x_1x_2 - 10x_1x_4 + 10x_2x_4 + 18x_3x_4 = 0$ auf die Normalform reducieren.

Die Reciproken dieser Gleichungen sind

$$550\xi_1^2 + 1036\xi_2^2 + 850\xi_3^2 - 324\xi_4^2 + 2120\xi_2\xi_3 + 500\xi_3\xi_1 - 520\xi_1\xi_2$$
$$- 180\xi_1\xi_4 + 2088\xi_2\xi_4 + 1980\xi_3\xi_4 = 0,$$
$$3950\xi_1^2 + 800\xi_2^2 + 2750\xi_3^2 - 9720\xi_4^2 + 11200\xi_2\xi_3 + 4900\xi_3\xi_1$$
$$- 4160\xi_1\xi_2 + 25920\xi_2\xi_4 + 16200\xi_3\xi_4 = 0.$$

Die biquadratische Gleichung zur Bestimmung von λ ist

$$8100\left\{\lambda^4 - 10\lambda^3 + 35\lambda^2 - 50\lambda + 24\right\} = 0$$

es sind also a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} respective gleich 1, 2, 3, 4.

Darnach sind T und T' zu berechnen nach den Formeln

$$T = x_1^2\left\{A_{22}'(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + A_{33}'(a_{11}a_{33} - a_{13}^2) + A_{44}'(a_{11}a_{44} - a_{14}^2)\right.$$
$$+ 2A_{22}'(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}) + 2A_{24}'(a_{11}a_{24} - a_{12}a_{14}) + 2A_{34}'(a_{11}a_{34}$$

$-a_{13}a_{14})\} + \text{etc.} + 2x_2x_3\{A_{11}'(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{12}) + A_{44}'(a_{44}a_{23} - a_{24}a_{34})$
$+ A_{24}'(a_{24}a_{23} - a_{22}a_{34}) + A_{34}(a_{34}a_{23} - a_{33}a_{24})$
$+ A_{13}'(a_{23}a_{13} - a_{33}a_{12}) + A_{12}'(a_{23}a_{12} - a_{22}a_{13}) + A_{23}'(a_{23}^2 - a_{22}a_{33})$
$+ A_{14}'(2a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24})\} + \text{etc.}$
$T' = x_1^2\ \{A_{22}(a_{11}'a_{22}' - a_{12}'^2) + \text{etc.}$
und man erhält durch Division der so berechneten Werthe mit $\Delta\,(=8100)$ die Bestimmungsgleichungen für X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_4^2 wie folgt:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 5x_1^2 - 11x_2^2 - 11x_3^2 - 6x_4^2 + 24x_2x_3 + 22x_3x_1 - 20x_1x_2 + 8x_2x_4 + 4x_3x_4,$$

$$X_1^2 + 2X_2^2 + 3X_3^2 + 4X_4^2 = 25x_1^2 - 10x_2^2 - 15x_3^2 - 5x_4^2 + 38x_2x_3 + 46x_3x_1 - 30x_1x_2 - 10x_1x_4 + 10x_2x_4 + 18x_3x_4,$$

$$9X_1^2 + 16X_2^2 + 21X_3^2 + 24X_4^2 = 161x_1^2 - 100x_2^2 - 135x_3^2 - 55x_4^2 + 306x_2x_3 + 342x_3x_1 - 250x_1x_2 - 70x_1x_4 + 70x_2x_4 + 126x_3x_4,$$

$$26X_1^2 + 38X_2^2 + 42X_3^2 + 44X_4^2 = 280x_1^2 - 300x_2^2 - 360x_3^2 - 170x_4^2 + 772x_2x_3 + 776x_3x_1 - 628x_1x_2 - 108x_1x_4 + 180x_2x_4 + 252x_3x_4$$

Dann ergibt sich aus $24U - U' + T' - T$ der Werth

$$6X_1^2 = -6\,(2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4)^2.$$

Und in analoger Weise

$$X_2^2 = -(x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4)^2, \quad X_3^2 = (3x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2,$$
$$X_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2.$$

Beispiel 2. Nachdem gezeigt worden ist, dass die Grössen x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2 in Function der Ausdrücke U, U', T, T' ausdrückbar sind, so folgt, dass das Quadrat der Jacobi'schen Determinante des Flächensystems ebenfalls aus jenen mit Hilfe der Invarianten bestimmt werden kann. Das Resultat der Berechnung ist

$$\begin{aligned}
J^2 &= \Delta T^4 - \Theta T^3 T' + \Phi T^2 T'^2 - \Theta' T T'^3 - \Delta' T^4 \\
&+ U' \{(\Theta^2 - 2\Delta\Phi)\,T^3 + (\Theta\Phi - 3\Theta'\Delta)\,T^2T' + (\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta')\,TT'^2 \\
&\qquad - \Delta'\Theta T^3\} \\
&+ U \{(\Theta'^2 - 2\Delta'\Phi)\,T'^3 + (\Theta'\Phi - 3\Theta\Delta')\,T'^2T + (\Theta\Theta' - 4\Delta\Delta')\,T'T^2 \\
&\qquad - \Delta\Theta' T^3\} \\
&+ \Delta U'^2 \{(\Phi^2 - 2\Theta\Theta' + 2\Delta\Delta')\,T^2 - (\Theta'\Phi - 3\Theta\Delta')\,TT' + \Phi\Delta' T'^2\} \\
&+ \Delta' U^2 \{(\Phi^2 - 2\Theta\Theta' + 2\Delta\Delta')\,T'^2 - (\Theta\Phi - 3\Theta'\Delta)\,TT' + \Phi\Delta T^2\} \\
&+ T\{(\Theta'^2 - 2\Delta'\Phi)\,U'^3\Delta^2 - (\Theta'\Phi^2 - 2\Theta\Theta'^2 + 5\Theta'\Delta'\Delta - \Theta\Phi\Delta')\,U'^2U\Delta \\
&\qquad + (\Theta^2\Phi - 2\Phi^2\Delta - \Theta\Theta'\Delta + 4\Delta'\Delta^2)\,\Delta'U'U^2 - \Delta\Delta'^2\Theta U^3\} \\
&+ T'\{(\Theta^2 - 2\Delta\Phi)\,U^3\Delta'^2 - (\Theta\Phi^2 - 2\Theta'\Theta^2 + 5\Theta\Delta\Delta' - \Theta'\Phi\Delta)\,U^2U'\Delta' \\
&\qquad + (\Theta'^2\Phi - 2\Phi^2\Delta' - \Theta\Theta'\Delta' + 4\Delta\Delta'^2)\,\Delta UU'^2 - \Delta^2\Delta'\Theta' U'^3\} \\
&+ \Delta'^2\Delta^3 U'^4 + \Delta^2\Delta'^3 U^4 - UU'^3\Delta^2\{\Theta'^3 - 3\Theta'\Phi\Delta' + 3\Theta\Delta'^2\} \\
&\qquad - U^3U'\Delta'^2\{\Theta^3 - 3\Theta\Phi\Delta + 3\Theta'\Delta^2\} \\
&\qquad + \Delta\Delta' U^2U'^2\{\Phi^3 - 3\Phi\Delta\Delta' + 3\Theta^2\Delta' + 3\Theta'^2\Delta - 3\Theta\Theta'\Phi\}
\end{aligned}$$

Wenn man in der Theorie der Kegelschnitte die Jacobi'sche Determinante zu den drei Curven $S=0$, $S'=0$, $F=0$ bildet, so erhält man ebenfalls das gemeinschaftliche sich selbst conjugierte Dreieck und die dem Vorigen entsprechende Relation

$$J^2 = F^3 - F^2(\Theta S' + \Theta S) + F(\Delta'\Theta S^2 + \Delta\Theta' S'^2) + (\Theta\Theta' - 3\Delta\Delta')FSS' - \Delta'^2\Delta S^3 - \Delta\Delta'^2 S'^3 + \Delta'(2\Delta\Theta' - \Theta^2)S^2S' + \Delta(2\Delta'\Theta - \Theta'^2)SS'^2.$$

31. Sowie die Betrachtungen der früheren §§ von der Invarianten-Natur der Coefficienten in der Discriminante von $U+\lambda U'=0$ ausgingen, so kann eine andere Reihe von Entwickelungen an die Discriminante von $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ geknüpft werden; die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von λ, μ, ν sind Invarianten des Systems. Unter ihnen sind zwei, welche eine besondere Aufmerksamkeit verdienen, insofern sie auch Invarianten von irgend dreien unter den Flächen des Systems $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ sind. Wir wollen sie durch I und J bezeichnen.

Die Invariante I verschwindet immer, wenn vier von den Schnittpunkten der Flächen $U=0$, $U'=0$, $U''=0$ in einer Ebene liegen, oder in anderen Worten, wenn es möglich ist, Werthe von λ, μ, ν zu bestimmen, für welche $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ der Ausdruck zweier Ebenen ist. Wenn wir, wie Art. 295, die Gleichungen der Flächen in der Form

$$U = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2,$$
$$U' = a_1'x_1^2 + a_2'x_2^2 + a_3'x_3^2 + a_4'x_4^2 + a_5'x_5^2,$$
$$U'' = a_1''x_1^2 + a_2''x_2^2 + a_3''x_3^2 + a_4''x_4^2 + a_5''x_5^2$$

schreiben, wo $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ ist, so ist zu zeigen, dass I das Product der zehn Determinanten $(a_1\, a_2'\, a_3'')$ etc. Denn es ist $(a_1 a_2' a_3'')x_1^2 + (a_4 a_2' a_3'')x_4^2 + (a_5 a_2' a_3'')x_5^2 = 0$ eine Fläche des Systems $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$, welche sich auf das System zweier Ebenen reduciert, sobald eine der Determinanten $(a_1 a_2' a_3'')$, verschwindet. Daher ist I von der zehnten Ordnung in den Coefficienten von jeder der Flächen. Eben diess kann auch in folgender Weise eingesehen werden: Sind $U=0$, $U'=0$, $U''=0$, $U'''=0$, vier Flächen zweiten Grades, welche durch dieselben sechs Punkte gehen, so hat das Problem, λ, μ, ν so zu bestimmen, dass $U + \lambda U' + \mu U'' + \nu U''' = 0$ ein Paar von Ebenen darstelle, zehn Lösungen, da durch sechs Punkte zehn Paare von Ebenen gelegt werden können.

Man kann aber die Grösse λ auch bestimmen, indem man die Invariante I des Systems $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ bildet und darnach für jeden Coefficienten a_1 von U die Verbindung $a_1 + \lambda a_1'$ substituirt. Das Substitutionsresultat muss λ im zehnten Grade enthalten, da dem Problem zehn verschiedene Werthe von λ als Lösungen entsprechen; also muss I die Coefficienten von U in diesem nämlichen Grade enthalten.

Die Invariante des Systems, welche wir J nennen wollen, verschwindet stets, wenn irgend zwei von den acht Durchschnittspunkten der Flächen $U=0$, $U'=0$, $U''=0$ zusammenfallen, d. i., wenn diese drei Flächen in einem ihnen gemeinschaftlichen Punkte Tangentenebenen haben, welche sich in einer Geraden durchschneiden. Cayley hat diese Invariante die Berührungs- (Tact-) Invariante des Systems von drei Flächen genannt; die in § 3 betrachtete ist die Berührungs-Invariante für zwei Flächen. (Vgl. Art. 323.) Jeder Punkt dieser Art ist der Scheitel eines Kegels, welcher dem System $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ angehört. Denn wenn wir ihn als Anfangspunkt der Coordinaten und die bezüglichen Tangentenebenen als $x = 0$, $y = 0$, $ax + by = 0$ nehmen, so sind die Gleichungen der Flächen $x + u_2 = 0$, $y + u_2' = 0$, $ax + by + u_2'' = 0$, wenn u_2, u_2', u_2'' die Glieder zweiten Grades bezeichnen; alsdann ist aber $aU + bU' - U'' = 0$ ein Kegel zweiten Grades, welcher den Anfangspunkt der Coordinaten zum Scheitel hat.

Diese Invariante J ist vom sechzehnten Grade in den Coefficienten von jeder der Flächen. Denn wenn wir in den Ausdruck J für jeden Coefficienten a von U das Binom $a + \lambda a'$ substituiren, wo a' der entsprechende Coefficient der Gleichung einer anderen Fläche $U' = 0$ ist, so ist offenbar, dass der Grad des Resultats in λ mit der Zahl der Flächen des Systems $U + \lambda U' = 0$ übereinstimmen muss, welche die Durchnittscurve der Flächen $U' = 0$, $U'' = 0$ berühren; er muss also nach dem, was in § 29 gefunden ward, gleich sechzehn sein.

32. Wenn $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 + a_5 x_5^2 = 0$ eine Kegelfläche darstellt, so genügen die Coordinaten des Scheitels den vier Gleichungen, welche durch Vergleichung der Differentiale nach $x_1, \ldots x_4$ mit Null gebildet werden, d. h. wegen

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

den Gleichungen $a_1 x = a_5 x_5$, $a_2 x_2 = a_5 x_5$, etc.

Man kann also durch $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$, $\frac{1}{a_4}$, $\frac{1}{a_5}$ die Coordinaten des Scheitels darstellen, und erhält durch Substitution derselben in die Relation, welcher die $x_1, \ldots x_5$ stets genügen, die Discriminante der Fläche in der Form

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} = 0.$$

Wenn wir also die Gleichungen $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$ in der hier gebrauchten Form schreiben, so ist die Discriminante von

$$\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$$

$$\frac{1}{\lambda a_1 + \mu a_1' + \nu a_1''} + \frac{1}{\lambda a_2 + \mu a_2' + \nu a_2''} + \text{etc.} = 0.$$

Und wenn $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ einen Kegel repräsentiert, so erhalten wir durch Substitution der Coordinaten des Scheitels in die Gleichungen von einer der Flächen

$$\frac{a_1}{(\lambda a_1 + \mu a_1' + \nu a_1'')^2} + \frac{a_2}{(\lambda a_2 + \mu a_2' + \nu a_2'')^2} + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{a_1'}{(\lambda a_1 + \mu a_1' + \nu a_1'')^2} + \frac{a_2'}{(\lambda a_2 + \mu a_2' + \nu a_2'')^2} + \text{etc.} = 0, \text{ etc.}$$

Gleichungen also, welche die Differentiale der Discriminante in Bezug auf λ, μ, ν sind.

Wir erhalten also den Satz: Wenn man die Discriminante von $\lambda U + \mu U' + \nu U'' = 0$ und darnach die Discriminante derselben in Bezug auf λ, μ, ν bildet, so ist J ein Factor im Resultat. Man erkennt leicht, dass auch I ein Factor im Resultat sein muss, es ist in der That dasselbe gleich I^2J.*)

---

*) Cayley hat ein entsprechendes Theorem für U und V als homogene Functionen zweier Veränderlichen vom Grade n gegeben. Wenn wir die Discriminante von $U + \lambda V$ und nachher die Discriminante derselben in Bezug auf λ bilden, so ist das Resultat gleich AB^2C^3, wenn A das Resultat der Elimination zwischen $U = 0$ und $V = 0$ ist; wenn B eine Function vom Grade $2(n-2)(n-3)$ in beiden Reihen von Coefficienten ist, welche verschwindet, sobald λ so bestimmt werden kann, dass $U + \lambda V$ zwei Paare von gleichen Factoren hat; und wenn C eine Function vom Grade $3(n-2)$ ist, welche verschwindet, sobald $U + \lambda V = 0$ drei gleiche Factoren hat. Wenn U und V homogene Functionen von drei Variabeln sind, so ist die Discriminante nach λ von der Discriminante von $U + \lambda V$ stets gleich AB^2C^3, wenn A die Function vom Grade $3n(n-1)$ in den beiderlei Coefficienten ist, welche die Bedingung der Berührung zwischen $U = 0$ und $V = 0$ giebt; wenn B stets verschwindet, sobald λ so bestimmt werden kann, dass $U + \lambda V = 0$ zwei Doppelpunkte hat, und C, sobald es so bestimmt werden kann, dass $U + \lambda V = 0$ eine Spitze habe. Wenn $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ die Gleichungen von drei Kegelschnitten sind, so ist die Discriminante der Discriminante von $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$ in Bezug auf λ, μ, ν gleich AB^2, wenn $A = 0$ die Bedingung ist, unter welcher die Curven sich durchschneiden, und $B = 0$ diejenige, unter welcher $\lambda U + \mu V + \nu W = 0$ ein vollständiges Quadrat ist.

NB. Zu den Literatur-Nachweisungen tragen wir als sehr beachtenswerth nach die Note von A. Cayley über die Fläche vierter Ordnung von Steiner („Journal f. Mathem.“, Bd. LXIV, p. 172.) (Vergl. oben p. 356 u. die §§ 6, 1 im Zusatz VI); und die inhaltreiche Abhandlung von Eug. Beltrami, „Ricerche di Analisi applicata alla Geometria“ im II. u. III. Bde. des „Giornale di Matematiche von Neapel (1864, 1865).

Verzeichniss bemerkter Druckfehler.

Seite 39 Zeile 5 von unten lies yz statt y.
„ 46 Anmerkung Zeile 9 von unten lies l statt p.
„ 57 Zeile 16 von oben lies Krümmungslinien statt Krümmungslinie.
„ 64 Zeile 2 von unten lies seinem statt seinen.
„ 80 „ 17 „ „ „ $(r + n - 9)$ statt $(r + n - g)$.
„ 80 „ 5 „ „ „ der statt den.
„ 82 „ 21 „ oben „ erhält statt erhlät.
„ 125 Anmerkung letzte Zeile füge hinzu „Comptes rendus“ t. LVIII, p. 994.
„ 131 Anmerkung **) lies Bd. LXIII statt Bd. XLIII.
„ 136 Zeile 7 von unten lies α statt x.
„ 149 die Hinweisung auf die neue Ausgabe von de Saint Venant ist zu streichen.
„ 163 Zeile 13 von unten lies und ihrer statt ihrer.
„ 171 „ 8 „ oben „ 124 statt 129.
„ 176 „ 5 „ unten „ 134 „ 137.
„ 204 „ 3 „ „ „ Hilfswinkel statt Hilfsmittel.
„ 252 „ 6 „ „ streiche den Punkt am Ende der Formel.
„ 302 „ 4 „ oben lies 159 statt 158.
„ 350 „ 14 „ „ „ Artikel 5 p. 568.
„ 352 „ 14 „ unten „ Fläche statt Flächen.
„ 362 „ 3 „ oben „ $nb'\lambda^{n-1}\mu$ statt $b'\lambda^{n-1}\mu$.
„ 378 „ 12 „ unten „ $\mathbf{B}_3$ statt B_3.
„ 383 „ 3 „ „ „ τ^2 „ τ^3.

SALMON.

GEOMETRIE
DES
RAUMES.