ANALYTISCHE
GEOMETRIE DES RAUMES

VON

GEORGE SALMON.

DEUTSCH BEARBEITET

VON

Dr. WILHELM FIEDLER.

I. THEIL.

DIE ELEMENTE UND DIE THEORIE DER FLÄCHEN ZWEITEN GRADES.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1863.

DIE ELEMENTE
DER
ANALYTISCHEN GEOMETRIE
DES RAUMES

UND DIE

THEORIE DER FLÄCHEN ZWEITEN GRADES.

VON

GEORGE SALMON.

EIN LEHRBUCH FÜR HÖHERE UNTERRICHTSANSTALTEN

DEUTSCH BEARBEITET

VON

Dr. WILHELM FIEDLER.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1863.

VORWORT.

Der analytischen Geometrie der Kegelschnitte und den Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen von George Salmon lasse ich hier von der analytischen Geometrie des Raumes den ersten Theil in deutscher Bearbeitung folgen.

Das Werk „A Treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions“ meines verehrten Freundes Rev. George Salmon ist ein Buch von bedeutendem Umfange, es umfasst die analytische Geometrie des Raumes von den Elementen an bis zu der Untersuchung der Probleme, welche die Mathematiker der Gegenwart beschäftigen. Ich habe mich für eine Trennung des umfangreichen Materials in zwei Theile entschieden, deren einer die Theorie der Flächen zweiten Grades insbesondere enthält, indess der andere der Untersuchung der algebraischen Flächen und der Raumcurven im ganzen Umfange gewidmet ist, und ich hoffe dadurch die Wirksamkeit des Buches noch erleichtert zu haben, das trotz seines grossen Umfangs und obwohl es erst im Sommer vorigen Jahres erschien in England bereits fast vergriffen ist.

Durch Vermehrung der Beispiele namentlich in den Elementen, durch die Gegenüberstellung der Systeme von Punktcoordinaten und Ebenencoordinaten und die Darlegung ihres Gebrauchs, durch weitere Ausführung einiger Theorien, wie der von den ebenen Schnitten insbesondere den geradlinigen Schnitten, und von den sich selbst conjugierten

Tetraedern oder den Systemen harmonischer Pole und Polarebenen der Flächen zweiten Grades, etc. habe ich diesen ersten Theil des Werkes zu einem Lehrbuch für höhere Unterrichtsanstalten vollkommener geeignet zu machen gesucht. Ich hoffe, dass es als ein solches dazu brauchbar erscheint, in die gegenwärtige wissenschaftliche Auffassung der analytischen Geometrie des Raumes einzuführen, d. h. zur Aneignung der wichtigen Errungenschaften der letzten Epoche in diesem Theile der mathematischen Arbeit hin zu leiten. In diesem Sinne habe ich die Theorie der Focalcentra und Focalkugeln in den Artikeln 211 f. und die Untersuchung des Feuerbach'schen Kreises bei sphärischen Dreiecken in den Artikeln 239, 240 hinzugefügt; ich habe es aber nicht für statthaft und nicht für nöthig gehalten, nach systematischer Vollständigkeit zu streben und darf mir in dieser Beziehung wohl erlauben, auf die „Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden" (Leipzig, B. G. Teubner, 1860) zu verweisen, deren Vergleichung an sehr zahlreichen Stellen zu weiteren Ausführungen anleiten wird.

Die Herausgabe des zweiten Theils der analytischen Geometrie des Raumes soll bald erfolgen, wenn Zeit und Kraft mir dazu werden und die fördernde Theilnahme des mathematischen Publikums mir auch ferner nicht versagt ist.

Chemnitz, im September 1863.

Wilhelm Fiedler.

Inhaltsverzeichniss.

I. Kapitel.

Der Punkt; die Theorie der Projectionen und Transformation der Coordinaten.

II. Kapitel.

Interpretation der Gleichungen.

III. Kapitel.

Die Ebene und die gerade Linie.

IV. Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

V. Kapitel.

Classification der Flächen zweiten Grades.

VI. Kapitel.

Ableitung von Eigenschaften der Flächen zweiten Grades aus speciellen Formen ihrer Gleichungen.

VII. Kapitel.

Methoden der abgekürzten Bezeichnung.

VIII. Kapitel.

Confocale Flächen zweiten Grades.

IX. Kapitel.

Kegel und sphärische Kegelschnitte.

I. Kapitel.

Der Punkt; Theorie der Projectionen und Transformation der Coordinaten.

1. Wie die Lage eines Punktes C in einer Ebene bestimmt wird, indem man ihn auf zwei in dieser Ebene gelegene Coordinatenachsen OX, OY bezieht, ist bekannt. Um die Lage eines Punktes P im Raume zu bestimmen, haben wir nun eine dritte Achse OZ zu den beiden schon vorhandenen hinzuzufügen, welche nicht in ihrer Ebene liegt. Wenn wir dann die der Linie OZ parallel gemessene Entfernung des Punktes P von der Ebene XOY und die x und y Coordinaten des Punktes C kennen, in welchem die durch P gehende Parallele zu OZ die Ebene schneidet, so ist die Lage des Punktes P offenbar vollständig bestimmt.

Von den drei gegebenen Gleichungen

$$x = a, \; y = b, \; z = c$$

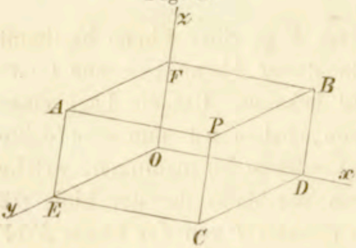
bestimmen die beiden ersten den Punkt C und man erhält den Punkt P, indem man durch ihn eine Parallele zu OZ zieht und auf ihr die Länge $CP = c$ abträgt. Es ist auch bekannt, wie die Lage des Punktes C in der Ebene XOY von den Vorzeichen der Grössen a und b bedingt wird; in derselben Weise bestimmt das Zeichen von c die Seite der Ebene XOY, nach welcher die Linie CP zu messen ist, indem man annimmt, dass alle auf der einen Seite der Ebene gemessenen Linien dieser Art als positiv gelten, während die auf der andern Seite derselben gemessenen negativ sind. Man betrachtet z. B. die z aller über der Ebene XOY gelegenen Punkte als positiv und die z aller unter derselben gelegenen Punkte als negativ unter der Voraussetzung, dass diese Ebene selbst eine Horizontalebene ist. Es erhellt zugleich, dass für jeden in der Ebene XOY gelegenen Punkt $z = 0$ ist.

Die von den Achsen miteinander gebildeten Winkel sind willkürlich innerhalb der durch die vorigen Bestimmungen gezogenen Grenzen; die Achsen werden aber speciell als rectangulär bezeichnet, wenn die Linien OX und OY rechtwinklich zu einander sind und die Linie OZ normal zur Ebene XOY ist.

2. Wir haben die Methode der Bestimmung eines Punktes im Raume in der Weise auseinandergesetzt, welche die einfachste scheint für diejenigen, welche mit der analytischen Geometrie in der Ebene vertraut sind, und gehen nun dazu weiter, sie in einer mehr symmetrischen Art darzustellen.

Wir bedienen uns zu dieser Bestimmung der Verbindung von drei Coordinatenachsen OX, OY, OZ, welche sich in einem Punkte O schneiden, den wir wie in der Planimetrie als den Anfangspunkt bezeichnen. Die drei Achsen heissen die Achsen der x, y, z respective. Sie bestimmen auch die drei Coordinatenebenen, nämlich die Ebenen XOY, YOZ, ZOX, welche wir als die Ebenen xy, yz, zx respective benennen werden.

Fig. 1.



Da nun offenbar

$$PA = CE = a, \; PB = CD = b, \; PC = c$$

ist, so ist die Lage eines Punktes P bekannt, wenn seine drei Coordinaten gegeben sind, d. h. wenn die drei Geraden PA, PB, PC bekannt sind, welche durch ihn den Achsen der x, der y, der z respective parallel bis zum Durchschnitt mit der Ebene der jedesmaligen beiden andern Achsen gezogen werden.

Da ferner

$$OD = a, \; OE = b, \; OF = c$$

ist, so kann der durch die Gleichungen

$$x = a, \; y = b, \; z = c$$

bestimmte Punkt durch folgende symmetrische Construction gefunden werden: Man messe in der Achse der x die Länge $OD = a$ und lege durch D die Ebene $PBDC$ parallel der Ebene yz, messe in der Achse der y die Länge $OE = b$ und lege durch E die Ebene $PCEA$ parallel zu zx, und endlich in der Achse der z die Länge $OF = c$ und lege durch F die Ebene $PAFB$ parallel zu xy;

der Durchschnittspunkt der drei so bestimmten Ebenen ist P, der zu bestimmende Punkt.

3. Die Punkte A, B, C werden als die Projectionen des Punktes P auf die drei Coordinatenebenen bezeichnet; wenn die Achsen rectangulär sind, heissen sie insbesondere orthogonale Projectionen. Da wir uns im Folgenden zu allermeist mit orthogonalen Projectionen beschäftigen werden, so sollen, wenn wir ohne nähere Bezeichnung von Projectionen sprechen, immer orthogonale Projectionen verstanden sein, während das Gegentheil ausdrücklich bezeichnet werden soll. Und da wir von einigen Eigenschaften der orthogonalen Projectionen oft Gebrauch machen werden, so wollen wir dieselben, obgleich mehrere von ihnen schon in der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte" (Artikel 451) bewiesen wurden, hier zusammenstellen.

Die Länge der Orthogonalprojection einer begrenzten geraden Linie auf irgend eine Ebene ist gleich dem Producte der Linie in den cosinus des Winkels, welchen sie mit dieser Ebene bildet.*)

---

*) Der von einer Linie mit einer Ebene gebildete Winkel ist derselbe, welchen die Linie mit ihrer Orthogonalprojection auf diese Ebene einschliesst.

Der Winkel zwischen zwei Ebenen wird durch den Winkel der Normalen gemessen, welche man in ihnen auf ihrer Durchschnittslinie in einem beliebigen Punkte derselben errichten kann; oder auch durch den Winkel der Normalen, die man von irgend einem Punkte auf beide Ebenen fällt.

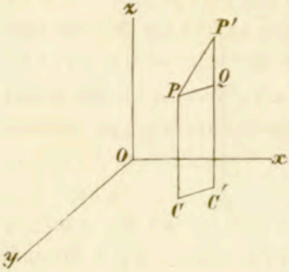
Der Winkel zwischen zwei Linien, welche sich nicht schneiden, ist durch den Winkel gemessen, den zwei Parallelen zu denselben von einem Punkte aus einschliessen.

Wenn wir von dem Winkel zweier Linien sprechen, so ist es wünschenswerth, ohne Zweideutigkeit auszudrücken, ob wir den spitzen oder stumpfen Winkel derselben verstehen. Dazu setzen wir voraus, dass z. B. für den Winkel der Linien PP', CC' in Figur 2 diese Linien in dem Sinne von P nach P' und von C nach C' durchlaufen werden und dass für die Parallele PQ derselbe Sinn festgehalten werde. Alsdann ist der Winkel zwischen diesen Linien ein spitzer. Wenn wir aber von dem Winkel der Linien PP' und $C'C$ sprechen, so ist die Parallele PQ' nach entgegengesetztem Sinne zu ziehen und wir erhalten den stumpfen Winkel, welchen die Linien mit einander bilden.

Wenn wir von den Winkeln sprechen, welche eine gerade Linie OP mit den Achsen bildet, so verstehen wir darunter immer die Winkel, welche OP mit den positiven Seiten der Achsen OX, OY, OZ einschliesst.

Sind PC und $P'C'$ die von P und P' auf die Ebene XOY gefällten Normalen, so ist CC' die Orthogonalprojection der Linie PP' auf diese Ebene, und die Vervollständigung des Rechtecks $PCC'Q$ durch die Parallele PQ zu CC' liefert

Fig. 2.

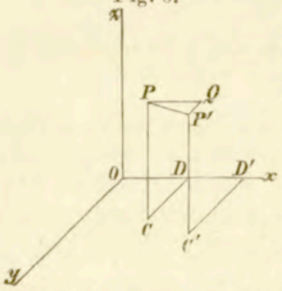


$$PQ = CC' = PP' \,.\, \cos P'PQ.$$

4. Die Projection einer in einer beliebigen Ebene enthaltenen Fläche auf eine Ebene ist gleich dem Producte der Originalfläche in den cosinus des von beiden Ebenen gebildeten Winkels. („Analyt. Geom. der Kegelschn." Artikel 451.) Denn wenn die Ordinaten beider Figuren zur Durchschnittslinie ihrer Ebenen normal genommen sind, so ist jede Ordinate der Projection das Product aus der entsprechenden Ordinate des Originals in den cosinus des von beiden Ebenen gebildeten Winkels. Und wenn zwei Figuren von derjenigen Beschaffenheit sind, dass die denselben Abscissen entsprechenden Ordinaten in unveränderlichem Verhältniss stehen, so sind die Flächen dieser Figuren selbst in dem nämlichen Verhältniss. („Analyt. Geom. der Kegelschnitte" Artikel 255.)

5. Die Projection eines Punktes auf eine gerade Linie ist der Durchschnittspunkt derselben mit einer durch den Punkt gehenden und zu ihr normalen Ebene; es sind also beispielsweise in Figur 1 für rectanguläre Achsen D, E, F die drei Projectionen des Punktes P auf die Achsen.

Fig. 3.



Die Projection einer begrenzten geraden Linie auf eine andere Gerade ist gleich dem Product der ersteren Linie in den cosinus des von beiden gebildeten Winkels.

Sei PP' die gegebene Linie und DD' ihre Projection auf OX, so ziehen wir durch P eine zu OX parallele Gerade bis zum Durchschnitt mit der Ebene $P'C'D'$ in Q; da beide auf einander normal sind, so ist PQP' ein rechter Winkel und

$$PQ = PP' . \cos P'PQ,$$

endlich aber

$$PQ = DD',$$

weil diese Geraden die in zwei parallelen geraden Linien von zwei parallelen Ebenen gebildeten Abschnitte sind.

6. Für drei beliebige Punkte P, P', P'' ist die Projection von PP'' auf eine beliebige Gerade der Summe der Projectionen von PP' und $P'P''$ auf dieselbe Gerade gleich.

Wenn D, D', D'' die Projectionen der drei Punkte sind, so ist DD'' die Summe von DD' und $D'D''$, so lange D' zwischen D und D'' liegt. Liegt aber D'' zwischen D und D', so ist DD'' die Differenz von DD' und $D'D''$, und da der Sinn des Uebergangs von D' nach D'' der entgegengesetzte von dem von D nach D' ist, so ist DD'' die algebraische Summe von DD' und $D'D''$.

Dass die Projection von $P'P''$ im letzteren Falle mit dem negativen Zeichen zu nehmen ist, geht auch daraus hervor, dass in diesem Falle die Länge der Projection das Product von $P'P''$ in den cosinus eines stumpfen Winkels ist.

Für eine beliebige Anzahl von Punkten P, P', P'', P''', etc. ist allgemein die Projection von PP''' auf eine beliebige Gerade gleich der Summe der Projectionen von PP', $P'P''$, $P''P'''$ auf dieselbe Gerade.

7. Wir werden oft Gelegenheit haben, von dem folgenden speciellen Falle des Vorhergehenden Gebrauch zu machen.

Die Summe der Projectionen der Coordinaten des Punktes P auf eine beliebige Gerade ist der Projection seines Radius Vectors auf dieselbe Gerade gleich.

Denn die Betrachtung der Punkte O, D, C, P in Figur 1 oder 3 zeigt, dass die Projection von OP der Summe der Projectionen von OD $(= x)$, DC $(= y)$ und CP $(= z)$ gleich sein muss.

8. Nachdem wir diese auf die Projectionen bezüglichen Grundsätze begründet haben, die wir häufig anwenden werden, kehren wir zu dem eigentlichen Gegenstand dieser Untersuchung zurück.

Die Coordinaten desjenigen Punktes, welcher die Entfernung zwischen zwei Punkten x', y', z'; x'', y'', z'' im dem Verhältniss $m:n$ theilt, sind

$$x = \frac{mx'' + nx'}{m+n}, \quad y = \frac{my'' + ny'}{m+n}, \quad z = \frac{mz'' + nz'}{m+n}$$

Der Beweis für den entsprechenden Satz der analytischen Planimetrie beweist auch den gegenwärtigen Satz. (Vergl. „Analyt. Geom. der Kegelschn.“ Artikel 7.)

Wenn wir das Verhältniss $m:n$ als unbestimmt betrachten, so drücken dieselben Gleichungen die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Verbindungslinie jener beiden Punkte aus.

9. Eine der Seiten eines Dreiecks ist im Verhältniss $m:n$ und die Verbindungslinie des Theilpunktes mit der gegenüberliegenden Ecke im Verhältniss $(m+n):l$ getheilt, welches sind die Coordinaten des letzteren Theilpunktes?

Sie sind

$$x = \frac{lx' + mx'' + nx'''}{l+m+n}, \quad y = \frac{ly' + my'' + ny''}{l+m+n},$$

$$z = \frac{lz' + mz'' + nz'''}{l+m+n},$$

wie man genau in derselben Art beweist, in welcher das entsprechende Theorem der Planimetrie bewiesen wurde. („Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 7.) Wenn l, m, n unbestimmte Grössen sind, so drücken dieselben Gleichungen die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Ebene des betrachteten Dreiecks aus.

Beispiel. Die geraden Linien, welche die Mittelpunkte der gegenüber liegenden Kanten eines Tetraeders verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

Denn die x von zwei solchen Mittelpunkten sind

$$\frac{x' + x''}{2}, \quad \frac{x''' + x''''}{2},$$

das x des Mittelpunktes ihrer Verbindungslinie ist folglich

$$\frac{x' + x'' + x''' + x''''}{4};$$

analoge Ausdrücke geben die Coordinaten y und z dieses Punktes und ihre Symmetrie zeigt, dass sie auch den Verbindungslinien der andern Mittelpunktspaare angehören.

Die geraden Linien, welche die Ecken des Tetraeders mit den Schwerpunkten der Gegenflächen verbinden, gehen durch denselben Punkt. Denn das x eines solchen Schwerpunkts ist

$$\frac{x' + x'' + x'''}{3},$$

und wir erhalten denselben Werth wie vorher, wenn wir die Verbindungslinie derselben mit der gegenüberliegenden Ecke nach dem Verhältniss 3 : 1 theilen.

10. Man soll die Entfernung zwischen zwei Punkten P, P' bestimmen, welche den rectangulären Coordinaten x', y', z'; x'', y'', z'' entsprechen.

Die Figur 3 zeigt, dass

$$PP'^2 = P'Q^2 + PQ^2$$

ist; da nun

$$P'Q = z' - z'', \quad PQ^2 = CC'^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$

(„Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Artikel 5.)

so ist

$$PP'^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2.$$

Zusatz. Die Entfernung eines beliebigen Punktes x', y', z' vom Anfangspunkt der Coordinaten ist durch die Gleichung

$$OP^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

gegeben.

11. Die Lage eines Punktes kann auch durch die Länge seines Radius vector und die Winkel bestimmt werden, welche derselbe mit drei rectangulären Achsen bildet.

Wenn wir diese Winkel durch α, β, γ bezeichnen, so gelten, weil die Coordinaten x, y, z die Projectionen des Radius vector auf die drei Achsen sind, die Gleichungen

$$x = \varrho \cos\alpha, \quad y = \varrho \cos\beta, \quad z = \varrho \cos\gamma.$$

Und aus

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$$

ergiebt sich für diese drei cosinus, die wir oft kurz als die Richtungscosinus des Radius vector bezeichnen werden, die verbindende Relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.\text{*)}$$

---

*) Ich bin dem gewöhnlichen Gebrauche in der Wahl dieser Winkel zur Bestimmung der Richtung einer Geraden gefolgt; in gewisser Hinsicht bietet jedoch die Anwendung ihrer Complementwinkel, d. h. der Winkel der Linie mit den Coordinatenebenen, Vorzüge dar. Diess bezeugen die entsprechenden Formeln für schiefwinklige Achsen, die im Texte nicht gegeben sind, weil sie später nicht gebraucht werden.

Sind α, β, γ die Winkel, welche eine gerade Linie mit den Ebenen yz, zx, xy macht, während A, B, C die Winkel der Achsen der x, der y und der z gegen die Ebenen yz, zx, xy respective bezeichnen, so entspre-

Zuweilen wird auch die Lage eines Punktes im Raume dadurch bestimmt, dass man das folgende System von Polarcoordinaten anwendet: Der Radius vector, der Winkel γ, welchen er mit einer festen Achse AZ bildet, und der Winkel $COD = \varphi$, welchen die Projection des Radius vector auf eine zu OZ normale Ebene mit einer festen Geraden OX in dieser Ebene bildet.

Da nun

$$OC = \varrho \sin\gamma$$

ist, so vermitteln die Formeln

$$x = \varrho \sin\gamma \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\gamma \sin\varphi, \quad z = \varrho \cos\gamma$$

den Uebergang zwischen rectangulären und derartigen Polarcoordinaten.

12. Das Quadrat der Fläche einer beliebigen ebenen Figur ist gleich der Summe der Quadrate der Projectionen dieser Fläche auf drei rectanguläre Ebenen.

Wir nehmen an, die fragliche Fläche sei durch A ausgedrückt, und α, β, γ bezeichneten die Winkel, welche die Normale seiner Ebene mit den drei Achsen bildet; dann sind nach Artikel 4 die Projectionen der Fläche auf die Ebenen yz, zx, xy respective

$$= A\cos\alpha, \quad A\cos\beta, \quad A\cos\gamma,$$

und die Summe ihrer Quadrate ist

$$= A^2$$

in Folge der Relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

13. Man soll den cosinus des von zwei geraden Linien OP, OP' gebildeten Winkels θ mittelst der Richtungscosinus dieser Linien ausdrücken.

Wir bewiesen im Artikel 10, dass

$$PP'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

---

chen den Formeln des Textes die nach dem Princip des Artikel 7 leicht zu beweisenden folgenden

$$x \sin A = \varrho \sin\alpha, \quad y \sin B = \varrho \sin\beta, \quad z \sin C = \varrho \sin\gamma.$$

Wir projicieren auf eine zur Ebene yz normale Linie, so verschwinden die Projectionen von y und z auf dieselbe, und die Projection von x ist derjenigen des Radius vector gleich; die Winkel, welche x und ϱ mit dieser Normalen bilden, sind aber die Complemente von A und α.

ist und verbinden damit die bekannte Relation

$$PP'^2 = \varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos\theta;$$

da nun

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varrho'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ist, so ist auch

$$\varrho\varrho' \cos\theta = xx' + yy' + zz'$$

oder

$$\cos\theta = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$

Zusatz. Die Bedingung, unter welcher zwei gerade Linien rechtwinklig zu einander sind, ist

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0.$$

Zuweilen ist die Formel

$$\sin^2\theta = (\cos\beta \cos\gamma' - \cos\gamma \cos\beta')^2$$
$$+ (\cos\gamma \cos\alpha' - \cos\alpha \cos\gamma')^2 + (\cos\alpha \cos\beta' - \cos\beta \cos\alpha')^2$$

von Nutzen. Sie kann sehr einfach mittelst eines elementaren Theorems von der Summe der Quadrate dreier Determinanten bewiesen werden, welches in den „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen" Artikel 14 bewiesen, aber auch durch directe Entwicklung leicht bewährt wird. Nach demselben ist

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2.$$

Wenn aber $a, b, c; a', b', c'$ die Richtungscosinus zweier Geraden bezeichnen, so geht unser Ausdruck für $\sin^2\theta$ aus dieser Relation hervor, weil die rechte Seite derselben dann mit $(1 - \cos^2\theta)$ identisch wird.

Beispiel. Man soll den senkrechten Abstand eines Punktes x', y', z' von einer durch den Anfangspunkt unter den Richtungswinkeln α, β, γ gehenden Geraden bestimmen.

Ist P der gegebene Punkt, OQ die gegebene Gerade, PQ die Senkrechte, so ist offenbar

$$PQ = OP. \sin POQ$$

und die Anwendung des so eben für $\sin POQ$ gefundenen Werthes und die Bemerkung, dass

$$x' = OP \cos\alpha', \text{ etc.}$$

giebt

$$PQ^2 = (y' \cos\gamma - z' \cos\beta)^2 + (z' \cos\alpha - x' \cos\gamma)^2$$
$$+ (x' \cos\beta - y' \cos\alpha)^2.$$

14. Man soll die Richtungscosinus einer Geraden finden, die zu zwei gegebenen geraden Linien und so-

mit zu ihrer Ebene (oder zu einer zu beiden parallelen Ebene) normal ist.

Sind α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ die Richtungswinkel der gegebenen Linien und α, β, γ die der gesuchten Geraden, so haben wir α, β, γ aus den drei Gleichungen

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0,$$
$$\cos\alpha \cos\alpha'' + \cos\beta \cos\beta'' + \cos\gamma \cos\gamma'' = 0,$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

zu bestimmen. Die beiden ersten liefern durch successive Elimination von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ für λ als eine unbestimmte Grösse die Relationen

$$\lambda \cos\alpha = \cos\beta' \cos\gamma'' - \cos\beta'' \cos\gamma',$$
$$\lambda \cos\beta = \cos\gamma' \cos\alpha'' - \cos\gamma'' \cos\alpha',$$
$$\lambda \cos\gamma = \cos\alpha' \cos\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta',$$

und die Substitution derselben in die dritte Gleichung giebt nach Artikel 13

$$\lambda^2 = \sin^2\theta$$

zur Vollendung der Bestimmung.

Dasselbe Ergebniss konnte auch wie folgt erhalten werden: Sind P und Q oder x', y', z' und x'', y'', z'' Punkte, von denen je einer in den gegebenen Geraden liegt, so ist das Doppelte der Fläche der Projection des Dreiecks POQ auf die Ebene xy

$$= x'y'' - x''y' = \varrho'\varrho'' (\cos\alpha' \cos\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta');$$

da aber das Doppelte der Fläche des Dreiecks

$$= \varrho'\varrho'' \sin\theta$$

und somit die Projection der Fläche auf die Ebene der xy

$$= \varrho'\varrho'' \sin\theta \cos\gamma,$$

ist wie vorher

$$\sin\theta \cos\gamma = \cos\alpha' \cos\beta'' - \cos\alpha'' \cos\beta';$$

und in analoger Weise

$$\sin\theta \cos\alpha = \cos\beta' \cos\gamma'' - \cos\beta'' \cos\gamma',$$
$$\sin\theta \cos\beta = \cos\gamma' \cos\alpha'' - \cos\gamma'' \cos\alpha'.$$

Von der Transformation der Coordinaten.

15. Man soll zu neuen Achsen transformieren, welche den alten parallel sind und deren Anfangspunkt

in Bezug auf die alten Achsen durch die Coordinaten x', y', z' bestimmt ist.

Man erhält wie in der Planimetrie die Transformationsgleichungen

$$x = X + x', \quad y = Y + y', \quad z = Z + z'.$$

Denn eine durch den Punkt P parallel zu einer der Achsen, z. B. zu der der z, gezogene Gerade schneidet die Ebene xy des alten Systems in einem Punkte C, die Ebene XY des neuen Systems aber in einem Punkte C' und es ist

$$PC = PC' + C'C.$$

Aber PC ist das alte, PC' das neue z und da parallele Ebenen in parallelen geraden Linien gleiche Abschnitte bestimmen, so ist CC' gleich der Geraden, die man durch den neuen Anfangspunkt der Achse der z parallel bis zur alten Ebene xy zieht.

Von einem System rectangulärer Achsen zu einem andern Achsensystem überzugehen, welches denselben Anfangspunkt hat.

Wir nehmen an, dass die Winkel der neuen Achsen der x, y, z mit den alten Achsen durch α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ respective bezeichnet sind; dann ist die Summe der Projectionen der neuen Coordinaten auf eine der alten Achsen nach Artikel 7 gleich der Projection des Radius vector, welcher die entsprechende alte Coordinate ist. Wir erhalten somit die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= X \cos\alpha + Y \cos\alpha' + Z \cos\alpha'', \\ y &= X \cos\beta + Y \cos\beta' + Z \cos\beta'', \\ z &= X \cos\gamma + Y \cos\gamma' + Z \cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \ldots (A).$$

Nach Artikel 11 ist überdiess

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' &= 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' &= 1. \end{aligned}\right\} \ldots (B).$$

Und wenn die neuen Achsen gleichfalls rectangulär sind, so ist nach Artikel 13

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' &= 0, \\ \cos\alpha' \cos\alpha'' + \cos\beta' \cos\beta'' + \cos\gamma' \cos\gamma'' &= 0, \\ \cos\alpha'' \cos\alpha + \cos\beta'' \cos\beta + \cos\gamma'' \cos\gamma &= 0. \end{aligned}\right\} \ldots (C).$$

Mit Hilfe dieser Relationen bestätigen wir leicht, dass beim Uebergange von einem System rectangulärer Achsen zu einem andern System rectangulärer Achsen die Gleichheit

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$$

besteht, welche geometrisch evident ist, weil jede ihrer Seiten die Entfernung eines Punktes vom gemeinschaftlichen Anfangspunkt beider Systeme ausdrückt.

Wenn die neuen Achsen gleichfalls rectangulär sind, so gelten, weil α, α', α'' die Winkel bezeichnen, welche die alte Achse der x mit den neuen Achsen bildet, die Relationen

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1,\\ \cos^2\beta + \cos^2\beta' + \cos^2\beta'' = 1,\\ \cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1,\end{array}\right\}\ldots(D),$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\alpha\ \cos\beta + \cos\beta\ \cos\gamma + \cos\gamma\ \cos\alpha = 0,\\ \cos\alpha'\ \cos\beta' + \cos\beta'\ \cos\gamma' + \cos\gamma'\ \cos\alpha' = 0,\\ \cos\alpha''\ \cos\beta'' + \cos\beta''\ \cos\gamma'' + \cos\gamma''\ \cos\alpha'' = 0\end{array}\right\}\ldots(E),$$

und die neuen Coordinaten ergeben sich in Function der alten wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l}X = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,\\ Y = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma',\\ Z = x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma''.\end{array}\right\}\ldots(F).$$

Es ist nicht schwer, die Gleichungen (D), (E), (F) analytisch aus den Gleichungen (A), (B), (C) abzuleiten; wir verzichten darauf, weil sie geometrisch evident sind.

16. Wenn wir von rectangulären Achsen zu einem System schiefwinkliger Achsen übergehen und λ, μ, ν die Winkel zwischen den neuen Achsen der y und z, der z und x, der x und y bezeichnen, so ist nach Artikel 13

$$\begin{array}{l}\cos\lambda = \cos\alpha'\ \cos\alpha'' + \cos\beta'\ \cos\beta'' + \cos\gamma'\ \cos\gamma'',\\ \cos\mu = \cos\alpha''\ \cos\alpha + \cos\beta''\ \cos\beta + \cos\gamma''\ \cos\gamma,\\ \cos\nu = \cos\alpha\ \cos\alpha' + \cos\beta\ \cos\beta' + \cos\gamma\ \cos\gamma'.\end{array}$$

Es ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda + 2ZX\cos\mu + 2XY\cos\nu.$$

Wir erhalten so den vom Anfangspunkt nach einem beliebigen Punkte gehenden Radius rector mittelst der schiefwinkligen Coordinaten desselben ausgedrückt.

Man beweist leicht, dass das Quadrat der Entfernung zweier Punkte in schiefwinkligen Coordinaten durch

$$(x' - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z' - z'')^2 + 2\,(y' - y'')\,(z' - z'')\cos\lambda$$
$$+ 2\,(z' - z'')\,(x' - x'')\cos\mu + 2\,(x' - x'')\,(y' - y'')\cos\nu$$

ausgedrückt wird.*)

17. **Der Grad einer Gleichung zwischen den Coordinaten wird durch Transformation derselben nicht geändert.**

Diess wird wie in der analytischen Planimetrie aus der Bemerkung bewiesen, dass die für x, y, z so eben gegebenen Ausdrücke die neuen Coordinaten nur im ersten Grade enthalten.

---

*) Da wir von der Transformation von einem System schiefwinkliger Achsen zu einem andern System schiefwinkliger Achsen keinen Gebrauch machen werden, so mögen die betreffenden Formeln nur hier angegeben werden.

Wenn A, B, C dieselbe Bedeutung haben wie in der Note des Artikel 11 und $\alpha, \beta, \gamma;\ \alpha', \beta', \gamma';\ \alpha'', \beta'', \gamma''$ die von den neuen Achsen mit den alten Coordinatenebenen gebildeten Winkel bezeichnen, so finden wir durch Projection auf gerade Linien, welche zu den alten Coordinatenebenen normal sind, wie in jener Anmerkung

$$x \sin A = X \sin\alpha + Y \sin\alpha' + Z \sin\alpha'',$$
$$y \sin B = X \sin\beta + Y \sin\beta' + Z \sin\beta'',$$
$$z \sin C = X \sin\gamma + Y \sin\gamma' + Z \sin\gamma''.$$

Die Coordinatentransformation ist ein specieller Fall einer linearen Substitution; man kann daher die betreffs der Letzteren gegebenen Entwickelungen in den „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen“ Artikel 12 und den Inhalt dieses Werkes überhaupt vergleichen.

II. Kapitel.

Interpretation der Gleichungen.

18. Es erhellt aus der Construction des Artikel 1, dass zwei gleichzeitige Gleichungen

$$x = a, \quad y = b$$

welche das z unbestimmt lassen, den Punkt C allein bestimmen und daher den Punkt P irgendwo in der Linie CP angeben. Diese beiden Gleichungen sind daher als Repräsentation der so bezeichneten geraden Linie zu betrachten, als welche der Ort aller Punkte ist, deren $x = a$ und deren $y = b$ ist.

Zwei Gleichungen dieser Form repräsentieren sonach eine zur Achse der z parallele Gerade; insbesondere repräsentieren die Gleichungen

$$x = 0, \quad y = 0$$

die Achse der z selbst. Ebenso für die anderen Achsen.

Wenn die einzige Gleichung

$$x = a$$

gegeben wäre, so würden wir nur den Punkt D erfahren und daraus zu schliessen haben, dass der Punkt P irgendwo in der Ebene $PBDC$ liege; seine Lage innerhalb dieser Ebene bleibt aber unbestimmt. Diese Ebene als der Ort aller der Punkte, welche $x = a$ haben, ist durch die Gleichung analytisch dargestellt; und jede Gleichung von dieser Form repräsentiert eine der yz Ebene parallele Ebene, und insbesondere bezeichnet die Gleichung

$$x = 0$$

die yz Ebene selbst. Ebenso für die anderen Coordinatenebenen.

19. Im Allgemeinen repräsentiert eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten eine Fläche, zwei

gleichzeitige Gleichungen zwischen den Coordinaten repräsentieren eine Linie, die entweder gerade oder krumm ist, und drei Gleichungen bezeichnen einen Punkt oder mehrere Punkte.

I. Wenn eine einzige Gleichung gegeben ist, so können wir für x und y willkürliche Werthe annehmen und die Auflösung der durch Substitution derselben erhaltenen Bestimmungsgleichung für z giebt dann die entsprechenden Werthe von z; d. h. für jeden beliebig angenommenen Punkt C in der Ebene der xy erhalten wir in der Linie PC eine bestimmte Anzahl von Punkten, deren Coordinaten der gegebenen Gleichung genügen. Die Vereinigung der so gefundenen Punkte bildet eine Fläche, welche die geometrische Darstellung der gegebenen Gleichung ist.

II. Wenn zwei Gleichungen gegeben sind, so können wir dieselben durch successive Elimination von y und z zwischen ihnen in die Form

$$x = \varphi(x), \quad z = \psi(x)$$

bringen und wenn wir nun für x einen willkürlichen Werth annehmen, so bestimmen diese Gleichungen die entsprechenden Werthe von y und z; in anderen Worten, wir können nun nicht mehr den Punkt C in der Ebene xy willkürlich wählen, sondern er ist auf einen gewissen durch die Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

bestimmten Ort beschränkt. Jedem Punkte C, welcher diesem Orte angehört, entsprechen in der Linie PC eine Anzahl von Punkten P und die Vereinigung derselben ist durch jene beiden Gleichungen repräsentiert.

Und da die Punkte C, welche die Projectionen der Letzteren sind, in einer gewissen geraden oder krummen Linie liegen, so ist klar, dass die Punkte P auch in einer bestimmten Curve enthalten sind, wobei sie jedoch durchaus nicht nothwendig in einer Ebene liegen.

Anderseits hat die Betrachtung unter I. gelehrt, dass der Ort der Punkte, deren Coordinaten jeder der beiden Gleichungen einzeln genügen, eine Fläche ist; in Folge dessen ist der Ort derjenigen Punkte, deren Coordinaten beide Gleichungen befriedigen, die Vereinigung aller der Punkte, welche den beiden durch die getrennt betrachteten Gleichungen repräsentierten Flächen gemein sind, d. h. derselbe ist die Durchschnittslinie dieser Flächen.

III. Wenn drei Gleichungen gegeben sind, so genügen dieselben offenbar zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen x, y, z und durch sie werden daher einzelne Punkte dargestellt. Da jede einzelne der drei Gleichungen eine Fläche repräsentiert, so sind es diejenigen reellen oder imaginären Punkte, welche den drei Flächen gemein sind.

20. Die Flächen werden gleich den ebenen Curven nach dem Grade der Gleichungen classificiert, durch welche sie dargestellt sind.

Da für jeden Punkt in der Ebene xy

$$z = 0$$

ist, so liefert die Substitution $z = 0$ in eine beliebige Gleichung die Relation, welche zwischen den x und y Coordinaten derjenigen Punkte besteht, in denen die Ebene xy die durch die Gleichung dargestellte Fläche schneidet, d. h. die Gleichung der ebenen Durchschnittscurve. Es ist offenbar, dass die Gleichung dieser Curve im Allgemeinen von demselben Grade ist, wie die der Fläche; denn zuerst der Grad der Gleichung des Schnittes kann nicht grösser sein als der Grad der Gleichung der Fläche, und sodann, es ist nur scheinbar, dass er kleiner sein könnte. So ist z. B. die Gleichung

$$zx^2 + ay^2 + b^2x = c^3$$

vom dritten Grade, und wir erhalten doch für $z = 0$ eine Gleichung zweiten Grades als die der Schnittcurve mit der xy Ebene; da aber die Originalgleichung homogen sein muss, um eine geometrische Bedeutung zu haben, so ist nothwendig jedes ihrer Glieder von der dritten Dimension in einer Linear-Einheit, und die nach der Substitution $z = 0$ übrig bleibenden Glieder sind daher auch als vom dritten Grade zu betrachten und bilden eine mit einer Constanten multiplicierte Gleichung zweiten Grades; d. h. das Resultat der Substitution bezeichnet einen Kegelschnitt und eine unendlich entfernte gerade Linie.

Wenn wir also die unendlich entfernten Geraden in die Betrachtung aufnehmen, so können wir sagen, dass die Durchschnittslinie einer Fläche vom n^{ten} Grade mit der Ebene xy immer vom n^{ten} Grade ist; und da nach den Ergebnissen unserer Untersuchung über die Transformation jede beliebige Ebene zur Ebene xy gemacht werden kann, und durch eine Transformation der Coordinaten der Grad einer Gleichung zwischen denselben nicht geändert wird, so erkennen wir, dass jeder ebene Schnitt einer Fläche vom n^{ten} Grade selbst vom n^{ten} Grade ist.

In gleicher Art wird bewiesen, dass jede gerade Linie eine Fläche vom n^{ten} Grade in n Punkten durchschneidet. Denn sie kann zur Achse der z im Coordinatensystem gemacht werden und die Punkte, in welchen diese die Fläche durchschneidet, werden durch die gleichzeitige Substitution

$$x = 0, \quad y = 0$$

in die Gleichung der Fläche gefunden; wir erhalten durch dieselbe im Allgemeinen eine Gleichung vom n^{ten} Grade zur Bestimmung von z. Wenn der Grad der entstehenden Gleichung kleiner als n wäre, so zeigt diess an, dass einige der n Punkte, in welchen die Achse der z die Fläche schneidet, mit ihrem unendlich entfernten Punkte zusammenfallen.

21. Curven im Raum werden nach der Zahl von Punkten classificiert, welche sie mit einer Ebene gemein haben.

Zwei Gleichungen von den Graden m und n respective repräsentieren eine Curve vom Grade mn.

Denn die durch jene Gleichungen dargestellten Flächen werden von einer beliebigen Ebene in Curven geschnitten, welche vom m^{ten} und n^{ten} Grade respective sind, und diese Curven bestimmen mit einander mn Durchschnittspunkte. Drei Gleichungen, welche respective von den Graden m, n und p sind, bezeichnen mnp Punkte.

Diess ergiebt sich aus der Theorie der Elimination; denn wenn wir zwischen den bezeichneten Gleichungen die Grössen y und z eliminieren, so erhalten wir zur Bestimmung von x eine Gleichung vom Grade mnp und also mnp Werthe von x. (Vgl. „Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen“ Artikel 36.) Damit ist zugleich bewiesen, dass drei Flächen vom m^{ten}, n^{ten} und p^{ten} Grade sich in mnp Punkten durchschneiden.

22. Wenn eine Gleichung nur zwei der Veränderlichen enthält, wie z. B.

$$\varphi(x, y) = 0,$$

so kann sie zunächst als Gleichung einer Curve in der Ebene xy betrachtet werden, ohne dass man sie jedoch als eine Ausnahme von der Regel ansehen dürfte, nach welcher zwei Gleichungen zur Darstellung einer Curve erforderlich sind; denn dabei ist die Voraussetzung $z = 0$ stillschweigend gemacht worden, und es erscheint also eine Curve in der xy Ebene durch die beiden Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \quad z = 0$$

dargestellt. Denken wir uns die letztere Gleichung unterdrückt, so genügen die Coordinaten jedes Punktes der übrig bleibenden Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0,$$

dessen x und y ihr genügen, welches auch das z desselben sei, d. h. diese Gleichung repräsentiert alle Punkte einer Fläche, welche durch Bewegung einer zu der Achse der z parallelen geraden Linie längs jener Curve in der Ebene xy erzeugt wird. Sie heisst eine cylindrische Fläche, wie jede Fläche, welche durch Bewegung einer geraden Linie parallel mit sich selbst hervorgebracht wird.

Wenn eine Gleichung nur eine der Veränderlichen z. B. x enthält, so wissen wir aus der Theorie der Gleichungen, dass sie in n Factoren von der Form

$$x - a = 0$$

zerfällt, und sie repräsentiert daher nach Artikel 20 n Ebenen, welche sämmtlich zu einer der Coordinatenebenen parallel sind.*)

*) Den allgemeinen Abschluss dieser Betrachtungen über Gleichungen zwischen weniger als drei Coordinaten und namentlich die Entwicklung der Bedingungen, unter welchen eine allgemeine Gleichung auf eine solche specielle Form reduciert werden kann, giebt die Algebra der linearen Transformationen. (Vergl. „Vorlesungen“ Artikel 57 f., was die Resultate betrifft Artikel 60.)

III. Kapitel.

Die Ebene und die gerade Linie.

---

23. Wir beginnen die Discussion der Gleichungen mit derjenigen der Gleichung vom ersten Grade und beweisen zuerst, dass jede Gleichung vom ersten Grade eine Ebene repräsentiert und dass umgekehrt jede Ebene durch eine Gleichung vom ersten Grade dargestellt wird.

Wir begründen zunächst den letzteren Satz auf mehreren Wegen.

Zuerst ward im Artikel 20 erkannt, dass die Ebene xy durch eine Gleichung vom ersten Grade

$$z = 0$$

dargestellt wird und die Transformation zu beliebigen andern Achsen kann den Grad dieser Gleichung nach Artikel 17 nicht ändern.

Wir kommen zu dem nämlichen Resultat, indem wir die Gleichung der durch drei gegebene Punkte bestimmten Ebene entwickeln; sie entsteht z. B. durch Elimination der Grössen l, m, n zwischen den Gleichungen

$$\begin{aligned} l(x-x') + m(x-x'') + n(x-x''') &= 0, \\ l(y-y') + m(y-y'') + n(y-y''') &= 0, \\ l(z-z') + m(z-z'') + n(z-z''') &= 0, \end{aligned}$$

welche im Artikel 9 gegeben sind und diese liefert eine Gleichung vom ersten Grade. Man kann sie in Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} x-x', & x-x'', & x-x''' \\ y-y', & y-y'', & y-y''' \\ z-z', & z-z'', & z-z''' \end{vmatrix} = 0$$

[illegible]

Tenn determinant daje

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 \\ x-x' & x-x'' & x-x''' & x \\ y-y' & y-y'' & y-y''' & y \\ z-z' & z-z'' & z-z''' & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & +1 \\ -x' & -x'' & -x''' & x \\ -y' & -y'' & -y''' & y \\ -z' & -z'' & -z''' & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x' & x'' & y''' & x \\ y' & y'' & y''' & y \\ z' & z'' & z''' & z \end{vmatrix}$$

darstellen und durch Zerlegung (vgl. „Vorlesungen“ Artikel 9 f.) sie auf die Form

$$x \begin{vmatrix} y', & y'', & y''' \\ z', & z'', & z''' \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z', & z'', & z''' \\ x', & x'', & x''' \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x', & x'', & x''' \\ y', & y'', & y''' \\ 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x', & x'', & x''' \\ y', & y'', & y''' \\ z', & z'', & z''' \end{vmatrix}$$

reducieren, der wir weiterhin wieder begegnen werden.

Oder wir fassen die Ebene als den Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten gleich gross sind; nehmen wir den Anfangspunkt als den einen und den Punkt x', y', z' als den andern, so ist die Gleichung der Ebene

$$x'x + y'y + z'z = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2}.$$

Endlich leitet uns die folgende damit nahe zusammenhängende Methode zu einer Form der Gleichung der Ebene, welche in den Anwendungen vorzüglich nützlich ist.

Man soll die Gleichung einer Ebene finden, für welche die Länge der Normale vom Anfangspunkt der Coordinaten $= p$ und die Winkel derselben mit den Achsen α, β, γ gegeben sind.

Die Länge der Projection des Radius vector eines beliebigen Punktes der Fläche auf jene Normale ist nach der Voraussetzung einerseits $= p$ und nach Artikel 7 gleich der Summe der Projectionen der Coordinaten jenes Punktes auf dieselbe Linie; man erhält also als analytischen Ausdruck der Ebene die Gleichung

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p.\text{*)}$$

Umgekehrt kann jede Gleichung vom ersten Grade

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

auf die oben erhaltene Form reduciert werden, indem man sie durch einen Factor R dividiert. Wir erhalten dann

---

*) Obwohl wir im Folgenden nur rectanguläre Achsen voraussetzen, so ist doch diese Gleichung offenbar ebenso für schiefwinklige Coordinatensysteme gültig.

czyli determinant wychodzi na

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''' \\ z & z' & z'' & z''' \end{vmatrix} = 0$$ a tylko powyższe wynika

$$A = R \cos\alpha, \quad B = R \cos\beta, \quad C = R \cos\gamma$$

und daraus nach Artikel 11 zur Bestimmung von R

$$R = \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}.$$

Jede Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

kann daher mit der Gleichung einer Ebene identificiert werden, deren normaler Abstand vom Anfangspunkt

$$= \frac{-D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$$

ist und für welche die Richtungscosinus dieser Normalen durch

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}, \quad \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}, \quad \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}$$

ausgedrückt werden.

Wir geben dabei der Quadratwurzel dasjenige Vorzeichen, welches die Normale positiv macht und die Zeichen der cosinus bestimmen dann, ob die Winkel, welche die Normale mit den positiven Achsen bildet, spitz oder stumpf sind.

24. Man soll den von den Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gebildeten Winkel bestimmen.

Dieser Winkel ist ebenso gross als derjenige, welchen die vom Anfangspunkt auf beide Ebenen gefällten Normalen mit einander einschliessen. Da nun nach dem letzten Artikel die Winkel bekannt sind, welche diese Normalen mit den Achsen einschliessen, so erhalten wir nach Artikel 13 und 14 die Formeln

$$\cos\theta = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{\{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)\}}},$$

$$\sin^2\theta = \frac{(AB' - A'B)^2 + (BC' - B'C)^2 + (CA' - C'A)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)(A'^2 + B'^2 + C'^2)}.$$

Aus ihnen folgt, dass die Ebenen rechtwinklig zu einander sind, wenn

$$AA' + BB' + CC' = 0$$

ist, und dass sie einander parallel sind, wenn die Bedingungen

$$AB' = A'B, \quad BC' = B'C, \quad CA' = C'A$$

erfüllt sind, d. h. wenn die Coefficienten A, B, C zu denen A', B', C' proportional sind; es ist aus dem letzten Artikel schon offenbar, dass die Richtung der Normalen beider Ebenen in diesem Falle dieselbe wäre.

Beispiel. Welches sind die Winkel einer Ebene mit den Coordinatenebenen?

25. Man soll die Gleichung einer Ebene mittelst der Abschnitte a, b, c ausdrücken, welche sie in den Achsen bestimmt.

Wir finden den von der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in der Achse der x gebildeten Abschnitt durch die gleichzeitige Substitution

$$y = 0, \quad z = 0$$

in die Gleichung, d. h. wir haben

$$Aa + D = 0;$$

und ebenso gelten die Gleichungen

$$Bb + D = 0, \quad Cc + D = 0.$$

Die Substitution der daraus gewonnenen Werthe in die allgemeine Gleichung liefert für dieselbe die der Aufgabe entsprechende Form

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Wenn in der allgemeinen Gleichung ein Glied fehlt, z. B. wenn $A = 0$ ist, so liegt der Punkt, in welchem die Ebene die Achse der x schneidet, unendlich entfernt oder die Ebene ist der Achse der x parallel. Wenn gleichzeitig $A = 0$, $B = 0$ sind, so schneiden zwei der Achsen die Ebene in unendlicher Entfernung und dieselbe ist somit ihrer Projectionsebene parallel. (Vgl. Artikel 20.) Für $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ werden alle drei Achsen in unendlicher Entfernung geschnitten, und wir erkennen daraus, dass eine Gleichung von der Form

$$D = 0$$

eine unendlich entfernte Ebene repräsentiert.

26. Man soll die Gleichung der durch drei Punkte

$$x', y', z'; \quad x'', y'', z''; \quad x''', y''', z'''$$

bestimmten Ebene finden.

Ist

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ihre Gleichung, so müssen A, B, C, D den Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + D &= 0, \\ Ax'' + By'' + Cz'' + D &= 0, \\ Ax''' + By''' + Cz''' + D &= 0 \end{aligned}$$

genügen, weil jene durch die Coordinaten jedes der drei Punkte befriedigt sein muss.

Die Elimination von A, B, C, D zwischen diesen Gleichungen liefert die Bedingung in der Form

$$D = \begin{vmatrix} x\ , & y\ , & z\ , & 1 \\ x', & y', & z', & 1 \\ x'', & y'', & z'', & 1 \\ x''', & y''', & z''', & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder durch Entwicklung nach den einfachen Gesetzen der Determinanten

$$\begin{aligned} & x\,\{y'(z'' - z''') + y''(z''' - z') + y'''(z' - z'')\} \\ + & y\,\{z'(x'' - x''') + z''(x''' - x') + z'''(x' - x'')\} \\ + & z\,\{x'(y'' - y''') + x''(y''' - y') + x'''(y' - y'')\} \\ = & x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z'); \end{aligned}$$

(vergl. Artikel 23) aus ihr erhellen zugleich die Werthe von A, B, C, D.

Wenn wir x, y, z als die Coordinaten irgend eines vierten Punktes betrachten, so geben dieselben Gleichungen die Bedingung, unter welcher vier Punkte in einer Ebene liegen.

Beispiel 1. Die Gleichungen der Ebenen DOP und EOP in Figur 1 sind

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}.$$

Der von ihnen eingeschlossene Winkel ist bestimmt durch

$$\cos\theta = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + c^2)}\,\sqrt{(b^2 + c^2)}}.$$

Beispiel 2. Die durch die Punkte x', y', z'; $a, 0, 0$; $0, b, 0$ bestimmte Ebene hat die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = \frac{z}{z'}\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} - 1\right).$$

27. Die Coefficienten von x, y, z in der vorhergehenden Gleichung sind offenbar die doppelten Flächenzahlen der Projectionen des von den drei Punkten gebildeten Dreiecks auf die Coordinatenebenen.

Die Multiplication der Gleichung

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

mit $2A$, wenn A den Inhalt des Dreiecks der drei Punkte bezeichnet, macht dieselbe daher mit derjenigen des letzten Artikels identisch, weil $A \cos\alpha$, $A \cos\beta$, $A \cos\gamma$ die Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinatenebenen sind. Somit muss auch das absolute Glied in beiden Fällen denselben Werth haben, d. h. die Grösse

$$x'(y''z''' - y'''z'') + x''(y'''z' - y'z''') + x'''(y'z'' - y''z')$$

repräsentiert das Product der doppelten Flächenzahl des Dreiecks der drei Punkte in die Normale der Ebene vom Anfangspunkt, d. h. das sechsfache Volumen der dreiseitigen Pyramide, welche das Dreieck zur Basis und den Anfangspunkt zum Scheitel hat.*)

---

*) Wenn wir in dem vorhergehenden Werthe für x', y', z', etc. $\varrho' \cos\alpha'$, $\varrho' \cos\beta'$, $\varrho' \cos\gamma'$, etc. substituieren, so finden wir, dass das sechsfache des Volumens der Pyramide das Product von $\varrho', \varrho'', \varrho'''$ in die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha', & \cos\beta', & \cos\gamma' \\ \cos\alpha'', & \cos\beta'', & \cos\gamma'' \\ \cos\alpha''', & \cos\beta''', & \cos\gamma''' \end{vmatrix}$$

ist. Denken wir nun die drei Radien vectoren durch eine aus dem Anfangspunkt beschriebene Kugel vom Radius Eins geschnitten, so dass sie auf ihr das sphärische Dreieck $R'R''R'''$ bestimmen, so ist das sechsfache Volumen der Pyramide für

$$a = R'R''$$

und p als die von R''' auf Letztere gefällte Normale

$$= \varrho'\varrho''\varrho''' \sin a \sin p,$$

weil $\varrho'\varrho'' \sin a$ der doppelte Inhalt einer Seitenfläche der Pyramide und $\varrho''' \sin p$ die Normale von der Gegenecke auf dieselbe ist. Die obige Determinante ist daher das Doppelte der Function

Wenn wir A selbst mittelst der Coordinaten der drei Punkte nach Artikel 12 ausdrücken, so wird gefunden, dass $4A^2$ der Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z in der Gleichung des letzten Artikels gleich ist.

28. Man soll die Länge der von einem gegebenen Punkte x', y', z' auf eine Ebene gefällten Normalen bestimmen.

Wenn wir durch x', y', z' eine der gegebenen parallelen Ebene legen und die gemeinschaftliche Normale vom Anfangspunkt auf beide Ebenen fällen, so ist der zwischen beiden Ebenen enthaltene Abschnitt dieser Linie die fragliche Normale, weil parallele Ebenen in parallelen Linien gleiche Abschnitte bestimmen. Nach der Definition des Artikel 5 ist aber die Länge der Normalen auf die durch x', y', z' gehende Ebene die Projection des Radius vector von x', y', z' auf diese Normale, und daher nach Artikel 23

$$= x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma;$$

die fragliche Länge ist somit

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p.$$

$$\sqrt{\left\{(\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)\right\}}$$

der Seiten jenes sphärischen Dreiecks.

Man erkennt das Nämliche, wenn man das Quadrat der obigen Determinante nach der gewöhnlichen Regel bildet; die abkürzende Substitution

$$\cos\alpha'' \cos\alpha''' + \cos\beta'' \cos\beta''' + \cos\gamma'' \cos\gamma''' = \cos a, \text{ etc.}$$

giebt als solches

$$\begin{vmatrix} 1\ , & \cos c, & \cos b \\ \cos c, & 1\ , & \cos a \\ \cos b, & \cos a, & 1 \end{vmatrix},$$

d. i.

$$1 + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c,$$

welches mit dem fraglichen Werthe übereinstimmt.

Die Bemerkung erscheint nützlich, dass für drei zu einander rechtwinklige gerade Linien die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha'\ , & \cos\beta'\ , & \cos\gamma' \\ \cos\alpha''\ , & \cos\beta''\ , & \cos\gamma'' \\ \cos\alpha''', & \cos\beta''', & \cos\gamma''' \end{vmatrix}$$

die Einheit zum Werthe hat; denn ihr Quadrat ist nach dem Obigen

$$= \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}.$$

Diess setzt voraus, dass die Normale auf die durch x', y', z' gehende Ebene grösser ist als p, oder dass x', y', z' und der Anfangspunkt auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen; sind sie auf derselben Seite der Ebene gelegen, so ist die Länge der Normalen

$$= p - (x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma).$$

Für die in der Form

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gegebene Gleichung der Ebene wird wie im Artikel 23 die Reduction auf die Normalform dieses Artikels vollzogen und die Länge der gesuchten Normalen ist

$$\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Es ist offenbar, dass alle diejenigen Punkte, für welche

$$Ax' + By' + Cz' + D \text{ und } D$$

dieselben Vorzeichen haben, mit dem Anfangspunkte auf einerlei Seite der Ebene liegen, und dass alle diejenigen Punkte, für welche diese Grössen verschiedene Vorzeichen besitzen, auf der dem Anfangspunkt entgegengesetzten Seite der Ebene gelegen sind.

29. Man soll die Coordinaten des Durchschnittspunktes von drei Ebenen bestimmen.

Die Bestimmung dieser Coordinaten ist die Auflösung von drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten, wie sie in den „Vorlesungen“ Artikel 16 (S. 28) gegeben ist. Die Werthe der Coordinaten sind gleichzeitig unendlich gross, wenn die Determinante Δ oder $(AB'C'')$ verschwindet, d. h. wenn

$$A(B'C'' - B''C') + A'(B''C - BC'') + A''(BC' - B'C) = 0$$

ist. Unter dieser Bedingung sind also die drei Ebenen derselben geraden Linie parallel, denn ihre Schnittlinien sind nothwendig unter einander parallel, weil sie sich in einem unendlich entfernten Punkte schneiden.

30. Unter welcher Bedingung schneiden sich vier Ebenen in einem Punkte?

Man erhält diese Bedingung durch Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen der vier Ebenen; sie ist also die Determinante $(AB'C''D''')$ oder

$$\begin{vmatrix} A\ , & B\ , & C\ , & D \\ A'\ , & B'\ , & C'\ , & D' \\ A''\ , & B''\ , & C''\ , & D'' \\ A'''\ , & B'''\ , & C'''\ , & D''' \end{vmatrix} = 0.^{*)}$$

31. Man soll das Volumen des Tetraeders bestimmen, welches vier gegebene Punkte zu Ecken hat.

Wenn wir den Inhalt des durch drei jener Punkte gebildeten Dreiecks mit der Länge der vom vierten auf seine Ebene gefällten Normale multiplicieren, so erhalten wir das dreifache Volumen des Tetraeders. Nun ist die Länge der bezeichneten Normalen nach der im Artikel 26 gegebenen Form der Gleichung der Ebene durch einen Bruch gegeben, der das Resultat der Substitution der Coordinaten des vierten Punktes in jene Gleichung zum Zähler und die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Coefficienten von x, y, z in derselben zum Nenner hat; und diese Quadratwurzel ist nach Artikel 27 der doppelte Inhalt des von jenen drei Punkten gebildeten Dreiecks. Das sechsfache Volumen jenes fraglichen Tetraeders ist daher durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x'\ , & y'\ , & z'\ , & 1 \\ x''\ , & y''\ , & z''\ , & 1 \\ x'''\ , & y'''\ , & z'''\ , & 1 \\ x''''\ , & y''''\ , & z''''\ , & 1 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt. **)

*) Ihre Form und die Bedingung des letzten Artikels zeigen, dass drei Ebenen, die derselben geraden Linie parallel sind, sich mit der unendlich entfernten Ebene in einem Punkte schneiden.

**) Das Volumen des von vier durch ihre Gleichungen bestimmten Ebenen begrenzten Tetraeders kann gefunden werden, indem man die Coordinaten ihrer Ecken bildet und in die obige Formel substituiert. Das Resultat ist (vergl. „Vorlesungen" Artikel 17), dass das sechsfache Volumen durch den Ausdruck

$$\frac{(AB'C''D''')^3}{(AB'C'')\,(A'B''C''')\,(A''B'''C)\,(A'''BC')}$$

gegeben ist, in welchem die zwischen den Parenthesen stehenden Grössen Determinanten bedeuten. (a. a. O. Artikel 3.) Die Determinante des Zählers und somit der fragliche Inhalt verschwinden, wenn die vier Ebenen durch denselben Punkt gehen; und der Nenner verschwindet oder der Inhalt wird unendlich gross, sobald irgend drei jener Ebenen derselben geraden Linie parallel sind. Die Determinanten des Nenners sind die nach den Elementen D gebildeten Minoren der Determinante des Zählers. Man vergleiche hierzu F. Joachimsthal's Abhandlung: „Sur quelques

32. Es ist, ganz ebenso wie in der analytischen Planimetrie, evident, dass für

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0$$

als Gleichungen von drei Flächen, und a, b, c als willkürliche Constanten durch

$$aS + bS' = 0$$

eine Fläche repräsentiert wird, welche durch die Schnittlinie der Flächen

$$S = 0, \quad S' = 0$$

hindurchgeht; und ebenso durch

$$aS + bS' + cS'' = 0$$

eine Fläche, welche die gemeinschaftlichen Punkte der drei Flächen

$$S = 0, \quad S' = 0, \quad S'' = 0$$

enthält. Sind insbesondere

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

die Gleichungen von drei Ebenen, so ist

$$aL + bM = 0$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch die Schnittlinie der ersten beiden unter ihnen geht, und

$$aL + bM + cN = 0$$

die Gleichung einer Ebene, welche den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt aller drei enthält. Wir bemerken als specielle Fälle, dass

$$aL + b = 0$$

eine Ebene bezeichnet, welche zur Ebene

$$L = 0$$

parallel ist, und dass ebenso

$$aL + bM + c = 0$$

eine Ebene bezeichnet, welche zur Durchschnittslinie der Ebenen

$$L = 0, \quad M = 0$$

parallel geht. (Vergl. Artikel 29.)

---

applications des Determinants à la Géométrie" in „Crelle's Journal" Bd. XL, p. 21—47, insbesondere p. 25 f.

Vier Ebenen

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

gehen durch einen Punkt, wenn ihre Gleichungen durch eine identische Relation von der Form

$$aL + bM + cN + dP = 0$$

verbunden sind, weil dann dieselben Coordinatenwerthe, welche den Gleichungen der ersten drei Ebenen genügen, auch die Gleichung der vierten identisch erfüllen. Wenn umgekehrt vier durch einen Punkt gehende Ebenen gegeben sind, so ist eine solche identische Relation leicht zu entwickeln; denn wenn wir die erste jener Gleichungen durch $(A' B'' C''')$, die zweite durch $(A'' B''' C)$, die dritte durch $(A''' B C')$ und die vierte durch $(A B' C'')$ multipliciren und die Producte addieren, so verschwinden nach Artikel 4 der „Vorlesungen" die Coefficienten von x, y, z identisch und das übrig bleibende Glied ist die Determinante des Artikel 30, welche verschwindet, weil die vier Ebenen sich in einem Punkte durchschneiden. Die Gleichungen solcher vier Ebenen sind also durch die identische Relation

$$L (A' B'' C''') - M (A'' B''' C) + N (A''' B C') - P (A B' C'') = 0$$

verbunden.

Beispiel 1. Man soll die Gleichung der durch den Punkt x', y', z' und die Durchschnittslinie der Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

gehenden Ebene ausdrücken.

Sie ist

$$(A'x' + B'y' + C'z' + D') (Ax + By + Cz + D)$$
$$= (Ax' + By' + Cz' + D) (A'x + B'y + C'z + D').$$

Beispiel 2. Welches ist die Gleichung der Ebene ABC in Figur 1?

Die Gleichungen von BC sind

$$\frac{x}{a} = 1, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1; \text{ etc.},$$

$\lambda\left(\frac{x}{a} - 1\right) + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

$\lambda = 1$

also ist die Gleichung der geforderten Ebene

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 2,$$

denn sie geht nach dieser ihrer Form durch jede der drei Verbindungslinien der gegebenen Punkte.

Beispiel 3. Die Gleichung der Ebene PEF in derselben Figur zu bestimmen.

Die Linie EF hat die Gleichungen

$\lambda x + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$

$$x = o, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$\lambda = -\frac{1}{a}$

und die Gleichung der durch sie mit dem Punkte a, b, c bestimmten Ebene ist daher nach dem ersten Beispiel

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 1.$$

Beispiel 4. Die Ebenen

$$L - M = 0, \quad L + M = 0$$

sind die Halbierungsebenen der beiden von den Ebenen

w kształcie normalnym

$$L = 0, \quad M = 0$$

mit einander gebildeten Winkel.

Für drei Ebenen, welche eine dreiseitige Ecke bilden,

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

sind durch

$$L - M = 0, \quad M - N = 0, \quad N - L = 0$$

die Halbirungsebenen der innern und durch

$$L + M = 0, \quad M + N = 0, \quad N + L = 0$$

die Halbierungsebenen der äussern Winkel dargestellt. Die Form dieser Gleichungen lehrt, dass die drei Halbierungsebenen der innern Winkel
art 32
und ebenso je zwei Halbierungsebenen äusserer Winkel und die Halbierungsebenen des dritten innern Winkels sich in einer und derselben Geraden durchschneiden.

Beispiel 5. Sind

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

die Gleichungen der vier Seitenflächen eines Tetraeders, so zeigt die folgende Zusammenstellung der Gleichungen der Halbierungsebenen seiner Flächenwinkel die Richtigkeit dieser Sätze: Die sechs innern Halbierungsebenen der Flächenwinkel eines Tetraeders schneiden sich in einem Punkte;

$$L - M = 0, \quad M - N = 0, \quad N - P = 0,$$
$$L - N = 0, \quad M - P = 0, \quad L - P = 0.$$

Die innern Halbierungsebenen der Flächenwinkel einer Ecke des Tetraeders und die äussern Halbierungsebenen der übrigen Flächenwinkel desselben gehen durch einen Punkt,

$$L - M = 0, \quad M - N = 0, \quad N - L = 0,$$
$$L + P = 0, \quad M + P = 0, \quad N + P = 0.$$

Der erstere ist als von allen Seitenflächen des Tetraeders in gleicher

Entfernung der Mittelpunkt der innern Berührungskugel, die vier letzteren Punkte sind die Mittelpunkte der äussern Berührungskugeln des Tetraeders (vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Artikel 56 f.).

33. Wenn vier Ebenen, welche sich in derselben geraden Linie schneiden, durch eine fünfte Ebene geschnitten werden, die jene nicht enthält, so ist das anharmonische oder Doppelschnittverhältniss des entstehenden Strahlbüschels unveränderlich.

Wir können durch eine Transformation der Coordinaten die Schnittebene zur Ebene der xy machen und erhalten dann durch die Substitution $z = 0$ in die Gleichungen der vier Ebenen die Gleichungen der vier Strahlen jenes Büschels. Sie sind offenbar von der Form

$$aL + M = 0,\ bL + M = 0,\ cL + M = 0,\ dL + M = 0,$$

und das Doppelschnittverhältniss derselben hängt, wie in der „Analyt. Geom. der Kegelschn.“ Artikel 56, allein von den Constanten a, b, c, d ab und ändert daher seinen Werth nicht, wenn durch Transformation der Coordinaten

$$L = 0,\quad M = 0$$

als Gleichungen anderer Durchschnittslinien erscheinen. Der Werth des fraglichen Verhältnisses ist wie a. a. O. durch

$$\frac{d-b}{d-c} : \frac{a-b}{a-c}$$

ausgedrückt. Seine Beziehung zu den sinus der Flächenwinkel des Büschels ist ganz dem dort Gegebenen analog und das harmonische Verhältniss geht ebenso daraus hervor.

Aus

$$\frac{d-b}{d-c} : \frac{a-b}{a-c} = -1$$

folgt die Bedingungsgleichung der harmonischen Theilung

$$2\,(ad + bc) - (a + d)\,(b + c) = 0.$$

Sind dann

$$b_1L + M = 0,\quad c_1L + M = 0;$$
$$b_2L + M = 0,\quad c_2L + M = 0$$

zwei Paare von Ebenen desselben Büschels, und suchen wir die Coefficienten der Gleichungen

$$aL + M = 0,\quad dL + M = 0$$

eines Paars von Ebenen, welches mit beiden gegebenen Paaren gleichzeitig eine harmonische Theilung bestimmt, so gelten für a und d die beiden Bedingungsgleichungen

$$2\,(ad + b_1 c_1) - (a + d)\,(b_1 + c_1) = 0,$$
$$2\,(ad + b_2 c_2) - (a + d)\,(b_2 + c_2) = 0,$$

und man erhält aus ihnen

$$a + d = -\frac{2\,(b_1 c_1 - b_2 c_2)}{(b_1 + c_1) - (b_2 + c_2)},$$
$$ad = \frac{b_1 c_1\,(b_2 + c_2) - b_2 c_2\,(b_1 + c_1)}{(b_1 + c_1) - (b_2 + c_2)};$$

zur Bestimmung von a und d ergiebt sich also eine quadratische Gleichung

$$\left\{(b_1 + c_1) - (b_2 + c_2)\right\} x^2 - 2\,(b_1 c_1 - b_2 c_2)\, x$$
$$= \left\{b_1 c_1\,(b_2 + c_2) - b_2 c_2\,(b_1 + c_1)\right\}.$$

Man weiss, dass die beiden so bestimmten Ebenen, welche harmonisch conjugiert sind in Bezug auf zwei verschiedene Paare gegebener Ebenen, die Doppelebenen oder Brennebenen des durch jene vier bestimmten involutorischen Büschels sind; sie sind wie die Wurzeln einer quadratischen Gleichung beide reell oder beide imaginär und sie können nur dann in eine Ebene zusammenfallen, wenn die beiden gegebenen Paare selbst eine Ebene gemeinschaftlich enthalten.

Die Bedingung, unter welcher drei Ebenenpaare ein involutorisches System bilden, ist leicht nach dem Vorigen zu bilden; man erhält sie durch die lineare Elimination von ad und $(a + d)$ aus den Gleichungen

$$2\,(ad + b_1 c_1) - (a + d)\,(b_1 + c_1) = 0,$$
$$2\,(ad + b_2 c_2) - (a + d)\,(b_2 + c_2) = 0,$$
$$2\,(ad + b_3 c_3) - (a + d)\,(b_3 + c_3) = 0$$

in Form einer Determinante und kann von derselben leicht zu manichfachen gleichbedeutenden Ausdrucksformen übergehen.

Die Vergleichung mit den entsprechenden Entwickelungen der analytischen Planimetrie („Analyt. Geom. d. Kegelschn." Artikel 422 f.) bestätigt, dass die Grundanschauungen der sogenannten „neueren Geometrie" für die Ebene und den Raum gleichmässig aus der Algebra der binären Formen hervorgehen und lässt die weitere Verfolgung an diesem Orte als überflüssig erscheinen*).

Die Bemerkung, dass die Symbole L, M, etc. die normalen Abstände eines der Punkte des Ortes von den respectiven Ebenen

$$L = 0, \; M = 0, \text{ etc.}$$

ausdrücken, giebt zu naheliegenden Interpretationen dieser Gleichungen Anlass.

34. Wenn irgend vier nicht durch einen Punkt gehende Ebenen durch ihre Gleichungen

$$L = 0, \; M = 0, \; N = 0, \; P = 0$$

gegeben sind, so kann auf dieselbe Art, wie in der analytischen Planimetrie (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Art. 58), dargethan werden, dass die Gleichung jeder andern Ebene in die Form

$$aL + bM + cN + dP = 0$$

gebracht werden kann. Denn wenn diese vier festen Ebenen durch

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \; (i = 1, 2, 3, 4)$$

respective dargestellt sind und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die fünfte Ebene bezeichnet, welche in die Form

$$aL + bM + cN + dP = 0$$

gebracht werden soll, so geht die Bestimmung von a, b, c, d aus der Auflösung der vier Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} aA_1 + bA_2 + cA_3 + dA_4 &= A, \\ aB_1 + bB_2 + cB_3 + dB_4 &= B, \\ aC_1 + bC_2 + cC_3 + dC_4 &= C, \\ aD_1 + bD_2 + cD_3 + dD_4 &= D \end{aligned}$$

hervor, welche stets möglich und bestimmt ist, so lange die vier festen Ebenen nicht durch einen Punkt gehen.

Daher entspringt daraus ein System von Punktcoordinaten im Raume, bei welchem die Gleichung einer Ebene

---

*) Man vergleiche die vollständige Ableitung dieser Theorie aus der Algebra der binären Formen in des Herausgebers Schrift: „Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen.“ Leipzig B. G. Teubner, 1862.

durch eine lineare homogene Gleichung zwischen vier Veränderlichen dargestellt wird. Wir bezeichnen jene vier festen Ebenen, die Fundamentalebenen des Systems,

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

hier und zuweilen in der Folge, wo wir von diesem System Gebrauch machen, durch die Symbole

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

sodass die Gleichung einer beliebigen Ebene durch

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0$$

dargestellt ist. Die Erinnerung an die Normalform der Gleichung der Ebene in Cartesischen Coordinaten

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

zeigt, dass die Veränderlichen α, β, γ, δ, welche hier als Coordinaten eines Punktes im Raume auftreten, die Längen der Normalen bedeuten, welche von ihm auf die Fundamentalebenen gefällt werden können; ihre Verhältnisse bestimmen die Lage des Punktes, die vier Coordinaten desselben Punktes sind durch die Relation

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = V$$

verbunden, wenn wir durch A, B, C, D die Flächen der den Gleichungen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

respective entsprechenden Seitenebenen des Fundamentaltetraeders und durch V das Dreifache seines Volumens bezeichnen. Aus dieser Relation folgt, dass die paradoxe Gleichung

$$\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D = V = 0$$

die Ebene der unendlich entfernten Punkte repräsentiert; in genauer Uebereinstimmung mit dem entsprechenden Ergebniss für das Cartesische System (Artikel 25). Wir stellen dazu die Bemerkung, dass man die Gleichungen des Cartesischen Systems in homogene Formen überführen kann durch Vollzug der einfachen Substitution

$$\frac{x}{\omega}, \quad \frac{y}{\omega}, \quad \frac{z}{\omega}$$

für x, y, z, nach welcher die Grösse ω als Vertreter der zu Grunde gelegten Maasseinheit in dieselben eintritt.

Die Gleichung einer Fläche vom n^{ten} Grade wird in den tetraedrischen Punkt-Coordinaten α, β, γ, δ — und ebenso in den Cartesischen Verhältnisscoordinaten $\frac{x}{\omega}$, $\frac{y}{\omega}$, $\frac{z}{\omega}$ — durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades zwischen den Veränderlichen α, β, γ, δ — oder x, y, z, ω — repräsentiert. In der That stimmt die Zahl der in der vollständigen Gleichung n^{ten} Grades mit drei Veränderlichen enthaltenen Glieder mit der Zahl der Glieder der homogenen Gleichung n^{ten} Grades zwischen vier Veränderlichen genau überein.

35. Man soll die Entfernung zweier Punkte P_1, P_2 durch ihre tetraedrischen Coordinaten α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2, γ_2, δ_2 ausdrücken.

Man erkennt leicht analytisch oder auch geometrisch aus der Betrachtung der Figur der Aufgabe, dass das Quadrat des gesuchten Abstandes eine rationale ganze Function der Differenzen

$$\alpha_1 - \alpha_2,\ \beta_1 - \beta_2,\ \gamma_1 - \gamma_2,\ \delta_1 - \delta_2$$

der Coordinaten ist. Die Identitäten

$$\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C + \delta_1 D = V,$$
$$\alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C + \delta_2 D = V$$

— unter Beibehaltung der vorher angenommenen Bezeichnungen — geben die Relation

$$A(\alpha_1 - \alpha_2) + B(\beta_1 - \beta_2) + C(\gamma_1 - \gamma_2) + D(\delta_1 - \delta_2) = 0$$

und man bildet aus ihr durch Multiplication mit

$$(\alpha_1 - \alpha_2),\ (\beta_1 - \beta_2),\ (\gamma_1 - \gamma_2),\ (\delta_1 - \delta_2)$$

respective die Identitäten

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = -\frac{B}{A}(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) - \frac{C}{A}(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \gamma_2)$$
$$- \frac{D}{A}(\alpha_1 - \alpha_2)(\delta_1 - \delta_2),$$

$$(\beta_1 - \beta_2)^2 = -\frac{C}{B}(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) - \frac{D}{B}(\beta_1 - \beta_2)(\delta_1 - \delta_2)$$
$$- \frac{A}{B}(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_2),$$

etc.,

welche beweisen, dass die Quadrate der Coordinatendifferenzen durch die Producte derselben ersetzt werden können. Daher ist die das Quadrat der fraglichen Entfernung repräsentierende Function durch

$$r^2 = L(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2) + M(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \gamma_2)$$
$$+ N(\alpha_1 - \alpha_2)(\delta_1 - \delta_2) + P(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2)$$
$$+ Q(\beta_1 - \beta_2)(\delta_1 - \delta_2) + R(\gamma_1 - \gamma_2)(\delta_1 - \delta_2)$$

darzustellen. Die Werthe der Constanten $L, M, \ldots, R$ derselben lassen sich aber leicht aus den speciellen Werthen bestimmen, welche die Function für das Zusammenfallen von P_1 und P_2 mit den Ecken des Fundamental-Tetraeders annimmt; denn dieselben liefern sechs Bedingungsgleichungen für diese Constanten.

Wir denken durch (a), (b), (c), (d), ~~(e)~~, ~~(f)~~ die den Flächen A, B, C, D gegenüberliegenden Ecken des Tetraeders bezeichnet, so dass (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd) die Längen seiner Kanten darstellen; wir nennen p, p', p'', p''', die jenen Ecken entsprechenden Höhen des Tetraeders und erhalten als Coordinaten der vier Ecken respective

$$p,\ 0,\ 0,\ 0;\quad 0,\ p',\ 0,\ 0\ ;$$
$$0,\ 0,\ p'',\ 0;\quad 0,\ 0,\ 0,\ p''';$$

also die Gleichungen

$$(ab)^2 = -L \,.\, pp'\ ,\ (ac)^2 = -M \,.\, pp''\ ,\ (ad)^2 = -N \,.\, pp'''\ ,$$
$$(bc)^2 = -P \,.\, p'p'',\ (bd)^2 = -Q \,.\, p'p''',\ (cd)^2 = -R \,.\, p''p''',$$

oder

$$L = -\frac{(ab)^2}{pp'},\quad M = -\frac{(ac)^2}{pp''},\quad N = -\frac{(ad)^2}{pp'''},$$
$$P = -\frac{(bc)^2}{p'p''},\quad Q = -\frac{(bd)^2}{p'p'''},\quad R = -\frac{(cd)^2}{p''p'''}$$

und endlich

$$r^2 = -\frac{1}{pp'p''p'''}\Big\{(ab)^2 p''p'''(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)$$
$$+ (ac)^2 p'p'''(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \gamma_2) + (ad)^2 p'p''(\alpha_1 - \alpha_2)(\delta_1 - \delta_2)$$
$$+ (bc)^2 pp'''(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2) + (bd)^2 pp''(\beta_1 - \beta_2)(\delta_1 - \delta_2)$$
$$+ (cd)^2 pp'(\gamma_1 - \gamma_2)(\delta_1 - \delta_2)\Big\}.$$

Man kann in diesem Ausdrucke noch die Höhen p, p', p'', p''' durch die äquivalenten Verhältnisse

$$\frac{V}{A},\ \frac{V}{B},\ \frac{V}{C},\ \frac{V}{D}$$

ersetzen*).

*) Für Punkte der Ebene

$$\delta = 0$$

erhält man den reducierten Ausdruck

Beispiel 1. Die Coordinaten des Centrums der eingeschriebenen Kugel sind

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = \frac{V}{A+B+C+D},$$

diejenigen des Schwerpunktes des Fundamentaltetraeders

$$\alpha_2 = \frac{V}{4A}, \quad \beta_2 = \frac{V}{4B},$$
$$\gamma_2 = \frac{V}{4C}, \quad = \delta_2 \frac{V}{4D}.$$

Welches ist die Entfernung dieser beiden Punkte?

Beispiel 2. Die sechs Ebenen, welche durch die Mittelpunkte der Kanten normal zu den Gegenkanten eines Tetraeders zu legen sind, schneiden sich in einem Punkte, der mit dem Schwerpunkte und dem Mittelpunkte der umgeschriebenen Kugel in einer geraden Linie liegt, so dass jene die Mitte zwischen ihm und diesem bildet.

36. Jedem Punkte O im Raume entspricht eine Ebene, die man nach Analogie des Entsprechens zwischen einem Punkte und einer geraden Linie in Bezug auf ein Dreieck, das in der 2. Aufgabe des Artikel 60 der „Analyt. Geom. der Kegelschn.", als *die Polarebene jenes Punktes, ihres Pols, in Bezug auf das Fundamentaltetraeder* bezeichnen kann.

Zwei Constructionen führen vom Punkte O zur Polarebene und ihre analytische Darlegung sei als ein einfaches Beispiel kurz angedeutet.

$$r^2 = -\frac{1}{pp'p''}\Big\{(ab)^2\, p''\, (\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2) + (ac)^2\, p'\, (\alpha_1-\alpha_2)(\gamma_1-\gamma_2)$$
$$+ (bc)^2\, p\, (\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)\Big\}.$$

übereinstimmend mit der entsprechenden Formel der analytischen Planimetrie; man kann in ihr die Grössen p, p', p'' durch die äquivalenten $\frac{F}{(bc)}, \frac{F}{(ca)}, \frac{F}{(ab)}$ ersetzen, wenn man durch F den doppelten Inhalt des Fundamental-Dreiecks bezeichnet. Im Artikel 64 der „Analyt. Geom. d. Kegelsch." Aufgabe 6 ist die analoge Lösung für das trimetrische System mit gleichseitigem Fundamentaldreieck oder allgemein für Flächenverhältnisscoordinaten angegeben und die Uebertragung auf das allgemeine System dem Leser überlassen worden; das Endresultat der Entwicklung enthält leider einen nicht angezeigten jedoch leicht zu erkennenden Druckfehler. Wir wollen endlich erinnern, dass beim Uebergang von der stereometrischen Formel des Textes zu dieser planimetrischen die α, β, γ einerseits und die p, p', p'' anderseits ihre geometrische Bedeutung geändert haben. Die Homogeneität der Formel erlaubt den Uebergang auf Grund der Proportionalität, die zwischen den alten und neuen Werthen besteht.

Man denke die durch den Punkt mit je einer der Kanten des Tetraeders bestimmten Ebenen und bemerke in jeder derselben den Punkt, in welchem sie die Kante des Tetraeders schneidet, die der sie mit bestimmenden gegenüberliegt. Die durch die Kanten *ab*, *bc*, *ca*, *ad*, *bd*, *cd* respective gehenden Ebenen bestimmen so in den gegenüberliegenden Kanten *cd, ad, bd, bc, ac, ab* die Schnittpunkte 12, 23, 31, 14, 24, 34; jedem dieser Letzteren entspricht ein in Bezug auf die Eckpunkte des Tetraeders in der zugehörigen Kante conjugiert harmonischer Punkt; die Reihe derselben in analoger Ordnung sei durch *cd, ad, bd, bc, ac, ab* bezeichnet, sodass jeder die Buchstaben seiner Kante enthält. Diese Punkte liegen in einer Ebene und bestimmen in derselben ein vollständiges Vierseit.

Oder: Man verbinde O durch gerade Linien mit den Eckpunkten des Tetraeders und bestimme die Durchschnittspunkte derselben mit den bezüglichen Gegenflächen; so entsprechen den Ecken a, b, c, d die Punkte 1, 2, 3, 4 respective. Zu jedem derselben bestimme man durch Verbindung mit den Ecken seiner Dreiecksfläche die Theilpunkte der Gegenseiten und die conjugiert harmonischen derselben so wie durch die Letzteren ihre geraden Verbindungslinien; man erhält so beispielsweise in der Fläche *bcd* die Theilpunkte 12, 13, 14 und ihre harmonisch conjugierten *cd*, *bd*, *bc*, und sie bestimmen eine gerade Linie, die man etwa mit A bezeichnen könnte. Ebenso entsprechen den Flächen *acd*, *abd*, *bcd* die geraden Linien B, C, D; alle diese vier Geraden liegen in der vorbezeichneten Ebene und sind die Seiten jenes vollständigen Vierseits.

Die Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3$ liegen in der Ebene

$$\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}\delta = 0,$$

wenn man hat

$$\mathfrak{A} = -\begin{vmatrix} \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2 \\ \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \alpha_2, & \gamma_2, & \delta_2 \\ \alpha_3, & \gamma_3, & \delta_3 \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{C} = -\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \delta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \delta_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \delta_3 \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Daher sind die Ebenen

$$ABO,\ ACO,\ BCO,\ ADO,\ BDO,\ CDO$$

durch die Gleichungen

$$\delta_1\gamma - \gamma_1\delta = 0,\quad \delta_1\beta - \beta_1\delta = 0,$$
$$\alpha_1\delta - \delta_1\alpha = 0,\quad \beta_1\gamma - \gamma_1\beta = 0,$$
$$\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha = 0,\quad \alpha_1\beta - \beta_1\alpha = 0$$

respective ausgedrückt.

Dieselben Gleichungen bezeichnen aber auch in Gemässheit des Zusammenhangs zwischen dem räumlichen und dem ebenen System die Linienpaare

$$b1,\ a2;\ c1,\ a3;$$
$$c2,\ b3;\ d1,\ a4;$$
$$d2,\ b4;\ c4,\ d3.$$

Die conjugiert harmonischen derselben in Bezug auf die entsprechenden Paare der Kanten

bc, *bd* und *ac*, *ad*; *cb*, *cd* und *ab*, *ad*;
ca, *cd* und *ba*, *bd*; *db*, *dc* und *ab*, *ac*;
da, *dc* und *ba*, *bc*; *ca*, *cb* und *da*, *db*

werden daher durch die Gleichungen

$$\delta_1\gamma + \gamma_1\delta = 0,\quad \delta_1\beta + \beta_1\delta = 0,$$
$$\alpha_1\delta + \delta_1\alpha = 0,\quad \beta_1\gamma + \gamma_1\beta = 0,$$
$$\alpha_1\gamma + \gamma_1\alpha = 0,\quad \alpha_1\beta + \beta_1\alpha = 0$$

dargestellt. Dieselben Gleichungen bestimmen die Punkte *cd*, *bd*, *ad*, *bc*, *ac*, *ab* der Kanten und zeigen, dass je drei derselben in einer der geraden Linie liegen, deren Gleichungen

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} = 0,\ \delta = 0;$$
$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\delta}{\delta_1} = 0,\ \gamma = 0;$$
$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\delta}{\delta_1} = 0,\ \beta = 0;$$
$$\frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\delta}{\delta_1} = 0,\ \alpha = 0$$

sind, nämlich die Punktegruppen

ab, *bc*, *ca*;
ab, *bd*, *da*;
ac, *cd*, *da*;
bc, *cd*, *db*.

Alle diese Geraden liegen aber in der einen Ebene

$$\frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{\beta}{\beta_1} + \frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\delta}{\delta_1} = 0,$$

welche die als Polarebene von O bezeichnete Ebene ist.

Aehnliche Betrachtungen führen zur constructiven Bestimmung einer durch ihre Gleichung gegebenen Ebene.

37. Es liegt nahe, den Systemen der Punktcoordinaten analoge Systeme von Ebenencoordinaten gegenüberzustellen, d. h. räumliche Bestimmungssysteme, in denen eine Ebene durch ihre Coordinaten und ein Punkt durch eine Gleichung zwischen denselben bestimmt wird.

Ein solches System geht aus dem Cartesichen Coordinatensystem sehr einfach dadurch hervor, dass man die von einer Ebene in den Achsen gebildeten Abschnitte oder die reciproken Werthe derselben, allgemeiner die Coefficienten der Cartesischen Gleichung der Ebene als Coordinaten der Ebene zu ihrer Bestimmung verwendet. Man beweist leicht den Satz: Wenn die Coefficienten der Gleichung der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

durch die lineare Gleichung

$$lA + mB + nC + pD = 0$$

verbunden sind, in welcher l, m, n, p als Constanten, A, B, C, D aber als veränderlich gedacht werden, so geht die durch jene Gleichung dargestellte Ebene durch einen festen Punkt. Die Elimination von D zwischen beiden Gleichungen giebt nämlich

$$A\,(px - l) + B\,(py - m) + C\,(pz - n) = 0,$$

die Gleichung einer durch den festen Punkt

$$x = \frac{l}{p},\ y = \frac{m}{p},\ z = \frac{n}{p}$$

gehenden Ebene. (Vergl. Artikel 32.)

Wenn man die negativen reciproken Werthe der von der Ebene in den Achsen bestimmten Abschnitte als ihre Coordinaten durch t, u, v bezeichnet, so ist ihre Gleichung

$$tx + uy + vz + 1 = 0,$$

und wenn t, u, v durch eine Relation der Form

$$lt + mu + nv + p = 0$$

verbunden ist, so gehen die damit dargestellten Ebenen durch den Punkt

$$x = \frac{l}{p}, \quad y = \frac{m}{p}, \quad z = \frac{n}{p};$$

dieser letztere Punkt ist also durch die Gleichung

$$lt + mn + nv + p = 0$$

dargestellt. In der reducierten Form

$$at + bu + cv + 1 = 0$$

erscheinen die Coordinaten des Punktes a, b, c direct und wir können leicht zeigen, dass die Länge der Normale von einem durch diese seine Gleichung bestimmten Punkte auf eine durch ihre Coordinaten t', u', v' bestimmte Ebene durch

$$\frac{at' + bu' + cv' + 1}{\sqrt{(t'^2 + u'^2 + v'^2)}}$$

dargestellt wird; daraus aber lässt sich wie im Artikel 32 eine Reihe von Schlüssen über symbolische Darstellung von Punkten und ihrer Verbindungen zu Gruppen ziehen, die wir ihrer vollständigen Correspondenz mit den a. a. O. entwickelten halber hier nicht ausführen wollen. Nach ihnen sind z. B. die Kantenmittelpunkte des Tetraeders von den Ecken

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} L + M &= 0, & N + P &= 0, \\ L + N &= 0, & P + M &= 0, \\ L + P &= 0, & M + N &= 0 \end{aligned}$$

ausgedrückt und man erkennt, wegen der daraus dreifach hervorgehenden Gleichheit

$$L + M + N + P = 0,$$

dass die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Gegenkanten durch einen und denselben Punkt gehen, wie wir schon im Artikel 9 gefunden haben.

38. Man kann aber diesen Betrachtungen noch eine andere Grundlage geben, indem man ein System von tetraedrischen Ebenencoordinaten entwickelt, welches dem System der Artikel 34 f. analog ist. Man bezieht jede Ebene auf vier feste Fundamentalpunkte und bestimmt sie durch ihre normalen Entfernungen von diesen, die man als ihre Coordinaten betrachtet.

Die Möglichkeit einer solchen Darstellung erhellt einerseits durch Elimination nach der Methode des Artikel 34.

Man kann aber anderseits zur Begründung des fraglichen Coordinatensystems sehr einfach von den Ergebnissen des Artikel 8 gelangen. Wenn wir durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

die Gleichungen zweier unter den Fundamentalpunkten a, b bezeichnen, als welche aussagen, dass die senkrechten Abstände dieser Punkte von allen durch sie hindurchgehenden Ebenen gleich Null sind; wenn wir sodann für eine beliebige Ebene durch α, β die Perpendikel bezeichnen, die von jenen auf sie gefällt werden, so ist die Länge desjenigen Perpendikels, welches auf dieselbe Ebene von demjenigen Punkte aus gefällt wird, der die Verbindungslinie jener Fundamentalpunkte nach dem Verhältniss $l : m$ theilt

$$\frac{l\alpha + m\beta}{l + m},$$

und so fern jene Ebene durch diesen Theilungspunkt selbst hindurchgeht, ist die Relation

$$l\alpha + m\beta = 0$$

nothwendig erfüllt; diess ist also die Gleichung jenes Theilpunktes der Verbindungslinie der Fundamentalpunkte selbst. Verbindet man ihn mit dem dritten Fundamentalpunkte

$$\gamma = 0$$

und theilt die Strecke zwischen beiden im Verhältniss $n : (l + m)$, so ist die Länge der von diesem Theilpunkt auf eine feste von den drei Fundamentalpunkten um die Abstände α, β, γ entfernte Ebene gefällten Normale

$$\frac{(l + m)\,\dfrac{l\alpha + m\beta}{l + m} + n\gamma}{l + m + n} = \frac{l\alpha + m\beta + n\gamma}{l + m + n}$$

und für

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

geht jene Ebene durch diesen Theilpunkt selbst. Die Fortsetzung dieser Betrachtungen auf einen Theilpunkt der geraden Verbindungslinie des Letztbetrachteten mit dem vierten Fundamentalpunkt

$$\delta = 0$$

nach dem Verhältniss $p : (l + m + n)$ liefert für die allgemeine Gleichung eines Punktes

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0,$$

weil sie erfüllt wird durch die Coordinaten jeder Ebene, die durch ihn gelegt werden kann. In dieser Entwickelung ist zugleich die Art und Weise bezeichnet, durch welche ein durch seine Gleichung bestimmter Punkt gefunden werden kann.

Man ersieht aus ihr, dass der Schwerpunkt des von den vier Fundamentalpunkten gebildeten Tetraeders durch die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$$

dargestellt wird, in genauer Uebereinstimmung mit dem, was wir vorher in dem aus dem Cartesischen abgeleiteten System der Ebenencoordinaten gefunden haben. Die Mittelpunkte der Kanten sind

$$\alpha + \beta = 0,\ \alpha + \gamma = 0,\ \alpha + \delta = 0,\ \beta + \gamma = 0,\ \beta + \delta = 0,$$
$$\gamma + \delta = 0$$

die Schwerpunkte der Seitenflächen aber

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,\ \beta + \gamma + \delta = 0,\ \alpha + \gamma + \delta = 0,$$
$$\alpha + \beta + \delta = 0.$$

Die Relationen des Doppelschnittverhältnisses, der harmonischen Theilung, der Involution übertragen sich nun mit derselben Leichtigkeit und in unveränderter Form auf geradlinige Punktreihen; denn wenn

$$L = 0,\quad M = 0$$

zwei Punkte repräsentieren, so sind

$$aL + bM = 0,\quad a'L + b'M = 0,\ \text{etc.}$$

Punkte ihrer geraden Verbindungslinie; für die drei Punkte

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0$$

repräsentieren Gleichungen der Form

$$aL + bM + cN = 0$$

Punkte ihrer Ebene; die Punkte

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0$$

liegen in einer Geraden, wenn zwischen ihren Gleichungen die Identität

$$aL + bM + cN = 0$$

und die vier Punkte

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0,\quad P = 0$$

in einer Ebene, wenn die Identität

$$aL + bM + cN + dP = 0$$

statt hat. Wir brauchen hiernach für alles Uebrige nur auf Artikel 32, 33 zu verweisen.

Beispiel. Die sechs Punkte der Kanten eines Tetraeders, welche in Bezug auf die Ecken harmonisch conjugiert sind zu sechs in einer Ebene gelegenen Punkten derselben, liegen zu Paaren in drei geraden Linien, welche durch einen und denselben Punkt gehen. Für die unendlich entfernte Ebene ist derselbe der Schwerpunkt des Tetraeders.

Sind

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0, \ \delta = 0$$

die Ecken des Tetraeders und

$$a\alpha - b\beta = 0, \ a\alpha - c\gamma = 0, \ a\alpha - d\delta = 0$$

drei Punkte in den von $\alpha = 0$ ausgehenden Kanten desselben, so erhalten wir durch Subtraction dieser Gleichungen in

$$c\gamma - d\delta = 0, \ d\delta - b\beta = 0, \ b\beta - c\gamma = 0$$

die Gleichungen der drei Punkte der andern Kanten, welche mit jenen ersten in derselben Ebene liegen. Die conjugiert harmonischen dieser sechs Punkte in den Kanten des Tetraeders sind durch

$$a\alpha + b\beta = 0, \ a\alpha + c\gamma = 0, \ a\alpha + d\delta = 0,$$
$$c\gamma + d\delta = 0, \ d\delta + b\beta = 0, \ b\beta + c\gamma = 0$$

dargestellt und diese Gleichungen beweisen den Satz, indem man bemerkt, dass je zwei über einander stehende derselben die Gleichung

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0$$

zur Summe geben. Die Vergleichung dieses Beispiels mit den Ergebnissen des Artikel 36 erläutert das Princip der Reciprocität, welches aus dem Zusammenhang der Punkt- und der Plan-Coordinatensysteme hervorgeht. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn." Artikel 72, 326 f.)

Die gerade Linie.

39. Wenn man die Gleichungen zweier Ebenen als gleichzeitig geltend ansieht, so wird durch sie die Durchschnittslinie dieser Letzteren repräsentiert, als welche alle diejenigen Punkte enthält, deren Coordinaten beiden Gleichungen genügen. Das zuletzt Vorhergehende macht augenscheinlich, dass die Gleichungen zweier Punkte als gleichzeitig geltend gedacht, nicht minder eine gerade Linie darstellen, nämlich die gerade Verbindungslinie jener beiden Punkte; aber wir wollen die weitere Durchführung dieser Auffassung dem Leser überlassen.

Indem man nach einander x und y zwischen den beiden Gleichungen eliminiert, erhält man die Gleichungen der geraden Linie in der gebräuchlichen Form

$$x = mz + a, \quad y = nz + b.$$

Von ihnen stellt die erste die Projection der Linie auf die Ebene xz oder den Aufriss und die zweite ihre Projection auf die Ebene yz oder den Seitenriss dar. Beide zeigen, dass die Gleichungen einer geraden Linie vier unabhängige Constanten enthalten.

Wir können die Gleichungen der Verbindungslinie zweier Punkte unabhängig bilden; denn wir haben im Artikel 8 die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Verbindungslinie bestimmt und es genügt für jenen Zweck, aus den Werthen derselben das Verhältniss $m : n$ zu bestimmen und seine drei Ausdrücke einander gleich zu setzen; man erhält die Gleichungen

$$\frac{x - x'}{x - x''} = \frac{y - y'}{y - y''} = \frac{z - z'}{z - z''}$$

als die Gleichungen der geraden Verbindungslinie von x', y', z' und x'', y'', z''; dieselben Gleichungen ergeben sich aus einer einfachen geometrischen Betrachtung. Sie zeigen auch, dass die Gleichungen der Projectionen der Linie mit den Gleichungen der Verbindungslinien der gleichnamigen Projectionen von zweien ihrer Punkte identisch sind, wie diess auch sonst evident ist.

Die Durchschnittslinie zweier Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

ist durch die Gleichungen

$$\frac{x}{BC' - B'C} = \frac{y}{CA' - C'A} = \frac{z}{AB' - A'B}$$

repräsentiert.

Beispiel 1. Welches sind die Gleichungen der geraden Linien AD und BE in Figur 1?

Sie sind

$$\frac{a - x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c};$$

$$\frac{x}{a} = \frac{b - y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Beispiel 2. Wenn repräsentieren die Gleichungen

$$x = cy + bz, \quad y = az + cx, \quad z = bx + ay$$

die nämliche Gerade?

Wenn

$$\begin{vmatrix} -1 & c & b \\ c & -1 & a \\ b & a & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Die Gleichungen dieser Geraden sind

$$\frac{x}{\sqrt{(1-a^2)}} = \frac{y}{\sqrt{(1-b^2)}} = \frac{z}{\sqrt{(1-c^2)}}.$$

(Vergl. die Anmerkung des Artikel 27.)

40. Zwei gerade Linien im Raume schneiden sich im Allgemeinen nicht. Wenn die erste derselben durch die Gleichungen

$$L = 0, \quad M = 0$$

und die zweite durch die anderen

$$N = 0, \quad P = 0$$

dargestellt wird, so wird der Durchschnittspunkt dieser Geraden, sofern ein solcher vorhanden ist, zugleich jenen vier Ebenen gemeinsam sein und die Bedingung, unter welcher sich jene Geraden durchschneiden, ist daher dieselbe, unter welcher vier Ebenen durch einen Punkt gehen, welche wir im Artikel 30 entwickelt haben.

Zwei sich schneidende gerade Linien bestimmen eine Ebene, deren Gleichung leicht gefunden werden kann. Denn wir sahen im Artikel 32, dass die Gleichungen von vier durch einen Punkt gehenden Ebenen der identischen Relation

$$aL + bM + cN + dP = 0$$

genügen; es müssen somit die Gleichungen

$$aL + bM = 0, \quad cN + dP = 0$$

identisch und Repräsentanten der nämlichen Ebene sein; zugleich zeigt die Form dieser beiden Gleichungen, dass sie respective durch die beiden geraden Linien

$$L = 0, \quad M = 0; \quad N = 0, \quad P = 0$$

hindurchgehen.

Beispiel. Wenn die gegebenen geraden Linien durch Gleichungen von der Form

$$x = mz + a, \quad y = nz + b; \quad x = m'z + a', \quad y = n'z + b'$$

dargestellt sind, so wird die Bedingung, unter der sie sich durchschneiden, gefunden, indem man die erste und dritte Gleichung für z auflöst und die so gefundenen Werthe mit den aus der zweiten und vierten Gleichung entspringenden vergleicht; man erhält

$$\frac{a-a'}{m-m'}=\frac{b-b'}{n-n'}.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so sind die vier Gleichungen der Geraden durch die identische Relation

$$(n-n')\left\{(x-mz-a)-(x'-m'z-a')\right\}$$
$$=(m-m')\left\{(y-nz-b)-(y'-n'z-b')\right\}$$

verbunden und es ist daher

$$(n-n')(x-mz-a)=(m-m')(y-nz-b)$$

die Gleichung ihrer Ebene.

41. Die Gleichungen einer Linie zu finden, welche durch den Punkt x', y', z' geht und mit den Achsen die Winkel α, β, γ einschliesst.

Die Projectionen der Entfernung des Punktes x', y', z' von einem veränderlichen Punkte x, y, z dieser Linie auf die Achsen sind respective

$$x-x',\quad y-y',\quad z-z',$$

und da sie gleich den entsprechenden Producten dieser Entfernung in die cosinus der von der Linie mit den Achsen gebildeten Winkel sind, so erhalten wir

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}\;(=r),$$

eine Form der Gleichungen der geraden Linie, die in Ansehung ihrer Symmetrie nach x, y, z häufig brauchbar und selbst der Form des Artikel 39 vorzuziehen ist, obwohl sie zwei überflüssige Constanten einschliesst.

Beispiel. Die Bedingung des Durchschneidens der Geraden

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n},\quad \frac{x-x''}{l'}=\frac{y-y''}{m'}=\frac{z-z''}{n''}$$

ist

$$(x'-x'')(m'n-mn')+(y'-y'')(n'l-nl')+(z'-z'')(l'm-lm')=0.$$

Welches sind die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes?

Wenn wir umgekehrt die von einer gegebenen Geraden mit den Achsen gebildeten Winkel bestimmen wollen, so bringen wir ihre Gleichung in die Form

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}$$

und erhalten die Richtungscosinus der Linie, indem wir die Grössen A, B, C respective durch

$$\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}$$

dividieren.

Beispiel 1. Welches sind die Richtungscosinus der Geraden

$$x=mz+a,\ y=nz+b?$$

Wenn wir die Gleichungen in der Form

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z}{1}$$

schreiben, so sind die Richtungscosinus respective gleich

$$\frac{m}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}},\ \frac{n}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}},\ \frac{1}{\sqrt{(1+m^2+n^2)}}.$$

Beispiel 2. Man soll die Richtungscosinus von

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m},\ z=0$$

bestimmen.

Sie sind

$$\frac{l}{\sqrt{(l^2+m^2)}},\ \frac{m}{\sqrt{(l^2+m^2)}},\ 0.$$

Beispiel 3. Man soll die Richtungscosinus von

$$Ax+By+Cz+D=0,\ A'x+B'y+C'z+D'=0$$

bestimmen.

Die nach einander folgende Elimination von y und z und die dann vollzogene Reduction auf die Form dieses Artikels giebt die Richtungscosinus in den Ausdrücken

$$\frac{BC'-B'C}{R},\ \frac{CA'-C'A}{R},\ \frac{AB'-A'B}{R}$$

für

$$R^2=(BC'-B'C)^2+(CA'-C'A)^2+(AB'-A'B)^2.$$

Beispiel 4. Wenn durch die Schaar der Parallelen

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

und den Punkt x', y', z' Ebenen gelegt werden, so sind ihre Gleichungen durch

$$\frac{x-x'}{l}(q-r)+\frac{y-y'}{m}(r-p)+\frac{z-z'}{n}(p-q)=0$$

dargestellt, wenn p, q, r willkürliche Contsanten bezeichnen. Nach der Form dieser Gleichung enthalten sie alle die gerade Linie

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n},$$

welche der Schaar der Parallelen angehört und durch den gegebenen Punkt geht. Ihre Durchschnittslinien mit einer festen Ebene bilden daher ein Strahlenbüschel.

Beispiel 5. Man soll die Gleichung der durch die geraden sich durchschneidenden Linien

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma},\quad \frac{x-x'}{\cos\alpha'}=\frac{y-y'}{\cos\beta'}=\frac{z-z'}{\cos\gamma'}$$

gehenden Ebene bestimmen.

Da diese Ebene durch den Punkt x', y', z' geht und ihre Normale zu zweien Linien normal ist, deren Richtungscosinus bekannt sind, so ist ihre Gleichung nach Artikel 14

$$(x-x')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)+(y-y')(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)$$
$$+(z-z')(\cos\alpha\cos\beta'-\cos\alpha'\cos\beta)=0.$$

Beispiel 6. Man soll die Gleichung der durch die zwei parallelen Linien

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma},\quad \frac{x-x''}{\cos\alpha}=\frac{y-y''}{\cos\beta}=\frac{z-z''}{\cos\gamma}$$

bestimmten Ebene finden.

Diese Ebene enthält die Verbindungslinie der gegebenen Punkte x', y', z'; x'', y'', z'', deren Richtungscosinus zu den Differenzen

$$x'-x'',\ y'-y'',\ z'-z''$$

proportional sind; in Folge dessen sind die Richtungscosinus ihrer Normalen respective proportional den Grössen

$$(y'-y'')\cos\gamma-(z'-z'')\cos\beta,\ (z'-z'')\cos\alpha-(x'-x'')\cos\gamma,$$
$$(x'-x'')\cos\beta-(y'-y'')\cos\alpha,$$

und diese Letzteren gehen daher als Coefficienten von x, y, z in die fragliche Gleichung ein; man findet endlich ihr absolutes Glied, indem man in den so gebildeten Ausdruck die Substitution x', y', z' für x, y, z vollzieht, in der Form

$$(y'z''-y''z')\cos\alpha+(z'x''-z''x')\cos\beta+(x'y''-x''y')\cos\gamma.$$

Beispiel 7. Die Gleichung einer Ebene, welche durch die Bewegung der ihre Richtung behaltenden Geraden

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n}$$

längs der festen Geraden

$$\frac{x-a}{l'} = \frac{y-b}{m'} = \frac{z-c}{n'}$$

erzeugt wird, ergiebt sich in der Form

$$(m'n - mn')(x-a) + (n'l - nl')(y-b) + (l'm - lm')(z-c) = 0.$$

42. Man soll die Gleichungen der vom Punkte x', y', z' auf die Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gefällten Normalen entwickeln.

Die Bemerkung, dass die Richtungscosinus dieser Linie nach Artikel 23 den Grössen A, B, C respective proportional sind, giebt sofort die fraglichen Gleichungen in der Form

$$\frac{x-x'}{A} = \frac{y-y'}{B} = \frac{z-z'}{C}.$$

Beispiel. Die Gleichung einer durch den Punkt x', y', z' gehenden und zur Durchschnittslinie der Ebenen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

normalen Ebene ist

$$(x-x')(BC' - B'C) + (y-y')(CA' - C'A) + (z-z')(AB' - A'B) = 0.$$

(Vergl. Artikel 41, Beispiel 3.)

43. Man soll die Richtungscosinus der geraden Linie finden, welche den von zwei gegebenen Geraden gebildeten Winkel halbiert.

Nach der Fassung der Aufgabe genügt es, die Betrachtung auf Linien einzuschränken, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen. Denken wir dann in beiden gegebenen Geraden die vom Anfangspunkt gleichweit entfernten Punkte

$$x', y', z'; \; x'', y'', z'',$$

so ist der Mittelpunkt ihrer geraden Verbindungslinie ein Punkt der gesuchten Halbierungslinie und die Gleichungen derselben sind daher durch

$$\frac{x}{x'+x''} = \frac{y}{y'+y''} = \frac{z}{z'+z''}$$

ausgedrückt, ihre Richtungscosinus somit proportional zu

$$x'+x'', \; y'+y'', \; z'+z'';$$

da aber $x', y', z', x'', y'', z''$ zu den Richtungscosinus der gegebenen Linien in einerlei Verhältniss stehen, so sind die Richtungscosinus der Halbierungslinie zu

$$\cos\alpha' + \cos\alpha'', \quad \cos\beta' + \cos\beta'', \quad \cos\gamma' + \cos\gamma''$$

proportional, und man erhält ihre Ausdrücke, wenn man jede dieser Grössen durch die Quadratwurzel aus der Summe ihrer Quadrate dividiert.

Die Halbierungslinie des Supplementwinkels der gegebenen Geraden wird gefunden, indem man für den Punkt x'', y'', z'' einen im entgegengesetzten Sinne gleichweit vom Anfangspunkt entfernten Punkt, d. i. $-x'', -y', -z''$, substituiert, und ihre Richtungscosinus sind daher den Grössen

$$\cos\alpha' - \cos\alpha'', \quad \cos\beta' - \cos\beta'', \quad \cos\gamma' - \cos\gamma''$$

proportional.

Wir erinnern, dass die Ebenen, welche den Neigungswinkel zweier Ebenen

$$\begin{aligned} x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p &= 0, \\ x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' - p' &= 0 \end{aligned}$$

halbieren, durch

$$\begin{aligned} &(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p) \\ &= \pm(x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' - p') \end{aligned}$$

dargestellt werden. (Vergl. Artikel 28.)

Beispiel. Wenn in der Gleichung der Ebene des Beispiels 4 im Artikel 41 $x' = y' = z' = 0$ sind, so halbiert die Ebene den von beiden gegebenen Ebenen gebildeten Winkel für

$$\frac{D^2}{D'^2} = \frac{A^2 + B^2 + C^2}{A'^2 + B'^2 + C'^2}.$$

44. Man soll den durch die geraden Linien

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}, \quad \frac{x-a}{l'} = \frac{y-b}{m'} = \frac{z-c}{n'}$$

gebildeten Winkel bestimmen.*)

*) Da die Gleichungen dieser Form auch für schiefwinklige Coordinaten gelten, so mögen einige dieselben betreffende Bemerkungen hier vereinigt werden. Die Grössen l, m, n bezeichnen dann die Verhältnisse der Projectionen einer gegebenen Strecke der Geraden auf die Achsen zur Strecke selbst, wenn man voraussetzt, dass die Projectionen durch Parallelen zu den Coordinatenebenen gebildet werden.

Die Vergleichung der in den Artikeln 13 und 41 gewonnenen Ergebnisse giebt für diesen Winkel die Formel

$$\cos\theta = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}\sqrt{(l'^2 + m'^2 + n'^2)}}.$$

Die betrachteten Geraden sind somit rechtwinklig zu einander für

$$ll' + mm' + nn' = 0.$$

Die Formel des Artikel 13 für $\sin^2\theta$ giebt für die Bedingung der Rechtwinkligkeit

$$(mn' - m'n)^2 + (nl' - n'l)^2 + (lm' - l'm)^2 = 0.$$

Die Bedingungen des Parallelismus ergeben sich eben so wohl hieraus, als aus der geometrischen Anschauung; es erscheint unnöthig, sie noch anzuführen.

Beispiel 1. Welches ist der von den geraden Linien

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{\sqrt{(3)}} = \frac{z}{\sqrt{(2)}};\quad \frac{x}{\sqrt{(3)}} = y,\quad z = 0$$

gebildete Winkel?

Antwort: 30^0.

Beispiel 2. Welchen Winkel bilden die Geraden des Beispiels 2 im Artikel 39?

Sein cosinus ist

$$= \frac{-a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Sie sind durch die identische Relation

$$\begin{vmatrix} -1, & n, & m \\ n, & -1, & l \\ m, & l, & -1 \end{vmatrix} = 0$$

verbunden.

Der von zwei geraden Linien gebildete Winkel ist durch

$$\cos\theta = ll' + mm' + nn' + a\,(mn' + m'n) + b\,(nl' + n'l) + c\,(lm' + l'm)$$

bestimmt, die in der Form

$$\cos\theta = l'\cos\alpha + m'\cos\beta + n'\cos\gamma$$

dargestellt werden kann, wenn α, β, γ die durch

$$\cos\alpha = l + bn + cm,\quad \cos\beta = m + cl + an,\quad \cos\gamma = n + am + bl$$

bestimmten Winkel der ersten Geraden mit den Achsen bezeichnen.

Für

$$\frac{l + bn + cm}{l' + bn' + cm'} = \frac{m + cl + an}{m' + cl' + an'} = \frac{n + am + bl}{n' + am' + bl'} = 1$$

sind daher diese Geraden parallel und für

$$l'\cos\alpha + m'\cos\beta + n'\cos\gamma = 0$$

sind sie rechtwinklig auf einander.

Man soll die senkrechte Entfernung eines Punktes x'', y'', z'' von der geraden Linie

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha} = \frac{y-y'}{\cos\beta} = \frac{z-z'}{\cos\gamma}$$

bestimmen.

Wenn man von jenem auf diese die Normale fällt und den gegebenen Punkt mit dem Punkte x', y', z' der Geraden verbindet, so ist die Länge von jener dem Producte aus der Länge L dieser Letzteren in den sinus des von beiden gebildeten Winkels gleich; nun sind die Richtungscosinus der eben bezeichneten Linie L durch

$$\frac{x'-x''}{L},\quad \frac{y'-y''}{L},\quad \frac{z'-z''}{L}$$

dargestellt und man erhält mittelst der im Artikel 13 für $\sin^2\theta$ gegebenen Formel das Quadrat des gesuchten senkrechten Abstandes

$$\begin{aligned} &= [\cos\beta\,(z'-z'') - \cos\gamma\,(y'-y'')]^2 \\ &+ [\cos\gamma\,(x'-x'') - \cos\alpha\,(z'-z'')]^2 \\ &+ [\cos\alpha\,(y'-y'') - \cos\beta\,(x'-x'')]^2. \end{aligned}$$

Für $x'' = y'' = z'' = 0$ reduciert sich dieser Ausdruck auf den im Artikel 13 (Beispiel) gefundenen, aus welchem er auch durch eine Verlegung des Anfangspunkts auf die einfachste Weise abgeleitet wird.

Wenn man die Länge der zweiten Kathete jenes rechtwinkligen Dreiecks, aus welchem der cosinus vorher entnommen ward, K als das Product von L in den cosinus des nämlichen Winkels ausdrückt, so erhält man für sie den Werth

$$K = \cos\alpha\,(x'-x'') + \cos\beta\,(y'-y'') + \cos\gamma\,(z'-z'')$$

und mittelst derselben die Coordinaten des Fusspunktes der Normale

$$x_n = x' + K\cos\alpha,\quad y_n = y' + K\cos\beta,\quad z_n = z' + K\cos\gamma.$$

45. Man soll den Winkel bestimmen, welcher von der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

mit der geraden Linie

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

gebildet wird.

Der fragliche Winkel ist das Complement desjenigen Winkels, welchen die gegebene Gerade und die Normale der Ebene mit einander einschliessen, und wir erhalten daher

$$\sin\theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{(l^2 + m^2 + n^2)}\ \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}}.$$

Für

$$Al + Bm + Cn = 0$$

ist die betrachtete Gerade der Ebene parallel, denn sie ist alsdann normal zu einer Normalen der Ebene.

46. Unter welchen Bedingungen ist die gerade Linie

$$x = mz + a, \quad y = nz + b$$

in der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

ganz enthalten?

Wenn wir die durch die Gleichungen der Linie für x und y gegebenen Werthe in die Gleichung der Ebene substituieren, so giebt die nochmalige Auflösung derselben für z

$$z = -\frac{Aa + Bb + D}{Am + Bn + C},$$

und wenn der Zähler und Nenner dieses Ausdrucks gleichzeitig identisch verschwinden, so wird der Werth von z unbestimmt und die gerade Linie ist vollständig in der Ebene enthalten. Wir haben so eben gesehen, dass das Verschwinden des Nenners den Parallelismus der Geraden mit der Ebene anzeigt, während das Verschwinden des Zählers anzeigt, dass einer der Punkte der Geraden, nämlich der Punkt $a, b, 0$, in welchem sie die Ebene xy schneidet, in der Ebene enthalten ist.

Wir können in derselben Art die Bedingungen aufstellen, unter welchen eine gerade Linie ganz in einer beliebigen Fläche gelegen ist; wir substituieren wie vorher die Werthe von x und y in die Gleichung der Fläche und vergleichen die Coefficienten aller Potenzen von z in der resultierenden Gleichung mit Null. Es ist klar, dass die Zahl der daraus hervorgehenden Bedingungen um Eins den Grad der Fläche übersteigt.*)

*) Weil die Gleichung einer geraden Linie vier Constanten enthält, so kann eine gerade Linie so bestimmt werden, dass sie irgend vier gegebene Bedingungen erfüllt. Demnach muss jede Fläche zweiten Grades

47. Man soll die Gleichung einer Ebene bestimmen, welche durch eine gegebene gerade Linie geht und zu einer gegebenen Ebene normal ist.

Wir denken die Linie durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

und die Ebene durch

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

gegeben. Dann ist die Gleichung jeder durch jene Gerade gehenden Ebene von der Form

$$\lambda\,(Ax + By + Cz + D) + \mu\,(A'x + B'y + C'z + D') = 0,$$

und damit eine solche zu der gegebenen Ebene normal sei, muss die Bedingung

$$(\lambda A + \mu A')\,A'' + (\lambda B + \mu B')\,B'' + (\lambda C + \mu C')\,C'' = 0$$

erfüllt sein. Sie bestimmt das Verhältniss $\lambda : \mu$ und die geforderte Gleichung ergiebt sich in der Form

$$\begin{aligned}&(A'A'' + B'B'' + C'C'')\,(Ax + By + Cz + D)\\ = &(AA'' + BB'' + CC'')\,(A'x + B'y + C'z + D').\end{aligned}$$

Eine andere sehr einfache Bestimmung ihrer Gleichung bietet sich dar, wenn die Ebene und die gerade Linie durch Gleichungen von der Form

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p;$$

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha'} = \frac{y - y'}{\cos\beta'} = \frac{z - z'}{\cos\gamma'}$$

gegeben sind; denn die gesuchte Ebene enthält eine Gerade von den Richtungswinkeln α', β', γ' und die Normale der Ebene von den Richtungswinkeln α, β, γ; nach Artikel 14 sind daher die Richtungscosinus einer zu ihr normalen Geraden respective proportional zu

$$\cos\beta' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma', \quad \cos\gamma' \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha',$$
$$\cos\alpha' \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta',$$

---

unzählig viele gerade Linien enthalten, weil um drei Bedingungen zu erfüllen vier Constanten zur Disposition sind. Jede Fläche vom dritten Grade muss eine begrenzte Anzahl von geraden Linien enthalten, weil die Zahl der Bedingungen, welchen zu genügen ist, mit der Zahl der verfügbaren Constanten übereinstimmt, Flächen von höheren Graden enthalten nicht mit Nothwendigkeit gerade Linien, sondern müssen, um diess zu thun, besonderen Bedingungen genügen.

und weil die Ebene zugleich den Punkt x', y', z' enthält, so ist ihre Gleichung nothwendig

$$\begin{aligned}&(x - x')(\cos\beta \cos\gamma' - \cos\beta' \cos\gamma)\\ + &(y - y')(\cos\gamma \cos\alpha' - \cos\gamma' \cos\alpha)\\ + &(z - z')(\cos\alpha \cos\beta' - \cos\alpha' \cos\beta) = 0.*)\end{aligned}$$

48. Man soll die Gleichung einer Ebene bestimmen, welche durch eine gegebene Gerade und parallel einer zweiten gegebenen Geraden geht.

Wir nehmen zuerst an, die beiden Geraden seien durch

$$L = 0,\quad M = 0;\quad N = 0,\quad P = 0$$

gegeben, wo L, M, N, P die allgemeinste Gleichungsform der Ebene vertreten. Indem wir dann genau wie im Artikel 32 verfahren, erhalten wir die identische Relation

$$L(A'B''C''') - M(A''B'''C) + N(A'''BC') - P(AB'C'') = (AB'C''D'''),$$

in welcher die rechte Seite diejenige Determinante repräsentiert, bei deren Verschwinden die vier Ebenen L, M, N, P sich in einem Punkte schneiden, während die Coefficienten der linken Seite ihre Minoren sind.

Aus dieser Relation ergiebt sich, dass die Gleichungen

$$L(A'B''C''') - M(A''B'''C) = 0,\quad N(A'''BC') - P(AB'C'') = 0$$

parallele Ebenen repräsentieren; denn sie unterscheiden sich nur durch eine Constante, d. h. sie schneiden sich in der unendlich entfernten Ebene. Diese Ebenen gehen aber der Form ihrer Gleichungen nach durch je eine der beiden gegebenen geraden Linien.

Wir nehmen sodann zweitens an, dass die beiden Geraden durch die Gleichungen

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma};\quad \frac{x - x''}{\cos\alpha'} = \frac{y - y''}{\cos\beta'} = \frac{z - z''}{\cos\gamma'}$$

---

*) Wenn man das Letztere auf die im Beispiel 6 des Artikel 41 entwickelte Gleichung der Ebene anwendet, so ergiebt sich für φ, ψ, χ als die Richtungswinkel der Normalen, die äquivalente Gleichungsform für dieselbe

$$(x - a)\cos\varphi + (y - b)\cos\psi + (z - c)\cos\chi = 0,$$

oder

$$x\cos\varphi + y\cos\psi + z\cos\chi = p,$$

wenn man

$$p = a\cos\varphi + b\cos\psi + c\cos\chi$$

setzt.

gegeben sind, und bemerken, dass die Richtungscosinus einer Normale der gesuchten Ebene, weil eine solche zu jeder der beiden Geraden normal sein muss, die im letzten Artikel gegebenen Werthe haben werden, so dass die Gleichungen der gesuchten parallelen Ebenen durch

$$\begin{aligned} &(x-x')(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma) \\ +&(y-y')(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha) \\ +&(z-z')(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta) = 0, \\ &(x-x'')(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma) \\ +&(y-y'')(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha) \\ +&(z-z'')(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta) = 0 \end{aligned}$$

ausgedrückt werden.

Die normale Entfernung beider Ebenen ist die Differenz zwischen den vom Anfangspunkt auf sie gefällten Normalen, und somit gleich dem Quotienten aus der Differenz ihrer absoluten Glieder durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der gemeinschaftlichen Coefficienten von x, y, z in ihren Gleichungen; diese normale Entfernung ist daher

$$\begin{aligned} &\{(x'-x'')(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\gamma) \\ +&(y'-y'')(\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\alpha) \\ +&(z'-z'')(\cos\alpha\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\beta)\} : \sin\theta, \end{aligned}$$

wenn wir durch θ den von beiden geraden Linien gebildeten Winkel bezeichnen, wie im Artikel 13. Es ist offenbar, dass die so bestimmte normale Entfernung kürzer ist, als jede andere gerade Linie, die man von einem Punkte der einen Ebene nach einem Punkte der andern Ebene ziehen kann.

49. Man soll die Gleichungen und die Grösse der kürzesten Entfernung zwischen zwei sich nicht durchschneidenden Geraden bestimmen.

Die kürzeste Entfernung zweier Geraden ist eine zu beiden normale gerade Linie, welche folgendermassen bestimmt wird: Man lege durch jede der beiden geraden Linien nach Artikel 47 eine Ebene, welche zu den nach Artikel 48 bestimmten Ebenen normal ist; ihre Durchschnittslinie ist eine Normale der beiden parallelen Ebenen und somit auch der beiden gegebenen geraden Linien; die Construction zeigt, dass sie auch die beiden gegebenen Geraden schneidet, sie giebt also die gesuchte kürzeste Entfernung. Ihre Länge ist offenbar die im letzten Artikel bereits gegebene.

Indem wir nach Artikel 47 die Gleichung einer Ebene ermitteln, welche durch eine Linie von den Richtungswinkeln α, β, γ geht und normal zu einer Ebene ist, deren Richtungscosinus zu

$$\cos\beta' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma',$$
$$\cos\gamma' \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha',$$
$$\cos\alpha' \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta'$$

proportional sind, erkennen wir, dass die gesuchte Linie die Durchschnittslinie der Ebenen

$$(x - x')(\cos\alpha' - \cos\theta\cos\alpha) + (y - y')(\cos\beta' - \cos\theta\cos\beta) + (z - z')(\cos\gamma' - \cos\theta\cos\gamma) = 0,$$
$$(x - x'')(\cos\alpha - \cos\theta\cos\alpha') + (y - y'')(\cos\beta - \cos\theta\cos\beta') + (z - z'')(\cos\gamma - \cos\theta\cos\gamma') = 0$$

ist; ihre Richtungscosinus sind den Grössen

$$\cos\beta' \cos\gamma - \cos\beta \cos\gamma',$$
$$\cos\gamma' \cos\alpha - \cos\gamma \cos\alpha',$$
$$\cos\alpha' \cos\beta - \cos\alpha \cos\beta'$$

nothwendig proportional.

50. Wir schliessen dem Inhalte der vorigen Kapitel einige Eigenschaften des Tetraeders an, welche, obwohl nicht durch die Methode der Coordinaten gefunden, uns doch von Nutzen und der Anführung werth scheinen.

Man soll die Relation angeben, welche die Längen der sechs geraden Linien verbindet, die zwischen vier Punkten einer Ebene gezogen werden können.

Wir nennen a, b, c die Seiten des Dreiecks ABC und d, e, f die geraden Linien DA, DB, DC, welche seine Ecken mit dem vierten Punkte D verbinden. Wenn wir dann die von den Seiten a, b, c am Punkte D bestimmten Winkel durch α, β, γ bezeichnen, so ist

$$\cos\alpha = \cos(\beta \pm \gamma),$$

also

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1,$$

eine für alle möglichen Lagen von D in der Ebene ABC gültige Man hat aber

$$\cos\alpha = \frac{e^2 + f^2 - a^2}{2ef}, \quad \cos\beta = \frac{f^2 + d^2 - b^2}{2fd},$$
$$\cos\gamma = \frac{d^2 + e^2 - c^2}{2de}$$

und erhält durch Substitution dieser Werthe und Reduction in dem Ausdrucke

$$\begin{aligned} & a^2(d^2-e^2)(d^2-f^2) + b^2(e^2-f^2)(e^2-d^2) \\ & + c^2(f^2-d^2)(f^2-e^2) + a^2d^2(a^2-b^2-c^2) \\ & + b^2e^2(b^2-c^2-a^2) + c^2f^2(c^2-a^2-b^2) + a^2b^2c^2 = 0 \end{aligned}$$

die fragliche Relation.

51. Man soll das Volumen eines Tetraeders als eine Function der Längen seiner sechs Kanten darstellen.

Wir bezeichnen die Seiten einer seiner Flächen ABC durch a, b, c und die entsprechende Höhe, d. h. die auf dieselbe von der gegenüberliegenden Ecke gefällte Normale durch p, so wie die Abstände des Fusspunkts derselben von den Ecken A, B, C durch d', e', f' respective. Dann besteht zwischen a, b, c, d', e', f' die Relation des letzten Artikels und die Kanten d, e, f des Tetraeders, welche von jener vierten Ecke nach A, B, C gehen, sind durch

$$d^2 = d'^2 + p^2, \quad e^2 = e'^2 + p^2, \quad f^2 = f'^2 + p^2$$

ausgedrückt, so dass

$$d^2 - e^2 = d'^2 - e'^2, \; e^2 - f^2 = e'^2 - f'^2, \; f^2 - d^2 = f'^2 - d'^2$$

sind. Wenn man also den Werth der linken Seite der Gleichung des letzten Artikels durch F bezeichnet, so erhält man durch diese Substitutionen die neue Gleichung

$$-F = p^2(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4),$$

in welcher der mit p^2 multiplicierte Ausdruck das sechszehnfache des Quadrats von der Fläche des Dreiecks ABC darstellt. Wenn wir bemerken, dass das $p$fache dieser Fläche das dreifache Volumen des Tetraeders giebt, so erhält man die Relation

$$F = -144\,V^2,$$

welche der Forderung entspricht.

Man kann zu derselben auch gelangen, indem man von dem Determinantenausdruck des Artikel 31 ausgeht und erhält sie dann selbst in Form einer Determinante.

Man hat nach Artikel 31 und nach bekannten Determinantengesetzen

$$6V = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 0, & 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 0, & 1, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 0, & 1, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & 0, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & 0, & x_3, & y_3, & z_3 \\ 1, & 0, & x_4, & y_4, & z_4 \end{vmatrix},$$

also durch Multiplication beider Werthe

$$36V^2 =$$

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & x_1^2+y_1^2+z_1^2, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, & x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4 \\ 1, & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2, & x_2^2+y_2^2+z_2^2, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3, & x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4 \\ 1, & x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3, & x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3, & x_3^2+y_3^2+z_3^2, & x_3x_4+y_3y_4+z_3z_4 \\ 1, & x_1x_4+y_1y_4+z_1z_4, & x_2x_4+y_2y_4+z_2z_4, & x_3x_4+y_3y_4+z_3z_4, & x_4^2+y_4^2+z_4^2 \end{vmatrix};$$

ändern wir nun in dieser Determinante die Vorzeichen der letzten vier Horizontalen und die der ersten Verticale, multiplicieren dann jene und dividieren diese durch 2, so ist dieselbe mit 2^3 multipliciert; die Addition der mit $(x_1^2+y_1^2+z_1^2)$, $(x_2^2+y_2^2+z_2^2)$, $(x_3^2+y_3^2+z_3^2)$, $(x_4^2+y_4^2+z_4^2)$ respective multiplicierten ersten zu den vier letzten Horizontalreihen und die analoge Addition der mit denselben Factoren multiplicierten ersten zu den vier letzten Verticalreihen ändert sodann den Werth der Determinante nicht, giebt aber ihren Hauptelementen den Werth Null und verwandelt die übrigen Elemente in die Ausdrücke der Länge der Kanten durch ihre Coordinaten. Man erhält nach den vorigen Bezeichnungen

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & a^2, & b^2, & c^2 \\ 1, & a^2, & 0, & d^2, & e^2 \\ 1, & b^2, & d^2, & 0, & f^2 \\ 1, & c^2, & e^2, & f^2, & 0 \end{vmatrix},$$

den vorigen Ausdruck, und hat damit auch den analytischen Beweis der Formel des vorigen Artikels gefunden; denn für $V=0$, d. h. die Lage der vier Punkte in einer Ebene, geht sie daraus hervor.

Dieser Ausdruck kann als specieller Fall eines allgemeineren erhalten werden, nach dem das Product der Volumina V, V' zweier Tetraeder durch die Relation

$$288\,VV' = \begin{vmatrix} 0, & 1 & , 1 & , 1 & , 1 \\ 1, & e_{11}^2, & e_{12}^2, & e_{13}^2, & e_{14}^2 \\ 1, & e_{21}^2, & e_{22}^2, & e_{23}^2, & e_{24}^2 \\ 1, & e_{31}^2, & e_{32}^2, & e_{33}^2, & e_{34}^2 \\ 1, & e_{41}^2, & e_{42}^2, & e_{43}^2, & e_{44}^2 \end{vmatrix}$$

bestimmt wird, in welcher die e_{ij} die geradlinigen Entfernungen der Ecken e_i, e_j des ersten und zweiten Tetraeders bezeichnen.

52. Man soll die Relation angeben, welche die sechs Bogen grösster Kreise zwischen vier Punkten einer Kugel verbindet.

Derselbe Gang wie im Artikel 50 unter Substitution der entsprechenden Formeln der sphärischen Trigonometrie liefert für α, β, γ, δ, ε, φ als die cosinus der sechs fraglichen Bogen die Relation

$$\begin{aligned} &\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \varphi^2 - \alpha^2\delta^2 - \beta^2\varepsilon^2 - \gamma^2\varphi^2 \\ &+ 2\alpha\beta\delta\varepsilon + 2\beta\gamma\varepsilon\varphi + 2\gamma\alpha\delta\varphi - 2\alpha\beta\gamma - 2\alpha\varepsilon\varphi - 2\beta\delta\varphi \\ &- 2\gamma\delta\varepsilon = 1. \end{aligned}$$

Die nämliche Relation kann folgendermaassen bewiesen werden: Wenn die Richtungscosinus der Radien der vier Punkte

$$\begin{gathered} \cos\alpha_1,\ \cos\beta_1,\ \cos\gamma_1, \\ \cos\alpha_2,\ \cos\beta_2,\ \cos\gamma_2, \\ \cos\alpha_3,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_3, \\ \cos\alpha_4,\ \cos\beta_4,\ \cos\gamma_4 \end{gathered}$$

sind, so können wir aus dieser Gruppe von Elementen nach der im Artikel 13 der „Vorlesungen“ gegebenen Methode eine Determinante bilden, deren Werth identisch verschwindet und welche wegen

$$\cos\alpha_i^2 + \cos\beta_i^2 + \cos\gamma_i^2 = 1,$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = \cos ab, \text{ etc.}$$

die Form annimmt

$$\begin{vmatrix} 1 & , \cos ab, & \cos ac, & \cos ad \\ \cos ba, & 1 & , \cos bc, & \cos bd \\ \cos ca, & \cos cb, & 1 & , \cos cd \\ \cos da, & \cos db, & \cos dc, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

die den obigen Werth wiedergiebt. Man vollendet ihre Symmetrie, wenn man die Hauptelemente 1 durch $\cos aa$, $\cos bb$, etc. ersetzt. Diese Determinante geht z. B. auch als Resultat der linearen Elimination von A, B, C, D aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} A &= B \cos ab + C \cos ac + D \cos ad, \\ B &= C \cos bc + D \cos bd + A \cos ba, \\ C &= D \cos cd + A \cos ca + B \cos cb, \\ D &= A \cos da + B \cos db + C \cos dc \end{aligned}$$

hervor, welche für A, B, C, D als die Flächen des Tetraeders und $ab, bc,$ etc. als die von denselben eingeschlossenen Winkel den bekannten Satz ausdrückt, dass jede Fläche gleich der Summe der auf sie projectierten drei andern Flächen ist; denn man geht von dieser Betrachtung zur Kugel über, indem man die Normalen vom Centrum auf diese vier Ebenen mit der Kugel zum Durchschnitt bringt.

53. Man soll den Radius der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel finden.

Die Seite a des Tetraeders ist die dem Bogen vom cosinus $= \alpha$ entsprechende Sehne, also

$$\alpha = 1 - \frac{a^2}{2r^2},$$

mit analogen Ausdrücken für β, γ, etc. Durch die Substitution dieser Werthe liefert die Formel des letzten Artikels die Gleichung

$$\frac{F}{4r^6} + \frac{2a^2d^2b^2e^2 + 2b^2e^2c^2f^2 + 2c^2f^2a^2d^2 - a^4d^4 - b^4e^4 - c^4f^4}{16r^8} = 0\text{*)},$$

welche in Determinantenform geschrieben für das Product Vr des Tetraedervolumens in den Radius der umgeschriebenen Kugel die Relation giebt

$$-576\, V^2r^2 = \begin{vmatrix} 0, & f^2, & e^2, & a^2 \\ f^2, & 0, & d^2, & b^2 \\ e^2, & d^2, & 0, & c^2 \\ a^2, & b^2, & c^2, & 0 \end{vmatrix},$$

somit für

$$ad + be + cf = 2S$$

$$r^2 = \frac{S(S-ad)(S-be)(S-cf)}{36\, V^2};\text{**)}$$

---

*) Die Voraussetzung $r = \infty$ führt dann auch sofort auf die Relation der Artikel 50, 51 zurück.

**) Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit dem entsprechenden der Dreieckslehre lässt den folgenden Vergleich aussprechen: Das sechsfache Product aus dem Inhalt des Tetraeders in den Halbmesser der umgeschriebenen Kugel ist dem Inhalt eines Dreiecks gleich, welches die Producte aus den Längenzahoder in der am Schlusse des Artikel 51 angewendeten Bezeichnung

$$- 576\, V^2 r^2 = \begin{vmatrix} 0 & , e_{12}^2, & e_{13}^2, & e_{14}^2 \\ e_{21}^2, & 0 & , e_{23}^2, & e_{24}^2 \\ e_{31}^2, & e_{32}^2, & 0 & , e_{34}^2 \\ e_{41}^2, & e_{42}^2, & e_{43}^2, & 0 \end{vmatrix},$$

in welcher sie (vergl. Artikel 51) als ein specieller Fall der allgemeineren Relation für das Product der Volumina zweier Tetraeder mit den Radien ihrer umgeschriebenen Kugeln und dem cosinus des Winkels φ, unter welchem dieselben sich schneiden, erhalten wird:

$$576\, VV' rr' \cos\varphi = \begin{vmatrix} e_{11}^2, & e_{12}^2, & e_{13}^2, & e_{14}^2 \\ e_{21}^2, & e_{22}^2, & e_{23}^2, & e_{24}^2 \\ e_{31}^2, & e_{32}^2, & e_{33}^2, & e_{34}^2 \\ e_{41}^2, & e_{42}^2, & e_{43}^2, & e_{44}^2 \end{vmatrix} \text{*)}.$$

Diese Relation liefert für

$$\cos\varphi = \pm 1$$

die Bedingungsgleichungen der äussern oder innern Berührung der beiden umgeschriebenen Kugeln und für

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

durch das Verschwinden der rechts stehenden Determinante die Bedingung, unter welcher die beiden bezeichneten Kugeln zu einander orthogonal sind.

Da die Theorie des Tetraeders zahlreiche Uebungsaufgaben darbietet, so wollen wir hier als Beispiel einer solchen hinzufügen, dass die kürzeste Entfernung zwischen zwei Gegenseiten eines Tetraeders mit dem Quotienten aus dem sechsfachen Volumen desselben durch das Product der Längen der Gegenseiten in den sinus des von ihnen

---

len der Gegenkanten des Tetraeders zu den Längenzahlen seiner Seiten hat. Wir wollen durch denselben auf die mannichfaltigen Analogien dieser Art hinweisen, die zwischen Dreieck und Tetraeder bestehen, und merken an, dass einige derselben in Crelle's „Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen" Bd. I, 3. p. 105 f. dargestellt sind; sie bieten Uebungen dar durch den Anreiz, den sie zur Uebertragung in die neuere Form ertheilen.

*) Vergl. Siebeck, „Journal f. d. r. u. a. Math." Bd. XLII, p. 151 f.

gebildeten Winkels übereinstimmt, und wir erinnern zum Beweise dieses Satzes nur an die Relationen

$$2ad \cos \theta = b^2 + e^2 - c^2 - f^2,$$
$$2be \cos \varphi = c^2 + f^2 - a^2 - d^2,$$
$$2cf \cos \psi = a^2 + d^2 - b^2 - e^2.$$

Der Anblick derselben zeigt unmittelbar, dass die Rechtwinkligkeit zweier Paare von Gegenkanten auch die des dritten Paares bedingt und dass dann die Summe der Quadrate der Paare der Gegenkanten gleich gross ist.

Anmerkung. Im Anschluss an die Erinnerung an die Geometrie des ebenen Dreiecks, welche die soeben für den Radius der umgeschriebenen Kugel entwickelte Formel hervorruft und an den ganzen Gang der Entwickelung in diesen Artikeln, mag hier bemerkt werden, dass auch die Determinante des vorigen Artikels noch auf eine bemerkenswerthe Weise in diesem vor- und rückwärtsschauenden Zusammenhange steht. Wir haben angegeben, wie von ihr aus die Relation zwischen den sechs Abständen von vier Punkten einer Ebene hervorgeht. Wenn wir nun bemerken, dass so wie hier vom Tetraeder zum sphärischen Viereck und durch Verschwinden einer Dimension zum ebenen Viereck eine analoge Entwickelung vom ebenen Dreieck zu drei Punkten eines grössten Kugelkreises und von da durch Verschwinden einer Dimension zu einer allgemeinen Relation zwischen den Abständen von drei Punkten einer Geraden führt, so kann man an eine Fortsetzung dieses Gedankenganges nach einem idealen Raume von vier Dimensionen denken, um dann durch Verschwinden einer Dimension in den anschaubaren Raum dreier Dimensionen zurückzukehren, um eine Relation zwischen den gegenseitigen Entfernungen von fünf Punkten im Raume zu gewinnen.

Das ebene Dreieck giebt die sich selbst erklärenden Formeln

$$a = b \cos C + c \cos B,$$
$$b = c \cos A + a \cos C,$$
$$c = a \cos B + b \cos A,$$

und die Elimination von a, b, c die mehrfach erwähnte Relation zwischen den Winkeln eines Dreiecks

$$\begin{vmatrix} -1, & \cos C, & \cos B \\ \cos C, & -1, & \cos A \\ \cos B, & \cos A, & -1 \end{vmatrix}.$$

Der Uebergang zur Kugel giebt die Relation zwischen den gegenseitigen sphärischen Entfernungen von drei Punkten eines grössten Kreises

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos ab, & \cos ac \\ \cos ba, & 1, & \cos bc \\ \cos ca, & \cos cb, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

und der durch die Substitution

$$\cos ab = 1 - \frac{\overline{ab}^2}{2r^2}$$

und nachherige Annahme

$$r = \infty$$

vollzogene Uebergang zur Ebene die Relation zwischen den Abständen dreier Punkte einer Geraden

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1', & 1 \\ 1, & 0, & \overline{ab}^2, & \overline{ac}^2 \\ 1, & \overline{ab}^2, & 0, & \overline{bc}^2 \\ 1, & \overline{ac}^2, & \overline{bc}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die algebraische Analogie giebt dann anderseits

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos ab, & \cos ac, & \cos ad, & \cos ae \\ \cos ba, & 1, & \cos bc, & \cos bd, & \cos be \\ \cos ca, & \cos cb, & 1, & \cos cd, & \cos ce \\ \cos da, & \cos db, & \cos dc, & 1, & \cos de \\ \cos ea, & \cos eb, & \cos ec, & \cos ed, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

und der entsprechende Uebergang die Relation zwischen den gegenseitigen Abständen ab, ac, etc. von fünf Punkten a, b, etc. im Raume

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & \overline{ab}^2, & \overline{ac}^2, & \overline{ad}^2, & \overline{ae}^2 \\ 1, & \overline{ba}^2, & 0, & \overline{bc}^2, & \overline{bd}^2, & \overline{be}^2 \\ 1, & \overline{ca}^2, & \overline{cb}^2, & 0, & \overline{cd}^2, & \overline{ce}^2 \\ 1, & \overline{da}^2, & \overline{db}^2, & \overline{dc}^2, & 0, & \overline{de}^2 \\ 1, & \overline{ea}^2, & \overline{eb}^2, & \overline{ec}^2, & \overline{ed}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Man kann von ihr zu der Relation des vorigen Artikels zurückkehren und sie auch anderweit bestätigen; sie liefert für fünf Punkte einer Kugelfläche die Relation ihrer sphärischen Distanzen

$$\begin{vmatrix} 0, & \overline{ea}^2, & \overline{eb}^2, & \overline{ec}^2, & \overline{ed}^2 \\ \overline{ea}^2, & 0, & \overline{ab}^2, & \overline{ac}^2, & \overline{ad}^2 \\ \overline{eb}^2, & \overline{ab}^2, & 0, & \overline{bc}^2, & \overline{bd}^2 \\ \overline{ec}^2, & \overline{ac}^2, & \overline{bc}^2, & 0, & \overline{cd}^2 \\ \overline{ed}^2, & \overline{ad}^2, & \overline{bd}^2, & \overline{cd}^2, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

von der man durch Substitutionen wie oben zu einer Relation zwischen den gegenseitigen Abständen von vier Punkten eines Kreises übergehen kann*).

---

*) Vergl. „Cambridge Mathem. Journal“ Vol. II, p. 267 (1842); „Quarterly Journal of Mathem.“ Vol. III, p. 275, p. 283 (1860). Siebeck a. a. O.

IV. Kapitel.

Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades.

54. Wir schreiben die allgemeine Gleichung vom zweiten Grade in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2px \\ + 2qy + 2rz + d = 0.$$

Sie enthält zehn Glieder und da durch Division einer der Coefficienten der Einheit gleich gemacht werden kann, so erkennt man neun Bedingungen als hinreichend zur Bestimmung einer Fläche zweiten Grades oder, wie wir sie abkürzend nennen könnten, einer quadratischen Fläche. Wenn z. B. neun Punkte der Fläche gegeben sind, so erhalten wir durch die successive Substitution der Coordinaten eines jeden in die allgemeine Gleichung neun Gleichungen, welche zur Bestimmung der neun unbekannten Grössen $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, etc. hinreichend sind.

In derselben Art erkennen wir die Anzahl der zur Bestimmung einer Fläche n^{ten} Grades nothwendigen Bedingungen als um eins kleiner als die Anzahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades. Die Gleichung einer Fläche zweiten Grades kann auch (siehe Artikel 34) als eine homogene Function der Gleichungen von vier gegebenen Ebenen x, y, z, w in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy \\ + 2pxw + 2qyw + 2rzw = 0$$

ausgedrückt werden, denn die neun unabhängigen Constanten dieser Gleichung können so bestimmt werden, dass die Fläche durch neun gegebene Punkte geht, d. i. jede gegebene Fläche zweiten Grades kann durch sie dargestellt werden.

5*

Man kann durch Einführung der linearen Einheit ω jede Gleichung in x, y, z homogen machen und erreicht in zahlreichen Fällen durch die Anwendung solcher Gleichungen eine grössere Symmetrie der Resultate.

Die consequente Anwendung von Indices lässt die vier Veränderlichen der homogenen Form durch x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnen und die allgemeine Gleichung

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1^2 + a_{22}x_1^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 \\ & + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 \\ & + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0 \end{aligned}$$

symbolisch durch

$$\Sigma a_{ij}\ x_i x_j = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji},\ \mathrm{i}, j = 1, 2, 3, 4)$$

darstellen; an einigen wichtigen Stellen soll Rücksicht auf diese Bezeichnung genommen werden.

Der Einfachheit wegen beginnen wir aber mit der Anwendung gewöhnlicher Cartesischer Coordinaten.

55. Die Coordinaten werden zu beliebigen neuen parallelen durch einen Punkt x', y', z' gehenden Achsen transformiert, indem man

$$x + x',\ y + y,\ z + z' \text{ für } x,\ y,\ z$$

respective substituirt. (Artikel 15.)

Das Resultat dieser Substitution ist, dass die Coefficienten der höchsten Potenzen der Veränderlichen (a, b, c, l, m, n) unverändert bleiben, dass das neue absolute Glied mit dem Resultat der Substitution von x', y', z' für x, y, z in die gegebene Gleichung übereinstimmt, welches wir durch U' bezeichnen; dass der neue Coefficient von x

$$= 2\,(ax' + ny' + mz' + p) \text{ oder } \frac{dU'}{dx'}$$

und in derselben Weise die neuen Coefficienten von y und z respective gleich

$$\frac{dU'}{dy'} \text{ und } \frac{dU'}{dz'}$$

sind.

56. Wir können die allgemeine Gleichung zu Polar-Coordinaten transformieren, indem wir

$$x = A\varrho,\ y = B\varrho,\ z = C\varrho$$

setzen (wo für rectanguläre Achsen A, B, C respective gleich

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ und für schiefwinklige Achsen nach der Anmerkung des Artikel 11 A, B, C allgemein Functionen der Winkel sind, welche die Linie mit diesen Achsen einschliesst); die Gleichung wird dadurch

$$\varrho^2 (aA^2 + bB^2 + cC^2 + 2lBC + 2mCA + 2nAB) \\ + 2\varrho (pA + qB + rC) + d = 0,$$

und liefert nach ihrer Natur als quadratische Gleichung für die Länge des einer gegebenen Richtung entsprechenden Radius vector zwei Werthe; da jeder beliebige Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten gewählt werden kann, so beweist sie, dass jede gerade Linie eine Fläche zweiten Grades in zwei Punkten schneidet, wie wir schon früher (Artikel 20) erkannt haben.

57. Wir betrachten zuerst den Fall, wo der Anfangspunkt der Coordinaten in der Fläche liegt, also $d = 0$ und eine der Wurzeln der eben erhaltenen quadratischen Gleichung gleich Null ist; wir suchen die Bedingung, unter welcher der Radius vector die Fläche im Anfangspunkt der Coordinaten berührt.

Da in diesem Falle die zweite Wurzel unserer quadratischen Gleichung ebenfalls gleich Null sein muss, so ist

$$pA + qB + rC = 0$$

die fragliche Bedingung. Sie geht durch Multiplication mit β und Wiedereinführung von x, y, z für $A\varrho$, $B\varrho$, $C\varrho$ in die Form

$$px + qy + rz = 0$$

über und drückt offenbar aus, dass der Radius vector in einer gewissen festen Ebene liegt. Und da A, B, C keiner andern als der eben geschriebenen Beschränkung unterliegen, so muss jeder durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende und in dieser Ebene gelegene Radius vector die Fläche berühren.

Wir erkennen, dass in einem gegebenen Punkte einer Fläche zweiten Grades unendlich viele Tangenten derselben gezogen werden können und dass dieselben alle in einer Ebene liegen, welche die Tangentenebene in diesem Punkte genannt wird.

Wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$u_2 + u_1 = 0$$

geschrieben wird, in welcher die Glieder vom ersten und die vom zweiten Grade in den Veränderlichen gesondert sind, so ist

$$u_1 = 0$$

die Gleichung der Tangentenebene im Anfangspunkt der Coordinaten.

58. Wir können die Gleichung der Tangentenebene der Fläche in einem beliebigen ihrer Punkte x', y', z' durch Transformation der Coordinaten finden; denn durch Verlegung des Anfangspunktes nach diesem Punkte verschwindet das absolute Glied und die Gleichung der Tangentenebene ist (Artikel 56)

$$x \frac{dU'}{dx'} + y \frac{dU'}{dy'} + z \frac{dU'}{dz'} = 0,$$

oder durch den Rückgang zu den alten Achsen

$$(x - x') \frac{dU'}{dx'} + (y - y') \frac{dU'}{dy'} + (z - z') \frac{dU'}{dz'} = 0.$$

Durch Einführung der Lineareinheit ω kann dieselbe Gleichung in einer vollkommener symmetrischen Gestalt gegeben werden; denn nach der Natur einer homogenen Function und weil x', y', z' der Gleichung der Fläche genügen, haben wir

$$x' \frac{dU'}{dx'} + y' \frac{dU'}{dy'} + z' \frac{dU'}{dz'} + \omega' \frac{dU'}{d\omega'} = 2U' = 0,$$

und erhalten durch Addition dieser Gleichung zu der zuletzt gefundenen die Gleichung der Tangentenebene in der Form

$$x \frac{dU'}{dx'} + y \frac{dU'}{dy'} + z \frac{dU'}{dz'} + \omega \frac{dU'}{d\omega'} = 0,$$

oder entwickelt

$$x\,(ax' + ny' + mz' + p) + y\,(nx' + by' + lz' + q)$$
$$+ z\,(mx' + ly' + cz' + r) + px' + qy' + rz' + d = 0.$$

Indem man bemerkt, dass diese Gleichung in Bezug auf die Gruppen x, y, z und x', y', z' symmetrisch ist, findet man, dass sie auch in der Form

$$x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy} + z' \frac{dU}{dz} + \omega' \frac{dU}{d\omega} = 0$$

geschrieben werden kann.

59. Man soll den Berührungspunkt einer Tangente oder Tangentenebene bestimmen, welche durch einen gegebenen nicht in der Fläche liegenden Punkt x', y', z' geht.

Die zuletzt gefundene Gleichung drückt eine zwischen x, y, z, ω, den Coordinaten eines beliebigen Punktes der Tangentenebene, und x', y', z', ω' als Coordinaten ihres Berührungspunktes bestehende Relation aus; und um auszudrücken, dass die ersteren Coordinaten gegeben und die letzteren gesucht sind, haben wir nur die Accente der ersteren zu beseitigen und sie den letzteren beizufügen. Wir finden also, dass der Berührungspunkt in der durch

$$x\frac{dU'}{dz'} + y\frac{dU'}{dy'} + z\frac{dU'}{dz'} + \omega\frac{dU'}{d\omega'} = 0$$

dargestellten Ebene liegen muss; sie wird die Polarebene des gegebenen Punktes genannt, indem man zugleich diesen als ihren Pol bezeichnet.

Da der Berührungspunkt keiner andern Bedingung als dieser zu genügen hat, so gehen die Tangentenebenen der Fläche in allen ihrer Durchschnittscurve mit der Polarebene angehörigen Punkten durch den Pol, und die gerade Verbindungslinie eines Berührungspunktes mit dem gegebenen Punkte ist eine Tangente der Fläche. Die Gesammtheit aller dieser Verbindungslinien, d. i. die Schaar der Tangenten, welche durch den gegebenen Punkt an die Fläche gezogen werden können, bildet den diesem Punkte entsprechenden Tangentenkegel oder Berührungskegel der Fläche*).

60. Die Polarebene kann auch als der Ort der harmonischen Mittel der durch den Pol gehenden Radien vectoren der Fläche definiert werden.

Untersuchen wir nämlich den Ort der Punkte der harmonischen Theilung für die durch den Anfangspunkt gehenden Radien vectoren, bezeichnen wir durch ϱ', ϱ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung des Art. 56 und durch ϱ den Radius vector des fraglichen Ortes, so ist

$$\frac{2}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} = -\frac{2\,(Ap + Bq + Cr)}{d},$$

d. i. durch Rückkehr zu den x, y, z Coordinaten

$$px + qy + rz + d = 0,$$

*) Eine Fläche, die durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt wird, die stets durch einen festen Punkt geht, heisst ein Kegel und der bezeichnete feste Punkt der Scheitel- oder Mittelpunkt der Fläche. Ein Cylinder ist der Grenzfall eines Kegels, welcher dem Uebergang des Scheitels in unendlich grosse Entfernung entspricht. (Artikel 22.)

oder die Gleichung der Polarebene des Anfangspunktes, die auch aus der entwickelten Gleichung des Artikel 58 für

$$x' = y' = z' = 0$$

hervorgeht.

Aus dieser Definition der Polarebene ist evident, dass für jeden durch einen gegebenen Punkt gehenden ebenen Schnitt einer Fläche die Polare des Punktes in Bezug auf die Schnittcurve durch den Durchschnitt der Ebene des Schnittes mit der Polarebene des Punktes gegeben wird; denn der Ort der harmonischen Mittel aller durch diesen Punkt gehenden Radien vectoren enthält nothwendig auch den Ort der harmonischen Mittel derjenigen Radien vectoren, welche in der Schnittebene liegen.

61. Wenn die Polarebene eines Punktes A den Punkt B enthält, so geht die Polarebene des Punktes B durch den Punkt A.

Denn da die Gleichung der Polarebene in Bezug auf x, y, z und x', y', z' symmetrisch ist, so erhalten wir offenbar dasselbe Resultat durch die Substitution der Coordinaten des zweiten Punktes in die Gleichung der Polarebene des ersten, als durch die der Coordinaten des ersten in die Gleichung der Polarebene des zweiten.

Der Durchschnitt der Polarebenen von A und B ist eine gerade Linie, welche wir die Polarlinie der Geraden AB in Bezug auf die Fläche nennen wollen.

Man sieht, dass die Polarlinie von AB der Ort der Pole aller der Ebenen ist, welche durch die Linie AB gelegt werden können.

Es ist nicht schwer, die Gleichungen solcher Linien darzustellen. Man kann nach dem Winkel fragen, den sie mit einander bilden und erkennt, dass eine Fläche zweiten Grades existiert, für welche jede gerade Linie auf ihrer Polare rechtwinklig steht: Es ist die Kugel. Wir erinnern an die allgemeine Theorie der Winkelgrössen in der „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 448.

62. Wenn in der Originalgleichung nicht nur

$$d = 0$$

sondern auch

$$p = q = r = 0$$

sind, so wird die gefundene Gleichung der Tangentenebene (Artikel 58) illusorisch, weil jedes ihrer Glieder verschwindet und keine einzelne Ebene als die Tangentenebene der Fläche* im Anfangspunkt der Coordinaten bezeichnet werden kann. Denn der Coefficient von ϱ (Artikel 56) verschwindet für jede dem ϱ beigelegte Richtung, jede durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende gerade Linie schneidet die Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten, d. h. der Anfangspunkt ist ein Doppelpunkt in der Fläche.

In dem gegenwärtigen Falle bezeichnet die Gleichung einen Kegel, der den Anfangspunkt zum Scheitel hat; in der That thut diess jede in x, y, z homogene Gleichung. Denn wenn eine solche durch die Coordinaten x', y', z' befriedigt wird, so genügen ihr auch die Coordinaten Rx', Ry', Rz' (wo R eine beliebige Constante ist), d. h. die Coordinaten aller Punkte der geraden Verbindungslinie des Punktes (x', y', z') mit dem Anfangspunkt; diese Verbindungslinie liegt somit ganz in der Fläche und dieselbe muss unendlich viele gerade Linien enthalten, welche durch den Anfangspunkt gehen.

Die Gleichung der Tangentenebene für irgend einen Punkt dieser Kegelfläche kann in den Formen

$$x\frac{dU'}{dx'} + y\frac{dU'}{dy'} + z\frac{dU'}{dz'} = 0,$$

$$x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dy} + z'\frac{dU}{dz} = 0$$

geschrieben werden, von denen die erste durch den Mangel des absoluten Gliedes anzeigt, dass die Tangentenebene in einem beliebigen Punkte des Kegels durch den Anfangspunkt geht, während die zweite ausdrückt, dass die Tangentenebene in irgend einem Punkte (x', y', z') die Fläche in jedem Punkte der geraden Linie berührt, welche den Punkt (x', y', z') mit dem Scheitel verbindet, weil sie noch die nämliche Ebene repräsentiert, wenn man für x', y', z' respective Rx', Ry', Rz' substituiert.

Wenn der Punkt (x', y', z') nicht in der Fläche liegt, so repräsentiert die zuletzt betrachtete Gleichung die Polarebene dieses Punktes und man erkennt in gleicher Weise, dass die Polarebene jedes Punktes durch den Scheitel des Kegels geht, und dass alle Punkte, die in derselben geraden durch den Scheitel gehenden Linie gelegen sind, die nämliche Polarebene haben.

Um daher die Polarebene eines Punktes in Bezug auf einen Kegel zu finden, haben wir nur irgend einen ebenen Schnitt durch diesen Punkt zu legen und die Polarlinie des Punctes in Bezug auf die entsprechende Schnittcurve zu bestimmen; die durch sie und den Scheitel gehende Ebene ist die fragliche Polarebene, denn es ward im Art. 60 bewiesen, dass die Polarebene die Polarlinie enthält, und jetzt erkannt, dass sie zugleich durch den Scheitel des Kegels geht.

63. Wir können leicht die Bedingung entwickeln, unter welcher die allgemeine Gleichung zweiten Grades einen Kegel repräsentiert.

Denn unter dieser Voraussetzung muss es möglich sein, durch Transformation der Coordinaten die neuen Coefficienten p, q, r, d zum Verschwinden zu bringen; die Coordinaten des neuen Anfangspunktes, d. i. des Scheitels, müssen daher (Art. 55) die Bedingungen

$$\frac{dU'}{dx'} = 0, \quad \frac{dU'}{dy'} = 0, \quad \frac{dU'}{dz'} = 0, \quad U' = 0$$

erfüllen, deren Letztere in Verbindung mit den übrigen mit der Bedingung

$$\frac{dU'}{d\omega'} = 0$$

identisch ist. Wenn wir aber x', y', z' aus den vier Gleichungen

$$\begin{aligned} ax' + ny' + mz' + p &= 0, \\ nx' + by' + lz' + q &= 0, \\ mx' + ly' + cz' + r &= 0, \\ px' + qy' + rz' + d &= 0 \end{aligned}$$

eliminieren, so erhalten wir die fragliche Bedingung in der Form einer Determinante

$$\begin{vmatrix} a, & n, & m, & p \\ n, & b, & l, & q \\ m, & l, & c, & r \\ p, & q, & r, & d \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$\begin{aligned} & l^2p^2 + m^2q^2 + n^2r^2 - 2mqnr - 2nrlp - 2lpmq \\ & + abcd + 2alqr + 2bmpr + 2cnpq + 2dlmn - bcp^2 \\ & - caq^2 - abr^2 - adl^2 - bdm^2 - cdn^2 = 0, \end{aligned}$$

welches die Discriminante und zugleich die Hesse'sche Determinante der gegebenen Gleichung ist.*)

In der Bezeichnung mit den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 (Artikel 54) ist sie durch

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix}$$

sehr einfach ausgedrückt.

64. Wir kehren nun zur Betrachtung der quadratischen Gleichung des Artikel 56 zurück, und untersuchen unter der Voraussetzung, dass d nicht verschwindet, **die Bedingung, unter welcher der Radius vector im Anfangspunkt halbiert wird.**

Es ist dazu nothwendig und hinreichend, dass der Coefficient von ϱ in dieser Gleichung mit Null identisch ist, weil wir dann aus ihr für ϱ numerisch gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen erhalten. Die verlangte Bedingung ist daher

$$pA + qB + rC = 0;$$

mit ϱ multipliciert zeigt sie, dass der Radius vector dann in der Ebene

$$px + qy + rz = 0$$

liegen muss. Nach Artikel 60 schliessen wir daraus, dass **jede durch den Anfangspunkt der Coordinaten in einer zur Polarebene desselben parallelen Ebene gezogene gerade Linie im Anfangspunkt halbiert wird.**

65. **Unter den gleichzeitig geltenden Voraussetzungen**

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0$$

wird jede durch den Anfangspunkt gehende gerade Linie in ihm halbiert und der Anfangspunkt wird dann das Centrum der Fläche genannt.

Jede Fläche zweiten Grades hat im allgemeinen ein und nur ein Centrum. Denn wenn wir durch Transformation der Coordinaten die Coefficienten p, q, r der allgemeinen Gleichung auf den gemeinschaftlichen Werth Null bringen wollen, so erhalten wir die drei Bedingungsgleichungen

---

*) Vergl. „Vorlesungen", Artikel 57, 62, 81, 97, 161.

$$\frac{dU'}{dx'} = ax' + ny' + mz' + p = 0,$$

$$\frac{dU'}{dy'} = nx' + by' + lz' + q = 0,$$

$$\frac{dU'}{dz'} = mx' + ly' + cz' + r = 0,$$

welche zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen x', y', z' nothwendig und hinreichend sind. Man erhält für die Abkürzungen

$$\alpha = p\,(l^2 - bc) + q\,(cn - lm) + r\,(bm - ln),$$
$$\beta = p\,(cn - lm) + q\,(m^2 - ca) + r\,(al - mn),$$
$$\gamma = p\,(bm - ln) + q\,(al - mn) + r\,(n^2 - ab),$$
$$\delta = abc + 2\,lmn - al^2 - bm^2 - cn^2$$

oder, wenn durch $\varDelta$ die Discriminante

$$\begin{vmatrix} a, & n, & m, & p \\ n, & b, & l, & q \\ m, & l, & c, & r \\ p, & q, & r, & d \end{vmatrix}$$

bezeichnet wird,

$$2\alpha = \frac{d\varDelta}{dp},\quad 2\beta = \frac{d\varDelta}{dq},\quad 2\gamma = \frac{d\varDelta}{dr},\quad \delta = \frac{d\varDelta}{dd},$$

die Werthe der Coordinaten des Centrums

$$x' = \frac{\alpha}{\delta},\quad y' = \frac{\beta}{\delta},\quad z' = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Man sieht leicht, dass die äquivalenten Ausdrücke in der Bezeichnung mit Indices sind

$$\frac{d\varDelta}{da_{44}} = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{vmatrix} = \delta,$$

$$2\alpha_1 = \frac{d\varDelta}{da_{14}},\quad 2\alpha_2 = \frac{d\varDelta}{da_{24}},\quad 2\alpha_3 = \frac{d\varDelta}{da_{34}}$$

und dass

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4 = \delta$$

die Coordinaten des Centrums bezeichnen.

Für

$$\delta = 0$$

werden diese Coordinaten unendlich gross und die Fläche besitzt kein im endlichen Raume gelegenes Centrum.*)

Wenn wir die Originalgleichung in der Form

$$u_2 + u_1 + u_0 = 0$$

schreiben, in der wir die Glieder vom zweiten und ersten Grade und die vom Grade Null unterscheiden, so ist offenbar δ die Discriminante des Polynoms u_2.

66. Man soll den Ort der Mittelpunkte der Sehnen finden, welche einer gegebenen geraden Linie

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$$

parallel sind.

Wenn wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach irgend einem Punkte des fraglichen Ortes verlegen, so müssen die neuen Coefficienten p, q, r die im Artikel 64 gefundene Bedingung

$$pA + qB + rC = 0$$

erfüllen und daher ist nach Artikel 55 die Gleichung des Ortes

$$A\,\frac{dU}{dx} + B\,\frac{dU}{dy} + C\,\frac{dU}{dz} = 0.$$

Diese Gleichung bezeichnet eine durch den Durchschnittspunkt der Ebenen

---

*) Wenn die Hesse'sche Determinante Δ und die Derivierte derselben nach dem Elemente d, d. i. δ, zugleich mit Null identisch sind, so hat man eine Cylinderfläche. Wenn, wie es möglich ist, die Zähler dieser Brüche gleichzeitig mit dem Nenner derselben verschwinden, so sind die Coordinaten des Centrums unbestimmt und die Fläche besitzt unendlich viele Centra. So dann, wenn die drei Ebenen

$$\frac{dU}{dx},\ \frac{dU}{dy},\ \frac{dU}{dz}$$

durch dieselbe gerade Linie gehn; dann ist jeder Punkt in dieser Linie ein Centrum. Die Bedingung, unter welcher diess eintritt, kann in der Form

$$\left\| \begin{matrix} a, & n, & m, & p \\ n, & b, & l, & q \\ m, & l, & c, & r \end{matrix} \right\| = 0$$

geschrieben werden, welche das gleichzeitige Verschwinden der vier Determinanten bezeichnet, die aus den geschriebenen vier Verticalreihen gebildet werden können. Wir kommen im folgenden Kapitel auf diesen Fall zurück.

$$\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0,$$

d. h. durch das Centrum der Fläche gehende Ebene; wir benennen sie als die der gegebenen Richtung der Sehnen conjugierte Diametralebene der Fläche.

Wenn irgend ein Punkt in dem durch den Anfangspunkt der Coordinaten in der gegebenen Richtung gezogenen Radius vector die Coordinaten x', y', z' hat, so kann die Gleichung der Diametralebene in der Form

$$x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy} + z' \frac{dU}{dz} = 0$$

geschrieben werden.

Die Gleichung der Polarebene des Punktes Rx', Ry', Rz'

$$Rx' \frac{dU}{dx} + Ry' \frac{dU}{dy} + Rz' \frac{dU}{dz} + \frac{dU}{d\omega} = 0$$

giebt aber, durch R dividiert und für unendlich wachsendes R die nämliche Gleichung; welches zeigt, dass die Diametralebene die Polarebene des unendlich entfernten Punktes der gegebenen geraden Linie ist, wie wir auch mittelst geometrischer Betrachtungen hätten beweisen können. (Vgl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 330 f.)

In derselben Weise wird erkannt, dass das Centrum der Pol der unendlich entfernten Ebene ist; denn wenn der Anfangspunkt das Centrum der Fläche ist, so wird (Artikel 60) die Gleichung seiner Polarebene

$$d = 0,$$

welche nach Artikel 25 eine unendlich entfernte Ebene repräsentiert.

Wenn speciell die gegebene Fläche ein Kegel ist, so fällt die Ebene, welche alle einer durch den Scheitel gehenden festen Geraden parallelen Sehnen halbiert, mit der Polarebene irgend eines Punktes dieser Linie zusammen. Wir haben früher erkannt, dass allen Punkten einer solchen Geraden dieselbe Polarebene entspricht und finden jetzt in Uebereinstimmung damit, dass die Polarebene ihres unendlich entfernten Punktes d. i. die ihr conjugierte Diametralebene die nämliche ist.

67. Die Ebene, welche die der Achse der x parallelen Sehnen halbiert, wird durch die Voraussetzungen

$$B = 0, \quad C = 0$$

aus der Gleichung des vorigen Artikels gefunden und ist also

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

oder

$$ax + ny + mz + p = 0;^{*})$$

sie ist der Achse der y parallel, wenn

$$n = 0$$

ist. Diess ist aber auch die Bedingung, unter welcher die der Achse der y conjugierte Diametralebene der Achse der x parallel ist; d. h. wenn die einer gegebenen Richtung conjugierte Diametralebene eine andere Richtung enthält, so enthält die dieser letzteren Richtung conjugierte Diametralebene auch die erste Richtung.

Wenn $n = 0$ ist, so sind offenbar die Achsen der x und y einem Paare von conjugierten Durchmessern des durch die Ebene xy bestimmten Schnittes parallel, und man erkennt ausserdem, dass die jedem dieser Durchmesser conjugierte Diametralebene den andern enthält; denn der Ort der Mittelpunkte aller Sehnen der Fläche, welche einer gegebenen Geraden parallel sind, schliesst nothwendig den Ort der Mittelpunkte aller der Sehnen dieser Art ein, welche in einer gegebenen Ebene enthalten sind.

Drei Diametralebenen heissen conjugiert, wenn jede von ihnen zur Durchschnittslinie der beiden andern conjugiert ist; und drei Durchmesser heissen conjugiert, wenn jeder von ihnen conjugiert ist der Ebene der beiden andern.

Wir erhalten also ein System von drei conjugierten Durchmessern, wenn wir zu zwei conjugierten Durchmessern eines beliebigen ebenen durch das Centrum geführten Schnittes den der

*) Daraus folgt, dass die Ebene

$$x = 0$$

die der Achse der x parallelen Sehnen halbiert, wenn

$$n = 0, \quad m = 0, \quad p = 0$$

ist; oder wenn die Originalgleichung keine ungerade Potenz von x enthält. Es ist überdiess offenbar, dass diess der Fall sein muss, damit für beliebige bestimmte Werthe von y und z gleiche und entgegengesetzte Werthe für x erhalten werden.

Schnittebene conjugierten Durchmesser gesellen. Für die gleichzeitig erfüllten Voraussetzungen

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0$$

erhellt aus dem Anfang dieses Artikels, dass die Coordinatenebenen drei conjugierten Diametralebenen parallel sind.

Wenn wir die allgemeine Bezeichnung mit Indices anwenden, so sind für drei Ebenen

$$\Sigma \alpha_i' x_i = 0, \quad \Sigma \alpha_i'' x_i = 0, \quad \Sigma \alpha_i''' x_i = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

und x_1', x_2', x_3', x_4' als die Coordinaten des Pols der ersten die Bedingungen

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' + a_{14}x_4' &= \alpha_1', \\
a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' + a_{24}x_4' &= \alpha_2', \\
a_{31}x_1' + a_{32}x_2' + a_{33}x_3' + a_{34}x_4' &= \alpha_3', \\
a_{41}x_1' + a_{42}x_2' + a_{43}x_3' + a_{44}x_4' &= \alpha_4'
\end{aligned}$$

zu erfüllen, und wenn diese Coordinaten den Gleichungen der beiden letzten Ebenen genügen, d. i. wenn man hat

$$\begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \alpha_1' \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \alpha_2' \\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \alpha_3' \\
a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \alpha_4' \\
\alpha_1'', & \alpha_2'', & \alpha_3'', & \alpha_4'', & 0
\end{vmatrix} = 0$$

und ebenso

$$\begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \alpha_1'' \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \alpha_2'' \\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \alpha_3'' \\
a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \alpha_4'' \\
\alpha_1''', & \alpha_2''', & \alpha_3''', & \alpha_4''', & 0
\end{vmatrix} = 0,$$

so liegt jener Pol in der Durchschnittslinie dieser Ebenen.

Die analoge Betrachtung für die zweite und dritte Ebene fügt den vorigen Bedingungen noch die dritte

$$\begin{vmatrix}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \alpha_1''' \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \alpha_2''' \\
a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \alpha_4''' \\
a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \alpha_4''' \\
\alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_3', & \alpha_4', & 0
\end{vmatrix} = 0$$

hinzu, wenn die drei Ebenen ein conjugiertes System bilden, d. h.

wenn die Durchschnittslinie von je zweien unter ihnen den Pol der dritten enthalten soll.

Wenn die Fläche ein Kegel ist, so erhellt aus dem in den Artikeln 62, 66 Gesagten, dass ein System von drei conjugierten Durchmessern eine beliebige Ebene in drei Punkten schneidet, von denen jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf die entsprechende Schnittcurve ist.

68. Eine Diametralebene wird als Hauptebene bezeichnet, wenn sie zu den Sehnen normal steht, zu denen sie conjugiert ist.

Unter der Voraussetzung rectangulärer Achsen und für A, B, C als die Richtungscosinus der Sehne haben wir im Artikel 66 die Gleichung der entsprechenden Diametralebene

$$A(ax + ny + mz + p) + B(nx + by + lz + q) \\ + C(mx + ly + cz + r) = 0$$

erhalten und erkennen, dass dieselbe zur Sehne normal ist, wenn (Artikel 42) die Coefficienten von x, y, z respective proportional zu A, B, C sind, d. i. wenn die Gleichungen

$$\begin{aligned} Aa + Bn + Cm &= RA, \\ An + Bb + Cl &= RB, \\ Am + Bl + Cc &= RC \end{aligned}$$

bestehen. Wir können aus diesen in A, B, C linearen Gleichungen A, B, C eliminieren und erhalten zur Bestimmung von R

$$\begin{vmatrix} a-R, & n, & m \\ n, & b-R, & l \\ m, & l, & c-R \end{vmatrix} = 0$$

oder in entwickelter Form

$$R^3 - R^2(a+b+c) + R(ab+bc+ca-l^2-m^2-n^2) \\ - (abc + 2lmn - al^2 - bm^2 - cn^2) = 0.$$

Die successive Einführung der drei durch diese Gleichung bestimmten Werthe von R in die vorigen Bedingungsgleichungen erlaubt uns die Bestimmung der entsprechenden Werthe von A, B, C.

Eine quadratische Fläche hat daher im Allgemeinen drei Hauptdiametralebenen; die drei zu ihnen normalen Durchmesser werden die Achsen der Fläche genannt.*)

Beispiel. Man soll die Hauptebenen von

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz = 6$$

bestimmen.

Die cubische Gleichung für R ist

$$R^3 - 18R^2 + 99R - 162 = 0,$$

von den Wurzeln

$$3, \quad 6, \quad 9.$$

Daher sind die drei Gleichungen

$$7A - 2B = RA, \quad -2A + 6B - 2C = RB, \quad -2B + 5C = RC.$$

Die Substitution

$$R = 3$$

in dieselben liefert

$$2A = B = C$$

und man erhält durch Multiplication mit ϱ und durch Substitution von x für $A\varrho$, etc. für die eine der Achsen die Gleichungen

$$2x = y = z.$$

Die durch den Coordinatenanfangspunkt, der hier mit dem Centrum zusammenfällt, gehende Normalebene zu dieser Geraden ist also

$$x + 2y + 2z = 0.$$

In gleicher Art werden die beiden andern Hauptebenen gefunden, als von den Gleichungen

$$2x - 2y + z = 0, \quad 2x + y - 2z = 0.^{**})$$

---

*) In dem folgenden Kapitel werden wir die zur Bestimmung derselben gewonnene Gleichung genauer discutieren, hier ist auf die „Vorlesungen" zu verweisen.

**) Wenn U die Glieder vom höchsten Grade in der Gleichung bezeichnet, und V die Function

$$(bc - l^2)\,x^2 + (ca - m^2)\,y^2 + (ab - n^2)\,z^2$$
$$+ 2\,(ef - al)\,yz + 2\,(fd - bm)\,zx + 2\,(de - cn)\,xy$$

ausdrückt, so ist die Gleichung der drei Hauptebenen für das Centrum als Anfangspunkt der Coordinaten durch die Determinante

$$\begin{vmatrix} x\,, & y\,, & z \\ \frac{dU}{dx}\,, & \frac{dU}{dy}\,, & \frac{dU}{dz} \\ \frac{dV}{dx}\,, & \frac{dV}{dy}\,, & \frac{dV}{dz} \end{vmatrix} = 0$$

ausgedrückt. (Vergl. „Vorlesungen", Artikel 149.)

69. **Die von einer Fläche zweiten Grades mit parallelen Ebenen bestimmten Durchschnittslinien sind einander ähnlich.**

Da jede Ebene zur Ebene der xy gewählt werden kann, so genügt für den Beweis die Betrachtung der durch diese gebildeten Schnittcurve, deren Gleichung durch die Substitution

$$z = 0$$

aus der Gleichung der Fläche abgeleitet wird. Der durch eine zu ihr parallele Ebene erzeugte Schnitt wird erhalten, indem man die Gleichung zu parallelen Achsen durch einen neuen Anfangspunkt der Coordinaten transformiert und sodann $z = 0$ setzt. Und da bei einer solchen Transformation die Coefficienten der höchsten Potenzen ungeändert bleiben, so erhalten wir in jedem Falle dieselben Coefficienten für x^2, xy und y^2 und die Curven sind somit einander ähnlich.

Wenn wir die Ebenen yz und zx beibehalten und die Ebene xy parallel mit sich selbst verlegen, so wird der Durchschnitt dieser Ebene mit der Fläche durch die Substitution

$$z = c$$

in die Gleichung der Fläche ausgedrückt, weil offenbar dasselbe Resultat entspringt, wenn wir $z + c$ für z und dann $z = 0$ einsetzen, als wenn wir $z = c$ sogleich substituieren.

Was aus geometrischen Gründen offenbar ist, **dass der Ort der Centra der parallelen Schnitte der zur Stellung ihrer Ebenen conjugierte Durchmesser der Fläche ist,** lässt sich ebenfalls leicht algebraisch nachweisen.

70. Wenn ϱ', ϱ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung des Artikel 56 bezeichnen, so ist ihr Product $\varrho'\varrho''$ gleich dem durch den Coefficienten von ϱ^2 dividierten d. Transformieren wir nun die Gleichung zu parallelen Achsen, um einen mit dem ersten parallelen Radius vector zu betrachten, so bleibt der Coefficient von ϱ^2 unverändert und das Product der beiden Werthe der Radius vectoren ist dem neuen d proportional.

Wenn also durch die gegebenen Punkte A, B beliebige parallele Sehnen gezogen werden, welche mit der Fläche die Punkte R, R'; S, S' respective bestimmen, so sind die Producte $RA \,.\, AR'$, $SB \,.\, BS'$ zu einander in einem constanten Verhältniss, nämlich im Verhältniss $U' : U''$, wenn wir durch U' und U'' die Resul-

6*

tate der Substitution der Coordinaten von A und B in die Gleichung der Fläche bezeichnen.

71. Wir schliessen diess Kapitel mit dem Nachweis, wie die im Vorhergehenden aus der Discussion von geraden Linien aus dem Anfangspunkt der Coordinaten erhaltenen Sätze durch ein allgemeineres Verfahren erhalten werden können, welches dem in der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte“ Artikel 107 angewendeten analog ist. Wir bedienen uns dabei der grösseren Symmetrie wegen homogener Gleichungen mit vier Veränderlichen.

Man soll die Punkte bestimmen, in denen eine gegebene Fläche zweiten Grades durch die gerade Verbindungslinie der Punkte (x', y', z', w'), (x'', y'', z'', w'') geschnitten wird.

Wir betrachten als unbekannte Grösse das Verhältniss $l : m$, nach welchem die bezeichnete Verbindungslinie in den Punkten getheilt wird, in denen sie die Fläche schneidet, so dass die Coordinaten dieses Punktes (Artikel 8) zu

$$mx' + lx'', \quad my' + ly'', \quad mz' + lz'', \quad mw' + lw''$$

respective proportional sind; und wir erhalten durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung der Fläche zur Bestimmung von $l : m$ eine quadratische Gleichung

$$m^2 U' + lmP + l^2 U'' = 0.$$

In ihr werden die Coefficienten von l^2 und m^2, wie es durch die Bezeichnung angedeutet ist, leicht als die Resultate der Substitution der Coordinaten x'', y'', z'', w'' und x', y', z', w' in die Gleichung der Fläche erkannt; während der Coefficient von lm durch Taylor's Theorem oder in anderer Weise unter den Formen

$$x'\frac{dU''}{dx''} + y'\frac{dU''}{dy''} + z'\frac{dU''}{dz''} + w'\frac{dU''}{dw''},$$
$$x''\frac{dU'}{dx'} + y''\frac{dU'}{dy'} + z''\frac{dU'}{dz'} + w''\frac{dU'}{dw'}$$

erhalten wird. Wenn man aus dieser quadratischen Gleichung die Werthe von $l : m$ bestimmt, welche ihr genügen, so liefert ihre Substitution in die Ausdrücke

$$\frac{mx' + lx''}{l + m}, \quad \frac{my' + ly''}{l + m}, \text{ etc.}$$

die Coordinaten der Punkte, in denen die gegebene gerade Linie die Fläche durchschneidet.

72. Wenn der Punkt (x', y', z', w') der Fläche selbst angehört, so ist

$$U' = 0$$

und eine der Wurzeln der betrachteten quadratischen Gleichung ist

$$l = 0;$$

sie entspricht dem Punkte (x', y', z', w'), wie natürlich. Die Bedingung, unter welcher auch die zweite Wurzel den Werth $l = 0$ hat, ist

$$P = 0.$$

Wenn also die Verbindungslinie der Punkte

$$(x', y', z', w'), \quad (x'', y'', z'', w'')$$

die Fläche im ersteren Punkte berühren soll, so müssen die Coordinaten des letzteren Punktes die Gleichung

$$x \frac{dU'}{dx'} + y \frac{dU'}{dy'} + z \frac{dU'}{dz'} + w \frac{dU'}{dw'} = 0$$

erfüllen; und da (x'', y'', z'', w'') jeden Punkt in jeder durch (x', y', z', w') gehenden Tangente bezeichnen kann, so folgt, dass jede solche Tangente in der durch die eben geschriebene Gleichung repräsentierten Ebene liegt.

73. Wenn der Punkt (x', y', z', w') nicht in der Oberfläche liegt und die Relation

$$P = 0$$

durch die Coordinaten erfüllt ist, so nimmt die quadratische Gleichung des Artikel 71 die Form

$$m^2 U' + l^2 U'' = 0$$

an und liefert daher für $l : m$ numerisch gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die Verbindungslinie der gegebenen Punkte wird also durch die Fläche äusserlich und innerlich in demselben Verhältniss, d. h. sie wird harmonisch getheilt; jene Punkte heissen dann harmonische Pole der Fläche. Somit ist der Ort der harmonischen Theilpunkte der durch (x', y', z', w') gehenden Radien vectoren der Fläche die Polarebene

$$x \frac{dU'}{dx'} + y \frac{dU'}{dy'} + z \frac{dU'}{dz'} + w \frac{dU'}{dw'} = 0.$$

74. Wenn allgemein die gerade Verbindungslinie der beiden

Punkte die Fläche berühren soll, so muss die quadratische Gleichung des Artikel 71 gleiche Wurzeln haben, und die Coordinaten der beiden Punkte müssen somit durch die Relation

$$4\,U'\,U'' = P^2$$

verbunden sein. Wenn der Punkt (x', y', z', w') als fest gedacht wird, so ist diese Relation erfüllt, sobald der Punkt in einer der Tangenten gelegen ist, welche von ihm aus an die Oberfläche gezogen werden können. Der durch alle diese Tangenten erzeugte Kegel hat in Folge dessen die Gleichung

$$4\,UU' = P^2,$$

wo

$$P = x\frac{dU'}{dx'} + y\frac{dU'}{dy'} + z\frac{dU'}{dz'} + w\frac{dU'}{dw'}$$

ist.

Beispiel 1. Man soll die Gleichung des dem Punkt (x', y', z') entsprechenden Tangentenkegels der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

finden.

Sie ist

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1\right)^2$$

Eine vereinfachte Form entspricht dem speciellen Falle

$$x' = a, \quad y' = b, \quad z' = c.$$

Beispiel 2. Welches ist die Gleichung des Berührungscylinders einer Fläche zweiten Grades für gegebene Richtung seiner Erzeugenden?

Beispiel 3. Die Ebenen der Berührungscurven der von den Punkten der Fläche

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}$$

an die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gehenden Berührungskegel haben vom Centrum der Flächen den gemeinschaftlichen Abstand k^2.

Beispiel 4. Die Fläche

$$(ax + by + cz - 1)^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy = 0$$

berührt die Coordinatenachsen, und die Gleichung des aus dem Anfangspunkt über dem Schnitt der Berührungsebene beschriebenen Kegels ist

$$lyz + mzx + nxy = 0.$$

75. Man soll die Bedingung ausdrücken, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

die durch die allgemeine Gleichung zweiten Grades gegebene Fläche berührt.

Wenn x, y, z, w die Coordinaten des Berührungspunktes bezeichnen und λ ein unbestimmter Factor ist, so gelten nach Artikel 58 die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda\alpha &= ax + ny + mz + pw,\\
\lambda\beta &= nx + by + lz + qw,\\
\lambda\gamma &= mx + ly + cz + rw,\\
\lambda\delta &= px + qy + rz + dw,
\end{aligned}$$

und wir können zwischen ihnen und der Gleichung der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

die Veränderlichen x, y, z, w eliminieren. Die Auflösung derselben für x, y, z, w giebt (vgl. „Vorlesungen" Artikel 16, 23)

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{\lambda}x &= \frac{d\Delta}{da}\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dn}\beta + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dm}\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dp}\delta,\\
\frac{\Delta}{\lambda}y &= \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dn}\alpha + \frac{d\Delta}{db}\beta + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dl}\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dq}\delta,\\
\frac{\Delta}{\lambda}z &= \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dm}\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dl}\beta + \frac{d\Delta}{dc}\gamma + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dr}\delta,\\
\frac{\Delta}{\lambda}w &= \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dp}\alpha + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dq}\beta + \tfrac{1}{2}\frac{d\Delta}{dr}\gamma + \frac{d\Delta}{dd}\delta,
\end{aligned}$$

wenn wir durch Δ wie früher die Discriminante bezeichnen. Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

liefert dann die geforderte Relation in der Form

$$\alpha^2\frac{d\Delta}{da} + \beta^2\frac{d\Delta}{db} + \gamma^2\frac{d\Delta}{dc} + \delta^2\frac{d\Delta}{dd} + \beta\gamma\frac{d\Delta}{dl} + \gamma\alpha\frac{d\Delta}{dm}$$
$$+ \alpha\beta\frac{d\Delta}{dn} + \alpha\delta\frac{d\Delta}{dp} + \beta\delta\frac{d\Delta}{dq} + \gamma\delta\frac{d\Delta}{dr} = 0.$$

Man kann sie auch in der Form

$$\begin{vmatrix} a, & n, & m, & p, & \alpha \\ n, & b, & l, & q, & \beta \\ m, & l, & c, & r, & \gamma \\ p, & q, & r, & d, & \delta \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

schreiben.

76. Die Bedingung, unter welcher die Fläche von einer durch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

gegebenen Geraden berührt wird, können wir erhalten, indem wir zwei der Veränderlichen zwischen den Gleichungen der Linie und der Gleichung der Fläche eliminieren und die Bedingung bilden, für welche die resultierende quadratische Gleichung gleiche Wurzeln hat. Das Resultat enthält die Coefficienten der quadratischen Gleichung im zweiten Grade und ist zugleich eine quadratische Function der Determinanten $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$, $(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)$, etc., welche wir abkürzend durch $(\alpha\beta')$, $(\alpha\gamma')$, etc. vertreten wollen. Das Resultat ist dann

$$\Sigma(ab - n^2)(\gamma\delta')^2 + 2\Sigma(mn - al)(\beta\delta')(\gamma\delta')$$
$$+ 2\Sigma nr\left\{(a\delta')(\gamma\beta') - (\alpha\gamma')(\beta\delta')\right\},$$

wo die Summen sich auf alle durch symmetrische Vertauschung der Buchstaben entstehenden Glieder derselben Form beziehen. Man kann diese Bedingung auch in der Form

$$\begin{vmatrix} a, & n, & m, & p, & \alpha, & \alpha' \\ n, & b, & l, & q, & \beta, & \beta' \\ m, & l, & c, & r, & \gamma, & \gamma' \\ p, & q, & r, & d, & \delta, & \delta' \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & 0, & 0 \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \delta', & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

schreiben.

Die Anwendung der Coordinatenbezeichnung x_1, x_2, x_3, x_4 lässt die Gleichungen einer Geraden durch

$$\Sigma\alpha_i x_i = 0, \quad \Sigma\alpha_i' x_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

und die Bedingung ihrer Berührung mit der durch die allgemeine Gleichung repräsentierten Fläche zweiten Grades durch

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \alpha_1, & \alpha_1' \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \alpha_2, & \alpha_2' \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34}, & \alpha_3, & \alpha_3' \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44}, & \alpha_4, & \alpha_4' \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4, & 0, & 0 \\ \alpha_1', & \alpha_2', & \alpha_3', & \alpha_4', & 0, & 0 \end{vmatrix} = W = 0$$

darstellen; die Coordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = \frac{dW}{da_{41}}, \quad x_2 = \frac{dW}{da_{42}}, \quad x_3 = \frac{dW}{da_{43}}, \quad x_4 = \frac{dW}{da_{44}}$$

für

$$\frac{dV}{da_{44}} = 0$$

ist somit der Berührungspunkt in unendlicher Ferne, sobald man die homogenen Coordinaten als Verhältnisscoordinaten auffasst. (Artikel 34.)

Wenn in der Bedingung des letzten Artikels die Substitutionen

$$\alpha + \lambda\alpha' \quad \text{für} \quad \alpha, \text{ etc.}$$

vollzogen und dann die Bedingung gebildet wird, unter welcher die dadurch entspringende Gleichung in λ gleiche Wurzeln hat, so ist das Resultat identisch mit dem Producte der Discriminante in die Bedingung dieses Artikels. Denn die zwei Ebenen, welche durch eine gegebene Linie gehen und eine quadratische Fläche berühren, fallen zusammen, ebensowohl wenn jene Linie eine Tangente der Fläche ist, als wenn die Fläche einen Doppelpunkt besitzt.

Beispiel. Wenn eine Fläche zweiten Grades drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten eines Tetraeders in ihren Mittelpunkten berührt und die Mittelpunkte der drei andern Kanten enthält, so tangiert sie auch diese Letzteren und der Schwerpunkt des Tetraeders ist ihr Centrum

Denn für $2a$, $2b$, $2c$ als die Kantenlängen und unter der Voraussetzung, dass sie als Coordinatenachsen gewählt sind, findet die Berührung in ihren Mitten und das Hindurchgehen durch die Mitten der anderen statt, wenn die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} - \frac{2z}{c} + 1 = 0$$

die Fläche darstellt. Ihr Centrum ist der Durchschnitt der Ebenen

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{z}{ac} + \frac{y}{ab} - \frac{2}{a} = 0,$$

$$\frac{2y}{b^2} + \frac{x}{ab} + \frac{z}{bc} - \frac{2}{b} = 0,$$

$$\frac{2z}{c^2} + \frac{y}{bc} + \frac{x}{ac} - \frac{2}{c} = 0$$

und daher der Punkt

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{z}{c}.$$

Die Verlegung des Anfangspunktes nach diesem bei parallelen Achsen giebt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} + \frac{xy}{ab} = \frac{1}{2}.$$

Die Gleichung des Ellipsoids, welches die vier Flächen des Tetraeders in ihren Schwerpunkten berührt und mit dem vorigen concentrisch ist, unterscheidet sich hiervon nur durch einen andern Werth der rechten Seite.

Endlich ist die dem Tetraeder umschriebene Fläche zweiten Grades, deren Tangentenebenen in den Ecken den Gegenflächen parallel sind, der gegebenen concentrisch und hat eine sehr ähnliche Gleichung.

V. Kapitel.

Classification der Flächen zweiten Grades.

77. Es ist die Aufgabe dieses Kapitels, die allgemeine Gleichung zweiten Grades auf die einfachste Form zu reducieren, deren sie fähig ist, und die verschiedenen Flächen zu unterscheiden, welche sie darstellen kann.

Wir beginnen die Untersuchung unter der Voraussetzung, dass die im Artikel 65 durch δ bezeichnete Grösse

$$abc + 2lmn - al^2 - bm^2 - cn^2$$

nicht gleich Null sei.

Indem wir die Gleichung zu parallelen Achsen durch das Centrum transformieren, verschwinden die Coefficienten p, q, r und dieselbe erhält die Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + d' = 0,$$

wenn wir durch d' das Resultat der Substitution der Coordinaten des Centrums in die Gleichung der Fläche bezeichnen. Indem man erinnert, dass

$$2U' = x' \frac{dU'}{dx'} + y' \frac{dU'}{dy'} + z' \frac{dU'}{dz'} + w' \frac{dU'}{dw'} = 0$$

ist und dass die Coordinaten des Centrums die ersten drei der letzteren Glieder verschwinden machen, berechnet man leicht, dass

$$d' = \frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{\delta} + d = \frac{\varDelta}{\delta}$$

ist, wo wie vorher $\varDelta$ die Discriminante der Gleichung bezeichnet.

78. Nachdem man durch Transformation zu parallelen Achsen die Coordinaten von x, y, z auf Null reduciert hat, kann man durch eine Richtungsänderung der Achsen unter Bei-

behaltung des Centrums als Anfangspunkt auch die Coefficienten von yz, zx, xy zum Verschwinden bringen und so die Gleichung auf die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D^{*})$$

reducieren.

Es kann nach Artikel 15 leicht nachgewiesen werden, dass zum Vollzug dieser Reduction über eine hinreichende Anzahl von Constanten verfügt werden kann; wir ziehen es aber vor, nach Analogie entsprechender Entwicklungen in der „Analytischen Geometrie der Kegelschnitte", zu zeigen, dass gewisse Functionen der Coefficienten beim Uebergang von einem rectangulären Achsensystem zu einem andern unverändert bleiben und dass die neuen Coefficienten A, B, C mittelst derselben ausgedrückt werden können.

Wenn wir voraussetzen, dass die allgemeinste Transformation, welche von der Form

$$x = \lambda \underline{x} + \mu \underline{y} + \nu \underline{z}, \quad y = \lambda' \underline{x} + \mu' \underline{y} + \nu' \underline{z},$$
$$z = \lambda'' \underline{x} + \mu'' \underline{y} + \nu'' \underline{z}$$

ist, die Function

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy$$

in

$$a'\underline{x}^2 + b'\underline{y}^2 + c'\underline{z}^2 + 2l'\underline{yz} + 2m'\underline{zx} + 2n'\underline{xy}$$

überführt, was wir durch

$$U = \underline{U}$$

ausdrücken wollen, so haben wir unter der Voraussetzung, dass beide Systeme rectangulär sind,

$$x^2 + y^2 + z^2 = \underline{x}^2 + \underline{y}^2 + \underline{z}^2,$$

welches durch

$$S = \underline{S}$$

dargestellt werden mag.

---

*) Der Werth von D ist übrigens

$$\frac{-\Delta}{\delta}.$$

Im Folgenden ist D als positiv vorausgesetzt. Für $D=0$ repräsentiert die Gleichung einen Kegel (Artikel 63) und für negative Werthe haben wir nur die Vorzeichen in der Gleichung sämmtlich zu wechseln.

Für eine beliebige Constante R ist in Folge dessen

$$U + RS = \underline{U} + R\underline{S},$$

und wenn die linke Seite dieser Identität in Factoren zerlegbar ist, so muss es auch die rechte Seite sein, d. h. die Discriminanten beider Polynome

$$U + RS, \quad \underline{U} + R\underline{S}$$

müssen für den nämlichen Werth der Constanten R verschwinden.

Nun ist die Discriminate von $(U + RS)$

$$R^3 - R^2 (a + b + c) + R (ab + bc + ca - l^2 - m^2 - n^2) \\ - (abc + 2lmn - al^2 - bm^2 - cn^2),$$

und die Vergleichung der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von R in diesem und dem Ausdruck der andern Discriminante liefert für den Uebergang von einem System rectangulärer Achsen zu einem andern die Bedingungen

$$a + b + c = a' + b' + c',$$
$$bc + ca + ab - l^2 - m^2 - n^2 = b'c' + c'a' + a'b' - l'^2 - m'^2 - n'^2,$$
$$abc + 2lmn - al^2 - bm^2 - cn^2 = a'b'c' + 2l'm'n' - a'l'^2 - b'm'^2 - c'n'^2 \text{*)}.$$

79. Diese drei Gleichungen gestatten sogleich die Bestimmung derjenigen Transformation, für welche die Coefficienten l, m, n verschwinden, denn sie bestimmen die Coefficienten der cubischen Gleichung, welche die neuen Werthe a, b, c zu ihren Wurzeln hat. Dieselbe ist daher

$$A^3 - (a + b + c) A^2 + (bc + ca + ab - l^2 - m^2 - n^2) A \\ - (abc + 2lmn - al^2 - bm^2 - cn^2) = 0 \text{**)}$$

oder in anderer Ausdrucksform

$$(A - a)(A - b)(A - c) - l^2 (A - a) - m^2 (A - b) \\ - n^2 (A - c) - 2lmn = 0.$$

---

*) Die Bildung der entsprechenden Gleichungen für schiefwinklige Coordinatensysteme hat keine Schwierigkeit. Nach Artikel 18 substituieren wir dann für S

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz \cos \lambda - 2zx \cos \mu - 2xy \cos \nu,$$

und indem wir genau so wie im Texte verfahren, erhalten wir eine in R cubische Gleichung, deren Coefficienten durch die Transformation ihr gegenseitiges Verhältniss nicht ändern.

**) Es ist dieselbe cubische Gleichung, die wir im Artikel 68 erhalten haben, wie man sieht.

Cauchy hat folgendermassen bewiesen, dass die sämmtlichen Wurzeln dieser Gleichung reell sind. Sie sei in der Form

$$(A - a)\left\{(A - b)(A - c) - l^2\right\} - m^2 (A - b)$$
$$n^2 (A - c) - 2\,lmn = 0$$

geschrieben und α, β sollen die Werthe von A bezeichnen, für welche

$$(A - b)(A - c) - l^2 = 0$$

wird; dann ist die grössere dieser Wurzeln α nothwendig grösser und die kleinere β nothwendig kleiner als jeder der Werthe b und c.*) Durch die Substitution

$$A = \alpha$$

reduciert sich dann die gegebene cubische Gleichung auf

$$-\left\{(\alpha - b)\, m^2 + 2\,lmn + (\alpha - c)\, n^2\right\},$$

in welcher Form die innerhalb der Klammern stehende Grösse ein vollständiges Quadrat ist, weil man hat

$$(\alpha - b)(\alpha - c) = l^2;$$

d. h. das Resultat dieser Substitution ist wesentlich negativ. Für die Substitution

$$A = \beta$$

erhält man hingegen den Werth

$$(b - \beta)\, m^2 - 2\,lmn + (c - \beta)\, n^2,$$

ein vollständiges Quadrat und somit wesentlich positiv. Da somit die Substitutionen

$$A = \infty, \quad A = \alpha, \quad A = \beta, \quad A = -\infty$$

abwechselnd positive und negative Resultate liefern, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln, welche zwischen den durch jene Substitutionen bezeichneten Grenzen liegen. Dieselben sind die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 in der transformierten Gleichung, es ist aber willkürlich, welche

---

*) Man erkennt diess entweder durch wirkliche Auflösnng oder durch die successiven Substitutionen

$$A = \infty, \; A = b, \; A = c, \; A = -\infty,$$

als welche die Resultate

$$+, -, -, +$$

geben, zum Beweis, dass die eine der Wurzeln grösser als b und die andere kleiner als c ist.

von ihnen wir als den Coefficienten von x^2 oder y^2 nehmen, weil wir jede der Achsen als Achse der x bezeichnen können.

Den Beweis eines allgemeineren Satzes, von welchem dieser als ein specieller Fall erscheint, findet man in den „Vorlesungen" XV.

Beispiel. Wir machen von diesen Grundsätzen Gebrauch für den Beweis der Identität der durch die Gleichungen

$$\left\{(b_2c_3)\,x + (c_2a_3)\,y + (a_2b_3)\,z\right\}^2 + \left\{(b_3c_1)\,x + (c_3a_1)\,y + (a_3b_1)\,z\right\}^2$$
$$+ \left\{(b_1c_2)\,x + (c_1a_2)\,y + (a_1b_2)\,z\right\}^2 = K^2,$$
$$\left\{(b_2c_3)\,x + (b_3c_1)\,y + (b_1c_2)\,z\right\}^2 + \left\{(c_2a_3)\,x + (c_3a_1)\,y + (c_1a_2)\,z\right\}^2$$
$$+ \left\{(a_2b_3)\,x + (a_3b_1)\,y + (a_1b_2)\,z\right\}^2 = K^2,$$

— wo (b_2c_3), etc. die Determinanten $(b_2c_3 - b_3c_2)$, etc. bedeuten — dargestellten Flächen zweiten Grades.

Die Flächen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Lyz + 2Mzx + 2Nxy = K^2,$$
$$A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2 + 2L_1yz + 2M_1zx + 2N_1xy = K^2$$

sind identisch, wenn die Gleichungen

$$\begin{vmatrix} A-R, & N, & M \\ N, & B-R, & L \\ M, & L, & C-R \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} A_1-R, & N_1, & M_1 \\ N_1, & B_1-R, & L_1 \\ M_1, & L_1, & C_1-R \end{vmatrix} = 0$$

in ihren entsprechenden Coefficienten übereinstimmen; denn diess hat die Gleichheit ihrer Wurzeln zur Folge.

Nun ist aber für

$$D = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

nach den Grundsätzen der Determinantentheorie

$$D^2 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1 \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2 \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

für

$$\alpha_i = \frac{dD}{da_i}, \quad \beta_i = \frac{dD}{db_i}, \quad \gamma_i = \frac{dD}{dc_i}.$$

Da im vorliegenden Falle die Werthe der A, B, ..., A_1, B_1, ... die folgenden sind

$$A = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2, \quad L = \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3,$$
$$B = \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2, \quad M = \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1,$$
$$C = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2, \quad N = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2,$$

$$A_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad L_1 = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3,$$
$$B_1 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2, \quad M_1 = \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3,$$
$$C_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, \quad N_1 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

so hat man zuerst

$$A + B + C = A_1 + B_1 + C_1,$$

und ebenso unmittelbar

$$\begin{vmatrix} A, & N, & M, \\ N, & B, & L, \\ M, & L, & C, \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1, & N_1, & M_1, \\ N_1, & B_1, & L_1, \\ M_1, & L_1, & C_1, \end{vmatrix} = D^4;$$

die erste und letzte der Relationen des Artikel 78. Ebenso ist aber auch, entsprechend der zweiten

$$\begin{aligned} &(AB - N^2) \quad + (AC - M^2) \quad + (BC - L^2) \\ &= (A_1B_1 - N_1^2) + (A_1C_1 - M_1^2) + B_1C_1 - L_1^2); \end{aligned}$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A, & N \\ N, & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_2, & \beta_2 \\ \alpha_3, & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_3, & \beta_3 \\ \alpha_1, & \beta_1 \end{vmatrix}^2 \\ = D^2 (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2), \end{aligned}$$

wegen

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \alpha_2, & \beta_2 \end{vmatrix} = D \frac{d^2D}{da_1 db_2} = Dc_2, \text{ etc.};$$

und man hat ebenso

$$\begin{vmatrix} A, & M \\ M, & C \end{vmatrix} = D^2 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2),$$

$$\begin{vmatrix} B, & L \\ L, & B \end{vmatrix} = D^2 (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2);$$

und anderseits

$$\begin{vmatrix} A_1, & N_1 \\ N_1, & B_1 \end{vmatrix} = D^2 (a_3^2 + b_3^2 + c_3^2),$$

$$\begin{vmatrix} A_1, & M_1 \\ M_1, & C_1 \end{vmatrix} = D^2 (a_2^2 + b_2^2 + c_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} B_1, & L_1 \\ L_1, & B_1 \end{vmatrix} = D^2 (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

80. **Die Flächen zweiten Grades werden nach den Vorzeichen der Wurzeln der vorbesprochenen cubischen Gleichung classificiert.**

I. Wenn alle ihre Wurzeln positiv sind, so kann die Gleichung in die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

gebracht werden. Die Fläche bestimmt dann in jeder der drei Achsen reelle Abschnitte und wenn man dieselben durch a, b, c respective bezeichnet, so kann die Gleichung in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

geschrieben werden. Da es willkürlich ist, welche der Achsen zur Achse der x gewählt wird, so wollen wir voraussetzen, dass der Abschnitt a, welcher der Achse der x angehört, der längste und der Abschnitt c, welcher der Achse der z angehört, der kürzeste sei.

Durch Transformation zu Polarcoordinaten wird die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2},$$

und kann also, wegen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

in jede der Formen

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\beta + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\gamma,$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right)\cos^2\alpha - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)\cos^2\beta$$

geschrieben werden, aus welchen sogleich erhellt, dass a der grösste und c der kleinste Werth des Radius vectors ist. **Die Fläche ist demnach in jeder Richtung begrenzt und wird als ein Ellipsoid bezeichnet.**

Jeder ebene Querschnitt derselben ist eine Ellipse. Der einer Ebene

$$z = R$$

entsprechende Schnitt ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{R^2}{c^2},$$

und für alle

$$R > c$$

existiert daher kein reeller Schnitt mehr, oder die Fläche liegt ganz zwischen den Ebenen

$$z = \pm c.$$

Aehnliches gilt für die anderen Achsen.

Wenn zwei der Coefficienten z. B. a und b einander gleich sind, so sind alle Schnitte durch Ebenen, die der xy Ebene parallel sind, Kreise; die Fläche ist eine **Umdrehungsfläche, erzeugt durch Umdrehung einer Ellipse um ihre grosse oder um ihre kleine Achse, je nachdem die gleichen Coefficienten die beiden grösseren oder die beiden kleineren sind.**

Man bezeichnet diese Flächen als das **verlängerte** und das **abgeplattete Ellipsoid.**

Wenn alle drei Coefficienten einander gleich sind, ist die dargestellte Fläche eine Kugel.

81. II. Sei eine der drei Wurzeln der cubischen Gleichung negativ.

Die Gleichung kann dann in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$a > b$$

geschrieben werden und man sieht, dass die Achse der z die Fläche nicht in reellen Punkten schneidet. Die Polargleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

zeigt, dass der Radius vector die Fläche schneidet oder nicht schneidet, je nachdem die rechte Seite der Gleichung positiv oder negativ ist; und dass ferner für die Voraussetzung, dass sie gleich Null oder dass $\varrho = \infty$ sei, ein System von Radien vectoren erhalten wird, welches die Durchmesser, die die Fläche schneiden, von denen trennt, die sie nicht schneiden. Durch Rückgang zu den rechtwinkligen Coordinaten wird die Gleichung des Asymptotenkegels

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Die ebenen Schnitte der Fläche, welche der Ebene der xy parallel sind, sind elliptisch, diejenigen, welche den beiden andern Hauptebenen parallel sind, hyperbolisch. Da die Gleichung des elliptischen Schnittes für die Ebene

$$z = R$$

durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{R^2}{c^2}$$

gegeben ist, so entspricht jedem Werthe von R ein reeller Durchschnitt und die Fläche ist daher ohne Unterbrechung. Man nennt sie ein einfaches Hyperboloid oder Hyperboloid mit einer Mantelfläche.

Für $a = b$ erhält man eine Umdrehungsfläche derselben Art.

82. III. Wenn zwei Wurzeln der cubischen Gleichung negativ sind, so kann die Gleichung in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

geschrieben werden.

Die der Ebene yz parallelen Querschnitte sind Ellipsen, für

$$x = R$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{R^2}{a^2} - 1\,;$$

die Schnitte, welche den beiden andern Hauptebenen parallel geführt werden, sind Hyperbeln. Jene Ellipse ist nicht reell, so lange die Constante R zwischen den Grenzen $+ a$ und $- a$ liegt; jede Ebene

$$x = R,$$

für welche R ausserhalb jener Grenzen liegt, schneidet aber die Fläche in einer reellen Curve, d. i. kein Theil der Fläche liegt zwischen den Ebenen

$$x = + a, \quad x = - a,$$

die Fläche besteht aus zwei getrennten Theilen, welche ausserhalb dieser begrenzenden Ebenen liegen. Man nennt sie das *zweifache Hyperboloid* oder das *Hyperboloid mit zwei Mantelflächen.* Für $b = c$ hat man die *Umdrehungsfläche derselben Art.*

Die Anschauung der Umdrehungsflächen bietet eine sehr einfache Unterscheidung zwischen beiden Arten von Hyperboloiden dar; denn wenn eine Hyperbel um ihre transversale Achse gedreht wird, so besteht die erzeugte Fläche nothwendig aus zwei getrennten Theilen, sie ist aber ein einfaches Hyperboloid, wenn die conjugierte Achse zur Drehungsachse gewählt ward.

IV. Unter der Voraussetzung, *dass alle drei Wurzeln der cubischen Gleichung negativ sind,* nimmt die allgemeine Gleichung die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

an, der durch keine reellen Werthe der Coordinaten genügt werden kann.

V. Wenn das absolute Glied den Werth Null erhält, so haben wir den *Grenzfall der Kegelfläche;* die Formen I und IV geben die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

welcher keine andern reellen Werthe der Coordinaten als

$$x = y = z = 0$$

Genüge leisten. Den Formen II und III entspringt die Gleichung der Kegelfläche in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

In dieser Aufzählung sind alle diejenigen Arten von Flächen zweiten Grades enthalten, welche ein Centrum haben.

Beispiel 1.

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4yz - 4xy = 6.$$

Die cubische Gleichung der Discriminante ist

$$A^3 - 18\,A^2 + 99\,A - 162 = 0,$$

die transformierte Gleichung also

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2,$$

ein Ellipsoid.

Beispiel 2.

$$11x^2 + 10y^2 + 6z^2 - 12xy - 8yz + 4zx = 12.$$

Die cubische Gleichung der Discriminante ist

$$A^3 - 27\,A^2 + 180\,A - 324 = 0,$$

die transformierte Gleichung

$$x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 4,$$

oder ein Ellipsoid.

Beispiel 3.

$$7x^2 - 13y^2 + 6z^2 + 24xy + 12yz + 12zx = \pm 84.$$

Die cubische Gleichung der Discriminante

$$A^3 - 343\,A - 2058 = 0,$$

die transformierte Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 = \pm 12,$$

d. h. je nach dem Zeichen des letzten Gliedes ein einfaches oder ein zweifaches Hyperboloid.

Beispiel 4.

$$2x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 4yz + 8zx = 8.$$

Die cubische Gleichung der Discriminante ist

$$A^3 - 9A^2 - 3A + 20 = 0.$$

Die Regel der Vorzeichen von Descartes beweist, dass diese Gleichung zwei positive Wurzeln hat, indess die dritte negativ ist; die gegebene Gleichung repräsentiert daher ein einfaches Hyperboloid.

Beispiel 5. Man findet ebenso, dass

$$xy + yz + xz = a^2$$

ein zweifaches Umdrehungshyperboloid und

$$2x^2 - 5y^2 + z^2 + 6yz - 8zx - 4xy + 1 = 0$$

ein einfaches Hyperboloid darstellen.

83. Wir gehen nun zur Betrachtung des Falles über, in welchem $\delta = 0$ ist. Für denselben haben wir im Artikel 65 gesehen, dass es dann unmöglich ist, durch Verlegung des Anfangspunktes die Coefficienten der Glieder vom ersten Grade zum Verschwinden zu bringen. Aber es ist offenbar gleichgültig, ob wir wie im Artikel 65 mit der Transformation zu einem neuen Anfangspunkt beginnen, um die Coefficienten von x, y, z auf Null zu reducieren, oder ob wir zuerst, wie wir in Artikel 78 f. gethan, zu neuen Achsen mit demselben Anfangspunkt übergehen, um das von den Gliedern vom zweiten Grade gebildete Polynom auf die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2$$

zu bringen; da für $\delta = 0$ die erste Transformation unmöglich ist, so beginnen wir mit der zweiten. Für diese Transformation zeigt der Umstand, dass das absolute Glied der cubischen Gleichung des Artikel 79 gleich δ ist, sofort, dass eine der drei Wurzeln derselben, d. i. eine der drei Grössen A, B, C gleich Null sein muss, dass also die Glieder zweiten Grades auf die Form

$$Ax^2 \pm By^2$$

reduciert werden können. Und zu demselben Schluss führt die Bemerkung, dass

$$\delta = 0$$

die Bedingung ist, unter welcher das Polynom der Glieder zweiten Grades in zwei reelle oder imaginäre Factoren zerlegbar ist, unter welcher es also auch als die Summe oder Differenz zweier Quadrate ausgedrückt werden kann.

Auf diesem Wege wird die allgemeine Gleichung in die Form

$$Ax^2 \pm By^2 + 2p'x + 2q'y + 2r'z + d = 0$$

gebracht und wir können dann durch Uebergang zu einem neuen Anfangspunkt der Coordinaten die Coefficienten von x und y mit Null identisch machen, nicht aber diejenigen von z, so dass die Gleichung auf

$$Ax^2 \pm By^2 + 2r'z + d' = 0$$

reduciert wird. Die Discussion dieser Form bietet folgende Fälle dar.

I. Sei $r' = 0$. Die Gleichung enthält dann z nicht und repräsentiert daher nach Artikel 22 einen Cylinder, welcher elliptisch oder hyperbolisch ist, je nachdem A und B dieselben oder verschiedene Vorzeichen haben. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist ein Centrum, weil die Glieder vom ersten Grade aus der Gleichung verschwunden sind; aber jeder Punkt in der Achse der z hat offenbar die nämlichen Eigenschaften und dieselbe wird daher als die Achse des Cylinders bezeichnet. Die Möglichkeit der Existenz einer geraden Linie, in der jeder Punkt ein Centrum der Fläche ist, wird dadurch angezeigt, dass Zähler und Nenner der Coordinaten des Centrums gleichzeitig identisch verschwinden. (Artikel 65, Anmerkung.)

Wenn ausser r' auch d' gleich Null wird, so degeneriert die Fläche in zwei reelle oder imaginäre sich durchschneidende Ebenen.

II. Sei $r' \gtrless 0$. Durch eine Veränderung des Anfangspunktes bringen wir das absolute Glied auf den Werth Null und reducieren also die Gleichung auf die Form

$$Ax^2 \pm By^2 + 2r'z = 0.$$

Wir setzen zuerst voraus, dass das positive Vorzeichen von B gelte, und erkennen, dass die durch Ebenen, welche den Coordinatenebenen xz oder yz parallel sind, gebildeten Schnitte Parabeln, die Schnitte von zur Ebene der xy parallelen Ebenen aber Ellipsen sind. Man nennt daher die von ihr dargestellte Fläche das elliptische Paraboloid. Dasselbe ist offenbar nur in einem Sinne ausgedehnt, weil der der Ebene

$$z = c$$

entsprechende Schnitt

$$Ax^2 + By^2 = -2r'c$$

nur dann reell ist, wenn die rechte Seite seiner Gleichung positiv ist. Darnach müssen r' und c entgegengesetzte Vorzeichen haben, die Fläche liegt also bei positivem r' ganz auf der negativen Seite der xy Ebene und für negatives r' ganz auf der positiven Seite derselben Ebene.

III. Wenn in der Gleichungsform des vorigen Falles B das negative Vorzeichen hat, so sind diejenigen Schnitte Hyperbeln, welche von den zu xy parallelen Ebenen gebildet werden; die Fläche wird als ein hyperbolisches Paraboloid bezeichnet und man findet wie vorher, dass sie in beiderlei Sinn unbegrenzt ist. Der durch die Ebene xy mit ihr bestimmte Schnitt ist ein Paar von geraden Linien.

IV. Sei $B = 0$. Dann sind zwei Wurzeln der cubischen Gleichung der Discriminante gleich Null und die allgemeine Gleichung nimmt die Form

$$Ax^2 + 2q'y + 2r'z + d = 0$$

an; und indem man die Achsen der y und z in ihrer eigenen Ebene verlegt, so dass die Ebene

$$q'y + r'z = 0$$

und eine zu ihr normale durch die Achse der x zu Coordinatenebenen werden, reduciert sie sich weiter auf

$$Ax^2 + qy + d = 0,$$

welche nach Artikel 22 einen Cylinder mit parabolischer Basis darstellt.

V. Wenn auch

$$q' = 0, \quad r' = 0$$

sind, so wird die Gleichung

$$Ax^2 + d = 0$$

in Factoren zerlegbar und bezeichnet ein Paar von parallelen Ebenen.

84. Die Ausführung der Reduction der Gleichung eines Paraboloids auf die Form

$$Ax^2 + By^2 + 2Rz = 0$$

wird durch die Bemerkung abgekürzt, dass die Discriminante eine Invariante ist, d. h. eine durch Transformation der Coordinaten nicht alterierte Function*), dass sie also wie die Discriminante der reducierten Form

$$Ax^2 + By^2 + 2Rz$$

auch für die allgemeine Gleichung von der Form

$$ABR^2$$

sein muss. Da nun A und B als die beiden nicht verschwinden-

*) Vergl. „Vorlesungen" Artikel 72, 74.

den Wurzeln der cubischen Gleichung bekannt sind, so ist auch R bekannt.

Die Berechnung der Discriminante ferner wird in diesem Falle durch den Umstand erleichtert, dass sie ein vollkommenes Quadrat ist*).

Wir wählen ein Beispiel; für die Gleichung

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 6zx + 4xy + 2x + 4y + 6z = 8$$

ist die cubische Gleichung der Discriminante

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 14\lambda = 0,$$

ihre Wurzeln also sind

$$\lambda = 0, \ 7, \ -2;$$

man hat

$$A = 7, \quad B = -2.$$

Die Discriminante ist in diesem Falle

$$(p + 2q - 3r)^2$$

also für die hier geltenden speciellen Werthe

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = 3$$
$$= 16;$$

daher ist

$$14R^2 = 16, \quad R = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

und die reducierte Gleichung

$$7x^2 - 2y^2 = \frac{8z}{\sqrt{14}}.$$

Ohne die Eigenschaften der Discriminante anzuwenden, hätten wir nach dem Verfahren des Artikel 68 die den Wurzeln der cubischen Gleichung $0, 7, -2$ entsprechendeu Hauptebenen bestimmen müssen,

$$x + 2y - 3z = 0, \quad 4x + y + 2z = 0,$$
$$x - 2y - z = 0;$$

wir hätten, weil die neuen Coordinaten respective normal zu diesen Ebenen sind,

$$4x + y + 2z = X\sqrt{21}, \quad x - 2y - z = Y\sqrt{6},$$
$$x + 2y - 3z = Z\sqrt{14}$$

---

*) Vergl. „Vorlesungen“ Artikel 161 f.

zu setzen und x, y, z durch die neuen Coordinaten auszudrücken, so dass die transformierte Gleichung die Gestalt

$$7x^2 - 2y^2 + \frac{24x}{\sqrt{21}} - 2y\sqrt{6} - \frac{8}{\sqrt{14}}z = 8$$

erhält; sie geht endlich durch Uebergang zu parallelen Achsen durch einen neuen Anfangspunkt in die vorher angegebene einfachste Gestalt über.

Wenn in dem gewählten Beispiel die Werthe der Coefficienten p, q, r die Relation

$$p + 2q - 3r = 0$$

erfüllt hätten, so verschwindet zwar die Discriminante identisch, aber die Reduction wird mit unverminderter Leichtigkeit durch die Bemerkung vollzogen, dass nun die Glieder in x, y, z in der Form

$$(4x + y + 2z) + \lambda(x - 2y - z)$$

ausgedrückt werden können; so dass z. B. für die Gleichung

$$5x^2 - y^2 + z^2 + 6zx + 4xy + 2x + 2y + 2z = 8$$

die Form

$$(4x + y + 2z)^2 - (x - 2y - z)^2 + 2(4x + y + 2z) - 2(x - 2y - z) = 24$$

entspringt, welche durch die vorher angegebene Transformation in

$$21x^2 - 6y^2 + 2x\sqrt{21} - 2y\sqrt{6} = 24$$

übergeht. Die letzte Reduction hat keine Schwierigkeit.

Beispiel. Die Gleichung

$$9x^2 - 4y^2 - 2xy - 36x + 8y + 4z + 32 = 0$$

repräsentiert ein hyperbolisches Paraboloid,

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 6x + 3z = 0$$

einen parabolischen Cylinder.

VI. Kapitel.

Ableitung von Eigenschaften der Flächen zweiten Grades aus speciellen Formen ihrer Gleichungen.

85. Wir werden nunmehr aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

einige Eigenschaften der centralen Flächen zweiten Grades ableiten. Diese Ableitung umfasst sowohl Eigenschaften der Ellipsoide als der Hyperboloide, wenn wir die Vorzeichen von b^2 und c^2 als unbestimmt voraussetzen.

Die Gleichung der Polarebene des Punktes (x', y', z') oder die der Tangentenebene, wenn dieser Punkt der Fläche angehört, ist nach Artikel 59

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

Beispiel. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes in Bezug auf die drei Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sind von ihrem gemeinschaftlichen Centrum gleichweit entfernt, nämlich um

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}\right)}}.$$

Bewegt sich der Pol auf der Fläche

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{p^2}$$

so berührt die Polarebene die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2.$$

Die Normale vom Anfangspunkt der Coordinaten auf die Tangentenebene in (oder die Polarebene von) (x', y', z') wird nach Artikel 23 durch die Gleichung

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4}$$

bestimmt, und die Winkel α, β, γ, welche sie mit den Achsen bildet, sind durch

$$\cos\alpha = \frac{px'}{a^2}, \quad \cos\beta = \frac{py'}{b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{pz'}{c^2}$$

gegeben, wie man durch Multiplication der Gleichung der Tangentenebene mit p und Vergleichung mit der Form der Gleichung der Ebene

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

am leichtesten erkennt.

Beispiel 1. Die Durchschnittslinie der vorher erwähnten Fläche

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{p^2}$$

mit jeder der drei ebenda betrachteten Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1$$

hat die Eigenschaft, dass die Tangentenebenen ihrer Punkte vom Centrum gleich weit entfernt sind. Man hat diese Curve eine Poloide genannt.

Beispiel 2. Die Tangentenebene des Ellipsoids in dem Punkte

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

schneidet in den Achsen gleiche und die in

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

den Achsen verhältnissgleiche Stücke ab.

Wir können aus den vorigen Gleichungen auch einen Ausdruck für die Länge der Normalen in Function der Winkel erhalten, welche sie mit den Achsen bildet, nämlich

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma.$$

86. Man soll die Bedingung finden, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

die Fläche berührt.

Die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der der Tangentialebene

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1$$

liefert die Relationen

$$\frac{x'}{a} = -\frac{a\alpha}{\delta}, \quad \frac{y'}{b} = -\frac{b\beta}{\delta}, \quad \frac{z'}{c} = -\frac{c\gamma}{\delta}$$

und damit die geforderte Bedingung in der Form

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = \delta^2.$$

Auf demselben Wege erhält man als die Bedingung, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

den Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

berührt,

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - c^2\gamma^2 = 0;$$

wie auch als speciellen Fall des Artikel 75 hätte gefunden werden können.

Beispiel. Der Pol der Ebene

$$Ax + By + Cz = 1$$

in Bezug auf das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

durchläuft eine Kugelfläche, wenn die Bedingung

$$a^4A^2 + b^4B^2 + c^4C^2 = \text{const.}$$

erfüllt ist.

87. Die Normale der Fläche ist eine im Berührungspunkte auf der Tangentenebene errichtete Perpendiculare. Ihre Gleichungen sind offenbar

$$\frac{a^2}{x'}(x - x') = \frac{b^2}{y'}(y - y') = \frac{c^2}{z'}(z - z').$$

Wenn wir den gemeinschaftlichen Werth dieser Ausdrücke durch R bezeichnen, so ist

$$x - x' = \frac{Rx'}{a^2}, \quad y - y' = \frac{Ry'}{b^2}, \quad z - z' = \frac{Rz'}{c^2}$$

und wir finden durch die Addition der Quadrate dieser Werthe, dass die Länge der Normale zwischen (x', y', z') und dem beliebigen Punkte (x, y, z) in ihr

$$= \frac{R}{p}$$

ist. Wählen wir den Punkt (x, y, z) als den Schnittpunkt der Normalen mit der Ebene xy, so ist $z = 0$ und die letzte der drei vorigen Gleichungen giebt

$$R = c^2,$$

so dass der zwischen dem Berührungspunkt und der Ebene xy gelegene Abschnitt der Normalen durch

$$\frac{c^2}{p}$$

gemessen ist. Aehnliche Ausdrücke gelten für die bis zu den Ebenen yz, zx gemessenen Abschnitte.

In Folge dessen bestimmt das zwischen zwei Hauptebenen enthaltene Stück einer Normale des Ellipsoids mit dem normalen Abstand der Tangentenebene vom Centrum ein constantes Product.

Die durch das Centrum und die Normale im Punkte (x', y', z') bestimmte Ebene ist durch

$$a^2 (b^2 - c^2) \frac{x}{x'} + b^2 (c^2 - a^2) \frac{y}{y'} + c^2 (a^2 - b^2) \frac{z}{z'} = 0$$

dargestellt.

Die Normalen, deren Fusspunkte in der Fläche in einer Ebene liegen, die zu einer Hauptebene parallel ist, schneiden eine andere Hauptebene in einer Geraden, die zu der ersten parallel ist.

88. Die Summe der Quadrate der reciproken Werthe von irgend drei zu einander rechtwinkligen Durchmessern ist constant.

Diess folgt unmittelbar aus der Addition der Gleichungen

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2},$$

$$\frac{1}{\varrho'^2} = \frac{\cos^2\alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{c^2},$$

$$\frac{1}{\varrho''^2} = \frac{\cos^2\alpha''}{a^2} + \frac{\cos^2\beta''}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma''}{c^2};$$

denn wegen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1, \text{ etc.}$$

erhalten wir

$$\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'^2} + \frac{1}{\varrho''^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

89. In gleicher Weise ist die Summe der Quadrate der Normalen, welche man vom Centrum auf drei zu einander rechtwinklige Tangentenebenen fällen kann, constant. Denn die Addition der Gleichungen

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma,$$
$$p'^2 = a^2\cos^2\alpha' + b^2\cos^2\beta' + c^2\cos^2\gamma',$$
$$p''^2 = a^2\cos^2\alpha'' + b^2\cos^2\beta'' + c^2\cos^2\gamma''$$

zeigt es. In Folge dessen ist der Ort des Durchschnittspunktes von drei zu einander rechtwinkligen Tangentenebenen eine Kugelfläche; denn das Quadrat seines Abstandes vom Centrum der Fläche ist der Summe der Quadrate der drei Normalen gleich, d. h.

$$= a^2 + b^2 + c^2.\text{*)}$$

Derselbe Satz gilt auch für einen Kegelschnitt, den man als Grenze einer Fläche zweiten Grades für das Verschwinden ihrer einen Halbachse zu betrachten hat.

90. Die Gleichung der dem Durchmesser des Punktes (x', y', z') der Fläche conjugierten Diametralebene ist

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 0; \quad \text{(Artikel 68.)}$$

sie ist also der Tangentenebene in diesem Punkte parallel.

Weil jeder in der Diametralebene gelegene Durchmesser dem Durchmesser des Punktes (x', y', z') conjugiert ist, so werden die Richtungscosinus zweier beliebigen conjugierten Durchmesser durch die Relation

*) Vergl. Artikel 190.

$$\frac{\cos\alpha\,\cos\alpha'}{a^2} + \frac{\cos\beta\,\cos\beta'}{b^2} + \frac{\cos\gamma\,\cos\gamma'}{c^2} = 0$$

verbunden. Da diese Bedingung durch die Substitution von ka^2, kb^2, kc^2 für a^2, b^2, c^2 nicht gestört wird, so sind zwei gerade Linien, welche für eine Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

conjugierte Durchmesser sind, auch solche für jede ähnliche Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k.$$

Und für $k = 0$ erkennen wir, dass jede Fläche mit ihrem Asymptotenkegel gemeinschaftliche Systeme conjugierter Durchmesser hat.

Nach Analogie der in dem Falle der Kegelschnitte angewendeten Methoden können wir die Coordinaten irgend eines Punktes des Ellipsoids durch

$$a\cos\lambda, \quad b\cos\mu, \quad c\cos\nu$$

bezeichnen, wo λ, μ, ν die Richtungswinkel einer geraden Linie sind, d. h. durch die Relation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

verbunden. Dann sind die geraden Linien, welche zwei conjugierten Durchmessern entsprechen, rechtwinklig zu einander, denn für

$$\cos\alpha = a\cos\lambda, \quad \cos\alpha' = a\cos\lambda', \text{ etc.}$$

wird die letztgeschriebene Relation

$$\cos\lambda\,\cos\lambda' + \cos\mu\,\cos\mu' + \cos\nu\,\cos\nu' = 0.$$

Beispiel. Wenn die p, p', p'' die Längen der vom Centrum auf ein System conjugierter Tangentenebenen gefällten Normalen bezeichnen, so ist

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p'^2} + \frac{1}{p''^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

und für q, q', q'' als die Längen der entsprechenden Radien vectoren des Ellipsoids ist

$$\frac{1}{p^2q^2} + \frac{1}{p'^2q'^2} + \frac{1}{p''^2q''^2} = \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}.$$

91. Die Summe der Quadrate von drei zu einander conjugierten Halbdurchmessern ist constant.

Denn das Quadrat der Länge eines Halbdurchmessers

$$x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ist in Function von λ, μ, ν

$$a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \cos^2 \mu + c^2 \cos^2 \nu$$

und die Addition dieses Ausdrucks mit den beiden analogen Werthen

$$a^2 \cos^2 \lambda' + b^2 \cos^2 \mu' + c^2 \cos^2 \nu',$$
$$a^2 \cos^2 \lambda'' + b^2 \cos^2 \mu'' + c^2 \cos^2 \nu''$$

giebt

$$a^2 + b^2 + c^2,$$

weil λ, μ, ν, etc. die Richtungswinkel von drei geraden Linien sind, deren jede auf den beiden andern rechtwinklig ist.

Das Parallelepiped, dessen Kanten drei conjugierte Durchmesser sind, hat ein constantes Volumen.

Denn für x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' als die Coordinaten der Endpunkte der drei Durchmesser ist nach Artikel 31 das Volumen des Parallelepipeds

$$= \begin{vmatrix} x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \\ x''', & y''', & z''' \end{vmatrix}$$

oder

$$= abc \begin{vmatrix} \cos \lambda, & \cos \mu, & \cos \nu \\ \cos \lambda', & \cos \mu', & \cos \nu \\ \cos \lambda'', & \cos \mu'', & \cos \nu'' \end{vmatrix}$$

$$= abc,$$

weil der Werth der letztgeschriebenen Determinante nach der Anmerkung des Artikel 27 der Einheit gleich ist.

Wenn a', b' die Achsen eines ebenen Centralschnittes sind und p die vom Anfangspunkt auf die zu ihm parallele Tangentenebene gefällte Normale bezeichnet, so ist

$$a'b'p = abc;$$

denn für c' als den Halbdurchmesser des Berührungspunktes und für θ als den von ihm mit der Normale gebildeten Winkel ist das Volumen des Parallelopipeds der drei conjugierten Durchmesser a', b', c'

$$= a'b'c' \cos \theta,$$

und diess geht wegen

$$c' \cos \theta = p$$

in den gegebenen Werth über.

Beispiel. Für sechs Punkte eines Ellipsoids gilt eine Relation von bemerkenswerther Einfachheit zwischen den Entfernungen von fünfen unter ihnen vom sechsten, den parallelen Halbdurchmessern und den Volumen der von jenen bestimmten fünf Tetraeder. Sie bleibt gültig für jede Lage des sechsten Punktes nicht nur auf dem Ellipsoid, sondern auch ausserhalb desselben.

Sind $A_1, A_2, \ldots, A_5, P$ die Punkte von den Coordinaten

$$x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2;\ \text{etc. } x_5, y_5, z_5;\ x', y', z';$$

bezeichnen $d_1, d_2, \ldots, d_5$ die Abstände der fünf ersten von P und $D_1, D_2, \ldots, D_5$ die zu ihnen parallelen Halbdurchmesser, endlich $V_1, V_2, \ldots, V_5$ die Volumina der Tetraeder $A_2A_3A_4A_5$, $A_3A_4A_5A_1$, etc., so entsprechen in dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dem Durchmesser $y = m_i x,\quad z = n_i x$ die Coordinatenwerthe seiner Endpunkte

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m_i^2}{b^2} + \frac{n_i^2}{c^2}\right)}},\quad y_i = \frac{n_i}{m_i} z_i = \frac{m_i}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{m_i^2}{b^2} + \frac{n_i^2}{c^2}\right)}},$$

es ist also $D_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = \dfrac{1 + m_i^2 + n_i^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{m_i^2}{b^2} + \frac{n_i^2}{c^2}}$.

Ebenso hat man $d_i^2 = (x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2 + (z' - z_i)^2$ und also nach dem geforderten Parallelismus von D_i und PA_i wegen

$$m_i = \frac{y' - y_i}{x' - x_i},\quad n_i = \frac{z' - z_i}{x' - x_i}$$

$$\frac{(x' - x_i)^2}{a^2} + \frac{(y' - y_i)^2}{b^2} + \frac{(z' - z_i)^2}{c^2} = \frac{d_i^2}{D_i^2};$$

für die Lage des Punktes A_i auf dem Ellipsoid reduciert sich diese Gleichung auf

$$\left(1 + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right) - \frac{2x'}{a^2} x_i - \frac{2y'}{b^2} y_i - \frac{2z'}{c^2} z_i = \frac{d_i^2}{D_i^2},\ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

und giebt fünf Relationen zwischen den vier Grössen

$$\left(1 + \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2}\right),\ -\frac{2x'}{a^2},\ -\frac{2y'}{b^2},\ -\frac{2z'}{c^2},$$

also das Verschwinden der Determinante dieser Relationen

$$\left(\frac{d_1^2}{D_1^2}\, 1\, x_3 y_4 z_5\right) = 0,$$

deren Entwickelung nach dem Früheren (Vergl. Artikel 31) die Relation

$$\Sigma \pm \frac{d_i^2}{D_i^2} V_i = 0$$

ergiebt. Für die Kugel wird sie specieller $\Sigma \pm d_i^2 V_i = 0$ und für das Zusammenfallen von P mit A_5

$$V_1 d_1^2 - V_2 d_2^2 + V_3 d_3^2 - V_4 d_4^2 = 0.$$

92. Die so eben gegebenen Sätze können mit Leichtigkeit auch aus den entsprechenden Sätzen für Kegelschnitte abgeleitet werden.

Denn wenn wir irgend drei conjugierte Durchmesser a', b', c' betrachten und den Durchmesser, in welchem die Ebene $a'b'$ die Ebene xy schneidet, mit A, so wie den ihm conjugierten im Schnitt $a'b'$ mit C bezeichnen, so ist $A^2 + C^2 = a'^2 + b'^2$, und daher $a'^2 + b'^2 + c'^2 = A^2 + C^2 + c'^2$.

Da ferner A in der Ebene xy ist, so wird für B als den zu A conjugierten Durchmesser in dem durch diese Ebene gebildeten Schnitt die zu A conjugierte Ebene nothwendig die durch B und die Achse c gehende Ebene, und C, c' sind daher conjugierte Durchmesser desselben Schnittes wie B und c. Daher hat man

$$A^2 + C^2 + c'^2 = A^2 + B^2 + c^2,$$

und da endlich $\quad A^2 + B^2 = a^2 + b^2$

ist, so ist damit der Satz bewiesen.

Ganz analoge Schlüsse beweisen das auf die Parallelepipede bezügliche Theorem des vorigen Artikels.

Wir können aber überdiess die bezeichneten Sätze auch dadurch beweisen, dass wir, wie in der Anmerkung des Artikel 78 angedeutet ist, die Relationen entwickeln, welche für die Transformation des Ausdrucks

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2}$$

in schiefwinkligen Coordinaten zu dem auf rechtwinklige Coordinaten bezüglichen neuen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

stattfinden. Man findet dieselben wie folgt:

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

$$b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = b'^2c'^2 \sin^2\lambda + c'^2a'^2 \sin^2\mu + a'^2b'^2 \sin^2\nu.$$

$$a^2b^2c^2 = a'^2b'^2c'^2 (1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu).$$

Die erste und letzte dieser Gleichungen geben die vorher erhaltenen Sätze, die zweite von ihnen drückt aus, dass die Summe der Quadrate der von drei conjugierten Durchmessern gebildeten Parallelogramme constant ist.

93. Die Summe der Quadrate der Projectionen von drei conjugierten Durchmessern auf eine beliebige gerade Linie ist constant.

Wenn wir voraussetzen, dass die bezeichnete Gerade die Winkel α, β, γ mit den Achsen bildet, so ist die Projection des im Punkte (x', y', z') endigenden Halbdurchmessers auf dieselbe

$$x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma$$

oder nach Artikel 90

$$a \cos\lambda \cos\alpha + b \cos\mu \cos\beta + c \cos\nu \cos\gamma.$$

Auf dieselbe Weise erhält man die Projectionen der beiden andern Durchmesser in der Form

$$a \cos\lambda' \cos\alpha + b \cos\mu' \cos\beta + c \cos\nu' \cos\gamma,$$
$$a \cos\lambda'' \cos\alpha + b \cos\mu'' \cos\beta + c \cos\nu'' \cos\gamma,$$

und durch Quadrieren und Addieren dieser Ausdrücke entsteht

$$a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma$$

zum Beweise des ausgesprochenen Satzes.

Die Summe der Quadrate der Projectionen von irgend drei conjugierten Durchmessern auf eine beliebige Ebene ist constant.

Sind d, d', d'' die drei betrachteten Durchmesser, $\theta, \theta', \theta''$ die von ihnen mit der Normale der bezeichneten Ebene gebildeten Winkel, so ist die Summe der Quadrate ihrer Projectionen durch

$$d^2 \sin^2\theta + d'^2 \sin^2\theta' + d''^2 \sin^2\theta''$$

ausgedrückt, und sie ist constant, weil nach dem letzten Artikel

$$d^2 \cos\theta^2 + d'^2 \cos^2\theta' + d''^2 \cos^2\theta''$$

und nach Artikel 91

$$d^2 + d'^2 + d''^2$$

constant ist.

Beispiel. Wenn man durch die Endpunkte von drei conjugierten Durchmessern eines Ellipsoids parallele Sehnen zieht und sie auf die entsprechenden Durchmesser durch Parallelen zu den conjugierten Diametralebenen projiciert, so geben die Verhältnisse dieser Projectionen zu den Durchmessern eine constante Summe.

Man soll den Ort des Durchschnittspunktes von drei

Tangentenebenen bestimmen, welche die Endpunkte von drei conjugierten Durchmessern zu ihren Berührungspunkten haben.

Die Gleichungen der drei Tangentenebenen sind

$$\frac{x \cos \lambda}{a} + \frac{y \cos \mu}{b} + \frac{z \cos \nu}{c} = 1,$$

$$\frac{x \cos \lambda'}{a} + \frac{y \cos \mu'}{b} + \frac{z \cos \nu'}{c} = 1,$$

$$\frac{x \cos \lambda''}{a} + \frac{y \cos \mu''}{b} + \frac{z \cos \nu''}{c} = 1.$$

Die Addition ihrer Quadrate giebt die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3.$$

94. Wenn die Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

durch die Ebene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

oder

$$(x - x') \cos \alpha + (y - y') \cos \beta + (z - z') \cos \gamma = 0$$

— welche durch den Punkt (x', y', z') geht — geschnitten wird, so kann der Ort der gemeinschaftlichen Punkte untersucht werden, indem man die durch den Punkt (x', y', z') gehenden Geraden

$$\frac{x - x'}{\cos \alpha'} = \frac{y - y'}{\cos \beta'} = \frac{z - z'}{\cos \gamma'} = r$$

betrachtet, als welche jener Ebene angehörte, sobald

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0$$

ist. Die Combination dieser Gleichungen mit derjenigen der Fläche liefert die Gleichung des Schnittes und es ist leicht, die Natur desselben durch die allgemeinen Werthe zu characterisieren.

Die Substitution von

$$x = x' + r \cos \alpha', \quad y = y' + r \cos \beta', \quad z = z' + r \cos \gamma'$$

in die Gleichung des Ellipsoids giebt

$$r^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta'}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma'}{c^2}\right) + \text{etc.} = 0,$$

und wenn wir für

$$\frac{\cos^2 \alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta'}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma'}{c^2} = 0$$

für das Verhältniss

$$\frac{\cos \alpha'}{\cos \beta'}$$

imaginäre, gleiche oder reelle Werthe erhalten, so ist der Schnitt elliptisch, parabolisch, hyperbolisch. Wir eliminieren mit Hilfe von

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0$$

die Grösse $\cos \gamma'$ und erhalten

$$\left(\frac{\cos^2 \gamma}{a^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{c^2}\right) \cos^2 \alpha' + \left(\frac{\cos^2 \gamma}{b^2} + \frac{\cos^2 \beta}{c^2}\right) \cos^2 \beta'$$

$$+ 2 \frac{\cos \alpha \cos \beta \cos \alpha' \cos \beta'}{c^2} = 0,$$

also die Characteristik

$$C^2 - AB$$

des Kegelschnitts in der Form

$$- \cos^2 \alpha \, (a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma).$$

Daher sind die Querschnitte der Ellipsoide stets Ellipsen, weil diese Grösse nach der positiven Natur der a^2, b^2, c^2 wesentlich negativ ist; die Querschnitte von Kegeln und Hyperboloiden können ebensowohl Ellipsen als Parabeln und Hyperbeln sein, und sie sind speciell Parabeln für

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta - c^2 \cos^2 \gamma = 0,$$

wenn c^2 derjenige Coefficient der Gleichung ist, der das Abweichende Vorzeichen besitzt.

Mit Hilfe derselben Methode beweist man nunmehr leicht den Satz, dass die Durchschnitte einer Fläche zweiten Grades mit parallelen Ebenen ähnliche Curven sind. Die Centra derselben liegen in demjenigen Durchmesser der Fläche, welcher der Lage der Schnittebene conjugiert ist. (Vergl. Artikel 69.)

95. Man kann eben diess Letztere leicht nach der vorher befolgten Methode beweisen.

Denken wir nämlich für die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

den Punkt (x', y', z') als Centrum des Schnittes mit der Ebene

$$(x - x') \cos \alpha + (y - y') \cos \beta + (z - z') \cos \gamma = 0,$$

so ist die Gerade

$$\frac{x - x'}{\cos \alpha'} = \frac{y - y'}{\cos \beta'} = \frac{z - z'}{\cos \gamma'} = r$$

der Bedingung

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0$$

unterworfen, und die Substitution der aus ihren Gleichungen erhaltenen Werthe von x, y, z in die Gleichung der Fläche muss eine Bestimmungsgleichung für r liefern, welcher gleiche Werthe von entgegengesetzten Vorzeichen entsprechen. Das dadurch bedingte Verschwinden des Coefficienten des zweiten Gliedes liefert die Bedingungsgleichung

$$\frac{x' \cos \alpha'}{a^2} + \frac{y' \cos \beta'}{b^2} + \frac{z' \cos \gamma'}{c^2} = 0;$$

aus ihr und der Relation

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0$$

erhalten wir für

$$k \cos \alpha = \frac{x'}{a^2}, \quad k \cos \beta = \frac{y'}{b^2}, \quad k \cos \gamma = \frac{z'}{c^2}$$

$$\frac{x'}{a^2 \cos \alpha} = \frac{y'}{b^2 \cos \beta} = \frac{z'}{c^2 \cos \gamma}$$

die Gleichungen der Geraden, welche den Ort der Centra bildet.

Daran schliesst sich leicht die Lösung der Aufgabe an: Man soll den Ort der Centra der ebenen Schnitte eines Ellipsoids bestimmen, welche durch einen Punkt (x', y', z') gehen. Denn die Gleichung einer durch diesen Punkt gehenden Ebene ist wie oben

$$(x - x') \cos \alpha + (y - y') \cos \beta + (z - z') \cos \gamma = 0$$

und für die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist der Durchmesser, welcher die Centra der zu ihr parallelen Schnitte enthält, durch

$$\frac{x}{a^2 \cos\alpha} = \frac{y}{b^2 \cos\beta} = \frac{z'}{c^2 \cos\gamma}$$

dargestellt, und die Elimination von

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma$$

zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung jener Ebene liefert

$$\frac{x(x-x')}{a^2} + \frac{y(y-y')}{b^2} + \frac{z(z-z')}{c^2} = 0$$

als Gleichung des Ortes; derselbe ist also eine der gegebenen ähnliche Fläche zweiten Grades, welche das Centrum und den gegebenen Punkt enthält. (Vergl. Artikel 135.)

96. Auf dieselbe Gleichung führt natürlich die Frage nach den Mittelpunkten der Sehnen einer Fläche zweiten Grades, welche durch einen gegebenen Punkt (x', y', z') gehen. Sind

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha'} = \frac{y-y'}{\cos\beta'} = \frac{z-z'}{\cos\gamma'}$$

die Gleichungen einer solchen und x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 die Coordinaten ihrer Schnittpunkte mit der Fläche, so gelten die Relationen

$$\frac{x_1-x_2}{\cos\alpha'} = \frac{y_1-y_2}{\cos\beta'} = \frac{z_1-z_2}{\cos\gamma'},$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1,$$

also

$$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2-y_2^2}{b^2} + \frac{z_1^2-z_2^2}{c^2} = 0$$

und durch Division

$$\frac{(x_1+x_2)\cos\alpha'}{a^2} + \frac{(y_1+y_2)\cos\beta'}{b^2} + \frac{(z_1+z_2)\cos\gamma'}{c^2} = 0,$$

oder nach den Relationen des Mittelpunktes einer Strecke zu ihren Endpunkten

$$\frac{x\cos\alpha'}{a^2} + \frac{y\cos\beta'}{b^2} + \frac{z\cos\gamma'}{c^2} = 0;$$

daraus entspringt aber durch Elimination von $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ mittelst der ebenso geltenden Gleichungen

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha'} = \frac{y - y'}{\cos\beta'} = \frac{z - z'}{\cos\gamma'}$$

die Ortsgleichung

$$\frac{x\,(x - x')}{a^2} + \frac{y\,(y - y')}{b^2} + \frac{z\,(z - z')}{c^2} = 0,$$

wie oben.

97. Die Länge der Achsen eines durch das Centrum gehenden ebenen Querschnitts zu finden.

Man kann leicht die quadratische Gleichung finden, deren Wurzeln die reciproken Werthe der Quadrate dieser Achsen sind, wenn die Summe und das Product dieser Grössen gegeben sind. Sind nun α, β, γ die Winkel, welche die Normale der gegebenen Ebene mit den Achsen bildet, und bezeichnet R den durch die Fläche des Ellipsoids in ihr bestimmten Abschnitt, so haben wir nach Artikel 88

$$\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

also

$$\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\cos^2\beta}{b^2} - \frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right),$$

während nach Artikel 91

$$\frac{1}{a'^2 b'^2} = \frac{p^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{\cos^2\alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2\beta}{c^2 a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2 b^2}$$

ist. Die fragliche quadratische Gleichung ist daher

$$\frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c^2}\right) + \frac{\cos^2\alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2\beta}{c^2 a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2 b^2} = 0$$

und sie kann, wie leicht erkannt wird, auch in der Form

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2 - r^2} + \frac{b^2\cos^2\beta}{b^2 - r^2} + \frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2 - r^2} = 0$$

geschrieben werden. Man erhält dieselbe auch aus den im nächsten Artikel zu entwickelnden Grundsätzen.

Beispiel. Die Relation

$$\frac{1}{a'^2 b'^2} = \frac{p^2}{a^2 b^2 c^2}$$

zeigt in Erinnerung an Artikel 85, dass der Inhalt des mit der Tangentenebene eines Punktes parallelen Centralschnittes constant ist, wenn der Berührungspunkt eine Poloide durchläuft; und zwar in jeder der drei Flächen zweiten Grades, welche dort bezeichnet sind.

Die Fläche des entsprechenden Querschnitts wird daher durch

$$\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}}$$

ausgedrückt, und der Nenner dieses Ausdrucks hat seinen Maximal- und Minimalwerth für die durch

$$\frac{x}{\cos \alpha'} = \frac{y}{\cos \beta'} = \frac{z}{\cos \gamma'}$$

gehenden Ebenen, wenn die quadratische Gleichung

$$\frac{\cos^2 \alpha'}{u^2 - a^2} + \frac{\cos^2 \beta'}{u^2 - b^2} + \frac{\cos^2 \gamma'}{u^2 - c^2} = 0$$

erfüllt ist; das Product dieser Werthe ist also

$$a^2 b^2 c^2 \left(\frac{\cos^2 \alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta'}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma'}{c^2} \right).$$

Wir haben also den Satz gefunden, dass für alle Punkte der Durchdringung eines Ellipsoids mit einer concentrischen Kugel das Product der Flächen des grössten und kleinsten der durch ihn gehenden Centralschnitte einen unveränderlichen Werth hat.

Beispiel 1. Die Ebene

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$$

schneidet das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

in einer Ellipse von der Fläche

$$\frac{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma - p^2)\, \pi abc}{\sqrt{(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma)^3}}.$$

Beispiel 2. Wenn S den Inhalt eines Querschnitts bezeichnet, den eine Ebene in der Entfernung h vom Centrum mit einem Ellipsoid bildet, so ist für p als den Abstand der parallelen Tangentenebene vom Centrum der Inhalt des parallelen Centralschnitts

$$S' = \frac{Sp^2}{p^2 - h^2}.$$

98. **Durch einen gegebenen Radius OR einer centralen Fläche zweiten Grades kann im Allgemeinen ein Schnitt gelegt werden, für welchen OR eine Achse ist.**

Wir beschreiben mit OR als Halbmesser eine Kugelfläche und denken einen Kegel, der das Centrum zum Scheitel und den Durchschnitt der gegebenen Fläche und der Kugel zur Leitcurve hat. Eine durch den Radius OR gehende Tangentenebene dieses Kegels bestimmt mit der Fläche einen Querschnitt, welcher OR zur Achse hat. Denn in demselben ist OR dem nächstfolgenden Radius gleich, da beide Halbmesser der nämlichen Kugel sind, und ist somit ein Maximum oder Minimum unter den Halbmessern des Schnittes; während die Tangente des Schnittes im Punkte R zu OR normal ist, weil sie auch der Tangentenebene der Kugel angehört. OR ist daher eine Achse der Schnittcurve.

Die Gleichung des Kegels kann gebildet werden, indem man die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

von einander subtrahiert; man erhält

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{r^2}\right) = 0$$

Wenn die Ebene

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

eine Achse von der Länge r besitzt, so muss sie diesen Kegel berühren und die Bedingung, unter welcher diess stattfindet, ist nach Artikel 86

$$\frac{a^2 \cos^2\alpha}{a^2 - r^2} + \frac{b^2 \cos^2\beta}{b^2 - r^2} + \frac{c^2 \cos^2\gamma}{c^2 - r^2} = 0,$$

d. i. die im letzten Artikel gefundene Gleichung.

Nach derselben Methode können die Achsen eines beliebigen Schnittes der durch die allgemeinere Gleichung

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy = 1$$

gegebenen Fläche bestimmt werden.

Der durch die Schnittcurven derselben mit der Kugel

$$\lambda\,(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

bestimmte Kegel ist

$$(a-\lambda)x^2+(b-\lambda)y^2+(c-\lambda)z^2+2lyz+2mzx+2nxy=0,$$

und wenn λ den reciproken Werth des Quadrats einer Achse des Schnittes repräsentiert, welchen die Ebene

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = 0$$

bestimmt, so muss diese Ebene den Kegel berühren, dessen Gleichung so eben geschrieben wurde. Nach Artikel 75 kann die Bedingung, unter welcher diese Berührung stattfindet, in der Form

$$\begin{vmatrix} a-\lambda, & n\ , & m\ , & \cos\alpha \\ n\ , & b-\lambda, & l\ , & \cos\beta \\ m\ , & l\ , & c-\lambda, & \cos\gamma \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden, welche durch Entwicklung die quadratische Gleichung

$$\begin{aligned} &\lambda^2-\lambda\Big\{(b+c)\cos^2\alpha+(c+a)\cos^2\beta+(a+b)\cos^2\gamma \\ &-2l\cos\beta\cos\gamma-2m\cos\gamma\cos\alpha-2n\cos\alpha\cos\beta\Big\} \\ &+(bc-l^2)\cos^2\alpha+(ca-m^2)\cos^2\beta+(ab-n^2)\cos^2\gamma \\ &+2(mn-al)\cos\beta\cos\gamma+2(nl-bm)\cos\gamma\cos\alpha \\ &\qquad\qquad+2(lm-cn)\cos\alpha\cos\beta=0 \end{aligned}$$

ergiebt.

99. Wir gehen zur Untersuchung der Frage weiter, ob es möglich ist, eine Ebene zu bestimmen, welche ein gegebenes Ellipsoid in einem Kreise schneidet. Nach dem früher gegebenen Beweis der Aehnlichkeit aller parallelen Schnitte (Artikel 69) genügt es, Schnitte zu betrachten, deren Ebenen durch das Centrum der Fläche gehen.

Denken wir nun einen Centralschnitt, der ein Kreis vom Halbmesser r ist, und sei mit demselben Radius eine concentrische Kugel beschrieben, so ist nach dem Vorigen

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0$$

die Gleichung eines Kegels, der das Centrum zum Scheitel hat und durch die Durchschnittscurve der Fläche mit der Kugel hindurchgeht. Haben aber beide Flächen einen ebenen Schnitt gemein, so muss diese Gleichung nothwendig zwei Ebenen repräsentieren und es muss also einer der Coefficienten von x^2, y^2 oder z^2 in der vorigen Gleichung identisch verschwinden. Der fragliche ebene Schnitt muss daher durch eine der drei Achsen hindurchgehen. Für

$$r = b$$

verschwindet z. B. der Coefficient von y und man erhält

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + z^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$

eine Gleichung, welche zwei Ebenen des kreisförmigen Schnittes repräsentiert, die durch die y Achse hindurchgehen.*)

Diese Ebenen werden leicht construiert, indem man in der Ebene der xz die beiden der Achse b gleichen Halbdurchmesser zieht; jeder derselben bestimmt mit der Achse der y eine jener Ebenen.

In derselben Weise können durch jede der andern beiden Achsen zwei Ebenen dieser Art gelegt werden, aber in dem Falle des Ellipsoids sind diese Ebenen sämmtlich imaginär; denn in der Ebene xy kann keine der Achse c gleicher Halbdurchmesser bestimmt werden, weil der kleinste Halbdurchmesser ihres Schnittes $= b$ ist; und ebenso existiert in der Ebene yz kein Halbdurchmesser a, weil der grösste der Halbdurchmesser ihres Schnittes $= b$ ist.

In dem Falle des Hyperboloids mit einer Mantelfläche ist c^2 negativ und die durch die Achse a gehenden Schnitte sind reell.

Für das Hyperboloid mit zwei Mantelflächen sind b^2 und c^2 negativ und für $r^2 = - c^2$ (vorausgesetzt, dass b^2 kleiner ist als c^2) erhalten wir die beiden reellen Schnitte

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2 \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

Diese beiden durch das Centrum gehenden reellen Ebenen schneiden die Fläche nicht, aber die zu ihnen parallelen Ebenen schneiden sie in Kreisen.

In jedem Falle erhalten wir nur zwei reelle durch das Centrum gehende Ebenen der Kreisschnitte und den Systemen der zu ihnen parallelen Ebenen entspringen zwei verschiedene Systeme von Kreisschnitten der Fläche.

---

*) Die beiden Ebenen der Kreisschnitte fallen in eine Normalebene zur Drehungsachse zusammen, wenn die Fläche speciell eine Umdrehungsfläche ist.

Beispiel 1. Die Durchschnitte der Fläche

$$xy + yz + zx = a^2$$

mit

$$x + y + z = k$$

sind Kreise.

Beispiel 2. Für das Tetraeder mit einer trirectangulären Ecke und den entsprechenden Kantenlängen a, b, c ist der aus dieser über dem umschriebenen Kreis der Gegenfläche stehende Kegel durch

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) yz + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) zx + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) xy = 0$$

dargestellt; und die äquivalente Form

$$(ax + by + cz - k) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = x^2 + y^2 + z^2 - \\ - k \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)$$

zeigt, dass die Ebenen des zweiten Systems der Kreisschnitte durch

$$ax + by + cz = k$$

bestimmt sind.

100. **Zwei Flächen, in deren Gleichungen die Coefficienten von x^2, y^2, z^2 nur um eine Constante differieren, haben die nämlichen Kreisschnitte.**

Es erhellt diess für die Gleichungen

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$(A + H)\, x^2 + (B + H)\, y^2 + (C + H)\, z^2 = 1$$

unmittelbar aus der Formel des letzten Artikels.

Man erkennt es auch aus den Polargleichungen dieser Flächen

$$\frac{1}{\varrho^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma,$$
$$\frac{1}{\varrho^2} = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + H;$$

aus denen sofort erhellt, dass die Differenz der Quadrate der reciproken Werthe entsprechender Radien vectoren beider Flächen constant ist. Wenn daher in irgend einem Querschnitt der einen Fläche der Radius vector constant ist, so muss diess auch vom Radius vector der andern gelten.

Die nämliche Betrachtung zeigt auch, dass jede Ebene mit beiden Flächen Schnitte von denselben Achsen bestimmt, weil der grösste und kleinste Werth des

Radius vector in beiden Schnitten den nämlichen Werthen von α, β, γ entspricht.

Die Ebenen der Kreisschnitte eines Kegels sind daher die nämlichen wie die der allgemeinen Fläche zweiten Grades, für welche er asymptotisch ist.

101. Je zwei Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung, welche verschiedenen Systemen angehören, liegen auf derselben Kugelfläche.

Die Gleichungen der beiden Ebenen der Schnitte sind je einer der durch

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0$$

repräsentierten Ebenen parallel. Da nun die Gleichung zweier Ebenen sich von der Gleichung zweier Parallelebenen nur in den Gliedern vom ersten Grade unterscheiden kann, so muss die Gleichung der Ebenen zweier beliebigen Kreisschnitte von der Form

$$x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)+u_1=0$$

sein, wo

$$u_1=0$$

die Gleichung einer beliebigen Ebene ist. Die Subtraction dieser Gleichung von der Gleichung der Fläche, welcher jeder Punkt des Schnittes ebenfalls genügen muss, giebt aber

$$\frac{1}{r^2}(x^2+y^2+z^2)-u_1=0,$$

die Gleichung einer Kugelfläche.

102. Wir haben gesehen, dass alle parallelen Schnitte einer Fläche zweiten Grades ähnliche Curven sind. Wenn wir eine Reihe von Ebenen legen, welche den Kreisschnitten der Fläche parallel sind, so ist die äusserste derselben die Tangentenebene von gleicher Stellung und diese muss daher die Fläche in einem unendlich kleinen Kreise durchschneiden. Man nennt ihren Berührungspunkt einen Umbilicus, Nabel- oder Kreispunkt. Einige Eigenschaften solcher Punkte werden später erwähnt werden.

Die Coordinaten der reellen Kreispunkte können hier leicht bestimmt werden. Wir haben in den ebenen Schnitt, welcher die Achsen a und c besitzt, einen der Achse b gleichen Halbdurchmesser einzutragen und die Coordinaten der Endpunkte des ihm conjugierten Durchmessers zu finden. Die für Kegelschnitte gültige Formel

$$b'^2 = a^2 - e^2 x^2$$

giebt auf diesen Fall angewendet

$$b^2 = a^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2,$$

also

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2};$$

und in analoger Weise

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Es existieren daher in dem Falle des Ellipsoids vier reelle Kreispunkte in der Ebene xz und vier imaginäre in jeder der andern Hauptebenen.

103. Es ist nützlich, an dieser Stelle anzugeben, wie man in derselben Art die Kreisschnitte des durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$$

gegebenen Paraboloids bestimmen kann.

Wir denken einen durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehenden Kreisschnitt vom Radius r und erkennen nach Artikel 99, dass er in der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$$

liegen muss. Der von ihr mit dem Paraboloid bestimmte Durchschnittskegel ist durch die Gleichung

$$x^2\left(1 - \frac{cr}{a^2}\right) + y^2\left(1 \mp \frac{cr}{b^2}\right) + z^2 = 0$$

dargestellt und diese repräsentiert zwei Ebenen, wenn eines ihrer Glieder verschwindet. Diese beiden Ebenen sind reell in dem Falle des elliptischen Paraboloids für

$$\frac{cr}{a^2} = 1,$$

weil dann die Gleichung auf

$$b^2 z^2 = (a^2 - b^2)\, y^2$$

reduciert wird. In dem Falle des hyperbolischen Paraboloids existiert hingegen kein reeller Kreisschnitt, denn die nämliche Substitution bringt die Gleichung der beiden Ebenen auf die imaginäre Form

$$b^2 z^2 + (a^2 + b^2)\, y^2 = 0.$$

Man kann aber überhaupt leicht zeigen, dass kein ebener Schnitt eines hyperbolischen Paraboloids eine geschlossene Curve sein kann; denn für seinen Durchschnitt mit der Ebene

$$z = lx + my + n$$

erhalten wir die Projection auf die Ebene der xy durch

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{2\,(lx + my + n)}{c}$$

dargestellt, und erkennen damit, dass dieselbe nothwendig eine Hyperbel ist.

Beispiel. Welches sind die zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 + 2\,lyz + 2\,mzx + 2\,nxy$$
$$+ 2\,pxw + 2\,qyw + 2\,rzw = 0$$

und der Gleichung der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

bestehenden Relationen, wenn dieselbe eine Ebene der Kreisschnitte der durch jene repräsentierten Fläche ist?

Sie sind

$$\left\{\frac{a + b - 2n}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{c + d - 2r}{(\gamma - \delta)^2} + 2\,\frac{(m + q) - (l + p)}{(\alpha - \beta)\,(\gamma - \delta)}\right\} :$$
$$\left\{\frac{b + c - 2l}{(\beta - \gamma)^2} + \frac{d + a - 2p}{(\alpha - \delta)^2} + 2\,\frac{(n + r) - (m + q)}{(\beta - \gamma)\,(\alpha - \delta)}\right\} :$$
$$\left\{\frac{c + a - 2m}{(\gamma - \alpha)^2} + \frac{d + b - 2q}{(\beta - \delta)^2} + 2\,\frac{(l + p) - (n + r)}{(\gamma - \alpha)\,(\beta - \delta)}\right\} =$$
$$\left\{\frac{AB^2}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{CD^2}{(\gamma - \delta)^2} - \frac{(AC^2 + DB^2) - (AD^2 - BC^2)}{(\alpha - \beta)\,(\gamma - \delta)}\right\} :$$
$$\left\{\frac{BC^2}{(\beta - \gamma)^2} + \frac{AD^2}{(\alpha - \delta)^2} - \frac{(AB^2 + CD^2) - (AC^2 - DB^2)}{(\beta - \gamma)\,(\alpha - \delta)}\right\} :$$
$$\left\{\frac{AC^2}{(\gamma - \alpha)^2} + \frac{DB^2}{(\beta - \delta)^2} - \frac{(AD^2 + BC^2) - (AB^2 - CD^2)}{(\gamma - \alpha)\,(\beta - \delta)}\right\};$$

wo mit AB, AC, etc. die Kantenlängen des Fundamentaltetraeders $ABCD$ bezeichnet sind.

104. Wir haben gesehen, dass für einen elliptischen Centralschnitt alle parallelen Schnitte ähnliche Ellipsen sind, und dass

der Schnitt der Tangentenebene eine unendlich kleine ähnliche Ellipse ist. In gleicher Art müssen, wenn der Centralschnitt eine Hyperbel ist, die Schnitte aller parallelen Ebenen ähnliche Hyperbeln sein und der Schnitt der Tangentenebene muss sich auf ein Paar gerade Linien reducieren, welche den Asymptoten der Centralhyperbel parallel sind. Aus der auf ein beliebiges System conjugierter Durchmesser bezogenen Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

ergiebt sich für den durch eine der xz parallele Ebene

$$y = \beta$$

bestimmten Schnitt die Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b'^2};$$

dieser Schnitt reduciert sich also für den Werth

$$\beta = b'$$

auf ein Paar von geraden Linien.

Solche gerade Linien können nur auf dem Hyperboloid mit einer Mantelfläche existieren, weil für die Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1 + \frac{z^2}{c'^2}$$

die rechte Seite für keinen reellen Werth von z verschwinden kann. Es ist auch geometrisch evident, dass eine gerade Linie nicht auf einem Ellipsoid existieren kann, weil dasselbe eine geschlossene Fläche ist, und nicht auf einem Hyperboloid mit zwei Mantelflächen, als von welchem kein Theil in dem zwischen verschiedenen Systemen von zwei parallelen Ebenen enthaltenen Raume gelegen ist, während eine gerade Linie denselben doch durchsetzen muss.

105. Wenn wir die Gleichung des Hyperboloids mit einer Mantelfläche in die Form

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

bringen, so liegt offenbar der Durchschnitt der beiden Ebenen

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

ganz in der Fläche desselben und wir erhalten daraus für verschiedene Werthe von λ ein System gerader Linien in der Fläche; wir erhalten ein zweites System solcher Geraden, indem wir den Durchschnitt der Ebenen

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

betrachten.

Oder in allgemeinerer Form: Wenn

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

vier Ebenen repräsentieren, so ist

$$\alpha\gamma = \beta\delta$$

die Gleichung eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche, welches erzeugt werden kann als der Ort der Systeme von geraden Linien, die durch die Gleichungen

$$\alpha = \lambda\beta, \quad \lambda\gamma = \delta,$$
$$\alpha = \lambda\delta, \quad \lambda\gamma = \beta$$

repräsentiert sind. Wir merken an, dass die Ebenen, welche als ihren Durchschnitt die betrachteten Geraden erzeugen, entsprechende Ebenen zweier Büschel von gleichem Doppelschnittverhältniss sind, deren jedem zwei von den vier Flächen des Fundamentaltetraeders als entsprechende Ebenen angehören. Ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche kann daher als der Ort der geraden Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen von zwei Büscheln von gleichem Doppelschnittverhältniss angesehen werden. Wenn die Scheitelkanten beider Büschel sich durchschneiden, so degeneriert das Hyperboloid in einen Kegel, der jenen Punkt zum Scheitel hat.

In dem Falle der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

können die geraden Linien der Fläche auch durch die Gleichungen

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\theta \mp \sin\theta, \quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\theta \pm \cos\theta$$

repräsentiert werden.

In Erinnerung an den Schluss des Artikels 94, als wo die Lage einer Schnittebene characterisiert ward, welche mit der Fläche eine Parabel erzeugt, fügen wir folgendes hinzu.

Offenbar muss nach dem Vorigen die Ebene eines parabolischen Schnittes einer Erzeugenden des Asymptotenkegels parallel sein. Eben diess ergiebt sich aus der dort gefundenen Bedingung. Denn sie war

$$a^2 \cos^2 \alpha = c^2 \cos^2 \gamma - b^2 \cos^2 \beta$$

und lässt sich in die beiden

$$-\frac{1}{k}\, a \cos\alpha = c \cos\gamma + b \cos\beta, \quad -k\, a \cos\alpha = c \cos\gamma - b \cos\beta$$

zerlegen. Sind aber $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ die Richtungscosinus einer Erzeugenden des Asymptotenkegels, so hat man

$$\frac{\cos^2 \alpha'}{a^2} = \frac{\cos^2 \gamma'}{c^2} - \frac{\cos^2 \beta'}{b^2}$$

und in analoger Zerlegung

$$\frac{k \cos\alpha'}{a} = \frac{\cos\gamma'}{c} + \frac{\cos\beta'}{b}, \quad \frac{1}{k}\frac{\cos\alpha'}{a} = \frac{\cos\gamma'}{c} - \frac{\cos\beta'}{b};$$

durch Multiplication der entsprechenden Zerlegungsformen somit

$$\begin{aligned}
-\cos\alpha \cos\alpha' &= \cos\gamma \cos\gamma' + \cos\beta \cos\beta' \\
&\quad + \frac{c}{b} \cos\gamma' \cos\beta + \frac{b}{c} \cos\beta' \cos\gamma, \\
-\cos\alpha \cos\alpha' &= \cos\gamma \cos\gamma' + \cos\beta \cos\beta' \\
&\quad - \frac{c}{b} \cos\gamma' \cos\beta - \frac{b}{c} \cos\beta' \cos\gamma;
\end{aligned}$$

also durch Addition

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos\beta \cos\beta' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0,$$

d. h. die Ebene des parabolischen Schnittes ist parallel der Erzeugenden, wie behauptet ist.

106. Zwei beliebige gerade Linien des Hyperboloids, welche zu entgegengesetzten Systemen gehören, liegen in derselben Ebene.

Betrachten wir die beiden Linien

$$\begin{aligned}
\alpha - \lambda\beta = 0, &\quad \lambda\gamma - \delta = 0, \\
\alpha - \lambda'\delta = 0, &\quad \lambda'\gamma - \beta = 0,
\end{aligned}$$

so sind sie beide offenbar in der Ebene

$$\alpha - \lambda\beta + \lambda\lambda'\gamma - \lambda'\delta = 0$$

enthalten, weil diese Gleichung in jeder der Formen

$$(\alpha - \lambda\beta) + \lambda'(\lambda\gamma - \delta) = 0,$$
$$(\alpha - \lambda'\delta) + \lambda(\lambda'\gamma - \beta) = 0$$

geschrieben werden kann.

Es wird in derselben Weise erkannt, dass kein Paar von geraden Linien des Hyperboloids, welche demselben System angehören, in einer Ebene liegen könne; denn keine Gleichung einer Ebene von der Form

$$(\alpha - \lambda\beta) + R(\lambda\gamma - \delta) = 0$$

kann mit der der andern Form

$$(\alpha - \lambda'\beta) + R'(\lambda'\gamma - \delta) = 0$$

für verschiedene Werthe von λ und λ' identisch werden.

Auf dem nämlichen Wege sehen wir, dass die beiden geraden Linien

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\theta - \sin\theta,\quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\theta + \cos\theta,$$

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\Phi + \sin\Phi,\quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\Phi - \cos\Phi,$$

welche zu verschiedenen Systemen gehören, in der Ebene

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\theta + \Phi) + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\theta + \Phi)$$
$$= \frac{z}{c}\cos\tfrac{1}{2}(\theta - \Phi) - \sin\tfrac{1}{2}(\theta - \Phi)$$

enthalten sind. Diese Ebene ist parallel zu der zweiten Linie des ersten Systems

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\cos\Phi - \sin\Phi,\quad \frac{y}{b} = \frac{z}{c}\sin\Phi + \cos\Phi,$$

aber sie enthält sie nicht; vielmehr ist die Gleichung einer durch diese Linien gehenden und zur vorigen parallelen Ebene

$$\frac{x}{a}\cos\tfrac{1}{2}(\theta + \Phi) + \frac{y}{b}\sin\tfrac{1}{2}(\theta + \Phi)$$
$$= \frac{z}{c}\cos\tfrac{1}{2}(\theta - \Phi) + \sin\tfrac{1}{2}(\theta - \Phi),$$

also im absoluten Gliede von jener verschieden.

Wir fügen noch folgende Entwickelung hinzu.

Die Coordinaten des Durchschnittspunktes zweier Erzeugenden verschiedener Systeme sind

$$\frac{z'}{c} = \frac{\cos \Phi + \cos \theta}{\sin \Phi + \sin \theta} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\Phi + \theta)}{\sin \frac{1}{2} (\Phi + \theta)},$$

$$\frac{y'}{b} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\Phi - \theta)}{\sin \frac{1}{2} (\Phi + \theta)},$$

$$\frac{x'}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\Phi - \theta)}{\sin \frac{1}{2} (\Phi + \theta)}.$$

Man hat daher

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\Phi - \theta) + b^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\Phi - \theta) + c^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\Phi + \theta)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\Phi + \theta)},$$

was mit der Bedingung des Parallelismus

$$\sin \tfrac{1}{2} (\Phi + \theta) = 0$$

übereinstimmt.

Die Erzeugenden sind orthogonal, wenn

$$a^2 \cos \Phi \cos \theta - b^2 \sin \Phi \sin \theta + c^2 = 0$$

ist; und diese Relation geht durch geometrische Umformung in

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\Phi + \theta) + b^2 \sin^2 \frac{1}{2} (\Phi - \theta) + c^2 \cos^2 \frac{1}{2} (\Phi + \theta)}{\sin^2 \frac{1}{2} (\Phi + \theta)}$$

über, so dass

$$a^2 + b^2 + c^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

ist: Oder der Ort der Durchschnittspunkte orthogonaler Erzeugenden ist der Schnitt der Fläche mit einer concentrischen Kugel.

Beispiel. Welches ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes der Erzeugenden des Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

die den constanten Winkel φ mit einander einschliessen?

Wenn a' die Centraldistanz eines Punktes der fraglichen Art bezeichnet, so kann die Gleichung des Hyperboloids in der Form

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

dargestellt werden, und man hat die Relationen

$$a'^2 + b'^2 - c'^2 = a^2 + b^2 - c^2,\ a'^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$abc = \pm \frac{b'c'}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{c^4}}}$$ (Vergl. für das Letztere Artikel 91)

und erhält für $x = a'$ die Erzeugenden, die sich in jenem Punkte schneiden, durch

$$y = \pm \frac{b'}{c'} z$$

dargestellt, so dass

$$\tan\varphi = \frac{2b'c'}{c'^2 - b'^2} = \frac{\pm 2abc\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}{x^2+y^2+z^2-(a^2+b^2+c^2)}$$

ihren Winkel bestimmt. Für einen gegeben Winkel erhält man daher den Durchschnitt des Hyperboloids mit einer Fläche vierten Grades als den fraglichen Ort.

Dem Werthe $\varphi = 90^0$ entspricht

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

wie oben.

Für das hyperbolische Paraboloid ist der dem allgemeinen Falle entsprechende Ort ein Hyperboloid und in dem rechten Winkel entspricht eine zur Achse normale Ebene, also eine Hyperbel; für $a = b$ ist sie die Tangentenebene im Scheitel und der Ort degeneriert in zwei Gerade.

107. Wir haben gesehen, dass jede Tangentenebene des Hyperboloids mit demselben zwei gerade Linien gemein hat, welche sich im Berührungspunkt durchschneiden, und dass sie die Fläche in keinem andern Punkte berührt. W e n n w i r d u r c h e i n e d i e s e r G e r a d e n e i n e b e l i e b i g e a n d e r e E b e n e l e g e n, s o s c h n e i d e t d i e s e d i e F l ä c h e n o t h w e n d i g i n e i n e r a n d e r n g e r a d e n L i n i e u n d b e r ü h r t s i e i n d e m P u n k t e, i n w e l c h e m d i e s e L i n i e j e n e e r s t e d u r c h s c h n e i d e t.

Umgekehrt enthält die Tangentenebene einer Fläche in jedem Punkt einer geraden Linie derselben nothwendig diese Gerade, aber sie ist für jeden andern Punkt dieser Geraden eine andere. Wir erkennen diess aus der Betrachtung der Fläche

$$x\varphi = y\psi,$$

welche die Linie xy enthält und wo

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

Ebenen repräsentieren — obgleich der Beweis ebenso gültig bleibt, wenn φ, ψ Functionen von beliebigem höheren Grade sind. Wir bestimmen mittelst der allgemeinen Gleichung der Tangentenebene

$$(x-x')\frac{dU'}{dx'}+(y-y')\frac{dU'}{dy'}+(z-z')\frac{dU'}{dz'}=0$$

diejenige der Tangentenebene des Punktes

$$x=0,\quad y=0,\quad z=z'$$

und finden als ihre Gleichung

$$x\varphi'+y\psi'=0,$$

wenn φ' und ψ' die Resultate der Substitution dieser Coordinaten in die Polynome φ und ψ bezeichnen. Offenbar variiert diese Ebene mit dem Werthe von z' und man erkennt leicht, dass die Reihe der Berührungspunkte und das Büschel der Tangentenebenen von dem nämlichen Doppelschnittverhältniss sind.

In dem Falle des Kegels gestalten sich diese Verhältnisse anders. Jede Tangentenebene schneidet die Fläche in zwei zusammenfallenden geraden Linien und in Folge dessen ist für alle Punkte derselben geraden Linie die Tangentenebene die nämliche und berührt die Fläche längs der ganzen Erstreckung dieser Linie.

Und allgemeiner, wenn die Gleichung einer Fläche von der Form

$$x\varphi+y^2\psi=0$$

ist, so ergiebt sich genau wie vorher, dass die Tangentenebene in jedem Punkte der Linie xy mit

$$x=0$$

zusammenfällt.

Die Projectionen der geraden Linien des Hyperboloids mit einer Mantelfläche auf die Hauptebenen sind Tangenten seiner entsprechenden Hauptschnitte.

108. Es ward im Artikel 104 gezeigt, dass die beiden geraden Linien, in welchen die Tangentenebene ein Hyperboloid schneidet, mit den Asymptoten des parallelen Centralschnittes von gleicher Richtung sind. Da aber diese Letzteren offenbar Kanten des asymptotischen Kegels der Fläche sind, so ist jede gerade Linie auf einem Hyperboloid zu einer der Kanten seines Asymptotenkegels parallel. Man erkennt auch daraus, dass nicht irgend drei solcher Geraden zu derselben Ebene parallel sein können, weil unter dieser Voraussetzung eine parallele Ebene durch das Centrum den asymptotischen Kegel

in drei Kanten schneiden müsste während derselbe doch nur ein Kegel zweiten Grades ist.

109. Jede gerade Linie des ersten Systems schneidet, wie wir bewiesen haben, alle geraden Linien des zweiten Systems.

Daher kann umgekehrt die Fläche als durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt angesehen werden, welche eine gewisse Anzahl fester gerader Linien stets durchschneidet*).

Wir bemerken zuerst, dass die Bewegung einer geraden Linie durch drei Bedingungen reguliert sein muss, wenn durch dieselbe eine Fläche erzeugt werden soll. Denn da die Gleichung einer geraden Linie vier Constanten enthält, so würden vier Bedingungen die Lage derselben vollständig bestimmen. Durch eine Bedingung weniger ist die Lage der Linie nicht bestimmt, aber doch so begrenzt, dass die Linie stets auf einer gewissen Ortsfläche liegen muss, deren Gleichung man wie folgt bestimmen kann. Für

$$x = mz + p, \quad y = nz + q$$

als die allgemeinen Gleichungen der geraden Linie begründen die Bedingungen der Aufgabe drei Relationen zwischen den Constanten m, n, p, q; zwischen diesen Relationen und den beiden Gleichungen der geraden Linie als fünf Gleichungen kann man die vier Grössen m, n, p, q eliminieren und die dadurch erhaltene Gleichung in x, y, z ist die Gleichung des gesuchten Ortes.

Oder wir schreiben die Gleichungen der geraden Linie in der Form

$$\frac{x - x'}{\cos \alpha} = \frac{y - y'}{\cos \beta} = \frac{z - z'}{\cos \gamma}$$

und erhalten aus den drei Bedingungen drei Relationen zwischen den Constanten $x', y', z', \alpha, \beta, \gamma$; eliminieren wir dann zwischen diesen die Grössen α, β, γ, so ist die resultierende Gleichung in x', y', z' die Gleichung des fraglichen Ortes, weil (x', y', z') einen beliebigen Punkt der geraden Linie bezeichnet.

---

*) Man nennt eine Fläche, die durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden kann, eine Regelfläche; dieselbe heisst insbesondere developpabel oder abwickelbar, wenn jede erzeugende Gerade durch die nächstfolgende geschnitten wird, und sie heisst windschief (Skew, gauche), wenn diess nicht der Fall ist. Das Hyperboloid mit einer Mantelfläche gehört zur letzteren, der Kegel zur ersteren Klasse.

Wir sehen daraus, dass die Aufgabe eine völlig bestimmte ist, welche verlangt, eine Fläche zu finden, die durch eine gerade längs dreier fester geraden Linien*) sich bewegende Gerade erzeugt wird. Denn indem wir nach Artikel 40 die Bedingungen ausdrücken, unter welchen die bewegliche jede der festen Geraden schneidet, erhalten wir die drei nothwendigen Relationen zwischen m, n, p, q. Wir erkennen auch auf geometrischem Wege, dass die Bewegung der geraden Linie durch die gegebenen Bedingungen vollständig geregelt ist. Denn eine gerade Linie ist vollständig bestimmt, wenn sie durch einen gegebenen Punkt gehen und zwei feste gerade Linien schneiden soll, weil der feste Punkt mit jeder der beiden geraden Linien eine Ebene und der Durchschnitt dieser Ebenen die fragliche Gerade bestimmt. Wenn sich nun der Punkt, durch welchen die gerade Linie gehen soll, selbst längs einer dritten festen Geraden bewegt, so erhalten wir der stetigen Reihe seiner Lagen entsprechend eine stetige Reihe von geraden Linien, deren Vereinigung die Ortsfläche bildet.

Die vier Normalen, welche von den Eckpunkten eines Tetraeders auf die gegenüberliegenden Seitenflächen gefällt werden, sind Erzeugende eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche.

Denn die Projectionen von dreien unter ihnen auf die Ebene der Ecken, von denen sie ausgehen, schneiden sich in einem Punkte, die in ihm auf dieser Ebene errichtete Normale schneidet also jene drei Höhen und ist der vierten parallel, also eine Erzeugende jenes Hyperboloids. Man hat so vier Erzeugende der zweiten Art, die denen der ersten respective parallel sind, und leitet daraus das Centrum des Hyperboloids leicht ab. Dasselbe liegt mit dem Schwerpunkt des Tetraeders und mit dem Centrum der ihm umgeschriebenen Kugel in einer Geraden.

110. Wir gehen hiernach an die Lösung der gestellten Aufgabe: Die durch eine drei feste gerade Linien stets schneidende bewegte Gerade erzeugte Fläche zu bestimmen.

Zur möglichsten Abkürzung der Arbeit untersuchen wir zuerst, welche Wahl der Coordinatenachsen am meisten geeignet ist, die Gleichungen der festen geraden Linien in der möglichst einfachsten Form zu geben. Wir erkennen sogleich, dass es am passendsten sein muss, die Achsen respective parallel den drei gegebenen

---

*) Oder auch Curven beliebiger Art.

geraden Linien zu wählen — eine Wahl, die nur in dem beim Hyperboloid mit einer Mantelfläche nach Artikel 108 nicht möglichen speciellen Falle nicht getroffen werden kann, wo die drei gegebenen Geraden einer und derselben Ebene parallel sind; wir wollen diesem Falle im nächsten Artikel eine besondere Untersuchung widmen. Dann kann nur noch die möglichst symmetrische Lage des Anfangspunktes der Coordinaten fraglich sein. Wir erhalten aber ein Parallelopiped, von welchem die gegebenen Linien Kanten sind, wenn wir durch jede der drei geraden Linien Ebenen legen, welche den jedesmaligen beiden andern parallel sind und erkennen im Centrum desselben jene möglichst symmetrische Lage des Anfangspnnktes; die durch dasselbe gehenden Parallelen zu jenen Geraden sind die Coordinatenachsen. Wenn

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = \pm c$$

die Gleichungen jener drei Paare von Ebenen sind, so werden durch

$$y = b, \ z = -c; \quad z = c, \ x = -a; \quad x = a, \ y = -b$$

die drei festen Geraden repräsentiert. Die Gleichungen einer die beiden ersten von ihnen durchschneidenden geraden Linie sind

$$z + c = \lambda\,(y - b), \quad z - c = \mu\,(x + a),$$

und dieselbe durchscheidet die dritte, wenn

$$c + \mu a + \lambda b = 0$$

ist; die Einführung der Werthe von λ und μ aus den vorgen Gleichungen giebt

$$c\,(x + a)\,(y - b) + a\,(y - b)\,(z - c) + b\,(z + c)\,(x + a) = 0$$

oder durch Reduction

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0.$$

Durch Anwendung der Kriterien des Artikel 81 erkennen wir, dass diese Gleichung ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche repräsentiert, wie auch schon daraus geschlossen werden kann, dass sie nach der Voraussetzung eine Regelfläche und nach ihrer Form eine Fläche zweiten Grades mit Centrum bezeichnet.

Die Auflösung der Aufgabe kann sodann in folgender Form gegeben werden.

Den Gleichungen der beweglichen Geraden

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}$$

entsprechen als Bedingungen des Durchschnitts mit den festen geraden Leitlinien

$$\frac{y' - b}{\cos\beta} = \frac{z' + c}{\cos\gamma},$$
$$\frac{z' - c}{\cos\gamma} = \frac{x' + a}{\cos\alpha},$$
$$\frac{x' - a}{\cos\alpha} = \frac{y' + b}{\cos\beta}.$$

Durch die Multiplication dieser Gleichungen eliminieren wir α, β, γ und erhalten die Gleichung des Ortes in der Form

$$(x - a)(y - b)(z - c) = (x + a)(y + b)(z + c)$$

oder durch Reduction

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0,$$

ganz wie vorher.

Die Frage liegt nahe, unter welchen Bedingungen vier Gerade im Raume Erzeugende desselben Hyperboloids sind; wir deuten ihre Lösung an, indem wir die Gleichungen der vier Geraden durch

$$\frac{x - x_i}{\cos\alpha_i} = \frac{y - y_i}{\cos\beta_i} = \frac{z - z_i}{\cos\gamma_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

bezeichnen. Die Aufstellung der vier Bedingungsgleichungen ihres Durchschnitts mit der Geraden

$$\frac{x - a}{\cos\alpha} = \frac{y - b}{\cos\beta} = \frac{z - c}{\cos\gamma}$$

und die Elimination der sechs dadurch eingeführten Grössen zwischen ihnen liefert die Bedingungen in Gestalt einer Determinante wie folgt. Ist

$$A_i = y_i \cos\gamma_i - z_i \cos\beta_i, \quad B_i = z_i \cos\alpha_i - x_i \cos\gamma_i,$$
$$C_i = x_i \cos\beta_i - y_i \cos\alpha_i,$$

so ist die Bedingung

$$\begin{vmatrix} A_1, & B_1, & C_1, & \cos\alpha_1, & \cos\beta_1, & \cos\gamma_1 \\ A_2, & B_2, & C_2, & \cos\alpha_2, & \cos\beta_2, & \cos\gamma_2 \\ A_3, & B_3, & C_3, & \cos\alpha_3, & \cos\beta_3, & \cos\gamma_3 \\ A_4, & B_4, & C_4, & \cos\alpha_4, & \cos\beta_4, & \cos\gamma_4 \end{vmatrix} = 0,$$

und sie reduciert sich auf die drei einfachen Determinantenrelationen

$$(A_1,\ \cos\alpha_2,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_4) = 0,$$
$$(B_1,\ \cos\alpha_2,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_4) = 0,$$
$$(C_1,\ \cos\alpha_2,\ \cos\beta_3,\ \cos\gamma_4) = 0.$$

Eine allgemeinere Lösung des Problems ist endlich diese: Man denke die beiden ersten geraden Linien als Durchschnitte der Ebenenpaare

$$\alpha = 0,\ \beta = 0;\quad \gamma = 0,\ \delta = 0;$$

so können die Gleichungen der dritten in der Form

$$\alpha = A\gamma + B\delta,\quad \beta = C\gamma + D\delta$$

dargestellt werden und die bewegliche Gerade hat als gemeinschaftliche Transversale für die ersten beiden Linien die Gleichungen

$$\alpha = \lambda\beta,\quad \gamma = \mu\delta.$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung der dritten liefert die Bedingung, unter welcher sie auch von dieser geschnitten wird, in der Form

$$A\mu + B = \lambda\,(C\mu + D),$$

und die Elimination von λ und μ zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen der beweglichen Geraden giebt die Gleichung der Ortsfläche

$$\beta\,(A\gamma + B\delta) = \alpha\,(C\gamma + D\delta).$$

Die oben aufgeworfene Frage nach der hyperboloidischen Lage von vier Geraden lässt sich im Anschluss an das System der tetraedrischen Coordinaten leicht in einfacherer Form beantworten, wenn man jene als durch die Ecken des Fundamentaltetraeders gehend voraussetzt. Mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen können dann die Gleichungen der vier Geraden geschrieben werden

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \dfrac{\beta}{a_{12}} & = & \dfrac{\gamma}{a_{13}} & = & \dfrac{\delta}{a_{14}}, \\[2ex]
\dfrac{\alpha}{a_{21}} & & & = & \dfrac{\gamma}{a_{23}} & = & \dfrac{\delta}{a_{24}}, \\[2ex]
\dfrac{\alpha}{a_{31}} & = & \dfrac{\beta}{a_{32}} & & & = & \dfrac{\delta}{a_{34}}, \\[2ex]
\dfrac{\alpha}{a_{41}} & = & \dfrac{\beta}{a_{42}} & = & \dfrac{\gamma}{a_{43}} & & ;
\end{array}$$

wenn die drei durch die Ecke

$$\beta = \gamma = \delta = 0$$

des Fundamentaltetraeders nach den drei letzten Geraden gehenden Ebenen

$$\frac{\gamma}{a_{23}} = \frac{\delta}{a_{24}}, \quad \frac{\delta}{a_{34}} = \frac{\beta}{a_{32}}, \quad \frac{\beta}{a_{42}} = \frac{\gamma}{a_{43}}$$

durch eine und dieselbe Gerade gehen, so ist die Bedingung erfüllt und diese Gerade eine Erzeugende des zweiten Systems; diess findet aber statt für

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{34} = a_{43}, \quad a_{42} = a_{24}$$

und die fragliche Erzeugende des zweiten Systems ist durch

$$a_{34}\beta = a_{24}\gamma = a_{23}\delta$$

gegeben. Die Betrachtung der andern Eckpunkte des Fundamentaltetraeders giebt analoge Bedingungen; die vier ursprünglichen Geraden haben also Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{a_{12}} &= \frac{\gamma}{a_{13}} = \frac{\delta}{a_{14}}, \\
\frac{\gamma}{a_{23}} &= \frac{\delta}{a_{24}} = \frac{\alpha}{a_{12}}, \\
\frac{\delta}{a_{34}} &= \frac{\alpha}{a_{13}} = \frac{\beta}{a_{23}}, \\
\frac{\alpha}{a_{14}} &= \frac{\beta}{a_{24}} = \frac{\gamma}{a_{34}};
\end{aligned}$$

und die durch dieselben Ecken des Tetraeders gehenden Erzeugenden des zweiten Systems sind dann durch

$$\begin{aligned}
a_{34}\beta &= a_{24}\gamma = a_{23}\delta, \\
a_{14}\gamma &= a_{13}\delta = a_{34}\alpha, \\
a_{12}\delta &= a_{24}\alpha = a_{14}\beta, \\
a_{23}\alpha &= a_{13}\beta = a_{12}\gamma
\end{aligned}$$

dargestellt. Man beweist von diesen Gleichungen aus sehr einfach diese Sätze: Wenn die Eckpunkte zweier Tetraeder auf vier hyperboloidischen Geraden liegen, so sind auch die Durchschnittslinien entsprechender Tetraederflächen hyperboloidisch*). Wenn die Durchschnittslinien entsprechender Flächen zweier Tetraeder vier hyperboloidische Gerade sind, so liegen auch die entsprechenden Ecken derselben auf vier hyperboloidischen Geraden**).

---

*) Vergl. Cayley, „Quarterly Journal“ Vol. I, p. 10.

**) Vergl. Hermes „Ueber homologe Tetraeder“ im „Journal für die r. u. a. Math.“ Bd. 56, p. 221.

Für die Gleichheiten

$$a_{12}a_{34} = a_{13}a_{24} = a_{14}a_{23}$$

fallen die Erzeugenden des ersten und zweiten Systems zusammen und das Hyperboloid reduciert sich auf einen Kegel.

Die Höhen des Tetraeders können durch die Gleichungen

$$\frac{\beta}{\cos(\beta,\alpha)} = \frac{\gamma}{\cos(\gamma,\alpha)} = \frac{\delta}{\cos(\delta,\alpha)},$$
$$\frac{\gamma}{\cos(\gamma,\beta)} = \frac{\delta}{\cos(\delta,\beta)} = \frac{\alpha}{\cos(\alpha,\beta)},$$
$$\frac{\delta}{\cos(\delta,\gamma)} = \frac{\alpha}{\cos(\alpha,\gamma)} = \frac{\beta}{\cos(\beta,\gamma)},$$
$$\frac{\alpha}{\cos(\alpha,\delta)} = \frac{\beta}{\cos(\beta,\delta)} = \frac{\gamma}{\cos(\gamma,\delta)}$$

respective dargestellt werden, wenn man durch (α, β) etc. die Winkel der Tetraederflächen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, etc. bezeichnet (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelsch." Artikel 56, Aufg. 3); sie sind also hyperboloidische Gerade. (Artikel 109.) Aber das Vorige zeigt, dass die Geraden

$$\beta\cos(\gamma,\delta) = \gamma\cos(\beta,\delta) = \delta\cos(\beta,\gamma),$$
$$\gamma\cos(\delta,\alpha) = \delta\cos(\gamma,\alpha) = \alpha\cos(\gamma,\delta),$$
$$\delta\cos(\alpha,\beta) = \alpha\cos(\delta,\beta) = \beta\cos(\delta,\alpha),$$
$$\alpha\cos(\beta,\gamma) = \beta\cos(\alpha,\gamma) = \gamma\cos(\alpha,\beta)$$

die vier Erzeugenden der zweiten Art sind, welche von den Ecken des Tetraeders ausgehen; und die Form der Gleichungen zeigt, dass sie die Durchschnittslinien der drei Ebenen sind, welche in jeder der dreiseitigen Ecken des Tetraeders durch eine Kante normal zur gegenüberliegenden Seitenfläche gehen. Man hat damit acht Erzeugende desselben Hyperboloids.

Dem Falle des Kegels entspricht die Relation

$$\cos(\alpha,\beta)\cos(\gamma,\delta) = \cos(\alpha,\gamma)\cos(\beta,\delta)$$
$$= \cos(\alpha,\delta)\cos(\beta,\gamma).$$

Ebenso sind die acht Geraden

$$\beta\sin(\gamma,\delta) = \gamma\sin(\beta,\delta) = \delta\sin(\beta,\gamma),$$
$$\gamma\sin(\delta,\alpha) = \delta\sin(\gamma,\alpha) = \alpha\sin(\gamma,\delta),$$

etc.,

$$\frac{\beta}{\sin(\beta,\alpha)} = \frac{\gamma}{\sin(\gamma,\alpha)} = \frac{\delta}{\sin(\delta,\alpha)},$$

$$\frac{\gamma}{\sin(\gamma, \beta)} = \frac{\delta}{\sin(\delta, \beta)} = \frac{\alpha}{\sin(\alpha, \beta)},$$

etc., welche für

$$\sin(\alpha, \beta) \sin(\gamma, \delta) = \sin(\alpha, \gamma) \sin(\beta, \delta)$$
$$= \sin(\alpha, \delta) \sin(\beta, \gamma)$$

paarweise zusammenfallen, Erzeugende desselben Hyperboloids; man erkennt in den ersten die Geraden, von denen jede die Durchschnittslinie der drei Ebenen einer dreiseitigen Ecke ist, welche eine Kante mit der Halbierungslinie des gegenüberliegenden Kantenwinkels verbinden, in den zweiten aber die vier Geraden von denen jede eine Ecke des Tetraeders mit dem Centrum des eingeschriebenen Kreises der Gegenfläche verbindet.

111. Aus der im Artikel 105 auseinander gesetzten allgemeinen Theorie erhellt, dass das hyperboloidische Paraboloid auch gerade Linien enthält, die ganz in der Fläche liegen. Denn die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \text{ (Artikel 83)}$$

ist in der allgemeinen Form

$$\alpha\gamma = \beta\delta$$

enthalten und die Fläche enthält daher die beiden Systeme von geraden Linien

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \lambda, \quad \lambda \left(\frac{x}{a} \mp \frac{y}{b}\right) = \frac{z}{c}.$$

Diese beiden Gleichungen zeigen, dass jede der geraden Linien in der Fläche parallel zu der einen oder der andern der beiden festen Ebenen

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$$

sein muss, und diess bezeichnet eine wesentliche Verschiedenheit zwischen den geraden Linien des Paraboloids und des Hyperboloids. (Vergl. Artikel 108.) Im Uebrigen wird, wie im Artikel 106 bewiesen, dass jede gerade Linie des einen Systems jede des andern durchschneidet, während zwei gerade Linien des nämlichen Systems sich nicht durchschneiden.

Wir wenden uns hiernach zur Auflösung des umgekehrten Problems, d. h. zur Bestimmung derjenigen Fläche, welche durch eine längs dreier festen zur nämlichen

Ebene parallelen Geraden fortbewegte gerade Linie erzeugt wird. Wir denken die Ebene xy als parallel den drei festen Geraden und die Achsen x und y insbesondere als parallel den beiden ersten unter ihnen, so dass ihre Gleichungen sind

$$x = 0,\ z = a;\quad y = 0,\ z = b;\quad x = my,\ z = c.$$

Dann sind die Gleichungen einer die beiden ersten schneidenden geraden Linien

$$x = \lambda\,(z - a),\quad y = \mu\,(z - b),$$

und dieselbe durschneidet zugleich die dritte, wenn

$$\lambda\,(c - a) = m\mu\,(c - b)$$

ist. Daraus entspringt als die Gleichung des Ortes

$$(a - c)\,x\,(z - b) = (b - c)\,y\,(z - a),$$

welche ein hyperbolisches Paraboloid repräsentiert, weil das von den Gliedern zweiten Grades gebildete Polynom in zwei reelle Factoren zerlegbar erscheint.

In derselben Art können wir die Fläche untersuchen, welche durch eine gerade Linie erzeugt wird, die bei ihrer Bewegung längs zweier fester Geraden einer festen Ebene stets parallel bleibt. Sind jene Linien durch

$$x = 0,\ z = a;\quad y = 0,\ z = -a$$

und ist die feste Ebene durch

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

dargestellt, so sind die Gleichungen einer gemeinschaftlichen Transversale jener beiden

$$x = \lambda\,(z - a),\quad y = \mu\,(z + a)$$

und die Bedingung ihres Parallelismus mit der festen Ebene ist

$$\cos\gamma + \lambda \cos\alpha + \mu \cos\beta = 0,$$

so dass die Gleichung des fraglichen Ortes in der Form

$$\cos\gamma\,(z^2 - a^2) + x \cos\alpha\,(z + a) + y \cos\beta\,(z - a) = 0$$

erhalten wird, welche ein hyperbolisches Paraboloid darstellt, weil das Polynom der Glieder vom zweiten Grade in zwei reelle Factoren zerfällt.

Ein hyperbolisches Paraboloid ist die Grenze eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche, für welches die erzeugende Gerade in einer ihrer Lagen ganz in unendlicher Entfernung liegt, wie sich diess auch schon aus dem Parallelismus derselben zu einer festen Ebene ergiebt, als deren unendlich entfernte Gerade jene Lage betrachtet werden kann.

Wir sahen im Artikel 104, dass eine Ebene eine Fläche zweiten Grades berührt, wenn sie sie in zwei reellen oder imaginären geraden Linien schneidet und im Artikel 83, dass ein Paraboloid durch die unendlich entfernte Ebene in zwei reellen oder imaginären geraden Linien geschnitten wird; wir schliessen daraus, dass jedes Paraboloid durch die unendlich entfernte Ebene berührt wird.

Beispiel. Eine gerade Linie, welche sich über zwei feste Gerade so bewegt, dass sie mit ihnen stets gleiche Winkel bildet, erzeugt ein hyperbolisches Paraboloid; denn sie bleibt der Halbierungsebene des Winkels beider Geraden parallel.

112. Vier gerade Linien des einen Systems bestimmen in allen geraden Erzeugenden des andern Systems Punktreihen von gleichem Doppelschnittverhältniss.

Denn durch jene vier Geraden und eine sie alle durchschneidende fünfte werden vier Ebenen bestimmt, welche ein Büschel bilden; daher wird jede andere jene vier durchschneidende Gerade in constantem Doppelschnittverhältniss getheilt. (Artikel 33.)

Wenn umgekehrt zwei einander nicht durchschneidende gerade Linien in Reihen von Punkten homographisch, d. i. nach gleichem Doppelschnittverhältniss (projectivisch) getheilt werden, so sind die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Reihen Erzeugende eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche.

Wir stellen die beiden gegebenen Geraden durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0; \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

dar und denken sie durch die feste Gerade

$$\alpha = \lambda' \beta, \quad \gamma = \mu' \delta$$

geschnitten; dann muss, damit eine beliebige andere Linie

$$\alpha = \lambda \beta, \quad \gamma = \mu \delta$$

homographische Theilungen in ihnen bestimme, die Relation

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\mu}{\mu'}$$

erfüllt sein. Aus der Elimination von λ zwischen den Gleichungen

$$\alpha = \lambda\beta, \quad \lambda'\gamma = \mu'\lambda\delta$$

folgt aber die Gleichung

$$\lambda'\beta\gamma = \mu'\alpha\delta$$

als Gleichung des Ortes.

Diese Gleichung oder nach der Division mit μ'

$$\alpha\delta = \varkappa\beta\gamma$$

enthält in der Bestimmung der vier Ebenen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

vier willkürliche Constanten, als Ausdruck der Unbestimmtheit der Beziehung dieser vier Ebenen zur Fläche. Sie ist in dem Satze ausgesprochen: Durch zwei Paare gegenüberliegender Kanten eines Tetraeders gehen unendlich viele Flächen zweiter Ordnung; in Bezug auf alle diese Flächen ist jede der beiden Kanten des dritten Paares die Polarlinie der andern. Von hier aus ist der Begriff eines Tetraeders leicht zu gewinnen, welches einer Fläche zweiten Grades zugleich eingeschrieben und umgeschrieben ist. Man kann dieselben drei Kantenpaare auch als Seiten und Diagonalen eines windschiefen Vierseits ansehen.

Beispiel. Die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte der Diagonalen dieses windschiefen Vierecks ist der Ort der Centra aller dieser Hyperboloide.

Wenn wir an Artikel 32 f. erinnern, so erhalten wir zugleich die folgende Interpretation derselben Gleichung: Der geometrische Ort solcher Punkte, für welche das Product der Entfernungen von zwei festen Ebenen zu dem Product ihrer Entfernungen von zwei andern festen Ebenen in constantem Verhältniss steht, ist eine Fläche zweiten Grades, welche die Durchschnittslinie der beiden ersten mit den beiden letzten Ebenen ganz enthält. Ein Punkt der Fläche, welcher in keiner von jenen Ebenen liegt, reicht zu ihrer Bestimmung weil zu der von $\varkappa$ hin. In der That ergänzt er die vier Ecken und die vier überdiess in den Seiten gegebenen Punkte des windschiefen Vierecks zu der Zahl von neun Punkten.

Man kann die Tangentenebene der Fläche in diesem Punkte leicht erhalten; er bestimmt mit jedem der beiden Gegenseiten-paare des Vierecks ein Ebenenpaar, dessen Durchschnittslinie eine Erzeugende der Fläche ist; die Ebene dieser beiden Erzeugenden ist die gesuchte Tangentenebene. Aus der gegebenen Tangentenebene bestimmt sich ebenso leicht ihr Berührungspunkt in der Fläche.

Wenn wir in der allgemeinen Gleichung

$$\alpha\delta = \varkappa\beta\gamma$$

specielle Bestimmungen einführen, so ergeben diese fernere Resultate. So entspricht der Form

$$\alpha\delta = \varkappa\,(\beta + l)\,(\beta - l),$$

in der nur noch zwei unbestimmte Constanten bleiben, und in der an die Stelle der willkürlichen Ebenen

$$\beta = 0, \quad \gamma = 0$$

die parallelen Ebenen

$$\beta + l = 0, \quad \beta - l = 0$$

getreten sind, das Folgende: Die Linie

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0,$$

die eine Diagonale des windschiefen Vierseits, ist ein Durchmesser der Fläche, weil die andere

$$\beta + l = 0, \quad \beta - l = 0$$

unendlich entfernt ist. Die Durchschnitte der Seitenpaare

$$\alpha = 0, \ \beta + l = 0; \quad \delta = 0, \ \beta + l = 0$$
$$\alpha = 0, \ \beta - l = 0; \quad \delta = 0, \ \beta - l = 0$$

sind die Berührungspunkte der parallelen Tangentenebenen in den Enden jenes Durchmessers. Die Ebenen

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0$$

berühren die Fläche in unendlicher Entfernung.

Wir wollen endlich nur noch eine Folgerung der allgemeinen Gleichung

$$\alpha\delta = \beta\gamma$$

— wir denken die Constante implicite — hier anschliessen. Die geraden Linien

$$\alpha = 0, \ \gamma = 0; \quad (1)$$
$$\alpha = 0, \ \beta = 0; \quad (2)$$
$$\alpha = \beta, \ \delta = \gamma; \quad (3)$$

$$\delta = 0, \; \gamma = 0; \; (4)$$
$$\delta = 0, \; \beta = 0; \; (5)$$
$$\delta = \beta, \; \alpha = \gamma; \; (6)$$

liegen sämmtlich auf der Fläche und bestimmen jede mit der nächstfolgenden sechs Ebenen, die wir zu Paaren geordnet darstellen, wie folgt:

$$\alpha = 0; \; (12) \quad \alpha = \beta; \; (23) \quad \delta = \gamma; \; (34)$$
$$\delta = 0; \; (45) \quad \delta = \beta; \; (56) \quad \alpha = \gamma. \; (61)$$

Aus der Bemerkung, dass durch Subtraction der übereinanderstehenden Gleichungen dieser Gruppe gleichmässig

$$\alpha = \delta$$

erhalten wird, schliessen wir den Satz: Die drei Paare von Ebenen, welche durch je ein Paar benachbarter Seiten eines auf einer Fläche zweiten Grades gelegenen Sechsseits und die ihnen gegenüberliegenden bestimmt sind, schneiden sich in drei geraden Linien in derselben Ebene.

113. Dem Falle, wo die Ebene

$$\gamma = 0$$

unendlich entfernt ist, somit ihr analytischer Ausdruck auf eine Constante und die Gleichung der Fläche auf die Form

$$\alpha\delta = \varkappa\beta$$

reduciert wird, entspricht das hyperbolische Paraboloid. Die Ebene γ ist mit den beiden Geraden

$$\alpha = 0, \; \gamma = 0; \quad \delta = 0, \; \gamma = 0$$

in unendlicher Entfernung und das Viereck auf die beiden Geraden

$$\alpha = 0, \; \beta = 0; \quad \delta = 0, \; \beta = 0$$

reduciert. Die so gegebene Gleichung enthält zwei überschüssige Constante, die beiden Ebenen

$$\alpha = 0, \; \delta = 0$$

stehen also in einer Beziehung zur Fläche, welche sie mit einem beliebigen Paare ihrer parallelen Ebenen gemein haben; die Richtung ihrer Durchschnittslinie aber ist die der Durchmesser des hyperbolischen Paraboloids. Nehmen wir eine Tangentenebene der Fläche

$$\beta = 0$$

willkürlich an, so sind durch ihre Durchschnittslinien mit derselben und einem beliebigen unter ihren Durchmessern zwei Ebenen

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0$$

bestimmt. Soll die gewählte Tangentenebene auf der Durchmesserrichtung normal stehen, so ist die Darstellung der Fläche durch die betrachtete Gleichungsform vollkommen bestimmt, denn jene Constanten sind es.

In dem Falle des hyperbolischen Paraboloids schneiden alle geraden Linien des einen Systems die des andern in einem constanten Verhältniss.

Denn da die Erzeugenden alle derselben Ebene parallel sind, so können wir durch irgend drei von ihnen Parallelen zu dieser Ebene legen und der Satz, den wir aussprechen, ergiebt sich aus der elementaren Wahrheit, dass alle geraden Linien, welche drei parallele Ebenen schneiden, von ihnen in constantem Verhältniss getheilt werden.

Man schliesst ihn auch aus der Existenz einer ganz in unendlicher Entfernung liegenden Erzeugenden in jedem der beiden Systeme; denn aus ihr ergiebt sich, dass in den homographischen Theilungen, welche die Linien des einen Systems auf denen des andern bestimmen, die unendlich entfernten Punkte einander entsprechen; nach der Natur des Doppelschnittverhältnisses reduciert sich dasselbe dadurch auf ein einfaches Verhältniss.

Wenn umgekehrt zwei begrenzte einander nicht schneidende gerade Linien in gleiche Anzahlen gleicher Theile getheilt werden, so sind die geraden Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Theilungen die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids. Man kann hiernach, wie auch in dem Falle des Hyperboloids mit einer Mantelfläche, die Form der Fläche leicht durch gespannte Fäden dem Auge anschaulich machen.

Um diess hinsichtlich des hyperbolischen Paraboloids direct zu beweisen, denken wir die gerade Linie, welche zwei entsprechende Endpunkte der Geraden verbindet, als Achse der x und die Achsen der y und der z als eben diesen Geraden parallel, zugleich so, dass die Ebene xy die Entfernung zwischen ihnen halbiert. Sind dann die Längen der gegebenen Linien a und b, so sind die Coordinaten zweier entsprechender Punkte

$$z = c, \quad x = \mu a, \quad y = 0;$$
$$z = -c, \quad x = 0, \quad y = \mu b,$$

und die Gleichungen der sie verbindenden Geraden

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \mu, \quad 2cx - \mu az = \mu ac,$$

so dass durch Elimination von μ zwischen ihnen die Gleichung der Ortsfläche in der Form

$$2cx = a(z + c)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

hervorgeht, die in der That ein hyperbolisches Paraboloid repräsentiert.

Man kann dieser proportionalen Theilung zweier Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloids und der entsprechenden homographischen des Hyperboloids eine interessante Ausdrucksform geben, wenn man an die einfachen graphischen Operationen erinnert, durch welche solche Theilungen erzeugt werden.

Wenn wir ein ebenes Strahlenbüschel durch zwei gerade Linien schneiden und diese dann im Raume in eine beliebige Lage bringen, so sind die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte der beiden auf ihnen bestimmten homographischen Theilungen die Erzeugenden eines Hyperboloids der einen Art, für welches die beiden Geraden selbst zu den Erzeugenden der andern Art gehören. Die Punkte, — je einer in jeder der beider Geraden — welche den unendlich entfernten Punkten der jedesmaligen andern Geraden entsprechen, bilden die Endpunkte eines Durchmessers der Fläche.

War das Strahlenbüschel speciell ein Büschel von Parallelen, oder waren, wenn diess nicht stattfand, die beiden gegebenen Geraden einander parallel, so entsteht ein hyperbolisches Paraboloid.

Verändert man die Lage der beiden Geraden nur innerhalb ihrer Ebene, so entsteht bekanntlich durch die Verbindung der entsprechenden Punkte ein Kegelschnitt.

Die analoge Verwandlung für zwei beliebige Erzeugende derselben Art eines Hyperboloids bringt stets eine Fläche derselben Art hervor.

114. Man soll die Bedingungen finden, unter denen die allgemeine Gleichung eine Umdrehungsfläche darstellt.

In diesem Falle kann nach Artikel 80, 81 die Gleichung der Fläche, sofern sie zu den Centralflächen gehört, auf die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

und wenn diess nicht ist, auf die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{2z}{c}$$

gebracht werden; wenn also das Polynom der höchstpotenzierten Glieder auf die Summe der Quadrate von drei rectangulären Coordinaten reduciert wird, so sind die Coefficienten von zweien derselben einander gleich. Es erhellt daraus, dass die geforderte Bedingung erhalten wird, indem man die Bedingung bildet, unter welcher die cubische Gleichung der Discriminante gleiche Wurzeln hat.

Da aber die Wurzeln der cubischen Gleichung der Discriminante immer positiv sind, so kann ihre Discriminante immer als eine Summe von Quadraten ausgedrückt werden und wird, so lange die Coefficienten der gegebenen Gleichung wesentlich reell sind, nur verschwinden, wenn zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, die man durch das folgende Verfahren leichter bestimmt.

Es handelt sich um die Frage nach der Möglichkeit einer Transformation, durch welche die Identität

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy$$
$$= A(X^2 + Y^2) + CZ^2$$

erfüllt wird. Wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \text{ (Artikel 78)}$$

wird dann, für

$$\lambda = A,$$

die Grösse

$$(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy)$$
$$- \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

ein vollkommenes Quadrat und man hat die Bedingungen aufzustellen, unter denen diess stattfindet.

Nun erkennt man leicht, dass für den Fall, wo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Lyz + 2Mzx + 2Nxy$$

ein vollkommenes Quadrat ist, die sechs Bedingungen

$$AB = N^2, \quad BC = L^2, \quad CA = M^2,$$
$$AL = MN, \quad BM = NL, \quad CN = LM$$

erfüllt sind, sodass die reciproke Gleichung identisch verschwindet.

Die letzten drei Gleichungen geben im gegenwärtigen Falle

$$(a - \lambda)\, l = mn, \; (b - \lambda)\, m = nl, \; (c - \lambda)\, n = lm,$$

und indem man aus jeder von diesen Gleichungen λ bestimmt, erkennt man, dass die Reduction nur dann möglich ist, wenn die Coefficienten der gegebenen Gleichung durch die Relationen

$$a - \frac{mn}{l} = b - \frac{nl}{m} = c - \frac{lm}{n}$$

verbunden sind.

Wenn sie erfüllt sind und wenn wir einen dieser gemeinschaftlichen Werthe für λ in die Form

$$(a - \lambda)\, x^2 + (b - \lambda)\, y^2 + (c - \lambda)\, z^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy$$

substituieren, so wird sie in ein vollkommenes Quadrat, nämlich in

$$lmn \left(\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n}\right)^2 = (C - A)\, Z^2$$

verwandelt; und da die Ebene

$$Z = 0$$

eine Normalebene zur Umdrehungsachse der Fläche repräsentiert, so ist auch

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 0$$

die Gleichung einer zu dieser Achse normalen Ebene.

In dem speciellen Falle, in welchem der so eben bestimmte gemeinschaftliche Werth von λ verschwindet, bildet die Vereinigung der höchsten Glieder in der gegebenen Gleichung ein vollständiges Quadrat und die Gleichung repräsentirt also entweder einen parabolischen Cylinder oder die Verbindung von zwei parallelen Ebenen. (Artikel 83, IV und V.) Diese Flächen sind Grenzfälle der Umdrehungsflächen; jede Normale zu beiden Ebenen ist die Umdrehungsachse in jenem Falle und der parabolische Cylinder ist die Grenze einer durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse erzeugten Fläche für das Anwachsen der grossen Achse zu unendlicher Grösse.

115. Wenn unter den drei Grössen l, m, n eine den Werth Null hat, so muss noch eine zweite von ihnen verschwinden, wenn die Fläche eine Umdrehungsfläche sein soll. Für

$$l = m = 0$$

werden aber die vorigen Bedingungen

$$a - n\,\frac{m}{l} = b - n\,\frac{l}{m} = c,$$

und man erhält durch Elimination von $\frac{l}{m}$ zwischen ihnen die Gleichung

$$(a - c)\,(b - c) = n^2.$$

Man hätte diese Bedingung auch direct erhalten, indem man die Form

$$(a - \lambda)\,x^2 + (b - \lambda)\,y^2 + (c - \lambda)\,z^2 + 2nxy$$

als ein vollkommenes Quadrat characterisiert; denn diess giebt offenbar

$$\lambda = c, \quad (a - c)\,(b - c) = n^2.$$

Beispiel. Wann wird der den Richtungscosinus l, m, n entsprechende Tangentencylinder des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dessen Gleichung ist

$$\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) = \left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2}\right)^2,$$

ein Rotationscylinder?

116. Die vorhergehende Theorie kann auch aus der Bemerkung abgeleitet werden, dass für eine Umdrehungsfläche das Problem der Bestimmung der Hauptebenen eine unbestimmte Aufgabe wird.

Denn da jeder zur Umdrehungsachse normale Schnitt ein Kreis ist, so wird jedes System paralleler Sehnen desselben durch diejenige die Umdrehungsachse enthaltende Ebene halbiert, welche den zu diesen Sehnen normalen Durchmesser enthält und daher zu ihnen selbst normal ist. Daher ist jede durch die Umdrehungsachse gehende Ebene eine Hauptebene.

Nun sind die zu diesen Diametralebenen normalen Sehnen nach Artikel 68 durch die Gleichungen

$$(a - R)\, x + ny + mz = 0,$$
$$nx + (b - R)\, y + lz = 0,$$
$$mx + ly + (c - R)\, z = 0$$

gegeben, welche für R als eine der Wurzeln der cubischen Gleichung der Discriminante drei in einer der fraglichen geraden Linien sich schneidende Ebenen repräsentieren. Das Problem wird nur dann unbestimmt, wenn sie alle die nämliche Ebene darstellen, d. h. wenn die Bedingungen

$$\frac{a - R}{n} = \frac{n}{b - R} = \frac{m}{l}, \quad \frac{a - R}{m} = \frac{n}{l} = \frac{m}{c - R}$$

erfüllt sind, welche entwickelt zu den vorigen Relationen zurückführen.

117. Wir schliessen diess Kapitel mit einer Reihe von **Beispielen über die Anwendung der analytischen Geometrie zur Untersuchung geometrischer Oerter.**

Beispiel 1. **Welches ist der Ort eines Punktes, dessen kürzeste Abstände von zwei gegebenen einander nicht durchschneidenden Geraden gleich gross sind?**

Die Auflösung dieses Problems ist in den Formeln des Artikel 13 enthalten, wenn die Gleichungen der gegebenen Geraden in ihrer allgemeinen Form vorausgesetzt werden. Wir können aber das Resultat in einer einfachen Form darstellen, indem wir den kürzesten Abstand beider Geraden zur Achse der z wählen und die beiden andern Achsen durch den Mittelpunkt desselben so legen, dass sie die von den Projectionen der Geraden auf ihre Ebene gebildeten Winkel halbieren. Dann sind ihre Gleichungen von der Form

$$z = c, \; y = mx; \quad z = -c, \; y = -mx,$$

die Bedingungen des Problems geben daher

$$(z - c)^2 + \frac{(y - mx)^2}{1 + m^2} = (z + c)^2 + \frac{(y + mx)^2}{1 + m^2}$$

oder

$$cz\,(1 + m^2) + mxy = 0;$$

der Ort ist daher ein hyperbolisches Paraboloid.

Wenn die kürzesten Abstände zu einander in einem constanten Verhältniss sein sollen, so findet man

$$\{(1+\lambda)z+(1-\lambda)c\}\ \{(1-\lambda)z+(1+\lambda)c\}$$
$$+\frac{1}{1+m^2}\{(1+\lambda)y+(1-\lambda)mx\}\ \{(1-\lambda)y+(1+\lambda)mx\}=0$$

als die Gleichung des Ortes und derselbe ist somit ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche.

Beispiel 2. Der Ort eines Punktes, dessen Entfernung von einem festen Punkte zu derjenigen von einer festen Geraden in constantem Verhältniss steht, ist eine Umdrehungsfläche zweiten Grades.

Beispiel 3. Man soll den Ort der Mittelpunkte aller einer festen Ebene parallelen Geraden finden, welche durch zwei feste sich nicht durchschneidende Gerade begrenzt sind.

Wir nehmen die Ebene

$$x=0$$

als der festen Ebene parallel und die Ebene

$$z=0$$

wie im vorigen Beispiel parallel und äquidistant den beiden gegebenen Geraden, so dass die Gleichungen derselben

$$z=c,\ y=mx+n;\quad z=-c,\ y=m'x+n'$$

sind. Der fragliche Ort ist offenbar die gerade Linie, in welcher die Ebenen

$$z=0,\ 2y=(m+m')\,x+(n+n')$$

sich schneiden.

Beispiel 4. Bestimme die Umdrehungsfläche, welche durch eine um eine feste sie nicht durchschneidende Achse sich drehende gerade Linie erzeugt wird.

Sei die feste Linie die Achse der z und eine bestimmte Lage der Erzeugenden durch

$$x=mz+n,\ y=m'z+n'$$

ausgedrückt. Da nun jeder Punkt der sich drehenden Geraden einen Kreis beschreibt, dessen Ebene derjenigen der xy parallel ist, so ist für alle Punkte eines solchen ebenen Schnittes der Werth von

$$x^2+y^2,$$

d. i. in Function von z

$$(mz+n)^2+(m'z+n')^2$$

constant; die Gleichung der fraglichen Fläche ist daher

$$x^2+y^2=(mz+n)^2+(m'z+n')^2,$$

und sie ist also ein Umdrehungshyperboloid mit einer Mantelfläche.

Beispiel 5. Zwei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Gerade bewegen sich in festen Ebenen so, dass sie stets rechtwinklig zu einander bleiben; welches ist die Gleichung der Kegelfläche, die von der gemeinschaftlichen Normalen dieser beiden im Anfangspunkt erzeugt wird?

Wir bezeichnen durch $a, b, c; a', b', c'$ die Richtungswinkel der Normalen der festen Ebenen und durch α, β, γ die der beweglichen Geraden; dann sind die Richtungscosinus der Durchschnittslinien der festen Ebenen mit einer zur beweglichen Geraden normalen Ebene (Artikel 14) zu

$$\cos\beta\cos c - \cos\gamma\cos b,\ \cos\gamma\cos a - \cos\alpha\cos c,\ \cos\alpha\cos b - \cos\beta\cos a;$$
$$\cos\beta\cos c' - \cos\gamma\cos b',\ \cos\gamma\cos a' - \cos\alpha\cos c',\ \cos\alpha\cos b' - \cos\beta\cos a'$$

proportional und die Bedingung, unter welcher sie zu einander normal sind, ist daher

$$\begin{aligned}&(\cos\beta\cos c - \cos\gamma\cos b)(\cos\beta\cos c' - \cos\gamma\cos b')\\ +&(\cos\gamma\cos a - \cos\alpha\cos c)(\cos\gamma\cos a' - \cos\alpha\cos c')\\ +&(\cos\alpha\cos b - \cos\beta\cos a)(\cos\alpha\cos b' - \cos\beta\cos a') = 0;\end{aligned}$$

die bewegliche Gerade beschreibt daher eine Kegelfläche zweiten Grades.

Die beiden zu einander normalen Geraden in den festen Ebenen bestimmen mit einander eine Ebene, die ihrerseits einen Kegel zweiten Grades umhüllt, den Normalen-Kegel des Betrachteten.

Beispiel 6. Zwei zu einander normale Ebenen gehen jede durch eine feste gerade Linie; man soll die von ihrer Durchschnittslinie erzeugte Fläche bestimmen.

Wir wählen die Achsen, wie im Beispiel 1; dann sind

$$\lambda(z - c) + y - mx = 0,\quad \lambda'(z + c) + y + mx = 0$$

die Gleichungen der Ebenen und die Bedingung ihrer Rechtwinkligkeit ist

$$\lambda\lambda' + 1 - m^2 = 0;$$

die Einführung der aus den vorigen Gleichungen entspringenden Werthe von λ, λ' in dieselbe giebt die Gleichung eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche

$$y^2 - m^2x^2 + (1 - m^2)(z^2 - c^2) = 0.$$

Wenn die festen Geraden sich durchschneiden, also für

$$c = 0,$$

so reduciert sich der Ort auf eine Kegelfläche zweiten Grades.

Beispiel 7. Eine Gerade bewegt sich über zwei anderen nicht in derselben Ebene gelegenen geraden Linien so, dass das zwischen denselben enthaltene Segment von einem bestimmten Punkte aus stets unter rechtem Winkel erscheint. Ihr Ort ist ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche und speciell für die Rechtwinkligkeit der beiden gegebenen Geraden ein hyperbolisches Paraboloid.

Beispiel 8. Welches ist der Ort eines Punktes, von dem an die Fläche zweiten Grades

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

drei zu einander rechtwinklige Tangenten gelegt werden können?

Wenn wir uns die Gleichung der Fläche zu drei solchen Geraden als Achsen transformiert denken, so erhalten wir nothwendig die Gleichung des dem neuen Anfangspunkt entsprechenden Tangentenkegels in der Form

$$Ayz + Bzx + Cxy = 0,$$

weil die Achsen selbst als Kanten des Kegels erscheinen. Nach dem Beispiel des Artikel 74 ist aber die allgemeine Gleichung des Tangentenkegels vom Punkte (x', y', z')

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1\right)^2$$

und wir wissen aus Artikel 78, dass die Summe der Coefficienten von x^2, y^2, z^2 beim Uebergang zu einem andern System rectangulärer Achsen unverändert bleibt. Wir haben daher, um die Gleichung des Ortes zu erhalten, nur die Bedingung auszudrücken, unter welcher diese Coefficientensumme verschwindet; sie ist

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$
$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Beispiel 9. Wenn drei zu einander rechtwinklige Sehnen durch einen Punkt eines Ellipsoids gezogen werden, so bestimmt die Ebene ihrer Endpunkte einen festen Punkt in der Normale ihres Anfangspunktes und der Ort dieses Punktes für alle Lagen des Letzteren auf dem Ellipsoid ist ein concentrisches coaxiales Ellipsoid.

Für

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2rz = 0$$

als Gleichung der Fläche ist der gedachte Punkt als Anfangspunkt, seine Tangentenebene als Ebene xy und seine Normale als Achse der z vorausgesetzt. Ist dann

$$a'x + b'y + c'z = d'$$

die Ebene der drei Punkte, so ist

$$d'(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx) + 2rz(a'x + b'y + c'z) = 0$$

die Gleichung einer durch die Schnittcurve derselben mit der Fläche aus dem Anfangspunkte beschriebenen Kegelfläche und die Bedingung, unter der sie drei zu einander normale Erzeugende besitzt,

$$d'(a + b + c) + 2rc' = 0$$

oder

$$\frac{d'}{c'} = \frac{-2r}{a+b+c}.$$

Für

$$x = 0, \quad y = 0$$

folgt aber aus der Gleichung der Ebene

$$\frac{d'}{c'} = z,$$

somit

$$z = \frac{-2r}{a+b+c}$$

d. i. constant.

Für die Untersuchung des von diesem Punkte durchlaufenen Ortes darf sodann vorausgesetzt werden, dass die drei Geraden den Achsen des Ellipsoids, welches nun durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dargestellt sei, parallel bleiben, so dass für den Punkt (x', y', z') als Anfangspunkt ihre Endpunkte durch

$$(-x', y', z'), \quad (x', -y', z'), \quad (x', y', -z')$$

und die Ebene derselben durch

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} + \frac{z}{z'} = 1\,*)$$

gegeben sind. Da die Normale der Fläche in (x', y', z') die Gleichungen

$$a^2\,\frac{x - x'}{x'} = b^2\,\frac{y - y'}{y'} = c^2\,\frac{z - z'}{z'}$$

besitzt, so liefert die Elimination von x', y', z' die Gleichung des Ortes in der Form

$$\frac{x^2}{\left(\dfrac{a^2 - 2r^2}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{b^2 - 2r^2}{b}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\dfrac{c^2 - 2r^2}{c}\right)^2} = 1,$$

wo wir

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

gesetzt haben.

---

*) Die durch die drei Projectionen des Punktes auf die Hauptebenen bestimmte Ebene ist

$$\frac{x}{x'} + \frac{y}{y'} + \frac{z}{z'} = 2.$$

Ihre Enveloppe bietet eine verwandte Aufgabe.

Beispiel 10. Die sechs Tangentenebenen des Ellipsoids in den Endpunkten der drei zu einander rechtwinkligen Sehnen bestimmen mit einander die acht Ecken eines Hexaeders, welche stets auf einem bestimmten zweiten Ellipsoid gelegen sind; die Verbindungslinien der Gegenecken desselben gehen durch den nämlichen Punkt.

Beispiel 11. Für das durch Drehung einer gleichseitigen Hyperbel entstehende Hyperboloid mit einer Mantelfläche sind die zweiten Kreisschnitte des aus einem Punkte der Fläche über dem Kehlkreis beschriebenen Kegels normal zur Ebene des Letzteren.

Die Gleichung des Hyperboloids ist

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2,$$

und für den Scheitel (x', y', z') ist eine Erzeugende des Kegels durch die Gleichungen

$$x - x' = \frac{x' - x_1}{z'}(z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y_1}{z'}(z - z')$$

dargestellt und ihr Durchschnittspunkt mit dem Kehlkreis durch

$$x_1 = \frac{x'z - xz'}{z - z'}, \quad y_1 = \frac{y'z - yz'}{z - z'}$$

bestimmt; die Substitution dieser Werthe in die Gleichung des Kehlkreises giebt für den Kegel

$$(x'z - xz')^2 + (y'z - yz')^2 = a^2 (z - z')^2.$$

Für

$$x' = 0 \quad \text{und} \quad y' = 0$$

— oder den Scheitel des Kegels im Hauptschnitt der xz Ebene — erhält man die Gleichung eines aus einem Punkte der Achse der z beschriebenen Kreises. Die Normalebenen zur Achse der z und die zur Achse der x sind daher die Ebenen der Kreisschnitte.

Beispiel 12. Die Gleichung des Kegels zu finden, welcher aus dem Scheitel (x', y', z') über dem in der Ebene xy gelegenen Kegelschnitt

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

beschrieben wird.

Die Gleichungen der geraden Verbindungslinie eines Punktes (α, β) der Basis mit dem Scheitel sind

$$\alpha (z' - z) = z'x - zx', \quad \beta (z' - z) = z'y - zy',$$

und die Substitution dieser Werthe in die Gleichung der Basis liefert als Gleichung des fraglichen Kegels

$$\frac{(z'x - zx')^2}{a^2} + \frac{(z'y - zy')^2}{b^2} = (z' - z)^2.$$

Soll derselbe speciell ein Umdrehungskegel sein, so zeigt die Bedingung des Artikel 115, (da hier $n=0$ ist) dass dann der Punkt (x', y', z') auf einer in der Ebene xz verzeichneten Hyperbel liegen muss, welche die Scheitel der gegebenen Ellipse zu Brennpunkten und ihre Brennpunkte zu Scheiteln hat. (Vergl. Artikel 194 und 195, Beispiel 4.)

Wir geben im Folgenden eine allgemeine Methode zur Bestimmung der Gleichung des Kegels, welcher den Punkt (x', y', z', w') zum Scheitel und die Durchschnittslinie zweier durch

$$U = 0, \quad V = 0$$

repräsentierten Flächen zur Leitcurve hat.

Wenn wir durch

$$U + \lambda \delta U + \frac{\lambda^2}{1.2} \delta^2 U + \text{etc.},$$

$$V + \lambda \delta V + \frac{\lambda^2}{1.2} \delta^2 V + \text{etc.}$$

die Resultate der Substitution von

$$x + \lambda x', \quad y + \lambda y', \text{ etc.} \quad \text{für} \quad x, y, \text{ etc.}$$

in die Gleichungen der Flächen bezeichnen, so ist das Ergebniss der Elimination von λ zwischen diesen Formen die Gleichung des fraglichen Kegels. Denn die Punkte, in denen die gerade Verbindungslinie von (x', y', z', ω') mit (x, y, z, ω) die Fläche U schneidet, werden aus der Vergleichung des ersten dieser Substitutionsresultate mit Null erhalten und ebenso die Durchschnittspunkte derselben Linie mit der Fläche V aus dem zweiten; da aber die Resultante beider Gleichungen nur für eine gemeinschaftliche Wurzel derselben verschwindet, so liegt unter der Voraussetzung ihres Verschwindens der Punkt (x, y, z, ω) in einer durch (x', y', z', ω') gehenden und die Durchschnittscurve der Flächen schneidenden Geraden.

Beispiel 13. Die Kegel, welche über den durch die kleinste Achse eines Ellipsoides gehenden Hauptschnitten aus den Endpunkten der grossen und der mittlern Achse beschrieben werden, sind

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \quad \frac{(y-b)^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + \frac{x^2}{a^2};$$

sie besitzen eine gemeinschaftliche Tangentenebene und einen gemeinschaftlichen parabolischen Schnitt; diese beiden Ebenen bestimmen mit dem Ellipsoid Querschnitte, deren Inhalte im Verhältniss 1 : 2 stehen.

Beispiel 14. Die Gleichung des Kegels, der das Centrum eines Ellipsoids zum Scheitel hat und dessen Basis der durch die Polarebene eines Punktes (x', y', z') mit ihm bestimmte Schnitt ist, wird dargestellt durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right)^2.$$

Beispiel 15. Wenn eine Ebene um einen festen Punkt so bewegt wird, dass sie in jeder ihrer Lagen mit n festen Ebenen Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ bildet, für welche

$$c_1 \cos\alpha_1 + c_2 \cos\alpha_2 + \ldots + c_n \cos\alpha_n = k$$

ist, wo $c_1, c_2, \ldots, c_n, k$ Constanten bezeichnen, so umhüllt sie einen Drehungskegel zweiten Grades von unveränderlicher Achse. Die Summe

$$\Sigma_1^n\, c_i \cos\alpha_i$$

hat ihren Minimalwerth, wenn derselbe sich auf eine Gerade, diese Achse selbst, und ihren Maximalwerth, wenn er sich auf eine zu dieser normale Ebene reduciert.

Wenn die festen Ebenen durch

$$A_i x + B_i y + C_i z = D_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und die bewegliche Ebene E durch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

dargestellt sind, so geht

$$\Sigma_1^n c_i \cos\alpha_i = k$$

für

$$r = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r_i = (A_i^2 + B_i^2 + C_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

in

$$\Sigma c_i \frac{\alpha A_i + \beta B_i + \gamma C_i}{r r_i} = k,$$

also für

$$a = \Sigma_1^n c_i \frac{A_i}{r_i}, \quad b = \Sigma_1^n c_i \frac{B_i}{r_i}, \quad c = \Sigma_1^n c_i \frac{C_i}{r_i}$$

in

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{r} = k$$

über. Sie ist identisch mit

$$\frac{\alpha \frac{a}{c} + \beta \frac{b}{c} + \gamma}{r \sqrt{\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1\right)}} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

oder

$$\sin(E, G) = \frac{k}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

wenn G die durch

$$x = \frac{a}{c} z, \quad y = \frac{b}{c} z$$

dargestellte Gerade ist und (E, G) den von ihr mit der beweglichen Ebene eingeschlossenen Winkel bezeichnet. Diese Gerade ist die Achse des von der Letzteren umhüllten Rotationskegels, und die erhaltene Relation zeigt, dass k nicht grösser als

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

sein kann und dass dann der Kegel in eine zu G normale Ebene übergeht. Für $k = 0$ wird der Kegel zum Cylinder von der Achse G.*)

Wenn die bewegliche Ebene statt durch den zum Anfangspunkt genommenen festen Punkt zu gehen, eine constante Entfernung e von ihm behält, so ist

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = er$$

ihre Gleichung und

$$a\alpha + b\beta + c\gamma - kr = 0$$

die Bedingung; man findet die Enveloppe in der Form

$$(ax + by + cz - ke)^2 = (x^2 + y^2 + z^2 - e^2)(a^2 + b^2 + c^2 - k^2).$$

Beispiel 16. Man soll den Ort derjenigen Punkte der Fläche zweiter Ordnung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

bestimmen, deren Normalen die dem Punkte (x', y', z') entsprechende Normale schneiden.

Die fraglichen Punkte bilden den Durchschnitt der Fläche mit dem Kegel

$$a^2(y'z - yz')(x - x') + b^2(z'x - zx')(y - y') \\ + c^2(x'y - xy')(z - z') = 0.$$

Beispiel 17. Man soll den Ort der Pole der Tangentenebenen einer Fläche zweiter Ordnung in Bezug auf eine andere Fläche zweiter Ordnung bestimmen.

Wir haben zur Beantwortung des Problems die Bedingung auszudrücken, unter welcher die Polare von (x', y', z', w') in Bezug auf die zweite Fläche die erste berührt, d. h. wir haben in die im Artikel 75 ge-

*) Sind die c_i die Flächenzahlen von Figuren in gegebenen Ebenen, so ist k die Summe ihrer Projectionen auf die bewegliche Ebene; die Tangentenebenen der erhaltenen Rotationskegel geben constante Summen, die Normalebene zu G die Maximalsumme derselben.

gebene Bedingung für die Berührung einer Ebene mit einer Fläche zweiter Ordnung an Stelle der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Derivierten

$$\frac{dU}{dx}, \quad \frac{dU}{dy}, \quad \frac{dU}{dz}, \quad \frac{dU}{dw}$$

zu substituieren. Der fragliche Ort ist daher eine Fläche zweiter Ordnung.

Beispiel 18. Man soll den Kegel darstellen, welcher durch die im Scheitel eines gegebenen Kegels auf den Tangentenebenen desselben errichteten Normalen gebildet wird.

Sei

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0$$

der gegebene Kegel, so ist

$$Lx'x + My'y + Nz'z = 0$$

eine seiner Tangentenebenen und ihre durch den Anfangspunkt gehende Normale somit

$$\frac{x}{Lx'} = \frac{y}{My'} = \frac{z}{Nz'}.$$

Bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Werth dieser Grössen durch ϱ, so ist

$$x' = \frac{x}{L\varrho}, \quad y' = \frac{y}{M\varrho}, \quad z' = \frac{z}{N\varrho},$$

und die Substitution in

$$Lx'^2 + My'^2 + Nz'^2 = 0$$

giebt nach Division mit ϱ^2

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 0$$

als die fragliche Gleichung. Ihre Form zeigt, dass die Relation zwischen beiden Kegelflächen eine reciproke ist und dass also die Kanten des ersten normal sind zu den Tangentenebenen des zweiten. Man erkennt leicht, wie diess Problem einen speciellen Fall des vorhergehenden bildet.

Wenn die Gleichung des Kegels in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = 0$$

gegeben ist, so wird die des Reciprocalkegels in der Form

$$(bc - d^2)\, x^2 + (ca - e^2)\, y^2 + (ab - f^2)\, z^2 \\ + 2(ef - ad)\, yz + 2\,(fd - be)\, zx + 2\,(de - cf)\, xy = 0$$

gefunden, übereinstimmend mit der der Reciprocalcurve der analytischen Planimetrie.

Beispiel 19. Eine gerade Linie bewegt sich so, dass drei feste Punkte in ihr in drei festen Ebenen bleiben; welches ist der von einem beliebigen Punkte dieser Linie durchlaufene Ort?

Wir denken die drei festen Ebenen als Coordinatenebenen und als von der geraden Linie in den Punkten A, B, C geschnitten und nennen die Coordinaten des betrachteten Punktes α, β, γ. Die Coordinaten von A sind alsdann

$$0, \quad \frac{AB}{PB}\beta, \quad \frac{AC}{PC}\gamma,$$

wo die Verhältnisse $AB : PB$ und $AC : PC$ bekannt sind. Indem wir dann nach Artikel 10 die Unveränderlichkeit der Distanz PA ausdrücken, erkennen wir als die Ortsfläche ein Ellipsoid.

Wenn der Punkt P eine der Strecken AB, BC, CA halbiert, so ist der Ort speciell ein Rotationsellipsoid.

Es ist ein specieller Fall dieses Problems, wenn der eine Endpunkt der Geraden in einer festen Ebene, der andere in einer festen Geraden sich bewegen muss; die Letztere ist der Durchschnitt zweier Ebenen, und die zwischen beiden auf der bewegten Geraden gelegene Strecke ist Null. Der entsprechende Ort ist ein Rotationsellipsoid, wenn die feste Gerade zur festen Ebene normal ist, und insbesondere eine Kugel, wenn der Punkt P die Gerade halbiert.

Beispiel 20. Von zwei festen Punkten A und O ist der eine auf einer Kugelfläche gelegen; die Verbindungslinie DA eines beliebigen andern Punktes D der Kugelfläche mit A schneidet die Kugel ferner in dem Punkte D'; man soll den Ort des Punktes P auf OD bestimmen, für welchen $OP = AD'$ ist.

Wir haben

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO \,.\, OD \,.\, \cos AOD,$$

und in dieser Gleichung ist AD dem Radius vector des Ortes umgekehrt proportional und OD ist durch die Gleichung der Kugel in Function der Winkel bestimmt, welche sie mit festen Achsen bildet. Daraus erkennt man den Ort als eine Fläche zweiter Ordnung vom Centrum O.

Beispiel 21. Der Ort eines Punktes P, dessen Verbindungslinie mit einem gegebenen Punkte O in einer festen Ebene einen Punkt Q so bestimmt, dass die Relation

$$OP \,.\, OQ = k^2$$

stattfindet (k eine Constante), ist eine Kugelfläche.

Beispiel 22. Eine Ebene geht stets durch eine feste gerade Linie und ihre jedesmaligen Durchschnittslinien mit zwei festen Ebenen sind mit einem festen Punkte durch Ebenen verbunden; welches ist die durch die Durchschnittslinie der beiden letzteren Ebenen erzeugte Fläche?

Beispiel 23. Die vier Flächen eines Tetraeders gehen jede durch einen festen Punkt; man soll den Ort einer Ecke desselben bestimmen, wenn jede der drei nicht durch sie hindurchgehenden Kanten sich in einer festen Ebene bewegt.

Der Ort ist im Allgemeinen eine Fläche dritter Ordnung, die den Durchschnittspunkt der drei Ebenen zu einem Doppelpunkt hat. Sie reduciert sich auf einen Kegel zweiten Grades, wenn die vier festen Punkte in einer und derselben Ebene liegen.

Wir setzen

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

als die Gleichungen der festen Ebenen voraus, in denen die Seiten der einen Tetraederfläche sich bewegen, und

$$(x_0, y_0, z_0), \ (x_1, y_1, z_1), \ (x_2, y_2, z_2), \ (x_3, y_3, z_3)$$

als die Coordinaten der Punkte, durch welche diese Fläche und die drei andern Flächen hindurchgehen, bezeichnen auch die Resultate der Substitution der Letzteren in die Polynome u, v, w durch u_1, v_2, w_3. Dann ist für

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

als Gleichung der durch (x_0, y_0, z_0) gehenden Fläche, die Gleichung der durch den Punkt (x_1, y_1, z_1) gehenden von der Form

$$Ax + By + Cz + D + \lambda u = 0,$$

mit der Bedingung

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda u_1 = 0,$$

also

$$A(ux_1 - u_1x) + B(uy_1 - u_1y) + C(uz_1 - u_1z) + D(u - u_1) = 0,$$

ebenso die beiden andern. Die Elimination von A, B, C, D zwischen den vier so erhaltenen Gleichungen giebt

$$\begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ ux_1 - u_1x, & uy_1 - u_1y, & uz_1 - u_1z, & u - u_1 \\ vx_2 - v_2x, & vy_2 - v_2y, & vz_2 - v_2z, & v - v_2 \\ wx_3 - w_3x, & wy_3 - w_3y, & wz_3 - w_3z, & w - w_3 \end{vmatrix} = 0,$$

eine Gleichung dritten Grades, als die Gleichung des Ortes. Wenn man sie in die Form

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z, & 1 \\ 0, & x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ u_1, & ux_1, & uy_1, & uz_1, & u \\ v_2, & vx_2, & vy_2, & vz_2, & v \\ w_3, & wx_3, & wy_3, & wz_3, & w \end{vmatrix} = 0$$

transformiert und für

$$\begin{vmatrix} x_0, & y_0, & z_0, & 1 \\ x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} = D$$

in

$$uvw\,D = u_1 vw\,(x_0 y z_2 1) + v_2 wu\,(x_0 y_1 z 1) + w_3 uv\,(x_0 y_1 z_2 1)$$

entwickelt, wo $(x_0 y z_2 1)$, etc. Determinanten bezeichnen, so erkennt man, dass für jede der festen Ebenen der Durchschnitt mit der Ortsfläche aus geraden Linien besteht, dass er für die Ebene der drei festen Punkte (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ein Kegelschnitt ist, welcher durch die beiden letzten und die Durchschnitte der drei Spuren der festen Ebenen in dieser bestimmt ist; endlich, dass der Ort für die Lage der vier festen Punkte in einer Ebene

$$ax + by + cz + d = 0$$

in einen Kegel zweiten Grades und diese Ebene zerfällt, weil dann

$$D = 0, \text{ und } \frac{dD}{dx_i} : a = \frac{dD}{dy_i} : b = \frac{dD}{dz_i} : c = \frac{dD}{d\alpha_i} : d = h_i,\ (i = 1,2,3,4)$$

und α_1, α_2, α_3, α_4 als Stellvertreter der Einheiten in der letzten Vertical reihe der D, also die Gleichung des Ortes

$$\left(h_1 \frac{u_1}{u} + h_2 \frac{v_2}{v} + h_3 \frac{w_3}{w}\right)(ax + by + cz + d) = 0$$

wird. Der Kegel ist der dreiseitigen Ecke der Ebenen

$$u = 0,\quad v = 0,\quad w = 0$$

umschrieben; ist die dritte derselben der Schnittlinie der beiden ersten parallel, so wird er zum Cylinder.

Beispiel 24. Man soll den Ort des Scheitels eines Tetraeders bestimmen, wenn die drei in ihm zusammenstossenden Kanten und die gegenüberliegende Fläche je durch einen festen Punkt gehen, und die drei andern Ecken sich in festen Ebenen bewegen.

Beispiel 25. Eine Ebene geht durch einen festen Punkt und ihre Durchschnittspunkte mit drei festen geraden Linien bestimmen mit je einer von drei andern festen geraden Linien drei Ebenen; man soll den Ort ihres Durchschnittspunktes untersuchen.

Beispiel 26. Die Seiten eines Polygons im Raume gehen durch feste Punkte und seine Ecken bewegen sich alle bis auf eine in festen Ebenen; man soll die Ortscurve der letzten Ecke bestimmen.

Beispiel 27. Die Seiten eines Polygons im Raume gehen, eine einzige ausgenommen, durch feste Punkte, die Endpunkte dieser letzten Seite bewegen sich in festen geraden Linien, alle andern Ecken des Polygons aber in festen Ebenen; man soll die durch die freie Seite erzeugte Fläche untersuchen.

Beispiel 28. Die Ecken eines Dreiecks bewegen sich auf einer Fläche zweiten Grades, während zwei seiner Seiten durch feste Punkte gehen; die Enveloppe seiner freien Seite ist eine Fläche zweiten Grades, welche die gegebene doppelt berührt, wo die Verbindungslinie der beiden festen Punkte sie schneidet. Wenn die erste der beiden Flächen eine Kugel ist, so sind die Berührungspunkte die Kreispunkte der zweiten. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn." Artikel 302, Aufg. 2.)

VII. Kapitel.

Methoden der abgekürzten Bezeichnung.

118. Wir geben in diesem Kapitel einen Abriss einiger von denjenigen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung, welche am einfachsten durch den Gebrauch abkürzender Symbole bewiesen werden, durch Methoden also, welche den in dem Kapitel XIV. des Werks „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" auseinander gesetzten analog sind. Um Raum zu sparen, werden wir solche Details unterdrücken, von denen wir glauben, dass sie dem intelligenten Leser keine Schwierigkeiten darbieten können. Wir überlassen es insbesondere dem Leser, nachzuweisen, dass die Theorie der reciproken Polaren und allgemeiner die der Reciprocität und der Collineation, wie sie in den Artikeln 380 — 402, 468 — 476, 432 — 467 a. a. O. vorgetragen worden ist, ohne wesentliche Veränderung auf die Probleme der Geometrie des Raumes sich überträgt; wir können diess um so eher, als die algebraische Bedeutung eben dieser Theorie dort genugsam dargestellt ist und in der Algebra der linearen Transformationen ihre allgemeine Entwickelung gefunden hat. Es wird genügen, ihre Resultate an den geeigneten Orten unserer Darstellung einzureihen. Nur hinsichtlich der Theorie der Reciprocität, die wir hier in den Vordergrund stellen, weil sie uns der Nothwendigkeit überhebt, zu irgend einem Theorem das reciproke besonders zu beweisen, wollen wir hier einige geometrische Erörterungen kurz geben.

Wir denken die Polaren in Bezug auf irgend eine Fläche zweiter Ordnung gebildet. Jedem Punkte entspricht eine

Ebene und umgekehrt, und jeder geraden Linie als der Verbindung zweier Punkte entspricht eine gerade Linie als Durchschnitt zweier Ebenen. Einer Fläche als einem Orte von Punkten entspricht daher im Allgemeinen eine Fläche als Enveloppe von Ebenen. Sehr einfache Vorstellungen aus der Theorie der Curven von doppelter Krümmung zeigen die allgemeinen Reciprocitätsverhältnisse dieser Letzteren.

119. Eine Curve im Raume kann als eine Reihe von Punkten betrachtet werden, die nach einem gewissen Gesetze auf einander folgen; sie mögen durch 1, 2, 3, etc. bezeichnet sein. Aus der Verbindung jedes dieser Punkte mit dem nächstfolgenden entspringt eine Reihe von geraden Linien, welche durch 12, 23, 34, etc. zu bezeichnen sind; jede von ihnen ist eine Tangente der Curve. In ihrer Vereinigung bilden sie eine Fläche und zwar eine entwickelbare oder developpable Fläche (Anmerkung des Artikel 109), weil jede von ihnen (wie 12) die nächstfolgende (23) durchschneidet. Wenn wir endlich die Ebenen 123, 234, etc. betrachten, von denen jede drei auf einander folgende Punkte enthält, so bilden sie eine Reihe von Ebenen, welche als die osculierenden Ebenen der Curve benannt werden und die zugleich Tangentenebenen der durch ihre Tangenten erzeugten abwickelbaren Fläche sind.

Die Bildung des reciproken Systems giebt uns an Stelle der Reihen von Punkten, Linien und Ebenen entsprechende Reihen von Ebenen, Linien und Punkten; die Reciprocalform einer Reihe von Punkten, welche eine Curve im Raume bilden, ist daher eine Reihe von Ebenen, die eine developable Fläche berühren.

Wenn die Curve jener Punkte ganz in einer Ebene enthalten ist, so gehen die Ebenen der Reciproken sämmtlich durch einen Punkt und bilden die Tangentenebenen einer Kegelfläche.

So bildet die Reihe der Punkte, welche zweien Oberflächen gemeinsam sind, eine Curve im Raume; reciprok wird von der Reihe der Tangentenebenen, welche zwei Oberflächen gemeinsam sind, eine abwickelbare Fläche berührt, welche beide Oberflächen umhüllt.

Die wichtige Unterscheidung der Flächen nach Ordnung und Klasse gehört diesem Begriffsgebiete an.

Wenn wir die Ordnung einer Fläche durch die Anzahl von Punkten ausdrücken, in denen sie von einer geraden Linie geschnitten wird, so wird die Ordnung der zu einer gegebenen reciproken Fläche durch die Zahl von Tangentenebenen gegeben, welche durch eine willkürliche gerade Linie an die gegebene Fläche gelegt werden können. Die Ordnung der Reciprocalfläche ist der Klasse der Originalfläche gleich.

Die Reciprocalfläche einer Fläche zweiter Ordnung ist eine Fläche zweiter Ordnung; denn man leitet aus Artikel 75 direct ab, dass durch eine beliebige gerade Linie zwei Tangentenebenen an eine gegebene Fläche zweiten Grades gelegt werden können, oder man bildet wie im 17. Beispiel des Artikel 117 gezeigt worden ist direct die Gleichung des Ortes der Punkte, welche die Pole der Tangentenebenen der einen Fläche in Bezug auf eine andere Fläche zweiten Grades sind, und erkennt die Richtigkeit des Satzes aus dem Umstande, dass diese Gleichung ebenfalls vom zweiten Grade ist. Bezeichnen wir die Flächen nach dem Grade ihrer Gleichung als vom zweiten Grade, so sehen wir nun, dass sie auch von der zweiten Ordnung und Klasse sind; jene Bezeichnung entspricht der Interpretation der Gleichungen nach einem System von Punkt-Coordinaten, dieses derjenigen nach einem System von Ebenen-Coordinaten. Bei Gleichungen von höheren Graden findet die Uebereinstimmung zwischen Grad, Ordnung und Klasse nicht mehr statt und beide Betrachtungs- und Ausdrucksweisen sind von einander zu scheiden.*) Im Folgenden werden wir da, wo beide Interpretationen gleich zulässig sind, den Ausdruck Fläche zweiten Grades gebrauchen, als welcher die näheren Bezeichnungen der Fläche zweiter Ordnung oder Klasse einschliesst.

Als ein Beispiel der Uebung bezeichnen wir die Uebertragung der Entwickelungen der Artikel 104 — 113 in das System der Ebenen-Coordinaten.

120. Wenn wir durch

$$U = 0, \quad V = 0$$

*) Vergl. „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" Artikel 313 f.

zwei beliebige Flächen zweiten Grades darstellen, so ist

$$U + \lambda V = 0$$

die allgemeine Gleichung derjenigen Flächen zweiten Grades, welche durch die gemeinschaftlichen Punkte jener beiden hindurchgehen; sie repräsentiert, wenn λ unbestimmt ist, eine Reihe von Flächen zweiten Grades, welche eine gemeinschaftliche Durchdringungscurve haben. Man kann die Vereinigung derselben als ein Flächenbüschel zweiten Grades bezeichnen.

Jene durch

$$\alpha\delta = \varkappa\beta\gamma$$

dargestellten Flächen zweiten Grades, welche im vorigen Abschnitt besprochen worden sind, bilden ein einfaches System und ihre Eigenschaften sind specielle Fälle der Eigenschaften eines solchen. (Vergl. auch Artikel 146.)

Da nach Artikel 54 neun Punkte eine Fläche zweiten Grades bestimmen, so ist

$$U + \lambda V = 0$$

die allgemeinste Gleichung einer durch acht gegebene Punkte gehenden Fläche dieser Art. Wenn

$$U = 0, \quad V = 0$$

zwei Flächen zweiten Grades sind, deren jede durch diese acht Punkte hindurchgeht, so wird durch

$$U + \lambda V = 0$$

eine Fläche derselben Art vorgestellt, die diese Punkte ebenfalls enthält, und die Constante λ kann so bestimmt werden, dass die Fläche durch einen beliebigen neunten Punkt geht, d. i. dass sie mit irgend einer beliebigen die acht Punkte*) enthaltenden Fläche zweiten Grades zusammenfällt.

Alle durch acht Punkte gehende Flächen zweiten Grades haben somit eine ganze Reihe gemeinschaftlicher Punkte, welche eine Durchdringungs- oder Durchschnittscurve bilden; und alle

*) Der allgemeinere Ausdruck Elemente, in welchem wir Punkte der Flächen und Tangentenebenen derselben zusammenfassen, kann hier überall dem eingeschränkteren substituiert werden. An Stelle der räumlichen Curve tritt die developpable Fläche, wenn man von Punkten zu Tangentenebenen übergeht.

Flächen zweiten Grades, welche acht gegebene Ebenen berühren, haben eine ganze Reihe gemeinschaftlicher Tangentenebenen, welche eine bestimmte abwickelbare Fläche erzeugen, die die ganze Reihe von Flächen zweiten Grades umhüllt, denen die acht festen Ebenen als Tangentenebenen entsprechen.

Offenbar kann daher das Problem, eine Fläche zweiten Grades durch neun gegebene Punkte zu beschreiben, unbestimmt werden; denn wenn der neunte Punkt der durch die acht gegebenen Punkte bestimmten Raumcurve angehört, die der Durchschnitt von zwei durch sie gehenden Flächen zweiten Grades ist, so enthält jede durch die acht Punkte gehende Fläche zweiten Grades auch den neunten Punkt. Zur Bestimmung der Fläche muss daher ein neunter nicht in dieser Curve gelegener Punkt gegeben sein.

Denn wenn im Allgemeinen für

$$U = 0, \quad V = 0$$

als Gleichungen zweier durch acht bestimmte Punkte gehenden Flächen zweiten Grades durch die Substitution der Coordinaten eines neunten Punktes in

$$U + \lambda V = 0$$

die Constante λ bestimmt wird, so geschieht diess in dem speciellen Falle nicht mehr, wo durch diese Coordinaten die Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0$$

identisch erfüllt sind, d. i. wenn der neunte Punkt der Durchschnittscurve jener Flächen angehört.

121. Wenn sieben Punkte (oder Tangentenebenen) als einer Reihe von Flächen zweiten Grades gemeinsam gegeben sind, so ist ein achter diesen Flächen gemeinsamer Punkt (eine achte gemeinschaftliche Tangentenebene) durch sie bestimmt.

Denn wenn

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

drei durch jene sieben Punkte gehende Flächen zweiten Grades darstellen, so wird durch

$$U + \lambda V + \mu W = 0$$

eine beliebige andere diese Punkte enthaltende Fläche zweiten Grades ausgedrückt, weil die Constanten λ und μ so bestimmt werden können, dass die dargestellte Fläche durch zwei beliebige andere Punkte hindurchgeht. Aber die Gleichung

$$U + \lambda V + \mu W = 0$$

repräsentiert offenbar eine Fläche zweiten Grades, welche durch alle den drei Flächen

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0$$

gemeinschaftlichen Punkte hindurchgeht; da sich dieselben nun in acht Punkten durchschneiden, so existiert ausser den sieben gegebenen Punkten ein bestimmter achter Punkt, welcher dem ganzen System von Flächen gemeinsam ist.

Obgleich also im Allgemeinen acht Punkte eine Curve von doppelter Krümmung bestimmen, welche der Durchschnitt zweier Flächen zweiten Grades ist, so ist es doch möglich, dass sie zur Bestimmung derselben nicht hinreichen; denn es giebt, wie wir eben gesehen haben, einen speciellen Fall, in welchem acht gegebene Punkte nur für sieben unabhängige Punkte zählen.

Wenn wir daher sagen, dass eine Fläche zweiten Grades durch neun Punkte und eine Durchschnittscurve von zwei solchen Flächen durch acht Punkte bestimmt ist, so setzen wir voraus, dass jene neun und diese acht Punkte in ihrer Lage vollkommen unbeschränkt sind.*)

122. Wenn ein System von Flächen zweiten Grades eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve hat, d. i. wenn die Flächen desselben acht Punkte gemein haben, so gehen die Polarebenen eines festen Punktes in Bezug

Wenn ein System von Flächen zweiten Grades derselben developpabeln Fläche eingeschrieben ist, d. i. wenn die Flächen desselben acht gemeinsame Tangentenebenen besitzen, so ist der Ort der Pole einer festen Ebene

*) Die Entwickelung der auf Flächen beliebigen Grades bezüglichen allgemeinen Theorie entspricht ganz der für höhere Curven gültigen. (Vergl. Salmon, „Treatise on the higher plane Curves“ Artikel 22—27; oder Plücker, „Theorie der algebraischen Curven“, Artikel 7—12.) Wenn eine Anzahl von Punkten gegeben ist, die um Eins kleiner ist als die Zahl der zur Bestimmung einer Fläche n^{ten} Grades nöthigen Punkte, so ist dadurch eine Curve bestimmt, durch welche die Fläche geht; und wenn die Zahl der gegebenen Punkte um zwei geringer ist, so sind durch sie eine gewisse Anzahl anderer Punkte der Fläche mitbestimmt, nämlich so viel, als zu der Anzahl n^3 noch fehlen.

auf die Flächen des System durch eine feste gerade Linie; oder die Polaren eines Punktes in Bezug auf die Flächen eines Büschels zweiter Ordnung bilden ein Ebenenbüschel.

in Bezug auf die Flächen des Systems eine gerade Linie; oder die Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büchels zweiter Klasse bilden eine geradlinige Punktreihe.

Denn wenn die Gleichungen

$$P = 0, \quad Q = 0$$

die Polarebenen eines festen Punktes in Bezug auf die Flächen zweiten Grades

$$U = 0, \quad V = 0$$

respective bezeichnen, so ist

$$P + \lambda Q = 0$$

die Gleichung der Polarebene desselben Punktes in Bezug auf die Fläche

$$U + \lambda V = 0.$$

Insbesondere ist der Ort der Centra aller derselben developpabeln Fläche eingeschriebenen oder acht Ebenen berührenden Flächen zweiten Grades eine gerade Linie.

123. Wenn ein System von Flächen zweiten Grades durch eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve geht, (oder in eine gemeinschaftliche developpable Fläche eingeschrieben ist) so erzeugen die Polaren einer festen geraden Linie ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche.

Denn wenn

$$P + \lambda Q = 0, \quad P' + \lambda Q' = 0$$

die Polaren zweier Punkte jener geraden Linie sind, so liegt ihre Durchschnittslinie nothwendig auf dem Hyperboloid

$$PQ' = P'Q.$$

124. Wenn ein System von Flächen zweiten Grades eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve hat, so ist der Ort des Pols einer festen Ebene eine Raumcurve vom dritten Grade.

Denn die Elimination von λ zwischen den Gleichungen

$$P + \lambda Q = 0, \quad P' + \lambda Q' = 0, \quad P'' + \lambda Q'' = 0$$

giebt das System der Determinanten

$$\left\| \begin{matrix} P, & P', & P'' \\ Q, & Q', & Q'' \end{matrix} \right\| = 0,$$

welches eine Curve vom dritten Grade repräsentiert. Denn die Flächen

$$PQ' = P'Q, \quad PQ'' = P''Q$$

bestimmen zwar eine Durchschnittscurve vom vierten Grade, aber dieselbe enthält die gerade Linie

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

welche dagegen der Durchdringungscurve der Flächen

$$P'Q'' = P''Q', \quad PQ'' = P''Q$$

nicht angehört. Die zu allen drei Flächen gemeinschaftlichen Punkte bilden daher nur eine Raumcurve vom dritten Grade.

Wenn (nach reciproker Interpretation) ein System von Flächen zweiten Grades einer gemeinschaftlichen developpabeln Fläche eingeschrieben ist, so umhüllt die Polare eines festen Punktes eine developpable Fläche, welche die Reciproke einer Raumcurve vom dritten Grade ist.

125. Die Polarebenen eines Punktes in Bezug auf alle die durch sieben gegebene Punkte gehenden Flächen zweiten Grades gehen durch einen bestimmten festen Punkt.

Die Pole einer festen Ebene in Bezug auf alle die Flächen zweiten Grades, welche dieselben sieben Tangentenebenen besitzen, liegen in einer festen Ebene.

Denn die Gleichung der Polare eines festen Punktes in Bezug auf eine der durch die allgemeine Gleichung

$$U + \lambda V + \mu W = 0$$

dargestellten Flächen ist von der Form

$$P + \lambda Q + \mu R = 0$$

und enthält daher den festen Punkt, in welchem die Ebenen

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

sich schneiden*).

---

*) Aus diesem Satze ist von Hesse eine Construction der durch neun gegebene Punkte gehenden Fläche zweiten Grades abgeleitet worden. „Crelle's Journal“ Bd. XXIV, p. 36. „Cambridge and Dublin Mathem. Journ.“ Vol. IV, p. 44. Man vergleiche die Entwickelungen über dasselbe Problem, welche Townsend gab, ibid. Vol. IV, p. 241.

126. Aus dem Umstande, dass die Discriminante in Bezug auf die Coefficienten der Gleichung vom vierten Grade ist, folgt, dass die Grösse λ aus einer biquadratischen Gleichung bestimmt werden muss, wenn die Gleichung

$$U + \lambda V = 0,$$

die allgemeine Gleichung der einem einfachen System angehörigen Flächen, einen Kegel darstellen soll. Daraus ergiebt sich, dass durch die Durchschnittslinie zweier Flächen zweiten Grades vier Kegel zweiten Grades hindurchgehen.

Wenn λ_1 eine der vier Wurzeln dieser biquadratischen Gleichung bezeichnet, so bestimmen die vier Ebenen

$$\frac{dU}{dx} + \lambda_1 \frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} + \lambda_1 \frac{dV}{dy} = 0,$$
$$\frac{dU}{dz} + \lambda_1 \frac{dV}{dz} = 0, \quad \frac{dU}{d\omega} + \lambda_1 \frac{dV}{d\omega} = 0$$

durch ihren Durchschnitt die Scheitel dieser vier Kegel; oder diese Punkte sind gegeben als die vier durch die Determinantenreihe

$$\left\| \begin{matrix} \frac{dU}{dx}, & \frac{dU}{dy}, & \frac{dU}{dz}, & \frac{dU}{d\omega} \\ \frac{dV}{dx}, & \frac{dV}{dy}, & \frac{dV}{dz}, & \frac{dV}{d\omega} \end{matrix} \right\| = 0$$

bestimmten Punkte.

Dieselben vier Punkte sind diejenigen, deren Polaren in Bezug auf alle die gemeinschaftliche Curve enthaltenden Flächen zweiter Ordnung in eine Ebene zusammenfallen.

Denn die Aufstellung der Bedingungen, unter welchen die Ebenen

$$x \frac{dU'}{dx'} + y \frac{dU'}{dy'} + z \frac{dU'}{dz'} + \omega \frac{dU'}{d\omega'} = 0$$
$$x \frac{dV'}{dz'} + y \frac{dV'}{dy'} + z \frac{dV'}{dz'} + \omega \frac{dV'}{d\omega'} = 0$$

zusammenfallen, führt auf dieselbe Reihe von Determinanten

Ebenso giebt es vier Ebenen, deren Pole in Bezug auf eine Reihe von Flächen zweiten Grades, welche derselben developpabeln Fläche eingeschrieben sind, dieselben vier Punkte bilden.

127. Wenn zwei Flächen zweiten Grades

$$U = 0, \quad V = 0$$

einander berühren, so hat die biquadratische Gleichung für λ, welche aus der Discriminante entspringt, zwei gleiche Wurzeln; ganz ebenso, wie das Analoge in der Theorie der Kegelschnitte sich ergab *).

Man beweist diess am leichtesten, indem man den Anfangspunkt in den Berührungspunkt der Flächen verlegt und die gemeinschaftliche Tangentenebene zur Coordinatenebene

$$z = 0$$

wählt. Dann gelten für die Gleichungen beider Flächen die Relationen

$$d = 0, \quad p = 0, \quad q = 0$$

und die Substitution in die im Artikel 63 gegebene Discriminante liefert die biquadratische Gleichung in der Form

$$(r + \lambda r')^2 \left\{(n + \lambda n')^2 - (a + \lambda a')(b + \lambda b')\right\} = 0,$$

aus welcher die Existenz gleicher Wurzeln unmittelbar hervorgeht.

Daher wird die Bedingung, unter welcher zwei Flächen zweiten Grades einander berühren, erhalten, indem man die Discriminante der biquadratischen Gleichung in λ bildet.

Es ist evident, dass die Verhältnisse der Coefficienten der bezeichneten biquadratischen Gleichung in λ in Bezug auf das Paar der Flächen zweiten Grades, auf welches sie sich beziehen, Invarianten sind.

128. Wenn zwei Flächen sich berühren, so ist der Berührungspunkt ein Doppelpunkt in ihrer Durchschnittscurve.

Denn im Allgemeinen durchschneiden sich zwei Flächen vom m^{ten} und n^{ten} Grade in einer Curve vom mn^{ten} Grade, d. h. in einer Curve, welche mit einer Ebene im Allgemeinen mn Punkte gemein hat. Jedem Punkte der Durchschnittscurve entspricht eine einzige bestimmte Tangente dieser Letzteren, nämlich die Durchschnittslinie der Tangentenebenen beider Flächen in diesem Punkte; denn jede durch diese Linie gehende Ebene schneidet die Flächen in zwei sich berührenden Curven, geht also durch zwei zusammenfallende Punkte der Durchschnittscurve. Wenn aber die Flä-

*) Vergl. „Anal. Geom. d. Kegelschnitte" Artikel 364.

chen sich berühren, so werden sie von jeder durch den Berührungspunkt gehenden Ebene in zwei sich berührenden Curven geschnitten und jede solche Ebene geht daher durch zwei zusammenfallende Punkte der Durchschnittscurve. Der Berührungspunkt ist somit ein Doppelpunkt in dieser Curve.

In Folge dessen entsprechen ihr, ganz analog dem Falle ebener Curven, zwei Tangenten in diesem Punkte. Denn in der gemeinschaftlichen Tangentenebene beider Flächen giebt es zwei gerade Linien von solcher Lage, dass jede durch eine von ihnen gehende Ebene die Flächen in Curven durchschneidet, die drei gemeinschaftliche Punkte im Berührungspunkt besitzen, oder einander osculieren.

Wir nehmen die Tangentenebene zur Ebene xy und denken die Gleichungen der Flächen in der Form

$$z + ax^2 + 2nxy + by^2 + \text{etc.} = 0,$$
$$z + a'x^2 + 2n'xy + b'y^2 + \text{etc.} = 0$$

gegeben; dann schneidet eine Ebene

$$y = \mu x$$

diese Flächen in Curven, welche einander osculieren, wenn die Bedingung

$$a + 2n\mu + b\mu^2 = a' + 2n'\mu + b'\mu^2$$

erfüllt ist*). Die beiden bezeichneten geraden Linien sind daher durch die Gleichung

$$(a - a')\, x^2 + 2\,(n - n')\, xy + (b - b')\, y^2 = 0$$

bestimmt, wie diess auch in anderer Art leicht bewiesen werden kann.

Wenn die Gleichung einer Fläche in der Form

$$u_1 + u_2 + u_3 + \text{etc.} = 0$$

geschrieben ist, wo u_i die Vereinigung derjenigen Glieder bezeichnet, welche in den Veränderlichen vom Grade i sind, so liegt der Anfangspunkt der Coordinaten in der Fläche und die Ebene

$$u_1 = 0$$

enthält alle die geraden Linien, welche im Anfangspunkt zwei zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein haben; wenn aber u_1 mit Null identisch ist, so hat die Fläche im Anfangspunkt

---

*) Vergl. „Anal. Geom. d. Kegelschnitte" Artikel 241.

einen Doppelpunkt und alle geraden Linien, welche die Fläche in drei auf einanderfolgenden Punkten schneiden, sind in der Kegelfläche zweiten Grades

$$u_2 = 0$$

enthalten.

In dem hier betrachteten Falle erhalten wir nun durch Subtraction der einen Gleichung von der andern den Ausdruck einer die Durchschnittscurve enthaltenden Fläche, nämlich

$$(a - a')\, x^2 + 2\,(n - n')\, xy + (b - b')\, y^2 + \text{etc.} = 0,$$

in welcher der Anfangspunkt ein Doppelpunkt ist und die beiden so eben betrachteten Geraden diejenigen geraden Linien sind, welche die Fläche in drei zusammenfallenden Punkten schneiden.

129. Das Zusammenfallen dieser Linien bedingt die Existenz einer Spitze, oder eines stationären (Cuspidal-) Punktes in der Durchdringungscurve im Anfangspunkt, und wir wollen in diesem Falle die zwischen beiden Flächen stattfindende Berührung als eine stationäre bezeichnen.

Die algebraische Bedingung derselben ist unter den vorher gemachten Voraussetzungen über die Lage der Coordinatenachsen die Relation

$$(a - a')\,(b - b') = (n - n')^2.$$

Die Anschauung der biquadratischen Gleichung des Artikel 127 zur Bestimmung von λ zeigt sofort, dass unter dieser Bedingung drei Wurzeln derselben den Werth -1 haben; denn in dem untersuchten Falle ist nach der Form der untersuchten Gleichungen auch

$$r = r'.$$

Die Bedingungen einer stationären Berührung werden somit erhalten, indem man die Relationen aufstellt, welche die Coefficienten einer biquadratischen Gleichung erfüllen müssen, damit dieselbe drei gleiche Wurzeln habe; sie sind

$$S = 0, \quad T = 0,$$

wenn wir durch S und T die bekannten beiden Invarianten biquadratischer Formen bezeichnen, welche in den Coefficienten vom zweiten und vom Grade sind ($J_{4,2}$ und $J_{4,3}$).*)

*) Vergl. „Vorlesungen“ Artikel 138. „Elemente“ Artikel 23, p. 204.

130. Da die Bedingung, unter welcher eine Fläche zweiten Grades eine Ebene berührt, nach Artikel 75 in den Coefficienten der Gleichung derselben vom dritten Grade ist, so ergiebt sich, dass unter den Flächen eines einfachen Systems mit gemeinschaftlicher Durchschnittscurve drei sind, welche eine gegebene Ebene berühren; und reciprok unter den Flächen eines einfachen Systems mit einer gemeinschaftlich umschriebenen developpabeln Fläche drei, welche durch einen gegebenen Punkt gehen.

Dagegen ist offenbar, dass im ersten Falle nur eine Fläche des Systems durch einen gegebenen Punkt geht und im zweiten Falle nur eine Fläche des Systems eine gegebene Ebene berührt.

In jedem Falle existieren zwei Flächen des Systems, welche eine gegebene gerade Linie berühren; denn die im Artikel 76 gegebene Bedingung, unter welcher eine Fläche zweiten Grades eine Gerade berührt, enthält die Coefficienten der Gleichung der Fläche nur im zweiten Grade.

131. Es ist auch geometrisch evident, dass unter den Flächen eines einfachen Systems mit gemeinschaftlicher Durchschnittscurve nur drei eine gegebene Ebene berührende gefunden werden können. Denn diese Ebene schneidet die gemeinschaftliche Durchschnittscurve in vier Punkten, welche den Durchschnittslinien der Ebene mit den Flächen des Systems gemeinschaftlich sein müssen. Da nun die Tangentenebenen einer Fläche zweiten Grades dieselbe in zwei reellen oder imaginären geraden Linien durchschneidet (Artikel 104), so können diese Geraden in unserm Falle nur die drei Paare von geraden Linien sein, welche durch jene vier Punkte bestimmt sind. Die Berührungspunkte der drei fraglichen Flächen mit der Ebene, d. i. die drei Durchschnittspunkte der betrachteten Linienpaare, sind die drei Punkte, welche in Bezug auf alle Kegelschnitte des einfachen durch vier feste Punkte gehenden Systems sich selbst conjugiert sind, d. h. von denen jeder die gerade Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf alle Kegelschnitte des Systems zu seiner Polare hat.*) Wenn man den Scheitel eines der vier Kegel des Systems durch gerade Linien

*) Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte" Artikel 370, 400 und Zusatz p. 602.

mit den bezeichneten drei Punkten verbindet, so sind dieselben conjugierte Durchmesser eben dieses Kegels; nach der Schlussbemerkung des Artikel 67.

132. **Ein System von Flächen zweiten Grades, welche ein gemeinschaftliches Centrum und gemeinsame Kreisschnitte haben, kann als ein specieller Fall eines einfachen Systems mit gemeinschaftlicher Durchschnittscurve angesehen werden.** Denn die Gleichung der Flächen eines solchen Systems ist nach Artikel 100 von der Form

$$S + \lambda (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Da die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

einen Kegel repräsentiert, so ist das gemeinschaftliche Centrum einer der Scheitel der vier dem System angehörigen Kegel.

Ueberdiess sind irgend drei conjugierte Durchmesser des imaginären Kegels

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

rechtwinklig zu einander, weil diese Gleichung eine unendlich kleine Kugel repräsentiert. Wir haben somit den Satz: **Man kann stets drei concentrische und concyklische Flächen zweiten Grades bestimmen, welche eine gegebene Ebene berühren, und von den drei geraden Linien, welche das Centrum mit den Berührungspunkten verbinden, ist jede rechtwinklig zu den beiden andern.**

133. **Wenn zwei Flächen zweiten Grades sich in zwei Punkten berühren, so zerfällt ihre Durchschnittscurve, im allgemeinen Fall eine Curve von doppelter Krümmung vierten Grades, in zwei ebene Kegelschnitte.** Denn wenn wir eine Ebene durch beide Berührungspunkte und einen beliebigen Punkt der Schnittcurve legen, so schneidet dieselbe die Flächen des Systems in Curven, welche drei Punkte und zugleich die zwei Tangenten gemein haben, welche den Berührungspunkten entsprechen, und die somit identisch sein müssen.

Die Gleichungen zweier solcher Flächen sind von der Form

$$S = 0, \quad S + LM = 0,$$

wenn

$$L = 0, \quad M = 0$$

die Ebenen der Schnittcurven repräsentieren.

Man beweist in derselben Art, dass die Flächen von zwei gemeinschaftlichen Tangentenkegeln zweiten Grades umhüllt werden. Denn wenn wir den Punkt denken, in welchem die Durchschnittslinie der beiden gemeinschaftlichen Tangentenebenen von einer dritten gemeinschaftlichen Tangentenebene geschnitten wird, so haben die beiden Tangentenkegel zweiten Grades, welche die beiden Flächen mit diesem Punkte bestimmen, drei gemeinschaftliche Tangentenebenen und zwei gemeinschaftliche Kanten und sind daher identisch.

Die Reciproken zweier Flächen zweiten Grades, welche eine doppelte Berührung mit einander haben, sind gleichfalls ein Paar Flächen zweiten Grades von doppelter Berührung, und den beiden Durchschnittscurven-Ebenen des einen Paars entsprechen nach den Gesetzen der Reciprocität die Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangentenkegel des andern Paares. Alle der Linie

$$L = 0, \quad M = 0$$

angehörigen Punkte haben in Bezug auf alle Flächen des Systems

$$S + \lambda LM = 0$$

die nämliche Polare. Denn wenn

$$P = 0$$

die Polare desselben in Bezug auf die Fläche

$$S = 0$$

bezeichnet, so ist durch

$$P + \lambda\,(L'M + LM') = 0$$

seine Polare in Bezug auf

$$S + \lambda LM = 0$$

dargestellt, und diese Gleichung reduciert sich für

$$L' = 0, \quad M' = 0$$

auf

$$P = 0.$$

Daraus folgt dann weiter, dass alle Flächen des Systems in den beiden Punkten die nämlichen Tangentenebenen haben, in welchen die Fläche

$$S = 0$$

von der Geraden

$$L = 0, \quad M = 0$$

geschnitten wird.

Ausser diesen existieren noch zwei andere Punkte, welche in Bezug auf alle Flächen des Systems die nämlichen Polaren besitzen, nämlich die Scheitel derjenigen Kegelflächen zweiten Grades, welche beide Schnittcurven des Systems zugleich enthalten. Man erkennt aus geometrischen Gründen, dass diese beiden Punkte in der Polare der Linie

$$L = 0, \quad M = 0$$

in Bezug auf die Fläche

$$S = 0$$

enthalten sind, d. h. in der Durchschnittslinie der gemeinschaftlichen Tangentenebenen des Systems in den Punkten, in welchen diese Fläche von jener geraden Linie geschnitten wird, und dass diese Punkte die Brennpunkte der Involution sind, welche von den Punktepaaren bestimmt wird, in denen die Polare die Fläche

$$S = 0$$

und die Ebenen

$$L = 0, \quad M = 0$$

durchschneidet.

134. Wenn zwei Flächen zweiten Grades eine dritte Fläche dieser Art in der nämlichen ebenen Curve schneiden, so ist die Durchschnittslinie der Ebenen derjenigen Curven, in welchen sie dieselbe überdiess durchschneiden, zugleich auch Durchschnittslinie der Ebenen der andern Curve, welche sie selbst mit einander gemein haben.

Denn die Flächen

$$S + LM = 0, \quad S + LN = 0$$

bestimmen mit einander ebene Schnitte, welche durch die Ebenen

$$L = 0, \quad M - N = 0$$

gegeben sind.

Die ähnlichen Flächen zweiten Grades gehören zu der eben discutierten Klasse. Denn zwei Flächen zweiten Grades sind — die bei der Betrachtung ähnlicher Curven zweiten Grades gebrauchten Gründe beweisen es*) — ähnlich und ähnlich gelegen, wenn die Glieder vom zweiten Grade in den Gleichungen derselben übereinstimmen. Der geometrische Sinn

*) Vergl. „Analyt. Geom. der Kegelschnitte“ Artikel 237.

dieser Bedingungen ist in der Existenz des Aehnlichkeitscentrums, dem Parallelismus der Achsen und ihrer Verhältnissgleichheit ausgesprochen. Ihre Gleichungen sind also von der Form

$$S = 0, \quad S + c\,L = 0.$$

Wir sehen daraus, dass zwei solche Flächen zweiten Grades einander in einer ebenen Curve durchschneiden, während die Ebene der andern Durchschnittscurve in unendlicher Entfernung ist. Wenn wir drei ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiten Grades betrachten, so gehen die drei Ebenen ihrer endlichen Durchschnittscurven durch dieselbe gerade Linie. Endlich besitzen die sechs Ebenen der Durchschnittscurven von vier solchen Flächen einen gemeinschaftlichen Punkt. Wenn die Scheitel der Tangentenkegel einer Fläche zweiten Grades eine ähnliche und ähnlich gelegene Fläche durchlaufen, so durchschneiden sich je zwei derselben in ebenen Curven.

Alle Kugeln sind ähnliche und ähnlich gelegene Flächen zweiten Grades; es ist die Consequenz dieser ihrer Natur, dass sie einen gemeinschaftlichen Durchschnitt in unendlicher Entfernung haben, einen Durchschnitt, welcher offenbar ein imaginärer Kreis ist.

Ein ebener Querschnitt einer Fläche zweiten Grades ist ein Kreis, wenn diejenigen zwei Punkte, in welchen seine Ebene diesen unendlich entfernten imaginären Kreis schneidet, ihm angehören.

Wir können daraus direct die Zahl der Auflösungen erkennen, deren das Problem der Bestimmung der Kreisschnitte einer Fläche zweiten Grades fähig ist.

Denn die Schnittcurve der Fläche zweiten Grades mit der unendlich entfernten Ebene wird von der Schnittcurve einer Kugel mit derselben Ebene in vier Punkte geschnitten, welche durch sechs gerade Linien verbunden werden können; die durch irgend eine dieser Geraden gehenden Ebenen schneiden die Fläche zweiten Grades in Kreisen. Die sechs geraden Linien theilen sich in drei Paare, von denen jedes einen der drei Punkte als seinen Durchschnittspunkt bestimmt, welche in Bezug auf die Durchschnittscurve der Fläche zweiten Grades und die der Kugel dieselbe Polare haben. Diese drei Punkte bestimmen die Richtungen der Achsen der Fläche zweiten Grades.

Eine Umdrehungsfläche ist diejenige Fläche zweiten Grades, welche mit einer Kugel eine doppelte Berührung in unendlicher Entfernung hat. Denn eine Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + az^2 = b$$

kann in der Form

$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) + \left\{(a - 1)\, z^2 - (b - r^2)\right\} = 0$$

geschrieben werden, deren letzter Theil die Verbindung zweier Ebenen repräsentiert. Es erhellt auch, wie in diesem Falle nur eine Lage reeller Kreisschnitte vorhanden ist, welche bestimmt ist durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der unendlich entfernten Schnitte der Fläche zweiten Grades und der Kugel.

135. Vor dem Uebergang zur umfassendern Betrachtung einer andern wichtigen symbolischen Form, mögen hier als weitere Beispiele folgende Anwendungen bemerkt werden, welche man von der hier zu Grunde liegenden Betrachtungsweise machen kann. Zuerst in Bezug auf das Problem der Normalen, welche von einem Punkte x', y', z' an das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

gezogen werden können. Man braucht nur in den Gleichungen der Normalen im Artikel 87 die x, y, z mit den x', y', z' und umgekehrt zu vertauschen, um zu sehen, dass die Coordinaten der Fusspunkte ausser der Gleichung des Ellipsoids den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} a^2y\,(x' - x) - b^2x\,(y' - y) &= 0, \\ b^2z\,(y' - y) - c^2y\,(z' - z) &= 0, \\ c^2x\,(z' - z) - a^2z\,(x' - x) &= 0 \end{aligned}$$

genügen müssen. Man erhält aus ihnen die Coordinaten der sechs Punkte, welche der Aufgabe entsprechen.

Wenn man aber die linke Seite der auf Null reducierten Gleichung des Ellipsoids durch das Symbol S und die linken Seiten der drei Bedingungsgleichungen durch die entsprechenden Symbole S_1, S_2, S_3 bezeichnet, so giebt die durch lineare Verbindung dieser vier Symbole mit den Constanten $\varkappa$, λ, μ, ν entstehende Gleichung

$$\varkappa S + \lambda S_1 + \mu S_2 + \nu S_3 = 0$$

die Symbolgleichung derjenigen Flächen zweiten Grades, welche durch die sechs Normalenfusspunkte hindurchgehen, da sie durch das gleichzeitige Verschwinden von S, S_1, S_2, S_3 erfüllt wird und überdiess drei unabhängige Constante enthält. (Vgl. Artikel 121.) Die Betrachtung derselben führt nun leicht zu dem von Chasles herrührenden Satze: Die sechs von einem Punkte an ein Ellipsoid gezogenen Normalen liegen auf einem und demselben Kegel zweiten Grades.

Denn die Bedingungen, unter welchen der Punkt x', y', z' zum Centrum der durch jene Symbolgleichung dargestellten Fläche wird, sind nach Artikel 65

$$\varkappa \frac{2x'}{a^4} + \lambda y' - \nu z' = 0,$$

$$\varkappa \frac{2y'}{b^4} + \mu z' - \lambda x' = 0,$$

$$\varkappa \frac{2z'}{c^4} + \nu x' - \mu y' = 0,$$

und dieselben fordern somit

$$\varkappa = 0,$$

liefern aber dann

$$\lambda : \mu : \nu = z' : y' : x';$$

und die Bedingung, unter welcher der Punkt x', y', z' der betrachteten Fläche angehört, ist

$$\varkappa \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1\right) = 0,$$

d. h. mit

$$\varkappa = 0$$

gleichzeitig erfüllt. Die Substitution der so gefundenen Werthe in die allgemeine Gleichung liefert überdiess die Gleichung des fraglichen Kegels*).

*) Die Theorie der Normalen der Flächen zweiten Grades ist mit Erfolg behandelt von F. Joachimsthal, „Crelle's Journal" Bd. LIII, p. 149 f. und Bd. LIX, p. 111 f. Das Problem der Normalen ist aber einer allgemeineren Auffassung fähig durch Weiterführung der Betrachtungen, welche für das analoge Problem der Kegelschnittstheorie ge-

Sodann eine einfache Discussion der Frage nach dem geometrischen Orte der Scheitel derjenigen Kegel zweiten Grades, welche durch sechs gegebene Punkte im Raume hindurchgehen.

Wir denken diese Punkte durch

$$A_1, A_2, \ldots, A_6$$

bezeichnet und stellen zunächst durch

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

die Gleichungen der vier Ebenen dar, welche durch die Punktegruppen

$$A_1, A_2, A; \quad A_2, A_3, A; \quad A_3, A_4, A; \quad A_4, A_1, A$$

(A als ein beliebiger Punkt im Raume gedacht) bestimmt sind; dann repräsentiert

$$LN - \lambda MP = 0$$

jeden aus dem Scheitel A durch die Kanten

$$L = M = 0, \quad L = P = 0, \quad N = M = 0, \quad N = P = 0$$

beschriebenen Kegel zweiten Grades, und wenn wir durch

$$L', \quad M', \quad N', \quad P'$$

die Substitutionsresultate bezeichnen, welche die Einführung der Coordinaten von A_5 in die Ausdrücke L, M, N, P ergiebt, so gilt für das Hindurchgehen dieses Kegels durch den Punkt A_5 die Bedingung

$$L'N' - \lambda M'P' = 0,$$

so dass man die Gleichung der durch die fünf Punkte

$$A_1, A_2, A_3, A_4, A_4$$

aus dem Scheitel A beschriebenen Kegelfläche zweiten Grades in der Form

$$M'P'LN - L'N'MP = 0$$

erhält. Soll dieselbe auch durch den Punkt A_6 gehen, so müssen seine Coordinaten ihr genügen, d. h. wenn durch

$$L'', M'', N'', P''$$

---

geben sind, „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Artikel 477—479. Dadurch tritt dasselbe in die Klasse von Aufgaben ein, welche für die algebraische Untersuchung in allgemeinster Form von Interesse sind. Wir müssen hier auf die inhaltreiche Abhandlung von A. Clebsch im LXII. Bande des „Journal f. d. r. u. a. Math.“ zum weiteren Studium verweisen und bemerken nur, dass ein ungemein lehrreiches Beispiel damit gewonnen ist.

die Resultate der Substitution der Coordinaten von A_6 in die Ausdrücke

$$L, M, N, P$$

bezeichnet werden, es muss die Bedingung bestehen

$$M'P'L''N'' - L'N'M''P'' = 0.$$

Sie ist die Gleichung des Ortes, nach welchem gefragt wird, denn sie enthält nur noch die Coordinaten X, Y, Z des als Scheitel des Kegels betrachteten Punktes A, da sie dieselben im vierten Grade enthält, so ist der fragliche Ort eine Fläche vierten Grades. Nach der Gestalt ihrer Gleichung enthält sie ein System gerader Linien, welches man leicht näher bezeichnen kann. Sie ist erfüllt durch je zwei Bedingungen der folgenden Gruppen:

$$\begin{array}{llll} L'=0, & L''=0; & M''=0, & M'=0; \\ L'=0, & N''=0; & M''=0, & P'=0; \\ L'=0, & M'=0; & M''=0, & L''=0; \\ L'=0, & P'=0; & M''=0, & N''=0; \\ N'=0, & N''=0; & P''=0, & P'=0; \\ N'=0, & M'=0; & P''=0, & L''=0; \\ N'=0, & P'=0; & P''=0, & N''=0; \\ N'=0, & L''=0; & P''=0, & M'=0; \end{array}$$

d. h. sie enthält sechszehn Gerade, welche zu je vier in den Ebenen

$$L'=0, \quad N'=0, \quad M''=0, \quad P''=0,$$

oder

$$L''=0, \quad N''=0, \quad M'=0, \quad P'=0,$$

d. i. den Ebenen

$$A_1A_2A_5, \quad A_3A_4A_5, \quad A_2A_3A_6, \quad A_1A_4A_6,$$

oder

$$A_1A_2A_6, \quad A_3A_4A_6, \quad A_2A_3A_5, \quad A_1A_4A_5$$

enthalten sind; unter ihnen sind die durch

$$\begin{array}{lll} L'=L''=0, & L'=M'=0, & L'=P'=0, \\ N'=N''=0, & N'=M'=0, & N'=P'=0, \\ M''=M'=0, & M''=L''=0, & M''=N''=0, \\ P''=P'=0, & P''=L''=0, & P''=N''=0 \end{array}$$

dargestellten die Geraden

$$\begin{array}{lll} A_1A_2, & A_1A_3, & A_2A_4, \\ A_5A_6, & A_3A_4, & A_1A_3, \\ A_2A_3, & A_2A_6, & A_3A_6, \\ A_1A_4, & A_1A_6, & A_4A_6, \end{array}$$

d. h. zwölf unter den Verbindungslinien der sechs gegebenen Punkte. Man sieht leicht, dass der Ausschluss von dreien unter ihnen, nämlich der Linien

$$A_1 A_5, \quad A_2 A_5, \quad A_3 A_5$$

nur aus der willkürlichen Wahl und Verbindung der Punkte

$$A_1, \ A_2, \ A_3, \ A_4$$

zum Ausgang der Entwickelung entsprungen ist. Die Fläche enthält also zunächst diese 15 Geraden. Wenn wir aber betrachten, dass ausser den zwölf bezeichneten Geraden noch die vier andern

$$L' = N'' = 0, \quad N' = L'' = 0, \quad M'' = P' = 0, \quad P'' = M' = 0$$

der vorigen Betrachtung angehören, die Durchschnittslinien der Ebenenpaare

$$\begin{array}{ll} A_1 A_2 A_5, & A_3 A_4 A_6, \\ A_3 A_4 A_5, & A_1 A_2 A_6, \\ A_2 A_3 A_6, & A_1 A_4 A_5, \\ A_1 A_4 A_6, & A_2 A_3 A_5, \end{array}$$

von denen jedes Paar sämmtliche sechs Punkte enthält, so erkennen wir, dass überdiess die zehn Geraden der Fläche angehören, welche als Durchschnittslinien aller möglichen derartigen Paare von Ebenen entspringen. Die Zugehörigkeit dieser 25 Geraden zur Fläche erhellt auch aus einfachen geometrischen Betrachtungen.

Wir bemerken endlich, dass sie auch die Raumcurve dritten Grades enthält, welche durch die sechs betrachteten Punkte bestimmt ist*).

136. Wenn

$$S = 0$$

eine Kugel repräsentiert, so ist die Gleichung einer mit ihr sich doppelt berührenden Fläche zweiten Grades

$$S = LM$$

und dieselbe drückt nach der in der Theorie der Kegelschnitte**) gegebenen Interpretation aus, dass das Quadrat der von irgend einem Punkte der Fläche zweiten Grades an die Kugel zu legenden Tangente zu dem Rechteck der Entfernungen desselben Punktes von zwei festen Ebenen in einem constanten Verhältniss steht.

---

*) Man vergleiche A. Cayley's Note in den „Comptes rendus" 1861, tom. I, p. 1216 und Weddle im „Cambridge and Dublin Math. Journ." Vol. V.

**) Vergl. a. a. O. Artikel 284.

Die Ebenen

$$L = 0, \quad M = 0$$

sind Ebenen der Kreisschnitte der Fläche zweiten Grades, weil sie Ebenen ihres Durchschnitts mit einer Kugel sind.

In der Theorie der Kegelschnitte ist gezeigt worden,*) dass der Brennpunkt eines Kegelschnitts als ein unendlich kleiner Kreis angesehen werden darf, welcher mit dem Kegelschnitt eine doppelte Berührung besitzt, und dass die Directrix die entsprechende Berührungssehne ist. In derselben Art können wir einen Brennpunkt (Focalpunkt, Focus) einer Fläche zweiten Grades als eine unendlich kleine Kugel definieren, welche mit der Fläche eine doppelte Berührung in den Punkten der entsprechenden Directrix hat, d. h. der Punkt (α, β, γ) ist ein Focalpunkt, wenn die Gleichung der Fläche zweiten Grades in der Form

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \Phi$$

dargestellt werden kann, in welcher Φ das Product der Gleichungen zweier Ebenen, genauer zweier linearer Polynome, ist. Wir müssen aber die zwei Fälle einzeln untersuchen, in welchen diese Ebenen reell und in welchen sie imaginär sind; denn in dem einen ist die Gleichung von der Form

$$S = LM,$$

in dem andern von der Form

$$S = L^2 + M^2.$$

In dem ersten Falle ist die Directrix

$$L = 0, \quad M = 0$$

derjenigen Achse der Fläche parallel, durch welche die reellen Ebenen der Kreisschnitte gelegt werden können. Wenn beispielsweise die Fläche ein Ellipsoid ist, so muss diese Linie der mittleren Achse parallel sein. In dem zweiten Falle ist dagegen diese Linie parallel zu einer der andern Achsen der Fläche.

In jedem Falle ist die Schnittcurve der Fläche zweiten Grades mit einer durch einen Focalpunkt und die entsprechende Directrix gehenden Ebene ein Kegelschnitt, welcher diesen Punkt und diese Linie zum Focalpunkt und zur Directrix hat.

---

*) Ibid. Artikel 285.

Denn wenn wir die Achsen der x und y in einer durch die Linie

$$L = 0, \quad M = 0$$

gehenden Ebene wählen und dann $z = 0$ voraussetzen, so reduciert sich die Gleichung auf die Form

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = lm$$

oder die andere

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = l^2 + m^2,$$

wo

$$l = 0, \quad m = 0$$

die Durchschnittslinien der Ebenen

$$L = 0, \quad M = 0 \quad \text{mit} \quad z = 0$$

bezeichnet. Nun fallen für eine durch die Linie

$$L = 0, \quad M = 0$$

gehende Ebene diese Schnitte offenbar zusammen und man erhält als die reducierte Gleichungsform

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = l^2;$$

diese repräsentiert aber einen Kegelschnitt, welcher die Linie

$$l = 0$$

zur Directrix und den Punkt (α, β) zum entsprechenden Brennpunkt hat.

Diess ist übrigens nur der algebraische Ausdruck des geometrischen Factums, nach welchem der fragliche Querschnitt durch den unendlich kleinen Kreis, welcher als der Schnitt von S entsteht, in der Berührungssehne l berührt wird.

137. Wir untersuchen nun, **ob eine gegebene Fläche zweiten Grades nothwendig einen Focalpunkt und ob sie mehr als einen Focalpunkt besitzt**; d. h. ob die Gleichung einer solchen Fläche immer in der Form

$$S = L^2 \pm M^2$$

dargestellt werden kann, in welcher

$$S = 0$$

eine unendlich kleine Kugel (Punktkugel) bezeichnet.

Wenn wir als Coordinatenebenen x und y zwei zu einander rechtwinklige durch die gerade Linie LM gehende Ebenen wählen, so wird die Grösse

$$L^2 \pm M^2$$

in der Form

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

dargestellt, welche durch eine Drehung dieser Coordinatenebenen um diese ihre gemeinschaftliche Achse auf die Form

$$Ax^2 \pm By^2$$

gebracht werden kann. Und wenn man dann den Anfangspunkt nach irgend einem Punkte der durch den Focalpunkt gehenden Normalebene zur Directrix verlegt, so nimmt die Gleichung

$$S = L^2 \pm M^2$$

die Form

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = A(x - \gamma)^2 + B(y - \delta)^2$$

an, in welcher α, β die Coordinaten x, y des Focalpunktes und γ, δ die des Fusspunktes der Directrix bezeichnen; für entgegengesetzte Vorzeichen von A und B sind die Ebenen der Berührung zwischen dem Focalpunkt und der Fläche zweiten Grades reell und für gleiche Vorzeichen derselben Grössen sind sie imaginär.

Unsere Coordinatenebenen sind offenbar — die Form der Gleichung lehrt es — so gewählt, dass sie den Hauptebenen der Fläche parallel sind; und wir wünschen zu wissen, ob durch eine geeignete Wahl der Constanten α, β, γ, δ, A, B die bezeichnete Form der Gleichung mit derjenigen einer gegebenen Fläche

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 1$$

identisch gemacht werden kann.

Dazu muss nun zuerst, damit der Anfangspunkt mit dem Centrum der Fläche zusammenfalle,

$$\alpha = A\gamma, \quad \beta = B\delta$$

sein. Mit Hilfe dieser Relationen eliminieren wir die Grössen γ und δ aus der gegebenen Gleichung und erhalten als ihre neue Form

$$(1 - A)\, x^2 + (1 - B)\, y^2 + z^2 = \frac{1 - A}{A}\, \alpha^2 + \frac{1 - B}{B}\, \beta^2,$$

so dass die Identität stattfindet, wenn

$$1 - A = \frac{N}{L}, \quad \text{d. i.} \quad A = \frac{L - N}{L},$$

$$1 - B = \frac{N}{M}, \quad \text{d. i.} \quad B = \frac{M - N}{M},$$

und

$$\frac{1-A}{A}\alpha^2 + \frac{1-B}{B}\beta^2 = N$$

oder

$$\frac{\alpha^2}{L-N} + \frac{\beta^2}{M-N} = 1$$

ist. Für eine gegebene Fläche sind somit die Constanten A und B bestimmt, der Focalpunkt ist aber irgend ein Punkt des Kegelschnitts

$$\frac{\alpha^2}{L-N} + \frac{\beta^2}{M-N} = 1,$$

den man deshalb als einen Focalkegelschnitt der Fläche benennt.

Wir haben weder über die Vorzeichen noch die relativen Grössen der L, M, N etwas bestimmt und müssen daraus schliessen, dass in jeder der drei Hauptebenen ein Focalkegelschnitt existiert, sowie dass derselbe mit dem entsprechenden Hauptschnitt der Fläche confocal ist; denn die Kegelschnitte

$$\frac{\alpha^2}{L} + \frac{\beta^2}{M} = 1, \quad \frac{\alpha^2}{L-N} + \frac{\beta^2}{M-N} = 1$$

sind offenbar confocal.

Wenn irgend ein Punkt (α', β') eines Focalkegelschnitts als Focalpunkt betrachtet wird, so ist die entsprechende Directrix eine Normale zur Ebene des Kegelschnitts, welche durch den Punkt

$$\gamma' = \frac{\alpha'}{A}, \quad \delta' = \frac{\beta'}{B}$$

oder

$$\gamma' = \frac{L\alpha'}{L-N}, \quad \delta' = \frac{M\beta'}{M-N}$$

geht. Die geometrische Interpretation dieser Werthe sagt aus, dass der Fusspunkt der Directrix der Pol der Tangente des Focalkegelschnitts im Punkte (α', β') in Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche ist. Denn diese Tangente ist

$$\frac{\alpha\alpha'}{L-N} + \frac{\beta\beta'}{M-N} = 1$$

oder

$$\frac{\alpha\gamma'}{L} + \frac{\beta\delta'}{M} = 1,$$

d. i. offenbar die Polare von (γ', δ') in Bezug auf den Hauptschnitt

$$\frac{\alpha^2}{L} + \frac{\beta^2}{M} = 1.$$

Nach der Theorie der confocalen Kegelschnitte in der analytischen Geometrie der Ebene folgt hieraus, dass die gerade Verbindungslinie des Focalpunkts mit dem Fusspunkt der entsprechenden Directrix eine Normale des Focalkegelschnitts ist. Wenn wir dabei daran erinnern, dass die durch einen Focalpunkt und seine Directrix bestimmte Ebene die Fläche in einem Kegelschnitt durchschneidet, welcher jenen Punkt zum Brennpunkt hat, so erhellt nun, dass diess als eine Eigenschaft jeder Normalebene eines Focalkegelschnitts ausgesprochen werden darf.

Der Ort des Fusspunktes der Directrix für einen gegebenen Focalkegelschnitt ist derjenige Kegelschnitt, welchen man als den Ort der Pole der Tangenten des Focalkegelschnitts in Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche erhält, d. h. seine Gleichung ist

$$\gamma^2 \frac{L-N}{L^2} + \delta^2 \frac{M-N}{M^2} = 1,$$

wie man findet, wenn man mittelst der Relationen zwischen den Grössen α', β', γ', δ' die α', β' aus der Gleichung des Focalkegelschnitts eliminiert. Die Directricen bilden einen geraden Cylinder, für welchen der so eben bestimmte Kegelschnitt die Basis ist.

Als eine fernere Vervollständigung der hier vorliegenden Analogien der Focalkegelschnitte der Flächen mit den Brennpunkten der Curven zweiten Grades führen wir den hier leicht zu beweisenden Plücker'schen Satz an, nach welchem jede imaginäre Ebene, die durch eine Tangente eines Focalkegelschnitts hindurch geht, eine Tangentenebene der Fläche ist. (Vergl. Artikel 203.)

138. Wir wollen nun die verschiedenen Arten der centrischen Flächen zweiten Grades einzeln untersuchen, um die Natur ihrer Focalkegelschnitte zu studieren und namentlich zu erkennen, zu welcher von den zwei verschiedenen Arten von Focalpunkten die Punkte derselben gehören.

Die Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{L-N} + \frac{\beta^2}{M-N} = 1$$

repräsentiert offenbar eine Ellipse, wenn N unter den drei Grössen

L, M, N die algebraisch kleinste, eine Hyperbel, wenn es die mittlere, und eine imaginäre Curve, wenn es die grösste unter ihnen ist.

Von den drei Focalkegelschnitten einer centrischen Fläche zweiten Grades ist daher immer der eine eine Ellipse, der andere eine Hyperbel und der dritte ist imaginär. In dem Falle des Ellipsoids sind die Gleichungen der Focalellipse und der Focalhyperbel durch

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1$$

respective dargestellt; und man erhält aus ihnen die correspondierenden Gleichungen für das Hyperboloid mit einer Mantelfläche durch die Veränderung des Vorzeichens von c^2, und diejenigen für das Hyperboloid mit zwei Mantelflächen durch die gleichzeitige Veränderung der Zeichen von b^2 und c^2.

Wir haben gesehen, dass den Focalpunkten imaginäre oder reelle Berührungsebenen entsprechen, je nachdem A und B, d. i.

$$A=\frac{L-N}{L},\quad B=\frac{M-N}{M}$$

gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Denken wir N als die kleinste der drei Grössen L, M, N, so sind die Zähler dieser Werthe gleichzeitig positiv, während ihre Nenner in den Fällen des Ellipsoids und des Hyperboloids mit einer Mantelfläche ebenfalls positiv sind, und in dem Falle des Hyperboloids mit zwei Mänteln einer derselben negativ ist. Sonach sind in den Fällen des Ellipsoids und des Hyperboloids mit einer Mantelfläche die Punkte der Focalellipse Focalpunkte von der Klasse derer, welchen imaginäre Berührungsebenen entsprechen; sie gehören aber zur Klasse der Focalpunkte mit reellen Berührungsebenen in dem Falle des Hyperboloids mit zwei Mantelflächen.

Ist sodann N die mittlere unter den drei Grössen L, M, N, so haben die Zähler der betrachteten Werthe von A und B entgegengesetzte Zeichen, während die Nenner in dem Falle des Ellipsoids gleiche, in den beiden Fällen der Hyperboloide aber entgegengesetzte Zeichen besitzen. Demnach gehören in dem Falle des Ellipsoids die Punkte der Focalhyperbel zur Klasse derjenigen Focalpunkte, deren Berührungsebenen reell sind und sie gehören zur entgegengesetzten Klasse in den Fällen der Hyperboloide. Wir bemerken zusammenfassend, dass für das Hyperboloid mit einer Mantelfläche alle Focalpunkte von der Klasse derer sind, welchen imaginäre Berührungsebenen entsprechen; dass dagegen die Focalkegelschnitte der beiden andern Flächen Focalpunkte von beiden Klassen enthalten, indem für das Ellipsoid die Focalellipse und für das Hyperboloid mit zwei Mantelflächen die Focalhyperbel diejenigen Focalpunkte enthalten, denen nur imaginäre Berührungsebenen entsprechen. Diess ist gleichbedeutend mit dem, was wir schon im Artikel 136 erkannten, dass Focalpunkte mit reellen Berührungsebenen nur in den Normalebenen zu derjenigen Achse der Fläche liegen können, welche den reellen Ebenen der Kreisschnitte angehört.

139. Die Focalkegelschnitte mit reellen Berührungsebenen durchschneiden die Fläche, während die Focalkegelschnitte mit imaginären Berührungsebenen diess nicht thun.

Denn wenn die Gleichung der Fläche in die Form

$$S = L^2 + M^2$$

gebracht werden kann, welche der imaginären Berührung entspricht, so entspricht dem Verschwinden des Werthes von S für die Coordinaten irgend eines Punktes der Fläche das gleichzeitige Verschwinden der Werthe von L und M, d. h. der Brennpunkt liegt in der Directrix. Diess findet aber nur in dem speciellen Falle statt, wo die Fläche eine Kegelfläche ist. Denn für den Brennpunkt als Anfangspunkt der Coordinaten enthält die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = L^2 + M^2,$$

in welcher

$$L = 0, \quad M = 0$$

Ebenen repräsentieren, die den Anfangspunkt enthalten, nur Glieder, die in den Veränderlichen vom zweiten Grade sind, und bezeichnet daher eine Kegelfläche. (Artikel 62, 63.)

Derjenige Focalkegelschnitt, welchem die reellen Berührungsebenen entsprechen, geht dagegen durch die Kreispunkte oder Umbilics der Fläche. Denn wenn die Gleichung der Fläche in die Form

$$S = LM$$

gebracht werden kann, so entspricht dem Verschwinden des Polynoms

S für die Coordinaten irgend eines Punktes der Fläche das gleichzeitige Verschwinden eines der beiden linearen Polynome L oder M.

Weil aber die Fläche durch den Durchschnitt von

$$S = 0 \quad \text{und} \quad L = 0$$

hindurchgeht, so schneidet die Ebene

$$L = 0,$$

wenn jener Punkt S in L liegt, die Fläche in einem unendlich kleinen Kreise, d. h. sie ist die einem Kreispunkte entsprechende Tangentenebene. Nach dieser Eigenschaft sind die Focalkegelschnitte dieser Art von Mac-Cullagh als „umbilicar focal conics“ bezeichnet worden; wir bezeichnen sie umschreibend als die Focalkegelschnitte, welche die Kreispunkte der Fläche enthalten.

140. Wenn die gegebene Fläche zweiten Grades ein Kegel, ihre Gleichung also von der Form

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 0$$

ist, so geschieht die Reduction derselben auf die Form

$$S = L^2 \pm M^2$$

genau wie vorher und es ergiebt sich, dass die Coordinaten des Focalpunktes die Relation

$$\frac{\alpha^2}{L - N} + \frac{\beta^2}{M - N} = 0$$

erfüllen müssen, welche zwei gerade Linien oder eine unendlich kleine Ellipse repräsentiert, je nachdem $(L - N)$ und $(M - N)$ entgegengesetzte oder gleiche Vorzeichen haben. Oder mit andern Worten: Die Focalhyperbel degeneriert in zwei gerade Linien, die Focalellipse in den Scheitel des Kegels. Für den durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dargestellten Kegel ist die Gleichung der Focallinien

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 + c^2} = 0.$$

Die Focallinien eines Kegels, welcher zu einem Hyperboloid asymptotisch ist, sind die Asymptoten der Focalhyperbel des Hyperboloids.

Die Focalpunkte in diesen Focallinien sind von der Klasse derjenigen, welchen imaginäre Berührungsebenen entsprechen. Nur der Scheitel, welcher überdiess in doppelter Weise Focalpunkt dieser Art ist, ist auch ein Focalpunkt der andern Art, denn die Gleichung des Kegels kann in jeder der drei Formen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + c^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 + c^2}{b^2} y^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 + c^2}{c^2} z^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2 - a^2}{b^2} y^2 + \frac{a^2 + c^2}{c^2} z^2$$

geschrieben werden. Die Directrix, welche dem Scheitel als Focalpunkt zweiter Art entspricht, geht durch ihn selbst.

Die gerade Linie, welche einen Punkt der Focallinie mit dem Fusspunkt der entsprechenden Directrix verbindet, ist zur Focallinie normal. Diess ergiebt sich als ein specieller Fall des vorher von den Focalcurven allgemein bewiesenen Gesetzes, lässt sich aber auch sehr einfach direct beweisen. Die Coordinaten des Fusspunkts der Directrix sind

$$\gamma' = \frac{L\alpha'}{L - N}, \quad \delta' = \frac{M\beta'}{M - N};$$

die Gleichung der Verbindungslinie desselben mit dem Focalpunkte (α', β') ist somit

$$\frac{\beta'}{M - N} \alpha - \frac{\alpha'}{L - N} \beta = \alpha' \beta' \left(\frac{1}{M - N} - \frac{1}{L - N} \right)$$

und die Bedingung, unter welcher diese zur Focallinie

$$\beta' \alpha = \alpha' \beta$$

normal ist,

$$\frac{\alpha'^2}{L - N} + \frac{\beta'^2}{M - N} = 0;$$

diese Bedingung ist aber nach dem Vorhergehenden erfüllt.

Ebenso ergiebt sich als ein specieller Fall des Artikel 136, dass der in der Kegelfläche durch eine Normalebene zu einer seiner Focallinien bestimmte Schnitt den Fusspunkt in dieser Letzteren zum Brennpunkt hat.

141. Die Focallinien eines Kegels sind normal zu den Kreisschnitten des Reciprocalkegels. (Vergl. Beispiel 18 Artikel 117.)

Die Kreisschnitte des Kegels

$$Lx^2 + My^2 + Nz^2 = 0$$

sind nach Artikel 99 durch

$$(L - N)\, x^2 + (M - N)\, y^2 = 0$$

und die entsprechenden Focallinien des Reciprocalkegels

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 0$$

sind, wie wir eben gesehen haben, durch

$$\frac{x^2}{L - N} + \frac{y^2}{M - N} = 0$$

dargestellt; die durch sie bestimmten Linien sind nothwendig normal zu den durch erstere Gleichung bestimmten Ebenen.

Das eben bewiesene Theorem ist ein specieller Fall des folgenden allgemeineren: Die Durchschnitte zweier reciproken Kegel mit einer Ebene sind reciproke Polaren in Bezug auf den Fusspunkt der Normalen, welche von ihrem gemeinschaftlichen Centrum auf diese Ebene gefällt wird.

Denn wenn die Ebene eine Kante des einen Kegels im Punkt P und die zu ihr normale Tangentenebene des andern Kegels in der geraden Linie QR schneidet, und durch M der Fusspunkt der vom Scheitel O auf die Schnittebene gefällten Normalen bezeichnet ist, so ist offenbar PM normal zu QR und, wenn wir ihren Durchschnitt S nennen, POS ein rechtwinkliges Dreieck, somit

$$PM \,.\, MS = OM^2.$$

Die den Ort von P bildende Curve ist daher dieselbe, wie diejenige, welche man erhält, indem man von M auf die Tangenten QR Normalen fällt und in jeder derselben eine ihrer Länge umgekehrt proportionale Strecke abträgt.

Wenn speciell der Schnitt des einen Kegels ein Kreis ist, so ist der des andern ein Kegelschnitt, welcher M zum Brennpunkt hat.

Weitere Details über die Eigenschaften der Kegelflächen versparen wir auf die Untersuchung der sphärischen Kegelschnitte.

142. Die Untersuchung der Focalpunkte bei anderen Arten der Flächen zweiten Grades geschieht in der nämlichen Weise. So für die in der Gleichung

$$\frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} = 2z$$

enthaltenen Paraboloide, ausgehend von der Darstellbarkeit derselben in jeder der beiden Formen

$$(x-\alpha)^2 + y^2 + (z-\gamma)^2 = \frac{L-M}{L}\left(x - \frac{L}{L-M}\alpha\right)^2 + (z-\gamma+M)^2$$

mit

$$\frac{\alpha^2}{L-M} = 2\gamma - M,$$

$$x^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = \frac{M-L}{M}\left(y - \frac{M}{M-L}\beta\right)^2 + (z-\gamma+L)^2$$

mit

$$\frac{\beta^2}{M-L} = 2\gamma - L.$$

Es erhellt daraus, dass ein Paraboloid zwei Focalparabeln besitzt, von denen jede mit dem entsprechenden Hauptschnitt confocal ist; sowie, dass der Focalpunkt zur einen oder zur andern der vorher discutierten Arten gehört, je nach dem Zeichen des Bruches

$$\frac{L-M}{L}.$$

In dem Falle des elliptischen Paraboloids, als in welchem L und M zugleich positiv sind, ist für L als die grössere der Grössen die Focalcurve in der Ebene xz von der Art derer, welchen imaginäre Berührungsebenen entsprechen, während die in der Ebene der yz der entgegengesetzten Art angehört.

Da für jeden Wechsel der Zeichen von L und M der Werth

$$\frac{L-M}{L}$$

positiv bleibt, so gehören alle Focalpunkte des hyperbolischen Paraboloids zu denen der ersteren Klasse; wir haben diess vorher als eine Eigenschaft des Hyperboloids mit einer Mantelfläche erkannt und mussten sie, da das hyperbolische Paraboloid als ein specieller Fall dieses Hyperboloids angesehen werden kann, (Artikel 111) hier wieder finden.

Es bleibt wahr, dass die Verbindungslinie eines Focalpunktes mit dem Fusspunkte der entsprechenden Directrix der Pol der Tangente des Focalkegelschnitts in Bezug auf den Hauptschnitt der Fläche ist. Der Fusspunkt der Directrix gehört einer Parabel an und die Directricen selbst erzeugen einen parabolischen Cylinder.

Zur Vervollständigung der Discussion bleibt übrig, die Focalpunkte der verschiedenen Arten von Cylindern zu bezeichnen; man findet ohne irgend eine Schwierigkeit, dass zwei Focallinien existieren, so lange die Basis des Cylinders eine Ellipse oder Hyperbel ist, Linien, welche durch die Focalpunkte der Basis parallel den Erzeugenden des Cylinders gehen; während wenn die Basis des Cylinders eine parabolische ist, nur eine durch den Focalpunkt dieser Parabel gehende Focallinie existiert.

143. Die geometrische Interpretation der Gleichung

$$S = LM$$

ist schon gegeben worden. Sie drückt die folgende Eigenschaft der Focalpunkte mit reellen Berührungsebenen aus: Das Quadrat der Entfernung irgend eines Punktes einer Fläche zweiten Grades von einem solchen Brennpunkte ist in einem constanten Verhältniss zu dem Product der normalen Abstände desselben Punktes von zwei durch die entsprechende Directrix gehenden und den Ebenen der Kreisschnitte parallelen Ebenen.

Die entsprechende Eigenschaft der Focalpunkte der andern Art, welche weniger offen vorliegt, ward von MacCullagh entdeckt und ist in folgendem Satze ausgesprochen: Die Entfernung eines Punktes einer Fläche zweiten Grades von einem Focalpunkte dieser Art ist in einem constanten Verhältniss zu seiner Entfernung von der entsprechenden Directrix, vorausgesetzt, dass dieselbe parallel zu einer der Ebenen der Kreisschnitte gemessen wird.

In der That, setzen wir voraus, dass die Entfernung eines Punktes (x', y', z') von einer der Achse der z parallelen Directrix durch den Punkt zu bestimmen sei, dessen Coordinaten x und y die Werthe γ, δ haben, gemessen überdiess parallel einer Ebene

$$z = mx.$$

Dann schneidet eine Parallelebene durch den Punkt (x', y', z'), d. i.

$$z - z' = m(x - x')$$

die Directrix in einem Punkte, dessen x und y jene Werthe δ und γ haben, während sein z durch die Gleichung

$$z - z' = m(\gamma - x')$$

bestimmt wird. Das Quadrat der fraglichen Entfernung ist daher

$$(x' - \gamma)^2 + (y' - \delta)^2 + m^2(x' - \gamma)^2 = (y' - \delta)^2 + (1 + m^2)(x' - \gamma)^2.$$

In der Gleichung des Artikel 137

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = A(x - \gamma)^2 + B(y - \delta)^2,$$

in welcher A und B beide positiv und A grösser als B vorausgesetzt sind, bezeichnet somit die rechte Seite das Bfache des Quadrats der Entfernung eines Punktes der Fläche zweiten Grades von der Directrix, gemessen parallel der Ebene

$$z = mx \quad \text{für} \quad m^2 = \frac{A - B}{B}.$$

Die im Artikel 137 gegebenen Werthe von A und B beweisen, dass diese Ebene eine Ebene kreisförmigen Schnittes ist, wie solches auch geometrisch aus folgender Betrachtung sich ergiebt. Wir betrachten den Schnitt der Fläche zweiten Grades mit einer Ebene, die der bezeichneten parallel ist. Da die Entfernungen aller Punkte eines solchen Schnittes aus dem nämlichen Punkte der Directrix gemessen werden, so ist die Entfernung jedes Punktes desselben vom diesem festen Punkte in einem constanten Verhältniss zu seiner Entfernung vom Focalpunkt. Wenn aber die Entfernungen eines veränderlichen Punktes von zwei festen Punkten ein constantes Verhältniss behalten, so ist der Ort desselben eine Kugel, d. h. der fragliche Schnitt ist ein Kreis.

Wir begegnen einer scheinbaren Ausnahme in dem einzigen Falle, wo die Entfernung vom Focalpunkt der Entfernung von der Directrix gleich ist. Weil der Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten einander gleich sind, eine Ebene ist, so müssen in diesem Falle die Schnitte der Fläche mit den der betrachteten Ebene parallelen Ebenen gerade Linien sein.

Die Erinnerung an die vorhergehenden Artikel zeigt aber (Artikel 142), dass das betrachtete Verhältniss nur in dem Falle des hyperbolischen Paraboloids den Werth Eins hat,

$$B = 1,$$

d. i. in dem Falle einer Fläche, welche jene Ebene nicht in Kreisschnitten durchschneidet, weil sie solche gar nicht besitzt.

Mac-Cullagh hat das Verhältniss der Focaldistanz zur Entfernung von der Directrix den Modulus der Fläche und die Focalpunkte mit imaginären Berührungsebenen Modular-Focalpunkte genannt.*)

144. Es ist im Artikel 133 bemerkt worden, dass alle Flächen zweiten Grades von der Form

$$S - LM = 0$$

von zwei Kegeln umhüllt sind; wenn insbesondere

$$S = 0$$

eine Kugel bezeichnet, so müssen diese Kegel Umdrehungskegel sein, wie alle eine Kugel umhüllenden Kegel; wenn sich diese Kugel endlich auf einen Punkt reduciert, so fallen beide Kegel nothwendig in einen einzigen zusammen, welcher jenen Punkt zum Scheitel hat. Somit ist ein eine Fläche zweiten Grades umhüllender Kegel ein Umdrehungskegel, wenn sein Scheitel ein Focalpunkt der Fläche ist.

Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes geben wir einen directen algebraischen Beweis desselben. Wir bemerken zuerst, dass jede Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)^2$$

einen geraden Kegel darstellt. Denn wenn die Achsen, indem sie rectangulär bleiben, so transformiert werden, dass die durch

$$ax + by + cz = 0$$

---

*) Mac-Cullagh veröffentlichte die modulare Erzeugungs-Methode der Flächen zweiten Grades 1836; Salmon gab 1842 die ergänzende Eigenschaft der nichtmodularen Focalpunkte. Nicht lange nachher bezeichnete Amiot unabhängig dieselbe Eigenschaft, ohne doch die vollständige Theorie der Focalpunkte zu erhalten, weil er Mac-Cullagh's Methode der Generation nicht kannte. Mac-Cullagh hat einen detaillierten Abriss der Focaleigenschaften der Flächen zweiten Grades in den „Proceedings of the Royal Irish Academy," Vol. II, p. 446 veröffentlicht. Townsend hat eine werthvolle Arbeit in „Cambridge and Dublin Mathematical Journal" Vol. III, p. 1, 97, 148 mitgetheilt, in welcher die Eigenschaften der Focalpunkte, als Grenzen von Kugeln, die mit der Fläche eine doppelte Berührung haben, sehr vollständig untersucht sind.

dargestellte Ebene eine der Coordinatenebenen wird, so wird die Gleichung des Kegels in die Form

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \lambda X^2$$

übergeführt, die wegen der Gleichheit der Coefficienten von Y^2 und Z^2 einen Umdrehungskegel bezeichnet.

Wenn wir aber nach der Regel des Artikel 74 die Gleichung des Kegels bilden, der aus dem Anfangspunkt der Coordinaten der Fläche

$$x^2 + y^2 + z^2 - L^2 - M^2 = 0$$

für

$$L = ax + by + cz + d, \quad M = a'x + b'y + c'z + d'$$

umschrieben ist, so erhalten wir

$$(d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2 - L^2 - M^2) + (dL + d'M)^2 = 0$$

oder

$$(d^2 + d'^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (d'L - dM)^2 = 0,$$

welche nach dem Vorigen die Gleichung eines geraden Kegels ist.

Eine Reihe weiterer Eigenschaften der Focalpunkte, welche aus den vorgetragenen Grundsätzen leicht abgeleitet werden können, empfehlen wir dem Leser als Beispiele zur Uebung.

Beispiel 1. Die Polare einer Directrix ist die Tangente des Focalkegelschnitts im entsprechenden Focalpunkte.

Beispiel 2. Die Polarebene eines Punktes einer Directrix ist zu der Verbindungslinie dieses Punktes mit dem entsprechenden Focalpunkte normal.

Beispiel 3. Wenn eine durch den festen Punkt O gezogene gerade Linie irgend eine Directrix schneidet und in der Fläche zweiten Grades die Punkte A und B bestimmt, so ist für den entsprechenden Focalpunkt F

$$\tan \tfrac{1}{2} AFO \,.\, \tan \tfrac{1}{2} BFO = \text{const.}$$

Man beweist diesen Satz ganz analog dem in der Theorie der Kegelschnitte gegebenen entsprechenden Theorem. (Vergl. „Analyt. Geom. der Kegelschnitte“ Artikel 228, Aufgabe 6.)

Beispiel 4. Die Constanz des bezeichneten Products bleibt bestehen, wenn der Punkt O sich auf einer Fläche zweiten Grades bewegt, die mit der gegebenen die Ebenen der Kreisschnitte, den Focalpunkt und die Directrix gemeinschaftlich hat.

Beispiel 5. Wenn zwei derartige Flächen zweiten Grades von einer durch die gemeinschaftliche Directrix gehenden Geraden geschnitten werden, so bestimmen die auf ihr in beiden Flächen begrenzten Sehnen am Focalpunkte gleiche Winkel.

Beispiel 6. Wenn eine gerade durch eine Directrix gehende Linie eine der beiden Flächen zweiten Grades berührt, so bestimmt die durch die andern begrenzte Sehne am Focalpunkt einen Winkel von constanter Grösse.*)

145. Nachdem wir die merkwürdigsten Fälle der in der allgemeinen Form

$$S - LM = 0^{**})$$

enthaltenen Flächen zweiten Grades näher untersucht haben, gehen wir zur Betrachtung der Gleichung

$$S - L^2 = 0$$

über, welche eine Fläche zweiten Grades darstellt, die mit der Fläche

$$S = 0$$

längs ihres Durchschnitts mit der Ebene

$$L = 0$$

eine Berührung hat.

Man erkennt aus geometrischen Betrachtungen wie im Artikel 133, dass zwei Flächen zweiten Grades sich nicht in drei Punkten berühren können, ohne dass sie sich längs einer ganzen ebenen Curve berühren.

Die in dem Beispiel des Artikel 74 gegebene Gleichung des Tangentenkegels einer Fläche ist ein specieller Fall der hier betrachteten Gleichungsform

$$S = L^2.$$

---

*) Wir haben in diesem Abschnitte eine Uebersicht derjenigen Beziehungen gegeben, welche jeder Focalpunkt einer Fläche zweiten Grades, einzeln betrachtet, zu ihr hat. Wir werden im nächsten Kapitel die Eigenschaften der Focalkegelschnitte, welche die Vereinigung der Brennpunkte sind, und diejenigen der confocalen Flächen ebenso darstellen. Diese Eigenschaften sind zuerst im Detail durch Chasles und Mac-Cullagh studiert worden, welche um dieselbe Zeit unabhängig von einander zu der hauptsächlichsten unter ihnen kamen. Man findet die Resultate von Chasles in den Noten zu seinem „Aperçu historique" (1837).

**) Der hier nicht hervorgehobene Specialfall, in welchem S in zwei lineare Factoren zerfällt, ist in Artikel 105 f. behandelt worden.

Zwei concentrische und ähnliche Flächen zweiten Grades können als einander umhüllende betrachtet werden, bei welcher die Berührungsebene ganz in unendlicher Entfernung ist.

Jede Ebene schneidet die beiden Flächen

$$S = 0, \quad S - L^2 = 0$$

nach Curven zweiten Grades, die eine doppelte Berührung haben, und wenn der Schnitt der einen auf einen punktförmigen, d. i. unendlich kleinen Kreis sich reduciert, so ist dieser Focalpunkt der Brennpunkt des Schnittes der andern.

Wenn also eine Fläche zweiten Grades eine andere Fläche dieser Art umhüllt, so schneidet die Tangentenebene in einem Kreispunkte der einen die andern in einem Kegelschnitte, für welchen dieser Kreispunkt ein Brennpunkt ist. Und wenn die eine dieser Flächen eine Kugel ist, als für welche jede Ebene eine Kreisschnittebene und jeder Punkt ein Kreispunkt ist, so schneidet die Tangentenebene der Kugel die andere Fläche in einem Kegelschnitt, welcher ihren Berührungspunkt zum einen Brennpunkt hat.*)

Wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den betrachteten Kreispunkt und die Ebene xy in die entsprechende Tangentenebene verlegt, so erhält man als den analytischen Ausdruck dieser Sätze das Ergebniss, dass für

$$z = 0$$

die Grösse $(S - L^2)$ sich auf

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

reduciert, so dass sie einen Kegelschnitt bezeichnet, welcher den Anfangspunkt zum Brennpunkt und die gerade Linie l, die Durchschnittslinie der Schnittebene mit der Ebene der Berührungscurve, zur Directrix hat.**)

---

*) Diess ist die allgemeinere Form, welche das Theorem von Dandelin über die Schnitte des Umdrehungskegels annimmt, aus dem man die Theorie der Kegelschnitte so leicht elementar entwickelt.

**) Man kann nach den Coordinaten des andern Brennpunktes fragen und die Ausführung der bezüglichen Rechnung mag hier beigefügt sein. Ist für rectanguläre Achsen

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2lyz + 2mzx + 2rz = 0$$

die Gleichung der ersten Fläche und

Zwei Flächen zweiten Grades, welche von derselben dritten Fläche zweiten Grades umhüllt werden, schneiden einander in ebenen Curven. Denn offenbar haben die Flächen

$$S - L^2 = 0, \quad S - M^2 = 0$$

die Ebenen

$$L - M = 0, \quad L + M = 0$$

zu ihren Durchschnittsebenen.

Beispiel. Wenn

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

die Ebenen der vier Winkel eines windschiefen Vierecks (die Seitenflächen eines Tetraeders) bezeichnen, während a, b, c, d, e, f Constanten sind, so ist

$$(aL + bM + cN + dP)^2 + eLN + fMP = 0$$

$$x^2 + y^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2rz - (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0$$

die der andern sie berührenden, so ist für $z = 0$

$$x^2 + y^2 - (\alpha x + \beta y + \delta)^2 = 0$$

die Gleichung der Schnittcurve, welche oben durch $x^2 + y^2 - l^2 = 0$ bezeichnet ist. Man kann dieselbe in die Form

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 - (\alpha x + \beta y + \delta')^2 = 0$$

bringen und findet

$$\delta' = -\delta \, \frac{1 + \alpha^2 + \beta^2}{1 - \alpha^2 - \beta^2},$$

$$x' = \frac{2\alpha\delta}{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \quad y' = \frac{2\beta\delta}{1 - \alpha^2 - \beta^2}.$$

Schreibt man die Gleichung der zweiten Fläche in der Form

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + c'z^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2r'z$$
$$- (\alpha x + \beta y + \gamma' z + \delta')^2 = 0,$$

wo

$$c' = c + \gamma'^2 - \gamma^2, \quad m' = m + \alpha(\gamma' - \gamma),$$
$$l' = l + \beta(\gamma' - \gamma), \quad r' = r + (\delta'\gamma' - \delta\gamma)$$

ist, so ist

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + c'z^2 + 2l'yz + 2m'zx + 2r'z = 0$$

die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, welche jene in der Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma' z + \delta' = 0$$

berührt und deren Kreispunkt (x', y') der Berührungspunkt der Schnittebene xy und der zweite Brennpunkt der Schnittcurve ist. Da zwischen den fünf Grössen c', l', m', r', γ' nur vier Bedingungsgleichungen bestehen, so giebt es unendlich viele Flächen zweiten Grades, welche ihnen genügen.

die allgemeine Gleichung der seine Seiten berührenden Flächen zweiten Grades, weil für jede der Voraussetzungen

$$L=0,\quad M=0;\quad L=0,\quad P=0;\text{ etc.}$$

dieselbe sich auf ein vollständiges Quadrat reduciert; z. B. für die erste auf

$$(cN+dP)^2=0.$$

Die vier Berührungspunkte derselben Fläche mit den Seiten liegen in der Ebene

$$aL+bM+cN+dP=0.$$

Das durch die Seiten des windschiefen Vierecks gehende Hyperboloid mit einer Mantelfläche

$$eLN+fMP=0$$

wird von der ersteren Fläche nach ihrer Durchschnittscurve mit der letzteren Ebene umhüllt, wie die Form der Gleichungen zeigt.

146. Die Gleichung

$$aL^2+bM^2+cN^2+dP^2=0,$$

in welcher L, M, N, P lineare Polynome, also

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0,\quad P=0$$

Ebenen bezeichnen, ist die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, für welche jede dieser vier Ebenen die Polare des Punktes ist, in welcher die drei andern sich schneiden. Denn

$$aL^2+bM^2+cN^2=0$$

ist die Gleichung eines Kegels, der den Punkt

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0$$

zum Scheitel hat und der Vergleich mit der Gleichung der Fläche zweiten Grades zeigt, dass derselbe die Letztere berührt und dass

$$P=0$$

die Berührungsebene darstellt.

Solche vier Ebenen bilden ein in Bezug auf die Fläche sich selbst conjugiertes Tetraeder, analog den in der Theorie der Kegelschnitte betrachteten sich selbst conjugierten Dreiecken. (Vergl. „Analyt. Geom. der Kegelschnitte“ Artikel 304 f., 369 f., Zusatz VI, p. 602 f.) Die drei Paare seiner gegenüberliegenden Kanten sind Paare reciproker Polaren in Bezug auf die Fläche. Aus einer von ihnen bestimmt sich die gegenüberliegende entweder als die Durchschnittslinie der Polarebenen zweier in ihr liegender Punkte oder als die Verbindungslinie der Pole zweier durch sie gehender Ebenen; speciell als die Durchschnittslinie der beiden Tangentenebenen der Fläche in den Punkten, wo die gegebene Gerade sie schneidet, oder als die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangentenebenen der Fläche, welche durch sie hindurchgehen.

Auf analoge Weise bestimmt sich, wenn eine Ecke des Tetraeders gegeben ist, die gegenüberliegende Seitenfläche desselben und umgekehrt.

Denken wir uns dann eine Seitenfläche willkürlich gewählt, so ist zur Bestimmung eines sich selbst conjugierten Tetraeders, dem sie angehört, in ihr eine gerade Linie als Kante und in dieser ein Punkt als Ecke willkürlich festzusetzen und damit erst das Tetraeder bestimmt. Diess entspricht genau der Zahl von überzähligen Constanten, welche die allgemeine Gleichung

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0$$

enthält; denn diese Zahl ist sechs, und es entsprechen drei von ihnen der Wahl der Ebene, zwei der der geraden Linie in ihr, und eine, die Letzte, der Wahl des Eckpunktes in dieser.

Man sieht leicht in den Sätzen, wonach je zwei Eckpunkte eines Tetraeders mit den Durchschnittspunkten der sie verbindenden Kante in der Fläche eine Reihe harmonischer Punkte, und zwei Seitenebenen eines solchen Tetraeders mit den beiden durch ihre gemeinschaftliche Kante gehenden Tangentenebenen der Fläche ein harmonisches Büschel bilden, fernere Constructionsmittel für dieselbe Aufgabe.

Wir bemerken noch, wie die Theorie der conjugierten Durchmesser und Diametralebenen, der Asymptotenkegel etc. mit specialisierenden Bestimmungen dieser Theorie der sich selbst conjugierten Tetraeder zusammenhängen. Wenn eine der vier Flächen des Tetraeders mit der unendlich entfernten Ebene zusammenfällt, so reduciert sich ihr analytisches Symbol auf eine Constante und die allgemeine Gleichungsform der gegenwärtigen Betrachtung auf die einem System conjugierter Durchmesser und Diametralebenen entsprechenden Artikel 67, 77 f. Eine grosse Anzahl der an diese sich anschliessenden Sätze lassen sich hier als Specialfälle der allgemeinen Theorie erkennen.

Im Artikel 126 ist bewiesen worden, dass für zwei gegebene Flächen zweiten Grades immer vier Ebenen existieren, welchen in Bezug auf beide die nämlichen Pole entsprechen. Wenn man diese Ebenen durch

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

bezeichnet, so werden die Gleichungen beider Flächen in die Form

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0, \; a'L^2 + b'M^2 + c'N^2 + d'P^2 = 0$$

transformiert. Die Möglichkeit dieser Transformation kann auch a priori aus der Zählung der Constanten erkannt werden; denn die Polynome L, M, N, P enthalten implicite je drei Constanten und die gedachten Formen der allgemeinen Gleichung enthalten ausserdem drei Constanten explicite; das System derselben schliesst somit achtzehn Constanten ein und ist daher hinreichend allgemein, um die Gleichungen von irgend zwei Flächen zweiten Grades zu ersetzen. Dass sich diese Transformation auf alle Flächen eines einfachen Systems erstreckt, liegt in der Natur der Sache.

Wenn, der unendlich entfernten Lage einer der vier Seitenflächen des gemeinschaftlichen sich selbst conjugierten Tetraders zweier Flächen zweiten Grades entsprechend, die linke Seite einer der vier Gleichungen

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad P = 0$$

sich auf eine Constante reduciert, so ist der gegenüberliegende Eckpunkt desselben das gemeinschaftliche Centrum beider Flächen; die in demselben zusammenstossenden Kanten bilden ein System conjugierter Durchmesser und die entsprechenden Seitenflächen ein System conjugierter Diametralebenen, welches beiden Flächen gemeinschaftlich ist. Denken wir dann die eine der beiden Flächen als Kugel, so wird, da alle Systeme conjugierter Durchmesser und Diametralebenen einer solchen orthogonal sind, diess beiden Flächen gemeinschaftliche System zu dem System der Hauptebenen und der Achsen der betrachteten Fläche. Daraus entspringt eine allgemeinere Auffassung der Reduction der allgemeinen Gleichung auf die Hauptebenen; sie ist die Bestimmung der Ecken des sich selbst conjugierten Tetraeders oder des Systems harmonischer Pole, welches der gegebenen Fläche mit einer concentrischen Kugel gemeinsam ist. (Vergl. Artikel 78).*)

Wir wissen nach Artikel 126, dass die Ecken des gemeinschaftlichen sich selbst conjugierten Tetraeders die Scheitel der vier Kegel zweiter Ordnung sind, welche sich durch die Durchdringungscurve beider legen lassen. Sie sind durch die Gleichungen repräsentiert, welche aus

$$aL^2 + bM^2 + cN^2 + dP^2 = 0,$$
$$a'L^2 + b'M^2 + c'N^2 + d'P^2 = 0$$

durch Elimination von je einem der vier linearen homogenen Polynome L, M, N, P hervorgehen.

Nach dem Gesetz der Reciprocität entspricht dem die andere Wahrheit, dass die zweien Flächen zweiten Grades gemeinschaftlich umgeschriebene developpable Fläche mit den vier Seitenflächen des gemeinschaftlichen sich selbst conjugierten Tetraeders Durchschnittscurven zweiten Grades bestimmt. So wie jene Kegel zu den Flächen des einfachen Systems mit derselben Durchschnittscurve als Grenzflächen gehören, so auch sind diese Kegelschnitte als Grenzflächen des einfachen Systems anzusehen, welches der nämlichen developpabeln Fläche eingeschrieben ist. Zwei jener Kegelflächen bestimmen die Durchdringungscurve und damit das erste einfache System, ebenso zwei jener Kegelschnitte die Umhüllungsfläche und das zweite einfache System.

Wenn beide Flächen zweiten Grades concentrisch sind, so liegt eine Seitenfläche und die drei ihr angehörenden Ecken des gemeinschaftlichen sich selbst conjugierten Tetraeders in unendlicher Entfernung. Die Durchdringungscurve wird daher in den Richtungen der drei gemeinschaftlichen conjugierten Durchmesser durch Cylinder zweiten Grades projiciert, etc.

Die Betrachtung eines speciellen Systems solcher Art, welches einer gemeinschaftlichen Abwickelungsfläche eingeschrieben ist, wird der Gegenstand des nächsten Kapitels sein; die Flächen derselben sind nicht nur concentrisch, sondern auch coaxial, d. h. der unendlich entfernte imaginäre Kreis ist einer der ebenen Querschnitte der developpabeln Fläche. Man nennt die Flächen

*) Vergl. O. Hesse „Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes“ Leipzig 1863, p. 150, 221, 251 f.

dieses Systems confocal. Ein System von Flächen zweiten Grades, welche die nämliche Durchschnittscurve besitzen und für welche der über diesem unendlich entfernten imaginären Kreise stehende Kegel einer der durch sie gehenden vier Kegel zweiten Grades ist, lässt sich leicht characterisieren.

Endlich ist auch der im vorigen Artikel berührte Fall von zwei Flächen zweiten Grades, welche von derselben dritten Fläche zweiten Grades gemeinschaftlich umhüllt werden, hiermit in Zusammenhang. Wir wollen den Fall auch hier andeuten, in welchem diese Letztere ein Kegel ist*). Er entspricht der Voraussetzung

$$\frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \lambda$$

in den allgemeinen Gleichungen der auf das gemeinschaftliche sich selbst conjugierte Tetraeder bezogenen Flächen. Von den vier durch ihre Schnittcurve gehenden Kegeln erscheinen zwei unter der Gleichungsform

$$(\lambda a - a')\, L^2 + (\lambda b - b')\, M^2 = 0,$$

d. h. die Schnittcurve zerfällt in zwei ebene Curven zweiten Grades und durch dieselben gehen zwei Kegelflächen zweiten Grades. Die Verbindungslinie ihrer Spitzen

$$N = 0, \quad P = 0$$

ist die Polarlinie der Geraden

$$L = 0, \quad M = 0,$$

in welcher ihre Ebenen sich schneiden. Zwei unter den vier Kegelschnitten der gemeinschaftlich umschriebenen developpabeln Fläche reducieren sich auf das Paar jener Punkte, die wir oben als Spitzen der bezeichneten Kegelflächen erkannt haben; die beiden andern sind diejenigen, in welchen sich diese beiden Kegel durchschneiden. Die Linie

$$N = 0, \quad P = 0,$$

ist die Schnittlinie ihrer Ebenen. (Vergl. Artikel 133.)

Man bezeichnet zwei in solcher Beziehung stehende Flächen als von collinearer Lage. Wir fassen ihre Charactere zusammen:

---

*) Der Fall zweier Ebenen ist im Artikel 133 erörtert; wir verweisen darauf zur Vergleichung.

Sie schneiden sich in ebenen Curven und sind zweien Kegelflächen gemeinschaftlich eingeschrieben; durch die beiden ebenen Schnittcurven gehen zwei neue Kegelflächen, die beiden umgeschriebenen Kegel schneiden sich in zwei neuen Kegelschnitten. Die Ebenen der vier Schnittcurven schneiden sich in einer geraden Linie A und die Scheitel der vier Kegelflächen liegen in einer Geraden B; diese Geraden sind Polarlinien in Bezug auf jede der beiden Flächen. Durch jene gehen auch die Ebenen der Berührungscurven der beiden Flächen mit den zwei umgeschriebenen Kegeln, und in dieser liegen auch die Scheitel der vier Kegel, die ihnen nach ihren Durchschnittscurven umgeschrieben sind.

Confocale Rotationsflächen sind in collinearer Lage; der gemeinschaftliche Focalpunkt ist das Centrum.

Jede zwei Flächen zweiten Grades können in collineare Lage gebracht werden, indem man zwei identische Kegelschnitte auf ihnen zur Deckung bringt. Aehnliche Flächen in ähnlicher Lage sind zugleich in collinearer Lage; die Ebene ihrer einen Durchdringungscurve ist unendlich entfernt.

Auf der Natur der collinearen Lage beruht die Darstellung räumlicher nach der üblichen Bezeichnung relief-perspectivischer Systeme, analog den collinear-verwandten der Centralprojection.

Die Rückkehr zu einer und derselben umgeschriebenen Fläche zweiten Grades von dem speciellen Falle der Kegelfläche ist überall gestattet.

Beispiel. Für zwei Ellipsoide A und B soll man den Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Tangentenebenen des einen finden, welche je dreien conjugierten Diametralebenen des andern parallel sind.

Man denkt beide Ellipsoide concentrisch und bezieht sie auf das ihnen gemeinschaftliche System conjugierter Durchmesser.

Man findet ein mit B concentrisches, ähnliches und ähnlich gelegenes Ellipsoid.

147. Man soll die Bedingung ausdrücken, unter welcher eine Fläche zweiten Grades durch die Eckpunkte eines Tetraeders hindurchgeht, welches in Bezug auf eine gegebene Fläche zweiten Grades sich selbst conjugiert ist.

Bezeichnen wir durch

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

die Flächen eines solchen Tetraeders, so ist die Gleichung der einen Fläche zweiten Grades in Function derselben von der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0, \quad (U = 0),$$

während in der Gleichung der andern

$$V = 0$$

die Coefficienten der Glieder x^2, y^2, z^2, w^2 verschwinden. Bilden wir nun die Discriminante von

$$U + \lambda V,$$

für welche wir schreiben wollen

$$\Delta + \lambda\Theta + \lambda^2\Phi + \lambda^3\Theta_1 + \lambda^4\Delta_1 = 0,$$

so erhalten wir für Θ den Werth

$$a'bcd + b'cda + c'dab + d'abc,$$

welcher für

$$a' = b' = c' = d' = 0$$

identisch verschwindet. Da aber die Coefficienten Δ, Θ, etc. der Discriminante Invarianten sind, so ist für jede Lage der Coordinatenebenen

$$\Theta = 0,$$

wenn die Fläche zweiten Grades V durch die Eckpunkte eines in Bezug auf die Fläche zweiten Grades U sich selbst conjugierten Tetraeders hindurchgeht.

Wenn die Form U auf die einfachere

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2$$

reduciert ist, so hat, wie wir wissen, der Coefficient Θ_1 den Werth

$$a\,\frac{d\Delta_1}{da'} + b\,\frac{d\Delta_1}{db'} + c\,\frac{d\Delta_1}{dc'} + d\,\frac{d\Delta_1}{dd'};$$

nun ist aber

$$\frac{d\Delta_1}{da'} = 0$$

die Bedingung, unter welcher die Ebene

$$x = 0$$

die Fläche V berührt, und es ist daher die Relation

$$\Theta_1 = 0$$

die Bedingung, unter welcher die Seitenflächen eines in Bezug auf die Fläche U sich selbst conjugierten Tetraeders die Fläche V berühren, sowie sie auch die Bedingung ist, unter welcher die Eckpunkte eines in Bezug auf die Fläche V sich selbst conjugierten Tetraeders auf der Fläche U gelegen sind. Wir schliessen daraus, dass wenn die eine dieser beiden Beziehungen stattfindet, die andere ebenfalls stattfinden muss.

Endlich findet man unter Hinblick auf Artikel 76, dass die Relation

$$\Phi = 0$$

dann erfüllt ist, wenn die Kanten eines in Bezug auf die eine Fläche sich selbst conjugierten Tetraeders die andere Fläche sämmtlich berühren.

Beispiel 1. Wenn einem in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades sich selbst conjugierten Tetraeder eine Kugel umgeschrieben ist, so ist die Länge der vom Centrum der Fläche an sie zu ziehenden Tangente constant.

Für

$$V = 0$$

als die Gleichung einer Kugel vom Centrum (α, β, γ) und vom Halbmesser r und

$$U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

erhalten wir

$$\Delta = -\frac{1}{a^2b^2c^2}, \quad \Delta_1 = -r^2,$$

$$\Theta = \frac{1}{a^2b^2c^2}\left\{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (a^2 + b^2 + c^2 + r^2)\right\},$$

$$\Theta_1 = \frac{\alpha^2 - r^2}{a^2} + \frac{\beta^2 - r^2}{b^2} + \frac{\gamma^2 - r^2}{c^2} - 1,$$

$$\Phi = \frac{1}{b^2c^2}(\beta^2 + \gamma^2 - r^2) + \frac{1}{c^2a^2}(\gamma^2 + \alpha^2 - r^2)$$
$$+ \frac{1}{a^2b^2}(\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Die Relation

$$\Theta = 0$$

enthält das ausgesprochene Theorem, weil sie die Identität

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + r^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

bedingt.

Beispiel 2. Wenn für ein Hyperboloid die Relation

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 0$$

besteht, so liegt das Centrum der einem in Bezug auf dasselbe sich selbst conjugierten Tetraeder eingeschriebenen Kugel in der Fläche.

Beispiel 3. Der Ort des Centrums der umgeschriebenen Kugel eines Tetraeders, welches in Bezug auf ein Paraboloid sich selbst conjugiert ist, ist eine feste Ebene. Für das hyperbolische Umdrehungsparaboloid liegt der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel in der Fläche selbst.

Die Voraussetzung

$$a = b = c = R$$

macht

$$\Theta_1 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3r^2 - R^2}{R^2}$$

d. h. für die eingeschriebene Kugel des Tetraeders

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 3r^2 = R^2.$$

Die Umkehrung des Zeichens von c^2 und die Relation

$$a^2 + b^2 = c^2$$

giebt

$$\Theta = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2}{a^2\, b^2\, c^2},$$

nach welchen die umgeschriebene Kugel des Tetraeders durch den Mittelpunkt der Fläche geht*).

148. Für Sätze über conjugierte Tetraeder mag eine andere mehr an die Elemente anknüpfende Behandlungsweise angegeben werden, welche die vorige ergänzt. Wenn wir die Eckpunkte eines in Bezug auf die Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sich selbst conjugierten Tetraeders durch P_1, P_2, P_3, P_4 und ihre Coordinaten durch x_1, y_1, z_1; etc., x_4, y_4, z_4 bezeichnen, so ist einerseits die durch die drei letzten unter ihnen gehende Ebene durch

$$\begin{vmatrix} x, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z, & z_2, & z_3, & z_4 \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

anderseits als Polarebene des ersten jener Punkte durch

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} + \frac{zz_1}{c^2} = 1$$

dargestellt; man gelangt dadurch zu Relationen, welche die Characteristik eines sich selbst conjugierten Tertraeders ausmachen

*) Vergl. „Zeitschrift für Math. u. Physik", Bd. VI, p. 140.

und seine Eigenschaften enthalten, in folgender Bezeichnung. Wir bezeichnen die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \end{vmatrix},$$

die das sechsfache Volumen V des Tetraeders $P_1\ P_2\ P_3\ P_4$ ausdrückt, durch D und setzen

$$D_i = \frac{dD}{da_i}\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

die Volumina der V_1, V_2, V_3, V_4 Tetraeder $C\ P_2\ P_3\ P_4$, $C\ P_1\ P_3\ P_4$, $C\ P_1\ P_2\ P_4$, $C\ P_1\ P_2\ P_3$ respective; die characterisierenden Relationen sind dann

$$D_i\, x_i = -\, a^2\, \frac{dD}{dx_i},\quad D_i\, y_i = -\, b^2\, \frac{Db}{dy_i},$$

$$D_i\, z_i = -\, c^2\, \frac{Dd}{dz_i}\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Die Entwickelungsgesetze der Determinanten geben die Relationen

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4;$$

$$\begin{aligned}
&D_1 x_1^{\,2} + D_2 x_2^{\,2} + D_3 x_3^{\,2} + D_4 x_4^{\,2} + a^2 D = 0, \\
&D_1\, y_1^{\,2} + D_2 y_2^{\,2} + \dots \qquad\qquad\quad + b^2 D = 0, \\
&D_1\, z_1^{\,2} + D_2\, z_2^{\,2} + \dots \qquad\qquad\quad + c^2 D = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_1 x_1 y_1 + D_2 x_2 y_2 + D_3 x_3 y_3 + D_4 x_4 y_4 = 0, \\
&D_1 x_1 z_1 + \dots = 0, \\
&D_1 y_1 z_1 + \dots = 0;
\end{aligned}$$

$$\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} + \frac{z_i^2}{c^2} - 1 = -\,\frac{D}{D_i},\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$\frac{x_i x_j}{a^2} + \frac{y_i y_j}{b^2} + \frac{z_i z_j}{c^2} = 1\ (i, j = 1, 2, 3, 4,\ i \gtrless j)$$

Wenn wir

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

setzen, so giebt die Addition der Gleichungen der zweiten Gruppe

$$\Sigma D_i r_i^2 + D\,(a^2 + b^2 + c^2) = 0;$$

d. h.

$$V(a^2 + b^2 + c^2) = V_1 . \overline{CP_1}^2 + V_2 . \overline{CP_2}^2 + V_3 . \overline{CP_3}^2 + V_4 . \overline{CP_4}^2.$$

Wenn man die Determinante D in den Formen

$$D = a\,b\,c \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a}, & \frac{x_2}{a}, & \frac{x_3}{a}, & \frac{x_4}{a} \\ \frac{y_1}{b}, & \frac{y_2}{b}, & \frac{y_3}{b}, & \frac{y_4}{b} \\ \frac{z_1}{c}, & \frac{z_2}{c}, & \frac{z_3}{c}, & \frac{z_4}{c} \\ 1, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix} = -\,a\,b\,c \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a}, & \frac{x_2}{a}, & \frac{x_3}{a}, & \frac{x_4}{a} \\ \frac{y_1}{b}, & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{z_1}{c}, & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1, & \cdot & & \end{vmatrix}$$

schreibt, so liefert ihre Multiplication mittelst der beiden letzten Relationen der vorigen Gruppe die Gleichung

$$-\,D^2 = a^2\,b^2\,c^2\,\frac{D^4}{D_1 D_2 D_3 D_4}$$

oder

$$\frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^2} = \left(\frac{abc}{6}\right)^2.$$

Wenn man ferner die Gleichung der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel in der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2px + 2qy + 2rz + d = 0$$

voraussetzt, so giebt die Substitution der Coordinaten seiner vier Ecken vier Gleichungen, und die Elimination von p, q, r, d zwischen denselben die Gleichung der Kugel in der Form*)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2, & 2x, & 2y, & 2z, & 1 \\ r_1^2, & 2x_1, & 2y_1, & 2z_1, & 1 \\ r_2^2, & 2x_2, & 2y_2, & 2z_2, & 1 \\ r_3^2, & 2x_3, & 2y_3, & 2z_3, & 1 \\ r_4^2, & 2x_4, & 2y_4, & 2z_4, & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

sind dann ξ, η, ζ die Coordinaten ihres Centrums und ist t die Länge der vom Centrum des Ellipsoids an sie gezogenen Tangente, so gelten die vier Gleichungen

$$2D\xi = r_1^2\,\frac{dD}{dx_1} + r_2^2\,\frac{dD}{dx_2} + r_3^2\,\frac{dD}{dx_3} + r_4^2\,\frac{dD}{dx_4},$$

$$2D\eta = r_1^2\,\frac{dD}{dy_1} + \cdots$$

$$2D\zeta = r_1^2\,\frac{dD}{dz_1} + \cdots$$

$$-\,Dt^2 = r_1^2\,D_1 + r_2^2\,D_2 + r_3^2\,D_3 + r_4^2\,D_4 = \Sigma\,D_i r_i^2,$$

*) Man kann natürlich die Gleichung einer durch neun Punkte gehenden Fläche zweiten Grades in analoger Weise ausdrücken.

also nach dem Vorigen

$$= - D\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

oder

$$t^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

der oben bewiesene Satz über die Länge der vom Centrum an die umgeschriebene Kugel gehenden Tangente.

Ebenso geben die drei ersten dieser Relationen mit x_i, y_i, z_i respective multipliciert und zur vierten addiert die folgende

$$2\,(\xi x_i + \eta y_i + \zeta z_i) = r_i^2 + a^2 + b^2 + c^2, \; (i = 1, 2, 3, 4);$$

d. h. für alle die einen festen Punkt P_4 als Ecke enthaltenden, in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades sich selbst conjugierten Tetraeder liegen die Centra der umgeschriebenen Kugeln in einer Ebene, welche zu dem Radius vector derselben normal und vom Centrum der Fläche um

$$\frac{\overline{CP_4}}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\overline{CP_4}}$$

entfernt ist.

Analoge Sätze gelten auch für die Flächen ohne endliche Centra*).

Beispiel. Wenn V das Volumen eines beliebigen Tetraeders und V' das Volumen desjenigen Tetraeders ist, welches von den Polarebenen seiner Ecken in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades vom Centrum C gebildet wird, während V_1, V_2, V_3, V_4 wie vorher die Volumina der Tetraeder bezeichnen, welche vom Centrum C mit den Ecken des Tetraeders V bestimmt werden, so gilt die Relation

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V' \frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^3} \text{**)}.$$

149. **Die Ecken zweier in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades sich selbst conjugierter Tetraeder bilden ein System von acht Punkten, welches die Eigenschaft hat, dass eine durch sieben von ihnen gehende Fläche zweiten Grades auch den achten stets enthält*****).

---

*) Vgl. Painvin „Nouvelles Annales de Mathématiques" t. XIX, p. 290 f.

**) Vgl. Luchterhandt, „Archiv der Mathem. u. Physik" Bd. X, p. 198; wo noch eine Reihe analoger Relationen gegeben sind.

***) Hesse, „Crelle's Journal" Bd. XX, p. 297.

Denn wenn

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ w=0;\ X=0,\ Y=0,\ Z=0,\ W=0$$

die Flächen der beiden Tetraeder bezeichnen, so kann die Fläche zweiten Grades in jeder der beiden Formen dargestellt werden,

$$x^2+y^2+z^2+w^2=0=X^2+Y^2+Z^2+W^2,$$

in welchen x, y, etc., als constante Multiplicatoren implicite enthaltend gelten.

Wenn alsdann eine durch die allgemeine Gleichung in x, y, z, w gegebene Fläche zweiten Grades so transformiert wird, dass ihre Gleichung in eine Function von X, Y, Z, W, übergeht, so folgt aus dem Invarianten-Character der Function Θ die Relation

$$a+b+c+d=A+B+C+D$$

d. h. wenn sieben von diesen Grössen verschwinden, so muss auch die achte von ihnen verschwinden. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte" Art. 372.)

In derselben Art berührt jede Fläche zweiten Grades die achte der Flächen zweier sich selbst conjugierter Tetraeder, wenn sie die sieben ersten von ihnen berührt.

Irgend zwei Systeme der Ecken von Tetraedern, die in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades sich selbst conjugiert sind, bilden eine Gruppe von acht Punkten, in denen sich drei Flächen zweiten Grades schneiden, die nicht dieselbe Schnittcurve enthalten und umgekehrt die acht Schnittpunkte zweier solcher Flächen geben, in zwei gleiche Gruppen vertheilt, die Ecken zweier Tetraeder, die in Bezug auf eine bestimmte Fläche zweiten Grades sich selbst conjugiert sind.

Geht eine Fläche zweiten Grades durch die Ecken eines Tetraeders, was in Bezug auf eine andere Fläche dieser Art sich selbst conjugiert ist, so enthält sie die Ecken von unendlich vielen Tetraedern derselben Art.

Durch die Spitzen der zwölf Kegel zweiten Grades, welche sich durch die Schnittcurven von drei Flächen zweiten Grades legen lassen, geht eine unzweideutig bestimmte Fläche zweiten Grades*). Die nach dem Gesetze der Reciprocität entsprechenden Sätze sind natürlich ebenso wahr.

---

*) Vgl. Hesse „Vorlesungen" p. 160 f. wo diese Theorie, die Theorie der harmonischen Pole nach der Bezeichnung dieses Autors, mit besonderer Liebe behandelt ist.

Ein specieller Fall neben diesen verschiedenen Seiten des allgemeinen Falles mag hervorgehoben werden. Sind

$$L = 0,\ L' = 0;\ M = 0,\ M' = 0;\ N = 0,\ N' = 0$$

die Gleichungen der Gegenflächen eines Hexaeders mit vierseitigen Flächen (Vergl. Artikel 117, Beispiel 10), und l, m, n drei Constanten, so ist die allgemeine Gleichung der durch seine Ecken gehenden Flächen zweiten Grades

$$mnLL' + nlMM' + lmNN' = 0,$$

an welcher trotz der Bestimmtheit von acht Punkten das Vorhandensein von drei unbestimmten Constanten auffällt; es erklärt sich geometrisch sowohl als analytisch so, dass man einen speciellen Fall des Vorigen darin erkennt. Einen analogen Fall hinsichtlich der Bestimmung durch Tangentenebenen bietet das Octaeder mit sechs Ecken dar. Wir erwähnen sie, weil die Analogie mit den Kegelschnitten nahe liegt, welche demselben Viereck eingeschrieben oder umgeschrieben sind. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn." Artikel 276, 283, 291 etc., 311.) Die einem solchen Octaeder eingeschriebenen Flächen zweiten Grades z. B. haben ihre Centra in der Ebene, welche durch die Mittelpunkte der seine Gegenecken verbindenden Geraden besimmt ist. (Vgl. Artikel 112.)

Die geraden Verbindungslinien der Ecken eines Tetraeders mit den entsprechenden Ecken des ihm in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades polaren Tetraeders gehören zu dem nämlichen System der Erzeugenden eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche. Die Durchschnittslinien der entsprechenden Flächen beider Tetraeder besitzen die nämliche Eigenschaft.

Das Resultat der Substitution der Coordinaten irgend eines Punktes 1 in die Gleichung der Polare eines andern Punktes 2 ist identisch mit dem Resultat der Substitution der Coordinaten von 2 in die Gleichung der Polare von 1; sei dasselbe durch [1,2] bezeichnet, während die Polare von 1 durch

$$P_1 = 0$$

dargestellt wird. Dann ist die gerade Linie, welche den Punkt 1 mit dem Durchschnittspunkt der Polaren P_2, P_3, P_4 verbindet, durch

$$\frac{P_2}{[1,2]} = \frac{P_3}{[1,3]} = \frac{P_4}{[1,4]}$$

ausgedrückt, denn diese Gleichungen bezeichnen eine gerade Linie, welche durch den Schnittpunkt von P_2, P_3, P_4 hindurchgeht und sie werden durch die Coordinaten von 1 befriedigt. Wir machen die Bezeichnung noch geschlossener, wenn wir die vier Polarebenen durch x, y, z, w und die Grössen [1,2], [1,3], [1,4] durch n, m, p, d. h. durch dieselben Buchstaben bezeichnen, durch welche wir die Coefficienten von xy, xz, xw in der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades ausgedrückt haben. Wenn wir diese Grundlagen der Bezeichnung auf die übrigen geraden Linien ausdehnen, so sind die Gleichungen der vier von dem Satze bezeichneten Geraden

$$\frac{y}{n} = \frac{z}{m} = \frac{w}{p},$$
$$\frac{z}{l} = \frac{w}{q} = \frac{x}{n},$$
$$\frac{w}{r} = \frac{x}{m} = \frac{y}{l},$$
$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Die Bedingung nun, unter welcher eine beliebige Gerade

$$ax + by + cz + dw = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d'w = 0$$

die erste dieser Linien schneidet, wird erhalten, indem man x zwischen den letzten beiden Gleichungen eliminiert und für $y : z : w$ die proportionalen Werthe $n : m : p$ einführt, und ist

$$n\,(ab' - a'b) + m\,(ac' - a'c) + p\,(ad' - a'd) = 0.$$

In derselben Art findet man die Bedingungen für das Durchschneiden dieser Geraden mit den drei andern geraden Linien, wie folgt

$$n\,(ba' - b'a) + l\,(bc' - b'c) + q\,(bd' - b'd) = 0,$$
$$m\,(ca' - c'a) + l\,(cb' - c'b) + r\,(cd' - c'd) = 0,$$
$$p\,(da' - d'a) + q\,(db' - d'b) + r\,(dc' - d'c) = 0;$$

da die Summe dieser vier Bedingungsgleichungen identisch verschwindet, so ist jede derselben eine Folge der drei andern, d. h. jede gerade Linie, welche drei der betrachteten Geraden schneidet, begegnet auch der vierten unter ihnen, welches die Behauptung enthält*).

*) Das Theorem rührt von Chasles, der hier gegebene Beweis von Ferrers her („Quarterly Journal“ Vol. I, p. 241). Man vergleiche „Analyt. Geometrie der Kegelschnitte“ Artikel 331, Aufg. 2, 3.

Die Gleichung des Hyperboloids selbst wird nach den Methoden des Artikel 110 in der Form

$$(lw-qz)\,(mw-rx)\,(nw-py)=(lw-ry)\,(mw-pz)\,(nw-qx)$$

oder in der andern

$$(nr-mq)\,(lwx+pyz)+(mq-pl)\,(nwz+rxy)$$
$$+\,(pl-nr)\,(mwy+qzx)=0$$

erhalten.

150. Der zweite Theil des Satzes entspricht dem ersten nach dem Gesetze der Reciprocität; wir geben aber als eine Uebung einen besondern Beweis desselben. Die Symbole [1,1], 1,2], etc. haben dieselbe Bedeutung wie vorher, nämlich als Ausdrücke der Substitutionsresultate der Coordinaten von 1 in die Gleichungen der Polaren von 1, 2, etc. Bilden wir dann die Determinante

$$\begin{vmatrix} [1,1], & [1,2], & [1,3], & [1,4] \\ [2,1], & [2,2], & [2,3], & [2,4] \\ [3,1], & [3,2], & [3,3], & [3,4] \\ [4,1], & [4,2], & [4,3], & [4,4] \end{vmatrix}$$

und bezeichnen irgend eine Minordeterminante derselben, z. B. die durch Unterdrückung ihrer zweiten Horizontal- und dritten Verticalreihe zu bildende, durch (2,3), so ist die Gleichung der die drei Punkte 1, 2, 3 enthaltenden Ebene

$$x\,(1,4)+y\,(2,4)+z\,(3,4)+w\,(4,4)=0;$$

und wenn wir zur Verkürzung für (1,4), etc. wie vorher wieder P, etc. einführen, so sind die Gleichungen der vier geraden Linien des Satzes

$$\begin{aligned} x&=0, & Ny+Mz+Pw&=0; \\ y&=0, & Nx+Lz+Qw&=0; \\ z&=0, & Mx+Ly+Rw&=0; \\ w&=0, & Px+Qy+Rz&=0. \end{aligned}$$

Eine beliebige gerade Linie

$$ax+by+cz+dw=0,\quad a'x+b'y+c'z+d'w=0$$

schneidet jede derselben, wenn die vier Bedingungen

$$\begin{aligned} N\,(cd'-c'd)+M\,(db'-d'b)+P\,(bc'-b'c)&=0, \\ N\,(dc'-d'c)+Q\,(ca'-c'a)+L\,(ad'-a'd)&=0, \\ M\,(bd'-b'd)+L\,(da'-d'a)+R\,(ab'-a'b)&=0, \\ P\,(b'c-bc')+Q\,(ac'-a'c)+R\,(ba'-b'a)&=0 \end{aligned}$$

erfüllt. Das Theorem ist wie vorher durch das Factum bewiesen, dass die Summe dieser vier Bedingungsgleichungen identisch verschwindet. Die Gleichung des Hyperboloids ist in diesem Falle

$$x^2MNP + y^2LNQ + z^2LMR + w^2PQR + xyN(PL + QM) + yzL(QM + RN) + zxM(RN + PL) + xwP(MQ + RN) + ywQ(LP + NR) + zwR(QM + LP) = 0.$$

Es ist ein specieller Fall dieser Theoreme, dass die geraden Linien, welche die Ecken eines einer Fläche zweiten Grades umgeschriebenen Tetraeders mit den Berührungspunkten der Gegenflächen desselben verbinden, Erzeugende des nämlichen Hyperboloids sind.

151. Man kann Pascal's Theorem für Kegelschnitte in dieser Form aussprechen: Die Seiten eines Dreiecks durchschneiden einen Kegelschnitt in sechs Punkten, welche paarweis in drei geraden Linien liegen, die mit den Gegenseiten des Dreiecks drei in gerader Linie liegende Punkte bestimmen. Der analoge Ausdruck des Theorems von Brianchon ist leicht zu finden. Auf Grund dieses Ausdrucks hat Chasles das folgende als das dem Pascal'schen analoge Theorem in der Geometrie des Raumes ausgesprochen: Die Kanten eines Tetraeders durchschneiden eine Fläche zweiten Grades in zwölf Punkten, durch welche, durch je drei in von derselben Ecke des Tetraeders ausgehenden Kanten eine, vier Ebenen bestimmt sind, deren Durchschnittslinien mit der jedesmaligen Gegenfläche des Tetraeders Erzeugende des nämlichen Systems eines gewissen Hyperboloids sind. Man bildet leicht das reciproke Theorem, welches keines besondern Beweises bedarf, wenn das eben Ausgesprochene bewiesen ist.

Sind dazu

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

die Flächen des Tetraeders, und ist

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - \left(l + \frac{1}{l}\right)yz - \left(m + \frac{1}{m}\right)zx - \left(n + \frac{1}{n}\right)xy - \left(p + \frac{1}{p}\right)xw - \left(q + \frac{1}{q}\right)yw - \left(r + \frac{1}{r}\right)zw = 0$$

die Gleichung der Fläche zweiten Grades, so können die vier Ebenen in der Form

$$\begin{aligned} x &= ny + mz + pw, \\ y &= nx + lz + qw, \\ z &= qx + ly + rw, \\ w &= px + qy + rz \end{aligned}$$

dargestellt werden, und ihre Durchschnittslinien mit den vier Ebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

sind ein System von geraden Linien, von denen ganz wie im letzten Artikel bewiesen wird, dass sie Erzeugende des nämlichen Systems eines Hyperboloids mit einer Mantelfläche sind.

152. Wir untersuchen als ein ferneres Beispiel von der Anwendung der Invarianten zur Entwickelung der Bedingungen, welche die permanenten Beziehungen zweier Flächen zweiten Grades zu einander ausdrücken, die Bedingung, unter welcher von zwei Flächen zweiten Grades die eine zwei Paare von Gegenkanten eines Tetraeders enthält, während die andere von den vier Seitenflächen desselben berührt wird*).

Man kann unter den Voraussetzungen der Aufgabe die Gleichung der einen Fläche zweiten Grades in der Form

$$Pxw + Lyz = 0$$

bringen, und wenn die Ebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

eine Fläche zweiten Grades berühren, so ist ihre Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + 2l(xw + yz) + 2m(yw + xz) + 2n(zw + xy) = 0$$

für

$$1 + 2lm = l^2 + m^2 + n^2;$$

diese Bedingung zeigt aber, dass man für l, m, n, als deren jedes kleiner als die Einheit ist, $-\cos A$, $-\cos B$, $-\cos C$ setzen darf, wo A, B, C die Winkel eines ebenen Dreiecks sind. Man findet dann

*) Es ist die analoge Aufgabe der räumlichen Geometrie zur Bestimmung des einem Kegelschnitt eingeschriebenen und zugleich einem andern Kegelschnitt umgeschriebenen Dreiecks in der Ebene. Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 363.

$$\Delta = L^2P^2, \quad \Delta_1 = -4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C,$$
$$\Theta = -2LP(L+P) \cos A,$$
$$\Theta_1 = 4(L+P) \sin^2 A \sin B \sin C,$$
$$\Phi = -(L+P)^2 \sin^2 A + 4LP \sin B \sin C \cos A,$$

erhält aber durch Elimination zwischen denselben die fragliche Bedingung in der Form

$$4\Phi\Delta_1\Theta_1 = \Theta_1^3 + 8\Delta_1^2\Theta.$$

Wenn die Discriminante von

$$U + \lambda V = 0$$

in der Form

$$A + 4\lambda B + 6\lambda^2 C + 4\lambda^3 D + \lambda^4 E$$

geschrieben wird, so ist die erhaltene Relation durch

$$3CDE = 2D^3 + BE^2$$

ausgedrückt.

153. **Man soll die Gleichung der einem Tetraeder umgeschriebenen Kugel finden.** Seien die vier Flächen des Tetraeders durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

dargestellt und die vier Normalen von den respective gegenüberliegenden Ecken auf dieselben

$$= p, p', p'', p'''.$$

Die Gleichung des einem Dreieck abc umgeschriebenen Kreises kann in der Form

$$\frac{(bc)^2 \beta\gamma}{p'p''} + \frac{(ca)^2 \gamma\alpha}{p''p} + \frac{(ab)^2 \alpha\beta}{pp'} = 0$$

dargestellt werden, wo α, p, etc. Normalen auf die Seiten des Dreiecks (ab), etc. bezeichnen. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 134.) Es ist aber evident, dass für irgend einen Punkt der Fläche δ das Verhältniss $\alpha : p$ das nämliche ist, ob α und p Normalen zur Ebene α oder Normalen zur Linie $\alpha\delta$ bezeichnen. Diess führt zur Gleichung der fraglichen Kugel in der Form

$$\frac{(bc)^2 \beta\gamma}{p'p''} + \frac{(ca)^2 \gamma\alpha}{p''p} + \frac{(ab)^2 \alpha\beta}{pp'}$$
$$+ \frac{(ad)^2 \alpha\delta}{pp'''} + \frac{(bd)^2 \beta\delta}{p'p'''} + \frac{(bd)^2 \gamma\delta}{p''p'''} = 0;$$

denn diese Gleichung repräsentiert eine Fläche zweiten Grades, deren Durchschnitt mit jeder der vier Flächen des Tetraeders der umgeschriebene Kreis des in dieser Fläche liegenden Dreiecks ist.

Wenn man die Gleichung der Kugel in der obigen Form schreibt, so ist der gemeinschaftliche Coefficient von x^2, y^2, z^2 gleich -1. Man schliesst daraus, dass die Entfernung zwischen den Mittelpunkten der eingeschriebenen und der umgeschriebenen Kugel eines Tetraeders durch

$$D^2 = R^2 - r^2 \left\{ \frac{(bc)^2}{p'p''} + \frac{(ca)^2}{p''p} + \frac{(ab)^2}{pp'} + \frac{(ad)^2}{pp'''} + \frac{(bd)^2}{p'p'''} + \frac{(cd)^2}{p''p'''} \right\}$$

dargestellt wird.

Wir fügen hinzu, dass diese Gleichung der umgeschriebenen Kugel auch in der Form

$$\begin{aligned} &\beta\gamma \frac{\sin(\alpha,\delta)}{\sin(\beta,\gamma)} \sin(\alpha\beta,\alpha\gamma) \sin(\delta\beta,\delta\gamma) \\ &+ \gamma\alpha \frac{\sin(\beta\,\delta)}{\sin(\gamma,\alpha)} \sin(\beta\gamma,\beta\alpha) \sin(\delta\gamma,\delta\alpha) \\ &+ \alpha\beta \frac{\sin(\gamma,\delta)}{\sin(\alpha,\beta)} \sin(\gamma\alpha,\gamma\beta) \sin(\delta\alpha,\delta\beta) \\ &+ \text{etc.} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\Sigma\, \alpha\beta \frac{\sin(\gamma,\delta)}{\sin(\alpha,\beta)} \sin(\gamma\alpha,\gamma\beta) \sin(\delta\alpha,\delta\beta) = 0$$

gegeben werden kann, entsprechend einer analogen Form der Gleichung des einem Dreieck umgeschriebenen Kreises.

154. Aus der vorigen Gleichung können ohne Schwierigkeit die Bedingungen abgeleitet werden, unter welchen die allgemeine Gleichung eine Kugel darstellt.

Denn die Gleichung irgend einer andern Kugel kann nur durch Glieder vom ersten Grade von der vorhergefundenen abweichen und diese sind von der Form

$$(E\alpha + F\beta + G\gamma + H\delta)\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p'} + \frac{\gamma}{p''} + \frac{\delta}{p'''}\right),$$

worin der zweite Factor die unendlich entfernte Ebene repräsentiert. Wenn wir aber das Product dieser zwei Factoren zur Gleichung des letzten Artikel addieren und das Resultat mit der allgemeinen Gleichung zweiten Grades vergleichen, so liefert die

Elimination der unbestimmten Constanten die gesuchten Bedingungen in folgender Form

$$\frac{Ap^2 + Bp'^2 - 2Npp'}{(ab)^2} = \frac{Bp'^2 + Cp''^2 - 2Lpp''}{(bc)^2}$$
$$= \frac{Cp''^2 + Ap^2 - 2Mp''p}{(ca)^2} = \frac{Ap^2 + Dp'''^2 - 2Ppp'''}{(ad)^2}$$
$$= \frac{Bp'^2 + Dp'''^2 - 2Qp'p'''}{(bd)^2} = \frac{Cp''^2 + Dp'''^2 - 2Rp''p'''}{(cd)^2}.$$

155. Zu zwei gegebenen Flächen zweiten Grades

$$U = 0, \quad V = 0$$

existieren zwei vor Allen wichtige covariante Flächen zweiten Grades, durch welche im Verein mit den Invarianten und den Originalformen alle andern Covarianten ausgedrückt werden können.

Wir wählen als solche die Fläche

$$S = 0,$$

welche der Ort der Pole der Tangentenebenen von V in Bezug auf U, und die Fläche

$$S_1 = 0,$$

welche der Ort der Pole der Tangentenebenen von U in Bezug auf V ist. (Vergl. Beispiel 17, Artikel 117.)

Für die Formen der Gleichungen

$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2, \quad V = a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'w^2$$

findet man leicht

$$S = bcda'x^2 + cdab'y^2 + dabc'z^2 + abcd'w^2,$$
$$S_1 = b'c'd'ax^2 + c'd'a'by^2 + d'a'b'cz^2 + a'b'c'dw^2.$$

Wir bemerken, dass sie mit den Flächen U und V die vier Fundamentalebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

zu den Flächen eines gemeinschaftlichen sich selbst conjugierten Tetraeders haben.

Diese Bemerkung giebt Anlass und Gelegenheit zur Lösung des Problems, für zwei — durch Gleichungen in allgemeiner Form — gegebene Flächen zweiten Grades U und V die Gleichung der vier Ebenen

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$$

zu bestimmen, welche in Bezug auf beide dieselben

Pole haben. Wir bilden die Covarianten S und S_1 beider quadratischer Formen und setzen die Jacobi'sche Determinante der vier Formen

$$U,\ V,\ S,\ S_1$$

mit Null gleich; diess d. h. die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{dU}{dx}, & \frac{dU}{dy}, & \frac{dU}{dz}, & \frac{dU}{dw} \\ \frac{dV}{dx}, & \frac{dV}{dy}, & \frac{dV}{dz}, & \frac{dV}{dw} \\ \frac{dS}{dx}, & \frac{dS}{dy}, & \frac{dS}{dz}, & \frac{dS}{dw} \\ \frac{dS_1}{dx}, & \frac{dS_1}{dy}, & \frac{dS_1}{dz}, & \frac{dS_1}{dw} \end{vmatrix} = 0$$

stellt die vier fraglichen Ebenen dar. **Die Bestimmung der Hauptebenen einer Fläche ist nach Artikel 146 ein specieller Fall hiervon.***)

156. **Die Bedingung, unter welcher die Ebene**

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

die Fläche zweiten Grades

$$U = 0$$

berührt (Artikel 75), **ist eine Contravariante dieser Form vom dritten Grade in den Coefficienten.**

Wir erhalten die Bedingung, unter welcher dieselbe Ebene die Fläche

$$U + \lambda V = 0,$$

d. i. eine Fläche eines einfachen Systems, berührt, durch die Substitution

$$a + \lambda a',\quad b + \lambda b', \text{ etc. für } a,\ b, \text{ etc.};$$

sie ist von der Form

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau_1 + \lambda^3\sigma_1 = 0.$$

Jede der Functionen σ, σ_1, τ, τ_1 enthält die Coefficienten α, β, etc. im zweiten und die Coefficienten von U und V im dritten Grade.

In Gliedern dieser Functionen können wir die **Bedingungen ausdrücken, unter welchen die Schnitte der Flächen** U **und** V **mit der Ebene**

*) Vergl. „Vorlesungen" Artikel 149.

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

bestimmte permanente Relationen zu einander haben können; ganz ebenso, wie für zwei ebene Curven

$$U = 0, \quad V = 0$$

solche Relationen durch die Coefficienten der Discriminante von $U + \lambda V$ ausgedrückt werden können. Man erhält z. B. die Bedingung, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

die Flächen stets in Curven schneidet, welche sich berühren, indem man die Discriminante der Form

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau_1 + \lambda^3\sigma_1$$

nach der Grösse λ bildet. Das Verschwinden dieser Discriminante ist mit andern Worten die Bedingung, unter welcher jene Ebene durch eine Tangente der Durchschnittscurve der Flächen U und V hindurchgeht. Diese Bedingung ist vom achten Grade in den Coefficienten der Ebene $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und vom sechsten Grade in den Coefficienten einer jeden der beiden Flächen. Man schliesst daraus z. B., dass eine beliebige Gerade im Raume von acht Tangenten der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades geschnitten wird.

157. Die Bedingung, unter welcher die Ebene

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0$$

die Fläche zweiten Grades

$$U = 0$$

berührt, kann als die Gleichung der Reciprocalfläche von U in Bezug auf die Directrix

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0$$

angesehen werden. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 400.)

In derselben Art ist dann

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau_1 + \lambda^3\sigma_1 = 0$$

die Gleichung der Reciprocalfläche von

$$U + \lambda V = 0.$$

Weil für ein veränderliches λ diese letztere Gleichung die Flächen eines einfachen Systems repräsentiert, Flächen also, welche eine gemeinschaftliche Durchschnittscurve besitzen, so ist für dieselbe Voraussetzung die Gleichung

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau_1 + \lambda^3\sigma_1 = 0$$

der Ausdruck eines Systems von Flächen zweiten Grades, welche von einer gemeinschaftlichen developpabeln Fläche umhüllt werden. Man findet die Gleichung derselben, indem man die in Bezug auf λ genommene Discriminante von

$$\sigma + \lambda\tau + \lambda^2\tau_1 + \lambda^3\sigma_1$$

mit Null vergleicht.

Nach den Ergebnissen des letzten Artikels ist daher die Gleichung der abwickelbaren Fläche, welche der Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiten Grades nach dem Gesetze der Reciprocität entspricht, vom achten Grade in den neuen Veränderlichen und vom sechsten Grade in den Coefficienten jeder der beiden Flächen.

Nach derselben Methode können wir die Gleichung der developpabeln Fläche bilden, welche die Flächen zweiten Grades U und V umhüllt. Denn wenn

$$\overline{U} = 0, \quad \overline{V} = 0$$

die Gleichungen der Reciprocalflächen von

$$U = 0, \quad V = 0$$

sind, so ist die Reciprocalfläche von

$$\overline{U} + \overline{\lambda V} = 0$$

eine mit U und V in dieselbe developpable Fläche eingeschriebene Fläche und die Discriminante ihrer Gleichung nach dem Parameter λ ist die Gleichung der fraglichen developpabeln Fläche.

158. Unter Voraussetzung der canonischen Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$$

können wir die umschriebene developpable Fläche der durch

$$U = 0, \quad V = 0$$

dargestellten Flächen zweiten Grades leicht in Function von U, V und den beiden Covarianten S und S_1 des Artikel 155 ausdrücken.

Sei

$$\overline{U} = 0$$

die Reciprocalfläche von

$$U = 0,$$

also
$$\overline{U} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + D\delta^2 = 0,$$
wo
$$A = bcd, \text{ etc.},$$
so ist die Reciprocalfläche von
$$\overline{U} = 0$$
durch
$$BCDx^2 + \text{etc.} = 0, \text{ d. h. durch } \varDelta^2 U = 0$$
dargestellt. Ferner ist der Coefficient von λ
$$(BCD' + CDB' + DBC')\, x^2 + \text{etc.}$$
d. i.
$$= \varDelta \left\{ aa' (b'c'd + c'd'b + d'b'c)\, x^2 + \text{etc.} \right\},$$
$$= \varDelta \left\{ (b'c'd'a + c'd'a'b + d'a'b'c + a'b'c'd)\,(ax^2 + \text{etc.}) - (b'c'd'a^2x^2 + \text{etc.}) \right\}.$$

Die fragliche Gleichung der developpabeln Fläche ist daher die Discriminante von
$$\varDelta^2 U + \varDelta\lambda\,(\Theta_1 U - S_1) + \varDelta_1 \lambda^2\,(\Theta V - S) + \varDelta_1{}^2 \lambda^3 V.$$

Wenn man dieselbe von dem Factor
$$\varDelta^2 \varDelta_1{}^2$$
befreit, so ist sie vom zehnten Grade in den Coefficienten jeder der beiden Gleichungen. Die Flächen
$$S = 0, \quad S_1 = 0$$
enthalten offenbar die Berührungscurven der developpablen Fläche mit den gegebenen Flächen U und V, während die developpable Fläche mit der Fläche U überdiess eine Durchschnittscurve hat, die auch von den Flächen
$$U = 0, \quad (\Theta V - S)^2 + 4\varDelta V S_1 = 0$$
gebildet wird. (Vergl. Artikel 160.)

159. Man soll die Bedingung finden, unter welcher eine gegebene gerade Linie die Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades U und V durchschneidet.

Wenn wir voraussetzen, dass wir nach Artikel 76 die Bedingung
$$\varrho = 0$$
bestimmt haben, unter welcher die gegebene gerade Linie die Fläche U berührt, und dass diese Bedingung durch die Substitutionen

$$a + \lambda a', \quad b + \lambda b', \text{ etc. für } a, b, \text{ etc.}$$

in die Form

$$\varrho + \lambda\sigma + \lambda^2\varrho_1 = 0$$

übergeht, in welcher sie sich auf die Flächen eines einfachen Systems bezieht, so erkennen wir, dass für jede gegebene Lage der Geraden zwei Flächen dieses Systems bestimmt werden können, welche sie berühren. Wenn die Linie aber durch die Durchschnittscurve der Flächen U und V selbst hindurchgeht, so müssen die beiden eben bezeichneten Flächen in eine zusammenfallen, weil die Gerade im Allgemeinen nur in ihrem Schnittpunkt mit jener Curve von einer Fläche des Systems berührt werden kann. Die fragliche Bedingung erscheint somit in der Form

$$\sigma^2 = 4\varrho\varrho_1,$$

und sie ist von der zweiten Ordnung in den Coefficienten jeder der beiden Flächen und von der vierten in Bezug auf die Coefficienten jeder der beiden zur Bestimmung der geraden Linie dienenden Ebenen.

Die Bedingung

$$\sigma = 0$$

wird erfüllt, wenn die gerade Linie mit den beiden Flächen U und V vier harmonische Punkte bestimmt.

Für die canonische Form der Gleichungen von U und V

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0, \quad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 + d'w^2 = 0$$

und die allgemeinen Gleichungen der geraden Linie

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w = 0, \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' w = 0$$

ist ϱ (vergl. Artikel 76) durch

$$\Sigma ab\,(\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2$$

darstellbar, wenn wir das Summenzeichen auf die sechs Glieder von gleicher Form

$$cd\,(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2, \text{ etc.}$$

beziehen. Unter derselben Voraussetzung ist σ

$$\Sigma\,(ab' + a'b)\,(\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2$$

und $(\sigma^2 - 4\varrho\varrho_1)$ ist somit

$$\begin{aligned}
&\Sigma\,(ab' - a'b)^2\,(\gamma\delta' - \gamma'\delta)^4 \\
&+ 2\Sigma\,(ab' - a'b)\,(ac' - a'c)\,(\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2\,(\beta\delta' - \beta'\delta)^2 \\
&+ 2\Sigma\Big\{(ad' - a'd)\,(cb' - c'b) \\
&\qquad + (ac' - a'c)\,(db' - d'b)\Big\}\,(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2\,(\gamma\delta' - \gamma'\delta)^2.
\end{aligned}$$

160. Man soll die Gleichung der developpabeln Fläche bestimmen, welche durch die Tangenten der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades erzeugt wird.

Denken wir einen beliebigen Punkt in einer Tangente dieser Curve, so geht nothwendig seine Polarebene in Bezug auf jede der beiden Flächen U und V, die sich in ihr schneiden, durch ihren Berührungspunkt mit der Curve, d. h. die Durchschnittslinie seiner beiden Polarebenen schneidet die Curve. Wir finden also die fragliche Gleichung der developpabeln Fläche, indem wir in die Bedingungsgleichung des letzten Artikels für

$$\alpha,\ \beta,\ \text{etc.},\ \alpha',\ \beta',\ \text{etc.}$$

die Differentialquotienten

$$\frac{dU}{dx},\ \frac{dU}{dy},\ \text{etc.},\ \frac{dV}{dx},\ \frac{dV}{dy},\ \text{etc.}$$

substituieren. Die geforderte Gleichung ist daher vom achten Grade in den Veränderlichen und vom sechsten in den Coefficienten der Gleichungen jeder der beiden Flächen. Unter Voraussetzung der canonischen Formen erhält man sie in folgender Gestalt

$$\begin{aligned} &\Sigma\,(ab'-a'b)^2\,(cd'-c'd)^4\,z^4 w^4 \\ +\ &2\,\Sigma\,(ab'-a'b)\,(ac'-a'c)\,(cd'-c'd)^2\,(bd'-b'd)^2 y^2 z^2 w^4 \\ +\ &2x^2y^2z^2w^2\,\{(ab'-a'b)\,(cd'-c'd)-(ad'-a'd)\,(bc'-b'c)\} \\ \times\ &\{(ad'-a'd)\,(bc'-b'c)-(bd'-b'd)\,(ca'-c'a)\} \\ &\{(bd'-b'd)\,(ca'-c'a)-(ab'-a'b)\,(cd'-c'd)\} = 0. \end{aligned}$$

Wenn in diese Gleichung die Substitution

$$w = 0$$

eingeführt wird, so reduciert sich ihre linke Seite auf ein vollständiges Quadrat und das nämliche tritt ein für jede der entsprechenden Voraussetzungen

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0.$$

Wir schliessen daraus, dass jede der vier Ebenen

$$x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0,\quad w = 0$$

die developpable Fläche in einer ebenen Curve vierten Grades schneidet, welche für dieselbe eine Doppelcurve ist, d. h. deren Punkten je zwei Erzeugende entsprechen*). Es ist auch aus der Symmetrie der Figur a priori zu schliessen, dass durch jeden Punkt in einer der vier Ebenen, durch welchen eine der Tangenten der Curve UV hindurchgeht, auch eine zweite Tangente derselben Curve gezogen werden kann.

Das vorige Ergebniss kann mittelst der beiden covarianten Flächen zweiten Grades ausgedrückt werden. Man erhält die Gleichung unserer developpabeln Fläche in der Form

$$4(SU-\varDelta V^2)(S_1 V-\varDelta_1 U^2)=(S_1 U+SV-\Theta_1 U^2-\Theta V^2+\varPhi UV)^2.$$

In dem durch diese Gleichung dargestellten Orte ist die Curve UV eine Doppellinie**), wie es auch sonst leicht erkannt werden kann. Und derselbe Ort schneidet überdiess die Fläche U in der Durchdringungscurve derselben mit der Fläche vierten Grades

$$(S-\Theta V)^2+4\varDelta S_1 V=0.$$

---

*) Vergl. „Cambridge and Dublin Mathematical Journal" Vol. III, p. 171; obwohl nur der geometrische Beweis hier gegeben ist, waren doch die Resultate vom Verfasser durch wirkliche Bildung der Gleichung der developpabeln Fläche gefunden worden. Vergl. ibid. Vol. II, p. 68. Cayley gab die Gleichungen beider aus der Betrachtung zweier Flächen zweiten Grades entspringenden developpabeln Flächen ibid. Vol. V, p. 50, 55.

**) Wenn eine Fläche durch eine Gleichung von der Form

$$U^2\Phi+UV\Psi+V^2\mathrm{X}=0$$

dargestellt wird, so ist immer die Curve

$$U=0,\quad V=0$$

eine Doppellinie der Fläche.

Die beiden einem ihrer Punkte entsprechenden Tangentenebenen derselben sind durch

$$u^2\Phi'+uv\Psi'+v^2X'=0$$

dargestellt, wenn

$$u=0,\quad v=0$$

die Tangentenebenen der Flächen U und V in jenem Punkte und Φ', Ψ', X' die Resultate der Substitution der Coordinaten des Punktes in die Functionen Φ, Ψ, X bezeichnen. Wenn man diess auf die obige Gleichung anwendet, so erhält man

$$(S_1'u-S'v)^2=0$$

als die Gleichung der Tangentenebenen der Fläche in einem Punkte der als Doppelcurve bezeichneten Curve; beide Tangentenebenen fallen somit zusammen und man bezeichnet deshalb die Curve als eine Cuspidal- oder Rückkehrcurve der Fläche.

Wir bemerken, dass diess genau dieselbe Gleichung ist, welche wir im Artikel 157 gefunden haben; geometrisch wird leicht erkannt, dass diese Linie achten Grades von den acht Tangenten der Curve *UV* gebildet wird, die ihren Durchschnittspunkten mit der Fläche *S* entsprechen.

161. Wir haben zwar in dem Vorigen von der auf das Gesetz der Reciprocität begründeten Methode freien Gebrauch gemacht, wollen aber doch an diesem Orte in ein weiteres Detail eingehen, um die gelegentlichen Anwendungen einer Theorie der Reciprocalflächen näher zu bringen.

Der Durchschnittscurve einer Fläche mit einer beliebigen Ebene entspricht der Tangentenkegel der Reciprocalfläche von dem correspondierenden Punkte aus; insbesondere entspricht der in der unendlich entfernten Ebene liegenden Schnittcurve der Originalfläche der vom Ursprung ausgehende Tangentenkegel der Reciprocalfläche*). Man kann sagen, der Asymptotenkegel der einen Fläche sei reciprok dem Tangentenkegel der andern vom Ursprung aus, wenn man diese Reciprocität in dem Sinne fasst, dass jede Kante des einen Kegels normal ist zur entsprechenden Tangentenebene des andern.

Wenn daher der Ursprung ausserhalb der Originalfläche, d. h. so liegt, dass von ihm an sie reelle Tangenten gezogen werden können, so ist die Reciprocalfläche ein Hyperboloid; sie ist ein Ellipsoid für seine Lage innerhalb der Originalfläche und ein Paraboloid, wenn er dieser Fläche selbst angehört, da dann die unendlich entfernte Ebene sie berühren muss.

Die Reciproke einer Regelfläche, d. i. einer durch Bewegung einer geraden Linie erzeugten Fläche, ist eine Regelfläche; denn einer geraden Linie entspricht eine gerade Linie und der durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugten Fläche entspricht die durch die Bewegung der reciproken Linie entstehende Fläche**). Daher entspricht einem Hyperboloid mit einer

---

*) Vergl. „Analyt. Geometrie der Kegelschnitte“ Artikel 394, 395.

**) Cayley hat bemerkt, dass der Grad einer Regelfläche immer dem Grade ihrer Reciprocalfläche gleich sein muss. Der Grad der Reciprocalfläche ist der Zahl von Tangentenebenen gleich, welche durch

Mantelfläche ein Hyperboloid derselben Art, den Fall ausgenommen, wo der Ursprung der Reciprocität der Fläche selbst angehört, da dann die Reciprocalfläche ein hyperbolisches Paraboloid ist.

Es ist im Artikel 144 bewiesen worden, dass der Tangentenkegel einer Fläche zweiten Grades ein Umdrehungskegel ist, sobald sein Scheitel ein Focalpunkt der Fläche ist; hier ergiebt sich daraus, dass die Reciprocalfläche einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Punkt eines Focalkegelschnittes derselben eine Umdrehungsfläche ist.

162. Die Gleichung der Reciproken einer durch die allgemeine Gleichung dargestellten Fläche zweiten Grades ist im Artikel 75 gegeben worden. Die Reciproke einer centrischen Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen beliebigen Punkt kann auch nach Analogie der für Kegelschnitte angewendeten Methode (vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 398, 399) ausgedrückt werden. Denn die Länge der von irgend einem Punkte auf die Tangentenebene gefällten Normalen ist nach Artikel 85

$$p = \frac{k^2}{\varrho} = \sqrt{(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma)} - (x'\cos\alpha + y'\cos\beta + z'\cos\gamma)$$

und daher die Gleichung der Reciprocalfläche

$$(xx' + yy' + zz' + k^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

163. Die Reciprocalfläche einer Kugel in Bezug auf irgend einen Punkt ist eine Umdrehungsfläche um die transversale Achse. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte“ Artikel 388.)

Wenn wir zwei beliebige Punkte A, B betrachten, so sind ihre Entfernungen vom Ursprung in dem nämlichen Verhältniss wie die

---

eine willkürliche Gerade gehen. Nun würden wir formell beweisen können, es ist aber an sich hinreichend offenbar, dass die Tangentenebene in einem beliebigen Punkt einer Regelfläche die erzeugende Gerade enthält, welche durch diesen Punkt geht. Daher ist der Grad der Reciprocalfläche der Zahl von Erzeugenden gleich, welche eine willkürliche Gerade schneiden. Und diess ist genau dieselbe Zahl, wie die der Punkte, in denen die Gerade die Fläche schneidet, weil jeder Punkt einer Erzeugenden der Fläche angehört.

Normalen, welche von jedem auf die dem andern entsprechende Ebene gefällt werden. Da nun die Entfernung des Centrums einer festen Kugel vom Ursprung und die vom Centrum auf die Tangentenebene derselben gefällte Normale constant sind, so muss für jeden Punkt der Reciprocalfläche die Entfernung vom Ursprung zu der von ihm auf eine feste nämlich die dem Centrum der Kugel entsprechende Ebene gefällten Normalen in einem constanten Verhältniss sein. Der Ort des Punktes ist aber eine Umdrehungsfläche, für welche der Ursprung ein Focalpunkt ist.

Durch die Methode der Reciprocität gelangen wir daher von Eigenschaften der Kugel zu Eigenschaften von Umdrehungsflächen um die transversale Achse. Indem wir Beispiele dafür geben, stellen wir links Eigenschaften der Kugel, rechts die correspondierenden Eigenschaften der Umdrehungsflächen dar.

Beispiel 1. Eine Tangentenebene einer Kugelfläche ist normal zu der geraden Linie, die ihren Berührungspunkt mit dem Centrum verbindet.	Die gerade Verbindungslinie eines Focalpunktes mit irgend einem Punkte der Fläche ist normal zu der Ebene, welche durch den Focalpunkt und die Durchschnittslinie der entsprechenden Directrixebene mit der Tangentenebene des Punktes bestimmt ist.
Beispiel 2. Jeder Tangentenkegel einer Kugel ist ein gerader Kegel, dessen Tangentenebenen mit der Ebene der Berührungscurve gleiche Winkel bilden.	Der Kegel, dessen Scheitel ein Focalpunkt und dessen Basis ein ebener Schnitt einer Umdrehungsfläche ist, ist ein gerader Kegel, welcher die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Pol der Schnittebene zur Achse hat.

Es ist ein specieller Fall dieses letzteren Satzes, dass jeder ebene Schnitt eines Umdrehungsparaboloid auf die Tangentenebene in seinem Scheitel sich als ein Kreis projiciert.

Beispiel 3. Jede Ebene durch das Centrum ist normal zu dem ihr conjugierten Durchmesser.	Jede Ebene durch einen Focalpunkt ist normal zu der geraden Linie, welche ihn mit ihrem Pol verbindet.
Beispiel 4. Die Kreisschnitte eines Kegels, der irgend einen ebenen	Die Focallinien eines Tangentenkegels der Umdrehungsfläche sind die

Schnitt der Kugel zur Basis hat, sind der Ebene desselben parallel.

Beispiel 5. Jede Ebene ist normal zu der geraden Linie, welche das Centrum mit ihrem Pole verbindet.

Beispiel 6. Jeder Cylinder, welcher eine Kugel umhüllt, ist gerade.

Beispiel 7. Irgend zwei einander conjugierte gerade Linien sind rechtwinklig zu einander.

Beispiel 8. Jede eine Kugel umhüllende Fläche zweiten Grades ist eine Umdrehungsfläche.

geraden Linien, welche seinen Scheitel mit den beiden Focalpunkten verbinden.

Die gerade Verbindungslinie eines beliebigen Punktes mit einem Focalpunkte ist normal zu der Ebene, welche durch diesen Focalpunkt und die Durchschnittslinie der entsprechenden Directrixebene mit der Polarebene des Punktes bestimmt ist.

Jeder durch einen Focalpunkt gehende ebene Schnitt hat diesen zum einen Brennpunkt.

Die Ebenen, welche von zwei einander conjugierten geraden Linien mit einem Focalpunkt bestimmt werden, sind normal zu einander.

Wenn eine Fläche zweiten Grades eine Umdrehungsfläche umhüllt, so ist ein Tangentenkegel der ersteren, dessen Scheitel ein Focalpunkt der Letzteren ist, ein Umdrehungskegel.

164. Offenbar ist das Product der Normalen constant, die von den Focalpunkten einer Umdrehungsfläche um die transversale Achse auf irgend eine ihrer Tangentenebenen gefällt werden. Wenn wir nach der im vorigen Artikel angewendeten Methode von dieser Eigenschaft zu ihrer reciproken übergehen, so erkennen wir, dass das Quadrat der Entfernung des Ursprungs von einem beliebigen Punkte der Reciprocalfläche in einem constanten Verhältniss ist zu dem Product der Entfernungen des Punktes von zwei festen Ebenen.

Aus dem vierten Beispiel des letzten Artikels erhellt, dass diese Ebenen die Ebenen der Kreisschnitte für den Asymptotenkegel der Fläche, d. i. dass sie auch die Ebenen der Kreisschnitte der neuen Fläche selbst sind. Die Durchschnittslinie dieser Ebenen ist die reciproke Linie derjenigen Geraden, welche die beiden Focalpunkte verbindet, d. h. von der Achse der Umdrehungsfläche.

Wir wissen aus Artikel 143, dass die eben bewiesene Eigenschaft jedem Punkte des Focalkegelschnitts angehört, welcher durch die Kreispunkte der Fläche geht*) und erkennen nun, dass die Reciproke einer beliebigen Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Punkt des durch die Kreispunkte gehenden Focalkegelschnitts eine Umdrehungsfläche ist, welche die transversale Achse zur Drehungsachse hat; dass sie aber in Bezug auf einen Punkt des andern Focalkegelschnitts, oder, wie man sagen kann, in Bezug auf einen modularen Focalpunkt eine Umdrehungsfläche ist, welche die conjugierte Achse zu ihrer Achse hat.

Man geht daher von Eigenschaften der Umdrehungsflächen nach den Gesetzen der Reciprocität zu entsprechenden Eigenschaften irgend einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen Focalpunkt und die entsprechende Directrix, und in jedem Falle ist die Achse der Umdrehungsfläche die Reciproke der dem gegebenen Focalpunkt entsprechenden Directrix. Die Achse der Umdrehungsfläche ist der Tangente des Focalkegelschnitts in dem betrachteten Focalpunkt parallel. (Vergl. Artikel 137.)

In den folgenden Beispielen stehen links die Eigenschaften der Umdrehungsflächen, rechts der entsprechenden Eigenschaften der Flächen zweiten Grades im Allgemeinen.

Beispiel 1. Der Tangentenkegel einer Umdrehungsfläche aus einem Punkte der Achse ist ein gerader Kegel, dessen Tangentenebenen mit der zur Achse normalen Ebene der Berührungscurve gleiche Winkel bilden.

Jeder Kegel, der einen Focalpunkt zum Scheitel und einen die entsprechende Directrix enthaltenden ebenen Schnitt einer Fläche zweiten Grades zur Basis hat, ist ein gerader Kegel, welcher die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Pol der Schnittebene zur Achse hat; diese letztere Gerade ist normal zu der durch den Focalpunkt und die Directrix bestimmten Ebene.

Beispiel 2. Jede Tangentenebene ist normal zu der durch ihren Berührungspunkt und die Achse bestimmten Ebene.

Die Gerade, welche einen Focalpunkt mit einem beliebigen Punkte der Fläche verbindet, ist normal zu der Verbindungslinie des Focalpunk-

*) Es geschah auf diesem Wege, dass zuerst diese Eigenschaft und die Unterscheidung der beiden Arten von Focalpunkten vom Verfasser gefunden wurde.

Beispiel 3. Die Polarebene eines Punktes ist zu der durch ihn mit der Achse bestimmten Ebene normal.

Beispiel 4. Die durch einen Focalpunkt mit irgend zwei conjugierten Geraden bestimmten Ebenen sind zu einander normal.

Beispiel 5. Wenn ein Kegel einer Umdrehungsfläche umgeschrieben ist, so ist eine seiner Hauptebenen durch den Scheitel und die Achse bestimmt und eine andere ist der Ebene der Berührung parallel.

Beispiel 6. Jeder aus einem Focalpunkt über einem ebenen Schnitt der Umdrehungsfläche beschriebene Kegel ist gerade*).

Beispiel 7. Der Ort des Durchschnittspunktes von drei auf einander normalen Tangentenebenen eines Paraboloids ist eine Ebene.

tes mit dem Durchschnittspunkt der entsprechenden Tangentenebene und der Directrix.

Die gerade Linie, welche einen beliebigen Punkt mit einem Focalpunkt verbindet, ist normal zu der geraden Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Durchschnittspunkt seiner Directrix mit der Polarebene des Punktes.

Eine den Kreisschnitten parallele und durch eine Directrix gehende Ebene wird von zwei einander conjugierten Geraden in Punkten geschnitten, welche an dem entsprechenden Focalpunkt einen rechten Winkel bestimmen.

Der aus einem Focalpunkt über einem ebenen Schnitt einer Fläche zweiten Grades beschriebene Kegel hat zur einen Achse die gerade Verbindungslinie des Focalpunkts mit dem Pol der Schnittebene und zur andern die Verbindungslinie des Focalpunkts mit dem Durchschnittspunkte der entsprechenden Directrix und der Schnittebene.

Der aus einem Focalpunkt über der Durchschnittscurve einer durch die entsprechende Directrix gehenden und den Kreisschnitten parallelen Ebene mit einem beliebigen Tangentenkegel der Fläche beschriebene Kegel ist gerade.

Wenn durch einen Punkt einer Fläche zweiten Grades drei zu einander normale Gerade gelegt sind, so geht die durch ihre andern Schnittpunkte in der Fläche bestimmte Ebene durch einen festen Punkt. (Vgl. Artikel 117, Beispiel 9.) Wenn jener Punkt nicht in der Fläche liegt, so umhüllt die Ebene eine Umdrehungsfläche.

*) Seine Achse enthält den Pol der Schnittebene.

Beispiel 8. Wenn eine Fläche zweiten Grades eine Umdrehungsfläche umhüllt, so ist die Achse dieser Letzteren parallel einer Hauptebene der Ersteren.

Wenn zwei Flächen zweiten Grades einander umhüllen, so hat ein aus einem Focalpunkt der einen beschriebenen Tangentenkegel der andern die Verbindungslinie des Focalpunktes mit dem Durchschnittspunkt der entsprechenden Directrix mit der Ebene der Berührung zur einen Achse.

VIII. Kapitel.

Confocale Flächen zweiten Grades.

165. Wir wollen in diesem Kapitel eine Uebersicht derjenigen Eigenschaften der Flächen zweiten Grades geben, welche den Eigenschaften confocaler Kegelschnitte analog sind. Wir nehmen dazu unsern Ausgang von einer, von derjenigen der Artikel 136 f. unabhängigen Methode, durch welche wir auch zur Betrachtung der Focalkegelschnitte gelangen.

Concentrische und coaxiale Kegelschnitte werden als confocal bezeichnet, wenn die Differenz der Quadrate ihrer Halbachsen die nämliche ist; d. h. die mit der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

confocalen Kegelschnitte sind durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 \pm \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 \pm \lambda^2} = 1$$

gegeben. So lange λ^2 das positive Zeichen erhält und so lange bei negativem Zeichen λ^2 numerisch kleiner als b^2 ist, ist der confocale Kegelschnitt eine Ellipse; wenn λ^2 negativ und zwischen b^2 und a^2 enthalten ist, so ist der confocale Kegelschnitt eine Hyperbel und für $\lambda^2 > a^2$ ist sie imaginär.

Für $\lambda^2 = b^2$ reduciert sich die Gleichung auf

$$y^2 = 0,$$

d. h. die Achse der x ist die Grenze, welche die confocalen Ellipsen von den confocalen Hyperbeln trennt. Aber die beiden Brennpunkte gehören doch in einem besonderen Sinne zu ihr.

Denn man kann durch einen gegebenen Punkt (x', y') im Allgemeinen zwei zu einem gegebenen confocale Kegelschnitte legen, weil man zur Bestimmung von λ^2 eine quadratische Gleichung

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y'^2}{b^2 - \lambda^2} = 1$$

erhält, d. i.

$$\lambda^4 - \lambda^2 (a^2 + b^2 - x'^2 - y'^2) + a^2 b^2 - b^2 x'^2 - a^2 y'^2 = 0.$$

Für

$$y' = 0$$

wird sie auf

$$(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - a^2 + x'^2) = 0$$

reduciert, so dass

$$\lambda^2 = b^2$$

eine ihrer Wurzeln ist, und für

$$x'^2 = a^2 - b^2$$

auch die zweite Wurzel diesen Werth

$$\lambda^2 = b^2$$

erhält, zur Bestätigung des speciellen Sinnes, in welchem die Brennpunkte dem Werthe $\lambda^2 = b^2$ entsprechen. Wenn wir in der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 1,$$

$$\lambda^2 = b^2, \quad \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} = 0$$

machen, so erhalten wir die Gleichung der beiden Brennpunkte

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} = 1.$$

166. In derselben Art nennen wir zwei concentrische und coaxiale Flächen zweiten Grades confocal, wenn die Differenzen der Quadrate der Achsen für beide Flächen dieselben sind; so dass für das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die allgemeine Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 \pm \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 \pm \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 \pm \lambda^2} = 1$$

alle confocalen Flächen repräsentiert.

Für das positive Zeichen von λ^2 und für negative Werthe desselben, welche kleiner sind als c^2, ist die Fläche ein Ellipsoid. Eine Kugel von unendlichem Halbmesser ist die Grenze der Ellipsoide des Systems, denn sie entspricht dem speciellen Werthe $\lambda^2 = \infty$.

Für negative Werthe von λ^2 zwischen den Grenzen c^2 und b^2 repräsentiert die Gleichung ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche und für Werthe zwischen den Grenzen b^2 und a^2 ein Hyperboloid mit zwei Mantelflächen. Dem Grenzwerthe $\lambda^2 = c^2$ entspricht die Ebene

$$z = 0$$

als Grenze zwischen den Ellipsoiden und den einfachen Hyperboloiden des Systems; wenn wir aber in der allgemeinen Gleichung die Substitutionen

$$\lambda^2 = c^2, \quad \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 0$$

vollziehen, so entsprechen die Punkte des so erhaltenen Kegelschnitts

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$$

in einem speciellen Sinne jener Grenze zwischen den Ellipsoiden und Hyperboloiden, welcher wir eben gedacht haben. Denn durch einen Punkt (x', y', z') lassen sich im Allgemeinen drei einer gegebenen Fläche zweiten Grades confocale Flächen legen, weil für λ^2 als die unbekannte Grösse eine cubische Bedingungsgleichung

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y'^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z'^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$$

oder

$$x'^2 (b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2) + y'^2 (c^2 - \lambda^2)(a^2 - \lambda^2) + z'^2 (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)$$
$$= (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2)$$

gefunden wird. Für $z' = 0$ ist eine der Wurzeln dieser Gleichung

$$\lambda^2 = c^2$$

und die beiden andern bestimmen sich aus der reducierten Gleichung

$$x'^2 (b^2 - \lambda^2) + y'^2 (a^2 - \lambda^2) = (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2).$$

Wenn

$$\frac{x'^2}{a^2 - c^2} + \frac{y'^2}{b^2 - c^2} = 1$$

ist, so wird eine Wurzel dieser Gleichung

$$\lambda^2 = c^2,$$

und diess bezeichnet den speciellen Sinn, in welchem die Punkte der Focalellipse diesem Grenzwerthe entsprechen.

In analoger Weise trennt die Ebene

$$y = 0$$

die Hyperboloide mit einer Mantelfläche von denen mit zwei Mantelflächen und die Focalhyperbel in dieser Ebene

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

ist diesem Grenzwerthe in der nämlichen speciellen Art verbunden.

Der Focalkegelschnitt in der dritten Hauptebene, welchen die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2 - a^2} + \frac{z^2}{c^2 - a^2} = 1$$

bezeichnen würde, ist imaginär.*)

167. Die drei durch einen Punkt gehenden mit einer gegebenen Fläche zweiten Grades confocalen Flächen sind respective ein Ellipsoid, ein Hyperboloid mit einer Mantelfläche und ein Hyperboloid mit zwei Mantelflächen.

Denn wenn wir in die zur Bestimmung von λ^2 dienende cubische Gleichung die successiven Substitutionen

$$\lambda^2 = a^2, \quad \lambda^2 = b^2, \quad \lambda^2 = c^2, \quad \lambda^2 = -\infty$$

vollziehen, so erhalten wir Resultate von den respectiven Vorzeichen

$$+, \quad -, \quad +, \quad -,$$

welches beweist, dass diese Gleichung stets drei reelle Wurzeln hat, von denen eine kleiner als c^2, eine zweite zwischen c^2 und b^2, und eine dritte zwischen b^2 und a^2 enthalten ist. Wie im letzten

---

*) Dieselbe Sache spricht sich auch folgendermassen aus: In jedem Punkte einer Hauptebene treffen ausser dem Focalkegelschnitt derselben zwei confocale Flächen zusammen. Durch jeden Punkt einer Hauptachse geht eine einzige confocale Fläche; die beiden in ihr sich schneidenden Focalkegelschnitte repräsentieren die andern. Im Centrum der Flächen schneiden sich die drei Focalkegelschnitte.

Artikel erhellt daraus, dass die diesen Werthen entsprechenden Flächen respective ein Ellipsoid, ein einfaches und ein zweifaches Hyperboloid sind.

168. Ein anderer passender Weg zur Auflösung des Problems, durch einen gegebenen Punkt die zu einer gegebenen Fläche zweiten Grades confocalen Flächen zu beschreiben, besteht darin, die primäre Achse der gesuchten Fläche als unbekannte Grösse zu wählen. Weil dann

$$a'^2 - b'^2 \quad \text{und} \quad a'^2 - c'^2$$

gegeben sind, welche wir durch h^2 und k^2 respective bezeichnen wollen, so haben wir die Gleichung

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{a'^2 - h^2} + \frac{z'^2}{a'^2 - k^2} = 1$$

oder

$$\begin{aligned} & a'^6 - a'^4 (h^2 + k^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2) \\ & \quad + a'^2 \left\{h^2k^2 + x'^2 (h^2 + k^2) + y'^2k^2 + z'^2h^2\right\} - x'^2h^2k^2 = 0. \end{aligned}$$

Wir können auf Grund dieser Gleichung die Coordinaten des Durchschnittspunktes von drei confocalen Flächen in Function ihrer Achsen bestimmen; denn wenn a'^2, a''^2, a'''^2 die Wurzeln der obigen Gleichung sind, so giebt ihr letztes Glied

$$x'^2 h^2 k^2 = a'^2 a''^2 a'''^2,$$

d. h.

$$x'^2 = \frac{a'^2 a''^2 a'''^2}{(a^2 - b^2)\,(a^2 - c^2)}.$$

Und da wir ebenso wohl b^2 oder c^2 als unsere unbekannte Grösse ansehen konnten, so erhalten wir die entsprechenden Ausdrücke

$$y'^2 = \frac{b'^2 b''^2 b'''^2}{(b^2 - a^2)\,(b^2 - c^2)}, \qquad z'^2 = \frac{c'^2 c''^2 c'''^2}{(c^2 - a^2)\,(c^2 - b^2)}.\text{*)}$$

---

*) Diese Ausdrücke erlauben eine einfache Bestimmung der Coordinaten der Kreispunkte; denn diese sind die Durchschnittspunkte der Focalhyperbel mit der Fläche (Artikel 139); da nun für die Focalhyperbel

$$a''^2 = a'''^2 = a^2 - b^2$$

ist, so sind die Coordinaten der Kreispunkte

$$x^2 = a^2 \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y = 0, \quad z^2 = c^2 \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

NB. Wir haben in dem Vorigen b'^2, b''^2, etc. als algebraische Grössen d. h. mit Einschluss ihrer Zeichen vorausgesetzt, so dass z. B. c''^2 als zu einem Hyperboloid mit einer Mantelfläche gehörend wesentlich negativ ist, wie auch b'''^2 und c'''^2 es sind.

Die Relation

$$x'^2 h^2 k^2 = a'^2 a''^2 a'''^2$$

giebt für

$$a' = \text{const.}, \quad x' = \text{const.}$$

$$hk = \text{const.} = a'' a''';$$

wenn also durch die Punkte eines Schnittes einer Fläche zweiten Grades, der einer Hauptebene parallel ist, die confocalen Flächen gelegt werden, so wird durch die Scheitel dieser Flächen in der zur besagten Hauptebene normalen Achse eine Involution bestimmt. Die in a'^2 cubische Gleichung dieses Artikels giebt aber überdiess die Relation

$$a'^2 a''^2 + a''^2 a'''^2 + a'''^2 a'^2 = h^2 k^2 + x'^2 (h^2 + k^2) + y^2 k^2 + z'^2 h^2$$

und daher für

$$x'^2 (h^2 + k^2) + y'^2 k^2 + z'^2 h^2 = \text{const.},$$

d. h. für Punkte eines Ellipsoids

$$a'^2 a''^2 + a''^2 a'''^2 + a'''^2 a'^2 = \text{const.},$$

oder: Für alle Punkte des Ellipsoids

$$(h^2 + k^2)\, x^2 + k^2 y^2 + h^2 z^2 = \text{const.}$$

ist die Quadratsumme der drei Rechtecke, welche sich aus je zweien der grossen Halbachsen der drei durch jeden von ihnen gehenden confocalen Flächen bilden lassen, constant.

Da nach diesen Relationen die Gleichung einer Kugel durch

$$a'^2 + a''^2 + a'''^2 = \text{const.}$$

dargestellt werden kann, so ist für alle Punkte einer aus dem Anfangspunkt der Coordinaten beschriebenen Kugel die Quadratsumme der grossen Halbachsen der durch sie gehenden confocalen Flächen constant.

Endlich ist nach denselben Relationen für alle Punkte einer zu einer Coordinatenebene parallelen Ebene das Product der drei zu ihr normalen Halbachsen der durch einen ihrer Punkte gehenden confocalen Flächen constant.

169. Dieselbe cubische Gleichung erlaubt uns auch, den Radius vector des Durchschnittspunktes confocaler Flächen in Function der Achsen auszudrücken.

Denn das zweite Glied derselben giebt aus

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + (a^2 - b^2) + (a^2 - c^2) = a'^2 + a''^2 + a'''^2$$

oder

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a'^2 + b''^2 + c'''^2.$$

Dieser Ausdruck hätte auch direct abgeleitet werden können, mittelst der für x'^2, y'^2, z'^2 im letzten Artikel gegebenen Werthe; es geschieht durch ein Verfahren, welches auch zur Reduction anderer symmetrischer Functionen dieser Coordinaten angewendet werden kann. Denn indem man die vorigen Werthe substituiert und auf eine gemeinschaftliche Benennung reduciert, wird $x'^2 + y'^2 + z'^2$

$$\frac{a'^2 a''^2 a'''^2 (b^2 - c^2) + b'^2 b''^2 b'''^2 (c^2 - a^2) + c'^2 c''^2 c'''^2 (a^2 - b^2)}{(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)(a^2 - b^2)}$$

Da der Zähler für jede der Voraussetzungen

$$b^2 = c^2, \quad c^2 = a^2, \quad a^2 = b^2$$

mit Null identisch wird, so muss er durch den Nenner ohne Rest theilbar sein. Diese Division kann dann in folgender Weise vollzogen werden: Irgend ein Glied, z. B. $a'^2 a''^2 a'''^2 c^2$ giebt, durch $(a^2 - b^2)$ oder das diesem Gleiche $(a'^2 - b'^2)$ dividiert, einen Quotienten $a''^2 a'''^2 c^2$ und einen Rest $b'^2 a''^2 a'''^2 c^2$; dieser Rest giebt, durch $(a''^2 - b''^2)$ dividiert, einen Quotienten $b'^2 a'''^2 c^2$ und einen Rest $b'^2 b''^2 a'''^2 c^2$, welcher in derselben Weise durch $(a'''^2 - b'''^2)$ dividiert, einen Quotient $b'^2 b''^2 c^2$ und einen Rest $b'^2 b''^2 b'''^2 c^2$ giebt, der durch ein anderes Glied des Dividenden aufgehoben wird. Indem man in dieser Weise fortfährt, erhält man das früher gegebene Resultat.

170. Zwei confocale Flächen schneiden einander überall rechtwinklig.

Wenn (x', y', z') ein gemeinschaftlicher Punkt beider Flächen ist und p' und p'' die Längen der Normalen bezeichnen, welche vom Centrum auf die Tangentenebenen beider in diesem Punkte gefällt werden, so sind nach Artikel 85 die Richtungscosinus dieser zwei Normalen

$$\frac{p'x'}{a'^2}, \quad \frac{p'y'}{b'^2}, \quad \frac{p'z'}{c'^2}; \quad \frac{p''x'}{a''^2}, \quad \frac{p''y'}{b''^2}, \quad \frac{p''z'}{c''^2}.$$

Sie sind zu einander rechtwinklig, wenn die Bedingung (Artikel 13)

$$p'p'' \left\{ \frac{x'^2}{a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^2} \right\} = 0$$

erfüllt ist. Da aber die Coordinaten x', y', z' den Gleichungen beider Flächen genügen müssen, so haben wir

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1, \quad \frac{x''^2}{a''^2} + \frac{y''^2}{b''^2} + \frac{z''^2}{c''^2} = 1$$

und erhalten durch Subtraction dieser Gleichungen und nach der Relation

$$a''^2 - a'^2 = b''^2 - b'^2 = c''^2 - c'^2$$

als Rest

$$(a''^2 - a'^2)\left\{\frac{x'^2}{a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^2}\right\} = 0,$$

welches die behauptete Rechtwinkligkeit bestätigt.

Im Durchschnittspunkt von drei confocalen Flächen schneidet daher jede Tangentenebene der einen die beiden Tangentenebenen der andern rechtwinklig oder die Tangentenebene der einen Fläche enthält die Normalen der beiden andern Flächen.

171. Wenn eine Ebene durch das Centrum zu einer Tangentenebene einer Fläche zweiten Grades parallel geht, so sind die Achsen des von ihr gebildeten Schnittes den Normalen der beiden confocalen Flächen parallel, welche durch den Berührungspunkt gehen.

Da bereits bewiesen worden ist, dass die Parallelen zu den genannten Normalen rechtwinklig zu einander sind, so bleibt nur zu beweisen übrig, dass sie conjugierte Durchmesser ihrer Schnittcurve sind. Nun ist nach Artikel 90 die Bedingung, unter welcher zwei Linien conjugierte Durchmesser sind, durch

$$\frac{\cos\alpha\ \cos\alpha'}{a'^2} + \frac{\cos\beta\ \cos\beta'}{b'^2} + \frac{\cos\gamma\ \cos\gamma'}{c'^2} = 0$$

dargestellt und wir haben also für die Richtungscosinus

$$\frac{p''x'}{a''^2},\ \frac{p''y'}{b''^2},\ \frac{p''z'}{c''^2};\ \frac{p'''x'}{a'''^2},\ \frac{p'''y'}{b'''^2},\ \frac{p'''z'}{c'''^2}$$

zu beweisen, dass

$$p''p'''\left\{\frac{x'^2}{a'^2 a''^2 a'''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2 b'''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^2 c'''^2}\right\} = 0$$

ist. Aber die Wahrheit dieser Gleichung ergiebt sich ohne Weiteres aus der Subtraction der zwei Gleichungen des letzten Artikels

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^2} = 0,$$

$$\frac{x'^2}{a'^2 a'''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b'''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c'''^2} = 0.$$

172. **Man soll die Längen der Achsen des Centralschnittes einer Fläche zweiten Grades durch eine der Tangentenebene im Punkte (x', y', z') parallele Ebene bestimmen.**

Aus der Gleichung der Fläche ergiebt sich die Länge eines centralen Radius vector von den Richtungscosinus α, β, γ durch die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} + \frac{\cos^2 \beta}{b^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{c^2},$$

und mittelst der für α, β, γ im letzten Artikel gegebenen Werthe finden wir für die Länge einer dieser Achsen

$$\frac{1}{\varrho^2} = p''^2 \left\{ \frac{x'^2}{a'^2 a''^4} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^4} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^4} \right\}.$$

Nun gelten die Gleichungen

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^2} = 0,$$

$$\frac{x'^2}{a''^4} + \frac{y'^2}{b''^4} + \frac{z'^2}{c''^4} = \frac{1}{p''^2},$$

und wir erhalten durch ihre Subtraction

$$\frac{x'^2}{a'^2 a''^4} + \frac{y'^2}{b'^2 b''^4} + \frac{z'^2}{c'^2 c''^4} = \frac{1}{p''^2 (a'^2 - a''^2)},$$

und durch Substitution dieses Ausdrucks in den vorher für $\frac{1}{\varrho^2}$ bestimmten Werth

$$\varrho^2 = a'^2 - a''^2.$$

In derselben Art finden wir für das Quadrat der andern Halbachse

$$\varrho^2 = a'^2 - a'''^2.$$

Wenn also zwei confocale Flächen zweiten Grades sich durchschneiden, so ist ein Radius der einen, welcher der Normale der andern in einem Punkte ihrer Durchschnittscurve parallel ist, von constanter Länge. Diese Halbdurchmesser bilden daher auf der Fläche eine sphärische Curve, und beiden Systemen der Durchschnittslinie der Fläche mit den ihr confocalen Flächen entsprechen so Systeme von sphärischen Curven auf ihr.

173. Da das Product der Achsen eines Centralschnittes mit der Normalen einer parallelen Tangentenebene dem Producte der Achsen abc gleich ist (Artikel 91), so erhalten wir unmittelbar Ausdrücke für die Längen p', p'', p'''. Wir haben

$$p'^2 = \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{(a'^2 - a''^2)(a'^2 - a'''^2)},$$

$$p''^2 = \frac{a''^2 b''^2 c''^2}{(a''^2 - a'^2)(a''^2 - a'''^2)},$$

$$p'''^2 = \frac{a'''^2 b'''^2 c'''^2}{(a'''^2 - a'^2)(a'''^2 - a''^2)}.$$

Diese Werthe hätten auch durch Substitution der früher für x'^2, y'^2, z'^2 gegebenen Ausdrücke in die Gleichung

$$\frac{1}{p'^2} = \frac{x'^2}{a'^4} + \frac{y'^2}{b'^4} + \frac{z'^2}{c'^4}$$

erhalten werden können, indem man den erhaltenen Werth von p'^2 durch die Methode des Artikel 169 reduciert.

Der Leser wird die Symmetrie bemerken, welche zwischen diesen Werthen von p'^2, p''^2 und p'''^2 und den für x'^2, y'^2, z'^2 gefundenen stattfindet.

Wenn wir die drei Tangentenebenen als Coordinatenebenen betrachten, so werden die Normalen p', p'', p''' die Coordinaten des Centrums der Fläche. Die Analogie zwischen den Werthen für p', p'', p''' und denen für x', y', z' kann daher folgendermassen ausgedrückt werden: Mit dem Punkte (x', y', z') als Centrum können drei confocale Flächen beschrieben werden, welche die drei Tangentenebenen zu Hauptebenen haben und sich in dem Centrum des Originalsystems durchschneiden. Die Achsen des neuen Systems von Confocalen sind

$$a', a'', a'''; \quad b', b'', b'''; \quad c', c'', c'''.$$

Die drei Tangentenebenen des neuen Systems sind die drei Hauptebenen des Originalsystems.

Wenn ein Centralschnitt zu einer dieser Hauptebenen z. B. der Ebene xy parallel ist, so bestimmt er in der Fläche, zu welcher sie eine Tangentenebene ist, einen Kegelschnitt, für welchen nach Artikel 172 die Quadrate der Achsen sind

$$a^2 - b^2, \quad a^2 - c^2,$$

d. h. in andern Worten, dieser Schnitt ist der Focalellipse gleich, wie auch der Punkt (x', y', z') gelegen sei. Ebenso ist der der Ebene xz parallele Schnitt der Focalhyperbel gleich.

174. Wenn D die Länge des Durchmessers einer Fläche zweiten Grades bezeichnet, welcher der Tangente in einem Punkte ihres Durchschnitts mit einer confocalen Fläche parallel ist und wenn p die Normale auf ihre Tangentenebene in diesem Punkte darstellt, so ist für alle Punkte der Durchschnittscurve

$$pD = \text{const.}$$

Denn die Tangente in irgend einem Punkte der Durchschnittscurve zweier Flächen ist die Durchschnittslinie ihrer Tangentenebenen in diesem Punkte, und sie ist in diesem Falle normal zu der dritten durch denselben Punkt gehenden confocalen Fläche. (Artikel 170) Nach Artikel 172 ist daher

$$D^2 = a'^2 - a'''^2$$

und somit nach Artikel 173

$$p^2 D^2 = \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{a'^2 - a''^2},$$

welches für gegebene a', a'' eine Constante ist.

175. Man soll den Ort der Pole einer gegebenen Ebene in Bezug auf ein System confocaler Flächen bestimmen.

Sei

$$Ax + By + Cz = 1$$

die betrachtete Ebene und (ξ, η, ζ) ihr Pol, so muss die Gleichung

$$\frac{x\xi}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y\eta}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z\zeta}{c^2 - \lambda^2} = 1$$

mit der ersteren identisch werden, d. h. man muss haben

$$\frac{\xi}{a^2 - \lambda^2} = A, \quad \frac{\eta}{b^2 - \lambda^2} = B, \quad \frac{\zeta}{c^2 - \lambda^2} = C.$$

Die Elimination von λ^2 zwischen diesen Gleichungen liefert für die Gleichungen des Ortes

$$\frac{x}{A} - a^2 = \frac{y}{B} - b^2 = \frac{z}{C} - c^2.$$

Der fragliche Ort ist daher eine zur gegebenen Ebene normale Gerade.

Diess Theorem enthält implicite die Auflösung der Aufgabe: Man soll eine Fläche zweiten Grades bestimmen, die einer gegebenen confocal ist und eine gegebene Ebene berührt, denn da der Pol der Tangentenebene einer Fläche der Berührungspunkt derselben ist, so erhellt zunächst, dass nur eine Fläche der verlangten Art existiert, und dass ihr Berührungspunkt mit der Ebene durch den Durchschnitt des gefundenen Ortes mit ihr bestimmt wird.

Man kann das Theorem dieses Artikels auch so aussprechen: Der Ort des Pols der Tangentenebene einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf eine zu ihr confocale Fläche ist die Normale der ersten Fläche.

176. Man soll die Entfernung zwischen dem Berührungspunkt einer Tangentenebene und ihrem in Bezug auf eine confocale Fläche genommenen Pol bestimmen.

Seien x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes einer Tangentenebene der Fläche von den Achsen a, b, c, und ξ, η, ζ die des Pols derselben Ebene in Bezug auf die confocale Fläche von den Achsen a', b', c'; so gelten wie im letzten Artikel die Gleichungen

$$\frac{x'}{a^2} = \frac{\xi}{a'^2}, \quad \frac{y'}{b^2} = \frac{\eta}{b'^2}, \quad \frac{z'}{c^2} = \frac{\zeta}{c'^2},$$

also

$$\xi - x' = \frac{a'^2 - a^2}{a^2} x', \quad \eta - y' = \frac{b'^2 - b^2}{b^2} y', \quad \zeta - z' = \frac{c'^2 - c^2}{c^2} z',$$

und durch Quadrieren und nachherige Addition

$$D^2 = (a'^2 - a^2)^2 \left\{ \frac{x'^2}{a^4} + \frac{y'^2}{b^4} + \frac{z'^2}{c^4} \right\},$$

oder

$$D = \frac{a' - a^2}{p},$$

wenn p die vom Centrum auf die Ebene gefällte Normale bezeichnet.

177. Die Achsen des Tangentenkegels einer Fläche zweiten Grades sind die Normalen der drei confocalen Flächen, welche durch den Scheitel des Kegels hindurchgehen.

Betrachten wir die Tangentenebene einer von diesen durch den Scheitel (x', y', z') gehenden Fläche, so liegt der Pol dieser Ebene in Bezug auf die Originalfläche nach Artikel 61 in der Polarebene von (x', y', z') und nach Artikel 175 in der Normale der confocalen Fläche; es ist daher der Punkt, in welchem diese Normale die Polarebene von (x', y', z') d. h. die Ebene der Berührungscurve des Kegels durchschneidet.

Aus Artikel 60 folgt dann, dass die drei Normalen die Ebene der Berührung in drei Punkten schneiden, von denen jeder der Pol der Verbindungslinie der beiden andern in Bezug auf die von ihrer Ebene bestimmte Schnittcurve ist; da dieselbe aber zugleich ein Schnitt des Kegels ist, so sind nach Artikel 67 die bezeichneten Normalen ein System conjugierter Durchmesser der Kegelfläche und insbesondere, weil jede von ihnen zu den beiden andern rechtwinklig ist, die Achsen derselben.

178. Wenn durch eine beliebige Tangente einer Fläche zweiten Grades zwei Tangentenebenen an eine zu ihr confocale Fläche gelegt werden, so bilden dieselben mit der Tangentenebene der ersten Fläche in dem gegebenen Punkte gleiche Winkel.

Denn diese Tangentenebene ist nach dem letzten Artikel eine Hauptebene des Kegels, welcher den gegebenen Punkt zum Scheitel hat und die confocale Fläche berührt, während die beiden Tangentenebenen des Satzes Tangentenebenen dieses Kegels sind; und zwei Tangentenebenen eines Kegels, welche durch eine in einer Hauptebene enthaltene Gerade hindurchgehen, machen mit dieser Ebene gleiche Winkel.

Die Focalkegel, d. h. diejenigen Kegel, welche aus beliebigen Scheitelpunkten über den Focalkegelschnitten einer Fläche zweiten Grades beschrieben werden, sind die Grenzfälle von Kegeln, welche die confocalen Flächen umhüllen und die zwei Tangentenebenen eines Focalkegels, welche durch eine beliebige Tangente einer Fläche zweiten Grades gelegt werden können, machen daher gleiche Winkel mit der Tangentenebene der Fläche, welcher jene Tangente angehört.

Wenn die Fläche zweiten Grades selbst ein Kegel ist, so reduciert sich ihr Focalkegelschnitt auf zwei gerade Linien und das eben ausgesprochene Theorem lautet in diesem Falle dahin, dass jede Tangentenebene eines Kegels mit denjenigen Ebenen gleiche Winkel bildet, welche die Berührungsseite mit je einer der Focallinien bestimmt. Wir werden diesen Satz im IX. Kapitel unabhängig beweisen.

179. Aus Artikel 177 folgt, dass die Gleichung des Tangentenkegels einer Fläche zweiten Grades die Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$$

annehmen muss, wenn die Normalen der durch seinen Scheitel gehenden confocalen Flächen als Coordinatenachsen gewählt werden. Indem wir diess durch eine wirkliche Transformation bestätigen, erhalten wir zugleich einen unabhängigen Beweis des Satzes des Artikel 177 und die Kenntniss der wirklichen Werthe von A, B, C, welche uns später mehrfach von Nutzen sein wird.

Die im Artikel 74 gegebene Gleichung des Tangentenkegels ist

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$
$$= \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} - 1\right)^2,$$

und sie wird, zu parallelen Achsen durch den Scheitelpunkt des Kegels transformiert, in die Form

$$\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$= \left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right)^2$$

übergeführt. Um sie nun auf die drei bezeichneten Normalen als Achsen zu beziehen, haben wir die Richtungscosinus dieser Linien in die Formeln des Artikel 15 einzusetzen und erkennen, dass wir

$$\text{für } x \quad \frac{p'x'}{a'^2}\, x + \frac{p''x'}{a''^2}\, y + \frac{p'''x'}{a'''^2}\, z,$$
$$\text{für } y \quad \frac{p'y'}{b'^2}\, x + \frac{p''y'}{b''^2}\, y + \frac{p'''y'}{b'''^2}\, z,$$
$$\text{für } z \quad \frac{p'z'}{c'^2}\, x + \frac{p''z'}{c''^2}\, y + \frac{p'''z'}{c'''^2}\, z$$

zu substituieren haben.

180. Um das Resultat dieser Substitution leichter zu erkennen, werden die folgenden Formeln nützlich sein. Ist

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 = S^{*)},$$

so haben wir wegen

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} - 1 = 0$$

$$\frac{x'^2}{a^2 a'^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2} = \frac{S}{a'^2 - a^2};$$

wir finden in gleicher Art

$$\frac{x'^2}{a^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c^2 c''^2} = \frac{S}{a''^2 - a^2}$$

und aus beiden

$$\frac{x'^2}{a^2 a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2 c''^2} = \frac{S}{(a'^2 - a^2)(a''^2 - a^2)}.$$

Ueberdiess erhalten wir aus

$$\frac{x'^2}{a'^4} + \frac{y'^2}{b'^4} + \frac{z'^2}{c'^4} = \frac{1}{p'^2}$$

und

$$\frac{x'^2}{a'^2 a^2} + \frac{y'^2}{b'^2 b^2} + \frac{z'^2}{c'^2 c^2} = \frac{S}{a'^2 - a^2}$$

$$\frac{x'^2}{a'^4 a^2} + \frac{y'^2}{b'^4 b^2} + \frac{z'^2}{c'^4 c^2} = \frac{S}{(a'^2 - a^2)^2} - \frac{1}{p'^2 (a'^2 - a^2)}.$$

181. Wenn wir nun die verlangte Transformation ausführen, so erhalten wir auf der linken Seite der Gleichung des Artikel 179 den Coefficienten von x^2 in der Form

$$p'^2 \, S \left\{\frac{x'^2}{a'^4 a^2} + \frac{y'^2}{b'^4 b^2} + \frac{z'^2}{c'^4 c^2}\right\}$$

und den Coefficienten von xy in der Form

$$2p'p'' \, S \left\{\frac{x'^2}{a^2 a'^2 a''^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2 b''^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2 c''^2}\right\};$$

die linke Seite der transformierten Gleichung wird daher

---

*) Wir bemerken, dass

$$S = \frac{(a'^2 - a^2)(a''^2 - a^2)(a'''^2 - a^2)}{a^2 b^2 c^2}$$

ist, weil $a'^2 - a^2$, $a''^2 - a^2$, $a'''^2 - a^2$ die Wurzeln der cubischen Gleichung des Artikel 166 sind, deren absolutes Glied

$$= a^2 b^2 c^2 S$$

ist.

$$S^2\left(\frac{p'x}{a'^2-a^2}+\frac{p''y}{a''^2-a^2}+\frac{p'''z}{a'''^2-a^2}\right)^2$$
$$-S\left\{\frac{x^2}{a'^2-a^2}+\frac{y^2}{a''^2-a^2}+\frac{z^2}{a'''^2-a^2}\right\}.$$

Wenn wir dann die Grösse

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}$$

in der nämlichen Weise behandeln, so erhalten wir

$$S\left(\frac{p'x}{a'^2-a^2}+\frac{p''y}{a''^2-a^2}+\frac{p'''z}{a'''^2-a^2}\right),$$

und erkennen, dass ihr Quadrat gegen die erste Gruppe der Glieder der linken Seite verschwindet, so dass die Gleichung des Kegels in die Form

$$\frac{x^2}{a'^2-a^2}+\frac{y^2}{a''^2-a^2}+\frac{z}{a'''^2-a^2}=0,$$

d. i. die erwartete transformierte Form, übergeht.

182. Als specielle Fälle des Vorigen ergeben sich die Gleichungen der Fokalkegel (Artikel 178) d. h. der Kegel, welche aus dem beliebigen Punkte (x', y', z') über der Focalellipse und der Focalhyperbel beschrieben werden. Sie entsprechen den Werthen

$$a^2-c^2,\quad a^2-b^2$$

für das Quadrat der primären Achse, ihre Gleichungen sind daher

$$\frac{x^2}{c'^2}+\frac{y^2}{c''^2}+\frac{z^2}{c'''^2}=0,$$
$$\frac{x^2}{b'^2}+\frac{y^2}{b''^2}+\frac{z^2}{b'''^2}=0.$$

Wir hätten diese Gleichungen auch direct erhalten können, wenn wir die Gleichungen der Focalkegel wie im 12. Beispiel des Artikel 117 gebildet und sie dann wie in den letzten Artikeln transformiert hätten.

Man erkennt ohne Schwierigkeit, dass irgend eine Normale und die entsprechende Tangentenebene mit jeder der Hauptebenen einen Punkt und eine Gerade bestimmen, welche in Bezug auf den Focalkegelschnitt derselben Pol und Polare sind. Es ist ein specieller Fall des Artikel 177.

183. Wir geben an dieser Stelle auch die entsprechende

Transformation der Gleichung der Fläche zweiten Grades selbst, weil wir alle dazu nöthigen Formeln im Vorhergehenden gefunden haben.

Die zu parallelen Achsen durch den Punkt (x', y', z') transformierte Gleichung ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + S + 2\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right) = 0;$$

da nun die Transformation der Polynome

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \text{ und } \frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}$$

zu den drei durch jenen Punkt gehenden Normalen der entsprechenden confocalen Flächen als Achsen im Artikel 181 gegeben worden ist, so wird die fragliche transformierte Gleichung sofort in der Form

$$S\left(\frac{p'x}{a'^2 - a^2} + \frac{p''y}{a''^2 - a^2} + \frac{p'''z}{a'''^2 - a^2} + 1\right)^2$$
$$= \frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2}$$

gefunden. Die auf der linken Seite derselben zwischen den Klammern stehende Grösse giebt überdiess, gleich Null gesetzt, die transformierte Gleichung der Polarebene des Punktes.

Wenn der Punkt (x', y', z') in der Fläche selbst liegt, so erfährt diese Gleichung eine Veränderung, die wir angeben wollen. Die zu parallelen Achsen transformierte Gleichung ist dann

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2}\right) = 0$$

und bei der Transformation wird der Coefficient von x^2

$$p^2\left\{\frac{x'^2}{a^6} + \frac{y'^2}{b^6} + \frac{z'^2}{c^6}\right\}$$

— wir wollen ihn durch

$$\frac{1}{\gamma^2}$$

kurz bezeichnen — der von y^2

$$p'^2\left(\frac{x'^2}{a'^4 a^2} + \frac{y'^2}{b'^4 b^2} + \frac{z'^2}{c'^4 c^2}\right) = \frac{1}{a^2 - a'^2},$$

der von xy

$$2pp'\left(\frac{x'^2}{a^4 a'^2} + \frac{y'^2}{b^4 b'^2} + \frac{z'^2}{c^4 c'^2}\right) = \frac{2p'}{p(a'^2 - a^2)};$$

der Coefficient von yz verschwindet identisch und die Glieder vom ersten Grade reducieren sich auf

$$\frac{2x}{p}.$$

die transformierte Gleichung ist daher

$$\frac{x^2}{\gamma^2}+\frac{y^2}{a^2-a'^2}+\frac{z^2}{a^2-a''^2}-\frac{2p'xy}{p(a^2-a'^2)}-\frac{2p''xz}{p(a^2-a''^2)}+\frac{2x}{p}=0.$$

184. Wir geben endlich an dieser Stelle **die Transformation der Gleichung der Reciprocalfläche in Bezug auf irgend einen Punkt für die drei Normalen des confocalen Systems durch diesen Punkt als Achsen.**

Die Gleichung der Reciprocalfläche ward in Artikel 162 gefunden

$$(xx'+yy'+zz'+k^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

Durch Transformation geht nach den Formeln des Artikel 179 die Grösse

$$(xx'+yy'+zz') \text{ in } (p'x+p''y+p'''z+k^2)$$

über; für die Transformation von

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

findet man den Coefficienten von x^2

$$p'^2\left(\frac{a^2x'^2}{a'^4}+\frac{b^2y'^2}{b'^4}+\frac{c^2z'^2}{c'^4}\right)$$

$$=(a^2-a'^2)\,p'^2\left(\frac{x'^2}{a'^4}+\frac{y'^2}{b'^4}+\frac{z'^2}{c'^4}\right)+p'^2\left(\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}\right)$$

$$=a^2-a'^2+p'^2;$$

der Coefficient von xy ist

$$2p'p''\left\{\frac{a^2x'^2}{a'^2a''^2}+\frac{b^2y'^2}{b'^2b''^2}+\frac{c^2z'^2}{c'^2c''^2}\right\},$$

und weil

$$(a^2-a'^2)\left\{\frac{x'^2}{a'^2a''^2}+\frac{y'^2}{b'^2b''^2}+\frac{z'^2}{c'^2c''^2}\right\}=0$$

und

$$\frac{x'^2}{a''^2}+\frac{y'^2}{b''^2}+\frac{z'^2}{c''^2}=1$$

ist, so haben wir

$$\frac{a^2x'^2}{a'^2a''^2}+\frac{b^2y'^2}{b'^2b''^2}+\frac{c^2z'^2}{c'^2c''^2}=1$$

und die transformierte Gleichung erhält die Form

$$(a'^2 - a^2)\, x^2 + (a''^2 - a^2)\, y^2 + (a'''^2 - a^2)\, z^2$$
$$+ 2k^2\, (p'x + p''y + p'''z) + k^4 = 0.$$

185. Wenn wir nun zu der im Artikel 181 gegebenen Gleichung des Tangentenkegels zurückkehren, so beweist ihre Form, dass alle concentrischen Kegel, welche einem System von confocalen Flächen umschrieben sind, coaxial und confocal sind. Denn die drei Normalen, welche durch den gemeinschaftlichen Scheitel gehen, sind für jeden Kegel des Systems die Achsen, und die Form der Gleichung zeigt, dass die Differenzen der Quadrate der Achsen von a^2 unabhängig sind.

Die Gleichungen der gemeinschaftlichen Focallinien dieser Kegel sind nach Artikel 140

$$\frac{x^2}{a'^2 - a''^2} = \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2}, \quad y^2 = 0.$$

Wenn nun im Artikel 172 bewiesen wurde, dass der Centralschnitt des Hyperboloids mit einer Mantelfläche, welches durch (x', y', z') geht, durch

$$\frac{x^2}{a'^2 - a''^2} + \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2} = 1$$

dargestellt wird, so folgt aus der Wahrheit, dass der Schnitt des Hyperboloids mit der Tangentenebene dem Centralschnitt ähnlich oder durch

$$\frac{x^2}{a'^2 - a''^2} - \frac{z^2}{a''^2 - a'''^2} = 0$$

gegeben ist, der Satz von Chasles und Jacobi: Die Focallinien des Systems von Kegeln, welche aus einem beliebigen Punkte den Flächen eines confocalen Systems umgeschrieben sind, sind die Erzeugenden des Hyperboloids mit einer Mantelfläche unter ihnen, welches durch diesen Punkt geht*).

Man kann denselben auch so beweisen: Wenn man durch eine beliebige Seite eines unter diesen Kegeln die Tangentenebene

*) „Liouville's Journal" t. XI, p. 121. „Crelle's Journal" Bd. XII, p. 137.

desselben und Ebenen durch die erzeugenden Linien jenes Hyperboloids hindurchlegt, so sind diese Letzteren Tangentenebenen des Hyperboloids und bilden daher nach Artikel 178 mit der Tangentenebene des Kegels gleiche Winkel. Diese zwei Erzeugenden haben also die Eigenschaft, dass die durch sie und eine beliebige Seite des Kegels gelegten Ebenen mit der entsprechenden Tangentenebene desselben gleiche Winkel einschliessen, eine Eigenschaft, welche nach Artikel 178 den Focallinien angehört.

Zusatz 1. Die Reciproken eines Systems von confocalen Flächen in Bezug auf irgend einen Punkt haben die nämlichen Kreisschnitte. Denn die Reciprocalflächen der diesem Punkte entsprechenden Tangentenkegel haben nach Artikel 141 dieselben Kreisschnitte, und sie sind die Asymptotenkegel der Reciprocalflächen.

Zusatz 2. Die Orthogonalen Projectionen eines Systems von confocalen Flächen auf eine Ebene sind confocale Kegelschnitte. Diese Projectionen sind die Durchschnitte der gedachten Ebene mit den zu ihr normalen die Flächen des Systems umhüllenden Cylindern, und man kann diese Letzteren als ein System von Tangentenkegeln betrachten, welche den unendlich entfernten gemeinschaftlichen Punkt der Erzeugenden zum Scheitel haben.

186. Unter den Flächen eines confocalen Systems existieren im Allgemeinen zwei, welche eine gegebene gerade Linie berühren.

Sei (x', y', z') ein Punkt der betrachteten Linie und sind a', a'', a''' die Achsen der drei Flächen des Systems, welche durch ihn hindurchgehen, α, β, γ die Winkel, welche diese Linie mit den Achsen bildet; so erhellt aus Artikel 181, dass das a der gesuchten Fläche durch die quadratische Gleichung

$$\frac{\cos^2\alpha}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a'''^2 - a^2} = 0$$

bestimmt wird. Sind nun a, a′ die Wurzeln dieser Gleichung, so haben die beiden Kegel

$$\frac{x^2}{a'^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{y^2}{a''^2 - \mathrm{a}^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - \mathrm{a}^2} = 0$$
$$\frac{x^2}{a'^2 - \mathrm{a}'^2} + \frac{y^2}{a''^2 - \mathrm{a}'^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - \mathrm{a}'^2} = 0$$

die gegebene Gerade zur gemeinschaftlichen Seite und man beweist genau wie im Artikel 170, dass die Tangentenebenen der Kegel, welche durch diese Linie gehen, zu einander rechtwinklig sind. Da aber die Tangentenebenen des Tangentenkegels einer Fläche auch Tangentenebenen dieser Letzteren sind, so ergiebt sich daraus, dass die durch eine gerade Linie gehenden Tangentenebenen der beiden sie berührenden Flächen eines confocalen Systems zu einander rechtwinklig sind.

Zuweilen findet man die Eigenschaft, dass die von einem Punkt ausgehenden Tangentenkegel von zwei sich durchschneidenden confocalen Flächen zweiten Grades einander rechtwinklig durchschneiden, dahin ausgesprochen, dass zwei confocale Flächen, von einem beliebigen Punkte aus gesehen, einander rechtwinklig zu durchschneiden scheinen.

187. Die Normalen der Flächen eines confocalen Systems, welche den durch eine gegebene gerade Linie gehenden Tangentenebenen derselben entsprechen, sind die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids.

Sie sind offenbar einer Ebene parallel, nämlich der zur gegebenen Linie normalen Ebene; und wenn wir irgend eine der confocalen Flächen betrachten, so enthält nach Artikel 174 die Normale, welche irgend einer durch jene Gerade gehenden Ebene entspricht, den Pol dieser Ebene in Bezug auf die angenommene confocale Fläche, einen Punkt also, welcher ein Punkt der Polarlinie der gegebenen Geraden in Bezug auf diese confocale Fläche ist; in Folge dessen schneidet jede Normale die Polarlinie der gegebenen Geraden in Bezug auf irgend eine der confocalen Flächen und die durch die Normalen erzeugte Fläche ist daher ein hyperbolisches Paraboloid. (Artikel 111.) Die Polarlinien der eben angestellten Erörterung sind für das nämliche Paraboloid die Erzeugenden des andern Systems.

Die beiden Punkte, in denen diess Paraboloid die gegebene gerade Linie schneidet, sind die zwei Punkte, wo dieselbe die beiden confocalen Flächen berührt.

Wenn die gegebene gerade Linie selbst für eine der Flächen des Systems (S) eine Normale ist, so erhalten wir einen bemerkenswerthen speciellen Fall. Die Normale, welche irgend einer der durch sie gehenden Ebenen entspricht, wird nach Artikel 175 gefunden, indem man von dem in Bezug auf jene Fläche S genommenen Pol dieser Ebene auf dieselbe eine Normale fällt; es ist aber offenbar, dass jener Pol und diese Normale in der Tangentenebene von S liegen müssen, zu welcher die gegebene Gerade normal ist. In diesem Falle liegen somit die Normalen in einer und derselben Ebene.

Aus dem Principe, dass das Doppelschnittverhältniss von vier durch eine gerade Linie gehenden Ebenen mit dem Doppelschnittverhältniss ihrer in Bezug auf irgend eine Fläche zweiten Grades genommenen Pole übereinstimmt, wird sogleich erkannt, dass irgend vier Normalen alle die der gegebenen Linie in Bezug auf die Flächen eines confocalen Systems entsprechenden Polarlinien homographisch theilen; daher umhüllen in dem betrachteten speciellen Falle die sämmtlichen Normalen nothwendig einen Kegelschnitt, und zwar eine Parabel, weil die Normale in einer ihrer Lagen ganz in unendlicher Entfernung liegt, nämlich in dem Falle der unendlich grossen Kugel, welche dem System der confocalen Flächen nach Artikel 166 angehört.

Der Fusspunkt der gegebenen Linie in derjenigen Fläche des Systems, für welche sie eine Normale ist, liegt in der Directrix der Parabel.

188. Wenn α, β, γ die auf die Normalen durch den Scheitel bezogenen Richtungswinkel der Normale zu einer Tangentenebene des Kegels der Artikel 179, etc. bezeichnen, so müssen dieselben, weil die bezeichnete Normale dem reciproken Kegel angehört, die Relation

$$(a'^2 - a^2)\cos^2\alpha + (a''^2 - a^2)\cos^2\beta + (a'''^2 - a^2)\cos^2\gamma = 0$$

oder

$$a'^2\cos^2\alpha + a''^2\cos^2\beta + a'''^2\cos^2\gamma = a^2$$

erfüllen. Dieselbe erlaubt uns, die Achse der Fläche des Systems zu bestimmen, welche irgend eine Ebene berührt; denn für einen beliebigen Punkt dieser Ebene wissen wir die ihm entsprechenden a', a'', a''', so wie die Winkel, welche die drei durch ihn gehenden Normalen mit der Ebene einschliessen, so dass die Grösse a^2 ebenfalls bekannt ist.

189. Wenn die Relation des letzten Artikels unabhängig be-

wiesen wäre, so würde durch Umkehrung der Schlussordnung aus ihr ein Beweis für die Gleichung des Tangentenkegels im Artikel 181 ohne Transformation der Coordinaten hervorgehen.

Der folgende Beweis der Relation rührt von Chasles her: Die Grösse

$$a'^2 \cos^2\alpha + a''^2 \cos^2\beta + a'''^2 \cos^2\gamma$$

ist die Summe der Quadrate der Projectionen der Linien a', a'', a''' auf eine Normale zur gegebenen Ebene. Wir haben im Artikel 173 gesehen, dass diese Linien die Achsen einer durch das Originalcentrum gehenden Fläche sind, welche den Punkt (x', y', z') zu ihrem Centrum hat. Und es ist in demselben Artikel bewiesen worden, dass der Radius vector vom Centrum nach (x', y', z') mit zwei Geraden, welche den Achsen der Focalellipse parallel und gleich sind, ein System von drei conjugierten Durchmessern bildet. Wir wissen ferner aus Artikel 93, dass die Summe der Quadrate der Projectionen von drei conjugierten Durchmessern einer Fläche zweiten Grades auf eine beliebige Gerade eine Constante, d. i. der Summe der Quadrate von drei andern conjugierten Durchmessern derselben Fläche gleich ist. Daraus folgt dann, dass die Grösse

$$a'^2 \cos^2\alpha + a''^2 \cos^2\beta + a'''^2 \cos^2\gamma$$

gleich ist der Summe der Quadrate der Projectionen des Radius vector und zweier den Achsen der Focalellipse paralleler und gleicher Linien auf die vom Centrum auf die gegebene Ebene gefällte Normale. Nun sind die beiden letzten Geraden nach Grösse und Richtung constant, also auch die bezeichneten Projectionen derselben, und die Projection des Radius vector ist constant, weil sie die Normale selbst ist, so lange der Punkt (x', y', z') der gegebenen Ebene angehört, also ist bewiesen, dass die betrachtete Grösse

$$a'^2 \cos^2\alpha + a''^2 \cos^2\beta + a'''^2 \cos^2\gamma$$

constant ist für alle Lagen des Punktes (x', y', z') in einer festen Ebene, und man erkennt, dass dieser constante Werth das a^2 der die Ebene berührenden Fläche des Systems ist, weil dieser Werth sich für

$$\cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0$$

ergiebt.

190. Der Ort des Durchschnittspunktes von drei zu

einander rechtwinkligen Ebenen, von denen jede eine von drei confocalen sich in einem Punkt schneidenden Flächen tangiert, ist eine Kugel.

Man gelangt zum Beweise dieses Satzes ganz wie im Artikel 89; man addiert

$$p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma,$$
$$p'^2 = a'^2 \cos^2\alpha' + b'^2 \cos^2\beta' + c'^2 \cos^2\gamma',$$
$$p''^2 = a''^2 \cos^2\alpha'' + b''^2 \cos^2\beta'' + c''^2 \cos^2\gamma''$$

und erhält

$$\varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a'^2 - a^2) + (a''^2 - a^2),$$

wenn ϱ die Entfernung des Centrums vom Durchschnittspunkt der Ebenen bezeichnet. Durch die Subtraction der beiden Gleichungen

$$p^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma,$$
$$p'^2 = a'^2 \cos^2\alpha + b'^2 \cos^2\beta + c'^2 \cos^2\gamma$$

erkennen wir ferner, dass die Differenz der Quadrate der auf zwei parallele Tangentenebenen von zwei confocalen Flächen gefällten Normalen constant und

$$= a^2 - a'^2$$

ist.

191. Zwei Kegel von gemeinschaftlichem Centrum umhüllen zwei confocale Flächen; man soll die Länge des Abschnittes bestimmen, der in einer ihrer gemeinschaftlichen Seiten durch eine durch das Centrum gehende Ebene bestimmt wird, welche der Tangentenebene einer der durch den Scheitel gehenden confocalen Flächen in diesem parallel ist.

Die in den vier gemeinschaftlichen Seiten gebildeten Abschnitte sind von gleicher Grösse, weil diese Seiten gegen die Schnittebene gleich geneigt sind, als welche einer gemeinschaftlichen Hauptebene beider Kegel parallel ist.

Für die Durchschnitte von zwei confocalen Kegeln

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0, \quad \frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} + \frac{z^2}{\gamma'^2} = 0$$

gelten die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\alpha^2\alpha'^2(\beta^2 - \gamma^2)} = \frac{y^2}{\beta^2\beta'^2(\gamma^2 - \alpha^2)} = \frac{z^2}{\gamma^2\gamma'^2(\alpha^2 - \beta^2)},$$

und wenn wir den gemeinschaftlichen Werth dieser Quotienten durch λ^2 bezeichnen, so ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 (\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \alpha^2).$$

Indem wir dann die Werthe von α^2, β^2, γ^2 aus den Gleichungen der Tangentenkegel (Artikel 186) einsetzen und erinnern, dass das x^2 der Ebene durch das Centrum gleich

$$\frac{a'^2 b'^2 c'^2}{(a'^2 - a''^2)(a'^2 - a'''^2)} \text{ (Artikel 173)}$$

ist, erhalten wir für das Quadrat des fraglichen Abschnitts den Werth

$$\frac{a'^2 b'^2 c'^2}{(a'^2 - \mathrm{a}^2)(a'^2 - \mathrm{a}'^2)}.$$

Wenn die Flächen sämmtlich von verschiedenen Arten sind, so zeigt dieser Werth, dass der bezeichnete Abschnitt der Normale gleich ist, welche vom Centrum auf die Tangentenebene in ihrem Durchschnittspunkt gefällt wird.

Wenn wir speciell voraussetzen, dass die betrachteten Kegel über der Focalellipse und der Focalhyperbel des Systems beschrieben sind, so ist

$$\mathrm{a}^2 = a^2 - c^2, \quad \mathrm{a}'^2 = a^2 - b^2$$

und der Werth des Abschnitts reduciert sich auf a'; d. h. wenn durch irgend einen Punkt eines Ellipsoids eine Sehne gezogen wird, welche beide Focalkegelschnitte schneidet, so ist der in ihr durch eine der Tangentenebene des Punktes parallel durch das Centrum gehende Ebene bestimmte Abschnitt der grossen Achse der Fläche gleich.

Diess von Mac-Callagh gefundene Theorem ist das Analogon des Satzes für ebene Curven, nach welchem eine durch das Centrum parallel zu einer Tangente einer Ellipse gezogene Parallele in den Focalstrahlen des Berührungspunktes Abschnitte bestimmt, welche der Hauptachse gleich sind.

192. Auf Grund der eben entwickelten Principien hat Chasles die Lösung des Problems gegeben, die Grösse und Richtung der Achsen einer centralen Fläche zweiten Grades aus einem gegebenen System conjugierter Durchmesser zu bestimmen.

Wenn wir die Ebene von zweien derselben betrachten, so können wir nach den Gesetzen der ebenen Geometrie die Grösse und Richtung der Achsen des ihr entsprechenden Schnittes bestimmen. Seiner Ebene ist die dem Punkte P, dem Endpunkte des dritten Durchmessers, entsprechende Tangentenebene der Fläche parallel. Nun ward im Artikel 173 bewiesen, dass das Centrum der gegebenen Fläche zweiten Grades der Durchschnittspunkt von drei confocalen Flächen ist, die in P ihr Centrum haben. Wenn wir die Focalkegelschnitte dieses neuen Systems bestimmen, so schneiden sich die beiden aus dem Centrum der gegebenen Fläche über diesen beschriebenen Focalkegel in vier geraden Linien, welche mit einander sechs Ebenen bestimmen, deren Durchschnittslinien die Richtungen der fraglichen Achsen bezeichnen, während nach Artikel 191 die durch den Punkt gehenden Tangentenebenen in ihnen die der Länge der Achsen gleichen Stücke abschneiden.

Die fraglichen Focalkegelschnitte werden aus der Kenntniss ihrer Ebenen und der Richtung ihrer Achsen leicht construiert, da die Länge derselben überdiess durch

$$a^2 - a''^2,\ a'^2 - a''^2;\quad a^2 - a'^2,\ a'^2 - a''^2$$

ausgedrückt sind und die Achsenlängen des gegebenen Schnittes

$$a^2 - a'^2,\quad a^2 - a''^2\quad \text{(Artikel 172)},$$

welche bekannt sind, jene direct bestimmen.

193. Wenn durch einen Punkt P in einer Fläche zweiten Grades eine Sehne gezogen wird, welche wie im Artikel 191 zwei confocale Flächen berührt, so können wir einen Ausdruck für die Länge derselben finden.

Wir ziehen einen ihr parallelen Halbdurchmesser durch das Centrum und bezeichnen seine Länge durch R; wenn wir dann durch P eine zu diesem Durchmesser conjugierte Ebene und eine Tangentenebene legen, so bestimmen beide in jenem Durchmesser, vom Centrum aus gemessen, Abschnitte, deren Product $= R^2$ ist. Nun ist aber der durch die conjugierte Ebene bestimmte Abschnitt die Hälfte der fraglichen Sehne und der der Tangentenebene entsprechende ist derselbe, dessen Werth wir im Artikel 191 gefunden haben. Daher ist

$$C = \frac{2R^2\sqrt{\left\{(a'^2 - \mathrm{a}^2)(a'^2 - \mathrm{a}'^2)\right\}}}{a'b'c'}.$$

Wenn die betrachtete Sehne insbesondere diejenige ist, welche die beiden Focalkegelschnitte schneidet, so haben wir

$$\mathrm{a}^2 = a'^2 - b'^2,\quad \mathrm{a}'^2 = a'^2 - c'^2$$

und daher

$$C = \frac{2R^2}{a'}.$$

194. Man soll den Ort der Scheitel aller der geraden Kegel bestimmen, welche eine gegebene Fläche zweiten Grades umhüllen.

Damit die Gleichung

$$\frac{x^2}{a'^2 - a^2} + \frac{y^2}{a''^2 - a^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - a^2} = 0$$

einen geraden Kegel darstellt, müssen zwei ihrer Coefficienten einander gleich sein, d. h. man muss entweder

$$a'' = a', \quad \text{oder} \quad a'' = a'''$$

haben, oder in andern Worten, die Gleichung des Artikel 166 muss für den fraglichen Punkt (x', y', z') zwei gleiche Wurzeln haben. Da nun nach der Untersuchung der Grenzen der Wurzeln gleiche Wurzeln nur unter der Voraussetzung möglich sind, dass λ einer der Hauptachsen gleich ist, so erkennen wir als den fraglichen Ort die Focalkegelschnitte der Fläche. Diess stimmt mit dem, was im Artikel 144 bewiesen ist, überein.

Wir erkennen daraus, dass die Reciproke einer Fläche zweiten Grades in Bezug auf einen ihrer Focalpunkte eine Umdrehungsfläche ist, und dass insbesondere als Reciprocalfläche in Bezug auf einen Kreispunkt ein Umdrehungsparaboloid erhalten wird. Denn ein Kreispunkt gehört zugleich einem Focalkegelschnitt (Artikel 139) und der Fläche selbst an, und aus dem letzteren Grunde bekanntlich ist die entsprechende Reciprocalfläche ein Paraboloid.

Als ein anderer specieller Fall unseres Satzes ergiebt sich, dass einer centralen Fläche zweiten Grades zwei gerade Cylinder umschrieben werden können, deren Erzeugende den Asymptoten der Focalhyperbel parallel sind. (Vergl. Artikel 115.) Endlich ergiebt sich, dass der über der Focalellipse stehende Kegel nur dann ein gerader Kegel ist, wenn sein Scheitel der Focalhyperbel angehört und umgekehrt; ein Ergebniss, welches ohne allen Bezug auf die confocalen Systeme dahin ausgesprochen werden kann, dass der Ort der Scheitel derjenigen geraden Kegel, welche über einem gegebenen Kegelschnitt stehen, ein zweiter Kegelschnitt ist, der die Brennpunkte des ersteren zu Scheiteln und seine Scheitel zu Brennpunkten hat und dessen Ebene normal zur Ebene des ersteren steht.*) Wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung des einen Kegelschnitts ist, so erhält man die des andern in der Form

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Es ward im Artikel 163 (Beispiel 8) bewiesen, dass der aus einem Focalpunkt einer Umdrehungsfläche an eine sie umhüllende Fläche zweiten Grades gehende Tangentenkegel ein Umdrehungskegel sei und im Zusammenhang dieses Artikels erkennen wir nun, dass die Focalkegelschnitte einer Fläche zweiten Grades den Ort der Focalpunkte aller der Umdrehungsflächen bezeichnen, welche derselben umgeschrieben werden können.

195. Die folgenden Beispiele mögen zur ferneren Erläuterung der entwickelten Principien dienen.

Beispiel 1. Welches ist der Ort des Durchschnittspunktes derjenigen Erzeugenden eines Hyperboloids, welche sich rechtwinklig durchschneiden?

Da der Durchschnitt einer mit der Ebene solcher Erzeugenden — einer Tangentenebene — parallelen Ebene mit der Fläche eine gleichseitige Hyperbel ist, so gilt nach Artikel 172 die Relation

$$(a''^2 - a'^2) + (a''^2 - a'''^2) = 0;$$

und da nach Artikel 169 das Quadrat des Radius vector für den betrachteten Punkt durch

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 - (a''^2 - a'^2) - (a''^2 - a'''^2)$$

ausgedrückt ist, so erkennen wir als den fraglichen Ort den Durchschnitt des Hyperboloids mit einer Kugel, für welche das Quadrat des Halbmessers

$$= a''^2 + b''^2 + c''^2$$

ist.

Man sieht, die Frage kann allgemeiner aufgefasst werden als die Frage nach den Tangentenebenen, deren parallele Centralschnitte einem gegebenen Kegelschnitt ähnlich sind; sie überträgt sich damit auf alle Flächen zweiten Grades, während sie zunächst nur auf die geradlinigen sich zu beziehen scheint.

*) Vergl. Artikel 117, Beispiel 12.

Dasselbe Resultat erhält man durch folgende Schlüsse: Wenn zwei Erzeugende rechtwinklig zu einander sind, so bildet ihre Ebene mit den beiden durch je eine von ihnen mit der ihrem Durchschnittspunkt entsprechenden Normale bestimmten Ebenen ein System von drei zu einander normalen Tangentenebenen der Fläche, und der Durchschnittspunkt derselben liegt daher nach Artikel 89 auf der Kugel

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = r^2.$$

Die Durchschnittspunkte der zu einander normalen Erzeugenden des Paraboloids

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{4z}{c}$$

liegen in der Ebene

$$z = \frac{b^2 - a^2}{c}.$$

(Vergl. Artikel 106.)

Beispiel 2. Man soll den Ort des Durchschnitts von drei Tangenten einer Fläche zweiten Grades bestimmen, welche rechtwinklig zu einander sind. (Artikel 117, Beispiel 8.)

Wenn wir durch α, β, γ die von einer dieser Tangenten mit den Normalen des fraglichen Punktes gebildeten Winkel bezeichnen, so gelten, weil jede dieser Tangenten dem durch den Punkt gehenden Tangentenkegel angehört, die drei Gleichungen

$$\frac{\cos^2\alpha}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2\alpha'}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2\alpha''}{a'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta''}{a''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\gamma''}{a'''^2 - a^2} = 0,$$

und wir finden durch Addition derselben

$$\frac{1}{a'^2 - a^2} + \frac{1}{a''^2 - a^2} + \frac{1}{a'''^2 - a^2} = 0.$$

Nun sind die Grössen

$$a'^2 - a^2, \quad a''^2 - a^2, \quad a'''^2 - a^2$$

die drei Wurzeln der cubischen Gleichung des Artikel 166, welche nach Potenzen von λ^2 geordnet, die Form

$$\begin{aligned}\lambda^6 &+ \lambda^4 (x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2) \\ &- \lambda^2 \left\{(b^2+c^2)x^2 + (c^2+a^2)y^2 + (a^2+b^2)z^2 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2\right\} \\ &+ b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2 = 0\end{aligned}$$

erhält. Die Bedingung für das Verschwinden der Summe der reciproken Werthe der Wurzeln dieser Gleichung ist das Verschwinden des Coefficienten von λ^2; somit ist durch sie die Gleichung des fraglichen Ortes gegeben.

Beispiel 3. Der Schnitt eines Ellipsoids durch die Tangentenebene des Asymptotenkegels eines confocalen Hyperboloids ist von constanter Fläche.

Nach Artikel 91 ist der Inhalt des Querschnitts umgekehrt proportional zu der auf die Tangentenebene gefällten Normalen p und wir haben

$$p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma.$$

Da aber die Normale eine Seite des dem Asymptotenkegel des Hyperboloids reciproken Kegels ist, so gilt auch die Relation

$$0 = a'^2 \cos^2 \alpha + b'^2 \cos^2 \beta + c'^2 \cos^2 \gamma,$$

und es ergiebt sich also

$$p^2 = a^2 - a'^2.$$

Beispiel 4. Wenn ein Umdrehungskegel einem Ellipsoid umgeschrieben ist, so enthält jede ihm eingeschriebene Kugel einen der Kreisschnitte des Ellipsoids und die Berührung eines solchen mit ihm findet in seinen Kreispunkten statt. Die Focalhyperbel ist der Ort des Scheitels derjenigen Kegel, die ihm und einer veränderlichen es in einem Kreispunkte berührenden Kugel gleichzeitig umgeschrieben sind. (Vergl. Artikel 117, Beispiel 12.)

Beispiel 5. Man soll die Länge der vom Centrum auf die Polarebene des Punktes (x', y', z') gefällten Normalen in Function der Achsen der confocalen Flächen ausdrücken, welche durch diesen Punkt gehen.

Man findet für

$$a'^2 - a^2 = h^2, \quad a''^2 - a^2 = k^2, \quad a'''^2 - a^2 = l^2$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{h^2 k^2 l^2}{a^2 b^2 c^2} \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{l^2} \right\}.$$

Beispiel 6. Wenn eine Reihe von Ellipsoiden einem Rotationskegel nach derselben Berührungscurve eingeschrieben ist, so gilt unter ihren Halbachsen für $\varkappa$ als eine Constante die Relation

$$\frac{b^6}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} = \varkappa^2.$$

Der Scheitel S (ξ, ζ) eines dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

umgeschriebenen Rotationskegels liegt auf der in der Ebene der Achsen a und c enthaltenen Focalhyperbel

$$\frac{\xi^2}{a^2 - b^2} - \frac{\zeta^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

und die Berührungsellipse erscheint auf die Ebene xz als in die Gerade

$$\frac{\xi x}{a^2} + \frac{\zeta z}{c^2} = 1$$

projiciert; ihre Hauptachse $2a_1$ kann als die Berührungssehne der von S an die Ellipse der Kreispunkte gezogenen Tangenten angesehen werden und man hat daher

$$a_1^2 = \frac{(a^4\zeta^2 + c^4\xi^2)(a^2\zeta^2 + c^2\xi^2 - a^2c^2)}{(a^2\zeta^2 + c^2\xi^2)^2}.$$

Um ihre kleine Halbachse b_1 zu bestimmen, sei das Ellipsoid durch eine das Centrum des Ellipsoids und den Scheitel des Kegels enthaltende Normalebene zur zx Ebene geschnitten; in der entstehenden Ellipse ist b die eine und die Linie vom Centrum C nach dem Schnittpunkt s der Geraden CS mit der Hyperbel der Kreispunkte die andere Halbachse und die Achse b_1 ist die ihr für den Mittelpunkt m der Linie $2a_1$ entsprechende Ordinate und man findet daher

$$\overline{Cs}^2 = \frac{a^2c^2(\xi^2 + \zeta^2)}{a^2\zeta^2 + c^2\xi^2}, \quad \overline{Cm}^2 = \frac{a^4c^4(\xi^2 + \zeta^2)}{(a^2\zeta^2 + c^2\xi^2)^2},$$

$$b_1^2 = \frac{b^2(a^2\zeta^2 + c^2\xi^2 - a^2c^2)}{a^2\zeta^2 + c^2\xi^2}.$$

Die Elimination von ξ und ζ zwischen den Werthen von a_1^2 und b_1^2 vermittelst der Gleichung der Focalhyperbel liefert dann die Relation

$$\frac{b_1^4}{a_1^2 - b_1^2} = \frac{b^6}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)},$$

welche unmittelbar den behaupteten Satz beweist.

196. Zwei Punkte, von denen je einer einem von zwei confocalen Ellipsoiden angehört, werden als correspondierende bezeichnet, wenn die Relationen

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{A}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{B}, \quad \frac{z}{c} = \frac{Z}{C}$$

durch ihre Coordinaten erfüllt sind.

Da nach dem im Artikel 168 gefundenen Werthe

$$x^2 = \frac{a^2 a'^2 a''^2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}$$

die Grösse

$$\frac{x^2}{a^2}$$

constant bleibt, so lange a'^2, a''^2 unverändert sind, d. h. so lange der Punkt der Durchschnittslinie von zwei confocalen Hyperboloiden angehört, so erkennen wir, dass die Durchschnittscurve von zwei confocalen Hyperboloiden ein System von confocalen Ellipsoiden in correspondierenden Punkten schneidet.

Da die Hauptebenen als Grenzen dem System der confocalen Flächen angehören, so entsprechen Punkte der Hauptebenen, welche durch Gleichungen von der Form

$$\frac{x'^2}{a^2} = \frac{X^2}{a^2 - c^2}, \quad \frac{y'^2}{b^2} = \frac{Y^2}{b^2 - c^2}, \quad Z^2 = 0$$

bestimmt sind, einem Punkte (x', y', z') der Fläche, und wenn speciell dieser Punkt selbst einer Hauptebene angehört, ist der entsprechende Punkt ein Punkt des in ihr gelegenen Focalkegelschnitts.

197. Die Punkte der Ebene xy, welche dem Durchschnitt eines Ellipsoids mit einer Reihe von confocalen Flächen entsprechen, bilden eine Reihe von confocalen Kegelschnitten, für welche die den Kreispunkten entsprechenden Punkte die gemeinschaftlichen Brennpunkte sind.

Wenn wir zwischen den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

die Grösse z^2 eliminieren, so erhalten wir

$$\frac{(a^2 - c^2)\, x^2}{a^2 a'^2} + \frac{(b^2 - c^2)\, y^2}{b^2 b'^2} = 1,$$

so dass die correspondierenden Punkte durch die Relation

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} = 1$$

verbunden sind. Sie repräsentiert eine Ellipse für die Durchschnitte mit Hyperboloiden mit einer Mantelfläche und eine Hyperbel für die Durchschnitte mit Hyperboloiden mit zwei Mantelflächen.

Die Coordinaten der Kreispunkte sind

$$x^2 = a^2\, \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad y^2 = 0,$$

und die der ihnen entsprechenden Punkte daher

$$X^2 = a^2 - b^2, \quad Y^2 = 0;$$

sie sind also die Brennpunkte des Systems confocaler Kegelschnitte.

Man repräsentiert zuweilen Curven, welche auf einem Ellipsoid verzeichnet sind, durch sogenannte elliptische Coordinaten, d. h. durch Gleichungen von der Form

$$\Phi\ (a', a'') = 0,$$

welche eine Relation zwischen den Achsen der confocalen Hyperboloide ausdrücken, welche durch irgend einen Punkt der Curve hindurchgehen.

Da nun aus dem eben Entwickelten erkannt wird, dass a' die halbe Summe und a'' die halbe Differenz der Entfernungen der den Punkten des Ortes correspondierenden Punkte von denjenigen Punkten darstellen, welche den Kreispunkten correspondieren, so können wir aus der Gleichung

$$\Phi\ (a', a'') = 0$$

eine Gleichung von der Form

$$\Phi\ (\varrho + \varrho', \ \ \varrho - \varrho') = 0$$

bilden und von ihr dann zu der Gleichung der Curve übergehen, welche in der Hauptebene dem gegebenen Orte auf der Fläche selbst entspricht.

198. Wenn der Durchschnitt einer Kugel und eines Ellipsoids durch projicierende Gerade, welche der kleinsten oder grössten Achse parallel sind, auf eine Ebene der Kreisschnitte projiciert wird, so ist die Projection ein Kreis.

Man erkennt diesen Satz leicht als eine Folge des allgemeinen Satzes: Wenn zwei Flächen zweiten Grades gemeinschaftliche Kreisschnitte haben, so hat jede durch ihre Schnittcurve gehende Fläche zweiten Grades dieselben Kreisschnitte. Und dieser Satz geht aus der einfachen Bemerkung hervor, dass das Resultat der Substitution

$$z = 0$$

in die Gleichung

$$U + kV = 0$$

einen Kreis repräsentieren muss, sobald dieselbe Substitution die beiden Gleichungen

$$U = 0, \quad V = 0$$

auf Kreisgleichungen reduciert.

Wir halten es aber für nützlich, den hier ausgesprochenen speciellen Satz direct zu beweisen. Wir wählen als Achsen die

Achse der y, welche eine Gerade in der Ebene des Kreisschnittes ist, und eine Normale zu ihr in dieser Ebene und behalten daher die y unverändert, während das neue x^2 gleich dem alten

$$x^2 + z^2$$

wird. Aus der Gleichung der Ebene des Kreisschnittes folgt

$$z^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} \cdot x^2$$

und das neue x^2 ist daher

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} \cdot x^2.$$

Da nun für die Durchschnittspunkte der Flächen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

die Gleichung

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + \frac{b^2 - c^2}{b^2} y^2 = r^2 - c^2$$

gilt, so folgt durch Substitution des eben bestimmten Werthes von x^2

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2} (x^2 + y^2) = r^2 - c^2,$$

was den Satz beweist.

Man wird bemerken, dass wir, um die Projection auf die Ebenen der Kreisschnitte zu erhalten, y unverändert gelassen und für x^2 den Werth $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot x^2$ substituiert haben.

Um aber wie im letzten Artikel den irgend einem Punkte der Fläche entsprechenden Punkt zu finden, war die Substitution

$$\frac{a^2}{a^2 - c^2} x^2, \quad \frac{b^2}{b^2 - c^2} y^2$$

respective für

$$x^2 \text{ und } y^2$$

zu vollziehen. Man sieht daraus, dass die Quadrate der ersteren Coordinaten zu denen der letzteren das constante Verhältniss

$$\frac{b^2 - c^2}{b^2}$$

besitzen. Daher können wir aus den Ergebnissen des letzten Artikels unmittelbar schliessen, dass die Projection des Durchschnitts von zwei confocalen Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschnittebene der einen von ihnen ein Kegelschnitt ist, der die entsprechenden Projectionen der Kreispunkte zu Brennpunkten hat; und ferner, dass für jede durch ihre Gleichung

$$\Phi\ (a', a'') = 0$$

gegebene Curve auf dem Ellipsoid die algebraische Gleichung ihrer Projection auf die Ebene der Kreisschnitte abgeleitet werden kann.

199. Die Entfernung zweier Punkte, von denen je einer auf einem von zwei confocalen Ellipsoiden liegt, ist der Entfernung der ihnen entsprechenden Punkte gleich.

Wir haben

$$(x - X)^2 + (y - Y^2) + (z - Z)^2$$
$$= x^2 + y^2 + z^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - 2\,(xX + yY + zZ),$$

und da nach Artikel 169

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b'^2 + c''^2,\ X^2 + Y^2 + Z^2 = A^2 + B'^2 + C''^2$$

und für die entsprechenden Punkte

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = A^2 + b'^2 + c''^2,\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + B'^2 + C''^2$$

ist, so ist die Summe der Quadrate der Centralstrahlen nach beiden Punkten für die zwei entsprechenden Punkte dieselbe Grösse; und das Theorem ist bewiesen durch die weitere Bemerkung, dass die Grössen

$$xX,\quad yY,\quad zZ$$

respective gleich sind den andern

$$x'X',\quad y'Y',\quad z'Z',$$

weil man hat

$$X' = \frac{Ax}{a},\quad x' = \frac{aX}{A},\ \text{etc.}$$

diess von J. Jvory herrührende Theorem ist von Wichtigkeit in der Theorie der Attractionen.

200. Um eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades zu erhalten, welche der Eigenschaft der Kegelschnitte analog wäre, nach der die Summe der Focaldistanzen constant ist, gab Jacobi dieser letzteren Eigenschaft den fol-

genden Ausdruck: Wenn man die beiden Endpunkte C, C' der grossen Achse der Ellipse betrachtet, so vereinigt dieselbe Relation

$$\varrho + \varrho' = 2a,$$

welche die Entfernungen von C und C' von irgend einem Punkte ihrer Verbindungslinie verknüpft, auch die Entfernungen der Brennpunkte von irgend einem Punkte der Ellipse.

Wenn wir nun in analoger Weise im Hauptschnitt des Ellipsoids die drei Punkte nehmen, welche in dem vorher (Artikel 196) auseinander gesetzten Sinne dreien Punkten der Focalellipse entsprechen, so vereinigt dieselbe Relation, welche zwischen den Entfernungen jener Punkte von einem beliebigen Punkte ihrer Ebene stattfindet, auch die Entfernungen der letztern Punkte von irgend einem Punkte der Fläche. In der That sind nach Artikel 198 die Entfernungen der Punkte eines confocalen Kegelschnitts von einem Punkte der Fläche gleich den Entfernungen des diesem Letzteren entsprechenden Punktes der Hauptebene von den drei Punkten des Hauptschnittes*).

201. Wenn umgekehrt der Ort eines Punktes zu bestimmen wäre, dessen Entfernungen von drei festen Punkten durch dieselbe Relation vereinigt sind, welche die Entfernungen der Eckpunkte eines Dreiecks mit

---

*) Durch geometrische Betrachtung hat Townsend gezeigt („Cambridge and Dublin Mathematical Journal“, Vol. III, p. 154), dass diese Eigenschaft nur den Punkten der modularen Focalkegelschnitte angehört. In der That sind, wie aus den Formeln des Artikel 196 erhellt, die Punkte der Ebene y, welche irgend einem Punkte (x', y', z') des Ellipsoids entsprechen, imaginär.

Townsend leitet Jacobi's Methode der Generation aus MacCullagh's Modular-Eigenschaft ab. Denn wenn man durch irgend einen Punkt der Fläche eine zu einem Kreisschnitt parallele Ebene legt, so schneidet dieselbe die den drei festen Focalpunkten entsprechenden Directricen in einem Dreieck von unveränderlicher Grösse und Gestalt, und die Entfernungen des Punktes der Fläche von den Brennpunkten sind in einem constanten Verhältniss zu seinen Entfernungen von den Ecken dieses Dreiecks. Und man kann ein ähnliches Dreieck bilden, dessen Seiten in bestimmtem Verhältniss verkleinert oder vergrössert sind, für welches die Entfernungen der Ecken vom Punkt (x', y', z') seinen Entfernungen von den Brennpunkten gleich sind.

den Seiten a, b, c von irgend einem Punkte seiner Ebene verbindet, so erhält man, wenn ϱ, ϱ', ϱ'' jene drei Entfernungen bezeichnen, nach Artikel 50

$$a^2(\varrho^2-\varrho'^2)(\varrho^2-\varrho''^2)+b^2(\varrho'^2-\varrho^2)(\varrho'^2-\varrho''^2)+c^2(\varrho''^2-\varrho^2)(\varrho''^2-\varrho'^2)$$
$$-a^2(b^2+c^2-a^2)\varrho^2-b^2(c^2+a^2-b^2)\varrho'^2-c^2(a^2+b^2-c^2)\varrho''^2+a^2b^2c^2$$
$$=0;$$

und da $(\varrho^2-\varrho'^2)$, etc. als Functionen der Coordinaten nur vom ersten Grade sind, so ist der gesuchte Ort vom zweiten Grade.

Indem man zeigt, dass diese Gleichung von der Form

$$S+LM=0$$

ist, wo S eine unendlich kleine Kugel bezeichnet, welche einen solchen Punkt zum Centrum hat, weist man nach, dass jene drei Punkte, von denen die Entfernungen gemessen werden, Focalpunkte der Fläche zweiten Grades sind. Jener Nachweis ist geführt, wenn das Resultat der Substitution

$$\varrho^2=0$$

in die vorige Gleichung als in lineare Factoren zerfallend erkannt ist. Dasselbe ist

$$a^2(\varrho'^2-c^2)(\varrho''^2-b^2)+(b^2\varrho'^2-c^2\varrho''^2)(\varrho'^2-\varrho''^2+b^2-c^2),$$

nnd wenn wir

$$\varrho'^2-\varrho^2-c^2=L,\quad \varrho''^2-\varrho^2-b^2=M$$

setzen, so geht es in die Gestalt

$$a^2LM+(b^2L-c^2M)(L-M)$$

oder

$$b^2L^2-2bcLM\cos A+c^2M^2=0$$

über, wo A den Winkel des aus a, b, c gebildeten Dreiecks bezeichnet, welcher a gegenüberliegt. Diese Gleichung zerfällt in zwei imaginäre Factoren und beweist somit, dass der betrachtete Punkt zu den Focalpunkten der modularen Gattung gehört.

202. Der Ort der Berührungspunkte paralleler Tangentenebenen einer Reihe von confocalen Flächen zweiten Grades ist eine Hyperbel.

Wir nehmen an, dass α, β, γ die Richtungswinkel der gemeinschaftlichen Normalen dieser Tangentenebenen bezeichnen und erkennen dann nach der Formel

$$\cos\alpha=\frac{px'}{a^2}\quad \text{(Artikel 85)}$$

durch Substitution von

$$r \cos \alpha' \quad \text{für} \quad x',$$

dass die Richtungscosinus des Radius vector irgend eines Berührungspunktes durch

$$\frac{a^2 \cos \alpha}{rp}, \quad \frac{b^2 \cos \beta}{rp}, \quad \frac{c^2 \cos \gamma}{rp}$$

dargestellt sind. Wenn wir dann nach Artikel 14 die Richtungscosinus der Normale der Ebene des Radius vector und der Normale der Tangentenebene bilden, so erhalten wir für Φ als den vom Radius vector mit dieser Normale gebildeten Winkel dieselben in der Form

$$\frac{(b^2 - c^2) \cos \beta \cos \gamma}{rp \sin \Phi}, \quad \frac{(c^2 - a^2) \cos \gamma \cos \alpha}{rp \sin \Phi}, \quad \frac{(a^2 - b^2) \cos \alpha \cos \beta}{rp \sin \Phi}.$$

Der gemeinschaftliche Nenner dieser Ausdrücke repräsentiert aber das Doppelte des Inhalts des Dreiecks, welches vom Radius vector und jener Normale bestimmt wird; die doppelten Inhalte der Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinatenebenen sind daher durch

$$(b^2 - c^2) \cos \beta \cos \gamma, \; (c^2 - a^2) \cos \gamma \cos \alpha, \; (a^2 - b^2) \cos \alpha \cos \beta$$

ausgedrückt, und da diese Projectionen für ein System von confocalen Flächen constant sind, so ist für ein solches System sowohl die Ebene dieses Dreiecks, als auch seine Grösse constant. Wenn also CM die Normale der betrachteten Reihe von Tangentenebenen und PM das auf dieselbe von einem Berührungspunkte P gefällte Perpendikel bezeichnen, so ist die Ebene und die Grösse des Dreiecks CPM unveränderlich und der Ort von P daher eine Hyperbel, für welche CM eine Asymptote ist.

203. Das dem System confocaler Flächen

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = 1$$

entsprechende reciproke System ist ein System concyclischer Flächen

$$(a^2 - \lambda^2) x^2 + (b^2 - \lambda^2) y^2 + (c^2 - \lambda^2) z^2 = R^4.$$

Diese Gleichung stellt ein System von Flächen zweiten Grades dar, welche durch eine gemeinschaftliche Curve gehen und welchem die Punkt-Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

angehört. Daher ist das reciproke System in eine gemeinschaftliche developpable Fläche eingeschrieben, und manche der in diesem Kapitel für confocale Flächen abgeleiteten Eigenschaften ergeben sich als specielle Fälle von allgemeinen Eigenschaften derjenigen Flächen, welche einer gemeinschaftlichen developpabeln Fläche eingeschrieben sind*). (Man vergleiche Artikel 132, 170 122 und 175.)

Da der aus einem Punkte eines Focalkegelschnitts an die Fläche gelegte Tangentenkegel ein Umdrehungskegel ist, d. h. ein solcher, welcher mit dem unendlich entfernten imaginären Kreise (Artikel 134) eine doppelte Berührung hat, so ergiebt sich, dass von jedem Punkte eines Focalkegelschnitts zwei imaginäre Ebenen ausgehen, welche jede confocale Fläche berühren, und wir erkennen geometrisch die Existenz dieser developpabeln Fläche, deren Tangentenebenen sämmtliche confocale Flächen berühren. Wir erkennen auch, dass sie mit derjenigen developpabeln Fläche identisch ist, welche von den durch die Tangenten des unendlich entfernten imaginären Kreises gehenden Tangentenebenen der Fläche gebildet wird. Man bildet ihre Gleichung, indem man die Discriminante der Gleichung der confocalen Flächen in Bezug auf λ^2 bildet. Der unendlich entfernte imaginäre Kreis und die Focalkegelschnitte sind die Doppellinien dieser Fläche**).

204. Wir schliessen endlich diesen Theorien die auf die Lehre von der Krümmung der Flächen zweiten Grades bezüglichen Hauptsätze an, als welche mit dem Gegenstand dieses Ka-

*) Vergl. auch Chasles' „Aperçu historique" p. 413 f. der deutschen Ausgabe und im „Quarterly Journal of Mathem." Vol. III, p. 155 eine Note von Ferrers.

**) Eine ausführliche Darstellung der Theorie der confocalen und concyclischen Flächen zweiten Grades und der entsprechenden sphärischen Kegelschnitte von diesem Gesichtspunkte aus, hat der Herausgeber im VII. Bd. der „Zeitschrift für Mathem. u. Physik" (1862) gegeben (p. 25—45, 217—238, 285—313). Die Veröffentlichungen von Chasles („Comptes rendus" t. L, p. 623, p. 1055, p. 1110) und von Cremona („Annali di Matem." t. III, p. 257) sind darin im Zusammenhang vorgelegt.

pitels in vielseitigem Zusammenhang stehen. Die weitere Untersuchung behalten wir der allgemeinen Theorie der Flächen vor.

Der Krümmungsradius eines Normalschnittes in einem Punkte einer Fläche zweiten Grades ist durch $\frac{\beta^2}{p}$ ausgedrückt, wenn β den der Spur des Schnittes in der Tangentenebene parallelen Halbdurchmesser und p die Normale vom Centrum auf die Tangentenebene bezeichnet.

Der Beweis des Satzes lässt sich durch die Methode des unendlich Kleinen analog dem von dem entsprechenden Satze in der Theorie der Kegelschnitte führen. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Artikel 261.)

Seien P und Q zwei Punkte einer Fläche zweiten Grades und schneide eine durch Q gehende und der Tangentenebene in P parallele Ebene den Centralradius CP in R und die Normale in P in S, so ist der Radius eines durch P und Q gehenden Kreises, der sein Centrum in PS hat,

$$= \frac{PQ^2}{2\,PS}.$$

Wenn nun der Punkt Q sich dem Punkte P unbegrenzt nähert, so nähert sich QP der Grenze QR, und wenn wir CP und den zu QR parallelen Centralradius durch a' und β bezeichnen und P' der andere Endpunkt des Durchmessers CP ist, so wird nach Artikel 70

$$\beta^2 : a'^2 = QR^2 : PR \,.\, RP' \; (= 2a' \,.\, PR),$$

also

$$QR^2 = \frac{2\beta^2 \,.\, PR}{a'}$$

und der Krümmungsradius

$$= \frac{\beta^2}{a'} \cdot \frac{PR}{PS}.$$

Wenn aber vom Centrum die Normale CM auf die Tangentenebene gefällt ist, so ist das rechtwinklige Dreieck CMP dem Dreieck PRS ähnlich und man hat

$$PR : PS = a' : p;$$

der Krümmungsradius ist also

$$= \frac{\beta^2}{a'} \cdot \frac{a'}{p} = \frac{\beta^2}{p},$$

welches zu beweisen war.

Wenn der durch P und Q gehende Kreis sein Centrum nicht in PS, sondern in einer andern Linie PS' hat, welche mit PS einen Winkel θ bildet, so findet die einzige Veränderung statt, dass der Radius des Kreises

$$= \frac{PQ^2}{2\,PS'}$$

ist, wo S' noch der durch Q gehenden zur Tangentenebene in P parallelen Ebene angehört. Da nun

$$PS = PS' \,.\, \cos\theta$$

ist, so ist der Radius der Krümmung

$$= \frac{PQ^2}{2\,PS} \cos\theta,$$

oder der Werth für den Krümmungsradius eines schiefen Schnittes ist das Product aus dem Krümmungsradius des durch PQ gehenden Normalschnittes in den cosinus von θ.

205. Man kann diese Sätze auch analytisch leicht beweisen. Man weiss aus der Theorie der Kegelschnitte, dass für den Kegelschnitt

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Ey = 0$$

der Krümmungsradius im Anfangspunkt der Coordinaten

$$= \frac{E}{A}$$

ist. Wenn daher für die Ebene xy als Tangentenebene die Gleichung einer Fläche zweiten Grades durch

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Lxz + 2\,Myz + Nz^2 + 2\,Ez = 0$$

gegeben ist, so sind die Krümmungsradien der den Ebenen

$$y = 0, \quad x = 0$$

entsprechenden Schnitte respective

$$= \frac{E}{A} \text{ und } = \frac{E}{C}.$$

Und wenn die Gleichung zu parallelen Achsen durch das Centrum transformiert wird, wobei die Glieder vom höchsten Grade unverändert bleiben, so wird sie

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Lxz + 2\,Myz + Nz^2 = H$$

und die Quadrate der in den Achsen der x und y gebildeten Abschnitte sind

$$\frac{H}{A} \text{ und } \frac{H}{C};$$

die Krümmungsradien sind somit den Quadraten der parallelen Halbdurchmesser eines Centralschnittes proportional. Und da nach der Theorie der Kegelschnitte der Krümmungsradius dieses Schnittes, welcher die Normale der Tangentenebene enthält

$$= \frac{\beta^2}{p}$$

ist, so ist diess auch die Form des Ausdrucks für den Krümmungsradius jedes andern Schnittes.

Man kann das nämliche Ergebniss aus der im Artikel 183 gegebenen Gleichung der Fläche zweiten Grades ableiten, welche auf die Normale der Fläche und die Normalen der beiden durch den betrachteten Punkt gehenden confocalen Flächen bezogen ist, nämlich

$$\frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{a^2-a'^2} + \frac{z^2}{a^2-a''^2} - \frac{2p'xy}{p(a^2-a'^2)} - \frac{2p''xz}{p(a^2-a''^2)} + \frac{2x}{p} = 0.$$

Die Krümmungsradien der den Ebenen

$$z = 0, \quad y = 0$$

respective entsprechenden Schnitte sind durch die Ausdrücke

$$\frac{a^2 - a'^2}{p}, \quad \frac{a^2 - a''^2}{p}$$

gegeben; ihre Zähler sind die Quadrate der Halbachsen des Schnittes, den eine der Tangentenebene parallele Ebene bestimmt (Artikel 172).

Die Gleichung des Schnittes, welcher einer unter dem Winkel θ gegen die Ebene der y geneigten Ebene entspricht, wird gebildet, indem man der Drehung der Coordinatenachsen um den Winkel θ entsprechend für y und z respective

$$y \cos\theta - z \sin\theta, \quad y \sin\theta + z \cos\theta$$

substituiert, und dann

$$z = 0$$

setzt. Man findet den Coefficient von y^2 in der Form

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2 - a'^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2 - a''^2},$$

und den Krümmungsradius

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2 - a'^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2 - a''^2}\right),$$

und kommt auf das vorige Ergebniss zurück durch die Bemerkung, dass jener Coefficient von y^2 das Quadrat des unter dem Winkel θ gegen die Achse der y geneigten Durchmessers des Centralschnittes ist.

206. Aus dem im Artikel 204 ausgesprochenen Gesetze ergiebt sich, dass für jeden Punkt einer centralen Fläche zweiten Grades der Krümmungsradius eines Normalschnittes ein Maximum und ein Minimum seines Werthes für Richtungen des Schnittes erhält, welche der grossen und kleinen Achse des Centralschnittes parallel sind, den eine der Tangentenebene parallele Ebene bestimmt.

Man nennt diesen Maximal- und Minimalwerth die Hauptkrümmungsradien für diesen Punkt und die Schnitte, zu welchen sie gehören, die Hauptschnitte der Fläche in diesem Punkte.

Man findet für das Product dieser beiden Werthe den Ausdruck

$$r_1 r_2 = \left(\frac{abc}{p^2}\right)^2,$$

d. i. das Product der Hauptkrümmungsradien ist constant in den Punkten, für welche die Tangentenebene gleichen Abstand vom Centrum hat.

Ihre Summe ergiebt sich

$$r_1 + r^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)}{p},$$

d. h. in Punkten, welche vom Centrum gleichweit entfernt sind, ist die Summe der Hauptkrümmungsradien dem Abstande der Tangentenebene vom Centrum umgekehrt proportional. Beide Relationen liefern eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien in einem Punkte, die man in der Form

$$\frac{x^2}{a^2 - pr} + \frac{y^2}{b^2 - pr} + \frac{z^2}{c^2 - pr} = 1$$

darstellen kann. Für die Gleichheit ihrer Wurzeln kommt man zu den Kreispunkten der Fläche. Ihre Gestalt bestätigt überdiess das Folgende.

Wenn man die Hauptkrümmungsradien mittelst der Halbachsen der durch den betrachteten Punkt gehenden confocalen Flächen ausdrückt, so erhält man leicht den zuerst von Lamé ausgesprochenen Satz: Die sechs Hauptkrümmungshalbmesser der drei in einem Punkte sich schneidenden confocalen Flächen zweiten Grades bilden zwei Gruppen so, dass die Summe der Producte der Halbmesser beider Gruppen gleich Null ist.*)

Und ebenso den von Bertrand, nach welchem für je ein Paar der confocalen durch einen Punkt gehenden Flächen die Verhältnisse der beiden Hauptkrümmungsradien einer Fläche die Einheit zur Summe geben; ein Satz, der einen interessanten constructiven Zusammenhang der sechs Hauptkrümmungscentra begründet.

Es ergiebt sich aus Artikel 171, dass jeder der Hauptschnitte die Normale einer der beiden durch den Punkt gehenden confocalen Flächen enthält.

In Folge dessen ist der Durchschnitt einer Fläche zweiten Grades mit einer ihr confocalen Fläche eine Curve, für welche die Tangente immer eine der Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche für den Berührungspunkt ist. Eine solche Curve nennt man eine Krümmungslinie der Fläche.

In dem Falle des Hyperboloids mit einer Mantelfläche ist der Centralschnitt eine Hyperbel und die Schnitte, deren Spuren in der Tangentenebene den Asymptoten dieser Hyperbel parallel sind, haben unendlich grosse Krümmungsradien, d. h. sie sind, wie wir schon wissen, gerade Linien. Beim Hindurchgehen durch einen dieser Schnitte wechselt der Krümmungsradius das Zeichen, d. h. die Richtung der Convexität von Schnitten auf der einen Seite

*) G. Lamé, „Leçons sur les Coordonnées curvilignes et leurs diverses applications" Paris 1859. §. LXXII. Für die Theorie der confocalen Flächen und allgemeiner der Orthogonalflächensysteme ist das Studium dieses Werkes besonders dann zu empfehlen, wenn es sich um die Bedeutung dieser Theorien für die Anwendung der Mathematik auf die allgemeine Physik handelt. Hierher gehören besonders die Vorlesungen VII und VIII; von allgemeinem Interesse sind in derselben Richtung die Vorlesungen III und IV.

von einer dieser Linien ist derjenigen der Schnitte auf der andern Seite entgegengesetzt.

Wenn man zu den Normalen einer Fläche zweiten Grades in Punkten einer Schaar von Krümmungslinien Parallelen durch das Centrum zieht, so entstehen zwei Systeme von confocalen Kegeln; und die durch das Centrum gehenden Parallelebenen zu den Tangentenebenen der Fläche in den Punkten derselben Krümmungslinien umhüllen die Reciprocalkegel der ersteren.

Der Satz des Artikels 174 kann als eine Definition der Krümmungslinien angesehen werden. Dann ergiebt sich z. B. nach dem im Eingang des Artikels 204 ausgesprochenen Gesetze, dass das Verhältniss der beiden Hauptkrümmungshalbmesser in jedem Punkte dem reciproken Werth des Verhältnisses der Quadrate der Halbdurchmesser gleich ist, welche den entsprechenden Krümmungslinien parallel sind.

Wenn man die Grösse p mittelst der Achsen der confocalen Flächen ausdrückt (Artikel 173), und den analogen Ausdruck für den Hauptkrümmungsradius benutzt, so ergeben sich unter andern noch die folgenden Relationen: Das Product des Hauptkrümmungshalbmessers in die dritte Potenz des Abstandes der Tangentenebene vom Centrum ist für alle Punkte einer Krümmungslinie von constantem Werthe.

Das Verhältniss des Hauptkrümmungshalbmessers in Punkten einer Krümmungslinie zur dritten Potenz des ihrer Tangente parallelen Halbdurchmessers ist constant.

207. Die zwei Hauptkrümmungscentra sind die Pole der Tangentenebene in Bezug auf die beiden durch den Berührungspunkt gehenden confocalen Flächen. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn.“ Artikel 261.)

Denn diese Pole liegen nach Artikel 175 in der Normale der Ebene und ihre Entfernungen von derselben

$$\frac{a^2 - a'^2}{p} \quad \text{und} \quad \frac{a^2 - a''^2}{p} \quad \text{(Artikel 176)}$$

sind die Längen der Hauptkrümmungsradien.

Nach Artikel 176 ergeben sich daher auch die Coordinaten der Centra der beiden Hauptkrümmungskreise, nämlich

$$x = \frac{a'^2 x'}{a^2},\ \ y = \frac{b'^2 y'}{b^2},\ \ z = \frac{c'^2 z'}{c^2},$$

$$x = \frac{a''^2 x'}{a^2},\ \ y = \frac{b''^2 y'}{b^2},\ \ z = \frac{c''^2 z'}{c^2}.$$

Man findet leicht, dass für alle Punkte einer Krümmungslinie das Verhältniss des Abstandes der Tangentenebene von ihrem in Bezug auf eine confocale Fläche genommenen Pol zu dem der Tangente der Krümmungslinie parallelen Halbdurchmesser constant ist.

208. Wenn man für jeden Punkt einer Fläche zweiten Grades die beiden Hauptkrümmungscentra bestimmt, so ist der Ort aller dieser Centra eine Fläche mit zwei Mänteln, welche wir als die Fläche der Centra bezeichnen wollen.

Um ihre Gleichung zu finden, bemerken wir, dass die Coordinaten x', y', z' den Gleichungen

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1,\quad \frac{x'^2}{a^2 a'^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2} = 0$$

genügen. Indem wir dann für x', etc. die im letzten Artikel gegebenen Werthe in Function von x, etc. und für a'^2, $a^2 - h^2$, etc. substituieren, erhalten wir aus ihnen

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - h^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - h^2)^2} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 - h^2)^2} = 1,$$

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - h^2)^3} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - h^2)^3} + \frac{c^2 z^2}{(c^2 - h^2)^3} = 0.$$

Sie drücken aus, dass alle die Centra, welche den Punkten einer Krümmungslinie der gegebenen Fläche entsprechen, als für welche h constant ist, in der Durchschnittscurve zweier Flächen zweiten Grades liegen.

Da die zweite von diesen Gleichungen das Differential der ersten ist, so wird die Fläche zweiten Grades selbst von der Fläche der Centra berührt.

Die Elimination von h^2 zwischen diesen Gleichungen liefert die Gleichung der Fläche der Centra. Durch folgendes Verfahren kann die Elimination vollzogen werden. Wenn man in die Coordinaten des Krümmungscentrums im Artikel 207 die Werthe von x'^2, y'^2, z'^2 aus Artikel 168 einsetzt, so erhält man

$$a^2x^2 (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) = a'^6 a''^2,\quad b^2y^2 (b^2 - a^2)(b^2 - c^2) = b'^6 b''^2,$$

$$c^2z^2 (c^2 - a^2)(c^2 - b^2) = c'^6 c''^2.$$

Nun geht für

$$a'^2 = a^2 - h^2, \quad a''^2 = a^2 - k^2$$

die erste dieser Gleichungen in die Form

$$a^2 x^2 (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) = a^8 - Pa^6 + Qa^4 - Ra^2 + S$$

über, und die beiden andern werden in gleicher Weise in

$$b^2 y^2 (b^2 - a^2)(b^2 - c^2) = b^8 - Pb^6 + Qb^4 - Rb^2 + S,$$

$$c^2 z^2 (c^2 - a^2)(c^2 - b^2) = c^8 - Pc^6 + Qc^4 - Rc^2 + S$$

übergeführt. Sie bilden drei lineare Relationen zwischen den Grössen P, Q, R, S. Und da diese Grössen die Coefficienten einer biquadratischen Gleichung sind, welche drei gleiche Wurzeln hat, so sind sie durch zwei fernere Relationen vom zweiten und dritten Grade respective verbunden. Damit ist die Elimination auf die practisch ausführbare Elimination zwischen einer cubischen und einer quadratischen Gleichung zurückgeführt.

Die Fläche der Centra ist vom zwölften Grade.

209. Die Natur ihrer Durchschnitte mit den Hauptebenen ist a priori leicht zu erkennen. Denn der eine der Hauptkrümmungsradien in einem Punkte des Hauptschnitts einer Fläche zweiten Grades ist der Krümmungsradius des Schnittes selbst und der Ort der entsprechenden Centra ist offenbar die Evolute dieses Schnittes.

Der andere Krümmungsradius, welcher einem Punkte des Hauptschnittes der xy entspricht, ist, wie sich aus der Formel des Artikel 204 ergiebt,

$$\frac{c^2}{p},$$

weil c in jedem durch die Achse der z gehenden Schnitte eine Achse ist. Dann sind nach den Formeln des Artikel 207 die Coordinaten des entsprechenden Centrums

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}\, x', \quad \frac{b^2 - c^2}{b^2}\, y',$$

d. h. sie sind die Pole der Tangente des Hauptschnittes im Punkte x', y' in Bezug auf den entsprechenden Focalkegelschnitt der Fläche. Der Ort der entsprechenden Centra ist somit die Reciproke des Hauptschnitts in Bezug auf den Focalkegelschnitt, d. i.

$$\frac{a^2 x^2}{(a^2 - c^2)^2} + \frac{b^2 y^2}{(b^2 - c^2)^2} = 1.$$

Und der Schnitt der Fläche durch eine Hauptebene, welcher nothwendig vom zwölften Grade ist, besteht daher aus der Evolute eines Kegelschnitts, welche vom sechsten Grade ist, und einem dreifach zu zählenden Kegelschnitt, welcher eine Doppellinie der Fläche ist. Der Schnitt, welcher der unendlich entfernten Ebene entspricht, ist von derselben Natur.

210. Die Reciproke der Fläche der Centra ist eine Fläche vierten Grades.

Die allgemeine Theorie der Krümmung der Flächen lehrt leicht, dass die Tangentenebene zu jeder der durch (x', y', z') gehenden confocalen Flächen auch eine Tangentenebene der Fläche der Centra ist. Die reciproken Werthe der von der Tangentenebene in den Achsen bestimmten Abschnitte sind

$$\xi = \frac{x'}{a'^2}, \quad \eta = \frac{y'}{b'^2}, \quad \zeta = \frac{z'}{c'^2};$$

die Relation

$$\frac{x'^2}{a^2 a'^2} + \frac{y'^2}{b^2 b'^2} + \frac{z'^2}{c^2 c'^2} = 0$$

begründet dann zwischen ξ, η, ζ die Relation

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = (a^2 - a'^2)\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right)$$

und die Relation

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

giebt ebenso

$$(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1) = (a^2 - a'^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2),$$

und man erhält somit durch die Elimination von $(a^2 - a'^2)$ die Gleichung

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right)(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1)\text{*)},$$

welche die Behauptung bestätigt, indem man bemerkt, dass ξ, η, ζ als Coordinaten der Reciprokalfläche zu betrachten sind; denn wenn ξ, η, ζ die Coordinaten des in Bezug auf die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

genommenen Pols der Tangentenebene bezeichnen, so ist

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 1$$

identisch mit der Gleichung der Tangentenebene und ξ, η, ζ sind die reciproken Werthe der von der Tangentenebene in den Achsen gebildeten Abschnitte.

---

*) Sie ist, wie es scheint, zuerst von Booth, „Tangential-Coordinates“ Dublin, 1840 gegeben.

211. Im Anschluss an die Betrachtung der Krümmungslinien lässt sich aus der Theorie der confocalen Flächen eine Gruppe von Sätzen ableiten, welche in anderer Weise als Jacobi's von uns schon angeführter Satz die Gesetze von der Summe und Differenz der Radien vectoren und verwandte aus der Theorie der Kegelschnitte auf die Flächen zweiten Grades übertragen*).

Wir gehen auf die Ausdrucksweise des Artikel 168 zurück und stellen das confocale System centrischer Flächen durch

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{a'^2 - h^2} + \frac{z^2}{a'^2 - k^2} - 1 = 0, \quad U_1 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a''^2} + \frac{y^2}{a''^2 - h^2} + \frac{z^2}{a''^2 - k^2} - 1 = 0, \quad U_2 = 0,$$
$$\frac{x^2}{a'''^2} + \frac{y^2}{a'''^2 - h^2} + \frac{z^2}{a'''^2 - k^2} - 1 = 0, \quad U_3 = 0,$$

also die einem beliebigen Punkte des Raumes entsprechenden Hauptnormalebenen als die Tangentenebenen der confocalen Flächen durch

$$\frac{x}{a'''^2}\xi + \frac{y}{a'''^2 - h^2}\eta + \frac{z}{a'''^2 - k^2}\zeta - 1 = 0, \quad N_{12},$$
$$\frac{x}{a''^2}\xi + \frac{y}{a''^2 - h^2}\eta + \frac{z}{a''^2 - k^2}\zeta - 1 = 0, \quad N_{13},$$
$$\frac{x}{a'^2}\xi + \frac{y}{a'^2 - h^2}\eta + \frac{z}{a'^2 - k^2}\zeta - 1 = 0, \quad N_{23},$$

dar. Dann ergiebt sich alsbald, dass diese Ebenen nach Paaren, nämlich

$$N_{12}, N_{13}; \quad N_{21}, N_{23}; \ N_{31}, N_{32},$$

die Achsen in Punktepaaren schneiden, für welche das Product der vom Centrum aus gemessenen Segmente constant ist; diese Punktepaare bestimmen daher in jeder Achse eine Involution, die das Centrum zu ihrem Centralpunkt hat, und deren Doppelpunkte daher gleich weit entfernt vom Centrum liegen und respective durch die Coordinatenwerthe

$$x_1 = \pm \frac{hk}{a'}, \quad y_1 = \pm \frac{h\sqrt{k^2 - h^2}}{\sqrt{a'^2 - h^2}}\sqrt{-1},$$
$$z_1 = \pm \frac{k\sqrt{k^2 - h^2}}{\sqrt{a'^2 - k^2}} \quad ;$$

*) Man vergleiche Heilmann, „Journal f. d. r. u. a. Math.“ Bd. LVI, p. 345—364. T. del Beccaro „Annali di Matematica“ t. II, p. 30—45.

$$x_2 = \pm \frac{hk}{a''},\; y_2 = \pm \frac{h\sqrt{k^2-h^2}}{\sqrt{a''^2-h^2}}\sqrt{-1},$$

$$z_2 = \pm \frac{k\sqrt{k^2-h^2}}{\sqrt{k^2-a''^2}}\sqrt{-1};$$

$$x_3 = \pm \frac{hk}{a'''},\; y_3 = \pm \frac{h\sqrt{k^2-h^2}}{\sqrt{h^2-a'''^2}},$$

$$z_3 = \pm \frac{k\sqrt{k^2-h^2}}{\sqrt{k^2-a'''^2}}\sqrt{-1}$$

bezeichnet sind.

Betrachten wir nun die Kreispunkte der drei Flächen U_1, U_2, U_3, so sind nach dem Früheren ihre Coordinaten

$$\text{für } U_1: \begin{cases} x=0,\; y = \pm \dfrac{h\sqrt{a'^2-h^2}}{\sqrt{k^2-h^2}}\sqrt{-1}, \\ \qquad\quad z = \pm \dfrac{k\sqrt{a'^2-k^2}}{\sqrt{k^2-h^2}}; \\ y=0,\; z = \pm \dfrac{\sqrt{k^2-h^2}\,\sqrt{a'^2-k^2}}{k}, \\ \qquad\quad x = \pm \dfrac{ha'}{k}; \\ z=0,\; x = \pm \dfrac{ka'}{h}, \\ \qquad\quad y = \pm \dfrac{\sqrt{k^2-h^2}\,\sqrt{a'^2-h^2}}{h}\sqrt{-1}; \end{cases}$$

$$\text{für } U_2: \begin{cases} x=0,\; y = \pm \dfrac{h\sqrt{a''^2-h^2}}{\sqrt{k^2-h^2}}\sqrt{-1}, \\ \qquad\quad z = \pm \dfrac{k\sqrt{k^2-a''^2}}{\sqrt{k^2-h^2}}\sqrt{-1}; \\ y=0,\; z = \pm \dfrac{\sqrt{k^2-h^2}\,\sqrt{k^2-a''^2}}{k}\sqrt{-1}, \\ \qquad\quad x = \pm \dfrac{ha''}{k}; \\ z=0,\; x = \pm \dfrac{ka''}{h}, \\ \qquad\quad y = \pm \dfrac{\sqrt{k^2-h^2}\,\sqrt{a''^2-h^2}}{h}\sqrt{-1}; \end{cases}$$

$$\text{für } U_3: \begin{cases} x = 0, & y = \pm \dfrac{h\sqrt{h^2 - a'''^2}}{\sqrt{k^2 - h^2}}, \\ & z = \pm \dfrac{k\sqrt{k^2 - a'''^2}}{\sqrt{k^2 - h^2}}\sqrt{-1}; \\ y = 0, & z = \pm \dfrac{\sqrt{k^2 - h^2}\,\sqrt{k^2 - a'''^2}}{k}\sqrt{-1}, \\ & x = \pm \dfrac{h a'''}{k}; \\ z = 0, & x = \pm \dfrac{k a'''}{h}, \\ & y = \pm \dfrac{\sqrt{k^2 - h^2}\,\sqrt{h^2 - a'''^2}}{h}; \end{cases}$$

und nach den vorigen Formeln können die Normalen der drei Flächen in diesen ihren Kreispunkten durch die Gleichungen

für U_1: $\xi = 0,\ \dfrac{\eta}{y_1} + \dfrac{\zeta}{z_1} - 1 = 0;\ \eta = 0,\ \dfrac{\xi}{x_1} + \dfrac{\zeta}{z_1} - 1 = 0;$
$\zeta = 0,\ \dfrac{\xi}{x_1} + \dfrac{\eta}{y_1} - 1 = 0;$

für U_2: $\xi = 0,\ \dfrac{\eta}{y_2} + \dfrac{\zeta}{z_2} - 1 = 0;\ \eta = 0,\ \dfrac{\xi}{x_2} + \dfrac{\zeta}{z_2} - 1 = 0;$
$\zeta = 0,\ \dfrac{\xi}{x_2} + \dfrac{\eta}{y_2} - 1 = 0;$

für U_3: $\xi = 0,\ \dfrac{\eta}{y_3} + \dfrac{\zeta}{z_3} - 1 = 0;\ \eta = 0,\ \dfrac{\xi}{x_3} + \dfrac{\zeta}{z_3} - 1 = 0;$
$\zeta = 0,\ \dfrac{\xi}{x_3} + \dfrac{\eta}{y_3} - 1 = 0$

dargestellt werden, aus deren Form dann in Verbindung mit dem Vorhergehenden die nachfolgenden Sätze hervorgehen:

Die beiden Hauptnormalebenen in einem beliebigen Punkte einer Fläche zweiten Grades, d. i. die Normalebenen ihrer sich in diesem Punkte schneidenden Krümmungscurven, bestimmen in den Achsen der Fläche Punktepaare einer Involution, deren Doppelpunkte gleichweit vom Centrum und für alle Lagen jenes Punktes constant sind, und die Normalen der Fläche in ihren Kreispunkten gehen durch diese Letzteren.

212. Dieselben Sätze übertragen sich auf Flächen zweiten Grades ohne endlich angebbares Centrum, indem wir ihre Gleichungen in der Form

$$\frac{y^2}{a_1 + l} + \frac{z^2}{a_1 - l} - 4\,(x + a_1) = 0, \quad u_1,$$
$$\frac{y^2}{a_2 + l} + \frac{z^2}{a_2 - l} - 4\,(x + a_2) = 0, \quad u_2,$$
$$\frac{y^2}{a_3 - l} + \frac{z^2}{a_3 - l} + 4\,(x - a_3) = 0, \quad u_3,$$

darstellen; sie liefern für die Hauptnormalebenen die Gleichungen

$$\frac{\xi}{a_1 + a_2 + a_3} + \frac{(a_1 + l)\,(l + a_2)}{ly\,(a_1 + a_2 + a_3)}\,\eta + \frac{(a_1 - l)\,(l - a_2)}{lz\,(a_1 + a_2 + a_3)}\,\zeta - 1 = 0, \quad M_{12},$$
$$\frac{\xi}{a_1 - a_2 - a_3} + \frac{(a_1 + l)\,(a_3 - l)}{ly\,(a_3 + a_2 - a_1)}\,\eta + \frac{(a_1 - l)\,(a_3 + l)}{lz\,(a_1 - a_3 - a_2)}\,\zeta - 1 = 0, \quad M_{13},$$
$$\frac{\xi}{a_2 - a_3 - a_1} + \frac{(a_2 + l)\,(a_3 - l)}{ly\,(a_3 + a_1 - a_2)}\,\eta + \frac{(a_1 - l)\,(a_3 + l)}{lz\,(a_2 - a_3 - a_1)}\,\zeta - 1 = 0, \quad M_{23},$$

und für die Halbierungspunkte der von ihnen paarweis in den Achsen der Fläche bestimmten Segmente respective

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = -a_3.$$

Die Coordinaten der Kreispunkte aber sind respective

$$y = 0,\ x = 2l - a_1, \quad z = 2\sqrt{2l\,(a_1 - l)},$$
$$z = 0,\ y = 2\sqrt{2l\,(a_1 + l)}\,\sqrt{-1}, \quad x = -(a_1 + 2l);$$
$$y = 0,\ x = 2l - a_2, \quad z = 2\sqrt{2l\,(l - a_2)}\,\sqrt{-1},$$
$$z = 0,\ y = 2\sqrt{2l\,(a_2 + l)}\,\sqrt{-1}, \quad x = -(a_2 + 2l);$$
$$y = 0,\ x = 2l + a_3, \quad z = 2\sqrt{2l\,(a_3 + l)}\,\sqrt{-1},$$
$$z = 0,\ y = 2\sqrt{2l\,(a_3 - l)}, \quad x = 2l - a_3,$$

und die Gleichungen der ihnen entsprechenden Normalen der Flächen werden durch

$$\xi \pm \frac{\sqrt{a_1 + l}}{\sqrt{2l}}\,\sqrt{-1}\;\eta = a_1, \quad \zeta = 0;$$
$$\xi \pm \frac{\sqrt{a_1 - l}}{\sqrt{2l}}\,\zeta = a_2, \quad \eta = 0;$$
$$\xi \pm \frac{\sqrt{a_2 + l}}{\sqrt{2l}}\,\sqrt{-1}\;\eta = a_2, \quad \zeta = 0;$$

$$\xi \pm \frac{\sqrt{l - a_2}}{\sqrt{2l}} \sqrt{-1}\, \zeta = a_2, \quad \eta = 0;$$

$$\xi \pm \frac{\sqrt{a_3 - l}}{\sqrt{2l}}\, \eta = -a_3, \quad \zeta = 0;$$

$$\xi + \frac{\sqrt{a_3 + l}}{\sqrt{2l}} \sqrt{-1}\, \zeta = -a_3, \quad \eta = 0$$

ausgedrückt. Somit lauten jene oben ausgesprochenen Sätze für Flächen ohne angebbare Centra: Die beiden Hauptnormalebenen einer nichtcentrischen Fläche zweiten Grades in einem beliebigen Punkte derselben bestimmen in der Achse der Fläche ein Segment, welches für alle Lagen jenes Punktes denselben Mittelpunkt hat, und dieser Letztere gehört auch den Normalen der Fläche in ihren Kreispunkten an. Der vierte harmonische Punkt des Bezeichneten in Bezug auf alle diese Segmente ist offenbar unendlich entfernt.

213. Man hat die so in den Achsen der Fläche bestimmten festen Punkte als Focalpunkte der Fläche bezeichnet; wir wollen sie hier zum Unterschied von den schon untersuchten Punkten dieses Namens und in Bezug auf das Folgende als Focalcentra benennen. Man sieht, dass je zwei in einer Achse gelegene unter ihnen mit der Normale eines Punktes der Fläche zwei Ebenen bestimmen, welche mit den Hauptnormalebenen dieses Punktes ein harmonisches Büschel bilden. Bei den nicht centrischen Flächen geht die Ebene des zweiten Focalpunktes der Achse der Fläche parallel.

Da die Hauptnormalebenen eines Punktes auf einander senkrecht sind, so halbieren sie die von den beiden andern Ebenen des Büschels, d. h. den von der Normale mit den Focalpunkten bestimmten, gebildeten Winkel.

Die aus den Focalcentren beschriebenen Kugeln, welche durch die entsprechenden Kreispunkte der Fläche gehen, und sie offenbar in denselben berühren, werden als ihre Focalkugeln und speciell als conjugiert bezeichnet, wenn ihre Centra derselben Achse angehören. Die Längen der Tangenten, die von einem beliebigen Punkte der Fläche an eine solche Kugel gezogen werden, hat man als die Focalstrahlen des bezüglichen Punktes benannt. Ihre Gleichungen lassen sich leicht ausdrücken; sie sind für die centralen Flächen

U_1

$$\left(\xi \mp \frac{hk}{a'}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{(a'^2 - h^2)(a'^2 - k^2)}{a'^2},$$

$$\xi^2 + \left(\eta \mp \frac{h\sqrt{k^2 - h^2}}{\sqrt{a'^2 - h^2}}\sqrt{-1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{a'^2 (a'^2 - k^2)}{a'^2 - h^2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta \mp \frac{k\sqrt{k^2 - h^2}}{\sqrt{a'^2 - k^2}}\right)^2 = \frac{a'^2 (a'^2 - h^2)}{a'^2 - k^2};$$

für U_2

$$\left(\xi \mp \frac{hk}{a''}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = -\frac{(a''^2 - h^2)(k^2 - a''^2)}{a''^2},$$

$$\xi^2 + \left(\eta \mp \frac{h\sqrt{k^2 - h^2}}{\sqrt{a''^2 - h^2}}\sqrt{-1}\right)^2 + \zeta^2 = -\frac{a''^2 (k^2 - a''^2)}{a''^2 - h^2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta \mp \frac{k\sqrt{k^2 - h^2}}{\sqrt{k^2 - a''^2}}\sqrt{-1}\right)^2 = -\frac{a''^2 (a''^2 - h^2)}{k^2 - a''^2};$$

für U_3

$$\left(\xi \mp \frac{hk}{a'''}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{(h^2 - a'''^2)(k^2 - a'''^2)}{a'''^2},$$

$$\xi^2 + \left(\eta \mp \frac{h\sqrt{k^2 - h^2}}{\sqrt{h^2 - a'''^2}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{a'''^2 (k^2 - a'''^2)}{h^2 - a'''^2},$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta \mp \frac{k\sqrt{k^2 - h^2}}{\sqrt{k^2 - a'''^2}}\sqrt{-1}\right)^2 = \frac{a'''^2 (h^2 - a'''^2)}{k^2 - a'''^2}.$$

Für die nicht centralen Flächen existieren nur je eine, welche durch

$$(\xi - a_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4(a_1{}^2 - l^2),$$
$$(\xi - a_2)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4(a_2{}^2 - l^2),$$
$$(\xi + a_3)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4(a_3{}^2 - l^2)$$

dargestellt sind.

Die Focalstrahlen von einem Punkte der Fläche sind dann in elliptischen Coordinaten ausgedrückt

für U_1

$$\psi_1{}^2 = (a'' \mp a''')^2, \quad \psi_2{}^2 = \left(\sqrt{a''^2 - h^2} \mp \sqrt{h^2 - a'''^2}\sqrt{-1}\right)^2,$$
$$\psi_3{}^2 = \left(\sqrt{k^2 - a''^2} \mp \sqrt{k^2 - a'''^2}\right)^2;$$

für U_2

$$\varphi_1{}^2 = (a' \mp a''')^2, \quad \varphi_2{}^2 = \left(\sqrt{a'^2 - h^2} \mp \sqrt{h^2 - a'''^2}\sqrt{-1}\right)^2,$$
$$\varphi_3{}^2 = \left(\sqrt{a'^2 - k^2} \mp \sqrt{k^2 - a'''^2}\sqrt{-1}\right)^2;$$

für U_3

$$\chi_1{}^2 = (a' \mp a'')^2, \quad \chi_2{}^2 = \left(\sqrt{a'^2 - h^2} \mp \sqrt{a''^2 - h^2}\right)^2,$$
$$\chi_3{}^2 = \left(\sqrt{a'^2 - k^2} \mp \sqrt{k^2 - a''^2}\sqrt{-1}\right)^2;$$

und für die nicht centralen Flächen respective

$$\omega_1 = a_3 + a_2, \quad \omega_2 = a_1 + a_3, \quad \omega_3 = a_2 - a_1.$$

214. Nennen wir nun die Polarebenen eines Focalcentrums einer Fläche des confocalen Systems bezüglich der beiden andern Flächen dieses Systems die Directorebenen desselben, so haben wir für die Focalpunkte von U_1, bezüglich U_2 und U_3

$$\xi = \pm \frac{a''^2}{x_1}, \quad \eta = \pm \frac{(a''^2 - h^2)}{y_1}, \quad \zeta = \pm \frac{(k^2 - a''^2)}{z_1};$$
$$\xi = \pm \frac{a'''^2}{x_1}, \quad \eta = \mp \frac{(h^2 - a'''^2)}{y_1}, \quad \zeta = \pm \frac{(k^2 - a'''^2)}{z_1};$$

für die von U_2, bezüglich U_1 und U_3

$$\xi = \pm \frac{a'''^2}{x_2}, \quad \eta = \mp \frac{(h^2 - a'''^2)}{y_2}, \quad \zeta = \mp \frac{(k^2 - a'''^2)}{z_2};$$
$$\xi = \pm \frac{a'^2}{x_2}, \quad \eta = \pm \frac{(a'^2 - h^2)}{y_2}, \quad \zeta = \pm \frac{(a'^2 - k^2)}{z_2};$$

und für die von U_3, bezüglich U_1 und U_2

$$\xi = \pm \frac{a'^2}{x_3}, \quad \eta = \pm \frac{(a'^2 - h^2)}{y_3}, \quad \zeta = \pm \frac{(a'^2 - k^2)}{z_3};$$
$$\xi = \pm \frac{a''^2}{x_3}, \quad \eta = \pm \frac{(a''^2 - h^2)}{y_3}, \quad \zeta = \pm \frac{(k^2 - a''^2)}{z_3}.$$

Für die nicht centralen Flächen ergiebt sich entsprechend

$$\xi = -(a_1 + 2a_2), \quad \xi = (2a_2 - a_1);$$
$$\xi = -(a_2 + 2a_1), \quad \xi = (2a_3 - a_2);$$
$$\xi = -(2a_1 - a_3), \quad \xi = -(2a_2 - a_3).$$

Endlich drücken sich die Abstände eines beliebigen Punktes (x, y, z) einer Fläche von ihren Directorebenen in elliptischen Coordinaten folgendermassen aus; für einen Punkt der Fläche U_1

$$p_1^{\,2} = \frac{a''^2}{x_1^{\,2}}\,\psi_1^{\,2} \quad, \; p_2^{\,2} = \frac{a'''^2}{x_1^{\,2}}\,\psi_1^{\,2};$$
$$q_1^{\,2} = \frac{a''^2 - h^2}{y_1^{\,2}}\,\psi_2^{\,2}, \; q_2^{\,2} = \frac{a'''^2 - h^2}{y_1^{\,2}}\,\psi_2^{\,2};$$
$$r_1^{\,2} = \frac{a''^2 - k^2}{z_1^{\,2}}\,\psi_3^{\,2}, \; r_2^{\,2} = \frac{a'''^2 - k^2}{z_1^{\,2}}\,\psi_3^{\,2};$$

für einen Punkt der Fläche U_2

$$p_1'^{\,2} = \frac{a'^2}{x_2^{\,2}}\,\varphi_1^{\,2} \quad, \; p_2'^{\,2} = \frac{a'''^2}{x_2^{\,2}}\,\varphi_1^{\,2};$$
$$q_1'^{\,2} = \frac{a'^2 - h^2}{y_2^{\,2}}\,\varphi_2^{\,2}, \; q_2'^{\,2} = \frac{a'''^2 - h^2}{y_2^{\,2}}\,\varphi_2^{\,2};$$
$$r_1'^{\,2} = \frac{a'^2 - k^2}{z_2^{\,2}}\,\varphi_3^{\,2}, \; r_2'^{\,2} = \frac{a'''^2 - k^2}{z_2^{\,2}}\,\varphi_3^{\,2};$$

für einen Punkt der Fläche U_3

$$p_1''^{\,2} = \frac{a'^2}{x_3^{\,2}}\,\chi_1^{\,2} \quad, \; p_2''^{\,2} = \frac{a''^2}{x_3^{\,2}}\,\chi_1^{\,2};$$
$$q_1''^{\,2} = \frac{a'^2 - h^2}{y_3^{\,2}}\,\chi_2^{\,2}, \; q_2''^{\,2} = \frac{a''^2 - h^2}{y_3^{\,2}}\,\chi_2^{\,2};$$
$$r_1''^{\,2} = \frac{a'^2 - k^2}{z_3^{\,2}}\,\chi_3^{\,2}, \; r_2''^{\,2} = \frac{a''^2 - k^2}{z_3^{\,2}}\,\chi_3^{\,2}.$$

Endlich für die nicht centralen Flächen entsprechend

$$\omega_1 = \omega_1, \quad \omega'_1 = -\,\omega_1;$$
$$\omega_2 = \omega_2, \quad \omega'_2 = -\,\omega_2;$$
$$\omega_3 = \omega_3, \quad \omega'_3 = -\,\omega_3.$$

Man erhält daraus die folgenden Relationen und die daran angeschlossenen Sätze:

$$\frac{p_1^{\,2}}{p_2^{\,2}} = \frac{a''^2}{a'''^2} \quad, \; \frac{p_1'^{\,2}}{p_2'^{\,2}} = \frac{a'^2}{a'''^2} \quad, \; \frac{p_1''^{\,2}}{p_2''^{\,2}} = \frac{a'^2}{a''^2} \quad;$$
$$\frac{q_1^{\,2}}{q_2^{\,2}} = \frac{a''^2 - h^2}{a'''^2 - h^2}, \; \frac{q_1'^{\,2}}{q_2'^{\,2}} = \frac{a'^2 - h^2}{a'''^2 - h^2}, \; \frac{q_1''^{\,2}}{q_2''^{\,2}} = \frac{a'^2 - h^2}{a''^2 - h^2};$$
$$\frac{r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}} = \frac{a''^2 - k^2}{a'''^2 - k^2}, \; \frac{r_1'^{\,2}}{r_2'^{\,2}} = \frac{a'^2 - k^2}{a'''^2 - k^2}, \; \frac{r_1''^{\,2}}{r_2''^{\,2}} = \frac{a'^2 - k^2}{a''^2 - k^2},$$
$$\frac{\omega_1}{\omega_1'} = \frac{\omega_2}{\omega_2'} = \frac{\omega_3}{\omega_3'} = -\,1\;.$$

Aus den einzelnen Gruppen endlich durch Multiplication

$$\frac{p_1^{\,2}\,p_2'^{\,2}\,p_1''^{\,2}}{p_2^{\,2}\,p_1'^{\,2}\,p_2''^{\,2}} = \frac{q_1^{\,2}\,q_2'^{\,2}\,q_1''^{\,2}}{q_2^{\,2}\,q_1'^{\,2}\,q_2''^{\,2}} = \frac{r_1^{\,2}\,r_2'^{\,2}\,r_1''^{\,2}}{r_2^{\,2}\,r_1'^{\,2}\,r_1''^{\,2}} = 1\,, \text{ etc.}$$

Somit gelten die Sätze: **Für jeden Punkt einer centrischen Fläche zweiten Grades ist das Verhältniss seiner Entfernungen von den zu einem ihrer Focalcentra gehörigen Directorebenen** (d. h. den Polarebenen des Focalcentrums in Bezug auf die durch jenen Punkt gehenden confocalen Flächen) **dem der Achsen dieser Flächen gleich.** Da die Krümmungslinie die Durchschnittscurven der confocalen Flächen mit der gegebenen und somit ihre Gleichungen in elliptischen Coordinaten z. B. für die Fläche U_1

$$a'' = \text{const.}, \quad a''' = \text{const.}$$

sind, so kann man **das Verhältniss der Entfernung zweier conjugierter Focalcentra** F_1, F_2 **einer Fläche** U_1 **zu der sie enthaltenden Achse von** U_2 **als die Exentricität der von dieser auf jener bestimmten Krümmungslinie bezeichnen** und hat dann den Satz: **Für alle Punkte** M **einer Krümmungslinie der Fläche** U_1 **ist das Verhältniss des Focalstrahles an eine ihrer conjugierten Focalkugeln** F_1, F_2 **zur Entfernung des Punktes von der zugehörigen Directorebene,** d. i. der Polarebene des Centrums der Focalkugel in Bezug auf die durch jene Krümmungslinie gehende confocale Fläche, **constant und der Exentricität der Krümmungslinie bezüglich jener Focalcentra gleich.**

Für eine Fläche zweiten Grades ohne endliches Centrum ist die Grösse dieser Entfernungen und ihre Richtung dieselbe, aber sie sind von entgegengesetztem Sinn. Und für alle Punkte einer Krümmungslinie ist das Verhältniss des Focalstrahls zur Entfernung von der zugehörigen Directorebene der Einheit gleich.

215. **Für die drei durch einen Punkt gehenden confocalen Flächen** U_1, U_2, U_3 **und drei ihrer in derselben Achse gelegenen Focalcentra** F_1, F_2, F_3 **mit ihren respectiven Directorebenen**

$$D_2^{(1)},\ D_3^{(1)};\quad D_3^{(2)},\ D_1^{(2)};\quad D_1^{(3)},\ D_2^{(3)}$$

ist das Product der Entfernungen des Punktes von dreien unter ihnen, wie

$$D_2^{(1)},\ D_3^{(2)},\ D_1^{(3)}$$

dem Product seiner Entfernungen von den drei übrigen gleich.

Die einem beliebigen Punkte einer Fläche entsprechen und auf ihre conjugierten Focalkugeln bezogenen Focalstrahlen sind nach den früher gegebenen Gleichungen durch folgende Formeln ausgedrückt: Für die Fläche U_1

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= a'' - a''', \quad \psi_1'' = a'' + a''' ,\\
\psi_2' &= \sqrt{a''^2 - h^2} - \sqrt{h^2 - a'''^2}\,\sqrt{-1},\\
\psi_2'' &= \sqrt{a''^2 - h^2} + \sqrt{h^2 - a'''^2}\,\sqrt{-1},\\
\psi_3' &= \left(\sqrt{k^2 - a'''^2} - \sqrt{k^2 - a''^2}\right)\sqrt{-1},\\
\psi_3'' &= \left(\sqrt{k^2 - a'''^2} + \sqrt{k^2 - a''^2}\right)\sqrt{-1};
\end{aligned}$$

für die Fläche U_2

$$\begin{aligned}
\varphi_1' &= a' - a''', \quad \varphi_1'' = a' + a''' ,\\
\varphi_2' &= \sqrt{a'^2 - h^2} - \sqrt{h^2 - a'''^2}\,\sqrt{-1},\\
\varphi_2'' &= \sqrt{a'^2 - h^2} + \sqrt{h^2 - a'''^2}\,\sqrt{-1},\\
\varphi_3' &= \sqrt{a'^2 - k^2} - \sqrt{k^2 - a'''^2}\,\sqrt{-1},\\
\varphi_3'' &= \sqrt{a'^2 - k^2} + \sqrt{k^2 - a'''^2}\,\sqrt{-1};
\end{aligned}$$

für die Fläche U_3

$$\begin{aligned}
\chi_1' &= a' - a'', \quad \chi_1'' = a' + a'' ,\\
\chi_2' &= \sqrt{a'^2 - h^2} - \sqrt{a''^2 - h^2} ,\\
\chi_2'' &= \sqrt{a'^2 - h^2} + \sqrt{a''^2 - h^2} ,\\
\chi_3' &= \sqrt{a'^2 - k^2} - \sqrt{k^2 - a''^2}\,\sqrt{-1},\\
\chi_3'' &= \sqrt{a'^2 - k^2} + \sqrt{k^2 - a''^2}\,\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Man hat daher das Theorem: Jeder Focalstrahl eines Punktes einer Fläche zweiten Grades ist gleich der Summe oder Differenz der zugehörigen Halbachsen der Flächen, welche mit ihr confocal sind und jenen Punkt enthalten. Für alle Punkte einer Krümmungslinie einer centrischen Fläche zweiten Grades ist die Summe oder die Differenz der von ihnen an zwei conjugierte Focalkugeln der Fläche gehenden Focalstrahlen constant und der durch die Focalcentra gehenden Achse der Fläche gleich, welche die Krümmungslinie bestimmt, je nachdem sie dem einen oder andern System der Krümmungslinien angehört. Und zwar ist speciell für die Punkte der von einem Ellipsoid mit einem zweifachen Hyperboloid bestimmten Krümmungslinie die Differenz der zu den innern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen der reellen Achse des Hyperboloids,

die Summe der zu den äussern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen der grossen imaginären Achse des Hyperboloids gleich;

und es ist die Summe der zu den innern Focalkugeln des Hyperboloids gehörigen Focalstrahlen gleich der grossen Achse des Ellipsoids,

und die Summe der zu den äussern Focalkugeln des Hyperboloids gehörigen Focalstrahlen gleich der mittlern Achse des Ellipsoids.

Ebenso ist für die vom einfachen Hyperboloid mit dem Ellipsoid bestimmte Krümmungslinie die Summe der zu den innern Focalkugeln des Ellipsoids gehörigen Focalstrahlen gleich der grossen reellen Achse des Hyperboloids; etc.

Kurz: Je zwei sich schneidende Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades verhalten sich in Bezug auf drei Paare in den Achsen symmetrisch gegen den Mittelpunkt gelegene reelle oder imaginäre Punkte ganz ähnlich, wie zwei sich schneidende confocale Kegelschnitte in Bezug auf ihre Brennpunkte. (Vergl. Artikel 196, 197, 206.)

Und: Das Product der drei Focalstrahlen der conjugierten Focalkugeln einer Fläche ist dem Product ihrer drei Halbachsen gleich.

216. Zu ferneren Ergebnissen leitet uns die Vergleichung der für die Tangenten der durch einen Punkt der Fläche gehenden Krümmungslinien geltenden Gleichungen mit den Ausdrücken der zu ihnen parallelen Halbdurchmesser der Flächen; denn man hat für die Gleichungen der Tangenten:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{a' a'' \sqrt{k^2 - h^2}\,\sqrt{k^2 - a'''^2}}{h a''' \sqrt{a'^2 - k^2}\,\sqrt{k^2 - a''^2}}\,\zeta + \frac{a' a'' k}{a''' h}, \\ \eta &= \frac{k \sqrt{a'^2 - h^2}\,\sqrt{a''^2 - h^2}\,\sqrt{k^2 - a'''^2}}{h \sqrt{a'^2 - k^2}\,\sqrt{k^2 - a''^2}\,\sqrt{h^2 - a'''^2}}\,\zeta \\ &\quad - \frac{\sqrt{k^2 - h^2}\,\sqrt{a'^2 - h^2}\,\sqrt{a''^2 - h^2}}{h \sqrt{k^2 - a'''^2}}; \end{aligned}\right\}\ \text{für } T_{12};$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{a\,a''' \sqrt{k^2-h^2}\,\sqrt{k^2-a''^2}}{a''h\,\sqrt{a'^2-k^2}\,\sqrt{k^2-a'''^2}}\,\zeta + \frac{a'\,a'''\,k}{a''h}, \\ \eta &= \frac{k\sqrt{a'^2-h^2}\,\sqrt{h^2-a'''^2}\,\sqrt{k^2-a''^2}}{h\sqrt{a'^2-k^2}\,\sqrt{k^2-a'''^2}\,\sqrt{a''^2-h^2}}\,\zeta \\ &\quad + \frac{\sqrt{k^2-h^2}\,\sqrt{a'^2-h^2}\,\sqrt{h^2-a'''^2}}{h\sqrt{a''^2-h^2}}; \end{aligned}\right\}\ \text{für } T_{13};$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{a''a''' \sqrt{k^2-h^2}\,\sqrt{a'^2-k^2}}{a'h\,\sqrt{k^2-a''^2}\cdot\sqrt{k^2-a'''^2}}\,\zeta + \frac{a''\,a'''\,k}{a'h}, \\ \eta &= \frac{k\sqrt{a'^2-k^2}\,\sqrt{a''^2-h^2}\,\sqrt{h^2-a'''^2}}{h\sqrt{a'^2-h^2}\,\sqrt{k^2-a''^2}\,\sqrt{k^2-a'''^2}}\,\zeta \\ &\quad + \frac{\sqrt{k^2-h^2}\,\sqrt{a''^2-h^2}\,\sqrt{h^2-a'''^2}}{h\sqrt{a'^2-h^2}}; \end{aligned}\right\}\ \text{für } T_{23},$$

und findet für die Halbdurchmesser d_1, d_1' von U_1, welche zu T_{12}, T_{13} parallel sind, für die d_2, d_2' von U_2 parallel den Tangenten T_{12}, T_{23}, und die d_3, d_3' von U_3 parallel den T_{13}, T_{23}

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{a'^2-a'''^2}\,, & d_1' &= \sqrt{a'^2-a''^2}; \\ d_2 &= \sqrt{a''^2-a'''^2}\,, & d_2' &= \sqrt{a'^2-a''^2}\,\sqrt{-1}; \\ d_3 &= \sqrt{a''^2-a'''^2}\,\sqrt{-1}, & d_3' &= \sqrt{a'^2-a'''^2}\,\sqrt{-1}; \end{aligned}$$

also die Relationen

$$\begin{aligned} d_1^2 &= \varphi_1'\varphi_1'' = \varphi_2'\varphi_2'' = \varphi_3'\varphi_3'' = \left(\frac{d_3'}{\sqrt{-1}}\right)^2, \\ d_2^2 &= \psi_1'\psi_1'' = \psi_2'\psi_2'' = \psi_3'\psi_3'' = \left(\frac{d_3}{\sqrt{-1}}\right)^2, \\ d_2'^2 &= \chi_1'\chi_1'' = \chi_2'\chi_2'' = \chi_3'\chi_3'' = \left(\frac{d_2'}{\sqrt{-1}}\right)^2; \end{aligned}$$

oder den Satz: Für jeden Punkt einer Krümmungslinie einer centrischen Fläche zweiten Grades (U_1) ist das Product eines Paares von Focalstrahlen conjugierter Focalkugeln der sie bestimmenden Fläche (U_2) dem Quadrate des Halbdurchmessers der ersten Fläche (U_1) gleich, welcher zu ihrer Tangente (T_{12}) in jenem Punkte parallel ist.

Man erhält ferner für die Flächen ohne Centrum leicht die folgenden Sätze:

Wenn man den Mittelpunkt der Entfernung der

Brennpunkte der Hauptschnitte einer Fläche u_1 zum Anfangspunkt wählt und die durch die Fläche u_2 auf ihr bestimmte Krümmungslinie betrachtet, so giebt die von jenem auf die Tangentenebene von u_1 in einem beliebigen Punkte der bezeichneten Krümmungslinie gefällte Normale mit der Quadratwurzel seines auf die Focalkugel von u_2 bezüglichen Focalstrahls ein constantes Product — analog dem schönen Satze von Joachimsthal*) über die Krümmungslinien der centrischen Flächen zweiten Grades. (Artikel 174.)

Für eine Krümmungslinie von u_1, welche durch die Fläche u_2 bestimmt wird, ist die Normale, welche von einem Focalcentrum F_2 von n_2 auf die Tangentenebene von u_1 in einem ihrer Punkte gefällt wird zur Quadratwurzel seines auf die Focalkugel von u_2 bezogenen Focalstrahls in constantem Verhältniss. Das Product der auf die Tangentenebene in einem Punkte der Fläche u_3 von den Focalcentren der durch ihn gehenden confocalen Flächen u_1, u_2 gefällten Normalen ist constant.

217. Den hier sich ergebenden Beweis und neuen Ausdruck des Joachimthal'schen Theorems lassen wir im Nachstehenden folgen.

Die vom gemeinschaftlichen Centrum auf die drei Tangentenebenen der confocalen Flächen in M gefällten Normalen sind

$$P_1 = \frac{\sqrt{a'^2\,(a'^2 - h^2)\,(a'^2 - k^2)}}{\sqrt{(a'^2 - a''^2)\,(a'^2 - a'''^2)}},$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{a''^2\,(a''^2 - h^2)\,(k^2 - a''^2)}}{\sqrt{(a'^2 - a''^2)\,(a''^2 - a'''^2)}},$$

$$P_3 = \frac{\sqrt{a'''^2\,(h^2 - a'''^2)\,(k^2 - a'''^2)}}{\sqrt{(a''^2 - a'''^2)\,(a'^2 - a'''^2)}};$$

die von den Focalpunkten von U_2 und U_3 auf die Tangentenebene von U_1 gefällten Normalen sind

*) Vergl. „Crelle's Journal" Bd. XXVI, p. 155. Die damit zusammenhängenden weiteren Untersuchungen von Mich. Roberts, Liouville etc., werden in dem zweiten Theile dieses Werkes mitgetheilt.

$$\delta_{11} = \frac{a' \mp a'''}{a'} P_1, \quad \varepsilon_{11} = \frac{\sqrt{a'^2 - h^2} \mp \sqrt{h^2 - a'''^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{a'^2 - h^2}} P_1,$$

$$\eta_{11} = \frac{\sqrt{a'^2 - k^2} \mp \sqrt{k^2 - a'''^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{a'^2 - k^2}} P_1;$$

$$\delta_{21} = \frac{a' \mp a''}{a'} P_1, \quad \varepsilon_{21} = \frac{\sqrt{a'^2 - h^2} \mp \sqrt{a''^2 - h^2}}{\sqrt{a'^2 - h^2}} P_1,$$

$$\eta_{21} = \frac{\sqrt{a'^2 - k^2} \mp \sqrt{k^2 - a''^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{a'^2 - k^2}} P_1;$$

und die entsprechenden Werthe der von den Focalpunkten von U_1, U_3 auf die Tangentenebene von U_2 und der von den Focalpunkten von U_1 und U_2 auf die Tangentenebene von U_3 gefällten Normalen sind

$$\delta_{12} = \frac{a'' \mp a'''}{a''} P_2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\sqrt{a''^2 - h^2} \mp \sqrt{h^2 - a'''^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{a''^2 - h^2}} P_2,$$

$$\eta_{12} = \frac{\sqrt{k^2 - a'''^2} \mp \sqrt{k^2 - a''^2}}{\sqrt{k^2 - a''^2}} P_2;$$

$$\delta_{22} = \frac{a' \mp a''}{a''} P_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\sqrt{a'^2 - h^2} \mp \sqrt{a''^2 - h^2}}{\sqrt{a''^2 - h^2}} P_2,$$

$$\eta_{22} = \frac{\sqrt{a'^2 - k^2} \mp \sqrt{k^2 - a''^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{k^2 - a''^2}\sqrt{-1}} P_2,$$

$$\delta_{13} = \frac{a'' \mp a'''}{a'''} P_3, \quad \varepsilon_{13} = \frac{\sqrt{a''^2 - h^2} \mp \sqrt{h^2 - a'''^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{h^2 - a'''^2}\sqrt{-1}} P_3,$$

$$\eta_{13} = \frac{\sqrt{k^2 - a'''^2} \mp \sqrt{k^2 - a''^2}}{\sqrt{k^2 - a''^2}} P_3;$$

$$\delta_{23} = \frac{a' \mp a'''}{a'''} P_3, \quad \varepsilon_{23} = \frac{\sqrt{a'^2 - h^2} \mp \sqrt{h^2 - a'''^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{h^2 - a'''^2}\sqrt{-1}} P_3,$$

$$\eta_{23} = \frac{\sqrt{a'^2 - k^2} \mp \sqrt{k^2 - a'''^2}\sqrt{-1}}{\sqrt{k^2 - a'''^2}\sqrt{-1}} P_3.$$

Ausdrücke, welche zu diesen analog sind, liefern die ferneren Relationen

$$\delta_{11}' + \delta_{11}'' = \varepsilon_{11}' + \varepsilon_{11}'' = \eta_{11}' + \eta_{11}'' = \delta_{21}' + \delta_{21}''$$
$$= \varepsilon_{21}' + \varepsilon_{21}'' = \eta_{21}' + \eta_{21}'' = 2P_1,$$
$$\delta_{12}' + \delta_{12}'' = \varepsilon_{12}' + \varepsilon_{12}'' = \eta_{12}' + \eta_{12}'' = \delta_{22}' + \delta_{22}'' = \text{etc.} = 2P_2,$$
$$\delta_{13}' + \delta_{13}'' = \varepsilon_{13}' + \varepsilon_{13}'' = \eta_{13}' + \eta_{13}'' = \delta_{23}' + \delta_{23}'' = \text{etc.} = 2P_3,$$

und

$$\frac{\sqrt{\delta_{11}'\delta_{11}''}}{\sqrt{\varphi_1'\varphi_1''}} = \frac{\frac{1}{2}(\delta_{11}' + \delta_{11}'')}{\frac{1}{2}(\varphi_1' + \varphi_2'')}, \quad \frac{\sqrt{\varepsilon_{11}'\varepsilon_{11}''}}{\sqrt{\varphi_2'\varphi_2''}} = \frac{\frac{1}{2}(\varepsilon_{11}' + \varepsilon_{11}'')}{\frac{1}{2}(\varphi_2' + \varphi_2'')},$$

$$\frac{\sqrt{\eta_{11}'\eta_{11}''}}{\sqrt{\varphi_3'\varphi_3''}} = \frac{\frac{1}{2}(\eta_{11}' + \eta_{11}'')}{\frac{1}{2}(\varphi_3' + \varphi_3'')}, \text{ etc.}$$

Aus der ersten Gruppe von Werthen, denen der Normalen P_i und den auf die Durchmesser der Flächen bezüglichen vorhergehenden ergiebt sich das Theorem von Joachimsthal in folgender Fassung: Für alle Punkte einer durch die Fläche U_2 bestimmten Krümmungslinie von U_1 ist das Product der vom Centrum auf die Tangentenebene von U_1 gefällten Normalen in die mittlere geometrische Proportionale der auf ein Paar conjugierte Focalkugeln von U_2 bezüglichen Focalstrahlen constant.

Die Werthe der von den Focalcentren auf die Tangentenebenen gefällten Normalen geben das Theorem: Für die Tangentenebenen der Fläche U_1 in einem beliebigen Punkte einer durch U_2 auf ihr bestimmten Krümmungslinie ist das Verhältniss der auf sie von zwei conjugierten Focalcentren der Fläche U_2 gefällten Normalen dem Verhältniss der von jenem Punkte ausgehenden und auf die entsprechenden conjugierten Focalkugeln von U_2 bezüglichen Focalstrahlen gleich.

Und das andere: Für die Tangentenebenen der Fläche U_1 in Punkten einer durch die Fläche U_2 auf ihr bestimmten Krümmungslinie ist das Product der von einem Paare conjugierter Focalcentra von U_2 auf sie gefällten Normalen constant.

Die letzte Gruppe der vorigen Relationen endlich sagt aus, dass bei den Tangentenebenen der Fläche U_1 in den Punkten einer auf ihr durch die Fläche U_2 bestimmten Krümmungslinie für die von zwei conjugierten Focalcentren der Fläche U_2 auf sie gefällten Normalen und die von jenen Punkten an die entsprechenden Focalkugeln gehenden Focalstrahlen die arithmetischen Mittel der Focalstrahlen und der Focalnormalen den geometrischen Mitteln derselben Linien proportional sind.

Eine Quelle weiterer Sätze wird endlich die Darstellung der

Abschnitte, welche in den drei durch einen Punkt gehenden Normalen des confocalen Systems von ihm bis zu den Hauptebenen der Flächen, zu welcher sie gehören, enthalten sind; man findet sie für die Normale von U_1

$$N_{11} = \frac{\sqrt{(a'^2 - k^2)(a'^2 - a''^2)(a'^2 - a'''^2)}}{\sqrt{a'^2(a'^2 - h^2)}},$$

$$N_{21} = \frac{\sqrt{(a'^2 - h^2)(a'^2 - a''^2)(a'^2 - a'''^2)}}{\sqrt{a'^2(a'^2 - k^2)}},$$

$$N_{31} = \frac{\sqrt{a'^2(a'^2 - a''^2)(a'^2 - a'''^2)}}{\sqrt{(a'^2 - h^2)(a'^2 - k^2)}};$$

für die Normale von U_2

$$N_{12} = \frac{\sqrt{(k^2 - a''^2)(a'^2 - a''^2)(a''^2 - a'''^2)}}{\sqrt{a''^2(a''^2 - h^2)}},$$

$$N_{22} = \frac{\sqrt{(a''^2 - h^2)(a'^2 - a''^2)(a''^2 - a'''^2)}}{\sqrt{a''^2(a''^2 - k^2)}},$$

$$N_{32} = \frac{\sqrt{a''^2(a'^2 - a''^2)(a''^2 - a'''^2)}}{\sqrt{(a''^2 - h^2)(k^2 - a''^2)}};$$

und für die Normale von U_3

$$N_{13} = \frac{\sqrt{(k^2 - a'''^2)(a''^2 - a'''^2)(a'^2 - a'''^2)}}{\sqrt{a'''^2(a'''^2 - h^2)}},$$

$$N_{23} = \frac{\sqrt{(h^2 - a'''^2)(a''^2 - a'''^2)(a'^2 - a'''^2)}}{\sqrt{a'''^2(k^2 - a'''^2)}},$$

$$N_{33} = \frac{\sqrt{a'''^2(a''^2 - a'''^2)(a'^2 - a'''^2)}}{\sqrt{(h^2 - a'''^2)(k^2 - a'''^2)}}.$$

und damit die Sätze: Für einen beliebigen Punkt einer durch die Fläche U_2 bestimmten Krümmungslinie der Fläche U_1 ist das Verhältniss des zwischen ihm und einer Hauptebene von U_2 gelegenen Abschnittes der Normale zu U_2 zur mittlern geometrischen Proportionale der von ihm an ein Paar conjugierter Focalkugeln von U_2 gehenden Focalstrahlen unveränderlich.

Und für einen beliebigen Punkt einer durch die Fläche u_2 bestimmten Krümmungslinie einer nicht centrischen Fläche u_1 ist das Verhältniss des in der

Normale von u_2 bis zu einer der Hauptebenen dieser Fläche gelegenen Abschnitts zur Quadratwurzel aus dem auf die Focalkugel von u_2 bezüglichen Focalstrahl constant.

Ueberdiess geben die Werthe der Halbmesser der Focalkugeln, wie sie aus den früher gegebenen Gleichungen dieser letzteren hervorgehen, mit den Werthen der eben bezeichneten Abschnitte der Normalen Relationen, welche zu neuen Sätzen Anlass geben, z. B.

$$\frac{R_{31} N_{11}}{R_{32} N_{12}} = \frac{\sqrt{\varphi_3' \varphi_3''}}{\sqrt{\psi_3' \psi_3''}}, \quad \frac{R_{21} N_{21}}{R_{22} N_{22}} = \frac{\sqrt{\varphi_2' \varphi_2''}}{\sqrt{\psi_2' \psi_2''}}, \text{ etc.},$$

denn man hat

$$R_{11} = \frac{\sqrt{(a'^2 - h^2)(a'^2 - k^2)}}{a'}, \quad R_{21} = \frac{\sqrt{a'^2 (a'^2 - k^2)}}{\sqrt{a'^2 - h^2}},$$

$$R_{31} = \frac{\sqrt{a'^2 (a'^2 - h^2)}}{\sqrt{a'^2 - k^2}}, \text{ etc.}$$

Eine ganz andere Richtung der Untersuchung, zusammenhängend mit den Arbeiten, welche in der Note des Artikel 203 erwähnt sind, wird wenigstens angegeben durch die

Aufgabe. Man soll zeigen, dass durch jede Krümmungslinie einer Fläche zweiten Grades drei Umdrehungsflächen zweiten Grades gelegt werden können, deren Rotationsachsen mit den Achsen der Fläche zusammenfallen.

Diess ergiebt sich aus der Betrachtung der allgemeinen Gleichung

$$U + kV = 0$$

als Gleichung der die Durchschnittslinie der Flächen zweiten Grades

$$U = 0, \quad V = 0$$

enthaltenden Flächen zweiten Grades, wenn V und U confocal sind.

Oder aus der Gleichung des Artikel 168, welche für die Quadrate der primären Achsen von drei confocalen Flächen die Bestimmungsgleichung

$$a'^6 - a'^4 (h^2 + k^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$+ a'^2 \left\{ h^2 k^2 + x'^2 (h^2 + k^2) + y'^2 k^2 + z'^2 h^2 \right\} - x'^2 h^2 k^2 = 0$$

und also für ihre Wurzeln a'^2, a''^2, a'''^2 die Relationen

$$a'^2 + a''^2 + a'''^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + h^2 + k^2,$$
$$a'^2 a''^2 a'''^2 = x'^2 h^2 k^2,$$
$$a'^2 a''^2 + a''^2 a'''^2 + a'''^2 a'^2 = h^2 k^2 + x'^2 (h^2 + k^2) + y'^2 k^2 + z'^2 h^2$$

liefert; durch die Elimination von a''^2 zwischen den beiden ersten Relationen erhält man direct die Gleichung des Umdrehungsellipsoids, welches die Achse der x zur grossen Achse hat.

Daraus ergiebt sich leicht: Alle Umdrehungsflächen dieser Reihen, welche dieselbe Achse haben und den verschiedenen Krümmungslinien desselben Systems entsprechen, sind den Focalkugeln gemeinschaftlich umgeschrieben, deren Centra derselben Achse angehören.

Das Endergebniss dieser Betrachtungen ordnet die Theorie der confocalen Flächen und der Krümmungslinien auch in dieser Beziehung dem Satze des Artikel 126 unter von den Kegelflächen zweiter Ordnung und den Kegelschnitten, welche die gemeinschaftlichen Elemente zweier Flächen zweiten Grades enthalten.

218. Nach dieser Untersuchung, die auf die Krümmungslinien der Flächen zweiten Grades und die confocalen Systeme solcher Flächen so viel mehr Licht geworfen hat, wollen wir noch einmal auf Folgerungen der Artikel 172, 173, 174 zurückkommen, welche hiermit in Zusammenhang stehen und dem Theorem von Ivory (Artikel 199) einen veränderten Ausdruck geben.

Wir denken ein von vier Krümmungslinien einer Fläche zweiten Grades gebildes Vierseit, die Tangentenebenen in seinen vier Ecken und ihre senkrechten Abstände vom Centrum, die vier Paare der Tangenten der in seinen Ecken sich schneidenden Krümmungslinien und die zu ihnen parallelen Halbdurchmesser, endlich die Hauptkrümmungsradien der Fläche, welche diesen Eckpunkten entsprechen.

Dann geben die Werthe des Artikel 173 für die Normalen vom Centrum auf die Tangentenebenen zuerst das Gesetz: In einem Krümmungslinienvierseit ist das Product der Entfernungen der Tangentenebenen in zwei Gegenecken vom Centrum dem Product der entsprechenden Entfernungen in den beiden andern Gegenecken gleich.

Und: Die acht Halbdurchmesser einer Fläche zweiten Grades, welche den Tangenten der Krümmungslinien in den Ecken eines Vierseits derselben parallel sind, zerfallen in zwei Gruppen von je vieren so, dass das Product der Halbdurchmesser der einen Gruppe dem Product der Halbdurchmesser der andern Gruppe gleich ist.

Ferner: Die Quadratsummen der Halbdurchmesserpaare einer Fläche zweiten Grades, die nach den Gegenecken eines Krümmungslinienvierseits gezogen werden, sind einander gleich.

Die Entfernungen der Gegenecken eines solchen Vierseits von einander sind gleich gross.

Endlich: In einem Vierseit von Krümmungslinien sind die vier Hauptkrümmungsradien der einen Art, sowie auch die vier Hauptkrümmungsradien der andern Art in Proportion.

Wenn man sodann zu einer Fläche zweiten Grades und den zwei Paaren von confocalen Flächen, welche mit ihr ein Krümmungslinienvierseit bestimmen, eine sechste confocale Fläche hinzudenkt, welche mit der ersten von derselben Art ist, so entsteht ein Parallelepiped, dessen Gegenflächen confocale Flächen zweiten Grades und dessen Kanten Krümmungslinien derselben sind.

Die Uebertragung der vorigen Sätze auf dieses System liefert alsdann die beiden Sätze:

Die Quadratsummen von je zwei nach Gegenecken dieses Parallelepipeds gezogenen Halbdurchmessern sind einander gleich.

Die Paare der Gegenecken sind von einander gleichweit entfernt. Man erkennt in dem Letzteren das im Artikel 199 schon bewiesene Theorem von Ivory wieder.*)

*) Für andere daran sich anschliessende Relationen vergleiche man: Otto Böklen, „Analytische Geometrie des Raumes“ p. 104 f.

IX. Kapitel.

Kegel und sphärische Kegelschnitte.

---

219. Wenn ein Kegel — gleichviel von welchem Grade — von einer Kugel durchschnitten wird, welche seinen Scheitel zum Centrum hat, so wird offenbar der von irgend zwei Seiten des Kegels gebildete Winkel von dem die entsprechenden Punkte der Kugel verbindenden Bogen eines grössten Kugelkreises gemessen.

Ist der Kegel vom zweiten Grade, so wird die Durchschnittscurve als ein sphärischer Kegelschnitt bezeichnet. Die Analogie vieler Eigenschaften der Kegel zweiten Grades mit entsprechenden Eigenschaften der Kegelschnitte tritt dadurch deutlicher hervor, dass man jene als Eigenschaften sphärischer Kegelschnitte auffasst.*)

Genau gesprochen ist die Durchschnittslinie eines Kegels vom n^{ten} Grade mit einer Kugel eine Curve $2n^{\text{ten}}$ Grades, aber wenn der Kegel mit der Kugel concentrisch ist, so kann diese Curve auf unendlich vielen Wegen in zwei symmetrische und gleiche Theile zerlegt werden, von denen jeder als einer Curve n^{ten} Grades analog betrachtet werden kann.

Denn jedem in einer Halbkugel liegenden Punkte der Durchschnittscurve entspricht ein diametral entgegengesetzter Durchschnittspunkt in der andern Halbkugel und somit jedem Curvenzweig in der einen ein vollkommen symmetrischer in der andern.

---

*) Man vergleiche mit dieser Darstellung das Mémoir von Chasles über die sphärischen Kegelschnitte („Mém. publiès par l'académie royale des sciences etc. en Belgique" t. VI.), oder dessen vortreffliche Uebersetzung ins Englische von Graves, Dublin 1837.

Dieser mehrfachen Möglichkeit der Theilung entspricht es, dass wir einen sphärischen Kegelschnitt ebensowohl als ein Analogon einer Ellipse als einer Hyperbel betrachten können. Der Kegel zweiten Grades schneidet die concentrische Kugel in zwei gleichen einander diametral entgegengesetzten geschlossenen Curven. Eine der Hauptebenen des Kegels schneidet keine von beiden Curven und die Betrachtung der Halbkugeln, in welche durch sie die Kugel zerfällt, zeigt uns die Curve als eine geschlossene und der Ellipse analog. Für die den Hauptebenen des Kegels, welche die Curven schneiden, entsprechenden Halbkugeln erscheint aber die Durchdringung als eine aus zwei entgegengesetzten Zweigen bestehende Curve, analog einer Hyperbel.

Die Durchschnittscurve einer beliebigen Fläche zweiten Grades mit einer concentrischen Kugel ist offenbar ein sphärischer Kegelschnitt.

220. Man hat die sphärischen Curven vermittelst sphärischer Coordinatensysteme untersucht, welche nach Analogie des Systems von Cartesius gebildet sind. Man wählte zwei sich rechtwinklig durchschneidende grösste Kreise OX und OY als Coordinatenachsen und fällte von einem beliebigen Punkte der Kugel P Normalen PM, PN auf dieselben; da diese Normalen nicht, wie bei Cartesischen Coordinaten in der Ebene, den ihnen gegenüberliegenden Seiten des Vierecks $OMPN$ gleich sind, so ist es von unterscheidendem Einflusse in der Ausführung des sphärischen Coordinatensystems, ob wir die Normalen PM, PN selbst oder die von ihnen in den Achsen gebildeten Abschnitte OM, ON als Coordinaten ansehen.

Gudermann hat in seiner Abhandlung über die Sphärik*) die Tangenten der Abschnitte OM, ON als Coordinaten gewählt.

Wenn man die Tangentenebene der Kugel im Punkte O betrachtet und die Schnittpunkte m, n, p der geraden Verbindungslinien des Centrums und der Punkte M, N, P mit dieser Ebene bestimmt, so sind Om, On die Cartesischen Coordinaten des Punktes p und zugleich die Tangenten der Bogen OM, ON. Da-

*) Vergl. „Crelle's Journal" Bd. VI, p. 240. Man findet eine klare Darstellung dieses Systems auch in der Uebersetzung des Mémoirs von Chasles durch Graves, die wir schon anführten.

her ist die Gleichung einer sphärischen Curve in dem Coordinatensystem von Gudermann in der That nur die Gleichung der ebenen Curve nach Cartesischen Coordinaten, in welcher der aus dem Centrum der Kugel über der sphärischen Curve beschriebene Kegel von der Tangentenebene des Anfangspunktes O geschnitten wird.

Und wenn wir die sinus der Normalen PM, PN als Coordinaten wählen, so erhellt in derselben Art, dass die Gleichung einer sphärischen Curve in solchen Coordinaten mit der Gleichung der Orthogonalprojection dieser Curve auf eine der Tangentenebene im Punkte O parallele Ebene übereinstimmt.

Uns scheint es jedoch, dass die Eigenschaften sphärischer Curven einfacher und directer als aus den Gleichungen irgend welcher ebener Curven, in die sie projiciert werden können, aus den Gleichungen der Kegel hervorgehen, welche sie mit dem Centrum verbinden. Wir nehmen damit die in den Artikeln 32—36 gegebenen Entwickelungen einfach wieder auf und übertragen sie auf die Kugelfläche.

221. Wenn die Coordinaten irgend eines Punktes P der Kugel in die Gleichung einer durch das als Anfangspunkt der Coordinaten gedachte Centrum gehenden Ebene substituiert werden, welche die Kugel in einem grössten Kreise AB schneidet, so bezeichnet das Resultat dieser Substitution die Länge der von P auf diese Ebene gefällten Normalen oder den sinus des sphärischen Bogens, der durch P normal zu dem grössten Kreise AB gelegt ist.

Mit Hilfe dieses Princips können die Gleichungen von Kegeln in einer Art, welche genau der Interpretationsmethode für die Gleichungen ebener Curven entspricht, als Ausdrucksformen für Eigenschaften sphärischer Curven interpretiert werden.

Wenn nämlich nun

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

die Gleichungen zweier durch das Centrum gehenden Ebenen bezeichnen, Gleichungen, die man auch als diejenigen der durch sie in der Kugel bestimmten grössten Kreise bezeichnen kann, so repräsentiert

$$\alpha - k\beta = 0$$

einen grössten Kreis, für welchen die sinus der Normalen, die man von einem beliebigen unter seinen Punkten auf die grössten Kreise

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

fällen kann, in einem constanten Verhältniss stehen, d. i. einen grössten Kreis, dessen Ebene den von jenen beiden Ebenen gebildeten Winkel in zwei Theile zerlegt, deren sinus in eben demselben Verhältnisse sind.

Es bezeichnen ferner

$$\alpha - k\beta = 0, \quad \alpha - k'\beta = 0$$

Bogen, die mit

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

ein Büschel von dem Doppelschnittverhältniss

$$\frac{k}{k'}$$

bilden, und speciell

$$\alpha - k\beta = 0, \quad \alpha + k\beta = 0$$

Bogen, welche mit jenen ein harmonisches Büschel bestimmen.

Es ist zu bemerken, dass für A' als den Mittelpunkt eines Bogens AB der vierte harmonische Punkt B' zu A', A und B ein von A' um 90^0 entfernter Punkt ist. Denn wenn wir diese Punkte mit dem Centrum C verbinden, so ist CA' die innere und daher nothwendig CB' die äussere Halbierungslinie des Winkels ACB.

Wenn umgekehrt zwei entsprechende Punkte eines harmonischen Systems von einander um 90^0 entfernt sind, so ist jeder von ihnen gleich entfernt von den beiden andern Punkten des Systems.

Endlich mag hier erwähnt sein, dass für x', y', z' als die Coordinaten irgend eines Punktes der Kugel die Gleichung

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

den grössten Kreis darstellt, der jenen Punkt zum Pol hat, weil sie die Gleichung der durch das Centrum gehenden Normalebene zur geraden Verbindungslinie jenes Punktes mit dem Centrum ist.

222. Nach dem Vorigen können wir die bei ebenen Dreiecken angewendete Methode*) direct auf sphärische Dreiecke übertragen.

*) Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte" Artikel 56 f.

Wenn also

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

die drei Seiten eines Dreiecks bezeichnen, so sind

$$l\alpha = m\beta = n\gamma$$

die Gleichungen von drei sich in einem Punkte schneidenden Linien, die von den Eckpunkten des Dreiecks ausgehen, und

$$m\beta + n\gamma - l\alpha = 0, \; n\gamma + l\alpha - m\beta = 0, \; l\alpha + m\beta - n\gamma = 0$$

die Gleichungen der Seiten des neuen Dreiecks, welches durch die Verbindungslinien der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den respectiven Gegenseiten des gegebenen Dreiecks entsteht; endlich

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = 0$$

die Gleichung der geraden Linie, welche die Durchschnittspunkte entsprechender Seiten dieser beiden Dreiecke mit einander verbindet.

Die Gleichungen

$$\alpha = \beta = \gamma$$

repräsentieren die drei Halbierungslinien der Winkel des Dreiecks, und wenn A, B, C diese Winkel selbst bezeichnen, so ist leicht zu erkennen, dass wie bei ebenen Dreiecken

$$\alpha \cos A = \beta \cos B = \gamma \cos C$$

die drei Höhen des Dreiecks ausdrücken.

Es bleibt ferner wahr, dass, wenn die Normalen von den Ecken eines ersten Dreiecks auf die Seiten eines zweiten sich in einem Punkte schneiden, auch die Normalen von den Ecken des zweiten auf die Seiten des ersten durch einen Punkt gehen — ganz wie bei ebenen Dreiecken.

Die drei durch die gegenüberliegenden Ecken gehenden Halbierungslinien der Seiten sind ausgedrückt durch

$$\alpha \sin A = \beta \sin B = \gamma \sin C.$$

Der Bogen

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

geht durch die drei Punkte der Seiten des Dreiecks, in denen jede durch die gemeinschaftliche Halbierungslinie der beiden andern Seiten geschnitten wird, d. i. durch diejenigen Punkte der Seiten, von denen jeder um 90^0 von der Mitte seiner Seite entfernt ist; denn

$$\alpha \sin A \pm \beta \sin B = 0$$

schneidet

$$\gamma = 0$$

in zwei Punkten, welche in Bezug auf ihre Durchschnittspunkte mit den Linien

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

harmonisch conjugiert sind, und da der eine von beiden der Mittelpunkt jener Strecke ist, so ist der andere nach Artikel 221 um 90^0 von ihm entfernt.

Aus dem Gesagten folgt, dass der Durchschnittspunkt von

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

mit irgend einer Seite des Dreiecks der Pol des zu dieser Seite normalen und ihren Mittelpunkt enthaltenden grössten Kreises ist, und dass der Durchschnittspunkt der drei Normalen dieser Art, d. h. das Centrum des umgeschriebenen Kreises, der Pol des grössten Kreises

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

ist.

223. Die Bedingung, unter welcher zwei grösste Kreise

$$ax + by + cz = 0, \quad a'x + b'y + c'z = 0$$

rechtwinklig zu einander sind, ist offenbar

$$aa' + bb' + cc' = 0;$$

und die Substitution der Werthe von α, β, γ in Function der x, y, z liefert die analoge Bedingung für die durch

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0$$

dargestellten grössten Kreise in der ganz der planimetrischen entsprechenden Form

$$aa' + bb' + cc' - (bc' + b'c)\cos A - (ca' + c'a)\cos B - (ab' + a'b)\cos C = 0.$$

In analoger Weise findet man den sinus des durch einen gegebenen Punkt gehenden und zu dem Bogen

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

normalen Bogens, indem man die Coordinaten des Punktes in die linke Seite dieser Gleichung einsetzt und das Substitutionsresultat durch die Quadratwurzel von

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2ca \cos B - 2ab \cos C$$

dividiert. (Vergl. a. a. O. Artikel 64, Aufgabe 9, 7.)

224. Den vorigen Zurückweisungen auf das ebene Dreieck oder die dreiseitige Ecke schliessen wir im Uebergange zu Gleichungen zweiten Grades eine solche an auf die Entwickelungen des Arti-

kel 110 über die auf derselben hyperboloidischen Fläche liegenden Geraden des Tetraeders. Wenn man durch das Centrum einer Kugel zu den vier Höhen des Tetraeders und den vier Erzeugenden desselben Hyperboloids von dem zweiten Systeme Parallelen gezogen denkt, so bestimmen dieselben acht Punkte eines sphärischen Kegelschnitts, und zwar sind die der vier ersten die Pole der vier Seiten eines sphärischen Vierecks und die der vier Letztern die Höhendurchschnittspunkte der vier aus den Seiten desselben gebildeten sphärischen Dreiecke.

Für das ebene Viereck, als auf einer Kugel von unendlich grossem Halbmesser gelegen, verschwinden die Pole der vier Seiten in der unendlich entfernten Geraden und die vier Höhendurchschnittspunkte liegen daher auf einer zweiten Geraden.

Wir betrachten dann zuerst die Gleichung

$$\alpha\gamma = m\beta^2$$

ebenso wohl als Gleichung eines Kegels vom zweiten Grade, für welchen die Ebenen

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

Tangentenebenen sind, während die Ebene

$$\beta = 0$$

beide Berührungsseiten derselben enthält, wie als Gleichung eines sphärischen Kegelschnitts, für den die Bogen

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0$$

Tangenten und der Bogen

$$\beta = 0$$

die zugehörige Berührungssehne bezeichnen. Die Gleichung sagt offenbar aus, dass das Product der sinus der Normalen, welche von einem beliebigen Punkte des sphärischen Kegelschnitts auf zwei seiner Tangentenbogen gefällt werden, zu dem Quadrat des sinus der von demselben Punkte auf den Berührungsbogen gefällten Normale in constantem Verhältniss steht.

Ebenso drückt die Gleichung

$$\alpha\gamma = k\beta\delta$$

aus, dass das Product der sinus der von einem Punkte eines sphärischen Kegelschnitts auf zwei Gegenseiten eines ihm eingeschriebenen Vierecks gefällten Normalen zu dem Producte der sinus der von ihm auf die beiden andern Gegenseiten desselben gefällten Normalen in einem constanten Verhältniss steht. Und man leitet aus dieser Eigenschaft ganz ebenso wie in der Theorie der Kegelschnitte das Gesetz von der Gleichheit der Doppelschnittverhältnisse der Strahlenbüschel ab, welche vier feste Punkte eines sphärischen Kegelschnitts mit irgend einem fünften Punkte desselben verbinden; ebenso natürlich auch übertragen sich die Beweise einer grossen Zahl anderer hiermit verbundener Theorem von den ebenen auf die sphärischen Kegelschnitte. (Vergl. a. a. O. Kapitel XIV. und XVI.)

225. Wenn

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

die Ebenen der Kreisschnitte oder die cyclischen Ebenen eines Kegels darstellen, so ist nach Artikel 99 die Gleichung desselben von der Form

$$x^2 + y^2 + z^2 = k\alpha\beta,$$

und die Anwendung der vorigen Interpretation auf dieselbe zeigt, dass das Product der sinus der von irgend einem Punkte eines sphärischen Kegelschnitts auf seine cyclischen Bogen gefällten Normalen einen constanten Werth hat. Oder: Wenn die Basis eines sphärischen Dreiecks und das Product der cosinus seiner Seiten bekannt sind, so ist der Ort seiner Spitze ein sphärischer Kegelschnitt, welcher diejenigen grössten Kreise zu seinen cyclischen Bogen hat, deren Pole mit den Endpunkten der gegebenen Basis zusammenfallen.

Die Form der Gleichung zeigt überdiess, dass die cyclischen Bogen sphärischer Kegelschnitte den Asymptoten der ebenen Kegelschnitte entsprechen.

Aus jeder Eigenschaft eines sphärischen Kegelschnitts ergiebt sich eine andere durch die Betrachtung des sphärischen Kegelschnitts, welcher dem Reciprocalkegel des gegebenen Kegels entspricht. So ward im Artikel 141 bewiesen, dass die cyclischen Ebenen eines Kegels zu den Focallinien des Reciprocalkegels normal sind. Wenn wir daher die Punkte, in denen die Focallinien des Kegels die Kugel schneiden, die Brennpunkte des sphärischen Kegelschnitts nennen, so ergiebt sich aus der in diesem Artikel bewiesenen Eigenschaft die andere, dass das Product der sinus der Normalen, die von den beiden Brennpunkten auf irgend eine Tangente eines sphärischen Kegelschnitts gefällt werden, von constantem Werthe ist.

226. Wenn irgend ein grösster Kreis einen sphärischen Kegelschnitt in den Punkten P, Q und die cyclischen Bogen desselben in den Punkten A, B schneidet, so ist

$$AP = BQ.$$

Diese Eigenschaft sphärischer Kegelschnitte ergiebt sich auf demselben Wege aus dem im letzten Artikel Bewiesenen, wie die entsprechende Eigenschaft der ebenen Hyperbel bewiesen ist. (Vergl. a. a. O. Artikel 199.) Das Verhältniss der sinus der von P und Q auf

$$\alpha = 0$$

gefällten Normalen ist dem Verhältniss der sinus der Normalen gleich, welche von Q und P auf

$$\beta = 0$$

gefällt werden; und da jene ersteren Normalen in dem Verhältniss

$$\sin AP : \sin AQ$$

zu einander stehen, so ist

$$\sin AP : \sin AQ = \sin BQ : \sin BP,$$

woraus leicht die Gleichheit

$$AP = BQ$$

erkannt wird.

Es entspricht dieser Eigenschaft ferner die reciproke, dass die zwei von irgend einem Punkte an einen sphärischen Kegelschnitt gezogenen Tangenten mit denjenigen Bogen gleiche Winkel einschliessen, welche diesen Punkt mit den beiden Brennpunkten desselben verbinden.

227. Es ist ein specieller Fall des im Artikel 218 gegebenen Theorems, dass der zwischen den beiden cyclischen Bogen eines sphärischen Kegelschnitts liegende Theil einer Tangente desselben von der Berührungssehne halbiert wird.

Man kann diesen Satz auch mittelst der Methode des Unendlichkleinen aus dem des Artikel 225 entwickeln, oder ihn endlich direct aus der Form der Gleichung der Tangente

$$2(xx' + yy' + zz') = k(\alpha'\beta + \alpha\beta')$$

ableiten. Denn diese Form zeigt, dass die Tangente in irgend einem Punkte construiert wird, indem man diesen Punkt mit dem Durchschnitt seiner nach Artikel 221 durch

$$xx' + yy' + zz' = 0$$

dargestellten Polare mit der Geraden

$$\alpha'\beta + \alpha\beta' = 0$$

verbindet, welche letztere Linie die vierte Harmonikale zu den cyclischen Bogen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

und dem nach ihrem Durchschnitt vom gegebenen Punkte aus gezogenen ist. Da nun der gegebene Punkt von dem ihm harmonisch conjugierten in Bezug auf die beiden Durchschnittspunkte seiner Tangente mit den cyclischen Bogen des Kegelschnitts um 90^0 absteht, so ist er von diesen Punkten selbst gleichweit entfernt. (Artikel 221.)

Nach dem Gesetze der Reciprocität entspricht dem soeben erörterten Satze der andere, dass die Verbindungslinie eines Punktes eines sphärischen Kegelschnitts mit den beiden Brennpunkten desselben gleiche Winkel mit der Tangente des Punktes einschliessen.

228. Aus dem Umstande, dass der in einer beliebigen Tangente durch die cyclischen Bogen bestimmte Abschnitt im Berührungspunkte halbiert wird, kann durch die Methode des Unendlichkleinen (vergl. a. a. O. Kapitel XIII) direct erkannt werden, dass jede Tangente eines sphärischen Kegelschnitts mit den cyclischen Bogen ein Dreieck von constantem Inhalt bildet, oder ein Dreieck, für welches die Summe der Basiswinkel unveränderlich ist. Man erkennt dieselbe Wahrheit trigonometrisch daraus, dass das Product der sinus der auf die cyclischen Bogen gefällten Normalen constant ist. Denn wenn wir den Abschnitt der Tangente c und die von ihr mit den cyclischen Bogen gebildeten Winkel A und B nennen, so sind die sinus der Normalen auf α und β respective

$$\sin \tfrac{1}{2} c \sin A, \quad \sin \tfrac{1}{2} c \sin B;$$

und für das Dreieck von der Basis c und den anliegenden Winkeln A und B giebt die sphärische Trigonometrie

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c \sin A \sin B = - \cos S \cos (S - C),$$

und da C bekannt ist, so ist auch S, die halbe Summe der Winkel, bekannt.

Das Gesetz der Reciprocität ergiebt dann weiter, dass die Summe der Bogen constant ist, welche die Brennpunkte mit einem beliebigen Punkte des sphärischen Kegelschnitts verbinden.

Diess Ergebniss kann überdiess durch die Methode des Unendlichkleinen aus dem Satze abgeleitet werden, nach welchem die Focalstrahlen des Berührungspunktes mit der Tangente gleiche Winkel bilden.*)

229. Wir können umgekehrt den Ort eines Punktes auf der Kugelfläche bestimmen, für welchen die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten der Kugelfläche constant ist.

Die Gleichung

$$\cos (\varrho + \varrho') = \cos a$$

kann in der Form

$$\cos^2 \varrho + \cos^2 \varrho' - 2 \cos \varrho \cos \varrho' \cos a = \sin^2 a$$

geschrieben werden. Wenn daher

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

die Ebenen bezeichnen, welche die Polarebenen der zwei gegebenen Punkte sind, so ist wegen

$$\alpha = \cos \varrho$$

---

*) Man kann hierbei besonders deutlich sehen, dass ein sphärischer Kegelschnitt ebenso wohl als Ellipse, wie als Hyperbel betrachtet werden kann. Jede der Focallinien schneidet die Kugel in zwei diametral entgegengesetzten Punkten. Wenn wir dann zwei von ihnen als Brennpunkte wählen, welche in einer und derselben von den geschlossenen Curven liegen, welche der Kegel mit der Kugel bestimmt, so ist die Summe der Focaldistanzen constant. Wenn wir aber für eine der Focaldistanzen FP die auf den diametral entgegengesetzten Punkt bezügliche einführen, so ist wegen

$$F'P = 180^0 - FP$$

die Differenz der Focaldistanzen constant.

Wir erkennen in derselben Art, dass eine veränderliche Tangente mit den cyclischen Bogen Winkel bildet, deren Differenz constant ist, wenn wir für einen der im Anfange dieses Artikels betrachteten Winkel sein Supplement einführen.

die Gleichung des Ortes

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos a = \sin^2 a\,(x^2 + y^2 + z^2).$$

Und um zu beweisen, dass die Ebenen

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

zu den Focallinien dieses Kegels normal sind, hat man nur zu zeigen, dass die zu einer von diesen Ebenen parallelen Schnitte in der Normallinie zu ihr einen Brennpunkt haben. Sind also

$$\alpha' = 0, \quad \alpha'' = 0$$

zwei Ebenen, welche normal zu einander und zur Ebene

$$\alpha = 0$$

sind, also durch die Linie hindurchgehen, deren Character als Focallinie wir nachweisen wollen, so ist wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2$$

die Gleichung des Ortes

$$\sin^2 a\,(\alpha'^2 + \alpha''^2) = (\beta - \alpha \cos a)^2.$$

Wenn dieser Ort dann durch eine zu

$$\alpha = 0$$

parallele Ebene geschnitten wird, so ist durch

$$\alpha'^2 + \alpha''^2$$

das Quadrat der Entfernung eines Punktes dieses Schnittes vom Durchschnitt von

$$\alpha' = 0, \quad \alpha'' = 0$$

ausgedrückt, und wir sehen, dass diese Entfernung zu derjenigen Entfernung in einem constanten Verhältniss steht, in welcher er von der Durchschnittslinie derselben Ebene mit

$$\beta - \alpha \cos a = 0$$

ist. Diese Linie ist daher die Directrix des Schnittes für den Punkt (α', α'') als Brennpunkt.

Wir erkennen so auch, dass die allgemeine Gleichung eines Kegels, welcher die Linie xy zur Focallinie hat, von der Form

$$x^2 + y^2 = (ax + by + cz)^2$$

ist; und folgern daraus sodann, dass der sinus der Entfernung eines Punktes eines sphärischen Kegelschnitts vom Brennpunkte zu dem sinus der Entfernung desselben Punktes von einem gewissen Directrix-Bogen in constantem Verhältniss ist.

230. Irgend zwei veränderliche Tangenten schneiden die cyclischen Bogen in vier Punkten, welche in einem Kreise liegen.

Denn wenn die Gleichungen

$$L = 0, \quad M = 0, \quad R = 0$$

zwei Tangenten und ihre Berührungssehne repräsentieren, so ist

$$LM = R^2$$

die Gleichung des sphärischen Kegelschnitts. Da sie aber mit

$$\alpha\beta = x^2 + y^2 + z^2$$

identisch sein muss, so ist

$$\alpha\beta - LM$$

mit

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2$$

identisch; und während die letztere Grösse, gleich Null gesetzt, einen kleinen Kreis darstellt, welcher mit der Berührungssehne R denselben Pol hat, so zeigt die Form

$$\alpha\beta - LM = 0,$$

dass dieser Kreis dem Vierseit $\alpha\beta LM$ umschrieben ist.

Die Reciprocität ergiebt, dass die Focalstrahlen zweier Punkte eines sphärischen Kegelschnitts ein sphärisches Viereck bilden, welches einem kleinen Kugelkreis umgeschrieben ist.

Aus dieser Eigenschaft kann dann mittelst der Bemerkung, dass die Summe oder Differenz zweier Gegenseiten in einem solchen Viereck der Summe oder Differenz der beiden andern Gegenseiten desselben gleich ist, der Satz abgeleitet werden, dass die Summe oder Differenz der Brennpunktsdistanzen für die Punkte einer sphärischen Ellipse constant ist.

231. Aus den soeben für Kegel bewiesenen Eigenschaften können ferner Eigenschaften abgeleitet werden, welche allen Flächen zweiten Grades angehören. Z. B.:

Das Product der sinus der Winkel, die eine Erzeugende eines Hyperboloids mit den Ebenen der Kreisschnitte bildet, ist constant.

Denn unter den Erzeugenden des Asymptotenkegels ist eine zu der betrachteten Erzeugenden des Hyperboloids parallel und die Kreisschnitte dieses Kegels sind dieselben wie die des Hyperboloids.

Da ferner die Focallinien des Asymptotenkegels die Asymptoten der Focalhyperbel sind, so folgt aus Artikel 228, dass die Summe oder Differenz der Winkel constant ist, welche eine Erzeugende des Hyperboloids mit den Asymptoten der Focalhyperbel einschliesst.

Ferner, wenn für einen Centralschnitt einer Fläche zweiten Grades eine der Achsen gegeben ist, so ist damit die Summe oder Differenz der Winkel gegeben, welche seine Ebene mit den Ebenen der Kreisschnitte einschliesst.

Denn nach Artikel 98 berührt die Ebene eines Centralschnitts von gegebener Achse einen mit der gegebenen Fläche concyclischen Kegel und das eben ausgesprochene Theorem ist daher eine Folge von Artikel 228.

Wir erhalten aber für die Summe oder Differenz dieser Winkel einen Ausdruck in Function der gegebenen Achse, indem wir den durch ihre grösste und kleinste Achse gehenden Hauptschnitt der Fläche betrachten. Wir erhalten die cyclischen Ebenen, wenn wir in denselben die Halbdurchmesser OB, OB' eintragen, deren Längen der mittleren Halbachse b gleich sind. Die durch diese Linien und normal zur Ebene der Figur gelegten Ebenen sind die cyclischen Ebenen.

Fig. 3.

Für irgend einen Halbdurchmesser a', der mit OC den Winkel α einschliesst, gilt dann die Relation

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\cos^2\alpha}{c^2} + \frac{\sin^2\alpha}{a^2}.$$

Nun ist der Halbdurchmesser a' offenbar eine Achse desjenigen Schnittes, welcher durch ihn normal zur Ebene der Figur gelegt wird, und α ist, so lange $a' > b$ ist, die halbe Summe der Winkel BOA' und $B'OA'$, welche die Ebene des Schnittes mit den cyclischen Ebenen bildet; es ist dagegen für $a' < b$, weil alsdann OA' zwischen den Linien OB und OB' gelegen ist, die halbe Differenz derselben Winkel. Und diese Summe oder Differenz ist für alle Schnitte von derselben Achse dieselbe. Sind daher a', b' die Achsen eines Centralschnittes und θ, θ' die Winkel, welche er mit den cyclischen Ebenen einschliesst, so haben wir

$$\frac{1}{b'^2} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \theta')}{a^2},$$

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(\theta + \theta')}{c^2} + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta + \theta')}{a^2}.$$

Durch Subtraction entspringt daraus

$$\frac{1}{b'^2} - \frac{1}{a'^2} = \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) \sin\theta \sin\theta',$$

d. h. die Differenz der Quadrate der reciproken Werthe der Achsen eines Centralschnittes ist dem Product der sinus der Winkel proportional, welche seine Ebene mit den cyclischen Ebenen der Fläche einschliesst.

232. Wir sahen im Artikel 226, dass für zwei sphärische Kegelschnitte von denselben cyclischen Bogen der in einer Tangente des einen vom andern bestimmte Abschnitt im Berührungspunkte halbiert wird, und erkennen daraus durch die Methode des Unendlichkleinen, dass die Tangenten des einen im andern ein Segment von constanter Fläche bestimmen. (Vergl. „Analyt. Geom. der Kegelschnitte" Artikel 258.)

Wenn ferner zwei sphärische Kegelschnitte dieselben Brennpunkte haben, so sind die Tangenten, welche man durch irgend einen Punkt des äussern von ihnen nach dem innern ziehen kann, gleich geneigt gegen die entsprechende Tangente des ersteren; und es ist daher nach der Methode des Unendlichkleinen (a. a. O. Artikel 262) der Ueberschuss der Summe dieser zwei Tangenten über den zwischen ihren Berührungspunkten gelegenen Bogen des innern Kegelschnitts constant. Man erkennt diess Theorem als das reciproke von dem, welches wir im Eingange des Artikels aussprachen und als solches ist es in der That zuerst erhalten worden.*)

233. Man soll den Ort des Durchschnitts von zwei sich rechtwinklig durchschneidenden Tangenten eines sphärischen Kegelschnitts bestimmen.

---

*) Von Graves, in seiner Uebersetzung des früher erwähnten Mémoirs von Chasles (p. 77).

Die Aufgabe ist identisch mit der anderen auf Kegel bezüglichen, welche den Kegel zu bestimmen verlangt, der von der Durchschnittslinie zweier zu einander rechtwinkliger Tangentenebenen eines gegebenen Kegels

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0$$

erzeugt wird. Sind nun die Richtungswinkel der Normalen zu diesen Tangentenebenen

$$\alpha', \beta', \gamma'; \quad \alpha'', \beta'', \gamma'',$$

so erfüllen sie die Relationen

$$A \cos^2 \alpha' + B \cos^2 \beta' + C \cos^2 \gamma' = 0,$$
$$A \cos^2 \alpha'' + B \cos^2 \beta'' + C \cos^2 \gamma'' = 0;$$

und wir erhalten überdiess für α, β, γ als die Richtungswinkel der ihnen gemeinschaftlichen Normalen die andern Relationen

$$\cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha'', \text{ etc.},$$

so dass die Gleichung des Ortes durch Addition der vorigen Gleichungen in der Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = (A + B + C)(x^2 + y^2 + z^2)$$

gefunden wird. Derselbe ist daher ein mit dem Reciprocalkegel des gegebenen concyclischer Kegel.

Es entspricht diesem Ergebniss das reciproke, dass die Enveloppe einer Sehne von 90^0 in einem sphärischen Kegelschnitt ein mit dem Reciproken desselben confocaler sphärischer Kegelschnitt ist.

234. Man soll den Ort der Fusspunkte der Normalen finden, welche von dem Brennpunkt eines sphärischen Kegelschnitts auf seine Tangenten gefällt werden.

Die Methode zur Beantwortung dieser Frage ist ganz dieselbe, wie sie bei der entsprechenden Aufgabe der analytischen Geometrie der Ebene angewendet wird und die Verschiedenheit tritt nur in der Interpretation des Resultats hervor.

Wenn die Gleichung des sphärischen Kegelschnitts nach Artikel 229 in der Form

$$x^2 + y^2 = t^2, \quad (t = ax + by + cz)$$

geschrieben wird, so ist die Gleichung der Tangente

$$xx' + yy' = tt'$$

und die durch den Punkt (xy) gehende Normale dieser Linie ist durch

$$(x' - at')\, y - (y' - bt')\, x = 0$$

ausgedrückt. Die Einführung der aus diesen Gleichungen für x', y', t' sich ergebenden Werthe in

$$x'^2 + y'^2 = t'^2$$

liefert für den gesuchten Ort die Gleichung

$$(x^2 + y^2) \left\{(a^2 + b^2 - 1)(x^2 + y^2) + 2cz\,(ax + by) + c^2z^2\right\} = 0,$$

in welcher die in den Klammern stehende Grösse, für sich mit Null verglichen, einen Kegel bezeichnet, dessen Kreisschnitte der Ebene z parallel sind.

235. Wir haben im Artikel 222 erkannt, dass die Relation

$$\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C = 0$$

nicht wie in der Ebene eine identische Relation zwischen den Normalen von irgend einem Punkte aus ist. Es bleibt daher noch zu untersuchen, wie die von irgend einem Punkte auf drei feste grösste Kreise gefällten Normalen verbunden sind. Wir haben jedoch diese Aufgabe implicite bereits gelöst, da jede der drei Normalen das Complement einer der drei Entfernungen des Punktes von den Polen der Seiten des Fundamentaldreiecks ist.

Sind daher durch a, b, c die Seiten, durch A, B, C die Winkel dieses Dreiecks bezeichnet, so sind die sinus α, β, γ der von irgend einem Punkt auf die Seiten gefällten Normalen durch die folgende Relation vereinigt, die nur eine Transformation der im Artikel 52 gegebenen ist,

$$\begin{aligned}&\alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C \\ &+ 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos a + 2\gamma\alpha \sin C \sin A \cos b + 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos c \\ &= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C.\end{aligned}$$

In dieser Form repräsentiert die Gleichung eine zwischen den drei Bogen α, β, γ bestehende Relation.

Wenn wir eine Relation zwischen den Normalen erhalten wollen, welche von einem Punkte der Kugel auf die durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

dargestellten Ebenen gefällt werden, so haben wir nur die rechte Seite der vorigen Gleichung mit r^2 zu multiplicieren und erkennen, dass diese Gleichung in α, β, γ die Transformation der elementaren Relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ist.

Es erhellt daraus, dass die linke Seite der vorigen Gleichung, für sich mit Null verglichen, eine Transformation von

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

und daher der Ausdruck des imaginären Kreises ist, in welchem zwei concentrische Kugeln sich schneiden, mit andern Worten der Ausdruck des imaginären Kreises im Unendlichen. (Vergl. Artikel 135 und „Analytische Geom. d. Kegelschnitte" Artikel 282.)

236. Diese Gleichung erlaubt uns, die Gleichung der Kugel zu entwickeln, die einem gegebenen Tetraeder eingeschrieben ist. Wir bezeichnen durch

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

seine Flächen, und denken durch das Centrum der Kugel parallel zu den drei ersten unter ihnen Ebenen gelegt, so dass die von einem Punkte der Kugel auf sie gefällten Normalen die Werthe $\alpha - r$, $\beta - r$, $\gamma - r$ erhalten. Die Gleichung der Kugel ist somit

$$(\alpha - r)^2 \sin^2 A + (\beta - r)^2 \sin^2 B + \text{etc.}$$
$$= r^2 (1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C).$$

Sind dann L, M, N, P die Inhaltszahlen der vier Flächen, so gilt die Identität

$$L\alpha + M\beta + N\gamma + P\delta = r\,(L + M + N + P);$$

wir können mit Hilfe derselben r eliminieren und das Resultat in folgender Weise schicklich schreiben:

$$l = \cos^2 \tfrac{1}{2}(bc), \quad m = \cos^2 \tfrac{1}{2}(ca), \quad n = \cos^2 \tfrac{1}{2}(ab),$$
$$p = \cos^2 \tfrac{1}{2}(ad), \quad q = \cos^2 \tfrac{1}{2}(bd), \quad r = \cos^2 \tfrac{1}{2}(cd),$$

wo (ad), etc. die Winkel bezeichnen, welche die Ebenen

$$\alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad \text{etc.}$$

mit einander einschliessen. Dann ist die Gleichung der eingeschriebenen Kugel

$$lrq\alpha^2 + mpr\beta^2 + nqp\gamma^2 + lmn\delta^2$$
$$+ (lp - mq - nr)(\alpha\delta + p\beta\gamma) + (mq - nr - lp)(m\beta\delta + q\alpha\gamma)$$
$$+ (nr - lp - mq)(n\gamma\delta + r\alpha\beta) = 0\text{*)}.$$

*) Man kann die allgemeine Gleichung der einem Tetraeder eingeschriebenen Flächen zweiten Grades in dieser nämlichen Form dar-

Von ihr gelangt man durch einfache Zeichenänderungen zu den Gleichungen der Kugeln, welche nur je eine unter den vier Flächen des Tetraeders innerlich berühren.

237. Die Gleichung eines beliebigen kleinen Kugelkreises oder auch eines geraden Kegels wird leicht gefunden. Der sinus der Entfernung irgend eines seiner Punkte von der Polare des Centrums ist constant, d. h. wenn

$$\alpha = 0$$

diese Polare bezeichnet, ist die Gleichung des Kreises

$$a^2 = \cos^2 \varrho \, (x^2 + y^2 + z^2).$$

Da hiernach alle Kreise der Kugel, welche nicht grösste Kreise sind, durch Gleichungen von der Form

$$S = \alpha^2$$

gegeben sind, so sind alle ihre Eigenschaften specielle Fälle von denen der Kegelschnitte, die mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung haben.

Man kann leicht die Theorie der Invarianten auf solche kleine Kugelkreise anwenden. Sind

$$x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 \sec^2 \varrho = 0, \quad (S = 0),$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - \beta^2 \sec^2 \varrho' = 0, \quad (S_1 = 0)$$

zwei Kreise, so bilden wir die Bedingung, unter welcher

$$kS + S_1 = 0$$

in lineare Factoren zerfällt. Für die Form derselben

$$k^3 \Delta + k^2 \Theta + k \Theta_1 + \Delta_1 = 0$$

ist

$$\Delta = -\tan^2 \varrho, \quad \Delta_1 = -\tan^2 \varrho'$$
$$\Theta = \sec^2 \varrho \sec^2 \varrho' \sin^2 D - 2 \tan^2 \varrho - \tan^2 \varrho',$$
$$\Theta_1 = \sec^2 \varrho \sec^2 \varrho' \sin^2 D - 2 \tan^2 \varrho' - \tan^2 \varrho,$$

für D als die Entfernung der Centra. Für zwei Kreise in einer Ebene sind die entsprechenden Werthe

$$\Delta = -r^2, \quad \Delta_1 = -r'^2,$$
$$\Theta = D^2 - 2r^2 - r'^2,$$
$$\Theta_1 = D^2 - 2r'^2 - r^2.$$

Wenn daher eine Invarianten-Relation zwischen zwei Kreisen

---

stellen, sobald vorausgesetzt wird, dass l, m, n, p, q, r sechs unbestimmte Coefficienten bezeichnen; man bewährt diess leicht. (Vergl. „Analyt. Geom. d. Kegelschn." Artikel 136.)

in der Ebene als eine Function ihrer Halbmesser und ihrer Centraldistanz ausgedrückt ist, so wird die entsprechende Relation für zwei Kreise einer Kugel aus ihr erhalten, indem man für

r, r', D die Werthe $\tan r$, $\tan r'$, $\sec r \sec r' \sin D$

einsetzt.

So berühren sich zwei Kreise in einer Ebene, wenn die Discriminante der obigen cubischen Gleichung verschwindet und die Bedingung der Berührung ist daher

entweder $D = 0$ oder $D = r \pm r'$.

Die der letzteren Bedingung entsprechende Relation für Kugelkreise ist daher

$$\tan r \pm \tan r' = \sec r \sec r' \sin D$$

oder

$$\sin D = \sin (r \pm r').$$

Wenn ferner zwei Kreise in einer Ebene dem nämlichen Dreieck respective eingeschrieben und umgeschrieben sind, so besteht die Invarianten-Gleichung

$$\Theta^2 = 4 \Delta \Theta_1$$

und es entspringt aus ihr zwischen den Halbmessern und der Centraldistanz beider Kreise die Relation

$$D^2 = R^2 - 2Rr.$$

Ihr entspricht für den eingeschriebenen und den umgeschriebenen Kreis eines sphärischen Dreiecks die Relation

$$\sec^2 R \sec^2 r \sin^2 D = \tan^2 R - 2 \tan R \tan r.$$

Wir könnten in derselben Weise die zwischen dem eingeschriebenen und umgeschriebenen Kreise eines sphärischen Polygons bestehende Relation entwickeln.

238. Nach Artikel 235 ist die Gleichung eines kleinen Kugelkreises oder eines geraden Kegels in Dreilinien-Coordinaten nothwendig von der Form

$$\alpha^2 \sin^2 A + \beta^2 \sin^2 B + \gamma^2 \sin^2 C$$
$$+ 2\beta\gamma \sin B \sin C \cos a + 2\gamma\alpha \sin C \sin A \cos b + 2\alpha\beta \sin A \sin B \cos c$$
$$= (l\alpha + m\beta + n\gamma)^2.$$

Wenn nun der betrachtete Kugelkreis dem Fundamentaldreieck $\alpha\beta\gamma$ umgeschrieben ist, so müssen die Coefficienten von α^2, β^2, γ^2 verschwinden und wir müssen daher

$$l\alpha + m\beta + n\gamma = \alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C$$

haben, d. h. wie schon vorher bewiesen ist, diese Gleichung repräsentiert die Polare des Centrums des umgeschriebenen Kreises.

Die Substitution dieses Werthes liefert die Gleichung des betrachteten Kreises in der Form

$$\beta\gamma \tan \tfrac{1}{2} a + \gamma\alpha \tan \tfrac{1}{2} b + \alpha\beta \tan \tfrac{1}{2} c = 0\,^{*}).$$

Die Gleichung des eingeschriebenen Kreises wird genau in derselben Form erhalten, wie in dem Falle der ebenen Dreiecke, nämlich in der Form

$$\cos \tfrac{1}{2} A \sqrt{(\alpha)} + \cos \tfrac{1}{2} B \sqrt{(\beta)} + \cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{(\gamma)} = 0.$$

239. Wir wollen diese Ergebnisse zur Untersuchung der von Hart gegebenen Uebertragung des Satzes vom Feuerbach'schen Kreise auf sphärische Dreiecke anwenden. Das bezügliche Theorem behauptet, dass die vier eingeschriebenen Kreise eines sphärischen Dreiecks von einem und demselben fünften Kreise berührt werden.

Die Reciprocalgleichung der im Anfang des vorigen Artikels gegebenen Gleichung ist

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta \cos A - 2\zeta\xi \cos B - 2\xi\eta \cos C$$
$$- (l'\xi + m'\eta + n'\zeta)^2 = 0,$$

indem l', m', n' die Coordinaten des Centrums des Kreises bezeichnen; die Reciprocalen der vier eingeschriebenen Kreise sind daher durch

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta \cos A - 2\zeta\xi \cos B - 2\xi\eta \cos C$$
$$- (\xi \pm \eta \pm \zeta)^2 = 0$$

dargestellt. Für die Gültigkeit der obern Vorzeichen erhalten wir zur Bestätigung die Form

$$\eta\zeta \cos^2 \tfrac{1}{2} A + \zeta\xi \cos^2 \tfrac{1}{2} B + \xi\eta \cos^2 \tfrac{1}{2} C = 0$$

als aequivalent.

Die Linie

$$\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta = 0$$

berührt diesen Kreis, wenn die Bedingung

$$\cos \tfrac{1}{2} A \sqrt{\lambda} + \cos \tfrac{1}{2} B \sqrt{\mu} + \cos \tfrac{1}{2} C \sqrt{\nu} = 0$$

---

*) Für $x = \alpha \sin A$, $y = \beta \sin B$, $z = \gamma \sin C$ wird sie auf

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos a + 2zx \cos b + 2xy \cos c$$
$$- (lx + my + nz)^2 = 0$$

gebracht.

erfüllt ist und wir erkennen durch wiederholte Anwendung dieser Bedingung, dass die vier Kreise

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta \cos A - 2\zeta\xi \cos B - 2\xi\eta \cos C \\ - (\xi \pm \eta \pm \zeta)^2 = 0$$

sämmtlich durch den Kreis

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta \cos A - 2\zeta\xi \cos B - 2\xi\eta \cos C \\ - \left\{\xi \cos (B - C) + \eta \cos (C - A) + \zeta \cos (A - B)\right\}^2 = 0$$

berührt werden. Die Coordinaten seines Centrums sind durch

$$\cos (B - C), \ \cos (C - A), \ \cos (A - B)$$

ausgedrückt und dasselbe liegt daher in derjenigen Linie, welche den Durchschnittspunkt der drei Höhen mit dem Durchschnittspunkt der drei Seitenhalbierungslinien verbindet.

Denn die Coordinaten des Durchschnitts der Höhen sind

$$\cos B \cos C, \ \cos C \cos A, \ \cos A \cos B,$$

und die des Durchschnittspunktes der Seitenhalbierungslinien sind

$$\sin B \sin C, \ \sin C \sin A, \ \sin A \sin B.$$

Die Tangente des sphärischen Radius dieses Kreises ist die Hälfte von der Tangente des sphärischen Radius des umgeschriebenen Kreises.

Diesen Satz oder die Relation

$$\tan \varrho = \tfrac{1}{2} \tan R$$

kann man wie folgt erhalten. Bekanntlich sind die Verbindungslinien eines beliebigen Punktes der Kugel mit den Ecken eines Dreiecks durch eine Relation mit einander verbunden. Wenn die Ecken des Dreiecks Centra von Kreisen von den Halbmessern $\varrho, \varrho', \varrho''$ sind, so erhält man durch Substitution von

$$\varrho + R, \quad \varrho' + R, \quad \varrho'' + R$$

für die Entfernungen des Centrums des sie alle berührenden Kreises aus dieser Relation eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von R, deren Wurzeln die Radien der Kreise sind, welche die gegebenen alle innerlich oder äusserlich berühren. Der Radius des innerlich berührenden Kreises für die drei dem Dreieck äusserlich eingeschriebenen Kreise wird so durch die Formel

$$\tan \varrho = \tfrac{1}{2} \tan R$$

erhalten, während der Radius ϱ' des dieselben Kreise äusserlich berührenden Kreises durch

$$\tan\varrho' = \frac{\sin\frac{1}{2}(b+c)\sin\frac{1}{2}(c+a)\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos s\sqrt{\left\{\sin s\,.\,\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\right\}}} - \frac{1}{2}\tan R$$

dargestellt ist.

240. Die directe Untersuchung würde in folgender Weise zu führen sein. Für

$$2s = a + b + c$$

und

$$\alpha s - A = x,\quad \beta s - B = y,\quad \gamma s - C = z$$

ist die Gleichung des eingeschriebenen Kreises

$$\begin{aligned}&x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos a + 2zx\cos b + 2xy\cos c\\ &\quad - \left\{x\cos(s-a) + y\cos(s-b) + z\cos(s-c)\right\}^2 = 0;\end{aligned}$$

denn sie ist äquivalent mit

$$\begin{aligned}&x^2\sin^2(s-a) + y^2\sin^2(s-b) + z^2\sin^2(s-c)\\ &+ 2yz\left\{\cos a - \cos(s-b)\cos(s-c)\right\}\\ &+ 2zx\left\{\cos b - \cos(s-c)\cos(s-a)\right\}\\ &+ 2xy\left\{\cos c - \cos(s-a)\cos(s-b)\right\} = 0,\end{aligned}$$

oder mit

$$\begin{aligned}&x^2\sin^2(s-a) + y^2\sin^2(s-b) + z^2\sin^2(s-c)\\ &- 4yz\sin(s-b)\sin(s-c) - 4zx\sin(s-c)\sin(s-a)\\ &- 4xy\sin(s-a)\sin(s-b) = 0.\end{aligned}$$

Aus ihr gehen aber die Gleichungen der drei andern Kreise, welche dem sphärischen Dreieck eingeschrieben sind, hervor durch die respective Veränderung der Zeichen von a, b, c und man erkennt sodann, dass alle vier Kreise durch den fünften berührt sind, dessen Gleichung ist

$$\begin{aligned}&x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos a + 2zx\cos b + 2xy\cos c\\ &- \left\{x\,\frac{\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a} + y\,\frac{\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b} + z\,\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\right\}^2\\ &= 0.\end{aligned}$$

Für $z = 0$ geht aus derselben zur Bestimmung der von ihm mit der entsprechenden Dreiecksseite bestimmten Durchschnittspunkte, d. i. zur Berechnung des Verhältnisses $x : y$ die Gleichung

$$\begin{aligned}&\left(1 - \frac{\cos^2\frac{1}{2}b\,\cos^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}a}\right)x^2 + 2xy\left(\cos c - \cos^2\frac{1}{2}c\right)\\ &+ \left(1 - \frac{\cos^2\frac{1}{2}a\,\cos^2\frac{1}{2}c}{\cos^2\frac{1}{2}b}\right)y^2 = 0\end{aligned}$$

hervor, welche in die Factoren

$$\left(1 - \frac{\cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}\right) x - \left(1 - \frac{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b}\right) y = 0,$$

$$\left(1 + \frac{\cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a}\right) x - \left(1 + \frac{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}b}\right) y = 0$$

zerfällt. Die Form derselben zeigt, dass die Verbindungslinien dieser Durchschnittspunkte der Seiten mit den respectiven Gegenecken zwei Systeme von drei Linien bilden, welche durch einen Punkt gehen.

Da nach der allgemeinen Gleichung des betrachteten Kreises durch

$$\alpha \sin A \frac{\cos\frac{1}{2}b \cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a} + \beta \sin B \frac{\cos\frac{1}{2}c \cos\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b}$$

$$+ \gamma \sin C \frac{\cos\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c} = 0$$

oder

$$\alpha \tan\tfrac{1}{2}a + \beta \tan\tfrac{1}{2}b + \gamma \tan\tfrac{1}{2}c = 0$$

die Polare seines Centrums dargestellt wird, so erkennt man aus der Bemerkung, dass

$$\beta\gamma \tan\tfrac{1}{2}a + \gamma\alpha \tan\tfrac{1}{2}b + \alpha\beta \tan\tfrac{1}{2}c = 0$$

die Gleichung des umgeschriebenen Kreises ist, die Lage der drei Durchschnittspunkte dieser Polare mit den Seiten des Dreiecks. Man findet sie, wenn man durch jede Ecke eine gerade Linie zieht, welche mit den in ihr zusammenstossenden Seiten denselben Winkel macht, wie die Tangente des umgeschriebenen Kreises in diesem Punkte mit denselben Seiten.

Indem man dann die Gleichung der Polare in der Form

$$\alpha \cos(S - A) + \beta \cos(S - B) + \gamma \cos(S - C) = 0$$

schreibt, erkennt man, dass das Centrum des Hart-Feuerbach'schen Kreises in der Verbindungslinie des Centrums des umgeschriebenen Kreises mit dem Pole des grössten Kreises

$$\alpha \cos A + \beta \cos B + \gamma \cos C = 0$$

enthalten ist, der für das ursprüngliche Dreieck und das von den Fusspunkten der Höhenperpendikel gebildete Dreieck die Achse der Homologie ist.

Eine andere Construction dieses Centrums ergiebt sich aus folgenden Betrachtungen.

Die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks mit dem Centrum des umgeschriebenen Kreises und die von den Ecken aus gehenden Perpendikel auf die Verbindungslinien der Seitenmittelpunkte machen mit den Seiten des sphärischen Dreiecks gleiche Winkel. Die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser letzteren Perpendikel sind durch

$$\sin(S-B)\sin(S-C),\quad \sin(S-C)\sin(S-A),\quad \sin(S-A)\sin(S-B)$$

dargestellt, während

$$\sin(S-A)\quad,\quad \sin(S-B)\quad,\quad \sin(S-C)$$

die Coordinaten des Centrums des umgeschriebenen Kreises bezeichnen.

In der Verbindungslinie jenes ersteren Durchschnittspunktes mit dem Centrum des Feuerbach'schen Kreises

$$\cos(B-C),\quad \cos(C-A),\quad \cos(A-B)$$

liegt auch der Punkt von den Coordinaten

$$\cos A\quad,\quad \cos B\quad,\quad \cos C$$

und man erhält daher die folgende Construction für das fragliche Centrum: Man zieht durch jeden der Eckpunkte eine Linie, welche mit einer der Seiten denselben Winkel bildet, welchen das Perpendikel auf die Gegenseite mit der andern einschliesst; man verbindet den Durchschnittspunkt dieser drei Linien mit dem Durchschnittspunkt der von den Ecken auf die Verbindungslinien der Mittelpunkte der Seiten respective gefällten Perpendikel und erhält das gesuchte Centrum da, wo diese Verbindungslinie von derjenigen geschnitten wird, welche den Durchschnitt der Höhenperpendikel mit dem Durchschnitt der Seitenhalbierungslinien verbindet*).

---

*) Die Bemerkung des Artikel 237, nach welcher die Eigenschaften von Kugelkreisen denen von Kegelschnitten entsprechen, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt eine doppelte Berührung haben, zeigt, dass in der Ebene der folgende Satz gleichzeitig hierdurch bewiesen ist: Durch drei gegebene Punkte können vier Kegelschnitte beschrieben werden, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt in doppelter Berührung sind und diese werden sämmtlich von einem fünften Kegelschnitt berührt, der gleichfalls mit jenem ersten eine doppelte Berührung hat.

Bemerkte Druckfehler.

Seite 63	Zeile	11	v. u.	Kanten statt Seiten.
- —	-	1	v. u.	Bd. LXII statt Bd. XLII.
- 134	-	15	v. o.	und dem statt und in dem.
- 137	-	19	v. o.	fehlt das Wort: Beispiel.
- 188	-	8	v. o.	; statt ,.
- 206	-	3	v. o.	welchen statt welcher.
- 206	-	2	v. u.	cz^2 statt z^2.
- 269	-	10	v. u.	umgeschrieben statt umschrieben.
- 281	-	6	v. o.	schalte ein nach 170, 130 und 186.
- 294	-	6	v. o.	$\frac{z^2}{a_3 + l}$ statt $\frac{z^2}{a^3 - l}$.