

7.72 — Ogólne zagadnienia ośrodków
ciągłych i dyskretno-ciągłych.
Sprężystość.

7.73 — Ośrodki niejednorodne, kompozyty.

Wojciech Dzieniszewski

ELASTOSTATYKA INTERSTRUKTURALNYCH
WIELOSKŁADNIKOWYCH PRZESTRZENNYCH
USTROJÓW KOMPOZYTOWYCH

19/1990



Praca wpłynęła do Redakcji dnia 27 listopada 1989 r.



56813



W e p r a w a c h r ę k i p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Makład 100 egz. Ark.wyd. 6,5 Ark.druk.8,25

Oddano do drukarni w maju 1990 r.

Nr zamówienia 261/90

Warszawska Drukarnia Naukowa , Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Wojciech Dzieniszewski

Pracownia Problemów Budownictwa Energooszczędnego
Ośrodek Rozwoju Techniki

ELASTOSTATYKA INTERSTRUKTURALNYCH
WIELOSKŁADNIKOWYCH PRZESTRZENNYCH USTROJÓW
KOMPozyTOWYCH

Streszczenie

W oparciu o założenia liniowej teorii sprężystości przedstawiono w pracy metodę analizy statycznej dowolnie niejednorodnych strukturalnie, wieloskładnikowych ustrojów przestrzennych w stanach deformacji sprężystych.

Wyprowadzone i przedstawione w pracy zależności i równania stanów przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w elementach struktur wewnętrznych rozpatrywanych ustrojów umożliwiają uzyskiwanie analitycznych i numerycznych rozwiązań zagadnień szczegółowych. Służą one mogą również do konstruowania przy użyciu technik komputerowych programów cyfrowych rozwiązań konkretnych przykładów. Koncepcje metody analizy oparte na komórkowej dyskretyzacji wieloskładnikowego strukturalnego obszaru ustroju o kształcie prostopadłościąnu. Komórkami dyskretyzacji są prostopadłościennie oczka przestrzennej prostoliniowej i prostokątnej siatki nieregularnej o tak dobranych nieregularnościach gęstości, aby określone materiałowo-geometryczne kształty struktury wewnętrznej mogły być w nią wpisane z dostateczną dokładnością.

Całość opracowania podzielono na pięć rozdziałów obejmujących wstęp oraz rozdziały kolejno odnoszące się do elementarnej komórki prostopadłościenniej, wielokomórkowego elementu makroskopowego oraz ustrojów kompozytowych złożonych z dużej liczby powtarzalnych strukturalnych elementów makroskopowych rozmieszczonych odpowiednio w jednym szeregu oraz szeregowo w dwóch i trzech kierunkach.

W rozdziale pierwszym opisano odmiany ustrojów będących przedmiotem pracy, przedstawiono sposób aproksymacji geometryczno-materiałowych struktur wewnętrznych elementów makroskopowych oraz opisano przyjętą parametryzację strukturalnego obszaru elementu makroskopowego z zastosowaniem zdefiniowanych funkcji obszarowych.

Wykorzystując funkcje obszarowe komórkowego podziału obszaru elementu makroskopowego określono pola przemieszczeń u punktów komórek n w aproksymacyjnej wielomianowej postaci (1.11-1.17).

Rozdział drugi obejmuje rozważania dotyczące dowolnej komórki n . W oparciu o wyrażenie (1.16) na przemieszczenia u^W punktów komórki wywołane czystą deformacją sformułowano pojęcia (2.1), (2.16) uogólnionych przemieszczeń u^i, π^i ($i=1,2,3$)

plaszczyn przekrojowych $\xi_i = \text{const.}$ komórek n . Uogólnione przemieszczenia $n v_i, n q_i$ komórek n określono w postaci wielomianowej (2.18) z dowolnością do wektorowych współczynników $n v_i, n v_{ij}, n q_i, n q_{ij}$ deformacji, tworzących wraz z przesunięciami $n w$ środka ciężkości komórki układ zmiennych kinematycznych analizy stanów deformacji.

Następnie na podstawie określonych za pomocą wzorów (1.12, 1.16, 2.15) pól przemieszczeń $n w$ komórek n , wykorzystując związki geometryczne deformacji liniowej teorii sprężystości, przedstawiono wzory (2.19-2.31) na wektorowe pola deformacji $n \epsilon_i$ komórek n . Pola $n \epsilon_i$ są wielomianowymi pól $n \epsilon_{(k)l}$ (o wektorowych współczynnikach $n \epsilon_{ij}, n \epsilon_{kij}, n \epsilon_{(k)ij}$; $i, k, l = 1, 2, 3$) wywołujących w punktach komórek n stany naprężeń $n \sigma_i$ oraz pól deformacji swobodnych pochodzących od infinitesimalnych obrotów $n \omega$. W oparciu o związki fizyczne (2.32) prawa Hooke'a odkształceń sprężystych materiałów izotropowych przedstawiono wzory (2.33-2.43), na wielomianowe pola naprężeń $n \sigma_i$ komórek n o wektorowych współczynnikach $n \sigma_{ij}, n \sigma_{kij}, n \sigma_{(k)ij}$ ($i, k, l = 1, 2, 3$) wyrażone przez zmienne kinematyczne deformacji.

Siłami działającymi na komórkę elementarną są siły objętościowe o stałej gęstości wektorowej $n f$ odniesionej do jednostki objętości oraz zmienne liniowo gęstości $n p_i$ sił powierzchniowych, określonych za pomocą wzorów (2.44-2.53) z dowolnością do wektorowych współczynników $n q_i, n q_{ij}$ gęstości napięć siłowych oraz $n m_i, n m_{ij}$ gęstości napięć momentowych, działających odpowiednio na ścianach komórki o równaniach $\xi_i = (x_i - b_i)$, $\xi_j = (x_j - b_j)$. Siły działające na komórkę spełniają równania równowagi (2.54), które wyrażone względem wektorowych współczynników $n q_i, n q_{ij}, n m_i, n m_{ij}$ przybierają postać (2.58).

Na podstawie równości energii odkształceń sprężystych komórki i pracy statycznej sił na przemieszczeniach w punktach ich przyłożenia, zachodzącej w procesie deformacji w stanach równowagi, wyprowadzono związki statyczne (2.66), (2.69) napięć powierzchniowych i naprężeń komórki n . Po uwzględnieniu wyrażen (2.43) na wektorowe współczynniki $n \sigma_{ij}, n \sigma_{kij}, n \sigma_{(k)ij}$ oraz po dokonaniu szeregu przekształceń, wyprowadzono związki fizyczne komórki n kolejno w postaciach (2.74), (2.81), (2.84) oraz (2.82), (2.108).

Związki te wyrażają wzajemne zależności wektorów $n q_i, n q_{ij}, n m_i, n m_{ij}$, określających zgodnie z przyjętymi założeniami, napięcia powierzchniowe $n p_i$ ścian komórki n oraz wektorów $n v_i, n v_{ij}, n q_i, n q_{ij}$ zmiennych kinematycznych deformacji w stanach równowagi. Określono również zależności (2.109) zachodzące pomiędzy współczynnikami sprężystości: $n A_{ijkl}, n B_{ijkl}, n C_{ijkl}, n D_{ijkl}, n A_{ijkj}, n C_{ijj, kkl}, n D_{ijj, kkl}$ oraz współczynnikami podatności: $n a_{ijkl}, n b_{ijkl}, n c_{ijkl}, n a_{ijj, kkl}, n d_{ijj, kkl}, n c_{ijj, kkl}$ związków fizycznych.

W zakończeniu rozdziału wprowadzono wzory (2.111) wyrażające wektorowe współczynniki $n \sigma_i, n \sigma_{kij}, n \sigma_{(k)ij}$ pól naprężeń $n \sigma_i$ komórki n przez wektorowe współczynniki $n q_i, n q_{ij}, n m_i, n m_{ij}$ napięć powierzchniowych $n p_i$ ścian komórki.

Rozdział trzeci dotyczy wielokomórkowych prostopadłościennych elementów makroskopowych. Na początku zdefiniowano za pomocą wzorów (3.3-3.4) pola powierzchniowych napięć siłowych q_{ij} i momentowych m_{ij} oraz pola uogólnionych przemieszczeń v_i komórek n elementu makroskopowego. Sformułowano i okre-

ślono za pomocą wzorów (3.3-3.12) pola powierzchniowych oddziaływań zewnętrznych $\vec{P}_i^{(e)}$, $\vec{P}_i^{(e)}$ na ścianach o równaniach $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ ($i=1,2,3$) elementu makroskopowego i tworzących wraz z siłami masowymi \vec{f} samozrównoważony układ sił spełniających równania równowagi (3.13-3.16). W przypadku elementów makroskopowych poddanych działaniu zewnętrznych oddziaływań kinematycznych określono postacie pól $\vec{u}_i^{(e)}$, $\vec{u}_i^{(e)}$ ($i=1,2,3$) wymuszonych przemieszczeń ścian $\vec{x}_i = 0$, $\vec{x}_i = a_i$ za pomocą wzorów (3.17-3.19). Następnie w oparciu o równania (3.32), (3.35) równych wartości energii odkształceń i pracy statycznej sił w stanach równowagi, w elementach makroskopowych odpowiednio swobodnych od zewnętrznych więzów kinematycznych oraz w elementach których ściany doznają wymuszonych przemieszczeń, określono obszarowe i brzegowe warunki ciągłości napięć i przemieszczeń komórek π . Obszarowe warunki ciągłości napięć powierzchniowych q_i , m_i ($i=1,2,3$) ścian komórek π wyrażono za pomocą wzorów (3.42). Natomiast obszarowe warunki ciągłości uogólnionych przemieszczeń \vec{v}_i , \vec{q}_i ($i=1,2,3$) komórek π wyrażono za pomocą wzorów (3.45), gdy makroelement nie zawiera komórek będących pustkami. W przypadku struktur wewnętrznych zawierających skończoną liczbę komórek - pustek, rozmieszczonych w obszarze ustroju zgodnie z przyjętymi założeniami, warunki ciągłości opisano za pomocą wzorów (3.46). Brzegowe warunki ciągłości napięć elementów makroskopowych swobodnych od zewnętrznych więzów kinematycznych oraz brzegowe warunki ciągłości uogólnionych przemieszczeń ścian elementów makroskopowych doznających wymuszonych przemieszczeń opisano odpowiednio za pomocą wzorów (3.52), (3.58). Rozpatrzono również brzegowe warunki ciągłości napięć w tzw. "osłabionej" postaci (3.54), uzyskanej wskutek przyjęcia dodatkowych upraszczających założeń (3.53) odnośnie wektorów $n_i \vec{v}_i$, $n_i \vec{q}_i$ we wzorach (3.45) lub (3.46) na wektorowe współczynniki $n_i \vec{v}_i$, $n_i \vec{q}_i$ uogólnionych przemieszczeń \vec{v}_i , \vec{q}_i .

W rozdziale czwartym wykorzystując uprzednio sformułowane pojęcia oraz wyprowadzone zależności i wzory przedstawiono komplety równań wektorowych zagadnień elastostatyki prostopadłościennych elementów makroskopowych o dowolnych strukturach wewnętrznych. Równania te przedstawiono w dwóch odmianach: jako układ równań (4.2-4.5) opisujących stany deformacji oraz jako układ równań (4.6-4.10) opisujących stany napięć komórek elementów makroskopowych. Równania (4.2-4.5) są równaniami wektorowymi względem składowych wektorów $n_i \vec{v}_i$, $n_i \vec{q}_i$ ($i=1,2,3$) komórek $\pi = \sum_{i=1}^N n_i \cdot i$ nie będących pustkami ξ ($p=1, \dots, P$) tj. przy $n_i = 1, \dots, N$, $n_i = \sum_{i=1}^N n_i$ oraz względem wektorów $n_i \vec{v}_i$, $n_i \vec{q}_i$ przy $n_i = 1, \dots, N$, $n_i = \sum_{i=1}^N n_i$, $n_i \neq S_i$ i wektorów $s_i \vec{v}_i^{(e)}$, $s_i \vec{q}_i^{(e)}$ przy $s_i = S_i$ w elementach makroskopowych z wewnętrznymi pustkami komórkowymi ξ ($p=1, \dots, P$). Natomiast równania (4.6-4.10) są obszarowymi równaniami wektorowymi względem składowych wektorów $n_i \vec{v}_i$, $n_i \vec{q}_i$, $n_i m_i$, $n_i m_i$ komórek $\pi = \sum_{i=1}^N n_i$ przy $n_i = 1, \dots, N$.

W rozdziale poza tym rozpatrzono szczegółowo warunki brzegowe wyrażając je w postaci równań (4.11) względem składowych wektorów $n_i \vec{v}_i$, $n_i \vec{q}_i$. Następnie przedstawiono te równania w postaci (4.16) odpowiadającej "osłabionym" brzegowym warunkom ciągłości napięć w konsekwencji przyjęcia założeń upraszczających (3.53) odnośnie wektorów $n_i \vec{v}_i$, $n_i \vec{q}_i$. Rozwiązania tych ostatnich równań przedstawiono w postaci (4.23).

Przedstawione równania stanowią mogą podstawę formułowania oraz rozwiązywania zagadnień szczegółowych analizy statycznej różnych przypadków szczególnych rozpatrywanych ustrojów o określonych geometryczno- materiałowych charakterystykach struktur wewnętrznych poddanych danym zewnętrznym oddziaływaniom statycznym, kinematycznym lub statyczno- kinematycznym.

Następnie przedstawiono algorytm iteracyjnego wyznaczania stanów naprężeń n_{σ_i} i odkształceń n_{ϵ_i} w k-tym stopniu aproksymacji w otoczeniach środków ciężkości komórek elementu makroskopowego o dowolnych jednorodnych strukturach wewnętrznych. Wyprowadzone wzory (4.24-4.34, 4.40-4.44) tego algorytmu umożliwiają w sposób rekurencyjny wyznaczanie stanów naprężeń w k-tym stopniu przybliżenia wywołanych w komórkach elementu makroskopowego działaniem danych sił masowych i powierzchniowych tworzących samorzównoważony układ sił.

Sposób korzystania z algorytmu zilustrowano przykładem wyznaczania stanów naprężeń w komórkach elementu makroskopowego o dowolnych strukturalnych niejednorodnościach poddanego działaniu ciśnienia hydrostatycznego, ograniczając się przy tym do pierwszego przybliżenia.

W końcowym piątym rozdziale pracy rozpatrzono prostopadłościennie ustroje złożone z dużej liczby powtarzalnych strukturalnych elementów makroskopowych rozmieszczonych szeregowo w jednym, w dwóch lub w trzech kierunkach tworząc odpowiednio trzy odmiany ustrojów kompozytowych.

Na podstawie warunków (5.12) równości energii odkształceń i pracy statycznej obciążających działających na rozpatrywane ustroje, wprowadzono obszarowe warunki ciągłości (5.18) napięć $n_i \sigma_i$, $n_i \tau_i$ oraz uogólnionych przemieszczeń $n_i v_i$, $n_i \phi_i$ ścian powtarzalnych elementów makroskopowych. Stanowią one wraz z brzegowymi warunkami ciągłości napięć $n_i \sigma_i$, $n_i \tau_i$ ścian zewnętrznych skrajnych elementów podstawę formułowania dyskretno- kontynualnych teorii prostopadłościennych ustrojów kompozytowych belkowych, płytowych lub o postaciach brył, charakteryzujących się istnieniem powtarzalnego elementu makroskopowego o złożonych wewnętrznych strukturach geometryczno- materiałowych.

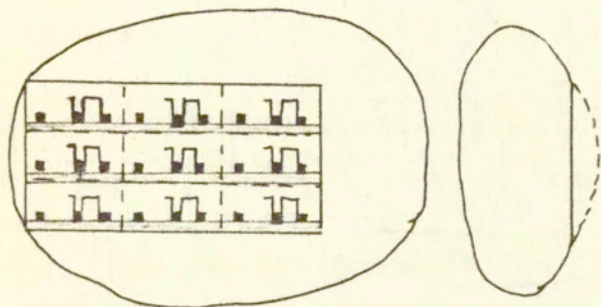
Przyjmując dodatkowo założenia (5.20) odnośnie uogólnionych przemieszczeń $n_i v_i$, $n_i \phi_i$ przedstawiono również obszarowe i brzegowe warunki ciągłości w tzw. "osłabionej" postaci (5.22- (5.23)).

Rozdział I

WSTĘP

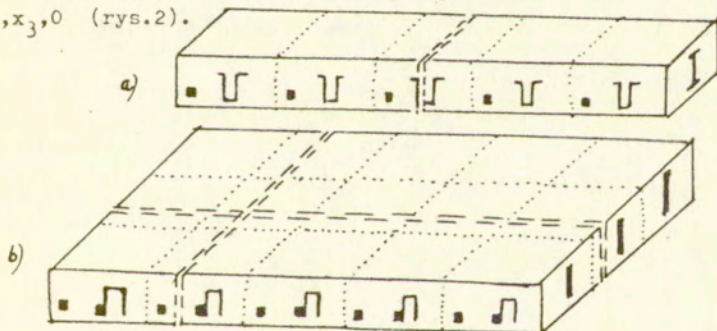
1.1. Przedmiot i cel pracy

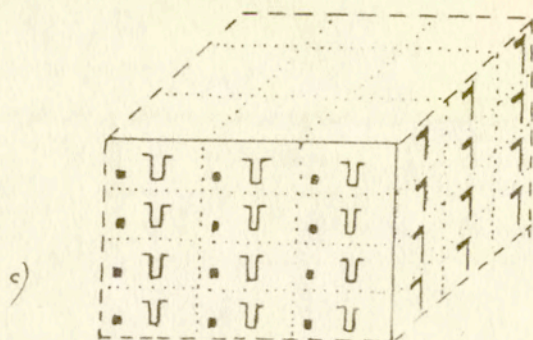
Przedmiotem rozważań pracy są nośne ośrodki i konstrukcje wyróżniające się istnieniem powtarzalnego, charakterystycznego pod względem wieloskładnikowej wewnętrznej struktury geometrycznej i materiałowej, prostopadłościennego makroskopowego elementu (ME), (rys.1).



Rys.1. Wycinek ośrodka lub konstrukcji z przekrojem uzewnętrzniającym z widoku strukturę wewnętrzną

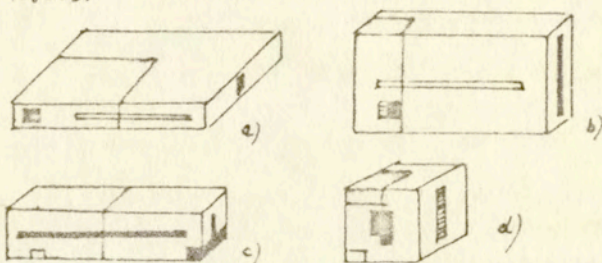
Rozpatrywane ustroje mogą być złożone z dowolnie dużej liczby ME rozmieszczonych szeregowo w jednym, dwóch lub w trzech kierunkach równoległych do osi prostokątnego układu odniesienia $x_1, x_2, x_3, 0$ (rys.2).





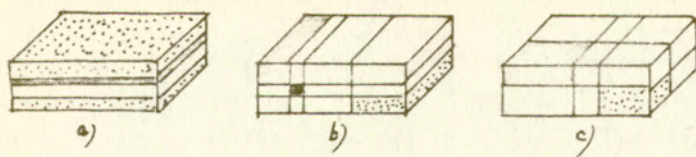
Rys.2. Odmiiany ustrojów kompozytowych : a) makroskopowo liniowych, b) płaskich, c) przestrzennych

Pojedyncze elementy makroskopowe stanowią również sumo-
 istne przestrzenne strukturalnie niejednorodne ustroje o posta-
 ciach "grubych" płyt lub przegród, belek oraz brył prostopadło-
 ściennych (rys.3)



Rys.3. Odmiiany ustrojów o postaciach pojedynczego strukturalne-
 go elementu makroskopowego : a) płyta, b) przegroda,
 c) belka, d) prostopadłościenna bryła przestrzenna

W najogólniejszym przypadku strukturę wewnętrzną EN tworzą
 układy prostopadłościennych komórek z różnych materiałów izotro-
 powych. Mogą to być układy komórek jedno-, dwu- lub trójzerego-
 we o różnym stopniu złożoności (rys.4).

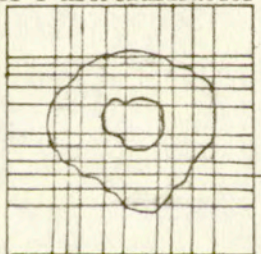


Rys.4. Układy struktur komórkowych EM : a) warstwowy; b) szeregow dwukierunkowych ; c) szeregow trójkierunkowych

Układy najprostsze jednoszeregowy (rys.4a) tworzą struktury warstwowe. Mogą one być złożone z dowolnej liczby warstw o różnej grubości i z różnych materiałów.

Układy złożone z dwukierunkowych szeregów komórek (rys.4b) powstają wskutek podziału obszaru EM przecięciami wzajemnie ortogonalnych płaszczyzn równoległych. Opisują płaskie struktury leżące w płaszczyznach przekrojowych normalnych do płaszczyzn podziału obszaru EM.

Podział obszaru EM , powstający w wyniku "zanurzenia" prostokątnej i prostoliniowej nieregularnej siatki przestrzennej utworzonej przez trzy rodziny linii prostych równoległych do osi układu odniesienia $x_1, x_2, x_3, 0$, daje układ trójkierunkowych szeregów komórek (rys.4c). Za pomocą tego układu mogą być opisywane dowolne geometryczno-materiałowe przestrzenne struktury wewnętrzne o ile rzeczywiste ich postaci dają się aproksymować poprzez wpisanie w przestrzenną prostoliniową i prostokątną siatkę o odpowiednio dostosowanej gęstości i nieregularności wymiarów oczek (rys.5).



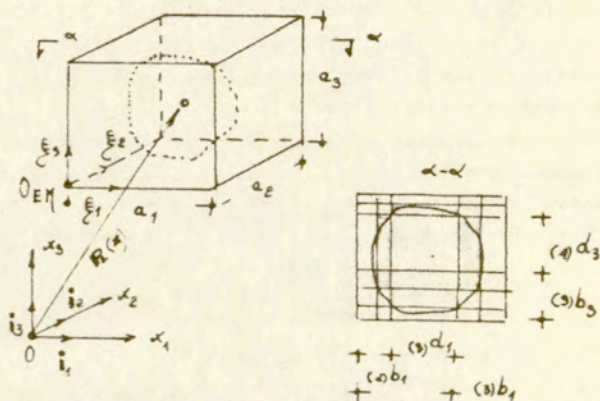
Rys.5. Sposób aproksymacji postaci struktur wewnętrznych EM

Celem pracy jest sformułowanie pojęć oraz wyprowadzenie podstawowych zależności i równań umożliwiającą analizę statyczną w założeniach liniowej teorii sprężystości ustrojów o dowolnych strukturalnych niejednorodnościach, materiałowych i geometrycznych strukturach wewnętrznych zawierających pustki, pęknięcia lub różne materiałowe inkluzje.

Przedstawiona metoda analizy umożliwia bezpośrednio konstruowanie programów numerycznych na minikomputery m.in. w celu określenia dystrybucji naprężeń i odkształceń w mikroelementach struktur wewnętrznych osrodków kompozytowych lub konstrukcji zespolonych.

1.2. Opis i parametryzacja interstruktury makroelementu

Rozpatrzmy element makroskopowy (EM) o wymiarach a_i ($i=1,2,3$), którego położenie w osrodku lub w ustroju kompozytowym względem początku O układu odniesienia x_1, x_2, x_3, O o wersorach i_1, i_2, i_3 określa wektor wodzący $R(x) = \sum x_i i_i$ geometrycznego środka ciężkości prostopadłościanu. (rys.6).



Rys.6. Schemat elementu makroskopowego. Globalny i lokalny układ odniesienia.

Strukturalny obszar prostopadłościennego EM parametryzujemy za pomocą lokalnego prostokątnego układu odniesienia ξ_1, ξ_2, ξ_3 , O_{EM} współrzędnych ξ_i ($i=1,2,3$) osi i_i , zaczepionego w narożniku O_{EM}

o wektorze wodzącym $R^{-1} \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{i}_i$. W ten sposób położenie dowolnego punktu o współrzędnych ξ_i ($i=1,2,3$) oraz usytuowanie środka ciężkości względem naroża O_{EM} opisują odpowiednio wektory wodzące $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{i}_i$, $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 \xi_i \mathbf{i}_i$.

Postać wewnętrznej struktury geometryczno-materiałowej EM wpisujemy w ortogonalną i nieregularną siatkę przestrzenną utworzoną przez trzy rodziny linii o kierunkach równoległych do wersorów \mathbf{i}_i ($i=1,2,3$). W ten sposób oczka odpowiednio zagęszczonej nieregularnej siatki przestrzennej stanowią materialne komórki będące fizycznie jednorodnymi prostopadłościennymi mikroelementami struktury EM .

Płaszczyzny, których linie przecięć wyznaczają siatkę przestrzenną, opisują równania

$$(1.1) \quad \xi_i = (\eta_i) b_i \quad i=1,2,3;$$

przy wskaźnikach $\eta_i = 1, \dots, N_{i-1}$ przybierających wartości liczb naturalnych. Liczby N_i wskazujące gęstości podziału obszaru EM zależą od rodzaju struktury wewnętrznej oraz od stopnia aproksymacji jej kształtu przez zbiory prostopadłościennych komórek. Krawędzie komórek równoległe odpowiednio do wersorów \mathbf{i}_i mają wymiary

$$(1.2) \quad (\eta_i) d_i = (\eta_i) b_i - (\eta_i - 1) b_i \quad \eta_i = 1, \dots, N_i,$$

których suma $\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) d_i = a_i$ przy $(0) b_i = 0$, $(N_i) b_i = a_i$.

Poszczególne komórki, których całkowita liczba w EM wynosi $N = \prod_{i=1}^3 N_i$ identyfikujemy za pomocą wektorowych numeratorów (etykięt) $\mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 \eta_i \mathbf{i}_i$ o składowych $\eta_i = 1, \dots, N_i$ ($i=1,2,3$)

wzrastających od 1 do N_i zgodnie ze wzrotem wersora \mathbf{i}_i . Składowe $\eta_i = 1, \dots, N_i$ oznaczają warstwy o normalnych \mathbf{i}_i i grubościach $(\eta_i) d_i$ dzielące obszar EM na komórki \mathbf{n} .

Położenie dowolnej komórki \mathbf{n} w EM względem O_{EM} określać będziemy za pomocą wektora wodzącego $\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 (\eta_i) C_i \mathbf{i}_i$ geometrycznego

środku ciężkości o współrzędnych ${}_{(n_i)}C_i$ ($i=1,2,3$). Pomiędzy wielkościami ${}_{(n_i)}d_i$, ${}_{(n_i)}b_i$, ${}_{(n_i)}C_i$ zachodzą zależności geometryczne

$$(1.3) \quad {}_{(n_i)}b_i = {}_{(n_i)}C_i + {}_{(n_i)}d_i/2 = {}_{(n_i+1)}C_i - {}_{(n_i+1)}d_i/2,$$

przy $n_i = 1, \dots, N_{i-1}$.

Przechodząc do opisu interstruktury EM zdefiniujemy w pierw funkcję obszarową dowolnej komórki n .

Zważywszy, że komórka n zajmuje część obszaru EM ograniczoną przedziałami zmienności współrzędnych ξ_i ($i=1,2,3$) jej punktów, tj.

$${}_{(n_i-1)}b_i \leq \xi_i \leq {}_{(n_i)}b_i \quad n_i = 1, \dots, N_i;$$

definiujemy za pomocą funkcji Heaviside'a

$$H(\xi_i - {}_{(n_i)}b_i) = \begin{cases} 0 & \text{przy } \xi_i < {}_{(n_i)}b_i \\ 1 & \text{przy } \xi_i > {}_{(n_i)}b_i \end{cases}$$

następujące funkcje przedziałów zmienności

$${}_{(1)}\Omega_i(\xi_i) = 1 - H(\xi_i - {}_{(1)}b_i);$$

$${}_{(n_i)}\Omega_i(\xi_i) = H(\xi_i - {}_{(n_i-1)}b_i) - H(\xi_i - {}_{(n_i)}b_i), \quad n_i = 2, \dots, N_{i-1};$$

$${}_{(N_i)}\Omega_i(\xi_i) = H(\xi_i - a_i);$$

spełniające równości $\sum_{n_i=1}^{N_i} {}_{(n_i)}\Omega_i(\xi_i) = 1$ w przedziałach $(0, a_i)$.

Na tej podstawie funkcję obszarową $n\Omega(\xi)$ komórki n określamy w postaci

$$(1.4) \quad n\Omega(\xi) = \prod_{i=1}^3 {}_{(n_i)}\Omega_i(\xi_i).$$

W przypadku ogólnym, gdy komórki n są z materiałów o różnych charakterystykach mechanicznych w zakresie sprężystym, tj. stałych: module Younga nE , liczbie Poissona $n\nu$ lub związanym z nimi tzw. module ścinania $nG = nE/2(1+n\nu)$, pola

strukturalnych niejednorodności $E(\xi; x)$, $v(\xi; x)$ tworzące interstrukturę EM mają postać

$$(1.5) \quad E(\xi; x) = \sum_n n \Omega(\xi) n E(x), \\ v(\xi; x) = \sum_n n \Omega(\xi) n v(x),$$

przy następującym znaczeniu symbolu potrójnego sumowania

$$\sum_n (\cdot) = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_3=1}^{N_3} (\cdot).$$

Jeżeli EM ma strukturę wewnętrzną płaską np. w płaszczyźnie o normalnej i_i , wówczas stałe sprężystości komórek $n E = n_i E$, $n v = n_i v$ nie są zależne od składowej $n_i = n \cdot i_i$ numeratora n . Wprowadzając funkcję obszarową

$$(1.6) \quad n_i \Omega_i^* = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 g_{ijk} (n_j) \Omega_j (n_k) \Omega_k = \prod_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) \Omega_k$$

przy następujących znaczeniach symboli

$$(1.7) \quad g_{ijk} = (1 - \delta_{ij})(1 - \delta_{ik})(1 - \delta_{jk}) \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

wyrażonych przez delty δ_{ij} Kroneckera i spełniających równości

$$\sum_{i=1}^3 g_{ijk} = 1 - \delta_{jk}, \quad \sum_{j,k=1}^3 g_{ijk} = \sum_{i,j,k=1}^3 g_{ijk} = \sum_{i,j=1}^3 g_{ijk} = 2,$$

opisujemy pola strukturalnych niejednorodności EM za pomocą wzorów

$$(1.8) \quad E = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i E,$$

$$v = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i v.$$

Symbol \sum_{n_i} oznacza w tym przypadku podwójne sumowanie zgodnie z formułą

$$(1.9) \quad \sum_{n_i} (\cdot) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 g_{ijk} \sum_{n_j=1}^{N_j} \sum_{n_k=1}^{N_k} (\cdot)$$

W przypadku struktury warstwowej EM, złożonej z pojedynczego szeregu komórek w kierunku osi \hat{i}_i , stałe sprężystości ${}_{\mathfrak{n}}E = ({}_{\mathfrak{n}_i})E$, ${}_{\mathfrak{n}}\nu = \nu_{\mathfrak{n}_i}$ są jedynie zależne od składowych $\mathfrak{n}_i = 1, \dots, N_i$.

Wyrażenia na pola warstwowych niejednorodności EM przybierają w tym przypadku postać

$$(1.10) \quad E = \sum_{\mathfrak{n}_i=1}^{N_i} ({}_{\mathfrak{n}_i}) \Omega_i ({}_{\mathfrak{n}_i}) E, \\ \nu = \sum_{\mathfrak{n}_i=1}^{N_i} ({}_{\mathfrak{n}_i}) \Omega_i ({}_{\mathfrak{n}_i}) \nu.$$

Wymiary $({}_{\mathfrak{n}_i}) \Omega_i$ oraz stałe ${}_{\mathfrak{n}}E$, ${}_{\mathfrak{n}}\nu$ teorii sprężystości określone dla dowolnego $\mathfrak{n} = \sum_{i=1}^3 \mathfrak{n}_i \hat{i}_i$, ($\mathfrak{n}_i = 1, \dots, N_i$; $i=1, 2, 3$) stanowią komplet materiałowo-geometrycznych charakterystyk struktur wewnętrznych EM zagadnień elastostatyki.

1.3. Określenia i założenia kinematyczne deformacji

Rozpatrywane ośrodki lub konstrukcje nośne są w stanie infinitesimalnej deformacji wywołanej działaniem przyczyn pochodzenia mechanicznego. Punkty $\xi = (\xi_i)$, ($i=1, 2, 3$) dowolnego elementu makroskopowego o środku ciężkości $\mathbf{x} = (x_i)$, ($i=1, 2, 3$) doznają infinitesimalnych przemieszczeń

$$(1.11) \quad \hat{u}(\xi; \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times (\boldsymbol{\tau} - \hat{\boldsymbol{\tau}}) + \hat{\mathbf{w}}(\xi; \mathbf{x})$$

będących sumą: przesunięć $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ makroelementu jako bryły sztywnej, przesunięć $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times (\boldsymbol{\tau} - \hat{\boldsymbol{\tau}})$ punktów ξ względem geometrycznego środka ciężkości makroelementu spowodowanych sztywnym obrotem EM $\boldsymbol{\omega}$ oraz przemieszczeń $\hat{\mathbf{w}}$ punktów ξ wywołanych czystą deformacją.

Wykorzystując zdefiniowane wzorem (1.4) pojęcie funkcji obszarowej komórki \mathfrak{n} oraz oznaczając przez ${}_{\mathfrak{n}}\hat{u}(\xi; \mathbf{x})$, ${}_{\mathfrak{n}}\hat{\mathbf{w}}(\xi; \mathbf{x})$ pola przemieszczeń przynależne komórkom \mathfrak{n} makroelementu mamy też

$$(1.12) \quad \hat{u} = \sum_{\mathfrak{n}} \mathfrak{n} \Omega_{\mathfrak{n}} \hat{u}_{\mathfrak{n}},$$

$$\hat{u} = u(x) + \omega(x) \times (\tau - \tau^0) + \hat{w}(\xi; x).$$

Pola przemieszczeń \hat{u} określone za pomocą tego wzoru aproksymujemy zastępując funkcje wektorowe \hat{w} ich rozwinięciami w szereg potęgowy Taylora w otoczeniu środków ciężkości komórek π . Ograniczając się przy tym do wyrażeń wielomianowych trzeciego stopnia względem współrzędnych $(\pi_i) \xi_i = \xi_i - (\pi_i) C_i$, $(i=1,2,3)$ mamy:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \pi \hat{w} = & [\pi \hat{w}]_{\tau = \pi \tau} + \sum_{j=1}^3 [\pi \hat{w}, j]_{\tau = \pi \tau} (\pi_j) \xi_j + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 [\pi \hat{w}, jk]_{\tau = \pi \tau} (\pi_j) \xi_j (\pi_k) \xi_k + \\ & + \frac{1}{6} \sum_{j,k,l=1}^3 [\pi \hat{w}, jkl]_{\tau = \pi \tau} (\pi_j) \xi_j (\pi_k) \xi_k (\pi_l) \xi_l + \dots \end{aligned}$$

Zastosowano tu oznaczenia $(\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\cdot)$ na pochodną cząstkową dowolnej funkcji względem zmiennej ξ_i .

Wprowadzenie do wyrażenia (1.13) następujących nowych oznaczeń na wektorowe współczynniki szeregu potęgowego

$$[\pi \hat{w}]_{\tau = \pi \tau} = \pi w,$$

$$[\pi \hat{w}, j]_{\tau = \pi \tau} = \pi e_j,$$

$$[\pi \hat{w}, jk]_{\tau = \pi \tau} = \pi h_{jk} = \pi h_{kj} = \pi h_{(jk)},$$

$$[\pi \hat{w}, jkl]_{\tau = \pi \tau} = \delta_{jk} \pi k_{lk} + \delta_{kj} \pi k_{jl} + \delta_{kl} \pi k_{kj} + \delta_{jkl} \pi k$$

daje

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \pi \hat{w} = & \pi w + \sum_{j=1}^3 \pi e_j (\pi_j) \xi_j + \sum_{j,k=1}^3 \pi h_{(jk)} (\pi_j) \xi_j (\pi_k) \xi_k + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \pi k_{jk} (\pi_j) \xi_j^2 (\pi_k) \xi_k + \frac{1}{6} \pi k \sum_{j,k,l=1}^3 \delta_{jkl} (\pi_j) \xi_j (\pi_k) \xi_k (\pi_l) \xi_l. \end{aligned}$$

Liczbę dwudziestu wektorowych współczynników: πw , πe_i , $\pi h_{(ij)}$, πk_{ij} , πk , $(i, j=1,2,3)$ wielomianowej funkcji (1.14) opisującej pola przemieszczeń punktów komórki π zredukujemy do trzydziestu rozpatrując stany przemieszczeń charakteryzujące się zanikiem wektorowych współczynników πk oraz ograniczoną do trzech

liczbą wektorowych współczynników ${}_n k_{i,k}$ przyjmując

$$(1.15) \quad {}_n k = 0, \quad {}_n k_{i,k} = (1 - \delta_{ik}) ({}_n k_i \times i_k) \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Założenia (1.15) mają znaczenie kinematycznych więzów deformacji komórek π w konsekwencji których pola wektorowe (1.14) przenieszczeń $\hat{\pi} \mathbf{w}$ przybierają postać

$$(1.16) \quad \hat{\pi} \mathbf{w} = {}_n \mathbf{w} + \sum_{j=1}^3 {}_n e_j ({}_{(n_j)} \xi_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 {}_n h_{(j,k)} ({}_{(n_j)} \xi_j) ({}_{(n_k)} \xi_k) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 (1 - \delta_{jk}) ({}_n k_j \times i_k) ({}_{(n_j)} \xi_j) ({}_{(n_k)} \xi_k)$$

i są określone z dowolnością do trzynastu wektorowych współczynników

$$(1.17) \quad {}_n \mathbf{w}, \quad {}_n e_i, \quad {}_n h_{(i,j)}, \quad {}_n k_i \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Rozdział II

KOMÓRKI-PODSTAWOWE MIKROELEMENTY STRUKTUR
WEWNĘTRZNYCH2.1. Uogólnione przemieszczenia przekrojowe. Zmienne kinematyczne deformacji

W oparciu o wyrażenia (1.16) sformułujemy pojęcia uogólnionych przemieszczeń przekrojowych komórek n w stanach deformacji. Definiujemy je jako jednowymiarowe pola "uśrednionych" przesunięć $n \hat{v}_i = n \hat{v}_i(\xi_i, x)$ i pochyłeń $n \hat{g}_{ik} = n \hat{g}_{ik}(\xi_i, x)$ przekrojów $\xi_i = \text{const}$ w następujący sposób:

$$(2.1) \quad n \hat{v}_i = \frac{1}{n_i S_i} \int_{n_i S_i} n \hat{w} dS_i,$$

$$n \hat{g}_{ik} = \frac{12}{(n_k) d_k^2 n_i S_i} \int_{n_i S_i} n \hat{w} (n_k) \xi_k dS_i$$

przy oznaczeniach

$$n_i S_i = (n_k) d_k (n_j) d_j, \quad dS_i = d\xi_j d\xi_k \quad i, j, k=1, 2, 3; i \neq j \neq k.$$

Podstawiając zatem (1.16) pod znaki całek wzorów (2.1) znajdujemy po wykonaniu całkowań wyrażenia na uogólnione przemieszczenia przekrojowe komórek n o następujących postaciach

$$(2.2) \quad n \hat{v}_i = n w + \sum_{k=1}^3 n h_{kk} (n_k) d_k^2 / 24 + n h_{ii} (n_i) d_i^2 / 12 +$$

$$+ \left[n e_i + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n k_k \times i_i) (n_k) d_k^2 / 24 \right] (n_i) \xi_i + \frac{1}{2} n h_{ii} (n_i) \xi_i^2 -$$

$$- (n_i) d_i^2 / 4,$$

$$n \hat{g}_{ik} = n e_k + \sum_{l=1}^3 (1 - \delta_{kl}) (n k_l \times i_k) (n_l) d_l^2 / 24 + (n k_i \times i_k) (n_i) d_i^2 / 12 +$$

$$+ n h_{(ik)} (n_i) \xi_i + \frac{1}{2} (n k_i \times i_k) (n_i) \xi_i^2 - (n_i) d_i^2 / 4.$$

Określimy wartości średnich arytmetycznych wektorowych sum

$$(2.3) \quad (n_i) \sum_i [\cdot] = [\cdot]_{\xi_i = (n_i) b_i} + [\cdot]_{\xi_i = (n_i - 1) b_i}$$

oraz odniesione do jednostki długości $(n_i) d_i$; boków różnice

$$(2.4) \quad (n_i) \Delta_i [\cdot] = [\cdot]_{\xi_i = (n_i) b_i} - [\cdot]_{\xi_i = (n_i - 1) b_i}$$

uogólnionych przemieszczeń $n \hat{v}_i$, $n \hat{g}_{ik}$ przeciwległych ścian $\xi_i = (n_i) b_i$, $\xi_i = (n_i - 1) b_i$ komórki n wprowadzając przy tym następujące oznaczenia

$$(2.5) \quad n v_i = \frac{1}{2} (n_i) \sum_i [n \hat{v}_i],$$

$$n v_{ii} = 1/(n_i) d_i (n_i) \Delta_i [n \hat{v}_i],$$

$$n g_{ik} = \frac{1}{2} (n_i) \sum_i [n \hat{g}_{ik}],$$

$$n g_{ikl} = 1/(n_i) d_i (n_i) \Delta_i [n \hat{g}_{ik}], \quad i, k=1, 2, 3; i \neq k.$$

Podstawiając do powyższych wzorów odpowiednio wyrażenia (2.2) mamy następujące zależności geometryczne

$$(2.6) \quad n v_i = n w + n h_{ii} (n_i) d_i^2 / 12 + \sum_{L=1}^3 n h_{LL} (n_L) d_L^2 / 24,$$

$$n g_{ik} = n e_k + (n k_i \times i_k) (n_i) d_i^2 / 12 + \sum_{L=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n k_L \times i_k) (n_L) d_L^2 / 24,$$

$$n v_{ii} = n e_i + \sum_{L=1}^3 (1 - \delta_{iL}) (n k_L \times i_i) (n_L) d_L^2 / 24,$$

$$n g_{ikl} = n h_{(ik)}, \quad i, k=1, 2, 3; i \neq k$$

zachodzące pomiędzy wektorami $n v_i$, $n g_{ik}$, $n v_{ii}$, $n g_{ikl}$ a wektorowymi współczynnikami $n w$, $n e_i$, $n h_{(ij)}$, $n k_i$ pól deformacji $n \hat{e}_i$.

Uwzględniając związki (2.6) wyrażamy wzory (2.2) w następującej równoważnej postaci

$$(2.7) \quad n\hat{v}_i = n\mathbf{v}_i + n\mathbf{v}_{ii} (c_i) \xi_i + \frac{1}{2} n\mathbf{h}_{ii} (c_i) \xi_i^e - (c_i) d_i^e/4,$$

$$n\hat{\mathcal{G}}_{ik} = n\mathcal{G}_{ik} + n\mathcal{G}_{ikv} (c_i) \xi_i + \frac{1}{2} (n\mathbf{k}_i \times \mathbf{i}_k) (c_i) \xi_i^e - (c_i) d_i^e/4.$$

W dalszym ciągu rozważań ograniczymy liczbę wektorów $n\mathcal{G}_{ik}$ z sześciu do trzech wektorów niezależnych przyjmując dodatkowe założenia. W tym celu wprowadzamy nowe wektory $n\mathcal{G}_i$ ($i=1,2,3$) zakładając przy tym ich związek z wektorami $n\mathcal{G}_{ik}$ ($i,k=1,2,3; i \neq k$) wyrażony poprzez następujące zależności

$$(2.8) \quad n\mathcal{G}_i = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\mathbf{i}_k \times n\mathcal{G}_{ik}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k,l=1}^3 (\mathcal{G}_{ikl} - \epsilon_{ikl}) (n\mathcal{G}_{ik} \cdot \mathbf{i}_l) \right] \mathbf{i}_i \quad i=1,2,3.$$

Zamieniając miejscami wskaźniki i oraz k we wzorze (2.6)₃ a następnie otrzymane w ten sposób równanie odejmując stronami od równania określonego wzorem (2.6)₂ otrzymamy zależności

$$(2.9) \quad n\mathcal{G}_{ik} = (1 - \delta_{ik}) \left[n\mathbf{v}_{kk} + (n\mathbf{k}_i \times \mathbf{i}_k) (c_i) d_i^e/12 \right]$$

podstawienie których do (2.8) daje

$$(2.10) \quad n\mathcal{G}_i = n\mathbf{k}_i (c_i) d_i^e/12 + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\mathbf{i}_k \times n\mathbf{v}_{kk}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k,l=1}^3 (\mathcal{G}_{ikl} - \epsilon_{ikl}) (n\mathbf{v}_{kk} \cdot \mathbf{i}_l) \right] \mathbf{i}_i \quad i=1,2,3.$$

Stąd, po wyeliminowaniu ze wzorów (2.9) wektorów $n\mathbf{k}_i$ za pomocą wzorów (2.10), mamy

$$(2.11) \quad n\mathcal{G}_{ik} = n\mathcal{G}_i \times \mathbf{i}_k + (n\mathbf{v}_{kk} \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_k + \frac{1}{2} \sum_{l,m,p=1}^3 (\mathcal{G}_{ikl} - \epsilon_{ikl}) (\delta_{lm} \delta_{kp} + \delta_{km} \delta_{lp}) (n\mathbf{v}_{mm} \cdot \mathbf{i}_p) \mathbf{i}_l \quad i,k=1,2,3; i \neq k.$$

Następnie mając na uwadze wektory $n\mathbf{h}_{(ik)}$ tworzące układ symetry-

ocny względem wskaźników i, k tj. ${}^n h_{ki} = {}^n h_{ik}$ dochodzimy na podstawie (2.6) do równości wektorów ${}^n \mathcal{G}_{iki} = {}^n \mathcal{G}_{kik}$. Zatem sześć wektorów, określonych przy $i \neq k$, ($i, k=1, 2, 3$) możemy wyrazić przez trzy jednowskaźnikowe wektory ${}^n \mathcal{G}_{ii}$ przyjmując zależności

$$(2.12) \quad {}^n \mathcal{G}_{ii} = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (i_k \times {}^n \mathcal{G}_{iki}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k, l=1}^3 (\mathcal{G}_{ikl} - \epsilon_{ikl}) ({}^n \mathcal{G}_{ikl} \cdot i_l) \right] i_i$$

Traktując (2.12) jako układ równań względem wektorów ${}^n \mathcal{G}_{i, k} = {}^n \mathcal{G}_{kik}$ znajdujemy po jego rozwiązaniu związki wzajemne względem (2.12) w postaci

$$(2.13) \quad {}^n \mathcal{G}_{iki} = \left[{}^n \mathcal{G}_{ii} - \frac{1}{2} ({}^n \mathcal{G}_{ii} \cdot i_i) i_i \right] \times i_k + \\ + \left[{}^n \mathcal{G}_{kk} - \frac{1}{2} ({}^n \mathcal{G}_{kk} \cdot i_k) i_k \right] \times i_l + \\ + \frac{1}{2} \sum_{l, m=1}^3 \mathcal{G}_{ikl} (1 - \delta_{lm}) ({}^n \mathcal{G}_{mmm} \cdot i_m) i_l \quad i, k=1, 2, 3; i \neq k.$$

W dalszych rozważaniach jako zmienne kinematyczne deformacji komórek n przyjmować będziemy wektory ${}^n v_i, {}^n v_{ii}, {}^n \mathcal{G}_i, {}^n \mathcal{G}_{ii}$ określone odpowiednio za pomocą wzorów: (2.6)₁, (2.6)₃, (2.10), (2.12), (2.6)₄. Tworzą one wraz z wektorami ${}^n w, {}^n e_i, {}^n h_{(ij)}, {}^n k_i$ układ związków geometrycznych

$$(2.14) \quad {}^n v_i = {}^n w + {}^n h_{ii} (c_{ij}) d_i^2 / 12 + \sum_{l=1}^3 {}^n h_{ll} (c_{ij}) d_l^2 / 24, \\ {}^n v_{ii} = {}^n e_i + \sum_{l=1}^3 (1 - \delta_{il}) ({}^n k_l \times i_i) c_{ij} d_l^2 / 24, \\ {}^n \mathcal{G}_i = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (i_k \times {}^n v_{kk}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k, l=1}^3 (\mathcal{G}_{ikl} - \epsilon_{ikl}) ({}^n v_{kk} \cdot i_l) \right] i_i + \\ + {}^n k_i (c_{ij}) d_i^2 / 12, \\ {}^n \mathcal{G}_{ii} = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (i_k \times {}^n h_{(ik)}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k, l=1}^3 (\mathcal{G}_{ikl} - \epsilon_{ikl}) ({}^n h_{(ik)} \cdot i_l) \right] i_i.$$

Związki wzajemne względem (2.14) otrzymamy rozwiązując układ tych równań względem wektorów ${}^n e_i, {}^n h_{(ik)}, {}^n k_i$. Stąd jest

$$\begin{aligned}
 (2.15) \quad n e_i &= n v_{ii} - \sum_{m,l,p=1}^3 (1-\delta_{il}) \epsilon_{mip} (n k_{L \cdot i m})_{(n_l)} d_L^2 / 24 i_p = \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (1-\delta_{ik}) (n \varphi_k \times i_i) + \sum_{k=1}^3 \left[n v_{ii} \cdot i_k + \right. \\
 &+ (1-\delta_{ik}) (3/4 n v_{ii} \cdot i_k - 1/4 n v_{kk} \cdot i_i) + \frac{1}{4} \sum_{L=1}^3 \epsilon_{ikL} (n v_{iL} \cdot i_k + \\
 &\quad \left. + n v_{kL} \cdot i_i) \right] i_k, \\
 n h_{(ik)} &= \frac{12}{5} (n_i) d_i^{-2} \left[5 n v_i - \sum_{j=1}^3 n v_j - 2 n v \right] \delta_{ik} + \\
 &+ (1-\delta_{ik}) \sum_{m,l,p=1}^3 \left[(1-1/2 \delta_{im}) \epsilon_{mkl} \delta_{ip} + (1-1/2 \delta_{km}) \epsilon_{mil} \delta_{kp} + \right. \\
 &\quad \left. + 1/2 \varphi_{ikL} \delta_{mp} (1-\delta_{lm}) \right] (n \varphi_{pp} \cdot i_m) i_L, \\
 n k_i &= 12 (n_i) d_i^{-2} \left\{ n \varphi_i - \sum_{j,k,l=1}^3 \left[(1-\delta_{ik}) \epsilon_{klj} + \frac{1}{2} \delta_{ij} (\varphi_{jkl} - \epsilon_{jkl}) \right] (n v_{kk} \cdot i_l) i_j \right\}.
 \end{aligned}$$

W konsekwencji przyjętego założenia (2.8) odnośnie wektorów $n \varphi_{ik}$, pola uogólnionych przemieszczeń $n \hat{\varphi}_{ik}$ płaszczyzn $\xi_i = \text{const}$ komórek n , opisane za pomocą wzorów (2.7)₂

zastępujemy polami wektorowymi

$$(2.16) \quad n \hat{\varphi}_i = \sum_{k=1}^3 (1-\delta_{ik}) (i_k \times n \hat{\varphi}_{ik}) + \frac{1}{2} \left[\sum_{k,l=1}^3 (\varphi_{ikl} - \epsilon_{ikl}) (n \hat{\varphi}_{ik} \cdot i_l) \right] i_i,$$

które po podstawieniu wzorów (2.7)₂ z uwzględnieniem (2.8), (2.12) przybierają postać

$$(2.17) \quad n \hat{\varphi}_i = n \varphi_i + n \varphi_{ii} (n_i) \xi_i + \frac{1}{2} (n k_i) \left[(n_i) \xi_i^2 - (n_i) d_i^2 / 4 \right], \quad i=1,2,3.$$

Podstawienie do (2.7)₁, (2.17) wzorów (2.15)₂, (2.16)₃ daje wyrażenia na pola wektorowe uogólnionych przemieszczeń $n \hat{v}_i$, $n \hat{\varphi}_i$ płaszczyzn przekrojowych $\xi_i = \text{const}$ komórek n w następującej postaci

$$(2.18) \quad n \hat{v}_i = n v_i + n v_{ii} (n_i) \xi_i + 6/5 (n_i) d_i^{-2} \left[5 n v_i - \sum_{L=1}^3 n v_L - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \mathbf{e}_a \mathbf{w}] \left({}_{(n_i)} \xi_i^2 - {}_{(n_i)} d_i^2 / 4 \right) \\
 {}_n \hat{\mathcal{G}}_i &= {}_n \mathcal{G}_i + {}_n \mathcal{Y}_{i,i} {}_{(n_i)} \xi_i + G {}_{(n_i)} d_i^2 \left\{ {}_n \mathcal{Y}_i - \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (i_k \times n \mathbf{v}_{k\alpha}) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left[\sum_{k,l=1}^3 (\mathcal{Y}_{ikl} - \epsilon_{ikl}) (n \mathbf{v}_{kk} \cdot i_l) \right] i_i \right\} \left({}_{(n_i)} \xi_i^2 - {}_{(n_i)} d_i^2 / 4 \right) .
 \end{aligned}$$

Wyprowadzone wzory (2.14), (2.15) oraz (2.18) będące związkami geometrycznymi komórki n stanowią cel rozważań tego punktu pracy.

2.2. Określenie pól odkształceń i naprężeń

Pola deformacji komórek n w punktach ξ_i (${}_{(n_{i-1})} b_i + {}_{(n_i)} b_i$), ($i=1,2,3$) określono na podstawie (1.12)₂, (1.16) oraz związków geometrycznych deformacji liniowej teorii sprężystości zgodnie z którymi jest

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad {}_n \hat{\mathbf{e}}_i &= \frac{\partial}{\partial \xi_i} [n \hat{\mathbf{u}}] = n \boldsymbol{\omega} \times i_i + n \mathbf{e}_i + \sum_{k=1}^3 n \mathbf{h}_{(ik)} {}_{(n_k)} \xi_k + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 \left[(1 - \delta_{kl}) \left[\delta_{ik} (n \mathbf{k}_k \times i_l) + \delta_{il} (n \mathbf{k}_l \times i_k) \right] + \right. \\
 & \left. + \delta_{kl} (1 - \delta_{ik}) (n \mathbf{k}_k \times i_j) \right] {}_{(n_k)} \xi_k {}_{(n_l)} \xi_l .
 \end{aligned}$$

wektory ${}_n \hat{\mathbf{e}}_i$ są sumami

$$(2.20) \quad {}_n \hat{\mathbf{e}}_i = n \hat{\mathbf{e}}_i + n \hat{\boldsymbol{\omega}} \times i_i$$

pól wektorowych odkształceń

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad n \hat{\mathbf{e}}_i &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (n \hat{\mathbf{e}}_i \cdot i_j + n \hat{\mathbf{e}}_j \cdot i_i) i_j = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (n \hat{\mathbf{u}}_{,i} \cdot i_j + n \hat{\mathbf{u}}_{,j} \cdot i_i) i_j
 \end{aligned}$$

wywołujących stany naprężeń $n \hat{\mathbf{G}}_i$ oraz pól wektorowych deformacji

swobodnych powstałych wskutek obrotów punktów ξ komórek n równych

$$(2.22) \quad n\hat{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } n\hat{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i_i \times \frac{\partial}{\partial \xi_i} n\hat{u} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 i_i \times n\hat{e}_i.$$

Zgodnie z określeniem (2.21) pola wektorowe $n\hat{e}_i$ spełniają równania

$$(2.23) \quad \sum_{i=1}^3 i_i \times n\hat{e}_i = 0$$

symetrii składowych $n\hat{e}_{(ij)} = n\hat{e}_i \cdot i_j = n\hat{e}_j \cdot i_i$ tensora odkształcenia względem wekowników i, j .

Składowe $n\hat{e}_{ii} = n\hat{e}_i \cdot i_i$ ($i=1,2,3$) określają w punktach ξ komórek n jednostkowe zmiany długości elementów liniowych równoległych do osi i_i , natomiast składowe $n\hat{e}_{(ij)}$ ($i, j=1,2,3; i \neq j$) są połówkowymi wartościami zmian kątów prostych, które w stanie naturalnym tworzą kierunki osi i_i, i_j w punktach ξ .

Podstawiając do (2.21) wzory (2.19) otrzymujemy wyrażenia na pola deformacji w postaci

$$(2.24) \quad n\hat{e}_i = n\epsilon_i + \sum_{k=1}^3 n\epsilon_{ki} (\eta_k) \xi_k + \sum_{k,l=1}^3 n\epsilon_{(kl)i} (\eta_k) \xi_k (\eta_l) \xi_l,$$

przy następujących znaczeniach pojawiających się wektorowych współczynników

$$(2.25) \quad \begin{aligned} n\epsilon_i &= \frac{1}{2} \left[n\epsilon_i + \sum_{j=1}^3 (n\epsilon_j \cdot i_i) i_j \right], \\ n\epsilon_{ki} &= \frac{1}{2} \left[n\epsilon_{(ki)} + \sum_{j=1}^3 (n\epsilon_{(kj)} \cdot i_i) i_j \right], \\ n\epsilon_{(kl)i} &= \frac{1}{4} \sum_{j,p,m,r,s=1}^3 (\delta_{ip} \delta_{jrm} + \delta_{jp} \delta_{irm}) \left[(1 - \delta_{kl}) (\delta_{kp} \delta_{ks} \epsilon_{rilm} + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{lp} \delta_{ls} \epsilon_{rkim}) + \delta_{kl} (1 - \delta_{kp}) \epsilon_{rilm} \delta_{ks} \right] (n\epsilon_s \cdot i_r) i_j. \end{aligned}$$

Związki zachodzące pomiędzy składowymi wektorowych współczynników $n\epsilon_i, n\epsilon_{ki}$ pól $n\hat{e}_i$ a zmiennymi kinematycznymi $n\mathbf{v}_i, n\mathbf{v}_{ii}, n\mathbf{g}_i, n\mathbf{g}_{ii}$ deformacji komórek n otrzymamy podstawiając

do (2.24)₍₁₋₂₎ wzory (2.15), skąd mamy

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \frac{1}{2} \sum_{j,m,L=1}^3 \left[(\delta_{iL} \delta_{j,m} + \delta_{i,m} \delta_{jL}) \mathbf{n} \mathbf{v}_{LL} + \right. \\ &\quad \left. + (\delta_{ii} \in_{mj} + \delta_{jL} \in_{mji})_{(n_L)} d_L^2 / 24 \mathbf{n} \mathbf{k}_L \right] \cdot \mathbf{i}_m \mathbf{i}_j, \\ \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{ki} &= 6/5 \langle \mathbf{e}_k \rangle d_k^2 \sum_{m,j=1}^3 (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}) (5 \mathbf{n} \mathbf{v}_k - \sum_{r=1}^3 \mathbf{n} \mathbf{v}_r - 2 \mathbf{n} \mathbf{w}) \cdot \mathbf{i}_m \mathbf{i}_j + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j,m,p=1}^3 \left[\delta_{ip} \in_{mkj} (\delta_{ij} + 1/2 \delta_{im}) + \delta_{jp} \in_{mkj} (\delta_{ij} + 1/2 \delta_{jm}) + \right. \\ &\quad \left. - \delta_{kp} (\delta_{ki} \in_{mj} + \delta_{ij} \in_{mj}) + 1/2 \delta_{ikj} \delta_{mp} (1 + \delta_{mk}) \right] (\mathbf{n} \mathcal{G}_{pp} \cdot \mathbf{i}_m) \mathbf{i}_j, \end{aligned}$$

Występujące we wzorach (2.24)₃, (2.26)₂ wektory $\mathbf{n} \mathbf{k}_i$ ($i=1,2,3$) są związane ze składowymi wektorów $\mathbf{n} \mathcal{G}_i$, $\mathbf{n} \mathbf{v}_i$ ($i=1,2,3$) za pomocą uprzednio wyprowadzonych wzorów (2.15)₃.

Wyrażenia na pola obrotów $\mathbf{n} \boldsymbol{\omega}$ punktów komórek \mathbf{n} otrzymamy podstawiając do (2.22) wzory (2.19). Stąd znajdujemy

$$(2.27) \quad \begin{aligned} \mathbf{n} \hat{\boldsymbol{\omega}} &= \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \times \left(\mathbf{n} \mathbf{e}_j + \sum_{k=1}^3 \mathbf{n} \mathbf{h}_{(kj)} \langle \mathbf{e}_k \rangle \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^3 \left[\delta_{kl} (\mathbf{n} \mathbf{k}_k + (\mathbf{n} \mathbf{k}_k \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_k) - 2(1 - \delta_{kl}) (\mathbf{n} \mathbf{k}_k \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_l \right]_{(n_k)} \langle \mathbf{e}_k \rangle \langle \mathbf{e}_l \rangle. \end{aligned}$$

Zgodnie z równaniem (2.23), wektorowe współczynniki $\mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_i$, $\mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{ki}$,

$\mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{(kl)i}$ ($i, k, l=1,2,3$) wielomianowych pól deformacji $\mathbf{n} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_i$ określonych za pomocą wzorów (2.24) czynią zadosć równaniom

$$(2.28) \quad \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \times \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \times \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{ki} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \times \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{(kl)i} = 0,$$

z których wynikają odpowiednio następujące warunki symetrii składowych

$$(2.29) \quad \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_i \cdot \mathbf{i}_j = \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_j \cdot \mathbf{i}_i, \quad \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{ki} \cdot \mathbf{i}_j = \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{kj} \cdot \mathbf{i}_i, \quad \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{(kl)i} \cdot \mathbf{i}_j = \mathbf{n} \boldsymbol{\varepsilon}_{(kl)j} \cdot \mathbf{i}_i.$$

Dylatacje, określające względne zmiany objętości w punktach $\boldsymbol{\varepsilon}$ komórek \mathbf{n} opisują pola skalarne

$$(2.30) \quad \begin{aligned} {}_n \hat{\psi} &= \sum_{j=1}^3 {}_n \hat{e}_{j \cdot j} \cdot i_j = \sum_{j=1}^3 {}_n \hat{e}_{j \cdot j} \cdot i_j = \sum_{j=1}^3 {}_n \hat{u}_{j \cdot j} \cdot i_j = \\ &= {}_n \psi + \sum_{k=1}^3 {}_n \psi_k (n_k) \xi_k + \sum_{k,l=1}^3 {}_n \psi_{kl} (n_k) \xi_k (n_l) \xi_l \end{aligned}$$

przy następujących znaczeniach współczynników

$$(2.31) \quad \begin{aligned} {}_n \psi &= \sum_{j=1}^3 {}_n e_{j \cdot j} \cdot i_j = \sum_{j=1}^3 {}_n e_{j \cdot j} \cdot i_j, \\ {}_n \psi_k &= \sum_{j=1}^3 {}_n e_{kj \cdot j} \cdot i_j = \sum_{j=1}^3 {}_n h_{(kj)} \cdot i_j, \\ {}_n \psi_{(kl)} &= \sum_{j=1}^3 {}_n e_{(kl)j \cdot j} \cdot i_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (1 - \delta_{kl}) [\delta_{jk} (n_k k_l \cdot i_l) + \delta_{jl} (n_l k_l \cdot i_k)] \cdot i_j. \end{aligned}$$

Pola deformacji ${}_n \hat{e}_i(\xi; x)$ są wywołane polem naprężeń ${}_n \hat{G}_i(\xi; x)$ działających na płaszczyzny $\xi_i = \text{const}$ o normalnych równoległych do wersorów i_i . Naprężenia ${}_n \hat{G}_i(\xi; x)$ stanowią reakcję materiału komórki n na odkształcenia.

Zgodnie z prawem Hooke'a liniowej teorii sprężystości ośrodków izotropowych i jednorodnych, wzajemne zależności pól deformacji ${}_n \hat{e}_i(\xi; x)$ i naprężeń ${}_n \hat{G}_i(\xi; x)$ wyrażają związki fizyczne

$$(2.32) \quad \begin{aligned} {}_n \hat{e}_i &= \frac{1}{n E} \left[(1 + n \nu) {}_n \hat{G}_i - n \nu \sum_{j=1}^3 ({}_n \hat{G}_j \cdot i_j) i_i \right], \\ {}_n \hat{G}_i &= 2 {}_n G_n \hat{e}_i + n \lambda {}_n \psi i_i \end{aligned}$$

w których symbole $n \lambda = \frac{2 {}_n G_n \nu}{1 - 2 \nu}$ są stałymi Lamégo materiału komórki n .

Podstawiając do (2.30)₂ wzory (2.24) znajdujemy wyrażenia na pola wektorowe naprężeń w postaci

$$(2.33) \quad {}_n \hat{G}_i = {}_n G_i + \sum_{k=1}^3 {}_n G_{ki} (n_k) \xi_k + \sum_{k,l=1}^3 {}_n G_{(kl)i} (n_k) \xi_k (n_l) \xi_l,$$

przy następujących znaczeniach wektorowych współczynników

$$(2.34) \quad \begin{aligned} {}_n G_i &= 2 {}_n G_n e_i + n \lambda {}_n \psi i_i, \\ {}_n G_{ki} &= 2 {}_n G_n e_{ki} + n \lambda {}_n \psi_k i_i \end{aligned}$$

$${}_n G_{(kl)i} = 2 {}_n G {}_n \varepsilon_{(kl)i} + {}_n J {}_n \varrho_{(kl)i} \quad i, k, l = 1, 2, 3.$$

Podstawienie do równania wektorowego (2.23) wzorów (2.32) na pola odkształceń ${}_n \varepsilon_i$ daje równanie

$$(2.35) \quad \sum_{i=1}^3 \dot{i}_i \times {}_n \hat{G}_i = 0$$

z którego wynikają warunki symetrii względem indeksów i, j

$$(2.36) \quad {}_n \hat{G}_i \cdot \dot{i}_j = {}_n \hat{G}_j \cdot \dot{i}_i = {}_n \hat{G}_{(ij)}$$

składowych ${}_n \hat{G}_{(ij)}$ ($i, j = 1, 2, 3$) tensora naprężeń.

Ponieważ równanie (2.35) jest spełnione w dowolnym punkcie komórki ${}_n$, przeto na podstawie wzoru (2.33) mamy też równania wektorowe

$$(2.37) \quad \sum_{i=1}^3 \dot{i}_i \times {}_n G_i = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \dot{i}_i \times {}_n G_{ki} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \dot{i}_i \times {}_n G_{(kl)i} = 0.$$

Z równań tych wynikają warunki symetrii względem indeksów i, j składowych wektorowych współczynników: ${}_n G_i$, ${}_n G_{ki}$, ${}_n G_{(kl)i}$ pól naprężeń ${}_n \hat{G}_i$ o następujących postaciach

$$(2.38) \quad \begin{aligned} {}_n G_i \cdot \dot{i}_j &= {}_n G_j \cdot \dot{i}_i = {}_n G_{(ij)}, \\ {}_n G_{ki} \cdot \dot{i}_j &= {}_n G_{kj} \cdot \dot{i}_i = {}_n G_{k(ij)}, \\ {}_n G_{(kl)i} \cdot \dot{i}_j &= {}_n G_{(kl)j} \cdot \dot{i}_i = {}_n G_{(kl)(ij)}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Wykorzystując zdefiniowane w teorii sprężystości ośrodków izotropowych pojęcia tensorów sztywności

$$(2.39) \quad {}_n A_{(ij)(st)}^0 = \delta_{is} \delta_{jt} + \delta_{it} \delta_{js} + {}_n J / {}_n G \delta_{ij} \delta_{st}$$

oraz tensorów podatności

$$(2.40) \quad {}_n \hat{a}_{(ij)(pq)}^0 = \frac{1}{4} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) - \frac{{}_n \nu}{2(1+{}_n \nu)} \delta_{ij} \delta_{pq}$$

czyniących zadość równaniom

$$(2.41) \quad \sum_{i,j=1}^3 n \dot{A}_{(ij)(st)} n \hat{a}_{(ij)(pq)} = \frac{1}{2} (\delta_{ps} \delta_{qt} + \delta_{qs} \delta_{pt})$$

związki fizyczne (2.32) pomiędzy składowymi wektorowych współczynników $n \mathcal{G}_i$, $n \mathcal{G}_{ki}$, $n \mathcal{G}_{(kl)i}$ pól naprężeń $n \hat{\mathcal{G}}_i$ a składowymi wektorowych współczynników $n \mathcal{E}_i$, $n \mathcal{E}_{ki}$, $n \mathcal{E}_{(kl)i}$ pól deformacji $n \hat{\mathcal{E}}_i$ możemy wyrazić w następujących równoważnych postaciach:

$$(2.42) \quad \begin{aligned} n \mathcal{G}_{i \cdot ij} &= n G \sum_{s,t=1}^3 n \dot{A}_{(ij)(st)} n \mathcal{E}_{s \cdot it} \quad , \\ n \mathcal{G}_{ki \cdot ij} &= n G \sum_{s,t=1}^3 n \dot{A}_{(ij)(st)} n \mathcal{E}_{ks \cdot it} \quad , \\ n \mathcal{G}_{(kl)i \cdot ij} &= n G \sum_{s,t=1}^3 n \dot{A}_{(ij)(st)} n \mathcal{E}_{(kl)s \cdot it} \quad ; \\ n \mathcal{E}_{i \cdot ij} &= \frac{1}{n G} \sum_{s,t=1}^3 n \hat{a}_{(ij)(st)} n \mathcal{G}_{s \cdot it} \quad , \\ n \mathcal{E}_{ki \cdot ij} &= \frac{1}{n G} \sum_{s,t=1}^3 n \hat{a}_{(ij)(st)} n \mathcal{G}_{ks \cdot it} \quad , \\ n \mathcal{E}_{(kl)i \cdot ij} &= \frac{1}{n G} \sum_{s,t=1}^3 n \hat{a}_{(ij)(st)} n \mathcal{G}_{(kl)s \cdot it} \quad ; \end{aligned}$$

przy $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Podstawiając do wzorów (2.34) wyrażenia na wektorowe współczynniki $n \mathcal{E}_i$, $n \mathcal{E}_{ki}$, $n \mathcal{E}_{(kl)i}$ opisane za pomocą wzorów (2.25)₃, (2.26)₍₁₋₂₎ oraz na współczynniki $n \mathcal{G}$, $n \mathcal{G}_k$, $n \mathcal{G}_{(kl)}$ zdefiniowane za pomocą wzorów (2.31) znajdujemy następujące wyrażenia na wektorowe współczynniki naprężeń

$$(2.43) \quad \begin{aligned} n \mathcal{G}_i &= n G \sum_{j,s,t=1}^3 \left[n \dot{A}_{(ij)(st)} n \mathcal{V}_{ss} + (n_s) d_s^e / 24 (\delta_{si} \mathcal{E}_{tj} + \delta_{sj} \mathcal{E}_{ti}) n \mathcal{K}_s \right] \cdot i_t j_t \quad , \\ n \mathcal{G}_{ki} &= n G \left\{ 12/5 (n_k) d_k^{-e} \sum_{t,j=1}^3 n \dot{A}_{(ij)(kt)} (5 n \mathcal{V}_k - \sum_{r=1}^3 n \mathcal{V}_r - 2 n \mathcal{W}) \cdot i_t j_t \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j,p,m=1}^3 \left[\delta_{ip} \mathcal{E}_{mkj} (\delta_{jp} + 1/2 \delta_{mp}) + \delta_{jp} \mathcal{E}_{mki} (\delta_{ip} + 1/2 \delta_{mp}) \right] \right. \end{aligned}$$

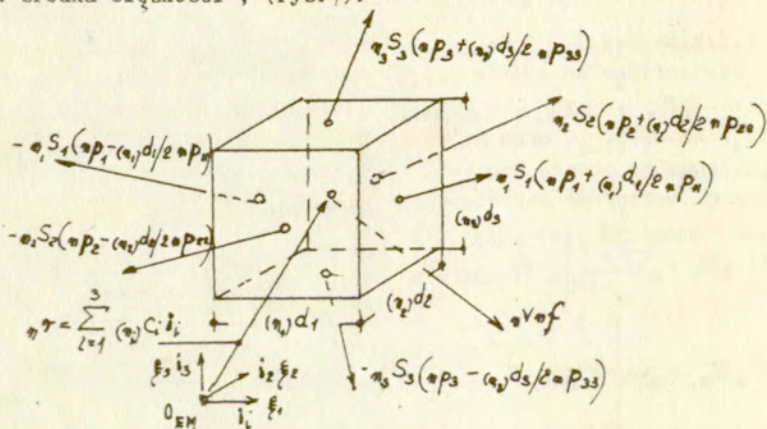
$$+\frac{\varepsilon_{n\nu}}{1-\varepsilon_{n\nu}} \delta_{ij} \varepsilon_{mkp} - \delta_{kp} (\delta_{ki} \varepsilon_{mij} + \delta_{kj} \varepsilon_{mji}) + \\ + \frac{1}{2} \delta_{ijk} \delta_{mp} (1 + \delta_{mk}) \left(n \mathcal{G}_{pp} \cdot i_m \right) i_j \Bigg\} ,$$

$$n \mathcal{G}_{(kl)ij} = \frac{1}{2} n G \sum_{s,r,j=1}^3 \left[\delta_{rs} (1 - \delta_{kl}) (\delta_{rs} \varepsilon_{rlj} + \delta_{rs} \varepsilon_{rjk}) + \delta_{js} (1 - \delta_{kl}) (\delta_{ks} \varepsilon_{rli} + \right. \\ \left. + \delta_{ls} \varepsilon_{rki}) - \delta_{kl} \delta_{ks} (\delta_{ki} \varepsilon_{rsj} + \delta_{kj} \varepsilon_{rsi}) + \frac{\varepsilon_{n\nu}}{1-\varepsilon_{n\nu}} \delta_{ij} (\delta_{ks} \varepsilon_{rsl} + \right. \\ \left. + \delta_{ls} \varepsilon_{rks}) \right] (n k_s \cdot i_r) i_j ,$$

przy znaczeniach wektorowych współczynników $n k_s$ określonych za pomocą wzorów (2.15)₃.

2.3. Siły powierzchniowe i objętościowe komórek. Warunki równowagi

W tym punkcie pracy określimy siły działające na komórkę n , której położenie względem początku O_{EM} układu odniesienia O_{EM} , ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 wskazuje wektor wodzący n^T geometrycznego środka ciężkości, (rys. 7).



Rys. 7. Układ sił powierzchniowych i objętościowych komórki n

Zakładamy, że komórka jest poddana działaniu w punktach o współrzędnych ξ_i ($i=1,2,3$) sił masowych o stałych na jednostkę objętości gęstościach $n f(x)$ oraz sił powierzchniowych na ścianach komórki o normalnych zewnętrznych $-i_i$, i_i ($i=1,2,3$) o gęstościach na jednostkę powierzchni ścian

$$(2.44) \quad n \hat{p}_i = n p_i + n p_{vi} (n_i) \xi_i$$

określonych odpowiednio przy $\xi_i = (n_i - 1) b_i$, $\xi_i = (n_i) b_i$. Przyjmujemy przy tym, że wektory $n p_i$, $n p_{vi}$ są liniowymi funkcjami zmiennych niezależnych ξ_k ($k=1,2,3; k \neq i$) i mają następujące postacie

$$(2.45) \quad n p_i = n q_i + 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) d_k^{-2} n q_{ik} (n_k) \xi_k,$$

$$n p_{vi} = n q_i + 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) d_k^{-2} n q_{ik} (n_k) \xi_k, \quad i=1,2,3,$$

Podstawiając wzory (2.45) do wzorów (2.44) a następnie wprowadzając nowe oznaczenia

$$(2.46) \quad n \hat{q}_i = n q_i + n q_{vi} (n_i) \xi_i,$$

$$n \hat{q}_{ik} = n q_{ik} + n q_{vki} (n_i) \xi_i.$$

mamy też następujące wyrażenia na napięcia powierzchniowe ścian

$\xi_i = (n_i - 1) b_i$, $\xi_i = (n_i) b_i$ komórki n

$$(2.47) \quad n \hat{p}_i = n \hat{q}_i + 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) d_k^{-2} n \hat{q}_{ik} (n_k) \xi_k.$$

Następnie odnośnie wektorów $n \hat{q}_{ik}$ ($i, k=1,2,3; i \neq k$) zakładamy znikanie ich dziewięciu składowych zgodnie z następującymi narzuconymi warunkami

$$(2.48) \quad n \hat{q}_{ik} \cdot i_k = 0,$$

$$\sum_{k,l,r,s=1}^3 (\delta_{ir} \delta_{ks} + \delta_{kr} \delta_{is}) (\varrho_{rsl} - \epsilon_{rsl}) (\mathbf{n} \hat{q}_{rs} \cdot \mathbf{i}_l) = 0, \quad i, k=1, 2, 3; i \neq k.$$

W konsekwencji przyjętych założeń (2.48), wektory $\mathbf{n} \hat{q}_{ik}$ przy $i \neq k$ ($i, k=1, 2, 3$) możemy wyrazić przez składowe powierzchniowych napięć momentowych

$$(2.49) \quad \mathbf{n} \hat{m}_i = \frac{1}{n_i S_i} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[\mathbf{i}_k \times \int_{n_i S_i} \mathbf{n} \hat{p}_i \cdot (\mathbf{m}_k) \boldsymbol{\xi}_k dS_i \right] = \\ = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\mathbf{i}_k \times \mathbf{n} \hat{q}_{ik}) \quad i=1, 2, 3$$

za pomocą wzoru

$$(2.50) \quad \mathbf{n} \hat{q}_{ik} = \left[\mathbf{n} \hat{m}_i \cdot \mathbf{i}_j - \frac{1}{\rho} (\mathbf{n} \hat{m}_i \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_j \right] \times \mathbf{i}_k + \frac{1}{\rho} (\mathbf{n} \hat{m}_i \cdot \mathbf{i}_j) \sum_{l=1}^3 \varrho_{ikl} \mathbf{i}_l = \\ = \sum_{l,r=1}^3 \left[\epsilon_{klr} + \frac{1}{\rho} \delta_{ir} (\varrho_{klr} - \epsilon_{klr}) \right] (\mathbf{n} \hat{m}_i \cdot \mathbf{i}_r) \mathbf{i}_l.$$

Wyrażając wektory $\mathbf{n} \hat{q}_{ik}$ za pomocą wzoru (2.46)₂ a następnie podstawiając do (2.50) wyrażenia

$$(2.51) \quad \mathbf{n} \hat{m}_i = \mathbf{n} \mathbf{m}_i + \mathbf{n} \mathbf{m}_{ij} \cdot (\mathbf{n}_j) \boldsymbol{\xi}_i \quad i=1, 2, 3$$

znajdujemy zależności

$$(2.52) \quad \mathbf{n} \hat{q}_{ik} = \sum_{r,l=1}^3 \left[\epsilon_{klr} + \frac{1}{\rho} \delta_{ir} (\varrho_{klr} - \epsilon_{klr}) \right] (\mathbf{n} \mathbf{m}_i \cdot \mathbf{i}_r) \mathbf{i}_l, \\ \mathbf{n} \hat{q}_{ikj} = \sum_{r,l=1}^3 \left[\epsilon_{klr} + \frac{1}{\rho} \delta_{ir} (\varrho_{klr} - \epsilon_{klr}) \right] (\mathbf{n} \mathbf{m}_{ij} \cdot \mathbf{i}_r) \mathbf{i}_l,$$

z których wynikają też równości

$$(2.53) \quad \mathbf{n} \mathbf{m}_i = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\mathbf{i}_k \times \mathbf{n} \hat{q}_{ik}), \\ \mathbf{n} \mathbf{m}_{ij} = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\mathbf{i}_k \times \mathbf{n} \hat{q}_{ikj}), \quad i=1, 2, 3.$$

Działające na komórkę określone powyżej siły powierzchniowe o gęstościach $\mathbf{n} \hat{p}_i$ oraz siły masowe o gęstościach $\mathbf{n} \mathbf{f}$ tworzą samozrównoważony układ sił. Prowadzi to do znikania wypadkowych

sił i momentów względem środka ciężkości elementu makroskopowego, co daje równania

$$(2.54) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i} (\rho_i) \Delta_i n \hat{p}_i dS_i + n^V n f = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i} (\rho_i) \Delta_i [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times n \hat{p}_i] dS_i + \int [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times n f] dV = 0,$$

które po uwzględnieniu znikania całki $\int_{n^V} (\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) dV = 0$ przybierają postać

$$(2.55) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i} (\rho_i) \Delta_i n \hat{p}_i dS_i + n^V n f = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i} (\rho_i) \Delta_i [(\mathbf{r} - n \mathbf{r}) \times n \hat{p}_i] dS_i = 0$$

Z kolei uwzględniając następujące równości

$$(\rho_i) \Delta_i [(\mathbf{r} - n \mathbf{r}) \times n \hat{p}_i] = \frac{1}{2} \left[(\rho_i) \Delta_i (\mathbf{r} - n \mathbf{r}) \times \sum_j n \hat{p}_j + \right.$$

$$\left. + (\rho_i) \sum_j (\mathbf{r} - n \mathbf{r}) \times (\rho_j) \Delta_j n \hat{p}_j \right]$$

$$(\rho_i) \Delta_i (\mathbf{r} - n \mathbf{r}) = (\rho_i) d_i \mathbf{i}_i$$

$$(\rho_i) \sum_j (\mathbf{r} - n \mathbf{r}) = 2 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\rho_k) \xi_k \mathbf{i}_k$$

oraz określenia (2.47), (2.49) przekształcono równania (2.55) do postaci

$$(2.56) \quad \sum_{i=1}^3 n_i S_i (\rho_i) \Delta_i n \hat{q}_i + n f n^V = 0,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 n^V [\mathbf{i}_i \times (\rho_i) \sum_j n \hat{q}_j] + \sum_{i=1}^3 n_i S_i (\rho_i) \Delta_i n \hat{m}_i = 0.$$

Uwzględniając w tych równaniach wyznaczone na podstawie (2.46), (2.51) równości

$$(2.57) \quad (\rho_i) \Delta_i n \hat{q}_i = n q_{ii}, \quad (\rho_i) \sum_j n \hat{q}_j = 2 n q_{ij},$$

$${}_{(n_i)} \Delta_i {}_n \hat{m}_i = {}_n m_{ii}$$

otrzymamy równania równowagi w następującej postaci

$$(2.58) \quad \sum_{i=1}^3 {}_n q_{ii} + {}_n f = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 [i_i \times {}_n q_{ii} + {}_n m_{ii}] = 0$$

2.4. Energia odkształcenia i praca statyczna. Równanie równych wartości energii i pracy.

Komórki ${}_n$ w stanach równowagi działających na nie siły gromadzą w procesie deformacji energię odkształceń sprężystych

$$(2.59) \quad {}_n U(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{nV} ({}_n \hat{G}_i \cdot {}_n \hat{E}_i) dv = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{nV} ({}_n \hat{G}_i \cdot {}_n \hat{e}_i) dv =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int_{nV} ({}_n \hat{G}_i \cdot {}_n \hat{u}_{,i}) dv.$$

Siły objętościowe ${}_n f$ i powierzchniowe ${}_n \hat{p}_i$, wykonują na przemieszczeniach ${}_n \hat{u}$ w punktach ich przyłożenia, przy założeniu wzrastania tych sił w procesie deformacji od zera do wartości końcowych, pracę statyczną

$$(2.60) \quad {}_n \eta(x) = \frac{1}{2} \left[{}_n f \cdot \int_{nV} {}_n \hat{u} dv + \sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i} ({}_{(n_i)} \Delta_i ({}_n \hat{p}_i \cdot {}_n \hat{u})) dS_i \right].$$

Zgodnie z twierdzeniem Clapeyrona [1] w stanach równowagi zachodzi równość energii odkształceń sprężystych i pracy statycznej, tj. ${}_n U(x) = {}_n \eta(x)$.
Przyrównując przeto stronami wyrażenia (2.59), (2.60) oraz uwzględniając równości całek

$$\int_{nV} ({}_n \hat{G}_i \cdot {}_n \hat{u})_{,i} dv = \int_{n_i S_i} ({}_{(n_i)} \Delta_i ({}_n \hat{G}_i \cdot {}_n \hat{u})) dS_i$$

otrzymujemy wyrażenie tej równości w postaci

$$(2.61) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i} ({}_{(n_i)} \Delta_i [({}_n \hat{G}_i - {}_n \hat{p}_i) \cdot {}_n \hat{u}]) dS_i = \int_{nV} [{}_n \hat{u} \cdot (\sum_{i=1}^3 {}_n \hat{G}_{i,i} + {}_n f)] dv.$$

Następnie podstawiając do tej równości wyrażenia (1.12)₂ na

przemieszczenia ${}_n \hat{u}$ oraz uwzględniając równania równowagi (2.35), (2.54) znajdujemy

$$\sum_{i=1}^3 \left\{ (n_i) \Delta_i \int_{S_i} [({}_n \hat{G}_i - n \hat{P}_i) \cdot n \hat{W}] dS_i - \int_{nV} [{}_n \hat{G}_{i,i} \cdot n \hat{W}] dv + \frac{1}{nV} \left(\int_{nV} n \hat{P}_{i,i} dS_i \right) \cdot \int_{nV} n \hat{W} dv \right\} = 0;$$

skąd wobec zachodzącej tożsamości

$$(n_i) \Delta_i [({}_n \hat{G}_i - n \hat{P}_i) \cdot n \hat{W}] dS_i = \frac{1}{2} [({}_{(n_i)} \Sigma_i ({}_n \hat{G}_i - n \hat{P}_i)] \cdot (n_i) \Delta_i n \hat{W} + \frac{1}{2} [({}_{(n_i)} \Delta_i ({}_n \hat{G}_i - n \hat{P}_i)] \cdot (n_i) \Sigma_i n \hat{W}$$

oraz wynikających z określeń (2.33) i definicji (2.44-2.45) następujących równości

$${}_n \hat{G}_{i,i} = n G_{ii} + 2 \sum_{k=1}^3 n G_{(ik)i} (n_k) \xi_k,$$

$$n \hat{P}_{i,i} = n P_{ii} = n q_{ii} + 12 \sum_{k=1}^3 (1 - S_{ik}) (n_k) d_k^{-2} n q_{iik} (n_k) \xi_k$$

jest też

$$(2.62) \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{2} \int_{n_i S_i} [({}_{(n_i)} \Sigma_i ({}_n \hat{G}_i - n \hat{P}_i) \cdot (n_i) \Delta_i n \hat{W} + (n_i) \Delta_i ({}_n \hat{G}_i - n \hat{P}_i) \cdot (n_i) \Sigma_i n \hat{W}] dS_i + (n q_{ii} - n G_{ii}) \cdot \int_{nV} n \hat{W} dv - 2 \sum_{k=1}^3 n G_{(ik)i} \cdot \int_{nV} n \hat{W} (n_k) \xi_k dv \right\} = 0.$$

Dążąc do wyprowadzenia równania wyrażającego równość ${}_n \mathcal{U} = n \mathcal{I}$ przez zmienne kinematyczne deformacji ${}_n \mathcal{W}$, ${}_n \mathcal{V}_i$, ${}_n \mathcal{Q}_i$, ${}_n \mathcal{V}_{ii}$, ${}_n \mathcal{Q}_{ii}$ przechodzimy do następujących przekształceń (2.62).

Rozpoczniemy od podstawienia do (2.62) wzorów (2.33) na pola naprężeń ${}_n \hat{G}_i$, wzorów (2.44-2.45) na siły powierzchniowe $n \hat{P}_i$ komórek n . Stąd też, po uwzględnieniu następujących równości

$$\begin{aligned}
({}_{n_i}) \sum_i ({}_{n_i} \hat{G}_i - {}_{n_i} \hat{P}_i) &= 2 \left[{}_{n_i} \hat{G}_i - {}_{n_i} \hat{Q}_i + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) ({}_{n_k}) \xi_k ({}_{n_i} \hat{G}_{ki} - \right. \\
&- 12 ({}_{n_k}) d_k^{-2} ({}_{n_i} \hat{Q}_{ik}) + {}_{n_i} \hat{G}_{iii} ({}_{n_i}) d_i^2 / 4 + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) ({}_{n_k}) \xi_k ({}_{n_i} \hat{G}_{kii} + \\
&\left. + \sum_{k,l=1}^3 \xi_{ikl} ({}_{n_k}) \xi_k ({}_{n_l}) \xi_l ({}_{n_i} \hat{G}_{(lk)i}) \right], \\
({}_{n_i}) \Delta_i ({}_{n_i} \hat{G}_i - {}_{n_i} \hat{P}_i) &= ({}_{n_i}) d_i \left[{}_{n_i} \hat{G}_i - {}_{n_i} \hat{Q}_i + \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) ({}_{n_k}) \xi_k (2 {}_{n_i} \hat{G}_{(ki)i} - 12 ({}_{n_k}) d_k^{-2} ({}_{n_i} \hat{Q}_{ik})) \right]
\end{aligned}$$

oraz po uporządkowaniu składników równania mamy

$$\begin{aligned}
(2.63) \quad &\sum_{i=1}^3 ({}_{n_i} \hat{G}_i - {}_{n_i} \hat{Q}_i + {}_{n_i} \hat{G}_{iii} ({}_{n_i}) d_i^2 / 4) \cdot \int_{S_i} ({}_{n_i}) \Delta_i \hat{W} dS_i + \\
&+ \sum_{i,k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) ({}_{n_i} \hat{G}_{ki} - 12 ({}_{n_k}) d_k^{-2} ({}_{n_i} \hat{Q}_{ik})) \cdot \int_{S_i} ({}_{n_i}) \Delta_i \hat{W} ({}_{n_k}) \xi_k dS_i + \\
&+ \sum_{i,k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) ({}_{n_i} \hat{G}_{kii} + \sum_{k,l=1}^3 \xi_{ikl} ({}_{n_k}) \xi_k ({}_{n_l}) \xi_l ({}_{n_i} \hat{G}_{(lk)i})) \cdot \int_{S_i} ({}_{n_i}) \Delta_i \hat{W} ({}_{n_k}) \xi_k dS_i + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 ({}_{n_i}) d_i ({}_{n_i} \hat{G}_i - {}_{n_i} \hat{Q}_i) \cdot \int_{S_i} ({}_{n_i}) \sum_i \hat{W} dS_i + \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) ({}_{n_i}) d_i (2 {}_{n_i} \hat{G}_{(ki)i} - 12 ({}_{n_k}) d_k^{-2} ({}_{n_i} \hat{Q}_{ik})) \cdot \int_{S_i} ({}_{n_i}) \sum_i \hat{W} ({}_{n_k}) \xi_k dS_i + \\
&+ \sum_{i=1}^3 ({}_{n_i} \hat{G}_i - {}_{n_i} \hat{Q}_i) \cdot \int_{V_i} \hat{W} dV - 2 \sum_{i,k=1}^3 ({}_{n_i} \hat{G}_{(ki)i} + \sum_{k,l=1}^3 \xi_{ikl} ({}_{n_k}) \xi_k ({}_{n_l}) \xi_l ({}_{n_i} \hat{G}_{(lk)i})) \cdot \int_{V_i} \hat{W} ({}_{n_k}) \xi_k dV = 0.
\end{aligned}$$

Wykorzystując wyprowadzone w p.2.1 wzory i zależności, wyrazimy występujące w (2.63) całki przez zmienne kinematyczne deformacji

${}_{n_i} \hat{W}$, ${}_{n_i} \hat{V}_i$, ${}_{n_i} \hat{G}_i$, ${}_{n_i} \hat{V}_{ii}$, ${}_{n_i} \hat{Q}_i$; komórki n .
 Na podstawie określenia (1.16) wektora ${}_{n_i} \hat{W}$, definicji (2.1) uśrednionych przekrojowych przesunięć ${}_{n_i} \hat{V}_i$ i pochyłeń ${}_{n_i} \hat{G}_{ik}$, wzorów (2.7), (2.13), (2.15) oraz wyrażeń na różnice

$${}_{(n_i)}\Delta_i[\mathbf{n}\hat{\mathbf{W}}] = {}_{(n_i)}d_i \left[\mathbf{n}\mathbf{e}_i + \sum_{L=1}^3 (1-\delta_{iL}) \mathbf{n}\mathbf{h}_{(iL)} \xi_L + \sum_{L=1}^3 (1-\delta_{iL}) \xi_L \sum_{L=1}^3 (1-\delta_{iL}) \xi_L (\mathbf{n}\mathbf{k}_L \times \mathbf{i}_i) \right]$$

znajdujemy znaczenia kolejno występujących w (2.63) całek

$$(2.64) \int_{n_i S_i} {}_{(n_i)}\Delta_i[\mathbf{n}\hat{\mathbf{W}}] dS_i = {}_{(n_i)}S_i {}_{(n_i)}\Delta_i[\mathbf{n}\hat{\mathbf{v}}_i] = \mathbf{n}\mathbf{v}_i \mathbf{n}\mathbf{v}_i,$$

$$\begin{aligned} \int_{n_i S_i} {}_{(n_i)}\Delta_i \mathbf{n}\hat{\mathbf{W}}_{(n_k)} \xi_k dS_i &= \mathbf{n}_i S_i {}_{(n_k)}d_k^2 / 12 {}_{(n_i)}\Delta_i \mathbf{n}\hat{\mathcal{G}}_{ik} = \\ &= \mathbf{n}\mathbf{v}_{(n_k)} d_k^2 / 12 \mathbf{n}\hat{\mathcal{G}}_{ik} = \mathbf{n}\mathbf{v}_{(n_k)} d_k^2 / 12 (1-\delta_{ik}) \sum_{m,l,p=1}^3 [(1-1/2\delta_{im}) \epsilon_{mkl} \delta_{ip} + \\ &+ (1-1/2\delta_{km}) \epsilon_{mrl} \delta_{kp} + 1/2 g_{ikl} \delta_{mp} (1-\delta_{lm})] (\mathbf{n}\hat{\mathcal{G}}_{pp} \cdot \mathbf{i}_m) \mathbf{i}_l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1-\delta_{ik}) \int_{n_i S_i} {}_{(n_i)}\Delta_i[\mathbf{n}\hat{\mathbf{W}}]_{(n_k)} \xi_k^2 dS_i &= (1-\delta_{ik}) \mathbf{n}\mathbf{v}_{(n_k)} d_k^2 / 12 \left[\mathbf{n}\mathbf{e}_i + \right. \\ &+ \left. (\mathbf{n}\mathbf{k}_k \times \mathbf{i}_i)_{(n_k)} d_k^2 / 30 + \sum_{L=1}^3 (1-\delta_{iL}) (\mathbf{n}\mathbf{k}_L \times \mathbf{i}_i)_{(n_k)} d_L^2 / 24 \right] = \\ &= (1-\delta_{ik}) \mathbf{n}\mathbf{v}_{(n_k)} d_k^2 / 60 \left[2(\mathbf{n}\hat{\mathcal{G}}_k \times \mathbf{i}_i) + \sum_{l,m,p=1}^3 [3\delta_{ip} \delta_{lm} + 2\delta_{ip} \delta_{im} \delta_{il} + \right. \\ &+ \left. (g_{ikl} - \epsilon_{kil})(\delta_{lm} \delta_{ip} + \delta_{im} \delta_{lp})] (\mathbf{n}\mathbf{v}_{pp} \cdot \mathbf{i}_m) \mathbf{i}_l \right], \end{aligned}$$

$$g_{ikl} \int_{n_i S_i} {}_{(n_i)}\Delta_i \mathbf{n}\hat{\mathbf{W}}_{(n_k)} \xi_k \xi_l dS_i = 0,$$

$$\int_{n_i S_i} {}_{(n_i)}\sum_i \mathbf{n}\hat{\mathbf{W}} dS_i = \mathbf{n}_i S_i {}_{(n_i)}\sum_i \mathbf{n}\hat{\mathbf{v}}_i = 2 \mathbf{n}_i S_i \mathbf{n}\mathbf{v}_i,$$

$$\int_{n_i, S_i} \sum_{(n_k)} \hat{W}_{(n_k)} \xi_k = n_i S_i \sum_{(n_k)} d_k^2 / 12 \sum_{(n_k)} \hat{G}_{ik} =$$

$$= 2 n_i S_i \sum_{(n_k)} d_k^2 / 12 n \hat{G}_{ik} = 2 n_i S_i \sum_{(n_k)} d_k^2 / 12 \left[n \hat{G}_{ik} \cdot i_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{l, m, p=1}^3 \left[\delta_{kl} \delta_{cm} \delta_{kp} + \frac{1}{2} (\hat{g}_{rkl} - \epsilon_{rkl}) (\delta_{lm} \delta_{kp} + \delta_{km} \delta_{lp}) \right] (n \mathbf{v}_{pp} \cdot i_m) i_l \right]$$

$$\int_{n \mathbf{v}} n \hat{W} d\mathbf{v} = \int \left[\int_{(n_i) d_i} n \hat{W} d S_i \right] d \xi_i = n_i S_i \int_{(n_i) d_i} n \hat{v}_i d \xi_i = n \mathbf{v} / 5 \left(2 n \mathbf{W} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^3 n \mathbf{v}_l \right),$$

$$\int_{n \mathbf{v}} n \hat{W}_{(n_k)} \xi_k d\mathbf{v} = n_i S_i \left[\delta_{ik} \int_{(n_i) d_i} n \hat{v}_i \xi_i d \xi_i + (1 - \delta_{ik}) \sum_{(n_k)} d_k^2 / 12 n \hat{G}_{ik} d \xi_i \right] =$$

$$= n \mathbf{v} \left[n \mathbf{v}_{ii} \delta_{ik} \sum_{(n_i) d_i} d_i^2 / 12 + (1 - \delta_{ik}) \sum_{(n_k)} d_k^2 / 12 n \mathbf{v}_{kk} \right] = n \mathbf{v}_{(n_k)} d_k^2 / 12 n \mathbf{v}_{kk}.$$

Względniając w równaniu (2.63) określone powyżej znaczenia całek a następnie porządkując składniki równania względem wektorowych czynników $n \mathbf{v}_{ii}$, $n \hat{G}_{ii}$, $n \mathbf{v}_i$, $n \hat{G}_i$, $(2 n \mathbf{W} + \sum_{k=1}^3 n \mathbf{v}_k)$ mamy

$$\sum_{i=1}^3 n \mathbf{v}_{ii} \cdot \left[n \hat{G}_i - n \hat{q}_i + n \hat{G}_{iii} \sum_{(n_i) d_i} d_i^2 / 4 - \sum_{k=1}^3 n \hat{G}_{(ik)k} \sum_{(n_i) d_i} d_i^2 / 6 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k, l, m, p=1}^3 (1 - \delta_{kp}) \left[3 \delta_{ip} \delta_{lm} + 2 \delta_{ip} \delta_{pm} \delta_{pl} + (\hat{g}_{pkl} - \epsilon_{pkl}) (\delta_{lm} \delta_{ip} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \delta_{pm} \delta_{il}) \right] (n \hat{G}_{kcp} \cdot i_l) i_m \sum_{(n_k)} d_k^2 / 60 + \sum_{k, l, m, p=1}^3 (1 - \delta_{kp}) \left[\delta_{kl} \delta_{km} \delta_{ki} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} (\hat{g}_{pkl} - \epsilon_{pkl}) (\delta_{lm} \delta_{ik} + \delta_{km} \delta_{li}) \right] (n \hat{G}_{(kcp) p} \sum_{(n_k)} d_k^2 / 6 - n \hat{q}_{pck}) \cdot i_l i_m \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 n \hat{G}_{ii} \cdot \left[\sum_{k, l, m, p=1}^3 (1 - \delta_{kp}) \left[(1 - 1/2 \delta_{pm}) \epsilon_{mkli} \delta_{ip} + (1 - 1/2 \delta_{lm}) \epsilon_{mpil} \delta_{ik} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{2} \hat{g}_{pkl} \delta_{mi} (1 - \delta_{lm}) \right] \left[n \hat{G}_{kp} \sum_{(n_k)} d_k^2 / 12 - n \hat{q}_{pk} \right] \cdot i_l i_m \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 n \mathbf{v}_i \cdot (n \hat{G}_{ii} - n \hat{q}_{ii}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^3 n \varphi_i \cdot \left[\sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (i_k \times n \mathcal{G}_{iik})_{(n_i)} d_i^2 / 30 + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) [i_k \times (n \mathcal{G}_{(k)i})_{(n_k)} d_k^2 / 6 - n q_{ik}] \right] + \\
& + \frac{1}{5} (2 n W + \sum_{l=1}^3 n v_l) \cdot \sum_{i=1}^3 (n q_{ii} - n \mathcal{G}_{ii}) = 0.
\end{aligned}$$

Dokonując działań algebraicznych na składnikach równania (2.64) z uwzględnieniem wzorów (2.38)₃, określeń (2.52) dotyczących wektorów $n q_{ik}$, $n q_{ik}$ oraz wynikających z nich równości

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{k,l,m,p=1}^3 \left[(2\delta_{il} + \delta_{im}) (\epsilon_{mkl} \delta_{ip} + \epsilon_{mpl} \delta_{ik}) + \right. \\
\left. + \varphi_{pkl} \delta_{im} (1 - \delta_{lm}) \right] (n q_{pk} \cdot i_l) i_m = n m_i
\end{aligned}$$

dochodzimy po przekształceniach do następującej jego postaci stanowiącej cel rozważań tego punktu pracy

$$\begin{aligned}
(2.65) \quad & \sum_{i=1}^3 n v_i \cdot \left[n \mathcal{G}_i - n q_i + \sum_{k=1}^3 n \mathcal{G}_{kk} (n_k) d_k^2 / 12 - \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) n q_{ik} - \right. \\
& - \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[n \mathcal{G}_{kk} (n_k) d_k^2 / 30 + n \mathcal{G}_{(ik)k} (n_i) d_i^2 / 6 - n q_{ik} \right] \cdot i_k i_k \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 (\varphi_{lki} - \epsilon_{kil}) \left[(n \mathcal{G}_{(lk)k} \cdot i_i)_{(n_l)} d_l^2 / 6 - (n \mathcal{G}_{(ik)k} \cdot i_l)_{(n_i)} d_i^2 / 6 + \right. \\
& \left. + n q_{kik} \cdot i_l - n q_{klk} \cdot i_i \right] i_l + \\
& + \sum_{i=1}^3 n \varphi_{ii} \cdot \left[\frac{1}{2} \sum_{k,l,m,p=1}^3 \left[(2\delta_{il} + \delta_{im}) (\epsilon_{mku} \delta_{ip} + \epsilon_{mpl} \delta_{ik}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \varphi_{pkl} \delta_{im} (1 - \delta_{lm}) \right] (n \mathcal{G}_{kp} \cdot i_l)_{(n_k)} d_k^2 / 12 i_m - n m_i \right] + \\
& + \sum_{i=1}^3 n v_i \cdot (n \mathcal{G}_{ii} - n q_{ii}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^3 n \mathcal{G}_i \cdot \left[\sum_{j,k,l=1}^3 (1-6/5 \delta_{ik}) \epsilon_{klj} \left(n \mathcal{G}_{(k)i} \cdot i_l \right)_{(n_k)} d_k^e / 6 j_j - n m_{ji} \right] + \\
 & + \frac{1}{5} \left(2 n^w + \sum_{l=1}^3 n v_l \right) \cdot \sum_{i=1}^3 \left(n q_{ji} - n \mathcal{G}_{ji} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Równanie (2.65) wykorzystamy do wyprowadzenia zależności wektorowych współczynników $n q_i$, $n q_{ij}$, $n m_i$, $n m_{ij}$ napięć powierzchniowych komórki n od składowych wektorowych współczynników $n \mathcal{G}_i$, $n \mathcal{G}_{ki}$, $n \mathcal{G}_{(k)l}$ pól naprężeń $n \hat{\mathcal{G}}_i$.

2.5. Zależności sił powierzchniowych od naprężeń wewnętrznych

Przystępując do określenia związków statycznych komórki n na podstawie równania (2.65) zakładamy, że jest ono spełnione przy dowolnych uogólnionych przesunięciach $n v_i$ i obrotach $n \mathcal{G}_i$ ($i=1,2,3$). Zatem wektorowe czynniki iloczynów skalar-nych wektorów $n v_i$ oraz wektorów $n \mathcal{G}_i$ muszą znikać. Ma to miejsce gdy zachodzą następujące równości wektorowe

$$\begin{aligned}
 (2.66) \quad & n q_{ji} = n \mathcal{G}_{ji}, \\
 & n m_{ji} = \sum_{j,k,l=1}^3 (1-6/5 \delta_{ik}) \epsilon_{klj} \left(n \mathcal{G}_{(k)i} \cdot i_l \right)_{(n_k)} d_k^e / 6 j_j.
 \end{aligned}$$

Wyprowadzenia na podstawie (2.65) pozostałych związków zachodzących pomiędzy wektorowymi współczynnikami napięć i naprężeń poprzedzimy określeniem następujących zależności. Dokonując we wzorze (2.52)₂ zamiany miejsc wskaźników i oraz k a następnie mnożąc skalarnie obie strony otrzymanego w ten sposób wzoru przez wersory i_l mamy:

$$n q_{kij} \cdot i_l = \sum_{r=1}^3 \left[\epsilon_{ilr} + \frac{1}{5} \delta_{kr} \left(g_{ilr} - \epsilon_{ilr} \right) \right] \left(n m_{kk} \cdot i_r \right).$$

Z kolei podstawiając do tego wzoru wyrażenia na składowe $n m_{kk} \cdot i_r$ wynikające ze wzoru (2.66)₂, otrzymujemy zależności

$$\begin{aligned} n q_{kik} \cdot i_l &= (1 - \delta_{il}) \left[(1 - 6/5 \delta_{ik}) (n \sigma_{(ik)k} \cdot i_l)_{(n_i)} d_i^2 / 6 - \right. \\ &- (1 - 6/5 \delta_{kl}) (n \sigma_{(lk)k} \cdot i_i)_{(n_l)} d_l^2 / 6 \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{2} (\epsilon_{ilk} - \varrho_{ilk}) \left[(n \sigma_{(ik)k} \cdot i_l)_{(n_i)} d_i^2 / 6 - (n \sigma_{(lk)k} \cdot i_i)_{(n_l)} d_l^2 / 6 \right], \end{aligned}$$

na podstawie których znajdujemy równości

$$\begin{aligned} (2.67) \quad n q_{kik} \cdot i_k &= (1 - \delta_{ik}) \left[(n \sigma_{(ik)k} \cdot i_k)_{(n_i)} d_i^2 / 6 + (n \sigma_{kk} \cdot i_k)_{(n_k)} d_k^2 / 30 \right], \\ \varrho_{ikl} (n q_{kik} \cdot i_l - n q_{kik} \cdot i_i) &= \varrho_{ikl} \left[(n \sigma_{(ik)k} \cdot i_l)_{(n_i)} d_i^2 / 6 - \right. \\ &- \left. (n \sigma_{(lk)k} \cdot i_i)_{(n_l)} d_l^2 / 6 \right], \quad i, k, l = 1, 2, 3; \\ & \quad i \neq k \neq l. \end{aligned}$$

Podstawiając do (2.65) odpowiednio wzory (2.67) oraz wynikające z określeń (2.52)₂ wyrażenia

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) n q_{kik} &= -i_i \times \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 n m_{kk} - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^3 (\delta_{ik} \epsilon_{lij} + \delta_{jk} \epsilon_{lji} - \delta_{ik} \varrho_{ijl}) (n m_{kk} \cdot i_l) j; \end{aligned}$$

mamy po uwzględnieniu związków (2.60) równanie o następującej postaci

$$\begin{aligned} (2.68) \quad \sum_{i=1}^3 n v_{ii} \cdot \left[n \sigma_i + \sum_{k=1}^3 n \sigma_{kk} \cdot i_i \right]_{(n_k)} d_k^2 / 12 - n q_i + \\ + \frac{1}{2} i_i \times \sum_{k=1}^3 n m_{kk} + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^3 (\delta_{ik} \epsilon_{lij} + \delta_{jk} \epsilon_{lji} - \\ - \delta_{kl} \varrho_{ijl}) (n m_{kk} \cdot i_l) j \left. \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^3 n \mathcal{G}_{ii} \cdot \left[\frac{1}{2} \sum_{j,k,l,p=1}^3 \left[(\delta_{il} + \delta_{ij}) (\epsilon_{jkl} \delta_{ip} + \epsilon_{jpl} \delta_{ik}) + \delta_{pkl} \delta_{ij} (1 - \delta_{ij}) \right] (n \mathcal{G}_{kp} \cdot i_l)_{(n_k)} d_k^e / 12 i_j - n m_i \right] = 0.$$

W przypadku gdy na zmienne kinematyczne deformacji $n v_{ii}$, $n \mathcal{G}_{ii}$ ($i=1,2,3$) komórki n nie są nałożone dodatkowe więzy, np. wynikające z założenia znikania określonych składowych wektorów $n v_{ii}$, $n \mathcal{G}_{ii}$, wówczas warunkami spełnienia równania (2.68) jest znikanie wektorowych mnożników wektorów $n v_{ii}$, $n \mathcal{G}_{ii}$. Stąd też jest

$$(2.69) \quad n q_i = n \mathcal{G}_i + \sum_{k=1}^3 n \mathcal{G}_{kk} (n_k) d_k^e / 12 + \frac{1}{2} i_i \times \sum_{k=1}^3 n m_{kk} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^3 \left[\delta_{ik} \epsilon_{vij} + \delta_{jk} \epsilon_{vij} - \delta_{kl} \delta_{ij} \right] (n m_{kk} \cdot i_l) i_j, \\ n m_i = \frac{1}{2} \sum_{j,k,l,p=1}^3 \left[(\delta_{il} + \delta_{ij}) (\epsilon_{jkl} \delta_{ip} + \epsilon_{jpl} \delta_{ik}) + \delta_{pkl} \delta_{ij} (1 - \delta_{ij}) \right] (n \mathcal{G}_{kp} \cdot i_l)_{(n_k)} \frac{d_k^e}{12} i_j.$$

Wzory (2.66), (2.69) stanowią komplet poszukiwanych zależności wyrażających związki statyczne komórki n w stanach deformacji, które wykorzystamy do określenia związków fizycznych w następnym punkcie pracy.

2.6. Związki fizyczne komórki. Współczynniki sprężystości i podatności

Wykorzystując związki statyczne (2.66), (2.69) oraz równania fizyczne (2.43) wyprowadzimy związki fizyczne komórki n . Wyrażać one będą wzajemne zależności zachodzące pomiędzy składowymi wektorowymi współczynnikami $n q_i$, $n q_{ii}$, $n m_i$, $n m_{ii}$, napięć powierzchniowych $n \hat{p}_i$ a składowymi wektorów $n v_i$, $n v_{ii}$, $n \mathcal{G}_i$, $n \mathcal{G}_{ii}$ zmiennych kinematycznych deformacji komórki n . Podstawiając odpowiednio do wzorów (2.66), (2.69) wyrażenia na składowe wektorowych współczynników $n \mathcal{G}_i$, $n \mathcal{G}_{ii}$, $n \mathcal{G}_{(kell)}$ wynikające ze związków fizycznych (2.43) znajdujemy po przekształceniach wzory

$$(2.70) \quad nq_i^* = nq_i^* + i_i \times nq_i^* ;$$

$$nq_i^* = nG \sum_{j,k,l=1}^3 nA_{(ij)(kl)} (nV_{k \cdot} \cdot i_l) i_j + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^3 (\delta_{ik} \epsilon_{ljj} + \delta_{jk} \epsilon_{lji} - \delta_{kl} \epsilon_{lji}) (nM_{kk} \cdot i_l) i_j ;$$

$$nq_i^* = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 nM_{kk} ;$$

$$nM_i = nG \sum_{j,k,l=1}^3 \left[-\frac{2}{5(1-2\nu)} \epsilon_{ijl} \delta_{lk} nW + nB_{ij \cdot kl} nV_k + \right. \\ \left. + (nD_{ij}^2 / 12) nD_{ij \cdot kkl} n\omega_{kk} \right] \cdot i_l i_j ;$$

$$nq_{ij}^* = \frac{nG}{1-2\nu} \left[12/5 (nD_{ij}^2) \sum_{j=1}^3 (1-2\nu + \delta_{ij}) (5nV_i - \sum_{r=1}^3 nV_r - 2nW) \cdot i_j i_j + \right. \\ \left. + \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_{jkl} [2\nu \delta_{ij} + (1-2\nu) \delta_{ik}] (n\omega_{k \cdot} \cdot i_l) i_j \right] ;$$

$$nM_{ii} = nG \sum_{j,k=1}^3 nD_{ij \cdot kj} (nK_{k \cdot} \cdot i_j) (nK_{k \cdot} \cdot i_j) / 12 ;$$

i=1,2,3.

Pojawiające się w tych wzorach symbole $nB_{ij \cdot kl}$, $nD_{ij \cdot kkl}$, $nD_{ij \cdot kkl}$ określające współczynniki sprężystości mają następujące znaczenia

$$(2.71) \quad nB_{ij \cdot kl} = \frac{1}{1-2\nu} \left[(1-2\nu) \delta_{ik} + 2\nu \delta_{kl} - \frac{1}{5} \right] \epsilon_{ijl} ;$$

$$nD_{ij \cdot kkl} = \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl} \left[2\delta_{ik} (nA_i - n\tilde{A}_i) + \frac{1+2nA_i}{1+2nA_k} (1+2n\tilde{A}_k) + \right. \\ \left. + 1+2n\tilde{A}_i \right] +$$

$$+ (1 - \delta_{ij}) \left[\delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{2}{1 - 2n\nu} \left(2_n A_i - \frac{1 + 2_n A_i}{1 + 2_n A_j} \right) \left[\delta_{ik} \delta_{jl} (1 - n\nu) - n\nu \delta_{il} \delta_{jk} \right] \right];$$

$${}_n D_{ij,kl} = \delta_{jl} {}_n D_{ij,kj},$$

$${}_n D_{ij,kj} = \delta_{ik} \left[2 \delta_{ij} {}_n A_i + (1 - \delta_{ij}) \left[\frac{1}{5} + \frac{2(1 - n\nu)}{1 - 2n\nu} \frac{{}_n A_i (1 + 2_n A_j)}{{}_n B_i (1 + 2_n A_i)} \right] \right] - \frac{2n\nu}{1 - 2n\nu} \delta_{ijk}.$$

Ponadto w celu uproszczenia postaci przedstawionych wzorów oraz notacji wzorów w dalszych częściach opracowania wprowadzono następujące uogólnione parametry geometryczne ${}_n A_i$, ${}_n \tilde{A}_i$, ${}_n B_i$, ${}_n \tilde{B}_i$ związane z wymiarami $(n_i) d_i$ komórek n za pomocą wzorów

$$(2.72) \quad \begin{aligned} {}_n A_i &= \frac{1}{2} (n_i) d_i^{-2} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) d_k^2, \\ {}_n \tilde{A}_i &= \frac{1}{2} (n_i) d_i^{-2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} (n_j) d_j^2, \\ {}_n B_i &= \frac{1}{2} (n_i) d_i^2 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) d_k^{-2}, \\ {}_n \tilde{B}_i &= -\frac{1}{2} (n_i) d_i^2 \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} (n_j) d_j^{-2}. \end{aligned}$$

Występujące w nich symbole δ_{ik} są deltami Kroneckera o własnościach

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i=k \\ 0 & \text{dla } i \neq k \end{cases}.$$

Natomiast $\epsilon_{ijk} = (\mathbf{i}_i \times \mathbf{j}_j) \cdot \mathbf{i}_k$ są symbolami permutacyjnymi o następujących własnościach: ϵ_{ijk} znika o ile dwa wskaźniki są identyczne; $\epsilon_{ijk} = 1$ jeśli wskaźniki wykazują parzystą permutację liczb 1, 2, 3; $\epsilon_{ijk} = -1$ gdy wskaźniki tworzą nieparzystą permutację liczb 1, 2, 3.

Ponieważ wielkości ${}_n A_i$, ${}_n \tilde{A}_i$, ${}_n B_i$, ${}_n \tilde{B}_i$ nie są niezależne, przeto zachodzą między nimi oraz wymiarami $(n_i) d_i$ następujące

zależności

$$\begin{aligned}
 (2.74) \quad n A_i / n B_i &= n \tilde{A}_i / n \tilde{B}_i = n v^e_{(\eta_i)} d_i^{-6} , \\
 n A_i n B_i - n \tilde{A}_i n \tilde{B}_i &= 1 , \\
 n A_i^e - n \tilde{A}_i^e &= \frac{1}{n B_i^e - n \tilde{B}_i^e} = n v^e_{(\eta_i)} d_i^{-6} , \\
 (n_i) d_i^2 (n_k) d_k^{-2} &= \frac{1 + 2 n A_k}{1 + 2 n A_i} = \frac{1 + 2 n B_i}{1 + 2 n B_k} ,
 \end{aligned}$$

które to wielokrotnie będą wykorzystywane w dalszych częściach pracy.

Rozpatrując równania równowagi (2.58) sił powierzchniowych i objętościowych komórki n spostrzegamy, że równania (2.58)₂ po podstawieniu wzorów (2.70)₁ na wektory $n q_i$ są spełnione tożsamościowo. Natomiast podstawienie do równań równowagi (2.58)₁ wzorów (2.70)₃ na współczynniki wektorowe $n q_{i\bar{j}}$ daje wyrażenie wektora

$$\begin{aligned}
 (2.74) \quad n W &= -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^3 n v_r + \frac{5}{2} \sum_{j,r=1}^3 n A_{j\bar{r}} (1 - 2 n v + \delta_{jr}) (n v_r \cdot i_j) i_j + \\
 &+ \frac{5}{24} \sum_{j=1}^3 n A_{j\bar{j}} (n_j) d_j^2 \left[\sum_{p,m=1}^3 \epsilon_{pmj} (n g_{pp} \cdot i_m) + \frac{1 - 2 n v}{n G} (n f \cdot i_j) \right] i_j ,
 \end{aligned}$$

przy następujących znaczeniach symboli

$$(2.75) \quad n A_{j\bar{i}} = \frac{1}{1 + (1 - 2 n v)(1 + 2 n B_j)} (n_j) d_j^2 (n_i) d_i^{-2} \quad i, j=1, 2, 3$$

spełniających równości

$$\sum_{j=1}^3 n A_{j\bar{j}} (1 - 2 n v + \delta_{jj}) = 1 .$$

Eliminując ze wzorów (2.70)₃ wyrażenia $\sum_{r=1}^3 n v_r + 2 n W$ za pomocą wzorów (2.74) mamy po uporządkowaniu składników wyrażenia związku fizyczne na wektory

$$(2.75) \quad n q_{i\bar{j}} = -\sum_{j=1}^3 n A_{j\bar{i}} (1 - 2 n v + \delta_{ij}) (n f \cdot i_j) i_j +$$

$$+ {}_n G \left[12 \frac{d_r^2}{(n_r)} \sum_{j,k=1}^3 {}_n A_{vij.kj} ({}^n v_k \cdot i_j) i_j + \sum_{j,k,l=1}^3 {}_n C_{vij.kkl} ({}^n \mathcal{G}_{kk} \cdot i_l) i_j \right]$$

spełniające równania równowagi (2.58)₁, w których współczynniki sprężystości ${}_n A_{vij.kj}$, ${}_n C_{vij.kkl}$ są określone za pomocą wzorów

$$(2.76) \quad {}_n A_{vij.kj} = 2(1-{}^n \nu) \delta_{ij} {}_n A_{rk} [\delta_{rk} (1+2{}^n B_i) - 1] + \\ + (1-\delta_{ij}) [\delta_{rk} - {}_n A_{jk} (1-2{}^n \nu + \delta_{jk})],$$

$${}_n C_{vij.kkl} = \epsilon_{jkl} [\delta_{ij} {}_n A_{rk} [-1+2{}^n \nu(1+2{}^n B_i)] - {}_n A_{jk} + \delta_{rk}].$$

w dalszym ciągu wyprowadzania wzorów opisujących związki fizyczne komórki ${}_n$ podstawiamy do wzoru (2.70)₁ przepisanego w następującej równoważnej postaci

$$(2.77) \quad {}_n q_i = \sum_{j,k,l=1}^3 \left[{}_n G {}_n \overset{\circ}{A}_{(ij)(kl)} {}^n v_{kk} - \frac{1}{2} [\epsilon_{ijl} (\delta_{kl} + 2\delta_{kj}) + \delta_{kl} \delta_{ijl}] {}_n m_{kk} \right] \cdot i_l i_j,$$

wzory (2.70)₄. Stąd, po uwzględnieniu znaczeń (2.71)₃ symboli ${}_n D_{vij.kj}$ oraz po wprowadzeniu następujących oznaczeń współczynników sprężystości

$$(2.78) \quad {}_n C_{ij.kl} = -\delta_{ik} {}_n A_l (\epsilon_{ijk} + \delta_{ijk}) - \\ - \epsilon_{ijl} \left\{ \delta_{jk} \left[\frac{1}{5} + \frac{2(1-{}^n \nu)}{1-2{}^n \nu} \frac{{}_n A_j (1+2{}^n A_u)}{{}_n B_j (1+2{}^n A_j)} \right] - \frac{2{}^n \nu}{1-2{}^n \nu} \delta_{ik} \right\}$$

otrzymujemy wyrażenia na wektorowe współczynniki

$${}_n q_i = {}_n G \sum_{j,k,l=1}^3 \left[{}_n \overset{\circ}{A}_{(ij)(kl)} {}^n v_{kk} + {}_n C_{ij.kl} {}_n k_k ({}^n k_k) d_r^e / 12 \right] \cdot i_l i_j.$$

w tym ostatnim wzorze oraz we wzorze (2.70)₄ występują wektory ${}_n k_i$ ($i=1,2,3$) związane z wektorami ${}_n \mathcal{G}_i$ oraz ${}^n v_{kk}$, ($i \neq k$)

za pomocą wzorów (2.15)₃. Uwzględnienie ich daje związki fizyczne na wektorowe współczynniki ${}^n q_i$, ${}^n m_i$ o następujących postaciach

$$(2.79) \quad {}^n q_i = {}^n G \left[\sum_{j,k,l=1}^3 {}^n A_{ij.kkl} ({}^n v_{kl} \cdot i_l) i_j + \sum_{j,k,l=1}^3 {}^n C_{ij.kl} ({}^n \varphi_k \cdot i_l) i_j \right],$$

$${}^n m_{ii} = {}^n G \left[\sum_{j,k,l=1}^3 {}^n D_{ij.kl} ({}^n \varphi_k \cdot i_j) i_j + \sum_{j,k,l=1}^3 {}^n B_{ij.kkl} ({}^n v_{kl} \cdot i_l) i_j \right]$$

przy znaczeniach współczynników sprężystości określonych za pomocą wzorów

$$(2.80) \quad {}^n A_{ij.kkl} = {}^n \overset{\circ}{A}_{(ij)(kl)} +$$

$$+ (1 - \delta_{ij}) \left\{ \delta_{ik} \delta_{jl} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sum_{p=1}^3 \epsilon_{ijp} \right) \left[\frac{{}^n B_i (1 + 2 {}^n A_i)}{{}^n A_i (1 + 2 {}^n A_j)} + \frac{{}^n B_j (1 + 2 {}^n A_j)}{{}^n A_j (1 + 2 {}^n A_i)} \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5} + \frac{2(1 - \nu)}{(1 - 2\nu)(1 + 2 {}^n A_i)} \right] + \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \delta_{il} \delta_{jk} \right\},$$

$${}^n B_{ij.kkl} = -\delta_{ij} {}^n A_j (\epsilon_{klj} + \varrho_{klj}) -$$

$$- \epsilon_{klj} \left\{ \delta_{il} \left[\frac{1}{5} + \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \frac{{}^n A_i (1 + 2 {}^n A_j)}{{}^n B_i (1 + 2 {}^n A_i)} \right] - \frac{2\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ik} \right\}.$$

Zestawiając wyprowadzone wzory (2.70)₂, (2.75), (2.79) mamy komplet związków fizycznych komórki n w postaci

$$(2.81) \quad {}^n q_i = {}^n G \sum_{j,k,l=1}^3 [{}^n A_{ij.kkl} {}^n v_{kl} + {}^n C_{ij.kl} {}^n \varphi_k] \cdot i_l i_j,$$

$${}^n m_i = {}^n G \sum_{j,k,l=1}^3 \left[-\frac{2}{5(1 - 2\nu)} \epsilon_{ijl} \delta_{ik} {}^n w + {}^n B_{ij.kl} {}^n v_k + \right.$$

$$\left. + ({}^n \nu) d_i^2 / 12 {}^n D_{ij.kkl} {}^n \varphi_{kk} \right] \cdot i_l i_j,$$

$${}^n q_{ii} = -\sum_{j=1}^3 {}^n A_{ji} (1 - 2\nu + \delta_{ij}) ({}^n f \cdot i_j) i_j +$$

$$+ {}^n G \sum_{j,k,l=1}^3 \left[12 ({}^n \nu) d_i^2 {}^n A_{ij.kj} \delta_{il} {}^n v_k + {}^n C_{ij.kkl} {}^n \varphi_{kl} \right] \cdot i_l i_j,$$

$${}^n m_{ij} = {}^n G \sum_{j,k,l=1}^3 \left[{}^n D_{ijj \cdot kj} \delta_{jl} {}^n \mathcal{G}_k + {}^n B_{ijj \cdot kkl} {}^n v_{kl} \right] \cdot i_l i_j, \quad i=1,2,3.$$

Jeżeli zmienne kinematyczne deformacji ${}^n v_i$, ${}^n v_{ij}$, ${}^n \mathcal{G}_i$, ${}^n \mathcal{G}_{ij}$ wyrazimy przez nowe zmienne ${}^n v_i^*$, ${}^n v_{ij}^*$, ${}^n \mathcal{G}_i^*$, ${}^n \mathcal{G}_{ij}^*$ związane z nimi zależnościami

$$(2.82) \quad \begin{aligned} {}^n v_i &= {}^n w + {}^n v_i^*, \\ {}^n v_{ij} &= {}^n \alpha \times i_j + {}^n v_{ij}^*, \\ {}^n \mathcal{G}_i &= {}^n \alpha + {}^n \mathcal{G}_i^*, \\ {}^n \mathcal{G}_{ij} &= {}^n \mathcal{G}_{ij}^*, \end{aligned}$$

w których wektory ${}^n w$, ${}^n \alpha$ opisują odpowiednio sztywne przesunięcie i obrót komórki n , to uwzględniając wynikające z definicji współczynników sprężystości następujące równości

$$(2.83) \quad \begin{aligned} \sum_{k=1}^3 {}^n B_{ijj \cdot kkl} &= -\frac{2}{5(1-2\nu)} \epsilon_{ijl} \delta_{lk}, \\ \sum_{k=1}^3 {}^n A_{ijj \cdot kj} &= 0, \\ \sum_{k,r=1}^3 {}^n A_{ijj \cdot kkr} \epsilon_{lkr} + \sum_{k=1}^3 {}^n C_{ij \cdot kl} &= 0, \\ \delta_{jl} \sum_{k=1}^3 {}^n D_{ijj \cdot kj} + \sum_{k,m=1}^3 {}^n B_{ijj \cdot kkm} \epsilon_{lkm} &= 0 \end{aligned}$$

możemy wyrazić związki fizyczne (2.81) również w następującej postaci

$$(2.84) \quad \begin{aligned} {}^n q_j &= {}^n G \sum_{j,k,l=1}^3 \left[{}^n A_{ijj \cdot kkl} {}^n v_{kl}^* + {}^n C_{ij \cdot kl} {}^n \mathcal{G}_k^* \right] \cdot i_l i_j, \\ {}^n m_i &= {}^n G \sum_{j,k,l=1}^3 \left[{}^n B_{ijj \cdot kl} {}^n v_{kl}^* + ({}^n \nu) d_i^e / 2 {}^n D_{ijj \cdot kkl} {}^n \mathcal{G}_{kl}^* \right] \cdot i_l i_j, \\ {}^n q_{ij} &= -\sum_{j=1}^3 {}^n A_{ijl} (1-2\nu + \delta_{ij}) ({}^n f \cdot ij) i_j + \end{aligned}$$

$$+ {}_n G \sum_{j,k,l=1}^3 \left[12 {}_{(n_i)} d_i^{-2} {}_n A_{ij \cdot kj} \delta_{jl} {}_n v_k^* + {}_n C_{ij \cdot kkl} {}_n \mathcal{G}_{kc}^* \right] \cdot i_l i_j,$$

$${}_n m_{ii} = {}_n G \sum_{j,k,l=1}^3 \left[{}_n D_{ij \cdot kj} \delta_{jl} {}_n \mathcal{G}_{kc}^* + {}_n B_{ij \cdot kkl} {}_n v_{kc}^* \right] \cdot i_l i_j,$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Przejdziemy z kolei do wyprowadzenia wzorów określających związki fizyczne komórki ${}_n$ wzajemne względem związków (2.81), t.j. wyrażających zmienne kinematyczne ${}_n v_i$, ${}_n v_{ii}$, ${}_n \mathcal{G}_i$, ${}_n \mathcal{G}_{ii}$ deformacji poprzez wektorowe współczynniki napięć ${}_n q_i$, ${}_n q_{ii}$, ${}_n m_i$, ${}_n m_{ii}$ w stanach równowagi.

Wzory na składowe ${}_n \mathcal{G}_{ii} \cdot i_i$ ($i=1,2,3$) wyprowadzimy mnożąc skalarnie obie strony wzorów (2.81) przez wersory i_i . Stąd otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych względem składowych

$$(2.85) \quad \left[{}_n A_i - {}_n \tilde{A}_i \right] ({}_n \mathcal{G}_{ii} \cdot i_i) + \frac{1}{2} (1 + 2 {}_n \tilde{A}_i) \sum_{k=1}^3 {}_n \mathcal{G}_{kc} \cdot i_c + \\ + \frac{1}{2} (1 + 2 {}_n A_i) \sum_{k=1}^3 \frac{1 + 2 {}_n \tilde{A}_k}{1 + 2 {}_n A_k} ({}_n \mathcal{G}_{kc} \cdot i_k) = 12 {}_{(n_i)} d_i^{-2} \frac{1}{{}_n G} ({}_n m_{ii} \cdot i_i).$$

Rozwiązaniem tego układu równań jest

$$(2.86) \quad {}_n \mathcal{G}_{ii} \cdot i_i = \frac{12}{{}_n G} {}_{(n_i)} d_i^{-2} \sum_{k=1}^3 {}_n d_{iii \cdot kkk} ({}_n m_{kk} \cdot i_k)$$

przy następujących znaczeniach symboli

$$(2.87) \quad {}_n d_{iii \cdot kkk} = \frac{1}{4} \left[{}_{(n_k)} d_k^{-e} {}_{(n_i)} d_i^e (1 - 2 {}_n \tilde{B}_k) + \frac{e}{{}_n A_i - {}_n \tilde{A}_i} (2 \delta_{ik} - 1) \right].$$

Z kolei mnożąc obie strony wzoru (2.70)₂ przez wektory $(1 - \delta_{ij}) i_j$ a następnie eliminując z otrzymanych w ten sposób równań wyrażenia

$$(2.88) \quad 5 {}_n v_r - \sum_{l=1}^3 {}_n v_l - 2 {}_n w =$$

$$= \frac{5(n_r)d_r^2}{12} \left[\frac{1}{2nG(1+n\nu)} \sum_{j=1}^3 [\varepsilon(1-n\nu) - \delta_{rj}] (nq_{rr} \cdot i_j) i_j - \sum_{p,m,j=1}^3 \epsilon_{pmj} [\delta_{rp} + \frac{n\nu}{1-n\nu} \delta_{rj}] (nq_{pp} \cdot i_m) i_j \right]$$

uzyskane na podstawie wzorów (2.70)₃, znajdujemy po przekształceniach równania

$$(2.89) \quad \left[nq_{ii} \cdot i_j - n\nu (nq_{jj} \cdot i_i) \right] (1 - \delta_{ij}) = \\ = (1 - \delta_{ij}) \frac{6(n_i)d_i^2}{nG} (1 - n\nu) \frac{1 + 2nA_j}{4nA_i nA_j - 1} \left[n m_{i \cdot i_j} - \sum_{r,s=1}^3 \frac{(n_r)d_r^2}{12} (\delta_{ir} + \delta_{rs} \frac{n\nu}{1-n\nu}) \epsilon_{ijs} (nq_{rs} \cdot i_s) \right].$$

wyznaczone na podstawie ich rozwiązania wyrażenia na składowe $(1 - \delta_{ij})(nq_{ii} \cdot i_j)$ mają postać

$$(1 - \delta_{ij})(nq_{ii} \cdot i_j) = \\ = (1 - \delta_{ij}) \frac{6(n_i)d_i^2}{nG(1+n\nu)} \frac{1 + 2nA_j}{(4nA_i nA_j - 1)} \left[n m_{i \cdot i_j} + n\nu (n m_{j \cdot i_i}) - \sum_{k,l=1}^3 (n_k)d_k^2/12 [\delta_{ik} + (\delta_{kl} - \delta_{kj})n\nu] \epsilon_{ijl} (nq_{kl} \cdot i_l) \right].$$

Stąd też oraz wykorzystując wzory (2.86) mamy następujące wzory na wektory

$$(2.90) \quad nq_{ii} = \frac{12(n_i)d_i^2}{nG} \sum_{j,k,l=1}^3 n d_{ij \cdot j \cdot kl} (n m_{k \cdot i_l}) i_j + \\ - \frac{(n_i)d_i^2}{2nG(1+n\nu)} \sum_{j,k,l=1}^3 (n_k)d_k^2 \frac{1 + 2nA_j}{4nA_i nA_j - 1} [\delta_{ik} + (\delta_{kl} - \delta_{kj})n\nu] \epsilon_{ijl} (nq_{kl} \cdot i_l) i_j.$$

Występujące w (2.90) symbole $n d_{ij \cdot j \cdot kl}$ są współczynnikami podatności o następujących znaczeniach

$$(2.91) \quad n d_{ij \cdot j \cdot kl} = \delta_{ij} \delta_{kl} n d_{iij \cdot j \cdot kk} +$$

$$+ (1 - \delta_{ij}) \frac{1 + 2_n A_j}{2(1 + n\nu)(4_n A_i + 2_n A_j - 1)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + n\nu \delta_{il} \delta_{jk}).$$

Podstawienie do wzorów (2.90), wynikającego z równań równowagi (5.15)₁ wyrażenia na składowe

$$(2.92) \quad n q_{kk} \cdot i_l = -\delta_{kl} (n f \cdot i_k) + \sum_{r=1}^3 (1 - \delta_{rl}) (\delta_{rk} - \delta_{kl}) (n q_{rr} \cdot i_l)$$

daje po dokonaniu przekształceń związki fizyczne

$$(2.93) \quad n g_{ii} = \frac{n\nu}{2_n G(1 + n\nu)} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} (n f \cdot i_k) i_j + \\ + \frac{1}{n G} \sum_{j,k,l=1}^3 \left[12_{(n_i)} d_i^2 n d_{ij' \cdot kkl} n m_k + n c_{ijj \cdot kkl} n q_{kk} \right] \cdot i_l i_j$$

przy następujących znaczeniach współczynników podatności

$$(2.94) \quad n c_{ijj \cdot kkl} = -\frac{1}{2(1 + n\nu)} (1 - \delta_{kl}) \epsilon_{ijl} \left[\frac{1 + 2_n A_l}{1 + 2_n A_k} (\delta_{ik} - n\nu \delta_{jl}) - n\nu \right].$$

Następnie przejdziemy do wyprowadzenia związków fizycznych na wektory $n v_i$ podstawiając do otrzymanych na podstawie (2.83) wzorów

$$n v_i = n w + \frac{1}{2_n G} \sum_{j,k=1}^3 \left[1 - \frac{1}{2(1 - n\nu)} \delta_{kj} \right] (1 + 2\delta_{ik}) \frac{(n_k) d_k^2}{12} (n q_{kk} \cdot i_j) i_j - \\ - \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^3 \epsilon_{klj} \left[\frac{(n_k) d_k^2}{12} (2\delta_{ik} + 1) + \frac{(n_j) d_j^2}{12} - \frac{n\nu}{1 - n\nu} (2\delta_{ij} - 1) \right] (n q_{kk} \cdot i_l) i_l$$

wyrażen (2.92) na składowe $n q_{kk} \cdot i_j$ oraz wyrażen na składowe $n g_{kk} \cdot i_l$ wynikających ze wzorów (2.9). Stąd znajdujemy po przekształceniach związki

$$(2.95) \quad n v_i = n w - \\ - \frac{1}{4_n G(1 + n\nu)} \sum_{j=1}^3 \left[1 + 2\delta_{ij} + 2_n \nu (n A_j + (1 - \delta_j) \frac{1 + 2_n A_j}{1 + 2_n A_i}) \right] \frac{(n_j) d_j^2}{12} (n f \cdot i_j) i_j + \\ + \frac{1}{n G} \sum_{j,k,l=1}^3 \left[(n_i) d_i^2 / 12 n a_{ij \cdot kkl} n q_{kk} + n b_{ij \cdot kkl} n m_k \right] \cdot i_l i_j.$$

Pojawiające się we wzorach symbole ${}_n a_{ij,kl} = {}_n a_{ij,kl} \delta_{ij}$,
 ${}_n b_{ij,kl}$ współczynników podatności mają następujące znaczenia

$$(2.96) \quad {}_n a_{ij,kl} = \frac{1}{4(1+n)} \frac{1+2{}_n A_i}{1+2{}_n A_r} (1-\delta_{jk}) \left[(1+2\delta_{ik}) (2+n) + \right. \\ \left. + \frac{1+2{}_n A_j}{1+2{}_n A_k} \right] + (1+2\delta_{ij}) \left(n - \frac{1+2{}_n A_k}{1+2{}_n A_j} \right) - n (1+ \\ + \frac{1+2{}_n A_j}{1+2{}_n A_k}) \left(2 \frac{{}_n A_j}{1+2{}_n A_j} \frac{1+2{}_n A_k}{1+2{}_n A_j} - 1 + 2 \frac{1+2{}_n A_k}{1+2{}_n A_i} \delta_{ijk} \right),$$

$${}_n b_{ij,kl} = -\frac{1}{4(1+n)} \epsilon_{klj} \left[\frac{1+2{}_n A_j}{1+2{}_n A_k} (1+2\delta_{ik}) - \right. \\ \left. - \frac{1+2{}_n A_j}{1+2{}_n A_l} (1+2\delta_{il}) n + n (1+2\delta_{ij}) \right].$$

Związki fizyczne opisujące wektory ${}_n \mathbf{v}_{ij}$ wyprowadzimy przepisując wzory (2.77) na wektory ${}_n \mathbf{q}_i$ w postaci

$$\sum_{k,l=1}^3 {}_n \hat{a}_{(pq)(kl)} [{}_n \mathbf{v}_{kl} \cdot \mathbf{i}_l] = \frac{1}{nG} \left[{}_n \mathbf{q}_p \cdot \mathbf{i}_q + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^3 \left[\epsilon_{pql} (\delta_{kl} + 2\delta_{kq}) + \delta_{kl} \delta_{pql} \right] {}_n \mathbf{m}_{kl} \cdot \mathbf{i}_l \right]$$

Mnożąc następnie obie strony tej równości przez współczynniki podatności ${}_n \hat{a}_{(pq)(ij)}$ określone za pomocą wzoru (2.39) oraz sumując obie strony równań względem wskaźników $p, q = 1, 2, 3$ znajdujemy po uwzględnieniu równości (2.41) zależności

$$(2.97) \quad \frac{1}{2} ({}_n \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{i}_j + {}_n \mathbf{v}_{ji} \cdot \mathbf{i}_i) = \frac{1}{nG} \left[\sum_{k,l=1}^3 {}_n \hat{a}_{(ij)(kl)} ({}_n \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{i}_l) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \sum_{k,l=1}^3 \left[\epsilon_{ijl} (\delta_{jk} - \delta_{ik}) + \delta_{kl} \delta_{ijl} \right] ({}_n \mathbf{m}_{kl} \cdot \mathbf{i}_l) \right].$$

Na ich podstawie związki fizyczne na wektorowe współczynniki można przedstawić w postaci

$$(2.98) \quad \begin{aligned} {}_n \mathbf{v}_{ii} = & \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \times {}_n \mathbf{v}_{jj} \right) \times \mathbf{i}_i + \\ & + \frac{1}{nG} \sum_{j,k,l=1}^3 \left({}_n a_{ijj.kkl} {}_n q_k + {}_n b_{vij.kkl} {}_n m_{kk} \right) \cdot \mathbf{i}_l \mathbf{i}_j, \end{aligned}$$

przy znaczeniach współczynników podatności

$$(2.99) \quad \begin{aligned} {}_n a_{ijj.kkl} &= {}_n \bar{a}_{(ij)(kl)}, \\ {}_n b_{vij.kkl} &= \frac{1}{4} \left[\epsilon_{ijl} (\delta_{jk} - \delta_{ik}) + \delta_{kl} g_{ijl} \right]. \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (2.14)₃ po uwzględnieniu (2.98 - 2.99) i dokonaniu przekształceń mamy wyrażenia na wektory

$$(2.100) \quad \begin{aligned} {}_n \mathcal{G}_i = & (n_i) d_i^2 / 12 {}_n \mathbf{k}_i + 1/2 \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \times {}_n \mathbf{v}_{kk} + \\ & + \frac{1}{4nG} \left\{ \sum_{j,k,l=1}^3 \left[(\delta_{iv} - \delta_{ik}) \epsilon_{klj} + \delta_{ij} g_{klj} \right] ({}_n q_k \cdot \mathbf{i}_l) \mathbf{i}_j + \right. \\ & \left. + \sum_{j,k=1}^3 \left[\delta_{ik} - g_{ikj} + (\delta_{kj} - \delta_{ij}) \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ikl} \right] ({}_n m_{kk} \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_j \right\} \end{aligned}$$

Podstawiając do (2.100) wyrażenia na wektory

$$(2.101) \quad {}_n \mathbf{k}_i = 12 (n_i) d_i^{-2} \frac{1}{nG} \sum_{j,k=1}^3 \left(\frac{1}{2nA_i} \delta_{ij} \delta_{kj} + {}_n d_{ijj} \right) ({}_n m_{kk} \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_j,$$

otrzymane na podstawie rozwiązania równań (2.70)₄ względem składowych wektorów ${}_n \mathbf{k}_i$ ($i=1,2,3$), mamy

$$(2.102) \quad \begin{aligned} {}_n \mathcal{G}_i = & 1/2 \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \times {}_n \mathbf{v}_{kk} + \\ & + \frac{1}{nG} \left[\sum_{j,k=1}^3 {}_n d_{ijj.kkl} ({}_n m_{kk} \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_j + \sum_{j,k,l=1}^3 {}_n c_{vij.kkl} ({}_n q_k \cdot \mathbf{i}_l) \mathbf{i}_j \right], \end{aligned}$$

przy następujących znaczeniach symboli współczynników podatności

$$(2.103) \quad {}_n d_{ij, k k j} = \frac{1}{2} \frac{1}{n A_i} \delta_{ij} \delta_{kj} + {}_n d_{ijk} + \frac{1}{4} [\delta_{ik} - \delta_{ikj} + (\delta_{ij} - \delta_{ij}) \sum_{l=1}^3 \epsilon_{ikl}],$$

$${}_n c_{ij, kl} = \frac{1}{4} [\epsilon_{klj} (\delta_{il} - \delta_{ik}) + \delta_{ij} g_{klj}],$$

w których symbole ${}_n d_{ijk}$, ${}_n d_{ij}$ są określone za pomocą wzorów

$$(2.104) \quad {}_n d_{ijk} = {}_n d_{ij} \left[\delta_{ik} (1 - \delta_{ij}) (1 - 2 {}_n \nu + 10(1 - {}_n \nu) \frac{{}_n B_i (1 + 2 {}_n A_i)}{{}_n A_i (1 + 2 {}_n A_i)}) + 10 {}_n \nu \delta_{ijk} \right],$$

$${}_n d_{ij} = \frac{5}{1 - 2 {}_n \nu + 10(1 - {}_n \nu) \left[\frac{{}_n A_i (1 + 2 {}_n A_i)}{{}_n B_i (1 + 2 {}_n A_i)} + \frac{{}_n B_i (1 + 2 {}_n A_i)}{{}_n A_i (1 + 2 {}_n A_i)} \right] + 100}.$$

Uwzględniając we wzorach (2.98), (2.102) wynikające z równań równowagi (2.58)₂ zależności składowych

$$(2.105) \quad {}_n m_{kk} \cdot i_l = - \sum_{r,s=1}^3 \epsilon_{rsk} \delta_{kl} ({}_n q_r \cdot i_s) + \sum_{r=1}^3 (1 - \delta_{lr}) (\delta_{kr} - \delta_{kl}) ({}_n m_{rr} \cdot i_l)$$

mamy po przekształceniach związki fizyczne

$$(2.106) \quad {}_n v_{ii} = \frac{1}{\rho} \left(\sum_{j=1}^3 i_j \times {}_n v_{ij} \right) \cdot i_l + \frac{1}{nG} \sum_{k,l=1}^3 ({}_n a'_{ij,kl} {}_n q_k + {}_n b'_{ij,kl} {}_n m_{kl}) \cdot i_l i_j,$$

$${}_n g_i = \frac{1}{\rho} \sum_{k=1}^3 i_k \times {}_n v_{ik} + \frac{1}{nG} \sum_{j,k,l=1}^3 ({}_n d'_{ij,kk} \delta_{jl} {}_n m_{kk} + {}_n c'_{ij,kl} {}_n q_k) \cdot i_l i_j,$$

w których współczynniki podatności oznaczone przecinkiem w górnej frakcji mają następujące znaczenia

$$\begin{aligned}
(2.107) \quad n a'_{ij,kl} &= n a_{ij,kl} - \sum_{m=1}^3 n b_{ij,mm} n e_{klm} \\
&= n \hat{a}_{(ij)(kl)} - \frac{1}{4} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) \sum_{m=1}^3 e_{ijm}, \\
n b'_{ij,kl} &= (1 - \delta_{ik}) \sum_{r=1}^3 n b_{ij,rkl} (\delta_{rk} - \delta_{rl}) = \\
&= \frac{1}{4} (1 - \delta_{ik}) [\epsilon_{ijl} (\delta_{jk} - \delta_{ik}) - \varrho_{ijl}], \\
n d'_{ij,kl} &= (1 - \delta_{jk}) \sum_{r=1}^3 (\delta_{kr} - \delta_{jr}) n d_{ij,rkl} = (1 - \delta_{jk}) \left[-\frac{1}{2} A_i \delta_{ij} + \right. \\
&\quad \left. + n d_{ijk} + \frac{1}{4} (\delta_{ik} - \delta_{ij} - \varrho_{ikj} - \delta_{ij} \sum_{p=1}^3 \epsilon_{ikp} - \sum_{p=1}^3 \epsilon_{ijp}) \right], \\
n c'_{ij,kl} &= n c_{ij,kl} - n d_{ij,jll} \epsilon_{klj} = \\
&= -\frac{1}{2} A_i \delta_{ij} \epsilon_{klj} + \frac{1}{4} (2\delta_{il} - 1) (\epsilon_{klj} - \varrho_{klj}).
\end{aligned}$$

Podstawiając odpowiednio do wzorów (2.82) wzory (2.93), (2.95), (2.106) mamy po uwzględnieniu określenia wektora

$$n \mathcal{X} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \times n \mathbf{v}_{kt}$$

komplet związków fizycznych wyrażających wektory $n \mathbf{v}_i^*$, $n \mathcal{G}_i^*$, $n \mathbf{v}_{ii}^*$, $n \mathcal{G}_{ii}^*$ uogólnioną deformacji komórki n przez składowe wektorowych współczynników $n q_i$, $n m_i$ oraz składowe $n q_{ii}^{\cdot i}$, $n m_{ii}^{\cdot i}$ przy $i \neq j$ wektorowych współczynników $n q_{ij}$, $n m_{ij}$ napięć powierzchniowych o następującej postaci

$$\begin{aligned}
(2.108) \quad n \mathbf{v}_i^* &= -\frac{1}{4 n G (1 + n \nu)} \sum_{j=1}^3 \left[1 + 2\delta_{ij} + 2\nu (n A_j + \right. \\
&\quad \left. + (1 - \delta_{ij}) \frac{1 + 2n A_j}{1 + 2n A_i} \right] \left[\frac{(n_j d_j^e}{12} - (n f \cdot i)_j \right] \mathbf{i}_j + \\
&\quad + \frac{1}{n G} \sum_{j,kl=1}^3 \left[(n_{ij} d_{ij}^e / 12 n a_{ij,kl} \delta_{jl} n q_{kt} + n b_{ij,kl} n m_t \right] \cdot \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_j,
\end{aligned}$$

$$n\mathcal{G}_i^* = \frac{1}{nG} \sum_{j,k,l=1}^3 (n d'_{ij,kl} \delta_{jl} n m_{kl} + n c'_{ij,kl} n q_k) \cdot i_l i_j,$$

$$n\mathcal{V}_{ii}^* = \frac{1}{nG} \sum_{j,k,l=1}^3 (n a'_{ij,kl} n q_k + n b'_{ij,kl} n m_{kl}) \cdot i_l i_j,$$

$$n\mathcal{G}_{ii}^* = \frac{n\nu}{2nG(1+n\nu)} \sum_{j,r,k=1}^3 \epsilon_{ijk} (n f \cdot i_k) i_j + \\ + \frac{1}{nG} \sum_{j,k,l=1}^3 (12_{(n_i)} d_i^2 n d'_{ij,kl} n m_k + n c'_{ij,kl} n q_{kk}) \cdot i_l i_j.$$

Zależności zachodzące pomiędzy współczynnikami sprężystości i współczynnikami podatności komórki n otrzymamy podstawiając do wzorów (2.81) na wektorowe współczynniki nq_j , nm_i , nq_{ij} , nm_{ij} odpowiednio wzory (2.93), (2.95), (2.98), (2.102). Stąd, po uporządkowaniu wyrażeń znajdujemy na podstawie zachodzących równości następujące związki

(2.109)

$$\sum_{k,l=1}^3 [n A_{ij,kl} n a_{kk,rs} + n C_{ij,kl} n c_{kl,rs}] = \frac{1}{2} (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{jr} \delta_{is}),$$

$$\sum_{k,l=1}^3 [n A_{ij,kl} n b_{kk,rrs} + n C_{ij,kl} n d_{kl,rrs}] = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijs},$$

$$\sum_{r,s=1}^3 [(n_r) d_r^2 n B_{ij,rs} n a_{rs,ppm} + (n_i) d_i^2 n D_{ij,rrs} n c_{rrs,ppm}] = 0,$$

$$\sum_{r,s=1}^3 [n B_{ij,rs} n b_{rs,ppm} + (n_i) d_i^2 (n_r) d_r^2 n D_{ij,rrs} n d_{rrs,ppm}] = \delta_{pr} \delta_{ij},$$

$$(n_i) d_i^2 \sum_{k=1}^3 n A_{ij,kj} n b_{kj,rs} + \sum_{k,l=1}^3 (n_k) d_k^2 n C_{ij,kl} n d_{kk,rs} = 0,$$

$$(n_i) d_i^2 \sum_{k=1}^3 n A_{ij,kj} (n_k) d_k^2 n a_{kj,rrs} + \sum_{k,l=1}^3 n C_{ij,kl} n c_{kk,rrs} =$$

$$= (1 - \delta_{jr}) \delta_{js} (\delta_{ir} - \delta_{ij}),$$

$$\sum_{r,s=1}^3 n D_{ij,rs} n d_{rs,ppm} + n B_{ij,rrs} n b_{rrs,ppm} = \delta_{pi} \delta_{mj},$$

$$\sum_{r,s=1}^3 n D_{ij,rs} n c_{rs,pm} + n B_{ij,rrs} n a_{rrs,pm} = 0.$$

Przy wyprowadzaniu powyższych wzorów wykorzystano następujące równości wynikające z definicji współczynników sprężystości i podatności

$$(2.110) \quad \sum_{r,s=1}^3 n A_{ij,rrs} \epsilon_{mrs} + \sum_{r=1}^3 n C_{ij,rm} = 0,$$

$$\sum_{r=1}^3 n B_{ij,rs} = \frac{2}{5(1-2\nu)} \epsilon_{ijs},$$

$$-\frac{1}{2} (n_s) d_s^2 \sum_{r=1}^3 n B_{ij,rs} \left[1 + 2\delta_{rs} + 2\nu (n A_s + (1-\delta_{rs}) \frac{1+2\nu A_s}{1+2\nu A_r}) \right] +$$

$$+ (n_i) d_i^2 n \sum_{r,p=1}^3 n D_{ij,rrp} \epsilon_{rps} = 0,$$

$$\sum_{r=1}^3 (n_r) d_r^2 (n_r) d_r^{-2} n D_{ij,rrr} n d_{rrr,pp} = \delta_{pi},$$

$$\sum_{r=1}^3 n A_{ij,rj} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 (n_i) d_i^{-2} n A_{ij,kj} = 0, \quad \sum_{i=1}^3 n C_{ij,kkl} = 0,$$

$$n A_{ij} (1 - 2\nu + \delta_{ij}) + \frac{1}{4(1+\nu)} (n_i) d_i^{-2} (n_j) d_j^2 \sum_{k=1}^3 n A_{ij,kj} [1 + 2\delta_{kj} +$$

$$+ 2\nu [n A_j + (1 - \delta_{jk}) (n_k) d_k^2 (n_j) d_j^{-2}]] - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{kij} n C_{ij,kkl} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^3 n D_{ij,rm} + \sum_{r,s=1}^3 n B_{ij,rrs} \epsilon_{rs m} = 0.$$

Wprowadzone równania fizyczne komórki n o postaciach (2.81) lub (2.84) oraz (2.108) wraz z zależnościami (2.109) będą wykorzystywane w następnych punktach opracowania przy formułowaniu równań deformacji i napięć wielokomórkowych elementów makroskopowych a także ustrojów kompozytowych z nich złożonych.

2.7. Wyrażenia pól naprężeń przez oddziaływania zewnętrzne

W punkcie tym wyprowadzimy wzory opisujące pola naprężeń

$$n \hat{G}_i = n G_i + \sum_{k=1}^3 n G_{ki} \underset{(n_k)}{\xi}_k + \sum_{k,l=1}^3 n G_{(kl)i} \underset{(n_k)}{\xi}_k \underset{(n_l)}{\xi}_l$$

komórek n wyrażone przez siły objętościowe $n f$ oraz wektorowe współczynniki $n q_{ij}$, $n q'_{ij}$, $n m_i$, $n m_{ij}$; napięcie powierzchniowych $n \hat{p}_i$.

W tym celu wykorzystamy wzory (2.43) podstawiając na występujące w nich wektory $n v_{iv}$, $n k_i$, $n v_i$, $n \varphi_{iv}$ odpowiednio ich wyrażenia określone za pomocą wzorów: (2.106), (2.101), (2.95), (2.93). Następnie uwzględniając wzory (2.107), (2.99), (2.96), (2.94), (2.91) na współczynniki podatności oraz dokonując przekształceń znajdujemy wyrażenia na wektorowe współczynniki pól naprężeń o następującej postaci

$$(2.111) \quad n G_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[n q_{ij} \cdot i_j + n q'_{ij} \cdot i_j - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} (n q_{ij} \cdot i_j - n q'_{ij} \cdot i_j) i_k \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j,k,l=1}^3 (1 - \delta_{kl}) \left[\epsilon_{ijl} (\delta_{jk} + n d_{jvk}) + \epsilon_{jkl} (\delta_{ik} + n d_{jvk}) - \varphi_{ijl} \right] (n m_{kl} \cdot i_l) i_j, \\ n G_{ki} = -\delta_{ik} (n f \cdot i_i) i_k + \sum_{j,r,s=1}^3 (1 + \delta_{rs}) \left[-\delta_{ij} \delta_{ks} \left[\delta_{ik} + \delta_{ir} \frac{1 + 2n A_k}{1 + 2n A_r} \right] + \right. \\ \left. + \delta_{kr} (\delta_{ik} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jk}) \right] (n q_{rr} \cdot i_s) i_j + \\ + 3 \sum_{j,r=1}^3 \left[(\epsilon_{ijk} - \varphi_{ijk}) \frac{(n_j) d_j^{-2}}{n A_j - n \hat{A}_j} (2\delta_{ij} - 1) + (\epsilon_{jlk} - \varphi_{jlk}) \frac{(n_l) d_l^{-2}}{n A_l - n \hat{A}_l} (2\delta_{li} - 1) \right] (n m_{rs} \cdot i_r) i_j + 12 \underset{(n_k)}{d_k} \sum_{s=1}^3 \epsilon_{isk} (n m_{is} \cdot i_s) i_k, \\ n G_{(kl)i} = 6 \sum_{j,t,s,r=1}^3 \underset{(n_s)}{d_s}^{-2} \left(\frac{1}{2n A_r} \delta_{sr} \delta_{kr} + n d_{srt} \right) \left[\delta_{is} (1 - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\delta_{kl})(\delta_{ki}\epsilon_{r tj} + \delta_{lj}\epsilon_{r tkj}) + \delta_{js}(1-\delta_{kl})(\delta_{kj}\epsilon_{r li} + \delta_{lj}\epsilon_{r k i}) - \\
 & -\delta_{kl}\delta_{ks}(\delta_{ki}\epsilon_{r kj} + \delta_{kj}\epsilon_{r ki}) + \frac{2\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}(\delta_{ks}\epsilon_{r lk} + \\
 & + \delta_{ls}\epsilon_{r kl}) \Big] ({}^n m_{tt} \cdot i_r) i_j
 \end{aligned}$$

Wzory (2.111) określają stany naprężeń komórki n w zależności od zewnętrznych napięć powierzchniowych ${}^n \hat{p}_i$, wyrażonych zgodnie z określeniami (2.44-2.53) przez wektorowe współczynniki ${}^n q_i$, ${}^n q_{ii}$, ${}^n m_i$, ${}^n m_{ii}$ oraz sił masowych ${}^n f$.

Rozdział III

WIELOKOMÓRKOWE ELEMENTY MAKROSKOPOWE

3.1. Określenia pól wewnętrznych napięć i uogólnionych przemieszczeń

Pola napięć powierzchniowych komórek w wielokomórkowych elementach makroskopowych opisano funkcjami wektorowymi

$$(3.1) \quad \hat{p}_i(\xi; x) = \sum_n n \Omega_n \hat{p}_i(\xi; x) \quad i=1,2,3$$

wyrażonymi przez napięcia powierzchniowe $n \hat{p}_i$ ścian poszczególnych komórek n stanowiących mikroelementy ustroju makroskopowego. Zgodnie z przyjętymi założeniami i określeniami w p.2.3, wektory $n \hat{p}_i$ są określone poprzez wektory

$$(3.2) \quad n \hat{q}_i = \frac{1}{n_i S_i} \int_{n_i S_i} n \hat{p}_i dS_i = n q_i + n q_{ij} (n_j) \xi_j,$$

$$n \hat{m}_i = \frac{1}{n_i S_i} \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[i_k \times \int_{n_i S_i} n \hat{p}_i (n_j) \xi_k dS_i \right] =$$

$$= n m_i + n m_{ij} (n_j) \xi_j, \quad i=1,2,3$$

gęstości sił i momentów powierzchniowych na ścianach komórek elementu makroskopowego. Stąd też przyjęto jako pola napięć siłowych \hat{q}_i i momentowych \hat{m}_i mikroelementów n rozpatrywanych ustrojów w następujący sposób określone pola wektorowe

$$(3.3) \quad \hat{q}_i = \sum_n n \Omega_n \hat{q}_i,$$

$$\hat{m}_i = \sum_n n \Omega_n \hat{m}_i.$$

Pola uogólnionych przemieszczeń mikroelementów opisywać będziemy za pomocą funkcji wektorowych

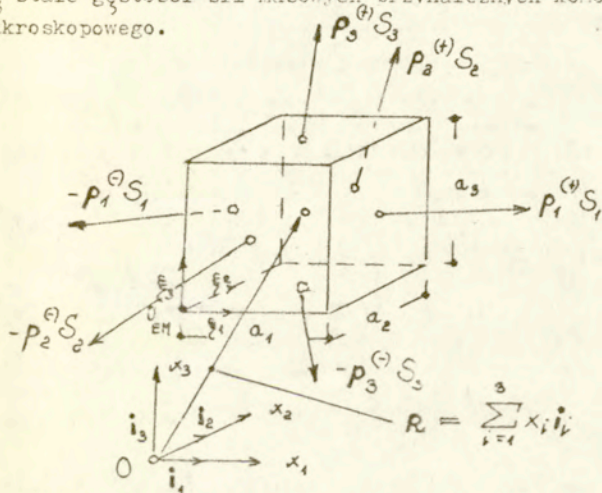
$$(3.4) \quad \hat{v}_i = \sum_n n \Omega_n \hat{v}_i,$$

$$\hat{\psi}_i = \sum_n n \Omega_n \hat{\psi}_i$$

wyrażonych przez uogólnione przemieszczenia $\hat{v}_i, \hat{\psi}_i$ płaszczyzn $\xi_k = \text{const}$ komórek n określone za pomocą wzorów (2.7)₁, (2.17).

3.2. Statyczne i kinematyczne brzegowe oddziaływania zewnętrzne. Warunki równowagi.

Określimy statyczne oddziaływania brzegowe na element makroskopowy przedstawiony na rys. 8 zakładając że, na swobodne od więzów kinematycznych jego ściany o równaniach $\xi_i = 0, \xi_i = a_i$ ($i=1,2,3$) i o normalnych zewnętrznych równoległych do wersorów $-i_i, a_i i_i$ działają w punktach o promieniach wodzących $r_i = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \xi_k i_k = r - \xi_i i_i$ odpowiednio siły powierzchniowe $-P_i^{(-)} S_i, P_i^{(+)} S_i$ o zmiennych rozkładach. Ponadto w obszarze elementu działają siły masowe o gęstościach $\hat{f}(\xi, x) = \sum_n n \Omega_n f$ odniesionych do jednostki objętości, przy czym symbole $n f$ oznaczają stałe gęstości sił masowych niezależnych komórek elementu makroskopowego.



Rys. 8. Układ sił powierzchniowych i objętościowych elementu makroskopowego

Uwzględniając podział elementu makroskopowego na prostopadłościennie mikroelementy zgodny ze strukturą wewnętrzną, siły powierzchniowe $P_i^{(c)}$, $P_i^{(d)}$ ścian $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ ($i=1,2,3$) określono za pomocą wzorów

$$(3.5) \quad P_i^{(c)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i P_i^{(c)},$$

$$P_i^{(d)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i P_i^{(d)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Funkcje wektorowe sił powierzchniowych $n_i P_i^{(c)}$, $n_i P_i^{(d)}$ zastępujemy ich rozwinięciami w szereg Taylora w punktach o wektorach wodzących $\tau_i = n_i \tau = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) C_k \mathbf{i}_k$, ograniczając się przy tym do dwóch pierwszych jego wyrazów, t.j. do postaci

$$(3.6) \quad n_i P_i^{(c)} = [P_i^{(c)}]_{\tau_i = n_i \tau_i} + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[\frac{\partial P_i^{(c)}}{\partial \xi_k} \right]_{\tau_i = n_i \tau_i} (n_k) \xi_k + \dots,$$

$$n_i P_i^{(d)} = [P_i^{(d)}]_{\tau_i = n_i \tau_i} + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[\frac{\partial P_i^{(d)}}{\partial \xi_k} \right]_{\tau_i = n_i \tau_i} (n_k) \xi_k + \dots.$$

Wprowadzając do wzorów (3.6) nowe symbole wektorowe $n_i q_i^{(c)}$, $n_i q_{ik}^{(c)}$, $n_i q_{ik}^{(d)}$, $n_i q_{ik}^{(d)}$ ($i, k = 1, 2, 3; i \neq k$) o następujących znaczeniach

$$(3.7) \quad n_i q_i^{(c)} = [P_i^{(c)}]_{\tau_i = n_i \tau_i}, \quad n_i q_{ik}^{(c)} = (n_k) d_k^2 / 12 \left[\frac{\partial P_i^{(c)}}{\partial \xi_k} \right]_{\tau_i = n_i \tau_i},$$

$$n_i q_i^{(d)} = [P_i^{(d)}]_{\tau_i = n_i \tau_i}, \quad n_i q_{ik}^{(d)} = (n_k) d_k^2 / 12 \left[\frac{\partial P_i^{(d)}}{\partial \xi_k} \right]_{\tau_i = n_i \tau_i}$$

mamy

$$(3.8) \quad n_i P_i^{(c)} = n_i q_i^{(c)} + 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) d_k^{-2} \xi_k n_i q_{ik}^{(c)},$$

$$n_i P_i^{(d)} = n_i q_i^{(d)} + 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_k) d_k^{-2} \xi_k n_i q_{ik}^{(d)}.$$

W dalszym ciągu pracy rozpatrywać będziemy określoną klasę obciążeń powierzchniowych $p_i^{(-)}$, $p_i^{(+)}$ spełniających następujące warunki znikania dziewięciu składowych wektorów $n_i q_{ijk}^{(-)}$, $n_i q_{ijk}^{(+)}$ zgodnie z warunkami

$$(3.9) \quad n_i q_{ijk}^{(-)} \cdot i_k = n_i q_{ijk}^{(+)} \cdot i_k = 0,$$

$$\sum_{k,l,r,s=1}^3 (\delta_{ir} \delta_{ks} + \delta_{kr} \delta_{is}) (\varrho_{rsl} - \epsilon_{rsl}) (n_i q_{i1s}^{(-)} \cdot i_l) = 0,$$

$$\sum_{k,l,r,s=1}^3 (\delta_{ir} \delta_{ks} + \delta_{kr} \delta_{is}) (\varrho_{rsl} - \epsilon_{rsl}) (n_i q_{i1s}^{(+)} \cdot i_l) = 0$$

analogicznymi do warunków (2.48).

Przy tych założeniach wektorowe współczynniki $n_i q_{ijk}^{(-)}$, $n_i q_{ijk}^{(+)}$ da-
ją się wyrazić w sposób jednoznaczny przez wektory napięć momen-
towych

$$(3.10) \quad n_i m_i^{(-)} = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (i_k \times n_i q_{ijk}^{(-)}),$$

$$n_i m_i^{(+)} = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (i_k \times n_i q_{ijk}^{(+)})$$

za pomocą wzorów

$$(3.11) \quad n_i q_{ijk}^{(-)} = \left[n_i m_i^{(-)} - \frac{1}{2} (n_i m_i^{(-)} \cdot i_j) i_j \right] \times i_k + \frac{1}{2} (n_i m_i^{(-)} \cdot i_j) \sum_{l=1}^3 \varrho_{ijkl} i_l,$$

$$n_i q_{ijk}^{(+)} = \left[n_i m_i^{(+)} - \frac{1}{2} (n_i m_i^{(+)} \cdot i_j) i_j \right] \times i_k + \frac{1}{2} (n_i m_i^{(+)} \cdot i_j) \sum_{l=1}^3 \varrho_{ijkl} i_l,$$

$i, k = 1, 2, 3, i \neq k.$

W konsekwencji przyjętych określeń oraz poczynionych założeń, brzegowe oddziaływania statyczne na element makroskopowy o postaciach pól sił i momentów powierzchniowych działających na ściany $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ opisano za pomocą wzorów

$$(3.12) \quad q_i^{(-)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i q_i^{(-)}, \quad m_i^{(-)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i m_i^{(-)};$$

$$q_i^{(+)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i q_i^{(+)} , \quad m_i^{(+)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i m_i^{(+)} .$$

Ponieważ obciążenia powierzchniowe ścian o gęstościach $-P_i^{(-)}, P_i^{(+)}$ oraz objętościowe o gęstościach \hat{f} stanowią samozrównoważony układ sił przeto zachodzą następujące warunki równowagi

$$(3.13) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} (P_i^{(+)} - P_i^{(-)}) dS_i + \int_V \hat{f} dv = 0 ,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \left[i_i \times \left(\int_{S_i} (P_i^{(+)} + P_i^{(-)}) dS_i \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i,k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[i_k \times \left(\int_{S_i} (P_i^{(+)} - P_i^{(-)}) (\epsilon_k - a_k/2) dS_i \right) \right] + \int_V [(r - \bar{r}) \times \hat{f}] dv = 0$$

Podstawienie do powyższych równań kolejno wzorów (3.5), (3.8), (3.11) daje, po wykonaniu całkowań i po uporządkowaniu składników równań, warunki równowagi wyrażone w następującej postaci

$$(3.14) \quad \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{n_i} (n_i q_i^{(+)} - n_i q_i^{(-)}) n_i S_i \right] + \sum_n n f n v = 0 ,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \left[i_i \times \sum_{n_i} n_i S_i (n_i q_i^{(+)} + n_i q_i^{(-)}) \right] +$$

$$+ \sum_{i=j}^3 \left\{ \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[i_k \times \sum_{n_i} n_i S_i (c_k - a_k/2) (n_i q_i^{(+)} - n_i q_i^{(-)}) \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{n_i} n_i S_i (n_i m_i^{(+)} - n_i m_i^{(-)}) \left. \right\} + \sum_n n v [(n r - \bar{r}) \times n f] = 0 .$$

Oznaczając odpowiednio siły i momenty powierzchniowe ścian

$\sum_{n_i} n_i = 0$, $\sum_{n_i} \epsilon_i = a_i$ odniesione do jednostek powierzchni $S_i = v / a_i$ za pomocą wzorów

$$(3.15) \quad Q_i^{(-)} = \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i n_i q_i^{(-)},$$

$$M_i^{(-)} = \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i \left[n_i m_i^{(-)} + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\epsilon_k C_k - a_k/2) (\mathbf{i}_k \times n_i q_i^{(-)}) \right],$$

$$Q_i^{(+)} = \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i n_i q_i^{(+)},$$

$$M_i^{(+)} = \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i \left[n_i m_i^{(+)} + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\epsilon_k C_k - a_k/2) (\mathbf{i}_k \times n_i q_i^{(+)}) \right]$$

możemy równania równowagi (3.14) przedstawić też w postaci

$$(3.16) \quad \sum_{i=1}^3 S_i (Q_i^{(+)} - Q_i^{(-)}) + \sum_n n \nabla n f = 0,$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \nabla [\mathbf{i}_i \times (Q_i^{(+)} + Q_i^{(-)})] + \sum_{i=1}^3 S_i (M_i^{(+)} - M_i^{(-)}) + \sum_n n \nabla [(\epsilon \mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times n f] = 0.$$

W przypadku gdy ściany elementu makroskopowego poddane są kinematycznym oddziaływaniom brzegowym zakładamy, że element znajduje się w stanie równowagi pod działaniem sił masowych $\hat{\mathbf{f}} = \sum_n n \Omega n f$ oraz sił powierzchniowych $[\mathbf{n} \hat{\mathbf{P}}_i]_{n_i=1, \xi_i=0}$, $[\mathbf{n} \hat{\mathbf{P}}_i]_{n_i=1, \xi_i=a_i}$ działających na zewnętrznie zorientowane ściany $\xi_i=0$, $\xi_i=a_i$ skrajnych warstw komórek $n_i=1$, $n_i=N_i$ elementu makroskopowego.

Przyjmujemy zatem że ściany $\xi_i=0$, $\xi_i=a_i$ doznają wymuszonych przemieszczeń $\hat{\mathbf{u}}_i^{(-)}$, $\hat{\mathbf{u}}_i^{(+)}$, które przyjęto w postaci następujących funkcji wektorowych

$$(3.17) \quad \hat{\mathbf{u}}_i^{(-)} = \mathbf{u} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_i) a_i/2 + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\xi_k - a_k/2) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_k) + \hat{\mathbf{w}}_i^{(-)},$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i^{(+)} = \mathbf{u} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_i) a_i/2 + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\xi_k - a_k/2) (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_k) + \hat{\mathbf{w}}_i^{(+)},$$

$i = 1, 2, 3.$

We wzorach tych pola przemieszczeń $\hat{w}_i^{(c)}$, $\hat{w}_i^{(d)}$ są dowolnymi funkcjami zmiennych niezależnych wektorów wodzących $r_i = r - \xi_i \cdot i_i$ spełniającymi jednakże warunki ciągłości przemieszczeń punktów krawędzi makroskopowego prostopadkościanu, tj.

$$(3.18) \quad \begin{aligned} [\hat{w}_i^{(c)}]_{\xi_k=0} &= [\hat{w}_k^{(c)}]_{\xi_k=0}, \\ [\hat{w}_k^{(c)}]_{\xi_k=0} &= [\hat{w}_i^{(d)}]_{\xi_k=a_k}, \\ [\hat{w}_i^{(d)}]_{\xi_k=0} &= [\hat{w}_k^{(c)}]_{\xi_i=a_i}, \\ [\hat{w}_i^{(d)}]_{\xi_k=a_k} &= [\hat{w}_k^{(d)}]_{\xi_i=a_i}, \quad i, k = 1, 2, 3; i \neq k. \end{aligned}$$

Na podstawie pól przemieszczeń $\hat{w}_i^{(c)}$, $\hat{w}_i^{(d)}$ ścian $\xi_i=0$, $\xi_i=a_i$ określimy pola uogólnionych wymuszonych przemieszczeń $\hat{v}_i^{(c)}$, $\hat{g}_i^{(c)}$ oraz $\hat{v}_i^{(d)}$, $\hat{g}_i^{(d)}$, które definiujemy za pomocą następujących wzorów

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \hat{v}_i^{(c)} &= \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \Omega_i^* v_i^{(c)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \frac{1}{n_i S_i} \int \hat{w}_i^{(c)} dS_i, \\ \hat{g}_i^{(c)} &= \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \Omega_i^* g_i^{(c)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \sum_{k,l,m=1}^3 \frac{1}{n_i S_i} [(1-\delta_{ik}) \epsilon_{klm} + \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{im} (g_{ikl} - \epsilon_{ikl})] \frac{12(n_k) d_k^2}{n_i S_i} \int \hat{w}_i^{(c)} (n_k) \xi_k dS_i, \\ \hat{v}_i^{(d)} &= \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \Omega_i^* v_i^{(d)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \frac{1}{n_i S_i} \int \hat{w}_i^{(d)} dS_i, \\ \hat{g}_i^{(d)} &= \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \Omega_i^* g_i^{(d)} = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \sum_{k,l,m=1}^3 [(1-\delta_{ik}) \epsilon_{klm} + \\ &+ \frac{1}{2} \delta_{im} (g_{ikl} - \epsilon_{ikl})] \frac{12(n_k) d_k^2}{n_i S_i} \int \hat{w}_i^{(d)} (n_k) \xi_k dS_i. \end{aligned}$$

Określone za pomocą wzorów (3.19) wymuszone uogólnione przemieszczenia ścian elementu makroskopowego są niezbędne przy formułowaniu przemieszczeniowych zagadnień brzegowych.

3.3. Równania równych wartości energii odkształcenia i pracy statycznej

Określając pojęcia napięć siłowych \hat{q}_i , momentowych \hat{m}_i oraz uogólnionych przemieszczeń \hat{v}_i , $\hat{\phi}_i$ mikroelementów rozpatrywanych prostopadłościennych wielokomórkowych ustrojów założono, że warunki równości energii odkształcenia $U(\mathbf{x})$ oraz pracy statycznej $\Pi(\mathbf{x})$ sił są spełnione. Tylko bowiem w tym przypadku wzory (3.3-3.4) mają sens jako pola określonych wielkości mechanicznych. W celu wyprowadzenia równań wynikających z warunków $U(\mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x})$ określimy w pierw wyrażenia na energię odkształcenia $U(\mathbf{x})$ oraz na pracę $\Pi(\mathbf{x})$.

Energia odkształcenia nagromadzona w elemencie makroskopowym złożonym z mikroelementów jest równa sumie energii odkształcenia ${}_{n}U$ w komórkach n . Stąd na podstawie wzorów (2.59-2.60) oraz spełnionego warunku ${}_{n}U = {}_{n}\Pi$ mamy:

$$(3.20) \quad U(\mathbf{x}) = \sum_n {}_{n}U = \sum_n \Pi = \\ = \frac{1}{2} \sum_n \left[{}_{n}f \cdot \int_{nV} \hat{u} dv + \sum_{i=1}^3 \int_{nS_i} A_i [{}_{n}\hat{p}_i \cdot {}_{n}\hat{u}] dS_i \right].$$

Wyrażenia na pracę statyczną $\Pi(\mathbf{x})$ jaką wykonują działające na element siły objętościowe i siły powierzchniowe na przemieszczeniach w punktach ich przyłożenia przedstawimy rozpatrując dwa przypadki oddziaływań brzegowych na element makroskopowy.

W przypadku elementów makroskopowych swobodnych od zewnętrznych więzów kinematycznych obciążonych siłami objętościowymi o gęstościach $\hat{f} = \sum_n \Omega_n f$ oraz siłami powierzchniowymi - $p_i^{(e)}$, $p_i^{(t)}$ działającymi odpowiednio na ścianach $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ praca statyczna jest równa

$$(3.21) \quad \Pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[\sum_n {}_{n}f \cdot \int_{nV} \hat{u} dv + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [p_i^{(t)} \cdot [\hat{u}]_{\xi_i = a_i} - p_i^{(e)} \cdot [\hat{u}]_{\xi_i = 0}] dS_i \right].$$

Warunek $U(\mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x})$ przybiera zatem postać

$$(3.22) \quad \sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i}^{(n_i)} \Delta_i [\mathbf{n} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{n} \hat{\mathbf{u}}] dS_i = \\ = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\mathbf{p}_i^{(+)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_i = a_i} - \mathbf{p}_i^{(-)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_i = 0}] dS_i$$

Jeżeli ściany $\xi_i > 0$, $\xi_i = a_i$ ($i=1,2,3$) elementu makroskopowego doznają wymuszonych przemieszczeń $\mathbf{u}_i^{(-)}$, $\mathbf{u}_i^{(+)}$ to praca statyczna sił działających na przemieszczeniach w stanach deformacji jest określona wzorem

$$(3.23) \quad \Pi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varrho} \left[\sum_{\mathbf{n}} n_f \int_{n_V} \hat{\mathbf{u}} dv + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [[\hat{\mathbf{p}}_i]_{\xi_i = a_i} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i^{(+)} - [\hat{\mathbf{p}}_i]_{\xi_i = 0} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i^{(-)}] dS_i \right],$$

natomiast warunek równości energii odkształcenia i pracy statycznej przybiera postać

$$(3.24) \quad \sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i}^{(n_i)} \Delta_i [\mathbf{n} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{n} \hat{\mathbf{u}}] dS_i = \\ = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [(\hat{\mathbf{p}}_i)_{\xi_i = a_i} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i^{(+)} - (\hat{\mathbf{p}}_i)_{\xi_i = 0} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i^{(-)}] dS_i.$$

Rozpatrzmy w pierwszej kolejności przypadek elementu makroskopowego o ścianach obciążonych siłami powierzchniowymi i swobodnych od więzów kinematycznych. warunek (3.22) równości $\Pi(\mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x})$ zachodzi przy dowolnych przesunięciach \mathbf{u} i dowolnych obrotach $\boldsymbol{\omega}$ elementu makroskopowego. Stąd po podstawieniu do równości (3.22) wzoru (1.12) na przemieszczenia $\hat{\mathbf{u}}$ a następnie po przyrównaniu do zera czynników wektorowych iloczynów skalarnych zawierających wektory $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ mamy równania

$$(3.25) \quad \sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^3 \int_{n_i S_i}^{(n_i)} \Delta_i [\mathbf{n} \hat{\mathbf{p}}_i] dS_i = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} (\mathbf{p}_i^{(+)} - \mathbf{p}_i^{(-)}) dS_i,$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 a_i \left[\mathbf{i}_i \times \left(\int_{S_i} (\mathbf{p}_i^{(g)} + \mathbf{p}_i^{(e)}) dS_i \right) \right] + \\
& + \sum_{i,k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[\mathbf{i}_k \times \int_{S_i} (\mathbf{p}_i^{(g)} - \mathbf{p}_i^{(e)}) (\xi_k - a_k/2) dS_i \right] = \\
& = \sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n}_i) \Delta_i \int_{\mathbf{n}_i S_i} [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{n} \hat{\mathbf{p}}_i] dS_i, \\
& \sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{n}_i S_i} (\mathbf{n}_i) \Delta_i [\mathbf{n} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{n} \hat{\mathbf{w}}] dS_i = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} [\mathbf{p}_i^{(g)} \cdot [\hat{\mathbf{w}}]_{\xi_i = a_i} - \mathbf{p}_i^{(e)} \cdot [\hat{\mathbf{w}}]_{\xi_i = 0}] dS_i
\end{aligned}$$

Uwzględniając warunki równowagi (2.54) sił działających na komórki \mathbf{n} oraz warunki równowagi (3.13) sił elementu makroskopowego dochodzimy do wniosku, że równania (3.25)₍₁₋₂₎ są spełnione tożsamościowo. Natomiast pozostałe trzecie równanie przepisujemy w następującej równoważnej postaci

$$\begin{aligned}
(3.26) \quad & \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{\mathbf{n}} \int_{\mathbf{n}_i S_i} (\mathbf{n}_i) \Delta_i [\mathbf{n} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{n} \hat{\mathbf{w}}] dS_i - \int_{S_i} \Delta_i [\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{w}}] dS_i \right] = \\
& = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left[[(\mathbf{p}_i^{(g)} - \hat{\mathbf{p}}_i) \cdot \hat{\mathbf{w}}]_{\xi_i = a_i} - [(\mathbf{p}_i^{(e)} - \hat{\mathbf{p}}_i) \cdot \hat{\mathbf{w}}]_{\xi_i = 0} \right] dS_i.
\end{aligned}$$

Wprowadzając nowe symbole $\mathbf{n} \hat{\mathbf{L}}_i$ ($i=1,2,3$) o znaczeniach

$$\begin{aligned}
(3.27) \quad & \mathbf{n} \hat{\mathbf{L}}_i = \mathbf{n} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{n} \hat{\mathbf{w}}, \\
& \hat{\mathbf{L}}_i = \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \Omega_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \hat{\mathbf{L}}_i = \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \Omega_{\mathbf{n}} (\mathbf{n} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \mathbf{n} \hat{\mathbf{w}}) = \\
& = \left(\sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \Omega_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{p}}_i \right) \cdot \left(\sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \Omega_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{w}} \right) = \hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{w}},
\end{aligned}$$

a następnie uwzględniając zachodzące równości

$$\sum_{\mathbf{n}} \int_{\mathbf{n}_i S_i} (\mathbf{n}_i) \Delta_i (\mathbf{n} \hat{\mathbf{L}}_i) dS_i = \int_{S_i} \Delta_i (\hat{\mathbf{L}}_i) dS_i - \sum_{\mathbf{n}} \int_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \hat{\mathbf{L}}_i (\mathbf{n} \Omega)_{,i} dV$$

mamy zamiast (3.26) równanie o postaci

$$(3.28) \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{\pi} \int_{\nu} \pi \hat{L}_i(\pi \Omega)_{,i} d\nu + \\ + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left[[(\hat{P}_i^{(+)} - \hat{P}_i) \cdot \hat{W}]_{\xi_i = a_i} - [(\hat{P}_i^{(-)} - \hat{P}_i) \cdot \hat{W}]_{\xi_i = 0} \right] dS_i = 0.$$

Uwzględnienie wzorów

$$\frac{d}{d\xi_i} [(\pi_i) \Omega_i(\xi_i)] = \delta[\xi_i - (\pi_{i-1}) b_i] - \delta[\xi_i - (\pi_i) b_i]$$

na pochodne funkcji $(\pi_i) \Omega_i(\xi_i)$, w których $\delta(\xi_i - (\pi_i) b_i)$ oznaczają delty Diraca oraz wykorzystanie równości

$$\int_0^{a_i} \delta[\xi_i - (\pi_i) b_i] \Phi(\xi_i) d\xi_i = [\Phi]_{\xi_i = (\pi_i) b_i}$$

zachodzące przy dowolnej funkcji $\Phi(\xi_i)$ zmiennej $\xi_i(0, a_i)$ daje wyrażenie na pochodną funkcji obszarowej występującej pod znakiem całki wzoru (3.28) w następującej postaci

$$(\pi \Omega)_{,i} = \pi_i \Omega_i^* \left[\delta(\xi_i - (\pi_{i-1}) b_i) - \delta(\xi_i - (\pi_i) b_i) \right].$$

Stąd też wyrażenie będące pierwszym składnikiem równania przybiera postać

$$(3.29) \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{\pi} \int_{\nu} \pi \hat{L}_i(\pi \Omega)_{,i} d\nu = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{\pi_i} \int_{\pi_i S_i} \left\{ \sum_{\pi_{i-1}=2}^{N_{i-1}} [\pi \hat{L}_i]_{\xi_i = (\pi_{i-1}) b_i} - \sum_{\pi_i=1}^{N_i-1} [\pi \hat{L}_i]_{\xi_i = (\pi_i) b_i} \right\} dS_i = \\ = \sum_{i=1}^3 \sum_{\pi_i} \sum_{\pi_{i-1}=1}^{N_{i-1}} \left[[E_{i-1}] \int_{\pi_i S_i} \pi \hat{L}_i dS_i \right]_{\xi_i = (\pi_i) b_i},$$

po wprowadzeniu symbolu E_{i-1} operatora przesunięcia o własno-

ściach

$$(3.30) \quad E_{\nu} \left[(n_{\nu}) (\cdot) \right] = (n_{\nu+1}) (\cdot)$$

odniesionych do dowolnych wielkości zależnych od numeratorów $n_i = 1, \dots, N_i$.

Podstawienie (3.29) do (3.28) a następnie uwzględnienie określeń (3.27) daje

$$(3.31) \quad \sum_{\nu=1}^3 \sum_{n_{\nu}} \sum_{n_{\nu+1}}^{N_{\nu+1}} \left[E_{\nu} - 1 \right] \int_{n_{\nu} S_{\nu}} (n \hat{p}_{\nu} \cdot n \hat{w}) dS_{\nu} \Big|_{\xi_{\nu} = (n_{\nu}) b_{\nu}} + \\ + \sum_{\nu=1}^3 \int_{S_{\nu}} \left[[(P_{\nu}^{(+)} - \hat{P}_{\nu}) \cdot \hat{w}]_{\xi_{\nu} = a_{\nu}} - [(P_{\nu}^{(-)} - \hat{P}_{\nu}) \cdot \hat{w}]_{\xi_{\nu} = 0} \right] dS_{\nu} = 0.$$

Równanie (3.31) powinno być spełnione przy dowolnych współrzędnych $\xi_{\nu} = (1) b_{\nu}, \dots, (n_{\nu}) b_{\nu}, \dots, (N_{\nu+1}) b_{\nu}$, $i=1,2,3$ przeto zachodzą muszą następujące równości

$$(3.32) \quad \sum_{n_i} \left\{ (E_{\nu} - 1) \int_{n_i S_{\nu}} (n \hat{p}_{\nu} \cdot n \hat{w}) dS_{\nu} \right\} \Big|_{\xi_{\nu} = (n_{\nu}) b_{\nu}} = 0, \\ n_i = 1, \dots, N_{\nu+1}; \\ \sum_{\nu=1}^3 \int_{S_{\nu}} \left[[(P_{\nu}^{(+)} - \hat{P}_{\nu}) \cdot \hat{w}]_{\xi_{\nu} = a_{\nu}} - [(P_{\nu}^{(-)} - \hat{P}_{\nu}) \cdot \hat{w}]_{\xi_{\nu} = 0} \right] dS_{\nu} = 0.$$

Równanie (3.32) stanowiące warunki równości energii odkształcenia i pracy sił działających na element makroskopowy, swobodny od zewnętrznych więzów kinematycznych, stanowiąc będzie podstawę wyprowadzenia warunków ciągłości naprężeń i uogólnionych przemieszczeń w następnym punkcie pracy.

W przypadku elementu makroskopowego o wymuszonych przemieszczeniach ścian, warunek równości energii odkształcenia i pracy statycznej wyrażony równaniem (3.24), po podstawieniu wzoru (1.12) na przemieszczenia \hat{u} oraz po uwzględnieniu równań równowagi (2.55), przybiera postać

$$\begin{aligned}
& -\mathbf{u} \cdot \left[\sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \nu_{\mathbf{n}} \mathbf{f} + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \Delta_i(\hat{\mathbf{p}}_i) dS_i \right] + \\
& -\boldsymbol{\omega} \cdot \left[\sum_{\mathbf{n}} \int_{\mathbf{n}V} [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{n} \mathbf{f}] dV + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \Delta_i [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{p}}_i] dS_i \right] + \\
& + \sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{n}_i S_i} \Delta_i [{}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot {}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{w}}] dS_i - \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \Delta_i (\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{w}}) dS_i + \\
& + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left\{ \left[\hat{\mathbf{p}}_i \cdot (\mathbf{w}_i^{(f)} - \hat{\mathbf{w}}_i) \right]_{\xi_i = \alpha_i} - \left[\hat{\mathbf{p}}_i \cdot (\mathbf{w}_i^{(e)} - \hat{\mathbf{w}}_i) \right]_{\xi_i = 0} \right\} dS_i = 0.
\end{aligned}$$

Ponieważ równanie to musi zachodzić przy dowolnych przesunięciach \mathbf{u} i obrotach $\boldsymbol{\omega}$ elementu makroskopowego przeto po przyrównaniu do zera czynników wektorowych przy wektorach \mathbf{u} i $\boldsymbol{\omega}$ mamy równania

$$\begin{aligned}
(3.33) \quad & \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \nu_{\mathbf{n}} \mathbf{f} + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \Delta_i(\hat{\mathbf{p}}_i) dS_i = 0, \\
& \sum_{\mathbf{n}} \int_{\mathbf{n}V} [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times \mathbf{n} \mathbf{f}] dV + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \Delta_i [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{p}}_i] dS_i = 0, \\
& \sum_{\mathbf{n}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbf{n}_i S_i} \Delta_i [{}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot {}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{w}}] dS_i - \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \Delta_i (\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{w}}) dS_i + \\
& + \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left\{ \left[\hat{\mathbf{p}}_i \cdot (\mathbf{w}_i^{(f)} - \hat{\mathbf{w}}_i) \right]_{\xi_i = \alpha_i} - \left[\hat{\mathbf{p}}_i \cdot (\mathbf{w}_i^{(e)} - \hat{\mathbf{w}}_i) \right]_{\xi_i = 0} \right\} dS_i = 0.
\end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (3.27-3.30) dochodzimy do następującej równości

$$\begin{aligned}
(3.34) \quad & \sum_{\mathbf{n}_i=1}^{N_i} \left[\int_{\mathbf{n}_i S_i} \Delta_i [{}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot {}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{w}}] dS_i - \int_{S_i} \Delta_i (\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{w}}) dS_i \right] = \\
& = \sum_{\mathbf{n}_i=1}^{N_i-1} \left\{ \left[E_{1i}^{-1} \right] \int_{\mathbf{n}_i S_i} ({}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot {}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{w}}) dS_i \right\}_{\xi_i = ({}_{\mathbf{n}_i} b_i)},
\end{aligned}$$

zatem równanie (3.33) przepisujemy w postaci

$$(3.35) \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{n}_i} \sum_{\mathbf{n}_i=1}^{N_i-1} \left\{ \left[E_{1i}^{-1} \right] \int_{\mathbf{n}_i S_i} ({}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{p}}_i \cdot {}_{\mathbf{n}} \hat{\mathbf{w}}) dS_i \right\}_{\xi_i = ({}_{\mathbf{n}_i} b_i)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left\{ [\hat{p}_i \cdot (w_i^{(q)} - \hat{w})]_{\xi_i = a_i} - [\hat{p}_i \cdot (w_i^{(e)} - \hat{w})]_{\xi_i = 0} \right\} dS_i = 0.$$

Ponieważ równanie (3.35) powinno być spełnione przy dowolnych współrzędnych $\xi_i = (a_i) b_i, \dots, (n_i) b_i, \dots, (N_i-1) b_i$, $i=1,2,3$ przeto jest to możliwe w przypadku gdy zachodzą następujące układy równań

$$(3.36) \quad \sum_{n_i} \left\{ (E_{i-1}) \int_{n_i S_i} (n_i \hat{p}_i \cdot n \hat{w}) dS_i \right\}_{\xi_i = (n_i) b_i} = 0, \quad n_i = 1, \dots, N_i-1;$$

$$\sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left\{ [\hat{p}_i \cdot (w_i^{(q)} - \hat{w})]_{\xi_i = a_i} - [\hat{p}_i \cdot (w_i^{(e)} - \hat{w})]_{\xi_i = 0} \right\} dS_i = 0.$$

Wyprowadzone w tej części pracy równania (3.32), (3.36), równych wartości energii odkształcenia i pracy statycznej obciążeń odpowiednio w odniesieniu do elementów makroskopowych o obciążonych ścianach swobodnych od więzów kinematycznych oraz o ścianach doznających wymuszonych brzegowych przemieszczeń, stanowią podstawę wyprowadzenia warunków ciągłości napięć i uogólnionych przemieszczeń mikroelementów.

3.4. Obszarowe warunki ciągłości napięć i uogólnionych przemieszczeń

Obszarowe warunki ciągłości napięć \hat{q}_i , \hat{m}_i i uogólnionych przemieszczeń \hat{v}_i , $\hat{\varphi}_i$ mikroelementów ustrojów makroskopowych wyprowadzimy na podstawie (3.32). Po uwzględnieniu wzorów (2.47) na napięcia $n_i \hat{p}_i$ a następnie po wykorzystaniu określeń (2.1) uśrednionych przekrojowych przemieszczeń $n_i \hat{v}_i$, $n_i \hat{\varphi}_{ik}$ ($i, k=1,2,3; i \neq k$) mamy

$$\sum_{n_i} n_i S_i \left\{ (E_{i-1}) \left[n_i \hat{q}_i \cdot n_i \hat{v}_i + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (n_i \hat{q}_{ik} \cdot n_i \hat{\varphi}_{ik}) \right] \right\}_{\xi_i = (n_i) b_i} = 0.$$

Z kolei uwzględniając wyrażenia (2.50) na wektory $n_i \hat{q}_{ik}$ a następnie wykorzystując określenia (3.16) wektorów $n_i \hat{\varphi}_{ik}$ powyższe rów-

nania przepisano w postaci

$$(3.37) \sum_{n_i} n_i S_i \left[(E_{i-1}) \left[n \hat{q}_i \cdot n \hat{v}_i + n \hat{m}_i \cdot n \hat{\varphi}_i \right] \right]_{\xi_i = (n_i) b_i} = 0, \quad n_i = 1, \dots, N_{i-1}.$$

Przepisując równania (3.37) w następującej równoważnej postaci

$$\sum_{n_i} n_i S_i \left\{ \left[(E_{i-1}) n \hat{q}_i \right] \cdot \left[(E_{i+1}) n \hat{v}_i \right] + \left[(E_{i+1}) n \hat{q}_i \right] \cdot \left[(E_{i-1}) n \hat{v}_i \right] + \right. \\ \left. + \left[(E_{i-1}) n \hat{m}_i \right] \cdot \left[(E_{i+1}) n \hat{\varphi}_i \right] + \left[(E_{i+1}) n \hat{m}_i \right] \cdot \left[(E_{i-1}) n \hat{\varphi}_i \right] \right\}_{\xi_i = (n_i) b_i} = 0,$$

a następnie żądając ich spełnienia przy założeniu wzajemnej niezależności wektorów napięć $n \hat{q}_i$, $n \hat{m}_i$ i wektorów uogólnionych przemieszczeń $n \hat{v}_i$, $n \hat{\varphi}_i$ oraz przy dowolnym układzie komórek n w elemencie makroskopowym dochodzimy do układu równań wektorowych

$$(3.38) \quad \left[(E_{i-1}) n \hat{q}_i \right]_{\xi_i = (n_i) b_i} = 0,$$

$$\left[(E_{i-1}) n \hat{m}_i \right]_{\xi_i = (n_i) b_i} = 0,$$

$$\left[n \hat{q}_i \right]_{\xi_i = (n_i) b_i} \cdot \left[(E_{i-1}) n \hat{v}_i \right]_{\xi_i = (n_i) b_i} = 0,$$

$$\left[n \hat{m}_i \right]_{\xi_i = (n_i) b_i} \cdot \left[(E_{i-1}) n \hat{\varphi}_i \right]_{\xi_i = (n_i) b_i} = 0, \quad n_i = 1, \dots, N_{i-1}$$

Równania (3.38)₍₁₊₂₎ stanowią warunki ciągłości funkcji \hat{q}_i , \hat{m}_i napięć komórek n , określonych wzorami (3.3), względem zmiennej ξ_i . Natomiast równania (3.38)₍₃₊₄₎ są warunkami ciągłości względem zmiennych ξ_i uogólnionych przemieszczeń \hat{v}_i , $\hat{\varphi}_i$ określonych za pomocą wzorów (3.4). Te ostatnie nie dotyczą przemieszczeń na ścianach komórek sąsiadujących z komórkami będącymi pustkami, w których znikają napięcia powierzchniowe.

Uwzględniając wzory (2.18) opisujące funkcje wektorowe $\mathbf{n}\hat{\mathbf{v}}_i$, $\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_i$ oraz wzory (5.3)₁, (5.8) na napięcia $\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_i$, $\mathbf{n}\hat{\mathbf{m}}_i$ znajdujemy wyrażenia

$$(3.39) \quad \begin{aligned} [(E_{\lambda_i}^{-1})\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_i]_{\xi_i = (n_i)b_i} &= (E_{\lambda_i}^{-1})[\mathbf{n}\mathbf{q}_i] - \frac{1}{z}(E_{\lambda_i}^{+1})[(n_i)d_i \mathbf{n}\mathbf{q}_{i+1}], \\ [(E_{\lambda_i}^{-1})\mathbf{n}\hat{\mathbf{m}}_i]_{\xi_i = (n_i)b_i} &= (E_{\lambda_i}^{-1})[\mathbf{n}\mathbf{m}_i] - \frac{1}{z}(E_{\lambda_i}^{+1})[(n_i)d_i \mathbf{n}\mathbf{m}_{i+1}], \\ [(E_{\lambda_i}^{-1})\mathbf{n}\hat{\mathbf{v}}_i]_{\xi_i = (n_i)b_i} &= (E_{\lambda_i}^{-1})[\mathbf{n}\mathbf{v}_i] - \frac{1}{z}(E_{\lambda_i}^{+1})[(n_i)d_i \mathbf{n}\mathbf{v}_{i+1}], \\ [(E_{\lambda_i}^{-1})\mathbf{n}\hat{\mathbf{g}}_i]_{\xi_i = (n_i)b_i} &= (E_{\lambda_i}^{-1})[\mathbf{n}\mathbf{g}_i] - \frac{1}{z}(E_{\lambda_i}^{+1})[(n_i)d_i \mathbf{n}\mathbf{g}_{i+1}]. \end{aligned}$$

Stąd też po wprowadzeniu w następujący sposób zdefiniowanych operatorów różnicowych

$$(3.40) \quad (n_i)I_i[\cdot] = -\frac{1}{z} \sum_{q_i=1}^{N_i} (n_i)d_i[\cdot] - \frac{1}{z}(n_i)d_i[\cdot] + \sum_{p_i=1}^{n_i} (p_i)d_i[\cdot]$$

spełniających tożsamościowo równości

$$(E_{\lambda_i}^{-1})[(n_i)I_i[\cdot]] = \frac{1}{z}(E_{\lambda_i}^{+1})[(n_i)d_i[\cdot]],$$

przepisujemy równania (3.38) w następującej równoważnej postaci

$$(3.41) \quad \begin{aligned} (E_{\lambda_i}^{-1})[\mathbf{n}\mathbf{q}_i - (n_i)I_i[\mathbf{n}\mathbf{q}_{i+1}]] &= 0, \\ (E_{\lambda_i}^{-1})[\mathbf{n}\mathbf{m}_i - (n_i)I_i[\mathbf{n}\mathbf{m}_{i+1}]] &= 0, \\ [\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_i]_{\xi_i = (n_i)b_i} \cdot \left\{ (E_{\lambda_i}^{-1})[\mathbf{n}\mathbf{v}_i - (n_i)I_i[\mathbf{n}\mathbf{v}_{i+1}]] \right\} &= 0, \end{aligned}$$

$$[\mathbf{n}\hat{\mathbf{m}}_i]_{\xi_i = (n_i)} b_i \cdot \left[(E_{i-1}) [\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_i - (n_i) \mathbb{I}_i [\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_{ii}]] \right] = 0.$$

Równania różnicowe (3.41)₍₁₊₂₎ będą spełnione jeżeli wektorowe współczynniki $\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_i$, $\mathbf{n}\hat{\mathbf{m}}_i$ napięć powierzchniowych przyjmiemy w postaci

$$(3.42) \quad \mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_i = n_i \hat{\mathbf{q}}_i + (n_i) \mathbb{I}_i [\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_{ii}],$$

$$\mathbf{n}\hat{\mathbf{m}}_i = n_i \hat{\mathbf{m}}_i + (n_i) \mathbb{I}_i [\mathbf{n}\hat{\mathbf{m}}_{ii}],$$

$$n_i = 1, \dots, N_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pojawiające się we wzorach (3.42) symbole $n_i \hat{\mathbf{q}}_i$, $n_i \hat{\mathbf{m}}_i$ są wektorowymi wielkościami niezależnymi od numeratorów $n_i = 1, \dots, N_i$. Podstawiając odpowiednio wzory (3.42) do (2.46)₁, (2.51) a następnie do wzorów (3.3) mamy następujące wyrażenia na ciągłe względem ξ_i pola powierzchniowych sił $\hat{\mathbf{q}}_i$ i momentów $\hat{\mathbf{m}}_i$ napięć komórek \mathbf{n} w elementach makroskopowych

$$(3.43) \quad \hat{\mathbf{q}}_i = \sum_{\mathbf{n}} n \Omega \left[n_i \hat{\mathbf{q}}_i + (n_i) \mathbb{I}_i [\mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_{ii}] + \mathbf{n}\hat{\mathbf{q}}_{ii} (n_i) \xi_i \right],$$

$$\hat{\mathbf{m}}_i = \sum_{\mathbf{n}} n \Omega \left[n_i \hat{\mathbf{m}}_i + (n_i) \mathbb{I}_i [\mathbf{n}\hat{\mathbf{m}}_{ii}] + \mathbf{n}\hat{\mathbf{m}}_{ii} (n_i) \xi_i \right].$$

Wyrażenia (3.43) opisujące funkcje wektorowych współczynników $\hat{\mathbf{q}}_i$, $\hat{\mathbf{m}}_i$ napięć powierzchniowych $\hat{\mathbf{p}}_i$ elementów makroskopowych odnoszą się do ustrojów zarówno o ścianach swobodnych jak i też do ustrojów o wymuszonych przemieszczeniach ścian zewnętrznych.

Równania obszarowe (3.33)₍₁₊₂₎ elementów makroskopowych o wymuszonych przemieszczeniach ścian zewnętrznych przekształcimy wykorzystując wzory (3.1), (2.47), (2.49) oraz (3.43). Wyznaczając na podstawie tych wzorów następujące znaczenia występujących w (3.33)₍₁₊₂₎ całek

$$\int_{S_i} \Delta_i(\hat{\rho}_i) dS_i = \sum_n n \nabla_n q_{ii},$$

$$\int_n \nabla [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times_n \mathbf{f}] dV = n \nabla [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times_n \mathbf{f}],$$

$$\Delta_i \int_{S_i} [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\rho}_i] dS_i = \sum_n n \nabla [(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times_n q_{ii}] + \\ + \sum_n n \nabla [i_i \times_n q_{ii} + n m_{ii}],$$

mamy równania

$$\sum_n n \nabla \left(\sum_{i=1}^3 n q_{ii} + n \mathbf{f} \right) = 0,$$

$$\sum_n n \nabla \left[(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}) \times [n \mathbf{f} + \sum_{i=1}^3 n q_{ii}] + \sum_{i=1}^3 (i_i \times n q_{ii} + n m_{ii}) \right] = 0,$$

które wobec warunków (2.58) stanów równowagi komórek n są tożsamościowo spełnione.

Rozwiązania pozostałych równań (3.38)₍₃₊₄₎ względem wektorów $n \hat{\mathbf{V}}_i$, $n \hat{\mathbf{G}}_i$ zależą od tego czy w elemencie makroskopowym występują wewnętrzne komórki będące pustkami oraz w jaki sposób są one rozmieszczone w obszarze elementu.

W przypadku gdy element makroskopowy nie zawiera komórek wewnętrznych będących pustkami, wówczas wobec nie znikania w nich wektorów $n \hat{\mathbf{q}}_i$, $n \hat{\mathbf{m}}_i$ obszarowe równania (3.41)₍₃₊₄₎ przybierają postać

$$(3.44) \quad (E_{\lambda i} - 1) \left[n \mathbf{V}_i - (n_i) I_i [n \mathbf{V}_{ii}] \right] = 0,$$

$$(E_{\lambda i} - 1) \left[n \mathbf{G}_i - (n_i) I_i [n \mathbf{G}_{ii}] \right] = 0.$$

Stąd też w rozpatrywanym przypadku rozwiązania równań (3.43) mają postać

$$(3.45) \quad n \mathbf{V}_i = n_i \overset{\circ}{\mathbf{V}}_i + (n_i) I_i [n \mathbf{V}_{ii}],$$

$${}^n \mathcal{G}_i = n_i \mathcal{G}_i + (n_i) I_i \{ {}^n \mathcal{G}_{ii} \}$$

i są określone z dowolnością do wektorów ${}^n \mathbf{V}_i$, ${}^n \mathcal{G}_i$ ($i=1,2,3$) niezależnych od numeratorów $n_i = 1, \dots, N_i$.

Rozpatrzmy równania (3.41)₍₃₊₄₎ w odniesieniu do elementów makroskopowych zawierających liczbę P komórek n o numeratorach

$S = \sum_{\rho=1}^P S_{\rho} \mathbf{i}_{\rho}$, $\rho = 1, \dots, P$ będących pustkami. Zakładamy przy tym, że P składowe $S_{\rho} \neq S_r$ przyp $\rho \neq r$ spełniają nierówności $2 \leq S_{\rho} \leq N_{i-1}$. Oznacza to, że w każdej z komórkowych warstw wewnętrznych $n_i = 2, \dots, N_{i-1}$ struktury elementu makroskopowego może znajdować się co najwyżej jedna komórka n będącą pustką.

W rozpatrywanym przypadku wielospójności obszaru elementu makroskopowego wyrażenia na wektory ${}^n \mathbf{V}_i$, ${}^n \mathcal{G}_i$ spełniające równania (3.41)₍₃₊₄₎ można przedstawić w postaci

$$(3.46) \quad \begin{aligned} {}^n \mathbf{V}_i &= \left(1 - \sum_{\rho=1}^P \delta_{n_i, S_{\rho}}^* \right) {}^n \mathbf{V}_i^{\circ} + (n_i) I_i \{ {}^n \mathbf{V}_{ii} \} + \\ &+ \sum_{\rho=1}^P \delta_{n_i, S_{\rho}}^* \left[[1 - H(n_i - S_{\rho})] S_{\rho} \mathbf{V}_i^{\circ(\rho)} + H(n_i - S_{\rho}) S_{\rho} \mathbf{V}_i^{\circ(\rho)} \right], \\ {}^n \mathcal{G}_i &= \left(1 - \sum_{\rho=1}^P \delta_{n_i, S_{\rho}}^* \right) n_i \mathcal{G}_i + (n_i) I_i \{ {}^n \mathcal{G}_{ii} \} + \\ &+ \sum_{\rho=1}^P \delta_{n_i, S_{\rho}}^* \left[[1 - H(n_i - S_{\rho})] S_{\rho} \mathcal{G}_i^{\circ(\rho)} + H(n_i - S_{\rho}) S_{\rho} \mathcal{G}_i^{\circ(\rho)} \right]. \end{aligned}$$

Pojawiające się w tych wzorach symbole matematyczne $\delta_{n_i, S_{\rho}}^*$, $\delta_{n_i, S_{\rho}}$ mają następujące znaczenia

$$(3.47) \quad \begin{aligned} \delta_{n_i, S_{\rho}}^* &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 g_{j,k} \delta_{n_j, S_{\rho j}} \delta_{n_k, S_{\rho k}}, \\ \delta_{n_i, S_{\rho}} &= \begin{cases} 1 & \text{gdy } n_i = S_{\rho} \\ 0 & \text{gdy } n_i \neq S_{\rho} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\delta_{n_s} = \delta_{n_i, s_i} \delta_{n_i, s_i}^* = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n = s_p \\ 0 & \text{gdy } n \neq s_p \end{cases}$$

Wykażemy, że wyrażenia (3.46) stanowią istotnie rozwiązanie równań (3.41)₍₃₊₄₎. Podstawiając bowiem odpowiednio wzory (3.46) do równań (3.41)₍₃₊₄₎ a następnie uwzględniając następujące równości

$$(E_{1i} - 1) \delta_{n_i, s_i}^* = 0,$$

$$(E_{1i} - 1) H(n_i - s_i) = \frac{1}{2} (\delta_{n_i, s_i} + \delta_{n_i, s_i - 1})$$

mamy

$$[n \hat{q}_i]_{\xi_i = (n_i) b_i} = \left[\sum_{p=1}^P (s_i \overset{\circ}{V}_i^{(p)} - s_i \overset{\circ}{V}_i^{(p)}) (\delta_{n_s} + \delta_{n_i, s_i}^* \delta_{n_i, s_i - 1}) \right] = 0,$$

$$[n \hat{m}_i]_{\xi_i = (n_i) b_i} = \left[\sum_{p=1}^P (s_i \overset{\circ}{\varphi}_i^{(p)} - s_i \overset{\circ}{\varphi}_i^{(p)}) (\delta_{n_s} + \delta_{n_i, s_i}^* \delta_{n_i, s_i - 1}) \right] = 0;$$

skąd wobec znikania napięć

$$s_p \hat{q}_i = 0, \quad s_p \hat{m}_i = 0$$

oraz zachodzących równości

$$\delta_{n_s} [n \hat{q}_i]_{\xi_i = (n_i) b_i} = \delta_{n_s} [s_p \hat{q}_i]_{\xi_i = (s_p) b_i} = 0,$$

$$\delta_{n_s} [n \hat{m}_i]_{\xi_i = (n_i) b_i} = \delta_{n_s} [s_p \hat{m}_i]_{\xi_i = (s_p) b_i} = 0,$$

$$\delta_{n_i, s_i}^* \delta_{n_i, s_i - 1} [n \hat{q}_i]_{\xi_i = (s_i - 1) b_i} = 0,$$

$$\delta_{n_i, s_i}^* \delta_{n_i, s_i - 1} [n \hat{m}_i]_{\xi_i = (s_i - 1) b_i} = 0$$

dochodzimy do wniosku, że wektory $n \overset{\circ}{V}_i$, $n \overset{\circ}{\varphi}_i$ określone za pomocą wzorów (3.46) stanowią rozwiązania równań (3.41)₍₃₊₄₎. Wyprowadzone wzory (3.42) na wektorowe współczynniki $n q_i$, $n m_i$ napięć mikroelementów w urządzeniach makroskopowych oraz wzory (3.45) lub (3.46) opisujące współczynniki wektorowe uogólnionych

przemieszczeń $n\mathbf{v}_i$, $n\mathbf{q}_i$ komórek n stanowiły cel rozważań tego punktu pracy i zostaną wykorzystane przy formułowaniu równań opisujących stany napięć i deformacji.

3.5. Brzegowe warunki ciągłości napięć

Brzegowe warunki ciągłości napięć elementów makroskopowych swobodnych od zewnętrznych więzów kinematycznych, których ściany $\xi_i=0$, $\xi_i=a_i$ ($i=1,2,3$) są obciążone odpowiednio siłami powierzchniowymi o gęstościach - $\mathbf{p}_i^{(-)}$, $\mathbf{p}_i^{(+)}$ wyprowadzimy na podstawie równania (3.32)₂. Równanie to przepisano w następującej równoważnej postaci

$$(3.48) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left[\sum_i \hat{\mathbf{w}}_i \cdot [\mathbf{p}_i^{(+)} - \mathbf{p}_i^{(-)} - \Delta_i \hat{\mathbf{p}}_i] + \Delta_i \hat{\mathbf{w}}_i \cdot [\mathbf{p}_i^{(+)} + \mathbf{p}_i^{(-)} - \sum_i \hat{\mathbf{p}}_i] \right] dS_i = 0.$$

Uwzględniając wzory (3.1), (3.5) a następnie podstawiając do (3.48), wzory (2.47), (3.8) oraz uwzględniając określenia (2.1), (2.47) mamy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \sum_{n_i} n_i S_i \left\{ \left[n_i \mathbf{q}_{i,j}^{(+)} - n_i \mathbf{q}_{i,j}^{(-)} - \Delta_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{\mathbf{q}}_{i,j} \right) \right] \cdot \left[\sum_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{\mathbf{v}}_i \right) \right] + \right. \\ & \left. + \left[n_i \mathbf{q}_{i,j}^{(+)} + n_i \mathbf{q}_{i,j}^{(-)} - \sum_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{\mathbf{q}}_{i,j} \right) \right] \cdot \left[\Delta_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{\mathbf{v}}_i \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[n_i \mathbf{q}_{i,j,k}^{(+)} - n_i \mathbf{q}_{i,j,k}^{(-)} - \Delta_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{\mathbf{q}}_{i,j,k} \right) \right] \cdot \left[\sum_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{\mathbf{q}}_{i,j,k} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \left[n_i \mathbf{q}_{i,j,k}^{(+)} + n_i \mathbf{q}_{i,j,k}^{(-)} - \sum_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{\mathbf{q}}_{i,j,k} \right) \right] \cdot \left[\Delta_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{\mathbf{q}}_{i,j,k} \right) \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Następnie po podstawieniu do tego równania wzorów (2.50) na wektory $n \hat{\mathbf{q}}_{i,j,k}$ wzorów (3.11) na wektory $n_i \mathbf{q}_{i,j,k}^{(-)}$, $n_i \mathbf{q}_{i,j,k}^{(+)}$ oraz po uwzględnieniu wzorów (2.16) znajdujemy po przekształceniach

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \sum_{\mathbf{n}_i} \mathbf{n}_i S_i \left\{ \left[\mathbf{n}_i \mathbf{q}_i^{(+)} - \mathbf{n}_i \mathbf{q}_i^{(-)} - \Delta_i \left(\sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} \Omega_i \mathbf{n} \hat{\mathbf{q}}_i \right) \right] \cdot \left[\sum_i \left(\sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} \Omega_i \mathbf{n} \hat{\mathbf{v}}_i \right) \right] + \right. \\
& + \left[\mathbf{n}_i \mathbf{q}_i^{(+)} + \mathbf{n}_i \mathbf{q}_i^{(-)} - \sum_i \left(\sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} \Omega_i \mathbf{n} \hat{\mathbf{q}}_i \right) \right] \cdot \left[\Delta_i \left(\sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} \Omega_i \mathbf{n} \hat{\mathbf{v}}_i \right) \right] + \\
& + \left[\mathbf{n}_i \mathbf{m}_i^{(+)} - \mathbf{n}_i \mathbf{m}_i^{(-)} - \Delta_i \left(\sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} \Omega_i \mathbf{n} \hat{\mathbf{m}}_i \right) \right] \cdot \left[\sum_i \left(\sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} \Omega_i \mathbf{n} \hat{\mathbf{q}}_i \right) \right] + \\
& \left. + \left[\mathbf{n}_i \mathbf{m}_i^{(+)} + \mathbf{n}_i \mathbf{m}_i^{(-)} - \sum_i \left(\sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} \Omega_i \mathbf{n} \hat{\mathbf{m}}_i \right) \right] \cdot \left[\Delta_i \left(\sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} \Omega_i \mathbf{n} \hat{\mathbf{q}}_i \right) \right] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

skąd po uwzględnieniu wzorów (3.3), (3.4), (3.12) jest też

$$\begin{aligned}
(3.49) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left\{ \sum_i \hat{\mathbf{v}}_i \cdot \left[\mathbf{q}_i^{(+)} - \mathbf{q}_i^{(-)} - \Delta_i \hat{\mathbf{q}}_i \right] + \sum_i \hat{\mathbf{q}}_i \cdot \left[\mathbf{m}_i^{(+)} - \mathbf{m}_i^{(-)} - \Delta_i \hat{\mathbf{m}}_i \right] + \right. \\
\left. + \Delta_i \hat{\mathbf{v}}_i \cdot \left[\mathbf{q}_i^{(+)} + \mathbf{q}_i^{(-)} - \sum_i \hat{\mathbf{q}}_i \right] + \Delta_i \hat{\mathbf{q}}_i \cdot \left[\mathbf{m}_i^{(+)} + \mathbf{m}_i^{(-)} - \sum_i \hat{\mathbf{m}}_i \right] \right\} dS_i = 0.
\end{aligned}$$

Z kolei podstawiając do równania (3.49) następujące wyrażenia

$$\begin{aligned}
(3.50) \quad \sum_i \hat{\mathbf{v}}_i &= 2 \sum_{\mathbf{n}_i} \mathbf{n}_i \Omega_i^* \mathbf{n}_i \mathbf{v}_i^0, \\
\sum_i \hat{\mathbf{q}}_i &= 2 \sum_{\mathbf{n}_i} \mathbf{n}_i \Omega_i^* \mathbf{n}_i \mathbf{q}_i^0, \\
\Delta_i \hat{\mathbf{v}}_i &= \sum_{\mathbf{n}_i} \mathbf{n}_i \Omega_i^* \sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} d_i \mathbf{n} \mathbf{v}_{i+1}, \\
\Delta_i \hat{\mathbf{q}}_i &= \sum_{\mathbf{n}_i} \mathbf{n}_i \Omega_i^* \sum_{\mathbf{n}_{i+1}}^{N_i} d_i \mathbf{n} \mathbf{q}_{i+1},
\end{aligned}$$

uzyskane na podstawie wzorów (3.4), (2.18), (3.45) lub (3.46) a następnie żądając jego spełnienia przy dowolnych wektorach

$$n_i \overset{\circ}{v}_i, \quad n_i \overset{\circ}{q}_i, \quad \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n v_{ii}, \quad \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n q_{ii}$$

dochodzimy do następującego układu równań wektorowych

$$n_i S_i (n_i q_i^{(+)} + n_i q_i^{(-)}) - \int_{n_i S_i} (\sum_i \hat{q}_i) dS_i = 0,$$

$$n_i S_i (n_i m_i^{(+)} + n_i m_i^{(-)}) - \int_{n_i S_i} (\sum_i \hat{m}_i) dS_i = 0,$$

$$n_i S_i (n_i q_i^{(+)} - n_i q_i^{(-)}) - \int_{n_i S_i} (\Delta_i \hat{q}_i) dS_i = 0,$$

$$n_i S_i (n_i m_i^{(+)} - n_i m_i^{(-)}) - \int_{n_i S_i} (\Delta_i \hat{m}_i) dS_i = 0.$$

Po podstawieniu zachodzących na podstawie wzorów (3.43) równości

$$(3.51) \quad \sum_i \hat{q}_i = 2 \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i \overset{\circ}{q}_i,$$

$$\sum_i \hat{m}_i = 2 \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* n_i \overset{\circ}{m}_i,$$

$$\Delta_i \hat{q}_i = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n q_{ii},$$

$$\Delta_i \hat{m}_i = \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n m_{ii};$$

układ ten daje brzegowe warunki ciągłości napięć o następującej postaci

$$(3.52) \quad n_i \overset{\circ}{q}_i = \frac{1}{2} (n_i q_i^{(+)} + n_i q_i^{(-)}),$$

$$n_i \overset{\circ}{m}_i = \frac{1}{2} (n_i m_i^{(+)} + n_i m_i^{(-)}),$$

$$\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n q_{ii} = n_i q_i^{(+)} - n_i q_i^{(-)},$$

$$\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n m_{ii} = n_i m_i^{(+)} - n_i m_i^{(-)}.$$

w zakończeniu tego punktu wyprowadzimy jeszcze warunki ciągłości napieć na ścianach $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ ($i=1,2,3$) w tzw. postaci "osiłabionej" przyjmując przy tym wektory $n_i \hat{v}_i$, $n_i \hat{g}_i$ w postaci

$$(3.53) \quad \begin{aligned} n_i \hat{v}_i &= \hat{z}_i + (n_i \hat{z}_i \cdot i_i) i_i, \\ n_i \hat{g}_i &= \hat{x}_i \end{aligned}$$

i zakładając jednocześnie znikanie składowych: $\hat{z}_i \cdot i_i = 0$, $\hat{x}_i \cdot i_i = 0$. Podstawiając do (3.49) wzory (3.50) a następnie uwzględniając wyrażenia (3.12) na wektory $q_i^{(+)}$, $m_i^{(+)}$, $q_i^{(-)}$, $m_i^{(-)}$ oraz wzory (3.51) mamy przy przyjętych założeniach (3.53) równanie

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{n_i} n_i S_i & \left\{ \left[\hat{z}_i + (n_i \hat{z}_i \cdot i_i) i_i \right] \cdot \left[n_i q_i^{(+)} - n_i q_i^{(-)} - \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n q_{i,i} \right] + \right. \\ & + \hat{x}_i \cdot \left[n_i m_i^{(+)} - n_i m_i^{(-)} - \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n m_{i,i} \right] + \\ & + \left[\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n v_{i,i} \right] \cdot \left[\frac{1}{2} (n_i q_i^{(+)} + n_i q_i^{(-)}) - n_i \hat{q}_i \right] + \\ & \left. + \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n g_{i,i} \cdot \left[\frac{1}{2} (n_i m_i^{(+)} + n_i m_i^{(-)}) - n_i \hat{m}_i \right] \right\} = 0. \end{aligned}$$

Żądanie spełnienia tego równania przy dowolnych wektorach

$$\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n v_{i,i}, \quad \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n g_{i,i}, \quad (n_i \hat{z}_i \cdot i_i) i_i$$

oraz wektorach \hat{z}_i, \hat{x}_i o składowych $\hat{z}_i \cdot i_i = 0, \hat{x}_i \cdot i_i = 0$, ($i=1,2,3$) daje warunki brzegowe ciągłości

$$(3.54) \quad \begin{aligned} n_i \hat{q}_i &= \frac{1}{2} (n_i q_i^{(+)} + n_i q_i^{(-)}), \\ n_i \hat{m}_i &= \frac{1}{2} (n_i m_i^{(+)} + n_i m_i^{(-)}), \\ \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i [n q_{i,i} \cdot i_i] &= [n_i q_i^{(+)} - n_i q_i^{(-)}] \cdot i_i, \end{aligned}$$

$$\sum_n n \sqrt{[n q_{ij} \cdot j]} = \frac{1}{a_i} \sum_n n \sqrt{[n_i q_i^{(+)} - n_i q_i^{(-)}] \cdot j},$$

$$\sum_n n \sqrt{[n m_{ij} \cdot j]} = \frac{1}{a_i} \sum_n n \sqrt{[n_i m_i^{(+)} - n_i m_i^{(-)}] \cdot j},$$

$$i, j = 1, 2, 3; i \neq j.$$

" odróżnieniu od brzegowych warunków ciągłości (3.52) warunki te zawierają warunki uśrednione (3.54)₍₄₊₅₎ oraz mniejszą o jeden liczbę warunków i stąd przyjęto je określać jako warunki w postaci " osłabionej". W następnych punktach pracy zostaną one wykorzystane przy formułowaniu iteracyjnej metody wyznaczania stanów naprężeń mikroelementów w ustrojach wielokomórkowych.

3.6. Brzegowe warunki ciągłości przemieszczeń

Brzegowe warunki ciągłości przemieszczeń elementu makroskopowego, którego ściany $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ ($i=1, 2, 3$) doznają odpowiednio wymuszonych przemieszczeń $u_i^{(-)}$, $u_i^{(+)}$ określonych za pomocą wzorów (3.17-3.19), wyprowadzimy na podstawie równania (3.36). Przepisując to równanie w następującej równoważnej postaci

$$(3.55) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left\{ \sum_i \hat{p}_i \cdot [w_i^{(+)} - w_i^{(-)} - \Delta_i \hat{w}_i] + \Delta_i \hat{p}_i \cdot [w_i^{(+)} + w_i^{(-)} - \sum_i \hat{w}_i] \right\} dS_i = 0$$

a następnie uwzględniając kolejno wzory (3.1), (2.47), (2.50)

mamy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \sum_{n_i} \left\{ \left[\sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{q}_i \right) \right] \cdot \left[\int_{n_i S_i} [w_i^{(+)} - w_i^{(-)} - \Delta_i \hat{w}_i] dS_i \right] + \right. \\ & \left. + \left[\sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i n \hat{m}_i \right) \right] \cdot \left[\sum_{k,l,m=1}^3 [(1 - \delta_{ik}) \epsilon_{klm} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \delta_{ik} (\xi_{ikl} - \epsilon_{ikl}) \right] 12_{(n_k)} d_{kl}^{-2} \int_{n_i S_i} \xi_k [w_i^{(+)} - w_i^{(-)} - \Delta_i \hat{w}_i] dS_i \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\Delta_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{q}_i \right) \right] \cdot \left[\int_{n_i S_i}^8 \left[w_i^{(+)} + w_i^{(-)} - \sum_i \hat{w}_i \right] dS_i + \right. \\
& + \left[\Delta_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{m}_i \right) \right] \cdot \left[\sum_{k,i,m=1}^3 \left[(1 - \delta_{ik}) \epsilon_{kjm} + \frac{1}{2} \delta_{ik} (\delta_{ikl} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \epsilon_{ikl}) \right] 12 (\eta_k) d_k^{-2} \int_{n_i S_i} (\eta_k) \xi_k \left[w_i^{(+)} - w_i^{(-)} - \Delta_i \hat{w}_i \right] dS_i \right] = 0
\end{aligned}$$

Z kolei podstawienie do tego równania wzorów (2.1), (2.12), (2.16) daje

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^3 \sum_{n_i} n_i S_i \left\{ \left[\sum_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{q}_i \right) \right] \cdot \left[n_i v_i^{(+)} - n_i v_i^{(-)} - \Delta_i \sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{v}_i \right] + \right. \\
& + \left[\sum_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{m}_i \right) \right] \cdot \left[n_i \varphi_i^{(+)} - n_i \varphi_i^{(-)} - \Delta_i \sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{\varphi}_i \right] + \\
& + \left[\Delta_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{q}_i \right) \right] \cdot \left[n_i v_i^{(+)} + n_i v_i^{(-)} - \sum_i \sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{v}_i \right] + \\
& \left. + \left[\Delta_i \left(\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{m}_i \right) \right] \cdot \left[n_i \varphi_i^{(+)} + n_i \varphi_i^{(-)} - \sum_i \sum_{\eta_i=1}^{N_i} (\eta_i) \Omega_i \pi \hat{\varphi}_i \right] \right\} = 0,
\end{aligned}$$

skąd też jest

$$\begin{aligned}
(3.56) \quad \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left\{ \Delta_i \hat{q}_i \cdot \left[\hat{v}_i^{(+)} + \hat{v}_i^{(-)} - \sum_i \hat{v}_i \right] + \Delta_i \hat{m}_i \cdot \left[\hat{\varphi}_i^{(+)} + \hat{\varphi}_i^{(-)} - \sum_i \hat{\varphi}_i \right] + \right. \\
\left. + \sum_i \hat{q}_i \cdot \left[\hat{v}_i^{(+)} - \hat{v}_i^{(-)} - \Delta_i \hat{v}_i \right] + \sum_i \hat{m}_i \cdot \left[\hat{\varphi}_i^{(+)} - \hat{\varphi}_i^{(-)} - \Delta_i \hat{\varphi}_i \right] \right\} dS_i = 0.
\end{aligned}$$

Podstawiając pod znakiem całki tego równania wzory (3.50-3.51) oraz uwzględniając określenia (3.19) wektorów $\hat{v}_i^{(-)}$, $\hat{\varphi}_i^{(-)}$, $\hat{v}_i^{(+)}$, $\hat{\varphi}_i^{(+)}$ znajdujemy po przekształceniach

$$(3.57) \quad \sum_{i=1}^3 \left\{ \sum_n \pi \nabla \left[\pi \hat{q}_i \cdot \left(n_i v_i^{(+)} + n_i v_i^{(-)} - 2 n_i \hat{v}_i \right) + n_i \hat{m}_i \cdot \left(n_i \varphi_i^{(+)} + n_i \varphi_i^{(-)} - 2 n_i \hat{\varphi}_i \right) \right] + \right.$$

$$+ 2 \sum_{n_i} n_i S_i \left[n_i \overset{\circ}{q}_{i\nu} \cdot (n_i \mathbf{v}_{i\nu}^{(+)} - n_i \mathbf{v}_{i\nu}^{(-)} - \sum_{\eta_i=1}^{N_i} (n_{\eta_i}) d_{i\nu} n \mathbf{v}_{i\nu}) + \right. \\ \left. + n_i \overset{\circ}{m}_{i\nu} \cdot (n_i \mathcal{G}_{i\nu}^{(+)} - n_i \mathcal{G}_{i\nu}^{(-)} - \sum_{\eta_i=1}^{N_i} (n_{\eta_i}) d_{i\nu} n \mathcal{G}_{i\nu}) \right] = 0$$

Ponieważ równanie (3.58)_N powinno zachodzić przy dowolnych wektorowych współczynnikach $\sum_{\eta_i=1}^{N_i} n_{\eta_i} q_{i\nu}$, $n_i \overset{\circ}{q}_{i\nu}$, $\sum_{\eta_i=1}^{N_i} n_{\eta_i} m_{i\nu}$, $n_i \overset{\circ}{m}_{i\nu}$; zatem dochodzimy do wniosku o konieczności spełnienia następującego układu równań wektorowych

$$(3.58) \quad n_i \overset{\circ}{v}_{i\nu} = \frac{1}{2} (n_i \mathbf{v}_{i\nu}^{(+)} + n_i \mathbf{v}_{i\nu}^{(-)}), \\ n_i \overset{\circ}{g}_{i\nu} = \frac{1}{2} (n_i \mathcal{G}_{i\nu}^{(+)} + n_i \mathcal{G}_{i\nu}^{(-)}),$$

$$\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (n_{\eta_i}) d_{i\nu} n \mathbf{v}_{i\nu} = n_i \mathbf{v}_{i\nu}^{(+)} - n_i \mathbf{v}_{i\nu}^{(-)},$$

$$\sum_{\eta_i=1}^{N_i} (n_{\eta_i}) d_{i\nu} n \mathcal{G}_{i\nu} = n_i \mathcal{G}_{i\nu}^{(+)} - n_i \mathcal{G}_{i\nu}^{(-)}.$$

Równania te stanowią brzegowe warunki ciągłości uogólnionych przemieszczeń elementów makroskopowych na ścianach doznających wymuszonych przemieszczeń.

Rozdział 1V

RÓWNANIA ELASTOSTATYKI MAKROELEMENTÓW. ALGORYTMY ROZWIĄZAŃ

4.1. Obszarowe i brzegowe równania stanów deformacji

Wykorzystując dotychczas wyprowadzone wzory i zależności przedstawimy w wektorowej postaci równania opisujące stany deformacji wielospójnych elementów makroskopowych o dowolnych komórkowych strukturach wewnętrznych. Przyjmujemy przy tym, że rozpatrywane ustroje mogą zawierać P pustek o numeracjach S_p , $p = 1, \dots, P$ rozmieszczonych zgodnie z przyjętymi w p. 3.4 założeniami. Uwzględniając znikanie wektorów $s_p q_{ii} = 0$, $s_p m_{ii} = 0$ przepisujemy warunki (3.42) ciągłości napięć mikroelementów w postaci

$$(4.1) \quad n_i q_{ij} = n_i \hat{q}_{ij} + (n_i) I_{ij} \left\{ \left(1 - \sum_{p=1}^P \delta_{n_s} \right) n_i q_{ij} \right\},$$

$$n_i m_{ij} = n_i \hat{m}_{ij} + (n_i) I_{ij} \left\{ \left(1 - \sum_{p=1}^P \delta_{n_s} \right) n_i m_{ij} \right\}$$

przy $n_i = n_i^j = 1, \dots, N_i$; $n_i \neq s_i$; $p = 1, \dots, P$; $i = 1, 2, 3$. Podstawienie do (4.1) wzorów (2.81) opisujących związki fizyczne pomiędzy komórkami n daje równania wektorowe

$$(4.2) \quad \sum_{j,k,l=1}^3 \left[n A_{ij,kl} n v_{kl} + n C_{ij,kl} n \varphi_{kl} \right] n G - (n_i) I_{ij} \left\{ \left(1 - \sum_{p=1}^P \delta_{n_s} \right) n G \left[12 (n_i) d_{ij}^{-2} n A_{ij,j,k} \delta_{jk} n v_k + n C_{ij,j,kl} n \varphi_{kl} \right] \right\} \cdot i_L j =$$

$$= n_i \hat{q}_i + \sum_{j=1}^3 (n_j) I_i \left[\left(1 - \sum_{p=1}^P \delta_{n_s} \right) n A_{j i} (1 - 2n\gamma + \delta_{ij}) (n f \cdot i_j) i_j \right],$$

$$\sum_{j,k,l=1}^3 \left\{ n G \left[-\frac{2}{5(1-2n\gamma)} \epsilon_{ijl} \delta_{lk} n^W + n B_{ij \cdot kl} n^V_k + (n_i) d_{ij}^e / 12 n \Phi_{ij \cdot kkl} n \mathcal{Q}_{kk} \right] - \right. \\ \left. - (n_j) I_i \left[n G \left(1 - \sum_{p=1}^P \delta_{n_s} \right) \left[n \Phi_{ij \cdot kj} \delta_{jl} n \mathcal{Q}_k + n B_{ij \cdot kkl} n^V_k \right] \right] \cdot i_l i_j \right\} = \\ = n_i \hat{m}_i,$$

w których wektory n^W , n^V_i , $n \mathcal{Q}_i$ są określone za pomocą wzorów (2.74), (3.46) poniżej przepisanych w postaci

$$n^W = -\frac{1}{2} \sum_{r=1}^3 n^V_r + \frac{5}{2} \sum_{j,r=1}^3 n A_{jr} (1 - 2n\gamma + \delta_{jr}) (n^V_r \cdot i_j) i_j + \\ + \frac{5}{24} \sum_{j=1}^3 n A_{jj} d_j^e \left[\sum_{p,m=1}^3 \epsilon_{pmj} (n \mathcal{Q}_{pp \cdot im}) + \frac{1-2n\gamma}{nG} (n f \cdot i_j) \right] i_j,$$

$$n^V_i = \left(1 - \sum_{p=1}^P \delta_{n_i s_p} \right) n_i \hat{v}_i + (n_i) I_i \left[n^V_{i i} \right] + \\ + \sum_{p=1}^P \delta_{n_i s_p} \left[[1 - H(n_i - s_p)] s_p \hat{v}_i^{(\epsilon)} + H(n_i - s_p) s_p \hat{v}_i^{(\theta)} \right],$$

$$n \mathcal{Q}_i = \left(1 - \sum_{p=1}^P \delta_{n_i s_p} \right) n_i \hat{q}_i + (n_i) I_i \left[n \mathcal{Q}_{i i} \right] + \\ + \sum_{p=1}^P \delta_{n_i s_p} \left[[1 - H(n_i - s_p)] s_p \hat{q}_i^{(\epsilon)} + H(n_i - s_p) s_p \hat{q}_i^{(\theta)} \right].$$

Układ (4.2) jest złożony z $3(N-P)$ równań względem wektorów

$n^V_{i i}$, $n \mathcal{Q}_{i i}$ komórek $n \neq s_p$, przy $n_i = 1, \dots, N_i$, $n_i + s_{p i}$. Układ tych równań zawiera ponadto niewiadome wektory $s_{p i} \hat{v}_i^{(\epsilon)}$, $s_{p i} \hat{v}_i^{(\theta)}$, $s_{p i} \hat{q}_i^{(\epsilon)}$, $s_{p i} \hat{q}_i^{(\theta)}$ określone dla $s_{p i} = s - s_p \cdot i_i$ przy $p = 1, \dots, P$; wektory $n_i \hat{q}_i$, $n_i \hat{m}_i$ określone przy $n_i = n - n_i \cdot i_i = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) n_k i_k$, $n_k = 1, \dots, N_k$ oraz wektory $n_i \hat{v}_i$, $n_i \hat{q}_i$ określone przy $n_i = s_p$.

W rozpatrywanym przypadku wielospójnego ustroju makroskopowego dodatkowe równania dają warunki znikania napięć siłowych i

momentowych $s_p \hat{q}_i = 0$, $s_p \hat{m}_i = 0$ komórek s_p , $p = 1, \dots, P$

będących pustkami. Stąd wobec $\sum_p q_{vi} = 0$, $\sum_p m_{vi} = 0$ ($i=1,2,3$) mamy równania

$$(4.3) \quad \sum_p \dot{q}_{vi} + \left[-\frac{1}{2} \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n q_{vi} + \sum_{r_i=1}^{S_i-1} (r_i) d_i [n q_{vi}]_{n_i=r_i} \right]_{n_i=S_i} = 0,$$

$$\sum_p \dot{m}_{vi} + \left[-\frac{1}{2} \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n m_{vi} + \sum_{r_i=1}^{S_i-1} (r_i) d_i [n m_{vi}]_{n_i=r_i} \right]_{n_i=S_i} = 0,$$

przy $\dot{s}_i = \dot{s} - \sum_p \dot{s}_i$, $p=1, \dots, P$, $i=1, 2, 3$.

Pozostałymi do spełnienia równaniami, stanowiącymi podstawę do określenia stanów deformacji, są brzegowe (styczne, kinematyczne lub statyczno-kinematyczne) warunki ciągłości na ścianach $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ ($i=1,2,3$) elementu makroskopowego. W zależności od tego czy dotyczą one wybranych składowych napięć: $n_i q_{vi}^{(\tau)}$, $n_i q_{vi}^{(\theta)}$, $n_i m_{vi}^{(\tau)}$, $n_i m_{vi}^{(\theta)}$ czy też składowych uogólnionych przemieszczeń $n_i v_{vi}^{(\tau)}$, $n_i v_{vi}^{(\theta)}$, $n_i \varphi_{vi}^{(\tau)}$, $n_i \varphi_{vi}^{(\theta)}$ mogą one przybierać na każdej ze ścian dowolną kombinację szóstki brzegowych warunków ciągłości. Stosownie do specyfiki zagadnienia brzegowe warunki te przybierają odpowiednio wybrane spośród wynikających z (3.52), (3.58) następujących równości odnoszących się do ścian $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ ($i=1,2,3$) elementu makroskopowego.

$$(4.4) \quad \left[n_i \dot{q}_{vi} \mp \frac{1}{2} \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n q_{vi} \right] \cdot i_j = n_i q_{vi}^{(\tau)} \cdot i_j,$$

$$\left[n_i \dot{m}_{vi} \mp \frac{1}{2} \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n m_{vi} \right] \cdot i_j = n_i m_{vi}^{(\tau)} \cdot i_j,$$

$$\left[n_i \dot{v}_{vi} \mp \frac{1}{2} \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n v_{vi} \right] \cdot i_j = n_i v_{vi}^{(\tau)} \cdot i_j,$$

$$\left[n_i \dot{\varphi}_{vi} \mp \frac{1}{2} \sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) d_i n \varphi_{vi} \right] \cdot i_j = n_i \varphi_{vi}^{(\tau)} \cdot i_j.$$

Występujące w tych wzorach układy znaków " \mp " oznaczają: minus - dla ścian $\xi_i = 0$, plus - dla ścian $\xi_i = a_i$ elementu makroskopowego. Równania (4.2-4.4) stanowią komplet równań opisujących wraz w warunkami $\sum_p v_{vi} = 0$, $\sum_p \varphi_{vi} = 0$ stany deformacji rozpatry-

wanych elementów makroskopowych.

rozpatrzmy przypadek elementów makroskopowych o dowolnych strukturach wewnętrznych jednakże nie zawierających komórek będących pustkami. Równania deformacji (4.2) przybierają w tym przypadku postać

$$\begin{aligned}
 (4.5) \quad & \sum_{j,k,l=1}^3 \left\{ \left[n A_{ij, kkl} n v_{kk} + n C_{ij, kl}^{(n_k)} I_k \left[n \varphi_{kk} \right] \right] n G - \right. \\
 & \left. - I_i \left[n G \left[12_{(n_i)} d_i^e n A_{ij, kj} \delta_{jk}^{(n_k)} I_k \left[n v_{kk} \right] + n C_{ij, kkl} n \varphi_{kk} \right] \right] \right\} \cdot i_l j_j = \\
 & = n_i \dot{q}_i + \sum_{j=1}^3 I_i \left[n A_{ji} (1 - 2_{n_j} \nu + \delta_{ij}) (n f_j) \right] j_j - \\
 & - \sum_{j,k,l=1}^3 \left[n C_{ij, kl} n_k \dot{\varphi}_k n G - I_i \left[n G \left[12_{(n_i)} d_i^e n A_{ij, kj} \delta_{jk} n_k \dot{v}_k \right] \right] \right] \cdot i_l j_j, \\
 & \sum_{j,k,l=1}^3 \left\{ n G \left[-\frac{2}{5(1-2_{n_j} \nu)} \epsilon_{ijk} \delta_{lk} n w + n B_{ij, kl}^{(n_k)} I_k \left[n v_{kk} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + d_i^e / 12 n D_{ij, kkl} n \varphi_{kk} \right] - I_i \left[n G \left[n D_{ij, kj} \delta_{jk}^{(n_k)} I_k \left[n \varphi_{kk} \right] + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + n B_{ij, kkl} n v_{kk} \right] \right] \right\} \cdot i_l j_j - n_i \dot{m}_i - \sum_{j,k,l=1}^3 \left[n G n B_{ij, kl} n_k \dot{v}_k - I_i \left[n G n D_{ij, kj} \delta_{jk} n_k \dot{\varphi}_k \right] \right] \cdot i_l j_j
 \end{aligned}$$

i stanowią wraz z (2.74) oraz warunkami ciągłości (3.45) uogólnionych przemieszczeń komplet równań obszarowych opisujących wektory $n v_{ij}$, $n \varphi_{ij}$ makrodeformacji komórek n elementu makroskopowego.

4.2 Obszarowe równania stanów napięć wewnętrznych

wyprowadzimy obszarowe równania na składowe wektorowych współczynników $n q_{ij}$, $n m_{ij}$ ($i=1,2,3$), które po uwzględnieniu równań równowagi (2.58) oraz warunków ciągłości napięć (3.42)₁ wyrażono w postaci

$$(4.6) \quad \begin{aligned} n q_{ij} \cdot i_j &= -\delta_{ij} (n f \cdot i_j) + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{jk}) (\delta_{ik} - \delta_{ij}) (n q_{kk} \cdot i_j), \\ n m_{ij} \cdot i_j &= -\delta_{ij} \sum_{k,l=1}^3 \epsilon_{klj} (n_k \dot{q}_k + (n_k) I_k [n q_{kk}]) \cdot i_l + \\ &+ \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{jk}) (\delta_{ik} - \delta_{ij}) (n m_{kk} \cdot i_j). \end{aligned}$$

Rozpatrzmy przypadek elementów makroskopowych o dowolnych strukturach wewnętrznych jednakże nie zawierających komórek będących pustkami. Wyprowadzanie równań rozpoczniemy od podstawienia do warunków ciągłości (3.45) odpowiednio wzorów (2.82)₍₁₊₃₎ na uogólnione przemieszczenia $n v_i$, $n \varphi_i$ ($i=1,2,3$) mamy

$$\begin{aligned} n w + n v_i^* &= n_i \dot{v}_i + (n_i) I_i [n v_{ii}], \\ n \alpha + n \varphi_i^* &= n_i \dot{\varphi}_i + (n_i) I_i [n \varphi_{ii}], \end{aligned}$$

skąd znajdujemy wyrażenia na wektory

$$(4.7) \quad \begin{aligned} n w &= \sum_{k=1}^3 [-n v_k^* + n_k \dot{v}_k + (n_k) I_k [n v_{kk}]] \cdot i_k i_k, \\ n \alpha &= \sum_{k=1}^3 [-n \varphi_k^* + n_k \dot{\varphi}_k + (n_k) I_k [n \varphi_{kk}]] \cdot i_k i_k. \end{aligned}$$

Uwzględniając te wyrażenia wzory na wektory $n v_i^*$, $n \varphi_i^*$ przedstawiamy w postaci

$$(4.8) \quad \begin{aligned} n v_i^* &= \sum_{k=1}^3 (n v_k^* \cdot i_k) i_k + \\ &+ \sum_{j,k=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) [n_k \dot{v}_k + (n_k) I_k [n v_{kk}]] \cdot i_j i_j, \\ n \varphi_i^* &= \sum_{k=1}^3 (n \varphi_k^* \cdot i_k) i_k + \\ &+ \sum_{j,k=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) [n_k \dot{\varphi}_k + (n_k) I_k [n \varphi_{kk}]] \cdot i_j i_j. \end{aligned}$$

Mnożąc skalarnie obie strony równań (4.8) przez wersory i_j

a następnie podstawiając wzory (2.82)_(2,4) oraz uwzględniając (4.7)₂ mamy:

$$\begin{aligned}
 (4.9) \quad \sum_{k=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) & \left[\left(n \mathbf{v}_k^* - {}_{(n_k)} I_k [n \mathbf{v}_{kk}^*] \right) \cdot \mathbf{i}_j - \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} {}_{(n_k)} I_k [n \mathbf{q}_l^* - \right. \\
 & \left. - {}_{(n_l)} I_l [n \mathbf{q}_{ll}^*] \right] \cdot \mathbf{i}_l = \\
 & = \sum_{k=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) \left[n \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{i}_j - \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} {}_{(n_k)} I_k [n \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{i}_l] \right] \\
 & \sum_{k=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) \left[n \mathbf{q}_k^* - {}_{(n_k)} I_k [n \mathbf{q}_{kk}^*] \right] \cdot \mathbf{i}_j = \\
 & = \sum_{k=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) (n \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{i}_j) \quad , \quad i, j = 1, 2, 3;
 \end{aligned}$$

skąd po podstawieniu wzorów (2.108) na wektory $n \mathbf{v}_i^*$, $n \mathbf{q}_i^*$, $n \mathbf{v}_{il}^*$, $n \mathbf{q}_{il}^*$ otrzymujemy równania

$$\begin{aligned}
 (4.10) \quad \sum_{k,r,s=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) & \left[{}_{(n_k)} d_k^2 / 12 n a_{kj,rr} \delta_{js} n \mathbf{q}_{rr} + n b_{kj,rs} n \mathbf{m}_r - \right. \\
 & - n G {}_{(n_k)} I_k \left\{ \frac{1}{n G} (n a'_{kkj,rs} n \mathbf{q}_r + n b'_{kkj,rrs} n \mathbf{m}_r) \right\} - \\
 & - n G \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} {}_{(n_k)} I_k \left[\frac{1}{n G} (n d'_{ll,rrl} \delta_{rs} n \mathbf{m}_{rr} + n c'_{ll,rs} n \mathbf{q}_r) - \right. \\
 & \left. - 12 {}_{(n_l)} I_l \left\{ {}_{(n_l)} d_l^{-2} a_{llv,rs} n \mathbf{m}_r \right\} \right] \cdot \mathbf{i}_s = \\
 & = n G \sum_{k=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) \left[n \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{i}_j - \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} {}_{(n_k)} I_k [n \mathbf{q}_l \cdot \mathbf{i}_l] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{4(1+n)} \left[1 + 2\delta_{kj} + 2n \nu (n A_j + (1-\delta_{jk}) \frac{1+2n A_j}{1+2n A_k}) \right] \frac{(n) d_k^2}{12} (n \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{i}_j) \right]
 \end{aligned}$$

$$\sum_{k,r,s=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) \left[n d'_{kj,rrs} \delta_{js} n m_{rr} + n C'_{kj,rs} n q_r - \right. \\ \left. - n G_{(n_k)} I_k \left[\frac{1}{n G} \left(12_{(n_k)} d_k^{-2} n d_{kkj,rs} n m_r + n C_{kkj,rs} n q_r \right) \right] \cdot i_s = \right. \\ \left. = n G \sum_{k=1}^3 (\delta_{ik} - \delta_{jk}) \left[n_k \hat{q}_{k \cdot j} + \sum_{l=1}^3 \epsilon_{kjl} I_k \left[\frac{n \nu}{2 n G (1 + \nu)} n j \cdot i_l \right] \right], \right. \\ \left. i, j = 1, 2, 3; i \neq j; \right.$$

które po podstawieniu wzorów (3.42) na współczynniki wektorowe

$$n q_i = n_i \hat{q}_i + (n_i) I_i [n q_{ii}],$$

$$n m_i = n_i \hat{m}_i + (n_i) I_i [n m_{ii}],$$

dają układ równań obszarowych względem składowych $n q_{ii \cdot j}$, $n m_{ii \cdot j}$ ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$). Występujące w tych równaniach wektory

$n_i \hat{q}_i$, $n_i \hat{m}_i$, $n_i \hat{v}_i$, $n_i \hat{g}_i$, należy określić na podstawie warunków brzegowych ciągłości odpowiednio dostosowanych do specyfiki zagadnienia brzegowego w sposób wskazany w p.4.1.

4.3. Równanie brzegowych warunków ciągłości napięć oraz ich ogólne rozwiązanie

Przedstawimy równania brzegowych warunków ciągłości elementu makroskopowego o ścianach $\underline{\epsilon}_i = 0$, $\underline{\epsilon}_i = a_i$ ($i=1, 2, 3$) poddanych działaniu sił powierzchniowych i swobodnych od więzów kinematycznych. W tym przypadku zgodnie z (3.52) (1+2) wektory $n_i \hat{q}_i$, $n_i \hat{m}_i$ są określone za pomocą wzorów

$$n_i \hat{q}_i = \frac{1}{2} (n_i q_i^{(+)} + n_i q_i^{(-)}),$$

$$n_i \hat{m}_i = \frac{1}{2} (n_i m_i^{(+)} + n_i m_i^{(-)}),$$

natomiast wektory ${}_{n_i} \overset{\circ}{V}_i$, ${}_{n_i} \overset{\circ}{G}_i$ stanowią rozwiązania równań

$$(4.11) \quad {}_{n_i} \overset{\circ}{V}_i \cdot \mathbf{i}_j + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \sum_{n_l=1}^{N_l} n \bar{A}_{ij \cdot kj} ({}_{n_l} \overset{\circ}{V}_k \cdot \mathbf{i}_j) = {}_{n_i} \Lambda_{ij},$$

$${}_{n_i} \overset{\circ}{G}_i \cdot \mathbf{i}_j + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \sum_{n_l=1}^{N_l} n \bar{D}_{ij \cdot kj} ({}_{n_l} \overset{\circ}{G}_k \cdot \mathbf{i}_j) = {}_{n_i} \alpha_{ij},$$

$$ij = 1, 2, 3;$$

w których oznaczono

$${}_{n_i} \bar{A}_{ij \cdot kj} = {}_{n_i} G_{(n_i)} d_i^{-1} {}_{n_i} A_{ij \cdot kj} \left[\sum_{n_l=1}^{N_l} {}_{n_l} G_{(n_l)} d_l^{-1} {}_{n_l} A_{ij \cdot lj} \right]^{-1},$$

$${}_{n_i} \bar{D}_{ij \cdot kj} = {}_{n_i} G_{(n_i)} d_i {}_{n_i} \mathcal{D}_{ij \cdot kj} \left[\sum_{n_l=1}^{N_l} {}_{n_l} G_{(n_l)} d_l {}_{n_l} \mathcal{D}_{ij \cdot lj} \right]^{-1},$$

przy znaczeniach symboli ${}_{n_i} A_{ij \cdot kj}$, ${}_{n_i} \mathcal{D}_{ij \cdot kj}$ określonych odpowiednio za pomocą wzorów (2.76)₁, (2.71)₃.

Równania (4.11) otrzymano podstawiając do warunków brzegowych (3.52)₍₃₊₄₎ kolejno wzory (2.81)₍₃₊₄₎ na składowe ${}_{n_i} q_{i \cdot j}$, ${}_{n_i} m_{i \cdot j}$ związków fizycznych a następnie wyrażając wektory ${}_{n_i} \overset{\circ}{V}_i$, ${}_{n_i} \overset{\circ}{G}_i$ za pomocą wzorów (3.45).

występujące ponadto w równaniach (4.11) symbole ${}_{n_i} \Lambda_{ij}$, ${}_{n_i} \alpha_{ij}$ mają znaczenia określone za pomocą zestawionych kolejno wzorów

$$(4.12) \quad {}_{n_i} \Lambda_{ij} = {}_{n_i} \overset{\circ}{\Lambda}_{ij} - \sum_{n_l=1}^{N_l} \sum_{k,l=1}^3 {}_{n_l} \Lambda_{ijkl},$$

$${}_{n_i} \overset{\circ}{\Lambda}_{ij} = \frac{1}{12 \sum_{n_l=1}^{N_l} (n_l) d_l^{-1} {}_{n_l} G {}_{n_l} A_{ij \cdot lj}} \left[{}_{n_i} q_{i \cdot j}^{(+)} - {}_{n_i} q_{i \cdot j}^{(-)} + \right. \\ \left. + \sum_{n_l=1}^{N_l} (n_l) d_l {}_{n_l} A_{ij \cdot l} (1 - 2 n_l \nu + \delta_{ij}) n_l f \right] \cdot \mathbf{i}_j,$$

$${}^n \Lambda_{ijkl} = \left[{}^n \bar{A}_{ij.kj} \delta_{jl} {}^{(n_r)} I_k [{}^n \mathbf{v}_{kk}] + {}^{(n_r)} d_i^{-e} / 2 {}^n \bar{C}_{ijj.kkl} {}^n \mathcal{G}_{kk} \right] \cdot i_l,$$

$${}^n \mathcal{X}_{ij} = {}^n \hat{\mathcal{X}}_{ij} - \sum_{\eta_i=1}^{N_i} \sum_{k,l=1}^3 {}^n \mathcal{X}_{ij'kl},$$

$${}^n \hat{\mathcal{X}}_{ij} = \frac{1}{\sum_{\eta_i=1}^{N_i} ({}^{n_r}) d_i} {}^n G {}^n \mathcal{D}_{ijj.j} \left({}^n m_i^{(+)} - {}^n m_i^{(-)} \right) \cdot i_j,$$

$${}^n \mathcal{X}_{ij'kl} = \left[{}^n \bar{D}_{ijj.kj} \delta_{jl} {}^{(n_r)} I_k [{}^n \mathcal{G}_{kk}] + {}^n \bar{B}_{ijj.kkl} {}^n \mathbf{v}_{kk} \right] \cdot i_l,$$

przy oznaczeniach

$$(4.13) \quad {}^n \bar{C}_{ijj.kkl} = {}^n G ({}^{n_r}) d_i^{-1} {}^n C_{ijj.kkl} \left[\sum_{\eta_i=1}^{N_i} {}^n G ({}^{n_r}) d_i {}^n A_{ijj.j} \right]^{-1},$$

$${}^n \bar{B}_{ijj.kkl} = {}^n G ({}^{n_r}) d_i {}^n B_{ijj.kkl} \left[\sum_{\eta_i=1}^{N_i} ({}^{n_r}) d_i {}^n G {}^n \mathcal{D}_{ijj.j} \right]^{-1}.$$

Znaczenia symboli ${}^n C_{ijj.kkl}$, ${}^n B_{ijj.kkl}$ są określone odpowiednio za pomocą wzorów $(2.76)_2$, $(2.80)_2$.

Równania brzegowych warunków ciągłości napięć w tzw. osłabionej postaci otrzymamy podstawiając do warunków (3.54) wzory (2.81)₍₃₊₄₎ na składowe ${}^n q_{ij} \cdot i_j$, ${}^n m_{ij} \cdot i_j$ a następnie wyrażając wektory ${}^n \mathbf{v}_i$, ${}^n \mathcal{G}_i$ za pomocą wzorów (3.54). Stąd otrzymujemy następujące układy równań

$$(4.14) \quad \sum_{\eta_i=1}^{N_i} \sum_{k=1}^3 {}^n \bar{A}_{ijj.ki} ({}^n \hat{\mathbf{v}}_k \cdot i_i) = {}^n \Lambda_{ij},$$

$$\sum_{\eta_i=1}^{N_i} {}^n \mathbf{v}_i {}^n G ({}^{n_r}) d_i^{-e} \sum_{k=1}^3 {}^n A_{ijj.kj} ({}^n \hat{\mathbf{v}}_k \cdot i_j) = \bar{\Lambda}_{ij},$$

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \vee \mathbf{n} G \sum_{k=1}^3 \mathbf{n} \mathcal{D}_{\nu_j j, k_j} (\mathbf{n}_k \hat{\mathcal{G}}_k \cdot \mathbf{i}_j) = \bar{\mathcal{X}}_{ij},$$

$$i, j = 1, 2, 3; i \neq j;$$

przy czym wprowadzone do równań symbole $\bar{\Lambda}_{ij}$, $\bar{\mathcal{X}}_{ij}$ mają następujące znaczenia

$$(4.15) \quad \bar{\Lambda}_{ij} = \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \vee (\mathbf{n}_i) \bar{d}_i^e \mathbf{n} G \mathbf{n} A_{i\nu_j \nu_j} \mathbf{n}_i \Lambda_{ij},$$

$$\bar{\mathcal{X}}_{ij} = \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \vee \mathbf{n} G \mathbf{n} \mathcal{D}_{\nu_j j, \nu_j} \mathbf{n}_i \mathcal{X}_{ij}.$$

Podstawiając następnie do równań (4.14) wzory (3.53) na wektory $\mathbf{n}_i \hat{\mathcal{V}}_i$, $\mathbf{n}_i \hat{\mathcal{G}}_i$ oraz uwzględniając wynikające z określeń symboli $\mathbf{n}_i \bar{A}_{i\nu_j \nu_j}$ równości $\sum_{\nu_j=1}^3 \mathbf{n} \bar{A}_{i\nu_j \nu_j} = 1$ mamy

$$(4.16) \quad \mathbf{n}_i \hat{\mathcal{Z}}_i \cdot \mathbf{i}_i + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \sum_{\nu_j=1}^{N_i} \mathbf{n} \bar{A}_{i\nu_j \nu_j k_i} (\hat{\mathcal{Z}}_k \cdot \mathbf{i}_i) = \mathbf{n}_i \Lambda_{ii},$$

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \vee \mathbf{n} G_{(\mathbf{n}_i)} \bar{d}_i^e \sum_{k=1}^3 \mathbf{n} A_{i\nu_j \nu_j k_j} (\delta_{jk} \mathbf{n}_j \hat{\mathcal{Z}}_j + (1 - \delta_{jk}) \hat{\mathcal{Z}}_k) \cdot \mathbf{i}_j = \bar{\Lambda}_{ij},$$

$$\sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n} \vee \mathbf{n} G \sum_{k=1}^3 \mathbf{n} \mathcal{D}_{\nu_j j, k_j} (1 - \delta_{jk}) (\hat{\mathcal{Z}}_k \cdot \mathbf{i}_j) = \bar{\mathcal{X}}_{ij}.$$

Wyznaczając na podstawie równania (4.16)₁ składowe

$$(4.17) \quad \mathbf{n}_i \hat{\mathcal{Z}}_i \cdot \mathbf{i}_i = \mathbf{n}_i \Lambda_{ii} - \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \sum_{\nu_j=1}^{N_i} \mathbf{n} \bar{A}_{i\nu_j \nu_j k_i} (\hat{\mathcal{Z}}_k \cdot \mathbf{i}_i)$$

a następnie wyrażając za pomocą tego wzoru składowe $\mathbf{n}_j \hat{\mathcal{Z}}_j \cdot \mathbf{i}_j$ w równaniach (4.16)₂ mamy

$$(4.18) \quad (1 - \delta_{ij}) \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{jk}) A_{ij k} (\hat{\mathcal{Z}}_k \cdot \mathbf{i}_j) = (1 - \delta_{ij}) \Lambda_{ij}^*.$$

W równaniach tych symbolom $A_{ij k}$, Λ_{ij}^* przypisano następujące znaczenia

$$(4.19) \quad A_{ijk} = \sum_n n \nu_n G_{(n)} d_i^{-2} \left(n A_{iij \cdot kj} - n A_{iij \cdot jj} \sum_{\eta=1}^{N_i} n \bar{A}_{iij \cdot k\eta} \right),$$

$$\Lambda_{ij}^* = \bar{\Lambda}_{ij} - \sum_n n \nu_n G_{(n)} d_i^{-2} n A_{iij \cdot jj} n_j \Lambda_{jj} =$$

$$= \sum_n n \nu_n G_{(n)} d_i^{-2} \left(n A_{iij \cdot ij} n_i \Lambda_{ij} - n A_{iij \cdot jj} n_j \Lambda_{jj} \right).$$

Wprowadzając symbole

$$(4.20) \quad D_{ijk} = \sum_n n \nu_n G_n \Phi_{iij \cdot kj},$$

przepisujemy równania (4.16)₃ w postaci

$$(4.21) \quad (1 - \delta_{ij}) \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{jk}) D_{ijk} (\hat{\alpha}_{k \cdot ij}) = (1 - \delta_{ij}) \bar{\alpha}_{ij},$$

$i, j = 1, 2, 3; i \neq j.$

Rozwiązując niezależne układy równań (4.18), (4.21) odpowiednio względem składowych $\hat{z}_{i \cdot ij}$, $\hat{\alpha}_{i \cdot ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), przy uwzględnieniu znikania składowych $\hat{z}_{i \cdot ii} = 0$, $\hat{\alpha}_{i \cdot ii} = 0$ znajdujemy

$$(4.22) \quad \hat{z}_{k \cdot ij} = \sum_{l=1}^3 \varrho_{kjl} \frac{1}{A_{kjk} A_{ljl} - A_{kjl} A_{ljk}} \left(\Lambda_{kj}^* A_{ljl} - \Lambda_{lj}^* A_{kjl} \right),$$

$$\hat{\alpha}_{k \cdot ij} = \sum_{l=1}^3 \varrho_{kjl} \frac{1}{D_{kjk} D_{ljl} - D_{kjl} D_{ljk}} \left(\bar{\alpha}_{kj} D_{ljl} - \bar{\alpha}_{lj} D_{kjl} \right).$$

Stąd po uwzględnieniu we wzorach (3.53) na wektory $n_i \hat{v}_i$, $n_i \hat{g}_i$ wyrażań (4.17) na składowe $n_i \hat{z}_{i \cdot ij}$ oraz wzorów (4.22) na składowe $\hat{z}_{k \cdot ij}$, $\hat{\alpha}_{k \cdot ij}$, znajdujemy następujące wyrażenia na wektory

$$(4.23) \quad n_i \hat{v}_i = n_i \Lambda_{iij} \hat{i}_i +$$

$$+ \sum_{j, k, l=1}^3 \varrho_{jkl} \frac{\delta_{ik} - \delta_{ij} \sum_{\eta=1}^{N_i} n \bar{A}_{iij \cdot k\eta}}{A_{kjk} A_{ljl} - A_{kjl} A_{ljk}} \left(\delta_{ik} - \delta_{ij} \sum_{\eta=1}^{N_i} n \bar{A}_{iij \cdot l\eta} \right) \hat{i}_j,$$

$${}_{n_i} \hat{G}_i^c = \sum_{j, k=1}^3 g_{ijk} \frac{1}{D_{ijj} D_{kk} - D_{jkk} D_{kjj}} (\bar{\alpha}_{ij} D_{kk} - \bar{\alpha}_{kj} D_{jj}) i_j$$

wyprowadzone w tym punkcie równania (4.11) stanowią podstawę formułowania i rozwiązania szczegółowych zagadnień analizy stanów naprężeń i deformacji elementów makroskopowych. Rozwiązania (4.23) równań brzegowych warunków ciągłości naprężeń w tzw. osłabionej postaci wykorzystamy przy sformułowaniu algorytmu iteracji stanów naprężeń o określonym stopniu przybliżenia w komórkach elementów makroskopowych.

4.4. Algorytm iteracji stanów naprężeń mikroelementów

Wyprowadzimy wzory na iterowane o dowolnym stopniu przybliżenia $k = 1, \dots$ stany odkształceń ${}_{n(k)} \hat{E}_i$ i naprężeń ${}_{n(k)} \hat{G}_i^c$ w komórkach n elementu makroskopowego o dowolnej strukturze wewnętrznej niezawierającej jednakże pustek komórkowych. Przyjmujemy przy tym, że ściany elementu makroskopowego o równaniach $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ ($i=1,2,3$), swobodne od więzów kinematycznych, są odpowiednio obciążone siłami powierzchniowymi o gęstościach $P_i^{(c)}(\xi_i)$, $P_i^{(t)}(\xi_i)$ określonych za pomocą wzorów (3.5+3.11). Element makroskopowy pod działaniem obciążeń powierzchniowych $P_i^{(c)}(\xi_i)$, $P_i^{(t)}(\xi_i)$ oraz pola sił masowych o gęstościach $\hat{f} = \sum_n \Omega_n \hat{f}$ jest w stanie równowagi.

Wzory na iteracyjne pola odkształceń

$${}_{n(k)} \hat{E}_i^c = \frac{1}{n E} \left[(1 + n \nu) {}_{n(k)} \hat{G}_i^c - n \nu \sum_{j=1}^3 ({}_{n(k)} \hat{G}_j^c \cdot i_j) i_j \right]$$

oraz pola naprężeń ${}_{n(k)} \hat{G}_i^c$ określimy w otoczeniach środków ciężkości ${}_{n(k)} \tau$ komórek ${}_{n(k)}$. Ograniczymy się przy tym do liniowych względem zmiennych niezależnych ξ_i ($i=1,2,3$) składników wzorów (2.33) na pola naprężeń

$$(4.24) \quad n \hat{\sigma}_{(k)}^i = n \sigma_{(k)}^i + \sum_{\kappa=1}^3 n \sigma_{(k)}^{\kappa i} (n_{\kappa}) \varepsilon_{\kappa} + \dots$$

Zgodnie ze wzorami (2.11) wektorowe współczynniki $n \sigma_{(k)}^i$, $n \sigma_{(k)}^{\kappa i}$ pól naprężeń $n \hat{\sigma}_{(k)}^i$ w k -tym stopniu przybliżenia są związane z wektorowymi współczynnikami $n q_{(k)}^i$, $n q_{(k)}^{\kappa i}$ powierzchniowych napięć siłowych oraz wektorowymi współczynnikami $n m_{(k)}^i$, $n m_{(k)}^{\kappa i}$ powierzchniowych napięć momentowych za pomocą zależności

$$(4.25) \quad n \sigma_{(k)}^i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[(1 - \sum_{\kappa=1}^3 \varepsilon_{ij\kappa}) (n q_{(k)}^j \cdot i_j) + (1 - \sum_{\kappa=1}^3 \varepsilon_{j\kappa i}) (n q_{(k)}^j \cdot i_j) \right] i_j + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j, \kappa, l=1}^3 (1 - \delta_{\kappa l}) \left[\varepsilon_{j\kappa l} (\delta_{j\kappa} + n d_{j\kappa l}) + \varepsilon_{j\kappa l} (\delta_{i\kappa} + n d_{j\kappa l}) - \rho_{j\kappa l} \right] (n m_{(k)}^{\kappa i} \cdot i_j) i_j, \\ n \sigma_{(k)}^{\kappa i} = -\delta_{i\kappa} (n f \cdot i_j) i_j + \sum_{j, r, s=1}^3 (1 - \delta_{rs}) \left[-\delta_{ij} \delta_{\kappa s} [\delta_{i\kappa} + (1 - \delta_{i\kappa}) \frac{1 + 2n A_{\kappa}}{1 + 2n A_r}] + \right. \\ \left. + \delta_{\kappa r} (\delta_{i\kappa} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jk}) \right] (n q_{(k)}^{r \cdot i_s}) i_j + \\ + 3 \sum_{j, r=1}^3 \left[(\varepsilon_{ij\kappa} - \rho_{ij\kappa}) (2\delta_{ij} - 1) (n_j) \bar{d}_j^{-2} (n A_j - n \tilde{A}_j)^{-1} + \right. \\ \left. + (\varepsilon_{j\kappa i} - \rho_{j\kappa i}) (2\delta_{rs} - 1) (n_r) \bar{d}_r^{-2} (n A_i - n \tilde{A}_i)^{-1} \right] (n m_{(k)}^{r \cdot i_s}) i_j + 12 (n_{\kappa}) \bar{d}_{\kappa}^{-2} \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{i\kappa s} (n m_{(k)}^{i \cdot i_s}) i_j.$$

Przechodząc do określenia wzorów rekurencyjnych na wektorowe współczynniki $n q_{(k)}^i$, $n q_{(k)}^{\kappa i}$, $n m_{(k)}^i$, $n m_{(k)}^{\kappa i}$ napięć powierzchniowych komórki $n_{(k)}$ elementu makroskopowego wykorzystamy wzory (3.52)₁, (4.6), na podstawie których mamy

$$(4.26) \quad n q_{(k)}^i = \sum_{j, \kappa=1}^3 (1 - \delta_{j\kappa}) (\delta_{i\kappa} - \delta_{ij}) (n q_{(k)}^{\kappa \cdot i_j}) i_j - (n f \cdot i_j) i_j,$$

$$\begin{aligned} n m_{(k)}^{ii} = & -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \left[\frac{1}{2} (n_j q_{ij}^{(G)} + n_j q_{ij}^{(C)}) + (n_j) I_j \left[n q_{ij}^{(k)} \right] \right] \cdot i_k i_i + \\ & + \sum_{j,k=1}^3 (1 - \delta_{jk}) (\delta_{ik} - \delta_{ij}) (n m_{kk}^{(k)} \cdot i_j) i_j. \end{aligned}$$

Wzory na wektorowe współczynniki napięć $n q_{ij}^{(k)}$, $n m_{ij}^{(k)}$ ($i=1,2,3$) zgodnie z (3.42), (3.57) przybierają postać następującą

$$(4.27) \quad n q_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (n_i q_{ij}^{(G)} + n_i q_{ij}^{(C)}) + (n_i) I_i \left[n q_{ij}^{(k)} \right],$$

$$n m_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2} (n_i m_{ij}^{(G)} + n_i m_{ij}^{(C)}) + (n_i) I_i \left[n m_{ij}^{(k)} \right].$$

Mając na uwadze wzory (4.20), (4.27) dochodzimy do wniosku, że składowe wektorów $n q_{ij}^{(k)}$, $n q_{ij}^{(k)}$, $n m_{ij}^{(k)}$, $n m_{ij}^{(k)}$ ($i=1,2,3$) wchodzące w skład wzorów (4.25) są określone jeżeli znane są wyrażenia na składowe $n q_{ij}^{(k)} \cdot i_j$, $n m_{ij}^{(k)} \cdot i_j$ przy wskaźnikach $i \neq j$. Zatem przechodząc do określenia wzorów rekurencyjnych na składowe $n q_{ij}^{(k)} \cdot i_j$, $n m_{ij}^{(k)} \cdot i_j$ wykorzystajmy równania fizyczne (2.81) (2+4) komórek n przepisując je z uwzględnieniem warunków ciągłości (3.45) uogólnionych przemieszczeń $n v_{ij}^{(k)}$, $n q_{ij}^{(k)}$ w następującej postaci

$$(4.28) \quad n q_{ij}^{(k)} \cdot i_j = -n A_{jk} (1 - 2 n \nu) (n f \cdot i_j) +$$

$$+ 12 n G_{(n)} d_i^2 \left[\sum_{k=1}^3 n A_{ij \cdot kj} (n_k v_{kj}^{(k)} \cdot i_j) + \sum_{k,l=1}^3 n \frac{\Delta}{(k)} v_{jkl} \right],$$

$$n m_{ij}^{(k)} \cdot i_j = n G \left[\sum_{k=1}^3 n \Phi_{ij \cdot kj} (n_k \varphi_{kj}^{(k)} \cdot i_j) + \sum_{k,l=1}^3 n \frac{\mathcal{Q}}{(k)} v_{jkl} \right];$$

przy znaczeniach wprowadzonych symboli

$$(4.29) \quad n \overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{ijkl} = n \overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{ijkl} \sum_{n_j=1}^{N_j} n G_{(n_j)} d_i^{-1} n A_{ij \cdot j \cdot j} \left(\overset{\circ}{c}_{(n_j)} d_i / n G \right) =$$

$$= \left[n A_{ij \cdot j \cdot j} \cdot k_j \delta_{jk} \overset{\circ}{I}_k \left[n \overset{\circ}{V}_{kk} \right] + \overset{\circ}{c}_{(n_j)} d_i^2 / 2 n C_{ij \cdot j \cdot j \cdot k k l} n \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{kk} \right] \cdot i_l$$

$$n \overset{\circ}{\mathcal{I}}_{(k)}^{ijkl} = n \overset{\circ}{\mathcal{I}}_{(k)}^{ijkl} \sum_{n_j=1}^{N_j} n G_{(n_j)} d_i n \mathcal{D}_{ij \cdot j \cdot j} / \overset{\circ}{c}_{(n_j)} d_i / n G =$$

$$= \left[n \mathcal{D}_{ij \cdot j \cdot j} \cdot k_j \delta_{jk} \overset{\circ}{I}_k \left[n \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{kk} \right] + n B_{ij \cdot j \cdot j \cdot k k l} n \overset{\circ}{V}_{kk} \right] \cdot i_l$$

Występujące w (4.29) symbole $n \overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{ijkl}$, $n \overset{\circ}{\mathcal{I}}_{(k)}^{ijkl}$ w k -tym stopniu przybliżenia wektorów $n \overset{\circ}{V}_{(k)ii}$, $n \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{(k)ij}$ zostały uprzednio określone za pomocą wzorów (4.12)₃, (4.12)₆.

Wektory $n_i \overset{\circ}{V}_{(k)i}$, $n_i \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{(k)i}$ ($i=1,2,3$) we wzorach (4.28) określimy przy założeniach (3.53) na podstawie tzw. "oskabionych" warunków ciągłości napięć (3.54). Wykorzystując przedstawione w p. 4.3 rozwiązania (4.23) mamy wzory

$$(4.30) \quad n_i \overset{\circ}{V}_{(k)i} = n_i \overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{ii} i_i +$$

$$+ \sum_{j,k,l=1}^3 \delta_{jkl} \frac{(\delta_{ik} - \delta_{ij} \sum_{n_j=1}^{N_j} n \bar{A}_{ii \cdot j \cdot j \cdot ki})}{A_{ijk} A_{ljk} - A_{kjl} A_{ljk}} \left(\overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{*kj} A_{ljl} - \overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{*lj} A_{kjl} \right) i_j,$$

$$n_i \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{(k)i} = \sum_{j,k=1}^3 \delta_{ijk} \frac{1}{\mathcal{D}_{ijj} \mathcal{D}_{kjk} - \mathcal{D}_{ijk} \mathcal{D}_{kji}} \left(\overset{\circ}{\mathcal{I}}_{(k)}^{ij} \mathcal{D}_{kjk} - \overset{\circ}{\mathcal{I}}_{(k)}^{kj} \mathcal{D}_{ijk} \right) i_j,$$

w których symbole $n_i \overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{ii}$, $\overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{*ij}$, $\overset{\circ}{\mathcal{I}}_{(k)}^{ij}$, w k -tym stopniu przybliżenia wektorów $n \overset{\circ}{V}_{(k)i}$, $n \overset{\circ}{\mathcal{G}}_{(k)i}$ przybierają na podstawie wzorów (4.12)₁, (4.19)₂, (4.15)₂, (4.12)₄ następujące znaczenia

$$(4.31) \quad n_i \overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{ij} = n_i \overset{\circ}{\Lambda}_{ij} - \sum_{n_j=1}^{N_j} \sum_{k,l=1}^3 n \overset{\circ}{\Lambda}_{(k)}^{ijkl}$$

$$\Lambda_{(k)}^{*ij} = \sum_n n^V(n_r) d_{i\alpha}^{-2} G \left(n A_{ij \cdot j} \cdot n_i \Lambda_{(k)}^{ij} - n A_{ij \cdot j} \cdot n_j \Lambda_{(k)}^{ij} \right),$$

$$\bar{\mathcal{X}}_{(k)}^{ij} = \sum_n n^V n G n^D_{ij \cdot j} \cdot n_j n_i \mathcal{X}_{(k)}^{ij},$$

$$n_i \mathcal{X}_{(k)}^{ij} = n_i \hat{\mathcal{X}}_{ij} - \sum_{n_l=1}^{n_i} \sum_{k_l=1}^3 n \mathcal{X}_{(k)}^{ijkl}.$$

Występujące w (4.31) symbole $n_i \hat{\Lambda}_{ij}$, $n_i \hat{\mathcal{X}}_{ij}$ określono za pomocą wzorów (4.12)₂, (4.12)₅, natomiast symbole $n \mathcal{A}_{ijkl}$, $n \mathcal{X}_{ijkl}$ w k -tym stopniu przybliżenia wektorów $n \mathcal{V}_{ij}$, $n \mathcal{Q}_{ij}$ przybierają na podstawie wzorów (4.12)₃, (4.12)₆, (4.29) znaczenia

$$(4.32) \quad n \mathcal{A}_{(k)}^{ijkl} = n \bar{A}_{ij \cdot j} \cdot k_j \delta_{jl} (n_k) I_k \left[n \mathcal{V}_{kk} \cdot i_l \right] + \\ + (n_k) d_{ij}^e / 12 n \bar{C}_{ij \cdot kkl} (n \mathcal{Q}_{kk} \cdot i_l), \\ n \mathcal{X}_{(k)}^{ijkl} = n \bar{D}_{ij \cdot j} \cdot k_j \delta_{jl} (n_k) I_k \left[n \mathcal{Q}_{kk} \right] \cdot i_l + n \bar{B}_{ij \cdot kkl} (n \mathcal{V}_{kk} \cdot i_l).$$

Wielkościami występującymi w dotychczas wyprowadzonych wzorach algorytmu iteracyjnego i pozostającymi do określenia są składowe $n \mathcal{V}_{kk} \cdot i_l$, $n \mathcal{Q}_{kk} \cdot i_l$ ($k, l=1, 2, 3$) wektorów $n \mathcal{V}_{kk}$, $n \mathcal{Q}_{kk}$ deformacji w k -tym stopniu przybliżenia.

Składowe $n \mathcal{V}_{kk} \cdot i_l$ wyrażamy podstawiając do wzorów (2.82)₂ wzory (4.7)₂ i uwzględniając przyjęte założenia (3.53), skąd mamy:

$$n \mathcal{V}_{(k)}^{kk} \cdot i_l = n \mathcal{V}_{(k)}^{*kk} \cdot i_l + \sum_{p=1}^3 \epsilon_{klp} \left[(n_p) I_p \left[n \mathcal{Q}_{pp}^* \right] - n \mathcal{Q}_{pp}^* \right] \cdot i_p.$$

Podstawiając do tego wyrażenia, otrzymane na podstawie związków fizycznych (2.108) i przepisane w postaci wzorów rekurencyjnych, następujące wzory na składowe

$$(4.33) \quad n \mathcal{V}_{(k)}^{*kk} \cdot i_l = \frac{1}{n G} \sum_{r,s=1}^3 \left(n a'_{kkk \cdot rrs} n \mathcal{Q}_{rr} + n b'_{kkk \cdot rrs} n \mathcal{M}_{(k-1)}^{rr} \right) \cdot i_s,$$

$$n \mathcal{Q}_{pp}^* \cdot i_p = \frac{1}{nG} 12_{(np)} d_p^{-2} \sum_{L=1}^3 n d_{ppp.L} (n m_{(k-1)L} \cdot i_L),$$

$$n \mathcal{Q}_p^* \cdot i_p = \frac{1}{nG} \sum_{r,s=1}^3 (n d'_{pp.rrs} \delta_{sp} n m_{(k-1)rr} + n c'_{pp.rs} n q_r) \cdot i_s$$

mamy

$$(4.34) \quad n \mathcal{V}_{kk}^* \cdot i_k = \frac{1}{nG} \sum_{r,s=1}^3 \left[(n a'_{kkL.rrs} - \sum_{p=1}^3 \epsilon_{klp} n c'_{pp.rs}) (n q_r \cdot i_s) + (n b'_{kkL.rrs} - \sum_{p=1}^3 n d'_{pp.rrs} \delta_{sp} \epsilon_{klp}) (n m_{(k-1)rr} \cdot i_s) \right] + 12 \sum_{p,r=1}^3 \epsilon_{klp} I_p \left\{ \frac{1}{nG} d_p^{-2} n d_{ppp.r} (n m_{(k-1)r} \cdot i_r) \right\}.$$

Składowe $n \mathcal{V}_{kk}^* \cdot i_k$ wektorów $n \mathcal{V}_{kk}$ w k-tym stopniu przybliżenia określimy na podstawie związków fizycznych (2.93) nadając im następującą postać rekurencyjną

$$(4.35) \quad n \mathcal{Q}_{kk}^* \cdot i_k = \frac{n \nu}{2nG(1+n\nu)} \sum_{r=1}^3 \epsilon_{klr} (n f_r \cdot i_r) + \frac{1}{nG} \sum_{r,s=1}^3 (12_{(nk)} d_k^{-2} n d_{kkL.rrs} n m_r + n c_{kkL.rrs} n q_r) \cdot i_s.$$

Występujące we wzorach (4.28) na składowe $n q_{ij} \cdot i_j$, $n m_{(k)ij} \cdot i_j$, w sposób bezpośredni oraz za pośrednictwem wyrażeń (4.30) na wektory $n \mathcal{V}_{ij}$, $n \mathcal{Q}_{ij}$, wielowskazyńkowe wielkości $\sum_{k,l=1}^3 n \Lambda_{(k)}^{ij,kl}$, $\sum_{kl=1}^3 n \mathcal{Q}_{(k)}^{ij,kl}$ wyrażymy przez składowe $n q_{ij} \cdot i_j$, $n m_{(k)ij} \cdot i_j$ w k-1 stopniu przybliżenia wykorzystując wzory (4.34-4.35) oraz postępując w następujący sposób:

Uwzględniając otrzymane na podstawie związków fizycznych (2.97) wzory na składowe

$$n \mathcal{V}_{kk}^* \cdot i_k = (n \mathcal{X}_{(k)} \cdot i_k) \cdot i_k + \frac{1}{nG} \sum_{r,s=1}^3 (n a_{kkL.rrs} n q_r + n b_{kkL.rrs} n m_{(k-1)rr}) \cdot i_s$$

oraz wzory (4.35) na składowe $n \mathcal{Q}_{kk}^* \cdot i_k$, określimy na podstawie (4.29) wyrażenia

$$\begin{aligned}
(4.36) \quad \sum_{k,l=1}^3 n \Lambda_{(k)}'_{ijkl} &= \sum_{k=1}^3 n A_{ij \cdot kj} \cdot I_k \left[n \mathcal{V}_{kk} \cdot i_j \right] + \\
&+ (n_i) d_i^{-2} / 12 \sum_{k,l=1}^3 n C_{ij \cdot kkl} \left[\frac{n \mathcal{V}}{2nG(1+n\mathcal{V})} \sum_{r=1}^3 \epsilon_{klr} (n f_{\cdot i r}) + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{nG} \sum_{r,s=1}^3 (I_{(n_k)} d_k^{-2} n d_{kkb, rrs} n m_{(k-1)r} + n C_{kkl, rrs} n q_{(k-1)r}) \cdot i_s \right], \\
\sum_{k,l=1}^3 n \mathcal{X}'_{(k)ijkl} &= \sum_{k=1}^3 n \mathcal{D}_{ij \cdot kj} \cdot I_k \left[n \mathcal{G}_{kk} \cdot i_j \right] + \\
&+ \sum_{k,l=1}^3 n B_{ij \cdot kkl} \left[\sum_{p=1}^3 \epsilon_{pkl} (n \mathcal{A}_{(k)} \cdot i_p) + \frac{1}{nG} \sum_{r,s=1}^3 (n a_{kkb, rrs} n q_{(k-1)r} + \right. \\
&\quad \left. + n b_{kkb, rrs} n m_{(k-1)r}) \cdot i_s \right].
\end{aligned}$$

Wykorzystując następnie otrzymane na podstawie wzorów (2.76)₂, (2.80)₂, (2.109)₍₅₊₈₎ równości

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l,r=1}^3 n C_{ij \cdot kkl} \epsilon_{klr} &= 2\delta_{ij} n A_{ij} \left[-1 + 2n\mathcal{V}(1 + 2nB_i) \right] - 2n A_{ji} + J - \delta_{ij}, \\
\sum_{k,l=1}^3 n C_{ij \cdot kkl} (n_i) d_i^{-2} n d_{kkb, rrs} &= - (n_i) d_i^{-2} \sum_{k=1}^3 n A_{ij \cdot kj} n b_{kj, rrs}, \\
\sum_{k,l=1}^3 n C_{ij \cdot kkl} n C_{kkl, rrs} &= (1 - \delta_r) \delta_{ij} (\delta_{ir} - \delta_{ij}) - \\
&\quad - (n_i) d_i^{-2} \sum_{k=1}^3 n A_{ij \cdot kj} (n_k) d_k^{-2} n a_{kj, rrs}, \\
\sum_{k,l=1}^3 n B_{ij \cdot kkl} \epsilon_{pkl} &= - \sum_{k=1}^3 n \mathcal{D}_{ij \cdot kp}, \\
\sum_{k,l=1}^3 n B_{ij \cdot kkl} n a_{kkb, rrs} &= - \sum_{k,l=1}^3 n \mathcal{D}_{ij \cdot kl} n C_{kl, rrs}, \\
\sum_{k,l=1}^3 n B_{ij \cdot kkl} n b_{kkb, rrs} &= \delta_{ri} \delta_{sj} - \sum_{k,l=1}^3 n \mathcal{D}_{ij \cdot kl} n d_{kl, rrs}
\end{aligned}$$

znajdujemy wyrażenia (4.36) w postaci

$$(4.37) \quad \sum_{k,l=1}^3 n \Lambda_{(k)}'_{ijkl} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^3 n A_{ij \cdot kj}^{(n_k)} I_k \left\{ n \mathcal{V}_{kk} \cdot ij \right\}^{103} + \\
&+ \frac{1}{nG} d_i^e / 2 \left\{ \frac{n \nu}{2(1+n\nu)} \left[2\delta_{ij} n A_{ii} [-1 + 2n\nu(1+2nB_i)] - 2n A_{j\bar{i}} + 1 - \delta_{ij} \right] \cdot ij \right\} \\
&- \sum_{k,r,s=1}^3 n A_{ij \cdot kj} \left[12_{(n_i)} d_i^{-2} n b_{kj \cdot rs} n m_{r+}^{(k-1)} d_i^{-2} n d_{k}^e n a_{kj \cdot rrs} n q_{rr} \right] \cdot i_s + \\
&\quad + \sum_{r=1}^3 (1-\delta_{jr})(\delta_{ir} - \delta_{ij}) n q_{rr} \cdot ij \Big|_{(k-1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^3 n \mathcal{X}_{(k)}^{ijkl} &= \sum_{k=1}^3 n D_{ij \cdot kj}^{(n_k)} I_k \left[n \mathcal{G}_{kk} \cdot ij \right] - \\
&- \sum_{k=1}^3 n D_{ij \cdot kj} (n \mathcal{X}_{(k)} \cdot ij) \\
&+ \frac{1}{nG} \left\{ - \sum_{k,r,s=1}^3 n D_{ij \cdot kj} \left[n c_{kj \cdot rs} n q_{rr}^{(k-1)} + n d_{kj \cdot rrs} n m_{(k-1)rr} \right] \cdot i_s + \right. \\
&\quad \left. + n m_{(k-1)ij} \right\},
\end{aligned}$$

skąd po wprowadzeniu następujących nowych symboli o znaczeniach

$$\begin{aligned}
(4.38) \quad n a_{ij \cdot rj}^* &= n_{(n_i)} d_i^{-2} \sum_{k=1}^3 n A_{ij \cdot kj}^{(n_k)} d_k^e n a_{kj \cdot rrs} - (1-\delta_{jr})(1-\delta_{ij}) = \\
&= \frac{1}{2(1+n\nu)} (1-\delta_{jr}) \left[2(1-n\nu) n A_{ii} \delta_{ij} \left[n \nu - (1+2nB_i) \left(1 - \frac{1+2nA_i}{1+2nA_r} \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + (1-\delta_{ij}) \left[n \nu + \frac{1+2nA_i}{1+2nA_r} + n A_{j\bar{i}} \left(2n\nu - (1-n\nu) \frac{1+2nA_j}{1+2nA_r} \right) \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$-n^{\nu} \left(1 + \frac{1 + 2_n A_j}{1 + 2_n A_r} \right) \varrho_{ij} \Big],$$

$$n b_{ij,rs}^* = \sum_{k=1}^3 n A_{ij,kj} n b_{kj,rs} = \frac{1}{2(1+n^{\nu})} \epsilon_{rsj} \left[2\delta_{ij} n A_{ir} (1-n^{\nu}) \left[1 - \right. \right. \\ \left. \left. - n^{\nu} (1 + 2_n B_i) \right] + (1 - \delta_{ij}) \frac{1 + 2_n A_j}{1 + 2_n A_i} \left[(1-n^{\nu}) n A_{jr} - \delta_{ir} + n^{\nu} \delta_{is} \right] \right],$$

$$n c_{ij,rs}^* = \sum_{k=1}^3 n D_{ij,kj} n c_{kj,rs} = \frac{1}{4} \left[n D_{ij,ij} \left[\epsilon_{rsj} (\delta_{is} - \delta_{ir}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{ij} \varrho_{rsj} \right] - \frac{2_n \nu}{1 - 2_n \nu} \epsilon_{rsj} (\delta_{is} - \delta_{ir}) \right],$$

$$n d_{ij,rs}^* = \sum_{k=1}^3 n D_{ij,kj} n d_{kj,rs} = \delta_{js} \left[n D_{ij,ij} n d_{ij,rr} - \right. \\ \left. - \frac{2_n \nu}{1 - 2_n \nu} \sum_{k=1}^3 \varrho_{ijk} n d_{kjr} + \frac{n^{\nu}}{2(1 - 2_n \nu)} \left[-\varrho_{ijr} + \delta_{ir} (1 - \delta_{ij}) + \delta_{jr} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \right] \right]$$

oraz po uwzględnieniu równości

$$\sum_{k=1}^3 n D_{ij,kj} = n D_{ij,ij} - \frac{2_n \nu}{1 - 2_n \nu} (1 - \delta_{ij})$$

znajdujemy

$$(4.39) \quad 12_n G_{(n,2)} d_i^{-2} \sum_{k,l=1}^3 n \Lambda_{ijkl} = 12_n G_{(n,2)} d_i^{-2} \sum_{k=1}^3 n A_{ij,kj} I_k \left[n \mathbf{v}_{kk} \cdot \mathbf{j} \right] + \\ + \frac{n^{\nu}}{2(1+n^{\nu})} \left[2\delta_{ij} n A_{ir} \left[1 + 2_n \nu (1 + 2_n B_i) \right] - 2_n A_{jr} + 1 - \delta_{ij} \right] (n \mathbf{f} \cdot \mathbf{j}) - \\ - 12_{(n,i)} d_i^{-2} \sum_{r,s=1}^3 n b_{kj,rs}^* \left(n \mathbf{m}_{r \cdot is} \right) - \sum_{r=1}^3 (1 - \delta_{jr}) \left[1 - \delta_{ir} + n a_{ij,rj}^* \right] \left(n \mathbf{q}_{rr \cdot ij} \right),$$

$$\begin{aligned}
 {}_n G \sum_{k,l=1}^3 {}_n \mathcal{C}_{(k)}^{jkl} &= {}_n G \sum_{k=1}^3 {}_n \mathcal{D}_{ij \cdot kj} \cdot {}_k I_k \left[{}_n \mathcal{G}_{kk} \cdot j \right] - \\
 &- {}_n G \left[{}_n \mathcal{D}_{ij \cdot ij} - \frac{2n\gamma}{1-2n\gamma} (1-\delta_{ij}) \right] ({}_n \mathcal{A}_{(k)}^{e \cdot j}) + {}_n m_{(k-1)}^{i \cdot j} \\
 &- \sum_{r,s=1}^3 {}_n C_{ij \cdot rs}^* ({}_n q_{r \cdot is}) + \sum_{r=1}^3 (\delta_{ri} - {}_n d_{ij \cdot rj}^*) ({}_n m_{(k-1)}^{r \cdot j})
 \end{aligned}$$

Występujące we wzorach (4.39)₁ składowe ${}_n \mathcal{V}_{(k)}^{kk \cdot j}$ wyrażamy za pomocą wzorów (4.34), skąd mamy

$$\begin{aligned}
 (4.40) \quad 12 {}_n G_{(n_i)} d_i^{-2} \sum_{k,l=1}^3 {}_n \Lambda_{(k)}^{jkl} &= \\
 &= \frac{n\gamma}{2(1+n\gamma)} \left[2\delta_{ij} {}_n A_{ii} \left[-1 + 2n\gamma(1+2nB_i) \right] - 2 {}_n A_{jj} + 1 - \delta_{ij} \right] ({}_n f \cdot j) + \\
 &+ 12 {}_n G_{(n_i)} d_i^{-2} \sum_{k=1}^3 {}_n A_{ii \cdot kj} ({}_{n_k} I_k) \left\{ \frac{1}{nG} \sum_{r,s=1}^3 \left[({}_n a'_{kkj \cdot rs} - \sum_{p=1}^3 \epsilon_{kjp} {}_n C'_{pp \cdot rs}) ({}_n q_{r \cdot is}) \right. \right. \\
 &+ \left. \left. ({}_n b'_{kkj \cdot rrs} - \epsilon_{kjs} {}_n d'_{ss \cdot rrs}) ({}_n m_{(k-1)}^{r \cdot is}) \right] + \right. \\
 &+ \left. 12 \sum_{p,r=1}^3 \epsilon_{kjp} ({}_{n_p} I_p) \left\{ \frac{1}{nG_{(n_p)}} d_p^{-2} {}_n d_{ppp \cdot rr} ({}_n m_{(k-1)}^{r \cdot is}) \right\} \right\} \\
 &- 12 {}_{(n_i)} d_i^{-2} \sum_{r,s=1}^3 {}_n b_{kj \cdot rs}^* ({}_n m_{(k-1)}^{r \cdot is}) - \sum_{r=1}^3 (1-\delta_{jr}) \left[1-\delta_{ir} + {}_n a_{ij \cdot rj}^* \right] ({}_n q_{r \cdot is})
 \end{aligned}$$

Podstawienie natomiast do (4.39)₂ wyrażeń (4.35) na składowe wektorów ${}_n \mathcal{G}_{kk}$ oraz uzyskanych na podstawie wzorów (4.33)₍₂₊₃₎ wyrażeń na składowe

$$\begin{aligned}
 {}_n \mathcal{A}_{(k)}^{e \cdot j} &= \left[({}_{n_j} I_j) \left\{ {}_n \mathcal{G}_{jj} \right\} - {}_n \mathcal{G}_{jj}^* \right] \cdot j = \\
 &= ({}_{n_j} I_j) \left\{ 12/nG_{(n_j)} d_j^{-2} \sum_{l=1}^3 {}_n d_{jjl \cdot ll} ({}_n m_{(k-1)}^{l \cdot j}) \right\} -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{n} G \sum_{r,s=1}^3 \left(n d_{jj,rs}^* \delta_{sj} n m_{(k-1)rr} + n c_{jj,rs}^* n q_{(k-1)r} \right) \cdot i_s$$

daje po przekształceniach wyrażenia

$$(4.41) \quad n G \sum_{k=1}^3 \frac{1}{n} \Phi_{ij,kl} = n G \sum_{k=1}^3 \frac{1}{n} \Phi_{ij,kl}^{(n_k)} I_k \left[\frac{n \nu}{n G (1+n \nu)} \sum_{r=1}^3 \epsilon_{kjr} (n f_{\cdot r}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{n G} \sum_{r,s=1}^3 \left[12_{(n_k)} d_k^{-2} n d_{kkj,rs} n m_{(k-1)rr} + n c_{kkj,rs} n q_{(k-1)r} \right] \cdot i_s \right] - \\ - n G \left[n \Phi_{ij,ij} - \frac{2 n \nu}{1-2 n \nu} (1-\delta_{ij}) \right]_{(n_j)} I_j \left[12/n G_{(n_j)} d_j^{-2} \sum_{l=1}^3 n d_{jj,il} (n m_{\cdot,il}) \right] + \\ + \left[n \Phi_{ij,ij} - \frac{2 n \nu}{1-2 n \nu} (1-\delta_{ij}) \right] \sum_{r,s=1}^3 \left(n d_{jj,rs}^* \delta_{sj} n m_{(k-1)rr} + n c_{jj,rs}^* n q_{(k-1)r} \right) \cdot i_s \\ - \sum_{r,s=1}^3 n c_{ij,rs}^* (n q_{r \cdot} i_s) + \sum_{r=1}^3 (\delta_{ir} - n d_{ij,rs}^*) (n m_{rr \cdot} i_j).$$

Uwzględnienie wzorów (4.40+4.41) oraz wzorów (4.30) umożliwia na podstawie (4.28) wyznaczanie składowych $n q_{i \cdot, ij}^{(k)}$, $n m_{\cdot, ij}^{(k)}$ w k -tym stopniu przybliżenia w zależności od składowych wektorów $n q_{\cdot, i}^{(k-1)}$, $n m_{(k-1)i}$, $n m_{(k-1)i}$, $n m_{(k-1)i}$, ($i=1,2,3$) określonych w $k-1$ stopniu przybliżenia procesu iteracyjnego. Pozostaje zatem do określenia wektorów $n q_{\cdot, i}^{(k)}$, $n q_{i \cdot}^{(k)}$, $n m_{\cdot, i}^{(k)}$, $n m_{i \cdot}^{(k)}$ w stanie początkowym procesu iteracyjnego.

Jako stan początkowy procesu iteracyjnego przyjmujemy stan zerowej deformacji komórek n charakteryzujący się znikaniem wektorów $n v_{(0)i} = 0$, $n \varphi_{(0)i} = 0$. W tym stanie zgodnie z warunkami ciągłości (3.45) wektory dogólnionych przemieszczeń komórki przybierają wartości $n v_{(0)i} = n_i \cdot i$, $n \varphi_{(0)i} = n_i \cdot \frac{\partial i}{\partial x}$. Stąd oraz na podstawie równań równowagi (2.58), warunków ciągłości (3.45), związków fizycznych (2.81) (2+4) mamy

$$(4.42) \quad n q_{i \cdot}^{(0)} = \sum_{j,k=1}^3 (1-\delta_{jk}) (\delta_{ik} - \delta_{ij}) (n q_{kk \cdot} i_j) - (n f_{\cdot} i_i) i_i$$

$$n m_{(0) i i} = -\frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^3 \epsilon_{j k} (n q_{(0) j \cdot i k}) i_i + \\ + \sum_{j, k=1}^3 (1 - \delta_{j k}) (\delta_{i k} - \delta_{i j}) (n m_{(0) k k \cdot i j}) i_j,$$

$$n q_{(0) i} = \frac{1}{2} (n_i q_i^{(4)} + n_i q_i^{(3)}) + (n_i) I_i \{ n q_{(0) i i} \},$$

$$n m_{(0) i} = \frac{1}{2} (n_i m_i^{(4)} + n_i m_i^{(3)}) + (n_i) I_i \{ n m_{(0) i i} \},$$

$$n q_{(0) i i \cdot i j} = -n A_{j i} (1 - 2 n v) (n f \cdot i j) + \\ + 12 n G_{(n_i)} \bar{d}_i^{-2} \sum_{k=1}^3 n A_{i i j \cdot k j} (n \overset{\circ}{v}_{k \cdot i j}),$$

$$n m_{(0) i i \cdot i j} = n G \sum_{k=1}^3 n D_{i i j \cdot k j} (n \overset{\circ}{g}_{k \cdot i j}).$$

Występujące w tych wzorach wektory $n_i \overset{\circ}{v}_i$, $n_i \overset{\circ}{g}_i$ w stopniu zerowego przybliżenia deformacji określamy w oparciu o (4.23) za pomocą następujących wzorów

$$(4.43) \quad n_i \overset{\circ}{v}_i = n_i \overset{\circ}{\Lambda}_{i i} i_i + \\ + \sum_{j, k, l=1}^3 \delta_{j k l} \frac{(\delta_{i k} - \delta_{i j} \sum_{n=1}^{N_i} n \bar{A}_{i i i \cdot k i})}{A_{k j k} A_{l j l} - A_{k j l} A_{l j k}} (\overset{\circ}{\Lambda}_{(0) k j}^* A_{l j l} - \overset{\circ}{\Lambda}_{(0) l j}^* A_{k j l}) i_j,$$

$$n_i \overset{\circ}{g}_i = \sum_{j, k=1}^3 \delta_{j k} \frac{1}{\delta_{j k} D_{i j i} D_{k j k} - D_{j k} D_{i j i}} (\overset{\circ}{\alpha}_{(0) i j}^* D_{k j k} - \overset{\circ}{\alpha}_{(0) k j}^* D_{i j i}) i_j,$$

w których symbole $\overset{\circ}{\Lambda}_{(0) i j}^*$, $\overset{\circ}{\alpha}_{(0) i j}^*$ ($i, j = 1, 2, 3$; $i \neq j$) zgodnie z (4.12)₂, (4.12)₅ przybierają znaczenia

$$(4.44) \quad \overset{\circ}{\Lambda}_{(0) i j}^* = \sum_n n v_{(n_i)} \bar{d}_i^{-2} n G (n A_{i i j \cdot i j} n_i \overset{\circ}{\Lambda}_{i j} - n A_{i i j \cdot j j} n_j \overset{\circ}{\Lambda}_{i j}),$$

$$\chi_{ij}^* = \sum_n n_v n_n G_n \Phi_{ij} n_i \hat{\chi}_{ij}.$$

Natomiast symbole $n_i \hat{\Lambda}_{ij}$, $n_i \hat{\chi}_{ij}$ zostały uprzednio określone za pomocą wzorów (4.12)_(2,4).

Wyprowadzone w tym punkcie wzory (4.24-4.44) umożliwiają iteracyjne wyznaczanie w dowolnym stopniu przybliżenia stanów naprężeń i odkształceń w komórkach elementu makroskopowego o dowolnej strukturze wewnętrznej.

Zastosowanie wyprowadzonych wzorów algorytmu iteracyjnego zilustrujemy przykładem określenia stanów naprężeń w elemencie makroskopowym o dowolnej strukturze wielokomórkowej poddanym działaniu zewnętrznemu ciśnieniu hydrostatycznemu p , ograniczając się przy tym do pierwszego stopnia przybliżenia $K = 1$.

W przypadku działania na element makroskopowy ciśnienia hydrostatycznego p obciążenia powierzchniowe ścian zewnętrznych elementu wynoszą $p_i^{(c)} = p_i^{(t)} = -p \mathbf{i}_i$. Stąd na podstawie wzorów (3.6 - 3.11) mamy odpowiednio

$$(4.45) \quad n_i q_i^{(c)} = n_i q_i^{(t)} = -p \mathbf{i}_i,$$

$$n_i m_i^{(c)} = n_i m_i^{(t)} = 0,$$

skąd zgodnie ze wzorami (4.12)_(2,5), (4.44) jest też

$$(4.46) \quad n_i \hat{\Lambda}_{ij} = 0, \quad n_i \hat{\chi}_{ij} = 0, \\ \Lambda_{ij}^* = 0, \quad \chi_{ij}^* = 0.$$

Uwzględniając wzory (4.45 - 4.46) znajdujemy na podstawie wzorów (4.42 - 4.43) następujące znaczenia wektorów w zerowym stanie deformacji

$$(4.47) \quad n_i \hat{v}_i^{(c)} = 0, \quad n_i \hat{v}_i^{(t)} = 0;$$

$$n q_{(i)}^i = -p i_i, \quad n q_{(i)}^{ii} = 0, \quad n m_{(i)}^i = 0, \quad n m_{(i)}^{ii} = 0.$$

Przechodząc do określenia wektorowych współczynników $n q_{(i)}^{ij}$, $n q_{(i)}^{ij}$, $n m_{(i)}^{ij}$, $n m_{(i)}^{ij}$ napięć powierzchniowych komórek $n_{(i)}$ przy $(i) k=1$ stopniu przybliżenia procesu iteracyjnego wyznaczmy wpiery na podstawie (4.40 - 4.41) znaczenia wyrażeń $\sum_{k,l=1}^3 n A_{(i)}^{ijkl}$, $\sum_{k,l=1}^3 n X_{(i)}^{ijkl}$.

Uwzględniając znaczenia wektorów $n f = 0$, $n g_{ij} = -p i_i$ oraz znikanie pozostałych wektorów we wzorach (4.47)₂ mamy:

$$\sum_{k,l=1}^3 n A_{(i)}^{ijkl} = -p \sum_{k=1}^3 n A_{ij \cdot k_j (m_i)} I_k \left[\frac{1}{n G} \sum_{r=1}^3 \left[(n a_{kkj \cdot rr}^2 - \sum_{p=j}^3 \epsilon_{kjp} n c_{pp \cdot rr}^*) \right] \right],$$

$$\sum_{k,l=1}^3 n X_{(i)}^{ijkl} = -p \left[n D_{ij \cdot ij} - \frac{2 \cdot 2 \cdot v}{1 - 2 \cdot n \cdot v} (1 - \delta_{ij}) \right] \sum_{r=1}^3 n c_{ij \cdot rr}^* - p \sum_{r=1}^3 n c_{ij \cdot rr}^*,$$

skąd po uwzględnieniu na podstawie wzorów (2.107)₄, (4.38)₃ znikania symboli $n c_{pp \cdot rr}^* = 0$, $n c_{ij \cdot rr}^* = 0$ oraz wynikających z określeń (2.107)₁ równości

$$\sum_{r=1}^3 n a_{kkj \cdot rr}^2 = \frac{1 - 2 \cdot n \cdot v}{2(1 + n \cdot v)} \delta_{jk},$$

jest

$$(4.48) \quad \sum_{k,l=1}^3 n A_{(i)}^{ijkl} = -p n A_{ij \cdot ij (m_i)} I_j \left[\frac{1 - 2 \cdot n \cdot v}{n E} \right],$$

$$\sum_{k,l=1}^3 n X_{(i)}^{ijkl} = 0.$$

Podstawienie wzorów (4.48) odpowiednio do wzorów (4.28) na składowe $n q_{(i)}^{ij \cdot ij}$, $n m_{(i)}^{ij \cdot ij}$ przy $i \neq j$ daje:

$$(4.49) \quad n q_{(i)}^{ij \cdot ij} = 12 n G_{(m_i)} \alpha_i^{-2} \sum_{k=1}^3 n A_{ij \cdot k_j (m_i)} \left[(n v_{k(i)}^0 \cdot ij) - p \delta_{jk (m_i)} I_j \left[\frac{1 - 2 \cdot n \cdot v}{n E} \right] \right],$$

$$n m_{(i)}^{ij \cdot ij} = n G \sum_{k=1}^3 n D_{ij \cdot k_j (m_i)} (n \hat{g}_{k(i)}^0 \cdot ij), \quad ij = 1, 2, 3; i \neq j.$$

Przechodząc do określenia składowych $n_{i(j)k}^{\circ}$, $n_{i(j)}^{\circ}$ na podstawie wzorów (4.30) znajdziemy wprawdzie wartości symboli $n_{i(j)k}^*$, $\frac{\Lambda_{i(j)k}^*}{(j)}$, $n_{i(j)k}^{\circ}$, $\frac{\bar{\Lambda}_{i(j)k}}{(j)}$. Zgodnie z określeniami (4.31)_(1,3), (4.46)₁ oraz (4.29), (4.48) i po dokonaniu przekształceń mamy:

$$\begin{aligned}
 (4.50) \quad n_{i(j)k}^* &= - \sum_{n_i=1}^{N_i} \sum_{k,l=1}^3 n_{i(j)kkl}^* \Lambda_{i(j)k}^* = - \frac{n G_{(n_i)} d_i^{-1}}{\sum_{n_i=1}^{N_i} n G_{(n_i)} d_i^{-1} n A_{i(j)k}} \sum_{k,l=1}^3 n_{i(j)kkl}^* \Lambda_{i(j)k}^* \\
 &= \frac{p}{\sum_{n_i=1}^{N_i} n G_{(n_i)} d_i^{-1} n A_{i(j)k}} \sum_{n_i=1}^{N_i} n G_{(n_i)} d_i^{-1} n A_{i(j)k} \left[\frac{1-2n\gamma}{nE} \right], \\
 \frac{\Lambda_{i(j)k}^*}{(j)} &= \sum_n n v_{(n_i)} d_i^{-2} n G \left[n A_{i(j)k} n_{i(j)k}^* - n A_{i(j)k} n_{i(j)k} \right], \\
 n_{i(j)k}^{\circ} &= 0, \quad \bar{\Lambda}_{i(j)k}^{\circ} = 0.
 \end{aligned}$$

W dalszym ciągu rozważań w celu uzyskania możliwie najprostszej postaci wzorów zakładamy, że strukturalne niejednorodności elementu makroskopowego mogą być opisane przy użyciu dowolnie gęstej przestrzennej siatki izotropowej o wymiarach $(n_i) d_i = d$ oczek siatki. W tym przypadku symbole $n A_{i(j)k}$ określone odpowiednio za pomocą wzorów (2.76) przybierają znaczenia

$$(4.51) \quad n A_{i(j)k} = \frac{1-n\gamma}{2-3n\gamma} \delta_{ij} (3\delta_{ik} - 1) + (1-\delta_{ij}) \left[\delta_{ik} - \frac{1}{2(2-3n\gamma)} (1-2n\gamma\delta_{jk}) \right].$$

Uwzględniając (4.51) znajdujemy na podstawie wzorów (4.50) następujące wyrażenia

$$\begin{aligned}
 (4.52) \quad n_{i(j)k}^* &= p \frac{\sum_{n_i=1}^{N_i} n G \frac{1-2n\gamma}{2-3n\gamma} (n_i) \left[\frac{1-2n\gamma}{nE} \right]}{\sum_{n_i=1}^{N_i} n G \frac{1-2n\gamma}{2-3n\gamma}}, \\
 \frac{\Lambda_{i(j)k}^*}{(j)} &= p d \sum_n n G \left[- \frac{3-4n\gamma}{2-3n\gamma} \frac{\sum_{n_i=1}^{N_i} n G \frac{1-2n\gamma}{2-3n\gamma} (n_i) \left[\frac{1-2n\gamma}{nE} \right]}{\sum_{n_i=1}^{N_i} n G \frac{3-4n\gamma}{2-3n\gamma}} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1-n\nu}{2-3n\nu} \left. \frac{\sum_{\eta=1}^{N_j} n G \frac{1-n\nu}{2-3n\nu} \langle \eta \rangle \left[\frac{1-2n\nu}{nE} \right]}{\sum_{\eta=1}^N n G \frac{1-n\nu}{2-3n\nu}} \right\} = 0, \quad i \neq j.$$

Podstawienie do wzorów (4.30) znaczeń (4.52) symboli oraz uwzględnienie zgodnie z (4.50) znikania symboli daje następujące wyrażenia na wektory

$$n_i \overset{\circ}{\Delta}_{ij}, \overset{\circ}{\Delta}_{ij} \\ n_i \overset{\circ}{\chi}_{ij}, \overset{\circ}{\chi}_{ij}$$

$$(4.53) \quad n_i \overset{\circ}{V}_i = \rho \frac{\sum_{n_i=1}^{N_i} n G \frac{1-n\nu}{2-3n\nu} \langle n_i \rangle \left[\frac{1-2n\nu}{nE} \right] \overset{\circ}{i}_i}{\sum_{n_i=1}^{N_i} n G \frac{1-n\nu}{2-3n\nu}},$$

$$n_i \overset{\circ}{\mathcal{G}}_i = 0.$$

Uwzględniając we wzorach (4.49) wyrażenia (4.53) na wektory $n_i \overset{\circ}{V}_i$, $n_i \overset{\circ}{\mathcal{G}}_i$ oraz określenia (4.51) symboli $n A_{ij,k}$ znajdujemy wyrażenia na składowe

$$(4.54) \quad n q_{ij} \cdot i_j = 12 d^{-1} \rho n \overset{\circ}{J}_j, \quad \nu_j = 1, 2, 3; \quad i \neq j;$$

przy następujących znaczeniach symboli

$$(4.55) \quad n \overset{\circ}{J}_j = d^{-1} n G \frac{1-n\nu}{2-3n\nu} \left\langle \eta \right\rangle \left[\frac{1-2n\nu}{nE} \right] - \\ - \frac{\sum_{\eta=1}^{N_j} n G \frac{1-n\nu}{2-3n\nu} \langle \eta \rangle \left[\frac{1-2n\nu}{nE} \right]}{\sum_{\eta=1}^{N_j} n G \frac{1-n\nu}{2-3n\nu}}.$$

Stąd też oraz na podstawie wzorów (4.26), (4.27), (4.45) znajdujemy następujące wyrażenia na wektorowe współczynniki napięć powierzchniowych komórek

$$(4.56) \quad n q_{ij} \cdot i_j = 12 d^{-1} \rho \sum_{j=1}^3 (1-3\delta_{ij}) n \overset{\circ}{J}_j \cdot i_j,$$

$${}_{(i)} \mathbf{n} \mathbf{q}_i = -\rho \mathbf{i}_i + 12 d^{-1} \rho \sum_{j=1}^3 (1 - \delta_{ij} 3) {}_{(n_i)} \mathbf{I}_i \left\{ {}_{(n_j)} \mathbf{I}_j \right\} \mathbf{i}_j,$$

$${}_{(i)} \mathbf{n} \mathbf{m}_{ij} = -6 d^{-1} \rho \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} {}_{(n_j)} \mathbf{I}_j \left\{ {}_{(n_k)} \mathbf{I}_k \right\} \mathbf{i}_i,$$

$${}_{(i)} \mathbf{n} \mathbf{m}_i = -6 d^{-1} \rho \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} {}_{(n_i)} \mathbf{I}_i \left\{ {}_{(n_j)} \mathbf{I}_j \left\{ {}_{(n_k)} \mathbf{I}_k \right\} \right\} \mathbf{i}_i.$$

Podstawiając odpowiednio wzory (4.56) do wzorów (4.25) na wektorowe współczynniki pól naprężeń

$$\hat{\mathbf{n}} \mathbf{G}_i = {}_{(i)} \mathbf{n} \mathbf{G}_i + \sum_{k=1}^3 {}_{(n_k)} \mathbf{n} \mathbf{G}_{k i} {}_{(n_k)} \boldsymbol{\epsilon}_k + \dots$$

komórek \mathbf{n} w otoczeniach ich środków ciężkości, przy uwzględnieniu ${}_{\mathbf{n}} \mathbf{A}_i = {}_{\mathbf{n}} \mathbf{B}_i = \mathbf{1}$, ${}_{\mathbf{n}} \mathbf{A}_i = {}_{\mathbf{n}} \mathbf{B}_i = \mathbf{0}$ zgodnie z przyjętym założeniem, znajdujemy po przekształceniach wyrażenia na współczynniki

$$(4.57) \quad {}_{(i)} \mathbf{n} \mathbf{G}_i = -\rho \mathbf{i}_i + 6 \rho d^{-1} \sum_{j=1}^3 \left[(1 - 3\delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk}) {}_{(n_i)} \mathbf{I}_i \left\{ {}_{(n_j)} \mathbf{I}_j \right\} + \right. \\ \left. + (1 - 3\delta_{ij} - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{jik}) {}_{(n_j)} \mathbf{I}_j \left\{ {}_{(n_i)} \mathbf{I}_i \right\} \right] \mathbf{i}_j,$$

$${}_{(i)} \mathbf{n} \mathbf{G}_{ki} = 12 d^{-1} \rho \sum_{j,s=1}^3 \left[-2\delta_{ij} \delta_{ks} + (1 - \delta_{ks})(\delta_{ik} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jk}) \right] {}_{(n_s)} \mathbf{I}_s \mathbf{i}_j - \\ - 18 d^{-3} \rho \sum_{j,r,p,s=1}^3 \epsilon_{rps} \left[(\epsilon_{ijk} - \varrho_{ijk})(2\delta_{ij} - 1) + \right. \\ \left. + (\epsilon_{jik} - \varrho_{jik})(2\delta_{ik} - 1) \right] {}_{(n_r)} \mathbf{I}_r \left\{ {}_{(n_p)} \mathbf{I}_p \left\{ {}_{(n_s)} \mathbf{I}_s \right\} \right\} \mathbf{i}_j.$$

Wzory (4.57) umożliwiają w konkretnych przypadkach niejednorodności strukturalnych, tj. przy określonych stałych ${}_{\mathbf{n}} \mathbf{G}$, $\mathbf{n} \mathbf{V}$ wyznaczanie przybliżonych rozkładów pól naprężeń w komórkach elementów makroskopowych.

Rozdział V

USTROJE KOMPOZYTOWE O DOWOLNIE DUŻEJ LICZBIE
POWTARZALNYCH STRUKTURALNYCH MAKROELEMENTÓW5.1. Energie odkształcenia i prace statyczne obciążeń

Rozpatrzmy trzy odmiany pryzmatycznych ustrojów kompozytowych (rys.2) złożonych z dużej liczby powtarzalnych elementów makroskopowych z wewnętrzną strukturą i charakteryzujących się rozmieszczeniem szeregowym elementów makroskopowych odpowiednio:

- w jednym kierunku osi i_i na długości l_i przy wskaźniku i mogącego przybierać jedną z trzech wartości liczb 1,2,3;
- w dwóch kierunkach osi i_α na długościach l_α przy $\alpha = 1,2$;
- w trzech kierunkach osi i_i na długościach l_i przy $i=1,2,3$.

Uwzględniając, że obciążenia powierzchniowe stykających się ścian sąsiadujących ze sobą elementów makroskopowych rozpatrywanych odmian ustrojów kompozytowych są odpowiednio równe

$$\begin{aligned}
 P_i^{(c)} &= [\hat{P}_i]_{\xi_i=0}, & P_i^{(d)} &= [\hat{P}_i]_{\xi_i=a_i}; \\
 P_\alpha^{(e)} &= [\hat{P}_\alpha]_{\xi_\alpha=0}, & P_\alpha^{(f)} &= [\hat{P}_\alpha]_{\xi_\alpha=a_\alpha}, \quad \alpha=1,2; \\
 P_i^{(g)} &= [\hat{P}_i]_{\xi_i=0}, & P_i^{(h)} &= [\hat{P}_i]_{\xi_i=a_i}, \quad i=1,2,3;
 \end{aligned}$$

mamy na podstawie wzorów (3.21-3.22) kolejno następujące wyrażenia na energie odkształceń sprężystych

$$(5.1) \quad U_{(i)} = U_{(i)}' + \frac{1}{2} \int_{l_i} \frac{1}{a_i} \left[\int_{S_i} \Delta_i (\hat{P}_i \cdot \hat{u}) dS_i \right] dx_i,$$

$$U_{(i)(e)} = U'_{(i)(e)} + \frac{1}{2} \iiint_{l_1 l_2} \frac{1}{a_1 a_2} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \int_{S_\alpha} \Delta_\alpha (\hat{\mathbf{p}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{u}}) dS_\alpha \right] dx_1 dx_2,$$

$$U_{(i)(e)(3)} = U'_{(i)(e)(3)} + \frac{1}{2} \iiint_{l_1 l_2 l_3} \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{S_k} \Delta_k (\hat{\mathbf{p}}_k \cdot \hat{\mathbf{u}}) dS_k \right] dx_1 dx_2 dx_3$$

przy znaczeniach symboli $U'_{(i)}$, $U'_{(i)(e)}$, $U'_{(i)(e)(3)}$ określonych za pomocą następujących wzorów

$$(5.2) \quad U'_{(i)} = \frac{1}{2} \int_{l_i} \frac{1}{a_i} \left[\int_V (\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) dv + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) \int_{S_k} [\mathbf{P}_k^{(+)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_k = a_k^-} - \mathbf{P}_k^{(-)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_k = 0}] dS_k \right] dx_i,$$

$$U'_{(i)(e)} = \frac{1}{2} \iint_{l_1 l_2} \frac{1}{a_1 a_2} \left[\int_V (\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) dv + \int_{S_3} [\mathbf{P}_3^{(+)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_3 = a_3^-} - \mathbf{P}_3^{(-)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_3 = 0}] dS_3 \right] dx_1 dx_2,$$

$$U'_{(i)(e)(3)} = \frac{1}{2} \iiint_{l_1 l_2 l_3} \frac{1}{a_1 a_2 a_3} \left[\int_V (\hat{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{u}}) dv \right] dx_1 dx_2 dx_3.$$

Prace statyczne $\Pi_{(i)}$, $\Pi_{(i)(e)}$, $\Pi_{(i)(e)(3)}$ obciążzeń działających na poszczególne odmiany ustrojów w stanach równowagi są określone, przy uwzględnieniu znaczeń (5.2) symboli $U'_{(i)}$, $U'_{(i)(e)}$, $U'_{(i)(e)(3)}$ za pomocą wzorów

$$(5.3) \quad \Pi_{(i)} = U'_{(i)} + \frac{1}{2} \left\{ \left[\int_{S_i} [\mathbf{P}_i^{(+)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_i = a_i^-}] dS_i \right]_{x_i = l_i - a_i/2} - \left[\int_{S_i} [\mathbf{P}_i^{(-)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_i = 0}] dS_i \right]_{x_i = a_i/2} \right\},$$

$$\Pi_{(i)(e)} = U'_{(i)(e)} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (1 - \delta_{\alpha\beta}) \int_{l_\beta} \frac{1}{a_\beta} \left\{ \left[\int_{S_\alpha} [\mathbf{P}_\alpha^{(+)} \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_\alpha = a_\alpha^-}] dS_\alpha \right]_{x_\alpha = l_\alpha - a_\alpha/2} - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\int_{S_\alpha} [P_\alpha^{(c)} \cdot [\hat{u}]_{\xi_\alpha=0}] dS_\alpha \right]_{x_\alpha = a_\alpha/2} \Bigg\} dx_\beta, \\
 \Pi_{(1)(2)(3)} = & U_{(1)(2)(3)}' + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k=1}^3 \xi_{ijk} \frac{1}{a_j a_k} \left\{ \int_{S_i} [P_i^{(c)} \cdot [\hat{u}]_{\xi_i=a_i}] dS_i \right\}_{x_i = k \cdot a_i/2} \\
 & - \left[\int_{S_i} [P_i^{(c)} \cdot [\hat{u}]_{\xi_i=0}] dS_i \right]_{x_i = a_i/2} \Bigg\} dx_j dx_k.
 \end{aligned}$$

5.2. Równania i warunki równych wartości energii odkształcenia i pracy statycznej.

Elementy makroskopowe rozpatrywanych ustrojów poddane działaniu sił zdefiniowanych w p.3.1 pozostają w procesach deformacji w stanach równowagi. Przeto zgodnie z twierdzeniem Clapeyrona nagromadzone energie odkształceń sprężystych $U_{(1)}$, $\bar{U}_{(1)(2)}$, $\bar{U}_{(1)(2)(3)}$ odpowiednio w rozpatrywanych odmianach ustrojów są równe odpowiadającym im pracom statycznym $\Pi_{(1)}$, $\Pi_{(1)(2)}$, $\Pi_{(1)(2)(3)}$ sił działających na elementy makroskopowe na przemieszczeniach w punktach ich przyłożenia.

Przyrównując kolejno wyrażenia (5.1) na energie odkształceń sprężystych nagromadzonych w rozpatrywanych ustrojach do odpowiednich wyrażeń (5.3) na prace statyczne sił na nie działających znajdujemy równości

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad & \Lambda_i = 0, \\
 & \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (1 - \delta_{\alpha\beta}) \int_{I_\beta} \frac{1}{a_\beta} \Lambda_\alpha dx_\beta = 0, \\
 & \sum_{i,j,k=1}^3 \xi_{ijk} \iint_{S_i} \frac{1}{S_i} \Lambda_i dx_j dx_k = 0,
 \end{aligned}$$

przy znaczeniach symboli

$$(5.5) \quad \Lambda_i = \left[\int_{S_i} [\mathbf{p}_i^{(+)}, [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_i=a_i}] dS_i \right]_{x_i=l_i-a_i/2} - \\ - \left[\int_{S_i} [\mathbf{p}_i^{(-)}, [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_i=0}] dS_i \right]_{x_i=a_i/2} - \\ - \int_{x_i} \frac{1}{a_i} \left[\int_{S_i} \Delta_i (\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}) dS_i \right] dx_i,$$

które po wprowadzeniu następujących oznaczeń na całki

$$(5.6) \quad \hat{K}_i = \int_{S_i} (\hat{\mathbf{p}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}) dS_i, \quad i=1,2,3$$

przepisujemy w równoważnej postaci

$$(5.7) \quad \Lambda_i = [\hat{K}_i]_{\xi_i=a_i, x_i=l_i-a_i/2} - [\hat{K}_i]_{\xi_i=0, x_i=a_i/2} - \\ - \int_{x_i} \frac{1}{a_i} \Delta_i \hat{K}_i dx_i + \\ + \left[\int_{S_i} [(\mathbf{p}_i^{(+)} - [\hat{\mathbf{p}}_i]_{\xi_i=a_i}) \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_i=a_i}] dS_i \right]_{x_i=l_i-a_i/2} - \\ - \left[\int_{S_i} [(\mathbf{p}_i^{(-)} - [\hat{\mathbf{p}}_i]_{\xi_i=0}) \cdot [\hat{\mathbf{u}}]_{\xi_i=0}] dS_i \right]_{x_i=a_i/2}$$

Uwzględniając z kolei tożsamości

$$(5.8) \quad [\cdot]_{\xi_i=a_i} = \frac{1}{2} [\Sigma_i(\cdot) + \Delta_i(\cdot)], \\ [\cdot]_{\xi_i=0} = \frac{1}{2} [\Sigma_i(\cdot) - \Delta_i(\cdot)]$$

oraz następujące przybliżone wyrażenia na rozwinięcia dowolnych funkcji zmiennych x_i ($i=1,2,3$) w szereg Taylora

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad [\Sigma_i(\cdot)]_{x_i=l_i-a_i/2} &= [\Sigma_i(\cdot)]_{x_i=l_i} - \frac{1}{2} a_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma_i(\cdot) \right]_{x_i=l_i} + \dots, \\
 [\Delta_i(\cdot)]_{x_i=l_i-a_i/2} &= [\Delta_i(\cdot)]_{x_i=l_i} + \dots, \\
 [\Sigma_i(\cdot)]_{x_i=a_i/2} &= [\Sigma_i(\cdot)]_{x_i=0} + \frac{1}{2} a_i \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma_i(\cdot) \right]_{x_i=0} + \dots, \\
 [\Delta_i(\cdot)]_{x_i=a_i/2} &= [\Delta_i(\cdot)]_{x_i=0} + \dots,
 \end{aligned}$$

przekształcono wyrażenie (5.7) do postaci

$$\begin{aligned}
 (5.10) \quad \Lambda_i &= \frac{1}{2} \left[\Delta_i \hat{K}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma_i \hat{K}_i \right]_{x_i=l_i} + \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\Delta_i \hat{K}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma_i \hat{K}_i \right]_{x_i=0} + \\
 &- \int_{l_i}^0 \frac{1}{a_i} \left[\Delta_i \hat{K}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Sigma_i \hat{K}_i \right] dx_i + \\
 &+ \left[\int_{S_i} \left[(P_i^{(4)}) - [\hat{P}_i]_{\xi_i=a_i} \right] \cdot [\hat{u}]_{\xi_i=a_i} dS_i \right]_{x_i=l_i-a_i/2} \\
 &- \left[\int_{S_i} \left[(P_i^{(e)}) - [\hat{P}_i]_{\xi_i=0} \right] \cdot [\hat{u}]_{\xi_i=0} dS_i \right]_{x_i=a_i/2}
 \end{aligned}$$

Równania (5.4) powinny być spełnione przy dowolnych wymiarach l_i ustrojów. Stąd warunkami równości energii odkształcenia i pracy statycznej rozpatrywanych ustrojów jest znikanie wyrażen (5.5), tj.:

$\Lambda_i = 0$ w ustrojach o elementach makroskopowych rozmieszczonych w i -tym kierunku,

$\Lambda_\alpha = 0$ w ustrojach o elementach makroskopowych rozmieszczonych w dwóch kierunkach $\alpha = 1, 2$ osi \hat{i}_α ,

$\Lambda_i = 0$ w ustrojach o elementach makroskopowych rozmieszczonych w trzech kierunkach osi \hat{i}_i przy $i = 1, 2, 3$.

Ponieważ warunki znikania Δ_i muszą zachodzić przy dowolnych współrzędnych x_i środków ciężkości elementów makroskopowych, przeto po uwzględnieniu określeń (5.6) funkcji \hat{K}_i dochodzimy do układu różnic

$$(5.11) \quad \Delta_i \int_{S_i} (\hat{\rho}_i \cdot \hat{u}) dS_i = \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \int_{S_i} (\hat{\rho}_i \cdot \hat{u}) dS_i,$$

$$\left[\int_{S_i} [(\hat{\rho}_i^{(4)} - [\hat{\rho}_i]_{\xi_i = a_i}) \cdot [\hat{u}]_{\xi_i = a_i}] dS_i \right]_{x_i = l_i - a_i/2} = 0,$$

$$\left[\int_{S_i} [(\hat{\rho}_i^{(6)} - [\hat{\rho}_i]_{\xi_i = 0}) \cdot [\hat{u}]_{\xi_i = 0}] dS_i \right]_{x_i = a_i/2} = 0.$$

Uwzględniając następujące tożsamościowe równości

$$\Delta_i (\hat{\rho}_i \cdot \hat{u}) = \frac{1}{2} \left[\Delta_i \hat{\rho}_i \cdot \sum_i \hat{u} + \sum_i \hat{\rho}_i \cdot \Delta_i \hat{u} \right],$$

$$\sum_i (\hat{\rho}_i \cdot \hat{u}) = \frac{1}{2} \left[\sum_i \hat{\rho}_i \cdot \sum_i \hat{u} + \Delta_i \hat{\rho}_i \cdot \Delta_i \hat{u} \right]$$

oraz wzory (5.8-5.9) znajdujemy na podstawie (5.11) po pominięciu jako małych wielkości składników zawierających pochodne $\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_i \hat{\rho}_i$, $\frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_i \hat{u}$, równania o następującej postaci

$$(5.12) \quad \int_{S_i} \left\{ \sum_i \hat{u} \cdot \left[\Delta_i \hat{\rho}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{\rho}_i \right] + \right. \\ \left. + \sum_i \hat{\rho}_i \cdot \left[\Delta_i \hat{u} - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{u} \right] \right\} dS_i = 0,$$

$$\left[\int_{S_i} \left[P_i^{(e)} - \frac{1}{2} \sum_i \hat{p}_i + \frac{1}{2} (\Delta_i \hat{p}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{p}_i) \right] \cdot \left[\sum_i \hat{u} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{u} - \Delta_i \hat{u} \right] dS_i \right]_{x_i=0} = 0,$$

$$\left[\int_{S_i} \left[P_i^{(g)} - \frac{1}{2} \sum_i \hat{p}_i + \frac{1}{2} (\Delta_i \hat{p}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{p}_i) \right] \cdot \left[\sum_i \hat{u} + \right. \right. \\ \left. \left. + \Delta_i \hat{u} - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{u} \right] dS_i \right]_{x_i=l_i} = 0.$$

Równania te warunkują równości energii odkształcenia i pracy statycznej obciążeń i w tej postaci stanowią podstawę wyprowadzenia obszarowych i brzegowych warunków ciągłości napięć i uogólnionych przemieszczeń makroelementów rozpatrywanych ustrojów kompozytowych; swobodnych od zewnętrznych więzów kinematycznych i znajdujących się w stanach równowagi pod działaniem zewnętrznych obciążeń powierzchniowych oraz sił masowych.

5.3. Obszarowe i brzegowe warunki ciągłości napięć i przemieszczeń makroelementów

Na podstawie równań (5.12) wyprowadzimy obszarowe i brzegowe warunki ciągłości napięć $n_i \hat{q}_i$, $n_i \hat{m}_i$; oraz uogólnionych przemieszczeń $n_i \hat{v}_i$, $n_i \hat{w}_i$ elementów makroskopowych.

W celu wyprowadzenia tych warunków dokonajmy przekształceń równań (5.12) wykorzystując otrzymane na podstawie określenia (3.1) wyrażenia

$$(5.13) \quad \sum_i \hat{u} = 2 \left[u + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (\epsilon_k - a_k/2) (\omega \cdot i_k) \right] + \sum_i \hat{w}, \\ \Delta_i \hat{u} = a_i (\omega \times i_i) + \Delta_i \hat{w}$$

oraz wynikające z określeń (3.3), (2.47), (2.50) następujące wyrażenia na różnice $\Delta_i \hat{p}_i$ i sumy $\sum_i \hat{p}_i$ napięć powierzchniowych

wych \hat{p}_i przeciwległych ścian $\xi_i = 0$, $\xi_i = a_i$ elementów makroskopo-
wych

$$\begin{aligned}
 (5.14) \quad \Delta_i \hat{p}_i &= \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \Delta_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) \Omega_i n \hat{p}_i \right) = \\
 &= \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \left[\Delta_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) \Omega_i n \hat{q}_i \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik})_{(n_k)} d_{k(n_k)}^{-2} \xi_k \Delta_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) \Omega_i n \hat{q}_{ik} \right) \right] = \\
 &= \Delta_i \hat{q}_i + \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik})_{(n_k)} d_{k(n_k)}^{-2} \xi_k \Delta_i \hat{q}_{ik} = \\
 &= \Delta_i \hat{q}_i + \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik})_{(n_k)} d_{k(n_k)}^{-2} \xi_k \Delta_i \left[\hat{m}_i - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (\hat{m}_i \cdot i_i) i_i \right] \times i_k + \frac{1}{2} (\hat{m}_i \cdot i_i) \sum_{l=1}^3 \varrho_{ikl} i_l,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Sigma_i \hat{p}_i &= \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \Sigma_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) \Omega_i n \hat{p}_i \right) = \\
 &= \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \left[\Sigma_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) \Omega_i n \hat{q}_i \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik})_{(n_k)} d_{k(n_k)}^{-2} \xi_k \Sigma_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (n_i) \Omega_i n \hat{q}_{ik} \right) \right] = \\
 &= \Sigma_i \hat{q}_i + \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik})_{(n_k)} d_{k(n_k)}^{-2} \xi_k \Sigma_i \hat{q}_{ik} = \\
 &= \Sigma_i \hat{q}_i + \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* 12 \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik})_{(n_k)} d_{k(n_k)}^{-2} \xi_k \Sigma_i \left[\hat{m}_i - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} (\hat{m}_i \cdot i_i) i_i \right] \times i_k + \frac{1}{2} (\hat{m}_i \cdot i_i) \sum_{l=1}^3 \varrho_{ikl} i_l.
 \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenia (5.13-5.14) pod znaki całek równania (5.12) a następnie dokonując całkowań z uwzględnieniem określeń (2.1) oraz związków geometrycznych (2.16) zachodzących pomiędzy wektorami $n \hat{q}_i$

oraz $n \hat{\phi}_{ik}$ znajdujemy po przekształceniach i po uporządkowaniu wyrażeń równania

$$\sum_{n_i} n_i S_i \left\{ \begin{aligned} & 2 \left[u + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_{nk} - a_k / 2) (\omega \times i_k) \right] + \\ & + \sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{V}_i \right) \cdot \left[\Delta_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{q}_i \right) - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{q}_i \right) \right] + \\ & + \left[2\omega + \sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{\phi}_i \right) \right] \cdot \left[\Delta_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{m}_i \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{m}_i \right) \right] + \\ & + \left[\sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{q}_i \right) \right] \cdot \left[a_i (\omega \times i_i) + \Delta_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{V}_i \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_{nk} - a_k / 2) (\omega \times i_k) + \sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{V}_i \right) \right] \right] + \\ & + \left[\sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{m}_i \right) \right] \cdot \left[\Delta_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{\phi}_i \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\omega + \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} Q_i \pi \hat{\phi}_i \right) \right] \right] \end{aligned} \right\} = 0,$$

które po uwzględnieniu określeń (3.3-3.4) funkcji \hat{q}_i , \hat{m}_i , \hat{V}_i , $\hat{\phi}_i$ wyrażono w postaci

$$(5.15) \int S_i \left\{ \begin{aligned} & 2 \left[u + \sum_{n_i} n_i Q_i^* \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_{nk} - a_k / 2) (\omega \times i_k) \right] + \\ & + \sum_i \hat{V}_i \cdot \left[\Delta_i \hat{q}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{q}_i \right] + \\ & + \left[2\omega + \sum_i \hat{\phi}_i \right] \cdot \left[\Delta_i \hat{m}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{m}_i \right] + \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_i \hat{q}_i \cdot \left[a_i (\omega \times i_i) + \Delta_i \hat{v}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[2u + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* (1 - \delta_{ik}) (c_k - a_k/2) (\omega \times i_k) + \sum_i \hat{v}_i \right] \right] + \\
& \left. + \sum_i \hat{m}_i \cdot \left[\Delta_i \hat{\varphi}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (2\omega + \sum_i \hat{\varphi}_i) \right] \right\} dS_i = 0.
\end{aligned}$$

Postępując w analogiczny sposób z przekształceniem równań

(5.12)⁽²⁺³⁾ oraz uwzględniając ponadto określenia (3.5), (3.8), (3.11) dotyczące obciążeń powierzchniowych $p_i^{(e)}$, $p_i^{(d)}$ ($i=1,2,3$) znajdujemy następujące równoważne ich postacie

$$\begin{aligned}
(5.16) \quad & \left[\int_{S_i} \left[q_i^{(e)} - \frac{1}{2} \sum_i \hat{q}_i + \frac{1}{2} \left(\Delta_i \hat{q}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{q}_i \right) \right] \cdot \left[2u + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2 \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_k - a_k/2) (\omega \times i_k) + \sum_i \hat{v}_i + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[2u + 2 \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_k - a_k/2) (\omega \times i_k) + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. + \sum_i \hat{v}_i \right] - a_i (\omega \times i_i) - \Delta_i \hat{v}_i \right] dS_i \right]_{x_i=0} + \\
& + \left[\int_{S_i} \left[m_i^{(e)} - \frac{1}{2} \sum_i \hat{m}_i + \frac{1}{2} \left(\Delta_i \hat{m}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{m}_i \right) \right] \cdot \left[2\omega + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_i \hat{\varphi}_i + \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (2\omega + \sum_i \hat{\varphi}_i) - \Delta_i \hat{\varphi}_i \right] dS_i \right]_{x_i=0} = \\
& = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{S_i} \left[q_i^{(4)} - \frac{1}{2} \sum_i \hat{q}_i + \frac{1}{2} (\Delta_i \hat{q}_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{q}_i) \right] \cdot \left[2u + \right. \right. \\
& \quad + 2 \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_{nk} c_k - a_{k/2}) (\omega \times i_k) + \sum_i \hat{v}_i + \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[2u + 2 \sum_{n_i} n_i \Omega_i^* (1 - \delta_{ik}) (c_{nk} c_k - a_{k/2}) (\omega \times i_k) + \sum_i \hat{v}_i \right] - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a_i (\omega \times i_i) - \Delta_i \hat{v}_i \right] dS_i \right]_{x_i = l_i} + \\
& + \left[\int_{S_i} \left[m_i^{(4)} - \frac{1}{2} \sum_i \hat{m}_i + \frac{1}{2} (\Delta_i m_i - \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \hat{m}_i) \right] \cdot \left[2\omega + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_i \hat{\psi}_i + \frac{1}{2} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (2\omega + \sum_i \hat{\psi}_i) - \Delta_i \hat{\psi}_i \right] dS_i \right]_{x_i = l_i} = 0 .
\end{aligned}$$

W dalszym ciągu przekształceń równań (5.15 - 5.16) mających na celu doprowadzenie ich do postaci umożliwiającej wyprowadzenie warunków ciężkości obszarowych i brzegowych podstawiamy wyrażenia (3.50) na $\sum_i \hat{v}_i$, $\sum_i \hat{\psi}_i$, $\Delta_i \hat{v}_i$, $\Delta_i \hat{\psi}_i$ oraz wyrażenia (3.51) na $\sum_i \hat{q}_i$, $\sum_i \hat{m}_i$, $\Delta_i \hat{q}_i$, $\Delta_i \hat{m}_i$ wraz z określeniami (3.12) obciążań powierzchniowych $q_i^{(e)}$, $m_i^{(e)}$, $q_i^{(4)}$, $m_i^{(4)}$. Stąd po wykonaniu całkowań mamy równanie

$$(5.17) \quad \sum_{n_i} n_i S_i \left[u + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_{nk} c_k - a_{k/2}) (\omega \times i_k) + \right. \\
\quad \left. + n_i \hat{v}_i \right] \cdot \left[\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n_i q_{i,i} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \hat{q}_i \right] + \\
\quad + [\omega + n_i \hat{\psi}_i] \cdot \left[\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n_i m_{i,i} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \hat{m}_i \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + n_i \hat{q}_i \cdot \left[a_i (\omega \times \mathbf{i}_i) + \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \mathbf{v}_{ii} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u + \sum_{k=1}^3 (1-\delta_{ik}) (c_{n_k}) c_{n_k} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - a_k / \rho \right) (\omega \times \mathbf{i}_k) + n_i \hat{v}_i \right] + \\
& + n_i \hat{m}_i \cdot \left[\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \mathbf{q}_{ii} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega + n_i \hat{\mathbf{q}}_i) \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n_i} n_i S_i \left\{ \left[n_i \hat{q}_i^{(e)} - n_i \hat{q}_i + \frac{1}{\rho} \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \hat{q}_{ii} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \hat{q}_i \right) \right] \cdot [2u + \right. \\
+ 2 \sum_{k=1}^3 (1-\delta_{ik}) (c_{n_k}) c_{n_k} - a_k / \rho \right) (\omega \times \mathbf{i}_k) + 2 n_i \hat{v}_i + \\
+ a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u + \sum_{k=1}^3 (1-\delta_{ik}) (c_{n_k}) c_{n_k} - a_k / \rho \right) (\omega \times \mathbf{i}_k) + n_i \hat{v}_i \left. \right] - \\
\left. - a_i (\omega \times \mathbf{i}_i) - \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \mathbf{v}_{ii} \right\}_{x_i=0}^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+ \sum_{n_i} n_i S_i \left\{ \left[n_i \hat{m}_i^{(e)} - n_i \hat{m}_i + \frac{1}{\rho} \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \hat{m}_{ii} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \hat{m}_i \right) \right] \cdot [2\omega + \right. \\
+ 2 n_i \hat{\mathbf{q}}_i + a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega + n_i \hat{\mathbf{q}}_i) - \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \mathbf{q}_{ii} \left. \right] \Big|_{x_i=0}^+ = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n_i} n_i S_i \left\{ \left[n_i \hat{q}_i^{(+)} - n_i \hat{q}_i + \frac{1}{\rho} \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \hat{q}_{ii} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \hat{q}_i \right) \right] \cdot [2u + \right. \\
+ 2 \sum_{k=1}^3 (1-\delta_{ik}) (c_{n_k}) c_{n_k} - a_k / \rho \right) (\omega \times \mathbf{i}_k) + 2 n_i \hat{v}_i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_{nk} c_k - a_k / 2) (\omega \times i_k) + n_i \dot{v}_i \right] + \\
& + a_i (\omega \times i_i) - \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n v_{ii} \left. \right]_{x_i = l_i} + \\
& + \sum_{n_i} a_i S_i \left\{ \left[n_i m_i^{(+)} - n_i \dot{m}_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n m_{ii} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \dot{m}_i \right) \right] \cdot [2\omega + \right. \\
& \left. + 2 n_i \dot{\varphi}_i + a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\omega + n_i \dot{\varphi}_i) - \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n \varphi_{ii} \right] \left. \right]_{x_i = l_i} = 0
\end{aligned}$$

Przechodząc do wyprowadzenia na podstawie równań (5.17)₁ obszarowych warunków ciągłości zakładamy, że równania te są spełnione przy dowolnych niezależnych wektorach $n_i \dot{v}_i$, $n_i \dot{\varphi}_i$, $n_i \dot{q}_i$, $n_i \dot{m}_i$ dla każdego numeratora $n_i = n - n_i i_i$. Jest to możliwe, gdy zachodzą następujące równości wektorowe

$$\begin{aligned}
(5.18) \quad & \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n q_{ii} = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \dot{q}_i, \\
& \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n m_{ii} = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \dot{m}_i, \\
& \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n v_{ii} = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_{nk} c_k - a_k / 2) (\omega \times i_k) + \right. \\
& \left. + n_i \dot{v}_i \right] + a_i (i_i \times \omega), \\
& \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{ni}) d_i n \varphi_{ii} = a_i \frac{\partial}{\partial x_i} [\omega + n_i \dot{\varphi}_i],
\end{aligned}$$

$$\text{przy } n_i = \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) n_k i_k, \quad n_k = 1, \dots, N_k.$$

Stanowią one poszukiwane obszarowe warunki ciągłości napięć i przemieszczeń elementów makroskopowych rozmieszczonych szeregowo w kierunku osi i_i . Odnoszą się one do ustrojów kompozytowych, które stanowią charakterystyczne makroelementy rozmieszczono-

ne szeregowo w kierunku osi i , (rys.2a). W odniesieniu do pryzmatycznych ustrojów kompozytowych o makroelementach rozmieszczonych w kierunkach osi i_1 , i_2 (rys.2b) oraz ustrojów o elementach makroskopowych rozmieszczonych w trzech kierunkach (rys.2c) warunki ciągłości (5.18) są przyporządkowane wskaźnikom przybierającym odpowiednio wartości $i = \alpha = 1, 2$ oraz $i = 1, 2, 3$.

Warunki brzegowe ciągłości napieć na ścianach $\xi_i = 0$ skrajnego elementu makroskopowego o odciętej śródka ciężkości $x_i = a_i/2$ oraz na ścianach $\xi_i = a_i$ skrajnego elementu o odciętej śródka ciężkości $x_i = l_i - a_i/2$ określimy na podstawie równań (5.17)₍₂₊₃₎.

Uwzględniając obszarowe warunki (5.18) ciągłości napieć i przemieszczeń elementów makroskopowych oraz żądając spełnienia równań brzegowych (5.17)₍₂₊₃₎ przy dowolnych wektorach $[n_i \hat{v}_i]_{x_i=l_i}$, $[n_i \hat{q}_i]_{x_i=l_i}$, $[n_i \hat{v}_i]_{x_i=0}$, $[n_i \hat{q}_i]_{x_i=0}$ znajdujemy brzegowe warunki ciągłości napieć o następujących postaciach

$$(5.19) \quad [n_i \hat{q}_i]_{x_i=0} = n_i q_i^{(-)}, \quad [n_i \hat{q}_i]_{x_i=l_i} = n_i q_i^{(+)},$$

$$[n_i \hat{m}_i]_{x_i=0} = n_i m_i^{(-)}, \quad [n_i \hat{m}_i]_{x_i=l_i} = n_i m_i^{(+)}$$

Warunki (5.19) odnoszą się do ustrojów kompozytowych o elementach makroskopowych rozmieszczonych w jednym szeregu w kierunku osi i . W przypadku ustrojów o elementach makroskopowych rozmieszczonych szeregowo w dwóch i w trzech kierunkach wskaźniki i przybierają odpowiednio wartości $i = \alpha = 1, 2$ oraz $i = 1, 2, 3$.

Na zakończenie tego punktu pracy wyprowadzimy obszarowe i brzegowe warunki ciągłości napieć i przemieszczeń elementów makroskopowych w ustrojach kompozytowych w postaci "osłabionej" przyjmując odnośnie wektorów $n_i \hat{v}_i$, $n_i \hat{q}_i$ następujące założenia

$$(5.20) \quad n_i \hat{v}_i = \hat{z}_i + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{ik}) (c_{ik} - a_k/2) (\hat{z}_i \times i_k),$$

$$n_i \hat{q}_i = \hat{z}_i$$

przy znikających składowych $\hat{z}_i \cdot i_i = 0$, $\hat{z}_i \cdot i_i = 0$.

Podstawiając wzory (5.20) do równania (5.17)₁ mamy

(5.21)

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{u} + \dot{\mathbf{z}}_i) \cdot \sum_{n_i} n_i S_i \left[\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \mathbf{q}_{i,i} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i \dot{\mathbf{q}}_{i,i} \right] + \\
 & + (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i) \cdot \sum_{n_i} n_i S_i \left[\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i \left[n_i \mathbf{m}_{i,i} + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{i,k}) (c_{n_k} c_k - a_k / \rho) (\mathbf{i}_k \times n_i \mathbf{q}_{i,i}) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[n_i \dot{\mathbf{m}}_{i,i} + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{i,k}) (c_{n_k} c_k - a_k / \rho) (\mathbf{i}_k \times n_i \dot{\mathbf{q}}_{i,i}) \right] \right] + \\
 & + \sum_{n_i} n_i S_i n_i \dot{\mathbf{q}}_{i,i} \cdot \left[\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \mathbf{v}_{i,i} + a_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_i) - \right. \\
 & \quad \left. - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathbf{u} + \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{i,k}) [(c_{n_k} c_k - a_k / \rho) (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i) \times \mathbf{i}_k] \right) \right] + \\
 & + \sum_{n_i} n_i S_i n_i \dot{\mathbf{m}}_{i,i} \cdot \left[\sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \boldsymbol{\omega}_{i,i} - a_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i) \right] = 0
 \end{aligned}$$

Ponieważ równania te powinny być spełnione przy dowolnych wektorach $\mathbf{u} + \dot{\mathbf{z}}_i$, $\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i$, $n_i \dot{\mathbf{q}}_{i,i}$, $n_i \dot{\mathbf{m}}_{i,i}$ ($i=1,2,3$), skąd mamy następujący układ równości

(5.22)

$$\begin{aligned}
 \sum_n n_i \mathbf{v}_{i,i} &= a_i \sum_{n_i} n_i S_i n_i \dot{\mathbf{q}}_{i,i}, \\
 \sum_n n_i \mathbf{v} \left[n_i \mathbf{m}_{i,i} + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{i,k}) (c_{n_k} c_k - a_k / \rho) (\mathbf{i}_k \times n_i \mathbf{q}_{i,i}) \right] &= \\
 = a_i \sum_{n_i} n_i S_i \left[n_i \dot{\mathbf{m}}_{i,i} + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{i,k}) (c_{n_k} c_k - a_k / \rho) (\mathbf{i}_k \times n_i \dot{\mathbf{q}}_{i,i}) \right], \\
 \sum_{n_i=1}^{N_i} (c_{n_i}) d_i n_i \mathbf{v}_{i,i} + a_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_i) &= a_i \left[\mathbf{u} + \dot{\mathbf{z}}_i + \sum_{k=1}^3 (1 - \delta_{i,k}) (c_{n_k} c_k - \right. \\
 & \quad \left. - a_k / \rho) [(\boldsymbol{\omega} + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_i) \times \mathbf{i}_k] \right],
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n_i=1}^{N_i} (m_i) d_i n_i \varphi_{i,v} = a_i (\omega + \partial \dot{\epsilon}_i)_{,v}$$

Stanowią one obszarowe warunki ciągłości napięć i przemieszczeń elementów makroskopowych przy założeniach (5.20).

Uwzględniając w równaniach (5.17)₍₂₊₃₎ założenia (5.20) oraz warunki obszarowe (5.22) znajdujemy po przekształceniach brzegowe warunki ciągłości napięć powierzchniowych w kierunku osi i o następującej postaci

(5.23)

$$\begin{aligned} [\dot{Q}_i]_{x_i=0} &= \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i n_i q_i^{(e)}, \\ [\dot{O}_i]_{x_i=l_i} &= \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i n_i q_i^{(t)}, \\ [\dot{M}_i]_{x_i=0} &= \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i \left[n_i m_i^{(e)} + \sum_{k=1}^3 (t \delta_{ik}) (c_k - a_k/2) (i_k \times n_i \dot{q}_i^{(e)}) \right], \\ [\dot{M}_i]_{x_i=l_i} &= \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i \left[n_i m_i^{(t)} + \sum_{k=1}^3 (t \delta_{ik}) (c_k - a_k/2) (i_k \times n_i \dot{q}_i^{(t)}) \right], \end{aligned}$$

przy następujących znaczeniach symboli

$$\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i n_i \dot{q}_i, \\ \dot{M}_i &= \frac{1}{S_i} \sum_{n_i} n_i S_i \left[n_i \dot{m}_i + \sum_{k=1}^3 (t \delta_{ik}) (c_k - a_k/2) (i_k \times n_i \dot{q}_i) \right]. \end{aligned}$$

LITERATURA cytowana w tekście

1. I.S.SOKOLNIKOFF, Mathematical theory of elasticity, Mc.GRAW-HILL BOOK COMPANY, INC., 1956.

S P I S T R E Ś C I

	Strona
Rozdział I. Wstęp	7
1.1. Przedmiot i cel pracy	7
1.2. Opis i parametryzacja interstruk- tury makroelementu	9
1.3. Określenia i założenia kinematyczne deformacji	14
Rozdział II. Komórki - podstawowe mikroelemen- ty struktur wewnętrznych	17
2.1. Uogólnione przemieszczenia przekro- jowe. Zmienne kinematyczne deforma- cji	17
2.2. Określenia pól odkształceń i naprę- żeń	22
2.3. Siły powierzchniowe i objętościowe komórek. Warunki równowagi	28
2.4. Energia odkształcenia i praca sta- tyczna. Równania równych wartości energii i pracy	32
2.5. Zależności sił powierzchniowych od naprężeń wewnętrznych	38
2.6. Związki fizyczne komórek. Współczyn- niki sprężystości i podatności ...	40
2.7. Wyrażenia pól naprężeń przez oddzia- ływania zewnętrzne	56
Rozdział III. Wielokomórkowe elementy makroskopo- we	58
3.1. Określenia pól napięć wewnętrznych i uogólnionych przemieszczeń	58
3.2. Statyczne i kinematyczne oddziały- wania zewnętrzne. Warunki równo- wagi	59
3.3. Równania równych wartości energii odkształcenia i pracy statycznej makroelementu	65

3.4.	Obszarowe warunki ciągłości napięć i uogólnionych przemieszczeń	71
3.5.	Brzegowe warunki ciągłości napięć	78
3.6.	Brzegowe warunki ciągłości przemieszczeń	82
Rozdział IV.	Równania elastostatyki makroelementów. Algorytmy rozwiązań ...	85
4.1.	Obszarowe i brzegowe równania stanów deformacji	85
4.2.	Obszarowe równania stanów napięć wewnętrznych	88
4.3.	Równania brzegowych warunków ciągłości napięć oraz ich ogólne rozwiązanie	91
4.4.	Algorytm iteracji stanów naprężeń mikroelementów	96
Rozdział V.	Ustroje kompozytowe o dowolnie dużej liczbie powtarzalnych strukturalnych makroelementach	113
5.1.	Energie odkształceń i prace statyczne obciążeń	113
5.2.	Równania i warunki równych wartości energii odkształcenia i pracy statycznej	115
5.3.	Obszarowe i brzegowe warunki ciągłości napięć i przemieszczeń makroelementów	119