PRZYCZYNEK DO TEORYI SIŁ ŻYWYCH

NAPISAŁ

WŁ. GOSIEWSKI.

(Przedstawiono na posiedzeniu Towarzystwa d. 5 Grudnia 1872 r.).

CORIOLIS dowiódł twierdzenie następujące: *Summa sił żywych układu punktów materyalnych w każdej chwili jego ruchu, jest równą summie sił żywych, któreby te punkta nabyły w skutek prędkości istniejących, jeżeliby układ zesztywniał i jednocześnie został pod wpływem tych samych warunków jak poprzednio, więcej summie sił żywych któreby te punkta posiadały w skutek samych prędkości względnych, przez które oddalają się od położeń zajmowanych w układzie sztywnym* (*).

W niniejszym artykule nie zamierzamy dowodzić twierdzenia Coriolis'a, lecz mamy na celu przedstawić summę sił żywych jakiegokolwiek układu pod nowym kształtem, z którego otrzymać łatwo można przytoczone twierdzenie i *summę sił żywych odpowiadającą samemu odkształcaniu.*

Oznaczmy przez m, m', m'', ... massy pewnej liczby punktów materyalnych; przez x, y, z współrzędne punkta m na końcu czasu t; przez x', y', z' współrzędne punkta m' i t. d: współrzędne te odnoszą się do trzech osi prostokątnych stałych w przestrzeni. Niech będą dalej: u, v, w składowe prędkości punktu m na końcu czasu t; u', v', w' składowe prędkości punktu m' i t. d. W ten sposób uważany zbiór punktów materyalnych, jest oczywiście układem mechanicznym najogólniejszym; summa sił żywych tego układu wyraża się przez

$$\Sigma m(u^2+v^2+w^2)$$

gdize znak Σ rozciąga się do wszystkich punktów materyalnych (**).

Biorąc pod uwagę jedną tylko część założonej summy, np. Σmu^2, widocznem jest iż mamy tożsa-

(*) *Cours de Mécanique de l'école polytechnique par* M. STURM. *Tom* 2gi *Nota* 1sza, *stronica* 356.

(**) Pospolicie nazywają $m(u^2+v^2+w^2)$ *siłą żywą*; $\frac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2)$ *potegą żywą*; niektórzy jednak przywiązują znaczenie siły żywej do wyrażenia $\frac{1}{2}m(u^2+v^2+w^2)$.

mościowo

$$\Sigma mu^2 = \frac{(\Sigma mu)^2 + \Sigma m \Sigma mu^2 - (\Sigma mu)^2}{\Sigma m}.$$

Lecz że po wykonaniu wskazanych działań znajdzie się

$$\Sigma m \Sigma mu^2 - (\Sigma mu)^2 = \sum mm'(u-u')^2;$$

napisać także można

$$\Sigma mu^2 = \frac{(\Sigma mu)^2 + \sum mm'(u-u')^2}{\Sigma m},$$

i summa sił żywych przedstawia się pod postacią

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m(u^2+v^2+w^2) = \\ \dfrac{(\Sigma mu)^2 + (\Sigma mv)^2 + (\Sigma mw)^2}{\Sigma m} \\ + \dfrac{\sum mm'[(u-u')^2 + (v-v')^2 + (w-w')^2]}{\Sigma m}, \end{array} \right.$$

Dwa znaki summowania Σ i $\sum$ odpowiadają tutaj liczbie różnych wyrazów do których się odnoszą; jeżeli układ składa się z N punktów znak Σ odnosi się do N wyrazów; znak $\sum$ do $\frac{N(N-1)}{2}$.

Załóżmy teraz

$$R = +\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

$$x - x' = \frac{x-x'}{R} R = aR,$$

$$y - y' = \frac{y-y'}{R} R = bR,$$

$$z - z' = \frac{z-z'}{R} R = cR.$$

Ponieważ jest z założenia

$$\frac{d(x-x')}{dt} = u - u', \qquad \frac{d(y-y')}{dt} = v - v', \qquad \frac{d(z-z')}{dt} = w - w;$$

równania poprzednie dają:

$$u - u' = a\frac{dR}{dt} + R\frac{da}{dt},$$

$$v - v' = b\frac{dR}{dt} + R\frac{db}{dt},$$

$$w - w' = c\frac{dR}{dt} + R\frac{dc}{dt};$$

a z tych, zważywszy na dwie tożsamości

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

$$a\frac{da}{dt}+b\frac{db}{dt}+c\frac{dc}{dt}=0,$$

znajdujemy

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{dR}{dt}&=a(u-u')+b(v-v')+c(w-w'),\\
R\frac{da}{dt}&=b[b(u-u')-a(v-v')]-c[a(w-w')-c(u-u')],\\
R\frac{db}{dt}&=c[c(v-v')-b(w-w')]-a[b(u-u')-a(v-v')],\\
R\frac{dc}{dt}&=a[a(w-w')-c(u-u')]-b[c(v-v')-b(w-w')],
\end{aligned}\right.$$

$$(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2=R^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right]+\left(\frac{dR}{dt}\right)^2$$

Na mocy ostatniego wypadku, równanie (1) napisać jeszcze można jak następuje:

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Sigma m(u^2+v^2+w^2)=\\
&\frac{(\Sigma mu)^2+(\Sigma mv)^2+(\Sigma mw)^2}{\Sigma m}\\
&+\frac{\sum mm'R^2\left[\left(\frac{da}{dt}\right)^2+\left(\frac{db}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc}{dt}\right)^2\right]}{\Sigma m}+\frac{\sum mm'\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}{\Sigma m}.
\end{aligned}\right.$$

W równaniu (3) zawiera się twierdzenie Coriolis'a. Uważmy bowiem że w chwili zesztywnięcia układu prędkości $\frac{dR}{dt}$, z któremi zmieniają się wzajemne odległości R każdych dwóch jego punktów, znikają i druga strona równania (3) nie zawiera wyrazów zależących od $\frac{dR}{dt}$, to jest od prędkości względnych. Nawzajem, summa sił żywych odpowiadających samemu odkształceniu się układu zależy tylko od prędkości względnych; oznaczywszy jej wartość przez T mamy oczywiście

$$(4)\qquad T=\frac{\sum mm'\left(\frac{dR}{dt}\right)^2}{\Sigma m}$$

Do tego samego wypadku przyjść można jeszcze sposobem następującym.

Druga strona równania (1) składa się z dwóch różnych części, posiadających wspólny mianownik Σm. Część pierwsza zależy od wyrrzów kształtu $\frac{(\Sigma mu)^2}{\Sigma m}$. Ponieważ $\frac{\Sigma mu}{\Sigma m}$ jest składową według osi x prędkości środka ciężkości układu, wyrażenie $\Sigma m\left(\frac{\Sigma mu}{\Sigma m}\right)^2=\frac{(\Sigma mu)^2}{\Sigma m}$ jest siłą żywą, względem osi x, tegoż środka. Ztąd wynika iż druga część prawej strony równania (1) przedstawia summą sił żywych odpowiadającą ruchowi układu względem środka ciężkości.

W summie tej należy oczywiście szukać summy sił żywych odpowiadających samemu odkształceniu Uważmy w tym celu że jest tożsamościowo:

$$(a^2+b^2+c^2)(U^2+V^2+W^2)-(aU+bV+cW)^2=$$

$$(cV-bW)^2+(aW-cU)^2+(bU-aV)^2;$$

zakładając więc

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

$$U=u-u', \quad V=v-v', \quad W=w-w',$$

znajdujemy:

$$(5)\quad \begin{cases} (u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2 \\ \qquad -[c(v-v')-b(w-w')]^2-[a(w-w')-c(u-u')]^2-[b(u-u')-a(v-v')]^2= \\ \qquad [a(u-u')+b(v-v')+c(w-w')]^2. \end{cases}$$

Druga strona tego równania przybiera wszystkie wartości począwszy od zera aż do $(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2$, odpowiednio do wartości jakie ilościom a, b, c nadajemy. Założywszy np. że ilości a, b, c zadość czynią warunkowi

$$a(u-u')+b(v-v')+c(w-w')=0,$$

druga strona pomienionego równania jest zerem; jeżeli zaś ilości a, b, c sprawdzają warunki:

$$\frac{a}{u-u'}=\frac{b}{v-v'}=\frac{c}{w-w'},$$

druga strona tego równania zamienia się na $(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2$. Istnieją zatem takie wartości a, b, c przy których druga strona równania (5) odpowiada tylko samemu odkształcaniu się układu; wartościami temi są oczywiście dostawy (a, b, c) kątów które kierunek R tworzy z osiami x, y, z, a to prowadzi w następstwie do równania (4).

Równanie (4) stanowi twierdzenie które zamierzyliśmy dowieść w niniejszym artykule; przystępujemy teraz do zastosowania.

a) Szukajmy np. wyrażenia siły żywej pochodzącej od wydłużania się lub skrócania nitki.

Oznaczywszy w tym celu przez l długość nitki, podzielmy ją na n równych części i wyobraźmy sobie na jej końcach i w każdym punkcie podziału massę m. Jeżeli λ oznacza liczbę całkowitą mniejszą od n, wtedy $\frac{\lambda l}{n}$ mierzy odległość wzajemną dwóch którychkolwiek punktów nitki; $\frac{\lambda}{n}\frac{dl}{dt}$ mierzy prędkość ich względną. Znak Σm, to jest massa nitki, wyraża się przez iloczyn $(n+1)m$. Według tego formuła (4) daje

$$T=\frac{m}{n^2(n+1)}\left(\frac{dl}{dt}\right)\sum\lambda^2.$$

Lecz łatwo jest wyrachować

$$\sum\lambda^2=\frac{n^2(n+1)^2}{12}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{18}+\frac{n(n-1)}{12},$$

zkąd wynika

$$T=\left\{\frac{m(n+1)}{12}+\frac{m\left(2+\frac{1}{n}\right)}{18}+\frac{m\left(1-\frac{1}{n}\right)}{12(n+1)}\right\}\left(\frac{dl}{dt}\right).$$

Zważywszy że ilość n jest bardzo wielką a ilość m jest bardzo małą i założywszy $(n+1)m=M$, to jest massie nitki, znajdziemy, po opuszczeniu wyrazów małych wyższego rzędu,

$$T=\frac{M}{12}\left(\frac{dl}{dt}\right)^2.$$

Wypadek ten jest wcale niespodziewany; trudno by bowiem było powiedzieć, *iż ażeby mieć siłę żywą pochodzącą od wydłużania się lub skrócania nitki, należy dwunastą część jej massy pomnożyć przez kwadrat z prędkości z którą się wydłuża lub skraca.*

b). Jako drugie zastosowanie formuły (4) podamy twierdzenie, *iż nieskończenie mała cząsteczka materyi ciągłej uważaną być może za układ czterech punktów materyalnych.*

Jakoż, jeżeli materya jest ciągłą, składowe prędkości każdego jej punktu, a które oznaczamy przez u, v, w, uważane być mogą za funkcye czterech zmiennych x, y, z, t, z których trzy zmienne x, y, z wyobrażają współrzędne tego punktu do którego funkcye u, v, w odnoszą się. Współrzędne x, y, z zależą od czasu t, i otrzymać je można z równań

$$\frac{dx}{dt}=u,\quad \frac{dy}{dt}=v,\quad \frac{dz}{dt}=w,$$

jeżeli u. v, w, są znanemi funkcyami zmiennych x, y, z, t. Taki sposób zapatrywania się przyjęty jest w hydradynamice, gdzie płyn, to jest materya ciągła, określa się przez równanie zwane *równaniem ciągłości*

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d\rho u}{dx}+\frac{d\rho v}{dy}+\frac{d\rho w}{dz}=0,$$

rozumiejąc przez ρ gęstość płynu

Oznaczmy przez ω objętość cząsteczki, a zatem przez $\rho\omega$ jej massę. Niech x, y, z oznaczają współrzędne środka ciężkości cząsteczki; $x+h'$, $y+k'$, $z+l'$ i $x+h''$, $y+k''$, $z+l''$ współrzędne dwóch których kolwiek punktów zawartych w objętości ω. Wtedy, oznaczywszy przez $u, v, w, u', v', w', u'', v''$, w'' składowe prędkości wymienionych trzech punktów, mieć będziemy

$$u'=u+h'\frac{du}{dx}+k'\frac{du}{dy}+l'\frac{du}{dz},$$

$$u''=u+h''\frac{du}{dx}+k''\frac{du}{dy}+l''\frac{du}{dz},$$

. . . .

. . . .

albowiem ilości h', k', l', h'', k'', l'' są nieskończenie małe.

Ztąd wypada

$$u'-u''=r\left(a\frac{du}{dx}+b\frac{du}{dy}+c\frac{du}{dz}\right),$$

$$v'-v''=r\left(a\frac{dv}{dx}+b\frac{dv}{dx}+c\frac{dv}{dz}\right),$$

$$w'-w''=r\left(a\frac{dw}{dx}+b\frac{dw}{dy}+c\frac{dw}{dz}\right),$$

zakładając

$$h'-h''=ar,\qquad k'-k''=br,\qquad l'-l''=cr.$$

i rozumiejąc przez r odległość wzajemną dwóch uważanych punktów w objętości ω, zaś przez a, b, c dostawy określające kierunek tej odległości.

Według pierwszej z formuł (2) i teraz otrzymanych wypadków, prędkość $\frac{dr}{dt}$, z którą się zmienia długość r, wyrazi się przez drugą stronę równania:

(6) $$\frac{dr}{dt}=a(u'-u'')+b(v'-v'')+c(w'-w'')=r\mathrm{U},$$

(7) $$\left\{\begin{aligned}\mathrm{U}=a^2\frac{du}{dx}+b^2\frac{dv}{dy}+c^2\frac{dw}{dz}\\+bc\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)+ca\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)+ab\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right).\end{aligned}\right.$$

Formuła (6) dowodzi, iż prędkość względna każdych dwóch punktów objętości ω jest proporcyonalną do ich wzajemnej odległości r i do czynnika U zależnego od dostaw a, b, c określających kierunek r i od liczb $\frac{du}{dx},\ldots \frac{dv}{dz}+\frac{du}{dy},\ldots$ odnoszących się do środka ciężkości cząsteczki.

Jeżeliby można było stosować formułę (4) do cząsteczki nieskończenie małej, wtedy mając prędkość $\frac{dr}{dt}$, znaleźlibyśmy łatwo summę sił żywych odkształcenia się tejże cząsteczki. Lecz formuła (4) stosuje się tylko do układu mechanicznego posiadającego wymiary skończone; ażeby więc zrobić z niej użytek w układzie nieskończenie małym, uważajmy zamiast cząsteczki nieskończenie małej $\rho\omega$ część skończoną podobną do $\rho\omega$ i posiadającą objętość równą jednostce to jest massę równą gęstości ρ. Zakładając $l=\sqrt[3]{\omega}$, odległością wzajemną każdych dwóch punktó w wjednostce objętości jest $\frac{r}{l}$, prędkością z jaką się ta odległość zmienia jest $\frac{r}{l}\mathrm{U}$. W ten sposób znajdujemy dla jednostki objętości cząsteczki

$$\mathrm{T}=\frac{\sum mm'\left(\frac{r}{l}\right)^2\mathrm{U}^2}{\Sigma m}.$$

Znak Σm oznacza tutaj massę odpowiednią jednostce objętości, to jest gęstość $\Sigma m=\rho$; a ponieważ każda z mass m, m, uważaną być może za pewną część całkowitej massy Σn można założyć

$$m = n\rho, \quad m' = n'\rho, \ldots$$

bylebyśmy tylko rozumieli przez $n, n' \ldots$ liczby dodatne mniejsze od jedności i zadość czyniące warunkowi $n + n' + \ldots = 1$. Na mocy tych oznaczeń otrzymuje się

$$T = \rho \sum nn' \left(\frac{r}{l}\right)^2 U^2.$$

W celu obliczenia wartość T należy się przedewszystkiem zapewnić o liczbie wyrazów summę $\sum$ składających, którą znajdziemy z formuły $\frac{N(N-1)}{2}$ mając liczbę N punktów składających jednostkę objętości elementu. Założmy więc że układ zesztywniał, to jest założmy

$$\frac{r}{l} U = 0.$$

Ponieważ $\frac{r}{l}$ jest różnem od zera musi być $U = 0$ i to przy różnych wartościach a, b, c w drugiej stronie równania (7) zachodzących.

Warunek zatem sztywności uważanego układu prowadzi do sześciu równań

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dz} = 0,$$

$$\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 0, \quad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0;$$

a że wiadomo z mechaniki, iż w przypadku N punktów materyalnych warunek sztywności wyraża się przez $3N - 6$ równań, mamy w przypadku terazniejszym

$$3N - 6 = 6,$$

to jest $N = 4$. Widzimy więc że jednostka objętości cząsteczki ω, a zatem i sama cząsteczka jako do niej podobna, uważaną być może za układ czterech punktów materyalnych.

Ażeby obrachować wartość $\sum \lambda^2$, uważmy że jest

$$\sum \lambda^2 = \left\{\begin{array}{l} +1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 \\ +1^2+2^2+3^2+(n-1)^2 \\ +1^2+2^2+3^2+(n-2)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1 \end{array}\right\} = \sum_1^n \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}\Xi n^3 + \frac{1}{2}\Xi n^2 + \frac{1}{6}\Xi n$$

Kórnik dnia 18 Października 1872 r.

KONIEC TOMU TRZECIEGO.