

27 / 1980

Jan Holnicki-Szulc

ZAGADNIENIA DYSTORSJI SPRĘŻYSTYCH
W WIELOELEMENTOWYCH UKŁADACH
KONSTRUKCYJNYCH

ANALIZA, IDENTYFIKACJA, STEROWANIE

Praca habilitacyjna

P.269a

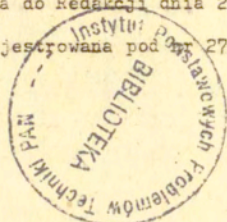


WARSZAWA 1980

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 21 lipca 1980 r.

Zarejestrowana pod Nr 27/1980



57146



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 170 egz. Ark.wyd.8,5. Ark:druk.14,5
Oddano do drukarni w lipcu 1980 r.
Nr zamówienia 524/0/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

Jan Holnicki-Szulc

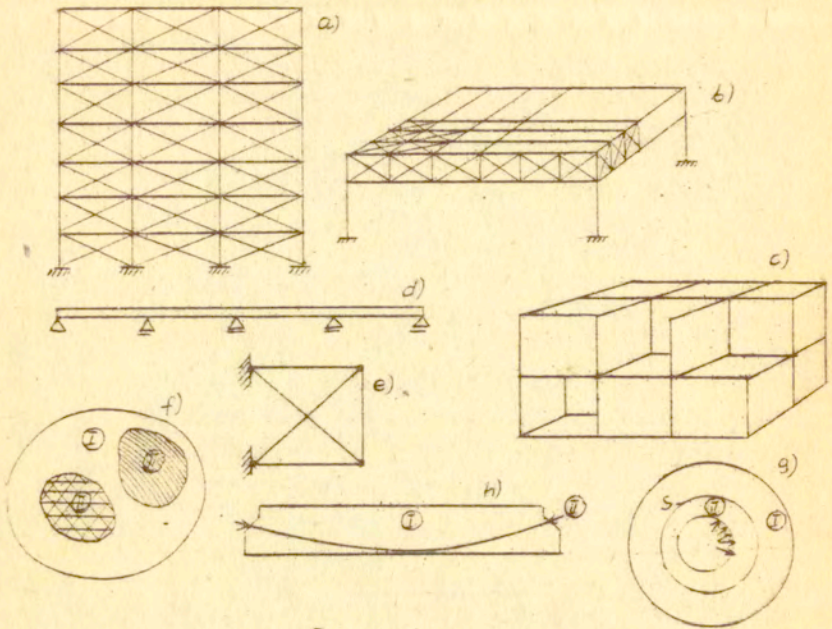
Zakład Teorii Osrodków Ciągłych
IPPT-PAN

ZAGADNIENIA DYSTORSJI SPRĘŻYSTYCH
W WIELOELEMENTOWYCH UKŁADACH KONSTRUKCYJNYCH
ANALIZA, IDENTYFIKACJA, STEROWANIE

W S T Ę P

0.1. Przedmiot rozważań

Przedmiotem zainteresowań pracy są zagadnienia dystorsji w wieloelementowych układach konstrukcyjnych. Układy te rozumiane mogą być zarówno jako wielkie struktury prętowe /rys. 0.1 a,b/, lub płytowo-tarczowe /rys. 0.1^c/ jak i kilku-elementowe konstrukcje /rys. 0.1 e,g,h/. Cechą wspólną wszystkich wymienionych tu układów /por. rys. 0.1/ jest możliwość wystąpienia niezgodności geometrycznych w połączeniach między-elementowych.



Rys. 0.1

Niegodności te, nazywane dystorsjami, mogą pojawić się w konstrukcji jako zjawisko negatywne, wywołane np. niedokładnościami montażowymi struktury /rys. 0.1 a,b,c/ lub nieprzewidzianymi warunkami pracy ustroju związanymi np. z nierównomiernym osiadczeniem podpór /rys. 0.1 a,d/, co stanowi poważny problem w przypadku posadowienia konstrukcji na terenie szkod górniczych. Dystorsje powodują wywołanie w ustroju wstępnych stanów naprężeń i odkształceń. Pojawiają się tu zatem dwa, ważne z inżynierskiego punktu widzenia, problemy: analizy stanów wstępnych wywołanych przez określony stan dystorsji oraz odwrotnie: identyfikacji stanów dystorsji wywołujących określone stany wstępne.

Jeśli, projektując konstrukcję, można oszacować przewidywane stany dystorsji, zagażnienie analizy stanów wstępnych

daje oszacowanie wstępnych stanów naprężeń i odkształceń, które mogą pojawić się w ustroju niezależnie od stanów związanych z obciążeniem użytkowym.

Często mamy do czynienia z sytuacją odwrotną. Obserwując w konstrukcji stan naprężeń i odkształceń wstępnych, występujących przy znikających obciążeniach zewnętrznych można, rozwiązując problem identyfikacji pola dystorsji, określić niezgodności geometryczne, które wywołały zaobserwowane stany wstępne.

Stany dystorsji mogą pojawiać się w konstrukcji jako zjawisko korzystne /w odróżnieniu od sytuacji opisanych wyżej/ jeśli są one generowane w odpowiednio sterowany sposób. Sterowanie dystorsjami daje możliwości optymalnej regulacji stanów naprężeń i odkształceń ustroju. Jako zagadnienie optymalnego projektowania posiada ono istotną zaletę w stosunku do klasycznych zagadnień optymalizacji kształtu konstrukcji. Sterowanie dystorsjami daje mianowicie możliwość aktywnej optymalizacji warunków pracy ustroju przystosowując go do zmiennych w czasie obciążeń zewnętrznych. Koncepcja sterowania aktywnego zostanie omówiona w kolejowym rozdziale pracy.

Przyjmując następujące oznaczenia:

- \bar{e} - stan dystorsji pierwotnych generowany w ustroju
- \bar{e}, \bar{s} - stany odkształceń i naprężeń wstępnych wywoływane w ustroju przez dystorsje
- \bar{e}, \bar{s} - znane stany odkształceń i naprężeń użytkowych wywołany określonymi obciążeniami zewnętrznymi
- $e = \bar{e} + \bar{e}$
 $s = \bar{s} + \bar{s}$ - stany odkształceń i naprężeń końcowych ustalanych w ustroju po przyłożeniu obciążeń zewnętrznych i wygenerowaniu dystorsji, zagadnienie analizy stanów wstępnych wyrazić można schematem symbolicznym:

$$a) \quad \bar{e} \implies \bar{e}, \bar{s}$$

podczas gdy zagadnieniu identyfikacji dystorsji odpowiada schemat odwrotny:

$$b) \quad \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \implies \tilde{\xi}$$

Zagadnienia sterowania dystorsjami związane są z określonymi stanami użytkowymi oraz pewnym kryterium optymalizacji i mogą być opisane symbolicznie schematem:

$$c) \quad \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \xrightarrow{\text{opt}} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \implies \tilde{\xi} \\ \text{lub} \\ \tilde{\xi} \implies \tilde{\xi}, \tilde{\xi} \end{array} \right.$$

0.2. Dualność w mechanice a ogólna teoria dystorsji sprężystych

Ponieważ przedmiotem zainteresowań tej pracy są zarówno małe układy konstrukcyjne /np. rys. 0.1e/ jak i wielkie struktury regularne /rys. 0.1 a,b,c,f/, należy prowadzić rozważania zarówno w modelu dyskretnym, dogodnym w przypadku układów małych jak i w modelu kontynuualnym, dogodnym w przypadku dużych struktur regularnych. W punkcie 0.3 zajmiemy się przykładowym budowaniem obu tych modeli dla badanego ustroju.

Jakkolwiek zagadnienia dystorsji dyskutowane będą w pracy na gruncie dwóch modeli /traktowanych autonomicznie/, to z algebraicznego punktu widzenia istnieje klasa problemów wyrażalna w ponadmodelowym opisie abstrakcyjnego ustroju mechanicznego. Zajmiemy się teraz takim opisem wprowadzając konstrukcję dualności stanów, deformacji i naprężeń /por. [145] / wykorzystywaną w dalszych rozdziałach pracy. Uzyskane rezultaty wyspecyfikowane zostaną w przypadku modeli: kontynuualnego i dyskretnego.

Przestrzeń dualna E, Σ

Wprowadzimy dwie przestrzenie liniowe E i Σ będące w dualności poprzez formę biliniową $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Z definicji dualności postulowane są następujące warunki:

$$0.1 \quad \begin{array}{l} \forall s \in \Sigma, s \neq 0 \quad \exists e \in E \quad \langle s, e \rangle \neq 0 \\ \forall e \in E, e \neq 0 \quad \exists s \in \Sigma \quad \langle s, e \rangle \neq 0 \end{array}$$

Wprowadźmy dwa operatory liniowe: $C: E \rightarrow Y$
 oraz $\mathcal{R}: \Sigma \rightarrow X$, gdzie X, Y - dwie przestrzenie
 liniowe. Niech obraz operatora C będzie podprzestrzenią
 $Y_{\mathcal{R}} \triangleq C(E) \subset Y$, zaś obraz operatora \mathcal{R} będzie pod-
 przestrzenią $X_{\mathcal{C}} \triangleq \mathcal{R}(\Sigma) \subset X$ /por. rys. 0.2/.

Przyjmijmy następującą nomenklaturę:

E - przestrzeń stanów deformacji

Σ - przestrzeń stanów naprężeń

$Y_{\mathcal{R}}$ - przestrzeń stanów niezgodności geometrycznych

$Y_{\mathcal{C}}$ - przestrzeń stanów przemieszczeń

$X_{\mathcal{C}}$ - przestrzeń stanów obciążeń

$X_{\mathcal{R}}$ - przestrzeń stanów reakcji

C - operator niezgodności geometrycznych /odpowiada w *continuum tensorowi* niezgodności geometrycznych p. Kronera [33]/

\mathcal{R} - operator nierównowagi wewnętrznej.

Wprowadzimy dwie definicje.

Podprzestrzenia stanów deformacji zgodnych nazywamy
 przestrzeń $E_{\mathcal{C}} \subset E$:

$$0.2 \quad E_{\mathcal{C}} \triangleq \ker(C) = \{e \in E : C(e) = 0\}$$

Podprzestrzenia stanów naprężeń samozrównoważonych nazy-
 wamy przestrzeń $\Sigma_{\mathcal{R}} \subset \Sigma$:

$$0.3 \quad \Sigma_{\mathcal{R}} \triangleq \ker(\mathcal{R}) = \{\varsigma \in \Sigma : \mathcal{R}(\varsigma) = 0\}$$

Przyjmijmy następujący postulat. Forma biliniowa $\langle \dots \rangle$
 wyznacza dwie podprzestrzenie biegunowe: $E_{\mathcal{C}}^{\circ} \subset E$ oraz
 $\Sigma_{\mathcal{R}}^{\circ} \subset \Sigma$ podprzestrzeni $E_{\mathcal{C}}$ oraz $\Sigma_{\mathcal{R}}$:

$$0.4 \quad E_{\mathcal{C}}^{\circ} = \Sigma_{\mathcal{R}} \quad \setminus \quad \Sigma_{\mathcal{R}}^{\circ} = E_{\mathcal{C}}$$

spełniające z definicji/zbiorów biegunowych/ warunki:

$$0.5 \quad \begin{aligned} \forall e \in E_{\mathcal{C}}, \varsigma \in E_{\mathcal{C}}^{\circ} & \quad \langle \varsigma, e \rangle = 0 \\ \forall e \in \Sigma_{\mathcal{R}}^{\circ}, \varsigma \in \Sigma_{\mathcal{R}} & \quad \langle \varsigma, e \rangle = 0 \end{aligned}$$

Wprowadzając podprzestrzeń $E_{\mathcal{R}} \subset E$ stanów $e \bmod E_{\mathcal{C}}$
 oraz podprzestrzeń $\Sigma_{\mathcal{C}} \subset \Sigma$ stanów $\varsigma \bmod \Sigma_{\mathcal{R}}$ otrzy-
 mujemy rozkład E i Σ na sumy proste podprzestrzeni:

$$0.6 \quad \begin{aligned} E &= E_{\mathcal{R}} \oplus E_{\mathcal{C}} \\ \Sigma &= \Sigma_{\mathcal{R}} \oplus \Sigma_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

przy czym w E_R i Σ_C przyjęto działania dodawania i mnożenia (skalar ~~przebieg~~ odpowiednio mod E_C i mod Σ_R z przestrzeni E i Σ .

Otrzymano w rezultacie dwie pary podprzestrzeni dualnych:

E_C i Σ_C z formą biliniową $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dla $\cdot \in \text{mod } E_C^0$

oraz E_R i Σ_R z formą biliniową $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dla $\cdot \in \text{mod } \Sigma_R^0$ rozpinające przestrzenie E i Σ .

Dowolne steny $e \in E, \zeta \in \Sigma, y \in Y, x \in X$ mogą być zdekomponowane w sposób jednoznaczny na następujące składowe:

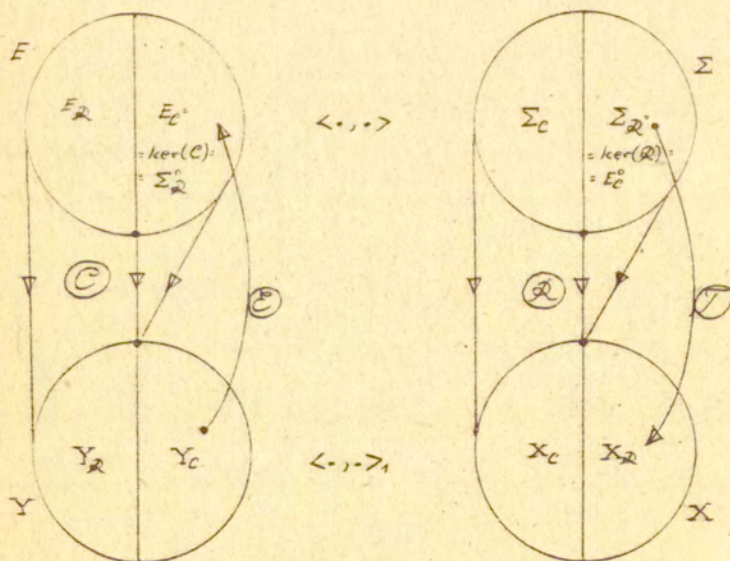
$$\begin{array}{ll}
 e = e_R + e_C & \text{gdzie } e_R \in E_R, e_C \in E_C \\
 \zeta = \zeta_R + \zeta_C & \text{gdzie } \zeta_R \in \Sigma_R, \zeta_C \in \Sigma_C \\
 y = \eta + u & \text{gdzie } \eta \in Y_R, u \in Y_C \text{ (def } Y_C \text{ niżej)} \\
 x = \tau + f & \text{gdzie } \tau \in X_R, f \in X_C \text{ (def } X_C \text{ niżej)}
 \end{array}$$

Powiązania pomiędzy podprzestrzeniami przestrzeni dualnych E i Σ pokazane na rys. 0.2. Wprowadzono dodatkowo dwa operatory liniowe:

- operator deformacji $\mathcal{E}: Y_C \xrightarrow{n_0} E_C$

- operator reakcji $\mathcal{F}: \Sigma_R \xrightarrow{n_0} X_R$

gdzie Y_C i X_R są odpowiednio przestrzeniami rozpinającymi wraz z Y_R i X_C , przestrzenie Y i X .



Związki konstytutywne między elementami przestrzeni E i Σ

Wprowadźmy operator liniowy $A: E \xrightarrow{na} \Sigma$ odwzorowujący przyrosty stanów w przestrzeniach E i Σ :

0.8^a $ds = A de$
zwany operator_{em} konstytutywnym.

Ponieważ przedwzdziedzina operatora A jest całą przestrzenią Σ oraz do jego jądra należy jedynie element $\{0\}$ więc istnieje operator odwrotny $\tilde{A}: \Sigma \xrightarrow{na} E$ odwzorowujący przyrosty stanów:

0.8^b $de = \tilde{A} ds.$

Wyrażając związki /0.8/, /0.9/ przez stany s, e nie zaś przez ich przyrosty, otrzymujemy afiniczne związki konstytutywne uwzględniające wpływ stanów pierwotnych $\tilde{s}, \tilde{e} = A\tilde{e}$ na stany aktualne s, e . Związki te nie są liniowe w tym sensie, że zerowemu stanowi e nie musi odpowiadać zerowy stan s .

0.9 $s = Ae - c \stackrel{af}{=} A(e - \tilde{e})$
 $e = \tilde{A}(s + c) \stackrel{af}{=} \tilde{A}(s + \tilde{s})$

gdzie: $c = A\tilde{e} = \tilde{s}$

Przyjmijmy, że operatory A i \tilde{A} wprowadzają w E i Σ iloczyny skalarne generowane przez formę biliniową $\langle s, e \rangle$:

0.10 $\langle Ae, e \rangle_E \stackrel{af}{=} \langle s, e \rangle$
 $\langle s, \tilde{A}s \rangle_\Sigma \stackrel{af}{=} \langle s, e \rangle$

gdzie: $s = Ae \quad e = \tilde{A}s$

Wynika stąd, że operator A odwzorowuje wzajemnie na siebie podprzestrzenie $E_R \subset \Sigma_R$ oraz $E_C \subset \Sigma_C$, które są odpowiednio ortogonalne w E w sensie iloczynu skalarnego /0.10/ oraz w Σ w sensie iloczynu /0.10/:

0.11 $E_R \xleftrightarrow{A} \Sigma_R$
 $E_C \xleftrightarrow{A} \Sigma_C$

Gdyby tak nie było, istniałaby niezerowa para przyrostów ds, de wziętych z dualnych względem siebie podprzestrzeni /np. $\Sigma_R \subset E_R$ / czyli spełniających warunek $\langle ds, de \rangle \neq 0$ taka, że $\langle A(de), de \rangle = 0$, co byłoby sprzeczne z /0.10/.

Wykorzystując /0.11/, można zapisać związki /0.9/ w postaci zdekomponowanej /por. /0.7//

$$0.12 \quad \begin{aligned} s_a &= A(e_a - \tilde{e}_a) & e_a &= \tilde{A}(s_a + \tilde{s}_a) \\ s_c &= A(e_c - \tilde{e}_c) & e_c &= \tilde{A}(s_c + \tilde{s}_c) \end{aligned}$$

gdzie:

$$\tilde{s}_a = A\tilde{e}_a \quad \tilde{s}_c = A\tilde{e}_c$$

co pozwoli w konsekwencji rozłożyć opis badanego zagadnienia na dwa nielocalne podproblemy, w podprzestrzeniach z indeksami A i C .

Stany s, e oraz ich przyczyny

Przyjmijmy w dalszych rozważaniach elementy przestrzeni Y_a oraz X_c jako dane przyczyny zewnętrzne wywołujące stany s, e .

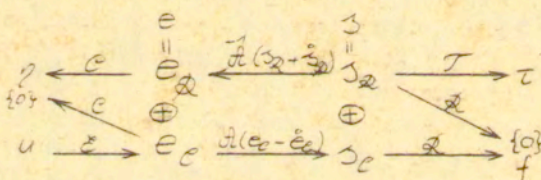
Mamy zatem:

Y_a - przestrzeń danych stanów zewnętrznych niezgodności geometrycznych

X_c - przestrzeń danych stanów obciążeń zewnętrznych.

Stany pierwotne \tilde{e} , $\tilde{s} = A\tilde{e}$ /gdzie \tilde{e} - stan dystorsji/ traktujemy jako wewnętrzne przyczyny wywołujące stany s, e .

Związki pomiędzy stanami s, e oraz przyczynami wywołującymi je można przedstawić na diagramie:



Rys. 0.3

oraz zapisać w postaci zależności:

$$0.13 \quad \begin{aligned} Q(s) &= p \\ C(e) &= p \\ s &= A(e - \tilde{e}) \quad \text{lub} \quad e = \tilde{A}(s + \tilde{s}) \quad \text{gdzie:} \quad \tilde{s} = A\tilde{e} \end{aligned}$$

Przyjmijmy następujące definicje.

Stany użytkowe \tilde{s}, \tilde{e} są to stany wywołane przyczynami zewnętrznymi f, η i opisane związkami /0.13/, w których przyjęto $\tilde{e} = \tilde{s} = 0$.

Stany wstępne \tilde{s}, \tilde{e} są to stany wywołane przyczynami wewnętrznymi \tilde{e}, \tilde{s} i opisane związkami /0.13/, w których przyjęto $f = \eta = 0$.

Stany końcowe s, e są to stany będące sumą stanów użytkowych i wstępnych: $s = \tilde{s} + \tilde{s}, e = \tilde{e} + \tilde{e}$.

Wykorzystując związki konstytutywne /0.12/³ odpowiednio w /0.13/¹ i /0.13/² oraz stosując rozkład /0.7/^{1,2} otrzymujemy opis /0.13/ stanów s, e w postaci zdekomponowanej:

$$0.14 \quad C[\tilde{A}(s_2)] = \eta - \bar{\eta} \stackrel{df}{=} \eta^*$$

gdzie: $\bar{\eta} = C(\tilde{e})$

$$0.15 \quad \tilde{A}[\tilde{A}(e_c)] = f + \bar{f} \stackrel{df}{=} f^*$$

gdzie: $\bar{f} = \tilde{A}(\tilde{s})$

Związek /0.14/ uwzględnia wpływ stanów dystorsji na stany naprężeń s_2 , który można traktować przez analogię jako wpływ fikcyjnych zewnętrznych niezgodności geometrycznych η^* (por.[55])

Związek /0.15/ uwzględnia wpływ stanów dystorsji na stany deformacji e_c , który można traktować przez analogię jako wpływ fikcyjnego obciążenia zewnętrznego f^* .

Rozkładając stan dystorsji $\tilde{e} = \tilde{e}_2 + \tilde{e}_c$ widać z /0.14/, /0.15/, że wpływ na s_2 ma tylko \tilde{e}_2 ponieważ $C(\tilde{e}_c) = 0$ oraz że wpływ na e_c ma tylko \tilde{e}_c ponieważ $\tilde{A}(\tilde{e}_2) = 0$.

Ponieważ dla $s_2 \in \Sigma_2$ superpozycja operatorów $C \circ \tilde{A}$ jest operatorem liniowym z Σ_2 na Y_2 takim, że $\ker(C \circ \tilde{A}) = \{0\}$ /por. rys.01/ więc istnieje operator odwrotny do niego wyznaczający jednoznaczny stan s_2 będący rozwiązaniem równania /0.14/. Analogicznie, dla $e_c \in E_c$ superpozycja operatorów $\tilde{A} \circ \tilde{A}$ jest operatorem liniowym z E_c na X_c takim, że $\ker(\tilde{A} \circ \tilde{A}) = \{0\}$ /por.rys.01/ więc istnieje operator odwrotny do niego wyznaczający jednoznaczny stan e_c będący rozwiązaniem równania /0.15/.

Znajomość stanów \mathcal{S}_2, e_c pozwala wyznaczyć pozostałe niezna-
ne składowe z /0.13/.

Związek /0.15/ można wyrazić alternatywnie przez stany
przemieszczeń.

$$0.16 \quad \mathcal{A}[\mathcal{A}(\mathcal{E}u)] = \bar{f}$$

Kładąc w związkach /0.14/, /0.15/ znikające przyczyny zew-
nętrne $\eta = 0, f = 0$, otrzymujemy stany wstępne wywołane przez
dystorsje w postaci:

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \bar{e}_c = \dot{e}_c \\ /0.17/ \quad \bar{s} &= \bar{s}_2 = -\dot{s}_2 \end{aligned}$$

Składowe \bar{e}_2, \bar{s}_c stanów wstępnych znikają, co wynika z
/0.13/1,2

Analiza, identyfikacja, sterowanie

Zagadnienie analizy stanów wstępnych \bar{s}, \bar{e} odpowiadają-
cych danemu stanowi dystorsji \dot{e} sprowadza się /por. /0.17/ /
do jego dekompozycji: $\dot{e} = \dot{e}_c + \dot{e}_2$.

Zagadnienie identyfikacji stanu dystorsji \dot{e} odpowiadają-
cego danym stanom wstępnym \bar{s}, \bar{e} jest zagadnieniem odwrot-
nym do analizy i sprowadza się /por. /0.17/ / do ich złożenia:

$$0.18 \quad \begin{aligned} \dot{e} &= \dot{e}_c + \dot{e}_2 = \mathcal{E} - \mathcal{A}\bar{s} \\ \bar{s} &= \bar{s}_c + \bar{s}_2 = \mathcal{A}\bar{e} - \bar{s} \end{aligned}$$

Zagadnienie sterowania dystorsjami polega na takim modulo-
waniu stanów pierwotnych \bar{s}, \bar{e} aby uzyskać korzystną regula-
cję stanów końcowych \dot{s}, \dot{e} , $e = \dot{e} + \dot{s}$. Ze względu na fakt,
że $\bar{s} \in \Sigma_2$ oraz $\bar{e} \in E_c$, regulacji podlega jedy-
nie część \bar{s}_2 stanu naprężeń użytkowych wywołana zewną-
trznymi niezgodnościami geometrycznymi η oraz część \dot{e}_c
stanu deformacji użytkowych wywołana obciążeniem zewnętrznym
 f .

W szczególności można sformułować trzy zadania sterowania
dystorsjami:

a/ Minimalizacja globalnej miary stanu deformacji $\min \langle \mathcal{A}e, e \rangle$
przy danych przyczynach zewnętrznych η, f prowadzi do

$$0.19 \quad \dot{e} = \dot{e}_c = \dot{\bar{e}} = -\dot{e}_c$$

gdzie \dot{e}_c - składowa stanu deformacji użytkowych wywołana obciążeniem zewnętrznym f .

W wyniku takiego sterowania składowa e_c stanu deformacji końcowej znika ($e_c = 0$) zaś składowa e_R pozostaje bez zmiany ($e_R = \dot{e}_R$).

Miara deformacji końcowych $\langle de, e \rangle = \langle de_R, e_R \rangle + \langle de_c, e_c \rangle$ osiąga swe minimum $\langle d\dot{e}_R, \dot{e}_R \rangle$.

b/ Minimalizacja globalnej miary stanu naprężenia $\min \langle s, \dot{A}s \rangle$ przy danych przyczynach zewnętrznych η, f prowadzi

do:

$$0.20 \quad s = s_R = -s_c = \dot{s}_R$$

gdzie: \dot{s}_R - składowa stanu naprężeń użytkowych wywołana zewnętrznymi niezgodnościami geometrycznymi η .

W wyniku takiego sterowania składowa s_R stanu naprężeń końcowych znika ($s_R = 0$) zaś składowa s_c pozostaje bez zmiany ($s_c = \dot{s}_c$).

Miara naprężeń końcowych $\langle s, \dot{A}s \rangle = \langle s_R, \dot{A}s_R \rangle + \langle s_c, \dot{A}s_c \rangle$ osiąga swe minimum $\langle \dot{s}_c, \dot{A}\dot{s}_c \rangle$.

Zadania sterowanie a/ i b/ mogą być realizowane łącznie.

c/ Minimalizacja globalnej miary stanu dystorsji $\min \langle de, \dot{e} \rangle = \min \langle s, \dot{A}s \rangle$ przy ograniczeniach

$$0.21 \quad e = \dot{e} + \dot{E} \in E'CE \quad \text{lub} \quad s = \dot{s} + \dot{\Sigma} \in \Sigma'CS$$

gdzie:

E' - obszar dopuszczalnych stanów deformacji

Σ' - obszar dopuszczalnych stanów naprężeń

prowadzi do pewnych rozwiązań: $\dot{e}_c = \dot{E}$ /przy $\dot{e}_R = 0$ / lub $\dot{s}_R = -\dot{\Sigma}$ (przy $\dot{s}_c = 0$) sprowadzających stany s, e do obszarów dopuszczalnych.

Jeśli $\dot{E} \in E'$ lub $\dot{\Sigma} \in \Sigma'$ to $\dot{e} = 0$.

Dualność przestrzeni X, Y

Przyrost formy biliniowej $d\langle s, e \rangle$ może być zapisany w postaci: $d\langle s, e \rangle = \langle ds, e \rangle + \langle s, de \rangle$.

Uwzględniając związki konstytutywne /0.10/ otrzymujemy stąd:

$$0.22 \quad d\langle s, e \rangle = \langle ds, \tilde{d}(s+\delta) \rangle + \langle R(e-\tilde{e}), de \rangle = \\ \stackrel{df}{=} dU_s(s, \delta) + dU_e(e, \tilde{e})$$

Zdefiniujmy formę biliniową $\langle x, y \rangle$ wprowadzającą dualność przestrzeni X, Y /indukowaną przez formę $\langle s, e \rangle$ / generującą następujące podprzestrzenie polarne: $X_e = Y_e^o$ oraz $Y_e = X_e^o$.

Przyjmijmy, że forma $\langle x, y \rangle$ spełnia warunki:

$$/0.23/ \quad \langle f, du \rangle = \langle s, de \rangle_0 \\ \langle dt, \eta \rangle_1 = \langle ds, e \rangle_2$$

przy czym stany u, η, τ, f, s, e związane są zależnościami diagramu /rys. 0.3/.

Równania /0.23/ nazwijmy prostą i komplementarną zasadą prac wirtualnych. Otrzymujemy z nich, wykorzystując /0.22/, zasadę stacjonarności ^{energii} potencjalnej /dla $e \in E_e$ oraz ustalonych f, δ, τ /:

$$/0.24/ \quad d[U_e(e, \tilde{e}) - \langle f, u \rangle_1] = 0$$

oraz zasadę stacjonarności energii komplementarnej /dla $s \in \Sigma_R$ oraz ustalonych η, δ /

$$/0.25/ \quad d[U_s(s, \delta) - \langle \tau, \eta \rangle_1] = 0.$$

Model continuum sprężystego

Na zakończenie ogólnych rozważań na temat:

dualność - zgodnienia dystorsji, zaoferujemy je do przypadku dwóch dyskutowanych w pracy modeli układów mechanicznych: continuum sprężystego oraz struktury dyskretnej. Zdefiniowanie przestrzeni i operatorów występujących w schemacie struktury dualności /rys. 0.2/ pozwala zastosować otrzymane wyżej ogólne wnioski do wspomnianych modeli.

Niech dane będzie ciało sprężyste obciążone i częściowo utwierdzone na brzegu jak to pokazane na rys. 1.1.

Zdefiniujemy przestrzenie E i Σ jako przestrzenie pól tensorowych symetrycznych nad obszarem V w R^3 . Pola tensorowe naprężeń $\underline{\sigma}(x)$ są elementami przestrzeni Σ zaś pola tensorowe odkształceń $\underline{\epsilon}(x)$ są elementami przestrzeni E . Formę biliniową wprowadzającą dualizm przestrzeni E i Σ przyjmijmy w postaci:

$$(0.26) \quad \langle \underline{\sigma}, \underline{\epsilon} \rangle \stackrel{df}{=} \int_V \underline{\sigma}(x) \underline{\epsilon}(x) dV$$

Przestrzeń stanów obciążeń X_c przyjmijmy w postaci sumy dwóch podprzestrzeni: $X_c = X'_c + X''_c$, gdzie: X'_c - przestrzeń pól wektorowych /sił masowych \underline{X} / nad obszarem V w R^3 zaś X''_c - przestrzeń pól wektorowych /sił powierzchniowych \underline{p} / nad częścią A_p brzegu.

Przestrzeń $X_{\mathcal{Q}}$ stanów reakcji przyjmijmy w postaci sumy dwóch podprzestrzeni: $X_{\mathcal{Q}} = X'_{\mathcal{Q}} + X''_{\mathcal{Q}}$, gdzie: $X'_{\mathcal{Q}}$ - przestrzeń pól wektorowych /sił reakcji/ nad częścią A_u brzegu, zaś $X''_{\mathcal{Q}}$ - przestrzeń pól tensorowych symetrycznych nad V .

Przestrzeń stanów niezgodności geometrycznych $Y_{\mathcal{Q}}$ przyjmijmy w postaci sumy dwóch podprzestrzeni: $Y_{\mathcal{Q}} = Y'_{\mathcal{Q}} + Y''_{\mathcal{Q}}$, gdzie: $Y'_{\mathcal{Q}}$ - przestrzeń pól tensorowych symetrycznych nad obszarem V w R^3 zaś $Y''_{\mathcal{Q}}$ - przestrzeń pól wektorowych /przemieszczeń \underline{q} / nad częścią A_u brzegu.

Przestrzeń stanów przemieszczeń Y_c przyjmijmy w postaci: sumy dwóch podprzestrzeni pól wektorowych: $Y_c = Y'_c + Y''_c$, gdzie: Y'_c - przestrzeń pól przemieszczeń na brzegu A_p
 Y''_c - przestrzeń pól przemieszczeń w obszarze V .

Operator nierównowagi wewnętrznej $\mathcal{Q}: \Sigma \xrightarrow{na} X'_c \cup X''_c$ zdefiniujmy następująco:

$$(0.27) \quad \begin{aligned} \forall x \in V & \quad \mathcal{Q}(\underline{\sigma}) \stackrel{df}{=} - \operatorname{div} \underline{\sigma} \\ \forall x \in A_p & \quad \mathcal{Q}(\underline{\sigma}) \stackrel{df}{=} \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \end{aligned}$$

Operator niezgodności geometrycznych $C: E \xrightarrow{na} Y'_{\mathcal{Q}} \cup Y''_{\mathcal{Q}}$ zdefiniujmy następująco:

$$(0.28) \quad \begin{aligned} \forall x \in V & \quad C(\underline{\epsilon}) \stackrel{df}{=} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\epsilon} \\ \forall x \in A_u & \quad C(\underline{\epsilon}) \stackrel{df}{=} \underline{\epsilon} \cdot \underline{t}_i \underline{t}_j \end{aligned}$$

gdzie: $i, j = 1, 2$ zaś $\underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2$ stanowią parę wektorów ortogonalnych układu współrzędnych parametryzującego powierzchnię brzegową A_u /rys. 1.1/. Podprzestrzeń $E_C \subset E$ jest przestrzenią pól deformacji $\underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{x})$ geometrycznie zgodnych czyli takich, które spełniają w obszarze V warunek Saint Venanta, zaś na brzegu A_u warunek zgodności z zerowymi przemieszczeniami $\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{0}}$:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{\epsilon}}_{\underline{\underline{i}}} \underline{\underline{e}}_j &= \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad /0.29/$$

Alternatywnie można zdefiniować E_C jako przestrzeń pól deformacji $\underline{\underline{\epsilon}}(\mathbf{x})$, dla których istnieje pole przemieszczeń $\underline{\underline{u}}(\mathbf{x}) \in Y_C \cup Y_C''$ (znikających na A_u) takie, że:

$$\text{grad}^s \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\epsilon}} \quad \forall \mathbf{x} \in V \cup A \quad /0.30/$$

gdzie $\text{grad}^s \underline{\underline{u}}$ jest symetryczną częścią pola $\text{grad } \underline{\underline{u}}$. Związek /0.30/ definiuje operator deformacji \mathcal{E} . Przestrzeń zerową operatora $\mathcal{E} : \ker(\mathcal{E})$ może zawierać co najwyżej stany przemieszczeń ciała jako bryły sztywnej, gdy $A = A_p$. Zażądajmy w tym przypadku spełnienia przez obciążenia zewnętrzne warunku równowagi globalnej.

Podprzestrzeń $\Sigma_{\mathcal{Q}} \subset \Sigma$ jest przestrzenią zerową operatora \mathcal{Q} pól naprężeń $\underline{\underline{\sigma}}(\mathbf{x})$ samorównoważonych, spełniających jednorodne warunki /0.27/:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in V \quad \text{div } \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{0}} \\ \forall \mathbf{x} \in A_p \quad \underline{\underline{\sigma}} \mathbf{n} &= \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad /0.31/$$

Można sprawdzić, że $\Sigma_{\mathcal{Q}} = E_C^o$ oraz $E_C = \Sigma_{\mathcal{Q}}^o$. Warunki /0.5// są spełnione, co wynika z ogólnego faktu, że praca samorównoważonego układu sił wewnętrznych na geometrycznie zgodnym polu deformacji znika. Widzieć to bezpośrednio z zasady prac wirtualnych.

Operator reakcji \mathcal{T} przedstawmy jako dwa operatory liniowe $\mathcal{T}', \mathcal{T}''$, gdzie $\mathcal{T}' : \Sigma_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{na} X'_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{T}'' : \Sigma_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{na} X''_{\mathcal{Q}}$:

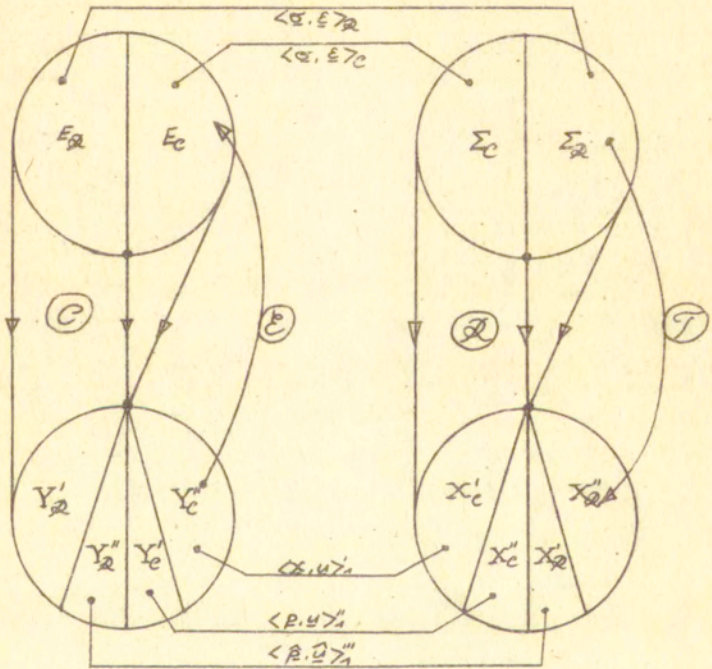
$$/0.32/ \quad \forall x \in A_u \quad \mathcal{T}'(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} \eta$$

$$\quad \forall x \in V \quad \mathcal{T}''(\underline{\sigma}) = \text{rot rot } \underline{\sigma}$$

Klasyczne związki konstytutywne $\underline{\sigma} = A \underline{\epsilon}$, $\underline{\epsilon} = \bar{A}' \underline{\sigma}$ wprowadzają w przestrzeniach E i Σ iloczyny skalarne /0.10/, wyznaczające składowe ortogonalne, co pozwala zdekomponować ogólny opis zagędnienia na dwa problemy niezależne, jak to pokazano wyżej w rozważaniach ogólnych.

Formę biliniową $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ zdefiniujemy następująco:

$$/0.33/ \quad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_1 \stackrel{df}{=} \int_V \underline{x} \underline{u} dv + \int_{A_p} p \underline{u} dA + \int_{A_u} \underline{\sigma} \eta \underline{u} dA \stackrel{df}{=} \\ = \langle \underline{x}, \underline{u} \rangle_1 + \langle p, \underline{u} \rangle_1 + \langle \underline{\beta}, \underline{u} \rangle_1$$



Rys. 0.4

Rysunek 0.4 pokazuje konstrukcję układu przestrzeni dualnych.

Związek /0.25/¹ wyraża zasadę prac wirtualnych:

$$/0.39/ \quad \int_V \underline{X} \underline{u} dV + \int_{A_p} p \underline{d}u dA = \int_V \underline{\underline{S}} \delta \underline{\underline{E}} dV$$

dla obciążeń zewnętrznych \underline{X} , p na przemieszczeniach wirtualnych $\underline{d}u$ spełniających warunek $\delta \underline{u} = 0$ na A_u oraz dla naprężeń na odkształceniach wirtualnych postaci $\delta \underline{\underline{E}} = \text{grad}^s \underline{d}u$

Model struktury dyskretnej

Prowadzone wyżej rozważania na temat dualności w układach mechanicznych mogą być zaadoptowane w przypadku struktur dyskretnych. Opisuując układy dowolne /np. prętowo-płytowo-tarczowe/ wygodnie jest zastosować formalizm wprowadzony przez D. Rogulę w "Teorii nierégularnych struktur dyskretnych" [70]. W punkcie tym ograniczymy się do przypadku struktur kratowych, które dyskutowane będą w dalszych rozdziałach pracy. Zdefiniujemy /por. [70] / dla dowolnej struktury kratowej zbiór S , którego elementami są wszystkie jej wierzchołki /węzły przegubowe/, krawędzie /pręty/, oraz zamknięte pętle podstawowe utworzone przez łańcuchy stykających się ze sobą krawędzi. Równocześnie:

$$/0.35/ \quad S = S^0 \cup S^1 \cup S^2$$

gdzie: S^0 jest zbiorem wszystkich wierzchołków, S^1 - zbiorem wszystkich krawędzi, a S^2 - zbiorem wszystkich pętli podstawowych. Zbiór S^2 określamy arbitralnie definiując jedno z możliwych drzew grafu struktury /czyli takich podgrafów spójnych, które zawierają wszystkie wierzchołki natomiast nie zawierają żadnej pętli/. Każda z pozostałych krawędzi, nie należąca do drzewa grafu jest krawędzią zamykającą jedną pętlę. Otrzymany w ten sposób zbiór S^2 pętli podstawowych pozwala wyznaczyć wszystkie pętle grafu przez operację różnicy symetrycznej elementów S^2 .

Zbiory S^0 , S^1 , S^2 zawierają odpowiednio:

k /liczba węzłów układu/ elementów 0-wymiarowych struktury,

l /liczba prętów układu/ elementów 1-wymiarowych struktury, m (liczba pętli podstawowych układu niezależna od przyjętego drzewa grafu) elementów 2-wymiarowych struktury.

Wprowadzmy macierz incydencji układu D_0 o wymiarach $[1, k]$ definiującą relację przylegania pomiędzy elementami zbiorów S^0 i S^1 oraz macierz D_1 o wymiarach $[m, 1]$ definiująca relację przylegania pomiędzy elementami zbiorów S^1 i S^2 . Zbiór $S^0 \cup S^1$ wraz z macierzą D_0 określają jednoznacznie badaną strukturę dyskretną. Zbiór S^2 oraz macierz D_1 mogą być wyznaczone z postaci macierzy D_0 .

Wprowadzmy orientację krawędzi grafu struktury oraz pochodną od niej orientację pętli podstawowych zgodną z cyrkulacją wyznaczoną przez orientację krawędzi zamykających pętle. Można to wyrazić przez odpowiednie definicje macierzy D_0 i D_1 .

Elementy $d_{ij}^0 \in D_0$ przyjmują wartości:

$d_{ij}^0 = 1$ jeśli wierzchołek j przylega do krawędzi i, która jest skierowana zwrótem do niego

$d_{ij}^0 = -1$ jeśli wierzchołek j przylega do krawędzi i, która jest skierowana zwrótem od niego

$d_{ij}^0 = 0$ jeśli wierzchołek j nie przylega do krawędzi i.

Elementy $d_{ij}^1 \in D_1$ przyjmują wartości:

$d_{ij}^1 = 1$ jeśli krawędź j przylega do pętli i oraz jej orientacja jest zgodna z orientacją pętli.

$d_{ij}^1 = -1$ jeśli krawędź j przylega do pętli i oraz jej orientacja jest przeciwna do orientacji pętli.

$d_{ij}^1 = 0$ jeśli krawędź j nie przylega do pętli i.

Wprowadzmy na zbiorze krawędzi S^1 przestrzenie liniowe E i Σ ℓ trójek liczb rzeczywistych /wektory w R^3 / opisujących odpowiednio stany V deformacji i stany R sił w prętach struktury.

Wprowadzmy na zbiorze wierzchołków S^0 przestrzenie liniowe $Y_a'' \cup Y_c$ i $X_c \cup X_a''$ k trójek liczb rzeczywistych /wektory w R^3 / opisujących odpowiednio stany U przemieszczeń węzłów struktury i stany P sił zewnętrznych na nie działających. Wprowadzając podzbiór S_u , k_u wierzchołków struktury, na których wymuszane są przyczynami zewnętrznymi przemieszczenia \hat{u} /w szczególnym przypadku zerowe/ oraz podzbiór S_p , k_p

wierzchołków struktury, do których przyłożone są siły zewnętrzne P / w szczególnym przypadku zerowe/, okreśmy podprzestrzenie Y_2'' i X_2'' na zbiorze S_u^0 oraz podprzestrzenie Y_0 i X_0 na zbiorze S_p^0 . Zachodzi przy tym: $k = k_u + k_p$ oraz $S^0 = S_u^0 \cup S_p^0$.

Podzbiór S_u^0 można nazwać brzegiem, zaś S_p^0 wnętrzem struktury. Wprowadźmy na zbiorze pętli podstawowych S^2 przestrzenie liniowe Y_2'' i X_2'' , \mathcal{Y} trójek liczb rzeczywistych /wektory w R^3 / opisujących odpowiednio stany geometrycznych niezgodności deformacji oraz ich siłowych odpowiedników.

Równania sieciowe /por. [39,70]/ dla dyskutowanej struktury dyskretnej zapisać można w postaci:

- związków geometrycznych wiążących deformacje prętów z przemieszczeniami węzłów:

$$/0.36/ \quad \underline{D}_0 \underline{U} + \underline{V} = \underline{0}$$

- równań równowagi: wiążących siły wewnętrzne w prętach z siłami obciążeń zewnętrznych działających na węzły:

$$/0.37/ \quad \underline{D}_1^* \underline{R} + \underline{P} = \underline{0}$$

gdzie macierz $\underline{D}_1^* = -\underline{D}_0^T$ o wymiarach [k.1] uzyskana przez transformację macierzy incydencji \underline{D}_0 jest macierzą przekrojów podstawowych wybierającą pręty schodzące się w danym węźle.

- związków konstytutywnych /por. /0.10//

$$/0.38/ \quad \underline{R} = \underline{A} (\underline{V} - \underline{\hat{V}}) \\ \underline{V} = \underline{\hat{A}} (\underline{R} + \underline{\hat{R}})$$

gdzie $\underline{R} = \underline{A} \underline{\hat{V}}$.

Od stanu sił zewnętrznych P zażądajmy, aby spełniał globalny warunek równowagi:

$$/0.39/ \quad \underline{D}_0^* \underline{P} = \underline{0}$$

gdzie działanie macierzy \underline{D}_0^* na siły P daje ich wypadkową /siłę i moment/. Działając macierzą \underline{D}_0^* na równanie /0.37/ i uwzględniając /0.39/ otrzymujemy warunek sieciowy globalnej równowagi stanu sił wewnętrznych:

$$/0.40/ \quad \underline{D}_0^* \underline{D}_1^* \underline{R} = \underline{0}.$$

Działając na równanie /0.36/ macierzą D_1 otrzymujemy, po uwzględnieniu warunku sieciowego nierozdzielności stanów przemieszczeń /por. [70] /:

$$/0.41/ \quad D_1 D_0 \underline{U} = \underline{0}$$

związek:

$$/0.42/ \quad D_1 \underline{V} = \underline{0}$$

spełniający rolę warunków geometrycznej zgodności stanu deformacji \underline{V} , analogiczną do warunków Saint Venanta dla continuum. Zadośćuczynienie warunkom /0.42/ gwarantuje istnienie rozwiązania równania /0.36/ względem \underline{U} :

$$/0.43/ \quad \underline{U} = \underline{D}_1^* \underline{V}$$

gdzie: macierz \underline{D}_1^* o wymiarach $[k-1, 1]$ jest macierzą zorientowanych połączeń wierzchołków drzewa grafu struktury z jego korzeniem /wierzchołkiem w_0 /.

Elementy $\tilde{d}_{ij} \in \underline{D}_1^*$ przyjmują wartości:

$\tilde{d}_{ij} = 1$ jeśli krawędź j należy /ze zgodną orientacją/ do gałęzi wyznaczającej drogę połączenia od korzenia w_0 do wierzchołka i .

$\tilde{d}_{ij} = -1$ jeśli krawędź j należy /z orientacją przeciwną/ do gałęzi wyznaczającej drogę połączenia od korzenia w_0 do wierzchołka i .

$\tilde{d}_{ij} = 0$ jeśli krawędź j nie należy do gałęzi łączącej korzeń w_0 z wierzchołkiem i .

Związek /0.43/ wyznacza przemieszczenia węzłów struktury względem węzła w_0 opisując stan \underline{U} z dokładnością do ruchów sztywnych układu.

Przyjmując, że korzeń drzewa grafu $w_0 \in S_0$ odpowiada nieruchomemu /związanemu z podłożem/ węzłowi struktury, i że nie występuje dokoła niego obrót sztywny całego układu, związek /0.43/ określa stan \underline{U} jednoznacznie. Macierz \underline{D}_1^* może być wyznaczona z postaci macierzy incydencji D_0 .

Zdefiniujmy dwie szczególne klasy układów. Strukturę nazywamy izostatyczną /statoycznie wyznaczalną/ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie jednorodne /0.37/ $D_1^* \underline{R} = \underline{0}$ /przy znikających obciążeniach zewnętrznych/ posiada dokładnie jedno rozwiązanie $\underline{R} = \underline{0}$, czyli gdy zachodzi implikacja:

$$/0.44/ \quad D_1^* R = 0 \implies R = 0$$

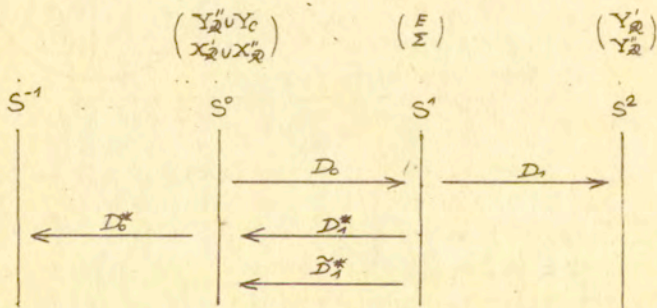
Strukturę nazywamy izogeometryczną /geometrycznie niezmienną/ wtedy i tylko wtedy, gdy równanie jednorodne /0.36/ $D_0 U = 0$ /przy znikających deformacjach $V = 0$ / posiada dokładnie jedno rozwiązanie $U = 0$ z dokładnością do ruchów sztywnych układu, czyli gdy zachodzi implikacja:

$$/0.45/ \quad D_0 U = 0 \implies U \text{ opisuje ruch sztywny układu.}$$

Interesować nas będą dalej struktury izogeometryczne i hiperstatyczne, czyli nie izostatyczne /nie spełniające warunku

/0.44//

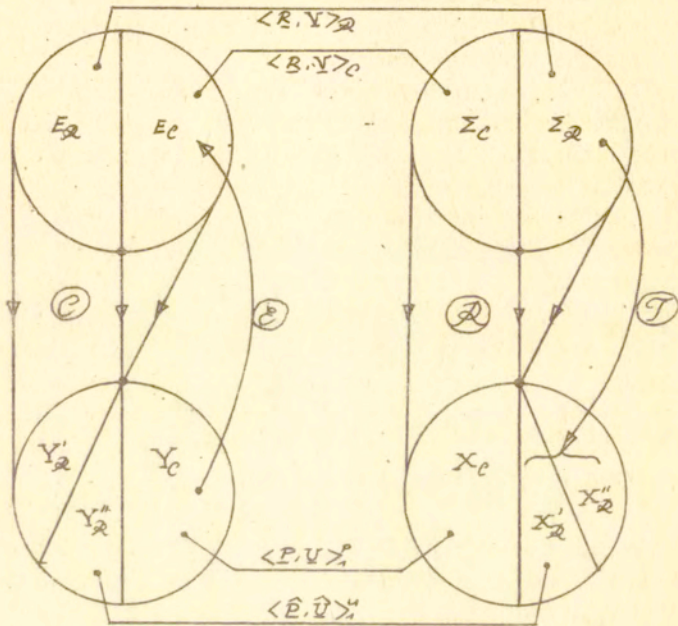
Traktując macierze D_0 , D_1 , D_1^* , \tilde{D}_1^* jako operatory działające na elementy odpowiednio U, V, R, B przestrzeni: $Y_2'' \cup Y_0, F, \Sigma, \Sigma$ /odpowiednio nad: S^0, S^1, S^1, S^1 / otrzymujemy diagram /rys. 0.5/ odwzorowań, gdzie operatory proste D_0, D_1 działają z przestrzeni określonych nad zbiorem p wymiarowym w przestrzenie określone nad zbiorem $p + 1$ -wymiarowym zaś operatory dualne D_1^*, \tilde{D}_1^* działają z przestrzeni nad zbiorem p wymiarowym w przestrzenie nad zbiorem $p-1$ wymiarowym.



Rys. 0.5

Macierz D_0^* może być traktowana jako operator działający z przestrzeni stanów sił zewnętrznych F określonych na zbiorze węzłów S^0 w przestrzeń sił wypadkowych określonych na jednoelementowym zbiorze - całej konstrukcji (S^1).

Strukturę dualności przestrzeni Σ, E, X, Y pokazano na rys. 0.6 definiując poniżej operatory $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{E}, \mathcal{T}$ za pośrednictwem operatorów $D_0, D_1, D_1^*, \tilde{D}_1^*$



Rys. 0.6

Operator nierównowagi wewnętrznej $\mathcal{A}: \Sigma \rightarrow X_c$ definiujemy jako operator opisany przez podmacierz D_{1p}^* o wymiarach $[k_p, l]$ macierzy D_1^* określonej na zbiorze krawędzi S^1 oraz podzbiorze węzłów S_p^0 . Operator \mathcal{A} wyznacza siły nierównowagi wewnętrznej $\mathcal{A}(R) \stackrel{df}{=} D_{1p}^* B$ węzłów należących do wnętrza S_p^0 struktury. Podprzestrzeń Σ_2 jest przestrzenią zerową operatora $\mathcal{A}: \Sigma_2 = \ker(\mathcal{A})$.

0.46

Operator niezgodności geometrycznych $\mathcal{C}: E \rightarrow Y_2$ definiujemy jako dwa operatory. Jeden z nich opisany przez macierz D_1 działający z E na Y_2' oraz drugi, opisany przez podmacierz \tilde{D}_{1u}^* o wymiarach $[k_u, 1]$ macierzy \tilde{D}_1^* określonej na zbiorze krawędzi S^1 oraz podzbiorze węzłów S_u^0 działający z E na Y_2'' . Operator \mathcal{C} wyznacza wektory niezgod-

ności geometrycznej wewnętrznej oraz na brzegu S_u^0 struktury:

$$/0.47/ \quad C(V) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_1 V & \text{dla pętli podstawowych} \\ D_{1u}^* V & \text{dla węzłów brzegowych } S_u^0 \end{cases}$$

Podprzestrzeń E_c jest przestrzenią zerową operatora $C: E_c = \ker(C)$.

Operator $\mathcal{E}: Y_R^n \cup Y_c \rightarrow E_c$ wyznaczający deformację układu definiujemy jako operator opisany przez macierz incydencji D_0 :

$$/0.48/ \quad \mathcal{E}(V) \stackrel{\text{def}}{=} D_0 V.$$

Operator reakcji $\mathcal{T}: \Sigma \rightarrow X_R$ definiujemy jako dwa operatory. Jeden z nich opisany jest przez podmacierz D_{1u}^* o wymiarach $[k_u, 1]$ macierzy D_1^* określoną na zbiorze krawędzi S^1 oraz podzbiorze węzłów brzegowych S_u^0 i działa z Σ_R na X_R wyznaczając siły reakcji \hat{P} podłoża działające na skrępowane węzły struktury. Drugi operator opisany jest przez macierz D_1 i działa z Σ_R w X_R wyznaczając w pętlach podstawowych siły wewnętrzne dualne do geometrycznej niezgodności stanu deformacji V z warunkami /0.40/:

$$/0.49/ \quad \mathcal{T}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} D_{1u}^* B & \text{dla węzłów brzegowych } S_u^0 \\ D_1 B & \text{dla pętli podstawowych.} \end{cases}$$

Warunek izogeometryczności struktury /0.45/ równoważny jest żądaniu:

$$/0.50/ \quad \ker(\mathcal{E}) = Y_0$$

gdzie Y_0 - przestrzeń ruchów sztywnych układu.

Warunek hiperstatyczności struktury /zaprzeczenie warunku

/0.44// równoważny jest żądaniu:

$$/0.51/ \quad \ker(\mathcal{Q}) = \Sigma_R \neq \{0\}.$$

Formy biliniowe dla par przestrzeni F, Σ oraz Y, X definiowane są następująco:

$$/0.52/ \quad \begin{aligned} \langle B, V \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{S^1} (B, V) \\ \langle B, U \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{S^0} (B, U) \\ \langle \hat{P}, \hat{U} \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{S_u^0} (\hat{P}, \hat{U}) \end{aligned}$$

gdzie $(, .)$ - iloczyn skalarny w R^3 .

Wykluczone z rozważań przypadki struktur zarówno hipergeometrycznych jak i izostatycznych dopuszczają możliwość wystąpienia stanu deformacji $V \in E$ na którym znika praca $\langle R, V \rangle$ dowolnego stanu sił wewnętrznych $R \in \Sigma$, co jest sprzeczne z przyjętym postulatem dualności /1/².

Spełnienie warunków $\Sigma_{\mathcal{A}} = E_C^0$ oraz $E_C = \Sigma_{\mathcal{A}}^0$ można pokazać, analogicznie jak to opisano w przypadku continuum, wykorzystując zasadę prac wirtualnych. Przyjmując klasyczne prawo Hooke'a dla prętów struktury, spełniony jest warunek /0.11/. Podsumowując, dla skonstruowanego wyżej modelu struktury dyskretnej można przenieść wnioski uzyskane w ogólnej dyskusji zagadnienia dualności stanów.

Model dwufazowego continuum sprężystego

Po przededzeniu przypadków continuum sprężystego oraz struktury dyskretnej zbadajmy, jak daleko ogólne rozważania na temat dualności stanów w układach mechanicznych mogą być zastosowane w przypadku modeli złożonych. Omówmy dyskutowany w rozdziale 2 model równoległy Voigt'a continuum sprężystego zanurzonego w innym continuum sprężystym, wykorzystywany do opisu ośrodków kompozytowych. Rozpatrywany, ciągły ośrodek dwufazowy /mieszanina/ posiada tę cechę, że każdemu punktowi geometrycznemu z obszaru V przyporządkowane są dwa punkty materialne należące do różnych faz /por. rys. 2.1/.

Własności sprężyste poszczególnych faz I i II opisywane są tensorami $A^I (B^I \stackrel{dt}{=} \bar{A}^I)$ i $A^{II} (B^{II} \stackrel{dt}{=} \bar{A}^{II})$.

Rozbudujmy zaprezentowaną wyżej konstrukcję dualności stanów w continuum sprężystym na przypadek dwufazowy. Wprowadzane przestrzenie E stanów deformacji oraz Σ stanów naprężeń powinny zawierać opis tych stanów w obu rozpatrywanych fazach: $\xi', \xi'' \in E$ oraz $\sigma', \sigma'' \in \Sigma$.

Ponieważ wygodniej jest operować rozkładem stanów z poszczególnych faz na ich symetryczne /względem obu faz/ i antysymetryczne części:

$$\begin{aligned} /0.53/ \quad \xi^s \stackrel{dt}{=} \frac{1}{2} (\xi' + \xi'') & \quad \sigma^s \stackrel{dt}{=} \frac{1}{2} (\sigma' + \sigma'') \\ \xi^a \stackrel{dt}{=} \frac{1}{2} (\xi' - \xi'') & \quad \sigma^a \stackrel{dt}{=} \frac{1}{2} (\sigma' - \sigma'') \end{aligned}$$

przyjmijmy, że przestrzenie E i Σ są rozpięte na swych podprzestrzeniach odpowiednio E^s i E^a oraz Σ^s i Σ^a stanów symetrycznych i antysymetrycznych w sensie /0.53/.

Traktujmy zatem stany $\underline{\xi}$, $\underline{\zeta}$ jako pary stanów symetrycznych i antysymetrycznych: $\underline{\xi} = (\xi^s, \xi^a)$, $\underline{\zeta} = (\zeta^s, \zeta^a)$.

Definiując operatory nierównowagi międzyfazowej: $\mathcal{Q}_1: \Sigma \xrightarrow{na} X$ i międzyfazowej niezgodności geometrycznej: $C_1: E \xrightarrow{na} I$ /gdzie X, I - przestrzenie liniowe/:

$$\begin{aligned} /0.54/ \quad \mathcal{Q}_1(\underline{\zeta}) &\stackrel{df}{=} \underline{\zeta}^s \\ C_1(\underline{\xi}) &\stackrel{df}{=} \underline{\xi}^a \end{aligned}$$

oraz formę biliniową:

$$\begin{aligned} /0.55/ \quad \langle \underline{\zeta}, \underline{\xi} \rangle &\stackrel{df}{=} \int_V \zeta^s(x) \xi^s(x) dv + \int_V \zeta^a(x) \xi^a(x) dv = \\ &= \int_V \zeta^s(x) \xi^s(x) dv + \int_V \zeta^a(x) \xi^a(x) dv = \langle \underline{\zeta}^s, \underline{\xi}^s \rangle + \langle \underline{\zeta}^a, \underline{\xi}^a \rangle \end{aligned}$$

otrzymujemy strukturę dualności /rys. 2.7/, w której spełnione są warunki:

$$\begin{aligned} /0.56/ \quad \ker(\mathcal{Q}_1) &= \Sigma^a = (E^s)^o \\ \ker(C_1) &= E^s = (\Sigma^a)^o \end{aligned}$$

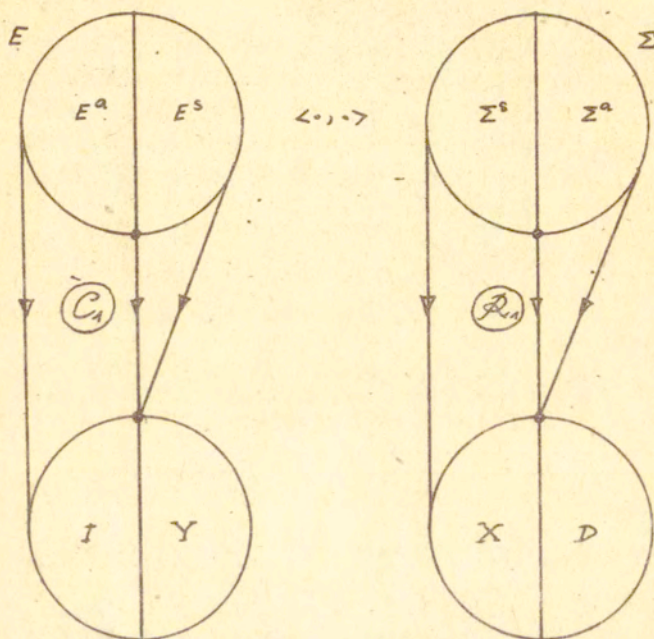
wyrażające dualność wprowadzonych stanów symetrycznych i antysymetrycznych.

Przestrzenie E^s i Σ^s można związać dodatkowo dualnością skonstruowaną dla jednorodnego continuum sprężystego /rys. 0.4/ określoną przez formę biliniową /0.26/:

$$/0.57/ \quad \langle \underline{\zeta}, \underline{\xi} \rangle = \langle \underline{\zeta}^s, \underline{\xi}^s \rangle$$

oraz operatory $\mathcal{Q}_2: \Sigma^s \xrightarrow{na} X_c$ i $C_2: E^s \xrightarrow{na} Y_2$ zdefiniowane odpowiednio przez związki /0.27/ i /0.28/.

Wprowadzone w schemacie /rys. 0.7/ przestrzenie I, D mają interpretację /pomijając wpływ niejednorodności faz/ przestrzeni stanów antysymetrycznych przyczyn wywołujących oddziaływanie międzyfazowe /np. inkluzje międzyfazowe/ oraz związanych z nimi antysymetrycznych odpowiedników siłowych /dipoli/.



Rys. 0.7

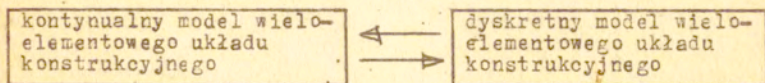
Wprowadzona tu dwupoziomowa konstrukcja dualności stanów w E i Σ nie prowadzi do tak daleko posuniętych wniosków jak w przypadku jednorodnego continuum. Ze względu na różnice tensorów sztywności obu faz wiązki konstytutywne /por. /2.12/, /2.13/ / nie spełniają warunku /0.11/, w związku z czym nie zachodzi przypadek umożliwiający dekompozycję omawianego problemu na dwa niezależne podproblemy. Przykładowo, wprowadzenie do ośrodka inkluzji międzyfazowej wywołuje w ogólnym przypadku zarówno antysymetryczne jak i symetryczne stany $\underline{\xi}, \underline{\zeta}$. W przypadku szczególnym, gdy mamy do czynienia z dwoma fazami o jednakowych sztywnościach, wprowadzona dwupoziomowa konstrukcja dualności daje wygodną dekompozycję stanów

pozwalającą na oddzielne badanie mikrooddziaływań międzyfazowych a także oddzielne badanie makrostanów związanych odpowiednio z wywołującymi je przyczynami w postaci sił oraz wymuszonych niezgodności geometrycznych. Problem ten będzie dyskutowany w rozdziale 2 pracy.

Konstrukcję dualności symetrycznych i antysymetrycznych stanów Ξ , ξ (rys. 0.7) można zastosować także do opisu wzajemnych oddziaływań dwu części ciała sprężystego rozdzielonych powierzchnią kontaktową S /rys. 3.1/. Wykorzystano ten fakt w rozważaniach rozdziału 3 definiując E i Σ jako przestrzenie stanów przemieszczeń oraz sił występujących na powierzchni S .

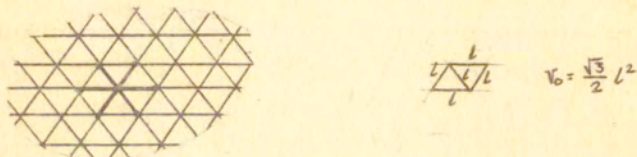
03. Dyskretne i kontynuualne modele wieloelementowych układów konstrukcyjnych

Zajmijmy się przykładem budowania kontynuualnego modelu struktury o danym opisie dyskretnym oraz możliwościami przejścia z jednego modelu do drugiego /rys. 0.8/



Rys. 0.8

Prześledzimy na wstępie /za pracą [99] sposób konstruowania modelu continuum zastępczego na przykładzie regularnej struktury prętowej /rys. 0.9/.



Rys. 0.9

Niech r_1, r_1' opisują wektory wodzące, wyznaczające punkty węzłowe sieci struktury prętowej. Zakładając, że pręty wykonane są z materiału Hocke'a, siłę w pręcie łączącym węzły r_1 i r_1' zdeformowanego układu można powiązać z przemieszczeniami węzłów r_1, r_1' związkami.

$$0.58 \quad R_j(r, r') = \Phi_{ji}^{rr'} (u_i(r') - u_i(r))$$

gdzie:

$$0.59 \quad \Phi_{ji}^{rr'} = \begin{cases} \frac{E^{rr'} A^{rr'}}{(l^{rr'})^3} (r_j' - r_j)(r_i' - r_i) & \text{dla } \Gamma, \Gamma' \text{ powiązanych prętem} \\ 0 & \text{dla pozostałych par węzłów} \end{cases}$$

$E^{rr'}, A^{rr'}, l^{rr'}$ - odpowiednio: moduł Younga, pole przekroju poprzecznego i długość pręta łączącego węzły Γ i Γ' .

Wewnętrzna energia sprężystą struktury można wyrazić wzorem:

$$0.60 \quad U = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} R_f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') (u_j(\mathbf{r}') - u_j(\mathbf{r})) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Phi_{ji}^{v\mathbf{r}\mathbf{r}'} (u_i(\mathbf{r}') - u_i(\mathbf{r})) (u_j(\mathbf{r}') - u_j(\mathbf{r}))$$

Można łatwo sprawdzić, że dla dowolnej, zdeformowanej /geometrycznie niezmiennej/ struktury wartość energii jest dodatnio określona /co oznacza stabilność układu/ ponieważ dla wszystkich prętów układu zachodzi $\frac{EA}{l} > 0$.

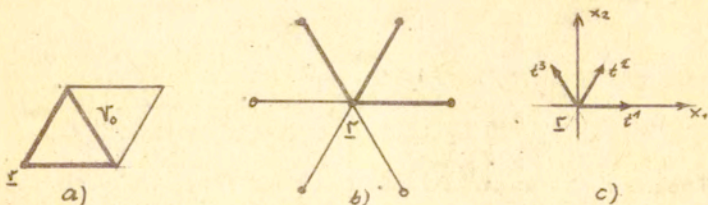
Znając postać energii wewnętrznej /0.60/, warunki podparcia konstrukcji oraz obciążenie zewnętrzne, można, stosując zasadę minimum energii potencjalnej, określić stan przemieszczeń węzłów, jaki zostanie w rzeczywistości osiągnięty. Traktujmy to rozwiązanie, jako ścisłe, lecz niewygodne w przypadku dużych struktur. Celem dalszych rozważań będzie konstrukcja modelu ciągłego opisującego nasz układ nie ściśle, lecz z odpowiednią dokładnością i wygodniejszego w stosowaniu pod różnymi względami od modelu dyskretnego.

Znając macierz oddziaływań /0.59/ struktury dyskretniej, można dobrać tensor sprężystości zastępczego, klasycznego continuum sprężystego kierując się kryterium, aby lokalna energia wewnętrzna w obszarze każdej podstawowej komórki struktury była dla tych samych deformacji jednorodnych identyczna odpowiednio dla opisu dyskretnego i kontynualnego. Poszukujemy zatem postaci tensora sprężystości C_{ijkl} continuum sprężystego takiej, aby energia obliczona w obszarze V_0 odpowiadającym podstawowej komórce struktury związana z deformacją jednorodną β_{ik} :

$$0.61 \quad U_{V_0} = \frac{1}{2} \int_{V_0} C_{ijkl} \beta_{ik} \beta_{jl} dv$$

była równa energii ustroju dyskretnego liczonej nad obszarem V_0 .

Z jednorodności cech mechanicznych struktury wynika, że tensor C_{ijkl} jest stały w całym obszarze.



Rys. 0.10

Przyjmijmy podstawową klatkę powtarzalną struktury jak na rys. 0.10a. Można zauważyć, że energia wewnętrzna w klatce podstawowej równa jest, w przypadku deformacji jednorodnej, połowie energii wewnętrznej związanej z gwiazdą połączeń wychodzących z węzła ξ /rys. 0.10b/. Mamy więc /por. (0.60)/:

$$/0.62/ \quad U_k = \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{I}} \Phi_{ji}^{rr'} (u_i(\xi) - u_i(r)) (u_j(\xi) - u_j(r))$$

Wyróżając energię /0.62/ poprzez składowe deformacji jednorodnej β_{ik} otrzymujemy:

$$/0.63/ \quad U_k = \frac{1}{2} \left[\sum_{j \in \mathcal{I}} \Phi_{ji}^{rr'} (r'_k - r_k) (v'_j - v_j) \right] \beta_{ik} \beta_{jL}$$

Porównując dwa przedstawienia /0.61/ i /0.63/ tej samej wartości U_k można określić tensor sprężystości poszukiwanego zastępczego continuum:

$$/0.64/ \quad C_{ijkl} = \frac{\rho}{\sqrt{V}} a \sum_{j=1,2,3} t_i^j t_j^k t_k^l t_l^j$$

gdzie parametr a opisuje jednorodne cechy sztywnościowe struktury:

$$/0.65/ \quad a = \frac{E^{rr'} A^{rr'}}{L^{rr'}}$$

zaś wektory t_i^j opisują wersory kierunkowe prętów /rys.0.10c/.

Tensor sprężystości struktury posiada oś symetrii 6-go rzędu, co w przypadku ośrodka płaskiego jest równoważne jego izotropii. Wykorzystując izotropię tensora C_{ijkl} oraz fakt, że spełnia on warunki symetrii Cauchy'ego względem permutacji wszystkich czterech wskaźników, można go zapisać w postaci:

$$/0.66/ \quad C_{ijkl} = \lambda (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

zapominając o strukturze wewnętrznej, stanowiącej punkt wyjścia do konstrukcji zastępczego modelu ciągłego.

Porównując /0.64/ i /0.66/ oraz przyjmując /rys. 0.10c/:

$$/0.67/ \quad \begin{aligned} t^1 &= [1, 0] \\ t^2 &= [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}] \\ t^3 &= [-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}] \end{aligned}$$

otrzymujemy stałe Lamé'go dla klasycznego continuum:

$$/0.68/ \quad \lambda = \mu = \frac{3}{4\sqrt{3}} a$$

Stałe materiałowe /0.68/ lub bardziej ogólnie /0.64/ zastępczego continuum sprężystego zdeterminowane są jednoznacznie przez geometrię i cechy sztywnościowe wyjściowej struktury dyskretnej. Można jednak dobrać wiele różnych struktur prętowych, o identycznych cechach zastępczego ośrodka ciągłego, co jest skutkiem zredukowania liczby parametrów określających badany układ do jednego.

Postać /0.64/ tensora cech materiałowych zastępczego continuum sprężystego jest zgodna z tą, jaka została wyprowadzona wcześniej /na innej drodze/ w pracach CZ. WOŹNIAKA /np [83] /.

Opisana wyżej konstrukcja kontynualnego modelu zastępczego posiada tę zaletę, że może być zastosowana także w przypadku struktur bardziej złożonych, o powiązaniach dalekozasięgowych [99] .

Drugą możliwością konstruowania ciągłego modelu zastępczego struktur dyskretnych daje zastosowanie modelu gradientowego [99] .

Dysponując formalnym przejściem z dyskretnego opisu struktury do jej modelu ciągłego mamy także możliwość odpowiedniego przetłumaczenia zagadnień dystorsji w układzie strukturalnym na zagadnienia dystorsji w continuum sprężystym. Ogólne rozwiązania tych zagadnień wygodniej jest prowadzić w modelu ciągłym, natomiast w celu wykonania obliczeń dla poszczegól-

nych przypadków wygodniej jest powrócić do opisu dyskretnego stosując np. numeryczne metody różnic bądź elementów skończonych /w przypadku dużych struktur/ lub zastosować bezpośrednio podejście dyskretne.

Problematyka dystorsji w continuum sprężystym posiada niezależnie od modelowania tych zagadnień w strukturach regularnych, bezpośrednio powiązania z licznymi problemami inżynierskimi, jak np. dystorsje termiczne lub plastyczne w dźwigarach powierzołniowych. Zadania obliczeniowe wiążą się w tych przypadkach z reguły z koniecznością przejścia z układu ciągłego do jego modelu dyskretnego /rys. 0.8/. To odwrotne przejście pomiędzy modelami może być dokonane /jak wyżej wspomniano/ na drodze metody elementów skończonych bądź stosując metodę modelowania np. układami prętowymi ośrodków ciągłych. Jak widać oba podejścia modelowe: ciągłe i dyskretne posiadają swe specyficzne zalety.

0.4. Optymalne sterowanie dystorsjami jako koncepcja uogólnionego sprężania

Zagadnienia dystorsji formułowane i dyskutowane będą początkowo dla jednofazowego układu wieloelementowego /np rys. 0.1 a,b,c/ bel elementów wyróżnionych a następnie uogólnione zostaną na przypadek dwufazowy /np rys. 0.1 f,g,h/, w którym ^{wyodróżnić} /można w sposób naturalny dwa oddziaływujące wzajemnie podukłady. Z tak ogólnego podejścia wyodrębniają się dwa szczególne sformułowania zagadnienia optymalnego sterowania dystorsjami prowadzące do różnych technik sprężania konstrukcji.

Pierwsze z nich, związane ze sterowaniem dystorsjami w celu optymalnej redystrybucji końcowych stanów naprężeń i odkształceń w jednofazowym układzie wieloelementowym stanowi nieklasyczne podejście do zagadnienia ^(sprężania i może być nazwane) sprężaniem wewnętrznym lub zwieraniem.

Można tu przytoczyć szereg prac omawiających szczególne zadania rozumianego w tym sensie sprężania układów prętowych [3, 15, 28, 37, 43, 54, 69, 74, 81, 88, 89].

Drugie sformułowanie, związane ze sterowaniem dystorsjami w celu optymalnej regulacji oddziaływania jednej z wybra-

nych faz /fazy sprężającej - np II/ na stany naprężeń i odkształceń w fazie drugiej /w fazie sprężanej - np I/ może być nazwane sprężaniem zewnętrznym /por. [24, 58, 2, 4, 6, 68]/. Klasyczne sprężanie ustrojów belkowych kablami może być rozpatrywane w ramach tego sformułowania.

Zaletą proponowanego podejścia jest zastosowanie w obu przypadkach jednolitej metody dyskusji zagadnień sprężania opartej o rozważania dotyczące stanów dystorsji. Sprężanie w rozumianym tu sensie jest pojęciem ogólniejszym od sprężania w sensie klasycznym, gdyż obejmuje zadania regulacji zarówno stanów naprężeń jak i odkształceń końcowych. W szczególności, beznaprężeniowa zmiana konfiguracji układu na skutek generacji geometrycznie zgodnego pola dystorsji nazywana będzie także sprężaniem, będąc w istocie regulacją kształtu wstępnego ustroju.

Prezentowane, uogólnione podejście do zagadnień sprężania daje w przypadku zagadnień klasycznych /np. rys. 0.1 h/ nie tylko rozkład stanów wstępnych \mathcal{S}, \mathcal{E} /por. np [4, 10, 11, 12, 14, 20, 24, 34, 38, 41, 42, 47, 52, 58, 72, 79, 80, 92, 93, 94] / lecz także bezpośredni sposób ich realizacji, czyli pole \mathcal{E} jakie należy wygenerować w konstrukcji w celu wywołania \mathcal{S}, \mathcal{E} . W podejściu klasycznym, inżynierską metodą wprowadzenia do ustroju ustalonego stanu naprężeń wstępnych jest niedogodne kolejne poprawianie naciągów kabli i sprawdzanie sił w nich występujących.

Dokonajmy na koniec przeglądu zadań optymalizacji sprężania dyskutowanych w pracy /por. § 0.2/. Z jednej strony omawiane będą zadania regulacji stanów naprężeń bądź deformacji końcowych w sensie minimalizacji globalnego wytężenia:

$$/0.69/ \quad \min \langle S, \vec{A} \rangle$$

bądź minimalizacji globalnej podatności

$$/0.70/ \quad \min \langle Ae, e \rangle$$

całego ustroju lub pewnej jego części.

Z drugiej strony omawiana będzie klasa zadań, w których ingerują w rozwiązanie warunki nierównościowe ograniczające dopuszczalne wartości lokalnych wyteżeń:

$$/0.71/ \quad \|\cdot\|_{\Sigma} \leq K^2$$

bądź podatności:

$$/0.72/ \quad \|\cdot\|_E \leq K^2,$$

gdzie $\|\cdot\|_{\Sigma}$ i $\|\cdot\|_E$ są normami typu supremum w przestrzeniach Σ i E .

W przypadku, gdy stany użytkowe ξ bądź ξ nie spełniają warunków /0.71/ bądź /0.72/, sformułowane zostanie zadanie optymalnego sprzężenia ze względu na zadość uczynienie warunkom /0.71/, bądź /0.72/ minimalnym kosztem wprowadzanych dystorsji:

$$/0.73/ \quad \min \langle \mathcal{R}\xi, \xi \rangle.$$

Warunek /0.73/ żąda minimalizacji zmian geometrii wyjściowej elementów sprzężanego układu. Funkcjonał kosztów $J_{\xi} = \langle \mathcal{R}\xi, \xi \rangle$ można przedstawić w postaci sumy:

$$/0.74/ \quad \langle \mathcal{R}\xi, \xi \rangle = \langle \mathcal{R}\xi, \xi \rangle + \langle \xi, \mathcal{I}\xi \rangle,$$

gdzie funkcyjonał $J_{\xi} = \langle \xi, \mathcal{I}\xi \rangle$ opisuje globalną miarę wyteżenia ustroju w stanie wstępnym /miarę pracy sprzężenia/ zaś funkcyjonał $J_{\xi} = \langle \mathcal{R}\xi, \xi \rangle$ opisuje globalną miarę podatności ustroju w stanie wstępnym /miarę beznapiętnowej zmiany konfiguracji wyjściowej ustroju/. Związek /0.74/ wynika z dualności stanów wstępnych ξ, ξ /przyjmujących postać /0.17// dyskutowanej w § 0.2.

Sterowanie dystorsjami ze względu na minimalizację funkcyjonału J_{ξ} :

$$/0.75/ \quad \min \langle \xi, \mathcal{I}\xi \rangle$$

przy ograniczeniach /0.71/ prowadzi do rozwiązania wieloznacznego /w stosunku do pól deformacji/ którego szczególnym przypadkiem jest pole dystorsji plastycznych, jakie generują się w strukturze o cechach sprężysto, idealnie plastycznych z warunkiem plastyczności /0.71/ /por. § 1.3/. Analogicznie, mini-

Realizacja funkcjonalu J_8 : $\boxed{/0.76/ \min \langle \mathcal{L}, \mathcal{E} \rangle}$ przy ograniczeniach /0.72/ prowadzi do rozwiązania wieloznacznego /w stosunku do pól naprężeń/, którego szczególnym przypadkiem jest pole dystorsji, jakie generują się w tzw. "Locking materials" [62, 64]. Pokażemy w pracy, że jeśli przyjmiemy możliwość wymuszania dystorsji w całym ustroju, to rozwiązanie zadania optymalnego sprężania /0.73/. /0.71/ związane jest z naprężeniami wstępnymi \mathcal{S} będącymi jednocześnie rozwiązaniem zadania teorii plastyczności /0.75/. /0.71/. Analogicznie, rozwiązanie zadania /0.73/ /0.72/ związane jest z odkształceniami wstępnymi \mathcal{E} będącymi jednocześnie rozwiązaniem zadania /0.76/. /0.72/.

Przypadek dopuszczenia możliwości wymuszania dystorsji we wszystkich elementach układu może mieć zastosowanie w strukturach, które po dokonaniu montażu poddawane są działaniu stałego obciążenia zewnętrznego. Jeśli jednak warunki pracy układu zmieniają się i istnieje potrzeba dostosowywania do nich sprężenia, korzystniejsze jest wymuszanie dystorsji w pewnej ograniczonej liczbie elementów /najczęściej określonych względami technologicznymi/.

W rozważaniach prowadzonych w modelu dyskretnym dopuścimy możliwość określania a priori zbioru elementów, w których generowane mogą być dystorsje /§ 4/. Istnieje możliwość uogólnienia sformułowania zadania włączając do grupy zmiennych decyzyjnych także identyfikatory elementów, w których generujemy dystorsje, jednak zrezygnowano z tego dla zachowania większej przejrzystości rozważań. Formalnie, wspomniany efekt można uzyskać dołączając do funkcji celu /0.73/ człon, który przybierać będzie pewną stałą wartość /koszt umożliwienia wywołania dystorsji w elemencie/ w przypadku, gdy w danym elemencie wprowadzane są dystorsje i znikać będzie w przypadku przeciwnym /§ 4.3/. Innym sposobem określania najkorzystniejszego zbioru elementów zwieranych /względem określonego obciążenia zewnętrznego/ jest rozwiązanie w pierwszym etapie zadania analizy sprężysto-plastycznej ustroju.

Elementy, w których wygenerowały się dystorsje plastyczne, należy przyjąć w drugim etapie zadania optymalnego sprężania jako zbiór, w którym dopuszczamy możliwość wymuszenia dystor-

sji. W ogólnym przypadku naprężenia wstępne σ uzyskane w omówionym zadaniu optymalnego sprężania są różne od naprężeń residualnych σ rozwiązania sprężysto plastycznego.

Można zauważyć, że jeśli struktura o cechach sprężysto-plastycznych może przenieść dane obciążenie zewnętrzne, to ustrój sprężysty, sprężony w myśl zadania /0.73/, /0.71/, także to obciążenie przeniesie. Podobne analogie można zauważyć pomiędzy sformułowaniami zadań /0.73/, /0.72/ oraz /0.76/, /0.72/.

Pozostawienie zbioru elementów zwieranych do arbitralnego określenia ma dodatkowe uzasadnienie w interesujących z inżynierskiego punktu widzenia zagadnieniach aktywnego sterowania dystorsjami /§ 6/, w których program obciążeń zewnętrznych /zmiennych w czasie/ nie jest a priori określony.

Układ dostrajający aktywnie dystorsje w określonych z góry elementach do zmian obciążenia zewnętrznego zachowuje się tak jak pewien hipotetyczny ustrój o nielokalnych cechach plastycznych /bądź "locking"/ dalekiego zasięgu, generujący dystorsje w określonych źródłach, na skutek przeciążenia odległych elementów układu.

0.5. Treść pracy

Pierwsza część pracy /§§ 1,2,3/ poświęcona jest zagadnieniom dystorsji w continuum sprężystym i posiada pewną autonomię podając szereg przykładów uzyskanych na drodze analitycznej.

Druga część pracy /§§ 4,5,6/ poświęcona jest zagadnieniom dystorsji w wieloelementowych układach prętowych oraz kompozytowych i wykorzystuje rozważania prowadzone poprzednio w modelu ciągłym. W części tej zaprezentowano w kilku przypadkach wykorzystanie metod komputerowych w rozwiązywaniu zagadnień dystorsji. W szczególności, opisany został program TIPS optymalnego sprężania wewnętrznego kratownicy.

Rozważania dotyczące zagadnień dystorsji w jednofazowym continuum sprężystym /§ 1/ stosowane są przy badaniu tych zagadnień w wieloelementowych układach prętowych /§ 4/
/por. § 0.2/.

Rozważania dotyczące zagadnień dystorsji w dwufazowym continuum sprężystym o przenikających się fazach /§ 2/ stosowane są przy badaniu tych zagadnień w układach kompozytowych /rys. 0.1 f/ takich jak ciągła matryca z aktywnym zbrojeniem siatką prętów lub wiązką kabli.

Rozdział 3 poświęcony jest zagadnieniom dystorsji w szczególnym continuum dwufazowym o fazach stykających się wzdłuż określonej powierzchni kontaktowej S /np. rys. 0.1 g/. Można tego typu ustroje traktować jako dwuelementowe układy konstrukcyjne i sprowadzając omawiane problemy do badania tego, co dzieje się na powierzchni kontaktowej S, otrzymać opis zagadnień dystorsji pomiędzy dwoma stykającymi się powierzchniami o odpowiednio zdefiniowanych nielokalnych własnościach fizycznych.

W rozdziałach 1-5 przyjęto, że ustrój poddawany jest działaniu jednego statycznego stanu obciążenia występującego wspólnie ze stanami dystorsji. Rozważania te można uogólnić na przypadek wielu stanów obciążeń a następnie na przypadek obciążeń dowolnie zmiennych w czasie. Rozdział 6 prezentuje koncepcję takiego uogólnienia formułując zagadnienia sprężenia aktywnego, przystosowującego konstrukcję do zmiennych w czasie warunków pracy.

W trakcie omawiania zagadnień sprężenia zaproponowano kilka sposobów /na dwa z nich uzyskano patenty/ wymuszenia dystorsji w konstrukcjach.

W pracy ograniczono się do zagadnień liniowo sprężystych i do małych odkształceń. Z założeń powyższych można zrezygnować, jednak upraszczając one rozważania, nie gubiąc istoty problemu.

Praca oparta jest głównie na publikacjach: [85, 86, 87, 88, 91, 96, 97, 104].

A. ZAGADNIENIA DYSTORSJI W CONTINUUM SPRĘŻYSTYM.

1. Dystorsje w ciele sprężystym.

Zagadnienia analizy stanów wstępnych wywoływanych przez dystorsje pierwotne w ośrodkach ciągłych rozwijane były przez różnych badaczy z trzech punktów widzenia: w kontekście dystorsji termicznych / np. [77, 56] / lub ich uogólnień [56, 57], w kontekście teorii defektów materiałów / np. [8, 21, 31, 33, 51, 55, 57, 71, 82, 84] / wreszcie w kontekście dystorsji plastycznych / np. [32, 30] /. Formułowane były także pewne koncepcje sterowania stanami dystorsji w celu optymalnej redystrybucji stanów naprężeń końcowych [76, 50].

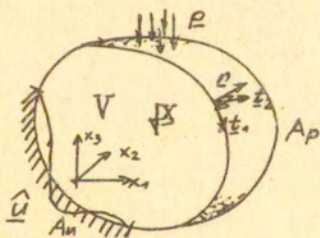
Rozdział ten poświęcony jest zagadnieniem analizy, identyfikacji i sterowania dystorsjami w jednofazowym continuum sprężystym. Posługując się dekompozycją stanów dystorsji na składowe zgodne z więzami statycznymi lub geometrycznymi /por. Wstęp/ otrzymuje się prostą interpretację problemów analizy i identyfikacji / § 1.2/. W rozdziale 1.3 omawiane jest, w różnych sformułowaniach, zagadnienie optymalnego sterowania dystorsjami. Otrzymywane tam wyniki mogą posłużyć jako rozwiązanie uzyskane w modelu ciągłym, do sprężania układów wieloelementowych. Mogą one jednak, po wprowadzeniu do rozwiązań dodatkowych więzów ograniczających dowolność dopuszczalnych pól dystorsji, stanowić przepis na sprężanie ośrodków ciągłych np. polem temperatury /co związane jest z ograniczeniem dystorsji do pól tensorów kulistych/. Rozumiane w tym sensie zagadnienia dystorsji skrępowanych dyskutowane są w rozdziale 1.4.

W rozważaniach ograniczono się do pól tensorowych, których składowe w układzie kartezjańskim x_i ($i=1, 2, 3$) są funkcjami klasy C^2 . Nie przeszkadza jednak to uogólnieniu rozważań na przypadek dystorsji skoncentrowanych w punkcie, wzdłuż linii, powierzchni,

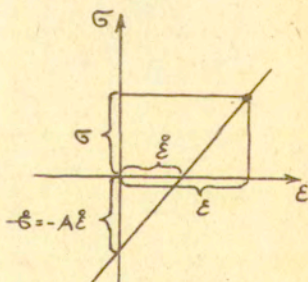
co ^{może} odpowiadać badaniu dyslokacji. Zadania dystorsji skoncentrowanych rozważane będą w rozdziałach 3.4.

1.1. Zależności podstawowe

Rozpatrujemy jednorodne ciało sprężyste zajmujące w R^3 obszar jednoczynny V ograniczony regularnym brzegiem A / rys. 1.1./ . Na obciążenie zewnętrzne /użytkowe/ ciała składa się obciążenie polem sił masowych \underline{X} w obszarze V , polem obciążeń brzegowych \underline{p} na części A_p brzegu oraz polem wymuszonych przemieszczeń \underline{u} na części A_u brzegu przy czym $A = A_p \cup A_u$. Przyjmijmy, że części A_p i A_u są obszarami jednoczynnymi na powierzchni A .



Rys.1.1



Rys.1.2

Powierzchnia brzegowa A ciała parametryzowana jest ortogonalnym układem współrzędnych, przy czym $\underline{t}_K / K = 1, 2 /$ są wersorami tego układu zaś \underline{n} jest wersorem zewnątrznie ortogonalnym do powierzchni.

Wstępny stan odkształcenia przedstawić można jako sumę wprowadzonych dystorsji pierwotnych i odkształceń związanych prawem Hooke'a z wywołanymi naprężeniami wstępnymi [56] :

$$1.1. \quad \underline{\underline{\epsilon}}^R = \underline{\underline{\epsilon}}^0 + \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{\sigma}}^R$$

skąd, definiując naprężenia pierwotne: $\underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\epsilon}}^0$ /por. rys. 1.2/ otrzymujemy związki konstytutywne stanów wstępnych:

$$1.2. \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^R &= \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{\epsilon}}^R - \underline{\underline{\epsilon}}^0) \\ \underline{\underline{\epsilon}}^R &= \underline{\underline{A}}^{-1} (\underline{\underline{\sigma}}^R + \underline{\underline{\sigma}}^0) \end{aligned}$$

Rozpatrując stany końcowe, będące superpozycją stanów wstępnych i użytkowych $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^R + \underline{\underline{\sigma}}^0$; $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^R + \underline{\underline{\epsilon}}^0$, otrzymujemy zmodyfikowane związki konstytutywne, uwzględniające wpływ stanów pierwotnych na redystrybucję stanów końcowych:

$$1.3. \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} &= \underline{\underline{A}} (\underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{\epsilon}}^0) \\ \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{A}}^{-1} (\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^0) \end{aligned}$$

Muszą być przy tym spełnione ograniczenia narzucone na końcowe pole naprężeń przez więzy statyczne (por. § 0.2).

$$1.4. \quad \mathcal{R}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathcal{R}(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{X}} & \text{w } V \\ \mathcal{R}(\underline{\underline{\sigma}}) = p & \text{na } A_p \end{cases}$$

$$1.5. \quad \begin{aligned} \text{div } \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{X}} &= 0 & \text{w obszarze } V \\ -\underline{\underline{\sigma}} \underline{n} &= p & \text{na brzegu } A_p \end{aligned}$$

Końcowe pole odkształceń $\underline{\varepsilon}$ musi natomiast czynić zadość więzom geometrycznym:

$$1.6. \quad C(\underline{\varepsilon}, \underline{u}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C(\underline{\varepsilon}) = 0 & \text{w } V \\ C(\underline{\varepsilon}) = \underline{u}_{,i} \delta_{ij} & \text{na } A_u \end{cases}$$

rozumianym jako związki geometrycznej zgodności deformacji z pewnym polem przemieszczeń u :

$$1.7 \quad \underline{\varepsilon} = \text{grad}^s u \quad \text{w } V$$

/gdzie $\text{grad}^s u$ - symetryczna część gradu/
przybierającym na brzegu A_u wartości

$$1.8 \quad u = \underline{u} \quad \text{na } A_u$$

Warunki obszarowe /1.7/ odpowiadają warunkom nierozdzielności odkształceń Saint-Venanta

$$1.9 \quad \text{rot rot } \underline{\varepsilon} = 0$$

Układ warunków /1.3/, /1.4/, /1.6/ pozwala nam opisać zagadnienie w odkształceniach, wstawiając /1.3/ do /1.4/:

$$1.10 \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}[A(\underline{\varepsilon} - \underline{\xi}), \underline{X}, \underline{p}] &= 0 \\ C(\underline{\varepsilon}, \underline{u}) &= 0 \end{aligned}$$

bądź w naprężeniach, wstawiając /1.3/ do /1.6/:

$$1.11 \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}(\underline{\sigma}, \underline{X}, \underline{p}) &= 0 \\ C[\underline{\sigma}(\underline{\varepsilon} + \underline{\xi}), \underline{u}] &= 0 \end{aligned}$$

Z postaci związków /1.10/, /1.5/ widać, że wpływ stanów pierwotnych na stan odkształceń końcowych wywołany jest niezgodnością dystorsji z więzami statycznymi i uwzględnić go można wprowadzając zmodyfikowane obciążenia zewnętrzne \underline{X}^* , \underline{p}^* przy traktowaniu ustroju jako pozbawionego stanów wstępnych [77, 56]:

$$1.12 \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}[A\underline{\varepsilon}, \underline{X}^*, \underline{p}^*] &= 0 \\ C(\underline{\varepsilon}, \underline{u}) &= 0 \end{aligned}$$

gdzie:

$$1.13 \quad \begin{aligned} \underline{X}^* &= \underline{X} - \operatorname{div} \underline{\underline{Q}} && \text{w } V \\ \underline{P}^* &= \underline{P} + \underline{\underline{Q}} \underline{n} && \text{na } A_p \end{aligned}$$

Z postaci związków /1.11/ widać, że wpływ stanów dystorsji na stan naprężeń końcowych wywołany jest niezgodnością pola dystorsji z więzami geometrycznymi /1.7/, /1.8/.

Jeśli istnieje takie pole $\underline{\underline{Q}}$, że:

$$1.14 \quad \begin{aligned} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{Q}} &= \operatorname{grad}^2 \underline{\underline{u}} && \text{w } V \\ \underline{\underline{Q}} &= \underline{\underline{0}} && \text{na } A_u \end{aligned}$$

to stan dystorsji nie wpływa na zmianę naprężeń w ustroju /nie wywołuje naprężeń wstępnych/.

Z postaci związków /1.11/, /1.9/ widać, że w obszarze nieograniczonym wpływ dystorsji na stan naprężeń wyrazić można poprzez tensor $\underline{\eta}$ niezgodności geometrycznej E. Krönera [33]:

$$1.15 \quad \underline{\eta} = - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\underline{E}}$$

Przytoczymy na zakończenie rozważań wyjściowych podstawowe zasady wariacyjne, minimum energii potencjalnej oraz minimum energii komplementarnej [56], z których skorzystamy w dalszych rozważaniach. Wprowadzając związki konstytutywne /1.3/ do równania zasady prac wirtualnych

$$1.16 \quad \int_V \underline{\underline{Q}} \delta \underline{\underline{E}} \, dV = \int_V \underline{X} \delta \underline{u} \, dV + \int_{A_p} p \delta u \, dA$$

gdzie $\delta \underline{\underline{E}}$, $\delta \underline{u}$ - pola odkształceń i przemieszczeń wirtualnych, wykazać można słuszność zasady minimum energii potencjalnej Π_E przy czym:

$$1.17 \quad \Pi_E = U_E(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{E}}) - \int_V \underline{X} \underline{u} \, dV - \int_{A_p} p u \, dA$$

$$U_E(\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{C}} A(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}) \, dV = \frac{1}{2} \int_V [(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}) A(\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}}) - \underline{\underline{E}} A \underline{\underline{E}}] \, dV$$

Warunki stacjonarności funkcjonału /1.17/' prowadzą, przy ustalonym polu $\underline{\xi}$ i polu przemieszczeń \underline{u} zgodnym z więzami geometrycznymi do równań równowagi /1.10/1.

Uwzględniając /1.3/'² w wyrażeniu na pracę sił wewnętrznych otrzymujemy zasadę minimum energii komplementarnej Π_G przy czym:

$$1.18 \quad \Pi_G = U_G(\underline{\xi}, \underline{\xi}) - \int_{A_p} p u dA$$

$$U_G(\underline{\xi}, \underline{\xi}) = \frac{1}{2} \int \underline{\xi} \underline{\Delta}^T (\underline{\xi} + \underline{\xi}) dV = \frac{1}{2} \int [\underline{\xi} \underline{\Delta}^T \underline{\xi} + \underline{\xi} \underline{\Delta}^T \underline{\xi}] dV$$

Warunki stacjonarności funkcjonału /1.18/' prowadzą przy ustalonym polu $\underline{\xi}$ i polu naprężeń $\underline{\xi}$ statycznie dopuszczalnym, spełniającym /1.4/, do równań /1.11/'².

1.2. Analiza stanów wstępnych. Identyfikacja pól dystorsji

Zbadamy w tym punkcie relacje pomiędzy stanami pierwotnymi /polami dystorsji/ a wywoływanymi przez nie stanami wstępnymi. Uzyskane tu rezultaty wynikają bezpośrednio z ogólnej teorii dystorsji w abstrakcyjnym ustroju mechanicznym /§ 0.2/ jednak prześledzimy wyprowadzenie ich na gruncie mechaniki continuum.

Związki wiążące stany pierwotne ze stanami wstępnymi, to równania konstytutywne /1.2/ oraz więzy /1.4/, /1.6/ /zapisane przy znikających stanach użytkowych/.

$$1.19 \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}(\underline{\xi}) &= 0 \\ \mathcal{C}(\underline{\xi}) &= 0 \end{aligned}$$

W celu głębszego przedyskutowania relacji pomiędzy tymi stanami wygodnie jest zdekomponować pole dystorsji na pewne dwie części składowe:

$$1.20 \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}_\mathcal{Q} + \underline{\xi}_\mathcal{C}$$

Okaże się, że część $\underline{\underline{E}}_R$ odpowiedzialna jest za wywoływane naprężenia wstępne $\underline{\underline{S}}^R$ zaś część $\underline{\underline{E}}_C$ za wywoływane odkształcenia wstępne $\underline{\underline{E}}^R$.

Przyjmijmy z definicji, że część $\underline{\underline{E}}_R$ wyznaczona jest przez związki:

$$\begin{aligned} 1.21 \quad & \mathcal{A}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}_R) = \underline{\underline{0}} \\ & C(\underline{\underline{E}}_R - \underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

zaś część $\underline{\underline{E}}_C$ wyznaczona jest przez związki:

$$\begin{aligned} 1.22. \quad & \mathcal{A}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}_C - \underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{0}} \\ & C(\underline{\underline{E}}_C) = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

Związki /1.21/ można napisać w postaci warunków /por. definicje warunków /1.4/. /1.6//:

$$\begin{aligned} 1.23 \quad & \operatorname{div}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}_R) = \underline{\underline{0}} \quad \text{w } V, \quad \underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}_R n = \underline{\underline{0}} \quad \text{na } A_p \\ & \underline{\underline{E}}_R - \underline{\underline{E}} = \operatorname{grad}^s \underline{\underline{U}}^R, \quad \text{w } V, \quad \underline{\underline{U}}^R = \underline{\underline{0}} \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

skąd wynika, że rozwiązanie $\underline{\underline{E}}_R$ jest zdefiniowane przez

$$1.24 \quad \underline{\underline{E}}_R = \underline{\underline{E}} + \operatorname{grad}^s \underline{\underline{U}}^R$$

przy czym przyjęte a priori pewne pole $\underline{\underline{U}}^R$ jest jednoznacznie wyznaczonym polem przemieszczeń dla następującego klasycznego zagadnienia brzegowego teorii sprężystości:

$$\begin{aligned} 1.25 \quad & \operatorname{div} \underline{\underline{A}} \operatorname{grad}^s \underline{\underline{U}}^R + \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{w } V \\ & \underline{\underline{A}} \operatorname{grad}^s \underline{\underline{U}}^R = -\underline{\underline{p}} \quad \text{na } A_p \\ & \underline{\underline{U}}^R = \underline{\underline{0}} \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

gdzie:

$$\underline{\underline{X}} = \operatorname{div} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{E}} \quad \underline{\underline{p}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{E}} n$$

Wynika to z podstawienia /1.24/ do /1.23/. Równoległe postępujące związki /1.22/ można rozpisać w postaci warunków:

$$\begin{aligned} 1.26 \quad & \operatorname{div}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}_C - \underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{0}} \quad \text{w } V, \quad (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}_C - \underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}) n = \underline{\underline{0}} \quad \text{na } A_p \\ & \underline{\underline{E}}_C = \operatorname{grad}^s \underline{\underline{U}}^R \quad \text{w } V, \quad \underline{\underline{U}}^R = \underline{\underline{0}} \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

skąd wynika, że rozwiązanie $\underline{\underline{E}}_C$ jest zdefiniowane jednoznacznie przez pewne przyjęte a priori pole

przemieszczeń $\underline{\xi}$ okazujące się być polem przemieszczeń dla następującego, klasycznego zagadnienia brzegowego teorii sprężystości:

$$\begin{aligned} \text{1.27} \quad \operatorname{div} (A \operatorname{grad}^s \underline{u}) - \underline{X} &= \underline{Q} \quad \text{w } V \\ A \operatorname{grad}^s \underline{u} &= \underline{\tilde{P}} \quad \text{na } A_p \\ \underline{u} &= \underline{Q} \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

Porównując zagadnienia /1.25/ i /1.27/ widać, że

$$\text{1.28} \quad \underline{u}' = -\underline{u}$$

Pokażemy, że suma jednoznacznie określonych składowych $\underline{\xi}_R$ i $\underline{\xi}_C$ daje całkowite pole dystorsji $\underline{\xi}$.

Dodając stronami układy związków /1.21/ i /1.22/ otrzymujemy

$$\text{1.29} \quad \operatorname{div} [A(\underline{\xi}_R + \underline{\xi}_C - \underline{\xi})] = \underline{Q} \quad \text{w } V, \quad A(\underline{\xi}_R + \underline{\xi}_C - \underline{\xi})_n = \underline{Q} \quad \text{na } A_p$$

$$\underline{\xi}_R + \underline{\xi}_C - \underline{\xi} = \operatorname{grad}^s(\underline{u}' + \underline{u}) \quad \text{w } V, \quad \underline{u}' + \underline{u} = \underline{Q} \quad \text{na } A_u$$

Ze względu na /1.28/ otrzymujemy z /1.29/ jednoznaczne rozwiązanie klasycznego zagadnienia brzegowego teorii sprężystości $\underline{\xi}_R + \underline{\xi}_C - \underline{\xi} = \underline{Q}$, skąd wynika teza /1.20/

Zatem p-okazano, że dowolne pole dystorsji można rozłożyć w sposób jednoznaczny na dwie części składowe /1.20/ zdefiniowane związkami /1.21/, /1.22/

Treść tego stwierdzenia można oczywiście wyrazić także w naprężeniach pierwotnych, mówiąc, że dowolne pole $\underline{\xi}$ można rozłożyć w sposób jednoznaczny na składowe:

$$\text{1.30} \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}_R + \underline{\xi}_C$$

gdzie:

$$\text{1.31} \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(\underline{\xi}_R) &= \underline{Q} \\ \mathcal{C}(\underline{\tilde{A}}^T \underline{\xi}_R - \underline{\tilde{A}}^T \underline{\xi}) &= \underline{Q} \end{aligned} \quad \text{1.32} \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(\underline{\xi}_C - \underline{\xi}) &= \underline{Q} \\ \mathcal{C}(\underline{\tilde{A}}^T \underline{\xi}_C) &= \underline{Q} \end{aligned}$$

przy czym: $\underline{\xi}_R = A \underline{\xi}_R$, $\underline{\xi}_C = A \underline{\xi}_C$

Wprowadzone rozkłady stanów /1.20/, /1.30/ definiują dekompozycje przestrzeni pierwotnych deformacji E^0 i naprężeń Σ^0 /por. /0.6// :

$$\begin{aligned} /1.33/ \quad E^0 &= E_{\mathcal{R}}^0 \oplus E_c^0 \\ \Sigma^0 &= \Sigma_{\mathcal{R}}^0 \oplus \Sigma_c^0 \end{aligned}$$

gdzie podprzestrzeń E_c^0 jest przestrzenią stanów $\underline{\xi}_c$ zaś podprzestrzeń $\Sigma_{\mathcal{R}}^0$ jest przestrzenią stanów $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}}$.

Dowolne pola $\underline{\xi}_{\mathcal{R}}$, $\underline{\xi}_c$ oraz $\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}}$, $\underline{\mathcal{S}}_c$ są ortogonalne w sensie ich iloczynów skalarnych:

$$/1.34/ \quad \int_V \underline{\xi}_{\mathcal{R}} \Delta \underline{\xi}_c \, dV \quad \text{oraz} \quad \int_V \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}} \bar{A} \underline{\mathcal{S}}_c \, dV$$

posiadających interpretację mechaniczną wewnętrżnej energii sprężystej w stanie pierwotnym, co odpowiada postulatowi /0.4/. /0.5/. /0.10/. Można to pokazać wyrażając $\underline{\xi}_c$ w przemieszczeniach /warunek /1.26/³/ następnie wykorzystując twierdzenie Ostrogrądzkiego o zamianie całki objętościowej na powierzchniową oraz biorąc w kołcu pod uwagę warunki /1.23/¹ i /1.26/⁴:

$$\int_V \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}} \underline{\xi}_c = \int_V \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}} \operatorname{grad}^s \underline{u} \, dV = \int_V \operatorname{grad}^s (\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}} \underline{u}) \, dV -$$

$$/1.35/ \quad - \int_V (\operatorname{div} \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}}) \underline{u} \, dV = \int_A (\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}} n) \underline{u} \, dA - \int_V (\operatorname{div} \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}}) \underline{u} \, dV = 0$$

Adeptyując związki /1.10/, /1.11/ do opisu stanów wstępnych /przyjmując znikające obciążenia zewnętrzne \underline{p} , \underline{q} , \underline{h} , a zatem i stany użytkowe $\underline{\xi}$, $\underline{\mathcal{S}}$ /a, następnie biorąc pod uwagę analogię otrzymanych zależności ze związkami /1.21/, /1.22/ można pokazać, że słuszny jest następujący wniosek.

Dowolne stany pierwotne $\underline{\xi} = \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}_c$ ($\underline{\mathcal{S}} = \underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}} + \underline{\mathcal{S}}_c$) związane są w sposób wzajemnie jednoznaczny z wywołanymi przez nie stanami wstępnymi /por. /0.17/ /:

$$\begin{aligned} /1.36/ \quad \underline{\xi} &= \underline{\xi}_c \\ \underline{\mathcal{S}} &= -\underline{\mathcal{S}}_{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

widać z powyższych związków, że analiza stanów wstępnych wywołanych przez określone pole dystorsji $\underline{\xi}$ sprowadza się do jego zdekomponowania na składowe $\underline{\xi}_R$ i $\underline{\xi}_C$. Wywoływane deformacje wstępne $\underline{\xi}^R$ pokrywają się ze składową $\underline{\xi}_C$ pola dystorsji zaś wywołwane naprężenia wstępne $\underline{\sigma}$ równe są składowej $\underline{\sigma}_R$ ze znakiem przeciwnym.

Z analitycznego punktu widzenia wyznaczenie składowej $\underline{\xi}_C$ wymaga rozwiązania zagadnienia brzegowego /1.25*/ sformułowanego w przestrzeniach z zastępczym, siłowym obciążeniem zewnętrznym. Znajdąc składową $\underline{\xi}_C$, znamy także $\underline{\xi}_R = \underline{\xi} - \underline{\xi}_C$ a zatem i $\underline{\sigma}$.

Problem identyfikacji stanów dystorsji $\underline{\xi}$ na podstawie znajomości stanów wstępnych $\underline{\xi}^R$, $\underline{\sigma}^R$ przez nie wywołanych jest zagadnieniem odwrotnym do analizy pól wstępnych i polega na odpowiednim złożeniu stanów: $\underline{\xi} = \underline{\xi}_R - \underline{A}^T \underline{\sigma}^R$. Omawiany tutaj jest najogólniejszy przypadek, gdy nie ma żadnych ograniczeń narzucanych na dowolność pól dystorsji. Stany wstępne $\underline{\xi}^R$, $\underline{\sigma}^R$ mogą być w tym przypadku traktowane jako niezależne, wywoływane przez niezależne składowe pola dystorsji $\underline{\xi}_R$ i $\underline{\xi}_C$. W przypadku ograniczenia dowolności pól dystorsji /np. do pól tensorowych kulistych dystorsji termicznych/ sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdyż dowolne pole dystorsji /poza przypadkami szczególnymi liniowego rozkładu temperatury/ wywołuje jednocześnie odkształcenie $\underline{\xi}^R$ i naprężenia $\underline{\sigma}^R$ wstępne, zaś części składowe $\underline{\xi}_R$ i $\underline{\xi}_C$ nie mieszczą się w zawężonej klasie pól dystorsji / $\underline{\xi}_R$ i $\underline{\xi}_C$ nie są polami tensorowymi kulistymi/. Z punktu widzenia zagadnienia identyfikacji daje to ciekawą możliwość rozważania problemów, w których na podstawie znajomości odkształceń wstępnych $\underline{\xi}^R$ /np. mierzonych na istniejącym układzie konstrukcyjnym/ zdolni jesteśmy określić /poprzez dystorsje $\underline{\xi}$ wywołujące $\underline{\xi}^R$ / także naprężenia wstępne $\underline{\sigma}^R$ im towarzyszące. Z inżynierskiego punktu widzenia przypadki te są szczególnie ważne, gdyż pozwalają na określenie naprężeń, których wyznaczenie z bezpośrednich pomiarów deformacji jest nie-żliwe.

Przypadkami tymi zajmiemy się w następnych rozdziałach.

Na zakończenie rozważań związanych z dekompozycją stanów dystorsji zwróćmy uwagę na pewne relacje pomiędzy stanami wstępnymi a stanami użytkowymi.

Zauważmy, że dowolny stan odkształceń użytkowych $\underline{\xi}^t$ można, analogicznie jak dystorsje, rozłożyć w sposób jednoznaczny na części $\underline{\xi}_R^t \in E_R^t$ oraz $\underline{\xi}_c^t \in E_c^t$ przy czym $\underline{\xi}^t = \underline{\xi}_R^t + \underline{\xi}_c^t$ /por. [107] rys.1.3/.

Zdefiniujmy w tym celu część $\underline{\xi}_R^t$ jako odkształcenia wywołane przemieszczeniami obciążeniem zewnętrznym:

$$1.37 \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}(\underline{A} \underline{\xi}_R^t) &= \underline{0} \\ C(\underline{\xi}_R^t, \underline{u}) &= \underline{0} \end{aligned}$$

zaś część $\underline{\xi}_c^t$ jako odkształcenia wywołane obciążeniem siłowym

$$1.38 \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}(\underline{A} \underline{\xi}_c^t, \underline{X}, \underline{p}) &= \underline{0} \\ C(\underline{\xi}_c^t) &= \underline{0} \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę powyższe zależności i /1.21/, /1.22/ wyrażone za pośrednictwem /1.36/ przez stany wstępne oraz wykonując przekształcenia /1.35/, można pokazać słuszność dwóch następujących wniosków: /por. [50]/.

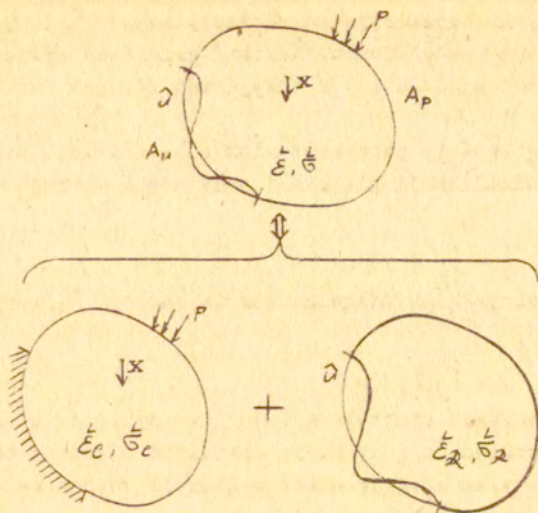
Dowolny stan odkształceń wstępnych $\underline{\xi}^R$ jest ortogonalny do dowolnego stanu $\underline{\xi}_R^t$ odkształceń użytkowych wywołanych ruchem podpór:

$$1.39 \quad \frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}^R \underline{A} \underline{\xi}_R^t dV = 0$$

Dowolny stan naprężeń wstępnych $\underline{\xi}^S$ jest ortogonalny do dowolnego stanu $\underline{\xi}_c^t$ naprężeń użytkowych wywołanych obciążeniem siłowym:

$$1.40 \quad \frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}^S \underline{A}^{-1} \underline{\xi}_c^t dV = 0$$

Wnioski te wynikają bezpośrednio z dualności przestrzeni E, Σ wprowadzonej przez formę biliniową /1.34/ oraz ze spełnienia postulatów /0.10/ /por. § 0.2 /.



Rys. 1.3.

1.3. Sterowanie polami dystorsji

W rozdziale tym przedyskutujemy zagadnienia sterowania optymalnego polami dystorsji $\underline{\xi}$ w celu uzyskania zamierzonej redystrybucji stanów końcowych $\underline{\xi}, \underline{\zeta}$.

Rozumiane w tym sensie sterowanie stanami pierwotnymi nazywamy sprzężaniem.

Rozwiązania zamieszczone w tym rozdziale mają charakter ogólny i nie wprowadzają żadnych ograniczeń co do dowolności pól dystorsji generowanych w ustroju.

W konkretnych realizacjach technicznych pojawia się często konieczność prowadzenia rozwiązań w pewnej zawężonej klasie stanów dystorsji, związanej z możliwościami wygenerowania odpowiednich pól $\underline{\xi}$. Pociąga to za sobą konieczność narzucenia na rozwiązanie dodatkowych

więzów, co zostanie przedyskutowane w różnych przypadkach szczególnych / np. dystorsje termiczne § 1.4/.

Dyskutowane będą różne sformułowania zagadnienia związane z różnymi celami sprężania / z przyjęciem różnych funkcji celu/.

W szczególności, jako kryterium optymalizacji można dyskutować minimalizację globalnej podatności ustroju J_{ε} przy czym:

$$1.41 \quad J_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon} \underline{A} \underline{\varepsilon} dV$$

bądź minimalizację globalnego wyciężenia ustroju J_{σ} przy czym:

$$1.42 \quad J_{\sigma} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} \underline{A}^{-1} \underline{\sigma} dV$$

Z inną odmianą sformułowań mamy do czynienia w przypadku, gdy narzucamy z góry koszt aprężania mierzony całką wyrażającą globalną energię stanu dystorsji /nazywaną dalej także energią sprężania/

$$1.43 \quad J_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon} \underline{\varepsilon} dV$$

żądając minimalizacji funkcjonałów /1.41/ bądź /1.42/. Funkcjonał /1.43/ można przedstawić /por. 0.74/ w postaci sumy dwu składników $J_{\varepsilon} = J_{\sigma} + J_{\varepsilon}^R$ gdzie $J_{\sigma} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon} \underline{A}^{-1} \underline{\varepsilon} dV$ opisuje globalną pracę wykonaną nad sprężeniem ustroju zaś $J_{\varepsilon}^R = \frac{1}{2} \int_V \underline{\varepsilon} \underline{A} \underline{\varepsilon} dV$ opisuje globalną miarę beznapięciowych zmian konfiguracji wyjściowej ciała. Suma /1.43/ obu składników wyraża koszt sprężania. Dwa pierwsze sformułowania okażą się szczególnymi przypadkami tych ostatnich.

W przypadku, gdy na pola końcowe $\underline{\varepsilon}$, $\underline{\sigma}$ narzucone są pewne nierównościowe ograniczenia stanów dopuszczalnych

$$1.44 \quad K(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}) \leq K_0$$

gdzie: $K(\underline{\varepsilon}, \underline{\sigma})$ - funkcja skalarna argumentów tensorowych
 K_0 - stały parametr w obszarze V ,

celowe jest jeszcze inne sformułowanie zagadnienia poszukując pól dystorsji, które powodują spełnienie warunku /1.44/ przy minimalnym koszcie sprężania wyrażonym funkcjonałem /1.43/. W szczególności, gdy $K = K(\underline{\xi})$ otrzymamy stąd przypadek sprężania ze względu na minimalizację pracy sprężania J_{ξ}^R /przy $\underline{\xi} = 0$ / zaś gdy $K = K(\underline{\xi})$, otrzymamy przypadek sprężania ze względu na minimalizację zmian konfiguracji wyjściowej ciała J_{ξ}^R /przy $\underline{\xi} = 0$ /. Minimalizacja funkcjonału /1.43/ przy ograniczeniach /1.44/ pozwala na sprężanie ustroju w przypadku, gdy jego nośność bez zastosowania tego zabiegu została wyczerpana. Wzrost nośności ustroju sprężonego może być bardzo znaczny i naturalne okaże się przejście do zagadnienia maksymalizacji tej nośności.

Wymienione odmiany zagadnień sprężania /opisane w [85, 97]/ przedyskutowane zostaną w kolejnych podrozdziałach 1.3.1÷1.3.3. Odpowiadają one sytuacji, gdy dysponując techniczną możliwością wymuszania w ustroju pól dystorsji istnieje sposób na korzystną redystrybucję stanów końcowych /por. § 1.4. 4/.

Za pierwsze prace analizujące różne odmiany zagadnień sprężania / w powyższym rozumieniu/ w continuum sprężystym można uważać artykuły: [76, 50, 85, 97, 105].

1.3.1. Sprężanie ze względu na minimalizację globalnej podatności i globalnego wyczerpania ustroju.

Określimy stany pierwotne minimalizujące globalną podatność ustroju /1.41/.

Ponieważ pole odkształceń użytkowych można rozłożyć jednoznacznie na części składowe /1.37/, /1.38/ : $\underline{\xi}^t = \underline{\xi}^t_R + \underline{\xi}^t_C$ zaś pole odkształceń wstępnych jest postaci /1.36/ $\underline{\xi}^e = \underline{\xi}^e_C$, więc korzystając z wniosku /1.39/ funkcjonał podatności /1.41/ dla stanów końcowych $\underline{\xi} = \underline{\xi}^R + \underline{\xi}^e$ można przedstawić w postaci sumy:

$$1.45 \quad J_{\xi} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}^t_A \underline{\xi}^t_A dV + \frac{1}{2} \int_V (\underline{\xi}^e + \underline{\xi}^e_C) \underline{\xi}^e (\underline{\xi}^e + \underline{\xi}^e_C) dV$$

Ponieważ wariacji podlega jedynie składnik drugi, który jest wyrażeniem dodatnio określonym, zatem $\min J_{\xi}$ uzyskujemy przyjmując (por. (0.19)):

$$1.46 \quad \underline{\xi}_c = -\dot{\xi}_c$$

Rozwiązanie to jest wieloznaczne, wyznaczone z dokładnością do części składowej $\underline{\xi}_2$ i równoważne znikaniu zmodyfikowanego obciążenia zewnętrznego \underline{X}^* , $\underline{\beta}^*$ (1.13), co wynika z porównania definicji części $\underline{\xi}_c$ /1.38/ oraz związków określających końcowy stan odkształcenia /1.12/, /1.13/.

Określmy stany pierwotne minimalizujące globalne wyciężenie ustroju /1.42/.

Ponieważ pole naprężeń użytkowych można rozłożyć jednoznacznie na części składowe /1.37/, /1.38/: $\underline{\xi} = \underline{\xi}_2 + \underline{\xi}_c$ zaś pole naprężeń wstępnych jest postaci /1.36/ $\underline{\xi} = -\underline{\xi}_2$ więc korzystając z wniosku /1.40/ funkcjonal wyciężenia /1.42/ dla stanów końcowych $\underline{\xi} = \underline{\xi} + \underline{\xi}$ można przedstawić w postaci

$$1.47 \quad J_{\xi} = \frac{1}{2} \int_V (\underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_2) \bar{A}^1 (\underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_2) dV + \frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}_c \bar{A}^1 \underline{\xi}_c dV$$

Ponieważ wariacji podlega jedynie składnik pierwszy, który jest wyrażeniem dodatnio określonym, zatem $\min J_{\xi}$ uzyskujemy przyjmując (por. (0.20)):

$$1.48 \quad \underline{\xi}_2 = \underline{\xi}_2$$

Rozwiązanie to jest wieloznaczne, wyznaczone z dokładnością do części $\underline{\xi}_c$ i związane ze znikaniem zmodyfikowanego tensora niezgodności geometrycznej $\underline{\rho}$:

$$1.49 \quad \underline{\rho} = 0$$

co wynika z porównania definicji części $\underline{\xi}_2$ /1.37/ ze związkami określającymi końcowy stan naprężenia /1.11/ oraz z definicją /1.15/

Ponieważ zarówno rozwiązanie /1.46/ minimalizujące globalną podatność ustroju / $\min J_{\varepsilon}$ / jak i rozwiązanie /1.48/ minimalizujące globalne wytężenie / $\min J_{\sigma}$ / wyznaczone są z dokładnością do części składowych odpowiednio: $\underline{\xi}_{\mathcal{R}}$ i $\underline{\xi}_{\mathcal{C}}$, można poszukiwać pól $\underline{\xi}$ spośród opisanych rozwiązaniem /1.46/ i minimalizujących dodatkowo globalne wytężenie ustroju / $\min J_{\varepsilon} J_{\sigma}$ / oraz pól $\underline{\xi}$ spośród opisanych rozwiązaniem /1.48/ i minimalizujących dodatkowo globalną podatność / $\min J_{\sigma} J_{\varepsilon}$ /. W obu przypadkach uzyskuje się jednakowe rozwiązanie jednoznaczne:

$$1.50 \quad \underline{\xi} = \underline{\xi}_{\mathcal{R}} - \underline{\xi}_{\mathcal{C}}$$

Można powiedzieć, że dwa kryteria dwustopniowe rozumiane w powyżej wyjaśnionym sensie są równoważne: $\min J_{\varepsilon} J_{\sigma} \Leftrightarrow \min J_{\sigma} J_{\varepsilon}$.

Z otrzymanych rozwiązań /1.46/, /1.48/, /1.50/ wynika, że możliwe jest osiągnięcie przez sprzężenie wewnętrzne następujących korzystnych konstrukcyjnie efektów: zredukowanie do zera części stanu odkształcenia wywołanej siłowymi obciążeniami zewnętrznymi \underline{X} , \underline{p} oraz zredukowanie do zera stanu naprężenia wywołanego przemieszczeniami \underline{u} części brzegu A_u .

W przypadku szczególnym, gdy nie występują przemieszczenia podpór / $\underline{u} = 0$ / na części brzegu A_u , część $\underline{\xi}_{\mathcal{R}} = 0$ /por. /1.37//, a zatem rozwiązaniem /1.50/ zagadnienia $\min J_{\sigma} J_{\varepsilon}$ jest pole dystorsji /1.46/ $\underline{\xi} = -\underline{\xi}_{\mathcal{C}}$, które redukuje co prawda pole odkształceń do zera lecz nie zmienia globalnego wytężenia ustroju /1.42/, co wynika z wniosku /1.40/.

W przypadku szczególnym, gdy nie występują obciążenia siłowe / $\underline{X} = 0$, $\underline{p} = 0$ /, część $\underline{\xi}_{\mathcal{C}} = 0$ /por. /1.38//, a zatem rozwiązaniem /1.50/ zagadnienia $\min J_{\varepsilon} J_{\sigma}$ jest pole dystorsji /1.48/ $\underline{\xi} = \underline{\xi}_{\mathcal{R}}$, które redukuje co prawda pole naprężeń do zera lecz nie zmienia globalnej podatności ustroju /1.41/, co wynika z wniosku /1.39/.

Rozwiązania /1.46/, /1.48/, /1.50/ można także uzyskać na drodze rachunku wariacyjnego, minimalizując funkcjonały zastępcze powstałe z dodania do funkcjonałów /1.41/ bądź /1.42/ warunków /1.4/, /1.6/ mnożonych przez współczynniki Lagrange'a [91].

Trzecią drogą uzyskania rozwiązań /1.46/, /1.48/ jest poszukiwanie minimum energii potencjalnej Π_{ξ} /1.17/ dopuszczając wariacje stanów pierwotnych $\underline{\xi}$ oraz poszukiwanie minimum energii komplementarnej Π_{ζ} /1.18/ dopuszczając wariacje stanów pierwotnych $\underline{\zeta}$ [91].

1.3.2. Optymalne rozprowadzanie pól dystorsji przy określonym koszcie sprężania

Rozwiązania optymalne /1.46/, /1.48/ dyskutowane w poprzednim paragrafie związane są z kosztem sprężania mierzonym całką /1.43/ wynoszącym odpowiednio: $J_{\xi}^c =$

$$\frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}^c A \underline{\xi}^c dV \text{ oraz } J_{\xi}^R = \frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}^R \underline{A} \underline{\xi}^R dV.$$

Rozważmy problem optymalnego sprężania w celu zminimalizowania globalnej podatności ustroju /min J_{ξ} / przy danym koszcie J_{ξ}^c :

$$1.51 \quad J_{\xi} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}^c A \underline{\xi}^c dV = c^c \leq J_{\xi}^c$$

oraz dualnie, problem sprężania w celu zminimalizowania globalnego wytężenia /min J_{ξ} / przy danym koszcie J_{ξ}^c :

$$1.52 \quad J_{\xi}^c = \frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}^c \underline{A} \underline{\xi}^c dV = c^R \leq J_{\xi}^R$$

Ponieważ wartość funkcjonału /1.41/ jest wrażliwa jedynie na część $\underline{\xi}^c$ pola dystorsji, więc podstawiając $\underline{\xi}^c = \underline{\xi}^R$, pierwsze zadanie można sprowadzić do problemu minimalizacji funkcjonału

$$1.53 \quad \frac{1}{2} \int_V (\underline{\xi}^R + \underline{\xi}^c) A (\underline{\xi}^R + \underline{\xi}^c) dV$$

przy ograniczeniach /1.20/ oraz:

$$1.54 \quad \frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}^R A \underline{\xi}^R dV = c^c$$

Zadanie jest opisywane z dokładnością do części $\underline{\xi}_c$ pola dystorsji.

Można pokazać [97, 23], że warunki stacjonarności dla sprecyzowanego wyżej zadania izoperymetrycznego odpowiada ją znikaniu wariacji funkcjonału /1.53/ uogólnionego o człony związane z ograniczeniami /1.54/, /1.19²/:

$$1.55 \quad J(F_1(\underline{U}^B), \psi F_2(\underline{U}^B), \int_{Au} F_3(\underline{U}^B)) = \int_V \left\{ \frac{1}{2} (\text{grad}^3 \underline{U}^B + \underline{\xi}_c) A (\text{grad}^3 \underline{U}^B + \underline{\xi}_c) + \psi \left(\frac{1}{2} \text{grad}^3 \underline{U}^B A \text{grad}^3 \underline{U}^B \right) \right\} dV + \int_{Au} \underline{U}^B \int dA$$

gdzie: \int - współczynniki Lagrange'a, ψ - stała wyznaczana z warunku /1.54/

Wariację funkcjonału /1.55/ można wypisać [91 str. 459] w postaci:

$$1.56 \quad \delta J = \int_V -\text{div} (F_1 + \psi F_2), \text{grad}^3 \underline{U}^B \delta \underline{U}^B dV + \int_A (F_1 + \psi F_2), \text{grad}^3 \underline{U}^B \delta \underline{U}^B dA + \int_{Au} (F_3, \int \int \delta \underline{U}^B + F_3 \delta \int) dA$$

zaś warunki jej znikania/dla dowolnych $\delta \underline{U}^B, \delta \int$ / prowadzą do:

$$1.57 \quad \begin{aligned} \text{div} A [(1+\psi) \text{grad}^3 \underline{U}^B - \underline{\xi}_c] &= 0 \\ \underline{A} [(1+\psi) \text{grad}^3 \underline{U}^B - \underline{\xi}_c] \underline{n} &= 0 \quad \text{na } A_p \\ \underline{A} [(1+\psi) \text{grad}^3 \underline{U}^B + \underline{\xi}_c] \underline{n} + \int &= 0 \quad \text{na } A_u \\ \underline{U}^B &= 0 \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

Dopisując związek /1.54/ otrzymujemy warunki stacjonarności, które wyznaczają jednoznaczne rozwiązanie składowej $\underline{\xi}_c$:

$$1.58 \quad \underline{\xi}_c^R = \underline{\xi}_c^0 = - \frac{1}{1+\psi} \underline{\xi}_c^L$$

gdzie:

$$1.59 \quad \frac{1}{1+\psi} = \sqrt{\frac{c^c}{\frac{1}{2} \int_V \underline{\xi}_c^L A \underline{\xi}_c^L dV}}$$

jest stałym parametrem z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

Zwróćmy uwagę, że lokalna podatność $W_{\underline{\xi}_c^R} = \frac{1}{2} \underline{\xi}_c^R A \underline{\xi}_c^R$ ciała w stanie wstępnym związana jest z lokalną podatnością w stanie użytkowym $W_{\underline{\xi}_c^L} = \frac{1}{2} \underline{\xi}_c^L A \underline{\xi}_c^L$ zależnością:

$$W_{\underline{\xi}_c^R} = \left(\frac{1}{1+\psi} \right)^2 W_{\underline{\xi}_c^L}$$

Ze względu na wypukłość funkcji podcałkowej /1.53/ dla dowolnych stanów deformacji, rozwiązanie /1.58/ spełnia warunki konieczne i dostateczne warunkowego minimum funkcjonału /1.53/.

Analogicznie, rozważając drugie z wymienionych zadań przyjmijmy, że $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_R = -\underline{\sigma}$, na którą to jedynie część pola pierwotnego jest wrażliwy funkcjonał /1.42/. Problem sprowadza się do minimalizacji funkcjonału:

$$1.60 \quad \frac{1}{2} \int_V (\underline{\sigma} + \underline{\sigma}_R) \bar{A} (\underline{\sigma} + \underline{\sigma}_R) dV$$

przy ograniczeniach /1.20/ i oraz

$$1.61 \quad \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma} \bar{A} \underline{\sigma} dV = C^c$$

Zadanie jest opisywane z dokładnością do części $\underline{\sigma}^c$ pola dystorsji.

Można pokazać analogicznie postępując, że jednoznaczne rozwiązanie rozważanego zadania izoperymetrycznego przyjmuje postać

$$1.62 \quad \underline{\sigma} = -\underline{\sigma}_R = -\frac{1}{1+\nu} \underline{\sigma}_R$$

gdzie:

$$1.63 \quad \frac{1}{1+\nu} = \sqrt{\frac{C^c}{\frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}_R \bar{A} \underline{\sigma}_R dV}}$$

jest stałym parametrem z przedziału $\langle 0, 1 \rangle$.

W przypadku gdy $C^c = J_E^c$ albo $C^c = J_E^c$ otrzymujemy odpowiednio rozwiązanie /1.46/ ze związków /1.58/, /1.59/ albo /1.48/ ze związków /1.62/, /1.63/.

Widać, że oba rozwiązania /1.58/ i /1.62/ związane są z proporcjonalnym zmniejszeniem w całym obszarze odpowiednio pól odkształceń i naprężeń końcowych w stosunku $(1 - \frac{1}{1+\nu})$ do pól odkształceń i naprężeń użytkowych.

Przyjęcie ujemnych wartości parametrów $\frac{1}{1+\nu}$ /związki /1.59/, /1.63//prowadzi odpowiednio do maksymalizacji globalnych podatności J_E i wyciężenia J_S ustroju.

1.3.3. Sprężanie ze względu na spełnianie minimalnym kosztem nierównościowych ograniczeń stanów końcowych.

Weźmy pod uwagę nierówność /1.41/ ograniczającą wartości dopuszczalne stanu naprężenia w omawianym ustroju

$$1.64 \quad K(\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}) \leq K_0^2$$

Niech warunek $K(\underline{\underline{\sigma}}) = K_0^2$ przedstawia w przestrzeni naprężeń powierzchnię gładką i wypukłą, otaczającą początek układu /np. warunek wyężeniowy $\underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{\sigma}} = K_0^2$ /.

Jeśli stan naprężeń użytkowych $\underline{\underline{\sigma}}$ nie spełnia tych ograniczeń, to zakładając, że istnieją stany wstępne prowadzące naprężenia końcowe $\underline{\underline{\sigma}}$ do stanu spełniającego /1.64/ osiągniemy ten efekt najmniejszym kosztem /1.43/

W przypadku, gdy mamy do czynienia z jednym stanem obciążeń zewnętrznych, narastającym równocześnie z polem dystorsji, narzucenie ograniczenia /1.64/ jedynie na stan końcowy $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}$ jest wystarczające. W przeciwnym razie należy dołączyć ograniczenia związane z innymi, możliwymi stanami. Łącznie, warunki te opiszą pewien obszar dopuszczalny dla poszukiwanych naprężeń wstępnych $\underline{\underline{\sigma}}$.

Ze względu na polarność stanów $\underline{\underline{\sigma}}_c, \underline{\underline{\sigma}}_d$ funkcjonal kosztów sprężania /1.43/ można zapisać w postaci (0.74):

$$1.65 \quad \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}_c^T \underline{\underline{\sigma}}_c dV + \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}_d^T \underline{\underline{\sigma}}_d dV \stackrel{df}{=} J_c^R + J_d^R$$

Ponieważ część składowa $\underline{\underline{\sigma}}_c$ pola dystorsji nie ma wpływu na regulację pola naprężeń, więc zagadnienie nasze prowadzi do znikających odkształceń wstępnych $\underline{\underline{\sigma}}_c^R = \underline{\underline{\sigma}}_c = 0$, oraz do minimalizacji / po podstawieniu $\underline{\underline{\sigma}}_d^R = -\underline{\underline{\sigma}}_d$ / globalnego wyężenia ustroju w stanie wstępnym J_d^R :

$$1.66 \quad J_d^R = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{\sigma}} dV$$

przy warunkach ograniczających /1.19/², /1.64/.

Konstruując funkcjonal zastępczy, wzbogacony o człony związane z ograniczeniami /1.19/, /1.64/ otrzymujemy:

$$1.67 \quad J(\underline{S}, \lambda, \psi) = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \underline{S} \underline{A}^{-1} \underline{S} + \lambda \operatorname{div} \underline{S} + \psi [K(\underline{S} + \underline{k}) - K_0^2] \right\} dV \\ = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \underline{S} \underline{A}^{-1} \underline{S} - \operatorname{grad}^* \lambda \underline{S} + \psi [K(\underline{S} + \underline{k}) - K_0^2] \right\} dV + \int_A \lambda \underline{S} \underline{n} dA + \\ + \int_{A_p} \lambda \underline{S} \underline{n} dA + \int_V F_1(\underline{S}, \lambda, \psi) dV + \int_{A_u} F_2(\underline{S}, \lambda) dA + \int_{A_p} 2 F_2(\underline{S}, \lambda) dA$$

gdzie λ, ψ - wektorowy i skalarny współczynnik Lagrange'a.

W przekształceniu /1.67/ skorzystano z zależności

$$1.68 \quad \lambda \operatorname{div} \underline{S} = \operatorname{div}(\lambda \underline{S}) - \operatorname{grad}^* \lambda \underline{S}$$

oraz z twierdzenia Ostrogradskiego o zamianie całki objętościowej na powierzchniową.

Warunkiem koniecznym minimum warunkowego /1.66/ przy ograniczeniach /1.19/ /1.64/ jest spełnienie

warunków koniecznych punktu siodłowego /typu $\min_{\underline{S}, \lambda} \max_{\psi}$ funkcjonalu /1.67/ [1,35, 111].

Wariację funkcjonalu /1.67/ można wypisać

[91 str. 459] w postaci:

$$1.69 \quad \delta J = \int_V [F_{1,\underline{S}} \delta \underline{S} - \operatorname{div} F_{1,\operatorname{grad}^* \lambda} \delta \lambda + F_{1,\psi} \delta \psi] dV + \int_{A_u} [(F_{1,\operatorname{grad}^* \lambda} \delta \lambda + F_{2,\lambda} \delta \lambda + F_{2,\underline{S}} \delta \underline{S})] dA + \int_{A_p} [(F_{1,\operatorname{grad}^* \lambda} \delta \lambda + 2 F_{2,\lambda} \delta \lambda + 2 F_{2,\underline{S}} \delta \underline{S})] dA$$

Zatem warunki konieczne punktu siodłowego przyjmują postać: [1,35]

$$1.70 \quad F_{1,\underline{S}} = \underline{A}^{-1} \underline{S} - \operatorname{grad}^* \lambda + \psi \frac{\partial K(\underline{S} + \underline{k})}{\partial (\underline{S} + \underline{k})} = 0, \quad \operatorname{div} F_{1,\operatorname{grad}^* \lambda} = \operatorname{div} \underline{S} = 0 \\ F_{1,\psi} = K(\underline{S} + \underline{k}) - K_0^2 \leq 0, \quad \psi F_{1,\psi} = \psi [K(\underline{S} + \underline{k}) - K_0^2] = 0 \\ \psi \geq 0$$

w obszarze V z żądaniem znikania sumy całki powierzchniowych:

$$1.71 \quad \int_{A_u} \lambda \underline{n} \delta \underline{S} dA + \int_{A_p} (\underline{S} \underline{n} \delta \lambda + 2 \lambda \underline{n} \delta \underline{S}) dA = 0$$

co prowadzi /dla dowolnych wariacji $\delta \lambda, \delta \underline{S}$ / do warunków brzegowych:

$$1.72 \quad \begin{array}{l} \underline{\xi}^R = 0 \quad \text{na } A_p \\ \underline{\lambda} = 0 \quad \text{na } A_u \end{array}$$

Ze względu na wypukłość funkcji podcałkowej /1.66/ oraz powierzchni ograniczającej $K(\underline{\xi})$, warunki /1.70/, /1.72/ są warunkami koniecznymi i dostatecznymi minimum warunkowego funkcjonału /1.66/

Interpretując pole $\psi \frac{\partial K(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}}$ jako pole dystorsji /por. zależności podstawowe /1.1/, /1.19// oraz analizując związki /1.70/^{1,2}, /1.72/ zgodnie z treścią twierdzenia o rozkładzie pól dystorsji /1.20/ widać, że stany $\underline{A}^R \underline{\xi}^R$ oraz $\text{grad}^s \underline{\lambda}$ stanowią składowe:

$$1.73 \quad \underline{\xi}^0 = \psi \frac{\partial K(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} = \left[\psi \frac{\partial K(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} \right]_c + \left[\psi \frac{\partial K(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} \right]_{\mathcal{A}} = \text{grad}^s \underline{\lambda} - \underline{A}^R \underline{\xi}^R$$

spełniające odpowiednio warunki nierozdzielności

$C(\text{grad}^s \underline{\lambda}) = 0$ oraz samozrównoważenia $\mathcal{A}(\underline{\xi}^0) = 0$.

Wynika stąd: $\underline{\xi}^R = \text{grad}^s \underline{\lambda}$.

Ponieważ deformacje wstępne $\underline{\xi}^R$ znikają /por. dyskusja funkcjonału /1.65// zatem poszukiwane rozwiązanie optymalnego sprzężenia przyjmuje postać:

$$1.74 \quad \underline{\xi}^R = \underline{\xi}^0 = \left[\psi \frac{\partial K(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} \right]_c = 0$$

$$\underline{\xi}^R = -\underline{\xi}^0_{\mathcal{A}} = -A \left[\psi \frac{\partial K(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} \right]_{\mathcal{A}}$$

$$\psi [K(\underline{\xi}) - K_0^2] = 0$$

$$[K(\underline{\xi}) - K_0^2] \leq 0$$

$$\psi \geq 0$$

gdzie:

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}^0 + \underline{\xi}^R$$

Zauważmy, że wprowadzając do ustroju dodatkowo składową $\underline{\underline{\xi}}_c$ pola dystorsji

$$1.75 \quad \underline{\underline{\xi}}_c = \left[\psi \frac{\partial K(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \right]_c = \underline{\underline{\xi}}^R$$

stany końcowe $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\xi}}$ w ustroju opisywane są przez związki

$$1.76 \quad \underline{\underline{\sigma}} = A(\underline{\underline{\xi}} - \psi \frac{\partial K(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}})$$

$$\psi [K(\underline{\underline{\sigma}}) - K_0^2] = 0$$

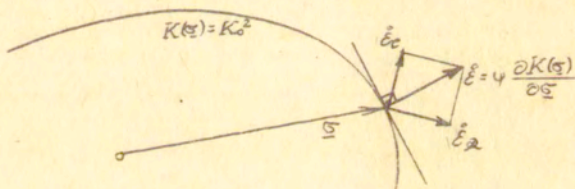
$$K(\underline{\underline{\sigma}}) - K_0^2 \leq 0$$

$$\psi \geq 0$$

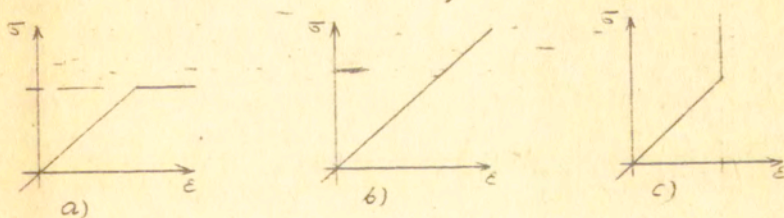
$$\mathcal{R}(\underline{\underline{\sigma}}, X, p) = 0$$

$$C(\underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\sigma}}) = 0$$

Pole dystorsji $\underline{\underline{\xi}} = \psi \frac{\partial K(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ charakteryzowane jest przez skalarny współczynnik $\psi = \frac{1}{2} \frac{\underline{\underline{\xi}}_A \underline{\underline{\xi}}}{K_0^2}$ określający lokalny, ^{względny} koszt sprężania oraz przez tensor $\frac{\partial K(\underline{\underline{\sigma}})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$ określający lokalny rozkład dystorsji normalnie do powierzchni ograniczającej $K(\underline{\underline{\sigma}}) = K_0^2$ /rys.1.4/



Rys.1.4



Rys. 1.5

Jeśli równanie $K(\underline{\varepsilon}) = K_c^2$ opisuje warunek plastyczności dla danego materiału, to układ /1.61/ przedstawia związki teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych Hencky'ego - Nádai'a [53,59].

Można sformułować ogólny wniosek, że sprężając minimalnym kosztem ustroje sprężyste ze względu na spełnienie ograniczeń $K(\underline{\varepsilon}) \leq K_c^2$ /rozwiązanie /1.59//uzyskujemy rozkłady naprężeń takie, jak dla ustroju o cechach sprężysto-plastycznych /1.61/ rys. 1.5/a, ~~rys. 1.5/a~~ oraz rozkłady odkształceń takie, jak dla ustroju o cechach sprężystych /rys. 1.5/b. Należy nadmienić, że spełnienie warunku minimalizacji "fikcyjnej energii residualnej" /1.57/ przez stany wstępne odkształceniowej teorii plastyczności postulowali Prager i Symonds [66], oraz, że twierdzenie Melana [44] daje możliwość określenia warunków dostatecznych istnienia poszukiwanych sprężeń optymalnych. Z punktu widzenia zagadnień sprężania można traktować ustroje o cechach sprężysto-plastycznych jako takie, które posiadają naturalną zdolność samosprężania ze względu na spełnienie ograniczeń /1.55/. Jednak koszt samosprężania przez generowanie dystorsji plastycznych jest większy o

$$\frac{1}{V} \int_V \dot{\varepsilon}_c A \dot{\varepsilon}_c dV \quad \text{od kosztu sprężania optymalnego /1.59/.$$

Istnieje możliwość sprężania ustroju ze względu na minimalizację ekstremalnych wartości lokalnych wyciężeń $K(\underline{\varepsilon})$. Odpowiada to maksymalnemu złagodzeniu koncentracji naprężeń.

Żądanie to można sformułować jako kryterium drugiego stopnia poszukując minimum parametru:

$$1.77 \quad J = K_c^2$$

dla którego istnieje rozwiązanie /1.74/.

Można zauważyć analogię pomiędzy tak sformułowanym zagadnieniem a zagadnieniem maksymalnej nośności ustroju o cechach sprężysto-plastycznych.

Niech K_0^2 będzie minimalnym parametrem, najbardziej łagodzącym ekstrema naprężeń. Jeśli poszukiwać będziemy współczynnika μ intensywności obciążenia w celu maksymalizacji nośności ustroju o parametrze ograniczającym wytwężenia lokalne K_0^2 to otrzymamy

1.78
$$\mu^2 = \frac{K_0^2}{K_0^2}$$

W pracy [50] zaprezentowano inne podejście do zadania maksymalizacji nośności ustroju wykorzystując fakt, że poszukiwany współczynnik μ intensywności obciążenia związany jest ze stanem naprężenia $\underline{\underline{\epsilon}}^{\mu} = \mu \underline{\underline{\epsilon}}$ maksymalizującym globalne wytwężenie ustroju $\frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^{\mu T} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\epsilon}}^{\mu} dV$ przy spełnionym warunku $K(\underline{\underline{\epsilon}}^{\mu} + \underline{\underline{\epsilon}}) \leq K_0^2$

Prześledźmy analogiczne do powyższych rozważania w przypadku, gdy nierówność /1.44/ ogranicza dopuszczalne stany doksztalcenia:

1.79
$$K(\underline{\underline{\epsilon}}^R + \underline{\underline{\epsilon}}^L) \leq K_0^2$$

Sprężanie w celu spełnienia warunku /1.79/ najmniejszym kosztem /1.65/ prowadzi do znikających naprężeń wstępnych $\underline{\underline{\epsilon}}^R = -\underline{\underline{\epsilon}}^L = \underline{\underline{0}}$ oraz do stanów odkształceń wstępnych minimalizujących /przy ograniczeniach /1.19/², /1.79//funkcjonał:

1.80
$$J_{\underline{\underline{\epsilon}}}^R = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^R \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\epsilon}}^R dV,$$

a opisanych związkami

1.81
$$\underline{\underline{\epsilon}}^R = \underline{\underline{\epsilon}}^0 = -\underline{\underline{A}}^{-1} \left[\psi \frac{\partial K(\underline{\underline{\epsilon}})}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}} \right]_C$$

$$\psi [K(\underline{\underline{\epsilon}}) - K_0^2] = 0$$

$$K(\underline{\underline{\epsilon}}) - K_0^2 \leq 0$$

$$\psi \geq 0$$

gdzie: $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^R + \underline{\underline{\epsilon}}^L$

1.4. Zagadnienia dystorsji skrępowanych.

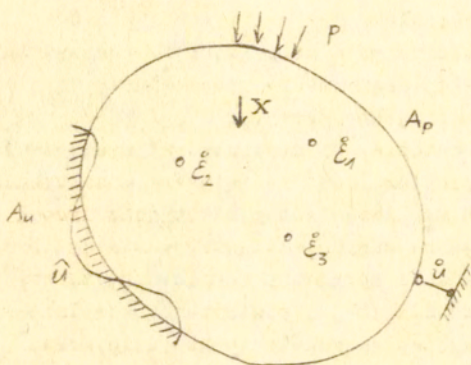
Przechodząc od rozważań ogólnych opisanych w rozdz. 1.3., gdzie dopuszczano możliwość występowania dowolnych /aczkolwiek odpowiednio regularnych/ pól dystorsji do rozważań bardziej szczegółowych przypadków przydatnych przy badaniu różnych układów konstrukcyjnych, istotnym staje się wzięcie pod uwagę dodatkowych więzów krępujących dopuszczalne pola dystorsji. Więzy te zawężają klasę rozpatrywanych stanów dystorsji do takich, które są w konkretnym przypadku technicznie realizowalne. I tak np. zawężając klasę rozpatrywanych dystorsji do dystorsji termicznych należy dołączyć warunek kulistości tensora dystorsji. W przypadkach, gdy nie mamy technicznej możliwości wzbudzenia dowolnego rozkładu temperatury w ustroju, lecz dysponujemy jedynie ustalonym rozkładem źródeł ciepła, należy dołączyć dodatkowo równanie przewodnictwa cieplnego. Wprowadzenie dodatkowych ograniczeń w zagadnieniach sterowania komplikuje problem zawężając klasę rozwiązań dopuszczalnych.

Przenosząc powyższe uwagi na grunt modelu dyskretnego wieloelementowych układów konstrukcyjnych - np. układów kratowych - mamy z reguły do czynienia z więzami ograniczającymi stany dystorsji do takich, które można wymusić jedynie w określonych a priori elementach układu /por.rozdz.4/

W niniejszym rozdziale, pozostając na gruncie modelu ciągłego, omówimy dwa sygnalizowane przypadki szczególne zagadnień dystorsji skrępowanych w ciele sprężystym, posiadające swą specyfikę z racji dodatkowych więzów ograniczających dopuszczalne pola dystorsji.

Pierwszy z nich to grupa zagadnień związana z dystorsjami termicznymi pojawiającymi się w ciele jako pola temperatury wymuszane przez źródła ciepła. Drugi przypadek, to zagadnienia dystorsji o zdefiniowanym dyskretnym nośniku /por. [104]/. Można tu np. rozważać

wpływ defektów punktowych wymuszanych w kilku określonych punktach ciała na stany jego naprężeń i odkształceń /rys.1.6/.



Rys. 1.6.

1.4.1. Dystorsje termiczne

Ograniczmy nasze rozważania do przypadku ciał izotropowych i do pól dystorsji kulistych, które mogą być realizowane jako pola rozkładu temperatur.

$$1.84 \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \alpha \theta \underline{\underline{d}}$$

gdzie: α - współczynnik rozszerzalności termicznej materiału

θ - skalarne pole temperatury / w stosunku do stałej temperatury otoczenia /

$\underline{\underline{d}}$ - tensor jednostkowy

Założmy na wstępie, że możliwe jest wystąpienie dowolnych pól temperatur. Jest to związane z założeniem o nieograniczonych możliwościach występowania źródeł ciepła. Ma to istotny wpływ na zagadnienia sterowania dystorsjami. Rozpatrując np. zadanie sprężania termicznego tarczy z możliwością przyłożenia do jej powierzchni dowolnie rozłożonych źródeł ciepła, założenie powyższe można utrzymać w mocy i po określeniu optymalnego rozkładu temperatur wyznaczyć niezależnie z równania przewodnictwa cieplnego:

$$1.85 \quad \nabla \theta = - \frac{w}{\lambda}$$

gdzie: λ - współczynnik przewodnictwa cieplnego w materiale

w - pole skalarne źródeł ciepła

taki rozkład źródeł ciepła, który to pole temperatur wywołuje. W przypadku natomiast termosprężania płyty kołowej ze źródłem ciepła umieszczonym w jej środku, niezbędne jest wprowadzenie do rozważań równania przewodnictwa cieplnego jako dodatkowego ograniczenia rozpatrywanych pól dystorsji.

Analiza - Identyfikacja

Zagadnienie analizy stanów wstępnych $\underline{S}^R, \underline{E}^R$ wywołanych dystorsjami termicznymi/dyskutowane przez wielu autorów - por. [56]/sprowadza się do dekompozycji pola /1.84/; $\underline{E}^R = \underline{E}^R + \underline{E}^C$ na składowe czyniące zadość więzom statycznym i geometrycznym /por. 1.20/ oraz do wykorzystania rozwiązania ogólnego /1.36/. Charakterystyczną cechą dekompozycji pól dystorsji termicznych jest fakt, iż w ogólnym przypadku zdekomponowane składowe nie są polami tensorowymi kulistymi. Nie można zatem /poza przypadkami szczególnymi/ zdekomponować pola temperatury na pole termiczne wywołujące jedynie deformację \underline{E}^R oraz drugie wywołujące jedynie naprężenia wstępne \underline{S}^R .

Prześledźmy wspomniane przypadki szczególnie. Określmy klasę pól dystorsji termicznych nie wywołujących naprężeń \underline{S} , czyli spełniających warunek $C(\underline{E}) = 0$. Podstawiając ogólną postać dystorsji termicznych /1.84/ do obszarowego związku nierozdzielności odkształceń / w notacji indeksowej/:

$$1.86 \quad \epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0$$

otrzymujemy warunek narzucony na pole temperatury

$$1.87 \quad \theta_{,kl} \delta_{ij} + \theta_{,ij} = 0$$

Widać stąd, że dla indeksów $i \neq j$ otrzymujemy $\theta_{,ij} = 0$. Dla przypadków $i = j$ natomiast otrzymamy jednorodny układ trzech równań algebraicznych ze względu na niewiadome $\theta_{,11}, \theta_{,22}, \theta_{,33}$ o nieznikającym wyznaczniku głównym, skąd wynika $\theta_{,11} = \theta_{,22} = \theta_{,33} = 0$. Zatem warunek /1.87/ można zapisać w postaci

$$1.88/ \quad \theta_{,ij} = 0$$

skąd wynika znany fakt, że pole temperatury nie wywołujące naprężeń musi mieć rozkład liniowy:

$$1.89 \quad \theta = a_0 + a_i x_i$$

i wywoływać deformacje $\underline{\underline{\epsilon}}_{ij}^R = \alpha \theta \delta_{ij}$ zgodne z warunkiem utwierdzenia na części Au brzegu.

Określmy teraz klasę pól dystorsji termicznych nie wywołujących deformacji $\underline{\underline{\epsilon}}^R$, czyli spełniających warunek $\mathcal{A}(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{\epsilon}}^R) = 0$. Podstawiając pole dystorsji termicznych /1.84/ do zależności /1.21/¹ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} 1.90 \quad \operatorname{div}(\underline{\underline{A}}\alpha\theta\underline{\underline{\delta}}) &= 0 \\ (\underline{\underline{A}}\alpha\theta\underline{\underline{\delta}})_n &= 0 \quad \text{na } Ap \end{aligned}$$

skąd, przyjmując izotropię ośrodka, dochodzimy do warunków narzuconych na pole temperatury:

$$\begin{aligned} 1.91 \quad \operatorname{grad} \theta &= 0 \\ \theta &= 0 \quad \text{na } Ap \end{aligned}$$

Wynika stąd znany fakt, że jedynie równomierne ogrzanie ($\theta = \text{const.}$) ciała utwierdzonego na całym brzegu Au wywołuje bezodkształceniowe naprężenia wstępne $\underline{\underline{\sigma}}^R$ /jednorodne: $\underline{\underline{\sigma}}^R = \underline{\underline{A}}\alpha\theta\underline{\underline{\delta}} = \text{const.}$ /

Podstawiając /1.84/ do związków /1.21/ / i uwzględniając /1.36/² otrzymujemy układ wiążący dystorsje termiczne z wywoływanyymi przez nie naprężeniami wstępnymi

$$\begin{aligned} 1.92/ \quad \mathcal{A}(\underline{\underline{\sigma}}^R) &= 0 \\ C(\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{\sigma}}^R + \alpha\theta\underline{\underline{\delta}}) &= 0 \end{aligned}$$

Układ ten nie zależy od części pola temperatury spełniającej warunek $C(\alpha\theta\underline{\underline{\delta}}) = 0$ czyli, jak pokazano wyżej, od części pola θ o liniowym rozkładzie.

Przy określonych dystorsjach termicznych można, ze związków /1.92/, wyznaczyć wywoływane naprężenia wstępne. Przy określonych zaś naprężeniach $\underline{\underline{\sigma}}^R$ można wyznaczyć wzbudzające je pole temperatury θ . Część zależności narzuca wtedy na stan $\underline{\underline{\sigma}}^R$ warunki zgodności z polem θ .

Podstawiając /1.84/ do związków /1.22/ / i uwzględniając /1.36/¹ otrzymujemy układ wiążący dystorsje termiczne z wywoływanyymi przez nie odkształceniami wstępnymi:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(A\underline{\underline{\xi}} - A\alpha \cdot \underline{\underline{\xi}}) &= 0 \\ 1.93 \quad C(\underline{\underline{\xi}}) &= 0 \end{aligned}$$

Układ ten nie zależy od części pola temperatury spełniającej warunek $\mathcal{Q}(A\alpha\theta\underline{\underline{\xi}}) = 0$ czyli, jak pokazano wyżej, od części pola $\theta = \text{const}$ przy pełnym utwierdzeniu całego brzegu $A=A_u$.

Podobnie jak w przypadku układu /1.92/, zależności /1.93/ można wykorzystać w celu analizy pól deformacji wstępnych oraz identyfikacji pól termicznych. Omówmy to bliżej, zapisując związki /1.93/ w postaci:

$$\begin{aligned} \text{div } A(\text{grad}^R \underline{\underline{\xi}}) &= \text{div}(A\alpha\theta\underline{\underline{\xi}}) \\ 1.94 \quad \underline{\underline{A}}(\text{grad}^R \underline{\underline{\xi}})_n &= (A\alpha\theta\underline{\underline{\xi}})_n \quad \text{na } A_p \\ \underline{\underline{\xi}}^R &= 0 \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

Przyjmując izotropowość i jednorodność pola tensora sprężystości, prawą stronę równania /1.94/ można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} 1.95 \quad \{[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \nu(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})]\alpha\theta\delta_{kl}\}_{,j} &= \\ = [(\lambda + 2\mu)\alpha\theta\delta_{ij}]_{,j} &= (\lambda + 2\mu)\alpha\theta_{,i} \end{aligned}$$

Związki /1.94/ zapisać zatem można w postaci:

$$\begin{aligned} \text{div } \underline{\underline{A}}(\text{grad}^R \underline{\underline{\xi}}) &= (\lambda + 2\mu)\alpha \text{ grad } \theta \\ 1.96 \quad \underline{\underline{A}}(\text{grad}^R \underline{\underline{\xi}})_n &= (\lambda + 2\mu)\alpha\theta_n \quad \text{na } A_p \\ \underline{\underline{\xi}}^R &= 0 \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

Wykorzystajmy twierdzenie o rozkładzie dowolnego pola wektorowego na pole stanowiące gradient pewnego potencjału skalarnego oraz rotacją pewnego pola wektorowego w odniesieniu do pola $\text{div } A(\text{grad}^R \underline{\underline{\xi}})$. Działając na równanie /1.96/ kolejną divergencją i rotacją w celu wyznaczenia pól składowych oraz przekształcając odpowiednio warunki brzegowe otrzymać można dwie grupy związków:

1.97

$$\operatorname{div} \operatorname{div} (A \operatorname{grad}^s \underline{u}^R) = (3\lambda + 2\mu) \alpha \nabla \theta$$

$$(A \operatorname{grad}^s \underline{u}^R) \underline{n} \underline{n} = (3\lambda + 2\mu) \alpha \theta \quad \text{na } A_p$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{div} (A \operatorname{grad}^s \underline{u}^R) = 0$$

$$(A \operatorname{grad}^s \underline{u}^R) \underline{n} \underline{t} = 0 \quad \text{na } A_p$$

$$\underline{u}^R = 0 \quad \text{na } A_u$$

Zadanie analizy stanu deformacji wstępnych wywołanych przez dane pole temperatury sprowadza się do określenia pola $\underline{u}^R = \operatorname{grad}^s \underline{u}^R$ opisanego związkami /1.97/. Znając \underline{u}^R oraz $\underline{\varepsilon}^E = \alpha \theta \underline{1}$ można wyznaczyć naprężenia wstępne z zależności /1.2/.

Zadanie identyfikacji pola temperatury θ wywołującego określoną deformację wstępną $\underline{\varepsilon}^R$ /spełniającą warunki zgodności /1.97/^{3,5} sprowadza się do rozwiązania zagadnienia brzegowego /1.97/^{1,2} z warunkiem /1.97/² rozciągniętym na cały brzeg Λ , względem niewiadomej funkcji θ . Znając stany $\underline{\varepsilon}^R$ oraz $\underline{\varepsilon}^E$ można wyznaczyć naprężenia wstępne im towarzyszące.

Zagadnienie identyfikacji pól dystorsji termicznych posiada swą specyfikę. Można określić jednoznacznie /poza wspomnianym wyżej przypadkiem $\Lambda = A_u$, $\theta = \text{const}$ / pole temperatury na podstawie znajomości deformacji wstępnej przez nie wywołanej. Nie konieczna jest w tym przypadku jednoczesna znajomość pola $\underline{\varepsilon}^R$, jak to miało miejsce w przypadku ogólnym /1.36/. Właściwość ta ma istotne znaczenie i może być wykorzystywana w badaniu naprężeń termicznych układów konstrukcyjnych. Mierząc eksperymentalnie stan deformacji $\underline{\varepsilon}^R$ konstrukcji oraz identyfikując wywołujące go pole termiczne θ można następnie określić stowarzyszone z nimi pole naprężeń $\underline{\sigma}^R$.

Sterowanie /termospręża 1e/

Wyspecyfikujemy rozwiązania poszczególnych zadań sterowania polami dystorsji /dyskutowanych w § 1.3/ w przypadku omawianych dystorsji termicznych.

Rozwiązania zadania minimalizacji globalnej podatności ustroju

$$1.98 \quad \min J_{\varepsilon} = \min \int_V \frac{1}{2} (grad^s \underline{u}^R + \underline{\varepsilon})^T A (grad^s \underline{u}^R + \underline{\varepsilon}) dV$$

przy ^{warunkach} ograniczających /1.94/ poszukujemy formułując funkcjonał uogólniony o wyrażenie związane z ograniczeniem /1.94/

$$1.99 \quad J = \int_V (F_1 (grad^s \underline{u}^R) + \lambda F_2 (grad^s \underline{u}^R, \theta)) dV = \\ = \int_V [\frac{1}{2} (grad^s \underline{u}^R + \underline{\varepsilon})^T A (grad^s \underline{u}^R + \underline{\varepsilon}) + \lambda (\text{div } A (grad^s \underline{u}^R - \alpha \theta \underline{e}))] dV$$

Wariację funkcjonału /1.99/ zapiszemy w postaci:

$$1.100 \quad \delta J = \int_V [\text{div} (F_{1, grad^s \underline{u}^R} + (\lambda F_2)_{, grad^s \underline{u}^R}) \delta \underline{u}^R + (\lambda F_2)_{, \theta} \delta \theta + \\ + F_2 \delta \lambda] dV + \int_A [(F_{1, grad^s \underline{u}^R} + (\lambda F_2)_{, grad^s \underline{u}^R}) n] \delta \underline{u}^R] dA$$

Warunki stacjonarności funkcjonału /1.99/ prowadzą do znikania wariacji /1.100/, skąd wynika konieczność znikania wyrażen stojących przy dowolnych wariacjach $\delta \underline{u}^R$, $\delta \theta$, $\delta \lambda$:

$$1.101 \quad \text{div} [A (grad^s \underline{u}^R + \underline{\varepsilon}) + A grad^s \lambda] = 0 \\ A (grad^s \lambda) \underline{e} = 0 \\ \text{div} [A (grad^s \underline{u}^R - \alpha \theta \underline{e})] = 0 \\ [A (grad^s \underline{u}^R + \underline{\varepsilon}) + A grad^s \lambda] n = 0 \text{ na } A_p$$

Dołączając ograniczenia brzegowe /1.94/ ^{2.3} otrzymujemy układ warunków koniecznych minimum warunkowego funkcjonału /1.98/. Ze względu na wypukłość funkcji podcałkowej i liniowość ograniczeń otrzymane związki są warunkami koniecznymi i dostatecznymi.

Rozwiązanie nie zależy od części $\underline{\varepsilon}_R$ spełniającej warunki $\mathcal{R}(A \underline{\varepsilon}_R) = 0$ i koryguje jedynie część deformacji $\underline{\varepsilon}_C$ wywołaną obciążeniem siłowym w obszarze V i na brzegu A_p .

Rozkładając znane pole deformacji $\underline{\underline{\xi}}_c$ na część kulistą i dewiatorową: $\underline{\underline{\xi}}_c = [\underline{\underline{\xi}}_c]^K + [\underline{\underline{\xi}}_c]^D$ można sprawdzić, że rozwiązanie układu 1.101/, 1.94/2,3 przyjmuje postać:

$$1.102/ \quad \underline{\underline{\xi}}^R = -([\underline{\underline{\xi}}_c]^K + [\underline{\underline{\xi}}_c]^D)$$

gdzie pole $[\underline{\underline{\xi}}_c]^D$ jest częścią pola dewiatorowego $\underline{\underline{\xi}}_c^D$ zdefiniowaną, wraz z poszukiwanym polem temperatur θ , związkami:

$$1.103 \quad \begin{aligned} \mathcal{R}(A([\underline{\underline{\xi}}_c]^K + [\underline{\underline{\xi}}_c]^D + \alpha\theta\underline{\underline{\xi}})) &= 0 \\ \mathcal{C}([\underline{\underline{\xi}}_c]^K + [\underline{\underline{\xi}}_c]^D) &= 0 \\ [\underline{\underline{\xi}}_c]^D \underline{\underline{\xi}} &= 0 \end{aligned}$$

podczas gdy:

$$1.104 \quad A \operatorname{grad}^s \underline{\underline{\lambda}} = -([\underline{\underline{\xi}}_c]^D - [\underline{\underline{\xi}}_c]^D)$$

Z powyższego wynika, że jeśli istnieje pole θ spełniające związki 1.103/ dla $[\underline{\underline{\xi}}_c]^D = [\underline{\underline{\xi}}_c]^D$, czyli w konsekwencji takie, dla którego zachodzi $\mathcal{R}(A(\underline{\underline{\xi}} - \alpha\theta\underline{\underline{\xi}})) = 0$, to w wyniku termosprężania stan deformacji końcowej $\underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\xi}}^R + \underline{\underline{\xi}}$ znika / por. 1.12/. W ogólnym przypadku stan odkształceń użytkowych zostaje zmniejszony o $-\underline{\underline{\xi}}^R = \underline{\underline{\xi}}_c^K + [\underline{\underline{\xi}}_c]^D$.

Rozwiązania zadania minimalizacji globalnego wyciążenia ustroju:

$$1.105 \quad \min \int_V \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}^R + \underline{\underline{\sigma}}^L) \underline{\underline{A}}^{-1} (\underline{\underline{\sigma}}^R + \underline{\underline{\sigma}}^L) dV$$

przy warunkach ograniczających

$$1.106 \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}^R &= 0 \\ \underline{\underline{\sigma}}^R &= A (\operatorname{grad}^s \underline{\underline{u}}^R - \alpha\theta\underline{\underline{\xi}}) \\ \underline{\underline{\sigma}}^R \underline{\underline{n}} &= 0 \quad \text{na } A_p \\ \underline{\underline{u}}^R &= 0 \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

poszukujemy formułując unkojonał uogólniony o wyrażenia związane z ograniczeniami /1.106/^{1,2}

$$1.107 \quad \mathcal{J} = \int_V [F_1(\underline{\xi}) + \lambda F_2(\underline{\xi}) + \chi F_3(\underline{\xi}, \underline{d}, \theta)] dV = \\ = \int_V \left[\frac{1}{2} (\underline{\xi} + \underline{\xi})^T \underline{A}^{-1} (\underline{\xi} + \underline{\xi}) + \lambda \operatorname{div} \underline{\xi} + \chi (\underline{\xi} - \underline{A}(\operatorname{grad}^s \underline{d} - \alpha \theta \underline{e})) \right] dV$$

Wariację funkcjonału /1.107/ zapiszemy w postaci:

$$1.108 \quad \delta \mathcal{J} = \int_V \left\{ [F_{1,\xi} + (\lambda F_2)_{,\xi} + (\chi F_3)_{,\xi}] \delta \underline{\xi} + (\chi F_3)_{,g} \operatorname{grad}^s \delta \underline{d} + \right. \\ \left. + (\chi F_3)_{,\theta} \delta \theta + F_2 \delta \lambda + F_3 \delta \chi \right\} dV + \int_A [A \chi \eta \delta \underline{d} + \lambda \eta \delta \underline{\xi}] dA$$

Warunki stacjonarności funkcjonału /1.107/ prowadzą do znikania wariacji /1.108/, skąd wynika konieczność znikania wyrażeń stojących przy dowolnych wariacjach $\delta \underline{\xi}$, $\delta \underline{d}$, $\delta \theta$, $\delta \lambda$, $\delta \chi$:

$$1.109 \quad \begin{aligned} \underline{A}^{-1} (\underline{\xi} + \underline{\xi}) - \operatorname{grad}^s \lambda + \chi &= 0 \\ \operatorname{div} \underline{A} \chi &= 0 \\ \underline{A} \chi \alpha \underline{e} &= 0 \end{aligned}$$

wraz ze związkami /1.106/^{1,2}

Znikanie całki powierzchniowej, przy warunkach brzegowych /1.106/^{3,4} wymaga spełnienia dodatkowych związków:

$$1.110 \quad \begin{aligned} \underline{A} \chi \eta &= 0 & \text{na } A_p \\ \lambda &= 0 & \text{na } A_v \end{aligned}$$

Związki /1.106/, /1.109/, /1.110/ stanowią warunki konieczne minimum warunkowego funkcjonału /1.105/

Ze względu na wypukłość funkcji podcałkowej i liniowość ograniczeń otrzymane związki są warunkami koniecznymi i dostatecznymi.

Wykonując operację divergencji na równaniu /1.109/¹ i wykorzystując warunki /1.109/² oraz /1.106/¹ otrzymujemy:

$$1.111 \quad \operatorname{div} \underline{\xi} = \operatorname{div} \underline{A} \operatorname{grad}^s \lambda$$

Biorąc dodatkowo pod uwagę warunek brzegowy /1.109/² widać, że należy przyjąć w rozwiązaniu $\underline{A} \operatorname{grad}^s \lambda = \underline{\xi}^c$, gdzie $\underline{\xi}^c$ jest częścią stanu naprężeń wywołaną obciąże-

niem siłowym /por. /1.38//. Wynika stąd także, że poszukiwane rozwiązanie zależy jedynie od części $\underline{\underline{S}}_2$ pola naprężeń użytkowych. Związek /1.109/ możemy teraz przedstawić, rozkładając pola na części kuliste i dewiatorowe w postaci:

$$1.112 \quad \underline{\underline{S}}^K + \underline{\underline{S}}^D + [\underline{\underline{S}}_2]^K + [\underline{\underline{S}}_2]^D + A \chi^D = 0$$

Biorąc dodatkowo pod uwagę warunki brzegowe /1.106/, /1.110/ oraz $\underline{\underline{S}}_2 n = 0$ na A_p oraz związki /1.100/ i $\text{div } \underline{\underline{S}}_2 = 0$ w obszarze, można sprawdzić, że rozwiązanie musi przyjąć postać: (V)

$$1.113 \quad \underline{\underline{S}} = - ([\underline{\underline{S}}_2]^K + [\underline{\underline{S}}_2]^D)$$

gdzie pole $[\underline{\underline{S}}_2]^D$ jest częścią pola dewiatorowego $\underline{\underline{S}}_2^D$ zdefiniowaną wraz z poszukiwanym polem temperatury θ związkami:

$$1.114 \quad \begin{aligned} \mathcal{A} ([\underline{\underline{S}}_2]^K + [\underline{\underline{S}}_2]^D) &= 0 \\ \mathcal{C} (\mathcal{A}' ([\underline{\underline{S}}_2]^K + [\underline{\underline{S}}_2]^D) - \alpha \theta \underline{\underline{e}}) &= 0 \\ [\underline{\underline{S}}_2]^D \underline{\underline{e}} &= 0 \end{aligned}$$

podczas gdy

$$1.115 \quad A \chi^D = - ([\underline{\underline{S}}_2]^D - [\underline{\underline{S}}_2]^D)$$

Z powyższego wynika, że jeśli istnieje pole θ spełniające związki /1.114/ dla $[\underline{\underline{S}}_2]^D = [\underline{\underline{S}}_2]^D$ czyli w konsekwencji także, dla którego zachodzi: $\mathcal{C} [\mathcal{A}'(\underline{\underline{S}}) - \alpha \theta \underline{\underline{e}}] = 0$, to w wyniku termosprężania stan naprężeń końcowych $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}^K + \underline{\underline{S}}^D$ znika /por. 1.11//

W ogólnym przypadku stan naprężeń użytkowych zostaje zmniejszony o część: $-\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{S}}_2^K + [\underline{\underline{S}}_2]^D$.

Rozwiązania zadania minimalizacji kosztów sprężania 1.116/ $\min J_{\varepsilon} = \min \int_V \frac{\varepsilon}{2} A \underline{\underline{\varepsilon}}^T dV = \min \int_V \frac{1}{2} (\alpha \theta \underline{\underline{\varepsilon}}) A (\alpha \theta \underline{\underline{\varepsilon}}) dV$

przy warunkach ograniczających wartości dopuszczalne lokalnych wyteżeń 1.64/ oraz przy warunkach 1.106/ poszukujemy konstruując funkcjonał zastępczy, wzbogacony w człony związane z ograniczeniami 1.64/, 1.06/:

$$1.117/ \quad J(\underline{\underline{\varepsilon}}, \theta, \underline{\underline{\lambda}}, \psi) = \int_V [F_1(\theta) + \lambda F_2(\underline{\underline{\varepsilon}}, \theta) + \psi F_3(\underline{\underline{\varepsilon}}, \theta)] dV = \\ = \int_V \left\{ \frac{\varepsilon}{2} (\alpha \theta \underline{\underline{\varepsilon}}) A (\alpha \theta \underline{\underline{\varepsilon}}) + \lambda [\operatorname{div} A (\operatorname{grad}^s \underline{\underline{\varepsilon}} - \alpha \theta \underline{\underline{\varepsilon}})] + \right. \\ \left. + \psi [K (A (\operatorname{grad}^s \underline{\underline{\varepsilon}} - \alpha \theta \underline{\underline{\varepsilon}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}) - K_0^2] \right\} dV$$

gdzie $\underline{\underline{\lambda}}, \psi$ - wektorowy i skalarny współczynnik Lagrange'a

Warunkiem koniecznym minimum warunkowego funkcjonału 1.116/ przy ograniczeniach 1.64/, 1.106/ jest spełnienie warunków koniecznych punktu źródłowego /typu $\min_{\underline{\underline{\varepsilon}}, \theta, \underline{\underline{\lambda}}, \psi} J(\underline{\underline{\varepsilon}}, \theta, \underline{\underline{\lambda}}, \psi)$ / funkcjonału 1.117/.

Wariację funkcjonału 1.117/ można wypisać w postaci:

$$1.118/ \quad \delta J = \int_V \{ (F_1 + \lambda F_2 + \psi F_3)_{,\theta} \delta \theta - \operatorname{div} (\lambda F_2 + \psi F_3)_{,\operatorname{grad}^s \underline{\underline{\varepsilon}}} \delta \underline{\underline{\varepsilon}} + F_2 \delta \lambda + F_3 \delta \psi \} dV + \int_A (\lambda F_2 + \psi F_3)_{,\operatorname{grad}^s \underline{\underline{\varepsilon}}} \eta \delta \underline{\underline{\varepsilon}} dA$$

Zatem warunki konieczne punktu siódlowego przyjmują postać [1, 35]:

$$1.119 \quad F_{1,\theta} + (\lambda F_2)_{,\theta} + (\psi F_3)_{,\theta} = A [\alpha \theta \underline{\underline{\varepsilon}} + \operatorname{grad}^s \lambda - \psi \frac{\partial K(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}] \underline{\underline{\varepsilon}} = 0 \\ \operatorname{div} (\lambda F_2 + \psi F_3)_{,\operatorname{grad}^s \underline{\underline{\varepsilon}}} = \operatorname{div} [A \operatorname{grad}^s \lambda - \psi A \frac{\partial K(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}] = 0 \\ F_2 = \operatorname{div} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}}{\alpha}) = 0 \\ \psi F_3 = \psi [K(\underline{\underline{\varepsilon}}) - K_0^2] = 0$$

gdzie: $\underline{\underline{\varepsilon}}^* = A (\operatorname{grad}^s \underline{\underline{\varepsilon}} - \alpha \theta \underline{\underline{\varepsilon}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}$

w obszarze V z żądaniem znikania wyrażenia

$$1.120 \quad (A \operatorname{grad}^s \lambda - \psi A \frac{\partial K(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}) \eta = 0$$

na powierzchni A .

Ze względu na wypukłość funkcji podcałkowej /1.116/ oraz powierzchni ograniczającej $K(\underline{\sigma})$, warunki /1.119/, /1.120/ wraz z ograniczeniami brzegowymi /1.106/^{3,4} są warunkami koniecznymi i dostatecznymi minimum warunkowego funkcjonału /1.116/.

Przyjmując ze związków /1.119/² i /1.120/, że wyrażenie $\Delta \text{grad}^3 \lambda - \psi \Delta \frac{\partial K(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}}$ stanowi część samozrównoważoną $[\psi \Delta \frac{\partial K(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}}]_{\mathcal{R}}$ pola $\psi \Delta \frac{\partial K(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}}$ /por. twierdzenie o rozkładzie /1.20// mamy:

$$\text{/1.121/} \quad \text{grad}^3 \lambda = \left[\psi \frac{\partial K(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \right]_{\mathcal{C}}$$

Uwzględniając to, otrzymujemy ze związku /1.119/¹ zależność:

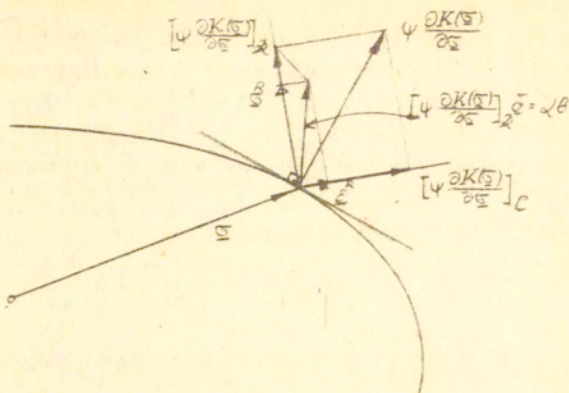
$$\text{/1.122/} \quad \alpha \theta \underline{\sigma} = \left[\psi \frac{\partial K(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} \right]_{\mathcal{R}}$$

gdzie K - oznacza kulistą część tensora

Ostatecznie, rozwiązanie omawianego zadania optymalnego termosprężania opisane jest związkami: /1.110/^{3,4,5} /1.106/^{3,9}, /1.122/. Różni się ono od rozwiązania analogicznego problemu o dystorsjach nieskrępowanych /por. 1.74/ tym, że pole dystorsji termicznych związane jest jedynie z kulistą częścią składowej $[\psi \frac{\partial K(\underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}}]_{\mathcal{R}}$ gradientu funkcji wytężenia $K(\underline{\sigma})$ /por. symboliczny rysunek 17/.

Dalsza różnica związana jest oczywiście z faktem, że dystorsje te wywołują niezerowe stany $\underline{\epsilon}^R$.

Równania /1.119/³, /1.106/^{3,4} otrzymanego rozwiązania przyporządkowują polu θ odpowiednie $\underline{\epsilon}^R$.



Rys. 1.7

Analogiczne rozważania można przeprowadzić dla przypadku związanego z ograniczeniami nierównościowymi narzuconymi na stan deformacji $\underline{\xi} + \underline{\xi} : 1.79/$

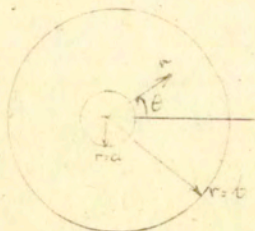
Przykład termosprężania wirującego dysku.

Zilustrujemy uzyskane wyżej rozwiązania zadań optymalnego termosprężania na przykładzie tarczy kołowej wirującej ze stałą prędkością kątową ω /rys.1.8/

Obciążenie zewnętrzne opisane jest w tym przypadku/pomijając ciężar własny/ przez pole masowych sił odśrodkowych

$$1.123 \quad R = \xi \omega^2 r$$

gdzie: ξ - masa właściwa materiału



Rys.1.8

Wypisując związki /1.4/, /1.6/, /1.3/ w układzie współrzędnych biegunowych otrzymujemy dla naszego kołowsymetrycznego przypadku:

- równania równowagi

$$\begin{aligned} /1.124/ \quad & \sigma_{rr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + R = 0 \\ & \sigma_r = 0 \quad \text{dla } r = b, \quad \sigma_r = 0 \quad \text{dla } r = a \end{aligned}$$

- warunki nierozdzielności:

$$/1.125/ \quad \varepsilon_\theta - \varepsilon_r + r \varepsilon_{\theta,r} = 0$$

- związki konstytuwne:

$$\begin{aligned} /1.126/ \quad & \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \varepsilon^0 & \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) - \bar{\sigma} \\ & \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \varepsilon^0 & \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) - \bar{\sigma} \end{aligned}$$

gdzie:

$$/1.127/ \quad \varepsilon^0 = \alpha \theta \quad \bar{\sigma} = \frac{E}{1-\nu} \alpha \theta$$

Stan naprężeń użytkowych tarczy niesprężonej /por. [77] opisany jest związkami /rys. 1.9 /:

$$\begin{aligned} /1.128/ \quad & \bar{\sigma}_r = \frac{3+\nu}{8} g \omega^2 b^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) - \eta^2 \right]^{ozn} \zeta S(\eta) \\ & \bar{\sigma}_\theta = \frac{3+\nu}{8} g \omega^2 b^2 \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\eta^2}\right) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \eta^2 \right]^{ozn} \zeta u(\eta) \end{aligned}$$

$$\text{gdzie: } \zeta = \frac{r}{b} \in \left\langle \frac{a}{b}, 1 \right\rangle, \quad \eta = \frac{3+\nu}{8} g \omega^2 b^2$$

Przyjmując ograniczenia nierównościowe /1.64/ narzucone na końcowy stan naprężeń w postaci:

$$\begin{aligned} /1.129/ \quad & -\bar{\sigma} \leq \sigma_r = \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_r \leq \bar{\sigma} \\ & -\bar{\sigma} \leq \sigma_\theta = \bar{\sigma}_\theta + \bar{\sigma}_\theta \leq \bar{\sigma} \end{aligned}$$

przy czym dodatnią wartość $\bar{\sigma}$ /mniejszą od maksymalnych wartości $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$ /określimy później, postawmy problem /dyskutowany w poprzednim paragrafie/ spełnienia warunków /1.127/ przy minimalnym koszcie wprowadzanych dystorsji /1.116/ ograniczając dodatkowo pola dystorsji do pól termicznych wywołanych przez jednorodne źródła ciepła rozłożone równomiernie na obwodzie wewnętrznego otworu tarczy. Przyjęte kryterium optymalności zbieżne jest w tym przypadku z minimalizacją intensywności źródeł ciepła na obwodzie $r = a$.

Pole temperatury θ musi spełniać w stanie ustalonym równanie przewodnictwa cieplnego /1.85/ bez źródeł wewnątrz tarczy $\nabla \theta = 0$, które w omawianym zadaniu kołowsymetrycznym przyjmuje postać:

$$/1.138/ \quad \theta_{,rr} + \frac{1}{r} \theta_{,r} = 0$$

z warunkiem na brzegu $r = b$:

$$/1.139/ \quad \theta = 0$$

Z powyższych związków wynika postać rozkładu temperatur :

$$/1.140/ \quad \theta = \frac{C}{t} \ln\left(\frac{r}{t}\right)$$

z dokładnością do parametru C, zależnego od intensywności źródła ciepła rozłożonego na obwodzie $r = a$.

Znając pole dystorsji termicznych /1.140/ można określić pole naprężeń wstępnych przez nie wywołanych /z dokładnością do stałej C/.

Podstawiając w tym celu /1.140/ do /1.126/ a następnie wyrażając warunek nierozdzielności /1.125/ przez naprężenia otrzymujemy wraz z równaniem równowagi ^(p_{rr} + p_{tt}) układu dwu równań różniczkowych zwyczajnych ze względu na dwie niewiadome funkcje opisujące naprężenia wstępne: $\overset{R}{\sigma}_r(r)$, $\overset{R}{\sigma}_t(r)$ o warunkach brzegowych /1.124/ na brzegach $r = a$ oraz $r = b$. Ręgując z tego układu funkcję naprężeń obwodowych dochodzimy do opisu wstępnych naprężeń promieniowych $\overset{R}{\sigma}_r$:

$$/1.141/ \quad r^2 \overset{R}{\sigma}_{r,rr} + (2\nu + 1)r \overset{R}{\sigma}_{r,r} + r E \alpha \theta_{,r} = 0$$

$$\overset{R}{\sigma}_r|_{r=a} = \overset{R}{\sigma}_r|_{r=b} = 0$$

gdzie $\theta_{,r} = \frac{C}{r}$.

Można sprawdzić, że całka ogólna równania różniczkowego /1.141/ ma postać:

$$/1.142/ \quad \overset{R}{\sigma}_r = \frac{E \alpha C}{2\nu} \left(\ln r + \frac{a_1}{r^{2\nu}} \right) + a_2$$

określoną z dokładnością do stałych a_1, a_2 .

Wyznaczając je z warunków brzegowych /1.141/² otrzymujemy ostatecznie

$$\text{/1.143/} \quad \frac{R}{\sigma_r} = -z \left[\ln \eta + \frac{\ln(\frac{a}{b}) a^{2\nu}}{a^{2\nu} - b^{2\nu}} \left(\frac{1}{\eta^{2\nu}} - 1 \right) \right] \cong^n z t(\eta)$$

gdzie: $z = \frac{E \alpha C}{2\nu}$

$$\eta = \frac{r}{b} \in \left\langle \frac{a}{b}, 1 \right\rangle.$$

Znając rozkład naprężeń promieniowych, można wyznaczyć z /1.124/¹ naprężenia obwodowe:

$$\text{/1.144/} \quad \frac{R}{\sigma_\theta} = -z \left[\ln \eta + \frac{\ln(\frac{a}{b}) a^{2\nu}}{a^{2\nu} - b^{2\nu}} \left((1-2\nu) \frac{1}{\eta^{2\nu}} - 1 \right) \right] \cong^n z w(\eta)$$

Znając naprężenia wstępne wywoływane przez pole temperatur /1.140/, zadanie termosprężania ze względu na spełnienie ograniczeń /1.137/ minimalnym kosztem wprowadzanych dystorsji sprowadza się do minimalizacji parametru:

$$\text{/1.145/} \quad \min z^2$$

przy ograniczeniach

$$\int S(\eta) + z t(\eta) \leq \bar{\sigma}, \quad \int S(\eta) + z t(\eta) \geq -\bar{\sigma}$$

$$\text{/1.146/} \quad \int u(\eta) + z w(\eta) \leq \bar{\sigma}, \quad \int u(\eta) + z w(\eta) \geq -\bar{\sigma}$$

Jeśli wartość $\bar{\sigma}$ ograniczająca naprężenia dopuszczalne jest określona, to przy funkcjach $S(\eta), u(\eta), t(\eta), w(\eta)$ zdefiniowanych wyrażeniami /1.136/, /1.143/, /1.144/ związki /1.146/ opisują zespół warunków określających obszar dopuszczalny na osi liczbowej z , który jest zgodny dla każdego z warunkami /1.146/.

Po znalezieniu tego obszaru, oraz określeniu minimalnej wartości z , można wyznaczyć poszukiwany parametr C /1.143/ określający / por. 1.140/ intensywność źródła ciepła

$$\text{/1.147/} \quad \theta_0 = \frac{c}{b} \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

jakie należy wprowadzić na obwodzie otworu wewnętrznego tarczy wirującej w celu optymalnego termosprężenia.

Omawiane zadanie rozwiązano numerycznie przyjmując dane: $a = \frac{1}{4}$, $b = 1$, $\nu = \frac{1}{4}$, $\bar{\sigma} = 0,3941$. Wartość $\bar{\sigma}$ ograniczającą naprężenia dobrano tak, aby efekt sprężania był największy. Omawiany przykład reprezentuje zatem zadanie maksymalnego łagodzenia koncentracji naprężeń. Można go wykorzystać /por. § 1.3.3/ do maksymalnego zwiększania nośności ustroju poprzez sprężanie.

Parametr Z przybiera w omawianym przykładzie optymalną wartość

$$\text{/1.148/} \quad Z = -1,41513$$

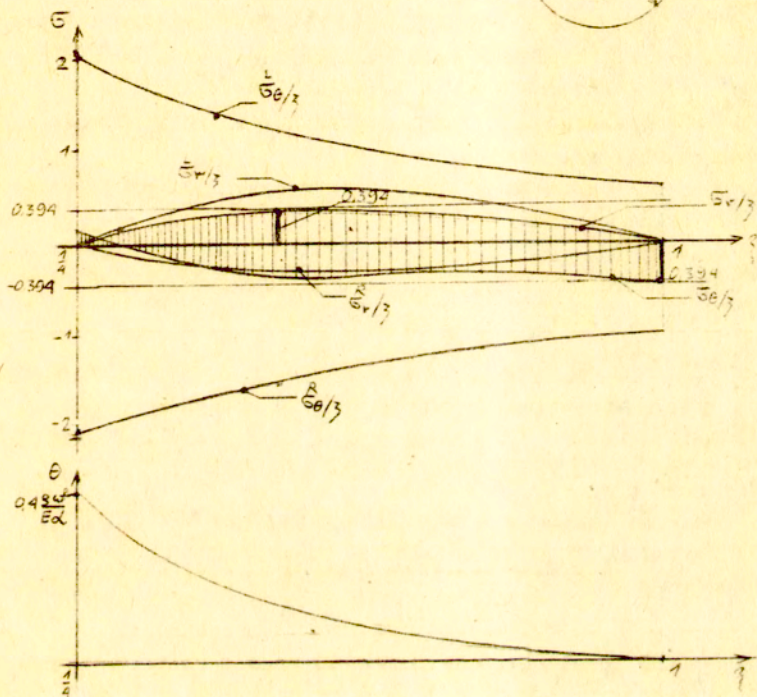
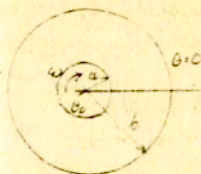
skąd wynika, obliczając parametr C , że poszukiwane pole temperatury /1.140/ ma rozkład.

$$\text{/1.149/} \quad \theta = -1,4151 \frac{2\sqrt{3}}{E\alpha b} \ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

i może być wywołane przez ogrzewanie brzegu otworu wewnętrznego tarczy źródłami ciepła /1.147/ o intensywności /podstawiając dane przykładu/

$$\text{/1.150/} \quad \theta_c = 0,3985 \frac{g\omega^2}{E\alpha}$$

Rozkłady naprężeń radialnych i obwodowych w stanach użytkowym, wstępnym i końcowym pokazano na rys. /1.9/. Widac, że w wyniku termosprężenia uzyskano ponad pięciokrotne zmniejszenie ekstremalnych wartości naprężeń.



Rys. 1.9

1.4.2. Dystorsje generowane na podobozarach ciała

Ograniczenie rozważanych pól dystorsji do takich, które są wywoływane nie wszędzie, lecz w określonych a priori podobozarach ciała, daje dodatkowe możliwości uzyskiwania rozwiązań techniczne przydatnych.

Jednym z możliwych zawężeń omawianego zadania jest rozważanie dystorsji generowanych na określonym zbiorze dyskretnym punktów /por. rys.1.6/

$$/1.151/ \quad \underline{\underline{\xi}}(x) = \sum_i \underline{\underline{\xi}}_i(y_i) \delta(x, y_i)$$

gdzie indeks i przebiega kolejne źródła dystorsji zaś tensory $\underline{\underline{\xi}}_i(y_i)$ opisują dystorsje punktowe w nich wywoływane.

Pola naprężeń wstępnych wzbudzone przez dystorsje /1.151/ są postaci:

$$/1.152/ \quad \underline{\underline{\sigma}}^R(x) = \sum_i \underline{\underline{\sigma}}^R(x, y_i) \underline{\underline{\xi}}_i(y_i)$$

gdzie tensor o walencji cztery $\underline{\underline{\sigma}}^R(x, y_i)$ opisuje stany naprężeń wywołane w punktach y_i poprzez dystorsje jednostkowe wymuszane w punktach y_i .

Zagadnienie optymalnego sprężania /1.43/, /1.44/ prowadzi w tym przypadku do zadania programowania kwadratowego:

$$/1.153/ \quad \min \sum_i \underline{\underline{\xi}}_i A \underline{\underline{\xi}}_i,$$

przy ograniczeniach

$$/1.154/ \quad K \left(\sum_i \underline{\underline{\sigma}}^R(x, y_i) \underline{\underline{\xi}}_i(y_i) \right) \leq K_0^2$$

narzuconych na składowe tensorów $\underline{\underline{\xi}}_i$ w każdym punkcie ciała x .

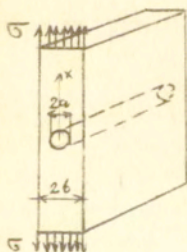
Problem ten może być sformułowany w modelu dyskretnym opisującym np. struktury prętowe z określonym zbiorem elementów podlegających dystorsjom. Przypadek ten daje duże możliwości zastosowań w konstrukcjach inżynierskich i zostanie szczegółowo omówiony w § 4.

Inny przypadek zagadnień dystorsji generowa-

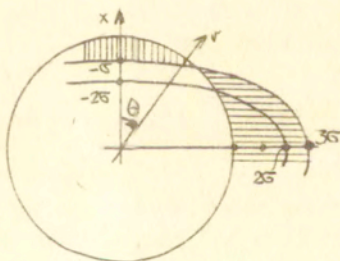
nych na określonym podobszarze, interesujący z punktu widzenia zastosowań, to dystorsje wymuszane na powierzchni rozdzielającej dwie części ciała /dystorsje powierzchniowe/. Przypadkiem tym zajmiemy się szczegółowo w osobnym rozdziale /§ 3/. Można też pokazać [91], że mając ciało rozdzielone powierzchnią kontaktową S na dwie części /rys. 3.1/, wpływ dystorsji wymuszanych w części pierwszej na stany naprężeń i odkształceń w części drugiej można sprowadzić do wpływu dystorsji powierzchniowych na powierzchni kontaktowej S na te stany.

Sposobem technicznej realizacji dystorsji zlokalizowanych w otoczeniu pewnych niewrażliwych punktów ciała jest np. wywoływanie wstępnych, lokalnych uplastycznień, generujących pożądane dystorsje.

Omówmy ten sposób na przykładzie tarczy rozciąganej obciążeniem równomiernie rozłożonym na brzegu /rys. 1.10/. Interesować nas będzie koncentracja naprężeń wokół otworu kołowego /zakładając $b \gg a$ /.



Rys. 1.10



Rys. 1.11

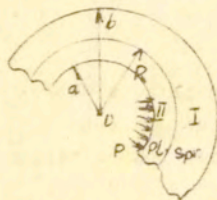
W przypadku, gdy $b \geq 4a$, stan naprężeń wokół otworu opisać można z dokładnością do około 6% wykorzystując związek Kirsch'a dla tarczy z otworem [77]:

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \\
 1.155 \quad \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\
 \tau &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

Koncentracja naprężeń na brzegu otworu ($r = a$) związana jest z naprężeniami σ_θ ($\sigma_r = \tau = 0$), których wartość waha się od $-\sigma$ do 3σ /rys. 1.11/.

Niech σ_0 opisuje granicę plastyczności materiału. Pokażemy, że wprowadzając do otworu ciśnienie wewnętrzne p o tak dobranej wartości aby uplastyczyć pierścień o odpowiednim promieniu zewnętrznym R , uzyskamy w efekcie końcowym złagodzenie koncentracji naprężeń do wartości podanych na rys. 1.11.

W celu określenia ciśnienia p wykorzystamy rozwiązanie zadania uplastyczniania rury grubościennej poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego /rys. 1.12/.



Rys. 1.12.

W ramach teorii małych odkształceń sprężysto-plastycznych stany naprężeń σ_r, σ_θ w strefach sprężystej (I) i plastycznej (II) przyjmują w przypadku $b \rightarrow \infty$ postać [30]:

$$\begin{aligned}
 1.156 \quad \sigma_r^I &= \frac{R^2}{r^2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} & \sigma_r^{II} &= -\left(1 - 2 \ln \frac{R}{r}\right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \\
 \sigma_\theta^I &= \frac{R^2}{r^2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} & \sigma_\theta^{II} &= \left(1 - 2 \ln \frac{R}{r}\right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

Ciśnienie p związane jest z zasięgiem strefy uplastycznionej R związkiem:

$$1.157 \quad p = \left(1 + 2 \ln \frac{R}{a}\right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Odejmując od rozwiązania /1.156/ stany naprężeń sprężystych zagadnienia Lamé λ, μ, ρ, g_0

$$1.158 \quad \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{a^2}{r^2} p \\ \sigma_\theta &= \frac{a^2}{r^2} p \end{aligned}$$

gdzie p określone jest przez (1.157), otrzymujemy stany resztkowe opisujące naprężenia wstępne $\underline{\sigma}$ wywołane przez dystorsje plastyczne.

$$1.159 \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_r^I}{r} &= \frac{\sigma_0}{r^2 \sqrt{3}} \left[R^2 + a^2 + 2a^2 \ln \frac{R}{a} \right] \\ \frac{\sigma_\theta^I}{r} &= \frac{\sigma_0}{r^2 \sqrt{3}} \left[R^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{R}{a} \right] \\ \frac{\sigma_r^{II}}{r} &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{a^2}{r^2} (1 + 2 \ln \frac{R}{a}) + 2 \ln \frac{R}{r} - 1 \right] \\ \frac{\sigma_\theta^{II}}{r} &= -\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[\frac{a^2}{r^2} (1 + 2 \ln \frac{R}{a}) + 2 \ln \frac{R}{r} - 1 \right] \end{aligned}$$

Można sprawdzić, że przyjmując

$$1.160 \quad R = a e^{\frac{\sigma_0 \sqrt{3}}{\sigma_0 4}}$$

otrzymamy obwodowe naprężenia wstępne na brzegu otworu:

$$1.161 \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0} = -\sigma \quad \text{dla } r=a,$$

które wraz z naprężeniami użytkowymi (1.155) realizują szagodzony rozkład koncentracji naprężeń przedstawiony na rys. 1.11. Podstawiając (1.160) do (1.157) uzyskujemy wartość poszukiwanego ciśnienia uplastyczniającego:

$$1.162 \quad p_0 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Można sprawdzić, że składowe stanu naprężeń końcowych, będących sumą ^{stanu} wstępnego (1.159) i użytkowego (1.155) nie przekraczają wartości bezwzględnej 2σ i że otrzymane rozwiązanie realizuje zadanie maksymalnego łagodzenia koncentracji naprężeń.

Zwróćmy uwagę na fakt, że obciążenie tarczy winno spełniać warunek $\sigma \leq \frac{\sigma_0}{2}$ aby w stanie końcowym nie pojawiały się uplastycznienia spowodowane rociąganiem pasma.

2. Dystorsje w dwufazowym ciele sprężystym

Rozdział ten stanowi kontynuację rozważań z rozdziału 1 w przypadku ciał wielofazowych, przy czym wzięto pod uwagę najprostszy przypadek ciała dwufazowego.

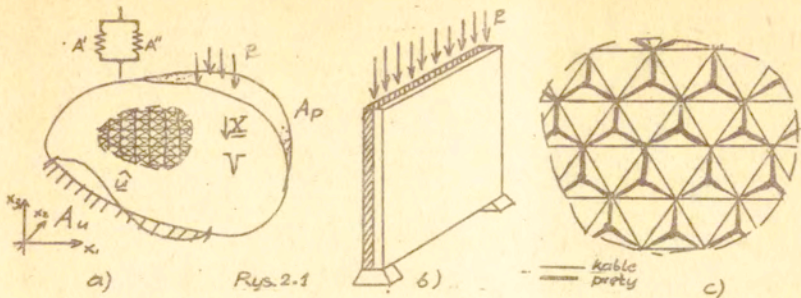
Przyjmijmy model równoległy Veigt'a continuum sprężystego zanurzonego w innym continuum sprężystym. Jako jego pierwowzór można przyjąć ośrodek ciągły /faza I/ z gęsto rozproszoną strukturą kratową fazy drugiej (rys.2.1a). Stosując kontynuualny model opisu tego kompozytu otrzymujemy wyidelizowany ciągły ośrodek dwufazowy /mieszanie/ posiadający tę cechę, że każdemu punktowi geometrycznemu z obszaru V przyporządkowane są dwa punkty materialne należące do różnych faz.

Inne przypadki, w których opisywane podejście może być stosowane pokazano na rys. 2.1b i 2.1c. W pierwszym przypadku dotyczy to tarcz dwuwarstwowych, w drugim zaś regularnych, gęstych struktur prętowo-ciągnowych w opisie kontynuualnym.

Własności sprężyste poszczególnych faz I i II opisywane są tensorami $\underline{A}^I [\underline{B}^I \underline{d}^I \underline{A}^I]$ i $\underline{A}^{II} [\underline{B}^{II} \underline{d}^{II} \underline{A}^{II}]$.

Zakładając możliwość wywoływania niezależnych pól dystorsji $\underline{\xi}^I, \underline{\xi}^{II}$ w obu fazach dyskutowane będą stany wstępne $\underline{\xi}^I, \underline{\xi}^{II}, \underline{\xi}^I, \underline{\xi}^{II}$ wywołane w ustroju, przy założeniu wspólnych deformacji obu faz /zatem $\underline{\xi}^I = \underline{\xi}^{II}$ /. Przypadek, gdy dopuszczalne są deformacje jednej fazy względem drugiej, występujący np. w technologii kablobetonu, opisany będzie w rozdz.5.

Zagadnienia analizy, identyfikacji i sterowania dystorsjami dyskutowane w tym rozdziale są uogólnieniem w stosunku do tych problemów odniesionych do ciała jednofazowego /rozd.1/



Rys. 2.1

2.1. Zależności podstawowe

Rozszerzając rozważania z punktu 1.1 na przypadek ciała dwufazowego wprowadzimy zmodyfikowane związki konstytutywne w stanach wstępnych /por. (1.2)/.

Oznaczając:

$$2.1 \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^I &= \underline{\underline{A}}^I \underline{\underline{\varepsilon}}^I & \underline{\underline{\sigma}}^{II} &= \underline{\underline{A}}^{II} \underline{\underline{\varepsilon}}^{II} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^I &= \underline{\underline{B}}^I \underline{\underline{\sigma}}^I & \underline{\underline{\varepsilon}}^{II} &= \underline{\underline{B}}^{II} \underline{\underline{\sigma}}^{II} \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$2.2 \quad \begin{aligned} \underline{\underline{B}}^I &= \underline{\underline{A}}^I (\underline{\underline{\varepsilon}}^{R^I} - \underline{\underline{\varepsilon}}^I) & \underline{\underline{B}}^{II} &= \underline{\underline{A}}^{II} (\underline{\underline{\varepsilon}}^{R^{II}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{II}) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^I &= \underline{\underline{B}}^I (\underline{\underline{\sigma}}^I + \underline{\underline{\sigma}}^{R^I}) & \underline{\underline{\varepsilon}}^{II} &= \underline{\underline{B}}^{II} (\underline{\underline{\sigma}}^{II} + \underline{\underline{\sigma}}^{R^{II}}) \end{aligned}$$

Zmodyfikowane związki konstytutywne dla stanów końcowych, będących superpozycją stanów wstępnych i stanów użytkowych wywołanych przez obciążenia zewnętrzne: $\underline{\underline{\varepsilon}}^I = \underline{\underline{\varepsilon}}^{R^I} + \underline{\underline{\varepsilon}}^I$, $\underline{\underline{\varepsilon}}^{II} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{R^{II}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{II}$,

$$\underline{\underline{\sigma}}^I = \underline{\underline{\sigma}}^{R^I} + \underline{\underline{\sigma}}^I, \quad \underline{\underline{\sigma}}^{II} = \underline{\underline{\sigma}}^{R^{II}} + \underline{\underline{\sigma}}^{II} \quad \text{przyjmują postać:}$$

$$2.3 \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^I &= \underline{\underline{A}}^I (\underline{\underline{\varepsilon}}^I - \underline{\underline{\varepsilon}}^{R^I}) & \underline{\underline{\sigma}}^{II} &= \underline{\underline{A}}^{II} (\underline{\underline{\varepsilon}}^{II} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{R^{II}}) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^I &= \underline{\underline{B}}^I (\underline{\underline{\sigma}}^I + \underline{\underline{\sigma}}^{R^I}) & \underline{\underline{\varepsilon}}^{II} &= \underline{\underline{B}}^{II} (\underline{\underline{\sigma}}^{II} + \underline{\underline{\sigma}}^{R^{II}}) \end{aligned}$$

Na końcowe stany naprężeń narzucone są więzy statyczne

$$2.4 \quad \mathcal{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^I + \underline{\underline{\sigma}}^{II}, \underline{\underline{X}}, P) = 0$$

rozumiane jako równania równowagi

$$2.5 \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}^I + \underline{\underline{\sigma}}^{II}) + \underline{\underline{X}} &= 0 & \text{w obszarze } V \\ (\underline{\underline{\sigma}}^I + \underline{\underline{\sigma}}^{II})n &= P & \text{na brzegu } A_p \end{aligned}$$

Na końcowe stany odkształceń narzucone są warunki wspólnej deformacji obu faz:

$$2.6 \quad \underline{\underline{\epsilon}}' = \underline{\underline{\epsilon}}'' \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{\epsilon}}$$

oraz więzy geometryczne

$$2.7 \quad C(\underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{Q}}) = \underline{\underline{Q}}$$

rozumiane jako warunki 1.7/, 1.8/.

Zamiast posługiwać się wielkościami opisującymi stany w poszczególnych fazach wygodniej będzie wprowadzić ich symetryczne i antysymetryczne części związane odpowiednio z wielkościami makroskopowymi, opisującymi stany zastępczego, "uśrednionego" ośrodka, oraz z wielkościami mikroskopowymi, opisującymi lokalne zaburzenia stanów makroskopowych w obu fazach.

Zdefiniujemy w związku z tym symetryczne i antysymetryczne /względem obu faz/ części pierwotnych stanów odkształceń i naprężeń oraz operatorów konstytutywnych:

$$2.8 \quad \underline{\underline{\xi}}^s \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{\xi}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\xi}}' + \underline{\underline{\xi}}'')$$

$$\underline{\underline{\xi}}^a \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{\xi}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\xi}}' - \underline{\underline{\xi}}'')$$

$$2.9 \quad \underline{\underline{\sigma}}^s \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}' + \underline{\underline{\sigma}}'')$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^a \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}'')$$

$$2.10 \quad \underline{\underline{A}}^s \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}' + \underline{\underline{A}}'')$$

$$\underline{\underline{A}}^a \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{A}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{A}}' - \underline{\underline{A}}'')$$

$$2.11 \quad \underline{\underline{B}}^s \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{B}}' + \underline{\underline{B}}'')$$

$$\underline{\underline{B}}^a \underline{\underline{d}}^t \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{B}}' - \underline{\underline{B}}'')$$

Wyrażając związki (2.1) stanów pierwotnych przez nowo zdefiniowane składowe, otrzymujemy:

$$2.12 \quad \underline{\underline{\xi}}^s = \underline{\underline{A}}^s \underline{\underline{\xi}}^s + \underline{\underline{A}}^a \underline{\underline{\xi}}^a$$

$$\underline{\underline{\xi}}^a = \underline{\underline{A}}^a \underline{\underline{\xi}}^s + \underline{\underline{A}}^s \underline{\underline{\xi}}^a$$

$$2.13 \quad \underline{\underline{\xi}}^s = \underline{\underline{B}}^s \underline{\underline{\xi}}^s + \underline{\underline{B}}^a \underline{\underline{\xi}}^a$$

$$\underline{\underline{\xi}}^a = \underline{\underline{B}}^a \underline{\underline{\xi}}^s + \underline{\underline{B}}^s \underline{\underline{\xi}}^a$$

Wprowadzając rozkład stanów odkształcenia $\underline{\underline{\xi}}'$, $\underline{\underline{\xi}}''$ oraz stanów naprężenia $\underline{\underline{\sigma}}'$, $\underline{\underline{\sigma}}''$ na części symetryczne (opisujące makroodkształcenia oraz makronaprężenia ośrodka dwufazowego) i antysymetryczne (opisujące mikroodkształcenia oraz mikronaprężenia w poszczególnych fazach), analogicznie do (2.8), (2.9) zmodyfikowane związki konstytutywne (2.3) przyjmują postać:

$$2.14 \quad \underline{\underline{\sigma}}^s = A^s(\underline{\underline{\varepsilon}}^s - \underline{\underline{\varepsilon}}^s) + A^a(\underline{\underline{\varepsilon}}^a - \underline{\underline{\varepsilon}}^a) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^s = B^s(\underline{\underline{\sigma}}^s + \underline{\underline{\sigma}}^s) + B^a(\underline{\underline{\sigma}}^a + \underline{\underline{\sigma}}^a)$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^a = A^a(\underline{\underline{\varepsilon}}^s - \underline{\underline{\varepsilon}}^s) + A^s(\underline{\underline{\varepsilon}}^a - \underline{\underline{\varepsilon}}^a) \quad 2.15 \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^a = B^a(\underline{\underline{\sigma}}^s + \underline{\underline{\sigma}}^s) + B^s(\underline{\underline{\sigma}}^a + \underline{\underline{\sigma}}^a)$$

zaś równania więzów (2.4), (2.6), (2.7) przyjmują postać:

$$2.16 \quad \mathcal{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^s, \underline{\underline{X}}, p) = 0$$

$$\mathcal{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}^s, \underline{\underline{u}}) = 0$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^a = 0$$

Wstawiając (2.14)¹, (2.12)¹ do równań (2.16)^{1,2} oraz wykorzystując (2.16)³ otrzymujemy opis stanu odkształcenia $\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^s$ wspólnego dla obu faz w zależności od stanów pierwotnych i obciążeń sewnętrnych:

$$2.17 \quad \mathcal{Q}(A^s \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\sigma}}^s, \underline{\underline{X}}, p) = 0$$

$$\mathcal{C}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{u}}) = 0$$

Widać stąd, że część stanu odkształceń $\underline{\underline{\varepsilon}}$, wywołana przez pola dystorsji spowodowana jest niezgodnością $\underline{\underline{\sigma}}^s$ z więzami statycznymi i jest identyczna ze stanem odkształceń wywołanych przez zastępcze obciążenie sewnętrne $-\mathcal{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^s)$. Jest to uogólnienie "analogii sił masowych" [77,56] na przypadek ośrodka dwufazowego.

Wstawiając (2.15)¹ i (2.13)¹ do równań (2.16)^{1,2}, natomiast (2.15)² i (2.13)² do warunku (2.16)³ otrzymujemy opis makro i mikronaprężeń w zależności od stanów pierwotnych i obciążeń sewnętrnych:

$$2.18 \quad \mathcal{Q}(\underline{\underline{\sigma}}^s, \underline{\underline{X}}, p) = 0$$

$$\mathcal{C}(B^s \underline{\underline{\sigma}}^s + B^a \underline{\underline{\sigma}}^a + \underline{\underline{\varepsilon}}^s, \underline{\underline{u}}) = 0$$

$$B^a \underline{\underline{\sigma}}^s + B^s \underline{\underline{\sigma}}^a + \underline{\underline{\varepsilon}}^a = 0.$$

Widać stąd, że część stanu naprężeń wywołane przez pola dystorsji spowodowane są niezgodnością makrodystorsji $\underline{\underline{\varepsilon}}^s$ z więzami geometrycznymi /por. "tensor niezgodności" Krönera [33]/ oraz niezgodnością dystorsji z ograniczeniem dotyczącym wspólnoty odkształceń obu faz /mikrodystorsje $\underline{\underline{\varepsilon}}^a$ /.

Układ związków (2.17), (2.18) opisuje najogólniejszy przypadek zagadnienia dystorsji. Uwzględniając w nich zanikające stany pierwotne uzyskujemy opis stanów odkształceń i naprężeń ustroju pozbawionego dystorsji. Oznaczamy te stany jako stany użytkowe $\underline{\underline{\varepsilon}}^s$, $\underline{\underline{\sigma}}^s$, $\underline{\underline{\sigma}}^a$ i traktujemy je w rozważaniach jako znane.

Podstawiając w związkach /2.17/, /2.18/, znikające obciążenia zewnętrzne: siłowe $\underline{X} = \underline{0}$, $\underline{p} = \underline{0}$ oraz przemieszczeniowe $\hat{\underline{u}} = \underline{0}$, uzyskujemy opis wstępny stanów: odkształcenia $\underline{\xi}^s$ i naprężeń $\underline{\xi}^s$, $\underline{\xi}^a$, ortogonalnych do stanów użytkowych w tym sensie, że nie dają wkładu do globalnej energii sprężystej ustroju.

Z postaci równań /2.17/, /2.18/, widać, że w przypadku dwu faz o jednorodnych cechach sprężystych ($\underline{B}^a = \underline{0}$) makro i mikrostanu rozprzęgają się. Odkształcenia wstępne $\underline{\xi}^s$ i makronaprężenia wstępne $\underline{\xi}^s$ zależą jedynie od makrodystorsji $\underline{\xi}^s$, zaś mikronaprężenia wstępne $\underline{\xi}^a$ zależą jedynie od mikrodystorsji $\underline{\xi}^a$ i są lokalnie samozrównoważone.

W przypadku, gdy mamy do czynienia z ustrojem jednofazowym, przyjmując mikrowielkości jako znikające, otrzymujemy z wypisanych zależności związki dyakutowane w rozdz.1.1.

Przypadek sprężania rozważany w powyższych założeniach zdefiniujemy jako "sprężanie wewnętrzne" /wewnątrz jednej fazy/.

Sprężanie "zewnętrzne" zdefiniujemy jako taki przypadek sprężania, w którym pola mikro i makrodystorsji spełniają jednorodne więzy geometryczne /2.7/:

$$2.19 \quad c(\underline{\xi}^s) = 0, \quad c(\underline{\xi}^a) = 0$$

Tecniczna realizacja tego sposobu sprężania polega na wywołaniu niezależnych, geometrycznie zgodnych deformacji pierwotnych obu faz a następnie na ich zespoleniu i cofnięciu przyczyn wywołujących deformacje pierwotne. Jedna z faz może być potraktowana jako sprężająca zaś druga, jako sprężana.

2.2. Analiza stanów wstępnych. Identyfikacja pól dystorsji

Przeprowadźmy konstrukcję rozwiązania zagadnień brzegowych (2.17) oraz (2.18), opisujących wstępne stany naprężeń i odkształceń, po położeniu $\underline{x} = \underline{0}$, $\underline{p} = \underline{0}$, $\underline{u} = \underline{0}$.

Wykorzystajmy w tym celu rozkład pól odkształceń i naprężeń pierwotnych na (ortogonalne w sensie iloczynu $\int_{\Omega} \underline{\xi}^{\circ} dV$) części składowe opisujące odpowiednio stany zgodne z więzami statycznymi (2.4) i oznaczone symbolem $\underline{\mathcal{R}}$ oraz stany zgodne z więzami geometrycznymi (2.7) i oznaczone symbolem $\underline{\mathcal{C}}$ /por. (1.20) (1.30) /:

$$2.20 \quad \underline{\xi}^{\circ s} = \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}} \qquad 2.21 \quad \underline{\xi}^{\circ s} = \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}}$$

$$\underline{\xi}^{\circ a} = \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{C}} \qquad \underline{\xi}^{\circ a} = \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{C}}$$

przy czym:

$$2.22 \quad \underline{\mathcal{R}}(\underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{R}}) = \underline{\mathcal{R}}(\underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{R}}) = \underline{0}$$

$$\underline{\mathcal{C}}(\underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}}) = \underline{\mathcal{C}}(\underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{C}}) = \underline{0}$$

Związki (2.12) i (2.13) wiążące stany pierwotne przyjmują po uwzględnieniu (2.20), (2.21) postać:

$$2.23 \quad \underline{\xi}^{\circ s} = \underline{A}^s(\underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}}) + \underline{A}^a(\underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{C}}) \qquad \underline{\xi}^{\circ s} = \underline{B}^s(\underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}}) + \underline{B}^a(\underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{C}})$$

$$\underline{\xi}^{\circ a} = \underline{A}^a(\underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}}) + \underline{A}^s(\underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{C}}) \qquad \underline{\xi}^{\circ a} = \underline{B}^a(\underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}}) + \underline{B}^s(\underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{R}} + \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{C}})$$

Podstawiając (2.21)¹ do (2.17)¹ i wykorzystując (2.22)¹ otrzymujemy z równań więzów statycznych:

$$2.25 \quad \underline{\xi}^{\circ s} = \underline{A}^{-1s} \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}}$$

Rozwiązanie to spełnia także równania więzów geometrycznych (2.17)², co wynika z podstawienia (2.23)¹ do (2.25):

$$2.26 \quad \underline{\xi}^{\circ s} = \underline{\xi}^{\circ s}_{\mathcal{C}} + \underline{A}^{-1s} \underline{A}^a \underline{\xi}^{\circ a}_{\mathcal{C}}$$

oraz z uwzględnienia warunku (2.22)².

Zatem rozwiązania (2.25) lub (2.26) opisują poszukiwane pola odkształceń wstępnych wyrażone przez wywołujące je pola naprężeń lub odkształceń pierwotnych.

Podobnie, wykorzystując związki (2.20)¹, (2.24) i (2.22)² można sprawdzić, że stany

$$2.27 \quad \underline{\underline{\hat{S}}}^s = -\underline{\underline{\hat{S}}}^s \\ \underline{\underline{\hat{S}}}^a = -\underline{\underline{\hat{S}}}^a - \underline{\underline{\hat{B}}}^s \underline{\underline{\hat{B}}}^a \underline{\underline{\hat{S}}}^c$$

stanowią rozwiązanie układu równań (2.18), a zatem opisują poszukiwane pola naprężeń wstępnych wywołane przez naprężenia pierwotne. Pola te można wyrazić przez odkształcenia pierwotne przekształcając rozwiązania (2.27) przy użyciu związków (2.23), (2.24):

$$2.28 \quad \underline{\underline{\hat{S}}}^s = \underline{\underline{A}}^s \underline{\underline{\hat{E}}}^s + \underline{\underline{A}}^a \underline{\underline{\hat{E}}}^a \\ \underline{\underline{\hat{S}}}^a = -\underline{\underline{\hat{B}}}^s [\underline{\underline{\hat{E}}}^a + \underline{\underline{B}}^a (\underline{\underline{A}}^s \underline{\underline{\hat{E}}}^s + \underline{\underline{A}}^a \underline{\underline{\hat{E}}}^a)] .$$

Podstawiając w rozwiązaniach (2.25) + (2.28) $\underline{\underline{\hat{E}}}^a = \underline{\underline{0}}$, $\underline{\underline{\hat{S}}}^a = \underline{\underline{0}}$ otrzymujemy opis stanów wstępnych wywołanych makrodystorsjami w ośrodku dwufazowym, który to opis wzbogaca rozwiązanie (1.36) otrzymane dla ośrodka jednofazowego o człony mikronaprężeń wstępnych $\underline{\underline{\hat{S}}}^a$ wywołanych na skutek różnic sztywności obu faz.

W przypadku pól dystorsji spełniających (2.19) należy przyjąć /por. (2.25) /:

$$2.29 \quad \underline{\underline{\hat{E}}}^s = \underline{\underline{\hat{E}}}^c, \quad \underline{\underline{\hat{E}}}^a = \underline{\underline{\hat{E}}}^c, \quad \underline{\underline{\hat{S}}}^s = \underline{\underline{\hat{S}}}^c, \quad \underline{\underline{\hat{S}}}^a = \underline{\underline{\hat{S}}}^c,$$

co prowadzi do rozwiązania w postaci:

$$2.30 \quad \underline{\underline{\hat{E}}}^s = \underline{\underline{\hat{A}}}^s \underline{\underline{\hat{S}}}^c = \underline{\underline{\hat{E}}}^c + \underline{\underline{\hat{A}}}^s \underline{\underline{\hat{A}}}^a \underline{\underline{\hat{E}}}^c \\ \underline{\underline{\hat{S}}}^a = -\underline{\underline{\hat{B}}}^s \underline{\underline{\hat{E}}}^c = -\underline{\underline{\hat{S}}}^c - \underline{\underline{\hat{B}}}^s \underline{\underline{\hat{B}}}^a \underline{\underline{\hat{S}}}^c$$

gubiącej w stosunku do rozwiązań (2.25)÷(2.28) makronaprężenia wstępne $\underline{\underline{\hat{S}}}^s$, charakterystyczne dla rozwiązania (1.36).

Związki (2.30) pozwalają określić jednoznacznie stany wstępne w obu fazach. Dają też prostą receptę na identyfikację pól wywołujących dane stany wstępne.

2.3. Sterowanie polami dystorsji

Przedyskutujemy zagadnienie sprzężania w ośrodku dwufazowym, co będzie stanowiło dopełnienie rozważań nad sprzężaniem wewnętrznym w ośrodku jednofazowym - opisanych w rozdz. 1.3. Szczególnie interesować nas będzie przypadek sprzężania zewnętrznego, którego cechą charakterystyczną jest możliwość lokalnego sterowania stanów naprężeń w jednej z faz /w fazie sprzężanej np. I/ przez wymuszanie odpowiednich mikronaprężeń $\underline{\underline{G}}^a$. Wprowadzane w tym celu dystorsje $\underline{\underline{G}}^a$ /realizowane np. przez sprzężającą fazę siatki kratowej II/ nie mają wpływu na stan makronaprężeń $\underline{\underline{G}}^s$.

Rozważmy na wstępie możliwości wywołania w fazie I dowolnych stanów wstępnych.

Z równań (2.30) wynika, że możliwe jest jednoczesne wywołanie w fazie I dowolnie ustalonych, niezależnych od siebie stanów wstępnego odkształcenia $\underline{\underline{E}}^I$ i naprężenia $\underline{\underline{G}}^I$.

Należy w tym celu wprowadzić do ustroju stany pierwotnych odkształceń ^{identyfikowane} opisane związkami:

$$2.31 \quad \begin{aligned} \underline{\underline{G}}^s &= \underline{\underline{E}}^I + \underline{\underline{A}}^{1s} \underline{\underline{A}}^a \underline{\underline{B}}^s \underline{\underline{G}}^I \\ \underline{\underline{E}}^a &= -\underline{\underline{B}}^s \underline{\underline{G}}^I \end{aligned}$$

Związki (2.31)¹ pozwalają określić pierwotne deformacje poszczególnych faz.

Jeżeli przyjmiemy, że stany pierwotne wywoływane są jedynie w fazie sprzężającej, czyli wprowadzimy ograniczenie:

$$2.32 \quad \underline{\underline{E}}^I = 0, \quad \underline{\underline{G}}^I = 0,$$

to z rozwiązania (2.31) wynika, że możliwe jest wywołanie dowolnie ustalonego stanu naprężeń wstępnych $\underline{\underline{G}}^I$ w fazie sprzężanej przez wymuszenie odkształceń pierwotnych fazy sprzężającej:

$$2.33 \quad \underline{\underline{E}}^a = 2 \underline{\underline{B}}^s \underline{\underline{G}}^I$$

Wynika stąd oczywisty wniosek, że przyjęcie kryterium minimalizacji wyciężenia $J_{\sigma'}$ w fazie I, przy czym

$$2.34 \quad J_{\sigma'} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}' \underline{B} \underline{\sigma}' dV = \frac{1}{2} \int_V (\underline{\sigma}'_c + \underline{\xi}') \underline{B}' (\underline{\sigma}'_c + \underline{\xi}') dV$$

prowadzi do rozwiązania

$$2.35 \quad \underline{\sigma}'_c = -\underline{\xi}'$$

które związane jest ze znikaniem stanu naprężeń końcowych $\underline{\sigma}' = \underline{0}$ w fazie naprężanej i przejściem całego obciążenia przez fazę drugą. Analogicznie, można regulować pole deformacji $\underline{\xi}'$.

Narzucając w powyższych rozważaniach określony koszt sprężania, otrzymujemy rozwiązania nie tak trywialne jak /2.35/, lecz analogiczne do uzyskanych w rozdziale 1.3.2.

Można dyskutować szereg technicznie interesujących przypadków o dystorsjach skrępowanych, podlegających dodatkowym ograniczeniom, które nie dopuszczają rozwiązań /2.35/ /por § 5/.

2.3.1. Zagadnienie optymalnego sprężania w ośrodkach o ograniczonych wyciężeniach dopuszczalnych.

Przyjmijmy, analogicznie do sformułowania w rozdz. 1.3.3., że na stany wyciężenia w materiałach obu faz narzucone są ograniczenia

$$2.36 \quad K'(\underline{\sigma}') \leq K_0'^2 \quad K''(\underline{\sigma}'') \leq K_0''^2$$

Niech związki /2.36/ opisują w przestrzeni stanów naprężeń wypukłe obszary stanów dopuszczalnych, ograniczone gładkimi powierzchniami.

Zagadnienie optymalnego sprężania w ośrodku dwufazowym sformułujmy jako minimalizację funkcjonału J_{ξ} :

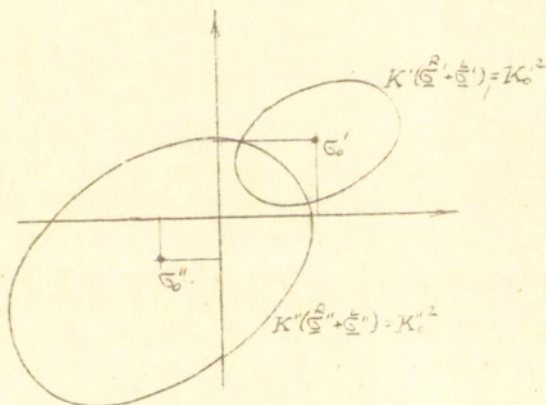
$$2.37 \quad J_{\xi} = \int_V \left(\frac{1}{2} \underline{\xi}' A' \underline{\xi}' + \frac{1}{2} \underline{\xi}'' A'' \underline{\xi}'' \right) dV$$

gdzie funkcjonal J_{ξ} wyrażający zmiany konfiguracji wyjściowej miarą ilości wprowadzonych dystorsji, przy ograniczeniach w postaci więzów statycznych /2.4/ i geometrycznych /2.6/, /2.7/, w postaci związków konstytutywnych /2.3/ oraz w postaci ograniczeń nierównościowych /2.36/. Dla przypadku płaskiego, jeśli funkcje K' , K'' opisują wyciążenie w materiale faz poddanych izotropowym wzmocnieniom, to ograniczenia /2.36/ można przyjąć w postaci / por. rys. 2.2./:

$$2.38 \quad \frac{1}{2} (\underline{\sigma}' + \underline{\sigma}' - \underline{\sigma}_0') \underline{B}' (\underline{\sigma}' + \underline{\sigma}' - \underline{\sigma}_0') - K_0'^2 \leq 0$$

$$\frac{1}{2} (\underline{\sigma}'' + \underline{\sigma}'' - \underline{\sigma}_0'') \underline{B}'' (\underline{\sigma}'' + \underline{\sigma}'' - \underline{\sigma}_0'') - K_0''^2 \leq 0$$

W przypadku, gdy stany wstępne i pierwotne mogą występować samodzielnie, należy wziąć dodatkowo pod uwagę ograniczenia /2.36/ odniesione do tych stanów



Rys. 2.2

Interesujący jest przypadek, gdy jedna z faz nie przenosi naprężeń rozciągających, zaś druga ściskających, natomiast po wprowadzeniu odpowiednich naprężeń wstępnych ośrodek dwufazowy nabiera cech materiałowych pozwalających na przenoszenie tych naprężeń. Sytuacja taka występuje np. w przypadku sprężania materiałów kruchych /beton/ wiotkimi cięgnami stalowymi.

Rozwiązania zagadnienia optymalnego sprężania /2.37/, /2.5/, /2.6/, /1.7/, /1.8/, /2.3/, /2.36/ ze względu na minimalizację funkcjonału J poszukiwać będziemy przyjmując funkcjonał uogólniony /abstrahując chwilowo od warunków brzegowych/:

$$2.39 \quad J(\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\xi}}'', \underline{\underline{\lambda}}, \psi, \psi'') = \int F(\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\xi}}'', \underline{\underline{\lambda}}, \psi, \psi'') dV = \\ = \int \left[\underline{\underline{\xi}}^T A \underline{\underline{\xi}} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\xi}}''^T A'' \underline{\underline{\xi}}'' + \lambda [\text{div} A' (\text{grad}^2 \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{\xi}}) + \text{div} A'' (\text{grad}^2 \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{\xi}}'')] \right. \\ \left. + \psi [K' (A' (\text{grad}^2 \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{\xi}}) + \frac{1}{2} \underline{\underline{\xi}}'') - K_0^2] + \psi'' [K'' (A'' (\text{grad}^2 \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{\xi}}'') + \frac{1}{2} \underline{\underline{\xi}}'') - K_0^2] \right] dV$$

gdzie: $\underline{\underline{\lambda}}, \psi, \psi'' > 0$, $\psi, \psi'' > 0$ - współczynniki Lagrange'a a związane odpowiednio z ograniczeniami /2.5/¹, /2.36/ zaś przyjęcie $\underline{\underline{\xi}} = \text{grad}^2 \underline{\underline{Q}}$ /symetryczna część gradientu pola przemieszczeń wstępnych/ gwarantuje zgodność z więzami geometrycznymi /2.7/.

Warunkiem koniecznym minimum warunkowego /2.37/ jest spełnienie warunków koniecznych punktu siodłowego /typu $\min \max J(\underline{\underline{Q}}, \underline{\underline{\xi}}, \underline{\underline{\xi}}'', \underline{\underline{\lambda}}, \psi, \psi'')$ / funkcjonału /2.39/. Wariację funkcjonału /2.39/ można wypisać w postaci [91 str. 459]:

$$2.40 \quad \delta J = \int \left\{ F_{\underline{\underline{Q}}} \delta \underline{\underline{Q}} + F_{\underline{\underline{\xi}}} \delta \underline{\underline{\xi}} + F_{\underline{\underline{\xi}}''} \delta \underline{\underline{\xi}}'' - \text{div} F_{\text{grad}^2 \underline{\underline{Q}}} \delta \underline{\underline{Q}} + F_{\underline{\underline{\lambda}}} \delta \underline{\underline{\lambda}} + F_{\psi} \delta \psi + F_{\psi''} \delta \psi'' \right\} dV + \int_A (F_{\text{grad}^2 \underline{\underline{Q}}} \delta \underline{\underline{Q}}) n \delta \underline{\underline{Q}} dA$$

Warunki konieczne punktu siodłowego przyjmują postać:

[1, 35]:

$$2.41 \quad F_{\underline{\underline{Q}}} = A' \underline{\underline{\xi}} + A'' \text{grad}^2 \underline{\underline{\lambda}} - \psi, A' \frac{\partial K'(\underline{\underline{Q}})}{\partial \underline{\underline{Q}}} = 0$$

$$F_{\underline{\underline{\xi}}} = A'' \underline{\underline{\xi}} + A'' \text{grad}^2 \underline{\underline{\lambda}} - \psi, A'' \frac{\partial K''(\underline{\underline{Q}})}{\partial \underline{\underline{Q}}} = 0$$

$$\text{div} F_{\text{grad}^2 \underline{\underline{Q}}} = - \text{div} \left\{ A' \text{grad}^2 \underline{\underline{\lambda}} + A'' \text{grad}^2 \underline{\underline{\lambda}} - \left[\psi, A' \frac{\partial K'(\underline{\underline{Q}})}{\partial \underline{\underline{Q}}} + \psi, A'' \frac{\partial K''(\underline{\underline{Q}})}{\partial \underline{\underline{Q}}} \right] \right\} = 0$$

$$2.42 \quad F_{\underline{\lambda}} = \operatorname{div}(\underline{\sigma}' - \underline{\xi}') + \operatorname{div}(\underline{\sigma}'' - \underline{\xi}'') = 0$$

$$2.43 \quad \begin{aligned} F_{\psi'} &= K'(\underline{\sigma}') - K_0'^2 \leq 0 & F_{\psi''} &= K''(\underline{\sigma}'') - K_0''^2 \leq 0 \\ \psi' F_{\psi'} &= \psi' [K'(\underline{\sigma}') - K_0'^2] = 0 & \psi'' F_{\psi''} &= \psi'' [K''(\underline{\sigma}'') - K_0''^2] = 0 \\ \psi' &\geq 0 & \psi'' &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{gd: ie: } \underline{\sigma}' = \underline{A}'(\operatorname{grad}^2 \underline{\lambda} - \underline{\xi}') + \underline{\xi}' \quad \underline{\sigma}'' = \underline{A}''(\operatorname{grad}^2 \underline{\lambda} - \underline{\xi}'') + \underline{\xi}''$$

w obszarze V z żądaniem znikania całki powierzchniowej wyrażenia /2.40/, skąd wynika wniosek:

$$2.44 \quad - \left\{ (A' + A'') \operatorname{grad}^2 \underline{\lambda} - \left[\psi' A' \frac{\partial K'(\underline{\sigma}')}{\partial \underline{\sigma}'} + \psi'' A'' \frac{\partial K''(\underline{\sigma}'')}{\partial \underline{\sigma}''} \right] \right\}_{n=0} = 0$$

na A_p

Dopisując warunki brzegowe (2.5): $(\underline{\sigma}' - \underline{\xi}' + \underline{\sigma}'' - \underline{\xi}'') \cdot \underline{n} = 0$ na A_p oraz (4.8): otrzymujemy komplet związków, które ze względu na $\frac{\underline{\lambda} = 0}{\text{na } A_u}$ wypukłość funkcji podcałkowej /2.37/ oraz powierzchni ograniczającej $K / \underline{\sigma} /$ stanowią warunki konieczne i dostateczne minimum warunkowego funkcjonału /2.37/. Można sprawdzić, że zadość warunkom /2.41/ ÷ /2.44/, /2.5/² /1.8/ czyni rozwiązanie /zapisane przy użyciu rozkładu pół na części statycznie i geometrycznie dopuszczalne /2.20/, /2.21// :

$$2.45 \quad \underline{\underline{\lambda}} = 0$$

$$\underline{\underline{\xi}}_c' = (A' + A'')^{-1} A'' \left\{ [\psi' \frac{\partial K'(\underline{\sigma}')}{\partial \underline{\sigma}'}]_c - [\psi'' \frac{\partial K''(\underline{\sigma}'')}{\partial \underline{\sigma}''}]_c \right\}$$

$$\underline{\underline{\xi}}_c'' = (A' + A'')^{-1} A' \left\{ -[\psi' \frac{\partial K'(\underline{\sigma}')}{\partial \underline{\sigma}'}]_c + [\psi'' \frac{\partial K''(\underline{\sigma}'')}{\partial \underline{\sigma}''}]_c \right\}$$

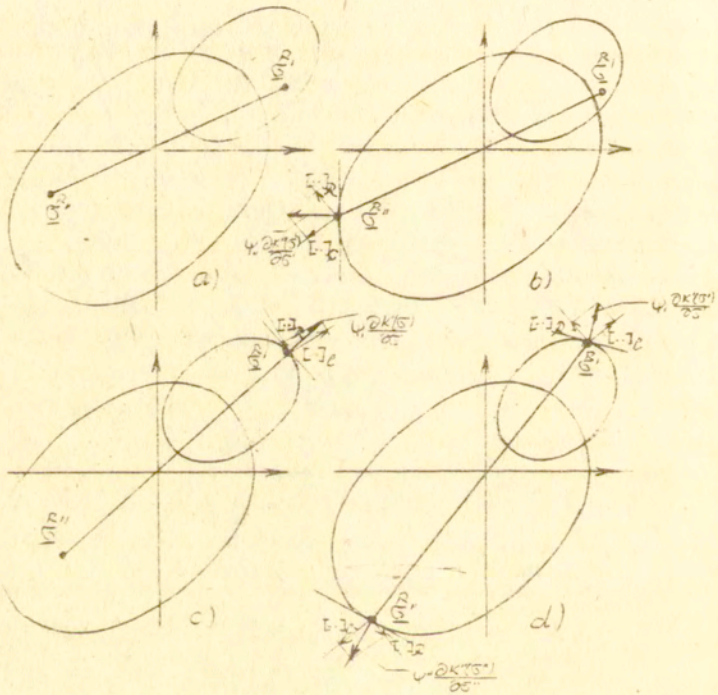
$$\underline{\underline{\xi}}_{\mathcal{A}}' = [\psi' \frac{\partial K'(\underline{\sigma}')}{\partial \underline{\sigma}'}]_{\mathcal{A}}$$

$$\underline{\underline{\xi}}_{\mathcal{A}}'' = [\psi'' \frac{\partial K''(\underline{\sigma}'')}{\partial \underline{\sigma}''}]_{\mathcal{A}}$$

$$2.46 \quad \operatorname{grad}^2 \underline{\lambda} = (A' + A'')^{-1} (A' [\psi' \frac{\partial K'(\underline{\sigma}')}{\partial \underline{\sigma}'}]_c + A'' [\psi'' \frac{\partial K''(\underline{\sigma}'')}{\partial \underline{\sigma}''}]_c)$$

wraz z warunkami /2.43/

Występujące w tych związkach gradienty ^{dla} powierzchni ograniczających $K(\xi)$, $K''(\xi)$ pokazano na rysunkach 2.3 symbolizujących różne sytuacje związane z generowaniem się dystorsji w poszczególnych fazach.



Rys. 2.3

Otrzymane w ten sposób poszukiwane optymalne pola dystorsji opisane związkami /2.45/, /2.43/ nie wywołujące deformacji wstępnych.

Interesujący jest fakt, że rozwiązanie /2.45/, /2.43/ można uzyskać na innej drodze-dwustopniowo. Wyznaczając w pierwszym kroku rozwiązanie zagadnienia

$$2.47 \quad \min J_{\underline{\varepsilon}} = \min \int_V \left(\frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^s \underline{\underline{B}}^s \underline{\underline{\varepsilon}}^s + \frac{1}{2} \underline{\underline{\varepsilon}}^n \underline{\underline{B}}^n \underline{\underline{\varepsilon}}^n \right) dV$$

przy ograniczeniach /2.5/, /2.6/, /1.7/, /1.8/, /2.3/, /2.36/ a następnie, wyszukując w otrzymanym stąd zbiorze rozwiązań to, które spełnia kryterium drugiego stopnia

$$2.48 \quad \min J_{\underline{\varepsilon}}^R = \min \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^R \underline{\underline{A}}^R \underline{\underline{\varepsilon}}^R dV$$

otrzymamy rezultat /2.45/ /2.43/. Jest to analogia do sytuacji dyskutowanej w § 1.33 dla jednoskładnikowego continuum. Zapiszmy symbolicznie konkluzję

$$2.49 \quad \min J_{\underline{\varepsilon}}^c \iff \min J_{\underline{\varepsilon}}^B J_{\underline{\varepsilon}}^R$$

Rozwiązanie etapu pośredniego związanego z minimalizacją globalnego wyteżenia ustroju w stanie wstępnym /2.47/ wyznacza pola dystorsji niejednoznacznie, z dokładnością do składowej $\underline{\underline{\varepsilon}}^c$:

$$2.50 \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^c = \underline{\underline{\varepsilon}}^a + \underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1}{2} \left[\psi_1 \frac{\partial K'(\underline{\underline{\sigma}}^1)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1} - \psi_2 \frac{\partial K''(\underline{\underline{\sigma}}^2)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} \right]$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^e = \frac{1}{2} \left(\left[\psi_1 \frac{\partial K'(\underline{\underline{\sigma}}^1)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1} \right]_{\underline{\underline{\sigma}}^1} + \left[\psi_2 \frac{\partial K''(\underline{\underline{\sigma}}^2)}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} \right]_{\underline{\underline{\sigma}}^2} \right)$$

Można sprawdzić, wykorzystując związki /2.25/, /2.28/, że rozwiązanie /2.50/ /2.43/ związane jest z identycznym polem naprężeń wstępnych co rozwiązanie /2.45/, /2.43/ i z dowolnym polem deformacji wstępnych $\underline{\underline{\varepsilon}}^B$.

Można zauważyć, że o ile funkcje $K'(\underline{\underline{\sigma}})$, $K''(\underline{\underline{\sigma}})$ pokrywać się będą z funkcjami opisującymi powierzchnie plastyczne w materiałach sprężysto-plastycznych faz I i II, to rozwiązanie /2.43/, /2.45/ zagadnienia optymalnego sprężania ze względu na kryterium /2.37/ $\min J_{\underline{\varepsilon}}$ daje te same rozkłady naprężeń wstępnych $\underline{\underline{\sigma}}^1$, $\underline{\underline{\sigma}}^2$ jakie wywołane zostaną w ciele dwufazowym o cechach sprężysto-

plastycznych.

Dystorsje plastyczne generowane w tych ciałach przyjmują postać:

$$2,51 \quad \underline{\underline{\xi}}' = \psi_i \frac{\partial K'(\underline{\underline{\sigma}}')}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'} = \left[\psi_i \frac{\partial K'(\underline{\underline{\sigma}}')}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'} \right]_{\mathcal{A}} + \left[\psi_i \frac{\partial K'(\underline{\underline{\sigma}}')}{\partial \underline{\underline{\sigma}}'} \right]_c$$

$$\underline{\underline{\xi}}'' = \psi_{ii} \frac{\partial K''(\underline{\underline{\sigma}}'')}{\partial \underline{\underline{\sigma}}''} = \left[\psi_{ii} \frac{\partial K''(\underline{\underline{\sigma}}'')}{\partial \underline{\underline{\sigma}}''} \right]_{\mathcal{A}} + \left[\psi_{ii} \frac{\partial K''(\underline{\underline{\sigma}}'')}{\partial \underline{\underline{\sigma}}''} \right]_c$$

Rozwiązanie /2.43/, /2.51/ realizuje kryterium min J_{ξ}^s /por. zasadę wariacyjną dla ciał jednofazowych [66]/ i jest szczególnym przypadkiem rozwiązania /2.43/, /2.50/. Różni się ono natomiast od rozwiązania /2.43/, /2.45/ nieznikającym polem deformacji wstępnej $\underline{\underline{\xi}}$.

Można użyć sformułowania, że ciała sprężysto-plastyczne posiadają zdolność samospężania ze względu na ograniczenia /2.36/ i kryterium min J_{ξ} . Jednak efekt redystrybucji stanu naprężeń zostaje w nich osiągnięty przy użyciu większej ilości wprowadzanych dystorsji J_{ξ} niż to można osiągnąć w ośrodkach sprężanych optymalnie /ze względu na kryterium min $J_{\xi}/_e$.

2.3.2. Dyskusja przypadków szczególnych

Kładąc w powyższych rozważaniach formalnie wszystkie wielkości związane z fazą II jako znikające otrzymujemy wyniki dotyczące sprężania "wewnętrzne" w ośrodkach jednofazowych. Stany wstępne, możliwe do osiągnięcia przez sprężanie, ograniczają się wtedy do postaci /1.36/ zaś wnioski jakościowe dotyczące rozwiązań /por. /2.49// zachowują swą słuszność.

Drugim przypadkiem szczególnym, którym będziemy się dalej zajmować, interesującym z technologicznego punktu widzenia jest sprężanie "zewnętrzne" w ośrodkach dwufazowych, kiedy to pola dystorsji muszą spełniać ograniczenia /2.19/ /por. przykład rozdz. 2.3.3/.

Ograniczenia /2.19/ można uwzględnić przy poszukiwaniu rozwiązań optymalnych przyjmując w funkcjonalnie /2.39/ pola dystorsji o postaci:

$$2.52 \quad \underline{\xi}' = \text{grad}^S \underline{u}' \quad \underline{\xi}'' = \text{grad}^S \underline{u}''$$

gwarantującej istnienie geometrycznie zgodnych pól dystorsji \underline{u}' , \underline{u}'' .

Warunki stacjonarności $\stackrel{(2.41)^3, (2.44)}{(2.42)} (2.43)$ nie ulegają wtedy zmianie, natomiast warunki $(2.41)^2$ prowadzą do:

$$2.53 \quad \begin{aligned} - \text{div} \underline{A}' \text{grad}^S \underline{u}' - \text{div} \underline{A}' \text{grad}^S \underline{\lambda} + \text{div} \left[\psi, \underline{A}' \frac{\partial K'(\xi)}{\partial \xi'} \right]_c &= \underline{0} \\ - \text{div} \underline{A}'' \text{grad}^S \underline{u}'' - \text{div} \underline{A}'' \text{grad}^S \underline{\lambda} + \text{div} \left[\psi, \underline{A}'' \frac{\partial K''(\xi)}{\partial \xi''} \right]_c &= \underline{0} \end{aligned}$$

O ile istnieje rozwiązanie warunków $\stackrel{(2.41)^3}{(2.42)} \div (2.44)$, (2.53) , $(2.5)^2$, (1.8) to jest ono poszukiwanym rozwiązaniem.

Można sprawdzić, że zadość powyższym warunkom czyni rozwiązanie (2.45) , (2.43) ograniczone do pól dystorsji jedynie geometrycznie dopuszczalnych (2.52) :

$$\begin{aligned} \underline{\xi}'_c &= \text{grad}^S \underline{u}' = (\underline{A}' + \underline{A}'')^{-1} \underline{A}'' \left\{ \left[\psi, \frac{\partial K'(\xi)}{\partial \xi'} \right]_c - \left[\psi, \frac{\partial K''(\xi)}{\partial \xi} \right]_c \right\} \\ \underline{\xi}''_c &= \text{grad}^S \underline{u}'' = (\underline{A}' + \underline{A}'')^{-1} \underline{A}' \left\{ \left[\psi, \frac{\partial K'(\xi)}{\partial \xi} \right]_c + \left[\psi, \frac{\partial K''(\xi)}{\partial \xi''} \right]_c \right\} \end{aligned}$$

2.54

$$\underline{\xi}'_{\underline{Q}} = \underline{0}$$

$$\underline{\xi}''_{\underline{Q}} = \underline{0}$$

wraz z warunkami (2.43) .

Związane jest ono, podobnie jak rozwiązanie (2.45) , (2.43) , ze znikającymi deformacjami wstępnymi.

Oddziaływania międzyfazowe redukują się w tym przypadku jedynie do oddziaływań za pośrednictwem pól sił objętościowych

$$\underline{X}' = -\text{div} \underline{A}' \text{grad}^S (\underline{Q} - \underline{u}'), \quad \underline{X}'' = -\text{div} \underline{A}'' \text{grad}^S (\underline{Q} - \underline{u}'')$$

w obszarze V i powierzchniowych $\underline{P}' = \underline{A}' \text{grad}^S (\underline{Q} - \underline{u}') \cdot \underline{n}$,
 $\underline{P}'' = \underline{A}'' \text{grad}^S (\underline{Q} - \underline{u}'') \cdot \underline{n}$

na brzegu Ap . Siły te są zrównoważone, co wynika z warunków

$$(2.42) (2.5)^2: \underline{X}' + \underline{X}'' = \underline{0}, \quad \underline{P}' + \underline{P}'' = \underline{0}$$

Analogicznie do rozważań ogólnych, rozwiązanie (2.54), (2.43) można uzyskać dwustopniowo, korzystając z zasady (2.49).

Rozwiązanie pośrednie, związane z minimalizacją globalnego wyteżenia \mathcal{J}_E (2.47) wyznacza poszukiwane pola z dokładnością do różnic między polami przemieszczeń wstępnych i dystorsji

$$\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}', \quad \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}'':$$

$$\text{grad}^S(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}') = - (A' + A'')^{-1} A'' \left\{ [\psi, \frac{\partial K(\underline{\underline{S}})}{\partial \underline{\underline{S}}}]_e - [\psi, \frac{\partial K''(\underline{\underline{S}})}{\partial \underline{\underline{S}}}]_e \right\}$$

$$2.55 \quad \text{grad}^S(\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{R}}'') = - (A' + A'')^{-1} A' \left\{ [\psi, \frac{\partial K(\underline{\underline{S}})}{\partial \underline{\underline{S}}}]_e + [\psi, \frac{\partial K'(\underline{\underline{S}})}{\partial \underline{\underline{S}}}]_e \right\}$$

Stany naprężeń wstępnych wyznaczone w tym przypadku pokrywają się z naprężeniami związanymi z rozwiązaniem (2.54), (2.43), zaś stan deformacji $\underline{\underline{R}}$ jest dowolny /nieokreślony/.

Można zauważyć analogicznie do rozważań z rozdz. 2.3.4, że przyjmując rozwiązanie w postaci:

$$\underline{\underline{E}}_c' = \text{grad}^S \underline{\underline{U}}' = [\psi, \frac{\partial K(\underline{\underline{S}})}{\partial \underline{\underline{S}}}]_e$$

$$2.56 \quad \underline{\underline{E}}_c'' = \text{grad}^S \underline{\underline{U}}'' = [\psi, \frac{\partial K'(\underline{\underline{S}})}{\partial \underline{\underline{S}}}]_e$$

$$\underline{\underline{E}}_R' = \underline{\underline{E}}_R'' = 0$$

wraz z warunkami (2.43) uzyskujemy stany naprężeń wstępnych identyczne z tymi, które określone są rozwiązaniem zagadnienia min \mathcal{J}_E w przypadku, gdy w miejsce funkcji skalarnych $K'(\underline{\underline{S}})$ $K''(\underline{\underline{S}})$ występuje jedna funkcja $K(\underline{\underline{S}}', \underline{\underline{S}}'')$ opisująca wyteżenie związane z naprężeniami stycznymi pomiędzy fazami, które ograniczone jest przez warunek plastyczności, wtedy związki (2.43), (2.56) opisują ośrodek dwufazowy o fazach sprężystych połączonych sprężysto-plastycznie. /np. dwie tarcze sprężyste sklejone materiałem o cechach sprężysto-plastycznych/.

W ogólnym przypadku można formalnie na rozwiązanie (2.43) (2.55) patrzeć jak na związki opisujące dystorsje plastyczne w ośrodku dwufazowym o pewnych specyficznych, nielokalnych cechach plastycznych, które powodują, że przekroczenie granicy plastyczności wewnątrz fazy generuje dystorsje plastyczne pomiędzy fazami.

Zwróćmy na zakończenie uwagę na przypadek szczególny, kiedy dopuszczamy możliwość wywoływania dystorsji jedynie w fazie II ($\underline{Q}' = \underline{Q}$), natomiast w rozwiązaniu ingeruje jedynie ograniczenie /2.43/¹ związane z fazą I. Kładąc formalnie $\psi_{,i} = 0$ otrzymujemy z rozwiązania zagadnienia min $\mathcal{J}^{\mathcal{E}}$ /2.42/ /2.43/ /2.55/ związki opisujące pole deformacji wstępnej:

$$2.57 \quad \text{grad}^s \underline{Q}' = - (A' + A'')^{-1} A'' \left[\psi, \frac{\partial K'(\underline{\sigma}')}{\partial \underline{\sigma}'} \right]_c$$

$$K'(\underline{\sigma}') - K_0'^2 \leq 0$$

$$\psi [K(\underline{\sigma}') - K_0'^2] = 0$$

$$\psi \geq 0$$

$$\text{gdzie: } \underline{\sigma}' = A' \text{grad}^s \underline{Q}' + \underline{\sigma}^1$$

Odpowiada to sytuacji, gdy faza słabsza /I/ zespolona jest z fazą mocną, poddaną deformacji pierwotnej \underline{Q}'' /np. siatkobeton sprężany/.

Jeśli istnieje rozwiązanie \underline{Q}' związków /2.57/ to pole dystorsji \underline{Q}'' można wyznaczyć ze związku /por. /2.42/¹

$$2.58 \quad \text{grad}^s \underline{Q}'' = \underline{B}'' (A' + A'') \text{grad}^s \underline{Q}'$$

W przypadku, gdy cechy sprężystości obu faz są identyczne ($A' = A'' \stackrel{\text{def}}{=} A$), /2.57/ /2.58/ można sprowadzić do postaci /podstawiając ograniczenia /2.36/ ¹explicit/:

$$2.59 \quad \text{div } A \text{ grad}^s \underline{Q}'' = - \text{div} \left[\psi A \frac{\partial K'(\underline{\sigma}')}{\partial \underline{\sigma}'} \right]$$

$$K'(\underline{\sigma}') - K_0'^2 \leq 0$$

$$\psi [K(\underline{\sigma}') - K_0'^2] = 0$$

$$\psi \geq 0$$

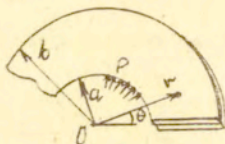
$$\underline{Q}' = \underline{Q} \quad \text{na } A_v$$

$$\text{gdzie: } \underline{\sigma}' = \frac{1}{2} A \text{grad}^s \underline{Q}' + \underline{\sigma}^1$$

Rozwiązanie /2.59/ zagadnienia optymalnego sprężania związane jest ze stanami wstępnymi $(\sigma^R, \underline{\sigma}^I, \underline{\sigma}^{II})$ takimi, jakie wywołane byłyby w pewnym fikcyjnym ciele o cechach konstytutywnych zdefiniowanych zależnościami /2.3/, /2.59/. Zależności te określają pewne specyficzne, nielocalne cechy plastyczne generujące dystorsje w fazie II przy osiągnięciu wyteżeń plastycznych w fazie I.

2.3.3. Przykład zadania kołowsymetrycznego

Rozważmy przykład cienkiej dwuwarstwowej tarczy kołowsymetrycznej obciążonej ciśnieniem wewnętrznym p /rys. 2.4/



Rys. 2.4

Niech materiały obu faz posiadają te same cechy sprężyste $\underline{A}^I = \underline{A}^{II} \stackrel{di}{=} \underline{A}$. Faza I jest fazą słabszą i posiada ograniczone możliwości przenoszenia naprężeń rozciągających. Warunek /2.36/ przyjmijmy w postaci:

$$2.60 \quad K'(\underline{\sigma}^I + \underline{\sigma}^I) = \underline{\sigma}^I + \underline{\sigma}^I \leq K_0^2 \underline{\sigma}$$

Faza II jest fazą mocną, bez ograniczeń wyteżeńowych. Dystorsje wprowadzamy wyłącznie do fazy II ($\underline{a}^I \rightarrow \underline{a}^I$). Rozwiązanie zagadnienia optymalnego sprężania, opisywane związkami /2.59/ /2.60/, można sprowadzić do wyznaczenia obszarów, w których $\underline{\sigma} \leq K_0^2 \underline{\sigma}$. W obszarach tych należy wprowadzić dystorsje wyznaczane z warunku

$$2.61 \quad \frac{1}{2} A g r a d^2 \underline{\dot{u}} + \underline{\dot{\sigma}} - K_0^2 \underline{\sigma} = 0$$

Stan naprężeń $\underline{\dot{\sigma}}$ jest w obu fazach jednakowy i opisany rozwiązaniem klasycznego zagadnienia Lamé'go. /rys. 2.4/:

$$2.52 \quad \underline{\dot{\sigma}}_r = \frac{\rho a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\underline{\dot{\sigma}}_\theta = \frac{\rho a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$

Ograniczenie (2.60) ingerować będzie jedynie w stosunku do naprężeń obwodowych $\underline{\dot{\sigma}}_\theta$. Warunek (2.61) można zatem zapisać w układzie współrzędnych biegunowych w postaci:

$$2.63 \quad \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{\dot{u}}{r} + \nu \dot{u}_{,r} \right) + \underline{\dot{\sigma}}_\theta - K_0^2 \sigma = 0$$

gdzie: E - moduł Younga, ν - współczynnik Poissona.

Podstawiając (2.62) do (2.63) oraz rozwiązując otrzymane równanie różniczkowe otrzymujemy:

$$2.64 \quad \dot{u} = c r^{-\frac{1}{\nu}} + \frac{2(1-\nu)}{E} \left(K_0^2 - \frac{\rho a^2}{b^2 - a^2} \right) r - \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\rho a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r}$$

gdzie stałą c należy wyznaczyć z warunku: $\dot{u} = 0$
dla $r = r_0$ /przy czym $\underline{\dot{\sigma}}_\theta|_{r=r_0} = K_0^2 /$.

Przyjmijmy szczegółowe dane przykładu: $a = 1$, $b = 2$,
 $\nu = \frac{1}{2}$, $p = 0,1 E$, $K_0^2 = \frac{13}{12} p$.

Można sprawdzić, że granica $r = r_0$ obszarów: sprężanego i niesprężanego ($\dot{u} = 0$) wyznaczona jest przez $r_0 = \frac{4}{3}$.

Rozwiązanie (2.64) przybiera w tym przypadku postać:

$$2.65 \quad \dot{u} = \frac{16}{45} \frac{1}{r^2} + \frac{3}{40} r - \frac{2}{5} \frac{1}{r} \quad \text{dla } r \in \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$$

$$\dot{u} = 0 \quad \text{dla } r \in \left\langle \frac{4}{3}, 2 \right\rangle.$$

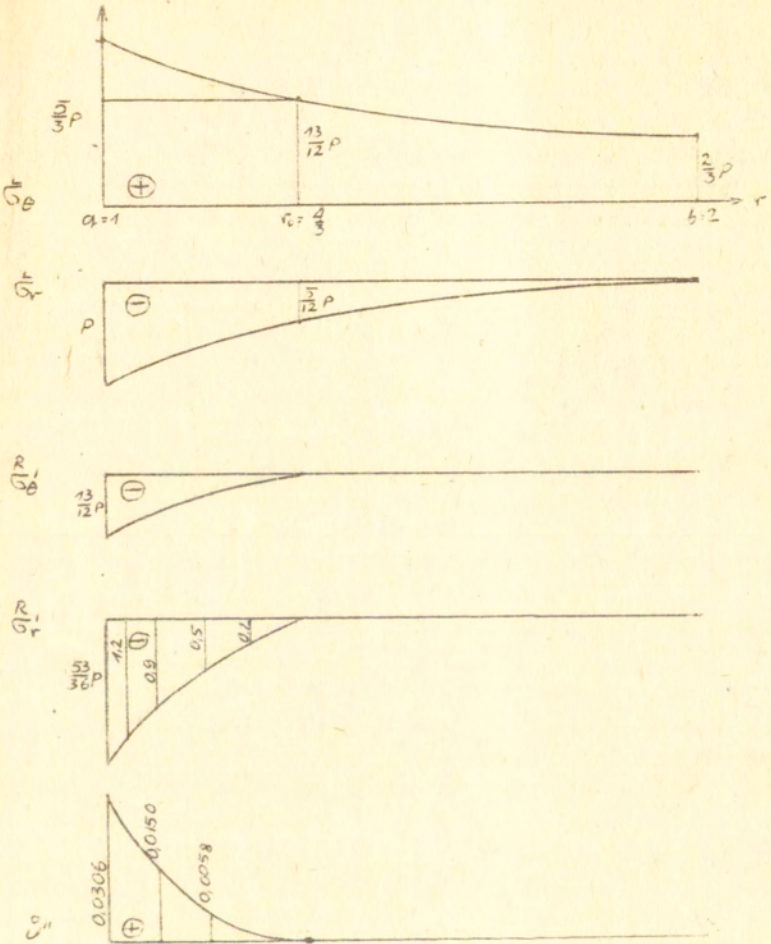
Dystorsje (2.65) wymuszone w fazie II wywołują stan naprężeń wstępnych w obszarze $\left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$:

$$2.67 \quad \underline{\sigma}'_r = -\underline{\sigma}''_r = \frac{20}{3} \left(-\frac{8}{15} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{3} \frac{1}{r^2} + \frac{9}{80} \right) p$$

$$\underline{\sigma}'_\theta = -\underline{\sigma}''_\theta = \frac{20}{3} \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{r^2} + \frac{9}{80} \right) p$$

który reguluje naprężenia fazy I w ten sposób, że nie występują w niej naprężenia rozciągające o wartości większej niż Kc^2 . Ograniczenie /2.60/ spełnione jest dla stanu wstępnego oraz końcowego. Końcowe naprężenia obwodowe $\sigma_e' = \sigma_e' + \sigma_e'$ w obszarze $\langle a, r_c \rangle$ przyjmują stałą wartość dopuszczalną Kc^2 kosztem zwiększenia wartości naprężeń σ_v oraz σ_e'' w tym obszarze.

Rozkłady stanów naprężeń i pole dystorsji pokazano na rys. 2.5.



Rys. 2.5

3. Dystorsje powierzchniowe

Rozdział ten stanowi kontynuację rozważań z rozdziału 2 na przypadek, gdy obszar kontaktu obu faz nie obejmuje całego V lecz jego podobzszar /por. [91] /.

W szczególnym przypadku otrzymujemy sytuację, gdy podobzszar kontaktu faz stanowi powierzchnię S rozdzielającą je. Zagadnieniadystorsji powierzchniowych opisują przypadek, gdy pojawiają się niezależnie deformacje pierwotne na powierzchni kontaktowej S w obu fazach.

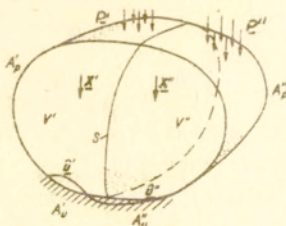
Dyskusja tego problemu pozwoli na sformułowanie i rozwiązanie istotnego z inżynierskiego punktu widzenia zadania optymalnego sterowania dylatacją pomiędzy dwoma łączonymi elementami w celu korzystnej regulacji stanu naprężeń w jednym z nich. W szczególności można tu uzyskać efekt maksymalnego odciążenia jednego z elementów kosztem maksymalnego przenoszenia stanu obciążeń zewnętrznych przez element drugi.

Kilka technicznych sposobów wymuszania zespolenia elementów o odpowiednio niedopasowanych powierzchniach kontaktowych opisano przy okazji prezentowania przykładów sprężania powierzchniowego / §§ 3.3, 3.4, 3.5 /.

Innym sposobem może być łączenie wybuchowe dwóch elementów metalowych o odpowiednio profilowanych powierzchniach kontaktowych.

3.1. Analiza stanów wstępnych. Identyfikacja pól dystorsji.

Przyjmijmy, że obszar rozpatrywanego ciała składa się z dwu podobzszarów V' i V'' /rys. 3.1/



Rys. 3.1

Faza I wypełnia obszar V' zaś faza II wypełnia obszar V'' . Powierzchnia S jest powierzchnią rozdzielenia obu faz a zatem jedynym obszarem wzajemnego ich kontaktu.

Niech powierzchnie brzegowe S' , S'' obu faz doznają pierwotnych zmian kształtu opisanych jako niezależne przemieszczenia pierwotne \underline{u}' , \underline{u}'' . Jeśli pomimo niezgodności zdeformowanych pierwotnie brzegów wymusiemy ich zgodne zespolenie to wywołane zostaną w obu fazach wstępne stany odkształcenia $\underline{\epsilon}'$, $\underline{\epsilon}''$ i naprężenia $\underline{\sigma}'$, $\underline{\sigma}''$.

Wywołane pole przemieszczeń wstępnych \underline{u} jest polem ciągłym w całym obszarze V , natomiast pola odkształceń i naprężeń wstępnych są ciągłe w podobszarach V' i V'' ; jednak ich składowe mogą doznawać skoku na powierzchni S . Opisany sposób wprowadzania stanów wstępnych w celu regulacji stanów końcowych nazwijmy "sprężaniem powierzchniowym".

W rozważaniach ograniczamy się do rozpatrywania rozwiązań odpowiednio regularnych i zakładamy w związku z tym, że rozpatrywane funkcje są w obszarach V' i V'' klasy C^2 .

Pierwotne deformacje brzegów S' i S'' będą zatem występowały w powiązaniu z odpowiednio regularną deformacją poszczególnych faz: $\underline{\epsilon}'$ i $\underline{\epsilon}''$.

Zdefiniujmy deformacje pierwotne obu faz jako stany odkształceń wyznaczone jednoznacznie przez związki:

$$3.1. \quad \begin{aligned} \mathcal{L}'(A \underline{\xi}') &= 0 \\ C'(\underline{\xi}') &= 0 \end{aligned} \quad 3.2. \quad \begin{aligned} \mathcal{L}''(A'' \underline{\xi}'') &= 0 \\ C''(\underline{\xi}'') &= 0 \end{aligned}$$

- wszędzie poza S oraz przez warunki zgodności $\underline{\xi}'$ i $\underline{\xi}''$ odpowiednio z przemieszczeniami \underline{u}' i \underline{u}'' na powierzchni S .

Ponieważ deformacje pierwotne spełniają więzy geometryczne obu faz, przypadek sprężania powierzchniowego jest przypadkiem szczególnym sprężania zewnętrznego, w którym obszar kontaktu obu faz ograniczony jest do powierzchni S .

Zdefiniujmy obciążenia pierwotne brzegów S^o , S^{oo} :

$$3.3. \quad \begin{aligned} \underline{\beta}' &= A' \underline{\xi}' n' \\ \underline{\beta}'' &= A'' \underline{\xi}'' n'' \end{aligned}$$

Związki /3.1/, /3.3/¹ oraz /3.3/² przyporządkowują jednoznacznie funkcjom przemieszczeń pierwotnych \underline{u}' , \underline{u}'' na S funkcje obciążeń pierwotnych na S , definiując nam w tym sensie powierzchniowe operatory konstytutywne \mathcal{A}' i \mathcal{A}'' :

$$3.4. \quad \begin{aligned} \underline{\beta}' &= \mathcal{A}'(\underline{u}') \\ \underline{\beta}'' &= \mathcal{A}''(\underline{u}'') \end{aligned}$$

Przyjmując $\underline{\beta}'$, $\underline{\beta}''$ jako funkcje określone na S , wyznaczyć można ze związków /3.1/^{1,2} /3.3/¹ oraz /3.2/^{1,2} /3.3/² jednoznacznie określone pola $\underline{\xi}'$ w V' i $\underline{\xi}''$ w V'' . Związki /3.1/^{3,4} /3.2/^{3,4} pozwalają wtedy określić z dokładnością do ruchów sztywnych przemieszczenia pierwotne \underline{u}' , \underline{u}'' przyporządkowane jednoznacznie obciążeniom $\underline{\beta}'$, $\underline{\beta}''$.

Związki /3.1/, /3.2/, /3.3/ definiują nam w tym sensie odwrotne powierzchniowe operatory konstytutywne $\underline{\mathcal{L}}', \underline{\mathcal{L}}''$:

$$3.5 \quad \underline{\underline{Q}}' = \underline{\mathcal{L}}'(\underline{\underline{\beta}}') \\ \underline{\underline{Q}}'' = \underline{\mathcal{L}}''(\underline{\underline{\beta}}'')$$

Dysponując zdefiniowanymi operatorami konstytutywnymi, można sprowadzić analizę zagadnienia dystorsji powierzchniowych do analizy wstępnej pól przemieszczeń $\underline{\underline{U}}$ i obciążeń $\underline{\underline{\beta}}', \underline{\underline{\beta}}''$ wywołanych na powierzchni S przez stany pierwotne $\underline{\underline{U}}', \underline{\underline{U}}''$ lub $\underline{\underline{\beta}}', \underline{\underline{\beta}}''$.

Postępując analogicznie jak w rozdziałach poprzednich otrzymujemy zmodyfikowane związki konstytutywne stanów wstępnych:

$$3.6. \quad \underline{\underline{\beta}}' = \underline{\mathcal{R}}'(\underline{\underline{U}}' - \underline{\underline{U}}') \\ \underline{\underline{\beta}}'' = \underline{\mathcal{R}}''(\underline{\underline{U}}'' - \underline{\underline{U}}'') \quad 3.7. \quad \underline{\underline{Q}}' = \underline{\mathcal{L}}'(\underline{\underline{\beta}}' + \underline{\underline{\beta}}') \\ \underline{\underline{Q}}'' = \underline{\mathcal{L}}''(\underline{\underline{\beta}}'' + \underline{\underline{\beta}}'')$$

Na wstępne stany obciążeń narzucone są więzy statyczne w postaci równań równowagi na powierzchni S:

$$3.8. \quad \underline{\underline{\beta}}' + \underline{\underline{\beta}}'' = \underline{\underline{Q}},$$

zaś na wstępne stany przemieszczeń narzucone są więzy geometryczne w postaci warunki nierozdzielności faz wzdłuż S:

$$3.9. \quad \underline{\underline{U}}' = \underline{\underline{U}}'' \stackrel{R}{=} \underline{\underline{U}}''$$

Przeprowadzając konstrukcję rozwiązań zagadnienia /3.6/ ÷ /3.9/ wyznaczających stany wstępne, analogiczną do konstrukcji opisanej w rozdz. 2.2, otrzymujemy:

$$3.10. \quad \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{U}}^s + \underline{\underline{A}}^s \underline{\underline{R}}^a(\underline{\underline{U}}^a)$$

lub

$$3.11 \quad \underline{u}^R = \bar{A}^{-1s} (\underline{\beta}^s).$$

W związkach tych \bar{A}^{-1s} oznacza operator odwrotny do \bar{A}^s , zaś $\bar{A}^s \circ \bar{A}^a$ oznacza superpozycję operatorów.

Opis wstępnych stanów obciążeń przybiera postać:

$$3.12 \quad \begin{aligned} \underline{\beta}^s &= Q \\ \underline{\beta}^a &= -\underline{\beta}^a - \bar{B}^{-1s} \circ \bar{B}^a (\underline{\beta}^s) \end{aligned}$$

lub

$$3.13 \quad \begin{aligned} \underline{\beta}^s &= Q \\ \underline{\beta}^a &= -\bar{B}^{-1s} (\underline{u}^a) \end{aligned}$$

Związki (3.10), (3.11), (3.12), (3.13) opisują jednoznacznie wstępne stany przemieszczeń i obciążeń obu faz na powierzchni S. Pozwalają one także zidentyfikować stany dystorsji wywołujące dane stany wstępne.

3.2. Sterowanie optymalne polami dystorsji

Zajmijmy się zagadnieniem sprężania zewnętrznego ze względu na minimalizację wyteżenia w jednej z faz /w fazie sprężanej -np w fazie I/.

Faza II spełnia w tym przypadku rolę fazy sprężającej. Końcowe stany w niej wywołane mogą okazać się niekorzystne, czym płacimy za optymalną regulację stanów w fazie I.

Rozważmy na wstępie możliwość wywołania na powierzchni S fazy sprężonej I dowolnych stanów wstępnych.

Postępując analogicznie jak w rozdz. 2.3 można wykazać, że dowolnie przyjęte stany $\underline{u}^I, \underline{\beta}^I$ wywołać można przez wprowadzenie jednocześnie określonych stanów przemieszczeń pierwotnych:

$$3.14 \quad \begin{aligned} \underline{u}^I &= \underline{u}^I + (\bar{A}^s \circ \bar{A}^a - 1) \bar{B}^s (\underline{\beta}^I) \\ \underline{u}^a &= \underline{u}^I + (\bar{A}^s \circ \bar{A}^a + 1) \bar{B}^s (\underline{\beta}^I) \end{aligned}$$

lub stanów obciążeń pierwotnych

$$3.15 \quad \begin{aligned} \underline{\beta}' &= (1 - \bar{B}^s \circ B^a) A^s(\underline{u}') - \underline{\beta}^R \\ \underline{\beta}'' &= (1 + \bar{B}^s \circ B^a) A^s(\underline{u}') + \underline{\beta}^R \end{aligned}$$

Jeśli przyjmiemy, że stany pierwotne wywoływane są jedynie w fazie sprężającej:

$$3.16 \quad \underline{u}' = \underline{0}, \quad \underline{\beta}' = \underline{0},$$

to rozwiązania (3.14) lub (3.15) określają jednoznacznie stany pierwotne na powierzchni S fazy II:

$$3.17 \quad \underline{\beta}'' = 2 A^s(\underline{u}^R)$$

lub

$$3.18 \quad \underline{u}'' = 2 B^s(\underline{\beta}^R)$$

które wzbudzają stany wstępne \underline{u}^R lub $\underline{\beta}^R$.

Ze względu na możliwość wywołania /w ogólnym przypadku/ dowolnych, niezależnych od siebie stanów wstępnych $\underline{u}^R, \underline{\beta}^R$ zagadnienia optymalnej regulacji stanów końcowych: $\underline{\varepsilon}' = \underline{\varepsilon}^R + \underline{\varepsilon}^I$, $\underline{\sigma}' = \underline{\sigma}^R + \underline{\sigma}^I$ ze względu na minimalizację wyteżenia fazy I, można rozpatrywać, przy ustalonych stanach użytkowych $\underline{u}^R, \underline{\beta}^R$, jako poszukiwanie optymalnych warunków brzegowych $\underline{u}^I, \underline{\beta}^I$ na powierzchni S ograniczającej V. Po wyznaczeniu stanów $\underline{u}^I, \underline{\beta}^I$ na S, gwarantujących optymalne rozkłady $\underline{\sigma}^I, \underline{\varepsilon}^I$ w V, można określić ze związków (3.14) (3.15) stany pierwotne, wywołujące pożądaną regulację stanów końcowych.

Zagadnienie minimalizacji globalnego wyteżenia w fazie I, jest w tym przypadku równoważne minimalizacji globalnej energii wewnętrznej J_{E^I} fazy I /globalnemu odciążeniu fazy/

$$3.19 \quad J_{E^I} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\sigma}^I \underline{\varepsilon}^I dV$$

W celu poszukiwania optymalnych warunków brzegowych na S rozważmy możliwość rozkładu stanów końcowych $\underline{\mathcal{S}}'$, $\underline{\mathcal{E}}'$ w fazie I na dwie ortogonalne części składowe, z których jedna podlega regulacji przez sprężanie powierzchniowe, a druga nie:

$$3.20 \quad \underline{\mathcal{S}}' = \underline{\mathcal{S}}'_1 + \underline{\mathcal{S}}'_2 \qquad \underline{\mathcal{E}}' = \underline{\mathcal{E}}'_1 + \underline{\mathcal{E}}'_2$$

Dla skonstruowania postulowanych rozkładów przyjmijmy z definicji pomocnicze stany $\underline{\mathcal{E}}'_p$, $\underline{\mathcal{S}}'_p = A' \underline{\mathcal{E}}'_p$ jako stany wywołane siłowym obciążeniem zewnętrznym działającym na fazę I przy warunku pełnego utwierdzenia brzegu S. Opisane są one zależnościami:

$$3.21 \quad \mathcal{Q}'(\underline{\mathcal{S}}'_p, \underline{\mathcal{X}}', P') = 0 \\ \mathcal{C}'(\underline{\mathcal{E}}'_p) = 0$$

oraz warunkiem zgodności pola $\underline{\mathcal{E}}'_p$ ze znikającymi przemieszczeniami na S.

Zdefiniujmy analogicznie stany $\underline{\mathcal{E}}'_u$, $\underline{\mathcal{S}}'_u = A' \underline{\mathcal{E}}'_u$ jako stany wywołane przemieszczeniami \hat{u}' brzegu A_u , przy warunku swobodnego brzegu S. Opisane są one zależnościami:

$$3.22 \quad \mathcal{Q}'(\underline{\mathcal{S}}'_u) = 0 \\ \mathcal{C}'(\underline{\mathcal{E}}'_u, \hat{u}') = 0 \\ \underline{\mathcal{S}}'_u \cdot n' = 0 \quad \text{na } S$$

Niech części rozkładu stanów użytkowych $\underline{\mathcal{E}}'_1$, $\underline{\mathcal{S}}'_1 = A' \underline{\mathcal{E}}'_1$ stanowią sumę określonych wyżej stanów:

$$3.23 \quad \underline{\mathcal{E}}'_1 \stackrel{df}{=} \underline{\mathcal{E}}'_p + \underline{\mathcal{E}}'_u \\ \underline{\mathcal{S}}'_1 \stackrel{df}{=} \underline{\mathcal{S}}'_p + \underline{\mathcal{S}}'_u$$

Ze względu na jednoznaczność rozwiązań zagadnień brzegowych (3.21), (3.22) teorii sprężystości, stany $\underline{\mathcal{E}}'_1$, $\underline{\mathcal{S}}'_1$ określone są jednoznacznie.

Można zatem dokonać w sposób jednoznaczny rozkładu stanów $\underline{\mathcal{E}}'$, $\underline{\mathcal{S}}'$ na części składowe (3.20), przy czym części $\underline{\mathcal{E}}'_2$, $\underline{\mathcal{S}}'_2$ stanowią różnicę pól całkowitych i pól (3.23):

$$\underline{\underline{\epsilon}}_2' \stackrel{df}{=} \underline{\underline{\epsilon}}' - \underline{\underline{\epsilon}}_1'$$

$$3.24. \quad \underline{\underline{\sigma}}_2' \stackrel{df}{=} \underline{\underline{\sigma}}' - \underline{\underline{\sigma}}_1'$$

Są to składowe, wywołane oddziaływaniem fazy II poprzez powierzchnię S na fazę I, które spełniają jednorodne równania więzów w obszarze V^* :

$$3.25. \quad \begin{aligned} \mathcal{Q}'(\underline{\underline{\sigma}}_2') &= 0 \\ \mathcal{C}'(\underline{\underline{\epsilon}}_2') &= 0 \end{aligned}$$

Można pokazać, że pola $\underline{\underline{\sigma}}_i' = \underline{\underline{\sigma}}_p' + \underline{\underline{\sigma}}_u'$, $\underline{\underline{\epsilon}}_i' = \underline{\underline{\epsilon}}_p' + \underline{\underline{\epsilon}}_u'$ oraz $\underline{\underline{\sigma}}_2'$, $\underline{\underline{\epsilon}}_2'$ są ortogonalne w sensie ich iloczynu skalarnego:

$$3.26. \quad \int_V \underline{\underline{\sigma}}_1' \underline{\underline{\epsilon}}_2' dV = \int_V \underline{\underline{\sigma}}_2' \underline{\underline{\epsilon}}_1' dV = 0$$

Ortogonalność stanów $\underline{\underline{\epsilon}}_p'$ oraz $\underline{\underline{\sigma}}_2'$ wynika ze znikania przemieszczeń związanych z deformacją $\underline{\underline{\epsilon}}_p'$ na powierzchni kontaktowej S, zaś ortogonalność stanów $\underline{\underline{\sigma}}_u'$ oraz $\underline{\underline{\epsilon}}_2'$ wynika ze znikania sił $\underline{\underline{\sigma}}_u' n$ na tej powierzchni /por. rys. 3.2/ Pozwala to przedstawić funkcjonal energii wewnętrznej /3.19/ w postaci:

$$3.27. \quad J_{E'} = \frac{1}{2} \int_V (\underline{\underline{\sigma}}_1' \underline{\underline{\epsilon}}_1' + \underline{\underline{\sigma}}_2' \underline{\underline{\epsilon}}_2') dV.$$

Można pokazać, że ze względu na dodatnią określoność obu składników podcałkowych oraz na fakt, że dowolne stany wstępne wywołane w obszarze V^* spełniają warunki /3.25/, czyli są ortogonalne do stanów $\underline{\underline{\epsilon}}_1'$, $\underline{\underline{\epsilon}}_2'$ wynika, że kryterium /3.19/ prowadzi do wyznaczenia stanów wstępnych:

$$3.28. \quad \begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon}}_1^R &= - \underline{\underline{\epsilon}}_2^L \\ \underline{\underline{\sigma}}_1^R &= - \underline{\underline{\sigma}}_2^L \end{aligned}$$

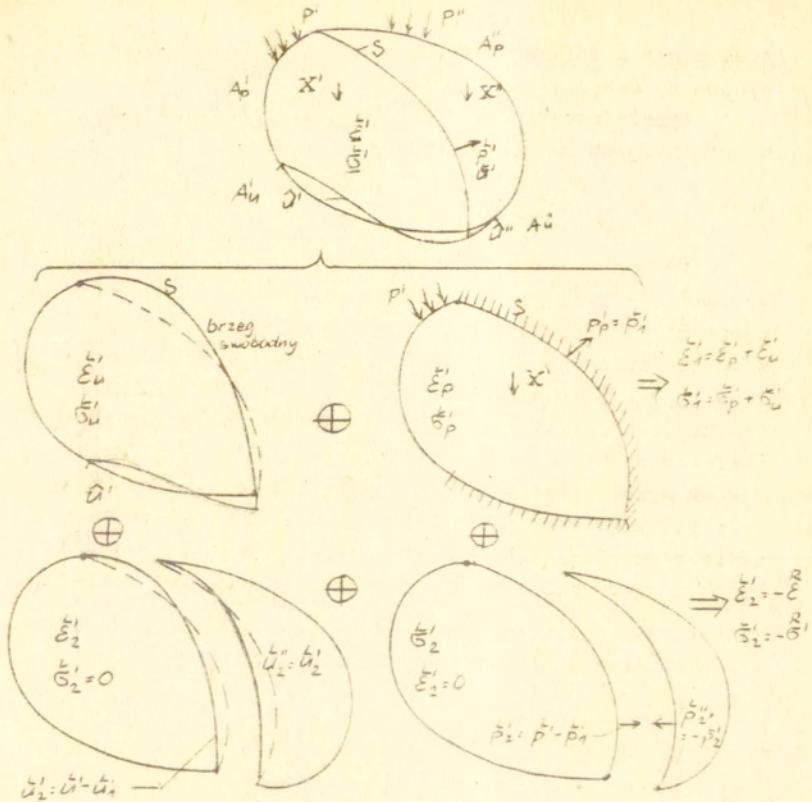
powodujących znikanie części $\underline{\underline{C}}_2' = \underline{\underline{C}}_2' + \underline{\underline{C}}_2^R$, $\underline{\underline{G}}_2' = \underline{\underline{G}}_2' + \underline{\underline{G}}_2^R$ stanów końcowych.

Wyrażając wniosek /3.28/ w języku wielkości powierzchniowych na S otrzymujemy:

$$3.29 \quad \begin{aligned} \underline{\underline{U}}_2^R &= -\underline{\underline{U}}_2' \\ \underline{\underline{P}}_2^R &= -\underline{\underline{P}}_2' \end{aligned}$$

Wyznaczone optymalne stany wstępne /3.29/ można wywołać wprowadzając do ustroju szczelinę biegnącą wzdłuż powierzchni kontaktowej S, opisaną związkami /3.14/. W wyniku sprężenia w fazie I pozostają stany końcowe $\underline{\underline{G}}_2' = \underline{\underline{G}}_2'$, $\underline{\underline{C}}_2' = \underline{\underline{C}}_2'$ charakteryzujące się, jak to wynika z definicji /3.21/÷/3.23/ tym, że obciążenie brzegowe na powierzchni S: $\underline{\underline{P}}_2' = \underline{\underline{G}}_2' \underline{\underline{n}}_2'$ jest takie, jakie wywołane byłoby przez zewnętrzne obciążenia siłowe $\underline{\underline{X}}_2'$, $\underline{\underline{P}}_2'$ fazy I przy pełnym utwierdzeniu brzegu S, zaś przemieszczenia $\underline{\underline{u}}_2'$ powierzchni S są takie, jakie wywołane byłyby przez ruchy $\underline{\underline{u}}_2^e$ powierzchni A_2^e przy warunku swobodnego brzegu S. Rysunek 3.2. ilustruje schemat postępowania przy określaniu poszukiwanych stanów wstępnych $\underline{\underline{U}}_2^R$, $\underline{\underline{P}}_2^R$.

W wymienionych niżej dwóch przypadkach, rozwiązanie optymalne można realizować wprowadzając stany pierwotne do jednej tylko z faz /np. do fazy II-por. związku /3.17/, /3.18//.



Rys. 3,2

W przypadku, gdy nie występują przemieszczenia \bar{u} na brzegu A_u stany $\bar{\sigma}'_u$, $\bar{\epsilon}'_u$ wyznaczone przez /3.22/ znikają i sprężenie optymalne daje w fazie I efekt końcowy identyczny z przyjęciem warunku pełnego utwardzenia $\bar{u} = 0$ na powierzchni S .

W przypadku, gdy nie występują siłowe obciążenia zewnętrzne w fazie I $\bar{X}^p = 0$, $\bar{p}_p = 0$, stany $\bar{\sigma}'_p$, $\bar{\epsilon}'_p$ wyznaczone przez /3.21/ znikają i sprężenie optymalne daje w fazie I efekt końcowy identyczny z przyjęciem warunku

brzegu swobodnego $\underline{\xi}' = \underline{0}$ na powierzchni S_1 .

W wymienionych tu przypadkach, rozwiązanie optymalne można realizować wprowadzając stany pierwotne do jednej tylko z faz, /np do fazy II - por. związki /3.17/, /3.18/.

W przypadku gdy znikają wszystkie obciążenia zewnętrzne fazy I /siłowe $\underline{X}' = \underline{0}$, $\underline{P}' = \underline{0}$ oraz przemieszczenia $\underline{Q}' = \underline{0}$ / to otrzymujemy w wyniku sprężania optymalnego trywialne rozwiązanie $\underline{P}' = \underline{0}$, $\underline{Q}' = \underline{0}$ stowarzyszone ze znikaniem stanów końcowych $\underline{\xi}' = \underline{0}$, $\underline{\xi}' = \underline{0}$ w fazie I. Całe obciążenie zewnętrzne przenoszone jest wtedy przez fazę II.

Jako szczególny przypadek sprężania powierzchniowego traktować można sprężanie wywołane przemieszczeniami pierwotnymi \underline{u} wymuszonymi na części brzegu ustroju A_u /por. [49]/.

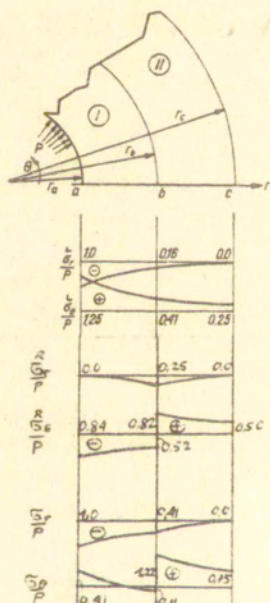
Traktując brzeg A_u , jako powierzchnię S kontaktu faz zauważamy, że stany $\underline{\xi}'_u$, $\underline{\xi}'_u$ definiowane związkami /3.22/ nie istnieją, w tym przypadku. Wynika stąd wniosek, że sprężanie ze względu na minimalizację energii wewnętrznej ustroju prowadzi do uzyskania efektu pełnego utwierdzenia $\underline{u} = \underline{0}$ na brzegu A_u w stanie końcowym. Jest to zbieżne z wnioskiem o ortogonalności części stanów użytkowych wywołanych obciążeniem siłowym oraz przemieszczeniami podpór.

Optymalne sprężanie ruchami podpór redukuje do zera drugą z wymienionych części stanów użytkowych.

Przedyskutujemy trzy przykłady sprężania powierzchniowego.

3.3. Przykład sprężania rury dwuwarstwowej.

Rozważmy przykład rury ciśnieniowej dwuwarstwowej poddanej ciśnieniu wewnętrznemu p , Rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych w rurze niesprężonej [77] pokazany został na rys. 3.3. Stosując sprężanie powierzchniowe polegające na odpowiednim wpasowaniu rozszerzonej względem stanu naturalnego $/n_p$, przez ogrzanie/ rury zewnętrznej na nienaprężoną rurę wewnętrzną, uzyskujemy efekt minimalizacji energii sprężystej /wytężenia/ zwagazynowanej w fazie I.



Rys. 3.3

Stan naprężeń dla rury niesprężonej opisany jest związkami Lame'go:

$$3.30 \quad \begin{aligned} \frac{\epsilon}{\sigma_r} &= \frac{\rho a^2}{c^2 a^2} - \frac{\rho a^2 c^2}{r^2 (c^2 a^2)} \\ \frac{\epsilon}{\sigma_\theta} &= \frac{\rho a^2}{c^2 a^2} + \frac{\rho a^2 c^2}{r^2 (c^2 a^2)} \end{aligned}$$

Zgodnie z rozwiązaniem optymalnym /3.29/ sprężanie ze względu na maksymalne odciążenie rury wewnętrznej związane jest z wprowadzeniem na jej zewnętrznym obwodzie $r = b$ obciążeń wstępnych $\beta'_2 - \beta'_1 = -(\beta'_1 - \beta'_2)$ stanowiących różnicę pomiędzy oddziaływaniem rury zewnętrznej na wewnętrzną w stanie użytkowym a oddziaływaniem sztywnego podłoża na brzegu $r = b$ rury wewnętrznej obciążonej ciśnieniem p na brzegu $r = a$ /rys. 3.4/^B

Ze związku /3.30/¹ wynika

$$3.31. \quad \beta'_1 = \frac{\rho a^2}{c^2 a^2} \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)$$

Oddziaływanie β'_1 należy wyznaczyć analizując przypadek pokazany na rys. /3.4/^B. Przyjmując stan przemieszczeń w postaci $u = D_1 r + \frac{D_2}{r}$ można określić, po wyznaczeniu stałych D_1, D_2 z warunków brzegowych, rozkład naprężeń promieniowych: $\sigma_r = -\frac{\rho a^2}{a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)} \left[-(1+\nu) + \frac{b^2(1-\nu^2)}{r^2} \right]$ skąd wynika:

$$3.32 \quad \beta'_1 = -\frac{2 \rho a^2}{a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)}$$

Ze związków /3.31/ i /3.32/ otrzymujemy ostatecznie wartość obciążenia wstępnego jakie należy wprowadzić na powierzchni kontaktowej $r = b$:

$$3.33 \quad \beta'_1 = -\rho a^2 \left(\frac{1}{c^2 a^2} - \frac{c^2}{b^2 (c^2 a^2)} + \frac{2}{a^2(1+\nu) + b^2(1-\nu)} \right)$$

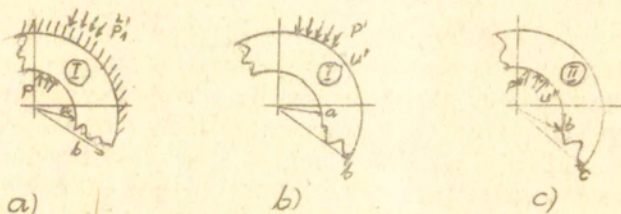
Ponieważ w omawianym przykładzie stan deformacji ϵ_u /por. 3.22/ nie występuje, więc przemieszczenia wstępne, które muszą być wywołane na obwodzie $r=b$ są postaci $\hat{u}'_1 = -\hat{u}'_2$. Można je wyznaczyć wyrażając rozwiązanie /3.30/ w przemieszczeniach posługując się np: zależnością:

$$3.34 \quad \epsilon_{\theta} = \frac{u}{r} = \frac{1}{E'} (\sigma_{\theta} - \nu \sigma_r)$$

Otrzymujemy stąd:

$$3.35 \quad \bar{u}' = - \frac{P}{E'} \frac{a^2}{c^2 - a^2} \left[(1 - \nu') b + \frac{c^2 (1 + \nu')}{b} \right]$$

W celu wprowadzenia do ustroju stanów wstępnych związanych z \bar{p}' i \bar{u}' należy wymusić na powierzchni kontaktowej $r = b$ dystorsje powierzchniowe \bar{u}' , \bar{u}'' opisane zależnościami /3.14/. Konieczne jest tu określenie powierzchniowych związków konstytutywnych dla obu faz. Posłużymy się w tym celu analizą dwóch elementarnych przypadków /rys. 3.4^{b,0}/, wykorzystując znane rozwiązanie /3.30/



Rys. 3.4

Przemieszczenia wywołane na powierzchni kontaktowej poprzez siły do niej przyłożone wyrażają powierzchniowe operatory konstytutywne \mathcal{B}' i \mathcal{B}'' w stosunku do fazy I i II odpowiednio:

$$3.36 \quad u' = \mathcal{B}'(p') = \frac{b}{E'(b^2 - a^2)} [(1 + \nu')a^2 + (1 - \nu')c^2] p'$$

$$u'' = \mathcal{B}''(p'') = \frac{b}{E''(c^2 - b^2)} [(1 - \nu'')b^2 + (1 + \nu'')c^2] p''$$

Znając operatory B' , B'' można skonstruować rozwiązanie /3,14/

Przeprowadźmy obliczenia dla przypadku: $E^1 = E^2 = E$, $\nu^1 = \nu^2 = \frac{1}{4}$ $a=1, b=2, c=3$
 Rozwiązanie /3,33/, /3,35/ przyjmuje wartości $\beta^1 = -0,3143 p$,
 $\alpha^1 = -0,8906 \frac{P}{E}$, zaś konstruując na podstawie /3,36/
 rozwiązanie /3,14/ dochodzimy do zależności:

$$3.37 \quad \begin{aligned} \alpha^1 &= \beta^1 - \frac{3,999}{E} \beta^1 \\ \alpha^{11} &= \beta^1 + \frac{5,701}{E} \beta^1 \end{aligned}$$

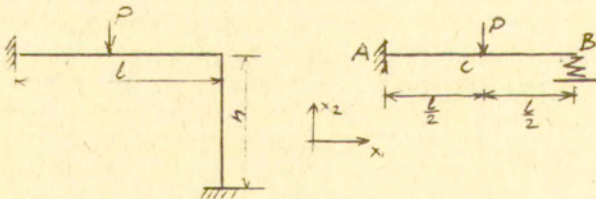
skąd otrzymujemy ostatecznie poszukiwane dystorsje powierzchniowe

$$3.38 \quad \begin{aligned} \alpha^1 &= 0,3663 \frac{P}{E} \\ \alpha^{11} &= -2,6823 \frac{P}{E} \end{aligned}$$

Wprowadzenie dystorsji /3,38/ do ustroju wywołuje naprężenia wstępne σ_r , σ_e optymalnie korygujące naprężenia użytkowe. Rozkłady naprężeń użytkowych, wstępnych i końcowych pokazano na rys. 3,3.

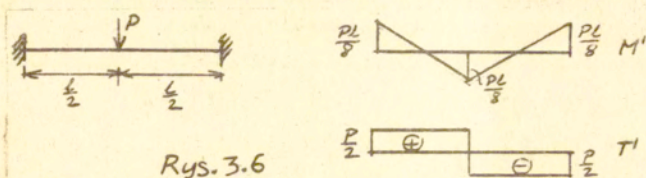
3.4. Przykład spreżania ramy prętowej.

Podobnie do poprzedniego przykładu można sformułować zadanie maksymalnego odciążenia rygla ramy pokazanej na rys. 3.5 minimalizując energię w nim magazynowaną.

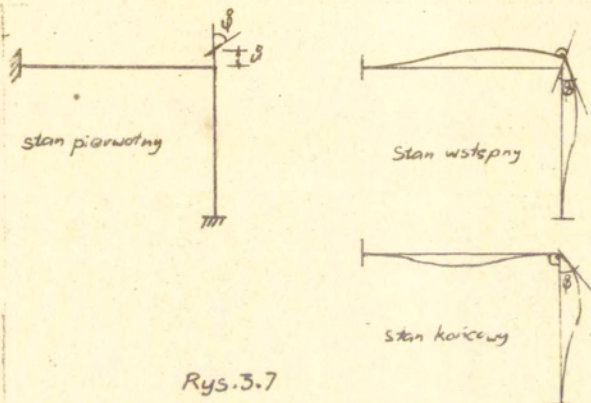


Rys. 3,5

Stosując teorię belek i adaptując rozwiązanie optymalne /§ 3.2/ uzyskujemy minimalne wyężenie rygla narzucając w węźle B warunek utwierdzenia. Związany jest on z siłami przekrojowymi pokazanymi na rys. 3.6



Rys. 3.6

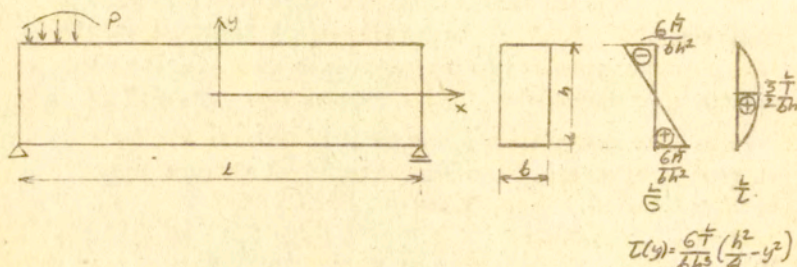


Rys. 3.7

Z warunku równowagi w węźle B oraz jego nieprzesuwności otrzymujemy siły pierwotne \hat{M}'' , \hat{N}'' działające w przekroju przywęzłowym słupa: $\hat{M}'' = \frac{PL}{8}$, $\hat{N}'' = \frac{P}{2}$. Znajomość ich pozwala na określenie dyslokacji \hat{u} i dysklinacji $\hat{\varphi}$, jakie należy wymusić w przekroju przywęzłowym słupa w celu wywołania pożądanego sprężenia /rys. 3.7/.

3.5. Przykład sprężania belki zginanej.

Przez sprężanie powierzchniowe można regulować korzystnie stany naprężeń nie tylko w jednej z faz, lecz także w obu. Omówmy przykład sprężania powierzchniowego w belce zginanej celem łagodzenia koncentracji naprężeń.

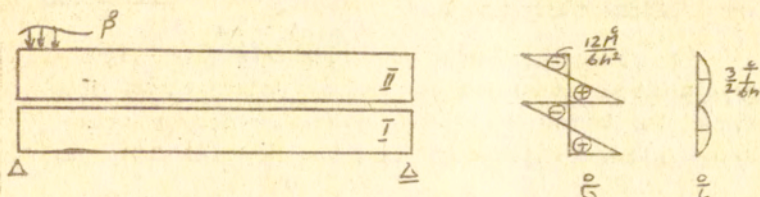


Rys. 3.8

Znając obciążenie zewnętrzne p belki /rys. 3.8/ można wyznaczyć rozkłady momentów zginających M i sił poprzecznych T na jej długości, a następnie rozkłady naprężeń normalnych σ i stycznych τ w przekrojach poprzecznych /rys. 3.8/.

Przez sprężanie powierzchniowe można zgładzić koncentracje naprężeń σ w skrajnych włóknach belki lub naprężeń τ w środkowych włóknach.

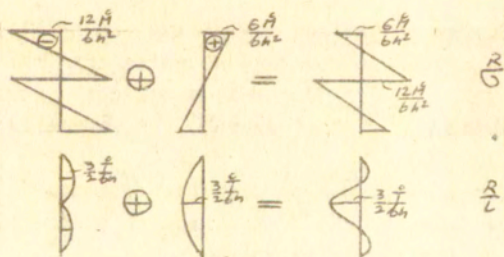
Technika sprężania powierzchniowego polega tu /por. [4] / na podzieleniu belki na dwie warstwy /rys. 3.9 / i na obciążeniu układu obciążeniem pierwotnym $\hat{p} = \alpha p$ / α - współczynnik skalarny/



Rys. 3.9

Pomijając tarcie pomiędzy warstwami, otrzymamy rozkłady sił \bar{M} , \bar{T} przekrojowych w każdej z warstw identyczne i proporcjonalne do rozkładów \bar{M} , \bar{T} . Rozkłady naprężeń przekrojowych $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ pokazano na rys. 3.9

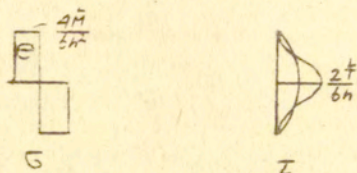
Po zespoleniu / w stanie obciążenia β / obu warstw, obciążenie β usuwamy otrzymując wstępne stany naprężeń $\bar{\sigma}$, $\bar{\epsilon}$ /rys. 3.10/



Rys. 3.10

Porównując stany związane z obciążeniem użytkowym i stany wstępne widać, że można złągodzić naprężenia normalne przyjmując $\bar{M} = -\frac{M}{3}$, $\bar{T} = -\frac{T}{3}$, a zatem dobierają obciążenie montażowe: $\bar{p} = -\frac{1}{3}p$ ($\alpha = -\frac{1}{3}$).

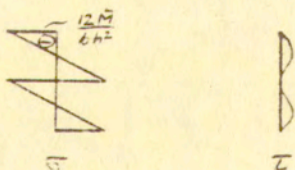
Otrzymane stany końcowe pokazano na rys. 3.11



Rys. 3.11

Złągodzenie koncentracji naprężeń normalnych i ich wyrównanie odbyło się kosztem zwiększenia koncentracji naprężeń stycznych.

Z drugiej strony, można zredukować do zera naprężenia styczne na osi $y = 0$ przyjmując $\bar{M} = \frac{M}{3}$, $\bar{T} = \frac{T}{3}$, czyli $\bar{p} = p$ ($\alpha = 1/3$).
Stany końcowe pokazano na rys. 3.12.



Rys. 3.12

Złagodzenie koncentracji naprężeń stycznych odbyło się tu kosztem zwiększenia koncentracji naprężeń normalnych.

W przypadku typowych belek /długich i niskich/ decydujące są w wymiarowaniu naprężenia normalne σ . Należy zatem sprężyć według pierwszego schematu.

W przypadku belek wysokich i krótkich decydujące są w wymiarowaniu naprężenia styczne τ i należy sprężyć według drugiego schematu.

Opisaną metodę sprężania można stosować także do belek ciągłych o różnych typach podparcia.

Zamiast zespалania warstw belek znajdujących się pod obciążeniem zginającym można zastosować prostszą technicznie metodę polegającą na łączeniu warstw o różnej długości. Dobierając warstwę dolną odpowiednio krótszą o $\Delta l = \frac{2M_e L}{Ebh^2}$, gdzie M_e opisuje moment zginający w przekroju, w którym osiąga on maksymalną wartość /por. [102]/; a następnie zspалając ją po naciągnięciu z warstwą górną osiągamy zbliżony efekt do opisanego wyżej.

Pewne specyficzne techniki sprężania powierzchniowego można znaleźć w pracach [68, 69]. Jako przypadek sprężania powierzchniowego może być także traktowana regulacja ugięć belki ciągłej przez ruchy podpór, gdzie jedną fazą jest belka, zaś drugą - podłoże /por. [4, 104]/.

B. ZAGADNIENIA DYSTORSJI W WIELOELEMENTOWYCH UKŁADACH KONSTRUKCYJNYCH

4. Zagadnienia dystorsji w wieloelementowych układach prętowych.

Tematem drugiej części pracy jest zastosowanie ogólnej teorii dystorsji sprężystych ^{w § 0.2 oraz w przypadku} omawianej w modelu ciągłego w rozdziałach 1,2 do dyskusji zagadnień dystorsji w wieloelementowych układach konstrukcyjnych. Zagadnienia te zaprezentowane zostaną na przykładach układów prętowych / § 4/ wykorzystując analizę dystorsji wewnętrznych /§ 1/ oraz układów kompozytowych z gęstym zbrojeniem /§ 5/ wykorzystując analizę dystorsji zewnętrznych w ciałach dwufazowych /§ 2/. Celem rozważań będzie uzyskanie związków pozwalających na analizę wpływu danego stanu dystorsji na naprężenia i odkształcenia ustroju, a także na identyfikację stanu dystorsji przy znajomości wywoływanych przez niego naprężeń i odkształceń wstępnych. Znajomość tych związków pozwala na postawienie problemu optymalnego sterowania dystorsjami /sprężania/, co jest następnym celem pracy.

W rozdziale 4.1 dyskutowane są gęste struktury regularne pozwalające na zastosowanie opisu ciągłego a następnie formalne wykorzystanie wniosków otrzymanych w ogólnej dyskusji zagadnień w continuum sprężystym. Skonstruowany zostaje ciągły model gęstej struktury prętowej dźwigara powierzchniowego, uwzględniający specyfikę omawianego układu, pozwalający na dyskusję zagadnień dystorsji w tej konstrukcji.

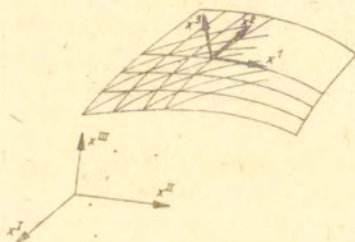
W rozdziale 4.2 dyskutowane są dowolne układy prętowe opisywane w modelu dyskretnym. Założymy geometryczną niezmienności badanych układów i zauważmy poza tym, że w zadaniach sterowania dystorsjami w celu regulacji stanu naprężeń, przypadki nietrywialne ograniczają się do klasy struktur hiperstatycznych.

Dyskutując zagadnienie sprężenia /różne sformułowania podano w rozdz. 4.2,3, 4.3 /zakładamy^(głównie) możliwość wywuszania dystorsji w konstrukcji. Przykłady technicznych sposobów ich wprowadzania opisano w rozdz. 4.3. W sformułowaniach zagadnień optymalnego sprężenia rozkład materiału przyjmowany ^(jest) jako znany.

4.1. Przypadek gęstych struktur regularnych

Zajmijmy się w tym rozdziale prętowymi, powierzchniowymi ustrojami siatkowymi, utworzonymi z $n / n = 23 /$ rodzin smukłych prętów pryzmatycznych, wykonanych z izotropowego, sprężystego materiału. Ograniczmy się do rozpatrywania ustrojów o tak gęstej i regularnej strukturze, że z dostateczną dokładnością można stosować ciągły model ośrodka dyskretnego [83].

Przytoczmy za pracą [83] podstawowy układ związków opisujących statykę siatkowych powłok prętowych w modelu kontynualnym przyjmując te same oznaczenia.



Rys. 4.1

gdzie

- $u_k = u_k(x^i)$ funkcje opisujące przemieszczenia styczne do Π ,
- $U = U(x^i)$ funkcje opisujące przemieszczenia normalne do Π ,
- $v^k = v^k(x^i)$ funkcje opisujące obroty o wektorach stycznych do Π (stosując prawoskrętną konwencję znakowania),
- $V = V(x^i)$ funkcje opisujące obroty o wektorach normalnych do Π ,
- e_{km} dwuwektor Ricciego powierzchni Π ,
- b_{sk} składowe drugiego tensora podstawowego powierzchni Π ,
- $(\dots)_{|k}$ pochodna kowariantna względem współrzędnej x^k .

Powłoka kształtowana jest na powierzchni parametryzowanej układem współrzędnych krzywoliniowych x^k ($k = 1, 2$; rys. 4.1) Siatka struktury składa się z dwu lub trzech rodzin (A) prętów.

Związki geometryczne ustroju przyjmują postać

$$\delta_{ks} = u_{s|k} - b_{sk} U + e_{sk} V$$

$$4.1 \quad \delta_k = U_{|k} + b_k^l U_{|l} + e_{km} v^m$$

$$\delta_{ks} = v_{s|k} - b_{sk} V$$

$$\delta_k = v_{|k} + b_k^l v_{|l}$$

Stan napięcia powłoki siatkowej można zdefiniować następująco:

$$4.2 \quad \begin{aligned} P^{kL} &\equiv \sum_{\Lambda} P_{(\Lambda)}^{kL} \equiv \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k (t_{(\Lambda)}^L P_{(\Lambda)} + \tilde{t}_{(\Lambda)}^L \tilde{P}_{(\Lambda)}) \tilde{t}_{(\Lambda)}^{-1} \\ m^{kL} &\equiv \sum_{\Lambda} m_{(\Lambda)}^{kL} \equiv \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k (t_{(\Lambda)}^L M_{(\Lambda)} + \tilde{t}_{(\Lambda)}^L \tilde{M}_{(\Lambda)}) \tilde{t}_{(\Lambda)}^{-1} \\ P^k &\equiv \sum_{\Lambda} P_{(\Lambda)}^k \equiv \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k \tilde{P}_{(\Lambda)} \tilde{t}_{(\Lambda)}^{-1}, \quad m^k \equiv \sum_{\Lambda} m_{(\Lambda)}^k \equiv \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k \tilde{M}_{(\Lambda)} \tilde{t}_{(\Lambda)}^{-1} \end{aligned}$$

gdzie

$$\Lambda = I, II \quad \text{lub} \quad \Lambda = I, II, III$$

- $t_{(\Lambda)}^k = t_{(\Lambda)}^k(x^L)$ funkcje opisujące składowe jednostkowych wektorów stycznych do poszczególnych rodzin krzywych Λ ,
 $\tilde{t}_{(\Lambda)}^k \stackrel{\text{def}}{=} e_m^k t_{(\Lambda)}^m$ odległość sąsiednich krzywych w rodzinie Λ ,
 $t_{(\Lambda)}^L$ odległość sąsiednich węzłów w rodzinie Λ ,
 $P_{\Lambda}, \tilde{P}_{\Lambda}, \tilde{P}_{\Lambda}$ składowe siły wypadkowej działającej na przekrój pręta rodziny Λ w połowie jego rozpiętości,
 $M_{\Lambda}, \tilde{M}_{\Lambda}, \tilde{M}_{\Lambda}$ składowe momentu wypadkowego działającego na przekrój pręta rodziny Λ w połowie jego rozpiętości

Warunki równowagi ustroju przyjmują postać:

$$4.3 \quad \begin{aligned} P^{kL} |_k - b_k^L P^k + b^L &= 0 & m^k |_k + e_{kL} P^{kL} + b_{kL} m^{kL} + h &= 0 \\ P^k |_k + b_{kL} P^{kL} + b &= 0 & m^{kL} |_k - b_k^L m^k + e_{kL} P^k + h^L &= 0 \end{aligned}$$

gdzie b^k, b są to składowe siłowego obciążenia zewnętrzne, a h^k, h składowe momentowego obciążenia zewnętrznego.

Warunki nierozdzielności odkształceń można zapisać następująco:

$$4.4 \quad \begin{aligned} \gamma^{kL} |_k - b_k^L \gamma^k + e_{kL} \alpha^k &= 0 & \alpha^k |_k - b_k^L \alpha^k &= 0 \\ \gamma^k |_k + e_{kL} \alpha^{kL} + b_{kL} \gamma^{kL} &= 0 & \alpha^k |_k + b_{kL} \alpha^{kL} &= 0 \end{aligned}$$

Związki konstytutywne przybierają postać:

$$4.5 \quad \begin{aligned} p^{kl} &= A^{klmn} \gamma_{mn} & m^{kl} &= C^{klmn} \partial_{lmn} \\ p^k &= A^{kl} \gamma_L & m^k &= C^{kl} \partial_L \end{aligned}$$

Zakładając sztywność węzłów, otrzymujemy

$$4.6 \quad \begin{aligned} A^{klmn} &\equiv \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k t_{(\Lambda)}^m (t_{(\Lambda)}^l t_{(\Lambda)}^n R^{(\Lambda)} + \tilde{t}_{(\Lambda)}^l \tilde{t}_{(\Lambda)}^n \tilde{R}^{(\Lambda)}) \\ C^{klmn} &\equiv \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k t_{(\Lambda)}^m (t_{(\Lambda)}^l t_{(\Lambda)}^n S^{(\Lambda)} + \tilde{t}_{(\Lambda)}^l \tilde{t}_{(\Lambda)}^n \tilde{S}^{(\Lambda)}) \\ A^{kL} &\equiv \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k t_{(\Lambda)}^L \check{R}^{(\Lambda)} & C^{kL} &\equiv \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k t_{(\Lambda)}^L \check{S}^{(\Lambda)} \end{aligned}$$

gdzie:

$$4.7 \quad \begin{aligned} R^{(\Lambda)} &\equiv \frac{E_{(\Lambda)} A_{(\Lambda)}}{\tilde{I}_{(\Lambda)}} & \check{R}^{(\Lambda)} &\equiv \frac{12 E_{(\Lambda)} \check{J}_{(\Lambda)}}{\tilde{I}_{(\Lambda)} \tilde{I}_{(\Lambda)}^2} & \check{\check{R}}^{(\Lambda)} &\equiv \frac{12 E_{(\Lambda)} \check{\check{J}}_{(\Lambda)}}{\tilde{I}_{(\Lambda)} \tilde{I}_{(\Lambda)}^2} \\ S^{(\Lambda)} &\equiv \frac{C_{(\Lambda)}}{\tilde{I}_{(\Lambda)}} & \check{S}^{(\Lambda)} &\equiv \frac{E_{(\Lambda)} \check{J}_{(\Lambda)}}{\tilde{I}_{(\Lambda)}} & \check{\check{S}}^{(\Lambda)} &\equiv \frac{E_{(\Lambda)} \check{\check{J}}_{(\Lambda)}}{\tilde{I}_{(\Lambda)}} \end{aligned}$$

We wzorach tych przyjęto następujące oznaczenia: $\check{J}_{\Lambda}, \check{\check{J}}_{\Lambda}$ główne centralne momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta rodziny Λ względem osi stycznej do π oraz względem osi prostopadłej do π oraz $A_{\Lambda}, E_{\Lambda}, C_{\Lambda}$ odpowiednio pole przekroju pręta rodziny Λ , współczynnik sprężystości podłużnej materiału pręta rodziny Λ i sztywność skręcania przekroju poprzecznego pręta rodziny Λ .

Rozważania nasze można rozszerzyć na klasę bardziej skomplikowanych struktur prętowych stosując do ich opisu nielocalne modele kontynuualne /por. [99, 100] /.

4.1.1. Uwzględnienie wpływu stanów dystorsji

Wpływ dystorsji na statykę omawianych ustrojów można uwzględnić przez formalne przyjęcie zmodyfikowanych związków konstytutywnych:

$$4.8 \quad \begin{aligned} p^{kl} &= A^{klmn} (\gamma_{mn} - \check{\gamma}_{mn}) & m^{kl} &= C^{klmn} (\partial_{lmn} - \check{\partial}_{lmn}) \\ p^k &= A^{km} (\gamma_m - \check{\gamma}_m) & m^k &= C^{km} (\partial_m - \check{\partial}_m) \end{aligned}$$

Stosowanie ciągłego modelu ośrodka dyskretnego ogranicza możliwość uwzględnienia wpływu dystorsji jedynie do takich dystorsji, które można z dostateczną dokładnością opisać polami tensorowymi o składowych δ_{mn} , $\tilde{\mathcal{E}}_{mn}$, δ_k^l , $\tilde{\mathcal{E}}_k^l$ odpowiednio regularnych.

Wstawiając (4.1) do (4.8) a następnie do (4.3) uzyskujemy układ sześciu równań względem sześciu niewiadomych u_m, v_m, u, v :

$$4.9 \quad \begin{aligned} & [A^{klmn}(u_{n|m} - b_{nm}u + e_{nm}v)]_{|k} - b_k^l A^{km}(u_{lm} + b_{lm}^v v + e_{lm}u) + b_k^l = 0 \\ & [C^{km}(v_{m|n} + b_m^l v)]_{|k} + e_{kl} A^{klmn}(u_{n|m} - b_{nm}u + e_{nm}v) + \\ & \quad + b_{kl} C^{klmn}(v_{n|m} - b_{nm}v) + h^* = 0 \\ & [A^{km}(u_{lm} + b_m^l u + e_{lm}v)]_{|k} + b_{kl} A^{klmn}(u_{n|m} - b_{nm}u + e_{nm}v) + b^* = 0 \\ & [C^{klmn}(v_{n|m} - b_{nm}v)]_{|k} - b_k^l C^{km}(v_{lm} + b_m^l v) + \\ & \quad + e_{kl}^l A^{km}(u_{lm} + b_m^l u + e_{lm}v) + h^{*l} = 0 \end{aligned}$$

gdzie

$$4.10 \quad \begin{aligned} b^{*l} &= b^l - [(A^{klmn} \delta_{mn})_{|k} + b_k^l A^{km} \delta_m] \\ h^* &= h - [(C^{km} \tilde{\mathcal{E}}_m)_{|k} + e_{kl} A^{klmn} \delta_{mn} + b_{kl} C^{klmn} \tilde{\mathcal{E}}_{mn}] \\ b^* &= b - [(A^{km} \delta_m)_{|k} + b_{kl} A^{klmn} \delta_{mn}] \\ h^{*l} &= h^l - [(C^{klmn} \tilde{\mathcal{E}}_{mn})_{|k} - b_k^l C^{km} \tilde{\mathcal{E}}_m + e_{kl}^l A^{km} \delta_m] \end{aligned}$$

Związki (4.9), (4.11) stanowią szczególny przypadek zależności (1.12), (1.13) opisujących statykę ustroju z uwzględnieniem wpływu dystorsji.

W przypadkach szczególnych, gdy mamy do czynienia z dystorsjami stanowiącymi jedynie pierwotne wydłużenia /lub skrócenia/ prętów, na pola δ_{kl} , $\tilde{\mathcal{E}}_{kl}$, δ_k^l , $\tilde{\mathcal{E}}_k^l$ należy narzucić ograniczenia:

$$4.11 \quad t_{(l}^k \tilde{t}_{l)}^l \delta_{kl}^l = 0, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{kl} = 0, \quad \delta_k^l = 0, \quad \tilde{\mathcal{E}}_k^l = 0.$$

Widać stąd, że poza szczególnymi przypadkami, aby możliwe było wprowadzenie do ustroju dystorsji spełniających ograniczenia (4.11), muszą one spełniać warunki silniejsze:

$$4.12 \quad \delta_{kl} \equiv \delta \delta_{kl}, \quad \tilde{\mathcal{E}}_{kl} = 0, \quad \delta_k^l = 0, \quad \tilde{\mathcal{E}}_k^l = 0.$$

gdzie δ_{kl} oznacza deltę Kroneckera.

Stany dystorsji spełniające warunki (4.12) nazwijmy membranowymi.

4.1.2: Dystorsje membranowe w kratownicach powłokowych

Z postaci związków (4.4), (4.9), (4.10) widać, że dystorsje membranowe mają najistotniejszy wpływ na stan tarczowy ustroju, przy małym wpływie na jego stan płytowy.

W przypadku kratownicy powierzchniowej, kiedy macierze sztywności (4.6) przybierają postać [83]:

$$4.13 \quad A^{klmn} = \sum_{\lambda} t_{\lambda}^k t_{\lambda}^l t_{\lambda}^m t_{\lambda}^n R^{(\lambda)}$$

$$4.14 \quad C^{klmn} = 0 \quad A^{kl} = 0 \quad C^{kl} = 0$$

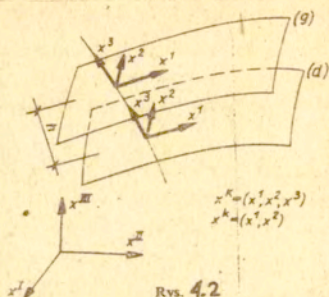
Z równań (4.8), (4.12), (4.13), (4.14) wynika, że jedynym występującym stanem napięcia są wtedy napięcia tarczowe p^{kl} .

Zajmijmy się przypadkiem kratownic powłokowych [83], które stanowią dwie kratownice powierzchniowe kształtowane na dwu niesbyt odległych powierzchniach $\Pi^{(g)}$, $\Pi^{(d)}$ /rys. 4.2/, związane przegubowo łącznikami.

Przyjmijmy, że indeksy (g) i (d) odnoszą się do warstwy odpowiednio górnej i dolnej powłoki oraz że funkcja $h' = 2h$ opisuje odległość obu warstw.

Statykę kratownic powłokowych omówiono w pracy [83] przy założeniu odpowiadających sobie siatek warstwy górnej i dolnej oraz przy pominięciu wpływu łączników międzywarstwowych. W pracy [19] założeń tych nie przyjmowano i przedstawiono zagadnienie analogicznie do teorii powłok sandwichowych, przyjmując, że warstwa środkowa łączników "pracuje na ścinanie". Założono jednak z góry istnienie pewnej powierzchni środkowej π (powierzchni obojętnej na zginanie) odległej od warstwy dolnej o $2\lambda h / (\mu + \lambda)$ oraz od warstwy górnej o $2h / (\mu + \lambda)$.

Wprowadźmy podstawowe ws-
ory dla kratownic powłokowych
przyjmując, że współczynniki
określające położenie środków
zginania zależą od rozmiesz-
czenia materiału:



Rys. 4.2

$$4.15 \quad \lambda_{kl} \equiv \frac{\sum_{\Lambda} A_{\Lambda}^{(g)} t_{\Lambda}^{(g)}}{\sum_{\Lambda} A_{\Lambda}^{(d)} t_{\Lambda}^{(d)}}$$

Założymy, że $\lambda_{kl} = \text{const}$ oraz że $b_{kl}^{(g)} = b_{kl}^{(d)} = b_{kl}$. Określmy funkcje
opisujące przemieszczenia warstwy górnej i dolnej:

$$4.16 \quad u_k, u_l, u_k', u_l'$$

oraz zdefiniujmy uśredniony stan przemieszczeń i obrotów ustroju

$$4.17 \quad u_k \equiv \frac{\lambda_{kl} u_k^{(g)} + u_k^{(d)}}{1 + \lambda_{kl}}, \quad u \equiv \frac{1}{2} (u_3^{(g)} + u_3^{(d)}), \quad v_m \equiv e_{i,m}^k \frac{1}{2h} (u_k^{(g)} - u_k^{(d)})$$

Określając składowe odkształcenia warstw górnej i dolnej:

$$4.18 \quad \delta_{kl}^{(g)} \equiv \epsilon_{lik} - \epsilon_{lkl} u, \quad \delta_{kl}^{(d)} \equiv \epsilon_{lik} - b_{lkl} u,$$

można zdefiniować składowe uśrednionego stanu odkształcenia:

$$\delta_{kl} \equiv \frac{\lambda_{kl} \delta_{kl}^{(g)} + \delta_{kl}^{(d)}}{1 + \lambda_{kl}} = \frac{\lambda_{kl} \epsilon_{lik} + \epsilon_{lik}}{1 + \lambda_{kl}} - b_{lkl} u = \epsilon_{lik} - b_{lkl} u,$$

$$4.19 \quad \partial \epsilon_{kl} \equiv e_{i,l}^m \frac{1}{2h} (\delta_{klm}^{(g)} - \delta_{klm}^{(d)}) = e_{i,l}^m \frac{1}{2h} (u_{mik}^{(g)} - u_{mik}^{(d)}) = v_{lik}$$

$$\gamma_{kl} \equiv u_{il} + b_{il}^m \frac{\lambda_{lm} u_m^{(g)} + u_m^{(d)}}{1 + \lambda_{lm}} + e_{i,m}^k \frac{1}{2h} (u_k^{(g)} - u_k^{(d)}) = u_{il} + b_{il}^m u_m + e_{i,m}^k v_m.$$

Odwracając związki (4.19)^{1,2} znajdziemy

$$4.20 \quad \delta_{kl}^{(g)} = \delta_{kl} + \frac{2h}{1 + \lambda_{kl}} e_{i,m}^k \partial \epsilon_{klm}, \quad \delta_{kl}^{(d)} = \delta_{kl} - \frac{2h \lambda_{kl}}{1 + \lambda_{kl}} e_{i,m}^k \partial \epsilon_{klm}.$$

Uwzględniając przegubowość połączeń oraz założenie, że warstwy zewnętrzne przenoszą siły tarczowe, a warstwa środkowa siły tnące, stan napięcia poszczególnych warstw można zdefiniować przyjmując zmodyfikowane wzory (4.2) [19]:

$$\begin{aligned}
 P^{(g)kl} &= \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k t_{(\Lambda)}^l P_{(\Lambda)}^{(g)} \tilde{L}_{(\Lambda)}^{-1}, & \Lambda = I, II \text{ lub } \Lambda = I, II, III \\
 4.21 \quad P^{(d)kl} &= \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k t_{(\Lambda)}^l P_{(\Lambda)}^{(d)} \tilde{L}_{(\Lambda)}^{-1}, & \Lambda = I, II \text{ lub } \Lambda = I, II, III \\
 P^k &= \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^k t_{(\Delta)}^3 P_{(\Delta)} \omega_{(\Delta)}^{-1} L_{(\Delta)} & \Delta = I, II, \dots, N
 \end{aligned}$$

gdzie ω_{Δ}^{-1} oznacza średnią gęstość prętów rodziny Δ . Wielkości bez indeksu (g) lub (d) odnoszą się tu do warstwy środkowej.

Związki konstytutywne przyjmują postać:

$$4.22 \quad P^{(g)kl} = A^{(g)klmn} \delta_{mn}^{(g)}, \quad P^{(d)kl} = A^{(d)klmn} \delta_{mn}^{(d)}, \quad P^k = A^{kl} \gamma_l$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 A^{(g)klmn} &= \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k t_{(\Lambda)}^l t_{(\Lambda)}^m t_{(\Lambda)}^n E_{(\Lambda)} A_{(\Lambda)} \tilde{L}_{(\Lambda)}^{-1}, \\
 4.23 \quad A^{(d)klmn} &= \sum_{\Lambda} t_{(\Lambda)}^k t_{(\Lambda)}^l t_{(\Lambda)}^m t_{(\Lambda)}^n E_{(\Lambda)} A_{(\Lambda)} \tilde{L}_{(\Lambda)}^{-1}.
 \end{aligned}$$

$$A^{kl} = \sum_{\Delta} t_{(\Delta)}^k t_{(\Delta)}^l t_{(\Delta)}^3 t_{(\Delta)}^3 E_{(\Delta)} A_{(\Delta)} \omega_{(\Delta)}^{-1} L_{(\Delta)}.$$

Mozemy więc wypisać wzory na energię sprężystą ustroju:

$$4.24 \quad E = \frac{1}{2} P^{(g)kl} \delta_{kl}^{(g)} + \frac{1}{2} P^{(d)kl} \delta_{kl}^{(d)} + \frac{1}{2} P^k \gamma_k$$

Stosując kolejno wzory (4.22), (4.20) i przekształcając wyrażenie (4.24), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 4.25 \quad E &= \frac{1}{2} A^{klmn} \gamma_{kl} \delta_{mn} + \frac{1}{2} C^{klmn} \mathcal{E}_{kl} \mathcal{E}_{mn} + \\
 &+ B^{klmn} \gamma_{kl} \mathcal{E}_{mn} + \frac{1}{2} A^{kl} \gamma_k \gamma_l
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$A^{klmn} = A^{(g)klmn} + A^{(d)klmn}$$

$$4.26 \quad C^{klmn} = \frac{4h^2}{(1+\lambda_{(p)})(1+\lambda_{(r)})} e_p^L e_r^N (A^{(g)kpnr} + \lambda_{(p)} \lambda_{(r)} A^{(d)kpnr})$$

$$B^{klmn} = \frac{2h}{1+\lambda_{(r)}} e_r^N (A^{(g)klmr} - \lambda_{(r)} A^{(d)klmr}) = \frac{2h}{1+\lambda_{(p)}} e_p^L \cdot (A^{(g)kpnr} - \lambda_{(p)} A^{(d)kpnr})$$

Można zatem określić składowe uśrednionego stanu napięcia ustroju ze związków konstytutywnych:

$$4.27 \quad p^{kl} = A^{klmn} \gamma_{mn} + B^{klmn} \alpha_{mn}$$

$$m^{kl} = C^{klmn} \alpha_{mn} + B^{klmn} \gamma_{mn}$$

$$p^k = A^{kl} \gamma_l,$$

które są uogólnieniem wzorów (4.5)^{1,2,3}.

Z postaci wzorów (4.26), (4.23) wynika symetria $p^{kl} = p^{lk}$. W przypadku, gdy nie występują zewnętrzne momenty skręcające $h = 0$, można założyć, że w omawianym ustroju [83] $m^k \equiv 0$ oraz że równanie (4.3)² spełnione jest dla uśrednionego stanu napięcia z dokładnością do $b_{kl} m^{kl} \equiv 0$.

Równania równowagi (4.3) redukują się zatem dla uśrednionego stanu napięcia do układu pięciu równań:

$$4.28 \quad p^{kl}{}_{|k} - b_k^L p^k + b^L = 0, \quad p^k{}_{|k} + b_{kl} p^{kl} + b = 0, \quad m^{kl}{}_{|k} + e_k^L p^k + h^L = 0$$

gdzie

$$4.29 \quad b^L = b^{(g)L} + b^{(d)L} \quad b = b^{(g)} + b^{(d)} \quad h^L = e_p^L \frac{2h}{1+\lambda_{(p)}} (b^{(g)p} - \lambda_{(p)} b^{(d)p})$$

W szczególnym przypadku, gdy $A^{(g)klmn} = A^{(d)klmn}$ (a zatem $B^{klmn} \equiv 0$), uśrednione stany napięcia i odkształcenia spełniają formalnie układ równań (4.28), (4.27), (4.19), opisujący kratownice powłokowe, podany w pracy [83]. Różnica w obu metodach polega w tym przypadku na określeniu macierzy sztywności C^{klmn} , A^{kl} .

Podstawiając do (4.27) wielkości (4.26), (4.19), przekształcając odpowiednio związki oraz wykorzystując (4.22), uzyskujemy wyrażenie uśrednionego stanu napięcia przez stany napięcia poszczególnych warstw:

$$4.30 \quad \rho^{kl} = \overset{(g)}{\rho}{}^{kl} + \overset{(d)}{\rho}{}^{kl}$$

$$m^{kl} = e_p \cdot L \frac{2h}{1 + \lambda(p)} \left(\overset{(g)}{\rho}{}^{kp} - \lambda(p) \overset{(d)}{\rho}{}^{kp} \right).$$

Przyjmując zamiast równań (4.22) zmodyfikowane związki konstytutywne, uwzględniające wpływ dystorsji membranowych:

$$4.31 \quad \overset{(g)}{\gamma}{}_{mn} = \overset{(g)}{\gamma} \delta_{mn} \quad \overset{(d)}{\gamma}{}_{mn} = \overset{(d)}{\gamma} \delta_{mn} \quad \overset{\circ}{\gamma}{}_m = \overset{\circ}{\gamma} \dot{i}_m,$$

gdzie \dot{i}_m oznaczają wersory przyjętego układu współrzędnych i wstawiając je do związków (4.30), (4.28), otrzymujemy:

$$4.32 \quad [A^{(g)klmn} (\overset{(g)}{\gamma}{}_{mn} - \overset{(g)}{\gamma} \delta_{mn}) + A^{(d)klmn} (\overset{(d)}{\gamma}{}_{mn} - \overset{(d)}{\gamma} \delta_{mn})]_{|k} - b_k^l A^{kl} (\overset{\circ}{\gamma}_r - \overset{\circ}{\gamma} \dot{i}_r) + b^l_k = 0$$

$$[A^{kl} (\overset{\circ}{\gamma}_l - \overset{\circ}{\gamma} \dot{i}_l)]_{|k} + b_{kl} [A^{(g)klmn} (\overset{(g)}{\gamma}{}_{mn} - \overset{(g)}{\gamma} \delta_{mn}) + A^{(d)klmn} (\overset{(d)}{\gamma}{}_{mn} - \overset{(d)}{\gamma} \delta_{mn})] + b = 0$$

$$\left\{ \frac{2h}{1 + \lambda(p)} e_p \cdot L [A^{(g)kp mn} (\overset{(g)}{\gamma}{}_{mn} - \overset{(g)}{\gamma} \delta_{mn}) - \lambda(p) A^{(d)kp mn} (\overset{(d)}{\gamma}{}_{mn} - \overset{(d)}{\gamma} \delta_{mn})] \right\}_{|k} + e_k^l A^{km} (\overset{\circ}{\gamma}_m - \overset{\circ}{\gamma} \dot{i}_m) + b^l_k = 0.$$

Dopisując pięć równań nierozdzielności dla poszczególnych warstw, wynikających ze związków (4.4) oraz z zależności (4.19)

$$4.33 \quad \overset{(g)}{\gamma}{}^k{}_k - b_k^l \overset{(g)}{\gamma}{}^k{}_k = 0 \quad \overset{(d)}{\gamma}{}^k{}_k - b_k^l \overset{(d)}{\gamma}{}^k{}_k = 0$$

$$\overset{\circ}{\gamma}{}^k{}_k + e_{kl} e_m \cdot L \frac{1}{2h} (\overset{(g)}{\gamma}{}^{km} - \overset{(d)}{\gamma}{}^{km}) + b_{kl} \frac{\lambda(p) \overset{(g)}{\gamma}{}^{kl} + \overset{(d)}{\gamma}{}^{kl}}{1 + \lambda(p)} = 0.$$

Uzyskujemy układ związków opisujących stan odkształcenia ustroju z uwzględnieniem wpływu dystorsji membranowych.

Z postaci równań (4.32) (4.33) określających wielkości statyczne kratownic powłokowych z uwzględnieniem dystorsji membranowych, wynika, że wprowadzane dystorsje mają istotny wpływ na wszystkie składowe stanu odkształcenia i napięcia ustroju.

W szczególności można sprowadzić ustrój do stanu "niedokształczonego", określając dystorsje /wieloznaczenie/ z warunku znikania obciążenia zastępczego (4.10):

$$4.34 \quad \begin{aligned} b^k &= b^k - \left\{ \left[\delta A^{(g)(g)klmn} \delta_{mn} + \delta A^{(k)(l)klmn} \delta_{mn} \right]_{|k} - b^k \delta A^{(g)(g)kl} \right\} = 0 \\ b^k &= b^k - \left[\left(\delta A^{(g)(g)kl} \right)_{|k} + b_{kl} \left(\delta A^{(g)(g)klmn} \delta_{mn} + \delta A^{(d)(d)klmn} \delta_{mn} \right) \right] = 0 \\ h^L &= h^L - \left\{ \left[\frac{2h}{1+\lambda(\rho)} e_p^L \left(\delta A^{(g)(g)kpnm} \delta_{mn} - \lambda(\rho) \delta A^{(d)(d)kpnm} \delta_{mn} \right) \right]_{|k} + \right. \\ &\quad \left. + e_{.k}^L \delta A^{(g)(g)km} \right\} = 0 \end{aligned}$$

4.1.3. Dystorsje w płaskich ustrojach strukturalnych

W przypadku ustroju płaskiego, to znaczy takiego, dla którego powierzchnia π , na której kształtowana jest siatka prętów jest płaszczyzną, podstawowy układ równań (4.9), (4.10) opisujący statykę dźwigarów z uwzględnieniem wpływu dystorsji rozdziela się na układ opisujący stan tarczowy oraz na układ opisujący stan płyty.

Przedstawiając zagadnienie w kartezjańskim układzie współrzędnych, przyjmując $b_{kl} = 0$ oraz

$$4.35 \quad \epsilon_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 1, \quad l = 2, \\ -1 & \text{dla } k = 2, \quad l = 1, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

otrzymujemy z (4.2) oraz z (4.10) po przekształceniach:

1/ równania równowagi tarczy

$$4.36 \quad \begin{aligned} [A^{klmn} (\gamma_{mn} - \delta_{mn})]_{,k} + b^L &= 0 \\ [C^{km} (\alpha_m - \delta_m)]_{,k} + \epsilon_{kl} A^{klmn} (\gamma_{mn} - \delta_{mn}) + h &= 0 \end{aligned}$$

z warunkami nierozdzielności

$$4.37 \quad \epsilon^{kl} \gamma_{km, l} + \alpha_m = 0 \quad \epsilon^{kl} \alpha_{k, l} = 0$$

2/ równania równowagi płyty

$$4.38 \quad \begin{aligned} [A^{kl} (\gamma_l - \delta_l)]_{,k} + b &= 0 \\ [C^{klmn} (\alpha_{mn} - \delta_{mn})]_{,k} + e_{.k}^L A^{km} (\gamma_m - \delta_m) + h^L &= 0 \end{aligned}$$

z warunkami nierozdzielności

$$4.39 \quad \varepsilon^{kl} \delta_{k,l} - \delta^{kl} \delta_{lk} = 0 \quad \varepsilon^{kl} \delta_{k,m,l} = 0.$$

Zagadnienie swierania taras siatkowych omówiono w pracy [89] i nie będziemy się nim dalej zajmować. Omówmy natomiast bardziej szczegółowo swieranie membranowe ustrojów płytowych.

Z postaci równań (4.38) widać, że przyjmując ograniczenia (4.12) stanu dystorsji, swieranie nie wywoła żadnych zmian w płycie siatkowej (ruszcie) w stanach płytowego napięcia ani odkształcenia, wywołanych obciążeniem zewnętrznym b i h^L . Można jednak rozważać zagadnienie swierania membranowego w płytach dwuwarstwowych. Związki opisujące statykę takich ustrojów z uwzględnieniem wpływu dystorsji uzyskamy z przejścia do przypadku płaskiego z równaniami (4.31), (4.32), (4.33); w ten sposób znajdziemy

1/ równania równowagi

$$4.40 \quad [A^{klmn}(\delta_{mn} - \delta^g \delta_{mn}) + A^{(l)klmn}(\delta_{mn} - \delta^d \delta_{mn})]_{,k} + b^L = 0$$

$$[A^{kl}(\delta_l - \delta^g i_l)]_{,k} + b = 0$$

$$\left\{ \frac{2h}{1 + \lambda_{(p)}} \varepsilon^L [A^{(g)kpqn}(\delta_{mn} - \delta^g \delta_{mn}) - \lambda_{(p)} A^{(d)kpqn}(\delta_{mn} - \delta^d \delta_{mn})] \right\}_{,k} + \varepsilon^L_k A^{kim}(\delta_m - \delta^g i_m) + h^L = 0$$

2/ warunki nierozdzielności

$$4.41 \quad \delta_{11,22}^g + \delta_{22,11}^g = 2\delta_{12,12}^g, \quad \delta_{11,22}^d + \delta_{22,11}^d = 2\delta_{12,12}^d, \quad \delta_{1,2} = \delta_{2,1}$$

Można zauważyć, że w przypadku, gdy

$$4.42 \quad A^{kl} = A \delta^{kl}$$

układ równań (4.40), (4.41) można rozdzielić na dwa niezależne układy, opisujące stany odkształcenia warstw zewnętrznych oraz warstwy łączników środkowych. Założenie (4.42) jest często spełnione w stosowanych strukturach (np. "unistrut").

Przekształcając równanie (4.40)³, otrzymujemy

$$4.43 \quad \varepsilon_i^r \varepsilon_p^l \left\{ \frac{2h}{1+\lambda_{ip}} \left[A^{(g)kpmn} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) - \lambda_{ip} A^{(d)kpmn} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right] \right\}_{,kr} + \varepsilon_i^r \varepsilon^l \left[A^{km} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right]_{,r} + \varepsilon_i^r h_{,r}^l = 0$$

$$\delta_l^r \varepsilon_p^l \left\{ \frac{2h}{1+\lambda_{lp}} \left[A^{(g)kpmn} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) - \lambda_{lp} A^{(d)kpmn} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right] \right\}_{,kr} + \delta_l^r \varepsilon^l \left[A^{km} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right]_{,r} + \delta_l^r h_{,r}^l = 0$$

Wstawiając (4.40)² do (4.43)¹, oraz uwzględniając (4.41)³ i (4.42) w (4.43)² można wzory (4.43) doprowadzić do postaci:

$$4.44 \quad \left\{ \frac{2h}{1+\lambda_{ii}} \left[A^{(g)klmn} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) - \lambda_{ii} A^{(d)klmn} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right] \right\}_{,kl} + b - \varepsilon_i^n h_{,n}^l = 0$$

$$\varepsilon_s^k \left\{ \frac{2h}{1+\lambda_{ii}} \left[A^{(g)slmn} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) - \lambda_{ii} A^{(d)slmn} (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right] \right\}_{,kl} + h_{,l}^k = 0$$

Uzyskano zatem dwa niezależne układy równań: równania (4.40)², (4.41)³ określające stan warstwy środkowej ustroju oraz równania (4.40)¹, (4.44), (4.41)^{1,2} określające stan warstw zewnętrznych ustroju.

Zajmijmy się dalej zagadnieniem zwierania membranowego zewnętrznych warstw ustroju, ograniczając rozwiązania do przypadku

$$4.45 \quad A^{(g)klmn} = A^{(d)klmn} = A^{klmn} = const., \quad 2h = h^i = const., \quad h^l_0, \quad \lambda_0 = \lambda_2 = 1.$$

Układ równań (4.40)¹, (4.44), (4.41)^{1,2} przybiera postać

$$A^{klmn} \left[(\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) + (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right]_{,k} + b^l = 0$$

$$A^{klmn} \left[(\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) - (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right]_{,kl} + \frac{2b}{h^i} = 0$$

$$4.46 \quad \varepsilon_s^k A^{slmn} \left[(\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) - (\delta_{mn} - \delta \delta_{mn}) \right]_{,kl} = 0$$

$$\delta_{11,22}^{(g)} + \delta_{22,11}^{(g)} = 2 \delta_{12,12}^{(g)}$$

$$\delta_{11,22}^{(d)} + \delta_{22,11}^{(d)} = 2 \delta_{12,12}^{(d)}$$

W przypadku gdy nie występuje w równaniach (4.46) tarczowe obciążenie zewnętrzne $b^l = 0$, uzasadnione jest przyjęcie $\delta_{kl} = 0$, skąd wynika (4.19) $\delta_{kl}^{(g)} = -\delta_{kl}^{(d)}$ i spełnienie równań (4.46)¹. Chcąc przyjąć to założenie do naszych rozważań, musimy zastosować je także do stanu dystorsji. Przyjmijmy zatem:

$$4.47 \quad \gamma_{mn} \equiv \overset{(g)}{\gamma}_{mn} = -\overset{(d)}{\gamma}_{mn}, \quad \overset{(g)}{\gamma} \equiv \overset{(d)}{\gamma} = -\overset{(d)}{\gamma}.$$

Związki (4.46) sprowadzają się w omawianym przypadku do układu trzech niezależnych równań:

$$4.48 \quad \begin{aligned} A^{kLmn} (\gamma_{mn} - \overset{(g)}{\gamma}_{mn})_{,kl} + \frac{h}{h^i} &= 0 \\ \varepsilon_s^{*k} A^{sLmn} (\gamma_{mn} - \overset{(g)}{\gamma}_{mn})_{,kl} &= 0 \\ \gamma_{11,22} + \gamma_{22,11} &= 2\gamma_{12,12} \end{aligned}$$

z czterema niewiadomymi funkcjami; $\gamma_{mn} = \gamma_{nm}$, $\overset{(g)}{\gamma}$.

Przyjmując dodatkowo stosowane w teorii płyt założenie o prostych normalnych, co prowadzi do przyjęcia ((4.19)³, (4.47)):

$$4.49 \quad \delta_L = u_{,L} + \delta_L^k \frac{z}{h^i} u_k = 0,$$

i wyrażając równanie (4.48)ⁿ w przemieszczeniach oraz korzystając z (4.49) uzyskujemy

$$4.50 \quad A^{kLmn} \left(\frac{h^i}{z} u_{,mn} + \overset{(g)}{\gamma}_{mn} \right)_{,kl} - \frac{h}{h^i} = 0.$$

4.1.4. Przykład sterowania dystorsjami w dwuwarstwowej płycie strukturalnej

Wprowadzone wyżej związki opisujące statykę ustrojów strukturalnych pozwalają na przeprowadzenie analizy stanów deformacji wywołanych określonymi dystorsjami, względnie na identyfikację pól dystorsji powodujących określone deformacje /napięcia/ wstępne.

Przeanalizujmy przykład sprężania dwuwarstwowej płyty strukturalnej, kiedy to problem sprowadza się do sterowania polem dystorsji. Płyta wykonana z identycznych prętów o długości L i polu przekroju ϕ /rys. 4.3/, poddana może być działaniu pola dystorsji membranowych.

Przyjmując wektory kierunkowe prętów poszczególnych rodzin $\overset{(g)}{t}_1, \overset{(g)}{t}_A, \overset{(g)}{t}_2^k$ jak na rys. 4.3, można wyznaczyć na podstawie (4.23)

i zależności geometrycznych - macierze sztywności:

$$4.51 \quad A^{klmn} = \overset{(B)}{A}{}^{klmn} = \overset{(G)}{A}{}^{klmn}$$

$$A^{1111} = A^{2222} = 3A, \quad A^{1212} = A^{1221} = A^{2112} = A^{2121} = A^{1122} = A^{2211} = A,$$

gdzie

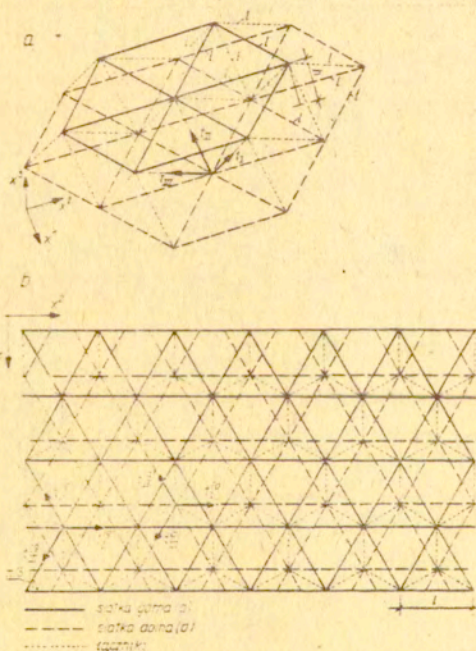
$$4.52 \quad A = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{E\phi}{L}, \quad A^{kl} = \overset{(S)}{A} \delta^{kl}, \quad \text{gdzie } \overset{(S)}{A} = \frac{2E\phi}{L^2}.$$

Ponieważ omawiany przypadek spełnia założenia (4.42) i (4.45), zatem ograniczając się do przypadku (4.47), $b^L = 0$, równaniom równowagi i warunkom nierozdzielności (4.48) nadamy postać

$$(3\gamma_{11} + \gamma_{22} - 4\delta)_{,11} + (\gamma_{11} + 3\gamma_{22} - 4\delta)_{,22} + 4\gamma_{12,12} + \frac{b}{A h^1} = 0$$

$$4.53 \quad (\gamma_{11} - \gamma_{22})_{,12} + \gamma_{12,12} - \gamma_{12,11} = 0$$

$$\gamma_{11,22} + \gamma_{22,11} - 2\gamma_{12,12} = 0$$



Rys. 43

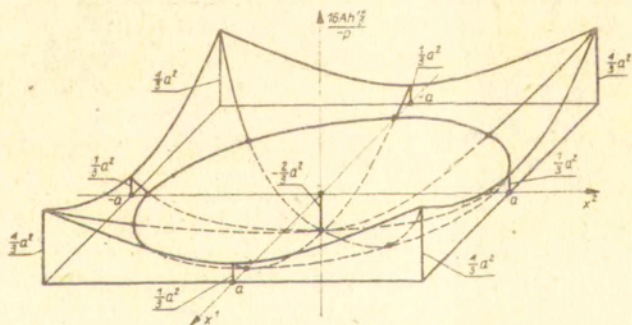
Rozważmy możliwość wymuszenia takich stanów dystorsji w prętach siatki dolnej i górnej, aby urządzenie, poddane działaniu obciążenia zewnętrznego pozostał nieodkształcony. Ze związków (4.53) widać, że można to osiągnąć wieloznacznie, lecz przez stany dystorsji nie spełniające związków nierozdzielności, zatem, wywołujące stany napięć wstępnych i zwiększające globalne wyężenie urządzenia. Osiągnijmy zatem warunek nieodkształcalności urządzenia przez wprowadzenie dystorsji minimalizujących globalne wyężenie, co z uwagi na (4.42) sprowadza się do minimalizacji wyężenia w siatkach górnej i dolnej:

$$4.54 \quad \min I = \min \iint_D (\bar{\rho}^{kl} \rho_{kl}^{(g)} + \bar{\rho}^{kl} \rho_{kl}^{(d)}) d\omega$$

Zadanie minimalizacji funkcjonau (4.54) przy ograniczeniach $\delta_{kl} = 0$ oraz (4.53) prowadzi [88] do rozwiązania

$$4.55 \quad \delta_{22} = \delta_{11} = \frac{b}{8Ah}$$

Przytoczmy na zakończenie przykład liczbowy płyty kwadratowej, obciążonej równomiernie /rys. 4.4/: $b = -\rho = \text{const.}$



Rys. 4.4.

Przyjmując, że dystorsje (4.55) mają postać

$$4.56 \quad \delta = -\frac{P}{16AH} (x_1^2 + x_2^2 + c)$$

i uwzględniając fakt, że warstwy zewnętrzne nie ulegają odkształceniu, można określić minimalną wartość funkcjonau (4.54)

$$4.57 \quad I = \frac{5P^2}{8H^2} \int_0^a \int_0^a (x_1^2 + x_2^2 + c)^2 dx_1 dx_2 = \frac{5P^2 a^2}{8H^2} \left(c^2 + \frac{4}{3} a^2 c + \frac{28}{45} a^4 \right)$$

Przyjmując

$$4.58 \quad c = -\frac{2}{3} a^2,$$

uzyskujemy wartość całkowitego napięcia $I = 11a^6 p^2 / H^2$, które wywołane jest w ustroju obciążeniem b oraz dystorsjami wprowadzonymi w warstwach zewnętrznych (4.47)², (4.56) /rys. 4.4/:

$$4.59 \quad \frac{c}{\delta} = \frac{(c)}{\delta} = -\frac{(d)}{\delta} = -\frac{P}{16AH} (x_1^2 + x_2^2 - \frac{2}{3} a^2)$$

4.2. Przypadek dowolnych układów prętowych

W poprzednim rozdziale (4.1) rozważane było zagadnienie dystorsji w szczególnych układach prętowych, do opisu których mógł być stosowany model kontynuacyjny. W przypadku tym można było adaptować w sposób formalny pewne ogólne wnioski dotyczące zagadnień dystorsji wewnętrznych w continuum sprężystym, opisane w rozdz. 1.

Istnieje szeroka klasa struktur regularnych, aczkolwiek nie spełniających warunków uprawniających do zastosowania kontynualnego opisu. Można wtedy adaptować ogólne wnioski otrzymane w rozdz. 1 w sposób formalny, stosując dyskretny model struktury /np. [18], [22]/. Problem komplikuje się bardziej w przypadku dowolnych układów prętowych /por. np. [70]/, aczkolwiek i wtedy można opracować formalizm korespondujący z analizą zagadnienia w continuum sprężystym. Zajmijmy się w tym celu sieciową analizą statyczną ustroju.

4.2.1. Uogólniona, sieciowa analiza statyczna ustroju prętowego.

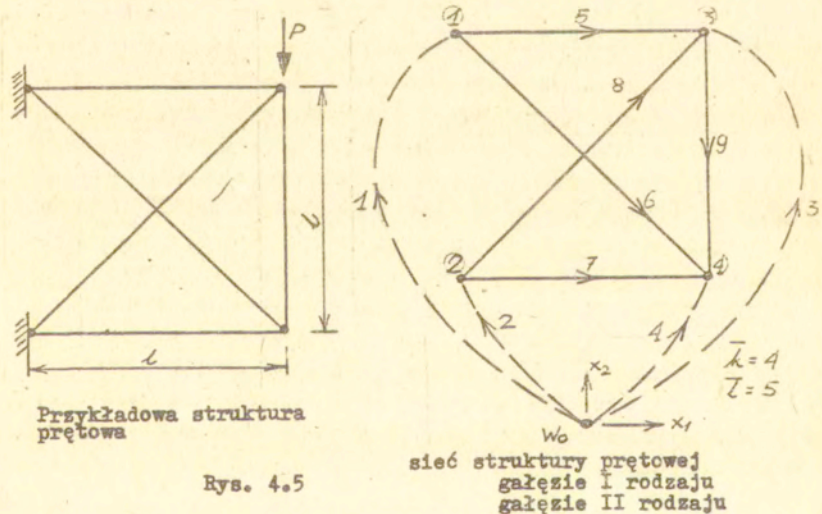
Opiszmy sieciowe podejście do analizy statycznej ustroju prętowego. Jest ono oparte na znanych opracowaniach (np. [16,39]) lecz różni się od nich tym, że korzysta się z odkształceniowego, nie zaś przemieszczeniowego opisu zagadnienia. Inowacja ta jest niezbędna dla uwzględnienia wpływu wymuszanych dystorsji pierwotnych na stany odkształceń i naprężeń.

Klasyczny opis przemieszczeniowy zawiera implicite założenie o wspólnych przemieszczeniach i obrotach końców prętów zbiegających się w jednym węźle, którego to założenia, rozważane przez nas stany dystorsyjne spełniać nie muszą.

Prezentowane podejście wymagać będzie dołączenia do równań nierozdzielności odkształceń klasycznej teorii sieci, warunków zgodności przemieszczeń i obrotów końców prętów schodzących się w jednym węźle, /wyrażonych w odkształceniach/.

Topologia ustroju

Dla dowolnego ustroju prętowego możemy przeprowadzić konstrukcję jego modelu sieciowego według poniższych zasad. /por. rys. 4.5/.



- Wprowadzamy wierzchołki sieci /parametryzowane przez $k = 1, 2, \dots, \bar{k}$ / we wszystkich (\bar{k}_1) węzłach struktury i we wszystkich (\bar{k}_2) pozawęzłowych punktach przyłożenia obciążeń zewnętrznych /skupionych/ $\bar{k} = \bar{k}_1 + \bar{k}_2$.
- Wprowadzamy wierzchołek zerowy "W₀" związany z podłożem.
- Wprowadzamy krawędzie I rodzaju łączące wierzchołek zerowy z pozostałymi wierzchołkami sieci. Parametryzujemy te krawędzie zgodnie z numerami końców odpowiadających węzłom struktury,
- Wprowadzamy krawędzie II rodzaju odpowiadające prętom struktury. Parametryzujemy te krawędzie dowolnie, począwszy od numeru $\bar{k} / \bar{l} = \bar{k}+1, \bar{k}+2, \dots, \bar{k}+\bar{l}$.
- Wprowadzamy umowną orientację sieci zakładając zwroty krawędzi np. od wierzchołków o niższym numerze porządkowym do wierzchołków o wyższym numerze.

W skonstruowanym tak grafie ustroju prętowego wyróżniać będziemy dalej drzewo grafu wyznaczone przez korzeń W₀ i gałęzie I rodzaju oraz grupę gałęzi II rodzaju zamykających pętle.

Topologię sieci opisać można jednoznacznie, równoważnie, na dwa różne sposoby:

- definiując macierz pętli podstawowych $\subseteq [\bar{l} \times (\bar{k} + \bar{l})]$ wyznaczanych przez kolejne gałęzie zamykające /II rodzaju/
 $C_{ml} = 1$ jeśli krawędź l zawarta jest w pętli m i jej orientacja jest zgodna z orientacją pętli /pochodzącą od gałęzi zamykającej/.
- $C_{ml} = -1$ jeśli krawędź l zawarta jest w pętli m i jej orientacja jest przeciwna do orientacji pętli.
- $C_{ml} = 0$ jeśli krawędź l nie jest zawarta w pętli m .
- definiując macierz przekrojów podstawowych $\subseteq [\bar{k} \times (\bar{k} + \bar{l})]$ wyznaczonych przez wycięcie otoczeń \bar{k} kolejnych wierzchołków sieci /poza wierzchołkiem W₀/:
- $q_{kl} = 1$ jeśli krawędź l jest przecięta przekrojem k i skierowana do odciętego wierzchołka,

$q_{kl} = -1$ jeśli krawędź l jest przecięta przekrojem k i skierowana od odciętego wierzchołka,

$q_{kl} = 0$ jeśli krawędź l nie jest przecięta przekrojem k .

Macierze \underline{C} i \underline{Q} przyjmą dla przykładu sieci przedstawionej na rys. 1 postać:

$$4.60 \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.61 \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ogólnie, można pokazać [39], że macierze \underline{C} i \underline{Q} mają następującą budowę:

$$4.62 \quad \underline{C} = [\underline{H}_1, \underline{I}_2] \quad \underline{Q} = [\underline{I}_1, \underline{H}_2]$$

gdzie \underline{I}_1 , \underline{I}_2 są macierzami jednostkowymi, oraz, że zachodzi związek:

$$4.63 \quad \underline{H}_1 = -\underline{H}_2^T$$

gdzie indeks "T" oznacza transpozycję macierzy.

Równania sieciowe

Wprowadzamy globalny układ współrzędnych kartezjańskich w trójwymiarowej przestrzeni fizycznej.

Skonstruowana przez nas sieć ustroju posiada tę własność, że jej krawędzie wolne są od obciążeń zewnętrznych. Wynika stąd, że wektory sił wewnętrznych w prętach $\underline{R} = [R_1, R_2, R_3]$ są stałe na ich długości, zaś wektory momentów wewnętrznych $\underline{M} = [M_1, M_2, M_3]$ są liniowo zmienne. Jeśli symbol \underline{M}^1 oznacza wektor momentu w starszym przekroju przywęzłowym pręta, zaś \underline{M}^2 w młodszym przekroju przywęzłowym pręta, to rozkład momentów na jego długości

opisać można jednoznacznie przez dwa wektory:

$$\underline{M}^S = \frac{1}{2} (\underline{M}^i + \underline{M}^j), \quad \underline{M}^a = \frac{1}{2} (\underline{M}^i - \underline{M}^j).$$

Jeśli odpowiednio \underline{V}^i i \underline{V}^j oznaczają wektory przesunięć starszego i młodszego końca pręta, zaś $\underline{\Phi}^i$ i $\underline{\Phi}^j$ wektory obrotów starszego i młodszego końca pręta, to stan jego odkształcenia można opisać jednoznacznie za pośrednictwem trzech wektorów:

$$4.64 \quad \underline{V} = \frac{1}{2} (\underline{V}^i - \underline{V}^j) \quad \underline{\Phi}^a = \frac{1}{2} (\underline{\Phi}^i - \underline{\Phi}^j) \quad \underline{\Phi}^S = \frac{1}{2} (\underline{\Phi}^i + \underline{\Phi}^j)$$

Równania sieciowe [16] wyrażają warunki równowagi podstawowych wycinków struktury, gwarantujące równowagę całego ustroju, warunki nierozdzielności pętli podstawowych oraz związki konstytutywne.

Przyjmując, że podstawowe wycinki struktury mają tę własność, że połowią przecinane pręty, w równaniach równowagi nie występują antysymetryczne części momentów przywęzłowych \underline{M}^a . Równania te mają postać:

$$4.65 \quad \underline{Q} \underline{R} = \underline{0} \\ \underline{Q} \underline{M}^S = \underline{0}$$

gdzie:

- macierz \underline{Q} otrzymana została z macierzy \underline{Q} przez zastąpienie jej elementów 1, -1, 0 przez odpowiednie macierze typu $[3 \times 3]$ jednostkowe lub zerową: \underline{I} , $-\underline{I}$, $\underline{0}$.
- macierze \underline{R} , \underline{M}^S są typu $[3(\bar{k}+1) \times 1]$, przy czym ich składowe o numerach $3\bar{l} + 1$, $3\bar{l} + 2$, $3\bar{l} + 3$ stanowią zdefiniowane wyżej wektory \underline{R} , \underline{M}^S odniesione do pręta 1.
- macierze \underline{Q} są wektorami zerowymi typu $[3(\bar{k}+1) \times 1]$.

Warunki nierozdzielności pętli podstawowych przybierają postać

$$4.66 \quad \underline{C} \underline{V} = \underline{0} \\ \underline{C} \underline{\Phi}^a = \underline{0}$$

gdzie:

- macierz \underline{Q} otrzymana została z macierzy \underline{C} przez zastąpienie jej elementów 1, -1, 0 przez odpowiednie macierze \underline{I} , $-\underline{I}$, $\underline{0}$ typu $[3 \times 3]$,
- macierze \underline{V} , $\underline{\Phi}^a$ są wektorami kolumnowymi o wymiarze 3 ($\bar{k}+1$) przy czym ich składowe o numerach $3\bar{l}+1$, $3\bar{l}+2$, $3\bar{l}+3$ stanowią zdefiniowane wyżej wektory \underline{V} , $\underline{\Phi}^a$ odniesione do pręta \bar{l} .

Związki konstytutywne

Prowadźmy lokalne układy współrzędnych kartezjańskich związane z każdym z prętów. Pierwsza oś układu lokalnego wyznacza oś podłużną pręta zaś dwie pozostałe są głównymi osiami bezwładności pręta.

Wielkości sił wewnętrznych i odkształceń prętów występujące w równaniach sieciowych (4.65), (4.66) powiązane są związkami konstytutywnymi, które w lokalnym układzie współrzędnych przyjmują dla danego pręta postać:

$$4.67 \quad \underline{\overset{*}{R}}_{II} = [\underline{A}^1 \mid \underline{A}^2] \begin{bmatrix} \underline{\overset{*}{V}}_{II} \\ \underline{\overset{*}{\Phi}}_{II}^s \end{bmatrix}$$

$$\underline{\overset{*}{M}}_{II}^s = \underline{A}^3 \underline{\overset{*}{\Phi}}_{II}^a$$

gdzie

$$4.68 \quad \underline{A}^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_3}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_2}{L^3} \end{bmatrix} \quad \underline{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_3}{L^2} \\ 0 & -\frac{12EJ_2}{L^2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^3 = \begin{bmatrix} \frac{GJ_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EJ_2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EJ_3}{L} \end{bmatrix}$$

W równaniach tych:

- * - oznacza odniesienie wielkości do układu lokalnego
- E - współczynnik sprężystości podłużnej pręta

- GJ_1 - sztywność skręcania przekroju poprzecznego pręta
 J_2, J_3 - momenty bezwładności względem osi 2 i 3 lokalnego układu współrzędnych /główne osie bezwładności przekroju/
 II - oznacza odniesienie wielkości do krawędzi II rodzaju.

Transformacja układów współrzędnych

W celu wykorzystania równań sieciowych (4.65), (4.66) zapisanych w globalnym układzie współrzędnych oraz związków konstytutywnych (4.67) zapisanych w układach lokalnych, niezbędne jest wprowadzenie wzorów transformacyjnych pozwalających na przechodzenie z wektorami siłowymi i przemieszczeniowymi z układu do układu.

Niech dla określonego pręta macierz $\underline{\Lambda} = [\lambda_{ij}]$ / $i = 1.2.3, j = 1.2.3$ / opisuje cosinusy kierunkowe i -tej osi lokalnego układu współrzędnych względem j -tej osi globalnego układu współrzędnych. Niech wielkości x_1, x_2, x_3 opisują współrzędne punktu B przyłożenia do pręta opisywanego wektora w globalnym układzie współrzędnych.

Wprowadzając dla określonego punktu B macierz \underline{X} :

$$4.69 \quad \underline{X} = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz wektory sił przekrojowych $\underline{R}_B, \underline{M}_B$ i wektory przemieszczeń $\underline{V}_B, \underline{\Phi}_B$, interesujące nas wzory transformacyjne można zapisać w postaci [26]:

$$4.70 \quad \begin{bmatrix} \underline{R}_B^* \\ \underline{M}_B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Lambda} & \underline{O} \\ \underline{\Lambda X} & \underline{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}_B \\ \underline{M}_B \end{bmatrix}$$

$$4.71 \quad \begin{bmatrix} \underline{R}_B \\ \underline{M}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Lambda}^T & \underline{O} \\ \underline{X}^T \underline{\Lambda}^T & \underline{\Lambda}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{R}_B^* \\ \underline{M}_B^* \end{bmatrix}$$

$$4.72 \quad \begin{bmatrix} \underline{V}_B^* \\ \underline{\Phi}_B^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Lambda} & \underline{\Lambda X} \\ \underline{O} & \underline{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_B \\ \underline{\Phi}_B \end{bmatrix}$$

$$4.73 \quad \begin{bmatrix} \underline{V}_B \\ \underline{\Phi}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\Lambda}^T & | & \underline{X}^T \underline{\Lambda}^T \\ \hline \underline{Q} & | & \underline{\Lambda}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{V}_B^* \\ \underline{\Phi}_B^* \end{bmatrix}$$

Warunki wspólnych obrotów przekrojów przywęzłowych

Związki (4.65), (4.66), (4.67) wykorzystywane są przez klasyczną metodę statycznej analizy sieciowej ustroju, opisującą zagadnienie w przemieszczeniach. W naszym przypadku, związki (4.66) nie gwarantują nierozdzielności struktury. W celu jej zapewnienia niezbędne jest naruszenie dodatkowych żądań, aby kąty obrotów przekrojów przywęzłowych wszystkich prętów zbiegających się w kolejnych węzłach były identyczne. Warunki te można wyrazić w postaci:

$$4.74 \quad \underline{\Phi}_{II}^S = \underline{H}_1 \underline{\Phi}_I^S,$$

gdzie:

- macierz \underline{H}_1 jest macierzą otrzymaną z \underline{H}_1 /podmacierz macierzy \underline{C} - por. (4.61), (4.66)/ przez przyjęcie bezwzględnych wartości jej elementów.
- macierze $\underline{\Phi}_{II}^S$, $\underline{\Phi}_I^S$ skonstruowane są analogicznie do macierzy $\underline{\Phi}^a$ /por. (4.66) / i odnoszą się odpowiednio do krawędzi I i II rodzaju.

Podsumowując przeprowadzone powyżej rozważania widzimy, że w celu przeprowadzenia analizy statycznej ustroju dysponujemy, licząc skalarnie, $15\bar{1} + 6\bar{k}$ równaniami z $15\bar{1} + 6\bar{k}$ niewiadomymi:

Równania teorii:

- $6\bar{k}$ równań równowagi segmentów podstawowych (4.65)
- $6\bar{1}$ warunków nierozdzielności (4.66)
- $3\bar{1}$ warunków nierozdzielności (4.74)
- $6\bar{1}$ związków konstytutywnych (4.67) zapisanych dla krawędzi II rodzaju.

Niewiadome teorii:

- 6l niewiadomych składowych sił przekrojowych \underline{R}_{II} , \underline{M}_{II}^B w krawędziach II rodzaju
- 9l niewiadomych składowych opisujących przemieszczenia względne końców krawędzi II rodzaju \underline{V}_{II} , $\underline{\Phi}_{II}^S$, $\underline{\Phi}_{II}^a$
- 6k niewiadomych opisujących przemieszczenia względne końców krawędzi I rodzaju. Dla uproszczenia można przyjąć, że przemieszczenia i obroty węzła W_0 znikają.

W przypadku zewnętrznych warunków przemieszczeniowych narzuconych na węzły ustroju, odpowiednie niewiadome przemieszczeniowe z trzeciej grupy zmiennych zastępujemy przez niewiadome sił reakcyjnych podłoża.

4.2.2. Analiza stanu deformacji struktury z uwzględnieniem wpływu dystorsji

Przyjmijmy, że dysponujemy możliwością wymuszania w prętach struktury /w krawędziach II rodzaju sieci/ dystorsji pierwotnych opisanych wektorami $\underline{\dot{V}}_{II}$, $\underline{\dot{\Phi}}_{II}^S$, $\underline{\dot{\Phi}}_{II}^a$.

Dystorsje te nie muszą spełniać warunków nierozdzielności (4.66) i (4.74) i w ogólnym przypadku wywołują samozrównoważony stan naprężeń wstępnych i nierozdzielny stan odkształceń wstępnych.

Prowadząc rozważania analogiczne do tych, które dotyczyły analizy stanów wstępnych wywołanych w ośrodku ciągłym przez pole dystorsji, można zauważyć, że wpływ dystorsji na stany odkształceń i naprężeń końcowych /będących sumą stanów wstępnych i stanów użytkowych/ struktury daje się uwzględnić przez przyjęcie zmodyfikowanych związków konstytutywnych w miejsce równań (4.67):

$$4.75 \quad \underline{\dot{R}}_{II}^* = \begin{bmatrix} \underline{A}^{11} & \underline{A}^{12} \\ \underline{A}^{21} & \underline{A}^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\dot{V}}_{II}^* - \underline{\dot{V}}_{II} \\ \underline{\dot{\Phi}}_{II}^S - \underline{\dot{\Phi}}_{II}^S \\ \underline{\dot{\Phi}}_{II}^a - \underline{\dot{\Phi}}_{II}^a \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{M}}_{II}^{*S} = \underline{A}^3 (\underline{\dot{\Phi}}_{II}^{*a} - \underline{\dot{\Phi}}_{II}^{*a})$$

Z postaci macierzy sztywności (4.68) widać, że w ogólnym przypadku dysponujemy możliwością wywołania w każdym pręcie ustroju tylko sześciu liniowo niezależnych składowych stanu

dystorsji pierwotnych, mających wpływ na stan naprężenia ustroju.

Przekształćmy układ równań (4.65), (4.66), (4.74), (4.75) w celu uzyskania opisu stanu deformacji ustroju.

Wydzielmy w równaniach równowagi (4.65) siły uogólnione w krawędziach I rodzaju, oraz siły uogólnione w krawędziach II rodzaju, a następnie wyrażmy te ostatnie w lokalnych układach współrzędnych, przy użyciu transformacji (4.71), stosowanej do uogólnionych sił w przekrojach połowiących pręty na ich długościach. Otrzymamy w ten sposób związki:

$$4.76 \quad \underline{I}_1 \underline{R}_1 + \underline{H}_2 \underline{\Lambda}^T \underline{R}'' = \underline{0}$$

$$\underline{I}_1 \underline{M}_1^s + \underline{H}_2 (\underline{X}^T \underline{\Lambda}^T \underline{R}'' + \underline{\Lambda}^T \underline{M}''^s) = \underline{0}$$

gdzie macierz $\underline{\Lambda}^T$ typu $[3\bar{1} \times 3\bar{1}]$ konstruowana jest w ten sposób, że dla każdego jej elementu o indeksach $[3\bar{1}+1+i, 3\bar{1}+1+j] / i, j, = 1, 2, 3/$ przyjmujemy wartość elementu macierzy $\underline{\Lambda}^T$ odpowiadającej prętowi $\bar{1}$ o indeksach $[i, j]$. Pozostałe elementy macierzy przyjmujemy jako zerowe. Analogicznie konstruowana jest macierz \underline{X}^T .

Wprowadzając do równań równowagi (4.76) zmodyfikowane związki konstytutywne (4.75), zapisane dla każdego z prętów ustroju, otrzymujemy:

$$4.77 \quad \underline{I}_1 \underline{R}_1 + \underline{H}_2 \underline{\Lambda}^T [\underline{A}^1 (\underline{V}'' - \underline{V}''^0) + \underline{A}^2 (\underline{\Phi}''^s - \underline{\Phi}''^s^0)] = \underline{0}$$

$$\underline{I}_1 \underline{M}_1^s + \underline{H}_2 \{ \underline{X}^T \underline{\Lambda}^T [\underline{A}^1 (\underline{V}'' - \underline{V}''^0) + \underline{A}^2 (\underline{\Phi}''^s - \underline{\Phi}''^s^0)] + \underline{\Lambda}^T \underline{A}^3 (\underline{\Phi}''^a - \underline{\Phi}''^a^0) \} = \underline{0}$$

gdzie macierze $\underline{A}^1, \underline{A}^2, \underline{A}^3$ konstruowane są analogicznie do macierzy $\underline{\Lambda}^T$.

Wydzielmy w warunkach nierozdzielności (4.66) uogólnione przemieszczenia względne końców krawędzi I i II rodzaju, przy czym wyrażmy te ostatnie, przy użyciu transformacji (4.73), w lokalnych układach współrzędnych, zaczepionych w środkach rozpiętości prętów.

$$4.78 \quad \underline{H}_1 \underline{V}_1 + \underline{I}_2 (\underline{\Lambda}^T \underline{V}'' + \underline{X}^T \underline{\Lambda}^T \underline{\Phi}''^a) = \underline{0}$$

$$\underline{H}_1 \underline{\Phi}_1^a + \underline{I}_2 \underline{\Lambda}^T \underline{\Phi}''^a = \underline{0}$$

Postępując analogicznie z warunkami nierozdzielności (4.74) otrzymujemy:

$$4.79 \quad \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{\Phi}}_n^s = \underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{\Phi}}_1^s$$

Przy pomocy warunków nierozdzielności (4.78), (4.79) można wyrugować wielkości $\underline{\underline{V}}_n$, $\underline{\underline{\Phi}}_n^s$, $\underline{\underline{\Phi}}_n^a$ z równań równowagi (4.77).

Otrzymujemy w ten sposób opis przemieszczeń i obrotów węzłów ustroju. Zakładając, że przemieszczenia i obroty węzła zerowego $\underline{\underline{w}}_0$ znikają i oznaczając: $\underline{\underline{\Psi}} \equiv \frac{1}{2} \underline{\underline{\Phi}}_1^s = \frac{1}{2} \underline{\underline{\Phi}}_1^a$ oraz $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}_1$ otrzymujemy ostatecznie:

$$4.80 \quad \underline{\underline{H}}_2 \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{A}}^1 \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{H}}_1 + \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{H}}_1) \underline{\underline{\Psi}} - \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{A}}^1 \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{V}} \right] + \\ + \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{R}}_1 + \underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{R}}_n = \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{H}}_2 \left\{ \frac{1}{2} [\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{A}}^1 \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{H}}_1 + \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{H}}_1 - \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{A}}^3 \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{H}}_1] \underline{\underline{\Psi}} \right. \\ \left. - \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{A}}^1 \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{H}}_1 \underline{\underline{V}} \right\} + \underline{\underline{I}}_1 \underline{\underline{M}}_1^s + \underline{\underline{H}}_2 \underline{\underline{M}}_n^s = \underline{\underline{0}}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$4.81 \quad \underline{\underline{R}}_n = -\underline{\underline{\Delta}}^T (\underline{\underline{A}}^1 \underline{\underline{V}}_n + \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{\Phi}}_n^s) \\ \underline{\underline{M}}_n^s = -[\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\Delta}}^T (\underline{\underline{A}}^1 \underline{\underline{V}}_n + \underline{\underline{A}}^2 \underline{\underline{\Phi}}_n^s) + \underline{\underline{\Delta}}^T \underline{\underline{A}}^3 \underline{\underline{\Phi}}_n^a]$$

Niezależnie od rozpatrywanego przypadku należy określić krawędzie fikcyjne /I rodzaju/, w których znane są siły przekrojowe $\underline{\underline{R}}$, i $\underline{\underline{M}}^s$, to znaczy krawędzie połączone z węzłami, w których określone jest /w szczególnym przypadku zerowe/ obciążenie zewnętrzne siłami i momentami. Obciążenie to wprowadzamy jako znane siły i momenty przekrojowe do równań (4.80). Analogicznie, określamy na podstawie danych warunków podparcia struktury przemieszczenia i obroty odpowiednich węzłów i wstawiamy jako znane do równań (4.80).

W efekcie otrzymujemy, przy ustalonych dystorsjach pierwotnych, układ 6k równań skalarnych z 6k niewiadomymi określającymi przemieszczenia i obroty węzłów oraz reakcje podporowe.

Wpływ dystorsji pierwotnych na stan deformacji ustroju jest analogiczny do wpływu pewnego fikcyjnego obciążenia zewnętrznego (4.81), /por. (1.12), (1.13)/.

Związki (4.80) można wyspecyfikować w przypadkach szczególnych, np. dla bezmomentowych ustrojów kratowych lub dla zginanych ram płaskich.

W przypadku przestrzennych układów kratownicowych układ (4.80) redukuje się do:

$$4.82 \quad \underline{H}_2 \underline{A}^T \underline{A}^1 \underline{A} \underline{H}_1 \underline{V} - \underline{I}_1 \underline{R}_1 - \underline{H}_2 \underline{\bar{R}}_0 = \underline{0}$$

gdzie w macierzy sztywności \underline{A}^1 /por. (4.68)/ należy położyć formalnie $EJ_2 = EJ_3 = 0$ dla wszystkich prętów. Pomijając człon pochodzący od dystorsji pierwotnych otrzymujemy klasyczny opis deformacji ustroju [39].

W przypadku płaskich układów ramowych należy przyjąć przemieszczenia i obroty węzłów w postaci:

$$4.83 \quad \underline{V} \equiv \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\varphi} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

macierze transformacyjne w postaci:

$$4.84 \quad \underline{A} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{X} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

oraz wektory sił przekrojowych w krawędziach w postaci:

$$4.85 \quad \underline{R}_1 \equiv \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{M}_1^s \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M^s \end{bmatrix} \quad \underline{R}_{11} \equiv \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{M}_{11}^{os} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P^s \end{bmatrix}$$

4.2.3. Optymalne sterowanie stanami dystorsji

Przyjmijmy pewne nierównościowe ograniczenia wyłączeniowe narzucone na stany naprężeń w prętach ustroju. Znając geometrię struktury wyrazimy je w ograniczeniach wartości pewnej funkcji skalarnej zależnej od sił przekrojowych, mierzącej wyłączenia w prętach.

$$4.86 \quad f(\underline{\underline{R}}_n^*, \underline{\underline{M}}_n^s) \leq f^2$$

gdzie liczba f^2 opisuje dopuszczalną wartość wyłączenia.

Ograniczenia te można w szczególności przyjmować jako ograniczenia wartości sił przekrojowych w prętach:

$$4.87 \quad \begin{aligned} -\underline{\underline{R}}_n^* &\leq \underline{\underline{R}}_n^* \leq \underline{\underline{R}}_n^* \\ -\underline{\underline{M}}_n^s &\leq \underline{\underline{M}}_n^s \leq \underline{\underline{M}}_n^s \end{aligned}$$

gdzie elementy macierzy $\underline{\underline{R}}_n^*$, $\underline{\underline{R}}_n^*$, $\underline{\underline{M}}_n^s$, $\underline{\underline{M}}_n^s$ określone są dodatnio.

Przyjmując znikanie dystorsji pierwotnych, układ równań (4.80) opisuje deformację ustroju wywołaną przez obciążenia zewnętrzne. Na jej podstawie, korzystając ze związków geometrycznych (4.64) i związków konstytutywnych (4.75) można wyznaczyć siły przekrojowe $\underline{\underline{R}}_n^*$, $\underline{\underline{M}}_n^s$ w stanie użytkowym. Jeśli spełniają one ograniczenia (4.86), wtedy sprzężenie ustroju jest niecelowe. Jeżeli jednak warunki (4.86) nie są spełnione, należy postawić problem poszukiwania takich pól dystorsji pierwotnych, aby pole sił wewnętrznych wywołanych jednocześnie przez obciążenie zewnętrzne i przez stan dystorsyjny ograniczenia te spełniało.

Rozwiązanie sformułowanego w ten sposób problemu może nie istnieć, a jeśli istnieje, może być wieloznaczne.

Zagadnienie optymalnego sprzężenia ustroju formułujemy następująco. Przy określonej geometrii struktury oraz warunkach jej podparcia i obciążenia zewnętrznego wyznaczyć taki stan dystorsji pierwotnych, który gwarantuje spełnienie ograniczeń

(4.86) przez uogólnione siły wewnętrzne w stanie końcowym, przy minimalnym koszcie sprężania mierzonym energią sprężystą stanu dystorsyjnego:

$$4.88 \quad \min \left\{ \sum_j \left[\bar{V}_1^{0*} \frac{EA}{L} \bar{V}_1^{0*} + \left(\bar{V}_2^{0*} - \bar{\Phi}_2^{0s} \right) \frac{12EJ_z}{L^2} \left(\frac{\bar{V}_2^{0*}}{L} - \bar{\Phi}_2^{0s} \right) + \left(\bar{V}_3^{0*} - \bar{\Phi}_3^{0s} \right) \frac{12EJ_z}{L^2} \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{\bar{V}_3^{0*}}{L} - \bar{\Phi}_3^{0s} \right) + \left(\bar{\Phi}_1^{0a} \right)^T \underline{A}^3 \bar{\Phi}_1^{0a} \right] \right\}$$

Sumowanie w wyrażeniu na energię przebiega wszystkie pręty struktury, w których dopuszczamy wymuszenie dystorsji pierwotnych.

Sformułowane powyżej zagadnienia optymalnego sprężania można sprowadzić do zadania programowania kwadratowego. Numerując indeksami 1, \bar{j} / 1 = 1, 2, ..., 6; \bar{j} = 1, 2, ..., \bar{j} / niezależne stany dystorsji pierwotnych wywoływanych w poszczególnych prętach /sześć niezależnych stanów: \bar{V}_1^{0*} , $\bar{V}_2^{0*}/L - \bar{\Phi}_2^{0s}$, $\bar{V}_3^{0*}/L - \bar{\Phi}_3^{0s}$, $\bar{\Phi}_1^{0a}$, $\bar{\Phi}_2^{0a}$, $\bar{\Phi}_3^{0a}$ w każdym pręcie/ można określić na podstawie związków (4.80), (4.61), (4.75) siły przekrojowe wywołane w każdym z prętów struktury przez kolejne, niezależne, jednostkowe stany dystorsyjne

$$4.89 \quad \underline{R}_{ij}^{R*} \quad \underline{M}_{ij}^{R*s}$$

W wyniku superpozycji stanów użytkowych, wywołanych przez obciążenia zewnętrzne:

$$4.90 \quad \underline{R}_{ij}^{L*} \quad \underline{M}_{ij}^{L*s}$$

oraz stanów wstępnych (4.89) uzyskujemy końcowe stany sił przekrojowych w prętach:

$$4.91 \quad \underline{B}_{ij}^* = \underline{R}_{ij}^{L*} + \sum_{\bar{c}, \bar{j}} \psi_{ij} \underline{R}_{ij}^{R*} \\ \underline{M}_{ij}^{*s} = \underline{M}_{ij}^{L*s} + \sum_{\bar{c}, \bar{j}} \psi_{ij} \underline{M}_{ij}^{R*s}$$

gdzie współczynniki ψ_{ij} są poszukiwanymi wielkościami opisującymi rozkład pola dystorsji pierwotnych.

Wyrażając w kryterium (4.88) składowe pola dystorsji jako iloczyny dystorsji jednostkowych i odpowiednich współczynników

$i_j \psi$ oraz podstawiająco zależności (4.91) do warunków (4.86) otrzymujemy zagadnienie programowania kwadratowego ze względu na:

$$4.92 \quad \min \left\{ \sum_j \left[\frac{EA}{L} \psi^2 + \frac{12EJ_2}{L^2} 2_j \psi^2 + \frac{12EJ_3}{L^2} 3_j \psi^2 + \frac{GJ_1}{L} 4_j \psi^2 + \frac{EJ_2}{L} 5_j \psi^2 + \frac{EJ_3}{L} 6_j \psi^2 \right] \right\}$$

przy ograniczeniach nierównościowych na kombinacje liniowe niewiadomych $i_j \psi$ (4.86), (4.91) opisujących wypukły obszar w przestrzeni poszukiwanych zmiennych.

Do rozwiązania tak sformułowanego zadania można zastosować jedną ze znanych metod programowania kwadratowego /np. [40]/.

Zwróćmy uwagę na fakt, że w przypadku, gdy dopuszczamy dowolne stany dystorsji, czyli z technologicznego punktu widzenia posiadamy możliwość wymuszania wydłużeń pierwotnych każdego z prętów, stan sił wewnętrznych wynikający z rozwiązania sformułowanego wyżej zadania pokrywa się ze stanem sił wewnętrznych wyznaczonych dla układu o cechach sprężysto-plastycznych. Stan deformacji natomiast odpowiada układowi o cechach sprężystych /por. § 1.3.3./.

Przykładowo, dla ram płaskich nośność graniczna przy sprężaniu odpowiada nośności granicznej ram sprężysto-plastycznych [73].

Dla przypadku optymalnego sprężania ustrojów kratowych opracowany został program TIPS określający poszukiwane stany dystorsji (por. § 4.2.5).

Może on być wykorzystany, w świetle powyższej uwagi, do analizy sprężysto-plastycznej oraz do wyznaczania nośności granicznej kratownic.

Opis programu wraz z przykładami liczbowymi opublikowano w pracy [98].

Stosowanie kwadratowej funkcji celu (4.88) prowadzi do rozwiązań, które rozprawdzają pola dystorsji po wszystkich prętach, w których wymuszanie dystorsji jest dopuszczalne, z intensywnością proporcjonalną do efektywności pól wstępnych wywoływanych przez nie. Jeśli z technologicznego punktu widzenia

preferować będziemy rozwiązania, w których liczba prętów sprężanych jest możliwie małą, uzasadnione będzie dołączenie do funkcji celu (4.88) członu, który przybierać będzie pewną stałą wartość w przypadku, gdy w danym pręcie wprowadzona jest dystorsja i zniknąć będzie w przypadku przeciwnym.

Rozwiązania uzyskane przy zastosowaniu takiej funkcji celu związane będą ze zwieraniem odpowiednio mniejszej liczby prętów.

Wzięcie pod uwagę ograniczeń (4.87) jedynie w stosunku do stanów końcowych implikuje przyjęcie założenia, że stany dystorsyjne narastają powoli od zera do swej wyznaczonej wartości równocześnie z narastaniem obciążeń zewnętrznych.

W przypadku, gdy warunki pracy konstrukcji i technologia sprężania dopuszczają możliwość występowania oddzielnie stanów wstępnych /przy zerowych stanach użytkowych/ należy wziąć pod uwagę dwie grupy ograniczeń (4.87). Jedną, związaną ze stanem wstępnym, a drugą ze stanem końcowym. Na podstawie znajomości obu grup ograniczeń można wybrać ograniczenia aktywne.

4.2.4. Przykład sprężania wspornika kratowego

Zilustrujmy ogólne rozważania prostym przykładem optymalnego sprężania wspornika kratowego przedstawionego na rys. 4.5

Przyjmując jednakowe wartości sił dopuszczalnych $R = R = aP$ ($a > 0$) dla wszystkich prętów wyznaczmy optymalne sprężanie przez wymuszanie wydłużeń pierwotnych krzyżulców 6 i 8.

Zakładając dla uproszczenia stałe wartości parametrów A i E dla wszystkich prętów, układ równań (4.82) sprowadza się w tym przypadku do postaci:

4.93

$$\frac{EA}{L} [G] = \begin{bmatrix} P_1^{(1)} \frac{L}{EA} \\ P_2^{(1)} \frac{L}{EA} \\ P_1^{(2)} \frac{L}{EA} \\ P_2^{(2)} \frac{L}{EA} \\ u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_1^{(4)} \\ u_2^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ B_1^{(3)} \\ B_2^{(3)} - P \\ B_1^{(4)} \\ B_2^{(4)} \end{bmatrix}$$

gdzie wskaźniki w nawiasach odnoszą się do numeru węzła zaś bez nawiasu opisują numer składowej w globalnym układzie współrzędnych.

Macierz \underline{G} ma postać:

$$4.94 \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & s & -s \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -s & s \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s & s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & s & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4s & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & 4s & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4s & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -s & 4s & s \end{bmatrix}$$

gdzie: $s = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,3536$

Wyznaczając macierz odwrotną:

$$4.95 \quad \underline{G}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0,12 & -0,44 & 0,12 & -0,56 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,12 & -0,56 & -0,12 & -0,44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,88 & -0,56 & -0,12 & -0,44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,55 & 2,14 & 0,45 & 1,68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,12 & 0,44 & 0,88 & 0,56 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,46 & 1,68 & 0,55 & 2,14 \end{bmatrix}$$

określamy z równań (4.93) bez trudu deformację w stanie użytkowym:

$$4.96 \quad \underline{U}_1^{(3)} = 0,56 \frac{PL}{EA} \quad \underline{U}_2^{(3)} = -2,14 \frac{PL}{EA}$$

$$\underline{U}_1^{(4)} = 0,44 \frac{PL}{EA} \quad \underline{U}_2^{(4)} = -1,68 \frac{PL}{EA}$$

a następnie, ze związków konstytutywnych (4.75)¹, /kładąc formalnie $\underline{A}^2 = \underline{0}$ / wartości sił w prętach w stanie użytkowym:

$$4.97 \quad \begin{aligned} \underline{P}_{(5)} &= 0,56P & \underline{P}_{(6)} &= 0,62P & \underline{P}_{(7)} &= -0,44P \\ \underline{P}_{(8)} &= -0,79P & \underline{P}_{(9)} &= -0,44P & & \end{aligned}$$

Wymuszając pierwotne wydłużenie $\overset{0}{V}_{(8)}$ pręta 8, należy uwzględnić w równaniach (4.93) siły zastępcze /por. (4.81) /:

$$4.98 \quad \underline{P}_1^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \overset{0}{V}_{(8)} \quad \underline{P}_2^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{EA}{l} \overset{0}{V}_{(8)}$$

odpowiedzialne za wstępną deformację ustroju:

$$4.99 \quad \begin{aligned} U_1^{(3)} &= 0,16 \overset{\circ}{V}_{(8)} & U_2^{(3)} &= 0,79 \overset{\circ}{V}_{(8)} \\ U_1^{(4)} &= 0,16 \overset{\circ}{V}_{(8)} & U_2^{(4)} &= 0,62 \overset{\circ}{V}_{(8)} \end{aligned}$$

oraz /po uwzględnieniu zmodyfikowanych związków konstytutywnych/ za wstępny stan sił w prętach:

$$4.100 \quad \begin{aligned} P_{(6)}^{R_3} &= 0,16 \frac{EA}{L} \overset{\circ}{V}_{(8)} & P_{(6)}^{R_2} &= -0,23 \frac{EA}{L} \overset{\circ}{V}_{(8)} & P_{(7)}^{R_3} &= 0,16 \frac{EA}{L} \overset{\circ}{V}_{(8)} \\ P_{(8)}^{R_3} &= -0,23 \frac{EA}{L} \overset{\circ}{V}_{(8)} & P_{(9)}^{R_3} &= 0,16 \frac{EA}{L} \overset{\circ}{V}_{(8)} \end{aligned}$$

Z ogólnej prawidłowości, że w ustroju n krotnie statycznie niewyznaczalnym można wywołać co najwyżej n liniowe niezależnych stanów naprężeń wstępnych [61] widać, że w analizowanej strukturze mamy jedynie możliwość wprowadzenia sił wstępnych liniowo zależnych ze stanem (4.100).

Zagadnienie sprzężania optymalnego (4.86), (4.91), (4.92) można w rozważanym przykładzie sprowadzić do poszukiwania

$$4.101 \quad \min [(\overset{\circ}{V}_{(6)})^2 + (\overset{\circ}{V}_{(8)})^2]$$

przy ograniczeniach:

$$4.102 \quad -aP \leq \frac{L}{E} (P_{(i)}^{R_6} + P_{(i)}^{R_3}) \leq aP \quad i = 5, 6, 9$$

Przyjmijmy $a = 0,705$. Stan użytkowy (4.97) nie spełnia w tym przypadku ograniczeń (4.102), gdyż przekroczona jest wartość dopuszczalna ściskania w pręcie 8.

Łatwo sprawdzić, że zadanie optymalnego sprzężania (4.101) (4.102) prowadzi w tym przypadku do rozwiązania:

$$4.103 \quad \overset{\circ}{V}_{(6)} = \overset{\circ}{V}_{(8)} = -0,185 \frac{PL}{EA}$$

sprowadzającego końcowy stan sił w prętach do postaci:

$$4.104 \quad \begin{aligned} P_{(5)} &= 0,50P & P_{(6)} &= 0,705P & P_{(7)} &= -0,50P \\ P_{(8)} &= -0,705P & P_{(9)} &= -0,50P \end{aligned}$$

Stała $a = 0,705$ dobrana została w ten sposób, że nie można już przez sprzężanie zmniejszyć wyteżenia w prętach 6 i 8 bez naruszania ograniczeń (4.102). Uzyskuje się w tym przypadku 13 % wzrostu nośności konstrukcji na skutek jej sprzężenia.

4.2.5. Program TIPS optymalnego sprężania kratownic

Dla przypadku optymalnego sprężania urządzeń kratowych opracowany został program TIPS określający poszukiwane, optymalne stany dystorsji. Może on być wykorzystany do analizy sprężysto-plastycznej oraz do wyznaczania nośności granicznej kratownic.

W pracy [106] zaprezentowano wykorzystanie programu do analizy kratownic prętowo cięgnowych o pewnej grupie prętów przenoszącej jedynie siły rozciągające, o pewnej grupie prętów przenoszącej siły jedynie ściskające oraz o pozostałych prętach przenoszących siły obu znaków. Opis programu opublikowano w pracy [98].

Program TIPS uruchomiony został na EMC ODRA 1305. Pozwala on na maszynach tego typu o konfiguracji 64K liczyć układy o maksymalnej liczbie 85 prętów /liczba węzłów jest praktycznie nieistotna/.

Jako przykład ilustrujący pracę programu TIPS przedstawimy konstrukcję wspornikową o schemacie geometrii i obciążenia jak na rys. 4.6. Przyjęto jednakowe przekroje poprzeczne prętów $A = \text{const.} = 1 \text{ cm}^2$, wartości ograniczające naprężenia dopuszczalne /na rozciąganie i ściskanie/ w prętach 3000 kg/cm^2 , $E = \text{const.} = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$. Maksymalną siłę jaką może przenieść układ sprężony można obliczyć z warunku odpowiadającego warunkowi nośności granicznej konstrukcji sprężysto-plastycznej. W naszym przypadku siłę graniczną $P_{GR} = 542,70 \text{ kg}$ obliczono zakładając osiągnięcie granicy naprężeń dopuszczalnych w prętach: 1,5,23,24. Dla tak przyjętego obciążenia obszar dopuszczalny zawęzi się do punktu. Maksymalna siła P_0 jaką może przenieść układ niesprężony wynosi 453 kg . Sprężanie ma więc sens dla $P_{GR} \gg P > P_0$.

Stosunek P_{GR}/P_0 w tym przypadku wynosi 1,2. Obciążmy rozpatrywany wspornik siłami $P \approx P_{GR}$ przyjmując $P = 542,00 \text{ kg}$. Rezultaty przedstawimy w tabelkach:

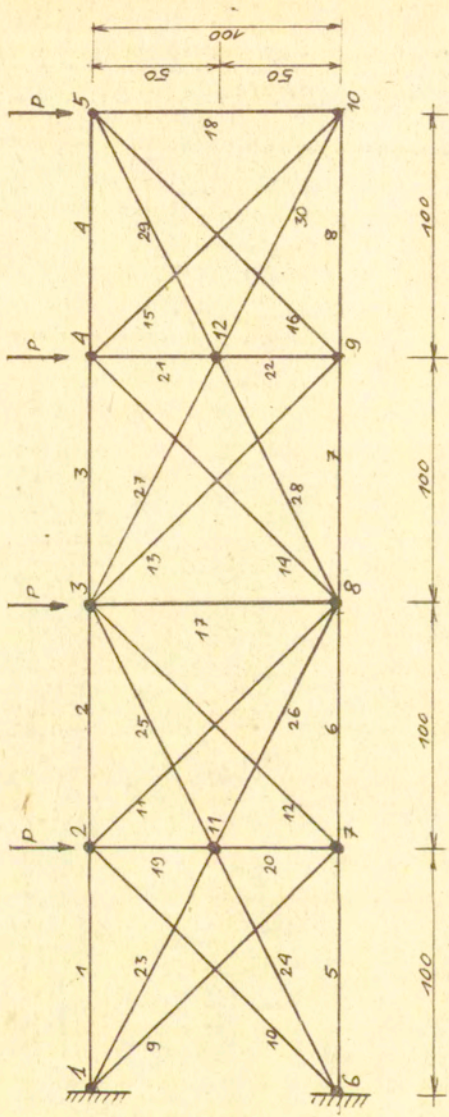
a/ w przypadku dystorsji wprowadzanych jedynie w krzyżulcach: 9,10,11,12,16 - uzyskujemy rozwiązanie przedstawione w tab.1.

b/ W przypadku dystorsji wprowadzanych we wszystkich prętach układu, uzyskujemy rozwiązanie przedstawione w tab.2

Zauważmy, że wartość funkcji celu w przypadku /b/ jest prawie trzykrotnie mniejsza. W rozwiązaniu /b/ dostajemy wstępny stan naprężenia: $\underline{\Sigma} = -\underline{E} \underline{\xi}$ podczas gdy $\underline{\xi} = \underline{Q}$. Uzyskany końcowy stan naprężenia $\underline{\Sigma}$ pokrywa się ze stanem naprężenia dla ustroju sprężysto-plastycznego.

Przechodząc do wniosków ogólnych można zauważyć, że najlepsze efekty ze względu na nośność daje sprężanie układów wielokrotnie przesztywnionych. Liczba prętów poddawanych pierwotnym skróceniom lub wydłużeniom wpływa na koszt sprężania, minimalizując go w sensie energetycznym. Ze względów technologicznych jednak może okazać się bardziej przydatne uzyskiwanie koniecznej regulacji stanu naprężeń wprowadzając dystorsje w możliwie najmniejszej liczbie prętów / por. dyskusja w p.4.2,3/

Na koniec zauważmy, że nie wprowadzając istotnych zmian w metodzie istnieje możliwość obliczeń tego typu dla wielu schematów obciążeń, bez powiększenia liczby ograniczeń.



Rys. 4.6

tabl. 1

ROZWIĄZANIE OPTYMALNE

EPS 0/ 9/	13.60915266
EPS 0/ 10/=	-14.04717774
EPS 0/ 11/=	0.77132663
EPS 0/ 12/=	-0.62283878
EPS 0/ 13/=	0.00253318
EPS 0/ 14/=	0.00253319
EPS 0/ 15/=	-0.00046211
EPS 0/ 16/=	-0.00046212

FUNKCJA CELU F=191.75756242

SIGMA = SIGMA L + SIGMA R

PRET	SIGMA	L	SIGMA	R	SIGMA
1	3608.75		-608.75		3000.00
2	2506.08		70.01		2576.09
3	863.27		-1.02		862.25
4	386.15		-0.21		385.94
5	-3568.32		568.32		-3000.00
6	-2419.15		-48.36		-2467.51
7	-770.64		-1.02		-771.66
8	-282.69		-0.21		-282.90
9	437.64		-800.07		-362.43
10	-514.22		864.56		350.33
11	1045.18		-95.35		949.83
12	-1187.53		72.05		-1115.48
13	324.02		0.98		325.00
14	-453.67		0.98		-452.69
15	221.08		-0.17		220.91
16	-366.05		-0.17		-366.22
17	-178.03		8.67		-169.35
18	-219.51		-0.05		-219.55
19	-917.45		-543.91		-1461.36
20	530.25		514.79		1045.04
21	-377.53		-0.58		-378.11
22	29.72		-0.58		29.14
23	1697.06		1313.11		2992.17
24	1663.72		-1318.89		-2982.61
25	-45.14		-135.23		-180.37
26	60.48		129.45		189.93
27	596.60		0.37		596.97
28	-597.67		0.37		-597.30
29	-142.34		0.37		-141.97
30	141.28		0.37		141.64

ROZWIĄZANIE OPTYMALNE

EPS 0/ 1/ =	2.89880373
EPS 0/ 2/ =	-0.13349459
EPS 0/ 3/ =	0.00034977
EPS 0/ 4/ =	0.00003278
EPS 0/ 5/ =	-2.70627307
EPS 0/ 6/ =	0.14905932
EPS 0/ 7/ =	0.00034977
EPS 0/ 8/ =	0.00003277
EPS 0/ 9/ =	3.85702173
EPS 0/ 10/ =	-4.06975392
EPS 0/ 11/ =	0.21856350
EPS 0/ 12/ =	-0.18102807
EPS 0/ 13/ =	-0.00037914
EPS 0/ 14/ =	-0.00037914
EPS 0/ 15/ =	0.00006917
EPS 0/ 16/ =	0.00006916
EPS 0/ 17/ =	-0.00243528
EPS 0/ 18/ =	-0.00000807
EPS 0/ 19/ =	2.72320286
EPS 0/ 20/ =	-2.59932004
EPS 0/ 21/ =	0.00021918
EPS 0/ 22/ =	0.00021919
EPS 0/ 23/ =	-6.29020452
EPS 0/ 24/ =	6.24312827
EPS 0/ 25/ =	0.29236676
EPS 0/ 26/ =	-0.33944300
EPS 0/ 27/ =	-0.00009132
EPS 0/ 28/ =	-0.00009132
EPS 0/ 29/ =	-0.00009132
EPS 0/ 30/ =	-0.00009132

FUNKCJA CELE F = 70.10169980

tab.2 /c.d./

$$\text{SIGMA} = \text{SIGMA L} + \text{SIGMA R}$$

PRET	SIGMA L	SIGMA R	SIGMA
1	3608,75	- 608,75	3000,00
2	2506,08	28,03	2534,12
3	863,27	-0,07	863,20
4	386,15	-0,01	386,15
5	3568,32	568,32	-3000,00
6	2419,15	-31,30	-2450,45
7	-770,64	-0,07	-770,71
8	-282,69	-0,01	-282,69
9	437,64	-809,97	-372,34
10	-514,22	854,65	340,43
11	1045,18	-45,90	999,29
12	1187,53	38,02	-1149,51
13	324,02	0,08	324,10
14	-453,67	0,08	-453,59
15	221,08	-0,01	221,06
16	-366,05	-0,01	-366,06
17	-178,03	0,51	-177,52
18	-219,51	0,00	-219,50
19	-917,45	-571,87	-1489,32
20	530,25	545,86	1076,11
21	-377,53	-0,05	-377,58
22	29,72	-0,05	29,67
23	1679,06	1320,94	3000,00
24	-1663,72	-1311,06	-2974,77
25	-45,14	-61,40	-104,54
26	60,68	71,28	131,76
27	596,60	0,02	596,62
28	-597,67	0,02	-597,65
29	-142,34	0,02	-142,32
30.	141,28	0,02	141,29

4.3. O możliwościach wykorzystania w projektowaniu układów prętowych sterowania dystorsjami oraz o technicznych sposobach generowania ich

W paragrafach 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, dyskutowany był problem sprężania ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami naprężeniowymi $K(\underline{\xi}) \leq K^z$ wprowadzając minimalną energię sprężania $\min_V \int_V \underline{\xi}^T \underline{\xi} dv$. W przypadku dopuszczenia możliwości wywoływania dystorsji w całym ustroju otrzymywane jest, zgodnie z ogólnymi rozważaniami z paragrafu 1.3.3, rozwiązanie zadania optymalizacji w postaci pól naprężeń takich, jak dla struktury o cechach sprężysto plastycznych oraz pól deformacji takich jak dla struktury sprężystej.

Analogicznie można rozważać problem sprężania ustrojów prętowych z jednostronnymi więzami odkształceniowymi $K(\underline{\xi}) \leq K^z$ wprowadzając minimalną energię sprężania. Rozwiązanie zadania przy możliwości wywoływania dystorsji w całym ustroju otrzymywane jest w postaci pól odkształceń takich, jak dla struktury o cechach "locking materials" [64,62] oraz pól naprężeń takich jak dla struktury sprężystej. Zadanie to może być wykorzystane przykładowo w projektowaniu konstrukcji szkieletowej z ograniczeniami odkształcalności wynikającymi z konieczności ich zespolenia z elementami wypełniającymi.

W myśl powyższych uwag ustroje prętowe o cechach sprężysto-plastycznych lub "locking materials" mogą być traktowane jako ustroje o pewnych naturalnych własnościach autosprężania. Zagadnienie analizy pól dystorsji koresponduje tu z zagadnieniem sterowania nimi.

Struktura o własnościach autosprężania może być także zaprojektowana sztucznie przez skonstruowanie węzłów o odpowiedniej podatności, czyli generujących dystorsje w przekrojach, w których przekroczone zostały naprężenia dopuszczalne.

Zgodnie z ogólnymi rozważaniami z rozdz.1.3.3 oraz z ana-

liza przykładów 4.2.4., 4.2.5, można sformułować zadanie maksymalizacji nośności ustroju prętowego /maksymalizacji parametru skalarnego λ - mnożnika siłowego obciążenia zewnętrznego λP / przy nierównościowych ograniczeniach stanu wyteżenia $K(\underline{\sigma}) \leq K_0^z$ i przy zadanym koszcie sprężania $J_{\underline{\sigma}} = \frac{1}{2} \int \underline{\sigma} \underline{\sigma} A \underline{\sigma} dv$. Przy odpowiednim przyjęciu kosztu $J_{\underline{\sigma}}$ uzyskuje się rozwiązania o rozkładzie naprężeń identycznym z naprężeniami odpowiadającego ustroju sprężysto-plastycznego w stanie nośności granicznej.

Dualnie, można postawić problem, jak sterować dystorsjami o zadanym koszcie sprężania $J_{\underline{\varepsilon}} = \int \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} c A \underline{\varepsilon} dv$ aby zmaksymalizować intensywność osiadania podpór $\lambda \hat{u}$ (\hat{u} zadane) przy nierównościowych ograniczeniach stanu odkształcenia $K(\underline{\varepsilon}) \leq K_0^z$. Odpowiada to maksymalizacji globalnej podatności układu $\int \frac{1}{2} \underline{\varepsilon} c A \underline{\varepsilon} dv + \int \frac{1}{2} \lambda \underline{\varepsilon} c A \underline{\varepsilon} dv$. Przy odpowiednim dobraniu kosztu uzyskuje się rozwiązanie o rozkładzie odkształceń identycznym z deformacją odpowiadającego ustroju o cechach "locking materials" w stanie podatności granicznej. Rozwiązanie zadania można uzyskać na drodze analogicznej do prezentowanej w pracy [50].

Rozwiązanie sformułowanego tu zadania może być przykładowo zastosowane przy projektowaniu konstrukcji szkieletowej z osiadającymi podporami. Daje ono odpowiedź na pytanie, przy jakiej maksymalnej intensywności λ osiadania można sprężyć ustrój /wprowadzając dystorsje $\underline{\varepsilon} c$ czyli regulując beznaprężeniowo geometrię układu/ tak, aby czynić zadość narzuconym ograniczeniom stanu deformacji $K(\underline{\varepsilon}) \leq K_0^z$.

Sprężanie ustrojów prętowych daje nam możliwość regulacji pewnych cech jakościowych układów. Istnieje klasa układów prętowych geometrycznie zmiennych, które na skutek wymuszenia odpowiedniego pola dystorsji nabierają zdolności przenoszenia określonego obciążenia zewnętrznego [90]. Jest to problem podstawowy przy projektowaniu konstrukcji wiszących /por. np. [29]/ oraz prętowo-ciężnowych /por. np. [61]/.

Spreżanie ze względu na osiągnięcie warunku bezodkształceniowego przenoszenia obciążeń zewnętrznych można także traktować jako regulację cech jakościowych ustroju /choć związanych z danym obciążeniem/. Rozwiązanie zadania regulacji cech jakościowych ustroju jest zazwyczaj wieloznaczne.

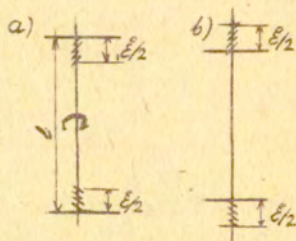
Przytoczmy na zakończenie dwa przykłady technicznej realizacji wymuszania dystorsji w urządzeniach prętowych.

Dogodne technologicznie możliwości wprowadzania dystorsji w strukturach kratowych przez wydłużenia i skrócenia prętów dają wszystkie metody wykonywania ustrojów, których montaż polega na skręcaniu typowych elementów: prętów i węzłów.

Zastosowanie w tych konstrukcjach gwintów przeciwnieobrotowych na końcach prętów pozwala w bardzo dogodny sposób wprowadzać do zmontowanej konstrukcji dowolne wydłużenia poszczególnych łączników przez odpowiednie ich obracanie wokół osi podłużnej.

Wprowadzenie odpowiedniego pola dystorsji sprządza się do takiego stopniowego, równomiernego obracania poszczególnych prętów wokół osi podłużnych, aby ich końce wysunęły się poza węzły o odcinki $L\epsilon/2$

/rys. 4.7 /



Rys. 4.7

W przypadku dowolnych układów prętowych, przez zastosowanie odpowiednio zmodyfikowanego sposobu łączenia prętów z blachami węzłowymi uzyskujemy drogą odpowiedniego montażu możliwość wymuszania dowolnego stanu dystorsji /zarówno dyslokacji jak i dysklinacji/. Należy w tym celu zastosować sposób łączenia prętów z elementami /blachami/ węzłowymi gwarantujący możliwość wprowadzenia do zestawionego ustroju:

- a/ regulacji przesunięcia końców prętów wzdłuż ich osi względem elementów węzłowych,
- b/ regulacji obrotów stycznych do osi prętów wystawionych w ich końcach względem elementów węzłowych.

Rozwiązanie konstrukcyjne węzła spełniającego warunki a/ i b/ łącznie przedstawimy na przykładzie /rys. 4,8 //za opisem patentowym [101]/ .

Stosuje się połączenie pręta /1/ z blachą węzłową /3/ za pośrednictwem podkładki /2/.

Powierzchnie styków prętów, podkładek i tarcz węzłowych wykonane są tak, aby ich współczynnik tarcia po sobie był na tyle duży, że po dociśnięciu elementów śrubami /sprężającymi 4,5/ zapewniona została odpowiednia sztywność połączenia.

Możliwość wymuszenia w zestawionej konstrukcji przesunięcia podkładki /2/ względem blachy węzłowej /3/ /po rozluźnieniu śrub 4/ zezwala na wprowadzenie regulacji typu a/.

Możliwość wymuszenia obrotu końca pręta /1/ względem podkładki /2/ /po rozluźnieniu śrub 5/ zezwala na prowadzenie regulacji typu b/.

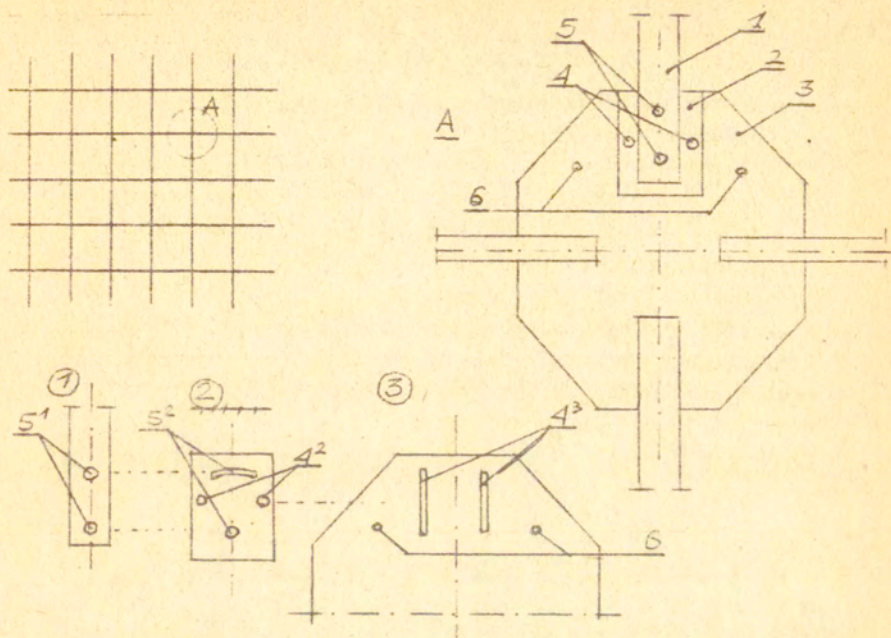
Metodę sprężania ustroju prętowego można opisać w punktach:

1. Złożenie ustroju prętowego /wszystkie śruby w węzłach są dokręcone/,
2. wykonanie następującego zabiegu sprężania we wszystkich

lub tylko w pewnych połączeniach prętów z węzłami

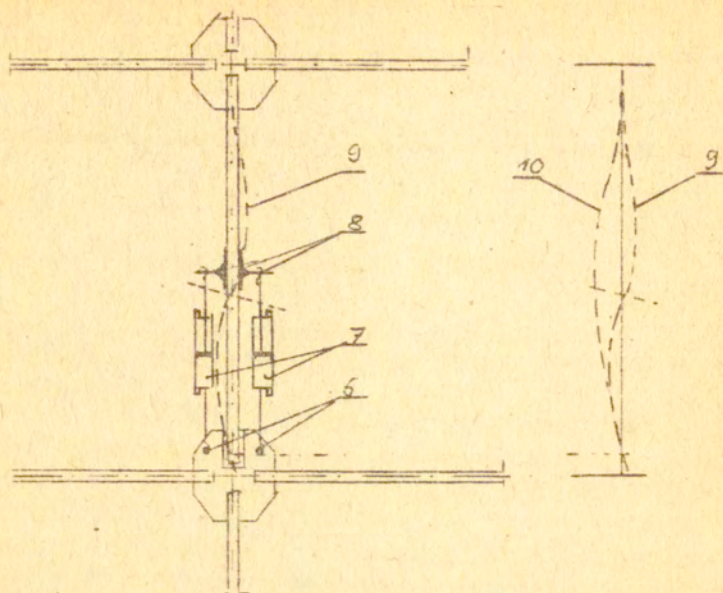
- połączenie tłoków ścigających rozpychających z prętami i otworami montażowymi 6 /rys. 4.9 /
- rozluźnienie śrub węzłowych 4,5 i wprowadzenie za pomocą tłoków odpowiednich przesunięć podkładki /2/ względem blachy węzłowej /3/ oraz obrotów pręta /1/ względem podkładki /2/.
- dokręcenie śrub węzłowych 4, 5
- zdjęcie układu tłoków sprężających.

Wymuszenie opisaną metodą przesunięć i obrotów końców prętów równoznaczne jest z wprowadzeniem do konstrukcji odpowiadającego stanu dystorsji.



- | | |
|--|--|
| 1 - pręt łączony w węźle | 5 - śruby łączące pręt z podkładką |
| 2 - podkładka | 5 ¹ - otwory w pręcie |
| 3 - blacha węzłowa | 5 ² - otwory nastawcze wykorzystywane przy regulacji b/ |
| 4 - śruby łączące podkładkę z blachą węzłową | 6 - otwory montażowe |
| 4 ² - otwory w podkładce | |
| 4 ³ - otwory nastawcze wykorzystywane przy regulacji a/ | |

Rys. 4.8



- 6 - otwory montażowe
- 7 - tłoki działające ściągająco lub rozpychająco na punkty złączenia 6, 8
- 8 - utwierdzenie montażowe tłoków
- 9 - linia osi pręta w momencie sprężania
- 10 - linia osi pręta po sprężeniu

Rys. 4.9

5. Zagadnienia dystorsji w układach kompozytowych

Wykorzystując analizę dystorsji w ciałach dwufazowych /§ 2/ przedyskutujemy problemy sprężania wiązkami włókien / §§ 5.1 ÷ 5.3/ oraz podajemy przykłady technicznych sposobów generowania dystorsji w układach kompozytowych /§ 5.4./

Otrzymane rezultaty można wykorzystać do analizy stanu deformacji i naprężeń w kompozytach zbrojonych włóknami. Można także uwzględniać wpływ dystorsji /niezależnych w obu fazach /na te stany. Najistotniejsze jest uwzględnienie w analizie wpływu dystorsji generowanych pomiędzy fazą matrycy i fazą włókien. Daje to możliwość sformułowania zagadnienia sprężania włóknami, co jest problemem bardzo istotnym np. w projektowaniu betonowych konstrukcji sprężonych.

Opis sprężania włóknami w ramach teorii belek jest tematem wielu opracowań /np. [58, 72]/. Istnieje także szereg prac analizujących problem na bazie założeń teorii sprężystości [80, 20, 12, 14, 34, 41, 92, 93, 94], co pozwala w perspektywie na projektowanie innych, sprężanych elementów konstrukcyjnych: tarcz, powłok. Wymienione prace nie analizują jednak stanów dystorsji, na skutek czego mogą jedynie dyskutować końcowe stany rozwiązania bez możliwości określenia sposobu ich osiągnięcia.

5.1. Przypadek strunokompozytów

Przenalizujemy pewien szczególny przypadek ośrodka dwufazowego, dyskutowanego w rozdz.2. Niech będzie nim ciągły, izotropowy ośrodek matrycy zbrojony gęstą wiązką włókien.

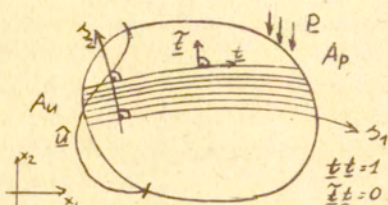
Zakładając wspólne deformacje obu faz w stanie końcowym, kompozyt opisywany jest związkami dyskutowanymi w § 2 /z uwzględnieniem wpływu dystorsji/ po zdefiniowaniu tensora własności sprężystych fazy włóknistej /rys. 5.1/.

$$5.1 \quad \underline{A} = E'' \underline{s} \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t}$$

gdzie: E'' - moduł Younga dla włókien

$0 < \underline{s} < 1$ - gęstość wiązki włókien

\underline{t} - wersor kierunkowy włókien w wiązce.



Rys. 5.1.

Włókno-kompozyty o wspólnej deformacji obu faz nazwijmy strunokompozytami, zaś w przypadku włókien posiadających swobodę deformacji względem matrycy pomiędzy punktami zakotwień nazwijmy kablokompozytami. Terminologia ta odpowiada przypadkom struno i kablobetonowych elementów konstrukcyjnych.

Zakładając $\underline{s} \ll 1$, co jest prawdą np. w struno-betonach, tensor sprężystości matrycy \underline{A}^0 pozostawimy niezmienny, nie uwzględniając osłabienia ośrodka przez ubytki materiału na trasie kabli.

W rozdziale 5.1. przedyskutowany zostanie przypadek strunokompozytów o wspólnych deformacjach obu faz zaś w rozdziale 5.2 przypadek kablokompozytów dopuszczający ślizganie się kabla wzdłuż jego trajektorii względem matrycy. Rozważania zilustrowane zostaną przykładem sprężonej tarczy kołowej.

5.1.1. Sformułowanie zagadnienia sprężania strunokompozytów

Skoncentrujemy się nad zadaniem sprężania ośrodka ciągłego gęstą wiązką strun. Jest to zadanie o dużych możliwościach wykorzystania przy projektowaniu konstrukcji strunobetonowych.

Zakładając, że geometria wiązki strun jest określona /tzn. funkcje ξ i t są znane/ oraz przyjmując

5.2. $\underline{\xi}' = \underline{0}$ czyli, że dystorsje wprowadzane są jedynie do fazy włókien /sprężającej/ wiązki wprowadzone w § 2.3.1 można, uwzględniając /5.1/, wyspecyfikować i otrzywać warunki stacjonarności dla zagadnienia minimalizacji energii sprężania przy warunkach ograniczających:

- równań równowagi

$$5.3 \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\underline{S}}' + \underline{\underline{S}}'') &= \underline{0} \quad \text{w } V \\ (\underline{\underline{S}}' + \underline{\underline{S}}'')n &= \underline{0} \quad \text{na } A_p \end{aligned}$$

- warunków nierozdzielności odkształceń $\underline{\underline{\xi}}^R$ /zgodnych z przemieszczeniami $\hat{u} = \underline{0}$ na brzegu A_u /:

$$5.4. \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\underline{\xi}}^R = \underline{0} \quad \text{w } V$$

- związków konstytutywnych

$$5.5. \quad \begin{aligned} \underline{\underline{S}}' &= \underline{A}'(\underline{\underline{\xi}}^R - \underline{\underline{\xi}}') \\ \underline{\underline{S}}'' &= \underline{A}''(\underline{\underline{\xi}}^R - \underline{\underline{\xi}}'') \end{aligned}$$

lub odwrotnych:

$$\underline{\underline{\xi}}^R = \underline{B}'(\underline{\underline{S}}' + \underline{\underline{S}}'') = \underline{B}''(\underline{\underline{S}}'' + \underline{\underline{S}}')$$

$$\text{gdzie:} \quad \underline{\underline{S}}' = \underline{A}' \underline{\underline{\xi}}' \quad \underline{\underline{S}}'' = \underline{A}'' \underline{\underline{\xi}}''$$

- nierównościowych ograniczeń stanów naprężeń w obu fazach:

$$5.6 \quad K'(\underline{\underline{S}}' + \underline{\underline{S}}'') \leq K_0'^2 \quad K''(\underline{\underline{S}}'' + \underline{\underline{S}}') \leq K_0''^2$$

Z technicznego punktu widzenia interesujący jest przypadek /por. strunobeton/, gdy materiał fazy sprężającej jest bardziej kosztowny od materiału matrycy. Naturalny staje się wtedy problem poszukiwania optymalnej wiązki sprężającej, przy nieznanym a priori jej geometrii / funkcje ϱ i t są nieznanne / w celu minimalizacji objętości materiału fazy sprężającej.

$$5.7 \quad \min J_S = \min \int_V \varrho^2 dV$$

czyniąc zadość ograniczeniom /5.1/ ÷ /5.6/

Zadanie to przysparza znacznie większych trudności analitycznych ze względu na niesprecyzowanie z góry tensora sprężystości \underline{A}'' .

Dogodniej jest postawić zadanie zdekomponowane i poszukiwać rozwiązania problemu dwustopniowego. W pierwszym etapie postawmy kryterium minimalizacji globalnego wyteżenia fazy sprężającej /przy niewiadomych ϱ i $\underline{\xi}''$ oraz ograniczeniach /5.1/ ÷ /5.6//:

$$5.8 \quad \min J_S = \min \int_V \frac{1}{2} \underline{\underline{\sigma}}' \underline{\underline{\sigma}}'' dV$$

co prowadzić będzie do rozwiązania wykorzystującego maksymalnie możliwości przenoszenia obciążenia przez fazę I a wyznaczonego z dokładnością do funkcji określających gęstość wiązki ϱ oraz pole dystorsji $\underline{\xi}''$ w wiązce włókien.

Znając z tego rozwiązania pole naprężeń fazy sprężającej $\underline{\underline{\sigma}}'$ wyznaczmy w drugim etapie funkcje ϱ i $\underline{\xi}''$ tak, aby czynić zadość warunkowi /5.7/. Rozwiązanie to będzie wykorzystywać maksymalnie zdolności przenoszenia obciążeń przez materiał fazy II przy możliwie minimalnym zużyciu materiału tej fazy.

Zapisując tensor naprężeń w fazie II w postaci:

$$5.9 \quad \underline{\underline{\sigma}}'' = S \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}}$$

gdzie S jest intensywnością sił działających w wiązce, pierwszy etap zadania można sformułować w następującej postaci:

$$5.10 \quad \min_V \int \frac{1}{2} S^2 dV$$

przy ograniczeniach w postaci:

$$5.11 \quad \begin{aligned} \operatorname{div} A'(g \operatorname{grad}^S u) + \operatorname{div} (S \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}}) + \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{Q}} \quad , \quad \underline{\underline{t}} \underline{\underline{t}} = 1 \\ K'(A' g \operatorname{grad}^S u) - K_0'^2 &\leq 0 \\ S &\geq 0 \end{aligned}$$

i warunkach brzegowych

$$5.12 \quad \begin{aligned} [A'(g \operatorname{grad}^S u) + S \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}}] \underline{\underline{n}} &= \underline{\underline{p}} \quad \text{na } A_p \\ u &= \underline{\underline{Q}} \quad \text{na } A_u \end{aligned}$$

Ograniczenie /5.6/² przyjęto w postaci /5.11/³ dopuszczającej przenoszenie przez włókna jedynie sił rozciągających.

Zmienne $\xi, \underline{\underline{\xi}}''$ nie występują jawnie w pierwszym etapie zadania. Będą one wyznaczone na podstawie znajomości S - w drugim etapie. Problem (5.10) ÷ (5.12) opisany jest w końcowym stanie odkształcenia. Więzy geometryczne (5.4) uwzględnione są przez przyjęcie opisu w przemieszczeniach. Ograniczenie sił S (rozciągających włókna w myśl (5.11)⁴) od góry istotne będzie w drugim etapie zadania. Oba te ograniczenia opisuje warunek (5.6)².

Po rozwiązaniu problemu (5.10) ÷ (5.12) i wyznaczeniu funkcji $S, u, \underline{\underline{t}}$ stawiamy drugi problem:

$$5.13 \quad \min_V \int \frac{1}{2} s^2 dV$$

przy ograniczeniach:

$$5.14 \quad S = E'' \varepsilon (u_{t,t} - \dot{u}_{t,t}^0) \\ E'' (u_{t,t} - \dot{u}_{t,t}^0) \leq K_0''^2,$$

który prowadzi do rozwiązania gwarantującego maksymalne dopuszczalne wyteżenie $K_0''^2$ w materiale rozciąganej wiązki sprężającej oraz gęstość wiązki wyznaczoną z warunku $\rho = \frac{S}{K_0''^2}$.

Rozwiązanie kolejne obu etapów zadania gwarantuje spełnienie ograniczeń /5.3/ ÷ /5.6/.

Przyjęto w powyższych rozważaniach, że technologia sprężania pozwala na wprowadzanie dowolnych dystorsji, zmiennych na długości strun oraz kotwienia włókien zarówno wewnątrz jak i na brzegu obszaru ustroju.

5.1.2. Sprężenie przez struny przenoszące jedynie siły rozciągające

Poszukując minimum warunkowego funkcjonału /5.10/ wprowadźmy funkcjonał zastępczy wzbogacony o człony związane z ograniczeniami /5.11/.

$$5.15 \quad J = \int_V [F(s, t, u, \lambda, \rho, \psi, \psi'')] dv = \int_V \frac{1}{2} s^2 + \lambda [\operatorname{div} A'(g \operatorname{grad}^2 u) + \\ + \operatorname{div}(s \underline{t} \otimes \underline{t}) + X] + \rho (\underline{t} \underline{t} - 1) + \psi'' [K'(A' g \operatorname{grad}^2 u) - K_0''^2] - \psi'' S$$

gdzie $\lambda, \rho, \psi, \psi''$ są wektorowym i skalarnym współczynnikami Lagrange'a.

Warunkiem koniecznym minimum warunkowego /5.10/ przy ograniczeniach /5.11/ jest spełnienie warunków koniecznych punktu siodłowego /typu min max/ funkcjonału /5.15/

Wariację funkcjonału /5.15/ można wypisać w postaci:

$$\delta J = \int_V [F_{s,s} \delta s + F_{t,t} \delta \underline{t} - \operatorname{div} F_{g, \operatorname{grad}^2 u} \delta u + F_{\lambda, \lambda} \delta \lambda + F_{\psi, \psi} \delta \psi + F_{\psi'', \psi''} \delta \psi''] dv \\ + \int_A F_{g, \operatorname{grad}^2 u} n \delta u da$$

Zatem warunki konieczne punktu siodłowego przyjmują postać [1.35].

$$\begin{aligned}
 F_s &= S - \text{grad}^s \lambda (\underline{t} \otimes \underline{t}) - \psi'' = 0 \\
 5.16 \quad F_{\underline{t}} &= -\text{grad}^s \lambda S \underline{t} + \eta \underline{t} = 0 \\
 \text{div } F_i \text{ grad}^s u &= \text{div } \underline{A}' \text{ grad}^s \lambda - \text{div} [A' \psi' \frac{\partial K'(\underline{S}')}{\partial \underline{S}'}] = 0 \\
 F_\lambda &= \text{div } \underline{S}' + \text{div } S \underline{t} \otimes \underline{t} + X = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \psi'' F_{\psi'} &= \psi' [K'(\underline{S}') - K_0'^2] = 0 \\
 F_{\psi'} &= [K'(\underline{S}') - K_0'^2] \leq 0 \\
 \psi' &\geq 0 \\
 5.17 \quad \psi'' F_{\psi''} &= \psi'' S = 0 \\
 F_{\psi''} &= S \geq 0 \\
 \psi'' &\geq 0
 \end{aligned}$$

gdzie: $\underline{S}' = A' \text{grad}^s u$,
 w obszarze \bar{V} , z żądaniem znikania całki powierzchniowej /5.20/ na powierzchni A . Ze względu na wypukłość funkcji podcałkowej /5.10/ oraz powierzchni ograniczających /5.11/^{2,3} warunki /5.16/, /5.17/, /5.20/ wraz z ograniczeniami brzegowymi /5.12/ są warunkami koniecznymi i dostatecznymi minimum warunkowego funkcjonału /5.10/
 Ręgując na podstawie (5.16)¹ $\text{grad}^s \lambda$ ze związków (5.16)^{3,4} otrzymujemy:

$$5.18 \quad \text{div} [A' S \underline{t} \otimes \underline{t}] = \text{div} [A' (\psi' \frac{\partial K'(\underline{S}')}{\partial \underline{S}'} + \psi'' \underline{t} \otimes \underline{t})]$$

co daje wraz z warunkami (5.16)⁴ oraz (5.17) układ związków określających niewiadome funkcje $S, \underline{t}, \underline{u}, \psi', \psi''$. Zakładając dodatkowe $\underline{A}' = \text{const.}$ /jednorodność/ otrzymujemy ostatecznie warunki stacjonarności:

$$\begin{aligned}
 5.19 \quad \text{div } S \underline{t} \otimes \underline{t} &= \text{div} [\psi' \frac{\partial K'(\underline{S}')}{\partial \underline{S}'} + \psi'' \underline{t} \otimes \underline{t}] \\
 \text{div } \underline{A}' \text{ grad}^s u &= -\text{div} [\psi' \frac{\partial K'(\underline{S}')}{\partial \underline{S}'} + \psi'' \underline{t} \otimes \underline{t}] - X
 \end{aligned}$$

które wraz ze związkami (5.17) określają poszukiwane funkcje $S, \underline{t}, \underline{u}, \psi', \psi''$.

Z warunku znikania wariacji funkcjonału na brzegu

$$5.20 \quad \int_A (F_{grad^s u})_n \delta u \, dA = 0$$

otrzymujemy $\delta u = 0$ na A_u /zgodnie z warunkiem brzegowym (5.12)²/ oraz

$$5.21 \quad (F_{grad^s u})_n = 0 \quad \text{na } A_p$$

co prowadzi do

$$5.22 \quad (S \underline{t} \otimes \underline{t})_n = \left[-\psi' \frac{\partial K'(\cdot)}{\partial (\cdot)} + \psi'' \right]_n \quad \text{na } A_p$$

Układ związków (5.19) (5.17) z warunkami brzegowymi (5.12), (5.22) wyznacza poszukiwane S , \underline{t} , \underline{u} , ψ' , ψ'' .

Na podstawie (5.13), (5.14) można następnie wyznaczyć ξ i ξ'' . Funkcje λ, ρ określane są przez zależności (5.16)^{1,2}.

5.1.3. Sprężanie przez struny przenoszące siły rozciągające i ściskające

Rozważmy przypadek, gdy technologia sprężania dopuszcza zarówno siły rozciągające jak i ściskające w strunach. W przypadku kątłokompozytów techniki wprowadzania włókien sprężająco-rozprężających [10, 11]. Rezygnując z ograniczeń (5.17)^{5,6,7} zagadnienie rozpręga się na podukłady opisujące stany fazy sprężanej:

$$5.23 \quad \begin{aligned} \operatorname{div} A' \operatorname{grad}^s u + \underline{X} + \underline{X} &= 0 \\ \psi' [K'(A' \operatorname{grad}^s u) - K_0'^2] &= 0 \\ [K'(A' \operatorname{grad}^s u) - K_0'^2] &\leq 0 \\ \psi' &\geq 0 \end{aligned}$$

$$(A' \operatorname{grad}^s u)_n = \underline{P} + \underline{P} \quad \text{na } A_p, \quad u = \underline{u} \quad \text{na } A_u$$

oraz sprężającej:

$$5.24 \quad \operatorname{div} S \underline{t} \otimes \underline{t} - \underline{X} = 0$$

$$(S \underline{t} \otimes \underline{t}) \underline{n} = -\underline{\beta} \quad \text{na } A_p$$

$$\underline{t} \underline{t} = 1$$

gdzie:

$$5.25 \quad \underline{X} = \operatorname{div} \left[\psi' \frac{\partial K'(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} \right]$$

$$\underline{\beta} = \left[\psi' \frac{\partial K'(\underline{\xi})}{\partial \underline{\xi}} \right] \underline{n}$$

opisują oddziaływanie wiązki sprężającej na matrycę odpowiednio w obszarze V i na powierzchni brzegowej A_p .

Można w tym przypadku sprowadzić oddziaływanie wiązki sprężającej do oddziaływania pewnego pola sił masowych \underline{X} i obciążeń brzegowych $\underline{\beta}$ na A_p .

W przypadku szczególnym, gdy w ograniczeniach (5.6)¹ przyjmujemy:

$$5.26 \quad K'(\underline{\xi}') = \frac{1}{2} \underline{\xi}' \underline{\xi}'$$

układ zależności (5.23) prowadzi do:

$$5.27 \quad \operatorname{div} A' (1 + \psi') \operatorname{grad}^s u + \underline{X} = 0$$

$$\psi' \left[\frac{1}{2} (A' \operatorname{grad}^s u)^2 - K_0'^2 \right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} (A' \operatorname{grad}^s u)^2 - K_0'^2 \right] \leq 0$$

$$\psi' \geq 0$$

$$A' (1 + \psi') \operatorname{grad}^s u \underline{n} = \underline{p} \quad \text{na } A_p, \quad u = \underline{u} \quad \text{na } A_u$$

Związki /5.27/ opisują pewne specyficzne zagadnienie "limit design" przy czym funkcja ψ spełnia rolę współczynnika odpowiednio korygującego rozwiązanie ze względu na ograniczenia /5.27/³

Rozwiązanie szczególnego przypadku zamieszczono w rozdz. 5.3.

Po wyznaczeniu funkcji u, ψ ze związków /5.27/ można określić oddziaływanie międzyfazowe $\underline{X}, \underline{P}$ /por. /5.25// a następnie, korzystając ze związków /5.24/ wyznaczyć przebieg wiązki sprężającej oraz rozkład sił w cięgnach. Quasiliniowy układ równań różniczkowych cząstkowych /5.24/ jest typu parabolicznego o jednej rodzinie charakterystyk wyznaczających trasę strun. W pracy [93] zaprezentowano metodę numeryczną /opartą na metodzie charakterystyk/ rozwiązywania zagadnień początkowych typu Cauchy dla tego problemu. Opisano także program uruchomiony na E.M.C Odra 1204 z rozwiązywaniem przykładami liczbowymi.

Wyznaczywszy funkcje S, i z układu związków /5.24/ można przejść do następnego etapu zagadnienia i wyznaczyć gęstość wiązki φ oraz pole dystorsji w cięgnach $\dot{U}_{t,t}$. Uwzględniając ograniczenia wartości sił w cięgnach $\sigma_c^2 \leq S_x \leq \sigma_c^2$ otrzymany / por. /5.13/, /5.14/ /:

$$5.28 \quad E''(U_{t,t} - \dot{U}_{t,t}) = \begin{cases} \sigma_c^2 & \text{gd}y \ S > 0 \\ 0 & \text{gd}y \ S = 0 \\ -\sigma_c^2 & \text{gd}y \ S < 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \frac{S}{\sigma_c^2}$$

Pole $\underline{X}, \underline{P}$ można również zrealizować przez dwie wiązki ciągłych prostoliniowych - np. dwie wiązki ortogonalnie ułożone. Poszukiwane są wtedy dwie funkcje skalarne S_1, S_2 opisujące gęstości sił w wiążkach.

5.2. Przypadek kablokompozytów

Przedyskutujmy inny przypadek włóknokompozytu, w którym włókna mogą ślizgać się względem matrycy. Odpowiada to modelowi kablobetonu, gdzie struny stalowe prowadzone są w koszulkach zabezpieczających niezależność deformacji kabla na jego długości od deformacji betonu.

Dyskutowany tu problem jest bardziej złożony od przypadku omawianego poprzednio. Sformułujemy zatem prostszy problem optymalnego sterowania. Przyjmijmy, że geometria wiązki kabli jest określona /funkcje \underline{t} i ξ są znane/. Celem sprężania będzie zadośćuczynienie ograniczeniom wytrzymałościowym w obu fazach przy minimalnym koszcie energii sprężania.

Przyjmijmy, że kable kotwione są jedynie na brzegu ustroju A, oraz że tarcie pomiędzy matrycą a kablami pomijamy. Wynika stąd, że siła naciągu kabla jest stała na jego długości.

Warunki równowagi w ciele w stanie wstępnym zapisać można w postaci:

$$5.29 \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\underline{\underline{S}}^I + \underline{\underline{S}}^{II}) &= \underline{Q} \quad \text{w } V \\ (\underline{\underline{S}}^I + \underline{\underline{S}}^{II}) \underline{n} &= \underline{Q} \quad \text{na } A_p \end{aligned}$$

Wyrażając deformacje bezpośrednio w przemieszczeniach związki konstytutywne przyjmują postać:

$$5.30 \quad \begin{aligned} \underline{\underline{S}}^I &= \underline{A}^I \operatorname{grad}^s \underline{\underline{U}}^I \\ \underline{\underline{S}}^{II} &= s \underline{t} \otimes \underline{t} = E^{II} \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t} \otimes \underline{t} \operatorname{grad}^s (\underline{\underline{U}}^{II} - \underline{\underline{U}}^I) \end{aligned}$$

gdzie $\underline{\underline{U}}^I, \underline{\underline{U}}^{II}$ opisują odpowiednio pola przemieszczeń w fazach I i II. Warunki zgodności deformacji w obu fazach żądają od tych pól spełnienia warunków wspólnych składowych przemieszczeń ortogonalnych do trasy kabli oraz wspólnych przemieszczeń względnych punktów zakotwień kabli.

$$5.31 \quad \begin{aligned} (\underline{\underline{U}}^I - \underline{\underline{U}}^{II}) \underline{\underline{t}} &= 0 \\ \int (\operatorname{grad}^s \underline{\underline{U}}^{II}) \underline{t} \otimes \underline{t} ds &= \int (\operatorname{grad}^s \underline{\underline{U}}^I) \underline{t} \otimes \underline{t} ds, \end{aligned}$$

gdzie całkowanie rozciąga się na obszar określoności pól $\underline{\underline{U}}^I, \underline{\underline{U}}^{II}$ czyli pomiędzy punktami zakotwień kabli.

Warunki ograniczeń wyteżeńowych w fazach przybierają postać:

$$5.32 \quad \begin{aligned} K'(A' \text{grad}^s \underline{\underline{\beta}}' + \underline{\underline{\xi}}') - K_0'^2 &\leq 0 \\ K''[A'' \text{grad}^s (\underline{\underline{\beta}}'' - \underline{\underline{\xi}}'') + \underline{\underline{\xi}}''] - K_0''^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

gdzie pola $\underline{\underline{\xi}}'$, $\underline{\underline{\xi}}''$ są znane.

Dopisując przemieszczeniowe warunki brzegowe na części A_u brzegu

$$5.33 \quad \underline{\underline{u}}^R = \underline{\underline{u}}'' = \underline{\underline{0}}$$

otrzymujemy kompletny układ związków (5.29), (5.30), (5.31), (5.33) opisujący pola deformacji i naprężeń w ustroju o zadanych dystorsjach $\underline{\underline{u}}''$ (i obciążeniach zewnętrznych).

Z założenia o stałej sile naciągu kabla na jego długości wynikają także stałe dystorsje i odkształcenia: $(\text{grad}^s \underline{\underline{u}}'') \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} \Big|_{s_1} = (\text{grad}^s \underline{\underline{u}}'') \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} \Big|_{s_1} = \underline{\underline{0}}$ co sprowadza warunek (5.31) do postaci:

$$5.34 \quad \int (\text{grad}^s \underline{\underline{\beta}}') \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} ds_1 = \int (\text{grad}^s \underline{\underline{u}}'') \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} ds_1$$

Związki (5.29), (5.30), (5.31), (5.34) można zapisać w postaci:

$$5.35 \quad \begin{aligned} \text{div} [A' \text{grad}^s \underline{\underline{u}}^R + A'' \text{grad}^s (\underline{\underline{u}}^R - \underline{\underline{u}}'')] &= \underline{\underline{0}} \\ A' \text{grad}^s \underline{\underline{u}}^R + A'' \text{grad}^s (\underline{\underline{u}}^R - \underline{\underline{u}}'') \Big|_n &= \underline{\underline{0}} \quad n \in A_p \\ (\underline{\underline{\beta}}' - \underline{\underline{\beta}}'') \underline{\underline{\xi}} &= \underline{\underline{0}} \\ (\text{grad}^s \underline{\underline{u}}'') \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} &= \frac{\int (\text{grad}^s \underline{\underline{\beta}}') \underline{\underline{t}} \otimes \underline{\underline{t}} ds_1}{\int ds_1} \end{aligned}$$

Dołączając ograniczenia (5.32), warunek brzegowy (5.33) oraz kryterium optymalizacji

$$5.36 \quad \min J_{\xi} = \min \int_V \frac{1}{2} \underline{\underline{\xi}}'' A'' \underline{\underline{\xi}}'' dv = \min \int_V \frac{1}{2} \underline{\underline{u}}''_{t,t} E'' \underline{\underline{u}}''_{t,t} dv$$

otrzymujemy komplet związków opisujących zagadnienie optymalnego sprzężania.

Wyrażenie $\int ds_1$ (związku (5.33)⁴) opisuje długość kabla pomiędzy jego zakotwieniami. Warunek ten mówi, że wydłużenie kabla jest równe średniemu wydłużeniu matrycy liczonemu po jego trasie.

Rugując z powyższego układu związków $\underline{\hat{u}}''$ / wykorzystując (5.35)⁴ / otrzymujemy:

$$5.37 \quad \text{div} \left\{ A' \text{grad}^s \underline{\hat{u}}' + E'' s \underline{t} \otimes \underline{t} \left[\frac{\int (\text{grad}^s \underline{\hat{u}}' - \underline{\hat{u}}'') \underline{t} \otimes \underline{t} ds_1}{\int ds_1} \right] \right\} = \underline{0}$$

$$\left\{ A' \text{grad}^s \underline{\hat{u}}' + E'' s \underline{t} \otimes \underline{t} \left[\frac{\int (\text{grad}^s \underline{\hat{u}}' - \underline{\hat{u}}'') \underline{t} \otimes \underline{t} ds_1}{\int ds_1} \right] \right\} n = \underline{0} \text{ na } A_p$$

$$\underline{\hat{u}}' = \underline{0} \text{ na } A_u$$

$$K'(A' \text{grad}^s \underline{\hat{u}}') - K_0'^2 \leq 0$$

$$K''(E'' s \underline{t} \otimes \underline{t} \left[\frac{\int (\text{grad}^s (\underline{\hat{u}}' - \underline{\hat{u}}'')) \underline{t} \otimes \underline{t} ds_1}{\int ds_1} \right]) - K_0''^2 \leq 0$$

przy funkcji celu /5.36/.

Funkcję $\underline{\hat{u}}''$ wprowadzone w związkach (5.37) formalnie pod znak całki, pomimo, że jest ona stała na długości cięga. Można tu użyć oznaczenia:

$$5.38 \quad \frac{\int (\text{grad}^s \underline{\hat{u}}'') \underline{t} \otimes \underline{t} ds_1}{\int ds_1} = \underline{\hat{\xi}}'' (3_2)$$

zmiennego od kabla do kabla i stałego na ich długości.

Wyznaczwszy pole przemieszczeń $\underline{\hat{u}}'$ oraz dystorsji $\underline{\hat{u}}''$ z warunków (5.36), (5.37), pole deformacji wiązki kabli można będzie wyznaczyć z warunków (5.35)^{3,4}

Do opisu problemu (5.36), (5.37) można użyć modelu ośrodka nielokalnego^{pozi. nr [16]} o polu deformacji \underline{u}' , stanie naprężeń $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}' + \underline{\sigma}''$ i związku konstytutywnym:

$$5.39 \quad \underline{\sigma}(x) = A'(x) \underline{\underline{\epsilon}}(x) + \int_V C(x, y) (\underline{\underline{\epsilon}}(y) - \underline{\hat{\xi}}''(y)) dy$$

gdzie:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \text{grad}^s \underline{u}' \quad , \quad \underline{\hat{\xi}}'' = \text{grad}^s \underline{\hat{u}}''$$

$$5.40 \quad C(x, y) = C_1(x) \cdot C_2(x, y) \quad , \quad C_1(x) = E'' s(x) \underline{t}(x) \otimes \underline{t}(x)$$

$$C_2(x, y) = \frac{\underline{t}(y) \otimes \underline{t}(y)}{\int_V \Omega(x, y) dy} \Omega(x, y)$$

$$\Omega(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli punkty } x \text{ i } y \text{ leżą na trajektorii tego samego kabla} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Związek (5.39) zapisać można precyzyjniej, uwzględniając że tylko stany $\underline{\xi}''$ postaci (5.38) mają wpływ na rozwiązanie:

$$5.41 \quad \underline{\varrho}(x) = A'(x) \underline{\xi}(x) + \underline{C}_1(x) \left[\int_V \underline{C}_2(x,y) \underline{\xi}(y) dy - \underline{\xi}''_{tt}(x) \right]$$

lub

$$5.42 \quad \underline{\varrho}(x) + \underline{\xi}(x) = A(x) \underline{\xi}(x) + \int_V \underline{C}(x,y) \underline{\xi}(y) dy$$

gdzie: $\underline{\xi}(x) = \underline{C}_1(x) \underline{\xi}''_{tt}(x)$

Wprowadzając zapis (5.39) do układu (5.37) otrzymujemy:

$$\operatorname{div} [A'(x) \operatorname{grad}^s \underline{U}'(x) + \int_V \underline{C}(x,y) \operatorname{grad}^s (\underline{U}(y) - \underline{U}'(y)) dy] = \underline{Q}$$

$$5.43 \quad [A'(x) \operatorname{grad}^s \underline{U}'(x) + \int_V \underline{C}(x,y) \operatorname{grad}^s (\underline{U}(y) - \underline{U}'(y)) dy] \underline{n} = \underline{Q} \text{ na } A_p$$

$$\underline{U}' = \underline{Q} \text{ na } A_n$$

$$K'(A' \operatorname{grad}^s \underline{U}' + \underline{\xi}') - K_0'^2 \leq 0$$

$$K^* \left[\int_V \underline{C}(x,y) \operatorname{grad}^s (\underline{U}(y) - \underline{U}'(y)) dy + \underline{\xi}'' \right] - K_0''^2 \leq 0$$

Poszukując rozwiązania zagadnienia nieklasycznego rachunku wariacyjnego (5.36) przy ograniczeniach (5.43) można zastosować podejście prezentowane w pracach EDELENA [13].

Konstruując uogólniony funkcjonał /abstrahując chwilowo od warunków brzegowych/ o funkcji podcałkowej:

$$F = \frac{1}{2} \operatorname{grad}^s \underline{U}'' (E''_s t \otimes t \otimes t \otimes t) \operatorname{grad}^s \underline{U}'' +$$

$$5.44 \quad + \lambda \operatorname{div} [A' \operatorname{grad}^s \underline{U}' + \int_V \underline{C}(x,y) [\operatorname{grad}^s (\underline{U}(y) - \underline{U}'(y))] dy] + \\ + \psi' [K'(A' \operatorname{grad}^s \underline{U}' + \underline{\xi}') - K_0'^2] + \psi'' [K'' \left[\int_V \underline{C}(x,y) \cdot \right. \\ \left. (\operatorname{grad}^s (\underline{U}(y) - \underline{U}'(y))) dy + \underline{\xi}'' \right] - K_0''^2]$$

gdzie λ, ψ', ψ'' - współczynniki Lagrange'a, można otrzymać warunki stacjonarności w postaci /por. [13] /:

$$5.45 \quad F_{\text{grad}^s \underline{q}'} = \text{div} \underline{A}' \text{grad}^s \lambda + \text{div} \left[\psi' \underline{A}' \frac{\partial K'(\underline{\xi}')}{\partial \underline{\xi}'} \right] + \\ + \text{div} \int_V \underline{C}(x,y) \left[\text{grad}^s \lambda(y) + \psi'' \frac{\partial K''(\underline{\xi}'')}{\partial \underline{\xi}''}(y) \right] dy = 0$$

$$F_{\text{grad}^s \underline{q}''} = \text{div} \underline{A}'' \text{grad}^s \lambda - \text{div} \int_V \underline{C}(x,y) \left[\text{grad}^s \lambda(y) + \psi'' \frac{\partial K''(\underline{\xi}'')}{\partial \underline{\xi}''}(y) \right] dy = 0$$

$$F_{\lambda} = \text{div} (\underline{\xi}' - \underline{\xi}' + \underline{\xi}'' - \underline{\xi}'') = 0$$

$$5.46 \quad \begin{array}{ll} F_{\psi'} = K(\underline{\xi}') - K_0^2 \leq 0 & F_{\psi''} = K''(\underline{\xi}'') - K_0^2 \leq 0 \\ \psi' F_{\psi'} = \psi' [K(\underline{\xi}') - K_0^2] = 0 & \psi'' F_{\psi''} = \psi'' [K''(\underline{\xi}'') - K_0^2] = 0 \\ \psi' \geq 0 & \psi'' \geq 0 \end{array}$$

gdzie:

$$\underline{\xi}' = \underline{A}' \text{grad}^s \underline{q}' + \underline{\xi}'$$

$$\underline{\xi}'' = \int_V \underline{C}(x,y) \text{grad}^s (\underline{q}'(y) - \underline{q}''(y)) dy + \underline{\xi}''$$

Rozważając dodatkowo warunki brzegowe, należy dołączyć warunki /5.43/^{2,3} oraz nowe warunki stacjonarności na brzegu Δ_p :

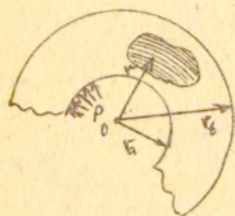
$$5.47 \quad F_{grad \underline{u}'} = \left\{ A' grad^2 \underline{u}' + \psi' A' \frac{\partial K(\underline{\sigma}')}{\partial \underline{\sigma}'} + \int_{\underline{C}(x,y)} [g grad^2 \underline{u}' + \psi'' \frac{\partial K''(\underline{\sigma}'')}{\partial \underline{\sigma}''}] dy \right\} n = 0$$

$$F_{grad \underline{u}''} = \left\{ A'' grad^2 \underline{u}'' - \int_{\underline{C}(x,y)} [g grad^2 \underline{u}' + \psi'' \frac{\partial K''(\underline{\sigma}'')}{\partial \underline{\sigma}''}] dy \right\} n = 0$$

Otrzymany całkowo różniczkowy układ zależności /5.45/, /5.46/, /5.47/ jest w ogólnym przypadku skomplikowany. Można jednak otrzymać prostszy układ zależności w pewnych przypadkach szczególnych /por. przykład - § 5.3/.

5.3. Przykład tarczy kołowoosymetrycznej sprężanej włóknami.

Przeanalizujemy zadanie optymalnego sprężenia wiązką włókien obwodowych tarczy kołowej poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego /rys. 5.2/.



Rys. 5.2

Obie technologie sprężania: wiązką strun oraz wiązką kabli dadzą jednakowe rozwiązanie, gdyż ze względu na kołową symetrię zadania fazy oddziałują na siebie bez udziału sił stycznych.

Przyjmując, że ograniczenia /5.6/¹ wyłączenia fazy I dotyczą jedynie naprężeń rozciągających ($\underline{\sigma}' \leq \bar{\sigma}'$)

związki /5.23/ przyjmują w tym przypadku postać:

$$5.48 \quad u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{u}{r^2} + X^R = 0$$

$$\psi \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu u_{,r} \right) - \bar{\sigma}' \right] = 0$$

$$\left[\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu u_{,r} \right) - \bar{\sigma}' \right] \leq 0$$

$$\psi > 0$$

z warunkami brzegowymi

$$5.49 \quad \frac{E}{1-\nu^2} (u_{,rr} + \nu \frac{u}{r}) \Big|_{r=r_a} = -p$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} (u_{,r} + \nu \frac{u}{r}) \Big|_{r=r_b} = 0$$

gdzie $\bar{X} = \psi_{,r}$ w myśl zależności /5.25/'

W związkach tych u opisuje przemieszczenie radialne, zaś E i ν odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona dla materiału fazy I.

Zakładając, że istnieje $r_0 = r_0$ ($r_0 \in \langle r_a, r_b \rangle$) takie, że:

$$\text{dla } r < r_0 \quad \psi > 0 \quad \text{i} \quad \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu u_{,r} \right) = \bar{\sigma}'$$

$$\text{dla } r = r_0 \quad \psi = 0 \quad \text{i} \quad \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu u_{,r} \right) = \bar{\sigma}'$$

$$\text{dla } r > r_0 \quad \psi = 0 \quad \text{i} \quad \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu u_{,r} \right) < \bar{\sigma}'$$

zapiszmy zadanie /5.48/, /5.49/ oddzielnie w podobozzarach $\langle r_a, r_0 \rangle$ i $\langle r_0, r_b \rangle$.

Otrzymujemy związki w przedziale $\langle r_a, r_0 \rangle$:

$$5.50 \quad u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{u}{r^2} + \psi_{,r} = 0$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu u_{,r} \right) = \bar{\sigma}'$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} (u_{,r} + \nu \frac{u}{r}) \Big|_{r=r_a} = -p, \quad \psi \Big|_{r=r_0} = 0$$

związki w przedziale $\langle r_0, r_b \rangle$:

$$5.51 \quad u_{,rr} + \frac{1}{r} u_{,r} - \frac{u}{r^2} = 0$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} (u_{,r} + \nu \frac{u}{r}) \Big|_{r=r_b} = 0$$

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu u_{,r} \right) \Big|_{r=r_0} = \bar{\sigma}', \quad \psi = 0$$

oraz warunek zgodności przemieszczeń na obwodzie $r = r_0$.

Rozwiązując układy /5.50/, /5.51/ przyjmijmy dane liczbowe $r_a = 1$, $r_b = 2$, $\sigma = p$, $\nu = 0,15$.

Szukając pola przemieszczeń u w przedziale $\langle r_a, r_b \rangle$ znajdujemy rozwiązanie równania różniczkowego /5.50/ z warunkiem brzegowym /5.50/.

$$5.52 \quad u = 0,85 \frac{p}{E} \left(r + \frac{0,35}{r^{6,66}} \right) \quad w \langle r_a, r_b \rangle$$

Równanie /5.51/ z warunkiem brzegowym /5.51/ wyznacza pole przemieszczeń w przedziale $\langle r_a, r_b \rangle$ z dokładnością do stałej D :

$$5.53 \quad u = D \left(r + \frac{5,41}{r} \right) \quad w \langle r_a, r_b \rangle$$

Funkcja /5.53/ powinna spełniać warunek /5.51/ na obwodzie $r = r_b$, skąd wynika:

$$5.54 \quad D = 0,85 \frac{p}{E} \frac{r_b^2}{r_b^2 + 4}$$

Z drugiej strony powinna ona spełniać dla $r = r_a$ warunek zgodności z rozwiązaniem /5.52/, skąd wynika drugi warunek na D :

$$5.55 \quad D = 0,85 \frac{p}{E} \left(r_b + \frac{0,35}{r_b^{6,66}} \right) \cdot \frac{r_b}{r_b^2 + 5,41}$$

Porównując wartości /5.54/ i /5.55/ otrzymujemy równanie opisujące granicę obszaru sprężania r_c . Posiada ono w przedziale $\langle r_a, r_b \rangle$ jedno rozwiązanie /wyznaczone numerycznie/:

$$5.56 \quad r_c \approx 1,032$$

Znając zasięg obszaru sprężania oraz pole przemieszczeń u w całym ustroju, można przejść do wyznaczenia funkcji ψ . Podstawiając /5.52/ do /5.50/ i uwzględniając warunek brzegowy /5.50/ otrzymujemy rozwiązanie równania różniczkowego o postaci:

$$5.57 \quad \psi = 1,25 \frac{p}{E} \left(\frac{1,3}{r^{7,666}} - 1 \right) \quad w \langle r_a, r_b \rangle$$

5.58 $\psi = 0$ w $\langle r_0, r_0 \rangle$.

Po rozwiązaniu pierwszej części zagadnienia /por. § 5.1.3/ można przejść do wyznaczenia wiązki cięgien sprężających, opisanych w ogólnym przypadku związkami /5.24/. W przypadku wiązki włókien obwodowych /rys. 5.2/ wiązki te prowadzą do [94]:

5.59 $\frac{S}{r} = -X$

przy czym /por. 5.57/: $X = \psi_{,r} = -12,49 \frac{P}{E} \frac{1}{r^{3,66(6)}}$

Ostatecznie funkcja gęstości sił w cięgnach przybiera postać:

5.60 $S = 12,49 \frac{P}{E} \frac{1}{r^{3,66(6)}}$

Zgodnie z ogólną analizą zagadnienia otrzymane rozwiązanie związane jest z kryterium $\min \int S^2 dv$. Można teraz wyznaczyć optymalną gęstość wiązki φ zakładając, że dopuszczalne naprężenie rozciągające włókien wynosi $\bar{\sigma}''$. Zgodnie ze związkami /5.14/ otrzymujemy ostatecznie rozkład gęstości

5.61 $\varphi = \frac{S}{\bar{\sigma}''}$

a następnie warunek:

5.62 $E'' \left(\frac{u}{r} - \bar{\epsilon}'' \right) = \bar{\sigma}''$

skąd

5.63 $\bar{\epsilon}'' = \frac{u}{r} - \frac{\bar{\sigma}''}{E''} = 0,85 \frac{P}{E} \left(1 + \frac{0,35}{r^{3,66(6)}} \right) - \frac{\bar{\sigma}''}{E''}$

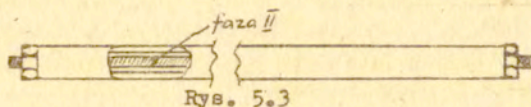
Zaznaczmy, że uzyskane rozwiązanie jest obowiązujące zarówno w przypadku sprężania strunami jak i kablami, oraz że spełniony jest w cięgnach warunek dodatniości sił /5.11/

5.4. O technicznych sposobach generowania dystorsji w układach kompozytowych.

Jak dotąd, omawiane były w tym rozdziale kompozyty z włóknistą wiązką naprężającą. Znane są techniczne sposoby sprężania elementów np. betonowych wiązkami strun lub kabli /por. np. [58]/. Zajmijmy się zatem sposobami generowania dystorsji w innych układach kompozytowych, adekwatnie opisywanych przez model ośrodków dwufazowych /prezentowany w § 2 i stosowany w §§ 5.1, 5.2/. Opiszemy dwa przykłady układów wieloelementowych dających się w sposób naturalny zdekomponować na dwie fazy składowe.

5.4.1. Sprężanie odcinkowe kratownic dwufazowych.

Rozważmy możliwość sprężania ustrojów kratowych składanych z prętów o rdzeniu naprężającym /faza II/ wykonanym ze stali o wyższej wytrzymałości /rys. 5.3/



Rys. 5.3

Przekrój rdzeni naprężających może być dobierany zgodnie z planowaną siłą sprężającą w elemencie. Prowadzenie cienkich rdzeni w rurach osłonowych fazy I zabezpiecza przed ich wybočeniem w przypadku ściskania /por. doświadczenia przy rozprężaniu belek betonowych [10, 11] /.

Zastosowana technologia wykonania elementów ustroju pozwala na wprowadzenie naprężeń wstępnych do fazy I przed montażem konstrukcji.

Pozwala to na zastosowanie "sprężania odcinkowego", polegającego /por. rozwiązania /2.25/ ÷ /2.28/ na bezodkształceniowym ($\epsilon^R = 0$) wprowadzaniu naprężeń wstępnych $\underline{\sigma}^a$ samoczynnoważonych pomiędzy fazami. Stany $\underline{\sigma}^s$ przy zastosowaniu tej techniki także znikają. Sprężanie odcinkowe ze względu na spełnienie minimalnej energii sprężania daje większą swobodę wprowadzania ograniczeń wyteżeńowych w fazie I przy wprowadzaniu naprężeń wstępnych niż

sprężanie zewnętrzne /por. § 2.3.2/ ponieważ na stany dystorsji $\underline{\xi}'$, $\underline{\xi}''$ /przy czym $\underline{A}'\underline{\xi}' = -\underline{A}''\underline{\xi}''$ / nie są narzucone więzy geometryczne /2.52/.

Znając stany naprężeń wywołanych w niesprężonym ustroju przez obciążenie zewnętrzne $\underline{\underline{S}}'$, $\underline{\underline{S}}''$, można natychmiast określić naprężenia wstępne $\underline{\underline{S}}$, które należy wprowadzić do fazy I w celu sprowadzenia /najmniejszym kosztem/ naprężeń końcowych $\underline{\underline{S}}' + \underline{\underline{S}}''$ do przedziału naprężeń dopuszczalnych $\langle \underline{\xi}, \underline{\xi} \rangle$. W prętach, w których naprężenia $\underline{\underline{S}}'$ nie mieszczą się w przedziale $\langle \underline{\xi}, \underline{\xi} \rangle$ należy wprowadzić stan $\underline{\underline{S}}'$ taki, aby stan $\underline{\underline{S}}' + \underline{\underline{S}}''$ odpowiadał najbliższemu stanowi dopuszczalnemu $\underline{\xi}'$ bądź $\underline{\xi}''$. Określenie stanu wstępnego $\underline{\underline{S}}'$ ($\underline{\underline{S}}'' = -\underline{\underline{S}}'$) wyznacza /por. /2.27// dystorsje, które należy wprowadzić do fazy I i II elementu aby uzyskać wyznaczone sprężenie:

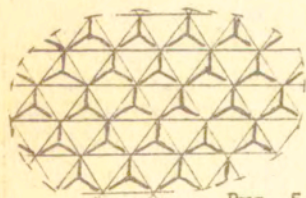
$$5.64 \quad \underline{\underline{S}}' = -\underline{A}'^{-1}\underline{\underline{S}}'', \quad \underline{\underline{S}}'' = \underline{A}''^{-1}\underline{\underline{S}}'$$

W technice sprężania odcinkowego charakterystyczne jest to, że lokalna regulacja stanu naprężenia nie wpływa na zmianę naprężeń w otoczeniu sprężanego elementu.


Przykład zastosowania techniki sprężania odcinkowego w strunokompozytach opisano w pracy [94].


5.4.2. Sprężanie struktur pretowo-ciągnowych

Omówmy przypadek gęstych, regularnych struktur pretowo-ciągnowych. Przykładowo /rys. 5.4/ płaska siatka kabli o oczkach trójramiennych rozpięta na trójramiennych pretowych elementach napinających nabiera zdolności przenoszenia obciążeń zewnętrznych jako element tarczowy.



Rys. 5.4

 siatka kabli wiotkich

 pretowe elementy napinające

Stosując do opisu struktury dyskretnej kontynuálny model ośrodka /por. § 4.1/ dwufazowego, przy czym faza I związana jest z siatką kabli natomiast faza II z układem prętów rozpinających, można wykorzystać rozważania z § 2 w celu wyznaczenia stanu dystorsji wprowadzającego takie sprężenie, które gwarantuje nieujemność sił w kablach.

Podejście takie można w szczególności zastosować do analizy statycznej nie sprężanych struktur prętowo-ciągnowych, w których zwisy kabli podlegających skróceniu modelowane są przez dystorsje wygenerowane w układzie w celu zadośćuczynienia warunkowi nieujemnych sił wciągach. W pracy [106] przedyskutowano ten problem wykorzystując do badania konstrukcji o więzach jednostronnych program TIPS [98] optymalnego sprężania kratownic. Inne podejście do tego zadania, zakładające a priori odcinkową liniowość związków fizycznych wykorzystano w pracy [5].

Koncepcja sprężania opisanego wyżej układu prętowo-ciągnowego może być zastosowana w konstrukcjach przekryć strukturalnych [103].

6. Aktywne sterowanie dystorsjami w układach konstrukcyjnych.

Dyskutując zagadnienie sterowania dystorsjami ze względu na spełnienie minimalnym kosztem wprowadzanej energii sprężania, nierównościowych ograniczeń wyężeniowych narzuconych na stan naprężeń, przyjmowano dotąd jeden stan obciążeń któremu poddana jest konstrukcja. W przypadku wielu stanów obciążeń, którym poddawany jest układ, liczba warunków nierównościowych /4.87/ śledząc to na przykładzie układów prętowych por. § 4.2.3] ograniczających dopuszczalne stany naprężeń wzrasta i może dojść do sytuacji, gdy warunki te opisują pusty zbiór stanów naprężeń dopuszczalnych. W sytuacji tej sprężanie "pasywne", które było tematem dotychczasowych rozważań, nie daje możliwości przystosowania konstrukcji do przenoszenia zmiennych obciążeń zewnętrznych. Można jednak sformułowanie zagadnienia sprężania rozwinąć i poszukiwać takich, zmiennych w czasie stanów dystorsji, które śledzą /zgodnie z przyjętą zasadą optymalną/ zmieniające się w czasie obciążenia zewnętrzne. Nazwijmy to podejście sprężaniem "aktywnym".

Wyróżnijmy dwa przypadki sformułowania zagadnienia optymalnego sprężania aktywnego. Pierwszy z nich niech żąda spełnienia nierównościowych ograniczeń stanu wyężenia / w każdej chwili czasowej/

$$6.1 \quad K(\underline{\epsilon}(t)) \leq K^2$$

minimalizując w każdej chwili czasowej aktualną energię stanu dystorsji:

$$6.2. \quad \min J_{\underline{\epsilon}(t)} = \min \frac{1}{2} \int_V \underline{\epsilon}(t) A \underline{\epsilon}(t) dv.$$

Drugie sformułowanie niech żąda spełnienia ograniczeń /6.1/ minimalizując w każdej chwili czasowej globalną miarę zmian stanu dystorsji:

$$6.3 \quad \min J_{\dot{\underline{\epsilon}}(t)} = \min \frac{1}{2} \int_V \dot{\underline{\epsilon}}(t) A \dot{\underline{\epsilon}}(t) dv$$

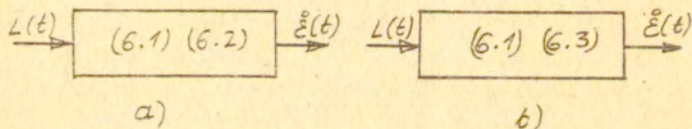
gdzie $\dot{\xi}(t) = \frac{\partial \xi(t)}{\partial t}$

Postawienie zagadnienia /6.1/, /6.2/ odpowiada sytuacji, gdy koszt utrzymywania dystorsji w układzie konstrukcyjnym przewyższa znacznie koszt ich zmian. W sprężaniu termicznym np. utrzymywanie stanu dystorsji wiąże się z koniecznością stałego doprowadzania ciepła.

Postawienie zagadnienia /6.1/, /6.3/ odpowiada sytuacji, gdy koszt zmian dystorsji przewyższa znacznie koszt ich utrzymywania. W przypadku np. mechanicznego wymuszania pól dystorsji /por. § 4.3/ kosztowne są jedynie zmiany stanu ξ .

Jeśli zmienny w czasie układ obciążeń zewnętrznych $L(t)$ jest a priori określony, wtedy w celu rozwiązania zagadnień /6.1/, /6.2/ lub /6.1/, /6.3/ można posłużyć się programem TIPS /§ 4.2.6/ lub odpowiednią jego modyfikacją.

Otrzymujemy w wyniku schemat prostego sterowania aktywnego /rys. 6.1/



Rys. 6.1

Jeśli układ obciążeń $L(t)$ nie jest znany a priori, pozostaje możliwość automatycznego sterowania aktywnego. Wymaga to zastosowania czujników odczytujących bezpośrednio aktualny stan obciążeń $L(t)$ /lub pośrednio aktualny stan deformacji/, mikroprocesorów przetwarzających informacje i sterujących optymalnie dystorsjami oraz servomechanizmów generujących wyznaczone dystorsje w układzie konstrukcyjnym.

W przypadku, gdy istnieje możliwość zastosowania czujników odczytujących stan obciążeń $L(t)$, można zastosować

schemat sterowania prostego /rys. 6.1/. Jednak w przypadku, gdy dysponujemy jedynie czujnikami odczytującymi stan deformacji ustroju /np. tensometry ponaklejane na pręty ustroju kratowego/, wtedy konieczne jest zastosowanie schematu automatycznego sterowania ze sprzężeniem zwrotnym /rys /6.2/^a, /6.3/^a/

Jeśli istnieje techniczna możliwość generowania dowolnych pól dystorsji, wtedy rozwiązania problemów /6.1/, /6.2/ oraz /6.1/ /6.3/ związane są z sytuacjami przedstawionymi odpowiednio na rys. /6.2/^b oraz /6.3/^b

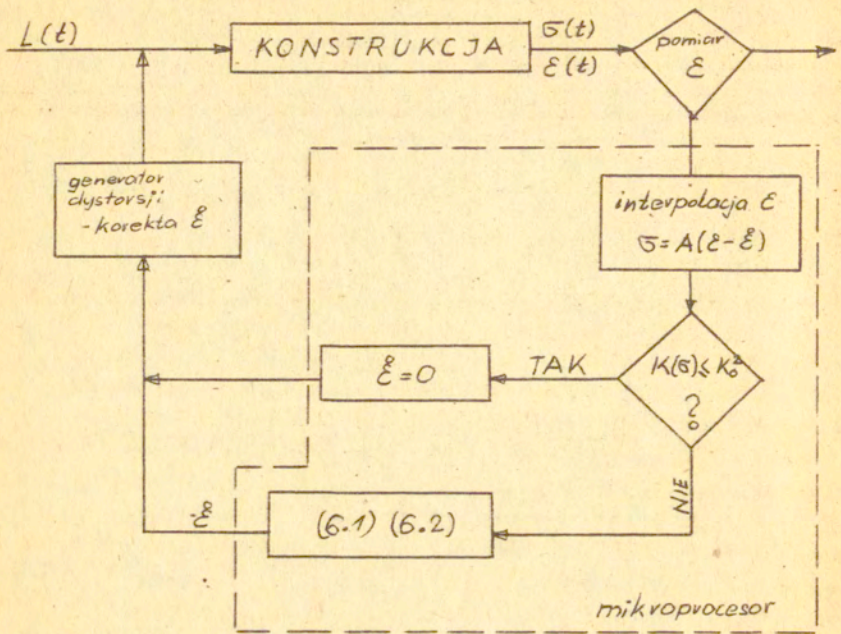
Ze schematów /6.2/, /6.3/ widać, że rozwiązanie zagadnienia /6.1/, /6.3/ jest zależne, w odróżnieniu od rozwiązania zagadnienia /6.1/, /6.2/, od historii obciążenia i że związane jest z generowaniem przyrostów dystorsji jedynie w przypadkach wystąpienia /lokalnie/ obciążenia ustroju.

Na skuteczność opisanego tu sprzężenia aktywnego istotny wpływ ma bezwładność automatycznego układu sterującego: czujnik-mikroprocesor-generator dystorsji. Czas potrzebny na uzyskanie odpowiedzi układu sterującego nie może być większy od czasu, w którym obciążenie L/t doznaje istotnej zmiany. Dlatego też przyjmujemy, że prędkość zmian L/t jest znacznie wolniejszą od prędkości, z jaką reaguje generator dystorsji, który limituje bezwładność układu sterującego. Generatorem dystorsji może być np. układ tłoków hydraulicznych lub nagrzewnic elektrycznych.

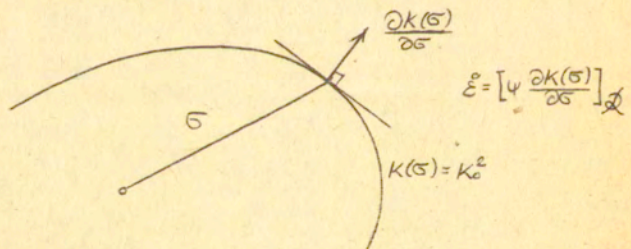
Koncepcja automatycznego sterowania aktywnego na zasadzie serwo mechanizmu była już formułowana i dyskutowana w odniesieniu do masztów i wysokich budynków w pracach [108, 109, 110].

Zilustrujemy ogólne sformułowanie aktywnego sterowania dystorsjami dwoma przykładami zastosowań do sprzężenia konstrukcji budowlanych: trójprzęskowej belki ciągłej oraz wspornika kratowego.

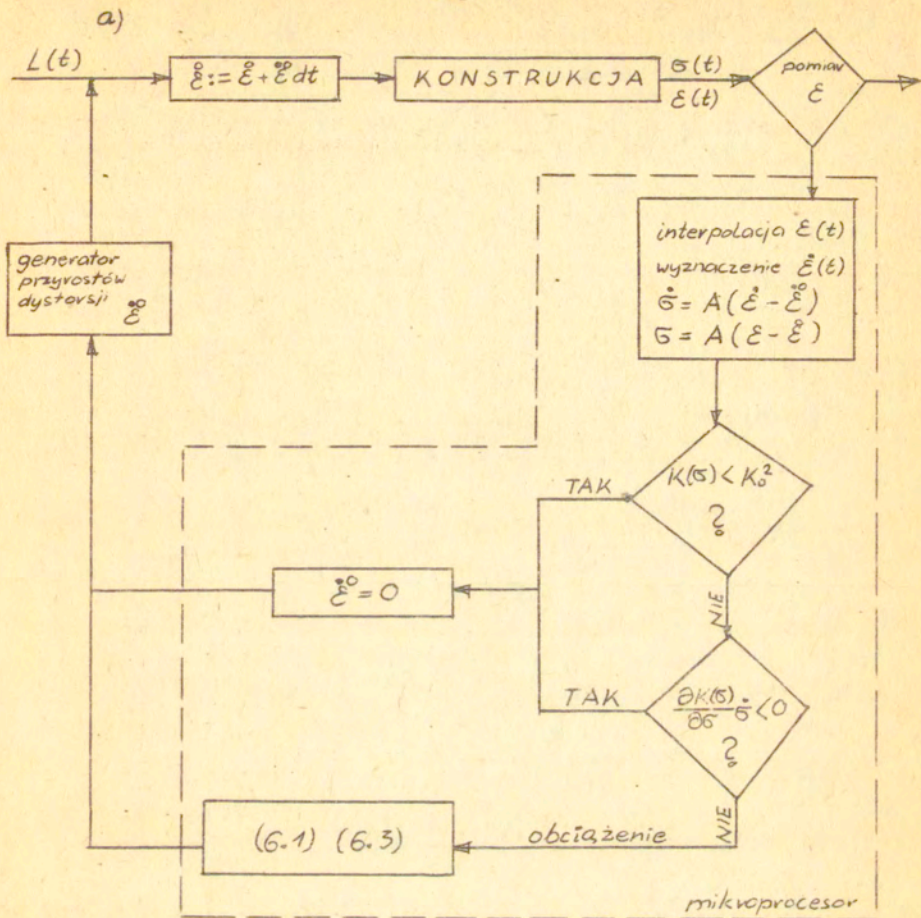
a)



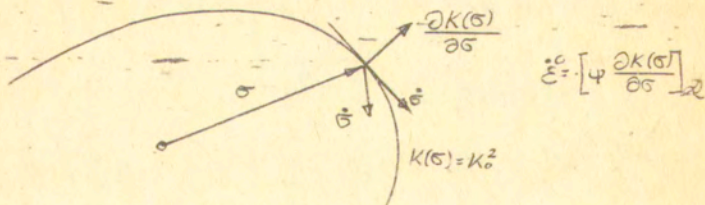
b)



Rys. 6.2



b)

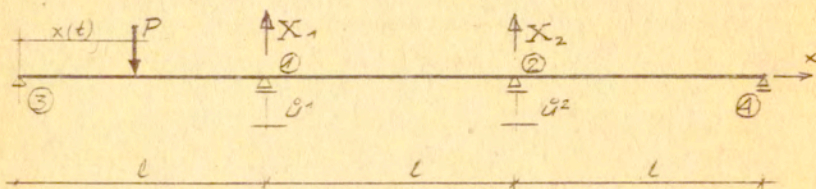


Rys. 6.3

6.1. Przykład aktywnego spreżania belki ciągłej.

Omówmy przykład trójprzęsłowej belki ciągłej /Rys. 6.4/ obciążonej siłą P o stałej wartości lecz zmieniającej swe położenie.

$$EJ = \text{const.}$$



Rys. 6.4

Niech warunki /6.1/ przybierają postać ograniczeń nierównościowych wartości momentów zginających w przekrojach poprzecznych belki.

$$6.4. \quad -aPl \leq M \leq aPl$$

gdzie $a = 0.15$.

Ustrój niespreżony nie jest w stanie przenieść obciążenia zewnętrznego. Można sprawdzić, że dla siły P stojącej w połowie rozpiętości belki wartość momentu pod tą siłą wynosi $\frac{27}{120} Pl \approx 0,225 Pl$ czyli przekracza wartość $M_0 = aPl$ o 50%.

Przyjmijmy, że stany wstępne wywoływane będą unoszeniem i obniżaniem podpór 1 i 2. Daje to możliwość wywołania dowolnych /możliwych do wywołania w danym ustroju/ stanów

wstępnych, gdyż stopień statycznej niewyznaczalności układu jest dwa.

Przedyskutujemy zagadnienie aktywnego sterowania dystorsjami /6.1/ i /6.2/, które w omawianym przypadku sprowadza się do minimalizacji wyrażenia:

$$6.5. \quad \min [(\delta^1)^2 + (\delta^2)^2]$$

przy ograniczeniach /6.4/.

Przyjmijmy w miejsce badanej belki trójprzęsłowej jej statycznie wyznaczalny schemat zastępczy z reakcjami podpór środkowych X_1 , X_2 jako elementami nadliczbowymi.

Wyznaczając przemieszczenia u_p wywołane w statycznie wyznaczalnym schemacie zastępczym belki przez siłę P oraz przemieszczenia u_{x_1} , u_{x_2} wywołane przez siły nadliczbowe, należy postawić warunki zgodności sumy tych przemieszczeń z położeniem uchylonych podpór dla $x = l$ oraz $x = 2l$:

$$6.6 \quad u_p + u_{x_1} + u_{x_2} |_{x=l} = \delta^1$$

$$u_p + u_{x_1} + u_{x_2} |_{x=2l} = \delta^2$$

Z warunków tych można wyznaczyć wielkości nadliczbowe $X_1(x, \delta^1, \delta^2)$, $X_2(x, \delta^1, \delta^2)$ w zależności od położenia x siły P oraz dystorsji δ^1 , δ^2 .

Dla siły P poruszającej się w przedziale $\langle 0, l \rangle$ otrzymujemy:

$$6.7 \quad X_1 = -\frac{6EJ}{5l^3} (8\delta^1 - 7\delta^2) + \frac{Px}{5l^3} (8l^2 - 3x^2)$$

$$X_2 = -\frac{6EJ}{5l^3} (-7\delta^1 + 8\delta^2) + \frac{2Px}{5l^3} (x^2 - l^2)$$

zaś dla siły P poruszającej się w przedziale $\langle l, 2l \rangle$ siły nadliczbowe wyrażają się wzorami:

$$6.8 \quad X_1 = -\frac{6EJ}{5l^3} (8\delta^1 - 7\delta^2) + \frac{P}{15l^3} \{ 8(3l-x)[(6l-x)x - l^2] - 7x(8l^2 - x^2) \}$$

$$X_2 = -\frac{6EJ}{5l^3} (-7\delta^1 + 8\delta^2) + \frac{P}{15l^3} \{ -7(3l-x)[(6l-x)x - l^2] + 8x(8l^2 - x^2) \}$$

Ze względu na symetrię rozwiązania względem środka rozpiętości belki $x = \frac{3}{2} l$, rozważania można ograniczyć do obszaru $\langle 0, \frac{3}{2} l \rangle$

Dysponując wielkościami nadliczbowymi można wyznaczyć rozkłady sumarycznych momentów zginających pochodzących od siły P oraz od X_1 i X_2 :

$$6.9 \quad M = M_P + M_{X_1} + M_{X_2}$$

Ze względu na odcinkową liniowość funkcji M, w celu spełnienia ograniczeń nierównościowych /6.4/ w każdym przekroju belki, wystarczy zażądać spełnienia ich w punktach newralgicznych /pod siłą P oraz nad podporami 1 i 2/; skąd otrzymujemy: - w przypadku $0 \leq x \leq l$:

$$-aPl \leq M_{1y,x} = \frac{Px}{3L}(3L-x) - \frac{2}{3}X_1x - \frac{1}{3}X_2x \leq aPl$$

$$6.10 \quad -aPl \leq M_{1y,l} = \frac{2Px}{3} - \frac{2}{3}X_1l - \frac{1}{3}X_2l \leq aPl$$

$$-aPl \leq M_{1y,2l} = \frac{Px}{3L}l - \frac{1}{3}X_1l - \frac{2}{3}X_2l \leq aPl$$

- w przypadku $l \leq x \leq 2l$:

$$-aPl \leq M_{1y,l} = \frac{P(3L-x)}{3L}l - \frac{2}{3}X_1l - \frac{1}{3}X_2l \leq aPl$$

6.11

$$-aPl \leq M_{1y,x} = \frac{Px(3L-x)}{3L} - (3L-x)X_1 - \frac{1}{3}X_2x \leq aPl$$

$$-aPl \leq M_{1y,2l} = \frac{Px}{3L}l - \frac{1}{3}X_1l - \frac{2}{3}X_2l \leq aPl$$

Podstawiając /6.7/ do /6.10/ oraz /6.8/ do /6.11/ uzyskujemy opis obszaru rozwiązań dopuszczalnych:

- w przypadku $0 \leq x \leq l$:

$$-a - t(\eta) \leq (3\beta^1 - 2\beta^2)\eta \leq a - t(\eta)$$

$$6.12 \quad -a - s(\eta) \leq 3\beta^1 - 2\beta^2 \leq a - s(\eta)$$

$$-a - u(\eta) \leq -2\beta^1 + 3\beta^2 \leq a - u(\eta)$$

gdzie

$$\beta^1 = \frac{6EJ}{5Pl^3} \beta^1 \quad \beta^2 = \frac{6EJ}{5Pl^3} \beta^2 \quad \eta = \frac{x}{l}$$

$$6.13 \quad t(\eta) = \eta \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{12}{5} \eta (7 - 2\eta^2) \right]$$

$$s(\eta) = \eta \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{15} (7 - 2\eta^2) \right]$$

$$u(\eta) = \eta \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{15} (4 + \eta^2) \right]$$

- w przypadku $1 \leq x \leq 2l$:

$$6.14 \quad \begin{aligned} -a - s(\eta) &\leq 3\beta^1 - 2\beta^2 \leq a - s(\eta) \\ -a - t(\eta) &\leq (8-5\eta)\beta^1 - (7-5\eta)\beta^2 \leq a - t(\eta) \\ -a - u(\eta) &\leq -2\beta^1 + 3\beta^2 \leq a - u(\eta) \end{aligned}$$

gdzie

$$6.15 \quad \begin{aligned} s(\eta) &= 1 - \frac{\eta}{3} - \frac{1}{15}(3d_1 - 2b_1) \\ t(\eta) &= \frac{\eta}{3}(3-\eta) - \frac{1}{15}[(8-5\eta)d_1 - (7-5\eta)b_1] \\ u(\eta) &= \frac{\eta}{3} - \frac{1}{15}(-2d_1 + 3b_1) \\ d_1 &= (3-\eta)[(6-\eta)\eta - 1] \\ b_1 &= \eta(8-\eta^2) \end{aligned}$$

Z analizy numerycznej rozkładu funkcji $t(\eta)$, $s(\eta)$, $u(\eta)$ wynika, że ograniczeniem aktywnym w grupie warunków /6.12/ jest nierówność:

$$6.16 \quad (3\beta^1 - 2\beta^2)\eta \leq a - t(\eta) \quad \text{dla } 0 \leq \eta \leq 1$$

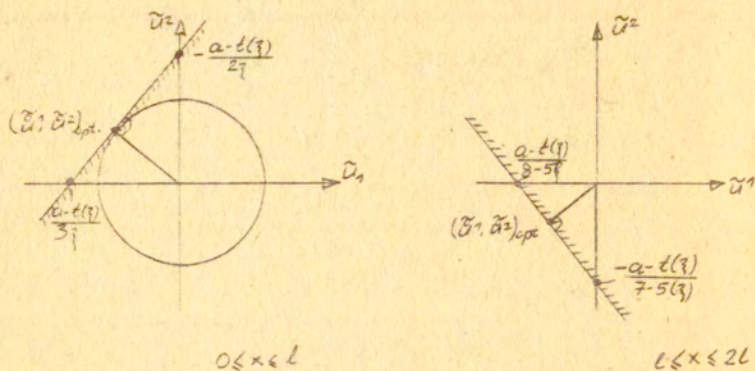
zaś w grupie warunków /6.14/ jest nierówność:

$$6.17 \quad (8-5\eta)\beta^1 - (7-5\eta)\beta^2 \leq a - t(\eta) \quad \text{dla } 1 \leq \eta \leq 2.$$

Zadanie optymalnego sterowania dystorsjami sprowadzone zatem zostało do minimalizacji wyrażenia /6.5/ przy ograniczeniach /6.16/ lub /6.17/. Wynika stąd rozwiązanie /por. rys. 6.5/:

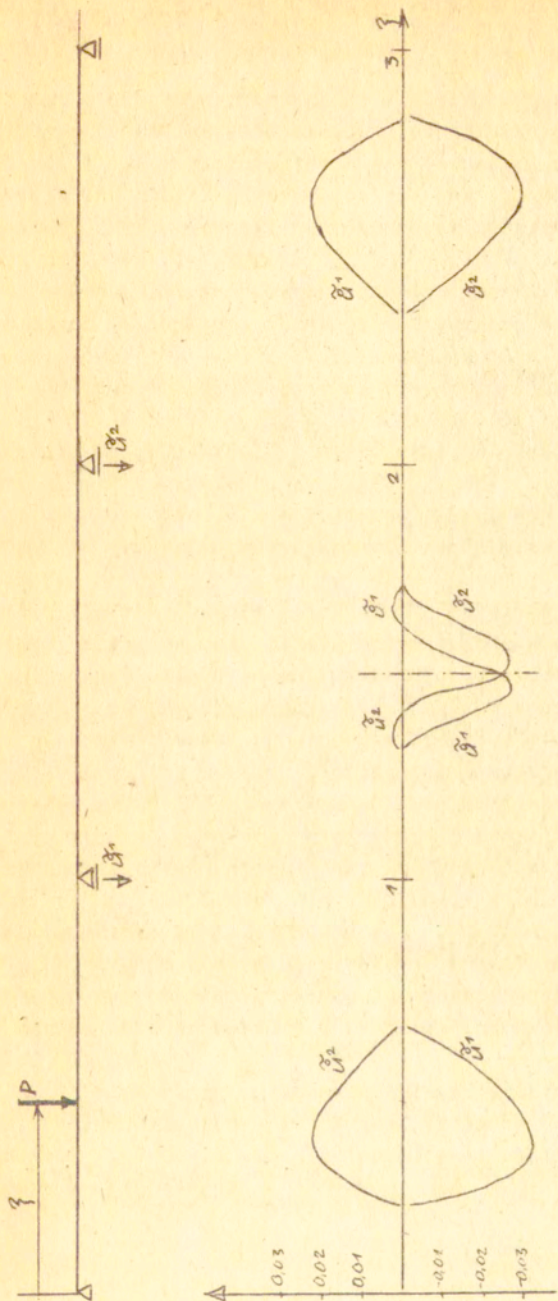
$$6.18 \quad \left. \begin{aligned} \beta^1 &= \frac{6EJ}{5Pl^3} \beta^1 = \frac{3}{15} \frac{a-t(\eta)}{\eta} \\ \beta^2 &= \frac{6EJ}{5Pl^3} \beta^2 = -\frac{2}{12} \frac{a-t(\eta)}{\eta} \end{aligned} \right\} \text{dla } 0 \leq \eta \leq 1$$

$$\left. \begin{aligned} \beta^1 &= \frac{6EJ}{5Pl^3} \beta^1 = \frac{(8-5\eta)(a-t(\eta))}{(8-5\eta)^2 + (7-5\eta)^2} \\ \beta^2 &= \frac{6EJ}{5Pl^3} \beta^2 = \frac{-(7-5\eta)(a-t(\eta))}{(8-5\eta)^2 + (7-5\eta)^2} \end{aligned} \right\} \text{dla } 1 \leq \eta \leq 2$$



Rys. 6.5

Wykres optymalnego sterowania dystorsjami /6.18/ w zależności od położenia η obciążenia zewnętrznego P pokazano na rys. 6.6. Widać, że sprężanie niezbędne jest, gdy siła P porusza się w okolicach środków przęseł, natomiast wyłącza się, gdy siła P porusza się w otoczeniu podpór.

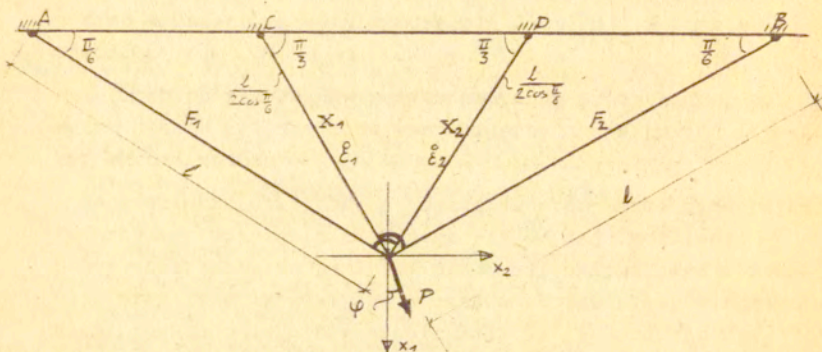


znak dodatni $\beta > 0$ oznacza obniżenie podpory
 znak ujemny $\beta < 0$ oznacza podnoszenie podpory

Rys. 6,6

6.2. Przykład aktywnego spreżania wspornika kratowego

Omówmy przykład wspornika kratowego obciążonego siłą P o stałej wartości, obracającą się wokół punktu zaczepienia O /rys. 6.7/



Rys. 6.7

Oznaczmy przez F_1 i F_2 siły w prętach OA i OB zaś przez X_1 i X_2 siły w prętach OC i OD . Przyjmijmy, że stany wstępne wywoływane będą dystorsjami generowanymi w prętach OC i OD . Daje to możliwość wywołania dowolnych /możliwych do wywołania w danym ustroju/ stanów wstępnych, gdyż stopień statycznej niewyznaczalności układu jest dwa.

Przedyskutujmy na wstępie zagadnienie aktywnego sterowania dystorsjami /6.1/, /6.2/, które w omawianym przypadku sprawdza się do minimalizacji wyrażenia:

$$6.19 \quad \min (\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2)$$

przy ograniczeniach :

$$-aP \leq F_1 \leq aP \quad -aP \leq X_1 \leq aP$$

$$6.20 \quad -aP \leq F_2 \leq aP \quad -aP \leq X_2 \leq aP$$

gdzie przyjęto: $a = 0,4842$.

Ustrój niesprężony nie jest w stanie przenieść obciążenia obracającą się siłą P . Można sprawdzić, że dla siły P ustawionej pod kątem $\varphi = \frac{\pi}{6}$ siła w pręcie OC wynosi $0,6023P$, czyli przekracza wartość aP o 24,4%.

Przyjmijmy w miejsce badanego ustroju jego statycznie wyznaczalny schemat zastępczy z siłami X_1, X_2 w prętach środkowych jako elementami nadliczbowymi.

Wyznaczając przemieszczenie u_p /rzutowane na kierunku OC i OD / węzła O wywołane w statycznie wyznaczalnym schemacie zastępczym wspornika przez siłę P oraz przemieszczenia u_{x_1}, u_{x_2} wywołane przez siły nadliczbowe, należy postawić warunki zgodności sumy tych przemieszczeń z położeniem końców O prętów OC i OD poddanych pierwotnym wydłużeniom.

$$6.21 \quad u_p + u_{x_1} + u_{x_2} |_{OC} = \dot{\xi}_1 l_{oc}$$

$$u_p + u_{x_1} + u_{x_2} |_{OD} = \dot{\xi}_2 l_{od}$$

Z warunków tych można wyznaczyć wielkości nadliczbowe $X_1(\varphi, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)$, $X_2(\varphi, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)$ w zależności od kąta nachylenia φ siły P oraz dystorsji $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$:

$$X_1 = P \left[\frac{3}{3\sqrt{3}+1} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} \sin \varphi \right] -$$

$$-\frac{EA}{2} \left[\left(\frac{1}{3\sqrt{3}+1} + \frac{3}{\sqrt{3}+3} \right) \tilde{\varepsilon}_1 + \left(\frac{1}{3\sqrt{3}+1} - \frac{3}{\sqrt{3}+3} \right) \tilde{\varepsilon}_2 \right]$$

6.22

$$X_2 = P \left[\frac{3}{3\sqrt{3}+1} \cos \varphi - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} \sin \varphi \right] -$$

$$-\frac{EA}{2} \left[\left(\frac{1}{3\sqrt{3}+1} - \frac{3}{\sqrt{3}+3} \right) \tilde{\varepsilon}_1 + \left(\frac{1}{3\sqrt{3}+1} + \frac{3}{\sqrt{3}+3} \right) \tilde{\varepsilon}_2 \right]$$

Podstawiając do równań równowagi:

$$F_1 = P \left(\cos \varphi + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} (2X_1 + X_2)$$

6.23 $F_2 = P \left(\cos \varphi - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \varphi \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} (X_1 + 2X_2)$

węzła O wyrażenia /6.22/, otrzymujemy wartości sił wewnętrznych w prętach OA i OB w zależności od kąta φ nachylenia siły P oraz dystorsji $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2$:

$$F_1 = P \left[\cos \varphi \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+1} \right) + \sin \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}+3} \right) \right]$$

$$+ \frac{EA\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{1}{3\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+3} \right) \tilde{\varepsilon}_1 + \left(\frac{1}{3\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+3} \right) \tilde{\varepsilon}_2 \right]$$

6.24 $F_2 = P \left[\cos \varphi \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+1} \right) + \sin \varphi \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+3} \right) \right]$

$$+ \frac{EA\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{1}{3\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}+3} \right) \tilde{\varepsilon}_1 + \left(\frac{1}{3\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}+3} \right) \tilde{\varepsilon}_2 \right]$$

Wprowadzając wyrażenia /6.22/, /6.24/ do związków /6.20/ otrzymujemy układ warunków opisujących obszar rozwiązań dopuszczalnych:

$$-a \leq 0,3228 \tilde{\varepsilon}_1 - 0,4832 \tilde{\varepsilon}_2 + (0,1616 \cos \varphi + 0,3660 \sin \varphi) \leq a$$

$$-a \leq -0,0432 \tilde{\varepsilon}_1 + 0,3228 \tilde{\varepsilon}_2 + (0,1614 \cos \varphi - 0,3660 \sin \varphi) \leq a$$

6.25 $-a \leq -0,3977 \tilde{\varepsilon}_1 + 0,2363 \tilde{\varepsilon}_2 + (0,4842 \cos \varphi + 0,3660 \sin \varphi) \leq a$

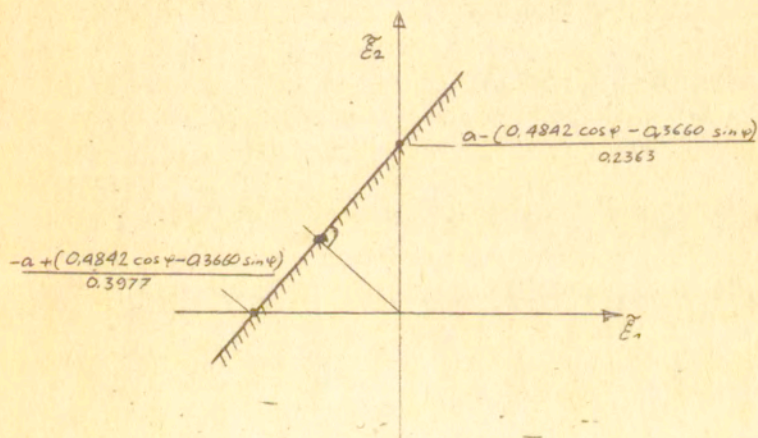
$$-a \leq 0,2363 \tilde{\varepsilon}_1 - 0,3977 \tilde{\varepsilon}_2 + (0,4842 \cos \varphi - 0,3660 \sin \varphi) \leq a$$

gdzie $\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{EA}{P} \varepsilon_1$ $\tilde{\varepsilon}_2 = \frac{EA}{P} \varepsilon_2$

Z analizy numerycznej warunków /6.25/ wynika, że dla wartości kąta φ z przedziału $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ ograniczeniem aktywnym jest nierówność;

$$6.26 \quad -a \leq -0.3977 \tilde{\varepsilon}_1 + 0.2368 \tilde{\varepsilon}_2 + (0.4842 \cos \varphi - 0.3660 \sin \varphi)$$

Zadanie optymalnego sterowania dystorsjami sprowadzone zatem zostało dla $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ do minimalizacji wyrażenia /6.19/ przy ograniczeniu /6.26/. Wynika stąd /por. rys.6.8/, że rozwiązanie opisane jest przez punkt przecięcia prostej ograniczającej obszar dopuszczalny z prostą prostopadłą do niej i wystawioną z początku układu.



Rys.6.8

Otrzymujemy stąd ostatecznie

$$6.27 \quad \begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_1 &= \frac{0,3977}{0,3977^2 + 0,2363^2} (0,4842 \cos \varphi + 0,3660 \sin \varphi - a) \\ \tilde{\mathcal{E}}_2 &= - \frac{0,2363}{0,3977^2 + 0,2363^2} (0,4842 \cos \varphi + 0,3660 \sin \varphi - a) \end{aligned}$$

Korzystając z cykliczności rozwiązania względem zmian φ , rezultaty /6.27/ uzyskane dla przedziału $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ zostały rozszerzone na pełny przedział określoności φ i naszkicowane na rys. 6.9.

Widać z wykresu, że w przypadku $\varphi=0$ oraz w otoczeniu położenia $\varphi = \frac{\pi}{2}$ lub $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ sprzężenie nie jest konieczne i przyjęte kryterium /6.19/ powoduje znikanie dystorsji. W otrzymanym tu rozwiązaniu aktualny stan dystorsji zależy jedynie od aktualnego układu obciążeń zewnętrznych.

Prześledźmy dla porównania rozwiązanie zagadnienia aktywnego sterowania dystorsjami w sformułowaniu /6.1/, /6.3/, które w omawianym przypadku sprowadza się do minimalizacji wyrażenia

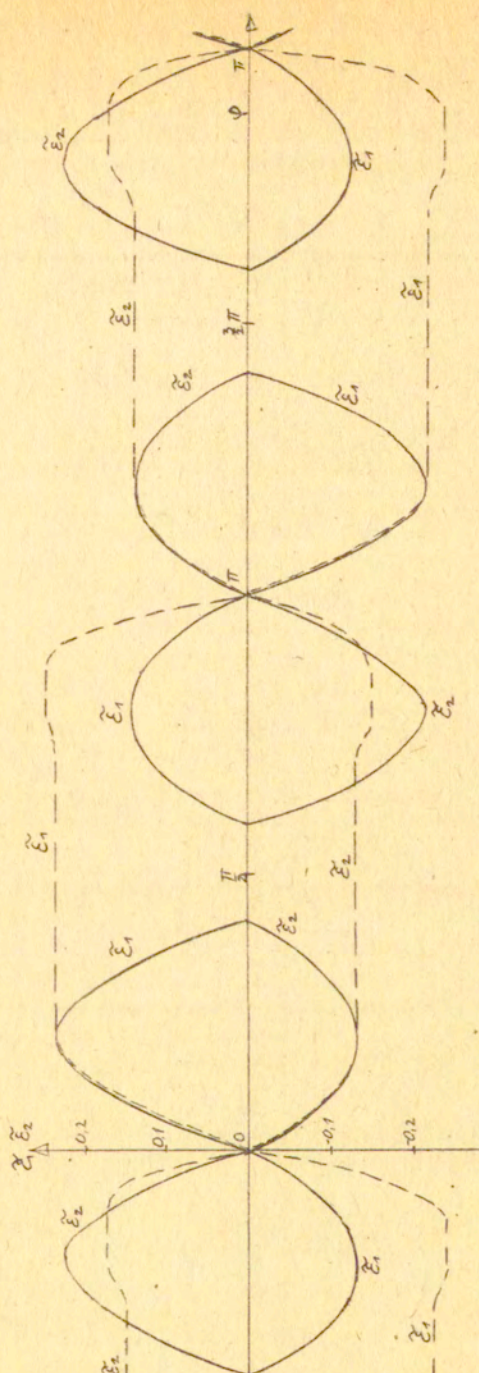
$$6.28 \quad \min \left[\left(\frac{d\mathcal{E}_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\mathcal{E}_2}{dt} \right)^2 \right]$$

przy ograniczeniach /6.25/. Uzyskiwane w tym przypadku stany dystorsji zależą od historii zmian układu obciążeń zewnętrznych. Opisuując zadanie, przyrostowo należy, znając wartości poszukiwanych funkcji $\mathcal{E}_1^{(t)}, \mathcal{E}_2^{(t)}$ określić w kolejnych chwilach czasowych t ich przyrosty $\frac{d\mathcal{E}_1}{dt} \Delta t, \frac{d\mathcal{E}_2}{dt} \Delta t$.

Podstawiając do związków /6.25/ znane wartości $\mathcal{E}_1(t), \mathcal{E}_2(t), \varphi(t), \frac{d\varphi}{dt} \Delta t$ w danej chwili czasowej t , otrzymujemy układ nierówności ograniczających przyrosty $\frac{d\mathcal{E}_1}{dt} \Delta t, \frac{d\mathcal{E}_2}{dt} \Delta t$.

Ograniczenia te opisują wraz z warunkiem /6.28/ optymalne przyrosty dystorsji. Wychodząc z punktu $\varphi=0$, dla którego dystorsje znikają, wyznaczono w ten sposób /numerycznie/ rozkład dystorsji $\mathcal{E}_1(\varphi), \mathcal{E}_2(\varphi)$ naszkicowany na rys. 6.9.

Z analizy numerycznej warunków /6.25/ wynika, że oba sformułowania /6.19/i/6.28/ mają [dla $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$] identyczne rozwiązanie w przedziale $\langle 0, \varphi_1 \rangle$. W przedziale $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ sformułowanie pierwsze związane jest ze stopniowym wyzwaniem dystorsji aż do ich całkowitego zaniku (w $\langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle$) podczas gdy sformułowanie drugie związane jest z utrwaleniem ich na tak długo, jak jest to możliwe [przedział $\langle \varphi_1, \varphi_4 \rangle$]. Dla $\varphi \in \langle \varphi_4, \varphi_5 \rangle$ ograniczeniem aktywnym staje się w drugim sformułowaniu ograniczenie wartości siły w pręcie OD zaś dla $\varphi \in \langle \varphi_6, \frac{\pi}{2} \rangle$ aktywnie ingeruje ograniczenie związane z prętem O₁C₁.



— sformułowanie (6.1), (6.2)
 - - - sformułowanie (6.1), (6.3)

Rys. 6.9

UWAGI KOŃCOWE

- Ogólne sformułowanie zagadnień dystorsji dla abstrakcyjnego ustroju sprężystego /§ 0.2/ dało z jednej strony dogodny aparat do badań teoretycznych z drugiej zaś, mogło posłużyć jako punkt wyjścia do opisu zagadnień dystorsji w dużych, regularnych strukturach przedstawionych w modelu kontynualnym oraz w strukturach dowolnych, opisywanych w modelu dyskretnym.
- Stawiając zagadnienie optymalnego sterowania dystorsjami w celu przystosowania, minimalnym kosztem wprowadzanych dystorsji, stanu naprężeń końcowych do nierównościowych ograniczeń lokalnych wyteżeń, otrzymujemy rozkłady naprężeń końcowych takie jak dla ciała o cechach sprężysto-idealnie plastycznych.
- Zastosowanie programu TIPS optymalnego sprężenia wewnętrzne- go ustrojów kratowych pozwala na przystosowanie konstrukcji do określonych obciążeń zewnętrznych. Może on być wykorzystany do maksymalnego łagodzenia koncentracji naprężeń lub do określania nośności granicznej ustroju sprężanego. Dopuszczając możliwość generowania dystorsji we wszystkich prętach ustroju, program TIPS można wykorzystać do sprężysto- plastycznej analizy pracy konstrukcji.
- Efektywność sprężania wewnętrzne- go układów wieloelementowych wzrasta wraz ze stopniem ich przesztynienia. Wynika to z fak- tu, że w n-krotnie statycznie niewyznaczalnym układzie można wywołać co najwyżej n liniowo niezależnych stanów naprężeń wstępnych.
- Rozszerzając sformułowanie zagadnień sprężania na przypadek układów dwufazowych otrzymujemy model pozwalający na opis sprężania zewnętrznego jednej z faz /fazy sprężanej/ przez drugą fazę /fazę sprężającą/. Model ten może być z powodze- niem wykorzystywany do opisu kompozytów sprężanych o włóknis- tej wiązce sprężającej kontynualną matrycę.

- Koncepcja sprężania powierzchniowego stanowiąca szczególnie przypadek sprężania zewnętrznego daje szereg możliwości zastosowań, korzystnych z inżynierskiego punktu widzenia.
- Koncepcje sprężania wieloelementowych układów konstrukcyjnych mogą być realizowane w praktyce inżynierskiej na różne sposoby, zależnie od przyjętej techniki generowania dystorsji. W pracy zaproponowano kilka sposobów (na dwa z nich uzyskano patenty) wymuszania dystorsji w konstrukcjach.
- Z licznych przykładów przytoczonych w pracy widać, że wpływ stanów dystorsji na warunki pracy konstrukcji może być bardzo znaczny.
- Rozszerzenie statycznych zagadnień sterowania dystorsjami na problemy sprężania aktywnego / § 6/ daje możliwość uchwycenia związków pomiędzy problemem optymalnego sprężania, przy zmieniającym się w czasie obciążeniu, a zagadnieniem przystosowania się konstrukcji do tego obciążenia.
- W zagadnieniach sprężania zakładano, że rozmieszczenie źródeł generacji dystorsji jest a priori określone. Interesujące będzie w przyszłych rozważaniach objęcie sterowaniem optymalnym i tej grupy zmiennych decyzyjnych.
- W zagadnieniach sterowania dystorsjami zakładamy, że geometria konstrukcji jest a priori określona, co jest uzasadnione traktowaniem sprężania jako sposobu adaptacji określonego ustroju do danego obciążenia zewnętrznego. Inne podejście może żądać odpowiedzi kompleksowej, kiedy należy konstrukcję sprężać a kiedy zmieniać jej geometrię. Niezbędne jest w tym celu sformułowanie uogólnionych kryteriów optymalizacji wyrażonych przez funkcjonały zależne zarówno od poszukiwanych dystorsji jak i parametrów określających geometrię układu.
- Zagadnienie minimalizacji objętości materiału ustroju kratowego o ograniczonych wyężeniach przy kompleksowym sterowaniu jego geometrią oraz dystorsjami prowadzi

w rozwiązaniu do kratownicy niesprężonej. Wynika to z faktu, że kratownica o najmniejszej objętości jest ustrojem izostatycznym [9] i jako taki nie daje możliwości wprowadzenia naprężeń wstępnych.

- Zagadnienie sterowania dystorsjami może być wykorzystane do uzyskiwania różnych, korzystnych z inżynierskiego punktu widzenia efektów. Między innymi można przez sprężanie wytłumiać drgania układu [108], zwiększać jego stateczność [76, 81], bądź odpowiednio regulować jego podatność na określony układ obciążeń - czyli sterować jego makrozwiązkami konstytutywnymi. To ostatnie zagadnienie prowadzi do zastosowania sprężania w inżynierii materiałowej w celu uzyskiwania makroelementów /z odpowiednio zwieraną mikrostrukturą/, które posiadają określone a priori własności fizyczne.

Bibliografia

1. K.I.Arrow, L.Hurwicz, H.Uzawa "Studies in linear and non-linear programming" Stanford University Press. Stanford, California 1958.
2. L.Baes, A.Lipski "La poutre "Préflex", Principes. Notes de Calcul. Notes descriptives Fasc"nr I.II Bruxelles 1953
3. I.E.Bower "Autostress principles for beams with web openings" Jour. Struct. Div AS CE vol. 103. N. ST 7 July 1977 1405-1418
4. J.Bródka, J.Kłobukowski "Sprężone konstrukcje stalowe". Arkady, Warszawa 1965
5. S.Bytner "Analiza stanu deformacji płaskiej struktury pręto-wo-ciężnowej /w przygotowaniu/
6. Z.Bychawski "Analiza reologiczna belki sprężonej armaturą sztywną" praca doktorska, Kraków 1957
7. A.S.L. Chan "Optimum design of Michell optimum structures" College of Aeronautics Report N. 142 /1960/
8. M.Comninou "The interface crack" Jour. Appl. Mech. December 1977 631-636
9. H.L. Cox "The design of structures of least weight" Pergamon Press. Oxford 1965
10. S.Drewnowski "Betonowe konstrukcje mostowe sprężo-rozprężone" Kom. Inż. Łąd. PAN PWN 1978
11. S.Drewnowski. W.Marks "Konstrukcje sprężono-rozprężane Koncepcja i analiza sił wewnętrznych" A.I.L. 23, 2/1977 187-199.
12. W.Dzieniażewski "Betonowe płyty równej wytrzymałości w dwóch stanach obciążeń" /57-74/ Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych /cz. II Ossolineum 1969/
13. D.Edelen "Nonlocal variational mechanics /I-VII/ Int. J.Engng Sci. 7/1969/
14. Cz.Eimer "Design and optimization of prestressed shells" proc. symp. "On. Industrialized Spatial and Shell Structures" IASS. Kielce Poland 1973.
15. L.P. Felton "On Optimum Design of Prestressed Beam Structures" AIAA Journal Vol. 14 no. 3 /1976/ 392-394.
16. S.J.Fenves, F.H.Branin "Network-topological formulation of structural analysis" Journ. Struc. Div.ASCE, vol. 89. No ST4 August 1963

17. W.B.Fraser "Bending of radially prestressed plate by tilting a central rigid inclusion" Journ of Elast. vol 5 No 2. June 1975 129-147
18. H. Frąckiewicz "Mechanika ośrodków siatkowych" PWN Warszawa 1970
19. J. Gierliński "Statique des voiles minces à structure discrète" Bull. Pol. Acad. Sci. Ser. sci techn. vol. XXII No 11/1974 561-565
20. J. Grycz "Podstawowe zależności i kolejność rozwiązywania zadania o wyznaczaniu kształtu belek betonowych sprężonych dowolnie gęsto, dowolnie cienkimi strunami w założeniu wyrównywania naprężeń głównych" VII konf. PZiTB. PAN, Krynica, 1961
21. M.E.Gurtin "A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics" Arch. Rat. Mech. Analysis 13 /1963/, 321-329.
22. W. Gutkowski "Regularne konstrukcje prętowe" PWN Warszawa 1973
23. I. M. GELFAND S. W. FOMIN "Rachunek wariacyjny" PWN Warszawa 1972
24. Y. Guyon "Beton precontraint" v. 2 Constructions hyperstatiques, Paris 1958
25. G. Hadley "Nonlinear and dynamic programming" Addison-Wesley 1964.
26. A.S.Hall R.W. Woodhead "Frame analysis" J. Wiley & Sons Inc. New York 1961 p. 84
27. A.K.Head "Dislocation theories of the plastic properties of metals and the transition to continuum mechanics" 45-52 w "Inelastic behavior of solids" - proc. Battelle Institute Materials Science Colloquia 4th Columbus Ohio 1969 - New York M. Grow-Hill 1970.
28. L.D.Hofmeister, L.P.Felton "Prestressing in structural synthesis" AIAA Journal vol. 8 no 2 /1970/ 363-364
29. S. Jendo, A. Stachowicz "Przekrycia wiszące. Obliczenia statyczne i kształtowanie" Seria Mechaniki Konstrukcji nr 31 Arkady, Warszawa 1974.
30. Л.М. Каланов "Основы теории пластичности" Наука, Москва 1969
31. E. Kossecka "Dynamic incompatibility problem" AMS 26 4 /1974/.
32. I.A.König "Projektowanie konstrukcji sprężysto-plastycznych przy obciążeniach zmiennych" Prace IPPT. 24/1974

33. E.Kröner "Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen" *Ergeb. angew.Math.*, 5 /1958/.
34. M.Kuczyńska, W.Marks "Kształtowanie elementów betonowych sprężonych układem gęsto rozmieszczonych cięgien" *Arch. Inż. Łąd.* XVI. 3.1970
35. H.W.Kuhn, A.W.Tucker "Nonlinear programming" *Proceedings Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability /1951/*, 481-492.
36. F.Levi "Sulla valutazione degli effetti dell'elasticità ritardata nei solidi iperstatici" *Giorn.Gen.Civ.* 7/8 /1949/.
37. J.M.Lin "Shortening of column with initial curvature and eccentricity and its influence on the stress distribution in indeterminate structures". *proc. I.U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. Chicago 1951 /449-450/*
38. T.Y.Lin "Load-balancing method for design and analysis of prestressed concrete structures" *Journ. Amer. Concr. Inst. Detroit. Mich.* June 1963
39. N.C.Lind "Analysis of structures by system theory" *Journ. Struc. Div. ASCE vol. 88 No ST2 April 1962*
40. C.E.Lemke "A method of solution of quadratic programs" *Manag. Sci.* vol. VIII 1962.B. 442-453
41. W.Marks "Optymalne kształty belek" *Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych* cz. I. Ossolineum, Warszawa 1969
42. W.Marks "Optymalizacja elementów zginanych wstępnie naprężonych" *Prace IPPT.* 52/1978
43. E.F.Masur "The effect of prestressing on the buckling loads of statically redundant, rigid-jointed trusses". *proc. of the first, U.S. national Congress of Applied Mechanics. Chicago .1951 443-447 A.S.M.E. 1952.*
44. E.Melan "Theorie statisch unbestimmter Systeme aus ideal plastischen Baustoff. Sitzber.Akad.Wiss.IIIa 145 /1936/. 195-218
45. A.G.M.Michell "The limit of economy of material in frame structures" *Phil. Mag.* 6.8.589-597.1904
46. R.D.Mindlin. "Micro-structure in linear elasticity" *Arch. Rat. Mech. Engl.* vol. 16 no 1 1964.
47. H.Möllmann "Analysis of plane prestressed cable structures" *Journ. Struct. Div. ASCE ST 10 October 1970. 2059-2082*
48. Z.Mróz "Optimal design of structures of composite materials" *Int. J.Sol. Struct.* vol. 6. 1970, 859-870

49. Z.Mróz, G.I.N. Rozwany "Optimal design of structures with variable support conditions" Journ. Optim. Theor. Appl. vol. 15 No 1. January 1975.
50. Z.Mróz, J.E.Taylor "Prestress for maximum strenght" Int. J.Sol.Struct., 9 /1973/, 1535-1541.
51. T.Mura "Individual dislocations and continuum mechanics" 211-229 w "Inelastic behavior of solid-s" - proc. Bettle Institute Materials Science Colloquia 4th Columbus Ohio 1969 - New York M.Grow-Hill 1970.
52. A.E.Nouman "Minimum cost versus minimum weight of prestressed slabs" J.Struc. Div ASCE. ST.7 July 1976 1493-1504.
53. A.Nadai "Plasticity, a mechanics of the plastic state of matter" New York, 1931.
54. I.C. Nagtegaal "On optimal design of prestressed elastic structures" Int.I.Mech.Sci., 14 /1972/, 779-781.
55. J.P.Nowacki "The linear theory of dislocation in Cosserat continuum" Bull.Acad. Polon. Sci Ser.Sci. Techn. vol. XXI, No 11/1973 585-592
56. W.Nowacki "Teoria sprężystości" PWN Warszawa /1970/ §§ 4,8.
57. W.Nowacki "Distortion problem in micropolar elasticity", Bull.Acad.Polon. Sci., 21 /1973/ 295 461
58. W.Olszak, S.Kaufman, Cz. Eimer, Z.Bychowski "Teoria konstrukcji sprężonych" PWN Warszawa 1961
59. W.Olszak, P.Perzyna, A.Sawczuk "Teoria plastyczności" PWN Warszawa, 1965.
60. N.Olhoff, J.E.Taylor "On optimal structural remodeling" DCAMM the Technical University of Demmark no 123 September 1977.
61. A.W.Perelmuter "Ustroje prętowo-ciężnowe". Arkady. Warszawa 1972.
62. A.Phillips "The Theory of Locking Materials" Trans. Soc. Rheology 3 /1959/, 13-26.
63. J.Pietrzak, J.Poplewska "Obliczanie kratownic przy użyciu teorii sieci" PWN Warszawa 1976.
64. W.Prager "On Ideal Locking Materials" Trans.Soc.Rheology 1 /1957/, 169-175.
65. W.Prager G.I.N. Rozwany "Plastic design of beams. Optimal locations of supports and steps in yield moment" Int. J.Mech.Sci. vol. 17 No 10. 1975. 597-652

66. W.Prager, P.S.Symonds "Stress Analysis in elastic-plastic structures" Proc. 3-rd Symposium App.Math. /Ann,Arbor.,Mich 1949/ N.York /1950/, 187-197,
67. W.Prager, J.E.Taylor "Problems of optimal structural design" J.Appl. Mech. vol. 35. 1968. 102-106.
68. B.Radejowska-Iwanowska "Wymiarowanie belek stalowych sprężanych bez użycia cięgien" Inżynieria i Budownictwo 1975
69. Razowski "Wprowadzanie wstępnych naprężeń w zginanych dźwigarach stalowych za pomocą elementów sztywnych". Praca doktorska. Politechnika Krakowska 1974.
70. D.Rogula "Teoria nieregularnych struktur dyskretnych". Prace IPPT. 24/1970.
71. D.Rogula. Dynamika defektów w ośrodkach dyskretnych" w "Teoria defektów w ośrodkach stałych" pod red. H.Zorskiego. Ossolineum, Warszawa 1973.
72. G.I.N. Rozwany "Optimum synthesis of prestressed structures" Journ. Struc. Div. ASCE. ST 6. December 1964. 189-211.
73. A.Sawczuk "Nośność graniczna ram płaskich Wyd. N.O.T. Bibl. Inż. i Bud. 7, 1964.
74. L.Spunrt "Optimization of redundant prestressed structures" Journ. Struct. Div. ASCE. ST 12. December 1970, 2589-2606.
75. R.Sygulski "Sprężanie prostokątnych siatek ciągnowych za pomocą balastowania" Inż. i Bud. 6/1975.
76. J.E.Taylor "Optimal prestress against buckling. An energy approach." Int. J.Solid. Struct. vol. 7 n. 2 1971.
77. S.Timoschenko, I.N. Goodier "Theory of elasticity" Mc Graw-Hill /1951/ § 14.
78. Р.И.Трухачев, В.В.Хоменюк "Теория неклассических вариационных задач" Л.-М.У. Leningrad 1971
79. Z.Wasintyński "O kształtowaniu wytrzymałościowym" Akad. Nauk Techn. Warszawa 1939.
80. Z.Wasintyński "Zadanie o wyznaczaniu kształtu belki betonowej o równej wytrzymałości sprężonej dowolnie gęsto, dowolnie cienkimi strunami" VII konf. PZITB, PAN Krynica 1961.
81. Z.Wesołowski, E.Zżatanowa, J.Maczyński "Осимметрична задача за загиб на устойчивост на предкарително напрегнат цилиндр". Bulgarian Academy of Sciences Theor.Appl.Mech. Sofia 1972 III no.1.
82. R.de Wit. "The continuum theory of stationary dislocations", Solid.State Phys., 10 /1960/, 249.

83. Cz. Woźniak "Siatkowe dźwigary powierzochniowe" PWN Warszawa /1970/, 330.
84. H. Zorski "Direct continuum model of interacting particles" w' "Continuum models of discrete systems" University of Waterloo Press 1977
85. J. Holnicki-Szulc "Theory of prestressing I" Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn., 1, 1976. 1-10.
86. J. Holnicki-Szulc "Theory of prestressing II. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Techn. 1, 1976. 11-22
87. J. Holnicki-Szulc "Zagadnienia sprężania w ośrodkach dwufa-sowych" Mech. Teoret. Stos. t. 16. zesz. 1/1978. 41-57
88. J. Holnicki-Szulc "Optymalne swieranie powierzochniowych ustrojów strukturalnych" Rozpr. Inż., 22 4 /1974/, 689-708.
89. J. Holnicki-Szulc "Distortion problems in the structures" proc. Symposium of Industrialised Spatial and Shell Structures - IASS. Kielce 1973.
90. J. Holnicki-Szulc "Analiza geometrycznej niezmienności wieloelementowych układow konstrukcyjnych". Prace IPPT. 6/1976. - Mech. i Komp. 2/1979
91. J. Holnicki-Szulc "Optymalizacja tarce" rozdz. 10 w pracy zbior. pod red. A. Brandta. "Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych" PWN Warszawa 1978.
92. J. Holnicki-Szulc "Pewne metody wyrównywania naprężeń głównych w płaskich ośrodkach sprężystych" Rozpr. Inż. 2/1971, 287-299.
93. J. Holnicki-Szulc "Wyznaczanie układow cięgien sprężających odpowiadających danemu polu sił masowych", Arch. Inż. Łąd. 3/1971, 515-527
94. J. Holnicki-Szulc "Optymalne sprężanie ośrodków o stałej grubości w płaskim stanie naprężania". Rozpr. Inż. 2/1972, 217-231
95. J. Holnicki-Szulc "Optimal prestress in compound medium" - w przygotowaniu
96. J. Holnicki-Szulc "Prostress of truss and frame structures" Proc. ASCE. J. Struc. Div. March. 1979. ST 3, 601-616
97. J. Holnicki-Szulc. J. E. Taylor "Remodelling of prestressed structures" /w przygotowaniu/
98. J. HOLNICKI-SZULC, M. SZULARZ "Optymalne sprężanie wieloelementowych układow kratowych, prace IPPT 56/1978.

99. J.HOLNICKI-SZULC, D.ROGULA "Nonlocal continuum models of large engineering structures" A.M.S. 6/1979.
100. J.HOLNICKI-SZULC, D.ROGULA "Boundary problems in nonlocal continuum models of large engineering structures" AMS 6/1979
101. J.HOLNICKI-SZULC Wniosek pat. nr. P-18003 "Sposób sprężania konstrukcji prętowych oraz urządzenie do sprężania konstrukcji prętowych. Urząd Patentowy PRL /dec o nad pat. z dn.24.9.1979 /zgłoszenie z dn.19.03.1975
102. J.HOLNICKI-SZULC "Sposób sprężania zginanych ustrojów belkowych" Urząd Patentowy PRL Pat. nr 101074 zgłoszenie z dnia 24.04.1975
103. J. HOLNICKI-SZULC, M.SZIARZ Wniosek pat. nr P-211788 Układ struktury prętowo-ciągnowy dźwigara powierzchniowego. Urząd Pat. PRL 1979 zgłoszenie z dn. 12.06.1978
104. J.HOLNICKI-SZULC, Z.MRÓZ "Active control of prestressed structures" - w przygotowaniu.
105. Z.MRÓZ "O sprężaniu optymalnym" w przygotowaniu
106. M.SZIARZ "Analiza układów kratowych z jednostronnymi więzami wewnętrznymi - prace IPPT 70/1979
107. B.BUD IANSKY, C.E. PEARSON "A note of the decomposition of stress and strain tensors" Quart.Appl.Math.14 /1956/ 327.
108. J.ROORDA "Tendon Control in Tall Structures" J.Struct. Div. ASCE ST3 March 1975 str. 505-521.
109. S.SAB-UNG, J.T.P. YAO "Action of Building Structures" J.Eng.Mech.Div. ASCE EM2 April 1978 335-350
110. J.N.YONG, F.Giannopoulos "Active Tendon Control of Structures" J.Eng. Mech.Div. ASCE EM3 June 1978 551-568
111. W.Findeisen, J.SZYMANOWSKI, A. WIERZBICKI "Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji P.W.N. Warszawa 1977
112. D. ROGULA Opracowanie metody obliczania struktur inżynierskich w przypadku "Progressive Collapse" opracowanie dla C.E.T.O.P.B. "ETOB" Warszawa 1973
113. Z.MRÓZ "On Optimal force action and reaction on structures" Proc. JUTAM Symp. on "Struct Control" Waterloo June 1979
114. G.RAKOWSKI "Zastosowanie macierzy do analizy statycznej i dynamicznej prętów prostych" bibl. "Inżynierii i Budownictwa" Warszawa 1968.
115. B. NAYROLLES "Duality in Solid Mechanics" cykl wykładów w sesji "Analiza funkcjonalna w mechanice" CISM Udine - lipiec 1977
116. Cz.RYMARZ "Problemy brzegowe nielokalnej teorii sprężystości" Biuletyn WAT Nr. 2 /258/ Warszawa 1974

SPIS TREŚCI

WSTĘP	3
0.1. Przedmiot rozważań	3
0.2. Dualność w mechanice a ogólna teoria dystorsji sprężystych	6
0.3. Dyskretne i kontynuualne modele wieloelementowych układów konstrukcyjnych	29
0.4. Optymalne sterowanie dystorsjami jako koncepcja uogólnionego sprężania	33
0.5. Treść pracy	37
A. ZAGADNIENIA DYSTORSJI W CONTINUUM SPRĘŻYSTYM	39
1. Dystorsje w ciele sprężystym	39
1.1. Zależności podstawowe	40
1.2. Analiza stanów wstępnych. Identyfikacja pół dystorsji	44
1.3. Sterowanie polami dystorsji	50
1.3.1. Sprężanie ze względu na minimalizację globalnej podatności i globalnego wyłączenia ustroju	52
1.3.2. Optymalne rozprowadzanie pół dystorsji przy określonym koszcie sprężania	55
1.3.3. Sprężanie ze względu na spełnienie minimalnym kosztem nierównościowych ograniczeń stanów końcowych.	58
1.4. Zagadnienia dystorsji skrępowanych	65
1.4.1. Dystorsje termiczne	67
1.4.2. Dystorsje generowane na podobszarach ciała	84
2. Dystorsje w dwufazowym ciele sprężystym	88
2.1. Zależności podstawowe	89
2.2. Analiza stanów wstępnych. Identyfikacja pół dystorsji	93
2.3. Sterowanie polami dystorsji	95
2.3.1. Zagadnienie optymalnego sprężania w ośrodkach o ograniczonych wyłączeniach dopuszczalnych.	96
2.3.2. Dyskusja przypadków szczególnych	102
2.3.3. Przykład zadania kołowsymetrycznego	106

3. Dystorsje powierzchniowe	110
3.1. Analiza stanów wstępnych. Identyfikacja pól dystorsji	110
3.2. Sterowanie optymalne polami dystorsji	114
3.3. Przykład sprężania rury dwuwarstwowej	121
3.4. Przykład sprężania ramy prętowej	124
3.5. Przykład sprężania belki zginanej	126
B. ZAGADNIENIA DYSTORSJI W WIELOBLEMENTOWYCH UKŁADACH KONSTRUKCYJNYCH	130
4. Zagadnienia dystorsji w wieloelementowych układach prętowych	130
4.1. Przypadek gęstych struktur regularnych	131
4.1.1. Uwzględnienie wpływu stanów dystorsji	133
4.1.2. Dystorsje membranowe w kratownicach powłokowych	135
4.1.3. Dystorsje w płaskich ustrojach strukturalnych	140
4.1.4. Przykład sterowania dystorsjami w dwuwarstwowej płycie strukturalnej	143
4.2. Przypadek dowolnych układów prętowych	146
4.2.1. Uogólniona sieciowa analiza statyczna ustroju prętowego	147
4.2.2. Analiza stanu deformacji struktury z uwzględnieniem wpływu dystorsji	154
4.2.3. Optymalne sterowanie stanami dystorsji	158
4.2.4. Przykład sprężania wspornika kratowego	161
4.2.5. Program TIPS optymalnego sprężania kratownicy	164
4.3. O możliwościach wykorzystania w projektowaniu układów prętowych sterowania dystorsjami oraz o technicznych sposobach ich generowania	170
5. Zagadnienia dystorsji w układach kompozytowych	177
5.1. Przypadek strunokompozytów	177
5.1.1. Sformułowanie zagadnienia sprężania strunokompozytów	179
5.1.2. Sprężanie przez struny przenoszące jedynie siły rozciągające	182
5.1.3. Sprężanie przez struny przenoszące siły rozciągające i ściskające	184

5.2. Przypadek kablokompozytów	<u>186</u>
5.3. Przykład tarczy kołowsymetrycznej sprężanej włóknami	<u>192</u>
5.4. O technicznych sposobach generowania dystorsji w układach kompozytowych	<u>196</u>
5.4.1. Sprężanie odcinkowe kratownic dwufazowych	<u>196</u>
5.4.1. Sprężanie struktur prętowo- ciągnowych	<u>197</u>
6. Aktywne sterowanie dystorsjami w układach konstrukcyjnych	<u>199</u>
6.1. Przykład aktywnego sprężania belki ciągłej	<u>204</u>
6.2. Przykład aktywnego sprężania wspornika kratowego	<u>210</u>
UWAGI KOŃCOWE	<u>217</u>
BIBLIOGRAFIA	<u>220</u>