

Zbigniew Peradziński

**GEOMETRIA NIELINIOWYCH ODDZIAŁYWAŃ
W RÓWNANIACH RÓŻNICZKOWYCH
CZĄSTKOWYCH**

22/81v.

WARSZAWA 1981

ISSN 0208-5658

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 12 czerwca 1981 r.

Zarejestrowana pod nr 22/1981



57091



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark.wyd. 8,5. Ark.druk.12,5.

Oddano do drukarni w czerwcu 1981 r.

Nr zamówienia 369/0/81

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

<http://rcin.org.pl>

- 1.11 - równania różniczkowe
6.61 - matematyczne podstawy
mechaniki płynów

Zbigniew Peradzyński
Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

GEOMETRIA NIELINIOWYCH ODDZIAŁYWAŃ
W RÓWNIANIACH RÓŻNICZKOWYCH CZĄSTKOWYCH
ze szczególnym uwzględnieniem równań dynamiki płynów

WSTĘP

Równania cząstkowe spotykane w fizyce bądź w naukach technicznych opisują na ogół zachowanie się pól rozmaitych wielkości fizycznych. Podobnie, analizując rozchodzenie się zaburzeń, zwykło się mówić o modach odpowiadającym różnym gałęziom związku dyspersyjnego. Pojęcie modu pojawiło się również w kontekście analizy fourierowskiej oraz przy okazji krótkofalowej asymptotyki rozwiązań.

W ogólnym przypadku pomiędzy rozmaitymi polami fizycznymi czy też modami istnieją pewne sprzężenia i pojawienie się jednych pól (modów) prowadzi w konsekwencji do pojawienia się odpowiednich innych. Możemy zatem mówić o oddziaływaniu pól czy też modów. Wydaje się zatem, że oprócz klasycznych zagadnień związanych z istnieniem i jednoznacznością rozwiązań układów równań różniczkowych cząstkowych zachodzi także potrzeba rozwijania aparatu pozwalającego na bardziej systematyczne badanie sprzężeń oraz klasyfikację oddziaływań, jakie pojawiają się pomiędzy rozmaitymi polami (modami) występującymi w układzie.

Innym na pozór jest następujący problem: dany jest układ

równań cząstkowych oraz pewne zagadnienie, np. problem początkowy, brzegowy czy też początkowo-brzegowy. Powstaje pytanie, czy poszukując rozwiązania trzeba zawsze rozwiązywać cały wyjściowy układ równań, czy też można zagadnienie uprościć sprowadzając je do układu prostszego.

Jako znakomity przykład ilustrujący sensowność stawiania problemów tego typu może posłużyć układ równań Eulera cieczy idealnej nieściśliwej

$$E/ \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v}(0, x) = \vec{v}_0(x).$$

Jeśli w momencie początkowym nałożyć ograniczenia na wirowość prędkości $\omega := \operatorname{rot} \vec{v}$ żądając, by $\omega(0, x) \equiv 0$, wówczas dowodzi się (tw. Helmholtza lub tw. Kelwina), że przez cały czas w przepływie $\omega(t, x) = 0^*$. Znikanie wirowości jest warunkiem koniecznym i lokalnie dostatecznym na istnienie potencjału prędkości ψ , $\nabla \psi := \vec{v}$. Okazuje się wówczas, że potencjał prędkości $\psi(t, x)$ spełnia liniowe równanie Laplace'a $\Delta \psi = 0$ (nie zawierające różniczkowania po czasie), a więc równanie o wiele prostsze i bardziej znane niż pierwotny układ E/! Fakt ten, zauważony prawdopodobnie dosyć przypadkowo w ciągu dwieście lat trwającej już historii równania Eulera, przyczynił się niewątpliwie znacznie do zrozumienia natury sił aerodynamicznych i rozwoju aerodynamiki w pierwszej połowie naszego stulecia.

Równanie Eulera jest badane w rozdziale 11, a wspomniane tu własności są konsekwencją niewystępowania sprzężeń pomiędzy moda-

* Jeśli występują warunki brzegowe, wówczas wirowość może być generowana również przez warunki brzegowe.

mi bezwirowymi. Prezentowane w pracy rozważania pozwalają na bardziej systematyczne wyszukiwanie tego typu faktów, a ogólna filozofia postępowania polega na tym, że do badanego układu równań Φ na u^i dokłada się rozmaite więzy, a więc np. inne układy równań z pewnej klasy $[\Psi]$ z ewentualnym rozszerzeniem przestrzeni zmiennych zależnych $u \rightarrow (u, v)$. Biorąc teraz $\Psi \in [\Psi]$ bada się następnie zgodność powstałego w ten sposób układu $\Phi \wedge \Psi$

$$\Phi(u, \partial u, \dots) = 0, \quad \Psi(u, v, \partial u, \partial v, \dots) = 0$$

na funkcje u^i, v^α . W naszym przykładzie Φ to układ równań Eulera, $\text{rot } v = 0$ to Ψ , a twierdzenie Kelvina mówi, że układ rozszerzony $\Phi \wedge \Psi$ jest zgodny.

Warto w tym miejscu zauważyć, że wiele innych klasycznych problemów, jak np. problem transformacji Bäcklunda czy też poszukiwanie rozwiązań o z góry zadanych własnościach, jak np. poszukiwanie rozwiązań niezmienniczych względem pewnej grupy przekształceń mieści się w tym schemacie (jeśli np. poszukiwać rozwiązań o symetrii sferycznej dla układu $\Phi = 0$, wówczas należy Φ rozszerzyć o układ Ψ wyrażający warunki symetrii, które w przypadku skalarnych wielkości mają postać $\frac{\partial u^i}{\partial \varphi} = \frac{\partial u^i}{\partial \theta} = 0$).

Efektywność omawianego tu postępowania zależy od umiejętności wyboru takiej klasy więzów $[\Psi]$, by rozwiązania odpowiednich układów $\Phi \wedge \Psi$ dla $\Psi \in [\Psi]$, jeśli istnieją, były interesujące z fizycznego punktu widzenia. Podstawową sprawą jest tu również stwierdzenie czy rozwiązania układu rozszerzonego $\Phi \wedge \Psi$ istnieją, a więc badanie warunków zgodności układów nadokreślonych. Ponieważ każde rozwiązanie układu $\Phi \wedge \Psi$ jest również rozwiązaniem układu Φ , zatem sensownie jest nazywać $\Phi \wedge \Psi$ podukładem układu Φ . Zasada selekcji podukładów danego układu przyjęta w prezentowanej pracy opiera się o wybór pewnej grupy modów, tzn. więzy Ψ

są wybierane w ten sposób, że eliminują z układu Φ wszystkie mody nie należące do wybranej grupy. Dla przykładu, równania magneto-gazodynamiki z przewodnictwem elektrycznym $\sigma = \infty$ posiadają cztery podstawowe grupy modów: mody entropowe, dwie grupy modów Alfvena oraz mody magnetoakustyczne. Jeśli do równań układu dodać równania $\frac{\partial u^i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) u^i = 0$, gdzie u^i - występujące w układzie MGD zmienne zależne, wówczas dodanie tych równań eliminuje z układu mody Alfvena i mody magnetoakustyczne. Podobnie, jeśli dołożyć więzy $\Psi : \frac{\partial u^i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) u^i = \frac{\epsilon}{4\pi\rho} (\vec{H} \cdot \nabla) u^i$ ($\epsilon = \pm 1$, \vec{v} , \vec{H} - prędkość i pole magnetyczne), wówczas pozostają w układzie jedynie mody Alfvena (typu ξ) itd. W ten sposób można badać własności przepływów generowanych przez zadaną z góry grupę modów, w szczególności można pytać jakie zagadnienia początkowo-brzegowe mogą być realizowane w ramach danej grupy modów, bądź też jaka jest najmniejsza grupa modów, w ramach której można zrealizować dane zagadnienie. Analiza sprzężeń jakie mogą wystąpić pomiędzy modami polami oraz możliwość ewentualnej redukcji (uproszczenia) układu równań, jakkolwiek wydawałyby się różne z punktu widzenia danego zagadnienia początkowo-brzegowego, są ze sobą ściśle związane. Ilustruje to następujące intuicyjne rozumowanie. Jeśli rozważamy np. zagadnienie początkowe, wówczas może się zdarzyć, że nie wszystkie mody (pola) występują w warunku początkowym. W trakcie zaś ewolucji układu będą generowane jedynie te mody (pola), które są sprzężone z aktualnie istniejącymi. W ten sposób pewne mody (pola) mogą pozostać niewzbudzone, a odpowiednie zmienne będą miały przez cały czas wartość stałą (np. ω w przykładzie równań Eulera). Oznacza to, że w takim przypadku układ równań powinien dać się <http://www.iaa.org.pl> uprościć do układu prostszego, np.

z mniejszą liczbą zmiennych zależnych.

Niniejsza praca poświęcona jest w zasadzie analizie nieliniowych sprzężeń, jakie mogą wystąpić pomiędzy modami. Początkowe rozdziały poświęcone są układom z dwiema zmiennymi niezależnymi, gdzie jako reguła, niewzbudzenie pewnych modów oznacza redukcję wyjściowego układu do układu podobnego, ale z mniejszą liczbą szukanых funkcji. Duża część pracy poświęcona jest rozwiązaniom dwumodowym, które, jak pokazujemy, w przypadku modów rzeczywistych mogą być interpretowane jako opisujące oddziaływania dwóch fal Riemanna. Fale Riemanna są rozwiązaniami jednomodowymi.

Badanie w rozdziale 10 warunków zgodności zapewniających elastyczne oddziaływanie fal Riemanna, a więc zapewniających istnienie odpowiednich rozwiązań dwumodowych, prowadzi do wyróżnienia pewnej klasy układów równań cząstkowych. Związek dyspersyjny dla tych układów jest formą kwadratową, czy też ogólniej - zawiera gałąź kwadratową powodującą pojawienie się pewnej metryki, a wspomniane warunki zgodności prowadzą do pojawienia się koneksji afinicznej na rozmaitości zmiennych zależnych (rozd. 11). Niezgodność obu struktur mierzona różnicą pomiędzy wspomnianą koneksją a koneksją metryczną może być uważana za miarę nieliniowości układu. Warunek elastycznego oddziaływania sprowadza się natomiast do warunku znikania tensora torsji rozważanej koneksji (rozd. 12).

Istnienie rozwiązań dwumodowych oznacza istnienie pewnych dwuwymiarowych podrozmaitości (zbiór wartości rozwiązania) rozmaitości zmiennych zależnych. Metryka g na rozmaitości indukuje metrykę \tilde{g} na podrozmaitości. Dywergencja tensora \tilde{g} (względem koneksji niemetrycznej) mierzy stopień sprzężenia modów. Znikanie jej oznacza, że w pewnym układzie współrzędnych mamy do czynienia z liniową superpozycją fal Riemanna.

Rozdział 13 poświęcony jest uogólnieniom rozważań poprzednich rozdziałów na przypadek modów zespolonych. Mody takie w sposób naturalny pojawiają się w układach eliptycznych czy też częściowo eliptycznych. Można je jednak wprowadzać również w przypadku układów hiperbolicznych.

Badane w pracy zagadnienia prowadzą do układów nadokreślonych dlatego też w rozdziale 14 omawiana jest teoria formalnej całkowalności układów nadokreślonych, w szczególności szeroko omawiane jest pojęcie układów inwolutywnych. Rozdział 15 zawiera kryteria inwolutywności dla układów wielomodowych. Pokazujemy tu także, że rozważane w poprzednich rozdziałach układy są układami w inwolucji, jeśli tylko spełnione są podane tam warunki zgodności. Omawiane są tam również rozwiązania będące rezultatem oddziaływania k -fal Riemanna dla dowolnego k .

Praca niniejsza jest rozszerzeniem pracy p.t. "Geometria w równaniach różniczkowych cząstkowych" (1979), w stosunku do której zawiera obszerniejsze omówienia rozważanych problemów, w szczególności obszerniej omawiane są mody zespolone, a także zawiera szereg przykładów z gazodynamiki i magnetogazodynamiki ilustrujących rozważania teoretyczne. Ponadto zawiera dwa dodatkowe rozdziały 14 i 15 dotyczące badania warunków zgodności i formalnej całkowalności układów nadokreślonych.

Historycznie pierwsze rezultaty dotyczące zasadniczego nurtu niniejszej pracy można związać z G.B.Riemannem, który badał rozchodzenie się fal o skończonej amplitudzie w ośrodku gazowym. Riemann (1860) zauważył wtedy, że istnieją rozwiązania typu fal wędrujących oraz, że na rozwiązaniach tych odpowiednie kombinacje zmiennych zależnych są stałe. Funkcje te, które można przyjąć za nowe zmienne zależne, zostały nazwane potem inwariantami

Riemanna, a analiza zapoczątkowana przez Riemanna doprowadziła do rozwoju metody charakterystyk szeroko stosowanej w problemach dwuwymiarowych (Mises 1958, Courant and Friedrichs 1948).

W trakcie badań nad mechaniką płynów ściśliwych poszukiwano również rozwiązań specjalnych, między innymi rozwiązań ze zdegenerowanym hodografem. Fale rozpatrywane przez Riemanna mają hodograf zbiór wartości rozwiązania jednowymiarowy, stąd nazwa - fale proste. Giese (1951), Pogodin, Sučkov, Janienko (1958, 1961) i Sidorov (1959) badali rozwiązania z hodografem dwuwymiarowym - fale podwójne dla układu równań gazodynamiki. Giese stwierdził możliwość istnienia dwóch różnych rodzajów fal podwójnych: hiperbolicznych i eliptycznych. Pogodin i in. podali warunki jakie musi spełniać dwuwymiarowa powierzchnia, aby mogła być hodografem fali podwójnej dla równań gazodynamiki.

M. Burnat (1967, 1968, 1969, 1970, 1972) w kolejnych próbach uogólnienia metody charakterystyk na przypadek równań hiperbolicznych (czy ogólniej nieeliptycznych) używa także pojęcia hiperbolicznej fali podwójnej i po raz pierwszy podał warunki zgodności (warunki istnienia) dla podwójnych fal hiperbolicznych wyrażone w języku wektorów charakterystycznych i uogólnionych inwariantów Riemanna. Burnat rozpatrywał również możliwość istnienia rozwiązań opisywanych przez większą niż dwa liczbę inwariantów Riemanna (fale wielokrotne), a także analizował ich własności w oparciu, między innymi, o własności różniczki rozwiązania. W rozprawie doktorskiej (1972A) oraz w innych pracach (1971A, B, 1972B, 1974, 1975, 1978) autor, opierając się o wyniki Burnata, rozwija dalej tę tematykę w szczególności interesującą ideę algebraizacji różniczki rozwiązania, prezentując jednocześnie punkt widzenia bliższy przedstawionemu przez Riemanna i interpretując odpo-

wiednio rozwiązania jako będące rezultatem oddziaływania fal Riemanna. Zastosowanie cartanowskiego aparatu form zewnętrznych i pozwoliło na szybkie i efektywne znajdowanie warunków zgodności dla ciągle pojawiających się w rozważaniach układów nadokreślonych. Rezultaty zawarte we wspomnianych pracach dotyczą w zasadzie układów ^{jednorodnych} jedynie ostatnia część rozprawy doktorskiej autora (1972A) zawiera pewne uogólnienia na przypadek niejednorodny, co zostało potem rozwinięte bardziej systematycznie w pracy Grundlanda (1978).

Analiza hiperbolicznych fal podwójnych dla układu równań dynamiki gazów (Peradzyński 1972A, X) doprowadziła autora do tego samego, jak się okazało, równania co Pogodina i inn. (1958), a jego postać sugerowała związek ze średnią krzywizną. Dokładniejsze zbadanie tego doprowadziło do ujawnienia prezentowanej w niniejszej pracy geometrycznej struktury rozważanych problemów co było powodem dalszej zmiany punktu widzenia autora. Początkowo mianowicie prace, tak jak prace innych autorów, prowadzone były pod kątem poszukiwania i konstrukcji specjalnych klas rozwiązań co w kilku przypadkach przyniosło pozytywne rezultaty (Peradzyński 1975, Kucharczyk, Peradzyński, Zawistowska 1975). Korzystając z ogólnych rezultatów Zajączkowski (1975) skonstruował szereg interesujących rozwiązań równań magnetogazodynamiki.

Prezentowany tu obecnie aparat pojęciowy, jakkolwiek może być użyty do konstrukcji specjalnych klas rozwiązań, był rozwijany przede wszystkim pod kątem klasyfikacji i scharakteryzowania wpływu nieliniowości na zachowanie się rozwiązań. Przez wprowadzenie pojęcia modu zespolonego można było niemal automatycznie przenieść wiele z rezultatów na ^{układy} eliptyczne. Mody zespolone mogą być też z powodzeniem stosowane w przypadku układów hiper-

bolicznych, co także w sposób istotny rozszerza zakres stosowalności aparatu. Wiele z rozważanych w pracy problemów wymaga naszym zdaniem rozwinięcia i dalszych badań. Pozostaje np. otwartą sprawą interpretacji eliptycznych fal podwójnych.

Autor pragnie wyrazić podziękowanie mgr E. Zawistowskiej, bez której czynnego i wytrwałego zaangażowania trudno byłoby sobie wyobrazić, aby praca ta (przynajmniej w obecnym stanie i czasie) mogła ujrzeć światło dzienne. Autor jest również wdzięczny dr P. Kucharczykowi za liczne dyskusje dotyczące klasycznych wyników Janeta, Riquiera i Cartana dla układów nadokreślonych.

Przez cały czas pisania tej pracy prof. W. Fiszdon okazywał wielką życzliwość i zachętę dla tego przedsięwzięcia co dla autora stanowiło istotne wsparcie psychologiczne. Uwagi prof. Fiszdona inspirowały też w kierunku zilustrowania zasadniczego toku wykładu przykładami z dziedziny gazodynamiki.

Oznaczenia.

Jeśli H jest rozmaitością różniczkowalną, wtedy $T_u H$ oznacza przestrzeń styczną do H w punkcie $u \in H$.

TH oznacza wiązkę styczną rozmaitości różniczkowalnej H .

\underline{TH} to zbiór (lokalnych) cięć wiązki TH (lub lepiej snop cięć TH).

Ogólnie \underline{E} oznacza snop cięć wiązki E .

Jeśli $\mathcal{G} \hookrightarrow H$ - podrozmaitość rozmaitości H , $i: \mathcal{G} \rightarrow H$ włożenie,

wtedy metryka na H indukuje metrykę na \mathcal{G} oznaczaną przez g_u ,

a odpowiednio g_u^{-1} - kontrawariantny tensor metryczny na \mathcal{G} , wów-

czas można go przenieść na obraz $i(\mathcal{G})$ przy pomocy odwzorowania

stycznego $i_* g_u^{-1} =: g^*$. W ten sposób $g^*(u) \in S^2 T_u H$, gdzie $S^k V$

oznacza k -krotny symetryczny iloczyn tensorowy przestrzeni wektor-

rowej V , $S^k V \subset \bigotimes_{i=1}^k V$.

Jeśli $\mathcal{G} \hookrightarrow H$ - podrozmaitość, V - koneksja liniowa na H i je-

śli dla każdego $u \in \mathcal{G}$ dany jest (w sposób gładki) rozkład przes-

trzeni stycznej $T_u H = T_u \mathcal{G} \oplus N_u$, a $P_{\mathcal{G}}$, P_N oznaczają odpowied-

nie projekcje, wówczas dla pól X, Y stycznych do \mathcal{G} kładziemy

$h(X, Y) := P_N V_X Y$ bądź $h(X, Y) := V_X Y - V_X^{\parallel} Y$, gdzie $V_X^{\parallel} Y = P_{\mathcal{G}} V_X Y$

jest zrzutowaną na \mathcal{G} koneksją V .

Jeśli $E \rightarrow X$, $V \rightarrow Y$ - wiązki wektorowe, X, Y - odpowiednio

rozmaitości bazowe, wówczas przez $E \otimes V$ rozumiemy wiązkę $E \otimes_{X \times Y} V$

nad rozmaitością bazową $X \times Y$ (tzn. włóknem) nad punktem

$(x, y) \in X \times Y$ jest $E_x \otimes V_y$.

$[\delta_1, \delta_2]$ - komutator pól wektorowych $\delta_1, \delta_2 \in TH$

$$[\delta_1, \delta_2]^j = \delta_1^r \frac{\partial}{\partial u^r} \delta_2^j - \delta_2^r \frac{\partial}{\partial u^r} \delta_1^j.$$

$\text{Lin}\{a, b, \dots, c\}$ - przestrzeń liniowa generowana przez elementy $a,$

b, \dots, c .

Jeśli X, \dots, Y są polami wektorowymi, wówczas $\text{Lin}_\alpha \{X, \dots, Y\}$ oznacza moduł nad pierścieniem α generowany przez pola X, \dots, Y .

$f_{, \delta}$ - pochodna wzdłuż wektora δ tzn.

$$f_{, \delta} = \delta^i \frac{\partial}{\partial u^i} f .$$

$f_{[p, \nu]}$ - antysymetryzacja we wskaźnikach p, ν .

$f_p z^p = f_1 z^1 + \dots + f_n z^n$ - konwencja sumacyjna.

$f_{(p)} z^p$ oznacza, że nie należy sumować po p .

E - przestrzeń afiniczna zmiennych x^1, x^2, \dots, x^n modelowana na przestrzeni wektorowej TE .

T^*E - przestrzeń sprzężona (dualna) do TE .

α - pierścień funkcji gładkich rzeczywistych na rozmaitości.

$\alpha^{\mathbb{C}}$ - pierścień funkcji o wartościach zespolonych.

Przez $\underline{T^*E}$ oznaczymy snop cięć wiązki $H \times T^*E \rightarrow H$ (lub zbiór lokalnych odwzorowań $H \rightarrow T^*E$).

Podobnie $\underline{TH \otimes T^*E}$ oznacza snop cięć wiązki $TH \otimes T^*E$.

1. Równania liniowe i półliniowe.

Zawarte we wstępie intuicyjne rozważania dają się szczególnie prosto zilustrować na przykładzie równań liniowych ze stałymi współczynnikami z dwiema zmiennymi niezależnymi. Niech A i B będą odwzorowaniami liniowymi, ciągłymi pewnej przestrzeni wektorowej topologicznej rzeczywistej H w siebie

$$A : H \longrightarrow H, \quad B : H \longrightarrow H.$$

Możemy rozważać różniczkowalne odwzorowania $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow H)$, spełniające następujące równanie cząstkowe

$$(1.1) \quad u_t + Au_x = Bu.$$

W konkretnych przykładach H jest na ogół skończonego wymiaru i odwzorowania A i B można utożsamiać z macierzami. Zasadnicza część wiedzy o układach równań postaci (1.1), a więc np. wiedza o typach poprawnie postawionych zagadnień początkowych, czy ogólniej brzegowo-początkowych pochodzi z badania algebraicznych własności odwzorowania A . Własności te są również niezbędne przy dowodach twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności. I tak np. jeśli A jest odwzorowaniem diagonalizowalnym rzeczywistej przestrzeni Hilberta w siebie i posiada rzeczywiste widmo (wartości własne w przypadku macierzy 1×1), wówczas układ nosi nazwę układu hiperbolicznego, zagadnienie Cauchy'ego jest poprawne - posiada jedyne rozwiązanie stabilne ze względu na zmianę zarówno warunków początkowych jak i operatora B (Kato 1975). Drugim skrajnym przypadkiem, o którym wiedza nasza jest stosunkowo duża, jest przypadek eliptyczny, kiedy macierz A nie posiada rzeczywistych wartości własnych (Bojarski 1966).

Oznacza to automatycznie, że 1 jest liczbą parzystą. W ogólności jednakże wektor po prawej stronie równania odgrywa również poważną rolę w klasyfikacji równania, a co za tym idzie, w poprawności odpowiednich zagadnień brzegowo-początkowych. Świadczy o tym chociażby następujący przykład

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t - \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 1, 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} b^1(u) \\ b^2(u) \end{pmatrix}.$$

Jeśli przyjmiemy, że $b^1 \equiv b^2 \equiv 0$, wówczas układ redukuje się do następującego

$$u_t^1 = 0, \quad u_t^2 = u_x^1,$$

którego ogólnym rozwiązaniem jest

$$u^1 = \varphi(x), \quad u^2 = t\varphi(x) + \psi(x),$$

gdzie $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$. Jeśli natomiast przyjmiemy $b^1(u) = u^2$, $b^2(u) \equiv 0$, wówczas dostaniemy układ

$$u_t^1 = u^2, \quad u_t^2 = u_x^1$$

równoważny równaniu $u_{tt}^1 = u_x^1$ typu przewodnictwa, dla którego zagadnienie Cauchy'ego

$$u^1(0, x) = \varphi(x), \quad u^2(0, x) = \psi(x) \{= u_t^1(0, x)\}$$

nie jest poprawnie postawione. Istotnie, dla każdego $t > 0$ ciąg rozwiązań

$$u^1 = e^{-\sqrt{n}} \operatorname{Re} e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}} nt - in^2 x}$$

$$u^2 = n e^{-\sqrt{n}} \operatorname{Re} \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}} nt - in^2 x}$$

jest rozbieżny przy $n \rightarrow \infty$, podczas gdy odpowiadający ciąg warunków Cauchy'ego $u^{(n)1}(0,x)$, $u^{(n)2}(0,x)$ zbiega do zera jednostajnie wraz ze wszystkimi pochodnymi.

Zajmiemy się teraz związkami między własnościami odwzorowań A i B oraz własnościami układu równań (1.1).

DEFINICJA 1.1 Podprzestrzeń domknięta $i : N \rightarrow H$ jest podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowania A , jeśli $A \cdot i(N) \subset i(N)$.

Niech $i : N \rightarrow H$ będzie domkniętą podprzestrzenią niezmienniczą odwzorowań A i B równocześnie. Wówczas mamy

TWIERDZENIE 1.1 Układ równań cząstkowych (1.1) indukuje pewien układ równań na N - układ obcięty do N .

Istotnie, odwzorowanie inkluzji i jest odwracalne na obrazie $i(N)$, zatem dla $\tau \in C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow N)$ możemy napisać

$$i\tau_t + A \cdot i\tau_x = B \cdot i\tau,$$

ale $A \cdot i(N) \subset i(N)$, $B \cdot i(N) \subset i(N)$ skąd wynika, że

$$(1.2) \quad \tau_t + i^{-1} \cdot A \cdot i\tau_x = i^{-1} \cdot B \cdot i\tau.$$

Warto w tym miejscu zauważyć, że liniowość prawej strony nie jest istotna w tych rozważaniach. W gruncie rzeczy można wyjść od równania półliniowego

$$(1.3) \quad u_t + Au_x = b(u),$$

gdzie o b zakładamy, że jest ciągłym odwzorowaniem H w siebie, wówczas zachodzi

TWIERDZENIE 1.2 Jeśli $i : N \rightarrow H$ - domknięta podprzestrzeń niezmiennicza odwzorowania A , oraz $b \cdot i(N) \subset i(N)$, wtedy równanie (1.3) indukuje na N równanie obcięte

$$(1.4) \quad \tau_t + i^{-1} A i \tau_x = i^{-1} b(i(\tau)).$$

W przypadku skończenie wymiarowej podprzestrzeni N , $i(N)$ jest rozpinana przez skończoną liczbę wektorów X_1, \dots, X_p , można zatem napisać

$$(1.5) \quad u = X_\alpha \tau^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, p,$$

ale $A X_\alpha = a_\alpha^\beta X_\beta$, $b(X_\alpha \tau^\alpha) = X_\beta b^\beta(\tau)$. Po podstawieniu związku (1.5) do układu (1.4) i porównaniu wyrażań przy niezależnych wektorach dostajemy ostatecznie

$$(1.6) \quad \tau_t + a \tau_x = \tilde{b}(\tau),$$

gdzie $a = (a_\alpha^\beta)$, $\tilde{b} = (b^\beta(\tau))$, $\tau = (\tau^\alpha)$.

Przypuśćmy teraz, że problem Cauchy'ego

$$(1.7) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1$$

dla układu (1.3) ma jednoznaczne rozwiązanie. Wymaga to zwykle silniejszych założeń, niż ciągłość odpowiednich odwzorowań A i B . Może się tak zdarzyć, że krzywa (obraz odwzorowania)

$$\mathbb{R}^1 \ni x \longrightarrow u_0(x) \in H$$

leży całkowicie w jednej z podprzestrzeni niezmienniczych odwzorowania A np. w $i : N \rightarrow H$ takiej, że założenia twierdzenia 1.2 są spełnione. Wtedy problem (1.7) indukuje analogiczny problem dla układu obciętego (1.4). Istotnie, jest on dany odwzorowaniem

$$\mathbb{R}^1 \ni x \longrightarrow i^{-1} u_0(x) \in N.$$

Pozwala to rozwiązać problem wychodząc z prostszego układu, niż układ (1.3).

Podobnie można rozstrzygać inne zagadnienia. Weźmy jeszcze

dla przykładu zagadnienie Dirichleta dla układu drugiego rzędu

$$(1.8) \quad u_{yy} + Au_{xx} = b(u).$$

Zauważmy przede wszystkim, że twierdzenie 1.2 pozostaje w mocy dla układu dowolnego rzędu postaci

$$\frac{\partial^p}{\partial y^p} u + A \frac{\partial^q}{\partial x^q} u = b(u).$$

Jeśli teraz $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oraz $u|_{\partial\Omega}$ zadane, wówczas znowu może się zdarzyć, że obraz warunków brzegowych leży w pewnej przestrzeni niezmienniczej spełniającej założenia twierdzenia 1.2, co pozwala raz jeszcze sprowadzić rozważania do układu obciętego

$$\tau_{yy} + i^{-1}A i\tau_{xx} = i^{-1}b(i\tau)$$

z warunkiem

$$\tau|_{\partial\Omega} = i^{-1}u|_{\partial\Omega}.$$

Doświadczenia powyższe pokazują, że znajomość podprzestrzeni niezmienniczych odwzorowania A może być wykorzystana przy rozwiązywaniu konkretnych problemów.

Aby uniknąć pewnych subtelności skoncentrujemy się teraz na przypadku skończone wymiarowej przestrzeni rzeczywistej H . Można dokonać kompleksyfikacji przestrzeni H kładąc $H^{\mathbb{C}} = H + iH$, gdzie $i = \sqrt{-1}$, $a \in H^{\mathbb{C}} \iff a = a_1 + ia_2$, $a_1, a_2 \in H$. W naturalny sposób określa się mnożenie elementów z $H^{\mathbb{C}}$ przez liczby zespolone otrzymując przestrzeń wektorową nad ciałem liczb zespolonych \mathbb{C} . Odwzorowanie A można rozszerzyć na $H^{\mathbb{C}}$ kładąc $Aa = Aa_1 + iAa_2$. Wówczas, jak wiadomo (Mostowski, Stark 1967), dla każdego $\mu \in \mathbb{C}$, $p = 1, 2, \dots$ podprzestrzenie $H^p_{\mu} = \text{Ker}(A - \mu I)^p$ są podprzestrzeniami niezmienniczymi odwo-

rowania A , $H^p_\mu \subset H^c$. W istocie, jedynie dla μ będących pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $\det(A - \mu I) = 0$, podprzestrzenie H^p_μ są nietrywialne.

DEFINICJA 1.2 $H_\mu = \sum_p H^p_\mu$ nosi nazwę uogólnionej przestrzeni własnej odpowiadającej wartości własnej μ .

Jeśli $u \in H_\mu$, $u \neq 0$, wówczas wektory u, Au, A^2u, \dots rozpinają nad C pewną podprzestrzeń przestrzeni H^c .

DEFINICJA 1.3 Podprzestrzenie tego typu będziemy nazywać podprzestrzeniami elementarnymi.

DEFINICJA 1.4 Parę (μ, M) , gdzie M jest jakąkolwiek podprzestrzenią elementarną $M \subset H_\mu$ będziemy nazywać modu, μ - prędkością oraz M - polaryzacją modu.

Oznaczmy przez $Sp A = \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ zbiór wartości własnych odwzorowania A . Dowolne rozwiązanie $u(t, x)$ można rozłożyć na mody, mówi o tym

LEMAT 1.1 Jeśli $u(t, x)$, gdzie $(t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest rozwiązaniem układu (1.3), wówczas dla każdego $(t, x) \in \Omega$ możemy znaleźć takie wektory $\gamma_\mu \in H_\mu$, $\mu \in Sp A$, że

$$(1.9) \quad du = \sum_{\mu \in Sp A} (\gamma_\mu - \Delta \gamma_\mu dt) + b(u) dt.$$

Istotnie, $H^c = \bigoplus_p H_\mu$ zatem wektor u_x można rozłożyć jednoznacznie na składowe w podprzestrzeniach H_μ , $u_x = \sum_{\mu \in Sp A} \delta_\mu$, $\delta_\mu \in H_\mu$, skąd na podstawie równania (1.3) mamy

$$u_t = -Au_x + b = - \sum_{\mu \in Sp A} \Delta \delta_\mu + b,$$

co dowodzi prawdziwości lematu 1.1.

Jeśli niektóre spośród γ_μ są równe zero, wtedy powiemy,

że rozwiązanie nie zawiera odpowiednich modów.

Okazuje się, że w pewnych przypadkach wygodnie jest rozważać zamiast układu równań równoważny mu układ form zewnętrznych.. Niech wektory $\gamma_{\alpha_{\mu}}, \alpha_{\mu} = 1, \dots, \dim H_{\mu}$ stanowią bazę w przestrzeni H_{μ} dla każdego $\mu \in \text{Sp } A$, wówczas mamy

TWIERDZENIE 1.3 Układ (1.3) jest równoważny następującemu układowi Pfaffa

$$(1.10) \quad du = \text{Re} \sum_{\substack{\alpha_{\mu}=1, \dots, \dim H_{\mu} \\ \mu \in \text{Sp}^+ A}} \xi^{\alpha_{\mu}} (\delta_{\alpha_{\mu}} dx - A \delta_{\alpha_{\mu}} dt) + b dt,$$

gdzie $\text{Sp}^+ A = \{ \mu \in \text{Sp } A; \text{Im } \mu \geq 0 \}$ w przestrzeni zmiennych $u, \xi^{\alpha_{\mu}}, t, x$, gdzie zmienne t, x są traktowane jako zmienne niezależne.

Warunek niezależności t, x oznacza, że interesują nas tylko takie rozwiązania całkowe układu (1.10), które mogą być sparametryzowane przez t, x . Dla dowodu równoważności wystarczy zauważyć, że jeśli $u(t, x)$ spełnia (1.10), wówczas

$$u_t = -\text{Re} \sum_{\substack{\alpha_{\mu}=1, \dots, \dim H_{\mu} \\ \mu \in \text{Sp}^+ A}} \xi^{\alpha_{\mu}} A \delta_{\alpha_{\mu}} + b$$

$$u_x = \text{Re} \sum_{\mu \in \text{Sp}^+ A} \xi^{\alpha_{\mu}} \delta_{\alpha_{\mu}},$$

co spełnia również układ (1.3). Z drugiej zaś strony na podstawie lematu 1.1 każde rozwiązanie układu (1.3) może być reprezentowane w postaci (1.9), a ponieważ du jest rzeczywiste, zatem również $\delta_{\mu} + \delta_{\bar{\mu}}$ musi być rzeczywiste, skąd $\delta_{\bar{\mu}} = \overline{\delta_{\mu}}$, a co za tym idzie $2 \text{Re } \delta_{\mu} = \delta_{\mu} + \delta_{\bar{\mu}}$, a więc dla rozwiązań rzeczywistych sumę $\sum_{\mu \in \text{Sp } A}$ we wzorze (1.9) można zastąpić przez $2 \text{Re} \sum_{\mu \in \text{Sp}^+ A}$, co dowodzi równoważności postaci (1.3) i (1.10).

Wzór (1.10) przyjmuje szczególnie przyjemną postać w przypadku, gdy A jest odwzorowaniem diagonalizowalnym co oznacza, że dla każdego $\delta \in H_\mu$, $A\delta = \mu\delta$, $\mu \in \text{Sp } A$. Mamy wtedy

$$(1.11) \quad du = \text{Re} \sum_+ \xi^\mu \delta_{\alpha_\mu} \otimes \lambda^\mu + \delta_0 \otimes \lambda^0,$$

gdzie oznaczyliśmy $\lambda^\mu = -\mu dt + dx$, $\delta_0 \otimes \lambda^0 = b dt$ oraz

$$\sum_+ = \sum_{\substack{\alpha_\mu=1, \dots, \dim H_\mu \\ \mu \in \text{Sp}^+ A}}.$$

W przypadku układu liniowego jednorodnego

$$(1.12) \quad u_t + Au_x = 0$$

nie ma sprzężeń między modami co oznacza, że ogólne rozwiązanie jest sumą rozwiązań odpowiadających poszczególnym modom. Istotnie, rozkładając wektor rozwiązania $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ na sumę wektorów z odpowiednich uogólnionych podprzestrzeni własnych H_μ , dostajemy

$$u(t, x) = \sum_\alpha u_\alpha(t, x), \quad u_\alpha \in H_\alpha.$$

Jasne, że ponieważ dla wszystkich $(t, x) \in \Omega$, $Au_\alpha \in H_\alpha$ zatem każdy ze składników u_α , $\alpha \in \text{Sp } A$ musi również spełniać równanie (1.12). Dla każdego kompletu liczb c^α kombinacja $u_c = \sum c^\alpha u_\alpha$ spełnia (1.12). Jeśli jednak układ ma nieznikającą prawą stronę jak np. układ (1.1), wtedy nie dla wszystkich liczb $c = (c^1, \dots, c^k)$ u_c jest rozwiązaniem. Jest to skutek występowania sprzężeń pomiędzy modami. Jeżeli rozłożyć wektor $Bu = \sum B_\alpha u$, $B_\alpha u \in H_\alpha$, wtedy

$$B_\alpha u = B_\alpha^\sigma u_\sigma, \quad u_\sigma \in H_\sigma.$$

Jeśli rozwiązanie $u(t, x)$ ma być rzeczywiste, wówczas $B_{\alpha}^{\sigma} = B_{\alpha}^{\bar{\sigma}}$, gdzie $\sigma, \bar{\sigma}$ są sprzężonymi wartościami własnymi, wystarczy zatem znajomość macierzy B_{α}^{σ} dla $\sigma \in \text{Sp}^+ A$. Macierz B_{α}^{σ} nazwiemy macierzą sprzężeń między modami rozwiązania $u(t, x)$. W przypadku równania półliniowego możemy zdefiniować macierz sprzężeń poprzez macierz sprzężeń układu zlinearyzowanego.

2. Równania nieliniowe.

Przejdziemy teraz do rozważań nad układami nieliniowymi typu

$$(2.1) \quad u_t + A(u)u_x = b(u).$$

Wygodnie jest tym razem rozpatrywać u jako odwzorowanie różniczkowalne przestrzeni kartezjańskiej \mathbb{R}^2 w pewną rozmaitość różniczkowalną H (np. klasy C^∞)

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow H, \quad \dim H = 1.$$

Natomiast $A(u)$ możemy nadać wtedy sens liniowego odwzorowania przestrzeni stycznej $T_u H$ w siebie

$$A(u) : T_u H \longrightarrow T_u H.$$

W ten sposób nadajemy pewien sens geometryczny układowi (2.1) i nie jesteśmy skrępowani żadnym konkretnym układem współrzędnych, a rezultaty naszych rozważań będą słuszne, jeżeli dokonać jakiegokolwiek nieosobliwej (C^∞) zamiany współrzędnych $u^j \rightarrow u^{j'}$. Rozważania nasze będą miały jednak charakter lokalny, ograniczymy się przede wszystkim do punktów regularnych na rozmaitości H .

DEFINICJA 2.1 $u_0 \in H$ będziemy nazywać punktem regularnym, jeśli istnieje otoczenie $\mathcal{O}_{u_0} \subset H$, $u_0 \in \mathcal{O}_{u_0}$ takie, że

$$a/ \text{rzęd } A(u) = \text{const}, \quad u \in \mathcal{O}_{u_0},$$

b/ $u \rightarrow H_\mu(u)$ jest gładką dystrybucją dla każdego $\mu \in \text{Sp } A(u)$,
 $H_\mu(u) \subset (T_u^{\mathbb{C}} H)$ jest tu uogólnioną podprzestrzenią własną odwzorowania $A(u)$.

Podobnie, jak w przypadku układów liniowych, czy też półliniowych, możemy tu definiować mody rozpatrując odpowiednie

podprzestrzenie niezmiennicze. Podprzestrzenie te są jednak zdefiniowane osobno dla każdego punktu rozmierności. Trzeba zatem umieć te lokalne podprzestrzenie ułożyć w pewną podrozmierność niezmienniczą.

DEFINICJA 2.2 Dystrybucję $H \supset \mathcal{O} \ni u \longrightarrow N_u$ nazwiemy całkowną, jeśli przez każdy punkt $p \in \mathcal{O}$ przechodzi podrozmierność H_N taka, że $T_u H_N = N_u$, $u \in H_N \cap \mathcal{O}$.

Oczywiste jest, że nie każda dystrybucja jest całkowna. Sytuację wyjaśnia twierdzenie Frobeniusa (Sternberg 1964)

TWIERDZENIE 2.1 Gładka dystrybucja $u \longrightarrow N_u$ jest całkowna (lokalnie) wtedy i tylko wtedy, kiedy dla każdych gładkich pól $X_1, X_2 \in N$ ich komutator leży z powrotem w N .

$$(2.2) \quad X_1, X_2 \in N \iff [X_1, X_2] \in N.$$

Inaczej mówiąc, pola wektorowe dystrybucji całkownej stanowią moduł Liego. Oczywiście warunek całkowności (2.2) wystarczy jedynie sprawdzić dla niezależnych pól rozpinających N .

DEFINICJA 2.3 Podrozmierność $i : H' \longrightarrow H$ będziemy nazywać podrozmiernością niezmienniczą odwzorowania A , jeśli dla każdego $\tau \in H'$ $i_*(T_\tau H') \subset T_{i(\tau)} H$ jest przestrzenią niezmienniczą odwzorowania A .

Może się również zdarzyć, że pole wektora b jest styczne do H' tzn., że dla każdego $\tau \in H'$

$$(2.3) \quad b(i(\tau)) \in i_*(T_\tau H').$$

Mamy wówczas analogicznie jak w przypadku liniowym

TWIERDZENIE 2.2 Jeśli H' jest podrozmiernością niezmienniczą oraz jeśli zachodzi (2.3), wówczas układ równań (2.1) indukuje

układ obcięty do H' .

Istotnie, podobnie jak w przypadku liniowym dany jest on przez

$$(2.4) \quad \tau_t + i_*^{-1} \circ A \circ i_*(\tau) \tau_x = i^{-1} b(i(\tau)).$$

Jeśli i jest zadane odwzorowaniem

$$H' \ni (\tau^1, \dots, \tau^k) \longrightarrow f(\tau^1, \dots, \tau^k) = u \in H,$$

wówczas niezmienniczość podprzestrzeni H' oznacza istnienie macierzy $k \times k$ (a_r^s) takiej, że

$$A(f) f_{, \tau^r} = a_r^s f_{, \tau^s}.$$

Podstawiając relację $u = f(\tau)$ do równań (2.1) otrzymamy

$$f_{, \tau^r} \tau_t^r + a_s^r f_{, \tau^r} \tau_x^s = b,$$

co wobec niezależności wektorów $f_{, \tau^r}$, przy założeniu, że $b(f(\tau)) = \beta^s(\tau) f_{, \tau^s}$, prowadzi do "zredukowanego" układu na τ

$$(2.4a) \quad \tau_t + a(\tau) \tau_x = \beta.$$

Podobnie jak dla równań liniowych tak i tutaj, rozwiązując konkretny problem brzegowy (początkowy) można w wielu przypadkach układ zredukować, znajdując najmniejszą podprzestrzeń niezmienniczą "zawierającą" dany problem i spełniającą warunek (2.3). Oczywiście, dla układu nieliniowego (2.1) pozostają w mocy lemat 1.1 oraz twierdzenie 1.3 o reprezentacji układu, przy czym występujące tam δ, λ zależą teraz od punktu rozmaitości.

W dalszym ciągu zajmiemy się sprawą sprzężeń pomiędzy modami dla układów diagonalizowalnych tj. takich, że dla każdego $\delta \in H_\mu$, $A\delta = \mu\delta$, $\mu \in \text{Sp } A$. Uogólnione przestrzenie własne skła-

dają się więc tylko z wektorów własnych. Układ (2.1) możemy zatem napisać zgodnie z nieliniową wersją twierdzenia 1.3 w postaci

$$(2.5) \quad du = \operatorname{Re} \sum_{\mu} \xi^{\alpha_{\mu}} \delta_{\alpha_{\mu}} \otimes \lambda^{\mu} + b \, dt, \quad \xi^{\alpha} - \text{zespólone.}$$

Dla wygody rozpatrzmy układ jednorodny $b = 0$. Hiperboliczne układy niejednorodne są rozważane przez Grundlanda (1978). Podobnie nieliniowa wersja lematu 1.1 mówi, że w istocie wystarczy wybrać dla każdego modu po jednym wektorze $\delta_{\mu} \in H_{\mu}$ co prowadzi do układu

$$(2.6) \quad du = \operatorname{Re} \sum \xi^{\mu} \delta_{\mu} \otimes \lambda^{\mu}.$$

Jeśli niektóre z $\xi^{\mu} = 0$ wówczas powiemy, że rozwiązanie nie zawiera odpowiednich modów.

Mając do dyspozycji k różnych modów z $\operatorname{Im} \mu \geq 0$ możemy utworzyć $2^k - 1$ układów. Mamy bowiem

1. k układów z jednym wybranym modem

$$(2.7a) \quad du = \operatorname{Re} \xi^{\alpha} \delta_{\alpha} \otimes \lambda^{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k;$$

2. $\binom{k}{2}$ układów z dwoma modami

$$(2.7b) \quad du = \operatorname{Re} \left\{ \xi^{\alpha_1} \delta_{\alpha_1} \otimes \lambda^{\alpha_1} + \xi^{\alpha_2} \delta_{\alpha_2} \otimes \lambda^{\alpha_2} \right\};$$

.....
s. oraz ogólnie $\binom{k}{s}$ układów z s dowolnie wybranymi modami

$$(2.7c) \quad du = \operatorname{Re} \left\{ \xi^{\alpha_1} \delta_{\alpha_1} \otimes \lambda^{\alpha_1} + \dots + \xi^{\alpha_s} \delta_{\alpha_s} \otimes \lambda^{\alpha_s} \right\}.$$

Pytamy, jakie warunki muszą spełniać wektory δ_{α_s} oraz formy λ^{α_s} , ażeby układ typu (2.7c) miał rozwiązanie przechodzące przez dowolnie wybrane wartości $\xi_0^{\alpha_i} \in \mathbb{C}$, $u_0 \in H$ tzn. takie, że w pewnym punkcie $(t_0, x_0) \in \Omega$, $u(t_0, x_0) = u_0$, $\xi^{\alpha_i}(t_0, x_0) = \xi_0^{\alpha_i}$.

Warunek ten gwarantuje swobodę zmiennych ξ i u . Oznacza on, że konsekwencje różniczkowe równań (2.7) nie powinny prowadzić do więzów wiążących u oraz ξ .

W przypadku zagadnienia Cauchy'ego $u(0, x) = u_0(x)$ oznacza to również możliwość swobodnego zadawania danych początkowych w zakresie danej grupy modów $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$. Innymi słowy, żądanie by $u_0(x)$ mogło być wybierane dowolnie, byleby tylko była spełniona relacja $\frac{\partial}{\partial x} u_0(x) \in \{\delta_{\alpha_1}(u_0(x)), \dots, \delta_{\alpha_s}(u_0(x))\}$ oznacza nieistnienie więzów między u , x , ξ .

Będziemy zatem badać rozwiązywalność układów typu (2.7)

$$(2.8) \quad du = \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \delta_{\alpha} \otimes \lambda^{\alpha},$$

gdzie δ_{α} są polami wektorowymi na H oraz $\lambda(u) \in T^* \mathbb{R}^2$ przy ustalonym $u \in H$. W przypadku zespolonych wartości własnych zarówno δ jak i λ są zespolone, $\delta \in T^{\mathbb{C}} H$, $\lambda \in T^{\mathbb{C}} \mathbb{R}^2$.

3. Warunki zgodności.

Ze względu na późniejsze zastosowania rozpatrzmy ogólniejszy przypadek n -wymiarowych form $\lambda = \lambda_\nu dx^\nu$, $\nu = 1, \dots, n$. Przy ustalonym $u \in H$ będziemy uważać $\lambda(u)$ za formę z przestrzeni wektorowej T^*E dualnej do przestrzeni wektorowej TE , która jest przestrzenią styczną do pewnej afinicznej przestrzeni E zmiennych niezależnych x^1, \dots, x^n . W przypadku zespolonym natomiast $\lambda \in T^{*\mathbb{C}}E$. Dla ustalonego u prawa strona równania (2.8) może być traktowana w przypadku rzeczywistym jako element przestrzeni wektorowej $T_u H \otimes T^*E$, a w przypadku zespolonym jako element $T_u \mathbb{C}H \otimes T^{*\mathbb{C}}E$. Mamy wtedy*

$$du = \operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^k \xi^\alpha \delta_\alpha^\alpha \otimes \lambda^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k \xi^\alpha \delta_\alpha^\alpha \otimes \lambda^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^k \bar{\xi}^\alpha \bar{\delta}_\alpha^\alpha \otimes \bar{\lambda}^\alpha.$$

Jeśli w tym wyrażeniu mamy o numerach $\alpha = 1, \dots, p$ są zespolone ($\operatorname{Im} \delta_\alpha^\alpha \otimes \lambda^\alpha \neq 0$, $\alpha = 1, \dots, p$), natomiast pozostałe o numerach $\alpha = p+1, \dots, k$ są rzeczywiste, wówczas oznaczając $\delta_{-\alpha}^\alpha := \bar{\delta}_\alpha^\alpha$, $\lambda^{-\alpha} := \bar{\lambda}^\alpha$, $\xi^{-\alpha} := \bar{\xi}^\alpha$ i dokonując zamiany zmiennych $\xi^\alpha \rightarrow 2\xi^\alpha$ dla $\alpha = \pm 1, \dots, \pm p$ możemy napisać

$$(3.1) \quad du = \sum_{\substack{\alpha=\pm 1 \\ \alpha \neq 0}}^k \xi^\alpha \delta_\alpha^\alpha \otimes \lambda^\alpha$$

z dodatkowymi więzami

$$(3.1a) \quad \xi^{-\alpha} = \bar{\xi}^\alpha, \quad \alpha = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm p.$$

Określimy teraz pochodną zewnętrzną formy (3.1) gdzie w ogólności $\xi^\alpha: E \rightarrow \mathbb{C}$, $\delta_\alpha^\alpha \in T^{\mathbb{C}}H$, $\lambda^\alpha(u) \in T^{*\mathbb{C}}E$. Jakkolwiek pochodną zewnętrzną wektora nie jest wielkością dobrze określoną z geometrycznego punktu widzenia, to jednak jeśli rozpatrywać

* $\lambda \in T^*E$, a należy więc tu traktować jako cięcie wiązki $H \times T^*E \rightarrow H$.

pochodną zewnętrzną równania (3.1) modulo samo równanie (3.1) otrzymuje się wtedy wielkość, która ma dobrze zdefiniowany sens geometryczny, a mianowicie jest dwuformą o wartościach wektorowych.

Jeśli przeprowadzić rachunki w dowolnie wybranym układzie współrzędnych u^1, \dots, u^l , wówczas

$$(3.2) \quad du^j = \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \delta_{\alpha}^j \lambda^{\alpha}.$$

Biorąc pochodną zewnętrzną dostajemy

$$\sum_{\alpha} \chi_{\alpha}^i (d\xi^{\alpha} \wedge \lambda^{\alpha} + \xi^{\alpha} d\lambda^{\alpha}) + \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \delta_{\alpha, u^j}^i du^j \wedge \lambda^{\alpha} = 0,$$

ale

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \delta_{\alpha, u^j}^i du^j \wedge \lambda^{\alpha} &\stackrel{\text{mod}(3.2)}{=} \sum_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \delta_{\alpha, u^j}^i \delta_{\beta}^j \lambda^{\beta} \wedge \lambda^{\alpha} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} [\delta_{\alpha}^j, \delta_{\beta}^j] \lambda^{\alpha} \wedge \lambda^{\beta}, \end{aligned}$$

gdzie korzystaliśmy z antysymetrii komutatora oraz iloczynu skośnego $\lambda^{\alpha} \wedge \lambda^{\beta} = -\lambda^{\beta} \wedge \lambda^{\alpha}$. Ostatnie wyrażenie w otrzymanym wzorze jest już porządną dwuformą o wartościach wektorowych.

Podobnie rozwijamy

$$d\lambda^{\alpha} \stackrel{\text{mod}(3.2)}{=} \sum_{\alpha, \beta} \xi^{\beta} \lambda^{\beta} \wedge \lambda_{\delta_{\beta}^{\alpha}}, \quad \lambda_{\delta_{\beta}^{\alpha}} = \delta^j \frac{\partial}{\partial u^j} \lambda^{\alpha}.$$

W rezultacie różniczkowania zewnętrznego modulo (3.2) dostajemy

$$\sum_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha}^i \otimes (d\xi^{\alpha} \wedge \lambda^{\alpha} + \xi^{\alpha} \xi^{\beta} \lambda^{\beta} \wedge \lambda_{\delta_{\beta}^{\alpha}}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \xi^{\alpha} \xi^{\beta} [\delta_{\alpha}^j, \delta_{\beta}^j] \otimes \lambda^{\alpha} \wedge \lambda^{\beta} = 0.$$

Porównując wyrażenia przy niezależnych wektorach widzimy, że równanie to traktowane jako algebraiczny układ równań na formy $d\xi^{\alpha}$ ma szanse być niesprzeczne przy dowolnym ξ , u , jeśli pola

δ_α spełniają warunek Frobeniusa*, tzn. jeśli istnieją takie funkcje $\tau_{\alpha\beta}^\sigma \in \mathcal{A}^\infty (= C^\infty(H, \mathbb{C}))$, że

$$(3.3) \quad [\delta_\alpha, \delta_\beta] = \tau_{\alpha\beta}^\sigma \delta_\sigma.$$

W przeciwnym bowiem wypadku zachodziłoby

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] = \tau_{\alpha\beta}^\sigma \delta_\sigma + c_{\alpha\beta}^r X_r, \quad c_{\alpha\beta}^r \neq 0,$$

gdzie X_1, \dots, X_s są niezależnymi liniowo, modulo $\text{Lin}_{\mathbb{C}}\{\delta_{-p}, \dots, \delta_{-1}, \delta_1, \dots, \delta_k\}$, w każdym punkcie u polami wektorowymi tzn.

$$\begin{aligned} \dim\{\delta_{-p}, \dots, \delta_{-1}, \delta_1, \dots, \delta_k, X_1, \dots, X_s\}_{\mathbb{C}} &= \\ &= s + \dim \text{Lin}_{\mathbb{C}}\{\delta_{-p}, \dots, \delta_{-1}, \delta_1, \dots, \delta_k\}. \end{aligned}$$

Zatem z równań (3.2) dostalibyśmy następujące równania

$$\sum \xi^\alpha \xi^\beta c_{\alpha\beta}^r \lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta = 0, \quad r = 1, \dots, s,$$

które stanowiłyby dodatkowe więzy wiążące zmienne ξ oraz u .

Zdefiniujemy operację $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ na wskaźnikach $\alpha \in (-p, \dots, -1, 1, \dots, k)$ w następujący sposób

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} -\alpha & \text{dla } |\alpha| \leq p, \\ \alpha & \text{dla } \alpha > p. \end{cases}$$

Wówczas ze wzoru (3.3) przez wzięcie zespolonego sprzężenia wynikają następujące symetrie współczynników $\tau_{\alpha\beta}^\sigma$

$$\overline{\tau_{\alpha\beta}^\sigma} = \tau_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}^\sigma$$

LEMAT 3.1 Warunek (3.3) oznacza całkowalność dystrybucji

$\text{Re Lin}_{\mathbb{C}}\{\delta_1, \dots, \delta_k\}$, tzn. lokalnie istnieje foliacja rozmaitości H rozmaitościami stycznymi w każdym punkcie do pól wektorowych $\text{Re } \delta_\alpha, \text{Im } \delta_\alpha, \alpha = 1, \dots, k$.

* Przy założeniu niezależności modów $\lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta \neq 0$ dla $\alpha \neq \beta$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że na mocy wyżej wspomnianej symetrii współczynników $\tau_{\alpha\beta}^\sigma$ zachodzi

$$\begin{aligned} [\operatorname{Re} \delta_\alpha, \operatorname{Re} \delta_\beta] &= \frac{1}{4} [\delta_\alpha + \bar{\delta}_\alpha, \delta_\beta + \bar{\delta}_\beta] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\tau_{\alpha\beta}^\sigma + \tau_{\alpha\beta}^{\bar{\sigma}}) \operatorname{Re} \delta_\sigma - \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\tau_{\alpha\beta}^\sigma + \tau_{\alpha\beta}^{\bar{\sigma}}) \operatorname{Im} \delta_\sigma. \end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że $\operatorname{Im} \delta_\alpha = -\operatorname{Re}(i \delta_\alpha)$, $\operatorname{Im}(i \delta_\alpha) = -\operatorname{Re} \delta_\alpha$ łatwo już otrzymać następujące tożsamości

$$\begin{aligned} [\operatorname{Im} \delta_\alpha, \operatorname{Re} \delta_\beta] &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\tau_{\alpha\beta}^\sigma + \tau_{\alpha\beta}^{\bar{\sigma}}) \operatorname{Im} \delta_\sigma + \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\tau_{\alpha\beta}^\sigma + \tau_{\alpha\beta}^{\bar{\sigma}}) \operatorname{Re} \delta_\sigma, \\ [\operatorname{Im} \delta_\alpha, \operatorname{Im} \delta_\beta] &= -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (\tau_{\alpha\beta}^\sigma + \tau_{\alpha\beta}^{\bar{\sigma}}) \operatorname{Re} \delta_\sigma + \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\tau_{\alpha\beta}^\sigma + \tau_{\alpha\beta}^{\bar{\sigma}}) \operatorname{Im} \delta_\sigma. \end{aligned}$$

Ostatecznie stwierdzamy, że rzeczywiste pola $\operatorname{Re} \delta_\alpha$, $\operatorname{Im} \delta_\alpha$ spełniają również warunek Frobeniusa, co dowodzi lematu.

Wnioskiem z dotychczasowych rozważań oraz z twierdzenia 2.2 jest następujące

TWIERDZENIE 3.1 Warunek $[\delta_\alpha, \delta_\beta] \in \operatorname{Lin}_{\mathbb{R}} \{\delta_1, \dots, \delta_k, \bar{\delta}_1, \dots, \bar{\delta}_k\}$, $\alpha, \beta \in (-p, \dots, -1, 1, \dots, k)$, jest warunkiem koniecznym na to, by dla dowolnych $x_0 \in E$, $u_0 \in H$, oraz ξ_0^α spełniającego (3.1a) istniało rozwiązanie układu (3.1) w pewnym otoczeniu punktu x_0 spełniające warunki

$$u(x_0) = u_0,$$

$$du|_{x=x_0} = \sum_{\alpha} \xi_0^\alpha \delta_\alpha(u_0) \otimes \lambda^\alpha(u_0).$$

W przypadku dwóch zmiennych niezależnych ($\dim E = 2$) są to również warunki wystarczające.

W celu znalezienia dalszych warunków ograniczymy się teraz do układów szczególnej postaci (3.1) zakładając, że pola $\{\delta_{-p}, \dots, \delta_{-1}, \delta_1, \dots, \delta_k\}$ są w każdym punkcie liniowo niezależne

nad \mathbb{C} . Jeśli spełniony jest warunek (3.3) wówczas porównując wyrażenia przy niezależnych wektorach δ_α dostajemy

$$(3.4) \quad d\xi^\alpha \wedge \lambda^\alpha + \xi^\alpha \sum_{\beta} \xi^\beta \lambda^\beta \wedge \lambda^\alpha_{\delta_\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \beta} \xi^\sigma \xi^\beta \tau_{\sigma\beta}^\alpha \lambda^\sigma \wedge \lambda^\beta = 0.$$

Mnożąc zewnętrznym równanie (3.4) przez λ^α dostajemy następujący warunek

$$(3.5) \quad \sum_{\beta} \xi^\alpha \xi^\beta \lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta \wedge \lambda^\alpha_{\delta_\beta} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma, \beta} \xi^\sigma \xi^\beta \tau_{\sigma\beta}^\alpha \lambda^\alpha \wedge \lambda^\sigma \wedge \lambda^\beta = 0.$$

Pokażemy, używając niżej sformułowanego lematu, że jeśli warunek (3.5) jest spełniony wówczas układ równań (3.4) traktowany jako układ algebraicznych równań na formy $d\xi$ jest niesprzeczny.

LEMAT Cartana. Jeśli jednoformy $\lambda^1, \dots, \lambda^s$ są liniowo niezależne oraz $\sigma^1, \dots, \sigma^s$ są dowolnymi jednoformami, które spełniają $\sum_i \sigma^i \wedge \lambda^i = 0$, wtedy istnieje symetryczna macierz a_i^r ($a_i^r = a_r^i$) taka, że zachodzi związek $\sigma^r = \sum_i a_i^r \lambda^i$. I na odwrót: jeśli $\sigma^r = \sum_i a_i^r \lambda^i$, gdzie a_i^r jest macierzą symetryczną wówczas zachodzi $\sum_i \sigma^i \wedge \lambda^i = 0$.

Istotnie, na mocy lematu Cartana warunek (3.5) oznacza, że człon nie zawierający $d\xi^\alpha$ w równaniu (3.4) może być przedstawiony jako iloczyn zewnętrzny formy λ^α i pewnej jednoformy π^α , zatem zależność (3.4) możemy napisać w postaci równania

$$d\xi^\alpha \wedge \lambda^\alpha - \pi^\alpha \wedge \lambda^\alpha = 0,$$

którego algebraicznym rozwiązaniem jest

$$d\xi^\alpha = z^\alpha \lambda^\alpha + \pi^\alpha,$$

gdzie $z^{-p}, \dots, z^{-1}, z^1, \dots, z^k \in \mathbb{C}$ są dowolnymi parametrami.

Rozważmy teraz dwa przypadki:

1. λ^α są formami dwuwymiarowymi ($\dim E = 2$) - wówczas równania (3.5) są automatycznie spełnione. Pola $\delta_{-p}, \dots, \delta_{-1}, \delta_1, \dots, \delta_k$ rozpinają na mocy warunku (3.3) całkowalną dystrybucję podprze-strzeni niezmienniczych. Na mocy twierdzenia 2.2 (patrz również twierdzenie 3.1) układ obcięty do rozmierności całkowych jest układem $k+p$ równań na $k+p$ funkcji szukanych;
2. formy $\lambda^\alpha(u) \in T^*E$, $\alpha = -p, \dots, -1, 1, \dots, k$, $\dim E > 2$, wówczas równania (3.5) wiążą zmienne ξ oraz u chyba, że spełnione są następujące związki

$$\lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta \wedge \lambda_{\delta_\beta}^\alpha = 0 \quad \text{oraz} \quad \tau_{\sigma_\beta}^\alpha \lambda^\beta \wedge \lambda^\alpha = 0,$$

co w przypadku, gdy λ^α , $\alpha = -p, \dots, -1, 1, \dots, k$ są dla każdego $u \in H$ liniowo niezależne nad \mathbb{C} oznacza, że

$$(3.6) \quad \begin{array}{l} \text{a/} \quad \lambda_{\delta_\beta}^\alpha \in \text{Lin}_{\alpha\mathbb{C}} \{ \lambda^\alpha, \lambda^\beta \}, \quad \alpha \neq \beta, \\ \text{b/} \quad [\delta_\alpha, \delta_\beta] \in \text{Lin}_{\alpha\mathbb{C}} \{ \delta_\alpha, \delta_\beta \}. \end{array}$$

Zauważmy tu, że warunek b/ powoduje automatyczne spełnienie warunku (3.3).

Podsumowując rozważania tego rozdziału możemy sformułować następujące

TWIERDZENIE 3.2 Na to, aby układ

$$du = \text{Re} \sum_{\alpha=1}^k \xi^\alpha \delta_\alpha^\alpha(u) \otimes \lambda^\alpha(u)$$

posiadał dla każdego x_0 , ξ_0^α , $u_0 \in H$ rozwiązania w pewnym otoczeniu punktu x_0 spełniające

$$\begin{array}{l} u(x_0) = u_0 \\ du|_{x=x_0} = \text{Re} \sum_{\alpha=1}^k \xi_0^\alpha \delta_\alpha^\alpha(u_0) \otimes \lambda^\alpha(u_0) \end{array}$$

potrzeba, by:

A/ w przypadku $\dim E = 2$ (twierdzenie 3.1) był spełniony warunek Frobeniusa dla pól $\operatorname{Re} \delta_1, \dots, \operatorname{Re} \delta_k, \operatorname{Im} \delta_1, \dots, \operatorname{Im} \delta_k$. Warunek ten jest w tym przypadku również warunkiem dostatecznym;

B/ w przypadku $\dim E > 2$ przy założeniu niezależności form $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ oraz wektorów polaryzacji $\delta_1, \dots, \delta_k$ (nad \mathbb{C}) potrzeba, aby były spełnione następujące warunki

$$\begin{aligned} [\delta_\alpha, \delta_\beta] &\in \operatorname{Lin}_{\alpha\mathbb{C}} \{\delta_\alpha, \delta_\beta\}, & \lambda_{\delta_\alpha}^\beta &\in \operatorname{Lin}_{\alpha\mathbb{C}} \{\lambda^\alpha, \lambda^\beta\}, \quad \alpha \neq \beta, \\ [\delta_\alpha, \bar{\delta}_\beta] &\in \operatorname{Lin}_{\alpha\mathbb{C}} \{\delta_\alpha, \bar{\delta}_\beta\}, & \bar{\lambda}_{\delta_\beta}^\alpha &\in \operatorname{Lin}_{\alpha\mathbb{C}} \{\bar{\lambda}^\alpha, \lambda^\beta\}. \end{aligned}$$

Jak pokażemy warunki te są również warunkami dostatecznymi.

Pewne zastrzeżenia w powyższych rozważaniach, gdzie w istotny sposób wykorzystuje się niezależność zmiennych ξ^α , może budzić obecność więzów $\bar{\xi}^\alpha = \hat{\xi}^\alpha$. Łatwo jednakże stwierdzić, że pomimo istnienia tych więzów ^{one}pozostają w mocy. Wypływa to z bardzo prostego faktu, że jeśli dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $az + b\bar{z} = 0$, wówczas $a, b \equiv 0$, a więc wniosek jest taki sam jak przy niezależności z, \bar{z} .

4. Fale Riemanna.

Warunki (3.6) są automatycznie spełnione dla układów typu (2.7), zawierających pojedynczy mod rzeczywisty

$$(4.1) \quad du = \xi \delta(u) \lambda(u).$$

Jeśli teraz $u = f(R, u_0)$ jest rozwiązaniem układu równań zwyczajnych

$$\frac{du}{dR} = \delta(u), \quad u \Big|_{R=0} = u_0,$$

wówczas podstawienie tego związku do równań (4.1) prowadzi do równania na jedną tylko funkcję $R(x^1, \dots, x^n)$, którą nazwiemy fazą lub profilem fali,

$$dR = \xi \lambda(f(R)).$$

Ogólne rozwiązanie ostatniego równania może być wyrażone poprzez następujący uwikłany związek (Peradzyński 1971_A)

$$(4.2) \quad R = \Upsilon(\lambda_\nu(f(R))x^\nu), \quad \nu = 1, \dots, n,$$

gdzie Υ jest dowolną różniczkowalną funkcją jednej zmiennej. Zależność ta definiuje w pewnym obszarze przestrzeni x -ów funkcję $R(x)$ spełniającą równanie (4.1). Rozwiązanie to nosi nazwę fali Riemanna bądź też rozwiązania typu fali prostej.

Z zależności (4.2) bądź też wprost z (4.1) wynika, że rozwiązanie jest stałe na hiperpłaszczyznach spełniających równanie

$$\lambda_\nu(u(x_0))(x^\nu - x_0^\nu) = 0.$$

Zatem fale Riemanna są bezpośrednim uogólnieniem na przypadek nieliniowy fal płaskich, które są rozwiązaniami np. równania falowego $u = \psi(ct - x)$. Warto tu zauważyć, że fale tego typu

można również rozpatrywać w przypadku liniowym, wybierając pola wektora polaryzacji zależne od u . Przy niedużych zmianach R można przyjąć $\lambda_v(R) = \lambda_v(R_0) = \text{const}$. Wzór (4.2) określa wtedy zwykłą falę płaską z profilem danym przez funkcję $\Upsilon(\cdot)$. Sugeruje to, że kowektor λ należy traktować jako odpowiednik wektora falowego $(\omega, -\vec{k})$ określającego prędkość i kierunek propagacji fali. Taki rozkład można zrobić po wyróżnieniu zmiennej czasowej i zmiennych przestrzennych. Podobnie δ będziemy nazywać, zgodnie zresztą z definicją 1.4, wektorem polaryzacji fali prostej w punkcie $u = u(x)$.

W przypadku rozważanego poprzednio przez nas układu z dwiema zmiennymi niezależnymi ((2.1) z $b \equiv 0$) mamy

$$R = \Upsilon(x - v(f(R))t), \quad \text{gdzie } b \equiv 0.$$

Zależność prędkości propagacji od samego rozwiązania może być interpretowana jako efekt samooddziaływania fali ze sobą. Wnioskiem z tych rozważań jest następujące

STWIERDZENIE. Każda krzywa całkowa pola wektora własnego δ wraz z odpowiadającym mu polem wektora falowego λ , określonym na tej krzywej, definiuje rodzinę fal prostych zależną od jednej dowolnej funkcji jednego argumentu.

Podobnie można otrzymać rozwiązanie w zamkniętej postaci w przypadku kilku modów z tym samym polem wektora polaryzacji $\delta \otimes \lambda^1, \delta \otimes \lambda^2, \dots, \delta \otimes \lambda^k$

$$(4.3) \quad du = \delta \otimes (\xi^1 \lambda^1 + \dots + \xi^k \lambda^k).$$

Warunki (3.6) nie dotyczą tej sytuacji, ponieważ przy ich wprowadzaniu zakładaliśmy niezależność wektorów $\delta_1, \dots, \delta_k$. Warunki zgodności dla ostatniego układu tak jak dla (4.1) są

spełnione automatycznie, a jego ogólne rozwiązanie można również wyrazić w uwikłanej postaci (Peradzyński 1971B)

$$(4.4) \quad \begin{aligned} u &= f(R) \\ R &= \Psi(\lambda^1_\nu(u)x^\nu, \dots, \lambda^k_\nu(u)x^\nu), \end{aligned}$$

gdzie $\Psi(\cdot, \dots, \cdot)$ jest dowolną funkcją od k zmiennych. Rozwiązania te nazywamy również niepłaskimi falami prostymi. W przypadku, gdy Ψ jest sumą

$$\Psi = \Psi_1(\lambda^1_\nu x^\nu) + \dots + \Psi_k(\lambda^k_\nu x^\nu)$$

odpowiednie rozwiązanie można uważać za nieliniową superpozycję - rezultat oddziaływania k różnych płaskich fal Riemanna. W ogólnym przypadku rozwiązanie można interpretować jako opisujące oddziaływanie w ogólności nieskończonej ilości płaskich fal Riemanna, ponieważ funkcję wielu zmiennych można rozłożyć na fale płaskie. Jeśli użyć np. transformaty Fouriera

$$\Psi(z^1, \dots, z^k) = \int \hat{\Psi}(\eta_1, \dots, \eta_k) e^{-i\eta_\alpha z^\alpha} d\eta,$$

wówczas wyrażeniu na R można nadać postać sumy

$$R = \int \hat{\Psi}(\gamma) e^{-i\eta_\alpha \lambda^\alpha_\nu x^\nu} d\eta$$

fal płaskich z wektorami falowymi $\lambda^\alpha = \eta_\alpha \hat{\lambda}^\alpha$.

Inny przypadek, kiedy mamy kilka modów z tym samym wektorem falowym $\hat{\lambda}$ ale o różnych polaryzacjach ξ_1, \dots, ξ_k prowadzi do równania

$$du = (\xi^1 \delta_1 + \dots + \xi^k \delta_k) \otimes \hat{\lambda},$$

którego rozwiązaniem jest zwykła fala prosta z większą swobodą polaryzacji

$$\frac{du}{dR} = \xi^1 \delta_1(u) + \dots + \xi^k \delta_k^*(u)$$

$$R = \varphi(\lambda, x^V),$$

gdzie $\xi^\alpha = \xi^\alpha(R)$ są dowolnymi funkcjami R .

Propagacja nieliniowych fal płaskich była badana po raz pierwszy badana przez S.D.Poissona (1808), który dla gazu izotermicznego znalazł rozwiązanie typu fali prostej w postaci uwikłanej

$$u = F(x - (u + c)t)$$

z dowolną funkcją $F(\cdot)$. Propagacja nieliniowych fal była też badana przez G.B.Riemanna (1860) dla gazu idealnego spełniającego równania

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \varphi(u_t + uu_x) + \varphi'(\varrho)\varrho_x &= 0 \\ \varphi_t + u\varphi_x + \varrho u_x &= 0 \end{aligned}$$

z zależnością ciśnienia od gęstości w postaci $p = \varphi(\varrho)$. Riemann zajmował się nie tylko matematyczną stroną równań (4.5), ale również szeroko dyskutował fizyczną poprawność przyjmowanych założeń. Analizując rozwiązania równań (4.5) Riemann zauważył, że mogą być one interpretowane jako opisujące w ogólności dwie przechodzące przez siebie fale: jedna biegnąca w kierunku dodatnich x -ów z lokalną prędkością $u + \sqrt{\varphi'}$ (jeśli oczywiście $u + \sqrt{\varphi'} > 0$) i druga w kierunku przeciwnym, z lokalną prędkością $u - \sqrt{\varphi'}$. Jeśli zaburzenie początkowe jest zlokalizowane, to jak wynika z rozważań Riemanna odpowiednie fale po pewnym czasie będą odseparowane obszarem gazu o stałych parametrach u i ϱ . Owe fale to właśnie rozwiązania jednomodowe typu (4.1), natomiast ogólne rozwiązanie układu (4.5) może być przykładem rozwiązań dwumodowych

przedstawiających dwie oddziaływujące fale proste i dyskutowane szerzej w rozdziale 5.

Riemann zauważył również, że w ogólności rozwiązanie równań (4.5) przestaje być dla pewnego t różniczkowalne, a nawet ciągłe wobec czego postuluje wprowadzenie rozwiązań nieciągłych z falami uderzeniowymi (der Verdichtungsstoss). W oparciu o prawa zachowania masy i pędu Riemann znalazł również relacje, jakie powinny zachodzić pomiędzy prędkością frontu fali oraz parametrami gazu przed i za falą uderzeniową. Jak się potem okazało, z fizycznego punktu widzenia poprawniejsze są relacje znalezione później przez Rankine'a (1869) uwzględniające również zasadę zachowania energii.

5. Układy z dwoma modami - oddziaływania elastyczne.

W przypadku układów zawierających dwa rzeczywiste niezależne mody

$$(5.1) \quad du = \xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \xi^2 \delta_2 \otimes \lambda^2$$

warunki (3.6) są koniecznymi i dostatecznymi warunkami istnienia rozwiązań z $\xi^1 \cdot \xi^2 \neq 0$. Istotnie, równanie (3.5) przyjmuje wtedy postać

$$\sum \xi^\alpha \xi^\beta \lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta \wedge \lambda_{\delta_p}^\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2,$$

skąd przy $\xi^1 \cdot \xi^2 \neq 0$ mamy warunek (3.6a). Natomiast warunek (3.6b) wynika wtedy z warunku (3.3). Zgodnie z twierdzeniem Frobeniusa istnieje wtedy rozmaitość wymiaru 2 styczna do pól δ_1 , δ_2 , i przechodząca przez dowolnie wybrany punkt $u_0 \in H$. Lokalnie można ją zadać rozwiązaniem następującego układu

$$(5.2) \quad du = \eta^1 \delta_1(u) dR^1 + \eta^2 \delta_2(u) dR^2,$$

wówczas linie współrzędnych R^1 , R^2 są krzywymi całkowymi pól δ_1 , δ_2 . Niech w pewnym otoczeniu $(R^1, R^2) \in \mathcal{O}(0,0)$ rozwiązanie układu (5.2) będzie dane

$$(5.3) \quad G_2: \quad u = f(R^1, R^2),$$

wówczas warunki (3.6a) po obcięciu do powierzchni G_2 można zapisać

$$(5.4) \quad \begin{array}{l} a/ \lambda_{,R^1}^2 \in \text{Lin}_\alpha \{ \lambda^1, \lambda^2 \} \\ b/ \lambda_{,R^2}^1 \in \text{Lin}_\alpha \{ \lambda^1, \lambda^2 \}. \end{array}$$

Korzystając z tej postaci możemy obciąć układ (5.1) do rozmaitości G_2 podstawiając po prostu relację (5.3) do równań (5.1)

wskutek czego otrzymuje się następujący układ równań

$$(5.5) \quad \begin{aligned} dR^1 &= \xi^1 \lambda^1(f(R^1, R^2)) \\ dR^2 &= \xi^2 \lambda^2(f(R^1, R^2)) \end{aligned}$$

na profile oddziaływujących fal Riemanna.

Układ (5.5) przy założeniach (5.4b) daje się sprowadzić do układu dwu równań z dwiema zmiennymi niezależnymi. Można to zrobić na kilka sposobów (Burnat 1969A, 1969B, 1969C, Peradzyński 1975). Pokażemy tu sposób, który prowadzi do ciekawego uogólnienia wzoru (2.4) na falę prostą. Spróbujmy poszukać rozwiązania w postaci uwikłanej

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \Psi^1(R^1, R^2) &= \lambda^1_\nu(f(R^1, R^2)) x^\nu, \\ \Psi^2(R^1, R^2) &= \lambda^2_\nu(f(R^1, R^2)) x^\nu. \end{aligned}$$

Różniczkując odpowiednio pierwsze równanie po R^2 , a drugie po R^1 oraz wykorzystując warunki zgodności (3.6a) dochodzimy do następujących równań na Ψ^1, Ψ^2

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \Psi^1_{,R^2} &= \alpha^1_1 \Psi^1 + \alpha^1_2 \Psi^2 \\ \Psi^2_{,R^1} &= \alpha^2_1 \Psi^1 + \alpha^2_2 \Psi^2, \end{aligned}$$

gdzie funkcje $\alpha^i_j(R^1, R^2)$ są współczynnikami rozkładu

$$\lambda^i_{,R^j} = \alpha^i_1 \lambda^1 + \alpha^i_2 \lambda^2.$$

Okazuje się, że równania (5.7) są warunkami na to, aby uwikłane związki (5.6) definiowały rozwiązania równań (5.5).

TWIERDZENIE 5.1 Jeśli funkcje $\Psi^1(R^1, R^2)$, $\Psi^2(R^1, R^2)$ klasy C^1 spełniają równania (5.7), punkt (x^0_ν, R^0_1, R^0_2) spełnia równania (5.6) oraz

$$\Psi_{,R^1}(R_0^1, R_0^2) - \lambda_{,y,R^1}^1(f(R_0^1, R_0^2)) x_0^y \neq 0$$

$$\Psi_{,R^2}(R_0^1, R_0^2) - \lambda_{,y,R^2}^2(f(R_0^1, R_0^2)) x_0^y \neq 0,$$

wówczas związki (5.6) można w pewnym otoczeniu punktu (R_0^1, R_0^2, x_0^y) rozwikłać, a rozwikłane funkcje $R^1(x^1, \dots, x^n)$, $R^2(x^1, \dots, x^n)$ spełniają równania (5.5).

Istotnie, mamy

$$0 = d(\Psi - \lambda_{,y}^1 x^y) = \Psi_{,R^i}^1 dR^i - \lambda_{,y,R^i}^1 x^y dR^i - \lambda_{,y}^1 dx^y.$$

Wykorzystując teraz warunki zgodności (3.6a) oraz równania (5.7) dostajemy

$$(\Psi_{,R^1}^1 - \lambda_{,y,R^1}^1 x^y) dR^1 = \lambda_{,y}^1 dx^y$$

co dowodzi, że $dR^1 = \xi^1 \lambda^1$, jeśli tylko $\frac{1}{\xi^1} = (\Psi_{,R^1}^1 - \lambda_{,y,R^1}^1 x^y)$ jest różne od zera. Założenia twierdzenia gwarantują spełnienie tego warunku w pewnym punkcie, z ciągłości odpowiednich funkcji wynika jego spełnienie w pewnym otoczeniu tego punktu. Podobnie dowodzimy spełnienia drugiego z równań (5.5).

Twierdzenie 5.1 pokazuje, że warunki zgodności (5.4) są jednocześnie warunkami dostatecznymi na istnienie niezdegenerowanych rozwiązań (rzęd $dR^1, dR^2 = 2$) układu (5.5). Układ z dwiema zmiennymi niezależnymi można również uzyskać, jeśli wykorzystać następujący prosty

LEMAT 5.1 Rozwiązania układu (5.5) są stałe na $(n-2)$ -wymiarowych płaszczyznach \mathcal{M}_{x_0} spełniających równania

$$\mathcal{M}_{x_0}: \begin{aligned} \lambda_{,y}^1(f(R_0^1, R_0^2))(x^y - x_0^y) &= 0 \\ \lambda_{,y}^2(f(R_0^1, R_0^2))(x^y - x_0^y) &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $R_0^1 = R^1(x_0)$, $R_0^2 = R^2(x_0)$.

Jeśli np. dwuwymiarowa płaszczyzna $x^3 = 0, \dots, x^n = 0$ jest transwersalna do \mathcal{M} , wówczas można rozwiązać układ równań

$$R_\alpha^1 = \xi^1 \lambda_\alpha^1, \quad R_\alpha^2 = \xi^2 \lambda_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2$$

z dwiema zmiennymi niezależnymi (ręgując ξ^1, ξ^2 dostaje się dwa hiperboliczne równania), a następnie odpowiednie rozwiązania rozszerzyć na pewne otoczenie płaszczyzny (x_1, x_2) tak, by rozwiązania były stałe na odpowiednich płaszczyznach $\mathcal{M}(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$. Dowód istnienia podany w pracach Burnata (1975) i Peradzyńskiego (1975) wykorzystuje tę własność.

Z równań (5.5) widać rzeczywiście, że mamy do czynienia z dwiema oddziaływującymi falami Riemanna w tym sensie, że każda z fal propaguje się w poprzek drugiej. Istotnie, powierzchnie $R^i(x) = R_0^i = \text{const}$ można uważać za powierzchnie stałej fazy i -tej fali, ponieważ zgodnie z równaniami (5.5) są one prostopadłe do wektora falowego λ^i co oznacza, że są one powierzchniami całkowymi formy Pfaffa

$$\lambda^i_\nu dx^\nu = 0.$$

Powierzchnie te w przypadku niezaburzonej fali Riemanna są hiperpłaszczyznami, ponieważ $\lambda = \lambda(f(R))$ zależy tylko od własnej fazy R , która jest stała na powierzchni $R(x) = R_0$. Oznacza to, że $\lambda = \lambda(f(R_0))$ na powierzchni stałej fazy, a zatem powierzchnia ta jest hiperpłaszczyzną. W ogólności jednakże oddziaływanie z pozostałą falą prowadzi, zgodnie z równaniami (5.5), do lokalnych zmian wektora falowego, co przejawia się w zależności λ^i od R^1 i R^2 . Rozwiązania równań (5.5) mają

jeszcze jedną ciekawą własność polegającą na tym, że lokalnie można je zawsze interpretować jako rezultat spotkania się dwu fal Riemanna, których profile są zlokalizowane, tzn. pochodne Ψ_1', Ψ_2' funkcji $\Psi_1(\cdot), \Psi_2(\cdot)$ określających profil fal zgodnie ze wzorem (3.7a), mają zwarte nośniki.

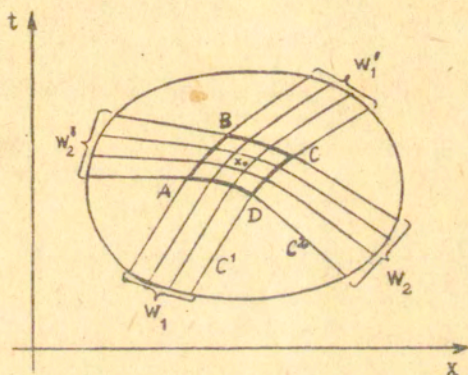
Rozważmy dla uproszczenia przypadek dwu zmiennych niezależnych. Mamy tu dwie rodziny charakterystyk, z których każda jest rodziną krzywych całkowych jednej z form Pfaffa

$$C^\alpha: \quad \lambda_y^\alpha dx^y = 0, \quad \alpha = 1, 2.$$

Rozważmy otoczenie punktu x_0 (rys.1) ograniczone krzywoliniowym prostokątem ABCD, którego bokami są charakterystyki AB, BC, CD, DA. Skonstruujemy nowe rozwiązanie, które będzie się pokrywało z poprzednim wewnątrz i na brzegu prostokąta, natomiast na zewnątrz przedłużymy to rozwiązanie w sposób następujący: charakterystyki przecinające boki prostokąta ABCD przedłużamy prostymi zachowując kierunek charakterystyki. Na prostych tych kładziemy $u = \text{const} = \text{wartość}$, jaką przyjmuje rozwiązanie w punkcie przecięcia prostej z bokiem prostokąta. W pozostałych obszarach, którymi są wnętrza kątów o wierzchołkach A, B, C, D, kładziemy odpowiednio $u = u(A)$, $u = u(B)$, $u = u(C)$, $u = u(D)$ - stałe. Powstałe w ten sposób odwzorowanie jest ciągle w pewnym otoczeniu prostokąta ABCD i różniczkowalne, za wyjątkiem ewentualnie boków prostokąta* (gdzie możemy mieć do czynienia ze słabą nieciągłością). Odwzorowanie to jest rozwiązaniem układu, przedstawiającym dwie oddziaływujące fale proste. Obszar prostokąta jest obszarem oddziaływania fal.

* Dokładniej, z wyjątkiem charakterystyk, które przechodzą przez jakikolwiek z punktów A, B, C, D.

W przypadku wielu zmiennych niezależnych sytuacja jest podobna z tym, że krzywe charakterystyczne trzeba zastąpić (hiper)-powierzchniami charakterystycznymi.



Rys.1. Dwie oddziaływujące (zlokalizowane) fale Riemanna:
 W_1, W_2 - fale wchodzące do obszaru oddziaływania ABCD;
 W_1', W_2' - fale wychodzące z obszaru oddziaływania.

6. Układy z wieloma modami. $\dim E = 2$.

Wróćmy z powrotem do układów z dwiema zmiennymi niezależnymi i z większą ilością modów rzeczywistych. Zgodnie z twierdzeniem 3.2 mamy wtedy jeden tylko warunek do spełnienia, jest nim warunek (3.3) gwarantujący na mocy twierdzenia Frobeniusa istnienie rozmaitości niezmienniczej, stycznej do pól $\delta_1, \dots, \delta_k \in TH$. Innymi słowy

$$[\delta_i, \delta_j] \in \text{Lin}_\alpha \{ \delta_1, \dots, \delta_k \}$$

jest warunkiem na to, żeby mody $(v_1, \delta_1), \dots, (v_k, \delta_k)$ mogły współistnieć. Wiemy, że wprawdzie rozwiązania odpowiadające pojedynczym modom istnieją, są to fale proste, ale rozwiązania zawierające dwa wybrane mody mogą już nie istnieć. Jest to związane z istnieniem nieliniowych sprzężeń pomiędzy modami. Oddziaływanie dwóch modów może w konsekwencji prowadzić do pojawienia się nowych (Peradzyński 1974, 1978). Rozpatrzmy to najpierw na przykładzie układów silnie hiperbolicznych.

DEFINICJA 6.1 Układ $u_t + A(u)u_x = 0$ jest silnie hiperboliczny, jeżeli odwzorowanie $A(u)$ ma dokładnie 1 (= liczba zmiennych niezależnych) różnych rzeczywistych wartości własnych

$$v_1(u) < v_2(u) < \dots < v_1(u).$$

W konsekwencji $A(u)$ jest odwzorowaniem diagonalizowalnym, podprzestrzenie własne są jednowymiarowe, rozpinane odpowiednio przez niezależne wektory własne $\delta_1(u), \dots, \delta_1(u)$. Jeśli teraz wybrać dwa mody np. $(v_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_1}), (v_{\alpha_2}, \delta_{\alpha_2})$ wówczas może się okazać, że pola $\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2}$ nie spełniają warunku (3.3). Aby wtedy określić "rezultat" oddziaływania takich modów, należy zna-

leżąc grupę modów $\{\delta_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in I}$ ($I \subset \{1, 2, \dots, 1\}$) o tej własności, że

1° $\{\delta_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in I}$ spełniają warunek Frobeniusa (3.3);

2° $\delta_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_2} \in \{\delta_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in I}$;

3° jest to najmniejszy układ spełniający 1° i 2°, tzn. szuka-

my możliwie najmniejszej ilości dodatkowych pól δ_{α_3}, \dots

\dots, δ_{α_p} takich, ażeby warunki 1° i 2° były spełnione, $\{\alpha_1, \dots,$

$\dots, \alpha_p\} = I$.

Będziemy mówić, że te dodatkowe mody $\alpha_3, \dots, \alpha_p$ są generowane na skutek nieliniowych oddziaływań. Za sensownością takiego stwierdzenia niech świadczą poniższe rozważania.

DEFINICJA 6.2 Powiemy, że rozwiązanie $u(t, x)$ zawiera mody

$(v_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_1}), \dots, (v_{\alpha_p}, \delta_{\alpha_p})$, gdzie $v_{\alpha_i} \neq v_{\alpha_j}$ dla $\alpha_i \neq \alpha_j$, jeśli

istnieją funkcje $\xi^i(t, x) \neq 0$ takie, że zachodzi

$$du(t, x) = \xi^1(t, x) \delta_{\alpha_1}^*(u(t, x)) \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^p(t, x) \delta_{\alpha_p}^*(u(t, x)) \otimes \lambda^p,$$

gdzie $\lambda^i = v_{\alpha_i}(u(t, x)) dt - dx$.

DEFINICJA 6.3 Podobnie powiemy, że warunek początkowy $u(0, x)$

zawiera mody $(v_{\alpha_1}, \delta_{\alpha_1}), \dots, (v_{\alpha_p}, \delta_{\alpha_p})$, jeśli istnieją niezerowe

funkcje $\xi^i(x)$ takie, że

$$-\frac{d}{dx} u_0(x) = \xi^1(x) \delta_{\alpha_1}^*(u_0(x)) + \dots + \xi^p(x) \delta_{\alpha_p}^*(u_0(x)).$$

Jeśli dane początkowe zawierają mody α_1, α_2 wówczas sensownie jest się zapytać, jakie mody zawierać będzie rozwiązanie?

Równanie (3.4) pokazuje, że jeśli $\xi^{\alpha_1} \cdot \xi^{\alpha_2} \delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha} \neq 0$, wówczas mod $(v_{\alpha}, \delta_{\alpha}^*)$ będzie wzbudzony w trakcie oddziaływania, ponieważ $d\xi^{\alpha}$ będzie w ogólności różne od zera. Argument ten pokazuje, że wszystkie mody spełniające warunki 1°, 2°, 3° będą

obecne w rozwiązaniu. Sytuacja taka ma np. miejsce w gazodynamice (Peradzyński 1974). Mamy tam dwa mody dźwiękowe, oznaczmy je przez S_+ , S_- , oraz mod entropowy E . Mody dźwiękowe spełniają warunek (3.3), zatem ich oddziaływanie nie prowadzi do generacji (fali) modu entropowego. Oddziaływanie natomiast jakiegokolwiek modu dźwiękowego z modem entropowym prowadzi do "wzbudzenia" drugiego modu dźwiękowego. Możemy to symbolicznie zapisać

$$S_+ + S_- \longrightarrow S'_- + S'_+$$

$$S_+ + E \longrightarrow S'_+ + S'_- + E'$$

$$S_- + E \longrightarrow S'_+ + S'_- + E'.$$

Pierwsze z tych oddziaływań nazwiemy zgodnie z przyjętą przez nas terminologią oddziaływaniem elastycznym. Jeszcze więcej możliwości pojawia się w przypadku równań magnetogazodynamiki (Peradzyński, Brettel) rozpatrywanych niżej w przykładzie.

Analogicznie postępujemy, jeśli warunek początkowy zawiera większą ilość modów.

STWIERDZENIE 6.1 Jeśli warunek początkowy zawiera mody $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, wówczas rozwiązanie, oprócz tych modów, zawierać będzie wszystkie takie mody, które trzeba koniecznie dodać, żeby spełnić warunek (3.3).

W niektórych przypadkach kiedy rozwiązanie określone jest globalnie dla $t > 0$, poszczególne mody mogą się asymptotycznie rozdzielić na pojedyncze fale Riemanna (Peradzyński 1978, Böttger 1978). W tym przypadku mowa o generacji fal na skutek oddziaływania innych jest w pełni uzasadniona.

Przykład. Równania magnetogazodynamiki w przypadku gazu idealnego o nieskończonej przewodności elektrycznej mają w zwykłych oznaczeniach następującą postać

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p + \frac{1}{4\pi} \vec{H} \times \operatorname{rot} \vec{H} &= 0, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{H}), \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0. \end{aligned}$$

W przypadku dwóch zmiennych niezależnych, kiedy rozwiązania na funkcje $\rho, p, \vec{v}, \vec{H}$ zależą jedynie od zmiennych t oraz x^1 , oznaczanej w dalszym ciągu przez x , układ redukuje się do siedmiu równań na siedem funkcji $u = (\rho, p, \vec{v}, H^1)$, gdzie $H^1 = (0, H^2, H^3)$. Jest to konsekwencją równania $\operatorname{div} \vec{H} = 0$, które w tym przypadku oznacza, że $H^1 = \text{const}$. Jeśli zapisać układ w postaci macierzowej $u_t + A(u)u_x = 0$, wówczas macierz $A(u)$ ma postać następującą

$$A = \begin{pmatrix} v^1 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v^1 & \rho p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} & v^1 & 0 & 0 & \hat{H}^2 & \hat{H}^3 \\ 0 & 0 & 0 & v^1 & 0 & -\hat{H}^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v^1 & 0 & -\hat{H}^1 \\ 0 & 0 & H^2 & -H^1 & 0 & v^1 & 0 \\ 0 & 0 & H^3 & 0 & -H^1 & 0 & v^1 \end{pmatrix}, \quad \hat{H}^i = \frac{H^i}{4\pi\rho},$$

a jej wartości własne c_i - użyliśmy tu tego oznaczenia ponieważ v oznacza już prędkość gazu - dane są równaniem

$$\delta \left(\delta^2 - \frac{(H^1)^2}{4\pi\varrho} \right) \left[\delta^4 - \delta^2 \left(\frac{H^2}{4\pi\varrho} + a^2 \right) + \frac{(H^1)^2}{4\pi\varrho} a^2 \right] = 0,$$

gdzie oznaczyliśmy $\delta = c - v$ oraz $a^2 = \chi \frac{p}{\varrho}$. δ jest więc prędkością modu w odniesieniu do spoczywającego gazu. Dostajemy więc w ten sposób w typowym przypadku (tzn. dla typowego v i H) siedem modów:

1° E - mod entropowy, gdy $\delta = 0$, a odpowiedni wektor charakterystyczny w układzie $(\varrho, p, \vec{v}, H^1)$ ma postać

$$E = (1, 0, \vec{0}, 0^1);$$

2° A_+ , A_- - mody Alfvena, gdy $\delta = \pm \frac{H^1}{\sqrt{4\pi\varrho}}$, gdzie

$$A_{\pm} = \left(0, 0, 0, \pm \frac{H^3}{\sqrt{4\pi\varrho}}; \pm \frac{H^2}{\sqrt{4\pi\varrho}}, -H^3, H^2 \right)$$

w układzie $(\varrho, p, v^1, v^2, v^3, H^2, H^3)$;

3° S_+ , S_- - mody wolne, gdy

$$\delta = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(a e_1 + \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\varrho}} \right)^2} - \sqrt{\left(a e_1 - \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\varrho}} \right)^2} \right),$$

gdzie $e_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{H} = (H^1, H^2, H^3) = H^1 e_1 + H^1$, $H^1 = \text{stała}$;

4° F_+ , F_- - mody szybkie, gdy

$$\delta = \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(a e_1 + \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\varrho}} \right)^2} + \sqrt{\left(a e_1 - \frac{\vec{H}}{\sqrt{4\pi\varrho}} \right)^2} \right).$$

Odpowiednie wektory charakterystyczne w przypadkach 3° i 4° wyrażają się tym samym wzorem

$$(S, F) = \left(\varrho \left[\delta^2 - \frac{(H^1)^2}{4\pi\varrho} \right], \chi p \left[\delta^2 - \frac{(H^1)^2}{4\pi\varrho} \right], -\delta \left[\delta^2 e_1 - \frac{H^1}{4\pi\varrho} \vec{H} \right], \delta^2 H^1 \right).$$

Dla prędkości mamy tu $\delta_{F_-} < \delta_{A_-} < \delta_{S_-} < \delta_E < \delta_{S_+} < \delta_{A_+} < \delta_{F_+}$. Mody S_+ , S_- , F_+ , F_- nazywa się modami magnetoakustycznymi ponieważ w tym przypadku δ jest zależna od prędkości dźwięku a gazu bez pola

magnetycznego.

Badając komutatory odpowiednich wektorów charakterystycznych można stwierdzić, że w typowym przypadku (gdy $H^{\perp} \neq 0$, $H^{\parallel} \neq 0$) spośród $2^7 - 1 = 127$ możliwości tylko 11 daje moduły Liego (tzn. są zamknięte ze względu na komutator). Są to moduły

$$1^{\circ} \{F_{-}\}, \{A_{-}\}, \{S_{-}\}, \{E\}, \{S_{+}\}, \{A_{+}\}, \{F_{+}\},$$

tzn. siedem układów jednomodowych;

$$2^{\circ} \{F_{-}, S_{-}, S_{+}, F_{+}\} - \text{jeden układ czteromodowy zawierający mody magnetoakustyczne};$$

$$3^{\circ} \{F_{-}, S_{-}, E, S_{+}, F_{+}\} - \text{jeden układ pięciomodowy zawierający mody magnetoakustyczne i mod entropowy};$$

$$4^{\circ} \{F_{-}, A_{-}, S_{-}, S_{+}, A_{+}, F_{+}\} - \text{jeden układ z sześcioma modami zawierający mody magnetoakustyczne oraz mody Alfvena};$$

$$5^{\circ} \text{układ zawierający wszystkie mody, a więc układ wyjściowy.}$$

Stosunkowo łatwo można tu otrzymać odpowiednie układy zredukowane. Mianowicie, z postaci elementów magnetoakustycznych wynika, że zmiana H^{\perp} jest proporcjonalna do H^{\perp} , podobnie zmiana $v^{\perp} = (0, v^2, v^3)$ jest proporcjonalna do H^{\perp} . Powinny zatem zachodzić związki

$$H^{\perp} = \omega H_0^{\perp}, \quad v^{\perp} = v_0^{\perp} + q H_0^{\perp}, \quad \omega = \omega(t, x), \quad q = q(t, x),$$

gdzie $H_0^{\perp} = (0, H_0^2, H_0^3)$, $v_0^{\perp} = (0, v_0^2, v_0^3)$ - stałe wektory. Wstawiając te związki do wyjściowych równań otrzymujemy układ pięciu równań na pięć funkcji $(\varphi, p, v^{\perp}, q, \omega)$

$$\varphi_t + v^{\perp} \varphi_x + \varphi v_x^{\perp} = 0,$$

$$v_{,t}^{\perp} + v^{\perp} v_{,x}^{\perp} + \frac{1}{\varphi} p_x + \frac{1}{4\pi\varphi} \omega \omega_x = 0,$$

$$(6.2) \quad q_t + v^{\perp} q_x - \frac{1}{4\pi\varphi} H^{\perp} \omega_x = 0,$$

$$(6.2) \quad \omega_t + v^1 \omega_x + \omega v_x^1 - H^1 q_x = 0,$$

$$\left(\frac{p}{\rho^2} \right)_t + v^1 \left(\frac{p}{\rho^2} \right)_x = 0.$$

Układ ten zawiera mody $\{F_-, S_-, E, S_+, F_+\}$. Aby usunąć mod entropowy należy położyć $p = A \rho^2$, gdzie A - stała, wówczas ostatnie z równań jest spełnione tożsamościowo, a pozostałe wraz z relacją $p = A \rho^2$ dają układ czterech równań zawierających jedynie mody magnetoakustyczne!

Podobnie dokładając do wyjściowego układu siedmiu równań zależność $\frac{p}{\rho^2} = A = \text{const}$, eliminujemy z układu fale entropowe i otrzymany układ sześciu równań odpowiada modułowi generowanemu przez mody Alfvena i mody magnetoakustyczne!

Reasumując widzimy, że w przypadku układów silnie hiperbolicznych badanie sprzężeń (oddziaływań) pomiędzy modami (falami) sprowadza się do sprawdzania warunków Frobeniusa (3.3) dla rozmaitych podzbiorów skończonego zbioru pól wektorów polaryzacji $\gamma_1, \dots, \gamma_1$, a więc do poszukiwania modułów Liégo rozpinanych przez pola charakterystyczne. W przypadku układu hiperbolicznego, ale nie silnie hiperbolicznego, odwzorowanie $A(u)$ jest diagonalizowalne i posiada rzeczywiste wartości własne, niektóre z nich mają krotność większą niż 1. Odpowiednie podprzestrzenie własne H_μ składają się z wektorów własnych. Zgodnie z lematem 1.1 jakiegokolwiek rozwiązanie można wyrazić używając co najwyżej jednego wektora γ_μ z każdej podprzestrzeni H_μ . Jeśli $\gamma_{\mu 1}, \dots, \gamma_{\mu p}$ - baza w H_μ , wtedy $\gamma_\mu = \sum_s \eta_s^\mu \gamma_{\mu s}$.

Problem wyznaczenia modów rozwiązania przy zadanym warunku początkowym rozwiązuje się również w oparciu o warunek (3.3).

Tym razem jednakże warunek ten prowadzi do równań różniczkowych

określających polaryzację odpowiednich modów, tzn. do równań na funkcje $\eta^{ps}(u)$ określające wybór polaryzacji wektora χ_p , a problem sprowadza się do sprawdzenia, które z χ_p są przez cały czas równe zero.

Rozważania tego rozdziału dotyczyły modów rzeczywistych. Podobną analizę można prowadzić również w przypadku modów zespolonych. Oczywiście rozpatrywanie zagadnienia Cauchy'ego traci tu sens. Można jednakże próbować budować układy zawierające pewne wybrane mody, niektóre z nich zespolone. Warunki zgodności dla takich układów, zgodnie z rozważaniami rozdziału 3, sprowadzają się znowu do poszukiwania modułów Liego rozpinanych przez odpowiednie pola $\text{Re}\delta_i^*$, $\text{Im}\delta_i^*$. Jeśli by rozpatrzeć jako przykład równania magnetogazodynamiki (6.1) w przypadku stacjonarnym z dwiema zmiennymi niezależnymi x^1 , x^2 , wówczas powstały w ten sposób z (6.1) układ równań będzie posiadał mody, które w zależności od prędkości \vec{v} będą rzeczywiste bądź zespolone. Np. dla odpowiednio małych prędkości $(v^1)^2 + (v^2)^2 < \delta_{S_+}^2$, jedynie mod entropowy będzie modem rzeczywistym, pozostałe będą zespolone. Ze wzrostem prędkości kolejne mody będą się stawały rzeczywiste S, A, F.

Kończąc ten rozdział podamy jeszcze diagramy oddziaływań modów rozpatrywanego poprzednio układu równań magnetogazodynamiki dla przypadku jednowymiarowego niestacjonarnego. Można by zapytać np. co się stanie w wyniku oddziaływania dwóch fal (modów) magnetoakustycznych różnego typu. Najmniejszy moduły Liego zawierający takie mody to moduły 2^0 zawierający wszystkie cztery mody magnetoakustyczne. Stąd wnosimy, że w wyniku takiego oddziaływania będą generowane mody F_-, S_-, S_+, F_+ tak więc mamy diagram

$$F_- + F_+ \longrightarrow F_- + S_- + S_+ + F_+.$$

Rozpatrując w ten sposób wszystkie inne możliwości dochodzimy do następujących diagramów:

$$M_{\alpha} + M_{\beta} \longrightarrow F_{-} + S_{-} + S_{+} + F_{+} ,$$

gdzie $M_{\alpha}, M_{\beta} \in \{F_{-}, S_{-}, S_{+}, F_{+}\}$ oznacza jakiegokolwiek dwa różne mody magnetoakustyczne. Podobnie

$$E + M_{\alpha} \longrightarrow F_{-} + S_{-} + E + S_{+} + F_{+} ,$$

$$A_{-} + A_{+} \longrightarrow F_{-} + A_{-} + S_{-} + S_{+} + A_{+} + F_{+} ,$$

$$A_{+} + M_{\alpha} \longrightarrow F_{-} + A_{-} + S_{-} + S_{+} + A_{+} + F_{+} ,$$

$$A_{+} + E \longrightarrow F_{-} + A_{-} + S_{-} + E + S_{+} + A_{+} + F_{+} ,$$

Tak więc w oddziaływaniu najprostszych modów, a więc modów entropowych z modami Alfvena uwikłane są wszystkie mody występujące w układzie.

7. Asymptotyka zagadnienia Cauchy'ego.

W rozdziale tym pokażemy, że w pewnych przynajmniej przypadkach istnienie sprzężeń pomiędzy modami prowadzi w przypadku oddziaływania dwóch fal Riemanna do pojawienia się trzeciej fali. Fala ta pojawia się w asymptotyce rozwiązania, gdy $t \rightarrow \infty$.

Będziemy rozpatrywać asymptotykę zagadnienia początkowego dla układu hiperbolicznego postaci

$$(7.1) \quad \begin{aligned} u_t + A(t, x, u)u_x &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x), \end{aligned}$$

gdzie $u = u^1, \dots, u^n$. Zakładamy, że A jest macierzą diagonalizowalną i daje się przedstawić w postaci

$$7.2 \quad A = S^{-1}D S,$$

gdzie S zależy jedynie od zmiennych u , natomiast D jest macierzą diagonalną

$$D = \begin{pmatrix} v_1(t, x, u) & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & v_n(t, x, u) \end{pmatrix}.$$

Założymy ponadto, że $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ oraz, że funkcja $u(0, x) = u_0(x) \in C^1(\mathbb{R}^1)$, a pochodna $u_x(0, x)$ ma nośnik zwarty. Pokażemy, że w pewnych przypadkach, jeśli rozwiązanie istnieje, to dla dużych t rozpada się na bardziej elementarne rozwiązania, na fale proste.

W przypadku szczególnym, gdy S jest nieosobliwą macierzą o współczynnikach niezależnych również od u , układ (7.1) można sprowadzić do bardziej użytecznej postaci, jeśli wprowadzić

nowe zmienne zależne $R = (R^1, \dots, R^n)$

$$R := S u.$$

Wówczas w tych zmiennych dostajemy

$$(7.3) \quad R_t + D R_x = 0,$$

skąd natychmiast wynika, że funkcja $R^\alpha(t, x)$ jest stała na charakterystyce o równaniu

$$\frac{dx}{dt} = \tilde{v}_\alpha(R(t, x), t, x),$$

gdzie $\tilde{v}(R, t, x) = v(S^{-1}R, t, x)$. W szczególności, jeśli położyć w chwili początkowej dla jakiegoś α , $R^\alpha(0, x) = R_0^\alpha(x)$ oraz $R^i(0, x) \equiv 0$, $i \neq \alpha$, wówczas $R^i(t, x) \equiv 0$, $i \neq \alpha$ dla wszystkich $t > 0$, a rozwiązanie takie jest falą prostą.

Podamy ogólniejszą definicję:

DEFINICJA 7.1 Rozwiązanie $u(t, x)$ układu (7.1) jest falą prostą w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, jeśli dla każdego $(t, x) \in \Omega$, $u_x(t, x)$ jest wektorem własnym macierzy $A(t, x, u(t, x))$.

Jeśli u_x jest wektorem własnym macierzy A , wówczas

$$u_t + v u_x = 0,$$

gdzie v jest wartością własną odpowiadającą wektorowi u_x . Zatem $u_t \sim u_x$, skąd rząd $[u_t, u_x] = 1$.

Prawdziwe jest również następujące

STWIERDZENIE 7.1 Jeśli dla jakiegoś rozwiązania $u(t, x)$ równań (7.1) rząd $[u_t, u_x] = 1$ dla $(t, x) \in \Omega$, wówczas $u(t, x)$ jest falą prostą w Ω .

Jeśli wartości własne v_α nie zależą od t, x , wówczas zgodnie z rozważaniami rozdziału 4 fale proste dla układu (7.1)

są dane w sposób uwikłany

$$u = f(\tau), \quad \tau = \psi(v_\alpha(f(\tau))t - x),$$

gdzie $\frac{du}{d\tau} = \delta_\alpha(u)$ jest wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej v_α , natomiast $\psi(\cdot)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną. Jeśli pochodna od danych początkowych ma zwarty nośnik, wówczas rozwiązania układu (7.3) mają tendencję do rozpadania się na fale proste, mówi o tym

TWIERDZENIE 7.1 Jeśli

1° wartości funkcji $R_0^i(x)$ spełniają $\alpha_i \leq R_0^i(x) \leq \beta_i$, $x \in \mathbb{R}^1$,

2° dla $z, z' \in K^n$, $K^n = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$, $x, x' \in \mathbb{R}^1$ zachodzi $v_i(z, t, x) - \tilde{v}_{i-1}(z', t, x') \geq c > 0$,

3° nośnik $\frac{\partial}{\partial x} R_0(x)$ leży w odcinku o długości 1,

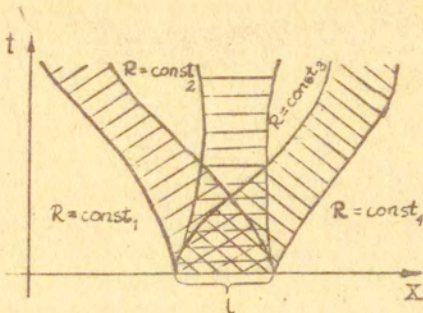
wówczas dla $t > \frac{1}{c}$ rozwiązanie rozpada się na fale proste.

Oznacza to, że dla $t > \frac{1}{c}$ rząd $[R_t(t, x), R_x(t, x)] \leq 1$.

Dowód jest bezpośrednią konsekwencją faktu, że funkcje $R^\alpha(t, x)$, $\alpha = 1, \dots, n$ są stałe na odpowiednich charakterystykach o nachyleniu v_α . Na mocy warunku 3° przy ustalonym t każda z funkcji $x \rightarrow R_x(t, x)$ ma nośnik zwarty. Warunek 2° zapewnia z kolei, że po czasie $\frac{1}{c}$ nośniki funkcji stają się rozłączne (rys.2)

$$\text{supp } R_x^i(t, x) \cap \text{supp } R_x^j(t, x) = \emptyset, \quad t > \frac{1}{c}, \quad i \neq j.$$

Układ zapisany w postaci (7.3) nazywa się układem w inwariantach Riemanna (Janienko, Roźdiestwienski 1978, Courant, Friedrichs 1948). Może się zdarzyć, że przez odpowiednią zamianę zmiennych zależnych można układ (7.1) sprowadzić do postaci (7.3). Aby taka transformacja istniała muszą być spełnione pew-



Rys.2

ne, dość silne warunki.

TWIERDZENIE 7.2 Na to, by w pewnym otoczeniu punktu u_0 układ (7.1) dał się zapisać w postaci (7.3) potrzeba i wystarcza, żeby wektory własne macierzy A kolumny macierzy $S^{-1} = (\delta_1(u), \dots, \delta_n(u))$ spełniały

$$(7.4) \quad [\delta_i, \delta_j] \in \text{Lin} [\delta_i, \delta_j]$$

dla u z otoczenia u_0 .

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że warunki (7.4) są warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, aby istniał układ współrzędnych R^1, \dots, R^n , którego linie są styczne do pól $\delta_1, \dots, \delta_n$, tzn. by równania

$$(7.5) \quad \frac{\partial u}{\partial R^1} \sim \delta_1(u), \dots, \frac{\partial u}{\partial R^n} \sim \delta_n(u)$$

miały rozwiązanie z nieznikającym jacobianem $\det \left[\frac{\partial u}{\partial R} \right]$. Taki układ współrzędnych można skonstruować korzystając z twierdzenia Frobeniusa. Istotnie, moduły

$$\mathcal{M}_i = \{ \delta_1, \dots, \delta_{i-1}, \delta_{i+1}, \dots, \delta_n \}$$

generowane przez wszystkie pola wektorowe δ_α , za wyjątkiem pola δ_i , spełniają również założenia twierdzenia Frobeniusa. Dla każdego $i = 1, \dots, n$ istnieje zatem lokalna foliacja przestrzeni H rozmaitościami M_i wymiaru $n-1$ stycznych do M_i ;

$TM_i = M_i$. Można ją zapisać jako

$$(7.6) \quad F_i(u) = \text{const}_i \stackrel{\text{ozn}}{=} R_i.$$

Wektory δ_α spełniają odpowiednie warunki dualności

$$(7.7) \quad \langle dF_\alpha, \delta_\beta \rangle := \delta_\beta^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\beta} F = 0, \quad \alpha \neq \beta$$

$$\langle dF_i, \delta_i \rangle \neq 0.$$

Jeśli R^1, \dots, R^n potraktować jako nowy układ współrzędnych, wówczas na mocy zależności 7.6 $dR_i = dF_i$, ale wektory bazowe $\left\{ \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \right\}_{\alpha=1, \dots, n}$ stanowią bazę dualną do form $\{dR_\alpha\}_{\alpha=1, \dots, n}$

$$\langle dR_\alpha, \frac{\partial}{\partial R_\beta} \rangle := \frac{\partial}{\partial R_\beta} R^\alpha = \delta_\alpha^\beta,$$

a zatem

$$\langle dF_\alpha, \frac{\partial}{\partial R_\beta} \rangle = \delta_\alpha^\beta.$$

Uwzględniając (7.7) oznacza to, że $\frac{\partial}{\partial R^i} \sim \delta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, co kończy dowód.

Rozwikłując związki (7.6) względem u możemy wyrazić stare współrzędne poprzez nowe R^1, \dots, R^k

$$(7.8) \quad u = f(R^1, \dots, R^k).$$

Otrzymane w ten sposób funkcje spełniają już równania (7.5).

Podstawiając (7.8) do równań (7.1) oraz korzystając z własności (7.5) otrzymujemy równania na R^1, \dots, R^n typu (7.3).

Wniosek: Dla układów (7.1), które spełniają warunki (7.4) obowiązuje również twierdzenie 7.1.

W szczególności warunki (7.4) są automatycznie spełnione dla $n = 2$.

DEFINICJA 7.2 Jeśli istnieje takie $t_r < \infty$, że dla $t > t_r$ rząd $[u_t, u_x] \leq 1$, wówczas rozpad będziemy nazywali rozpadem dokładnym.

DEFINICJA 7.3 Będziemy mówili, że dane początkowe $u_0(x)$ są zlokalizowane w odcinku $[a, b]$, jeśli $\text{supp } \frac{\partial}{\partial x} u_0(x) \subset [a, b]$.

Jak się wydaje, można dowieść następującego twierdzenia
 TWIERDZENIE 7.3 Jeśli dla każdego zlokalizowanych danych początkowych wystarczy dowolnie małych i zlokalizowanych w dowolnie małych odcinkach rozwiązania układu (7.1) rozpadają się dokładnie, wówczas układ (7.1) spełnia warunki (7.4).

Jeśli zatem nie byłby spełniony warunek (7.4), wtedy na ogół nie należałoby spodziewać się rozpadu dokładnego.

Przejdziemy teraz do opisu rozpadu asymptotycznego. Układ (7.3) ma tę własność, że jeśli jakieś R^α było zerem w chwili początkowej, wówczas $R^\alpha \equiv 0$ dla wszystkich czasów i odwrotnie, jeśli R^α nie jest tożsamościowo równe zero w chwili początkowej, wówczas R^α nie znika tożsamościowo dla wszystkich czasów. Własność tę można sformułować inaczej mówiąc, że liczba fal zostaje zachowana podczas oddziaływania. Jeśli układ (7.1) nie spełnia warunków (7.4), wówczas fale mogą "ginąć" bądź powstawać w trakcie oddziaływania (Peradzyński 1974, 1978). Aby nadać określony sens powyższej wypowiedzi trzeba, aby rozwiązanie ze zlokalizowanymi danymi początkowymi rozpadło się w jakimś sensie na fale proste.

DEFINICJA 7.4 Mówimy, że rozwiązanie $u(t, x)$ rozpada się asymptotycznie na fale proste w normie $\| \cdot \|$, jeśli dla każdego ε istnieje takie T , że dla $t > T$ rozwiązanie może być aproksymowane przez fale proste z dokładnością ε , tzn. że istnieje $u_\varepsilon(t, x)$ takie, że

$$\|u(t, x) - u_\varepsilon(t, x)\| < \varepsilon, \quad \text{rząd} [u_{\varepsilon t}, u_{\varepsilon x}] \leq 1.$$

Jeśli wprowadzić nowe zmienne $V = Su_x$, wówczas równanie (7.1) zapisuje się w postaci

$$(7.9) \quad u_t = -S^{-1}D V.$$

Różniczkując je po x dostajemy po pewnych przekształceniach równania na V

$$(7.10) \quad V_t + DV_x = Q(V)V + \tau(DV, V),$$

gdzie $Q(V)$ jest diagonalną macierzą

$$Q(V) = \frac{\partial}{\partial x} D(u(t, x)) = V^\alpha D_{\delta_\alpha},$$

a $\tau(U, V)$ jest antysymetryczną formą, której współczynniki są określone przez współczynniki rozkładu następujących komutatorów pól δ :

$$[\delta_\alpha, \delta_\beta] = \tau_{\alpha\beta}^\delta \delta_\delta.$$

Równania (7.9) i (7.10) razem tworzą tzw. układ przedłużony, który jest równoważny układowi (7.1) pod warunkiem, że dane początkowe na V spełniają związek $V_x^0 = Su_x^0$. Drugi człon po prawej stronie równania (7.10) jest odpowiedzialny za "generację" nowych fal. Istotnie, jeśli $\tau(DV, V)$ znika tożsamościowo, wówczas równania (7.10) mają tę samą własność co równania (7.3),

tn. jeśli dla jakiegoś $\alpha \in (1, \dots, n)$ $V^\alpha(0, x) = 0$, wówczas $V^\alpha(t, x) \equiv 0$. Jest to skutkiem tego, że macierz $Q(V)$ jest macierzą diagonalną. Mamy tutaj

LEMAT 7.1 Jeśli $\tau(DV, V) = 0$ poza pewnym zbiorem ograniczonym $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, oraz v_1, \dots, v_n spełniają na rozwiązaniu $u(t, x)$ nierówności $v_i(t, x) - v_{i-1}(t, x') \geq c \geq 0, x, x' \in \mathbb{R}$, wówczas rozwiązanie rozpada się dokładnie, jeśli tylko dane początkowe były zlokalizowane.

Istotnie, niech

$$t_\Omega = \sup \{t, (t, x) \in \Omega\},$$

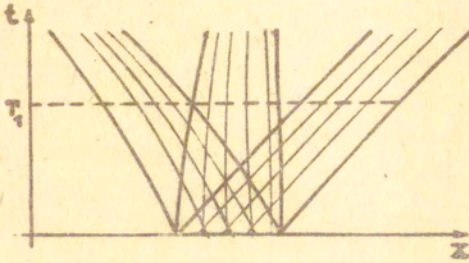
wówczas rozwiązanie w chwili t_Ω jest zlokalizowane (hiperboliczność). Biorąc teraz $V(t_\Omega, x)$, $u(t_\Omega, x)$ jako warunek początkowy dla równań (7.9), (7.10) już z $\tau \equiv 0$ otrzymujemy na mocy poczynionych uwag tezę Lematu.

Naszkicujemy teraz ideę dowodu twierdzenia o rozpadzie asymptotycznym (Peradzyński 1978), które to twierdzenie sformułujemy później. Załóżmy mianowicie, że istnieje rozwiązanie równań (7.1), a więc również (7.9) i (7.10) ze zlokalizowanymi danymi początkowymi ($V(0, x)$ ma nośnik zwarty). Rozwiązanie $V(t, x)$ spełnia następujący zlinearyzowany układ na Z

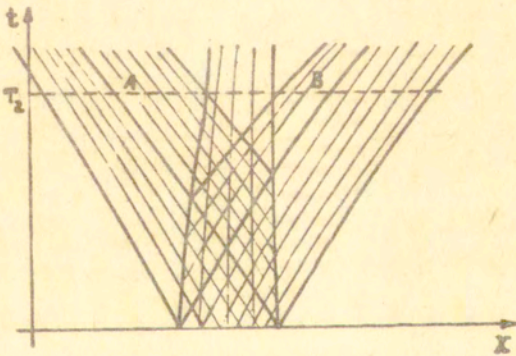
$$(7.11) \quad \begin{aligned} Z_t + \tilde{D}(t, x)Z &= Q(t, x)Z + \tau(\tilde{D}(t, x)V(t, x), Z), \\ Z(0, x) &= V_0(x). \end{aligned}$$

Jeśli rozwiązywać ten układ metodą kolejnych przybliżeń kładąc

$$\begin{aligned} Z_t^k + \tilde{D}^k Z &= B(t, x) Z^{k-1} \\ Z(0, x) &= V_0(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$



Rys.3. Sytuacja po pierwszym przybliżeniu. W drugim przybliżeniu człon $\tau(DV^1, V^1)$ znika poza obszarem zakreskowanym podwójnie.



Rys.4. W drugim przybliżeniu $\tau(DV^1, V^1)$ generuje nowe zaburzenia - paski A i B. W trzecim przybliżeniu $\tau(DV^2, V^2)$ znowu znika poza obszarem zakreskowanym podwójnie.

$$Z(t, x) \equiv 0,$$

$$\text{gdzie } B(t, x) Z = Q(t, x) Z + \tau \tilde{D}(t, x) V(t, x), Z^{k-1},$$

wówczas na mocy antysymetrii τ oraz lematu 7.1 stwierdzamy przez indukcję, że w każdym kroku funkcja $\tau \tilde{D}(t, x) V(t, x), Z(t, x)$ ma nośnik zwarty, a więc $Z(t, x)$ rozpada się dokładnie po pewnym czasie T_k , który można oszacować od góry, jeśli znamy

$$(7.12) \quad c_i(t) \leq \inf(v_i(u(t, x), t, x) - v_{i-1}(u(t, x), t, x)), \\ i = 2, 3, \dots, k.$$

Znalezienie takich c_i może nie być trudne, jeśli znany jest a priori zbiór wartości rozwiązania $u(t, x)$, np. jeśli wiadomo, że $|u^j(t, x)| < K$, $j = 1, \dots, k$; wówczas \inf po x, x' można zastąpić \inf po u, u' przy $|u^j| < K$ oraz $|u'^j| < K$.

Jeśli okaże się, że $V(t, x)$ można aproksymować takimi rozpadającymi się dokładnie rozwiązaniami $Z(t, x)$, będzie to oznaczać, że $V(t, x)$ rozpada się asymptotycznie na fale proste.

Jeśli $\tilde{x} = \xi_\alpha(\tau; t, x)$, $\alpha = 1, 2, \dots, k$ jest charakterystyką odpowiadającą wartości własnej v_α , przechodzącą przez punkt (t, x) tzn. $\xi_\alpha(\tau)$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{d\xi_\alpha}{d\tau} = v_\alpha(u(\tau, \xi), \tau, \xi_\alpha), \quad \xi_\alpha(t; t, x) = x,$$

wówczas równania (7.11) można zapisać w postaci całkowej

$$(7.13) \quad Z^\alpha(t, x) = \int_0^\tau B(\tau, \xi_\alpha(\tau; t, x)) Z^\alpha(\tau, \xi_\alpha(\tau; t, x)) d\tau + \\ + V_0(\xi_\alpha(0, t, x)).$$

Wprowadzając normę

$$\|Z\|_t = \max_i \sup_{\substack{0 < \tau < t \\ x \in \mathbb{R}^1}} |\dot{Z}^j(\tau, x)|$$

możemy na podstawie (7.13) napisać następujące oszacowanie dla dwóch kolejnych przybliżeń

$$\|Z^{k-1} - Z^k\|_T \leq \|B\|_{\infty} \int_0^T \|Z^{k-1} - Z^k\| dt \leq B^n \|V(0, x)\| \frac{T^k}{k!},$$

gdzie

$$\|B\|_t = \max_i \sup_{\substack{0 < \tau < t \\ x \in \mathbb{R}^1}} \sum_j |B_{ij}^1(\tau, x)|, \quad B = \|B\|_{\infty},$$

co dalej daje

$$\|V - Z\|_T \leq \|Z - Z^k\| + \|Z - Z^{k-1}\| + \dots \leq \frac{\|V(0, x)\|}{k} \frac{(BT)^k}{k!} e^{BT}.$$

Oznaczmy teraz przez T_k czas rozpadu n -tego przybliżenia Z^k .

Jeśli ciąg

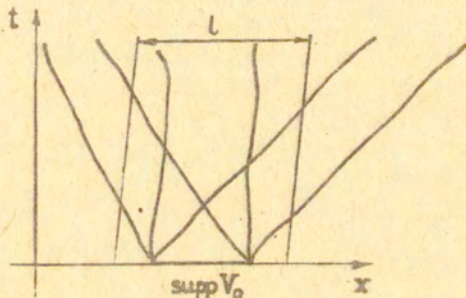
$$q_k = \frac{1}{k!} \frac{(BT_k)^k}{k!} e^{BT_k}$$

jest zbieżny do zera, wtedy każde Z^k przybliża V z dokładnością q_k aż do chwili rozpadu, a zatem istotnie w takim przypadku możemy wnioskować, że V rozpada się asymptotycznie na fale proste. Jeśli w (7.12) oszacować $c_i(t)$ przez stałą \tilde{c}_i $\tilde{c}_i \leq c_i(t)$, wówczas w ogólności na T_k można otrzymać oszacowanie

$$T_k \leq \text{stała} \cdot k^\alpha,$$

gdzie $\alpha \geq 1$. Okazuje się jednak, że ciąg ten może być zbieżny jedynie w tych przypadkach kiedy $\alpha = 1$, tzn. T_k rośnie nie szybciej niż liniowo z k : $T_k \sim k$. Warunek ten może być speł-

niony jedynie w przypadku, kiedy układ posiada nie więcej niż trzy różne wartości własne $v_1 < v_2 < v_3$, ponadto środkowe charakterystyki (tzn. odpowiadające v_2) zaczynające się w zbiorze $\text{supp } V_0(x)$ muszą leżeć w pasku o stałej szerokości 1 (rys.5).



Rys.5.

Niech jego nachylenie będzie $\overset{\circ}{v}_2$, wtedy

$$T_k \leq (k + \frac{1}{2}) \Theta,$$

gdzie

$$\Theta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\inf(\overset{\circ}{v}_2 - v_1)} + \frac{1}{\inf(v_3 - \overset{\circ}{v}_2)} \right]$$

(zakładamy tu, że $v_1 < \overset{\circ}{v}_2 < v_3$). Ciąg $\left\{ \frac{1}{k} \frac{(k\Theta)^k}{k!} e^{k\Theta} \right\}$ jest zbieżny do zera, jeśli jest spełniona nierówność

$$(7.14) \quad \Theta e^{\Theta+1} < 1 \implies \Theta \leq 0.28.$$

Wyniki tych rozważań sformułujemy w postaci następującej:

TWIERDZENIE 7.4 (o rozpadzie). Jeśli układ (7.1) spełnia następujące warunki:

1° $n = 3$ oraz środkowe charakterystyki opuszczające zbiór

$\text{supp } V_0(x)$ leżą w pewnym pasku o szerokości 1, tzn. w zbiorze $\{(x, t); x_0 + v_2^0 t < x < x_0 + 1 + v_2^0 t, t > 0\}$;

2^o wartości własne spełniają nierówności $v_1 < v_2 < v_3$ oraz

$$\Theta = \frac{1}{2} \sup \left[\frac{1}{v_2 - v_1} + \frac{1}{v_3 - v_2} \right] > 0;$$

3^o spełniona jest nierówność (7.14) gdzie

$$B = \max_i \sup_{t > 0; x \in \mathbb{R}^1} \sum_j |B_j^i(t, x)|,$$

wówczas rozwiązanie, jeśli istnieje dla wszystkich t , rozpada się asymptotycznie na fale proste.

Dotychczasowe rozważania zilustrujemy następującym przykładem

$$(7.15) \quad \begin{cases} u_t^1 - u_x^1 - a u^3 u_x^2 = 0 \\ u_t^2 = 0 \\ u_t^3 + u_x^3 - b u^1 u_x^2 = 0. \end{cases}$$

Układ ten jest układem postaci (7.1). Jego macierz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -a u^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b u^1 & 1 \end{pmatrix}$$

posiada trzy różne wartości własne $v_1 = -1$, $v_2 = 0$, $v_3 = 1$.

Z drugiego równania wynika, że $u^2(t, x)$ nie zależy od t i jest dowolną funkcją x . Położmy $\frac{\partial}{\partial x} u^2(x) = \Psi(x)$, wówczas układ (7.15) redukuje się do układu dwóch równań liniowych

$$(7.16)^* \quad \begin{cases} u_t^1 - u_x^1 = a \Psi u^3 \\ u_t^3 + u_x^3 = b \Psi u^1 \end{cases}$$

tej samej postaci co równania (7.11). Położmy $a = b > 0$ oraz

$$x = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{dla } |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases},$$

wtedy np.

$$u^1 = g(t, -x)$$

$$u^2 = g(t, x)$$

jest rozwiązaniem równania (7.16), gdzie

$$g(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } (t, x): x < -\frac{1}{2} \\ Ae^{\lambda t} \sin \mu(x + \frac{1}{2}), & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ Ae^{\lambda(t-x+\frac{1}{2})} \sin \mu l, & x \geq \frac{1}{2}, \quad t \geq x - \frac{1}{2} \\ A \sin \mu l, & 0 < t \leq x - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Natomiast λ i μ spełniają następujące równania

$$\lambda + a \cos \mu l = 0$$

$$\mu - a \sin \mu l = 0.$$

Równania te mają dodatnie pierwiastki na λ pod warunkiem, że $1 + a > \frac{\pi}{2}$. Wówczas rozwiązanie jest narastające w czasie i nie ma asymptotycznego rozpadu na fale proste. Z drugiej strony warunek (7.14) powiada, że jest rozpad (na pewno) dla $1 + a e^{1+a} < 1$, ponieważ $\theta = 1$, $B = a$, co oznacza w przybliżeniu $1 + a < 0.28$. Przykład ten pokazuje, że kryterium (7.14) niewiele da się polepszyć, jeśli nie poczynić dodatkowych założeń. Zauważmy np., że z równań (7.15) wpływa prawo zachowania

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^1} [b(u^1)^2 - a(u^2)^2] dx = 0.$$

Jeśli a i b są różnego znaku, wówczas funkcji podcałkowej można nadać sens energii. Można również sprawdzić, że dla $ab < 0$ układ (7.16) nie ma narastających rozwiązań, jeżeli $\text{supp } Y(x)$, $\text{supp } u_0^1(x)$, $\text{supp } u_0^3(x)$ są zbiorami zwartymi. Powstaje pytanie, na ile sytuacja jest lepsza, jeśli równania (7.1) implikują prawo zachowania typu prawa zachowania energii.

Rozwiązania układu (7.1) nawet z gładkimi danymi początkowymi istnieją na ogół tylko do jakiegoś skończonego czasu, po którym pochodne mogą stać się nieograniczone. Mówimy wtedy o katastrofie gradientowej. Aby więc móc wykazać asymptotyczny rozpad na fale proste należy założyć globalne istnienie ograniczonego wraz z pochodnymi rozwiązania, albo istnienie co najmniej aż do jakiegoś czasu, przed którym praktycznie możemy mówić o asymptotycznym rozpadzie. Dla tak zwanych układów wyjątkowych, tj. spełniających warunki

$$(7.17) \quad \bigwedge_{i=1, \dots, n} v_i, \chi_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial u^k} \delta_i^k = 0.$$

sformułowano hipotezę mówiącą, że rozwiązania takich układów nie mają katastrofy gradientowej (Jeffrey 1976). Dowód dla $n = 2$ można znaleźć w książce Janienki i Roźdiestwienskigo (1978). Przy pewnych dodatkowych założeniach pokazano słuszność tej hipotezy i istnienie globalnych rozwiązań w przypadku $n = 3$ (Boettger 1978, 1979). Problem pojawia się osobliwość dla układów ściśle nieliniowych, t.j. takich, dla których $v_i \chi_i \neq 0$, był badany przez F. Johna (1974, 1976).

8. Układy z wieloma zmiennymi niezależnymi.

Przejdźmy teraz do układów nieliniowych z wieloma zmiennymi niezależnymi. Uogólnieniem układu (1.3) byłby następujący układ

$$(8.1) \quad U_t + A^r(U)U_{x^r} = b(U), \quad U = (U^1, \dots, U^l),$$

gdzie A^r są macierzami $l \times l$. Będziemy jednak rozważać ogólniejsze układy postaci

$$(8.2) \quad A_j^{sv}(U)U_{x^v}^j = b^s(U)$$

nie zakładając, że liczba równań jest równa liczbie szukanych funkcji. Aby jednak zachować geometryczny punkt widzenia będziemy się starali unikać wyróżniania współrzędnych. Będziemy zatem uważać, że:

1°. Przestrzeń zmiennych zależnych x -ów jest pewną n -wymiarową przestrzenią afiniczną modelowaną nad przestrzenią wektorową TE . Założenie to jest związane z tym, że układy typu (8.1) i (8.2) zachowują swoją strukturę przy przesunięciach $x \rightarrow x + \alpha$, $\alpha \in TE$, a układ (8.2) również przy ogólnych transformacjach afinicznych $x^v \rightarrow C_y^{v'} x^v + x_0^v$. W ten sposób, robiąc założenie o jednorodności przestrzeni fizycznej będziemy mieli do czynienia z czystą nieliniowością, nie skażoną zależnością współczynników równania od zmiennych zależnych.

2°. Podobnie jak poprzednio założymy, że przestrzeń zmiennych zależnych jest rozmaitością różniczkowalną H wymiaru l , a rozwiązania będą odwzorowaniami pewnego obszaru $\Omega \subset E$ w H

$$u : \Omega \longrightarrow H.$$

Dopóki rozważamy ciągłe rozwiązania $u(x) \in C(\Omega, H)$ wygodnie jest traktować układ równań nie jako napis (8.2), ale wziąć moduł generowany przez (8.2) nad pierścieniem α funkcji gładkich na H , tzn. wziąć zbiór wszystkich możliwych kombinacji równań (8.2)

$$(8.3) \quad \Phi = \left\{ \varphi_s(u) (A_{j,x^j}^{s\varphi}(u) - b^s(u)), \quad \varphi_s \in \alpha \right\}$$

i wówczas niezależne spośród równań (8.2) są generatorami modułu Φ . Ten punkt widzenia nie daje się jednak utrzymać, jeśli rozpatrywać słabe rozwiązania, czyli dopuszczające nieciągłości samego $u(x)$. W tym przypadku ważna jest konkretna dywergentna postać układu, a więc

$$(8.4) \quad \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} F^{\mu s}(u) = b^s(u), \quad s = 1, \dots, l.$$

Z definicji $u : \Omega \rightarrow H$ jest słabym rozwiązaniem równań (8.4), jeśli dla każdych funkcji $\varphi_s \in C_0^{\infty}(\Omega)$ zachodzi

$$- \sum_s \int_{\Omega} F^{\mu s}(u(x)) \varphi_{s, x^{\mu}} dx = \sum_s \int_{\Omega} b^s(u(x)) \varphi^s(x) dx,$$

co istotnie pokazuje, że słabe rozwiązanie wymaga wyróżnienia konkretnych generatorów modułu Φ .

Przykład:

Równania

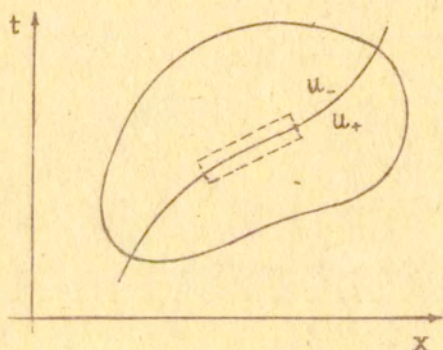
$$(8.5) \quad \frac{1}{n+1} (u^{n+1})_t + \frac{1}{n+2} (u^{n+2})_x = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

na jedną funkcję u od zmiennych t, x , mające postać dywergentną są równoważne w przypadku rozwiązań klasycznych $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Prowadzą natomiast w ogólności do różnych rozwiązań słabych.

Istotnie, jeśli $u(t, x)$ ma nieciągłość na pewnej linii $x = x(t)$ o wektorze normalnym $\vec{n} = (n_0(t, x(t)), n_1(t, x(t)))$, wówczas warunki zgodności pomiędzy wartością z lewej strony u_- i wartością z prawej strony u_+ spełniają

$$\frac{1}{n+1} (u_+^{n+1} - u_-^{n+1}) n_0 + \frac{1}{n+2} (u_+^{n+2} - u_-^{n+2}) n_1 = 0,$$

co łatwo pokazać całkując równanie (8.5) po małym prostopadłościu o bokach dłuższych równoległych do linii nieciągłości (rys. 6), a następnie stosując twierdzenie Stokesa.



Rys.6.

W dalszym ciągu będziemy jednak zajmować się własnościami rozwiązań ciągłych. Dlatego też przyjmiemy pierwszy punkt widzenia układu równań jako modułu Φ . Jeśli teraz $u: E \rightarrow H$, wówczas odwzorowanie styczne du w punkcie x_0 może być utożsamiane z elementem przestrzeni liniowej $T_{u_0} H \otimes T^* E$, $u = u_0(x)$. Można teraz rozpatrzeć formę liniową A^S określoną na wiązce $TH \otimes T^* E$ nad rozmaitością H jako bazą, tzn. dla każdego $u_0 \in H$ mamy liniowe odwzorowanie

$$\Lambda^S(u_0) : T_{u_0}H \otimes T^*E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Możemy zatem wziąć wartość tej formy na odwzorowaniu stycznym du

$$\langle \Lambda^S, du \rangle.$$

Przyrównując jej wartość do zera dostaniemy geometryczny odpowiednik jednorodnego równania quasiliniowego. W ogólnym przypadku możemy wziąć kilka takich form i odpowiadający im układ równań będziemy utożsamiali z modułem generowanym przez te formy

$$(8.6) \quad \Phi := \left\{ \sum_S \psi_S \langle \Lambda^S, du \rangle, \psi_S \in \mathcal{O} \right\}.$$

Jeśli ustalić punkt $u_0 \in H$ wówczas Φ_{u_0} jest przestrzenią wektorową. Będziemy zakładać, że układ jest regularny tzn.

$$\dim \Phi_u = \text{const}, \quad u \in H.$$

9. Elementy całkowe.

Rozpatrzmy teraz układ jednorodny

$$(9.1) \quad \Phi = 0$$

otrzymany przez przyrównanie form z Φ do zera. Lokalizując formy z Φ w punkcie u_0 możemy obliczać

$$\langle A(u_0), L \rangle, \quad L \in T_{u_0} H \otimes T^* E.$$

DEFINICJA 9.1 $L \in T_{u_0} H \otimes T^* E$ będziemy nazywać elementem całkowym układu w punkcie $u_0 \in H$, jeśli

$$(9.2) \quad \langle A(u_0), L \rangle = 0.$$

Ważną rolę w dalszych rozważaniach będą odgrywać elementy charakterystyczne.

DEFINICJA 9.2 Element $\delta \otimes \lambda \neq 0$, $\delta \in T_{u_0} H$, $\lambda \in T^* E$ jest elementem charakterystycznym w punkcie $u_0 \in H$, jeśli

$$(9.3) \quad \langle A(u_0), \delta \otimes \lambda \rangle = 0.$$

Jeśli użyć generatorów naszego układu równań oraz układu współrzędnych u^1, \dots, u^l na rozmaitości H , wówczas ostatni warunek przyjmie postać

$$A_j^{s^y}(u_0) \delta^j \lambda_y = 0.$$

Istnienie niezerowych δ wymaga, żeby

$$(9.4) \quad \text{rzęd} \| A_j^{s^y}(u_0) \lambda_y \| < \dim H = 1.$$

Prowadzi to do pewnych równań na λ , które nazywają się związkami dyspersyjnymi. W przypadku układu określonego $l = m$ (tzn.

$\dim H =$ liczba niezależnych równań), związek dyspersyjny sprowadza się do jednego równania

$$(9.5) \quad F(u, \lambda) = \det \| \Delta_j^{s\nu}(u) \lambda_\nu \| = 0.$$

F jest w ogólności iloczynem pewnej ilości nierozkładalnych jednorodnych wielomianów ze względu na λ

$$(9.6) \quad F(u, \lambda) = w_1(u, \lambda)^{\alpha_1} \dots w_k(u, \lambda)^{\alpha_k}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Zgodnie z naszą definicją układu równań poprzez moduł Φ , F zależy od wyboru konkretnych generatorów i jest wobec tego określone z dokładnością do czynnika multiplikatywnego zależącego od u .

Jeśli λ spełnia związki dyspersyjne, wówczas nosi nazwę wektora (dokładniej kowektora) charakterystycznego, w przeciwnym przypadku powiemy, że λ nie jest wektorem charakterystycznym. Każdy z wielomianów $w_i(u, \lambda)$ będziemy nazywać analityczną gałęzią związku dyspersyjnego.

W ogólności, jeśli dokonać kompleksyfikacji wiązki $TH \otimes T^*E$, wówczas możemy rozważać również eliptyczne tj. zespolone elementy charakterystyczne

$$\langle A(u), \delta \otimes \lambda \rangle = 0, \quad \delta \in T_{u_0}^{\mathbb{C}} H, \quad \lambda \in T^{\mathbb{C}*} E.$$

Używając zespolonego elementu charakterystycznego można dostać rzeczywisty element całkowy biorąc $L = \delta \otimes \lambda + \overline{\delta \otimes \lambda}$. Zbiór wszystkich elementów całkowych w jakimś punkcie $u_0 \in H$ tworzy przestrzeń liniową, którą oznaczamy przez $\mathcal{L}_{u_0} \Phi$

$$\mathcal{L}_{u_0} \Phi = \{ L \in T_{u_0} H \otimes T^* E, \langle A(u_0), L \rangle = 0 \}.$$

Jeśli założyć, że $\dim \Phi_u = \text{const}$, $u \in H$, wówczas również $\dim \mathcal{L}_u \Phi = \dim H \times \dim E - \dim \Phi_{u_0}$ nie zależy od punktu u rozmaitości H , wobec czego będziemy mieć do czynienia z wiązką $\mathcal{L}\Phi$ elementów całkowych. Oczywisty lemat pozwala nam rozważać układ równań Φ jako równoważny odpowiedniemu układowi form zewnętrznych.

LEMAT 9.1 Odwzorowanie $u : E \rightarrow H$ jest rozwiązaniem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in E$

$$(du)(x) \in \mathcal{L}_{u(x)} \Phi.$$

Warto również zauważyć, że każda subwiązka $\mathcal{L}' \subset TH \otimes T^*E$ definiuje pewien układ równań, który jest układem typu (8.6), jeśli \mathcal{L}' jest również wiązką wektorową.

Istotnie, wystarczy wziąć anihilator $A_{\mathcal{L}'}$ w $T^*H \otimes TE$ wiązki \mathcal{L}' , wtedy

$$\langle A_{\mathcal{L}'}, du \rangle = 0$$

jest odpowiednim układem równań.

Używając klasycznego zapisu mówimy, że układ równań (8.2) jest w postaci Cauchy'ego, jeśli ma on postać

$$(9.7) \quad u_{x_0} = A_j^{r\alpha} u^j_{x^r} + b^\alpha, \quad r = 1, 2, \dots, n-1.$$

Dla analitycznych układów tej postaci obowiązuje twierdzenie Cauchy-Kowalewskiej. Ponieważ nasza geometryczna definicja nie wyróżnia takiego zapisu, zatem będziemy mówić, że układ jest lokalnie postaci Cauchy'ego, jeśli w jakimś układzie współrzędnych w H i E można go tak zapisać. Podamy nieco ogólniejszą definicję identyfikując układ z jego wiązką elementów całkowych.

TWIERDZENIE 9.1 Układ $\mathcal{L} \subset TH \otimes T^*E$ jest typu Cauchy'ego jeśli:

- 1°. $\dim \mathcal{L}_u = (\dim E - 1) \cdot \dim \mathcal{L}_u(E)$, $u \in H$;
- 2°. dystrybucja $\mathcal{L}(E)$ podprzestrzeni $\{L(E)\}_{L \in \mathcal{L}_u} \subset T_u H$ jest całkowna (inwolutywna) czyli spełnia warunki Frobeniusa;
- 3°. dla każdego $u \in H$ istnieje co najmniej jeden kierunek niecharakterystyczny $\beta \in T^*E$ tzn. taki, że

$$T_u H \otimes \beta \cap \mathcal{L}_u = \emptyset \quad (\text{zbiór pusty}).$$

Istotnie, na mocy warunku 2° otrzymujemy, że w otoczeniu dowolnego punktu $u_0 \in H$ istnieje lokalnie taki układ współrzędnych $\tau^1, \dots, \tau^k, s^{k+1}, \dots, s^1$, że powierzchnie $s = \text{const}$ są powierzchniami całkowymi dystrybucji $\mathcal{L}(E)$. W tym układzie równania można napisać następująco

$$(9.7) \quad \begin{array}{ll} \text{a/} & a_r^{s\nu}(\tau, s) \tau_{,x\nu}^r = 0 & s = 1, \dots, m \\ & & r = 1, \dots, \dim \mathcal{L}_u(E) \\ \text{b/} & s^\chi = \text{const}, & \chi = k+1, \dots, 1. \end{array}$$

Na mocy założenia zawartego w punkcie 1° otrzymujemy, że liczba niezależnych spośród równań a/ równa jest $\dim \mathcal{L}_u(E)$. Zatem $\tilde{a}^\nu = (\tilde{a}_r^{s\nu})$, $\nu = 1, \dots, n$ są macierzami kwadratowymi. Z kolei z warunku 3° wynika, że $\det \|A_j^{s\nu}(u_0)\beta_\nu\| \neq 0$. Ale na mocy ciągłości $\tilde{a}_j^{s\nu}(u)$, istnieje otoczenie \mathcal{O}_{u_0} punktu u_0 takie, że $\det \|a_j^{s\nu}(u)\beta_\nu\| \neq 0$ dla $u \in \mathcal{O}_{u_0}$. Jeśli teraz wybrać afiniczny układ współrzędnych w E taki, że $x_0 = \langle \beta, x \rangle$, wówczas równania (9.7) po pomnożeniu przez $(\tilde{a}_j^{s\nu}\beta_\nu)^{-1}$ przyjmą postać

$$\begin{array}{ll} \tau_{,x_0}^\alpha & = a_r^{\alpha q} \tau_{,xq}^r, & q \neq 0, \\ s^\chi & = \text{const}_\chi, \end{array}$$

która jest faktycznie postacią Cauchy'ego.

Rozważanie tego rozdziału zilustrujemy na przykładzie układu równań gazodynamiki

$$(9.8) \quad \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \right) \vec{v} + \text{grad } p &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \right) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \right) S &= 0 \\ p &= f(\rho, S), \end{aligned}$$

gdzie o równaniu stanu zakładamy, że prowadzi do rzeczywistej prędkości dźwięku c

$$c^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho} > 0,$$

$\vec{v}(t, x) \in \mathbb{R}^3$ jest tu polem prędkości, $\rho(t, x)$ - polem gęstości, a $S(t, x)$ - entropią właściwą gazu. Równanie (9.3) definiujące elementy charakterystyczne (proste) otrzymuje się poprzez zastąpienie (podobnie jak przy transformacji Fouriera) pochodnych $u_{,x^j}^j$ przez macierz $\delta^j \lambda_{,j}$ tensora $\delta \otimes \lambda \in TH \otimes T^*E$. Ustalmy zatem następujące przyporządkowanie

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right) \rightarrow (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \stackrel{\text{ozn}}{=} (\lambda_0, \bar{\lambda}) \in T^*E.$$

Podobnie w wiązce stycznej TH

$$u = (S, \rho, v^1, v^2, v^3) \rightarrow (\delta_S, \delta_\rho, \delta^1, \delta^2, \delta^3) \stackrel{\text{ozn}}{=} (\delta_S, \delta_\rho, \bar{\delta}) \in TH.$$

Innymi słowy - δ^i są składowymi wektora stycznego z $T_u H$ w bazie

$$\frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial v^1}, \frac{\partial}{\partial v^2}, \frac{\partial}{\partial v^3}.$$

Wprowadźmy jeszcze jedno oznaczenie

$$(9.9) \quad \delta(\lambda) := \lambda_0 + \vec{v} \cdot \vec{\lambda},$$

gdzie kropka oznacza euklidesowy iloczyn skalarny w \mathbb{R}^3 . Używając tych oznaczeń oraz wyrażając w pierwszym z równań (9.8) ciśnienie p poprzez równanie stanu dostajemy następujące równania definiujące elementy charakterystyczne układu (9.8)

$$(9.10) \quad \begin{aligned} \rho \delta(\lambda) \vec{\delta} + (c^2 \delta_\rho + f_{,S} \delta_S) \vec{\lambda} &= 0 \\ \delta(\lambda) \delta_\rho + \rho \vec{\delta} \cdot \vec{\lambda} &= 0 \\ \delta(\lambda) \delta_S &= 0. \end{aligned}$$

Związek dyspersyjny (warunek istnienia nietrywialnych rozwiązań na $\vec{\delta}$ algebraicznego układu (9.10)) ma tu postać

$$(9.11) \quad \delta(\lambda)^3 (\delta^2(\lambda) - c^2 |\vec{\lambda}|^2) = 0,$$

gdzie $|\vec{\lambda}|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, $c^2 = c^2(\rho, S) = \frac{\partial f}{\partial \rho}$. Mamy tu zatem dwie analityczne gałęzie związku dyspersyjnego

$$1^\circ \text{ liniową, o krotności 3: } \delta(\lambda) := \lambda_0 + \vec{v} \cdot \vec{\lambda} = 0,$$

$$2^\circ \text{ kwadratową, o krotności 1: } \delta^2(\lambda) - c^2 |\vec{\lambda}|^2 = 0.$$

W związku z tym będziemy mieć do czynienia z dwoma klasami elementów charakterystycznych:

1^o elementy entropowe $\delta = 0$; w tym przypadku równania (9.10) redukują się do następujących równań

$$\begin{aligned} c^2 \delta_\rho + f_{,S} \delta_S &= 0 \\ \vec{\delta} \cdot \vec{\lambda} &= 0, \end{aligned}$$

co w rezultacie daje dla każdego $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^3$

$$(9.12) \quad \vec{\delta} = \left(-\frac{1}{c^2} f_{,S} \delta_S, \vec{m} \times \vec{\delta} \right),$$

$$(9.12) \quad \lambda = (-\vec{v} \cdot \bar{\lambda}, \bar{\lambda}),$$

gdzie \vec{v}_S - dowolne rzeczywiste, \bar{m} - dowolny wektor z \mathbb{R}^3 , a \times oznacza iloczyn wektorowy. Dla każdego ustalonego $\bar{A} \in \mathbb{R}^3$ istnieje więc cała trójwymiarowa przestrzeń wektorów polaryzacji δ . Mamy zatem sytuację kiedy fala o określonym kierunku propagacji $\bar{\lambda}$ może mieć rozmaite wektory polaryzacji. Również na odwrót: przy zadanym wektorze polaryzacji fala może się propagować w rozmaitych kierunkach;

2° w tym przypadku $\delta^2(\lambda) - c^2 |\lambda|^2 = 0$, a więc $\delta \neq 0$.

Wtedy na podstawie pierwszego równania wektory δ i $\bar{\lambda}$ są równoległe. Ze względu na jednorodność równań możemy przyjąć dla wygody $\delta = -\bar{\lambda}$ co prowadzi do wniosku, że

$$(9.13) \quad \begin{aligned} \delta &= (0, \frac{\delta(\lambda)}{c^2}, -\bar{\lambda}), \\ \lambda &= (\delta(\lambda) - \vec{v} \cdot \bar{\lambda}, \bar{\lambda}), \end{aligned}$$

gdzie $\delta^2(\lambda) = c^2 |\lambda|^2$. Fale proste odpowiadające odpowiednim elementom były badane w pracy autora (1972B).

Stosunkowo łatwo można również sprawdzić, że układ równań generowany przez oba typy elementów charakterystycznych rzeczywistych jest równoważny układowi wyjściowemu. Innymi słowy dystrybucja elementów całkowych \mathcal{L}_u jest w tym przypadku generowana przez elementy charakterystyczne*

$$\{L \in \underline{TH} \otimes \underline{T}^*E; \langle A, L \rangle = 0\} = \{\delta \otimes \lambda \in \underline{TH} \otimes \underline{T}^*E; \langle A, \delta \otimes \lambda \rangle = 0\},$$

gdzie A oznacza odpowiednie współczynniki równań (9.8). Sytuacja ta jest typowa dla układów hiperbolicznych.

* $L \in \underline{TH} \otimes \underline{T}^*E$, tzn. L jest cięciem wiązki o włóknie $T_u H \otimes T^*E$ nad punktem u bazy H .

DEFINICJA 9.3 Układ typu Cauchy'ego

$$(9.14) \quad U_{x^0} + A^s(U, x) U_{x^s} = b(U, x),$$

$$U = (U^1, \dots, U^l),$$

$$x = (x^0, x^1, \dots, x^n),$$

$$b = (b^1, b^2, \dots, b^l),$$

$$s = 1, 2, \dots, n$$

jest hiperboliczny w kierunku x^0 w punkcie (U, x) , jeśli dla każdego $0 \neq \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ macierz

$$A(\bar{\lambda}) = A^s \bar{\lambda}_s$$

jest diagonalizowalna, tzn. ma l niezależnych rzeczywistych wektorów własnych.

Dowiedzimy teraz następującego twierdzenia

TWIERDZENIE 9.2 Jeśli $\langle A, du \rangle = 0$ jest układem hiperbolicznym typu Cauchy'ego (o współczynnikach rzeczywistych), wówczas jego wiązka elementów całkowitych jest generowana przez rzeczywiste elementy charakterystyczne.

Dowód: Ponieważ dla ustalonego u $\dim \mathcal{L}_u = l \times n$ (bo wszystkie pochodne u_{x^s} można zadawać swobodnie), zatem wystarczy pokazać, że elementy charakterystyczne generują przestrzeń tegoż wymiaru. Istotnie, niech $\delta_1(\bar{\lambda}), \dots, \delta_l(\bar{\lambda})$ - niezależne wektory własne wymienione w założeniu twierdzenia, a $\mu_1(\bar{\lambda}), \dots, \mu_l(\bar{\lambda})$ - odpowiadające wartości własne macierzy $A(\bar{\lambda})$, wówczas $\delta_i(\bar{\lambda}) \otimes \lambda^i(\bar{\lambda})$, $i = 1, \dots, l$, gdzie $\lambda^i(\bar{\lambda}) = (-\mu_i(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ są elementami charakterystycznymi dla układu (9.14). Biorąc teraz n linio-wo niezależnych $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, powiedzmy $\bar{\lambda}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, otrzymamy w ten sposób $n \times l$ elementów charakterystycznych

$$\delta_i(\bar{\lambda}^\alpha) \otimes \lambda^i(\bar{\lambda}^\alpha) \quad , \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, l, \\ \alpha = 1, \dots, n. \end{array}$$

Dowiedziemy, że elementy te są liniowo niezależne. Mamy tu liniowe odwzorowanie

$$\text{TH} \otimes \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \text{TH} \otimes \mathbb{R}^n,$$

które na tensorach prostych określone jest następująco

$$\delta \otimes \lambda = \delta \otimes (\lambda_0, \bar{\lambda}) \longrightarrow \delta \otimes \lambda,$$

co pociąga następujące nierówności dla wymiarów odpowiednich przestrzeni

$$\dim \mathcal{L}_u \geq \dim \left\{ \delta_i(\bar{\lambda}^\alpha) \otimes \lambda^i(\bar{\lambda}^\alpha) \right\}_{\substack{i=1, \dots, l \\ \alpha=1, \dots, n}} \geq \dim \left\{ \delta_i(\bar{\lambda}^\alpha) \otimes \lambda^i \right\} = n \cdot l,$$

jako że $\left\{ \delta_i(\bar{\lambda}^\alpha) \otimes \lambda^i(\bar{\lambda}^\alpha) \right\}_{\substack{i=1, \dots, l \\ \alpha=1, \dots, n}} \subset \mathcal{L}$, a ponieważ $\dim \mathcal{L}_u = l \cdot n$

zatem

$$\mathcal{L}_u = \left\{ \delta_i(\bar{\lambda}^\alpha) \otimes \lambda^i(\bar{\lambda}^\alpha) \right\}_{\substack{i=1, \dots, l \\ \alpha=1, \dots, n}}$$

co kończy dowód.

Niech teraz $F(u, \lambda) = 0$ będzie związkiem dyspersyjnym dla pewnego układu $\langle A, du \rangle = 0$. Załóżmy, że $F(\lambda)$ daje się rozłożyć na iloczyn $F(\lambda) = W(\lambda)K(\lambda)$. Można wówczas zdefiniować układ indukowany przez dzielnik $W(\lambda)$ kładąc

$$(9.15) \quad \mathcal{L}_W = \left\{ \delta \otimes \lambda \in \text{TH} \otimes T^*E; \langle A, \delta \otimes \lambda \rangle = 0 \text{ i } W(\lambda) = 0 \right\}.$$

10. Elastyczne oddziaływanie, fał Riemanna.

Rozpatrzmy następujący układ równań hiperbolicznych

$$(10.1) \quad u_t + A^r(u)u_{x^r} = 0, \quad x = x^1, \dots, x^n, \quad u = u^1, \dots, u^l.$$

Założymy tu, że problem Cauchy'ego

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in D_0, \quad u_0 \in C^k(\mathbb{R}^n, H),$$

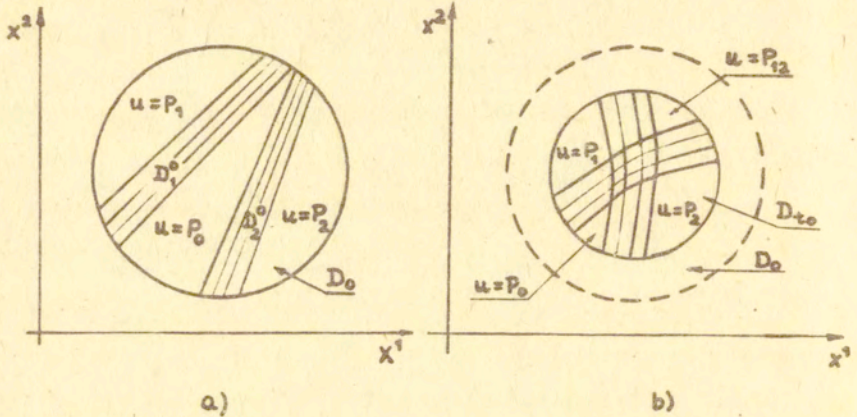
gdzie $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ jest pewnym obszarem wypukłym, zawartym w \mathbb{R}^n lub jest po prostu kulą w \mathbb{R}^n , ma jednoznaczne i ciągłe rozwiązanie w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$.

Niech D_τ oznacza przecięcie D z hiperpłaszczyzną $t = \tau$, $D_{\tau=0} = D_0$. Niech teraz dane Cauchy'ego $u_0(x)$ przedstawiają w D_0 dwie zbliżające się do siebie fale proste (rys.7). Oznacza to, że zachodzi relacja

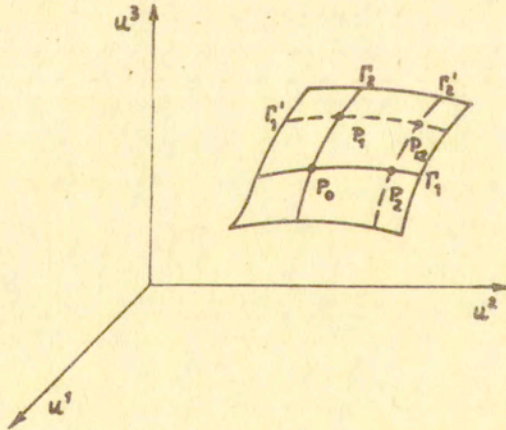
$$(10.2) \quad \frac{\partial}{\partial x^1} u_0(x) \sim \begin{cases} 0 & x \in D_0 \setminus (D_0^1 \cup D_0^2) \\ \delta_1^*(u_0(x)) \lambda_1(u_0(x)) & x \in D_0^1 \\ \delta_2^*(u_0(x)) \lambda_1(u_0(x)) & x \in D_0^2 \end{cases}$$

w zależności od tego, w jakiej części zbioru D_0 leży punkt x_0 . Jeśli obszar określoności rozwiązania D jest dostatecznie duży, wówczas po pewnym czasie obie fale spotkają się i jeśli oddziaływanie ma charakter elastyczny, tzn. rozwiązanie zawiera tylko dwa mody, to zgodnie z rozważaniami rozdziału 5 dla czasów odpowiednio późniejszych rozwiązanie będzie przedstawiało sobą dwie przecinające się fale Riemanna. Wiemy ponadto, że w tym przypadku obraz (= zbiór wartości) rozwiązania leży na pewnej dwuwymiarowej powierzchni (5.3) stycznej do odpowiednich pól δ_1^* , δ_2^* .

Spróbujmy wyznaczyć tę powierzchnię mając do dyspozycji



Rys.7. a/ Warunek początkowy $t=0$ przedstawia w D_0 dwie zbliżające się fale proste;
 b/ Sytuacja po pewnym czasie t . W obszarze D_{t_0} takim, że do czasu t_0 nie dotarły do niego zaburzenia z zewnątrz D_0 , mamy do czynienia z dwiema oddziaływującymi falami Riemanna.



Rys.8. Powierzchnia G_2 będąca obrazem oddziaływania dwóch fal Riemanna o obrazach Γ_1 , Γ_2 (fale wchodzące); w wyniku dostajemy dwie inne fale o obrazach Γ'_1 , Γ'_2 .

dane początkowe $u_0(x)$, których zbiór wartości, wobec założenia ciągłości rozwiązania, musi również leżeć na tej powierzchni. Zbiór ten, zgodnie z naszym założeniem o postaci $u_0(x)$, przedstawia dwie krzywe Γ_1, Γ_2 (rys.8) styczne odpowiednio w każdym punkcie do wektorów $\delta_1(u_0(x)), \delta_2(u_0(x))$. Z ciągłości $u_0(x)$ wynika, że krzywe te mają co najmniej jeden punkt wspólny np. p_0 , gdzie $u(t,x) \equiv p_0$ jest tym stanem stałym, który rozdziela obie fale aż do momentu spotkania. Można teraz obie krzywe Γ_1, Γ_2 sparametryzować

$$(10.3) \quad \begin{aligned} \Gamma_1 : \quad u &= f_1(R^1), & \Gamma_2 : \quad u &= f_2(R^2), \\ R^1 \in I_1 &= (-a_1, b_1), & R^2 \in I_2 &= (-a_2, b_2), \end{aligned}$$

dobierając parametryzację tak, by $f_1(0) = f_2(0) = p_0$. Na krzywych tych określone są odpowiednio pola $\delta_1^1(R^1), \delta_2^2(R^2)$ wektorów falowych obu fal Riemanna spełniających związki dyspersyjne $F(f_1(R^1), \delta_1^1(R^1)) = 0, F(f_2(R^2), \delta_2^2(R^2)) = 0$.

Problem oddziaływania można teraz sformułować następująco: poszukujemy powierzchni G_2 w postaci (5.3) $u = f(R^1, R^2)$, $(R^1, R^2) \in I_1 \times I_2$, spełniającej równania (5.2) i (5.4) oraz związki charakterystyczne (9.2), $\langle A, \delta_1 \otimes \lambda^1 \rangle = 0$, $\langle A, \delta_2 \otimes \lambda^2 \rangle = 0$, gdzie $\delta_1 = \frac{\partial f}{\partial R^1}, \delta_2 = \frac{\partial f}{\partial R^2}, \lambda^1 = \lambda^1(R^1, R^2), \lambda^2 = \lambda^2(R^1, R^2)$. Ponadto funkcje $f(R^1, R^2)$ oraz $\lambda^1(R^1, R^2), \lambda^2(R^1, R^2)$ mają spełniać następujące warunki brzegowe

$$(10.4) \quad \begin{aligned} f(R^1, 0) &= f_1(R^1), & f(0, R^2) &= f_2(R^2), \\ \lambda^1(R^1, 0) &= \delta_1^1(R^1), & \lambda^2(0, R^2) &= \delta_2^2(R^2). \end{aligned}$$

Łatwo się domyślić, że przy tak ogólnych założeniach ten nadokreślony układ może nie mieć rozwiązania, co oznaczałoby po prostu, że oddziaływanie nie ma charakteru elastycznego i prowadzi do pojawienia się innych modów.

Dalsze nasze rozważania będą miały charakter przykładowy i ograniczymy się do rozpatrzenia sytuacji, kiedy wektory falowe λ^1, λ^2 należą do analitycznych gałęzi związku dyspersyjnego o krotności 1. Innymi słowy położymy, że $W_1(u, \lambda^1) = 0$, $W_2(u, \lambda^2) = 0$ oraz krotności α_1, α_2 we wzorze (9.5) są równe 1. Oznacza to, że podprzestrzeń $Q(\lambda) = \{ \delta^i, \langle A, \delta^i \rangle = 0 \}$ jest jednowymiarowa, $\dim Q(\lambda) = 1$, za wyjątkiem, być może, niektórych λ ze zbioru miary zero w stosunku do wszystkich spełniających $W_i(\lambda) = 0$, $i = 1, 2$.

Tak więc założymy, że wybór kierunku $\{\lambda\}$ spełniającego $W_i(\lambda) = 0$ jednoznacznie określa kierunek $\{\delta_i^j\}$. Możemy zatem założyć funkcyjną zależność

$$\lambda \longrightarrow \delta_1^j(\lambda, u) \quad \text{gdy} \quad W_1(\lambda, u) = 0,$$

$$\lambda \longrightarrow \delta_2^j(\lambda, u) \quad \text{gdy} \quad W_2(\lambda, u) = 0.$$

Oczywiście funkcje te nie są jednoznacznie określone ze względu na możliwość zmian długości. Dla przypadku rozważanych równań Eulera gazodynamiki można przyjąć

$$\delta = (\delta_\rho^j, \delta_v^j) = \left(\rho \frac{\delta}{\rho, \rho}, -\vec{k} \right) = \left(\rho_0 + \vec{v} \cdot \vec{k} \right) \frac{\rho}{\rho, \rho}, -\vec{k}$$

dla λ spełniających kwadratową gałąź związku dyspersyjnego $\delta^2 - \rho, \rho k^2 = 0$. Przy powyższych założeniach układ równań określający szukaną powierzchnię G_2 przyjmie następującą postać

$$\begin{aligned}
 du &= \eta^1 \delta_1(\lambda^1, u) dR^1 + \eta^2 \delta_2(\lambda^2, u) dR^2 \\
 (10.5) \quad \lambda_{,R^2}^1 &= \alpha_2^1 \lambda^2 + \beta_2^1 \lambda^1, \quad \lambda_{,R^1}^2 = \alpha_1^2 \lambda^1 + \beta_1^2 \lambda^2, \\
 F(u, \lambda^1) &= 0, \quad F(u, \lambda^2) = 0.
 \end{aligned}$$

Zamiast ostatnich dwu równań $F(u, \lambda^i) = 0$ można by wziąć $W_i(\lambda^i) = 0$. W równaniach tych u^i , η^1 , η^2 , λ^1 , λ^2 oraz α_j^i , β_j^i należy traktować jako niewiadome. Ze względu na to, że długość wektorów λ nie odgrywa istotnej roli, można nałożyć na λ^i dodatkowe warunki unormowania tak, aby $\beta_j^i = 0$. Osiąga się to przez przeskalowanie wektora λ^i , mamy bowiem

$$(\chi^i \lambda^i)_{,R^j} = \chi^i_{,R^j} \lambda^i + \chi^i \lambda^i_{,R^j} = (\chi^i \alpha_j^i) \lambda^i + (\chi^i_{,R^j} + \beta_j^i) \lambda^i.$$

Zatem, jeśli χ^1 , χ^2 spełniają równania

$$\chi^1_{,R^2} + \beta_2^1 = 0, \quad \chi^2_{,R^1} + \beta_1^2 = 0,$$

wówczas nowe wektory $\lambda^1' = \chi^1 \lambda^1$, $\lambda^2' = \chi^2 \lambda^2$ będą spełniać równania (10.5) z $\beta_j^i = 0$. Dalej współczynniki α_j^i można wyliczyć używając związków dyspersyjnych oraz pozostałych równań (10.5). Istotnie

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial R^2} F(u, \lambda^1) = \eta^2 \delta_2^i \frac{\partial}{\partial u^i} F(u, \lambda^1) + \frac{\partial}{\partial \lambda^1_{,R^2}} F(u, \lambda^1) \lambda^1_{,R^2} = \\
 &= \eta^2 F_{,\delta_2}(u, \lambda^1) + \alpha_2^1 F_{,\lambda^1_{,R^2}}(u, \lambda^1) \lambda^2,
 \end{aligned}$$

gdzie $F_{,\delta^i} = \delta^i \frac{\partial}{\partial u^i} F(u, \lambda)$. Obliczając podobnie $\frac{\partial}{\partial R^2} F(u, \lambda^2)$ otrzymujemy ostatecznie

$$(10.6) \quad \alpha_2^1 = -\eta^2 \frac{F_{,\delta_2}(u, \lambda)}{F_{,\lambda^1_{,R^2}}(u, \lambda^1) \lambda^2}, \quad \alpha_1^2 = -\eta^1 \frac{F_{,\delta_1}(u, \lambda)}{F_{,\lambda^2_{,R^1}}(u, \lambda^2) \lambda^1}.$$

Oznaczmy $\alpha_2^1 = \eta^2 \bar{\alpha}_2^1$, $\alpha_1^2 = \eta^1 \bar{\alpha}_1^2$. Ostatnie związki mają sens, jeśli odpowiednie mianowniki są różne od zera. Wyklucza to sytuację, w której λ^1, λ^2 są rozwiązaniami z tej samej liniowej gałęzi związku dyspersyjnego $W_\alpha(u, \lambda) = 0$, tzn. gdy $W_\alpha(u, \lambda)$ jest liniową funkcją λ . Przypadek ten często pojawia się w zastosowaniach i wymaga osobnych rozważań. Po wprowadzonych zmianach równania (10.5) przyjmują teraz następującą postać

$$\begin{aligned} du &= \eta^1 \delta_1(\lambda^1, u) dR^1 + \eta^2 \delta_2(\lambda^2, u) dR^2 \\ (10.5a) \quad \lambda_{,R^2}^1 &= \eta^2 \bar{\alpha}_2^1 \lambda^2 \\ \lambda_{,R^1}^2 &= \eta^1 \bar{\alpha}_1^2 \lambda^1, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{\alpha}_2^1, \bar{\alpha}_1^2$ dane są wzorami (10.6). Związki dyspersyjne $F(u, \lambda^1) = 0$, $F(u, \lambda^2) = 0$ będą już automatycznie spełnione na mocy równań $\frac{\partial}{\partial R^2} F(u, \lambda^1) = 0$, $\frac{\partial}{\partial R^1} F(u, \lambda^2) = 0$, które posłużyły nam do wyznaczenia współczynników α_j^i , oraz faktu, że warunki brzegowe (10.4) spełniają te związki.

Pytamy, kiedy (w ogólności nadokreślony, poza przypadkiem $\dim \tilde{H} = 2$) układ równań (10.5a) jest zgodny i nie ogranicza danych brzegowych (10.4). Rozważmy nieco ogólniejszy problem: pytamy, kiedy układ równań

$$\begin{aligned} (10.7) \quad a/ \quad du &= \eta^1 \delta_1(u, v, \tilde{v}) dR^1 + \eta^2 \delta_2(u, v, \tilde{v}) dR^2 \\ b/ \quad v_{,R^2} &= \eta^1 \Phi(u, v, \tilde{v}), \quad \tilde{v}_{,R^1} = \eta^2 \Phi(u, v, \tilde{v}) \end{aligned}$$

na funkcje wektorowe $u = (u^1, \dots, u^l)$, $v = (v^1, \dots, v^n)$, $\tilde{v} = (\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^r)$ zmiennych R^1, R^2 ma rozwiązanie w prostokącie $I_1 \times I_2$ przy dowolnych warunkach brzegowych

$$(10.8) \quad \begin{aligned} u(R^1, 0) &= f_1(R^1), & u(0, R^2) &= f_2(R^2), \\ v(R^1, 0) &= \psi_1(R^1), & \tilde{v}(0, R^2) &= \psi_2(R^2), \\ f_1'(0) &= f_2(0) \end{aligned}$$

spełniających co najwyżej pewne nierówności. (Nawet zgodny układ nieliniowy może nie mieć globalnych rozwiązań, jeśli dane brzegowe są np. zbyt duże.) Różniczkowanie zewnętrzne równania (10.7a) po wykorzystaniu (10.7b) daje

$$(10.9) \quad \begin{aligned} &\delta_1 d\eta^1 \wedge dR^1 + \delta_2 d\eta^2 \wedge dR^2 + \eta^1 \eta^2 [\delta_1, \delta_2] dR^1 \wedge dR^2 + \\ &+ \eta^1 (\eta^2 \delta_{1,v} \Phi dR^2 \wedge dR^1 + \delta_{1,\tilde{v}} \tilde{v}_{,R^2} dR^2 \wedge dR^1) + \\ &+ \eta^2 (\delta_{2,v} v_{,R^1} dR^1 \wedge dR^2 + \eta^1 \delta_{2,\tilde{v}} \tilde{\Phi} dR^1 \wedge dR^2) = 0, \end{aligned}$$

gdzie $[\delta_1, \delta_2] = \delta_1^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \delta_2 - \delta_2^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \delta_1$.

Na mocy dowolności $v_{,R^1}$ oraz $\tilde{v}_{,R^2}$ (ponieważ $\psi_1(R^1), \psi_2(R^2)$ są dowolne) widzimy, że muszą być spełnione następujące warunki

$$i/ \quad \delta_{1,\tilde{v}} = 0, \quad \delta_{2,v} = 0.$$

Wtedy równania (10.9) przyjmują następującą postać

$$(10.9a) \quad -\delta_1 \eta^1_{,R^2} + \delta_2 \eta^2_{,R^1} + \eta^1 \eta^2 ([\delta_1, \delta_2] - \delta_{1,v} \Phi + \delta_{2,\tilde{v}} \tilde{\Phi}) = 0$$

z której wynika, że rozwiązania z $\eta^1 \eta^2 \neq 0$ mogą istnieć tylko wtedy, jeśli istnieją takie funkcje $c_i(u, v, \tilde{v})$, że

$$ii/ \quad [\delta_1, \delta_2] - \delta_{1,v} \Phi + \delta_{2,\tilde{v}} \tilde{\Phi} = c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2.$$

Uświadnimy teraz istnienie rozwiązania.

TWIERDZENIE 10.1 Jeśli warunki i/ oraz ii/ są spełnione, wówczas przy dostatecznie małych warunkach (10.8) oraz ich pochodnych istnieje rozwiązanie układu (10.7).

Istotnie, na podstawie warunków i/ oraz ii/ widzimy z (10.9a), że η^1, η^2 spełniają następujące równania

$$(10.9b) \quad \eta_{,R^2}^1 = \eta^1 \eta^2 c_1, \quad \eta_{,R^1}^2 = -\eta^1 \eta^2 c_2.$$

Warunki brzegowe $\eta^1(R^1, 0), \eta^2(0, R^2)$ można teraz wyznaczyć z warunków brzegowych dla funkcji u korzystając z równania (10.7a). Mamy zatem do rozwiązania układ (10.7) i (10.9b) z odpowiednimi warunkami brzegowymi. Jeżeli odrzucić jedno z równań na u np. równanie $u_{,R^2} = \eta^2 \delta_2^*$, wówczas dostajemy dobrze określony układ równań

$$(10.10) \quad \begin{aligned} u_{,R^1} &= \eta^1 \delta_1^*, \\ v_{,R^2} &= \eta^2 \tilde{\Phi}, & \tilde{v}_{,R^1} &= \eta^1 \tilde{\Phi}, \\ \eta_{,R^2}^1 &= \eta^1 \eta^2 c_1, & \eta_{,R^1}^2 &= -\eta^1 \eta^2 c_2 \end{aligned}$$

z warunkami $u(0, R^2) = f_2(R^2), v(R^1, 0) = \gamma_1(R^1), \tilde{v}(0, R^2) = \gamma_2(R^2)$ i odpowiednio $\eta^1(R^1, 0), \eta^2(0, R^2)$.

Układ ten jest dość standardowym układem hiperbolicznym, półliniowym z dwiema zmiennymi niezależnymi i z dwiema charakterystykami. Dane brzegowe stanowią zagadnienie Darboux. Jeśli prawe strony równań spełniają warunki Lipschitza w pewnym otoczeniu punktu $p_0 (= f_1(0) = f_2(0))$, wówczas układ łatwo daje się sprowadzić do układu równań całkowych, skąd już bez trudu można pokazać używając metody kolejnych przybliżeń istnienie i jednoznaczność rozwiązań, jeśli tylko dane początkowe są dos-

tatecznie małe (Janienko, Roźdiestwienski 1978).

Pokażemy teraz, że drugie z równań (10.7a) tzn. równanie $u_{,R^2} = \eta^2 \delta_2^*$ jest już automatycznie spełnione na mocy równań (10.10). Obliczmy korzystając z równań (10.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R^1} (u_{,R^2} - \eta^2 \delta_2^*) &= \frac{\partial}{\partial R^2} u_{,R^1} - \eta_{,R^1}^2 \delta_2^* - \eta^1 \eta^2 \delta_{2,u^\alpha}^* \delta_1^\alpha + \\ &- \eta^1 \eta^2 \delta_{2,v}^* \Phi = \eta_{,R^2}^1 \delta_1^* + \eta^1 \delta_{1,u^\alpha}^* u_{,R^2}^\alpha + \eta^1 \eta^2 \delta_{1,v}^* \Phi + \\ &- \eta_{,R^1}^2 \delta_2^* - \eta^1 \eta^2 \delta_{2,u^\alpha}^* \delta_1^\alpha - \eta^1 \eta^2 \delta_{2,v}^* \tilde{\Phi}. \end{aligned}$$

Wykorzystując równanie (10.9a), które jest spełnione na mocy równań (10.10), dochodzimy do wniosku, że różnica $u_{,R^2} - \eta^2 \delta_2^*$ spełnia następujące równanie

$$\frac{\partial}{\partial R^1} (u_{,R^2} - \eta^2 \delta_2^*) = \eta^1 \delta_{1,u^\alpha}^* (u_{,R^2}^\alpha - \eta^2 \delta_2^*).$$

Wobec definicji warunków brzegowych dla η^1, η^2 mamy również

$$(u_{,R^2} - \eta^2 \delta_2^*) \Big|_{R^1=0} = 0, \quad R^2 \in I_2,$$

a zatem z tego, że δ_{1,u^α}^* spełnia warunki Lipschitza ze względu na u widzimy, że wyrażenie to znika w całym prostokącie $I_1 \times I_2$.

W oparciu o twierdzenie 10.1 możemy sformułować następujące

TWIERDZENIE 10.2 Jeśli dane początkowe $u_0(x)$ spełniają założenia podane wzorem (10.2), oraz ich pochodne są dostatecznie małe, wówczas układ równań (10.5) określający warunki elastycznego oddziaływania fal Riemanna posiada rozwiązania spełniające warunki brzegowe (10.4), jeśli tylko spełniony jest nastę-

pujący warunek zgodności

$$(10.11) \quad [\delta_1(\lambda^1, u), \delta_2(\lambda^2, u)]_u + \alpha_1^2 \delta_{2, \lambda^2}(\lambda^2, u) \lambda^1_\nu - \\ - \alpha_2^1 \delta_{1, \lambda^1}(\lambda^1, u) \lambda^2_\nu \in \text{Lin} \{ \delta_1, \delta_2 \}$$

dla każdego u oraz λ^1, λ^2 spełniających $W_1(u, \lambda^1) = 0$,
 $W_2(u, \lambda^2) = 0$, gdzie

$$\alpha_2^1 = - \frac{F, \delta_2(u, \lambda^1)}{F, \lambda^2_\nu(u, \lambda^1) \lambda^2_\nu}, \quad \alpha_1^2 = - \frac{F, \delta_1(u, \lambda^2)}{F, \lambda^1_\nu(u, \lambda^2) \lambda^1_\nu}.$$

Przypominamy, że $[\delta_1, \delta_2]_u$ zawiera tylko różniczkowania po u , a λ^1, λ^2 są traktowane jako stałe. Dla dowodu wystarczy zauważyć, że równania (10.5) są równoważne równaniom (10.5a) pola δ_1, δ_2 spełniają warunek i/, a na mocy założenia (10.11) również warunek ii/, a zatem teza twierdzenia 10.2 jest konsekwencją twierdzenia 10.1.

Zamiast F w definicji współczynników α_2^1 i α_1^2 można wziąć odpowiednio $W_1(u, \lambda^1)$ i $W_2(u, \lambda^2)$. Bliższe badanie warunku (10.11) wydaje się sugerować, że w zasadzie można go spełnić tożsamościowo względem u, λ^1, λ^2 jedynie w dwóch przypadkach:

1° a/ Kiedy układy $\mathcal{L}_{W_1}, \mathcal{L}_{W_2}$ generowane przez odpowiednie różne gałęzie W_1, W_2 związku dyspersyjnego separują się, tzn. kiedy $\alpha_2^1 \equiv \alpha_1^2 \equiv 0$ oraz

$$[\delta_1(\lambda^1), \delta_2(\lambda^2)]_u \in \text{Lin} \{ \delta_1, \delta_2 \} \\ \text{mod } W_1, W_2$$

dla każdych λ^1, λ^2 . Tak jest np. wtedy, gdy w pewnym układzie współrzędnych zmienne (u^1, \dots, u^1) dają się tak rozbić np. na $(\underline{u}^1, \dots, \underline{u}^p, \tilde{u}^{p+1}, \dots, \tilde{u}^1)$, aby układ \mathcal{L}_{W_1} dał

się zapisać w postaci

$$\langle A(\underline{u}), d\underline{u} \rangle = 0,$$

natomiast układ α_{W_2} w postaci

$$\langle A(\tilde{u}), d\tilde{u} \rangle = 0;$$

b/ w przypadku tej samej gałęzi związku $W_1 = W_2$ dyspersyjnego $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $[\delta_1, \delta_2] \in \text{Lin} \{\delta_1, \delta_2\}$ oznacza jednakże liniowość układu α_W ;

2° kiedy związek pomiędzy kierunkami $\{\delta\}$ i $\{\lambda\}$ jest liniowy, tzn. istnieje odwzorowanie liniowe $Q: T^*E \rightarrow TH$ zależące od punktu u rozmaitości H takie, że przy odpowiednim unormowaniu wektora δ zachodzi $\delta(u, \lambda) = Q(u)\lambda$.

Zauważmy przede wszystkim, że dla analitycznej gałęzi związku dyspersyjnego, powiedzmy $W(\lambda) = 0$, o krotności 1 mamy jednoznacznie zależność* pomiędzy kowektorem charakterystycznym λ i wektorem polaryzacji δ co oznacza, że spośród m równań na δ

$$A^s(\lambda)\delta := A^{s_j}(u)\lambda_j \delta^j = 0, \quad s = 1, \dots, m$$

dokładnie (1-1) jest liniowo (przy ustalonym u) niezależnych, jeśli tylko $W(\lambda) = 0$. Niech będą to formy $A^1(\lambda), \dots, A^{l-1}(\lambda)$. Biorąc iloczyn wektorowy

$$(10.12) \quad \tilde{\gamma}^j(\lambda) = \varepsilon^{j, j_1, j_2, \dots, j_{l-1}} A^1_{j_1}(\lambda), \dots, A^{l-1}_{j_{l-1}}(\lambda)$$

widzimy, że $\tilde{\gamma}(\lambda)$ można reprezentować symetryczną formą (1-1)-liniową od λ o wartościach wektorowych. W ogólności jednakże składowe $\tilde{\gamma}^i(\lambda)$, $i = 1, \dots, l$ mogą mieć pewien wspólny czynnik (modulo $W(\lambda)$) co pozwala obniżyć stopień wielomianu $\tilde{\gamma}(\lambda)$. Za-

* Dokładniej, między kierunkami δ i λ .

różny więc, że $\delta(\lambda)$ jest już formą możliwie najniższego stopnia o tej własności, że $\delta \sim \tilde{\delta}$ danego wzorem (10.12). Podobnie można postąpić w przypadku innej gałęzi $W_2(\lambda)$ o krotności 1.

Załóżmy, że mamy odpowiednio r_1 -liniową i r_2 -liniową symetryczne formy $\delta_1(\lambda)$, $\delta_2(\lambda)$ o wartościach wektorowych, których współrzędne są względnie prostymi wielomianami od λ^1 , λ^2 odpowiednio. Niech stopnie wielomianów $W_1(\lambda)$ i $W_2(\lambda)$ będą odpowiednio k_1 i k_2 . Komutator $[\delta_1, \delta_2]_u$ we wzorze (10.11) jest wtedy funkcją r_1 -liniową ze względu na λ^1 i r_2 -liniową ze względu na λ^2 . Natomiast pozostałe człony mają postać

$$(10.13) \quad \frac{r_2}{k_2} \frac{W_{2,u}^{\alpha}(\lambda^2, \dots, \lambda^2) \delta_1^{\alpha}(\lambda^1, \dots, \lambda^1)}{W^2(\lambda^2, \dots, \lambda^2, \lambda^1)} \delta_2(\lambda^2, \dots, \lambda^2, \lambda^1);$$

$$(10.14) \quad \frac{r_1}{k_1} \frac{W_{1,u}^{\alpha}(\lambda^1, \dots, \lambda^1) \delta_2^{\alpha}(\lambda^2, \dots, \lambda^2)}{W^1(\lambda^1, \dots, \lambda^1, \lambda^2)} \delta_1(\lambda^1, \dots, \lambda^1, \lambda^2).$$

Ponieważ W^1 , W^2 są wielomianami nierozkładalnymi, zatem w przypadku kiedy w wyrażeniach (10.13) i (10.14) liczniki nie dzielą się przez odpowiednie mianowniki, każde z wymienionych wyrażeń osobno, a więc $[\delta_1, \delta_2]_u$ oraz (10.13) i (10.14) powinny rozkładać się na δ_1 i δ_2 . Jest to możliwe wtedy, gdy δ_1 , δ_2 są liniowymi funkcjami λ^1 , λ^2 odpowiednio. Połóżmy więc

$$\delta_1 = Q_1(u)\lambda, \quad \delta_2 = Q_2(u)\lambda,$$

gdzie Q_1 , Q_2 są macierzami niezależnymi od λ . Z drugiej jednak strony dostaje się wtedy warunki

$$Q_2 \lambda^1 \in \text{Lin}_{\alpha} \{Q_1 \lambda^1, Q_2 \lambda^2\},$$

$$Q_1 \lambda^1 \in \text{Lin}_{\alpha} \{Q_1 \lambda^1, Q_2 \lambda^2\}$$

co oznacza, że macierze Q_1 i Q_2 są proporcjonalne. Można zatem położyć $Q_1 = Q_2$.

Wobec powyższych uwag położmy

$$\tilde{\gamma} = Q\lambda.$$

Podstawiając tę relację do związków charakterystycznych

$$\langle A, \tilde{\gamma} \otimes \lambda \rangle = \langle A, Q\lambda \otimes \lambda \rangle = 0$$

widzimy, że ostatnia równość musi być spełniona, jeśli tylko λ spełnia $W_1(u, \lambda) = 0$, bądź $W_2(u, \lambda) = 0$. Oznacza to jednakże, że zarówno $W_1(u, \lambda)$ jak i $W_2(u, \lambda)$ są tą samą kwadratową gałęzią związku dyspersyjnego (liniowe wyłączyliśmy z rozważań)

$$W(u, \lambda) = \tilde{g}(\lambda, \lambda) = g^{uv}(u)\lambda_u \lambda_v.$$

Wobec hiperboliczności układu (10.1) macierz formy \tilde{g} musi być nieokreślona, tzn. istnieją niezerowe wektory λ tworzące odpowiednią gałąź stożka charakterystycznego takie, że $\tilde{g}(\lambda, \lambda) = 0$. Warunki zgodności (10.11) dla elastycznego oddziaływania

$$q_{\tilde{\gamma}_1} \lambda^2 - q_{\tilde{\gamma}_2} \lambda^1 + \alpha^2_1 q \lambda^1 - \alpha^2_2 q \lambda^2 \in \text{Lin}_{\alpha} \{ \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2 \}$$

prowadzą do prostej relacji

$$q_{\tilde{\gamma}_1} \lambda^2 - q_{\tilde{\gamma}_2} \lambda^1 \in \text{Lin}_{\alpha} \{ q \lambda^1, q \lambda^2 \},$$

skąd wniosek, że dla każdych ustalonych λ^1, λ^2 komutator $[q \lambda^1, q \lambda^2]_u$ spełnia warunek Frobeniusa

$$[q \lambda^1, q \lambda^2]_u \in \text{Lin}_{\alpha} \{ q \lambda^1, q \lambda^2 \}.$$

Dlatego też dystrybucja podprzestrzeni

$$u \rightarrow Q_u(T^*E) = \{Q(u)\lambda, \lambda \in T^*E\} \subset T_uH$$

jest dystrybucją całkowaną i przez każdy punkt $u_0 \in H$ przechodzi rozmaitość całkowa M , $\dim M \leq \dim E$, taka, że

$$T_uM = Q_u(T^*E), \quad u \in M.$$

Zatem układ

$$(10.15) \quad \mathcal{L}_{\tilde{g}} = \text{Lin}_{\alpha} \{ \delta \otimes \lambda; \delta = Q\lambda, \tilde{g}(\lambda, \lambda) = 0 \}$$

generowany przez gałąź $\tilde{g}(\lambda, \lambda)$ związku dyspersyjnego można "obciąć" do podrozmaitości całkowej $M \subset H$. Zachodzi bowiem

LEMAT 10.1 Jeśli $u = u(x)$ jest jakimkolwiek ciągłym rozwiązaniem układu (10.15), wówczas jego obraz leży na jednej z rozmaitości całkowych M .

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że jeśli $u(\cdot)$ jest rozwiązaniem układu (10.15), wówczas zachodzi

$$\langle du, T_x E \rangle \Big|_{u(x)} \subset Q_{u(x)}(T^*E).$$

11. Geometria rozmaitości M .

Rozmaitość M pełni teraz rolę przestrzeni zmiennych zależnych tzn. poprzednio rozważanej rozmaitości H . Wektory $\delta(u)$ będą traktowane jako wektory z przestrzeni $T_u M$. Na podstawie rozważań z poprzedniego rozdziału $\dim \bar{M} \leq \dim E$. Jeśli $\dim M = n$, to istnieje nieosobliwe odwzorowanie liniowe

$$P(u) : T_u M \longrightarrow T^*E,$$

$$\mathcal{A}(u) = P(u)\delta(u).$$

Związek dyspersyjny, który w rozważanym przypadku jest formą kwadratową

$$\tilde{g}(\lambda, \lambda) = \tilde{g}^{\mu\nu}(u)\lambda_\mu\lambda_\nu = 0$$

przenosi się do przestrzeni stycznej do M na wektory polaryzacji kładąc

$$(11.1) \quad g(X, Y) = \tilde{g}(PX, PY), \quad X, Y \in T_u M.$$

Teraz δ jest wektorem polaryzacji wtedy i tylko wtedy, jeśli

$$g(\delta, \delta) = 0.$$

Odwzorowanie $P(u)$ odgrywa tu rolę łącznika pomiędzy przestrzenią T^*E zawierającą kowektory falowe, oraz przestrzenią $T_u M$ zawierającą wektory polaryzacji.

Pokażemy, że odwzorowanie P indukuje pewną koneksję na rozmaitości M . Zauważmy w tym celu, że warunki zgodności

$$\tilde{\lambda}^i, \delta_j^i \in \text{Lin}_\alpha \{ \tilde{\lambda}^1, \tilde{\lambda}^2 \}, \quad i = 1, 2, \quad i \neq j, \quad \tilde{\lambda}^i \in T^*E$$

można zapisać w postaci

$$P_{\delta_1, \delta_2} + P_{\delta_2, \delta_1} \in \{P_{\delta_1}, P_{\delta_2}\}$$

$$P_{\delta_2, \delta_1} + P_{\delta_1, \delta_2} \in \{P_{\delta_1}, P_{\delta_2}\}.$$

Mnożąc obie relacje przez P^{-1} dostajemy

$$\tilde{\nabla}_{\delta_1} \delta_2 \in \text{Lin}_{\alpha} \{\delta_1, \delta_2\}, \quad \tilde{\nabla}_{\delta_2} \delta_1 \in \text{Lin}_{\alpha} \{\delta_1, \delta_2\},$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(11.2) \quad \tilde{\nabla}_X Y = Y_{,X} + P^{-1} P_X Y = Y_{,X} + \tilde{\Gamma}(X, Y)$$

co, jak łatwo sprawdzić badając regułę transformacyjną, istotnie definiuje pewną koneksję na rozmaitości M . Koneksja ta nie jest jednak jednoznacznie wyznaczona, jako że dopuszczalne są transformacje odwzorowania P zachowujące kierunki

$$(11.3) \quad P \rightarrow \kappa P, \quad \kappa = \kappa(u),$$

przy czym $\kappa(u) \neq 0$ może być dowolną nieznikającą funkcją skalarną. Transformacje te indukują rzutowe transformacje koneksji

$$\tilde{\nabla}_X Y \rightarrow \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\sigma}(X) Y,$$

gdzie $\tilde{\sigma}(X) = X^i \frac{\partial}{\partial u^i} \ln |\kappa(u)|$.

Otrzymałiśmy w ten sposób całą rodzinę koneksji. Pokażemy, że można zbudować koneksję, która będzie nieczuła na tego typu transformację. Niech mianowicie

$$\tilde{T}(X, Y) := \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y].$$

\tilde{T} nosi nazwę tensora torsji koneksji $\tilde{\nabla}$. We współrzędnych

$$\tilde{T}_{jk}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i - \tilde{\Gamma}_{kj}^i.$$

Używając tego tensora definiujemy formę $\sigma = \sigma_j du^j$, gdzie

$$\sigma_j = \frac{1}{n-1} \tilde{T}_{jk}^k.$$

Jeśli teraz położyć

$$\nabla_X Y := \tilde{\nabla}_X Y - \sigma(X)Y,$$

lub we współrzędnych

$$\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \frac{1}{n-1} \tilde{T}_{ir}^r \delta_j^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k - \frac{1}{n-1} (\tilde{\Gamma}_{ir}^r - \tilde{\Gamma}_{ri}^r) \delta_j^k,$$

wówczas, jak łatwo się przekonać bezpośrednim rachunkiem, nowa koneksja ∇ już nie zmienia się przy transformacjach rzutowych (11.3).

Podamy teraz kilka ważnych własności tej koneksji.

TWIERDZENIE 11.1

- 1°. σ jest formą zamkniętą, $d\sigma = 0$;
- 2°. tensor krzywizny R_{∇} koneksji ∇ znika, $R_{\nabla} \equiv 0$;
- 3°. niech T będzie tensorem torsji koneksji ∇ ; jeśli ∇ jest półsymetryczna tzn. T spełnia warunek, że dla każdego $X, Y \in TM$ zachodzi $T(X, Y) \in \text{Lin}_{\alpha} \{X, Y\}$, wówczas $T = 0$, czyli koneksja jest automatycznie symetryczna.

Ad 1°. Zauważmy najpierw, że $R_{\tilde{\nabla}} = 0$. Istotnie, niech $\lambda \in T^*E$ będzie stałym wektorem, wtedy pole $X := P^{-1}\lambda$ jest kowariantnie stałe względem $\tilde{\nabla}$. Pokazuje to następujący rachunek.

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \lambda = (PX)_{,u^i} = P_{,u^i} X + PX_{,u^i} = P(\tilde{\nabla}_i X)$$

co oznacza, że $\tilde{\nabla}_i X = 0$. Ponieważ $\lambda \in T^*E$ jest dowolnym stałym wektorem, ostatni wniosek oznacza, że $\tilde{\nabla}$ dopuszcza teleparalelizm, a zatem koneksja $\tilde{\nabla}$ ma znikającą krzywiznę $R_{\tilde{\nabla}} = 0$.

Niech $d\tilde{T}$ oznacza zewnętrzną kowariantną pochodną tensora torsji (tzn. antysymetryczną część pochodnej kowariantnej $\tilde{\nabla}_{[i}\tilde{T}_{ik]}$). Wówczas na mocy tożsamości Bianchi (Koszul 1960) mamy

$$d\tilde{T}(X, Y, Z) = \sum_{\text{cykl } X, Y, Z} \tilde{R}(X, Y, Z) = 0,$$

bo $\tilde{R} = 0$. Jeśli teraz X_1, \dots, X_n jest bazą złożoną z pól kowariantnie stałych, oraz $\overset{\alpha}{X}, \dots, \overset{\beta}{X}$ - kobazą w T^*M , $\langle \overset{\alpha}{X}, \overset{\beta}{X} \rangle = \delta_{\beta}^{\alpha}$ wówczas

$$\begin{aligned} d\sigma(\overset{\alpha}{X}, \overset{\beta}{X}) &= \sum_r (d\langle \tilde{T}(\overset{\alpha}{X}, \overset{\beta}{X}), \overset{r}{X} \rangle)(\overset{\beta}{X}) = \\ &= \sum_r \langle d\tilde{T}(\overset{\alpha}{X}, \overset{\beta}{X}, \overset{r}{X}), \overset{r}{X} \rangle = 0 \end{aligned}$$

skąd $d\sigma \equiv 0$.

Ad 2^o. Jeśli X jest polem kowariantnie stałym w koneksji $\tilde{\nabla}$, wówczas

$$\nabla_Y X = \tilde{\nabla}_Y X - \sigma(Y)X \doteq -\sigma(Y)X.$$

Ponieważ σ jest formą zamkniętą, więc istnieje funkcja $a(u)$ taka, że $da = a\sigma$. Wtedy jednak pole aX jest kowariantnie stałe względem koneksji ∇ . Istotnie, dla każdego Y

$$\nabla_Y aX = a\tilde{\nabla}_Y X + da(Y)X - a\sigma(Y)X = 0.$$

Zatem ∇ również dopuszcza teleparalelizm, czyli $R_{\nabla} \equiv 0$.

Ad 3^o. Jeśli dla każdego X, Y , $T(X, Y) \in \{X, Y\}$, wówczas istnieje jednoforma ω taka, że T jest postaci $T = \omega \wedge I$, lub we współrzędnych $T_{jk}^i = \omega_j \delta_k^i - \delta_j^i \omega_k$, skąd

$$\omega_j = \frac{1}{n-1} T_{jk}^k.$$

Obliczmy T_{jk}^k dla koneksji ∇ . Mamy przede wszystkim

$$T_{ij}^k = \tilde{T}_{ij}^k - \frac{1}{n-1} (\tilde{T}_{ir}^r \delta_j^k - T_{jr}^r \delta_i^k),$$

skąd

$$T_{ik}^k = \tilde{T}_{ik}^k - \frac{n-1}{n-1} \tilde{T}_{ir}^r = 0.$$

zatem $\omega_j = 0$, co oznacza, że $T = 0$.

Reasumując można powiedzieć, że zależność $\lambda \sim P\lambda$ wyznacza na rozmaitości M koneksję o znikającym tensorze krzywizny taką, że jeśli ∇ jest półsymetryczna, to jest ona już automatycznie symetryczna.

Możliwość przeniesienia związku dyspersyjnego $\tilde{g}(\lambda, \lambda) = 0$ do przestrzeni stycznej $T_u M$ sugeruje wprowadzenie drugiej struktury na rozmaitości M , a mianowicie metryki

$$g(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j, \quad X, Y \in TM.$$

g dane jest wzorem (11.1). Podobnie jak w przypadku odwzorowania P macierz współczynników \tilde{g} nie jest wyznaczona jednoznacznie, a jedynie z dokładnością do transformacji konforemnych

$$g \rightarrow m(u)g, \quad m \neq 0.$$

Obiektem niezmienniczym względem tych transformacji jest gęstość tensorowa

$$(11.4) \quad \hat{g} = |\det g|^{-1/n} g.$$

Jeśli używając współrzędnych wprowadzić tensor

$$(11.5) \quad G_{\beta\sigma}^\alpha := \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\sigma} (\nabla_\beta \hat{g}_{\sigma\delta} + \nabla_\delta \hat{g}_{\beta\sigma} - \nabla_\sigma \hat{g}_{\beta\delta}),$$

wówczas można skonstruować koneksję - analogon koneksji metrycznej - kładąc

$$\nabla^G = \nabla + G.$$

Otóż tensor G jest miarą niezgodności obu struktur, tzn. koneksji ∇ i $\nabla^{\mathcal{E}}$ i jak się okaże, miarą nieliniowości rozważanego układu równań (10.12).

Własności koneksji $\nabla^{\mathcal{E}}$.

W1. Koneksja $\nabla^{\mathcal{E}}$ ma tę samą torsję, co koneksja ∇ ; istotnie na mocy definicji, wzór (11.5), tensor G jest symetryczny.

W2. $\nabla^{\mathcal{E}} \hat{g} = 0$, co wynika bezpośrednio z rachunku.

W3. Jeśli torsja $T \equiv 0$, wówczas istnieje taki wybór metryki (tzn. taka transformacja $g' = mg$), że $\nabla^{\mathcal{E}'}$ jest koneksją Riemanna dla metryki g' .

Istotnie, jeśli $T \equiv 0$, wówczas na mocy równości $R_{\nabla} \equiv 0$ rozmaitość M jest płaska, tzn. istnieją lokalne układy współrzędnych, w których $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial u^i}$. W takim układzie współrzędnych tensor G liczy się dokładnie tak samo jak współczynniki Christoffela. Jeśli zatem zdefiniować tensor g' kładąc w tym wybranym układzie współrzędnych

$$g'_{ij} = g_{ij},$$

wówczas koneksja metryczna indukowana przez tak powstałą metrykę będzie taka sama jak zdefiniowana przez nas koneksja $\nabla^{\mathcal{E}}$.

Podamy teraz kilka ciekawych twierdzeń dotyczących wyjściowego układu równań różniczkowych.

TWIERDZENIE 11.2 Jeśli $T = 0$ oraz $G = 0$, wówczas istnieje układ współrzędnych, w którym układ równań (10.12) jest liniowy.

Oznacza to, że $T + G$ jest dobrą miarą nieliniowości. Znikanie bowiem $T + G$ oznacza znikanie T oraz G osobno.

Twierdzenia tego dowiedzimy później- przy dowodzie twierdzenia 11.4.

TWIERDZENIE 11.3 Jeśli $T \equiv 0$, wówczas układ równań generowany przez związek dyspersyjny $\tilde{g}(\lambda, \lambda) = 0$ jest układem w inwolucji (patrz rozdz. 14).

TWIERDZENIE 11.4 Jeśli $T \equiv 0$, wtedy układ generowany przez związek dyspersyjny $\tilde{g}(\lambda, \lambda) = 0$ da się lokalnie sprowadzić do jednego równania hiperbolicznego drugiego rzędu.

Zauważmy, że z tezy twierdzenia 11.4 wypływa teza twierdzenia 11.2. Istotnie, równanie takie $a^{\mu\nu} \varphi_{,\mu\nu} = 0$ można lokalnie sprowadzić, dokonując ewentualnej zamiany zmiennych $x \rightarrow x'$ do postaci Cauchy'ego

$$\varphi_{,x^0 x^0} = - \frac{1}{a^{00}} \sum_{\alpha, \beta \neq 0} a^{\alpha\beta} \varphi_{,x^\alpha x^\beta}.$$

Udowodnimy zatem twierdzenie 11.4.

Jeśli $T \equiv 0$, wówczas istnieje układ współrzędnych, w którym P jest macierzą jednostkową $P = I$, a zatem $\tilde{g} = \lambda$, co w języku równań oznacza, że w tym układzie współrzędnych układ (10.12) przyjmuje postać

$$(11.6) \quad du^j = \sum_{\alpha} \xi^{\alpha} \lambda_j^{\alpha} \lambda_{,\nu}^{\alpha} dx^{\nu}, \quad \tilde{g}^{j\nu} \lambda_j^{\alpha} \lambda_{,\nu}^{\alpha} = 0$$

skąd widać, że u spełnia równania

$$a/. \quad \sum_{j, \nu} g^{j\nu} u_{,x^\nu}^j = 0,$$

$$b/. \quad u_{,x^\nu}^j = u_{,x^j}^\nu,$$

które są równoważne równaniu (10.15). Równanie b/ oznacza is-

tnienie potencjału $\varphi_{x^j} = u^j$, który na mocy równania a/ spełnia

$$(11.7) \quad \tilde{g}^{\mu\nu}(\varphi) \varphi_{x^\mu} \varphi_{x^\nu} = 0, \quad \varphi = (\varphi_{x^1}, \dots, \varphi_{x^n})$$

co kończy dowód twierdzenia 11.4.

Jeśli nie tylko $T \equiv 0$, ale również $G \equiv 0$ wówczas metryka g^* wymieniona we własności 3 (str.102) nie zależy w wybranym przez nas układzie współrzędnych od u , a zatem współczynniki w równaniu (11.7) są stałe.

Na koniec warto zauważyć, że rozważania tego rozdziału w pełni przenoszą się na układy eliptyczne. Wtedy macierz $\tilde{g}^{\mu\nu}$ formy g jest dodatnio określona, wektory δ i λ stają się zespolone, a rozważany układ ma postać

$$\mathcal{L}\Phi = \text{Lin}_\alpha \{ \text{Re}(\delta \otimes \lambda); \delta = P\lambda, \tilde{g}(\lambda, \lambda) = 0, \lambda \in T^{*\mathbb{C}}E \}.$$

Odwzorowanie P jest rzeczywiste ponieważ układ ma współczynniki rzeczywiste. Analogicznie można wprowadzić rozważane dotąd obiekty geometryczne, a więc koneksję, metrykę, tensor G oraz podane własności tych obiektów; Twierdzenia 11.2, 11.3, 11.4 pozostają wówczas w mocy.

Jeśli wziąć jako przykład układ generowany przez potencjalne elementy charakterystyczne (9.13) układu dynamiki gazów (9.8) wówczas rozmaitościami M są n -wymiarowe ($n = (2, 3, 4)$) rozmaitości stałej entropii $S = \text{const}$, parametryzowane na przykład przez zmienne q, v_1, \dots, v_{n-1} . Związek pomiędzy wektorem polaryzacji $\delta \in TM$ oraz wektorem falowym λ może być dany poprzez $\lambda = P\delta$, gdzie dla $n = 4$

$$(11.8) \quad P = \begin{pmatrix} \frac{c^2}{\rho} & , & v^1 & , & v^2 & , & v^3 \\ 0 & , & -1 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & -1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & -1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz policzyć współczynniki koneksji afinicznej (11.2) w wiązce stycznnej TM

$$(11.9) \quad \tilde{\Gamma}(X, Y) = P^{-1} P_{,X} Y = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}^0(X, Y) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X, Y \in TM,$$

gdzie $\tilde{\Gamma}^0(X, Y) = \frac{\rho}{c^2} \left[\left(\frac{c^2}{\rho} \right)_{, \rho} X^0 Y^0 + \bar{X} \cdot \bar{Y} \right]$ i gdzie jak zwykle $X = (X^0, \bar{X})$, a kropka oznacza euklidesowy iloczyn skalarny w \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^{n-1} w ogólności). Ponieważ $\tilde{\Gamma}(X, Y)$ wyraża się symetrycznie przez X i Y , zatem tensor torsji tej koneksji znika co oznacza, że koneksji tej nie musimy już poprawiać, $\tilde{\nabla} = \nabla$. W dalszym więc ciągu będziemy opuszczać falę nad Γ .

Do liczenia pochodnych kowariantnych gęstości tensorowych potrzebne są jeszcze współczynniki koneksji w wiązce gęstości skalarnych. I tak np. dla wyznacznika tensora $g_{\mu\nu}$ mamy

$$\nabla_X |\det g|^{\Gamma} = (|\det g|^{\Gamma})_{,X} - 2r |\det g|^{\Gamma} \Gamma(X),$$

gdzie $\Gamma(X) = \Gamma^{\mu}_{\nu\mu} X^{\nu}$ co w przypadku koneksji (11.9) daje $\Gamma(X) = \left(2 \frac{c}{\rho} - \frac{1}{\rho} \right) X^0$. Dla gęstości tensorowej \hat{g} (11.4) mamy zatem

$$(\nabla_X \hat{g})(Y, Z) = \hat{g}_{,X}(Y, Z) - \hat{g}(\Gamma(X, Y), Z) - \hat{g}(Y, \Gamma(X, Z)) + \frac{2}{n} \Gamma(X) \hat{g}(Y, Z),$$

co w konsekwencji prowadzi do następującego wyrażenia na "formę nieliniowości" w bazie $\partial_{\rho}, \partial v^1, \dots, \partial v^{n-1}$ i odpowiednio w

bazie sprzężonej $d\varphi, d\bar{v}$

$$(11.10) \quad G(X, Y) = \begin{pmatrix} G^0 \\ \bar{G} \end{pmatrix} = \frac{c_\varphi}{nc} \begin{pmatrix} (1-n)X^0Y^0 + \left(\frac{\rho^2}{c^2} - \frac{\rho n}{c c_\varphi}\right) \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ X^0Y + Y^0X \end{pmatrix}.$$

Wiemy, że ze względu na znikanie torsji $T \equiv 0$ istnieje układ współrzędnych, w którym macierz odwzorowania $P: \underline{TM} \rightarrow \underline{T^*E}$ staje się macierzą jednostkową. Przy transformacjach układu współrzędnych $u^i \rightarrow u^{i'}$ na rozmaitości M macierz $P_{\nu j} = P_{\nu j} u^{i'j}$ transformuje się w sposób następujący

$$P_{\nu j'} = P_{\nu j} \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}, \quad P^{i'} = P \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}.$$

Łatwo sprawdzić, że transformacja $(\varphi, \bar{v}) \rightarrow (\xi, \bar{\nu})$ określona równościami

$$(11.11) \quad \xi = \int \frac{c^2}{\rho} d\varphi + \frac{1}{2} \bar{v}^2 + \xi_0,$$

$$\bar{\nu}^\alpha = -\bar{v}^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n-1,$$

skąd

$$(11.12) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\nu}^\alpha} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{\nu}^\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho}{c^2} & \frac{\bar{v}}{c^2} \delta \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

sprowadza macierz $P_{\nu j}$ do macierzy jednostkowej. W bazie $d\varphi, d\bar{v}$ gęstość \hat{g} tensora metrycznego ma postać

$$(11.13) \quad \hat{g} = \left(\frac{\rho}{c}\right)^{2/n} \left(\frac{c^2}{\rho^2} d\varphi \otimes d\varphi - \sum_{i=1}^3 dv^i \otimes dv^i \right),$$

natomiast w bazie $d\xi, d\bar{\nu}$

$$(11.14) \quad \hat{g} = c^{\frac{2(1-n)}{n}} \left\{ (d\varepsilon - \frac{1}{2} d\vec{x}^2) \otimes (d\varepsilon - \frac{1}{2} d\vec{x}^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} d\vec{x}^2 \otimes d\vec{x}^2 - c^2 \sum d\psi^i \otimes d\psi^i \right\},$$

gdzie oczywiście $d\vec{x}^2 = \frac{1}{2} \sum \psi^i d\psi^i$. Wprowadzając teraz potencjał (istnieje, bo $P_{\nu j} = \delta_{\nu j}$)

$$\xi = \varphi_{,t} = \varphi_{,0}, \quad \vec{\nu} = \text{grad } \varphi$$

sprowadzamy układ \mathcal{L}_u generowany przez elementy charakterystyczne potencjalne do jednego równania hiperbolicznego drugiego rzędu

$$(11.15) \quad \varphi_{,00} - 2 \sum_{i=1}^3 \varphi_{,i} \varphi_{,i0} + \sum_{i,j=1}^3 (\varphi_{,i} \varphi_{,j} - c^2 \delta_{ij}) \varphi_{,ij} = 0.$$

Możemy zdefiniować teraz tensor metryczny g kładąc w bazie $d\varepsilon, d\vec{x}$

$$g_{ij} = \hat{g}_{ij},$$

i zgodnie z rozważaniami tego rozdziału koneksja metryczna ∇^g wyznaczona na TM przez ten tensor jest równa $\nabla + G$. Powracając do starego układu współrzędnych $\varphi, \vec{\nu}$ mamy dla wyżej zdefiniowanego tensora g

$$g(\vec{x}, t) = c^{2/n} \left\{ \frac{c^2}{\varrho^2} (\delta^0{}^2 - (\vec{\nu})^2) \right\}.$$

Przykład układu eliptycznego generowanego przez część elementów charakterystycznych układu dynamiki gazów (9.8) można dostać biorąc stacjonarne równania gazodynamiki. W tym celu do równań (9.8) należy dołączyć warunek stacjonarności $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, gdzie $u = u(S, \varphi, \vec{\nu})$. W języku elementów charakterystycznych oznacza to, że $\lambda_0 \delta^i = 0$, a zatem składowa czasowa λ_0 kowektora

charakterystycznego λ powinna znikać, $\lambda_0 = 0$. W przypadku elementów potencjalnych (9.13) oznacza to, że

$$\delta(\lambda) - \bar{v} \cdot \bar{\lambda} = 0$$

i pozostałe trzy składowe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, nie są dowolne, a wobec równania

$$\delta^2(\lambda) - c^2 |\bar{\lambda}|^2 = 0$$

składowe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ powinny spełniać następujący związek

$$(11.17) \quad g(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}) := -(\bar{v} \cdot \bar{\lambda})^2 + c^2 |\bar{\lambda}|^2 = 0$$

odgrywający rolę metryki g dla układu stacjonarnego. Forma kwadratowa (11.17) w zależności od wielkości modułu prędkości $|\bar{v}|$ jest określona dodatnio bądź nieokreślona. Dla przepływów poddźwiękowych, kiedy $v^2 < c^2$, forma g jest dodatnia, natomiast dla $v^2 > c^2$ - przepływ naddźwiękowy - forma jest nieokreślona z sygnaturą $(-1, 1, 1)$. Wreszcie dla $v^2 = c^2$ - przejście przez linię dźwięku - forma się degeneruje $(0, 1, 1)$.

Rzecz jasna w przypadku dodatniej określoności możemy rozpatrywać jedynie zespolone wektory charakterystyczne λ spełniające (11.17).

Przy warunku stacjonarności (11.16) wektory γ dla przypadku potencjalnego (9.13) wyrażają się przez $\bar{\lambda}$ w następujący sposób

$$(11.18) \quad \gamma = \left(0, \frac{c}{c^2} \bar{v} \cdot \bar{\lambda}, -\bar{\lambda} \right).$$

Podobnie jak w przypadku niestacjonarnym można znaleźć liniowy związek

$$\gamma = Q\lambda,$$

gdzie

$$\lambda = \bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho}{c^2} v^1, & \frac{\rho}{c^2} v^2, & \frac{\rho}{c^2} v^3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tu również dystrybucja podprzestrzeni $\{QA\}$ jest całkowalna. Istotnie, następujące zupełne formy różniczkowe

$$\omega_1 := dS$$

$$\omega_2 := \frac{c^2}{\rho} d\rho + v^1 dv^1 + v^2 dv^2 + v^3 dv^3$$

znikają na wektorach (11.18) dla każdego λ . Zupełność formy ω_1 jest oczywista i znikanie $\langle \omega_1, \lambda \rangle = 0$ oznacza, że entropia S jest stała na rozwiązaniach. Korzystając teraz z tego, że $c^2 = -\frac{\partial}{\partial \rho} p(\rho, S)$ i ze stałości entropii zauważamy, że ω_2 jest różniczką następującej funkcji (całka Bernoulli'ego)

$$(11.19) \quad B(\rho, v) = \int \frac{d\rho}{\rho} + v^2,$$

gdzie

$$\frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{\partial}{\partial \rho} P(\rho, S) d\rho, \quad v = (v^1, v^2, v^3).$$

W ten sposób foliacja pięciowymiarowej rozmaiłości H generowana przez dystrybucję $\{QA\}$ dana jest równaniami

$$(11.20) \quad S = \text{const}_1, \quad B(\rho, v) = \text{const}_2.$$

Całka Bernoulli'ego pozwala zatem wyrazić ρ w funkcji v i zmienne v^1, v^2, v^3 mogą być przyjęte jako współrzędne na rozmaiłości M , wybranej przez zadanie stałych $\text{const}_1, \text{const}_2$. Po

obciążeniu równań do podrozmiarowości M wektory δ^* stają się trójwymiarowe i w układzie współrzędnych v^1, v^2, v^3 na M mamy wobec (9.13)

$$\delta = -\lambda, \quad (\delta^1, \delta^2, \delta^3) = -(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Zatem odwzorowanie $P(u) : T_u M \rightarrow T^*E$ dane jest macierzą $-I$, co automatycznie zapewnia znikanie (a więc i symetrię) koneksji ∇ . Tu znowu układ generowany przez stacjonarne ($\lambda_0 = 0$) elementy potencjalne daje się sprowadzić do jednego równania rzędu drugiego

$$(11.21) \quad \sum_{i,j} (\psi_{,i} \psi_{,j} - \delta_{ij} c^2) \psi_{,ij} = 0$$

dla potencjału ψ , $v = \text{grad } \psi$. Równanie to można zresztą otrzymać z równania (11.15) przyrównując pochodne czasowe ψ_{00}, ψ_{0i} do zera. Równanie to w obszarze poddźwiękowym jest równaniem eliptycznym, natomiast w obszarze naddźwiękowym - równaniem hiperbolicznym.

Jako następny przykład rozważmy jeszcze równania Eulera płynu nieściśliwego

$$(11.22) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \nabla p = 0, \quad \vec{v} = (v^1, v^2, v^3),$$

$$\text{div } \vec{v} = 0.$$

Równania definiujące elementy charakterystyczne dla układu (11.22) są postaci

$$(11.23) \quad \delta \vec{\delta} + \delta_p \vec{\lambda} = 0$$

$$\vec{\delta} \cdot \vec{\lambda} = 0,$$

gdzie jak poprzednio $\delta = \lambda_0 + \vec{v} \cdot \vec{\lambda}$, $\delta = (\delta_p, \vec{\delta}) = (\delta_p, \delta^1, \delta^2, \delta^3)$, $\lambda = (\lambda_0, \vec{\lambda})$. Związek dyspersyjny

$$F(\mathbf{v}, \lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & \delta & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = -\delta^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

zapewniający istnienie niezerowych rozwiązań na δ dla układu (11.23) ma dwie gałęzie: $\delta = 0$ lub $\vec{\lambda}^2 = 0$. Pierwsza z nich, liniowa, $\lambda_0 + \vec{v} \cdot \vec{\lambda} = 0$, dwukrotnie zdegenerowana, dopuszcza rzeczywiste wektory λ , podczas gdy druga o krotności 1 może mieć tylko zespolone rozwiązanie na przestrzenne składowe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ wektora λ . Składowa λ_0 jest tu zupełnie dowolna. Jedyne rzeczywiste rozwiązanie przynależne do drugiej gałęzi są postaci $(\lambda_0, 0, 0, 0)$ i odpowiadają rozwiązaniom równań Eulera typu $p = \psi(t)$, $v = 0$. Elementy pierwszego rodzaju z gałęzi $\delta = 0$ są związane z rozwiązaniami równań Eulera o nieznikającej w ogólności rotacji prędkości. Mamy tu bowiem

$$(11.24) \quad \delta = \lambda_0 + \vec{v} \cdot \vec{\lambda} = 0 \implies \lambda = (-\vec{v} \cdot \vec{\lambda}, \vec{\lambda}),$$

$$\delta = (0, \vec{\delta}),$$

gdzie $\vec{\delta} \cdot \vec{\lambda} = 0$, a ponieważ w języku elementów charakterystycznych $\text{rot } \vec{v}$ jest reprezentowana przez iloczyn wektorowy $\vec{\lambda} \times \vec{\delta}$, wobec tego rozwiązania budowane z elementów postaci (11.24) mają w ogólności rotację nieznikającą. Jeśli jednak brać elementy zespolone typu (11.24), wówczas biorąc $\vec{\delta} = \vec{\lambda}$ można spełnić $\vec{\delta} \cdot \vec{\lambda} = 0$ i $\vec{\lambda} \times \vec{\delta} = 0$.

Elementy drugiego rodzaju z gałęzi $\vec{\lambda}^2 = 0$ są związane z przepływami bezwirowymi, ponieważ tu

$$(11.25) \quad \lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$\delta = (-\lambda_0 - \vec{v} \cdot \vec{\lambda}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

gdzie $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$, a zatem $\vec{\lambda} = \vec{\delta}$ co wobec $\vec{\lambda} \times \vec{\delta} = 0$ oznacza znikanie rotacji prędkości dla rozwiązań budowanych z elementów (11.25). Łatwo zauważyć, że w tym przypadku wektory λ można również wyrazić liniowo przez γ

$$(11.26) \quad \lambda = P \delta,$$

gdzie

$$P = \begin{pmatrix} -1, & -v^1, & -v^2, & -v^3 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformacja $(p, \vec{v}) \longrightarrow (\varepsilon, \vec{v})$, gdzie

$$(11.27) \quad \varepsilon = -\left(p + \frac{1}{2} \vec{v}^2\right)$$

robi z macierzy P danej w zmiennych p, \vec{v} wzorem (11.26) macierz jednostkową w zmiennych ε, \vec{v} . Rolę tensora $g(\delta, \delta)$ odgrywa tu zdegenerowana forma kwadratowa

$$(11.28) \quad g(\delta, \delta) = (\delta^1)^2 + (\delta^2)^2 + (\delta^3)^2$$

indukowana przez formę $\vec{\lambda}^2$ występującą w (11.25). Współrzędne wektora δ w (11.28) wyrażone są w układzie ε, \vec{v}

$$\delta = \delta^0 \partial \varepsilon + \delta^1 \partial v^1 + \delta^2 \partial v^2 + \delta^3 \partial v^3.$$

Zgodnie z rozważaniami tego rozdziału układ równań cząstkowych generowany przez elementy potencjalne (11.25) można (lokalnie) sprowadzić do jednego równania rzędu drugiego na potencjał $\Psi(t, x)$, gdzie

$$(11.29) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varepsilon, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = v^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

wówczas $\Psi(t, x)$ spełnia równanie Laplace'a

$$(11.30) \quad \Delta\psi = 0, \quad \Delta = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)^2,$$

które wobec degeneracji metryki (11.28) nie zawiera różniczkowania po czasie. Czas odgrywa tu więc rolę parametru. Zależność od czasu wyznaczana jest więc przez warunki początkowo-brzegowe.

Wzór (11.27) pozwala wyliczyć ciśnienie p , jeśli dany jest potencjał $\psi(t, x)$

$$(11.31) \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} + p + \frac{1}{2} v^2 = 0.$$

Jeśli $\tilde{\psi}(t, x)$ jest jakimkolwiek innym potencjałem prędkości, tzn. mamy $\tilde{\psi}_{,xi} = v^i$, $i = 1, 2, 3$, wówczas oczywiście $\text{grad}(\psi - \tilde{\psi}) = 0$, co oznacza, że $\psi - \tilde{\psi}$ jest funkcją zależną jedynie od czasu. Zatem dla potencjału $\tilde{\psi}$ zależność (11.31) można zapisać

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} + p + \frac{1}{2} v^2 = F(t).$$

Ta postać nosi nazwę całki Cauchy'ego (Kočin, Kibel, Rose 1963).

W przypadku przepływów stacjonarnych ostatni związek, bądź wzór (11.31) prowadzi ponownie do całki Bernoulli'ego ($q = 1$)

$$p + \frac{1}{2} v^2 = \text{const.}$$

Uwaga! stacjonarność przepływu oznacza tu niezależność ciśnienia p oraz prędkości \vec{v} od czasu, co implikuje, że $\frac{\partial\psi}{\partial t} = \text{const}$, jako że $0 = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \text{grad} \frac{\partial\psi}{\partial t}$, a zatem $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ jest co najwyżej funkcją czasu. Z drugiej zaś strony $0 = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, a więc $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ nie może również zależeć od czasu.

12. Geometria nieliniowych oddziaływań.

W przypadku kwadratowej gałęzi związku dyspersyjnego, gdy $\lambda = P\delta$ z nieosobliwą macierzą P , warunki zgodności dla układu z dwoma modami a więc warunki elastycznego oddziaływania fal Riemanna przyjmują zgodnie z rozważaniami poprzedniego rozdziału następującą postać

$$(12.1) \quad \begin{array}{l} \text{a/} \quad [\delta_1, \delta_2] \in \text{Lin}_\alpha \{ \delta_1, \delta_2 \} \\ \text{b/} \quad \nabla_{\delta_1} \delta_2 \in \text{Lin}_\alpha \{ \delta_1, \delta_2 \} \\ \quad \quad \nabla_{\delta_2} \delta_1 \in \text{Lin}_\alpha \{ \delta_1, \delta_2 \} \\ \text{c/} \quad g(\delta_1, \delta_1) = g(\delta_2, \delta_2) = 0 \end{array}$$

Warunki te dają się zatem całkowicie wyrazić w języku pól wektorowych δ_1, δ_2 na rozmaitości M i stanowią w ogólności nadokreślony układ równań na te pola. Warunek (12.1a) można zastąpić nieco silniejszym $[\delta_1, \delta_2] = 0$, który nie wprowadza żadnych dodatkowych ograniczeń, a oznacza jedynie wybór odpowiedniego unormowania pól δ_1, δ_2 .

Będziemy zatem badać równoważny układ równań

$$(12.2) \quad \begin{array}{l} \text{a/} \quad [\delta_1, \delta_2] = 0 \\ \text{b/} \quad \nabla_{\delta_i} \delta_j \in \text{Lin}_\alpha \{ \delta_1, \delta_2 \} \quad \text{dla } i \neq j, \\ \text{c/} \quad g(\delta_1, \delta_1) = g(\delta_2, \delta_2) = 0. \end{array}$$

Korzystając z definicji tensora torsji

$$T(\delta_1, \delta_2) := \nabla_{\delta_1} \delta_2 - \nabla_{\delta_2} \delta_1 - [\delta_1, \delta_2]$$

widzimy, że równania (12.2) prowadzą do algebraicznego warunku

$$(12.3) \quad T(\delta_1, \delta_2) \in \text{Lin}_\alpha \{\delta_1, \delta_2\}.$$

Jeśli warunek ten nie byłby tożsamościowo spełniony wówczas zgodnie z rozważaniami z rozdziału 10 oznaczałoby to, że nie dla każdej pary fal Riemanna* można skonstruować zgodny (całkowalny) układ (5.1) z dwoma modami. Zażądamy zatem, aby warunek ten był tożsamościowo spełniony. Oznacza to jednakże, zgodnie z definicją koneksji ∇ niezmienniczej ze względu na transformacje $P \rightarrow \alpha P$, że torzja znika tożsamościowo (twierdzenie 11.1). Ale jeśli $T \equiv 0$, wtedy

$$[\delta_1, \delta_2] = \nabla_{\delta_1} \delta_2 - \nabla_{\delta_2} \delta_1.$$

Równania (12.2a) i (12.2b) po wykorzystaniu ostatniej równości oznaczają istnienie takich funkcji α, β , że zachodzi

$$(12.4) \quad \nabla_{\delta_1} \delta_2 = \nabla_{\delta_2} \delta_1 = \alpha \delta_1 + \beta \delta_2.$$

Współczynniki α, β można wyznaczyć różniczkując związki (12.2c) oraz wykorzystując równania (12.4) np.

$$(12.5) \quad 0 = \nabla_{\delta_2} (g(\delta_1, \delta_2)) = (\nabla_{\delta_2} g)(\delta_1, \delta_2) + 2\beta g(\delta_1, \delta_2),$$

stąd

$$(12.6) \quad \alpha = - \frac{(\nabla_{\delta_1} g)(\delta_2, \delta_2)}{2g(\delta_1, \delta_2)}, \quad \beta = - \frac{(\nabla_{\delta_2} g)(\delta_1, \delta_1)}{2g(\delta_1, \delta_2)}.$$

Ostatecznie dostajemy dwa równania

$$(12.7) \quad \begin{aligned} \nabla_{\delta_1} \delta_2 &= \alpha \delta_1 + \beta \delta_2 \\ \nabla_{\delta_2} \delta_1 &= \alpha \delta_1 + \beta \delta_2 \end{aligned}$$

na dwa szukane pola δ_1, δ_2 . Równania te są równaniami hiperbolicznymi. Warunek znikania komutatora $[\delta_1, \delta_2] = 0$ jest warun-

*nawet o nieskończenie małych amplitudach | <http://pauk.uibk.ac.at>

kiem zgodności równań

$$(12.8) \quad \frac{\partial u}{\partial R^1} = \delta_1(u), \quad \frac{\partial u}{\partial R^2} = \delta_2(u),$$

które wyznaczają powierzchnie styczne do δ_1, δ_2 sparametryzowane przez R^1, R^2 . Pola δ_1, δ_2 muszą spełniać równania (12.7). Jeśli poszukiwać takiej powierzchni w postaci $u = u(R^1, R^2)$, wówczas równania (12.7) redukują się do jednego równania drugiego rzędu

$$(12.9) \quad u_{,R^1 R^2}^i + \Gamma_{jk}^i u_{,R^1}^i u_{,R^2}^k = \alpha u_{,R^1} + \beta u_{,R^2}.$$

Równania tego typu były badane przez J. Kiszyńskiego (1970).

TWIERDZENIE 12.1 Problem Darboux

$$u^j(0, R^1) = \varphi_1^j(R^1), \quad u^j(R^2, 0) = \varphi_2^j(R^2),$$

$$(R^1, R^2) \in I_1 \times I_2, \quad \varphi_1^j(0) = \varphi_2^j(0), \quad \varphi_1, \varphi_2 \in C^1$$

dla układu (12.9) o różniczkowalnych współczynnikach posiada, i to jednoznaczne, rozwiązanie w prostokącie $I_1 \times I_2$ ($I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$), jeśli $|a_i|, |b_i|$ są dostatecznie małe. Ograniczenia te zależą w ogólności od współczynników równań (12.9) oraz od $\sup_{i,j,R^1,R^2} |\varphi_1^i(R^i) - u_0|$. Jeśli ponadto dane początkowe są obrazami fal prostych tzn.

$$\varepsilon_{ij}(\varphi_1(R^1)) \dot{\varphi}_1^i(R^1) \dot{\varphi}_1^j(R^1) = 0$$

$$\varepsilon_{ij}(\varphi_2(R^2)) \dot{\varphi}_2^i(R^2) \dot{\varphi}_2^j(R^2) = 0,$$

wówczas również związki

$$g(u, R^1, u, R^1) = g(u, R^2, u, R^2) = 0$$

są spełnione dla $(R^1, R^2) \in I_1 \times I_2$. A zatem linie układu współrzędnych R^1, R^2 są liniami stycznymi do wektorów polaryzacji δ_1, δ_2 . W istocie, jeśli ograniczyć się do rozwiązań słabych, wtedy wystarczy, że dane brzegowe φ_1, φ_2 są dostatecznie małe i spełniają warunek Lipschitza.

Równania (12.9) podobnie jak równania w poprzednich rozdziałach są wyrażone w układzie współrzędnych R^1, R^2 związanych z polami δ_1, δ_2 . Można zapytać, czy istnieje bardziej niezmiennicza charakterystyka powierzchni G_2 nie wymagająca żadnego specyficznego układu współrzędnych. Okazuje się, że tak jest istotnie. Jeśli G_2 jest ową szukaną powierzchnią, wówczas metryka g indukuje poprzez kanoniczne włożenie $i: G_2 \rightarrow M$ pewną metrykę $g_X = i^*g$ na podrozumowitości G_2 . Podobnie koneksja daje się zrzutować na G_2 kładąc

$$\nabla_X Y = \nabla_X^{\#} Y + h(X, Y),$$

gdzie pola X, Y są styczne do G_2 , natomiast $h(X, Y)$ jest prostopadłą do TG_2 w metryce g częścią pola $\nabla_X Y$. Wtedy automatycznie pole $\nabla_X^{\#} Y$ jest styczne do G_2 .

Dowodzi się w przypadku jakiegokolwiek podrozumowitości $G \subset M$ (niekoniecznie dwuwymiarowej), że $h(X, Y)$ jest dwuformą o wartościach w wiązce normalnej NG (Chen 1973, Gołąb 1966). Dwufорма ta nosi nazwę krzywizny zewnętrznej podrozumowitości G względem najeżenia prostopadłego i jest związana z koneksją ∇ . Istotnie, dla $f, r \in \alpha(M)$ oraz pól X, Y stycznych do G mamy

$$\nabla_{fX}(rY) = fr_X Y + rf \nabla_X Y = fr_X Y + rf \nabla_X^{\#} Y + rf h(X, Y),$$

z drugiej zaś strony

$$\nabla_{fX}(rY) = \nabla_{fX}^{\parallel}(rY) + h(fX, rY).$$

Porównując teraz części równoległe i prostopadłe widzimy, że

$$h(fX, rY) = rf h(X, Y)$$

oraz

$$\nabla_{fX}^{\parallel}(rY) = fr_{,X}Y + rf\nabla_X^{\parallel}Y,$$

co pokazuje, że h jest α -liniowe oraz, że ∇^{\parallel} jest koneksją określoną na polach stycznych do G .

Jeśli ∇ jest koneksją symetryczną ($T \equiv 0$) wtedy forma h jest symetryczna, $h(X, Y) = h(Y, X)$, oraz indukowana koneksja ∇^{\parallel} jest również symetryczna.

Mamy bowiem

$$0 = T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Biorąc teraz część równoległą i prostopadłą tego równania i pamiętając, że dla pól X, Y stycznych do G pole $[X, Y]$ jest również styczne, dostajemy

$$0 = \nabla_X^{\parallel} Y - \nabla_Y^{\parallel} X - [X, Y] = T^{\parallel}(X, Y)$$

oraz

$$h(X, Y) = h(Y, X),$$

co dowodzi prawdziwości podanych własności h i ∇^{\parallel} .

Biorąc część równoległą równania (12.7) dostajemy

$$(12.10) \quad \begin{aligned} \nabla_{\delta_1}^{\parallel} \delta_2 &= \alpha \delta_1 + \beta \delta_2 \\ \nabla_{\delta_2}^{\parallel} \delta_1 &= \alpha \delta_1 + \beta \delta_2, \end{aligned}$$

które po uwzględnieniu faktu, że $g(\delta_1, \delta_1) = g(\delta_2, \delta_2) = 0$ oraz

$\nabla_{\delta_1} \delta_2 - \nabla_{\delta_2} \delta_1 = 0$ sprowadzają się do tożsamości. Możemy bowiem pokazać, że zarówno prawą jak i lewą stronę można zapisać w postaci

$$-\frac{1}{2} g(\delta_1, \delta_2) i_* \operatorname{div}^{\parallel} g^*$$

gdzie g^* jest kontrawariantnym tensorem metrycznym na podrozmaitości G_2 : $g^* = g_*^{-1}$, a $\operatorname{div}^{\parallel}$ jest liczona względem koneksji ∇^{\parallel} indukowanej na podrozmaitości G_2 . Przy pomocy kanonicznego włożenia $i: G_2 \rightarrow M$ można przenieść g^* na rozmaitość M . Istotnie, biorąc pola δ_1, δ_2 jako pola bazowe na $i(G_2)$ oraz używając form dualnych

$$e^1 = \frac{1}{g(\delta_1, \delta_2)} g(\delta_2, \cdot), \quad e^2 = \frac{1}{g(\delta_1, \delta_2)} g(\delta_1, \cdot),$$

$$\langle e^i, \delta_j \rangle = \delta_j^i$$

możemy wyrazić równoległą do G_2 część kontrawariantnego tensora metrycznego

$$(12.11) \quad i_* g^* = (g^{-1})^{\parallel} = g^{-1}(e^\alpha, e^\beta) \delta_\alpha \otimes \delta_\beta = \frac{\delta_1 \otimes \delta_2 + \delta_2 \otimes \delta_1}{g(\delta_1, \delta_2)}.$$

Niech Div oznacza operator dywergencji na rozmaitości G_2 liczony względem koneksji riemannowskiej indukowanej przez tensor metryczny g_* . Używając rozkładu $\nabla = \nabla^g + G$, a więc również $\nabla = \nabla^g + G^{\parallel}$ oraz korzystając z własności koneksji metrycznej $\nabla^g g^* = 0$, a więc $\operatorname{Div} g^* = 0$ dowodzimy, że

$$(12.12a) \quad i_* \operatorname{div}^{\parallel} g^* = i_* \operatorname{Div} g^* + 2 \frac{G^{\parallel}(\delta_1, \delta_2)}{g(\delta_1, \delta_2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{\langle G(\delta_1, \delta_2), e^1 \rangle}{g(\delta_1, \delta_2)} \delta_1 + 2 \frac{\langle G(\delta_1, \delta_2), e^2 \rangle}{g(\delta_1, \delta_2)} \delta_2 = \\
&= 2 \frac{g(G(\delta_1, \delta_2), \delta_1)}{g(\delta_1, \delta_2)^2} \delta_2 + 2 \frac{g(G(\delta_1, \delta_2), \delta_2)}{g(\delta_1, \delta_2)^2} \delta_1
\end{aligned}$$

co wobec definicji tensora G prowadzi do tożsamości

$$(12.12b) \quad i_* \operatorname{div}^{\parallel} g^* = - \frac{2}{g(\delta_1, \delta_2)} (\alpha \delta_1 + \beta \delta_2),$$

gdzie α, β dane są przez (12.6). Zatem istotnie równania (12.10) przybierają postać tożsamości

$$\nabla_{\delta_1}^{\parallel} \delta_2 + \nabla_{\delta_2}^{\parallel} \delta_1 = g(\delta_1, \delta_2) i_* \operatorname{div}^{\parallel} g^*,$$

oraz warunku unormowania

$$\nabla_{\delta_1}^{\parallel} \delta_2 = \nabla_{\delta_2}^{\parallel} \delta_1.$$

Wyrażenie $\operatorname{div}^{\parallel} g^*$ jest miarą sprzężenia występującego pomiędzy oddziaływanymi falami.

TWIERDZENIE 12.2 Jeśli $\operatorname{div}^{\parallel} g^* = 0$, wówczas nie ma oddziaływania pomiędzy falami.

Istotnie, na mocy rozważań ze strony 102 istnieje taki układ współrzędnych u^α , w którym współczynniki koneksji Γ_{jk}^i znikają i $P = I$. W układzie tym równania (12.9) przyjmują postać

$$u_{,R^1 R^2} = \alpha u_{,R^1} + \beta u_{,R^2}.$$

Jednakże $\operatorname{div}^{\parallel} g^* = 0$ oznacza, że $\alpha = \beta = 0$ zatem

$$u = f_1(R^1) + f_2(R^2) - p_0, \quad (p_0 = f_1(0) = f_2(0))$$

i rozwiązanie na R^1, R^2 będzie zwykłą sumą fal Riemanna, ponieważ wtedy również równania

$$dR^1 = \xi^1 \lambda^1 = \xi^1 \sum_i f_{1,R^1}^i dx^i$$

$$dR^2 = \xi^2 \lambda^2 = \xi^2 \sum_i f_{2,R^2}^i dx^i$$

na R^1, R^2 separują się.

Zgodnie z równaniami (12.7) znikanie α i β oznacza, że pole δ_1 jest przesuwane równoległe (w koneksji ∇) wzdłuż pola δ_2 i na odwrót: pole δ_2 jest przesuwane równoległe wzdłuż pola δ_1 . Widzimy więc, że równoległe przesunięcie oznacza brak oddziaływania pomiędzy falami, które w ogólności są nieliniowe i ulegają samoodziaływaniami. Podobnie, jeśli izotropowe pole δ (tzn. $g(\delta, \delta) = 0$) jest równoległe przenoszone wzdłuż siebie, wówczas związane z nim fale Riemanna są liniowe, tzn. nie ulegają samoodziaływaniami. Istotnie, w układzie współrzędnych, w którym $P_{\nu j} = \delta_{\nu j}$ współrzędne δ^i są stałe, linie całkowe mają postać

$$u^i = \delta^i R + p_0^i$$

i odpowiednie równanie na R jest również liniowe

$$dR = \sum \xi \delta^i dx^i.$$

TWIERDZENIE 12.3 Aby pole δ przenoszone równoległe pozostawało izotropowe potrzeba i wystarcza, by

$$(12.13) \quad g(G(\delta, \delta), \delta) = 0.$$

Rzeczywiście, na mocy definicji G (wzór 11.5)

$$(12.13a) \quad g(G(\delta, \delta), \delta) = \frac{1}{2} (\nabla_\delta g)(\delta, \delta),$$

skąd $\nabla_{\check{\gamma}} \check{\delta} = 0$ oraz (12.13) pociągają

$$\nabla_{\check{\gamma}}(g(\check{\delta}, \check{\delta})) = (\nabla_{\check{\gamma}} g)(\check{\delta}, \check{\delta}) + g(\nabla_{\check{\gamma}} \check{\delta}, \check{\delta}) = 0,$$

co oznacza, że jeśli pole $\check{\delta}$ jest w jakimś punkcie izotropowe, to pozostaje izotropowe ($g(\check{\delta}, \check{\delta}) = 0$) wzdłuż całej trajektorii przechodzącej przez ten punkt. Z drugiej zaś strony $g(\check{\delta}, \check{\delta}) = 0$ oraz $\nabla_{\check{\gamma}} \check{\delta} = 0$ pociąga $(\nabla_{\check{\gamma}} g)(\check{\delta}, \check{\delta}) = 0$, a więc również (12.13). Twierdzenie 12.3 pokazuje, że istotnie G jest miarą nielinowości rozpatrywanego układu.

Zajmijmy się teraz częścią prostopadłą równań (12.7)

$$h(\check{\delta}_1^*, \check{\delta}_2^*) = 0.$$

Korzystając z symetrii formy h , $h(X, Y) = h(Y, X)$, oraz ze wzoru (12.11) na $i_* g^*$ równanie to można zapisać w bardziej geometrycznej postaci

$$(12.14) \quad \langle h, g^* \rangle = 0,$$

gdzie $\langle h, g^* \rangle = h_{\alpha\beta} g^{*\alpha\beta}$. Równanie (12.14) oznacza, że średnia zewnętrzna krzywizna rozmaitości G_2 jest równa zero (Gołąb 1966). Krzywizna ta związana jest z koneksją ∇ . Jeśli posłużymy się metryczną formą krzywizny zewnętrznej $H(X, Y)$ rozmaitości G_2 tzn. zewnętrzną krzywizną związaną z koneksją metryczną ∇^G

$$\nabla_X^G Y = (\nabla_X^G Y)^{\parallel} + H(X, Y), \quad H(X, Y) \perp TG_2,$$

wtedy rozkład $\nabla_X Y = \nabla_X^G Y + G(X, Y)$ indukuje rozkład krzywizn

$$h(X, Y) = H(X, Y) + G^{\perp}(X, Y),$$

gdzie $G^{\perp}(X, Y)$ jest prostopadłą do TG_2 częścią wektora $G(X, Y)$, a równanie (12.14) przyjmuje następującą postać

$$(12.15) \quad \langle H, g^* \rangle = - \langle G^1, g^* \rangle,$$

gdzie $\langle H, g^* \rangle = (H_{\mu\nu}^\alpha g^{*\mu\nu})$, $\alpha = 1, \dots, n$, $\mu, \nu = 1, 2$, jest średnią metryczną krzywizną podrozumności G_2 . H nosi też nazwę drugiej fundamentalnej formy podrozumności G_2 . W przypadku równań liniowych $G = 0$ co oznacza, że powierzchnie spełniające równanie (12.15) są powierzchniami minimalnymi.

Powróćmy teraz do przykładu rozważanego w poprzednich rozdziałach. Obliczając wartość $g(G(X, X), X)$ dla tensora danego wzorem (11.10) na wektorze izotropowym X a więc takim, że $(X^0)^2 c^2 / \rho^2 = \bar{X}^2$ dostajemy

$$g(G(X, X), X) = -c^{\frac{2}{n}} X^0 \left(\frac{\dot{c}}{c} + \rho^{-1} \right) \bar{X}^2$$

co poza przypadkiem kiedy

$$(12.16) \quad \dot{c} = -c\rho^{-1} \quad \text{a więc} \quad p = B(S) - \frac{A^2(S)}{\rho}$$

jest różne od zera. W konsekwencji, poza przypadkiem (12.16), fale Riemanna są nieliniowe i wykazują efekt samooddziaływania.

Obliczmy teraz $\text{div}^{\parallel} g^*$ to jest miarę sprężenia (oddziaływania) występującego pomiędzy falami wyznaczając współczynniki α i β zdefiniowane przez (12.6). Z porównania wzorów (12.12a) i (12.12b) oraz używając (11.10) i pamiętając o izotropowości wektorów X i \bar{Y} dostajemy

$$\alpha = -\frac{1}{g(X, \bar{Y})} g(G(X, \bar{Y}), \bar{Y}) = \frac{1}{c^2 / \rho^2 X^0 \bar{Y}^0 - \bar{X} \cdot \bar{Y}} \left(\frac{\dot{c}}{c} X^0 \bar{Y}^2 + \frac{X^0}{\rho} \bar{X} \cdot \bar{Y} \right)$$

$$\beta = -\frac{1}{g(X, \bar{Y})} g(G(X, \bar{Y}), X) = \frac{1}{c^2 / \rho^2 X^0 \bar{Y}^0 - \bar{X} \cdot \bar{Y}} \left(\frac{\dot{c}}{c} X^0 \bar{Y}^2 + \frac{\bar{Y}^0}{\rho} \bar{X} \cdot \bar{Y} \right).$$

Warunek nieistnienia wzajemnego oddziaływania $\alpha = 0$, $\beta = 0$ prowadzi do żądania, aby

$$\frac{\dot{c}}{c} Y^0 \bar{X}^2 + \frac{X^0}{\varphi} \bar{X} \cdot \bar{Y} = \frac{\dot{c}}{c} X^0 \bar{Y}^2 + \frac{Y^0}{\varphi} \bar{X} \cdot \bar{Y} = 0.$$

Mamy $\frac{c}{\varphi} Y^0 = |\bar{Y}|$, $\frac{c}{\varphi} X^0 = |\bar{X}|$, dalej $\bar{X} \cdot \bar{Y} = |\bar{X}| |\bar{Y}| \cos \psi$, gdzie (przy równości $\bar{\delta} = -\bar{\lambda}$) ψ jest kątem pomiędzy kierunkami propagacji fal, a zatem $\alpha = 0$, $\beta = 0$, jeśli

$$(12.17) \quad \frac{\dot{c}}{c} + \frac{1}{\varphi} \cos \psi = 0.$$

Jeśli teraz $|\frac{\dot{c}}{c}| < 1$, wówczas zawsze można znaleźć dwie (nieliniowe) fale Riemanna (w istocie rodziny takich fal), które nie będą oddziaływać wzajemnie. Wystarczy w tym celu skonstruować dwie funkcje $\bar{X}(\varphi)$, $\bar{Y}(\varphi)$ (z \mathbb{R}^1 do \mathbb{R}^3 , ogólnie do \mathbb{R}^{n-1} , $n > 2$) spełniające warunek (12.17) a następnie wziąć

$$X = \left(\frac{c}{\varphi} |\bar{X}|, \bar{X} \right), \quad Y = \left(\frac{c}{\varphi} |\bar{Y}|, \bar{Y} \right)$$

za wektory polaryzacji fal prostych.

W ogólności, jak widać z (12.17), kąt pomiędzy kierunkami nieoddziaływujących fal zależy od φ . Jeśli zażądać $\cos \psi = \text{const}$ wtedy warunek (12.17) prowadzi do wniosku, że równanie stanu $p = f(S, \varphi)$ jest postaci

$$p = B(S) + \frac{A(S)}{1-2 \cos \psi} \varphi^{1-2 \cos \psi}.$$

W szczególności równanie stanu gazu doskonałego

$$p = A(S) \varphi^\kappa$$

jest tej postaci, κ oznacza tu wykładnik izentropy. A warunek

braku sprzężenia ma postać (Peradzyński 1972_B)

$$\cos \psi = - \frac{\chi - 1}{2} .$$

Zgodnie z rozważaniami tego rozdziału można więc powiedzieć że $g(G(X,X),X)$ mierzy efekty samooddziaływania, natomiast $G^{\parallel}(X,Y)$ efekty oddziaływania wzajemnego. Wygodnie jest wprowadzić kowariantny tensor G_* definiując

$$(12.18) \quad G_*(X,Y;Z) = g(G(X,Y),Z).$$

Mamy tu zgodnie z definicją G

$$G_*(X,Y;Z) = \frac{1}{2} \{ (\nabla_X g)(Y,Z) + (\nabla_Y g)(X,Z) - (\nabla_Z g)(X,Y) \} .$$

Oznaczmy jeszcze dla wygody

$$G_*^{\parallel}(X,Y;\cdot) = (G_*(X,Y;Y), G_*(X,Y;X)).$$

Reasumując widzimy, że mogą się zdarzyć rozmaite sytuacje:

a/ brak zarówno oddziaływania jak i samooddziaływania fal jak np. w równaniach liniowych. Wtedy

$$G_*(X,X;X) = G_*(Y,Y;Y) = G(X,Y;Y) = G(X,Y;X) = 0;$$

b/ brak samooddziaływania, ale występuje oddziaływanie wzajemne. Tak jest np. w rozważanym przez nas przykładzie gdy

$$p = B(S) - \frac{A(S)}{q}, \quad A > 0.$$

Wtedy

$$G_*(X,X;X) = G_*(Y,Y;Y) = 0, \quad G_*^{\parallel}(X,Y;\cdot) \neq 0;$$

c/ występuje samooddziaływanie przy braku wzajemnego oddziaływania jak np. w rozpatrywanym przykładzie, kiedy kąt pomię-

dzy kierunkami propagacji spełnia (12.17) a $\cos \psi \neq 1$

$$G(X,X;X) \neq 0, \quad G(Y,Y;Y) \neq 0, \quad G''(X,Y;\cdot) \neq 0;$$

d/ występują oba efekty, jest to sytuacja typowa

$$G_*(X,X;X), \quad G(Y,Y;Y) \neq 0, \quad G''(X,Y;\cdot) \neq 0.$$

13. Mody eliptyczne.

Niemal wszystkie rozważania z poprzednich rozdziałów, wyjąwszy jedynie te, które dotyczą bezpośrednio interpretacji rozwiązań jako oddziaływań fal Riemanna, dają się uogólnić na przypadek zespolonych elementów charakterystycznych. Elementy takie można wprowadzić nie tylko dla układów eliptycznych, ale można je używać również w przypadku układów hiperbolicznych, biorąc zespolone rozwiązania λ związku dyspersyjnego $F(\lambda, u) = 0$. Rzecz jasna, przemnożenie rzeczywistego wektora λ przez liczbę zespoloną czyni z niego wektor zespolony, co jednakże w naszym przypadku nie prowadzi do niczego nowego. Mówiąc o zespolonym λ będziemy więc mieli w zasadzie na myśli wektor $\lambda^1 + i\lambda^2$, gdzie λ^1, λ^2 są niezależnymi rzeczywistymi wektorami.

Warunki zgodności dla układu zawierającego w ogólności mody zespolone były rozpatrywane w rozdziale 3. Jednak ze względu na prostotę rozważanego tu przypadku warto je powtórzyć dla układu zawierającego pewien mod zespolony $\delta \otimes \lambda$ i sprzężony do niego $\bar{\delta} \otimes \bar{\lambda}$

$$(13.1) \quad du = \xi \delta \otimes \lambda + \bar{\xi} \bar{\delta} \otimes \bar{\lambda}.$$

Różniczkując zewnętrznie równania (13.1), a następnie wyrażając różniczki du z równań (13.1) dostajemy

$$(13.2) \quad \delta \otimes (d\xi \wedge \lambda + \xi d\lambda) + \bar{\delta} \otimes (d\bar{\xi} \wedge \bar{\lambda} + \bar{\xi} d\bar{\lambda}) + \xi \bar{\xi} [\delta, \bar{\delta}] \otimes \lambda \wedge \bar{\lambda} = 0.$$

Żądanie, by istniały rozwiązania z $\xi \neq 0$ (tzn. $u(x)$ różne od stałych) oznacza, że komutator $[\delta, \bar{\delta}]$ powinien dać się rozłożyć z powrotem na $\delta, \bar{\delta}$ tzn.

$$(13.3) \quad [\delta, \bar{\delta}] \in \text{Lin}_{\mathbb{C}} \{ \delta, \bar{\delta} \},$$

gdzie współczynniki kombinacji są funkcjami o wartościach zespo-

lonych. W przeciwnym bowiem razie, wyrazy przy liniowo niezależnych wektorach $\delta, \bar{\delta}$ i $[\delta, \bar{\delta}]$ w (13.2) musiałyby zniknąć co oznaczałoby, że ξ równałoby się zero. Warunek (13.3) implikuje istnienie $a \in \alpha^{\mathbb{C}}$ takiego, że

$$(13.4) \quad [\delta, \bar{\delta}] = a\delta - \bar{a}\bar{\delta}.$$

Istotnie, $[\bar{\delta}, \delta] = [\delta, \delta] = -[\delta, \bar{\delta}]$ co wraz z (13.3) prowadzi do warunku (13.4). warunek ten pozwala zapisać równania w postaci

$$(13.5) \quad \begin{aligned} d\xi \wedge \lambda + \xi d\lambda + a\xi\bar{\xi}\lambda \wedge \bar{\lambda} &= 0, \\ d\bar{\xi} \wedge \bar{\lambda} + \bar{\xi} d\bar{\lambda} + \bar{a}\bar{\xi}\xi\bar{\lambda} \wedge \lambda &= 0, \end{aligned}$$

co przy warunku $d\bar{\xi} = d\xi$ oznacza, że jedno równanie jest po prostu zespolonym sprzężeniem drugiego. Można się zatem ograniczyć do rozpatrywania tylko jednego z nich, np. pierwszego.

Mnożąc pierwsze z równań zewnątrznie przez λ dostajemy

$$\xi \lambda \wedge d\lambda = 0.$$

Wobec założenia $\xi \neq 0$ prowadzi to po rozpisaniu do następującego warunku

$$(13.6) \quad \lambda \wedge \bar{\lambda} \wedge \lambda_{,\bar{\delta}} = 0.$$

Jeśli warunek ten jest spełniony, wówczas z lematu Cartana $d\lambda = \pi \wedge \lambda$ i równania (13.5), a zatem i (13.2) (jeśli spełniony jest 13.4) są algebraicznie niesprzeczne, tzn. posiadają algebraiczne rozwiązania na $d\xi$ i $d\bar{\xi}$ (takie, że $d\bar{\xi} = d\xi$). Podsumowując te rozważania widzimy, że

STWIERDZENIE 13.1 Warunkiem koniecznym istnienia rozwiązań nietrywialnych (różnych od stałych) układu

$$du = \xi \delta \omega \lambda + \bar{\xi} \bar{\delta} \omega \bar{\lambda}$$

jest, by spełnione były następujące warunki

1° $[\zeta, \bar{\zeta}] = a\zeta - a\bar{\zeta}$ dla pewnego $a \in \alpha_{\mathbb{C}}$

2° $\lambda \wedge \bar{\lambda} \wedge \lambda_{,\bar{\zeta}} = 0$.

Warunki te są analogiczne jak warunki (3.6) dopuszczające elastyczne oddziaływanie fal Riemanna.

Jeśli warunek 1° ostatniego stwierdzenia jest spełniony, wówczas można wybrać normalizację wektora ζ tak, by $[\zeta, \bar{\zeta}] = 0$. Istnieją wówczas (tw. Frobeniusa) rozwiązania równań

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \zeta, \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \bar{\zeta},$$

gdzie $z = z_1 + i z_2$ oraz gdzie

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1} - i \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z_1} + i \frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Mamy zatem rzeczywiste równania

$$\frac{\partial u}{\partial z_1} = \zeta_1(u), \quad -\frac{\partial u}{\partial z_2} = \zeta_2(u),$$

których rozwiązania $u = f(z_1, z_2, u_0)$, $f(0, 0, u_0) = u_0$ zadaje parametrycznie foliację rozmaitości H podrozzmaitościami stycznymi do ζ_1 , ζ_2 . Na takiej podrozzmaitości mamy

$$du = \zeta_1 dz_1 - \zeta_2 dz_2.$$

Jeśli porównać to teraz z wyjściowym równaniem, w którym ζ , λ , ξ wyrażone są przez odpowiednie rzeczywiste i urojone składniki

$$(13.7) \quad du = \gamma_1 \otimes (\xi^1 \lambda^1 - \xi^2 \lambda^2) - \gamma_2 \otimes (\xi^1 \lambda^1 + \xi^2 \lambda^2),$$

wówczas dochodzimy do równań na z_1 i z_2

$$(13.8) \quad \begin{aligned} dz_1 &= \xi^1 \lambda^1 - \xi^2 \lambda^2 \\ dz_2 &= \xi^1 \lambda^2 + \xi^2 \lambda^1. \end{aligned}$$

Jeśli $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ są polami rozpinającymi w każdym punkcie u

płaszczyznę stałości z (tzn. $\langle \lambda^i, \sigma_\alpha \rangle = 0$), a c_1, c_2 są takimi polami, że zachodzi $\langle \lambda^\alpha, c_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha$, $\alpha, \beta = 1, 2$, wówczas równania (13.8) są równoważne następującym równaniom

$$(13.9) \quad \begin{aligned} z^1_{,c_1} - z^2_{,c_2} &= 0, \\ z^2_{,c_1} + z^1_{,c_2} &= 0, \\ z^1_{,\sigma_r} = z^2_{,\sigma_r} &= 0, \quad r = 1, 2, \dots, n-2, \end{aligned}$$

powstałym przez eliminację zmiennych ξ . Tu również z_c oznacza pochodną kierunkową $c^v \frac{\partial}{\partial x^v} z$. W szczególności jeśli np. płaszczyzny $\{\lambda^1, \lambda^2\}$ rozpinane przez pola $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$ są transwersalne do płaszczyzny (x^1, x^2) , to wybierając dwuwymiarowe wektory

$$\begin{aligned} c_1 &= \mu(-\lambda_2^2, \lambda_1^2, 0, \dots, 0), \\ c_2 &= \mu(\lambda_2^1, -\lambda_1^1, 0, \dots, 0), \quad \text{gdzie } \mu = (-\lambda_1^1 \lambda_2^2 + \lambda_2^1 \lambda_1^2) \end{aligned}$$

leżące w płaszczyźnie (x^1, x^2) można obciąć równania (13.9) do płaszczyzny (x^1, x^2) szukając obciętych funkcji \tilde{z}^1, \tilde{z}^2

$$\begin{aligned} \tilde{z}^1(x^1, x^2) &= z^1(x^1, x^2, 0, \dots, 0), \\ \tilde{z}^2(x^1, x^2) &= z^2(x^1, x^2, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

W rezultacie pierwsze dwa z równań (13.9) dają eliptyczny układ dwóch równań

$$\begin{aligned} z^1_{,c_1} - z^2_{,c_2} &= 0, \\ z^2_{,c_1} + z^1_{,c_2} &= 0 \end{aligned}$$

na dwie funkcje \tilde{z}^1, \tilde{z}^2 zależne od x^1, x^2 . Każde rozwiązanie

tego układu można przedłużyć na pewne otoczenie płaszczyzny x^1 , x^2 kładąc z^1 stałe wzdłuż płaszczyzn rozpinanych przez $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-2}$. Warunek 2° stwierdzenia zapewnia, że otrzymane w ten sposób funkcje będą spełniały pełny układ równań w całym obszarze określoności funkcji z^1, z^2 . Uwaga - na mocy konstrukcji z^1, z^2 będą spełniać równania $z^i_{,\sigma} = 0$, nie jest jednakże oczywiste, że pierwsze dwa równania będą spełnione poza płaszczyzną x^1, x^2 . To właśnie jest gwarantowane przez warunek 2°.

Przy założeniu niezależności λ i $\bar{\lambda}$ i po wprowadzeniu parametryzacji $u = f(z_1, z_2, u_0)$ warunek $\lambda \wedge \bar{\lambda} \wedge \lambda_{,\bar{z}} = 0$ oznacza, że istnieją funkcje $\alpha(z_1, z_2)$, $\beta(z_1, z_2)$ takie, że

$$(13.10) \quad \lambda_{,\bar{z}} = \alpha \lambda + \beta \bar{\lambda}, \quad \text{gdzie } \lambda = \lambda(f).$$

Podobnie jak w przypadku modów rzeczywistych tu również można poszukiwać rozwiązań równań (13.8) w postaci uwikłanej

$$(13.11) \quad \Psi(z_1, z_2) = \lambda_{,\nu}(f)x^{\nu},$$

gdzie Ψ - funkcja o wartościach zespolonych.

Analogicznie jak poprzednio pokazuje się

TWIERDZENIE 13.1 Jeśli funkcja $\Psi = \Psi_1(z_1, z_2) + i\Psi_2(z_1, z_2)$ spełnia równanie

$$(13.12) \quad \Psi_{,\bar{z}} = \alpha \Psi + \beta \bar{\Psi},$$

oraz jeśli

$$\Psi_{,\bar{z}} - x^{\nu} \lambda_{,\nu z} \neq 0,$$

wówczas uwikłany związek (13.11) definiuje rozwiązanie równań (13.8).

Dowód przebiega analogicznie jak dla przypadku modów rzeczywistych. Biorąc różniczkę obu stron równania (13.11) mamy bowiem

$$\Psi_{,z} dz + \Psi_{,\bar{z}} d\bar{z} = \lambda + (x^{\nu} \lambda_{,\nu,z}) dz + (x^{\nu} \lambda_{,\nu,\bar{z}}) d\bar{z}.$$

Na mocy równania (13.12), korzystając ze związku (13.10) mamy jednakże

$$\Psi_{,\bar{z}} - x^{\nu} \lambda_{,\nu,\bar{z}} = 0,$$

skąd

$$(\Psi_{,z} - x^{\nu} \lambda_{,\nu,z}) dz = \lambda,$$

co dowodzi, że spełnione jest równanie $dz = \xi \lambda$, oraz równanie sprzężone $d\bar{z} = \bar{\xi} \bar{\lambda}$. W przypadku $\alpha = \beta = 0$ mody nie oddziałują ze sobą i równanie (13.12) oznacza, że Ψ jest funkcją holomorficzną.

Część wyników rozdziału 10 daje się również uogólnić na mody zespolone. Załóżmy mianowicie, że $W(u, \lambda)$ jest gałęzią o krotności 1 związku dyspersyjnego pewnego układu równań

$$(13.13) \quad \langle A(u), du \rangle = 0.$$

Niech dla λ spełniających $W(u, \lambda) = 0$ wektory polaryzacji wyrażają się w postaci

$$(13.14) \quad \delta = \delta(u, \lambda),$$

gdzie $\delta(u, \lambda)$ jest jednorodną funkcją stopnia r ze względu na λ taką, że $\delta(u, \bar{\lambda}) = \overline{\delta(u, \lambda)}$. Załóżmy teraz, że spełniony jest warunek zgodności

$$(13.15) \quad ([\delta(u, \lambda), \delta(u, \bar{\lambda})]_u + \bar{\alpha} \delta_{,\lambda}(u, \bar{\lambda}) \cdot \bar{\lambda} - \alpha \delta_{,\bar{\lambda}}(u, \lambda) \cdot \bar{\lambda}) \in \text{Lin} \{ \delta, \bar{\delta} \}$$

dla każdego $u \in \Omega \subset H$ oraz każdego λ spełniającego $W(u, \lambda) = 0$, współczynnik α jest tu zdefiniowany następująco

$$(13.16) \quad \alpha = - \frac{W_{,\bar{\lambda}}(u, \lambda)}{W_{,\lambda}(u, \lambda) \cdot \bar{\lambda}},$$

a $[,]_u$ zawiera jedynie różniczkowania po u przy ustalonych λ . Położmy teraz

$$(13.17) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \lambda = \bar{\alpha} \bar{\lambda} + \beta \lambda$$

wybierając $\beta(u, \lambda)$ tak, by pełny komutator (modulo (13.17)) był równy zero, tzn. by

$$(13.18) \quad [\delta, \bar{\delta}]^{\#} := [\delta, \bar{\delta}]_u + \bar{\alpha} \bar{\delta}_{,\lambda} \cdot \lambda - \alpha \delta_{,\lambda} \cdot \bar{\lambda} + r \beta \delta - r \bar{\beta} \bar{\delta} = 0,$$

gdzie korzystaliśmy ze wzoru Eulera $\delta_{,\lambda} \cdot \lambda = r \delta$ dla funkcji jednorodnej stopnia r . Teraz można już wypisać pełny układ równań

$$(13.19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \delta, & \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} &= \bar{\delta}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \lambda &= \alpha \bar{\lambda} + \beta \lambda, \end{aligned}$$

który dla zespolonego $\hat{\lambda} = \lambda_1 + i \lambda_2$ przy założeniu liniowej niezależności λ_1, λ_2 jest zgodnym nadokreślonym układem eliptycznym. Zgodność jest tu gwarantowana, podobnie jak w rozdziale 10, przez wypełnienie warunku (13.15). W przypadku $\dim H = 2$, a więc kiedy mamy tylko dwie szukane funkcje, warunek (13.15) jest oczywiście zawsze spełniony.

Rozwiązań układu (13.19) można poszukiwać zadając punkt u_0 , przez który powinna przechodzić powierzchnia styczna do $\text{Re } \delta$ oraz $\text{Im } \bar{\delta}$, a następnie zadając odpowiednie warunki brzegowe np. warunki Riemanna-Hilberta (Bojarski 1966, Gachow 1963) dla poszukiwanego wektora $\hat{\lambda}(z, \bar{z})$. Należy tu jednakże zauważyć, że w przypadku modów eliptycznych sprawa interpretacji fizycznej odpowiednich rozwiązań jest otwarta.

Można tu również przeprowadzić, podobnie jak poprzednio, rozważania dotyczące liniowego związku pomiędzy wektorem falowym $\hat{\lambda}$ i wektorem polaryzacji $\hat{\epsilon}$.

$$\delta = Q \lambda.$$

Zakładając spełnienie warunku (13.15) możemy tu znowu obciąć układ do pewnej podrozmaitości M o wymiarze równym rzędowi odwzorowania $Q \leq n$. Zakładając rząd $Q = n$ i traktując δ jako pola z TM mamy

$$(13.20) \quad \lambda = P\delta, \quad \delta \in TM.$$

Odwzorowanie P prowadzi dokładnie tak jak poprzednio do koneksji liniowej ∇ oraz "metryki" g na rozmaitości M . Rzecz jasna, obie te (rzeczywiste) struktury można rozszerzyć na $T^{\mathbb{C}}M$, gdzie $T^{\mathbb{C}}M$ oznacza kompleksyfikację wiązki stycznej do M . Związki zgodności układu dwumodowego

$$[\delta, \bar{\delta}] \in \text{Lin}_{\alpha\mathbb{C}}\{\delta, \bar{\delta}\}, \quad \lambda, \bar{\lambda} \in \text{Lin}_{\alpha\mathbb{C}}\{\lambda, \bar{\lambda}\}, \quad g(\delta, \delta) = 0$$

prowadzą do zespolonego równania

$$(13.21) \quad \nabla_{\bar{\delta}} \delta = \alpha \delta + \beta \bar{\delta}, \quad \nabla_{\delta} \bar{\delta} = \bar{\alpha} \delta + \bar{\beta} \bar{\delta},$$

gdzie ∇ jest koneksją, niezmienniczą ze względu na transformację $P \rightarrow xP$, wprowadzoną w rozdziale 11.

Drugie z równań (13.21) jest zespolonym sprzężeniem pierwszego i można je w dalszym ciągu pominąć. Pełny układ równań, który musi spełniać powierzchnia styczna do pól $\text{Re } \delta$, $\text{Im } \delta$, zawiera więc następujące równania

$$(13.22) \quad \begin{array}{l} \text{a/ } [\delta, \bar{\delta}] \in \text{Lin}_{\alpha\mathbb{C}}\{\delta, \bar{\delta}\} \\ \text{b/ } \nabla_{\bar{\delta}} \delta = \alpha \delta + \beta \bar{\delta}, \quad \alpha, \beta \in \alpha^{\mathbb{C}} \\ \text{c/ } g(\delta, \delta) = 0. \end{array}$$

Korzystając, podobnie jak w rozdziale 12, z definicji tensora

torsji T dochodzimy do algebraicznego warunku

$$(13.23) \quad T[\delta, \bar{\delta}] \in \text{Lin}_{\alpha} \{\delta, \bar{\delta}\}.$$

Podobnie jak poprzednio będziemy żądali, by warunek ten był spełniony tożsamościowo dla wszystkich zespolonych δ . W przeciwnym razie warunki (13.23) stanowiłyby dodatkowe więzy ograniczające wybór modów. Żądamy więc, by koneksja ∇ była koneksją półsymetryczną. Zgodnie jednakże z twierdzeniem 11.1 ∇ jest już wtedy automatycznie koneksją symetryczną $T = 0$. Bez wpływu na ogólność równania (13.22 a) można zastąpić silniejszym żądaniem znikania komutatora $[\delta, \bar{\delta}]$ co prowadzi jedynie do odpowiedniego wyboru unormowania wektora δ . Korzystając ze znikania tensora torsji mamy wtedy $\nabla_{\bar{\delta}}\delta - \nabla_{\delta}\bar{\delta} = [\bar{\delta}, \delta] = 0$ co oznacza, że przy takim unormowaniu $\beta = \bar{\alpha}$. W ten sposób dochodzimy do równoważnego układu równań

$$(13.24) \quad \begin{aligned} \nabla_{\bar{\delta}}\delta &= \alpha\delta + \bar{\alpha}\bar{\delta} \\ g(\delta, \delta) &= 0. \end{aligned}$$

Różniczkując drugie z tych równań w kierunku $\bar{\delta}$ wyznaczamy współczynnik

$$(13.25) \quad \alpha = - \frac{(\nabla_{\bar{\delta}}g)(\delta, \delta)}{2g(\delta, \delta)}.$$

Jeśli użyć układu współrzędnych z_1, z_2 na poszukiwanej podrozmaitości stycznej do pól $\text{Re } \delta, \text{Im } \delta$ i będącej rozwiązaniem równań

$$(13.26) \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \delta, \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \bar{\delta},$$

gdzie $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1} - i \frac{\partial}{\partial z_2}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z_1} + i \frac{\partial}{\partial z_2}$, wówczas możemy różniczkowanie w kierunku $\bar{\delta}$ występujące w (13.24) zastąpić przez

$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. Zastępując δ i $\bar{\delta}$ odpowiednio przez $u_z, u_{\bar{z}}$ dochodzimy w ten sposób do eliptycznego równania rzędu drugiego na funkcję wektorową $u(z_1, z_2)$

$$(13.27) \quad u_{z\bar{z}} + \Gamma(u_z, u_{\bar{z}}) = \alpha u_z + \bar{\alpha} u_{\bar{z}}$$

będące eliptycznym analogonem hiperbolicznego równania (12.9). Współczynnik α występujący w (13.27) jest funkcją od u oraz $u_z, u_{\bar{z}}$ zgodnie z wzorem (13.25), gdzie $\delta, \bar{\delta}$ należy zastąpić przez $u_z, u_{\bar{z}}$. Korzystając z postaci operatorów $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ oraz symetrii współczynników koneksji Γ możemy wyrazić równanie (13.27) używając rzeczywistych zmiennych z_1 i z_2 w następującej postaci

$$(13.28) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) u + \Gamma(u_{z_1}, u_{z_1}) - \Gamma(u_{z_2}, u_{z_2}) = \\ = 2\text{Re} \{ (u_{z_1} - i u_{z_2}) \alpha \}$$

wyrażającej fakt, że część główna rzędu drugiego jest liniowym operatorem Laplace'a. Dla układu (13.28) można więc poszukiwać rozwiązań zagadnienia Dirichleta $u|_{\partial\Omega} = u_0$.

Powtarzając teraz dokładnie rozważania rozdziału 12 dotyczące rozkładu koneksji ∇ na część równoległą ∇'' oraz część prostopadłą h do podrozumności, a następnie używając koneksji metrycznej $\nabla^{\perp} = \nabla + G$, gdzie tensor $G = (G_{jk}^{\perp})$ jest zdefiniowany wzorem (11.5) dochodzimy do niezmienniczego opisu poszukiwanej podrozumności

$$(13.29) \quad \langle H, g^* \rangle = - \langle G^{\perp}, g^* \rangle,$$

a więc dostaliśmy dokładnie to samo równanie (12.15) jak w przypadku hiperbolicznym. Charakter równania (13.29) zależy od tego czy metryka g^* indukowana na podrozumności przez metrykę g

jest określona dodatnio (sygnatura (1,1)) czy też nieokreślona (1,-1). W pierwszym przypadku mamy do czynienia z równaniem eliptrycznym, natomiast w drugim - z równaniem hiperbolicznym. Rzecz jasna może się zdarzyć zmiana typu równania, wówczas na pewnej linii metryka indukowana g^* degeneruje się. Problemy związane z równaniami zmieniającymi typ, jakkolwiek ważne np. w dynamice gazów, są jednak bardzo trudne i nie są dostatecznie zbadane (Tricomi 1954, M.M.Smironov 1970).

Warto tu również zauważyć, że podobnie jak w rozdziale 12 "część równoległa" $\nabla_{\delta}^{\parallel} \delta = \alpha \delta + \overline{\alpha} \overline{\delta}$ sprowadza się do tożsamości na powierzchni spełniającej (13.29) i wyrażenie $\nabla_{\delta}^{\parallel} \delta$ można zinterpretować jako $\frac{1}{2} \operatorname{div}^{\parallel} g^*$ i potraktować jako miarę nieliniowego sprzężenia występującego pomiędzy modami $\delta \lambda$ i $\overline{\delta} \overline{\lambda}$. Przypominamy, że $\operatorname{div}^{\parallel}$ jest liczona względem koneksji ∇ zrzutowanej na powierzchnię. Jeśli $\operatorname{div}^{\parallel} g^* = 0$, wówczas możemy powiedzieć, że sprzężenie nie występuje. Istotnie, w tym przypadku w układzie współrzędnych, w którym $P_{\nu j} = \delta_{\nu j}$ równania (13.28) stają się równaniami liniowymi

$$\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} u + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} u = 0$$

i ich rozwiązania można otrzymać w postaci części rzeczywistej pewnej funkcji holomorficznej $f(z)$ zmiennej $z = z_1 + iz_2$. Oczywiście mamy wtedy $\frac{\partial f^j}{\partial z} = \delta^j = \lambda_j$ (bo $P = I$). Stąd jest już widoczne, że funkcja $u(x)$, definiowana przez uwikłany związek

$$(13.30) \quad u = \operatorname{Re} f(z), \quad z = \varphi(\dot{x}_1, \dot{x}^1),$$

gdzie $\dot{f} = \frac{df}{dz}$ i gdzie $\varphi(\cdot)$ jest dowolną funkcją holomorficzną jednej zmiennej zespolonej, jest rozwiązaniem wyjściowych równań (13.13).

Rozwiązania dwumodowe mają tę własność, że rząd odwzorowania $u(\cdot): \Omega \subset E \rightarrow H$ jest równy 2, tzn. $\text{rząd}(u_{x^j}^j) = 2$. Można zadać pytanie czy z faktu, że u jest rozwiązaniem rzędu dwa wynika, że u jest rozwiązaniem dwumodowym? W ogólności takie stwierdzenie nie jest prawdziwe co łatwo widać na przykładzie układu 1 równań, $l > 2$, z dwiema zmiennymi niezależnymi. Jednakże dla układów rozważanych w rozdziałach 11, 12 i 13, generowanych przez kwadratową gałąź związku dyspersyjnego fakt taki ma miejsce. Oznaczmy jak zwykle $g(\delta, \delta) := \tilde{g}(P\delta, P\delta)$.

TWIERDZENIE 13.2 Jeśli $u(\cdot)$ jest rozwiązaniem rzędu dwa układu Φ generowanego przez $\tilde{g}(\lambda, \lambda) = 0$

$$\Phi = \{ \text{Re}(\delta \otimes \lambda); g(\delta, \delta) = 0, \lambda = P\delta \},$$

wtedy $u(\cdot)$ jest rozwiązaniem dwumodowym, tzn. $\bigwedge_{x \in \Omega} \bigvee \delta_1, \delta_2$
 $g(\delta_1, \delta_1) = g(\delta_2, \delta_2) = 0$ oraz $du = \delta_1 \otimes P(\delta_1) + \delta_2 \otimes P(\delta_2)$.

Dla dowodu zauważmy, że układ Φ można zapisać w postaci $\binom{n}{2} + 1$ równań

$$\Phi^*: \quad \varepsilon_{ij}(P^{-1})^{j\nu} u_{x^\nu}^j = 0, \quad P_{\nu j} u_{x^\mu}^j = P_{\mu j} u_{x^\nu}^j, \quad \nu, \mu = 1, \dots, n.$$

Na mocy założeń zbiór wartości $u(\Omega)$ jest (lokalnie) pewną dwuwymiarową podrozmiernością rozmaitości M . Oznaczmy ją przez \mathcal{G} . Niech teraz X_1, X_2 - dwa niezależne pola styczne do \mathcal{G} i jednocześnie izotropowe, tzn. $g(X_1, X_1) = g(X_2, X_2) = 0$. Takie pola, być może zespolone, istnieją! Najogólniejsza postać odwzorowania liniowego $TE \rightarrow T\mathcal{G}$ rzędu dwa jest następująca: $du = \gamma \otimes \omega_1 - \frac{1}{2} \otimes \omega_2$, gdzie ω_1, ω_2 - dowolne jednoformy. Oznaczmy $\frac{1}{\sigma} = P^{-1} \frac{\omega_\sigma}{\sigma}$, $\sigma = 1, 2$. Z faktu, że du spełnia Φ^* mamy $X_1 \wedge \gamma_1 + X_2 \wedge \gamma_2 = 0$ co implikuje $\frac{\gamma_\sigma}{\sigma} = \alpha^\sigma \gamma_1 + \beta^\sigma \gamma_2$, $\sigma = 1, 2$ i dalej $\beta^1 - \alpha^2 = 0$. Pierwsze z równań Φ^* daje teraz $\beta^1 + \alpha^2 = 0$, czyli $\frac{\gamma_1}{1} = \alpha^1 X_1$, $\frac{\gamma_2}{2} = \beta^2 X_2$, skąd ostatecznie $du = \alpha^1 X_1 \otimes P X_1 + \beta^2 X_2 \otimes P X_2$.

Podsumowując rozważania rozdziałów 12 i 13 możemy stwierdzić, że jeśli układ Φ dany przez $\langle a, du \rangle = 0$ jest generowany przez pewną kwadratową gałąź $\tilde{g}(\lambda, \lambda) = 0, \det g \neq 0$ związku dyspersyjnego układu wyjściowego (13.13) i jeśli dla elementów charakterystycznych układu Φ zachodzi (po ewentualnym obcięciu układu Φ do pewnej podrozumności M) $\lambda = P\delta$, gdzie P jest odwracalna, wówczas istnienie rozwiązania $u(x)$ rzędu dwa (tzn. rząd $(u^j_{,x^i}) = 2, x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) jest równoważne następującemu warunkowi:

W/ Istnieje pewna dwuwymiarowa podrozumność $\mathcal{G} \subset M$ spełniająca:

- 1° jeśli T^∇ jest tensorem torsji koneksji indukowanej przez P , wówczas

$$T^\nabla|_{\mathcal{G}} \subset T\mathcal{G}, \quad \text{tzn.} \quad \bigwedge_{X, Y \in T\mathcal{G}} T^\nabla(X, Y) \in T\mathcal{G},$$

gdzie $T\mathcal{G}$ oznacza wiązkę styczną do \mathcal{G} ;

- 2° jeśli g^* oznacza (kontrawariantny) tensor metryczny na rozumności \mathcal{G} indukowany przez "metrykę" g na M , gdzie $g(X, Y) := \tilde{g}(PX, PY)$, wówczas podrozumność \mathcal{G} ma "średnią krzywiznę" względem koneksji ∇ równą zero

$$\langle h, g^* \rangle = 0,$$

h jest tu prostopadłą do \mathcal{G} (w metryce g) częścią koneksji ∇ .

Jeśli ponadto tensor torsji T^∇ znika tożsamościowo, wówczas pozostaje do spełnienia jedynie warunek 2°, który przy użyciu koneksji "metrycznej" $\nabla^g = \nabla + G$ zdefiniowanej w rozdziale 12 zapisuje się w postaci

$$(13.31) \quad \langle H, g^* \rangle = \langle -G^\perp, g^* \rangle$$

zawierającej "prawdziwą" metryczną średnią krzywiznę $\langle H, g^* \rangle$.

Ostatnie równanie jest równaniem różniczkowym rzędu drugiego na szukaną powierzchnię i w szczególności dla odpowiednich warunków brzegowych posiada rozwiązania co implikuje istnienie rozwiązań rzędu dwa dla układu Φ . Jeśli równanie (13.31) jest typu hiperbolicznego, wówczas odpowiednie rozwiązania $u(x)$ układu Φ mogą być interpretowane jako będące (lokalnie) rezultatem oddziaływania fal Riemanna. W przypadku eliptycznym natomiast sprawa interpretacji rozwiązań jest niewyjaśniona.

Na zakończenie tego rozdziału sformułujemy twierdzenie będące wnioskiem z rozważań tego rozdziału.

TWIERDZENIE 13.3 Równanie Laplace'a

$$\Psi_{x^1 x^1} + \Psi_{x^2 x^2} + \dots + \Psi_{x^n x^n} = 0$$

z dodatkowymi więzami

$$F^\alpha(\Psi_{x^1}, \dots, \Psi_{x^n}) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, n-2,$$

gdzie funkcje F^α są klasy C^2 i są niezależne (rzęd $(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}) = n-2$), ma nietrywialne rozwiązania ($d\Psi \neq 0$) wtedy i tylko wtedy, gdy równania $F^\alpha(\xi^1, \dots, \xi^n) = 0, \alpha = 1, \dots, n-2$, definiują w \mathbb{R}^n z metryką euklidesową dwuwymiarową powierzchnię minimalną.

W szczególności $\Psi_{xx} + \Psi_{yy} + \Psi_{zz} = 0$ z jednym więzem $F(\Psi_x, \Psi_y, \Psi_z) = 0$ ($dF \neq 0$) ma nietrywialne rozwiązania, jeśli $F(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = 0$ jest powierzchnią minimalną.

Istotnie, minimalność powierzchni jest równoważna zanikaniu średniej krzywizny. Równanie Laplace'a jest równaniem liniowym. Zamieniając je na układ

$$u^1_{x^1} + u^2_{x^2} + \dots + u^n_{x^n} = 0$$

$$u^i_{x^j} - u^j_{x^i} = 0$$

widzimy, że poszukiwanie rozwiązań dwumodowych sprowadza się do poszukiwania rozwiązań równania (13.31), dla którego na skutek liniowości $G \equiv 0$, ale wtedy (13.31) definiuje dwuwymiarową powierzchnię minimalną.

Ostatnie rozważania oraz twierdzenie 13.3, jak również wzór (13.30) mają zastosowanie do zespolonych modów bezwirowych (11.25) równania Eulera (11.22) płynu nieściśliwego. Układ równań generowany przez te mody jest układem liniowym i (lokalnie) daje się sprowadzić do równania Laplace'a. W szczególności rozwiązania ze zdegenerowanym hodografem dane np. wzorem (13.30) mogą opisywać opływy powierzchni rozwijalnych czego tu nie będziemy analizować.

14. Układy nadokreślone. Formalna całkowalność.

Problemy rozważane w poprzednich rozdziałach prowadziły do pojawienia się układów nadokreślonych i badania warunków zgodności dla takich układów. W rozdziale 6 pokazaliśmy, że odpowiednie warunki zgodności dla układów z dwiema zmiennymi niezależnymi gwarantują całkowalność tych układów. Podobnie warunki zgodności (10.5) dla układu z dwoma modami, opisującego oddziaływanie fal Riemanna, gwarantują (jak to udowodniliśmy w rozdziale 5) całkowalność odpowiedniego układu na istnienie powierzchni $G_2 \subset H$ będącej obrazem rozwiązania. Podobnie pokazaliśmy (rozd. 5), że równania na funkcje $R^1(x)$, $R^2(x)$ mają wtedy rozwiązania.

W bardziej ogólnych jednak przypadkach, np. układów z wieloma modami $k > 2$, gdy $\dim E = n > 2$, nie jest wcale jasne czy spełnienie wyprowadzonych tam warunków zgodności gwarantuje całkowalność (istnienie rozwiązań) odpowiednich układów. Innymi słowy nie jest pewne, że są to wszystkie warunki zgodności. Problem całkowalności - istnienia rozwiązań dla dowolnego układu nadokreślonego - jest niezmiernie złożony i w tak ogólnym sformułowaniu można badać jedynie tzw. formalną całkowalność, to jest istnienie formalnych rozwiązań danych formalnymi szeregami Taylora, naogół nie zbieżnymi. Dla układów o współczynnikach analitycznych udaje się jednakże pokazać istnienie analitycznych rozwiązań.

Rozważmy następujący problem w klasycznym sformułowaniu: dany jest układ równań różniczkowych cząstkowych na funkcje szukane u^1, u^2, \dots, u^k zależne od zmiennych niezależnych x^1, x^2, \dots, x^n .

$$(14.1) \quad \begin{aligned} P^\alpha(D^\alpha u, x^1, \dots, x^n) &= 0, & |\alpha| \leq r_1, \\ & \dots \end{aligned}$$

(14.1)

$$F^s(D^\alpha u, x^1, \dots, x^n) = 0, \quad |\alpha| \leq r_s,$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ całkowite nieujemne, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$,
oraz

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u.$$

Należy zbadać zagadnienie istnienia rozwiązań oraz określić swobodę rozwiązania ogólnego tzn. powiedzieć, jakie funkcje można zadawać. W tym sformułowaniu problem ten był już rozważany w końcu XIX i na początku XX wieku przez Cauchy'ego, Riquiera, Janet'a, E. Cartana i innych (Cartan 1946, Janet 1929, Riquier 1910)*.

Twierdzenie Cauchy'ego i Kowalewskiej daje częściową odpowiedź na to pytanie w przypadku układów określonych $l = s$, które dają się rozwickłać względem najwyższej pochodnej w jakimś ustalonym kierunku np. x^1 . Mamy wtedy następujący układ równań

$$\frac{\partial^{r_1} u^1}{\partial x_1^{r_1}} = \Phi^1(D^\alpha u, x^1, \dots, x^n), \quad \text{gdzie } |\alpha| \leq r_1, \alpha_1 < r_1$$

(14.2)

$$\frac{\partial^{r_1} u^1}{\partial x_1^{r_1}} = \Phi^1(D^\alpha u, x^1, \dots, x^n), \quad \text{gdzie } |\alpha| \leq r_1, \alpha_1 < r_1.$$

Wówczas przy założeniu analityczności wszystkich rozważanych funkcji E. Kowalewska dowodzi istnienia jedynego analitycznego rozwiązania w pewnym otoczeniu hiperpłaszczyzny, jeśli zadać warunki Cauchy'ego

$$\frac{\partial^\mu u^1}{\partial x_1^\mu} \Big|_{x^1=0} = \varphi_\mu(x^2, \dots, x^n), \quad \mu = 0, 1, \dots, r_1 - 1,$$

(14.3)

* Patrz również uzupełnienie <http://rcin.org.pl>

(14.3)

$$\frac{\partial^{\mu} u^1}{\partial x_1^{\mu}} \Big|_{x_1=0} = \mathcal{Y}_{\mu}(x^2, \dots, x^n), \quad \mu = 0, 1, \dots, r_1 - 1.$$

Twierdzenia tego dowodzi się przez zbudowanie szeregu potęgowego (Taylora) dla rozwiązania. Współczynniki tego szeregu daje się znaleźć obliczając odpowiednie pochodne w zależności od potrzeby, bądź to przez różniczkowanie danych Cauchy'ego, bądź też przez różniczkowanie równań, a następnie dowodzi się zbieżności tak otrzymanego szeregu oraz pokazuje się, że szereg ten spełnia równanie nie tylko w punkcie, w którym szereg został zbudowany, ale również w pewnym otoczeniu tego punktu.

Zilustrujmy to następującym przykładem stanowiącym przedmiot rozważań twierdzenia Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}, u, x, y \right),$$

(14.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \Psi_1(y), \quad u(0, y) = \Psi_0(y).$$

Zakładamy, że funkcje Φ , Ψ_0 , Ψ_1 są analityczne. Rozpatrzmy rozwinięcie w otoczeniu punktu $(x, y) = 0$. Mamy pochodne

$$u(0, 0) = \Psi_0(0), \quad u_x(0, 0) = \Psi_1(0), \quad u_y(0, 0) = \Psi_0' \quad (14.5)$$

$$u_{xy}(0, 0) = \Psi_1'(0), \quad u_{xx}(0, 0) = \Phi(\Psi_1(0), \Psi_1'(0), \dots).$$

Podobnie różniczkując równanie (14.4) można wyznaczyć dalsze pochodne po zmiennych x, y używając jednocześnie odpowiednich pochodnych po y z funkcji $\Psi_0(y)$, $\Psi_1(y)$.

W ten sposób możemy zbudować szereg Taylora, który (jak się dowodzi) jest zbieżny w pewnym otoczeniu punktu $(0, 0)$, jeśli

tylko wszystkie rozważane funkcje były analityczne. Rozpatrzmy to nieco dokładniej, ponieważ te modelowe rozważania dają się uogólnić na przypadek ogólnego układu równań. Pochodne występujące po prawej stronie równania zwane są pochodnymi parametrycznymi, natomiast pochodna $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - pochodną główną. Różniczkując równanie możemy dostać dowolną pochodną rzędu $(2+\alpha_1, \alpha_2)$ wyrażoną przez pochodne parametryczne tzn. wszystkie (α, β) modulo $(2, 0)$, czyli pochodne rzędu $(0, \beta)$ i $(1, \beta)$, $\beta = 1, 2, \dots$ Istotnie, mamy

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} u}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta-2}}{\partial x^{\alpha-2} \partial y} \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots \right),$$

jeśli $\alpha \geq 2$. ∂_{\neq} oznacza tu pochodną zupełną

$$\frac{\partial_{\neq}}{\partial x} \Phi(x, \dots, u) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Postępując dalej w ten sposób możemy obniżyć rząd pochodnej po x do 0 lub 1.

Równanie (14.4) pozwala zatem wyznaczyć wszystkie pochodne rzędu $(\nu+2r, \beta)$ poprzez pochodne parametryczne. Te ostatnie pozostają swobodne. Jeśli teraz napisać odpowiedni szereg Taylora, wówczas mamy

$$(14.6) \quad u(x, y) = u(0) + \sum_i a_{0i} y^i + \sum_i a_{1i} x y^i + x^2 \cdot (\text{wyrazy}$$

wyznaczone jednoznacznie przez różniczkowanie równania (14.4)), tzn. zawierające pochodne główne typu $(\nu+2r, \beta)$. Wyrazy te dzielą się przez x^2 , a zatem można je zapisać jako $x^2 G(x, y)$. Wyrazy a_{0i} oraz a_{1i} są określone właśnie przez pochodne parametryczne

$$a_{0i} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial y^i} u(0, 0), \quad a_{1i} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^{i+1}}{\partial y^i \partial x} u(0, 0).$$

Ponieważ pochodne parametryczne pozostają swobodne, wobec tego

rozwiniecie (14.6) można napisać następująco

$$u(x,y) = A(y) + x B(y) + x^2 G_{AB}(x,y),$$

gdzie G_{AB} jest pewną funkcją jednoznacznie określoną przez zadanie $A(y)$ i $B(y)$, a zatem przez zadanie pochodnych parametrycznych. Ponieważ funkcje A i B są dowolne (ale analityczne, aby powyższe rozważania miały sens), mamy w ten sposób określoną również swobodę rozwiązania. Zauważmy, że A i B są związane właśnie z warunkami Cauchy'ego. Istotnie

$$u(0,y) = A(y), \quad u_x(0,y) = B(y).$$

Weźmy teraz przykład trochę bardziej skomplikowany np.

$$(14.7) \quad \begin{aligned} u_{xx} &= \Phi(u, u_x, u_y, u_{xy}, x, y) \\ u_{yy} &= \Psi(u, u_x, u_y, u_{xy}, x, y). \end{aligned}$$

Teraz widzimy, że wszystkie pochodne (α, β) dadzą się wyrazić przez pochodne $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ oraz $(1,1)$ (pochodne parametryczne), jeśli stosować podobnie jak poprzednio reguły

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} u = \frac{\partial^{\alpha+\beta-2}}{\partial x^{\alpha-2} \partial y^\beta} \Phi = \dots \quad \text{dla } \alpha \geq 2,$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} u = \frac{\partial^{\alpha+\beta-2}}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta-2}} \Psi = \dots \quad \text{dla } \beta \geq 2.$$

Ponadto powinna być spełniona równość odpowiednich pochodnych mieszanych, które można obliczać na dwa sposoby np.

$$\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi, \quad \text{ale też} \quad \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi,$$

skąd

$$(14.8) \quad \frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2} = \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^2}.$$

Równanie to jest konsekwencją różniczkową wyjściowych równań (14.7) i można je dołączyć do wyjściowego układu i zacząć rozważania od początku. Może się jednak zdarzyć, że po wyrugowaniu pochodnych głównych przy pomocy równań (14.7) równanie (14.8) jest tożsamościowo spełnione ze względu na wszystkie zmienne u , x , y , u_x , u_y , u_{xy} , ..., czyli zmienne niezależne i pochodne parametryczne. Jeśli tak jest, to wówczas i wszystkie inne konsekwencje różniczkowe są w tym przypadku spełnione już automatycznie

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+4}}{\partial x^{\alpha+2} \partial y^{\beta+2}} u = \frac{\partial^{\alpha+\beta+2}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta+2}} \Phi = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} \frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+4}}{\partial x^{\alpha+2} \partial y^{\beta+2}} u = \frac{\partial^{\alpha+\beta+2}}{\partial x^{\alpha+2} \partial y^{\beta}} \Psi = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^2},$$

skąd

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} \left(\frac{\partial \Phi^2}{\partial y^2} - \frac{\partial \Psi^2}{\partial x^2} \right) = 0$$

na mocy znikania wyrażenia w nawiasie. Zatem pochodne rzędu $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ i $(1,1)$ pozostają dowolne.

Rozwinięcie Taylora dla u przyjmuje teraz postać

$$u(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + x^2 \cdot (\text{człony z pochodnymi głównymi}) + y^2 \cdot (\text{człony z pochodnymi głównymi}).$$

Ponieważ pochodne główne są wyznaczone jednoznacznie przez (tylko) cztery tym razem pochodne parametryczne, zatem ogólne rozwiązanie ma jedynie swobodę stałych a_{00} , a_{10} , a_{01} , a_{11} .

W ostatnim przykładzie mieliśmy do czynienia z układem nadokreślonym, w związku z czym pojawiły się warunki zgodności zapewniające równość mieszanych pochodnych liczonych na różne sposoby. Tak też jest w przypadku ogólniejszego układu równań nadokreślonych. Rozważmy np. układ rzędu pierwszego na $u = (u^1, \dots, u^l)$

$$(14.9) \quad \Phi \begin{cases} u_x^{p_1} = \Phi_1^{p_1}(u, \tilde{D}u, x), & p_1 \in I_1 \\ \dots\dots\dots \\ u_x^{p_n} = \Phi_n^{p_n}(u, \tilde{D}u, x), & p_n \in I_n, \end{cases}$$

gdzie I_1 oznaczają pewne podzbiory zbioru $I = (1, 2, \dots, l)$, $I_i \subset I$ i gdzie prawe strony mogą zależeć jedynie od tych pochodnych, które nie występują po lewej. Zgodnie z przyjętą od dawna terminologią (Janet 1929, Rigquier 1910) będziemy je nazywali tak jak poprzednio pochodnymi głównymi (te z lewej) i pochodnymi parametrycznymi (te z prawej, oznaczone przez $\tilde{D}u$).

Różniczkowanie układu (14.9) prowadzi do układu drugiego rzędu

$$(14.10) \quad \begin{cases} u_{x^1 x^1}^{I_1} = \partial_{x^1}^* \Phi_1^{I_1}(u, \tilde{D}u, x), & u_{x^1}^{I_1} = \Phi_1^{I_1} \\ \dots\dots\dots \\ u_{x^n x^1}^{I_n} = \partial_{x^n}^* \Phi_n^{I_n}(u, \tilde{D}u, x), & u_{x^n}^{I_n} = \Phi_n^{I_n}, \end{cases}$$

który łącznie z (14.9) stanowi tzw. układ przedłużony, oznaczony przez $p(\Phi)$. Podobnie różniczkując (14.10) można otrzymać dalsze przedłużenia $p^k(\Phi)$, $k = 1, 2, \dots$. Równość pochodnych mieszanych w każdym przedłużeniu prowadzi do pewnej liczby konsekwencji różniczkowych np. dla $p(\Phi)$:

$$(14.11) \quad \partial_{x^i}^{\#} \Phi_{I_j}^{I_i \cap I_j} = \partial_{x^j}^{\#} \Phi_{I_i}^{I_j \cap I_i},$$

które w ogólności stanowią dodatkowe równania wiążące pochodne parametryczne i pochodne główne do rzędu drugiego włącznie.

DEFINICJA 14.1 a/ Zgodnie z wprowadzoną terminologią pochodne

$u_{x^1}^{I_1}, \dots, u_{x^n}^{I_n}$ występujące po lewej stronie będziemy nazywać pochodnymi głównymi rzędu pierwszego. Pochodnymi głównymi są również wszystkie pochodne pochodnych głównych. Mamy zatem własność: jeśli $D^{\alpha} u^{\sigma}$ jest pochodną główną, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = 0, 1, 2, 3, \dots$, wówczas dla dowolnego $\beta \in \mathbb{N}^n$, $D^{\beta+\alpha} u^{\sigma}$ jest również pochodną główną.

b/ Wszystkie pozostałe pochodne (tzn. te, które nie są głównymi) noszą nazwę pochodnych parametrycznych.

W ten sposób $u_{x^i}^{I_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, są pochodnymi głównymi rzędu pierwszego a $u_{x^i}^{\bar{I}_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ są pochodnymi parametrycznymi rzędu pierwszego. Razem jest ich $\sum |I_i| + \sum |\bar{I}_i| = n \cdot |I| = n \cdot 1$. Przez $|I_{\alpha}|$ oznaczono tu moc zbioru I_{α} . Dalej występują pochodne główne rzędu drugiego $u_{x^i x^j}^{I_i}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Wśród tych pochodnych niektóre występują po dwa razy. Jeżeli rozpatrzeć różne, wówczas

$u_{x^i x^j}^{I_i \setminus I_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ - pochodne od funkcji u^{α} , $\alpha \in I_i \setminus I_j$,

$u_{x^i x^j}^{I_i \cap I_j}$, $i \leq j$ - pochodne z części wspólnej obu zbiorów.

Równość pochodnych mieszanych $u_{x^i x^j}^{I_i \cap I_j} = u_{x^j x^i}^{I_j \cap I_i}$ prowadzi właśnie do związków (14.11). Różne pochodne główne rzędu drugiego można też zapisać jako

$$u_{x^i x^j}^{I_i \cup I_j}, \quad i \leq j.$$

Pochodne parametryczne rzędu drugiego powstają również poprzez różniczkowanie pochodnych parametrycznych rzędu pierwszego.

Nie wszystkie powstałe w ten sposób pochodne są jednakże parametryczne, niektóre z nich stają się bowiem głównymi. Tak więc spośród wszystkich pochodnych $u_{x^i x^j}^{\bar{I}_1}$ jedynie

$$\left\{ u_{x^i x^j}^{\bar{I}_1 \setminus I_j} \right\} = \left\{ u_{x^i x^j}^{\overline{I_1 \cup I_j}} \right\}, \quad \bar{I}_1 = I \setminus I_1$$

są pochodnymi parametrycznymi, reszta tzn. $u_{x^i x^j}^{\bar{I}_1 \cap I_j}$ staje się z powrotem pochodnymi głównymi na mocy równości

$$u_{x^i x^j}^{\bar{I}_1 \cap I_j} = \partial_{x^i} u_{x^j}^{I_j \cap \bar{I}_1}.$$

Podobnie jedynie

$$\left\{ u_{x^i x^j x^k}^{\overline{I_1 \cup I_j \cup I_k}} \right\} = \left\{ u_{x^i x^j x^k}^{\bar{I}_1 \cap \bar{I}_j \cap \bar{I}_k} \right\}$$

są pochodnymi parametrycznymi rzędu trzeciego. Łatwo sprawdzić, że liczba pochodnych głównych plus liczba pochodnych parametrycznych

$$\sum_{i \leq j} |I_i \cup I_j| + \sum_{i \leq j} |\overline{I_1 \cup I_j}| = \sum_{i \leq j} |I|$$

daje w sumie $\binom{n+1}{2} |I|$ różnych drugich pochodnych, a więc tyle ile ich naprawdę jest.

Ogólnie wyrażenia

$$D^\alpha u^{\bar{I}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n = \{0, 1, \dots\}^n$$

dają pochodne parametryczne, gdzie oznaczyliśmy

$$I = (I_1, I_2, \dots, I_n), \quad I^\alpha = I_1^{\alpha_1} \cap I_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap I_n^{\alpha_n},$$

$$\bar{I} = (\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_n), \quad I_1^{\alpha_1} = I_1 \cap \dots \cap I_1 = I_1, \quad I_i^0 := I.$$

Podobnie pochodne $D^\alpha u^{\bar{I}}$ są pochodnymi głównymi.

Powstaje teraz pytanie: jak, mając dany układ równań, podzielić pochodne na pochodne główne i pochodne parametryczne? Dalej: czy wynik zależy od takiego podziału?

Rozpatrzmy następujący przykład

$$(14.12) \quad u_y = u_{xx}.$$

Równanie to jest szczególnym przypadkiem rozważanego przez nas równania (14.4). Poprzednio u_{xx} było traktowane jako pochodna główna i rozwinięcie w szeregi prowadziło do następującej postaci funkcji u

$$u(x,y) = A(y) + xB(y) + x^2G_{AB}(x,y),$$

gdzie A, B są dowolnymi (analitycznymi) funkcjami, natomiast $G_{AB}(x,y)$ jest już jednoznacznie wyznaczona przez $A(y)$ i $B(y)$. Mamy tu zatem dwie funkcje dowolne jednego argumentu. Jeśli teraz wziąć u_y za pochodną główną, a u_{xx} jako parametryczną, wówczas pochodną główną jest

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+1}}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta+1}} u, \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

a pochodne parametryczne

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u, \quad \alpha = 1, 2, \dots,$$

skąd

$$u(x,y) = f(x) + yG(x,y),$$

gdzie rozwinięcie $yG(x,y)$ zawiera jedynie pochodne główne, a więc jest już jednoznacznie wyznaczone przez zadanie $f(x)$. Ostatnia postać zawiera jedynie jedną funkcję* dowolną od jednego ar-

* W gruncie rzeczy o funkcjach można tu sensownie mówić, jeśli odpowiednie szeregi są zbieżne! W ogólności mamy do czynienia z formalnymi szeregami - formalnymi funkcjami.

gumentu $f(x)$. Mamy też

$$u(x,0) = f(x).$$

Równanie (14.12) można zapisać również w postaci układu rzędu pierwszego. Istotnie, jeśli położyć $u_x = z$, wówczas mamy

$$u_x = z, \quad u_y = z_x.$$

Jeśli potraktować u_x , u_y jako pochodne główne, wówczas

$$u(x,y) = u(0,0) + x z(0,0) + y z_x(0,0) + \dots,$$

zatem u jest jednoznacznie wyznaczona przez podanie funkcji $z(x,y)$ i stałej $u(0,0)$. Jednakże przy tym zapisie dostajemy konsekwencje różniczkowe: równość $u_{xy} = u_{yx}$ prowadzi do konsekwencji różniczkowych rzędu drugiego $z_y = z_{xx}$, a więc z powrotem dostajemy równanie (14.12), które tym razem stanowi więzy między pochodnymi parametrycznymi. Wybierając natomiast u_x , z_x jako pochodne główne uzyskujemy układ typu Cauchy'ego, który nie prowadzi do żadnych konsekwencji różniczkowych będących więzami pomiędzy pochodnymi parametrycznymi. Ostatnie rozważania pokazują, że podział na pochodne główne i parametryczne może być lepszy i gorszy.

Dla zadanego zbioru funkcji szukanych u^I oznaczmy przez \mathcal{D} zbiór wszystkich pochodnych wszystkich rzędów od zera do nieskończoności

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^{(0)} \cup \mathcal{D}^{(1)} \cup \mathcal{D}^{(2)} \cup \dots \cup \mathcal{D}^{(r)} \dots$$

gdzie

$$\mathcal{D}^{(0)} = \{u^I\} - \text{pochodne rzędu zero,}$$

$$\mathcal{D}^{(1)} = \{u_{x^\nu}^I\}_{\nu=1, \dots, n} - \text{pochodne rzędu pierwszego,}$$

$$\mathcal{D}^{(2)} = \{u_{x^\nu x^\mu}^I\}_{\nu \leq \mu, \nu, \mu=1, \dots, n} - \text{pochodne rzędu drugiego,}$$

.....

Spróbujmy teraz przenieść intuicje z rozpatrywanych poprzednio przykładów na ogólny układ równań rzędu r

$$(14.13) \quad \Phi : F^{\sigma} \left(\left\{ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} u^I \right\}_{|\alpha| \leq r}, x \right) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, s,$$

zadany przez gładkie (C^{∞}) funkcje F^{σ} wiążące zmienne $x, u^I, u_{x^{\nu}}^I$, oraz inne pochodne aż do rzędu r . Postępowanie w rozpatrywanych przykładach polegało na tym, że:

1° Z pośród wszystkich pochodnych \mathcal{D} wybieraliśmy pewien skończony podzbiór $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{D}$, który możnaby nazwać pierwotnymi pochodnymi głównymi. Wybór taki indukuje podział całego zbioru \mathcal{D} na dwie rozłączne części

$$\mathcal{D} = \mathcal{G} \cup \mathcal{P}, \quad \mathcal{G} \cap \mathcal{P} = \emptyset,$$

gdzie \mathcal{G} oznacza wszystkie pochodne główne generowane przez \mathcal{G}_0 , powstające przez różniczkowanie pochodnych z \mathcal{G}_0 . Pozostałe elementy zbioru \mathcal{D} to właśnie pochodne parametryczne.

2° Mając układ (14.13) można konstruować jego kolejne przedłużenia

$$p(\Phi) : F^{\sigma} = 0, \quad \partial_{x^{\nu}}^{\#} F^{\sigma} = 0, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

$$p^2(\Phi) : F^{\sigma} = 0, \quad \partial_{x^{\nu}}^{\#} F^{\sigma} = 0, \quad \partial_{x^{\mu}}^{\#} \partial_{x^{\nu}}^{\#} F^{\sigma} = 0$$

itd. Ogólnie, k -krotne przedłużenie $p^k(\Phi)$ zawiera wszystkie równania przedłużenia $p^{k-1}(\Phi)$ oraz ich pochodne zupełne $\partial_x^{\#} p^{k-1}(\Phi)$. Przedłużenie $p^k(\Phi)$ stanowi pewien układ zależności pomiędzy elementami zbioru $\mathcal{D}^{(0)} \cup \mathcal{D}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{D}^{(r+k)}$, symbolicznie

$$p^k(\Phi) : F_{(k)}^{\sigma} \left(\left\{ \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^{\alpha}} u^I \right\}_{|\alpha| \leq r+k}, x \right) = 0.$$

3° Dla dowolnego $k = 0, 1, 2, \dots$ układ $p^k(\Phi)$ (uwaga: $p^0(\Phi) = \Phi$)

dawał się rozvikłać względem pochodnych głównych pojawiających się w $p^k(\Phi)$ nie prowadząc jednocześnie do relacji typu

$$\Psi(\bar{p}, x) = 0$$

wiązających jedynie pochodne parametryczne.

- 4° Dla każdej pochodnej $p_\alpha^\beta = \partial_{x^\alpha} u^\beta$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ze zbioru \mathcal{G} można było znaleźć odpowiednie przedłużenie $p^k(\Phi)$ zawierające nietrywialnie tę pochodną (tzn. $\frac{\partial}{\partial p_\alpha^\beta} F_k(\bar{p}, x) \neq 0$).
Innymi słowy warunki 3° i 4° oznaczają, że układ $p^\infty(\Phi)$ daje się zapisać w postaci rozvikłanej względem \mathcal{G}

$$(14.15) \quad \mathcal{G} = \mathcal{F}_\infty(\mathcal{P}).$$

- 5° Zbiór \mathcal{P} można rozbić na podzbiory \mathcal{P}_α zawierające tylko pochodne funkcji u^α , $\alpha = 1, \dots, l$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \dots \cup \mathcal{P}_l$. Identyfikując \mathcal{P}_α ze współczynnikami rozwinięcia Taylora pewnych funkcji usiłowaliśmy określić w ten sposób swobodę rozwiązania ogólnego.

DEFINICJA 14.2 Układ (14.14) spełniający warunki 3° i 4° będziemy nazywać układem pasywnym (Janet 1929, Riquier 1910) względem rozkładu \mathcal{P} indukowanego przez \mathcal{G}_0 .

DEFINICJA 14.3 Jeśli istnieje takie \mathcal{G}_0 , że układ (14.14) jest pasywny względem \mathcal{G}_0 , wówczas będziemy nazywać go po prostu układem pasywnym.

Układy pasywne mają, jak to wynika z definicji, tę własność, że przez różniczkowanie i rugowanie pochodnych nie uda się pokazać, że układ jest sprzeczny. Co więcej, zbiór \mathcal{P} określa w pewnym sensie swobodę rozwiązania, w ogólności formalnego. W pewnych jednakże przypadkach, np. układów analitycznych, można wykazać istnienie rozwiązań, nie tylko formalnych (twierdzenie Cartana-Kählera).

Definicja pasywności układu jest w dużym stopniu nieefektywna. Powstaje bowiem pytanie jak, wykonując skończoną liczbę operacji, można stwierdzić czy dany układ jest pasywny? Problem ten daje się rozwiązać przez rozpatrzenie nieco węższej grupy układów tzw. układów w inwolucji (inwolutywnych). Okazuje się jednakże, że jeśli układ jest pasywny (a nawet tylko formalnie całkowalny, tzn. grubo mówiąc taki, że $p^\infty(\Phi)$ jest algebraicznie niesprzeczny, Quillen 1964, Spencer 1965, Goldschmidt 1962, 1968, 1969, 1972, 1978), wówczas pewne jego przedłużenie jest już układem inwolutywnym. W dalszych rozważaniach powrócimy do układów rzędu pierwszego.

Badanie warunków zgodności układu (14.9) staje się łatwiejsze, jeśli układ daje się uporządkować przez ewentualne zmiany zmiennych $x \rightarrow x'$, $u \rightarrow u'$ oraz wybór odpowiednich generatorów układu, tak by*

$$1^\circ \quad I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset I,$$

2^o układ przyjął postać

$$(14.16) \quad \begin{aligned} u_{x_1}^{\alpha_1} &= \Phi_1^{\alpha_1}(x, u_{x_1}^{\bar{I}_1}, u), & \alpha_1 \in I_1, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ u_{x_n}^{\alpha_n} &= \Phi_n^{\alpha_n}(x, u_{x_n}^{\bar{I}_n}, u_{x_{n-1}}^{\bar{I}_{n-1}}, \dots, u_{x_1}^{\bar{I}_1}, u), & \alpha_n \in I_n, \end{aligned}$$

gdzie $\bar{I}_1 = I \setminus I_1$, ..., $\bar{I}_n = I \setminus I_n$.

Dla układu uporządkowanego (14.16) mamy następujące pochodne parametryczne rzędu drugiego

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} u_{11} \\ u_{21}, u_{22} \end{array} & \begin{array}{l} 1 \mid \bar{I}_1 \\ 2 \mid \bar{I}_2 \end{array} \end{array}$$

* W przypadku układu typu Cauchy'ego mamy $I_1 = I_2 = \dots = I_{n-2} = I_{n-1} = \emptyset$ - zbiór pusty, natomiast $I_n = I$.

$$\begin{array}{rcccc}
 \bar{I}_3 & & \bar{I}_3 & & \bar{I}_3 \\
 u_{31}, & u_{32}, & u_{33} & & 3 |\bar{I}_3| \\
 & & & & \cdot \\
 & & & & \cdot \\
 & & & & \cdot \\
 \bar{I}_{n-1} & & \bar{I}_{n-1} & & \bar{I}_{n-1} \\
 u_{n-1,1}, & u_{n-1,2}, & \dots & u_{n-1,n-1} & (n-1) |\bar{I}_{n-1}| \\
 \bar{I}_n & & \bar{I}_n & & \bar{I}_n \\
 u_{n1}, & u_{n2}, & \dots & u_{n-1,n}, & u_{nn} & n |\bar{I}_n|.
 \end{array}$$

Ogólnie, dla każdego α takiego, że $\alpha_{i+1} = \alpha_{i+2} = \dots = \alpha_n = 0$
 $D^\alpha u^{\bar{I}_i}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0)$

jest pochodną parametryczną. Z rozwinięcia Taylora funkcji $u^{\bar{I}}$ w punkcie $x = 0$ wnioskujemy, że jeśli układ (14.16) jest pasywny wtedy możemy:

- 1° zadać $|\bar{I}_1|$ funkcji dowolnych $u^{\bar{I}_1}(x^1, 0, \dots, 0)$ zależnych od jednej zmiennej x^1 ,
- 2° $|\bar{I}_2|$ funkcji dowolnych $u^{\bar{I}_2}(x^1, x^2, 0, \dots, 0)$ zależnych od dwóch zmiennych x^1, x^2 ,
- 3° $|\bar{I}_3|$ funkcji dowolnych $u^{\bar{I}_3}(x^1, x^2, x^3, 0, \dots, 0)$ zależnych od trzech zmiennych x^1, x^2, x^3 ,
-
- i° $|\bar{I}_i|$ funkcji dowolnych $u^{\bar{I}_i}(x^1, \dots, x^i, 0, \dots, 0)$ zależnych od i zmiennych x^1, x^2, \dots, x^i ,
-
- n° $|\bar{I}_n|$ funkcji dowolnych $u^{\bar{I}_n}(x^1, \dots, x^n)$ zależnych od n argumentów.

Mając na uwadze inkluzje

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n, \quad \bar{I}_1 \supset \bar{I}_2 \supset \dots \supset \bar{I}_n$$

widzimy, że w gruncie rzeczy należy zadać funkcje

$$u^{\bar{I}_1 \setminus \bar{I}_2}(x^1, 0, \dots, 0)$$

$$u^{\bar{I}_2 \setminus \bar{I}_3}(x^1, x^2, 0, \dots, 0)$$

.....

$$u^{\bar{I}_{n-1} \setminus \bar{I}_n}(x^1, x^2, \dots, x^{n-1}, 0)$$

$$u^{\bar{I}_n}(x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Badanie pasywności układu wymaga sprawdzenia, czy układ przedłożony da się rozwikłać względem wszystkich pochodnych głównych do rzędu drugiego włącznie, a następnie sprawdzenia czy związki (14.11) nie prowadzą do relacji pomiędzy pochodnymi parametrycznymi. Aby to zbadać, należy wyrugować w tych wyrażeniach najpierw wszystkie pochodne główne, a następnie sprawdzić czy otrzymane relacje są już tożsamościowo spełnione.

Pokażemy teraz jak należy rugować pochodne główne

$$(14.17) \quad \partial_{x^j}^{\#} \Phi_i^{I_i} = \Phi_{i, p_r \bar{I}_r}^{I_i} \cdot u_{x^r x^j}^{\bar{I}_r} + \Phi_{i, u^{\bar{I}_j}}^{I_i} \cdot u_{x^j}^{\bar{I}_j} + \\ + \Phi_{i, u^{\bar{I}_j}}^{I_i} \cdot u_{x^j}^{I_j} + \Phi_{i, x^j}^{I_i}.$$

Zauważmy, że $u_{x^j}^{I_j} = \Phi_j^{I_j}$, oraz że $u_{x^r x^j}^{\bar{I}_r}$ jest pochodną parametryczną dla $r \geq j$. Natomiast dla $r < j$ zbiór $\{u_{x^r x^j}^{\bar{I}_r}\}$ zawiera $|I_r \cap I_j|$ pochodnych głównych $u_{x^r x^j}^{\bar{I}_r \cap I_j} = u_{x^r x^j}^{I_r \setminus I_r}$ (wobec inkluzji $I_1 \subset \dots \subset I_n, \bar{I}_1 \supset \dots \supset \bar{I}_n$). Pochodne te można rugować używając związków

$$(14.18) \quad u_{x^j x^r}^{I_j} = \partial_{x^r}^{\#} \Phi_j^{I_j}(u_{x^j}^{\bar{I}_j}, \dots, u_{x^1}^{\bar{I}_1}, u, x).$$

Podczas wykonywania tego różniczkowania będą się pojawiały pochodne drugiego rzędu $u_{x^\sigma x^r}^{\bar{I}\sigma}$, które dla $\sigma \geq r$ są pochodnymi parametrycznymi natomiast część z nich, a mianowicie

$$u_{x^\sigma x^r}^{\bar{I}\sigma \cap \bar{I}r} (= u_{x^r x^\sigma}^{\bar{I}r \setminus \bar{I}\sigma})$$

staje się pochodnymi głównymi. Pochodne te można wyliczać (podobnie jak (14.15) ale już o niższych wskaźnikach) ze związków

$$u_{x^r x^\sigma}^{\bar{I}r} = \partial_{x^\sigma}^{\#} \Phi_r^{\bar{I}r} (u_{x^r}^{\bar{I}r}, \dots).$$

Po wykonaniu tego różniczkowania otrzymujemy po prawej stronie pochodne główne typu $u_{x^\sigma x^\alpha}^{\bar{I}\sigma \cap \bar{I}\alpha}$ z jeszcze niższymi wskaźnikami $\alpha < \sigma \leq r-1$. Postępując w ten sposób można sukcesywnie wyrugować wszystkie pochodne główne z wyrażeń (14.17). Tym samym układ przedłużony (a właściwie jego część) pozwala wyliczyć wszystkie pochodne główne rzędu drugiego przez pochodne parametryczne, co zapiszemy

$$(14.19) \quad u_{x^i x^r}^{\bar{I}i} = \Phi_{ir}^{\bar{I}i} (u_{x^i x^{\alpha_1}}^{\bar{I}i}, \dots, u_{x^1 x^{\alpha_1}}^{\bar{I}1}, u_{x^i}^{\bar{I}i}, \dots, u_{x^1}^{\bar{I}1}, u, x),$$

gdzie $r \leq i$ oraz $\alpha_1 \leq i$.

Należy teraz rozpatrzyć związki (14.11) rugując z nich pochodne główne za pomocą zależności (14.19) i (14.9). Na to, aby układ był pasywny potrzeba, żeby powstałe z (14.11) w ten sposób związki były tożsamościami ze względu na x oraz $u_{x^i}^{\bar{I}i}$, $u_{x^i x^j}^{\bar{I}i}$, $j \leq i$. Jeśli tak jest, wówczas układ przedłużony $p(\Phi)$ nie zawiera już dodatkowych równań i daje się zapisać w postaci

$$d.) \quad u_{x^i}^{\bar{I}i} = \Phi_i^{\bar{I}i} (u_{x^i}^{\bar{I}i}, \dots, u_{x^1}^{\bar{I}1}, u, x), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$b) \quad u_{x^i x^r}^{I_i} = \Phi_{ir}^{I_i} (u_{x^1 x^1}^{I_1}, \dots, u_{x^1 x^r}^{I_1}, \dots, u_{x^1}^{I_1}, u, x),$$

gdzie $r \leq i$ oraz $\alpha_i \leq i$.

TWIERDZENIE 14.1 Układ uporządkowany jest pasywny, jeśli po wyrugowaniu pochodnych głównych spełnione są tożsamościowe relacje (14.11) ze względu na pochodne parametryczne oraz zmienne x .

Dowód: różniczkując układ (14.9) można kolejno wyliczać pochodne główne wyższych rzędów przez pochodne parametryczne. Zatem wszystkie pochodne główne są jednoznaczными funkcjami pochodnych parametrycznych. Niektóre z nich mogą być jednakże wyrażane na różne sposoby. Pokażemy, że jeśli warunki pasywności (14.11) są tożsamościowo spełnione ze względu na pochodne parametryczne (po wyrugowaniu pochodnych głównych), wówczas warunek równości pochodnych mieszanych nie ogranicza swobody pochodnych parametrycznych. W tym celu zauważmy, że pochodna $\partial^{\#}$ ma następujące własności:

$$1^{\circ} \partial_{x^j}^{\#} \partial_{x^i}^{\#} = \partial_{x^i}^{\#} \partial_{x^j}^{\#};$$

2^o jest przemienna z rugowaniem, tzn. jeśli $\Phi = \Phi(p, q)$,

$p = \Psi(q)$, $R_p \Phi := \Phi(\Psi(q), q)$, wówczas $R_p \partial_x^{\#} \Phi = \partial_x^{\#} R_p \Phi$. Istotnie

$$R_p \partial_x^{\#} \Phi(p, q) := \Phi_p(\Psi(q), q) \partial_x^{\#} \Psi + \Phi_q \partial_x^{\#} q = (\Phi_p \Psi_q + \Phi_q) \partial_x^{\#} q$$

oraz

$$\partial_x^{\#} R_p \Phi(p, q) := \partial_x^{\#} \Phi(\Psi(q), q) = (\Phi_p \Psi_q + \Phi_q) \partial_x^{\#} q.$$

Różniczkując układ (14.19) po x_j z $j \leq r$ dostajemy zależności zawierające wszystkie pochodne główne rzędu trzeciego

$$(14.20) \quad u_{x^i x^r x^j}^{I_i} = \partial_{x^j}^{\#} \Phi_{ir}^{I_i}, \quad i \geq r \geq j.$$

Podobnie jak poprzednio stwierdzamy, że równania (14.20) dają

się rozwickłać ze względu na pochodne główne rzędu trzeciego, tzn. ze względu na własność uporządkowania z każdego z wyrażeń $\delta_{j,ir}^{\# \bar{I}_i}$ można wyrugować kolejno pochodne główne używając do tego wyrażeń z niższymi wskaźnikami.

Jeśli teraz spełnione są związki (14.11), wówczas korzystając z tych własności stwierdzamy, że warunek równości trzecich pochodnych mieszanych głównych daje się zapisać jako

$$(14.21) \quad \delta_{x^k}^{\#} (\delta_{x^i}^{\#} \Phi_j^{\bar{I}_i \cap I_j} - \delta_{x^j}^{\#} \Phi_i^{\bar{I}_i \cap I_j}) = 0.$$

Powyższą równość należy rozumieć jako znikanie funkcji od samych tylko pochodnych parametrycznych i zmiennych niezależnych po wyrugowaniu pochodnych głównych. Ze względu na przemienność różniczkowania $\delta^{\#}$ z rugowaniem widzimy, że spełnienie warunków (14.11) implikuje spełnienie (14.21). Analogicznie dowodzimy teraz równości dla czwartych i kolejno dla wyższych pochodnych.

Na koniec zauważmy, że układ, który daje się zapisać w następującej postaci

$$(14.22) \quad u_{x^i}^{\bar{I}_i} = \Phi_i^{\bar{I}_i} (u_{x^i}^{\bar{I}_i}, u_{x^{i-1}}^{\bar{I}_i}, \dots, u_{x^1}^{\bar{I}_i}, u, x, \quad i = 1, \dots, n$$

bez trudu sprowadza się do postaci uporządkowanej (14.16). Istotnie mamy tu $u_{x^1}^{\bar{I}_1} = \Phi_1^{\bar{I}_1} (u_{x^1}^{\bar{I}_1}, u, x)$ co pozwala wyrugować ze wszystkich pozostałych równań pochodne główne $u_{x^1}^{\bar{I}_1}$. Używając teraz równania $u_{x^2}^{\bar{I}_2} = \Phi_2^{\bar{I}_2}$ z wyrugowanymi pochodnymi $u_{x^1}^{\bar{I}_1}$ możemy wyrugować ze wszystkich pozostałych $u_{x^2}^{\bar{I}_2}$ itd. Dlatego też układ postaci (14.22) będziemy również nazywać układem uporządkowanym.

Powstaje zatem pytanie kiedy ogólny układ np. typu (14.16) można uporządkować? Ażeby uprościć nieco rozważania zacznijmy od

układów liniowych o stałych współczynnikach

$$(14.23) \quad \Phi^{\sigma}(Du) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, m,$$

gdzie $\Phi^{\sigma}(p)$ są liniowymi funkcjami zmiennych p . Algebraicznie równania

$$(14.24) \quad \Phi^{\sigma}(p) = 0$$

określają pewną podprzestrzeń liniową A w przestrzeni wszystkich zmiennych p , którą można utożsamić z iloczynem tensorowym $H \otimes E^*$, $A \subset H \otimes E^*$. Funkcje Φ^{σ} można zatem traktować jako formy liniowe na przestrzeni $H \otimes E^*$, co oznacza, że

$$\Phi^{\sigma} \in (H \otimes E^*) \simeq H^* \otimes E.$$

W gruncie rzeczy do równań (14.23) można dołączyć wszystkie ich kombinacje liniowe. W ten sposób Φ^{σ} generują pewną podprzestrzeń $A' \subset H^* \otimes E$, gdzie $A' = \text{Lin} \{\Phi^1, \dots, \Phi^m\}$. A' jest więc anihilatorem A w $H^* \otimes E$ tzn. A' jest zbiorem tych $a' \in H^* \otimes E$, że dla każdego $a \in A$ zachodzi

$$\langle a', a \rangle = 0$$

i na odwrót: A jest anihilatorem A' .

Problem uporządkowania układu można teraz sformułować następująco: czy można tak wybrać bazę e_1, e_2, \dots, e_n w przestrzeni E oraz układ generatorów $\tilde{\Phi}^{\sigma} \in A' = \text{Lin} \{\tilde{\Phi}^1, \dots, \tilde{\Phi}^m\}$, aby otrzymany układ

$$\tilde{\Phi}^{\sigma}(Du) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, m$$

był uporządkowany?

Różniczkując układ (14.23) dostajemy układ przedłużony

$$(14.25) \quad \Phi_j^{\sigma} u_{,\gamma}^j = 0.$$

Algebraicznie rozwiązania równań $\Phi_j^{\sigma\nu} p_{\nu r}^j = 0$ z warunkiem symetrii $p_{\nu r}^j = p_{r\nu}^j$, mogą być znowu traktowane jako elementy przestrzeni $H \otimes S^2 E^*$, gdzie $S^k E^*$ oznacza k -krotny symetryczny iloczyn tensorowy. Rozwiązania te tworzą podprzestrzeń $p(A)$, którą nazwiemy przedłużeniem podprzestrzeni A .

TWIERDZENIE 14.2 $p(A) = (A \otimes E^*) \cap (H \otimes S^2 E^*)$.

Dowód: $p(A)$ jest określona poprzez rozwiązania równań

$$(14.26) \quad \Phi_j^{\sigma\nu} p_{\nu r}^j = 0, \quad p_{\nu r}^j = p_{r\nu}^j.$$

Jeśli $(p_{\nu}^j) \in A$ tzn. spełnia $\Phi_j^{\sigma\nu} p_{\nu}^j = 0$, wówczas dla dowolnego $(l_{\mu}^j) \in E^*$, $p_{\nu\mu}^j = p_{\nu}^j l_{\mu}^j$ spełnia równanie $\Phi_j^{\sigma\nu} p_{\nu}^j l_{\mu}^j = 0$. Podobnie dowolne sumy

$$(14.27) \quad p_{\nu\mu}^j = p_{\nu}^j l_{\mu}^j + \dots + p_{\nu}^k l_{\mu}^k$$

spełniają to równanie. Aby spełnić drugie z równań (14.26) należy spośród rozwiązań (14.27) wybrać te, które są symetryczne.

Procedurę przedłużania można kontynuować kładąc

$$(14.28) \quad p^1(A) = (A \otimes S^1 E^*) \cap (H \otimes S^{1+1} E^*) = (A \otimes \frac{1}{1} E^*) \cap (H \otimes S^{1+1} E^*)$$

Ogólnie, dla dowolnej podprzestrzeni $A \subset H \otimes S^k E^*$ można zdefiniować

$$p^1(A) = (A \otimes S^1 E^*) \cap (H \otimes S^{1+k} E^*).$$

Mamy tu $p^1(p^r(A)) = p^{1+r}(A)$.

Wyberźmy teraz bazę e_1, e_2, \dots, e_n w przestrzeni E . Niech e^1, e^2, \dots, e^n oznacza odpowiednio bazę dualną w E^* . Połóżmy

$$(14.29) \quad A_i = A \cap (H \otimes E_{n-i}^*),$$

gdzie $E_{n-i}^* = \{e^{i+1}, \dots, e^n\}$; oczywiście $A_0 = A \supset A_1 \supset \dots \supset A_n = 0$.

DEFINICJA 14.4 Oznaczmy przez δ_i odwzorowanie

$$\delta_i : S^k E^* \longrightarrow S^{k-1} E^*$$

przyporządkowujące tensorowi

$$a^k = \sum_{p_1 \dots p_k} a_{p_1 \dots p_k} e^{p_1} \otimes \dots \otimes e^{p_k} \in S^k E^*$$

tensor

$$a^{k-1} = \sum_{p_2 \dots p_k} a_{i p_2 \dots p_k} e^{p_2} \otimes \dots \otimes e^{p_k} \in S^{k-1} E^*.$$

Odwzorowanie to w sposób naturalny można rozszerzyć do $H \otimes S^k E^*$.

DEFINICJA 14.5 Baza e_1, e_2, \dots, e_n nazywa się quasi-regularna wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie

$$(14.30) \quad \delta_{i+1} : P(A_i) \longrightarrow A_i$$

są surjektywne (Kuranishi 1967).

TWIERDZENIE 14.3 Jeśli dla układu (14.25) istnieje baza quasi-regularna, wówczas układ (14.25) można uporządkować do postaci

$$(14.22), \text{ tzn. również } (14.16).$$

Dowód: Podobnie jak odwzorowanie δ_i można określić odwzorowanie $\delta_i^* : H^* \otimes S^{k+1} E \longrightarrow H^* \otimes S^k E$. Mamy wtedy ciągi dokładne definiujące przestrzenie $Y_i \subset H$, $Z_i \subset H$

$$(14.31) \quad \begin{aligned} 0 \longrightarrow A_i \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\delta_i} Y_i \longrightarrow 0 \quad \text{tzn. } Y_i = \delta_i(A_{i-1}) \\ 0 \longrightarrow A'_{i-1} \longrightarrow A'_i \xrightarrow{\delta_i^*} Z_i \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

gdzie $A'_i = A' \cap (H^* \otimes E^i)$, $E^i = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_i\}$. Mamy tu zatem filtrację $A'_0 = \{0\} \subset A'_1 \subseteq \dots \subseteq A'_n = A'$. Co więcej, z faktu, że e_1, \dots, e_n jest bazą przestrzeni E wynika, że Z_i jest anihilatorem Y_i i na odwrót.

Pokażemy teraz, że $Y_1 \supset Y_2 \supset \dots \supset Y_n$ lub, co na jedno wychodzi wobec poczynionej uwagi, $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_n$. Istotnie, niech $y \in Y_i$ ($2 \leq i \leq n$). Istnieje zatem $\omega \in A_{i-1}$ takie, że $y = \delta_i \omega$. Na mocy założenia quasi-regularności odwzorowanie

$$\delta_{i+1} : p(A_i) \longrightarrow A_i$$

jest surjektywne dla $i = 0, 1, \dots, n-1$. Ponieważ $A_{i-1} \subseteq A_{i-2}$, zatem $\omega = \delta_{i-1} w$, gdzie $w \in p(A_{i-2}) \subset H \otimes S^2 E$. Ponieważ jednak w jest tensorem symetrycznym względem współrzędnych z E^* , a więc zamieniając porządek mamy $v = \delta_{i-1} \delta_i w$, zatem $\delta_i w \in A_{i-2}$, co implikuje, że $\delta_{i-1} \delta_i w \in Y_{i-1}$, a zatem $y \in Y_{i-1}$ co dowodzi, że $Y_i \subset Y_{i-1}$.

Jeśli teraz wybrać bazę $\{\Phi_1^{\alpha_1}\}_{\alpha_1 \in I_1}$ w podprzestrzeni A'_1 , a następnie uzupełnić ją o $\{\Phi_2^{\alpha_2}\}_{\alpha_2 \in I_2}$ tak, by otrzymać bazę w podprzestrzeni A'_2 , wówczas kontynuując tę procedurę aż do otrzymania pełnej bazy w A : $\{\Phi_1^{\alpha_1}, \Phi_2^{\alpha_2}, \dots, \Phi_n^{\alpha_n}\}_{\alpha_i \in I_i}$ widzimy, że otrzymana w ten sposób baza może, wobec inkluzji $Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_n$, być tak wybrana, aby odpowiednie generatory w i -tej grupie miały postać

$$(14.32) \quad \Phi_i^{\alpha_i} = h^{\alpha_i} \otimes e_i + \Psi_i^{\alpha_i}, \quad \alpha_i \in I_i$$

gdzie $\Psi_i^{\alpha_i}$ zawierać może jedynie wektory e_1, e_2, \dots, e_{i-1} , a $h^{\alpha_i} \in H^*$ są tak wybrane, by $\text{Lin}\{h^1, \dots, h^i\} = Z_i$. Postać generatorów $\{\Phi_i^{\alpha_i}\}$ jest właśnie postacią uporządkowaną.

DEFINICJA 14.6 Układ (14.16), który daje się zapisać w postaci uporządkowanej (14.22), oraz dla którego układ przedłużony nie ogranicza swobody pochodnych parametrycznych nazywa się układem w inwolucji.

Na podstawie rozważań tego rozdziału możemy sformułować

TWIERDZENIE 14.4 Układy typu (14.23) w inwolucji są układami pasywnymi.

Wobec tego zajmiemy się teraz kryteriami, które pozwalałyby rozstrzygać, czy rozważany układ jest w inwolucji. Z definicji 14.4 przedłużenia oraz definicji przestrzeni A_i (wzór 14.29) mamy następujący ciąg dokładny odwzorowań

$$0 \longrightarrow p(A_{i+1}) \longrightarrow p(A_i) \xrightarrow{\delta_{i+1}} A_i.$$

Ponieważ $p(A_{i+1}) \subset p(A_i)$ jest jądrem odwzorowania δ_{i+1} , zatem

$$\begin{aligned} \dim p(A_i) &= \dim \text{Ker } \delta_{i+1} + \dim \text{Im } \delta_{i+1} \\ &= \dim p(A_{i+1}) + \dim \text{Im } \delta_{i+1}. \end{aligned}$$

Z drugiej jednakże strony $\dim \text{Im } \delta_{i+1} \leq \dim A_i$ i równość zachodzi jedynie wtedy, kiedy odwzorowanie δ_{i+1} jest surjektywne.

Stąd

$$\dim p(A_i) \leq \dim p(A_{i+1}) + \dim A_i.$$

Sumując te nierówności dla $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ dostajemy

$$(14.33) \quad \dim p(A) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \dim A_i,$$

ponieważ $A_0 = A$, oraz $\dim p(A_n) = 0$.

STWIERDZENIE 14.1 Jeśli

$$\dim p(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \dim A_i,$$

wówczas odwzorowania

$$\delta_{i+1} : p(A_i) \longrightarrow A_i, \quad i=0, 1, \dots, n-1$$

są surjektywne, co oznacza, że baza e_1, e_2, \dots, e_n jest quasi-re-

gularna. I na odwrót: jeżeli odwzorowania $\delta_{i+1}: P(A_i) \rightarrow A_i$ są surjektywne, wówczas zachodzi powyższa równość.

Z dokładności pierwszego z ciągów (14.31)

$$0 \longrightarrow A_i \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{\delta_i} Y_i \longrightarrow 0$$

tnz. z faktu, że $A_i \subset A_{i-1}$ jest inkluzją, oraz z tego, że $\delta_i: A_{i-1} \rightarrow Y_i$ jest surjekcją mamy

$$\dim A_{i-1} = \dim A_i + \dim Y_i .$$

Wypisując te równości od $i+1$ -szej do n -tej mamy

$$\dim A_i = \dim A_{i+1} + \dim Y_{i+1}$$

$$\dim A_{i+1} = \dim A_{i+2} + \dim Y_{i+2}$$

.....

.....

$$\dim A_{n-1} = \dim A_n + \dim Y_n ,$$

skąd po zsumowaniu otrzymujemy

$$\dim A_i = \dim A_n + \sum_{k=i+1}^n \dim Y_k .$$

Ponieważ jednak $\dim A_n = 0$, więc

$$(14.34) \quad \dim A_i = s_{i+1} + s_{i+2} + \dots + s_n$$

gdzie oznaczyliśmy

$$(14.35) \quad s_i := \dim Y_i .$$

Na podstawie rozważań ze stron 155 - 156 widzimy, że $\dim Y_i = |\bar{I}_i|$

i ilość pochodnych parametrycznych rzędu drugiego jest równa

(str. 156)

$$s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n .$$

Z (14.34) mamy jednakże

$$\sum_{i=0}^{n-1} \dim A_i = s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n.$$

Stąd

STWIERDZENIE 14.2 Surjektywność odwzorowań $\delta_{i+1}: p(A_i) \longrightarrow A_i$ oznacza, że liczba pochodnych parametrycznych rzędu drugiego jest równa $\dim p(A)$.

WNIOSEK. Układ przedłużony nie ogranicza swobody pochodnych parametrycznych, a więc jest w involucji.

STWIERDZENIE 14.3 Jeśli $\dim p(A) = s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$, wówczas odwzorowania δ_{i+1} są surjektywne, a zatem układ (14.23) jest w involucji.

DEFINICJA 14.7 W przypadku układu inwolutywnego liczby s_1, s_2, \dots, s_n nazwiemy charakterami układu.

Na podstawie rozważań ze strony 157 widzimy, że swoboda ogólnego rozwiązania jest wyznaczona przez charaktery, przy czym mamy swobodę

$\tau_n = s_n$ funkcji od n zmiennych,

$\tau_{n-1} = s_{n-1} - s_n$ funkcji od $n-1$ zmiennych,

.....

$\tau_1 = s_1 - s_2$ funkcji od jednej zmiennej.

Trzeba tu zaznaczyć, że stopień swobody zależy tu od sposobu reprezentowania rozwiązania ogólnego i znaczenie niezmiennicze ma właściwie najwyższy z nieznikających τ_i .

Ostatnie rozważania dotyczyły układów (14.23) liniowych i jednorodnych ze stałymi współczynnikami. Analogicznych twierdzeń można jednak dowieść (Goldschmidt 1962, 1968, 1969, 1972, 1978, Kuranishi 1967, Pommaret 1978) w przypadku ogólnych układów typu (14.16).

$$(14.36) \quad \Phi^\sigma(Du, u, x) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, m,$$

przy czym odpowiednie przestrzenie A bądź A' definiuje się dla każdego punktu (p^1, p^0, x) spełniającego

$$(14.37) \quad \Phi^\sigma(p^1, p^0, x) = 0, \quad \sigma = 1, 2, \dots, m$$

badając liniowe w funkcji v odwzorowanie styczne $\Phi^\sigma(v)$

$$\Phi^\sigma(p^1, p^0, x; v) = \frac{\partial}{\partial p_\nu^j} \Phi^\sigma(p^1, p^0, x) v_\nu^j,$$

tzn. powtarzając całą procedurę dla równania zlinearyzowanego na v . Otrzymujemy w ten sposób rodzinę podprzestrzeni $A(p^1, p^0, x)$ numerowaną przez algebraiczne rozwiązania równania (14.37), tzn. jety całkowe.

DEFINICJA 14.8 Układ (14.37) nazywa się układem w inwolucji w otoczeniu jakiegoś punktu $(\tilde{p}^1, \tilde{p}^0, \tilde{x})$ spełniającego (14.37), jeśli:

- 1°. istnieje otoczenie \mathcal{O} punktu $(\tilde{p}^1, \tilde{p}^0, \tilde{x})$ takie, że zbiór rozwiązań, oznaczymy go $\mathcal{J}(\Phi)$, równań (14.31) zawartych w \mathcal{O} stanowi gładką podrozmaitość;
- 2°. istnieje baza quasi-regularna w punkcie $(\tilde{p}^1, \tilde{p}^0, \tilde{x})$: $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$ tzn. odwzorowania

$$\delta_{i+1} : p(A_i(\tilde{p}^1, \tilde{p}^0, \tilde{x})) \longrightarrow A_i(\tilde{p}^1, \tilde{p}^0, \tilde{x})$$

są surjektywne dla $i = 1, 2, \dots, n$;

- 3°. układ przedłużony jest algebraicznie niesprzeczny w $\mathcal{O} \cap \mathcal{J}(\Phi)$ tzn. dla każdego $(p^1, p^0, x) \in \mathcal{O}$ istnieje choć jedno rozwiązanie na "drugie pochodne" $p^2 := (p_{p_\nu^j}^j)$ układu przedłużonego

$$(p \Phi)(p^2, p^1, p^0, x) = 0, \quad p_{p_\nu^j}^j = p_{\nu p^j}^j.$$

Dowodzi się (Kuranishi 1967)

TWIERDZENIE 14.5 Jeśli układ (14.37) jest w inwolucji w punkcie $(p^1, p^0, x) \in \mathcal{J}(\Phi)$, wówczas daje się on rozwikłać w pewnym otoczeniu $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ tego punktu do postaci uporządkowanej (14.16 bądź 14.22). Liczba pochodnych parametrycznych układu uporządkowanego jest równa $\dim p(A(p^1, p^0, x))$ tzn. układ przedłużony nie wnosi ograniczeń na pochodne parametryczne, a zatem układ (14.37) w postaci uporządkowanej staje się pasywny.

Biorąc dla każdego $(p^0, x) \in H \times E$ iloczyn tensorowy $T_{p^0} H \otimes T_x^* E$ dostajemy wiązkę wektorową nad $H \times E$, którą w dalszym ciągu będziemy oznaczali przez

$$TH \otimes T^* E \\ H \times E$$

Wiązka ta jest oczywiście izomorficzna z wiązką

$$\mathcal{J}^1(H \times E \rightarrow E) \xrightarrow{\pi^0} \mathcal{J}^0(H \times E \rightarrow E)$$

tzn. z wiązką 1-jetów odwzorowań E w H (cięż wiązki $H \times E \rightarrow E$) traktowanej jako wiązka nad $H \times E \simeq \mathcal{J}^0(H \times E \rightarrow E)$. Każda podrozmaitość włóknista $\mathcal{R}^1 \subset \mathcal{J}^1$ wiązki $\mathcal{J}^1 \rightarrow E$ definiuje układ równań różniczkowych rzędu pierwszego na $H \times E \rightarrow E$. W szczególności

DEFINICJA 14.9 Subwiązka (wektorowa) \mathcal{R}^1 wiązki wektorowej $\mathcal{J}^1 \rightarrow \mathcal{J}^0$ definiuje układ równań quasiliniowych.

W definicji układu równań wymagało się jedynie, by odwzorowanie $\mathcal{R}^1 \rightarrow E$ było surjektywne. W dalszych jednakże rozważaniach ograniczymy się do równań \mathcal{R}^1 , dla których odwzorowanie $\mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{J}^0 \simeq H \times E$ jest surjektywne, a więc takich, które nie zawierają więzów typu $\varphi(x, u) = 0$. Mamy wtedy diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^1 & \hookrightarrow & TH \otimes T^* E \simeq \mathcal{J}^1 \\ & \searrow \pi_{\mathcal{R}^1} & \downarrow \pi \\ & & H \times E \end{array}$$

Odwzorowanie $\pi_{\mathcal{R}^1}$ indukuje odpowiednie odwzorowanie $d\pi_{\mathcal{R}^1}$ wiązek stycznych

$$d\pi_{\mathcal{R}^1} : T\mathcal{R}^1 \longrightarrow T\mathcal{T}^0.$$

DEFINICJA 14.10 Wektor $X \in T_{\tilde{p}} \mathcal{R}^1$ nazywa się wektorem pionowym, jeśli

$$d\pi(X) = 0.$$

Zbiór takich wektorów tworzy wiązkę wertykalną $V\mathcal{R}^1$

$$V\mathcal{R}^1 := \text{Ker } d\pi_{\mathcal{R}^1} \subset T\mathcal{R}^1.$$

W szczególności w przypadku równań quasiliniowych mamy izomorfizm włókien

$$V_{\tilde{p}} \mathcal{R}^1 \approx \mathcal{R}^1_{(p^0, x)} = \pi_{\mathcal{R}^1}^{-1}(\pi_{\mathcal{R}^1} \tilde{p}).$$

Ze względu na liniowość przestrzeni $T_{p^0} H \otimes T_x^* E$ można $V_{\tilde{p}} \mathcal{R}^1$ traktować jako podprzestrzeń przestrzeni $T_{p^0} H \otimes T_x^* E$, gdzie $(p^0, x) = \pi_{\mathcal{R}^1}(\tilde{p})$. W ten sposób rozumiana przestrzeń $V_{\tilde{p}} \mathcal{R}^1$ jest właśnie omawianą wcześniej przestrzenią $A(p^1, p^0, x)$ równania zlinearyzowanego. Dystrybucję

$$\mathcal{R}^1 \ni \tilde{p} \longrightarrow V_{\tilde{p}} \mathcal{R}^1 \subset T_{p^0} H \otimes T_x^* E, \quad (p^0, x) = \pi_{\mathcal{R}^1}(\tilde{p})$$

podprzestrzeni $V_{\tilde{p}} \mathcal{R}^1$ będziemy w dalszym ciągu oznaczali przez A .

Dla każdego odwzorowania $e : \mathcal{R}^1 \longrightarrow TE$ takiego, że diagram

$$(14.38) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{R}^1 & \xrightarrow{e} & TE \\ & \searrow & \downarrow \\ & & E \end{array}$$

jest przemienny, określamy odwzorowanie

$$\delta_e(\tilde{p}) : T_{p^0} H \otimes T_x^* E \longrightarrow T_{p^0} H, \quad (p^0, x) = \pi_{\mathcal{R}^1}(\tilde{p})$$

zdefiniowane następująco na tensorach prostych

$$\delta_e(\beta \otimes \alpha) = \langle \alpha, e \rangle \beta.$$

Uwaga! W gruncie rzeczy wystarczy rozpatrywać odwzorowania e na zbiorach otwartych $\mathcal{O} \subset \mathcal{R}^1$. Dla uproszczenia nie będziemy tego zaznaczać.

Jeśli e_1, \dots, e_n spełniają (14.38), oraz jeśli dla każdego $(p^0, x) \in H * E$ $\{e_i(p^0, x)\}$ stanowią bazę w $T_x^* E$, wówczas odwzorowania $\delta_{e_1}, \dots, \delta_{e_n}$ będziemy tak jak poprzednio oznaczać przez $\delta_1, \dots, \delta_n$. Niech δ_e^A oznacza obcięcie odwzorowania δ_e do dystrybucji przestrzeni A . Wówczas na mocy definicji przestrzeni A_i mamy

$$A_1 = \text{Ker } \delta_1^A$$

$$A_2 = \text{Ker } \delta_1^A \cap \text{Ker } \delta_2^A,$$

i ogólnie

$$A_i = \text{Ker } \delta_1^A \cap \dots \cap \text{Ker } \delta_i^A.$$

Relacje te można zapisać nieco zgrabniej wprowadzając sumę prostą odwzorowań

$$\delta_1^A \oplus \delta_2^A \oplus \dots \oplus \delta_i^A : A \longrightarrow \bigoplus_1^i \mathbb{T}H$$

daną wzorem

$$A \ni a \longrightarrow (\delta_1 \oplus \dots \oplus \delta_i)(a) = (\delta_1(a), \dots, \delta_i(a)).$$

Wtedy

$$A_i = \text{Ker}(\delta_1^A \oplus \dots \oplus \delta_i^A),$$

skąd

$$\dim A_i(\bar{p}) = \dim A(\bar{p}) - \text{rzęd}(\delta_1^A \oplus \dots \oplus \delta_i^A)\bar{p}.$$

Uwaga! przez rząd odwzorowania rozumiemy tu wymiar obrazu tego odwzorowania.

Podobnie

$$Y_i = \delta_i(A_{i-1}) = \delta_i \text{Ker}(\delta_1^A \oplus \dots \oplus \delta_{i-1}^A)$$

i ponieważ $s_i := \dim Y_i$ oraz

$$\dim Y_i(\tilde{P}) = \dim A_{i-1}(\tilde{P}) - \dim A_i(\tilde{P}),$$

a więc

$$s_i(\tilde{P}) = \text{rzad}(\delta_1^A \oplus \dots \oplus \delta_i^A)_{\tilde{P}} - \text{rzad}(\delta_1^A \oplus \dots \oplus \delta_{i-1}^A)_{\tilde{P}},$$

co w ostateczności daje użyteczny wzór

$$s_1(\tilde{P}) + s_2(\tilde{P}) + \dots + s_i(\tilde{P}) = \text{rzad}(\delta_1^A \oplus \dots \oplus \delta_i^A)_{\tilde{P}}.$$

Odwzorowania δ_i^A zależą od wyboru "bazy" e_1, \dots, e_n . Jeśli zmienić bazę, wówczas w ogólności rzędy odpowiednich odwzorowań mogą ulec zmianie. Jak pokazaliśmy poprzednio, w ustalonym punkcie $\tilde{P} \in \mathcal{R}^1$

$$\dim p(A) \leq s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$$

i "liczba" $\mu(e_1, \dots, e_n) := s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$ zależy od wyboru bazy i jedynie w przypadku kiedy baza jest quasi-regularna zachodzi równość

$$\dim p(A) \Big|_{\tilde{P}} = \mu(e_1, \dots, e_n)_{\tilde{P}}.$$

Zatem na bazie quasi-regularnej wyrażenie $\mu(e_1, \dots, e_n)$ osiąga wartość minimalną. W celu wyznaczenia tego minimum można postępować w sposób następujący:

1° najpierw wybieramy wektor $e_1 \in T_X E$ tak, by

$$\text{rzad} \delta_{e_1}^A \Big|_{\tilde{P}} = \max_{e \in T_X E} \text{rzad} \delta_e^A \Big|_{\tilde{P}} =: \mu_1(\tilde{P});$$

2° mając już e_1 wybieramy teraz $e_2 \in T_X E$ tak, by

$$\text{rzad}(\delta_{e_1}^A \oplus \delta_{e_2}^A)_{\tilde{P}} = \max_{e \in T_X E} \text{rzad}(\delta_{e_1}^A \oplus \delta_e^A)_{\tilde{P}} =: \mu_1(\tilde{P}) + \mu_2(\tilde{P})$$

i ogólnie mając już wybrane e_1, \dots, e_{i-1} tzn. mając $\delta_1^A, \dots, \delta_{i-1}^A$, gdzie $\delta_r^A = \delta_{e_r}^A$ wybieramy $e_i \in T_X E$ tak, aby

$$\begin{aligned} \text{rząd}(\delta_1^A \oplus \dots \oplus \delta_i^A)_{\tilde{P}} &= \max_{e \in T_X E} \text{rząd}(\delta_1^A \oplus \dots \oplus \delta_{i-1}^A \oplus \delta_e^A)_{\tilde{P}} = \\ &:= \mathfrak{r}_1(\tilde{P}) + \mathfrak{r}_2(\tilde{P}) + \dots + \mathfrak{r}_i(\tilde{P}). \end{aligned}$$

Taki wybór zapewnia, że $\mu(e_1, \dots, e_n)$ osiąga swoją wartość minimalną. Istotnie, ponieważ $s_1 + s_2 + \dots + s_n = \dim A$, zatem zmniejszenie np. o 1 liczby s_1 pociąga za sobą zwiększenie któregoś z kolejnych s -ów, powiedzmy s_r , a to daje wzrost liczby μ o r . W celu minimalizacji $\mu(e_1, \dots, e_n)$ należy zatem wybrać e_1 tak, by s_1 było możliwie największe, a więc $s_1 = \mathfrak{r}_1$. Mając $s_1 = \mathfrak{r}_1$ podobne rozumowanie stosujemy do e_2 i s_2 itd.

Ze względu na definicję liczb $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_n$ zbiór baz, dla których $\mu(e_1, \dots, e_n)$ przyjmuje wartość minimalną jest zbiorem otwartym w zbiorze wszystkich baz w $T_X E$. Istotnie, jeśli rząd pewnej macierzy $\mathcal{M}(\xi)$, zależnej od parametru ξ w sposób ciągły, jest w punkcie ξ_0 równy r_0 , wówczas w pewnym otoczeniu \mathcal{O}_{ξ_0} rząd $\mathcal{M}(\xi) \geq \text{rząd} \mathcal{M}(\xi_0)$. Jest to konsekwencja własności Darboux dla funkcji ciągłej. Jeśli zatem istnieje baza quasi-regularna, wówczas istnieje ich wiele i małe zaburzenia bazy quasi-regularnej dają bazy quasi-regularne.

DEFINICJA 14.11 Liczby $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \dots, \mathfrak{r}_n$ będziemy nazywać charakterami Cartana układu \mathcal{R}^1 .

Rezultaty dotychczasowych rozważań można teraz ująć w postaci następującego twierdzenia:

TWIERDZENIE 14.6 Jeśli w pewnym otoczeniu $\mathcal{O}_P \subset \mathcal{R}^1$ punktu $\tilde{P} \in \mathcal{R}^1$ zachodzi

$$1^\circ \dim_p(A(\tilde{q})) = \mathfrak{r}_1(\tilde{q}) + 2\mathfrak{r}_2(\tilde{q}) + \dots + n\mathfrak{r}_n(\tilde{q}) =$$

$$= \lambda_1(\tilde{p}) + 2\lambda_2(\tilde{p}) + \dots + n\lambda_n(\tilde{p});$$

2° układ przedłużony $p(\mathcal{R}^1)$ jest niesprzeczny w \mathcal{O}_p (tzn.

$p(\mathcal{O}_p) \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{p}}$ jest surjektywne),

wówczas układ \mathcal{R}^1 jest w inwolucji w punkcie \tilde{p} (w gruncie rzeczy jest w inwolucji w całym \mathcal{O}_p).

Rozpatrzmy teraz układ w następującej postaci

$$(14.39) \quad \mathcal{R}^1 : du = G(\xi, u, x),$$

gdzie $\xi \in \mathbb{R}^k$ oraz $G(\xi, p^0, x) \in T_{p^0}H \times T_x^*E$. Innymi słowy

$$\mathbb{R}^k \ni \xi \longrightarrow G(\xi) \in \frac{TH \otimes T^*E}{H \times E}$$

jest odwzorowaniem przestrzeni \mathbb{R}^k w zbiór cięć wiązki $\frac{TH \otimes T^*E}{H \times E}$.

Układy generowane przez mody np.

$$(14.40) \quad du = \xi^1 \delta_1(u) \lambda^1(u) + \dots + \xi^k \delta_k(u) \lambda^k(u)$$

rozpatrywane w poprzednich rozdziałach są właśnie tej postaci.

Rozwiązaniem układu (14.39) będzie para odwzorowań

$$E \ni x \longrightarrow u(x) \in H, \quad E \ni x \longrightarrow \xi(x) \in \mathbb{R}^k$$

spełniająca (14.39). Zmienne ξ parametryzują włókno wiązki \mathcal{R}^1 ,

zatem pochodne $\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} G(\tilde{p})$ rozpinają włókno $V_{\tilde{p}} \mathcal{R}^1$ wiązki wertykalnej nad punktem $\tilde{p} = (\xi, u, x)$. Wiązkę tę możemy zanurzyć w sumie prostej

$$(14.41) \quad V \mathcal{R}^1 \subset \mathcal{R}^1 \oplus \left(\frac{TH \otimes T^*E}{H \times E} \right)$$

wiązek \mathcal{R}^1 oraz \mathcal{J}^0 . Z tego też względu $\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} G(\tilde{p})$ można uważać za elementy przestrzeni wektorowej $T_{p^0}H \otimes T_x^*E$, $\tilde{p} = (p^0, \xi, x)$. W szczególności dla równania quasiliniowego można utożsamić

$$V \mathcal{R}^1 \approx \mathcal{R}^1 \oplus \mathcal{R}^1.$$

Na równanie (14.39) można też patrzeć jak na układ form zewnętrznych o wartościach wektorowych tak, jak to robiliśmy w przypadku układów typu (14.40). Układ form Pfaffa można również natychmiast otrzymać, jeśli posłużymy się układami współrzędnych np. (u^1, \dots, u^l) w H oraz (x^1, \dots, x^n) w E . Wówczas (14.39) przyjmuje postać

$$du^j - G_{\nu}^j(\xi, u^1, \dots, u^l, x^1, \dots, x^n) dx^{\nu} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l$$

i może być uważany za układ Pfaffa na rozmaiłości \mathcal{Q}^1 . Jednakże pierwszy punkt widzenia jest bardziej użyteczny, ponieważ pozwala operować obiektami geometrycznymi, nie wprowadzając układów współrzędnych. Podobnie jak to czyniliśmy w rozdziale 3. można tu również wprowadzić pochodną zewnętrzną wyrażenia (14.39) modulo samo równanie (14.39). Otrzymujemy wówczas

$$(14.42) \quad d\xi \wedge G_{\xi} + [G, G] + d_x G = 0,$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia

$$d\xi \wedge G_{\xi} := \sum_{\alpha} d\xi^{\alpha} \wedge G_{\xi^{\alpha}} = \sum_{\alpha, \nu} d\xi^{\alpha} \wedge dx^{\nu} G_{\nu, \xi^{\alpha}},$$

$$[G, G] = G^j \wedge \frac{\partial G}{\partial u^j} = \sum_{j, \nu, \mu} G_{\nu}^j \cdot G_{\mu, u^j} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu},$$

$$d_x G = dx^{\nu} \wedge G_{x^{\nu}}.$$

Wyrażenie $[G, G]$ ma, podobnie jak pozostałe zależności, sens niezależny od układu współrzędnych, mianowicie

$$[G, G](\tilde{p}) \in T_u H \otimes \Lambda^2 T_x^* E \quad \tilde{p} = (\xi, u, x).$$

Można to łatwo sprawdzić rozkładając G na tensory proste

$$G = \sum_r X_r \otimes \omega_r, \quad X_r(\xi, u, x) \in T_u H, \quad \omega_r(\xi, u, x) \in T_x^* E,$$

wówczas

$$(14.43) \quad [G, G] = \sum_{r,s} X^j \frac{\partial}{\partial u^j} X \otimes (\omega \wedge \omega) + \sum_{r,s} X \otimes (\omega \wedge \omega, X_s) \\ = \frac{1}{2} \sum_{r,s} [X_r, X_s] \otimes (\omega \wedge \omega) + \sum_{r,s} X \otimes (\omega \wedge \omega, X_s) .$$

gdzie $[X_r, X_s]$ oznacza komutator pól wektorowych X przy ustalonych x i ξ ! Podobnie ω_X oznacza pochodną $\omega(\xi, u, x)$ wzdłuż pola X przy ustalonym x oraz ξ .

Jeśli posłużyć się układem współrzędnych, wówczas różniczkowanie (zwykle po $\frac{\partial}{\partial x^p}$) daje

$$(14.44) \quad u_{x^j x^p}^j = G_{\nu, \xi^\alpha}^j X_{x^p}^\alpha + G_{\nu, u^i}^j G_{\mu}^i + G_{\nu, x^p}^j ,$$

co, jeśli potraktować to łącznie z równaniem $u_{\nu}^j = G_{\nu}^j$ jako równanie definiujące podrozmaitość $p(\mathcal{R}) \subset \mathcal{Y}^2(H \times E \rightarrow E)$, zapisuje się jako

$$(14.45) \quad p(\mathcal{R}^1) : \begin{cases} p_{\nu}^j = G_{\nu}^j(\xi, u, x), \\ p_{\nu\mu}^j = G_{\nu, \xi^\alpha}^j \eta_{\mu}^\alpha + G_{\nu, u^i}^j G_{\mu}^i + G_{\nu, x^p}^j . \end{cases}$$

Jasne jest, że warunek symetrii $p_{\mu\nu}^j = p_{\nu\mu}^j$ oznacza, że formy η^α muszą być algebraicznymi rozwiązaniami równania

$$(14.46) \quad \eta \wedge G_{\xi} + [G, G] + d_x G = 0$$

będącego konsekwencją równania (14.42).

Jeśli zatem dla ustalonego (ξ, u, x) istnieją rozwiązania na $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^k)$ równania (14.46), wówczas układ $p(\mathcal{R}^1)$ jest również niesprzeczny. Co więcej, wymiar rozmaitości rozwiązań na $p_{\mu\nu}^j$ przy ustalonych (ξ, u, x) ($= \dim p(A(\xi, u, x))$) jest równy wymiarowi rozmaitości rozwiązań na η równania (14.46) (η traktujemy jako elementy $\mathbb{R}^k \otimes T_x E$), jeśli tylko elementy

$\{G_{\nu, \xi^\alpha}(\tilde{P})\}_{\alpha=1, \dots, k}$ są liniowo niezależne.

Ponieważ przestrzeń $A(\tilde{P})$ jest rozpinana przez elementy

G_{ν, ξ^α}

$$A(\tilde{P}) = \{G_{\nu, \xi^\alpha}\}_{\alpha=1, \dots, k},$$

zatem zgodnie z poprzednimi rozważaniami (strony 170-173) charakterystyki Cartana dla układu (14.39) można zdefiniować następująco

$$\mathfrak{I}_1(\tilde{P}) = \max_{e \in T_X E} \text{rzęd}(G_{\nu, \xi} e^\nu) \tilde{P},$$

gdzie

$$G_{\nu, \xi} = \begin{pmatrix} G_{\nu, \xi^1}^1, G_{\nu, \xi^2}^1, \dots, G_{\nu, \xi^k}^1 \\ \dots \\ G_{\nu, \xi^1}^l, G_{\nu, \xi^2}^l, \dots, G_{\nu, \xi^k}^l \end{pmatrix}$$

jest "macierzą G" w bazie związanej z układami współrzędnych na H i E .

Jeśli maksymalny rząd jest uzyskiwany na wektorze e_1 , wówczas znajdujemy \mathfrak{I}_2 obliczając

$$\mathfrak{I}_1(\tilde{P}) + \mathfrak{I}_2(\tilde{P}) = \max_{e \in T_X E} \text{rzęd} \begin{pmatrix} G_{\nu, \xi} e_1^\nu \\ G_{\nu, \xi} e^\nu \end{pmatrix} \tilde{P}$$

i ogólnie, mając $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_{i-1}$ i odpowiednie wektory e_1, e_2, \dots, e_{i-1} znajdujemy

$$\mathfrak{I}_1(\tilde{P}) + \dots + \mathfrak{I}_i(\tilde{P}) = \max_{e \in T_X E} \text{rzęd} \begin{pmatrix} G_{\nu, \xi} e_1^\nu \\ \dots \\ G_{\nu, \xi} e_{i-1}^\nu \\ G_{\nu, \xi} e^\nu \end{pmatrix} \tilde{P}$$

15. Kryteria formalnej całkowalności dla układów hiperbolicznych nadokreślonych.

W ogólnym przypadku sprawdzenie czy układ jest w inwolucji nie jest łatwe. Podamy jednakże pewne kryteria dla układów hiperbolicznych nadokreślonych.

DEFINICJA 15.1 Układ równań

$$\langle A(u), du \rangle = b(u)$$

będziemy nazywać układem typu Q_1 (hiperbolicznym w uogólnionym sensie (Peradzyński 1972A)), jeśli jego wiązka elementów całkowych jednorodnych (tzn. $b \equiv 0$) jest generowana przez elementy proste

$$du = \sum_{s=1}^k \xi^s \delta_s^s(u) \otimes \lambda^s(u).$$

Niech $u_0 \in H$ będzie ustalonym punktem, w otoczeniu którego będziemy prowadzić nasze rozważania oraz niech e^1, e^2, \dots, e^n - baza w przestrzeni E . Baza ta generuje filtrację $\{A_i\}$, $i = 0, 1, \dots, n$ przestrzeni A , którą w tym przypadku będzie włókno wiązki elementów całkowych nad punktem u_0

$$A = \{ \delta_1^1(u_0) \otimes \lambda^1(u_0), \dots, \delta_k^k(u_0) \otimes \lambda^k(u_0) \}.$$

Załóżmy, że baza e^1, e^2, \dots, e^n została wybrana w taki sposób, że

- 1° każda z podprzestrzeni $A_i = A \cap (\text{HoLin}\{e^{i+1}, \dots, e^n\})$, $i = 0, 1, \dots, n$ jest hiperboliczna tzn. jest generowana przez elementy proste tzn. A_i jest typu Q_1 ;
- (15.1) 2° można wybrać takie generatory $\delta_{s_1}^1 \lambda^1, \dots, \delta_{s_1}^{s_1} \lambda^{s_1}$ w podprzestrzeni A_i , aby $\lambda_{\nu}^s \neq 0$ dla $\nu = i+1, \dots, n$.

Wówczas mamy twierdzenie

TWIERDZENIE 15.1 Jeśli spełnione są założenia 1^0 , 2^0 z (15.1), wówczas baza e^1, e^2, \dots, e^n jest quasi-regularna tzn. odwzorowania

$$\delta_{i+1} : p(A_i) \longrightarrow A_i$$

są surjektywne.

Zauważmy, że jeśli $\delta \otimes \lambda \in A_i$, wówczas $\delta \otimes \lambda \otimes \lambda \in p(A_i)$, jako że $\delta \otimes \lambda \otimes \lambda \in (A \otimes E^*) \cap (H \otimes S^2 E^*)$. Jeśli ponadto $\lambda_{i+1} \neq 0$, wówczas

$$p(A_i) \ni \delta \otimes \lambda \otimes \lambda \xrightarrow{\delta_{i+1}} \lambda_{i+1} \otimes \delta \otimes \lambda \in A_i.$$

Jeżeli zatem $\gamma_1 \otimes \lambda^1, \dots, \delta_{s_i} \otimes \lambda^{s_i}$ są generatorami A_i wymienionymi w punkcie 2^0 , wtedy

$$M_i := \text{Lin} \{ \gamma_1 \otimes \lambda^1 \otimes \lambda^1, \dots, \delta_{s_i} \otimes \lambda^{s_i} \otimes \lambda^{s_i} \} \subset p(A_i).$$

Co więcej, zachodzi

$$\delta_{i+1}(M_i) = A_i,$$

a zatem $\delta_{i+1}(p(A_i)) = A_i$ co dowodzi, że odwzorowanie δ_{i+1} jest surjektywne.

Przy założeniach (15.1) istnieje ciekawa zależność pomiędzy wymiarami przestrzeni A_i , $A_i(E)$, A_{i+1} , gdzie

$$A_i(E) = \{ Lx; L \in A_i, x \in E \}.$$

Mamy mianowicie

STWIERDZENIE 15.1 Jeśli baza e^1, e^2, \dots, e^n spełnia założenia twierdzenia 15.1, wówczas

$$\dim A_{i+1} = \dim A_i - \dim A_i(E).$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że jeśli $\gamma_1 \otimes \lambda^1, \dots, \delta_{s_i} \otimes \lambda^{s_i}$ są generatorami w A_i , to przestrzeń A_i otrzymujemy biorąc kom-

binacje liniowe $\xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^{s_i} \delta_{s_i} \otimes \lambda^{s_i}$ takie, że ξ^1, \dots, ξ^{s_i} spełniają

$$\xi^1 \delta_1 \otimes \lambda_{i+1}^1 + \dots + \xi^{s_i} \delta_{s_i} \otimes \lambda_{i+1}^{s_i} = 0.$$

Niezależnych równań jest tu tyle, ile wynosi $\dim \{ \delta_1, \dots, \delta_{s_i} \}$, co dowodzi stwierdzenia.

Badanie inwolucyjności układu wymaga jeszcze pokazania, że układ przedłużony jest (algebraicznie) niesprzeczny. Korzystając z powyższych rozważań pokażemy, że układy

$$(15.2) \quad du = \xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^k \delta_k \otimes \lambda^k$$

zawierające niezależne mody z niezależnymi $\delta_1, \dots, \delta_k$ są w inwolucji, jeśli tylko spełnione są warunki algebraicznej niesprzeczności układu dla każdego ξ, u, x . Istotnie, możemy wybrać bazę e_1, \dots, e_n tak, by w tej bazie $\lambda_\nu^r \neq 0$, $r = 1, \dots, k$, $\nu = 1, \dots, n$. Mamy wówczas

$$A_0 = \{ \xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^k \delta_k \otimes \lambda^k \},$$

$$A_1 = \{ 0 \},$$

.....

$$A_n = \{ 0 \},$$

a zatem założenia twierdzenia 15.1 są spełnione. To oznacza, że $\delta_{i+1}: p(A_i) \rightarrow A_i$ są surjektywne. Układ (15.2) jest więc w inwolucji, jeśli tylko spełnione są warunki algebraicznej niesprzeczności (3.6). Obliczając charakterzy Cartana mamy w tym przypadku

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots, \quad \lambda_n = 0,$$

co oznacza, że ogólne rozwiązanie zależy od k dowolnych funkcji jednej zmiennej.

Rozpatrzmy teraz inny przykład

$$(15.3) \quad du = \delta_1 \otimes (\xi_1^1 \lambda_1^1 + \dots + \xi_{r_1}^1 \lambda_{r_1}^1) + \dots \\ \dots + \delta_k \otimes (\xi_1^k \lambda_1^k + \dots + \xi_{r_k}^k \lambda_{r_k}^k),$$

gdzie $\delta_1, \dots, \delta_k$ są niezależne. Wybieramy tak jak poprzednio bazę e_1, \dots, e_n tak, by $\lambda_{\nu}^i \neq 0$ dla każdego ν, i, s . Wówczas filtracja $\{A_i\}$ ma postać następującą

$$A_0 = \left\{ \sum_{i=1}^k \delta_i \otimes (\xi_1^i \lambda_1^i + \dots + \xi_{r_i}^i \lambda_{r_i}^i) \right\}, \quad \xi_s^i \in \mathbb{R}, \\ A_1 = \left\{ \sum_{i=1}^k \delta_i \otimes (\xi_1^i \lambda_1^i + \dots + \xi_{r_i}^i \lambda_{r_i}^i) \mid \xi_1^i \lambda_1^i + \dots + \xi_{r_i}^i \lambda_{r_i}^i = 0 \right\},$$

a więc mamy tu po jednym związku dla każdej grupy zmiennych ξ^i .

Ogólnie

$$(15.4) \quad A_s = \left\{ \sum_{i=1}^k \delta_i \otimes (\xi_1^i \lambda_1^i + \dots + \xi_{r_i}^i \lambda_{r_i}^i), \quad \text{gdzie } \xi \text{ speł-} \right. \\ \left. \text{niają } \xi_1^i \lambda_{1\nu}^i + \dots + \xi_{r_i}^i \lambda_{r_i\nu}^i = 0 \text{ dla } \nu = 1, \dots, s \right\},$$

a więc mamy tu po s związków dla każdej grupy zmiennych ξ^i .

Niemniej jednak każda z przestrzeni A_s jest generowana przez elementy charakterystyczne, a zatem tu również zachodzi teza twierdzenia 15.1. Podobnie jak poprzednio układ jest w inwolucji, jeśli spełnione są warunki algebraicznej niesprzeczności (Pera-dzyński 1971B)

$$(15.5) \quad [\delta_i, \delta_j] \in \text{Lin}_{\mathbb{Q}}\{\delta_i, \delta_j\}, \quad i, j = 1, \dots, k, \\ \lambda_{s, \delta_j}^i \in \text{Lin}_{\mathbb{Q}}\{\lambda_{r_1}^i, \dots, \lambda_{r_i}^i, \lambda_q^j\} \text{ dla } i \neq j, s = 1, \dots, r_i, \\ q = 1, \dots, r_j.$$

Warunki te, podobnie jak warunki dla poprzedniego układu, dosta-
je się łatwo przez różniczkowanie zewnętrzne układu (15.3)

$$\sum \delta_\alpha^\alpha \otimes (d\xi \wedge \lambda^\alpha + \xi^\alpha \cdot d\lambda^\alpha) + \frac{1}{2} \sum [\delta_\alpha, \delta_\beta] \otimes \xi^\alpha \cdot \lambda^\alpha \wedge \xi^\beta \cdot \lambda^\beta = 0,$$

gdzie tym razem $d\xi^\alpha \wedge \lambda^\alpha$ oznacza sumę $\sum_{s=1}^{r_\alpha} d\xi_s^\alpha \wedge \lambda_s^\alpha$, podobnie $\xi^\alpha \cdot \lambda^\alpha = \sum_{s=1}^{r_\alpha} \xi_s^\alpha \cdot \lambda_s^\alpha$.

Argumenty identyczne jak w rozdziale 6 (żądanie, aby nie było więzów pomiędzy u, ξ) prowadzą do wniosku, że $[\delta_\alpha, \delta_\beta] \in \text{Lin} \{ \delta_1, \dots, \delta_k \}$, a zatem $[\delta_\alpha, \delta_\beta] = \sum_{\sigma} \tau_{\alpha\beta}^\sigma \delta_\sigma$. Korzystając z powyższego rozkładu komutatorów i liniowej niezależności wektorów δ (w każdym punkcie) dostajemy

$$d\xi^i \wedge \lambda^i + \xi^i \cdot d\lambda^i + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \tau_{\alpha\beta}^i \xi^\alpha \cdot \lambda^\alpha \wedge \xi^\beta \cdot \lambda^\beta = 0.$$

Mnożąc teraz ostatnie równanie zewnątrznie przez $\Lambda^i = \lambda^i \wedge \lambda^i \wedge \dots \wedge \lambda^i$ dostajemy (pamiętając, że $d\lambda^i = \sum_{\alpha} \xi^\alpha \cdot \lambda^\alpha \wedge \lambda^i$)

$$\xi^i \cdot d\lambda^i \wedge \Lambda^i + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \tau_{\alpha\beta}^i \xi^\alpha \cdot \lambda^\alpha \wedge \xi^\beta \cdot \lambda^\beta \wedge \Lambda^i = 0,$$

skąd z niezależności ξ^i wynikają warunki (14.24). Korzystając z lematu Cartana pokazuje się algebraiczną niesprzeczność układu.

Obliczmy jeszcze charaktery Cartana układu (15.3). W przypadku pojedynczej fali o numerze α

$$du = \delta_\alpha^\alpha \otimes \left(\xi_1^\alpha \lambda_1^\alpha + \dots + \xi_{r_\alpha}^\alpha \lambda_{r_\alpha}^\alpha \right)$$

charakterami Cartana są

$$\gamma_1^{(\alpha)} = 1, \quad \gamma_2^{(\alpha)} = 1, \dots, \quad \gamma_{r_1}^{(\alpha)} = 1, \quad \gamma_{r_1+1}^{(\alpha)} = 0, \dots, \quad \gamma_n^{(\alpha)} = 0.$$

Dla zaznaczenia, że γ_i odnoszą się do α -tej fali użyliśmy indeksu (α) . Łatwo teraz zauważyć, że charaktery γ_i układu (15.3) wyrażają się przez sumę charakterów

$$\gamma_i = \sum_{\alpha} \gamma_i^{(\alpha)}.$$

Dowody inwolutywności używające kryterium

$$\dim p(A) = \lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n$$

można znaleźć w pracach autora (1971A, 1971B). Omówiona jest tam również interpretacja rozwiązań układów typu (15.3) jako rozwiązań opisujących oddziaływanie niepłaskich (z większą swobodą profilu) fal Riemanna. W pracy Zajączkowskiego (1975) podano explicite szereg rozwiązań tego typu dla układu równań magnetogazodynamiki.

Uogólnienie na przypadek równań niejednorodnych tzn. układów typu

$$(15.6) \quad du = \xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^k \delta_k \otimes \lambda^k + L,$$

z dowolną ilością modów, gdzie $L = (L^j_\nu(u) dx^\nu)$, nie przedstawia w zasadzie żadnej trudności formalnej. Przestrzenie A_i są związane z częścią jednorodną $\xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^k \delta_k \otimes \lambda^k$ i oczywiście są takie same jak poprzednio, a element niejednorodny L ma jedynie wpływ na warunki algebraicznej niesprzeczności. Różniczkowanie zewnętrzne równania (15.6) modulo to równanie daje

$$(15.7) \quad \sum \delta_s \otimes (d\xi^s \wedge \lambda^s + \xi^s \sum^r \xi^r \lambda^r \wedge \lambda^s_{,r}) + \frac{1}{2} \sum \xi^\alpha \xi^\beta [\delta_\alpha, \delta_\beta] \otimes \lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta + \sum \xi^s [L, \delta_s \lambda^s] + [L, L] = 0.$$

Ze względu na dowolność ξ^α , $\alpha = 1, \dots, k$ warunek istnienia rozwiązań (algebraicznych) na $d\xi$ (tzn. warunek algebraicznej niesprzeczności układu przedłużonego) można rozbić na szereg niezależnych warunków wybierając kolejno:

$$1^0 \text{ wszystkie } \xi^i = 0, \quad i = 1, \dots, k;$$

$$2^0 \xi^i = 0 \text{ dla } i \neq r \text{ za wyjątkiem } \xi^r. \text{ Połóżmy } \xi^r = 1;$$

$$3^0 \xi^i = 0 \text{ dla } i \neq r, s. \text{ Weźmy tu także } \xi^r = \xi^s = 1.$$

Wówczas należy żądać, aby istniało choć jedno rozwiązanie na $\eta = (\eta^\alpha dx^\nu)$ dla każdego z równań algebraicznych

$$(15.8) \left\{ \begin{array}{l} 1^\circ \sum_{\alpha=1}^k \delta_\alpha \otimes (\eta^\alpha \wedge \lambda^\alpha) + [L, L] = 0, \\ 2^\circ \text{ dla każdego } r = 1, \dots, k \text{ równanie} \\ \quad \sum_{\alpha=1}^k \delta_\alpha \otimes (\eta^\alpha \wedge \lambda^\alpha) + [L, \delta_r \otimes \lambda^r] = 0 \\ \text{powinno mieć rozwiązania na } \eta, \\ 3^\circ \text{ dla każdej wybranej pary } r, s \text{ równanie} \\ \quad \sum_{\alpha=1}^k \delta_\alpha \otimes (\eta^\alpha \wedge \lambda^\alpha) + \delta_s \otimes (\lambda^r \wedge \lambda^s)_{\delta_r} + \delta_r \otimes (\lambda^s \wedge \lambda^r)_{\delta_s} + \\ \quad + [\delta_s, \delta_r] \otimes \lambda^s \wedge \lambda^r = 0 \\ \text{powinno mieć rozwiązanie na } \eta. \end{array} \right.$$

Uwaga! Nie żądamy tu, aby rozwiązania były wspólne dla wszystkich równań, tzn. aby rozwiązanie jednego spełniało pozostałe.

Istotnie, jeśli oznaczyć rozwiązanie równania 1° przez η_0^α , 2° przez η_s^α , oraz 3° przez η_{rs}^α , wówczas wyrażenia

$$d\xi^\alpha = \eta_0^\alpha + \sum_s \xi^s \eta_s^\alpha + \frac{1}{2} \sum_{r,s} \xi^s \xi^r \eta_{rs}^\alpha$$

spełniają równanie (15.7).

Warunki (15.8) są ogólne i nie zakładaliśmy tam niezależności wektorów δ ani λ . Nawiasy $[L, L]$ oraz $[L, \delta \otimes \lambda]$ mają znaczenie podane wzorem (14.43). W pracy autora (1972A) rozważane były warunki całkowalności układów (15.6) przy założeniu, że L jest tensorem prostym $L = \delta_0 \otimes \lambda^0$ oraz przy założeniu niezależności wektorów $\delta_1, \dots, \delta_k$. Następnie A.M.Grundland (1978) badał bardziej szczegółowo rozwiązania układów typu

$$du = \xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^k \delta_k \otimes \lambda^k + \delta_0 \otimes \lambda^0,$$

co można, korzystając z antysymetrii iloczynu $\lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta$, przekształcić do postaci

$$(15.9) \quad \sum_{\alpha, \beta} \xi^\alpha \xi^\beta (\delta_\alpha \wedge \delta_\beta) \otimes (\lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta) = 0.$$

Równania (15.9) są więc równaniami stożka elementów charakterystycznych $\gamma \otimes \lambda$ w bazie $\delta_1 \lambda^1, \dots, \delta_k \lambda^k$. Uwaga: w ogólności równania (15.9) nie są niezależne. W gruncie rzeczy wystarczy, aby dla pewnego wskaźnika j zachodziło

$$1^\circ \quad \sum_{\alpha} \xi^\alpha \delta_\alpha^j \lambda^\alpha \neq 0$$

oraz

$$2^\circ \quad \sum_{\alpha, \beta} \xi^\alpha \xi^\beta \delta_\alpha^j \delta_\beta^j \otimes (\lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta) = 0,$$

co daje $\binom{n}{2} \cdot 1$ niezależnych warunków.

Na podstawie warunków (15.9) można zauważyć ciekawą własność, że w bazie $\delta_1 \otimes \lambda^1, \dots, \delta_k \otimes \lambda^k$ równanie stożka charakterystycznego nie zależy od punktu $u \in H$.

STWIERDZENIE 14.2 Jeśli w jakimś punkcie $u_0 \in H$, (ξ^1, \dots, ξ^k) są współrzędnymi elementu charakterystycznego, tzn. jeśli ξ^1, \dots, ξ^k spełniają równania (15.9) w punkcie u_0 , wówczas w każdym innym punkcie $u \in H$ te same liczby ξ^1, \dots, ξ^k są również współrzędnymi pewnego elementu charakterystycznego.

Istotnie, jeśli

$$\mathbb{R}^1 \supset [-a, a] \ni s \longmapsto u(s) \in H$$

jakakolwiek krzywa różniczkowalna taka, że $u(0) = u_0$, wówczas różniczkując związki (15.9) i korzystając z antysymetrii iloczynu zewnętrznego dostajemy

$$(15.10) \quad 2 \sum_{\alpha, \beta} \dot{\xi}^\alpha \xi^\beta (\delta_\alpha \wedge \delta_\beta) \otimes (\lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta) = 0, \quad \left(\dot{\xi} = \frac{d}{ds} \xi \right),$$

ponieważ inne wyrazy się znoszą. Wobec tego $\dot{\xi}^\alpha = \dot{\xi}_0^\alpha = \text{const}^\alpha$

spełniają równania (15.10), co oznacza również, że ξ_0^α spełniają równania (15.9) wzdłuż całej krzywej, jeśli spełniają je w jednym punkcie np. u_0 . Z dowolności krzywej wynika stwierdzenie.

DEFINICJA 15.2 Element charakterystyczny $\gamma \otimes \lambda = \sum \xi^\alpha \delta_\alpha^\gamma \lambda^\alpha$ będziemy nazywali elementem izolowanym, jeśli równanie "deformacji"

$$\sum_{\alpha, \beta} \delta \xi^\beta \xi^\alpha (\delta_\alpha^\beta \wedge \delta_\beta^\alpha) \otimes (\lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta) = 0$$

ma jedynie rozwiązania na $\delta \xi$ proporcjonalne do ξ , tzn. $(\delta \xi) \sim \xi^\alpha$. Oznacza to, że jedyne dopuszczalne deformacje elementu charakterystycznego polegają na jego wydłużeniu.

Powstaje tu szereg pytań, a więc np:

- 1/ Czy układ w inwolucji zawierający jedynie mody izolowane może zawierać rozwiązania inne niż te, które mogą być interpretowane jako rezultaty nieliniowych oddziaływań fal Riemanna?
- 2/ Jak sformułować problem "oddziaływania" np. elastycznego k fal Riemanna w przypadku, gdy wektory polaryzacji są liniowo zależne (np. gdy $k > \dim H$).

Aby oświetlić nieco ostatnie zagadnienie rozpatrzmy układ ze stałymi wektorami $\gamma = \lambda$:

$$(15.11) \quad du = \sum_{\alpha=1}^k \xi^\alpha \delta_\alpha^\alpha \otimes \lambda^\alpha.$$

Po zróżniczkowaniu zewnętrznym

$$(15.12) \quad \sum_{\alpha} \delta_\alpha^\alpha d \xi^\alpha \wedge \lambda^\alpha = 0.$$

Oczywiście układ ma rozwiązania będące superpozycjami fal Riemanna

$$u = \sum_{\alpha} \delta_\alpha^\alpha R^\alpha + u_0, \quad R^\alpha = \psi^\alpha(\lambda^\alpha \cdot x),$$

gdzie ψ^α - dowolne różniczkowalne funkcje jednego argumentu, ale jeśli k jest dostatecznie duże, wówczas układ (15.11) może

mieć inne rozwiązania. Pomimo posiadania rozwiązań z

$\xi^1 \cdot \xi^2 \cdot \dots \cdot \xi^k \neq 0$ układ (15.11) nie jest w ogólności układem w inwolucji.

Przykład 1.

Weźmy $k = 4$, $\dim H = 3$ i załóżmy, że każda trójka wektorów δ_k jest liniowo niezależna, podobnie jak każda trójka kowektorów λ^k . Mamy wówczas

$$(15.13) \quad du = \xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^4 \delta_4 \otimes \lambda^4,$$

$$s_1 = \max_{e \in E} \text{rzęd} (\delta_1 \langle \lambda^1, e \rangle, \delta_2 \langle \lambda^2, e \rangle, \delta_3 \langle \lambda^3, e \rangle, \delta_4 \langle \lambda^4, e \rangle) = 3,$$

$$\text{stad } s_2 = 4 - 3 = 1.$$

Łatwo jednak sprawdzić, że jedynymi rozwiązaniami na dξ równań

$$(15.14) \quad \sum_{\alpha} \delta_{\alpha} \otimes d\xi^{\alpha} \wedge \lambda^{\alpha} = 0$$

są $d\xi^{\alpha} = z^{\alpha} \lambda^{\alpha}$, z^{α} - dowolne, co oznacza, że $\dim p(A) = 4$. Ale

$$4 = \dim p(A) \neq s_1 + 2s_2 + \dots = 3 + 2 \cdot 1 + \dots,$$

a więc układ nie jest w inwolucji!

Aby z układu (15.11) wydzielić tylko te rozwiązania, które są superpozycjami fal można do układu (15.11) dołożyć dodatkowe więzy

$$(15.15) \quad d\xi^{\alpha} = z^{\alpha} \lambda^{\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, k$$

spełniające automatycznie równania (15.12) i zapewniające inwolucyjność układu

$$(15.16) \quad \begin{cases} du = \sum \xi^{\alpha} \delta_{\alpha} \otimes \lambda^{\alpha}, \\ d\xi^{\alpha} = z^{\alpha} \lambda^{\alpha}. \end{cases}$$

Istotnie, teraz

$$s_1 = \max_{e \in E} \text{rząd} \left(\begin{array}{c} \langle \lambda^1, e \rangle, \\ \langle \lambda^2, e \rangle, \\ \vdots \\ \langle \lambda^k, e \rangle \end{array} \right) = k,$$

$$s_2 = s_3 = \dots = s_n = 0,$$

oraz $\dim p(A) = k$. Różniczkowanie układu (15.16) daje

$$dz^\alpha \wedge \lambda^\alpha = 0 \implies dz^\alpha = p^\alpha \lambda^\alpha.$$

Pozostałe równania są automatycznie spełnione, a więc układ

(15.16) nie jest sprzeczny, co łącznie z równością $\dim p(A) = s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n$ oznacza involutywność.

Przykład 2.

Weźmy podobnie jak w przykładzie 1 stałe δ, λ

$$(15.17) \quad du = \xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^5 \delta_5 \otimes \lambda^5,$$

gdzie każda trójka wektorów δ , podobnie jak każda trójka kowektorów λ jest liniowo niezależna. Niech $\dim H = 3$. Wówczas charaktery dla (15.17) będą $s_1 = 3, s_2 = 2$. Wybierając $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ jako bazę w TH można równania

$$\sum_{\alpha=1}^5 \delta_\alpha \otimes d\xi^\alpha \wedge \lambda^\alpha = 0$$

zapisać następująco

$$(15.18) \quad d\xi^i \wedge \lambda^i + a_4^i d\xi^4 \wedge \lambda^4 + a_5^i d\xi^5 \wedge \lambda^5 = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdzie a_4^i, a_5^i są współczynnikami rozkładu δ_4, δ_5 względem pozostałych wektorów

$$\delta_4 = \sum_{i=1}^3 a_4^i \delta_i, \quad \delta_5 = \sum_{i=1}^3 a_5^i \delta_i.$$

Na mocy lematu Cartana rozwiązania na $d\xi$ równań (15.18) mają postać

$$(15.19) \quad \begin{pmatrix} d\xi^i \\ d\xi^4 \\ d\xi^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^i & \alpha^i & \beta^i \\ \alpha^i & z_4^i & \sigma^i \\ \beta^i & \sigma^i & z_5^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^i \\ a_4^i \lambda^4 \\ a_5^i \lambda^5 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3,$$

z dowolnymi z, α, β, σ . Mamy więc w ten sposób $6 \times 3 = 18$ parametrów. Z drugiej jednakże strony rozwiązania na $d\xi^4$ oraz $d\xi^5$ otrzymywane dla różnych $i (= 1, 2, 3)$ powinny być takie same, co daje związki

$$(15.20) \quad \alpha^i \lambda^i - \alpha^j \lambda^j + (z_4^i a_4^i - z_4^j a_4^j) \lambda^4 + (\sigma^i a_5^i - \sigma^j a_5^j) \lambda^5 = 0,$$

$$\beta^i \lambda^i - \beta^j \lambda^j + (\sigma^i a_4^i - \sigma^j a_4^j) \lambda^4 + (z_5^i a_5^i - z_5^j a_5^j) \lambda^5 = 0,$$

$$(i, j = 1, 2, 3),$$

które, jak można się przekonać, stanowią w ogólności 12 niezależnych równań (można je otrzymać kładąc np. w (15.20) $j=1, i=2, 3$) wiążących 18 zmiennych z, α, β, σ . W ogólności zatem

$$\dim p(A) = 6.$$

W typowym zatem przypadku układ (15.17) nie jest w involucji, bo

$$6 = \dim p(A) \neq s_1 + 2s_2 + \dots + ns_n = 3 + 4 = 7.$$

Jednakże, jeśli pomiędzy kierunkami γ i λ istnieje liniowa zależność, tzn. długości γ_s, λ^s mogą być tak wybrane, że istnieje przekształcenie P (stałe), że

$$\lambda^s = P \gamma_s,$$

wówczas równania (14.63) stają się liniowo zależne i mamy jedynie 11 niezależnych równań, skąd w tym przypadku $\dim p(A) = 7$

i układ (15.17) jest w involucji. Mamy zatem

STWIERDZENIE 14.3 Przy wymienionych powyżej założeniach co do niezależności wektorów δ i kowektorów λ warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby układ (15.17) niezależny od u był w inwolucji jest, by można było tak wybrać długości $\delta_\alpha, \lambda^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, 5$, aby

$$\lambda^s = P \delta_s, \quad s = 1, \dots, 5.$$

Rozważania te pozostają w mocy dla przypadku ogólnego układu (15.17) kiedy δ, λ zależą od u . Wówczas P może również zależeć od u . Jednakże warunek algebraicznej niesprzeczności w tym przypadku prowadzi (zgodnie z wynikami rozdziału 11) do żądania znikania tensora torsji koneksji ∇ generowanej przez P i zdefiniowanej w rozdziale 11.

Na podstawie tych pobieżnych rozważań można sądzić, że jeśli istnieją rozwiązania opisujące oddziaływanie k wybranych fal Riemanna, związanych z modami $\delta_1 \otimes \lambda^1, \dots, \delta_k \otimes \lambda^k$. Wówczas są one rozwiązaniami następującego układu

$$(15.21) \quad \begin{aligned} du &= \xi^1 \delta_1 \otimes \lambda^1 + \dots + \xi^k \delta_k \otimes \lambda^k, \\ d\xi^\alpha &= z^\alpha \lambda^\alpha + \eta^\alpha(u, \xi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Tak było w rozważanych przypadkach (rozdziały 3, 5) z niezależnymi $\delta_1, \dots, \delta_k$.

Warunki niesprzeczności powstające przez różniczkowanie zewnętrzne równań (15.21)

$$(15.22) \quad \sum_\alpha \delta_\alpha \otimes (d\xi^\alpha \wedge \lambda^\alpha + \xi^\alpha d\lambda^\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \xi^\alpha \xi^\beta [\delta_\alpha, \delta_\beta] \otimes \lambda^\alpha \wedge \lambda^\beta = 0,$$

$$(15.23) \quad dz^\alpha \wedge \lambda^\alpha + z^\alpha d\lambda^\alpha + d\eta^\alpha = 0$$

nakładają pewne ograniczenia na formy $\eta^\alpha = (\eta^\alpha_\nu dx^\nu)$. Mianowicie:

1° podstawienie $d\xi^\alpha = \Pi^\alpha$ powinno spełniać tożsamościowo po u i ξ równania (15.22);

2° mnożąc (15.23) zewnątrz przez $\hat{\lambda}^\alpha$ otrzymuje się następujące warunki, które powinny być spełnione tożsamościowo po z, ξ, u

$$(15.24) \quad z^\alpha \hat{\lambda}^\alpha \wedge d\hat{\lambda}^\alpha + \hat{\lambda}^\alpha \wedge d\Pi^\alpha = 0.$$

Związki (15.24) należy rozumieć modulo równania (15.21).

STWIERDZENIE 14.4 Przy spełnieniu warunków 1° i 2° układ (15.21) jest układem w involucji, a jego charakterystyki Cartana są

$$s_1 = k, \quad s_2 = s_3 = \dots = s_n = 0,$$

co pozwala stwierdzić, że (przynajmniej w przypadku układu analitycznego) ogólne rozwiązanie zależy od k funkcji dowolnych (ew. analitycznych) jednej zmiennej.

Uwaga, podobnie jak poprzednio rozpatrywane w tym rozdziale mody mogą być zespolone i rozważania pozostają w mocy za wyjątkiem interpretacji "fizycznej" w tych momentach, kiedy była mowa o falach Riemanna.

Literatura

- H.B.Boettger - Global existence and asymptotic behaviour of solutions of hyperbolic systems of partial differential equations, Bull.Acad.Polon.Sci.,sér.sci.techn.,26, (521.[1027]), 1978.
- Asymptotyka zagadnienia Cauchy'ego dla nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych i zastosowanie w dynamice gazów, Rozprawa doktorska IPPT PAN, Warszawa 1979.
- B.Bojarski - Teoria obobščennogo analitičeskogo vektora, Ann. Pol.Math.,XVII, (281-320), 1966.
- M.Burnat - The method of solution of hyperbolic systems by means of combining simple waves, Fluid Dyn.Trans., 3, 1967.
- Hyperbolic double waves, Bull.Acad.Polon.Sci.,sér. sci.techn., (1 [876]), 1968.
- Riemann invariants, Fluid Dyn.Trans.,4, 1969.
- The method of Riemann invariants for multi-dimensional nonelliptic system, Bull.Acad.Polon.Sci., sér.sci.techn.,17, (97 [1019]), 1969.
- Geometrical properties of hyperbolic systems and applications in the theory of perfectly plastic flows, AMS,5,21, 1969.
- Metod charakteristik i invarianty Rimana dla mnogomiernych giperboličeskich sistem, Sib.Mat.Zhur., 2,11, 1970.
- The method of Riemann invariants and its applications to the theory of plasticity, AMS, part I,6, 23, 1971, part II,1,24, 1972.
- Regular simple wave interactions, AMS,1,27, 1975.
- E.Cartan - Les systèmes différentielles extérieures et leurs applications scientifiques, Hermann, 1946.
- B.Chen - Geometry of Submanifolds, M.Dekker Inc. New York, 1973.
- R.Courant, K.O.Friedrichs - Supersonic flow and shock waves, Interscience Publ., New York, 1948.

- W.Fiszdon, Z.Peradzyński - Some geometric properties of a system of first-order non-linear partial differential equations, Trends in Applications of Pure Mathematics to Mechanics, ed.G.Fichera, Pitman Publish., London, San Francisco, Melbourne, 1976.
- F.D.Gachov - Kraaievye zadači, F.M. Moskwa, 1963.
- J.H.Giese - Compressible flows with degenerate hodographs, Quart.Appl.Math., 2, 1951.
- H.Goldschmidt - Existence theorems for analytic linear partial differential equations, Ann. of Math., 86, 1962.
- Prolongations of linear partial differential eqs., I.A conjecture of E.Cartan, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup. 4^o sér., t.1, 1968.
- II. Inhomogeneous equations, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup. 4^o sér., t.1, 1968.
- Integrability criteria for systems of non-linear partial differential eqs, J.Diff.Geo., 1, 1969.
- Sur la structure des equations de Lie:
- I. Le troisième théoreme fondamental, J.Diff.Geo., 6, 1972.
- II. Equations formellement transitives, J.Diff. Geo., 7, 1972.
- S.Gołąb - Rachunek tensorowy, PWN Warszawa, 1966.
- A.M.Grundland* - Wybrane metody konstrukcji rozwiązań układów równań różniczkowych cząstkowych opisujących propagację i nieliniowe oddziaływanie fal, Rozprawa doktorska, UW 1978.
- O nieliniowych oddziaływaniach fal prostych opisanych przez niejednorodne układy r.r.c., Zagadnienia początkowo-brzegowe dla ośrodków dyssypatywnych, Ossolineum 1979.
- M.Janet - Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Cahier scientifiques, fax.IV, Gauthiers-Villars, Paris 1929.
- N.N.Janienko - O invariantnykh differencialnykh svyaziakh dla giperboličeskikh sistem kvaziliniinykh uravnenii, Izv.V.U.Z., Matematika, no 3(22), 1961.

* Patrz również uzupełnienie literatury 1.
<http://rcin.org.pl>

- N.W.Jamienko, B.L.Roźdiestwienski - *Sistemy kvazilinielnykh uravnenii*, Nauka, Moskwa 1978.
- A.Jeffrey - *Quasilinear hyperbolic systems and wave propagation*, Pitman Pub., 1976.
- F.John - *Formation of singularities in one-dimensional nonlinear wave propagation*, *Comm.Pure Appl.Math.*, 27, (377-405), 1974.
- *Delayed singularity formation in solutions of nonlinear wave equations in higher dimension*, *Comm. Pure Appl.Math.*, 29, (649-682), 1976.
- T.Kato - *Cauchy problem for quasilinear symmetric hyperbolic systems*, *ARMA*, 58, 1975.
- J.Kiszyński, A.Pelczar - *Dissertationes Mathematicae LXXVI*, Warszawa 1970.
- N.E.Kočin, I.A.Kibel, N.V.Roze - *Teoretičeskaja gidromechanika*, F.M., Moskwa 1963.
- J.S.Koszul - *Lectures on fibre bundles and differential geometry*, Tata Inst.of Fundamental Res., Bombay, 1960.
- P.Kucharczyk, Z.Peradzyński, E.Zawistowska - *Unsteady multidimensional isentropic flows described by linear Riemann invariants*, *AMS*, 2, 25, 1973.
- M.Kuranishi - *Lecture on involutive systems of partial differential equations*, Sao Paulo, 1967.
- R.Mises - *Mathematical theory of compressible fluid flow*, Academic Press, New York, 1958.
- A.Mostowski, M.Stark - *Algebra wyższa, cz.3*, PWN Warszawa, 1067.
- Z.Peradzyński - *Nonlinear plane k-waves and Riemann invariants*, *Bull.Acad.Polon.Sci., sér.sci.techn.*, 19, (59 [625]), 1971A.
- *Riemann invariants for nonplanar k-waves*, *Bull. Acad.Polon.Sci., sér.sci.techn.*, 19, (67 [717]), 1971B.
- *Inwarianty Riemanna w nieliniowym oddziaływaniu fal. Zastosowanie w gazodynamice*, Rozprawa doktorska, IPPT PAN, Warszawa, 1972A.
- *On certain classes of exact solutions for gas dynamics equations*, *AMS*, 2, 24, 1972B.
- *On algebraic aspects of the generalized Riemann invariants method*, *Bull.Acad.Polon.Sci., sér.sci.techn.*, <http://wcin.org.pl>

- Z. Peradzyński - Nonlinear interactions described by partial differential equations, Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. techn., 22, 1974.
- Hyperbolic flows in ideal plasticity, AMS, 1, 27, 1975.
- Asymptotic decay of solutions of hyperbolic systems into simple waves, Bull. Acad. Polon. Sci., sér. sci. techn., 24, (513 [1019]), 1978.
- Some problems of double waves in gas dynamics, (X), (w przygotowaniu).
- Z. Peradzyński, H. Brettel - Wave-wave interaction and application to magnetogasdynamics, (w przygotowaniu).
- I. I. Pogodin, W. A. Sučkov, N. N. Janienko - O biegušich voľnach gazovoj dinamiki, DAN ZSRR, 119, 3, 1958.
- S. D. Poisson - Mémoire sur la théorie du son, Journal de l'école polytechnique, 14^{me} Cahier, 7, (319-392), 1808.
- J. F. Pommaret - Systems of partial differential equations and Lie pseudogroups, Gordon and Breach, New York, 1978.
- D. G. Quillen - Formal properties of over-determined systems of partial differential equations, Thesis, Harvard University, 1964.
- W. J. M. Rankine - On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance, Trans. Royal Soc. of London 160, (277-288), 1870.
- G. F. B. Riemann - Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Abh. Kön. Ges. Wiss., Göttingen, 8, 1860.
- C. H. Riquier - Les systèmes d'équations aux dérivées partielles, Gauthier-Villars, Paris, 1910.
- A. F. Sidorov - O niestacionarnych potencialnych dviženiach politropnogo gaza c vyroždiennym godografom, PMM, b. 4, 1965.
- M. M. Smirnov - Uravnienia smešannogo tipa, Nauka, Moskva, 1970.
- D. C. Spencer - Overdetermined systems of linear partial differential equations, Ann. of Math., 86, 1962.
- S. Sternberg - Lectures on differential geometry, Prentice Hall, 1964.

- F.G. Tricomi - Lezioni sulle equazioni a derivate parziali,
Editrice Gheroni, Torino, 1954.
- W. Zajączkowski - O oddziaływaniu fal prostych w inwariantach
Riemanna dla układu równań MHD, Rozprawa doktor-
ska IPPT PAN, Warszawa, 1975.
- Riemann invariants interaction in MHD. Double
waves, Demonstratio Mathematica, vol. XII, nr 3,
1979.
 - Riemann invariants interactions in MHD. k-waves,
Demonstratio Mathematica, vol. XIII, nr 2, 1980.

Uzupełnienie literatury 1:

- A.M. Grundland - Riemann invariants for nonhomogeneous systems
of first order partial quasilinear differential
equations..., AMS 26, 2, 1974.
- Riemann invariants for nonhomogeneous systems
of quasilinear partial differential equations,
conditions of involution, Bull. Acad. Polon. Sci.,
ser. sci. techn., 22 (177 [273]), 1974.

Uzupełnienie literatury 2:

- S.P. Finikov - Metody vneshnykh form Kartana w differencial-
noj geometrii, OGIZ, Moskwa 1948.
- W. Ślebodziński - Formes extérieures et leurs applications,
vol. 1, 1954, vol. 2, 1963, PWN Warszawa (jest rów-
nież tłumaczenie angielskie).

Spis treści:

| | |
|---|-----|
| Wstęp | 3 |
| 1. Równania liniowe i półliniowe | 14 |
| 2. Równania nieliniowe | 23 |
| 3. Warunki zgodności | 28 |
| 4. Fale Riemanna | 35 |
| 5. Układy z dwoma modami - oddziaływania elastyczne | 40 |
| 6. Układy z wieloma modami. $\dim E = 2$. | 46 |
| 7. Asymptotyka zagadnienia Cauchy'ego | 55 |
| 8. Układy z wieloma zmiennymi niezależnymi | 70 |
| 9. Elementy całkowe | 74 |
| 10. Elastyczne oddziaływanie fal Riemanna | 83 |
| 11. Geometria różności M | 97 |
| 12. Geometria nieliniowych oddziaływań | 114 |
| 13. Mody eliptyczne | 127 |
| 14. Układy nadokreślone. Formalna całkowalność | 142 |
| 15. Kryteria formalnej całkowalności dla układów hiperbolicznych nadokreślonych | 178 |
| Literatura | 193 |