

Praca habilitacyjna

Andrzej Trzęsowski

EFEKT SKALI

59/1979



P. 269

WARSZAWA 1979

Praca habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 15 listopada 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 59/1979



57187



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 170 egz. Ark.wyd. 3,7. Ark. druk. 5.
Oddano do drukarni w grudniu 1979 r.
Nr zamówienia 741/0/79

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Andrzej Trzęsowski

Zakład Teorii

Ośrodków Ciągłych

EFEKT SKALI

SPIS TREŚCI

	Str.
Wstęp	4
Rozdział 1. Jednorodny proces termodynamiczny	6
Rozdział 2. Więzy termomechaniczne	16
Rozdział 3. Cieczopodobna reakcja ciała	23
Rozdział 4. Dipolowe równanie bilansu	33
Rozdział 5. Elastomeryczne ciało o cieczopodobnej reakcji	38
Rozdział 6. Cieczopodobna reakcja wszechstronnie ściskanej kuli	58
Uwagi końcowe	70
Dodatek	72
Bibliografia	77
Streszczenie	79

WSTĘP

"Efektem skali" nazywane jest zjawisko fizyczne polegające na wpływie kształtu i wymiarów ciała materialnego na jego własności mechaniczne. Obserwowany jest on np. przy prostym rozciąganiu walcowych próbek różnych materiałów. W zależności od materiału efekt skali może przejawiać się w tej próbie w różny sposób. Np. dla metali wpływ wymiarów próbki na kształt krzywej naprężenie - odkształcenie jest niewielki ale stwierdzono, że próbki w postaci bardzo cienkich włókien /o średnicy 10^{-4} cm - tzw. "wąsy"/ mogą często wytrzymać wyjątkowo wysokie naprężenia rozciągające nie odkształcając się plastycznie ani nie zrywając [1]. Natomiast dla różnych polimerów stwierdzono wyraźny wpływ grubości próbki na kształt krzywej naprężenie - odkształcenie [2]. Fizyczne przyczyny występowania efektu skali mogą być odmienne dla różnych materiałów; np. można przypuszczać, że dla metali decydująca jest tu polikrystaliczność ich budowy oraz istnienie defektów sieci krystalicznej, podczas gdy dla polimerowych materiałów istotna jest struktura molekularna tych materiałów.

Odtworzenie efektu skali na podstawie przypisywanych mu mikrostrukturalnych przyczyn wymaga jego rozważenia jako makroskopowego zjawiska o statystycznym charakterze. Jest to punkt widzenia stosowany w statystycznej teorii wytrzymałości materiałów /np. [3] / ale mniej przydatny przy analizie efektu skali w zakresie nieliniowej, sprężystej reakcji ciała; w tym drugim przypadku właściwsze jest podejście fenomenologiczne. Z fenomenologicznego punktu widzenia efekt skali jest przykładem nielokalnych własności ciał. Nie znajduje on jednak zadowalającego odtworzenia w żadnej z istniejących nielokalnych teorii. Przyczyną tego stanu rzeczy jest okoliczność, że teorie te koncentrują się z reguły na badaniu różnych wersji nielokalności wpływu zmiennych przestrzennie pól opisujących kinematykę ciała, na siły wewnętrzne w tym ciele /np. [4] - [9]/. Fenomenologiczny opis efektu skali wymaga natomiast takiego sformułowania pojęć opisujących stan i własności ciała, przy których wpływ stanu deformacyjnego ciała nie będzie

przeważał nad wpływem kształtu i wymiarów ciała. Wiadomo, że liczba stopni swobody w modelu zjawiska fizycznego ma istotny wpływ na przejrzystość odtworzenia tego zjawiska a także na praktyczną przydatność samego modelu. W szczególności skończona liczba deformacyjnych stopni swobody jest ograniczeniem, nałożonym na kinematykę ciała materialnego, pożytecznym zarówno z punktu widzenia analizy wielu danych doświadczalnych, jak i dogodnym z teoretycznego punktu widzenia. Zauważmy, że skończona liczba deformacyjnych stopni swobody nie musi być traktowana tylko jako przybliżenie "właściwego" kontynualnego opisu o nieskończonej liczbie stopni swobody /por. [13]/. Na odwrót, praca [10] pozwala np. przypuszczać, że z punktu widzenia kolektywnych zjawisk na poziomie dyskretnej struktury materialnej ciała, "nielokalny" opis polowy oparty na rozważaniu wyższych gradientów deformacji /tzw. "ośrodki gradientowe" - np. [4], [5] /, może mieć mniejsze znaczenie niż właściwy dobór modelu o skończonej liczbie stopni swobody ale istotnie nielokalnego. Zwrot "istotna nielokalność" oznacza, że mamy na myśli model, który uwzględniałby nielokalne efekty nie tylko w materiałowym zakresie /np. nielokalność reakcji materiałowej typu efekt skali/ ale również w dynamicznym zakresie /np. efekty dynamiczne związane z efektem skali/. W niniejszej pracy zaproponowano taki model efektu skali przyjmując, że termodynamicznymi parametrami, przy pomocy których opisywany jest stan fizyczny ciała, jest para (\underline{F}, Θ) gdzie \underline{F} jest tensorem jednorodnej deformacji ciała /tzw. gradient deformacji/ oraz Θ - jego jednorodną temperaturą bezwzględną. Fenomenologiczną teorią, w ramach której zbudowano model, jest wersja teorii tzw. jednorodnych procesów termodynamicznych [11]. Teorię tę połączono w pracy ze zmodyfikowaną teorią więzów termomechanicznych [17] oraz mechaniką deformacji jednorodnych [12], [13]/. Wprowadzono i zanalizowano w ramach proponowanego modelu pojęcie "ciała w cieczipodobnej reakcji". Konsekwencje wynikające z modelu zbadano poddając szczegółowej analizie efekt skali przy wszechstronnej ekspansji /i ściskaniu/ krystalicznej kuli oraz przy rozciąganiu elastomerycznego walca kołowego.

Niniejsza praca jest kontynuacją prac autora:

"Size effect" /part I and II/ - Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. - 1979 /w druku/ oraz "Size effect in rubber-like materials"

- EPS /Structure and properties of polymers networks/, 1979, vol. 3C.

Rozdział 1. JEDNORODNY PROCES TERMODYNAMICZNY

W pracy jako przestrzeń fizyczna rozważana będzie wektorowa przestrzeń euklidesowa E^3 . $GL^+(3)$ oznaczać będzie zbiór tensorów $F \in E^3 \otimes E^3$ o dodatnim wyznaczniku $|\det F| > 0$, $O(3)$

- zbiór ortogonalnych tensorów $Q \in E^3 \otimes E^3$ a $O^+(3) = O(3) \cap GL^+(3)$ - zbiór właściwych ortogonalnych tensorów nad E^3 .

Zbiory: liczb rzeczywistych oraz dodatnich liczb rzeczywistych oznaczać będziemy odpowiednio przez R oraz R^+ . Przez $L(F)$ oznaczać będziemy liniowe odwzorowanie w E^3 postaci $L(F)(X) = FX$, $F \in GL^+(3)$ a przez \mathcal{E}^3 - zbiór wszystkich zwartych, spójnych podzbiorów E^3 mających niepuste wnętrze. Zbiory $\mathcal{B} \in \mathcal{E}^3$ nazywane będą konfiguracjami przestrzennymi lub krótko konfiguracjami ciała. W niniejszej pracy ciało materialne utożsamiane będzie z wyróżnionym zbiorem $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{E}^3$, któremu przyporządkowana jest masa ciała $m > 0$ oraz pewna termodynamiczna struktura; sam zbiór \mathcal{B}_0 nazywany będzie konfiguracją odniesienia ciała. Jeżeli $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{E}^3$ jest konfiguracją odniesienia ciała to liniowe odwzorowanie $L(F)|_{\mathcal{B}_0} : \mathcal{B}_0 \rightarrow E^3$ nazywane będzie jednorodną deformacją ciała \mathcal{B}_0 i oznaczane również symbolem $L(F)$.

W pracy rozważane będą jednorodne ciała \mathcal{B}_0 o nieruchomym środku masy, których konfiguracje termodynamiczne /nazywane też w literaturze "pozycjami termodynamicznymi" - [11]/ określane są przez skończony układ parametrów λ postaci $\lambda = (F, \Theta)$ gdzie $F \in GL^+(3)$ jest tensorem jednorodnej deformacji $L(F)$ ciała oraz $\Theta \in R^+$ - jednorodną temperaturą bezwzględną konfiguracji $\mathcal{B} = L(F)(\mathcal{B}_0)$ ciała; tę temperaturę $\Theta > 0$ nazywać będziemy krótko temperaturą ciała. W tym rozdziale będziemy przyjmować, że konfiguracja termodynamiczna λ ciała jest dowolnym elementem otwartego i spójnego podzbioru $\mathcal{M} \subset E^3 \otimes E^3 \times R$, który jest postaci $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \times I$ gdzie $I \subset R^+$ - otwarty przedział oraz $\mathcal{M}_0 \subset E^3 \otimes E^3$ jest otwartym i spójnym podzbiorem takim, że:

$$(M1) \quad \mathcal{M}_0 \subset GL^+(3)$$

$$(M2) \quad 1 \in \mathcal{M}_0$$

$$(M3) \quad F \in \mathcal{M}_0, Q \in O^+(3) \Rightarrow QF \in \mathcal{M}_0$$

Warunek (M1) ogranicza konfiguracje mechaniczne $f \in E^3 \otimes E^3$ do tensorów określających liniowe odwzorowania $L(f)$ zachowujące orientację przestrzeni E^3 . Warunek (M2) oznacza, że konfiguracja odniesienia $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{E}^3$ może być rozważana /w dowolnej temperaturze $\Theta \in I$ / jako odpowiadająca identycznościowej konfiguracji mechanicznej $F=1$. Warunek (M3) stwierdza, że \mathcal{M}_0 jest inwariantne względem indukowanego w tym zbiorze działania zachowujących orientację automorfizmów $q: E^3 \rightarrow E^3$, $q(x) = Qx$ przestrzeni fizycznej E^3 tj., że \mathcal{M}_0 jest "obiektywne"/np.[1], [17],[38]/. Jeżeli \mathcal{M} rozważyć jako rozmaiłość różniczkową ze strukturą różniczkową indukowaną z euklidesowej przestrzeni liniowej $E^3 \otimes E^3 \times R$, to przestrzeń styczna do \mathcal{M} w dowolnym punkcie $\lambda \in \mathcal{M}$, może być utożsamiona z przestrzenią $E^3 \otimes E^3 \times R$ i stąd stanem termodynamicznym ciała \mathcal{B}_0 nazywać będziemy dowolną parę $\gamma = (\lambda, \lambda')$ gdzie $\lambda \in \mathcal{M}$ oraz $\lambda' = (F', \Theta') \in E^3 \otimes E^3 \times R$. Krzywe leżące w rozmaiłości \mathcal{M} nazywać będziemy procesami termodynamicznymi. Tego rodzaju procesy nazywane są jednorodnymi [11].

Własności fizyczne ciała opisywać będziemy przy pomocy skalarnych funkcji klasy C^1 określonych na \mathcal{M} : E - energii wewnętrznej, S - entropii oraz Ψ - energii swobodnej. Funkcje te związane są przekształceniem Legendre'a:

$$1.1 \quad \Psi = E - \Theta S$$

Z definicji ciała wynika, że funkcje te zależą od parametru \mathcal{B}_0 - bryły konfiguracji odniesienia, tj., że są postaci $\mathcal{f} = \mathcal{f}(\mathcal{B}_0; \lambda)$ Funkcje te, jako opisujące własności fizyczne ciała, winny być obiektywnymi skalarami tj. spełniać, dla dowolnego ortogonalnego tensora $Q \in O^+(3)$, warunek /por. [11], [38]/:

$$1.2 \quad \mathcal{f}(\mathcal{B}_0; QF, \Theta) = \mathcal{f}(\mathcal{B}_0; F, \Theta)$$

W klasycznym opisie termodynamicznym mechaniczne oddziaływanie na ciało \mathcal{B}_0 można wprowadzić rozważając na \mathcal{M} tzw. formę Gibbsa /por. [15], [16] /:

$$1.3 \quad \Omega = dE - \Theta dS + \underline{N} \cdot d\underline{f}$$

gdzie $\underline{N}(\mathcal{B}_0; \cdot) : \mathcal{M} \rightarrow E^3 \otimes E^3$ jest funkcją definiującą tzw. uogólnioną siłę termodynamiczną $\underline{N}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ działającą na ciało \mathcal{B}_0 jeśli znajduje się ono w konfiguracji termodynamicznej $\underline{\lambda}$. Wpływ mechanicznego oddziaływania oraz temperatury ciała na zmianę jego energii wewnętrznej opisywany jest przez warunek /por. [16] /:

$$1.4 \quad \forall \underline{\lambda} \in \mathcal{M} \quad \Omega(\underline{\lambda}) \leq 0$$

Wprowadzając tzw. funkcję dysypacji δ :

$$\delta = -\dot{\Psi} - \dot{\Theta} S + W$$

1.5.

$$W = -\underline{N}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) \cdot \dot{\underline{f}}$$

gdzie W jest w. produkcją pracy mechanicznej oraz oznaczono $\dot{f} = \frac{d}{dt} \underline{f}$, otrzymujemy na podstawie (1.1), że (1.4) jest równoważne tzw. nierówności dysypacji:

$$1.6 \quad \delta \geq 0$$

Z założenia, że przestrzeń konfiguracji termodynamicznych \mathcal{M} jest otwartym i spójnym podzbiorem $E^3 \otimes E^3 \times \mathbb{R}$ wynika, że warunek (1.4) jest równoważny przyjęciu, że funkcja energii swobodnej Ψ /klasy $C^1(\mathcal{M})$ / jest tzw. potencjałem termodynamicznym tj., że /por. [11] /:

$$1.7 \quad \underline{N} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{f}}, \quad S = - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}$$

W przypadku (1.7) forma Gibbsa znika na \mathcal{M} lub równoważnie - funkcja dysypacji znika wzdłuż procesów termodynamicznych:

1.8

$$\delta = 0$$

Termodynamiczną dopuszczalność procesu określa żądanie aby wzdłuż takich procesów spełniony był warunek (1.8) oraz tzw. aksjomat bilansu energii:

1.9

$$\dot{E} = W + Q$$

gdzie $Q = Q(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \dot{\underline{\lambda}})$, $\dot{\underline{\lambda}} = \frac{d}{dt} \underline{\lambda}$ jest skalarną funkcją nazywaną produkcją pracy cieplnej. Z wzorów (1.5), (1.8), i (1.9) wynika, że wzdłuż termodynamicznie dopuszczalnych procesów winno być:

1.10

$$Q = \theta \dot{\mathcal{S}}$$

Rozważmy tensory $\hat{\underline{T}}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$, $\underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) \in E^3 \otimes E^3$ zdefiniowane przez

$$\begin{aligned} \hat{\underline{T}}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) &= \frac{1}{V_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) \\ &= \varrho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial \underline{F}}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) \end{aligned}$$

1.11

gdzie oznaczono $V_0 = \text{vol } \mathcal{B}_0$, $\varrho_0 = m/V_0$, $\Psi_0 = \frac{1}{m} \Psi$ oraz:

$$\underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta) = \underline{J} \hat{\underline{T}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta) \underline{F}^T, \quad \underline{J} = \det \underline{F}$$

1.12

Z warunku (1.2) wynika, że /por. [11]/:

$$\forall \underline{Q} \in O^+(3) \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{Q} \underline{F}, \theta) = \underline{Q} \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta) \underline{Q}^T$$

1.13

oraz

$$\underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta) = \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta)^T$$

1.14

gdzie \underline{A}^T oznacza transpozycję tensora $\underline{A} \in E^3 \otimes E^3$. Wzory (1.11) - (1.14) pozwalają interpretować tensory $\hat{\underline{T}}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ i $\underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ jako tensory naprężeń, odpowiednio Pioli - Kirchhoffa oraz

Cauchy'ego, odpowiadające konfiguracji termodynamicznej $\underline{\lambda}$ jednorodnego ciała \mathcal{B}_0 /por. [11] /. Zgodnie z tą interpretacją będziemy jednorodnie ciało \mathcal{B}_0 , którego własności opisane są przez wzory (1.7) - (1.14), nazywać ciałem idealnie termosprężystym. Przymiotnik "idealny" został tu użyty /por. [11] / dla zaznaczenia, że dla takiego ciała procesy termodynamiczne są odwracalne /por. (1.8) i (1.10) / - w odróżnieniu od ciał z termosprężystych materiałów prostych /por. [11] /, gdzie mamy do czynienia z dysypacją wynikającą z przewodnictwa cieplnego. Rozważmy ciało \mathcal{B}_0 idealnie termosprężyste i izotropowe tj. takie, że /por. [11] /:

$$1.15 \quad \forall Q \in O(3) \quad \Psi(\mathcal{B}_0; Q F Q^T, \Theta) = \Psi(\mathcal{B}_0; F, \Theta)$$

Warunek (1.15) jest zgodny z założeniem (\mathcal{M}_3) dotyczącym dziedziny funkcji Ψ gdyż dla $F \in \mathcal{M}_0$:

$$1.16 \quad \forall Q \in O(3) \quad Q F Q^T \in \mathcal{M}_0 \Leftrightarrow \forall Q \in O^+(3) \quad Q F Q^T \in \mathcal{M}_0$$

Z wzorów (1.2) i (1.11) - (1.14) wynika wtedy, że funkcja naprężeń $\underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ jest izotropowa:

$$1.17 \quad \forall Q \in O(3) \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; Q F Q^T, \Theta) = Q \underline{T}(\mathcal{B}_0; F, \Theta) Q^T$$

i może być przedstawiona w postaci /por. [11] /:

$$1.18 \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; F, \Theta) = \underline{V} \cdot \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \underline{V}}(\mathcal{B}_0; \underline{V}, \Theta) \underline{V}^{-1} \quad \text{dla} \quad \underline{V}^2 = F F^T$$

$$\underline{V} = \text{vol } \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} = I(F)(\mathcal{B}_0)$$

gdzie funkcja $\hat{\Psi}$ jest zdefiniowana przez

$$1.19 \quad \hat{\Psi}(\mathcal{B}_0; \underline{V}, \Theta) = \Psi(\mathcal{B}_0; \underline{V} R, \Theta)$$

dla $F = \underline{V} R$ - rozkładu polarnego tensora $F \in \mathcal{M}_0$. W przypadku izotropii tensory \underline{T} i \underline{V} są współosiowe tak, że jeśli $\underline{e}_i = \underline{e}_i(\underline{V})$, $i=1,2,3$ jest układem wersorów własnych tensora \underline{V} , to /por. [11] /:

$$1.20^* \quad \underline{T} = t_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i \quad \text{dla} \quad \underline{V} = \lambda_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i$$

gdzje

$$1.21 \quad t_i = t_i(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{1}{V} \lambda_i \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda_i}(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\sigma = \sigma(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \hat{\Psi}(\mathcal{B}_0; \lambda_i \underline{e}_i \otimes \underline{e}_i, \Theta)$$

We wzorze (1.21) \mathcal{B}_0 oraz Θ traktowane są jako parametry. Zgodnie z twierdzeniem podanym w [11] wzór (1.21) określa izotropowy sprężysty materiał prosty wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $t = t(\mathcal{B}_0, \Theta; x, y, z)$ zmiennych $(x, y, z) \in R^3$ taka, że:

$$t(\mathcal{B}_0, \Theta; x, y, z) = t(\mathcal{B}_0, \Theta; x, z, y)$$

$$1.22 \quad t_1(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$t_2(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_2, \lambda_3, \lambda_1)$$

$$t_3(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = t(\mathcal{B}_0, \Theta; \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2)$$

W dalszej części pracy /rozdział 3/ podamy przykład funkcji energii swobodnej ciała izotropowego idealnie termosprężystego, której zależność od parametru \mathcal{B}_0 powoduje, że warunek (1.22) nie jest spełniony. Z wzorów (1.13), (1.14) wynika, że relacja $\underline{T} = \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ zdefiniowana wzorami (1.11) i (1.12) nie spełnia, spośród aksjomatów teorii materiałów prostych niepolarnych /np. [11] /, tylko tzw. "zasady lokalnego działania" mówiącej, że wymiary ciała nie mają wpływu na postać relacji konstytutywnej dla naprężeń. W tym sensie rozważana tu funkcja $\underline{T} = \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ naprężeniowej reakcji ciała opisuje jego nielokalne własności mechaniczne a jej zależność od bryły \mathcal{B}_0 oznacza, że nielokalność ta ma charakter efektu skali. Ten specjalny typ nielokalności pozwala /wobec je-

^(*) W (1.20) oraz (1.21)₂ przyjęto konwencję sumowania po powtarzających się indeksach.

dnorodności rozważanych pól/ na wykorzystanie wielu formalnych wyników uzyskanych w teorii materiałów prostych /np.wywód (1.13) i (1.14) z (1.2) oraz kryterium (1.22)/.

Sformułujemy teraz, opierając się na interpretacji tensorów $\hat{T}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ i $\underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ jako tensorów naprężenia, regułę interpretacyjną dla uogólnionych sił termodynamicznych $\underline{N}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$. Niech $\mathcal{B}_0 \subset E^3$ będzie zwartym i spójnym zbiorem, którego brzeg $\partial\mathcal{B}_0$ jest dwuwymiarową orientowaną rozmaitością w E^3 . Oznaczmy przez $\underline{t}(\mathcal{B}_0, \Theta; \underline{F}, \underline{x})$, $\underline{x} \in \partial\mathcal{B}_0$ pole kontaktowych sił działających na brzeg $\partial\mathcal{B}_0$ i wywołanych przez jednorodny rozkład naprężeń $\hat{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta)$ w /idealnie termosprężystym/ ciele \mathcal{B}_0 tj./por. [11] /:

$$1.23 \quad \underline{t}(\mathcal{B}_0, \Theta; \underline{F}, \underline{x}) = -\hat{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \hat{n}(\underline{x})$$

gdzie $\hat{n}(\underline{x})$ - wersor normalny do $\partial\mathcal{B}_0$ w punkcie $\underline{x} \in \partial\mathcal{B}_0$ i skierowany na zewnątrz \mathcal{B}_0 . Rozważmy tzw.dipolowy moment pola sił \underline{t} względem środka masy ciała /w konfiguracji \mathcal{B}_0 / tj. tensor \underline{M} postaci:

$$1.24 \quad \underline{M}(\mathcal{B}_0, \Theta; \underline{F}) = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \underline{x} \otimes \underline{t}(\mathcal{B}_0, \Theta; \underline{F}, \underline{x}) dS(\underline{x})$$

Z jednorodności naprężeń wynika, że:

$$1.25 \quad \underline{M}(\mathcal{B}_0, \Theta; \underline{F})^T = \underline{N}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta)$$

przy czym

$$1.26 \quad \underline{N}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) = -\underline{S}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \underline{F}^*, \quad \underline{F}^* = \underline{F}^{-T}$$

gdzie oznaczono

$$1.27 \quad \underline{S}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) = V \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta), \quad V = \text{vol } \mathcal{B}$$

Tensor $\underline{S}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta)$ jest nazywany "dipolem /o gęstości \underline{T} / podwójnych sił bez momentu" [14]. Wzory (1.11) - (1.14) i (1.24) - (1.27) określają, z uwagi na dowolność \mathcal{B}_0 , regułę interpretacyjną

dla uogólnionej siły termodynamicznej $N(\mathcal{B}_0; F, \Theta)$: jest to transpozycja dipolowego momentu sił powierzchniowych określonych przez naprężeniową reakcję ciała \mathcal{B}_0 w jednorodnym procesie termodynamicznym /wzór (1.23) /. Zwróćmy uwagę na okoliczność, że o ile w teorii ciał z materiałów prostych podstawową wielkością mechaniczną opisującą reakcję ciała w procesie termodynamicznym - jest naprężenie, to w rozważanym tu ciele z efektem skali tę rolę naprężenia przyjmuje dipol $\hat{\mathcal{S}}$ podwójnych sił bez momentu /wzór (1.27) /. Ta różnica jest wyraźniejsza jeśli rozważyć niejednorodne ciało \mathcal{B}_0 . Niech $\underline{T}(\mathcal{B}_0; F, \Theta, \underline{x})$, $\underline{x} \in \mathcal{B}$ będzie polem naprężeń Cauchy'ego w aktualnej konfiguracji $\mathcal{B} = \lambda(F)(\mathcal{B}_0)$ niejednorodnego ciała \mathcal{B}_0 . Odpowiednie pole naprężeń Pioli-Kirchhoffa w \mathcal{B}_0 jest postaci $\hat{\underline{T}}(\mathcal{B}_0; F, \Theta, \underline{x}) = \underline{J} \underline{T}(\mathcal{B}_0; F, \Theta, \underline{F} \underline{x}) \underline{F}^*$. Jeżeli to pole naprężeń jest samozrównoważone:

$$1.28 \quad \operatorname{div} \underline{T} = 0$$

oraz przyjmiemy w (1.24) $\underline{t}(\mathcal{B}_0; \Theta; F, \underline{x}) = -\hat{\underline{T}}(\mathcal{B}_0; F, \Theta, \underline{x}) \hat{\underline{\eta}}(\underline{x})$, to obowiązują również wzory (1.26), (1.27) ale przy dodatkowym warunku, że tensor $\underline{T}(\mathcal{B}_0; F, \Theta)$ /zdefiniowany wzorami (1.11) i (1.12)/ pokrywa się ze średnim tensorem naprężenia:

$$1.29 \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; F, \Theta) = \underline{T}_{\hat{\mathcal{S}}r}(\mathcal{B}_0; F, \Theta) = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{B}} \underline{T}(\mathcal{B}_0; F, \Theta, \underline{x}) dV(\underline{x})$$

W przypadku ciała niejednorodnego należałoby więc tensor \underline{T} zdefiniowany wzorami (1.11) i (1.12) interpretować jako średni tensor naprężeń. W niniejszej pracy nie będziemy zajmowali się jednak ciałami niejednorodnymi gdyż jest prawie oczywistym, że nie dla każdego rozkładu niejednorodności w ciele, interpretacja $\underline{T}_{\hat{\mathcal{S}}r}$ jako wielkości opisującej w zadowalający sposób rozkład sił kontaktowych w ciele, byłaby stosowana. Gdy ciało jest jednorodne to $\underline{T}_{\hat{\mathcal{S}}r}$ zawsze może być rozważone jako tensor naprężeń w idealnie termosprężystym ciele. Uwagi te wiążą się z ogólniejszym problemem doboru odpowiednich wielkości mechanicznych charakteryzujących reakcję ciał nielokalnych. Jest to problem otwarty i w literaturze przedmiotu jest mało prac, które można uznać za wiążące się z tym zagadnieniem /np. [4], [6], [18] /. Przyjęty w niniejszej

pracy formalizm termodynamiczny pozwala uniknąć wprowadzenia pojęcia reakcji ciała jako pojęcia pierwotnego termodynamicznej teorii. Dopiero wykazanie dopuszczalności przyjętej reguły interpretacyjnej dla uogólnionej siły termodynamicznej, pozwala na określenie wielkości mechanicznej charakteryzującej reakcję ciała.

Wprowadzimy teraz, częściowo wzorując się na teorii materiałów prostych / [11] /, uogólnienie klasycznego opisu termodynamicznego (1.5), (1.6), (1.9). Będziemy nazywać, przez analogię do tzw. materiałów typu różniczkowego złożoności 1 / [11] /, ciało \mathcal{B}_0 - ciałem typu różniczkowego /złożoności 1/, jeśli jego reakcja naprężeniowa jest ciągłą funkcją postaci:

$$1.30 \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}) = \underline{T}_e(\mathcal{B}_0; \dot{\mathbf{a}}) + \underline{T}_d(\mathcal{B}_0; \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}})$$

oraz spełniony jest warunek:

$$1.31 \quad \underline{T}_d(\mathcal{B}_0; \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}) = \underline{0}$$

Z zasady obiektywności wynika, że naprężenie (1.30) winno być postaci /por. [11] /:

$$1.32 \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}) = \underline{h}(\mathcal{B}_0; \mathbf{F}, \Theta, \underline{D}, \dot{\Theta})$$

$$\underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^T), \quad \underline{L} = \dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}$$

przy czym tensorowa funkcja \underline{h} winna spełniać warunek:

$$1.33 \quad \underline{h}(\mathcal{B}_0; \underline{Q} \mathbf{F}, \Theta, \underline{Q} \underline{D} \underline{Q}^T, \dot{\Theta}) = \underline{Q} \underline{h}(\mathcal{B}_0; \mathbf{F}, \Theta, \underline{D}, \dot{\Theta}) \underline{Q}^T$$

dla dowolnego ortogonalnego tensora $\underline{Q} \in O^+(3)$. Przyjmując w (1.5) /por. (1.26) i (1.27) /:

$$1.34 \quad \underline{W} = - \underline{N}(\mathcal{B}_0; \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}) \cdot \dot{\underline{F}}$$

$$\underline{N}(\mathcal{B}_0; \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}) = - \underline{V} \underline{T}(\mathcal{B}_0; \dot{\mathbf{a}}, \dot{\mathbf{a}}) \underline{F}^*, \quad \underline{F}^* = \dot{\underline{F}}^T$$

otrzymujemy na podstawie nierówności dysypacji (1.6), że /por. [11] /:

$$1.35 \quad \underline{T}_e(\mathcal{X}_0; \underline{F}, \theta) = \frac{1}{V} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}}(\mathcal{X}_0; \underline{F}, \theta) \underline{F}^T$$

oraz

$$1.36 \quad S(\mathcal{X}_0; \underline{F}, \theta) = - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}(\mathcal{X}_0; \underline{F}, \theta)$$

przy czym

$$1.37 \quad W = V \underline{T}(\mathcal{X}_0; \underline{\dot{\alpha}}, \underline{\dot{\beta}}) \cdot \underline{D}$$

a nierówność dysypacji redukuje się do warunku na tensor \underline{T}_d :

$$1.38 \quad \underline{T}_d(\mathcal{X}_0; \underline{\dot{\alpha}}, \underline{\dot{\beta}}) \cdot \underline{D} \geq 0$$

$$\underline{T}_d(\mathcal{X}_0; \underline{\dot{\alpha}}, \underline{\dot{\beta}}) = \underline{h}_d(\mathcal{X}_0; \underline{F}, \theta, \underline{D}, \dot{\theta})$$

dla dowolnego symetrycznego tensora $\underline{D} \in E^3 \otimes E^3$. Rozważmy warunek:

$$1.39 \quad \underline{T}_d \cdot \underline{D} = 0$$

dla dowolnego symetrycznego tensora $\underline{D} \in E^3 \otimes E^3$. Ponieważ $\underline{T}_d \cdot \underline{D} = \text{tr}(\underline{T}_d \underline{D})$ oraz $\text{tr}(\underline{A} \underline{B})$ jest iloczynem skalarnym w liniowej przestrzeni wszystkich symetrycznych tensorów walencji 2, to warunek (1.39) może być spełniony tylko gdy $\underline{T}_d \equiv \underline{0}$. Ten wniosek oraz nierówność (1.38) oznaczają, że naprężenie \underline{T}_d jest tzw. "dysypatywnym naprężeniem" /por. [11] /.

Aksjomat bilansu energii (1.9) może być przedstawiony w postaci równania ewolucji temperatury:

$$1.40 \quad K_F \dot{\theta} = V(\theta \partial_\theta \underline{T}_e + \underline{T}_d) \cdot \underline{D} + Q$$

gdzie K_F jest pojemnością cieplną przy stałej deformacji:

$$1.41 \quad K_F = \frac{\partial \bar{E}}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} = -\theta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$$

Jeśli K_F traktować, jak zwykle to się robi, jako wielkość określoną z doświadczenia, wtedy wzór (1.41) ma sens empirycznego

warunku dla funkcji E lub S czy Ψ . Produkcja pracy cieplnej $Q = Q(\mathcal{B}_0; \underline{a}, \dot{\underline{a}})$ spełnia warunek (1.10) tylko wtedy gdy $T_d = Q$.

Rozważmy stały proces termodynamiczny $\underline{a}(t) = \underline{a}_0 \in \mathcal{M}$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ dla ciała \mathcal{B}_0 typu różniczkowego. Ponieważ w takim procesie $T_d = Q$ więc znikają efekty dysypatywne /por. (1.38) / i z wzorów (1.5), (1.8) wynika, że taki proces jest dopuszczalny termodynamicznie tylko wtedy gdy

$$1.42 \quad d\Psi(\mathcal{B}_0; \underline{a}_0) = 0$$

co jest równoważne warunkom /por. (1.35) i (1.36)/:

$$1.43 \quad T_e(\mathcal{B}_0; \underline{a}_0) = Q, \quad S(\mathcal{B}_0; \underline{a}_0) = 0$$

Warunek (1.42) jest warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcji Ψ w punkcie $\underline{a}_0 = (f_0, \Theta_0)$ a postać (1.43) tego warunku oznacza, że w punkcie \underline{a}_0 znikają uogólnione oddziaływania na ciało /zarówno mechaniczne jak i ciepłe - por. (1.34) oraz (1.10)/. Jeżeli więc \underline{a}_0 jest punktem /lokalnego/ minimum funkcji Ψ , to stan termodynamiczny $\gamma_0 = (\underline{a}_0, Q)$ jest tzw. stanem równowagi termodynamicznej ciała \mathcal{B}_0 tj. stanem, w którym przy braku zewnętrznego oddziaływania na ciało, może ono stabilnie trwać przez dowolnie długi okres czasu /np. [16], [30], [31] /. Jeżeli konfiguracja \underline{a}_0 stanu równowagi termodynamicznej jest postaci $\underline{a}_0 = (f, \Theta_0)$, to konfigurację odniesienia \mathcal{B}_0 nazywać będziemy naturalną konfiguracją równowagi termodynamicznej w temperaturze Θ_0 .

Rozdział 2. WIĘZY TERMOMECHANICZNE

Dla materiałów prostych /z pamięcią/ ogólna teoria więzów termomechanicznych została zaproponowana w pracy [17] /patrz też [19]/. Teorię tę można przenieść, odpowiednio ją modyfikując, na przypadek ciał typu różniczkowego /rozdział 1/. Możliwość tego przeniesienia wynika z dwóch okoliczności. Po pierwsze w tej

teorii rozważane są jednakowe więzy we wszystkich punktach ciała tak, że w rzeczywistości można je odnieść do punktu materialnego i rozpatrywać jednorodne deformacje. Po drugie ta teoria jest sformułowana przy ustalonej konfiguracji odniesienia i w związku z tym nie istotna jest różnica między transformowaniem się relacji konstytutywnej przy zmianie \mathcal{B}_0 w niniejszej pracy i w teorii materiałów prostych /por. rozdział 1, komentarz do (1.22)/. W niniejszej pracy sformułujemy to przeniesienie w uproszczonej postaci, dostosowanej do jednego spośród typów więzów dopuszczanych przez teorię zaproponowaną w pracy [17].

Będziemy mówili, że ciało \mathcal{B}_0 posiada /lub jest poddane/ więzy typu \mathcal{M} , jeśli jego konfiguracje termodynamiczne $\underline{\lambda} = (\underline{F}, \Theta)$ są elementami spójnej rozmaitości $\mathcal{M} \subset E^3 \otimes E^3 \times \mathbb{R}$ klasy C^1 i takiej, że zbiór \mathcal{M}_0 postaci:

$$2.1 \quad \mathcal{M}_0 = \{ \underline{F} \in E^3 \otimes E^3 : \exists \Theta \in \mathbb{R}^+ (\underline{F}, \Theta) \in \mathcal{M} \}$$

spełnia warunki (M1) - (M3) sformułowane w rozdziale 1. Oznaczać będziemy przez $\text{Sym}(E^3 \otimes E^3)$ oraz Π liniowe przestrzenie o zbiorach elementów postaci:

$$2.2 \quad \text{Sym}(E^3 \otimes E^3) = \{ \underline{A} \in E^3 \otimes E^3 : \underline{A} = \underline{A}^T \}$$

$$\Pi = \text{Sym}(E^3 \otimes E^3) \times \mathbb{R}$$

W przestrzeni $\text{Sym}(E^3 \otimes E^3)$ określony jest iloczyn skalarny $\underline{A} \cdot \underline{B} = \text{tr}(\underline{A} \underline{B})$ a w przestrzeni Π - iloczyn skalarny $(\underline{A}, a) \cdot (\underline{B}, b) = \underline{A} \cdot \underline{B} + ab$. Przez $\mathcal{L}(\Pi)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich podprzestrzeni liniowych przestrzeni Π . Jeżeli $\mathcal{M}(\underline{\lambda}) \subset E^3 \otimes E^3 \times \mathbb{R}$ jest przestrzenią styczną do rozmaitości \mathcal{M} w punkcie $\underline{\lambda} = (\underline{F}, \Theta)$, to przez $\Omega(\underline{\lambda}) \subset \Pi$ oznaczać będziemy liniową przestrzeń postaci:

$$2.3 \quad \Omega(\underline{\lambda}) = \{ \underline{\gamma} = (\underline{D}, \Theta') : \underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{L} + \underline{L}^T), \underline{L} = \underline{F}' \underline{F}, (\underline{F}', \Theta') \in \mathcal{M}(\underline{\lambda}) \}$$

Przez Ω oznaczać będziemy wiązkę wektorową o bazie \mathcal{M} postaci:

2.4

$$\Omega = \{\omega = (\underline{\lambda}, \underline{\chi}) : \underline{\lambda} \in \mathcal{M}, \underline{\chi} \in \Omega(\underline{\lambda})\}$$

Ciało \mathcal{B}_0 nazywać będziemy ciałem bez więzów jeżeli $\mathcal{M}(\underline{\lambda}) = E^3 \otimes E^3 \times R$ dla dowolnego $\underline{\lambda} \in \mathcal{M}$. Ciała rozważane w rozdziale 1 są więc, zgodnie z tym określeniem, ciałami bez więzów. We wspomnianej teorii więzów termomechanicznych przyjmuje się, że oddziaływania realizujące te więzy można opisać wprowadzając addytywną nieokreśloność naprężeń i entropii przy równoczesnym braku wpływu więzów na postać funkcji energii swobodnej. Ponieważ w niniejszej pracy ograniczamy się do rozważania przypadku gdy energia swobodna ciała zależy tylko od aktualnej konfiguracji termodynamicznej tego ciała /por. rozdz. 1/, więc wyjściowe relacje teorii więzów przyjmiemy w postaci:

$$\Psi = \Psi^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}), \quad S = S^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi}) + \bar{S}, \quad \underline{T} = \underline{T}^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi}) + \bar{\underline{T}}$$

$$2.5 \quad S^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi}) = S_e(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) + S_d(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi})$$

$$\underline{T}^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi}) = \underline{T}_e(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) + \underline{T}_d(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi})$$

gdzie Ψ^* , S^* oraz \underline{T}^* są odpowiednio energią swobodną, entropią i naprężeniem Cauchy'ego niezależnymi od wyboru więzów a naprężenia \underline{T}_d powinny spełniać warunek (1.31) oraz postulat obiektywności /por. (1.32) i (1.33)/. \bar{S} i $\bar{\underline{T}} = \bar{\underline{T}}^T$ są wielkościami nieznanymi, których postać zależy od typu więzów. Z wzorów (2.5) i (1.1) wynika, że

$$2.6 \quad E = E^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi}) + \bar{E}$$

gdzie oznaczono:

$$2.7 \quad E^* = \Psi^* + \theta S^*, \quad \bar{E} = \theta \bar{S}$$

Jeżeli $\bar{\underline{T}}$ jest naprężeniem Cauchy'ego oraz \bar{S} - entropią opisującymi reakcję więzów, to przez $\tau(\underline{T}, \underline{\lambda})$ oznaczać będziemy element przestrzeni Π postaci:

$$2.8 \quad r(\underline{\tau}, \underline{\lambda}) = (V(\underline{\lambda})\bar{T}, -\bar{S}) \text{ dla } \underline{\tau} = (\bar{T}, \bar{S}) \in \Pi$$

$$V(\underline{\lambda}) = V_0 \det \underline{F} \text{ dla } \underline{\lambda} = (F, \Theta) \in \mathcal{M}$$

Wprowadzając oznaczenia:

$$2.9 \quad \delta^*(\omega) = -\dot{\Psi}^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) - S^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi}) \dot{\Theta} + V(\underline{\lambda}) \underline{T}^*(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\chi}) \cdot \underline{D}$$

$$\underline{\omega} = (\underline{\lambda}, \underline{\chi}) \in \Omega, \underline{\chi} = (\underline{D}, \dot{\Theta}) \in \Omega(\underline{\lambda})$$

oraz

$$2.10 \quad \bar{\delta}(\underline{\tau}, \underline{\omega}) = -\bar{S} \dot{\Theta} + V(\underline{\lambda}) \bar{T} \cdot \underline{D} = r(\underline{\tau}, \underline{\lambda}) \cdot \underline{\chi}$$

$$\underline{\omega} = (\underline{\lambda}, \underline{\chi}) \in \Omega, \underline{\tau} = (\bar{T}, \bar{S}) \in \Pi$$

możemy funkcję δ , określoną wzorami (1.5), (1.34) i (2.5), napisać w postaci:

$$2.11 \quad \delta = \delta(\underline{\tau}, \underline{\omega}) = \delta^*(\omega) + \bar{\delta}(\underline{\tau}, \underline{\omega})$$

"Funkcjonałem reakcji" dla więzów typu \mathcal{M} nazywać będziemy odwzorowanie:

$$\mathcal{R} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{L}(\Pi)$$

Funkcjonał reakcji \mathcal{R} nazywać będziemy termodynamicznie dopuszczalnym jeżeli spełnia następujące warunki:

(R1) Aksjomat dysypacji

$$\forall \underline{\omega} = (\underline{\lambda}, \underline{\chi}) \in \Omega \quad (r(\underline{\tau}, \underline{\lambda}) \in \mathcal{R}(\underline{\lambda}) \Rightarrow \delta(\underline{\tau}, \underline{\omega}) \geq 0)$$

(R2) Warunek maksymalności

Jeżeli \mathcal{R}' jest dowolnym funkcyjnałem reakcji dla więzów typu \mathcal{M} oraz spełnia (R1), to

$$\forall \underline{\lambda} \in \mathcal{M} \quad \mathcal{R}'(\underline{\lambda}) \subset \mathcal{R}(\underline{\lambda})$$

Warunek (R2) gwarantuje, że dla danych więzów typu \mathcal{M} istnieje co najwyżej jeden termodynamicznie dopuszczalny funkcyjnał

reakcji. Z twierdzeń sformułowanych w pracy [17] wynika, że funkcjonal reakcji \mathcal{R} jest termodynamicznie dopuszczalnym wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dwa warunki:

$$2.12 \quad \forall \underline{\lambda} \in \mathcal{M} \quad \mathcal{R}(\underline{\lambda}) = \Omega(\underline{\lambda})^\perp$$

gdzie $\Omega(\underline{\lambda})^\perp \in \mathcal{X}(\Pi)$ jest podprzestrzenią ortogonalną do przestrzeni $\Omega(\underline{\lambda}) \subset \Pi$, oraz

$$2.13 \quad \forall \underline{\omega} \in \Omega \quad \delta^*(\underline{\omega}) \geq 0$$

Z (2.12) wynika, że ciało \mathcal{B}_0 jest ciałem bez więzów wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{R}(\underline{\lambda}) = \{(0,0)\}$ dla dowolnego $\underline{\lambda} \in \mathcal{M}$; w tym przypadku $\bar{\mathbf{I}} = \underline{0}$ i $\bar{\mathbf{S}} = 0$ oraz nierówność (2.13) redukuje się do wzorów (1.35), (1.36) i (1.38). Dla ciała z więzami nierówność (2.13) nie jest warunkiem dostatecznym na to, aby Ψ było potencjałem termodynamicznym /t.j.aby zachodziły wzory (1.35) i (1.36)/. Dalej ograniczymy się do przypadku gdy Ψ jest potencjałem termodynamicznym. Wtedy (2.13) można napisać w postaci:

$$2.14 \quad \forall \underline{\omega} \in \Omega \quad \bar{\delta}(\mathbb{I}_d(\underline{\omega}), \underline{\omega}) \geq 0$$

$$\mathbb{I}_d = (\mathbb{I}_d, S_d), \quad S_d = S^* + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \mathbb{I}_d = \mathbb{I}^* - \frac{1}{V} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \underline{F}^T$$

Rozważmy przypadek gdy dodatkowo \mathcal{B}_0 jest ciałem bez dysypacji tj.:

$$2.15 \quad \forall \underline{\omega} \in \Omega \quad \bar{\delta}(\mathbb{I}_d(\underline{\omega}), \underline{\omega}) = 0$$

Warunek (2.15) jest równoważny warunkowi:

$$2.16 \quad \forall \underline{\omega} = (\underline{\lambda}, \underline{\xi}) \in \Omega \quad \gamma(\mathbb{I}_d(\underline{\omega}), \underline{\lambda}) \in \mathcal{R}(\underline{\lambda})$$

Z (2.16) wynika, że istnienie więzów w ciele umożliwia /w przeciwieństwie do przypadku braku więzów/ rozważenie ciał typu różniczkowego bez dysypacji. Jeżeli \mathcal{B}_0 jest ciałem idealnie termosprężystym z więzami, tj.obowiązują wzory:

$$2.17 \quad \underline{T}^* = \underline{T}_e = \frac{1}{V} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \underline{F}^T, \quad S^* = S_e = - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

$$E^* = E_e = \Psi + \theta S_e$$

to równanie bilansu energii, określane wzorami (1.5), (1.34), (2.5) - (2.7) i (2.17), może być napisane w postaci równania ewolucji temperatury

$$2.18 \quad K_{\underline{F}} \dot{\underline{\theta}} = V_0 \theta \partial_{\theta} \hat{\underline{T}}_e \cdot \dot{\underline{F}} + Q_e, \quad (\underline{F}, \theta) \in \mathcal{M}$$

gdzie oznaczono:

$$2.19 \quad K_{\underline{F}} = \frac{\partial E_e}{\partial \theta} = \theta \frac{\partial S_e}{\partial \theta} = - \theta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}$$

$$Q_e = \theta \dot{S}_e$$

oraz tensor $\hat{\underline{T}}_e$ jest tensorem Pioli-Kirchhoffa odpowiadającym tensorowi naprężeń Cauchy'ego \underline{T}_e :

$$2.20 \quad \hat{\underline{T}}_e = J \underline{T}_e \underline{F}^* = \frac{1}{V_0} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{F}^* = \underline{F}^{*T}, \quad J = \det \underline{F}$$

Dla ciała bez więzów we wzorze (2.18) mamy /por. (1.40)/:

$$2.21 \quad V_0 \partial_{\theta} \hat{\underline{T}}_e \cdot \dot{\underline{F}} = V \partial_{\theta} \underline{T}_e \cdot \underline{D}$$

Pojemność cieplną $K_{\underline{F}} = K_{\underline{F}}(\mathcal{B}_0; \theta)$ oraz produkcję pracy cieplnej $Q_e = Q_e(\mathcal{B}_0; \dot{\lambda}, \dot{\lambda})$ uważamy za znane skądinąd.

Jeżeli \mathcal{B}_0 jest ciałem z przestrzenią konfiguracji termodynamicznych \mathcal{M} , to grupa symetrii konfiguracyjnych tego ciała nazywać będziemy grupę $H(\mathcal{M})$ postaci:

$$2.22 \quad H(\mathcal{M}) = \{ H \in E^3 \otimes E^3 : \det H = 1, \mathcal{M}_0 H = \mathcal{M}_0 \}$$

gdzie \mathcal{M}_0 jest podzbiorem $E^3 \otimes E^3$ zdefiniowanym wzorem (2.1) oraz $\mathcal{M}_0 H = \{ \underline{F} H : \underline{F} \in \mathcal{M}_0 \}$. Z wyników podanych w pracy

[17] wynika, że jeżeli grupa symetrii konfiguracyjnych ciała pokrywa się z grupą unimodularną $U^+(3)$:

$$2.23 \quad H(\mathcal{M}) = U^+(3) = \{H \in E^3 \otimes E^3 : \det H = 1\}$$

to ciało to nie posiada więzów lub posiada więzy w postaci tzw. "ściśliwości zależnej od temperatury" tj. typu:

$$2.24 \quad \mathcal{M} = \{(F, \theta) \in E^3 \otimes E^3 \times R : (\det F, \theta) \in \Delta\}$$

gdzie $\Delta \subset R^+ \times R^+$ jest pewnym spójnym zbiorem. Z definicji cieczy prostej /por. [11] / wynika, że typ więzów (2.24) jest warunkiem koniecznym na to, aby \mathcal{B}_0 było ciałem z takiego materiału i posiadającym więzy. Grupa symetrii konfiguracyjnych izotropowego ciała idealnie termosprężystego winna spełniać warunek $O^+(3) \subset H(\mathcal{M})$. Wśród więzów typu (2.24) najbardziej interesujący, z uwagi na możliwość zastosowań, jest przypadek gdy istnieje funkcja $f: R^+ \rightarrow R^+$ taka, że

$$2.25 \quad (\det F, \theta) \in \Delta \iff \det F = f(\theta), \theta \in I \subset R^+$$

Jeżeli $f'(\theta) \neq 0$, dla $\theta \in I \subset R^+$ - pewnego przedziału temperatur, to funkcja $f(\theta), \theta \in I$ posiada przedstawienie:

$$2.26 \quad \begin{aligned} f(\theta) &= \exp\left(\int_{\theta_0}^{\theta} \beta(\theta) d\theta\right) \\ \beta(\theta) &= f'(\theta)/f(\theta), \theta \in I, \quad (f' = \frac{d}{d\theta} f) \end{aligned}$$

gdzie $\lambda_0 = (F_0, \theta_0) \in \mathcal{M}$ jest zgodną z więzami termodynamiczną konfiguracją ciała \mathcal{B}_0 . Ciało \mathcal{B}_0 z typem więzów określonym przez (2.24) - (2.26) nazywać będziemy izotermicznie nieściśliwym. W przypadku izotermicznej nieściśliwości przestrzenie $\mathcal{M}(\lambda), \Omega(\lambda)$ są dla $\lambda = (F, \theta)$ postaci / [17] /:

$$2.27 \quad \begin{aligned} \mathcal{M}(\lambda) &= \{(F', \theta') \in E^3 \otimes E^3 \times R : \text{tr}(F'F'^{-1}) = \beta(\theta)\theta'\} \\ \Omega(\lambda) &= \{(D, \theta') \in \Pi : \text{tr} D = \beta(\theta)\theta'\} \end{aligned}$$

Z wzorów (2.8), (2.12) i (2.27) wynika, że dla dowolnego termodynamicznego stanu $\omega = (\underline{\lambda}, \underline{y}) \in \Omega$, $\underline{\lambda} = (\underline{f}, \theta)$ zgodnego z więzami izotermicznej nieściśliwości, reakcja więzów jest postaci:

$$2.28 \quad \bar{T} = -\bar{p} \underline{1}, \quad \bar{S} = -V_o(\theta) \beta(\theta) \bar{p}$$

$$V_o(\theta) = \int(\theta) V_o, \quad V_o = v_o L \mathcal{B}_o, \quad \bar{p} \in \mathbb{R}$$

W przypadku izotermicznie nieściśliwego ciała typu różniczkowego bez dysypacji:

$$2.29 \quad \mathbb{T}_d(\mathcal{B}_o; \omega) = -p(\mathcal{B}_o; \omega) \underline{1}, \quad \omega \in \Omega$$

oraz

$$2.30 \quad Q = \theta \dot{S}, \quad S = S^* + \bar{S}$$

$$S^*(\mathcal{B}_o; \omega) = S_e(\mathcal{B}_o; \underline{\lambda}) - V_o(\theta) \beta(\theta) p(\mathcal{B}_o; \omega)$$

gdzie Q - produkcja pracy cieplnej. Różniczkowanie \bar{p} we wzorze (2.28), (2.30) należy rozumieć w ten sposób, że dla dowolnego procesu termodynamicznego $\underline{\lambda}: (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ zgodnego z więzami izotermicznej nieściśliwości, istnieje funkcja $\bar{p}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ opisująca wraz z (2.28) reakcję więzów $\bar{T} = \bar{T}(t)$, $\bar{S} = \bar{S}(t)$ $t \in (a, b)$ w tym procesie. W szczególnym przypadku ciała nieściśliwego mamy we wzorze (2.25) $\int(\theta) \equiv 1$ i we wzorach (2.27) - (2.30) należy przyjąć $\beta(\theta) = 0$, $V_o(\theta) = V_o$.

Rozdział 3. CIECZOPODOBNA REAKCJA CIAŁA

W makroskopowych opisach ciał materialnych termin "materiał" używany jest w dwóch znaczeniach. W jednym z tych znaczeń termin ten używany jest w niesformalizowanym sensie i oznacza odwoływanie się do takich makroskopowo obserwowalnych własności cia-

ła, które można wytłumaczyć /ilościowo lub jakościowo/ w terminach jego budowy molekularnej lub atomowej. Przykładem jest tutaj "kryształiczne ciało stałe" /np. [1], [16]/, czy tzw. "kautczukopodobny materiał" /np. [2], [20]/. W drugim znaczeniu termin materiał, a także terminy oznaczające szczególne typy materiałów /np. wymienione wyżej/, używane są w sformalizowanym sensie ustalonym w ramach fenomenologicznej lokalnej teorii własności fizycznych ciał - tzw. teorii materiałów prostych /np. [11] / lub jej gradientowych uogólnień /np. [4] /*. Cechą wspólną tych dwóch zakresów terminu "materiał" jest ich niezależność od geometrii ciała. Nasuwa to myśl, że pewne własności materiałów prostych mogą być rozważane jako postulaty klasyfikujące ciała z efektem skali i pozwalające na wyodrębnienie fizycznie istotnych charakterystyk tych ciał. Przykładem tego rodzaju postępowania było ustalenie w rozdziale 2 jaki typ więzów jest dopuszczalny dla klasy ciał z efektem skali zawierającej ciała z jakiejś cieczy prostej /wzór (2.24)/. Rozważmy inne własności cieczy prostych. Wiadomo np. że ciecze te są materiałami izotropowymi oraz, że nie posiadają one uprzywilejowanych konfiguracji /np. [11], [21] /.

W przypadku sprężystej cieczy prostej te własności przejawiają się w następującej postaci funkcji naprężeń:

$$3.1 \quad \underline{T} = -p(\varrho) \underline{1} \quad , \quad \varrho = \varrho_0 (\det \underline{E})^{-1}$$

gdzie ϱ jest gęstością masy w aktualnej konfiguracji ciała, ϱ_0 - gęstością masy w konfiguracji odniesienia, \underline{E} - gradientem deformacji ciała oraz funkcja $p: R^+ \rightarrow R$ jest niezależna od wyboru konfiguracji odniesienia. Uogólniając te własności cieczy prostych będziemy mówili, że ciało ma cieczipodobną reakcję jeżeli /w pewnym przedziale $I \subset R^+$ temperatur/:

- jest izotropowym idealnie termosprężystym ciałem, /por. wzory (1.15) - (1.21)/,

^(*) Oczywiście nie chodzi tu o samą zbieżność terminów ale o fenomenologiczny sposób reprezentowania pewnych mikrostrukturalnych własności ciał.

- grupa jego symetrii konfiguracyjnych jest unimodularną grupą $U^+(3)$ /por.wzory (2.22) - (2.24)/,
- funkcja energii swobodnej $\Psi = \Psi(\mathcal{B}_0; \lambda)$ jest niezależna od wyboru konfiguracji odniesienia $\mathcal{B}_0 \subset E^3$.

Sformalizujemy teraz i uściślimy tę koncepcję ciezopodobnej reakcji. Niech $\mathcal{B}_0 \subset E^3$ będzie idealnie termosprężystym ciałem bez więzów oraz $\mathcal{E}^3[\mathcal{B}_0]$ - rodziną wszystkich możliwych przetrzennych konfiguracji ciała \mathcal{B}_0 tj./por.oznaczenia wprowadzone na początku rozdziału 1/:

$$3.2 \quad \mathcal{E}^3[\mathcal{B}_0] = \{ \mathcal{L}(F)(\mathcal{B}_0) : F \in GL^+(3) \}$$

Ponieważ

$$3.3 \quad \forall \mathcal{B} \in \mathcal{E}^3[\mathcal{B}_0] \exists F \in GL^+(3) \mathcal{B} = \mathcal{L}(F)(\mathcal{B}_0)$$

więc możemy określić rodzinę odwzorowań $\Phi_\Theta[\mathcal{B}_0]$, $\Theta \in I \subset R^+$ przepisem:

$$\Phi_\Theta[\mathcal{B}_0] : \mathcal{E}^3[\mathcal{B}_0] \rightarrow R$$

$$3.4 \quad \Phi_\Theta[\mathcal{B}_0](\mathcal{L}(F)(\mathcal{B}_0)) = \Psi(\mathcal{B}_0; F, \Theta)$$

Żądanie niezależności funkcji energii swobodnej od wyboru konfiguracji odniesienia można sformułować jako żądanie istnienia jednoparametrowej rodziny odwzorowań $\Phi_\Theta : \mathcal{E}^3 \rightarrow R$, $\Theta \in I$ takich, że:

$$3.5 \quad \forall \Theta \in I \quad \forall \mathcal{B}_0 \in \mathcal{E}^3 \quad \Phi_\Theta[\mathcal{B}_0] = \Phi_\Theta | \mathcal{E}^3[\mathcal{B}_0]$$

Aby funkcje Φ_Θ mogły opisywać własności fizyczne ciał $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{E}^3$ położonych w izotropowej i jednorodnej przestrzeni fizycznej E^3 , winny spełniać następującą zasadę obiektywności:

$$3.6 \quad \forall \mathcal{B} \in \mathcal{E}^3 \quad \Phi_\Theta(I(\mathcal{B})) = \Phi_\Theta(\mathcal{B})$$

dla dowolnej izometrii $I : E^3 \rightarrow E^3$ postaci $I(\mathcal{X}) = Q\mathcal{X} + \underline{t}$,

$Q \in O(3), t \in E^3$.^{*} Ponieważ interesują nas nielocalne własności funkcji energii swobodnej więc będziemy dalej uważać, że funkcje Φ_{Θ} mogą być w nietrywialny sposób rozszerzone, z zachowaniem warunku (3,6), na rodzinę wszystkich zwartych podzbiorów E^3 ; te rozszerzenia oznaczać będziemy również symbolem Φ_{Θ} . Rozważmy ciała w cieczipodobnej reakcji, których funkcja energii swobodnej spełnia następujący postulat:

Postulat addytywnej nielokalności

Funkcje Φ_{Θ} , spełniające warunki (3.4)-(3.6), są addytywnymi funkcjami zbioru:

$$3.7 \quad \begin{aligned} \Phi_{\Theta}(B_1 \cup B_2) &= \Phi_{\Theta}(B_1) + \Phi_{\Theta}(B_2) - \Phi_{\Theta}(B_1 \cap B_2) \\ \Phi_{\Theta}(\phi) &= 0 \end{aligned}$$

dla wszystkich zwartych podzbiorów $B_1, B_2 \subset E^3$; ϕ - zbiór pusty.

Oznaczmy przez \mathcal{Z}^3 rodzinę wszystkich zwartych i wypukłych podzbiorów E^3 oraz przez $\mathcal{R}^3 = \mathcal{Z}^3 \cap \mathcal{E}^3$ - rodzinę wszystkich wypukłych ciał. W zbiorze \mathcal{Z}^3 możemy zdefiniować metrykę $d: \mathcal{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ w następujący sposób / [22], [23]/. Wprowadźmy oznaczenia:

$$3.8 \quad \begin{aligned} K(\underline{a}, \underline{e}) &= \{x \in E^3 : \|x - \underline{a}\| \leq e\}, \quad 0 < e < \infty, \quad \underline{a} \in E^3 \\ A_e &= \bigcup_{\underline{a} \in A} K(\underline{a}, e), \quad A \in \mathcal{Z}^3 \end{aligned}$$

W tych oznaczeniach:

$$3.9 \quad d(A, B) = \inf_{A \subset B_e, B \subset A_e} e \quad \text{dla } A, B \in \mathcal{Z}^3$$

^(*) Warunek (3.6) jest silniejszy od zasady obiektywności rozważanej w rozdziale 1 /wzór (1.2)/, w której żądano aby $Q \in O^+(3)$. W literaturze spotykane są obie wersje tej zasady /np. [11] i [39]/.

Jeżeli funkcje Φ_θ spełniają zasadę obiektywności, postulat addytywnej nielokalności oraz warunek ciągłości:

$$3.10 \quad \lim_n d(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}) = 0 \Rightarrow \lim_n \Phi_\theta(\mathcal{B}_n) = \Phi_\theta(\mathcal{B})$$

to z Twierdzenia Hadwiger'a / [22] / wynika, że funkcje $\Phi_\theta | \mathcal{R}^3$ są postaci:

$$3.11 \quad \forall \mathcal{B} \in \mathcal{R}^3 \quad \Phi_\theta(\mathcal{B}) = a(\theta)V(\mathcal{B}) + b(\theta)F(\mathcal{B}) + c(\theta)M(\mathcal{B}) + d(\theta)$$

gdzie $a(\theta)$, $b(\theta)$, $c(\theta)$, $d(\theta)$ są skalarami zależnymi od temperatury /niekoniecznie w sposób ciągły/, $V(\mathcal{B})$ - objętość zbioru \mathcal{B} , $F(\mathcal{B})$ - pole powierzchni ograniczającej ten zbiór, $M(\mathcal{B})$ - całkowita krzywizna średnia tej powierzchni. Formuły określające $V(\mathcal{B})$, $F(\mathcal{B})$ i $M(\mathcal{B})$ dla wielu rodzajów trójwymiarowych zbiorów wypukłych /w tym również wielościanów/ podane są w monografii [22]. Jeżeli np. zbiór $\mathcal{B} \in \mathcal{R}^3$ jest ograniczony hiperpowierzchnią $\partial\mathcal{B}$ klasy C^2 oraz $R_i = R_i(x)$ $i = 1, 2$ są promieniami krzywizn głównych w punktach $x \in \partial\mathcal{B}$, to

$$3.12 \quad M(\mathcal{B}) = \int_{\partial\mathcal{B}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) dS$$

Uwaga

Aby spełnione były założenia Twierdzenia Hadwiger'a wystarczy przyjąć, że /oprócz warunków (3.6) i (3.10)/ spełniony jest warunek (3.7) dla dowolnych \mathcal{B}_1 , $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{L}^3$ takich, że $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \in \mathcal{L}^3$.

Funkcja energii swobodnej, odpowiadająca formule (3.11), określona jest wzorem:

$$3.13 \quad \Psi(\mathcal{B}_0; F, \theta) = \Phi_\theta(L(F)(\mathcal{B}_0))$$

$$\mathcal{B}_0 \in \mathcal{R}^3, F \in GL^+(\mathcal{B}), \theta \in I$$

Dalej, mówiąc o ciele posiadającym cieczeropodobną reakcję, będziemy przyjmować, że ciało to jest wypukłe oraz jego funkcja energii

swobodnej jest postaci (3.11), (3.13). Ponieważ ta funkcja energii swobodnej spełnia warunek (1.15) więc określa ciało izotropowe. Jeżeli ciało $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{R}^3$ o cieczipodobnej reakcji nie posiada więzów, to tensor naprężeń Cauchy'ego dla tego ciała jest postaci

$$\underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) = \underline{T}_e(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \quad \text{gdzie /por. (1.11) i (1.12)/:}$$

$$\begin{aligned} 3.14 \quad \underline{T}_e(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) &= \frac{1}{V(\mathcal{B})} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \underline{F}^T = \\ &= a(\Theta) \underline{1} + \underline{T}_s(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} 3.15 \quad \underline{T}_s(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) &= \frac{1}{V(\mathcal{B})} \left[b(\Theta) \frac{\partial \hat{F}}{\partial \underline{F}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) + c(\Theta) \frac{\partial \hat{M}}{\partial \underline{F}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) \right] \underline{F}^T \\ \hat{F}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) &= \underline{F}(L(\underline{F})(\mathcal{B}_0)), \quad \hat{M}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) = M(L(\underline{F})(\mathcal{B}_0)) \\ \mathcal{B} &= L(\underline{F})(\mathcal{B}_0), \quad V(\mathcal{B}) = \det \underline{F} V(\mathcal{B}_0) \end{aligned}$$

Jeżeli ciało o cieczipodobnej reakcji posiada więzy termomechaniczne, to /zgodnie z określeniem cieczipodobnej reakcji/ jedynym dopuszczalnym typem takich więzów jest ściśliwość zależna od temperatury /wzór (2.24)/. Dalej ograniczymy się do rozważania przypadku gdy rozmaiłość więzów \mathcal{M} posiada, przynajmniej lokalnie, przedstawienie (2.24) i (2.25). Dla izotermicznie nieściśliwego ciała o cieczipodobnej reakcji /por.(2.26)/ tensor naprężeń Cauchy'ego ma postać /por.rozdział 2/:

$$\begin{aligned} 3.16 \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) &= -\bar{p} \underline{1} + \underline{T}_e(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \\ \det \underline{F} &= f(\Theta), \quad \bar{p} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Z wzorów (3.14) - (3.16) wynika, że

$$3.17 \quad \lim_{V(\mathcal{B}_0) \rightarrow \infty} \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) = (-\bar{p} + a(\Theta)) \underline{1}$$

co oznacza, że bardzo duże izotermicznie nieściśliwe ciała o ci

czopodobnej reakcji, reagują jak ciała z izotermicznie nieściśliwej, sprężystej cieczy prostej /por.wzór (3.1)/. Naprężenie (3.16) możemy przedstawić w postaci:

$$3.18 \quad \begin{aligned} \mathbb{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) &= (-\bar{p} + \alpha(\Theta)) \mathbb{1} + \frac{1}{V_0(\Theta)} \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \\ \underline{\mathcal{S}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) &= V(\mathcal{B}) \mathbb{T}_s(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \cdot V_0(\Theta) = f(\Theta) V(\mathcal{B}_0) \end{aligned}$$

Człon $(-\bar{p} + \alpha(\Theta)) \mathbb{1}$ opisuje to, co upodabnia reakcję ciała \mathcal{B}_0 do reakcji idealnej cieczy: nieściśliwość w izotermicznych warunkach. Człon $\underline{\mathcal{S}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta)$ jest zależny tylko od zmiany powierzchni ograniczającej ciało przy zachowaniu /w izotermicznych warunkach/ jego objętości; opisuje więc to, co upodabnia reakcję ciała \mathcal{B}_0 do reakcji ciała stałego: sprężystość zmian jego postaci. Istnieją materiały, które wykazują tego rodzaju połączenie cech ciała stałego i cieczy - są to usieciowane polimery /np.wulkanizowane kauczuki; [1], [12]/. Usieciowane polimery wykazują ponadto podobieństwo do gazów polegające na tym, że dla tych materiałów deformacja zmieniająca kształt ciała przy zachowaniu jego objętości, mało wpływa na zmianę energii wewnętrznej / [20], [24]/. Idealizacją takiego podobieństwa do gazów byłoby więc przyjęcie: że

$$3.19 \quad \frac{\partial E}{\partial \underline{F}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) = \underline{0} \quad \text{gdy} \quad V(\mathcal{B}) = \text{const}$$

W zastosowaniach teorii materiałów prostych sprężystych odnoszących się do ciał stałych zwykle przyjmuje się, że każde ciało z takiego materiału posiada konfigurację, która jest wolna od naprężeń / [11] /; taka konfiguracja nazywana jest naturalną. W szczególności np.przy opisie kauczukopodobnych materiałów w ramach teorii materiałów prostych żąda się istnienia naturalnej konfiguracji / [25] /. Uważa się również, że proste ciecze sprężyste /wzór (3.1) / nie posiadają naturalnej konfiguracji / [11] /. Jeżeli \mathcal{B}_0 jest ciałem o cieczipodobnej reakcji /bez więzów lub z więzami/, to warunek istnienia, w przedziale temperatur $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}^+$, beznaprężeniowych konfiguracji tego ciała ma postać:

$$3.20 \quad \forall \theta \in I \quad \exists (\underline{G}(\theta), \theta) \in \mathcal{M} \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{G}(\theta), \theta) = \underline{0}$$

W przypadku więzów izotermicznej nieściśliwości warunek (3.20) jest równoważny dwóm warunkom. Warunkowi określającemu tensor deformacji $\underline{G}(\theta)$ /por. (3.18)/:

$$3.21 \quad \forall \theta \in I \quad \text{dev } \underline{S}(\mathcal{B}_0; \underline{G}(\theta), \theta) = \underline{0}$$

oraz warunkowi określającemu postać reakcji więzów na deformacje $\underline{G}(\theta)$ spełniające warunek (3.20), (3.21) /por. (3.18) i (2.28)/:

$$3.22 \quad \bar{p} = \alpha(\theta) + \frac{1}{3V_0(\theta)} t_r \underline{S}(\mathcal{B}_0; \underline{G}(\theta), \theta)$$

Dystorsyjnym procesem nazywać będziemy odwzorowanie

$$3.23 \quad \begin{aligned} \underline{x} &: I \rightarrow \mathcal{M} \\ \underline{x}(\theta) &= (\underline{G}(\theta), \theta) \end{aligned}$$

gdzie $\underline{x}(\theta)$ spełnia warunek (3.20). Tensory deformacji $\underline{G}(\theta), \theta \in I$ nazywać będziemy dystorsjami termicznymi a konfigurację $\mathcal{B}_\theta = \mathcal{L}(\underline{G}(\theta))(\mathcal{B}_0)$ - naturalną konfiguracją ciała \mathcal{B}_0 w temperaturze $\theta \in I$. Dalej rozważać będziemy tylko przypadek braku więzów z rozmainością konfiguracji termodynamicznych postaci $\mathcal{M} = \text{GL}^+(3) \times I$ /por. rozdział 1/ lub przypadek więzów izotermicznej nieściśliwości określony przez postać (2.24), (2.25) rozmainości \mathcal{M} . Niech G oznacza grupę $\text{GL}^+(3)$ w przypadku braku więzów lub unimodularną grupę $U^+(3)$ - w przypadku więzów izotermicznej nieściśliwości. Jeżeli \underline{x} jest pewnym procesem dystorsyjnym, to:

$$3.24 \quad (F, \theta) \in \mathcal{M} \iff \exists^1 (H, \theta) \in G \times I \quad F = H \underline{G}(\theta)$$

Ponieważ z postaci (0.11), (3.13) funkcji energii swobodnej wynika, że dla $F = H \underline{G}(\theta)$ zachodzą tożsamości:

$$\Psi(\mathcal{B}_\theta; \underline{H}, \theta) = \Psi(\mathcal{B}_\theta; \underline{F}, \theta)$$

3.25

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{H}}(\mathcal{B}_\theta; \underline{H}, \theta) \underline{H}^T = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}}(\mathcal{B}_\theta; \underline{F}, \theta) \underline{F}^T$$

więc /por. (3.14) - (3.16)/:

$$3.26 \quad \forall \theta \in I \quad \forall \underline{H} \in G \quad \underline{T}_e(\mathcal{B}_\theta; \underline{H}G(\theta), \theta) = \underline{T}_e(\mathcal{B}_\theta; \underline{H}, \theta)$$

przy czym:

$$3.27 \quad \forall \theta \in I \quad \exists \mathcal{B}_\theta \in \mathcal{E}^3[\mathcal{B}_0] \quad \underline{T}(\mathcal{B}_\theta; \underline{1}, \theta) = \underline{0}$$

gdzie \mathcal{B}_θ jest naturalną konfiguracją ciała \mathcal{B}_0 w temperaturze θ oraz zbiór $\mathcal{E}^3[\mathcal{B}_0]$ zdefiniowany jest wzorem (3.2) przy $\mathcal{B}_0 \in \mathcal{R}^3$. Wzory (3.26) i (3.27) oznaczają, że warunek (3.20) pozwala sprowadzić opis cieczopodobnej reakcji ciała izotermicznie nieściśliwego do opisu cieczopodobnej reakcji ciała nieściśliwego o naturalnej konfiguracji odniesienia.

W rozdziale 2 pracy wskazano, że jeżeli ciało posiada więzy, to brak dysypacji nie pociąga za sobą znikania efektów prędkościowych. W przypadku izotermicznie nieściśliwych ciał o cieczopodobnej reakcji tensor naprężeń, realizujący przypadek bezdysypatywnych efektów prędkościowych, posiada postać:

$$3.28 \quad \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\gamma}) = -(\bar{p} + p(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\gamma})) \underline{1} + \underline{T}_e(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$$

$$\underline{\lambda} = (\underline{F}, \theta), \quad \underline{\gamma} = (\underline{D}, \dot{\theta}); \quad \det \underline{F} = f(\theta), \quad \text{tr } \underline{D} = \beta(\theta) \dot{\theta}; \quad \beta = f'/f$$

Pokażemy, że jeżeli spełniony jest warunek:

$$3.29 \quad \forall \underline{\lambda} \in \mathcal{M} \quad p(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{0}) = 0$$

to postać (3.28) naprężeń można uzgodnić z warunkiem (3.20). Aby takie uzgodnienie było możliwe winien istnieć dystorsyjny proces $\underline{x} = \underline{x}(\theta)$, $\theta \in I$ taki, że jeśli $\theta = \theta(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ jest dowol-

ną zmianą temperatury, w czasie oraz oznaczymy

$$\begin{aligned}
 \underline{\lambda}_\theta(t) &= (\underline{F}_\theta(t), \theta(t)), \quad \underline{F}_\theta(t) = \underline{G}(\theta(t)) \\
 3.30 \quad \underline{\gamma}_\theta(t) &= (\underline{D}_\theta(t), \dot{\theta}(t)) \\
 \underline{D}_\theta(t) &= \frac{1}{2} (\underline{L}_\theta(t) + \underline{L}_\theta(t)^T), \quad \underline{L}_\theta(t) = \dot{\underline{F}}_\theta(t) \underline{\underline{G}}_\theta(t)
 \end{aligned}$$

to:

$$3.31 \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad p(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}_\theta(t), \underline{\gamma}_\theta(t)) = 0$$

Warunek (3.31) będzie spełniony tylko wtedy gdy funkcja $p = p(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\gamma})$ jest postaci:

$$\begin{aligned}
 3.32 \quad p(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}, \underline{\gamma}) &= \varphi(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta, \underline{D} - \underline{D}(\theta)\dot{\theta}) \\
 \varphi(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta, \underline{D}) &= 0
 \end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned}
 3.33 \quad \underline{D}(\theta) &= \frac{1}{2} (\underline{L}(\theta) + \underline{L}(\theta)^T) \\
 \underline{L}(\theta) &= \frac{d\underline{G}(\theta)}{d\theta} \underline{\underline{G}}^{-1}(\theta), \quad \theta \in I
 \end{aligned}$$

W niniejszej pracy nie będziemy omawiać szerzej tego bezdysypatywnego efektu prędkościowego i poprzestaniemy tylko na powyższym zasygnalizowaniu jego termodynamicznej dopuszczalności. Zauważmy, że termodynamiczny opis własności fizycznych wypukłego ciała o cieczipodobnej reakcji, sprowadza się do czterech skalarnych funkcji temperatury: $a(\theta)$, $b(\theta)$, $c(\theta)$ i $d(\theta)$. /por. (3.11), (3.13)/. W szczególności własności mechaniczne tego ciała /w zakresie temperatur $I \subset \mathbb{R}^+$ / są jednoznacznie określone przez trzy z tych funkcji: $a(\theta)$, $b(\theta)$ i $c(\theta)$. /por. (3.14), (3.15)/. Przy tym jeśli we wzorze (3.15) $b(\theta) \neq 0$ lub $c(\theta) \neq 0$, to funkcja naprężeń (3.14) nie określa żadnego materiału prostego. Jeżeli $b(\theta) \equiv 0$ i $c(\theta) \equiv 0$ to funkcja naprężeń (3.14) określa tylko trywialny materiał prosty. Widzimy więc, że dla klasy \mathcal{R}^3 ciał istnieją niezależne od geometrii tych ciał funkcje, które

jednoznacznie określają ich nielokalną reakcję naprężeniową. Można więc, zgodnie z intuicją pojęcia materiału uważać, że funkcje te opisują /dla temperatur $\theta \in I$ oraz ciał wypukłych

$\mathcal{B}_0 \in \mathcal{R}^3$ / pewien nielokalny materiał. Materiał ten nazwiemy /nielokalnym/ materiałem o cieczopodobnej reakcji /bez więzów lub z więzami ściśliwości zależnej od temperatury/.

W niniejszej pracy porównanie cieczopodobnej reakcji ciał wypukłych z własnościami niektórych realnych materiałów, przeprowadzimy dla ciał \mathcal{B}_0 w kształcie kuli lub walca kołowego.

Porównanie to oprzemy na rozważaniu reakcji tych ciał na czystą deformację zachowującą kształt danego ciała. Doświadczenia realizujące te deformacje ciał \mathcal{B}_0 : wszechstronne ściskanie lub jednoosiowe rozciąganie, należą do podstawowych doświadczeń przy badaniu własności mechanicznych materiałów. Istotną przeszkodą

w przeprowadzeniu tej analizy jest nieznanostwo postaci funkcji $F(\mathcal{B}_0; E)$ i $\hat{M}(\mathcal{B}_0; E)$ dla ogólnej deformacji F ciała \mathcal{B}_0

Analiza taka jest jednak niezbędnym testem nie tylko koncepcji cieczopodobnej reakcji ciała ale także - prezentowanego tu sposobu opisu efektu skali. Możemy jednak postąpić w następujący sposób. Rozważmy kulę /lub kołowy walec/ jako termodynamiczny układ, którego przestrzenne konfiguracje są tylko kulami /lub odpowiednio - tylko kołowymi walcami/. Dla takiego układu można powtórzyć bez istotnych zmian rozważania rozdziałów 1, 2, 4 oraz przyjąć funkcję energii swobodnej postaci (3.11), (3.13). Otrzymane w ten sposób dwa modele efektu skali, oparte na koncepcji cieczopodobnej reakcji ciała, są formalnie niezależne od siebie i nie dadzą się wyprowadzić z ogólnego przypadku cieczopodobnej reakcji ciała.

Rozdział 4. DIPOLOWE RÓWNANIE BILANSU

W niniejszym rozdziale zaproponujemy, w oparciu o regułę interpretacyjną dla uogólnionych sił termodynamicznych wprowadzoną w rozdziale 1, model dynamiki ciała z efektem skali. Niech $\mathcal{B}_0 \subset E^3$ będzie zwartym i spójnym zbiorem, którego brzeg $\partial\mathcal{B}_0$ jest dwuwymiarową orientowalną rozmaitością w E^3 . Zbiór

ten rozważać będziemy jako konfigurację odniesienia ciała. Aktualne konfiguracje przestrzenne ciała określone są przez krzywe tensorowe walencji $\mathbb{B} = \underline{F}(t)$, $t \geq 0$ takie, że $J(t) = \det \underline{F}(t) > 0$; przyjmiemy dodatkowo, że $\underline{F}(0) = \underline{1}$. Przez \mathbb{B}_t oznaczать będziemy aktualną konfigurację ciała w chwili $t \geq 0$ tj.:

$$4.1 \quad \mathbb{B}_t = \{ \underline{x} \in E^3 : \exists \underline{X} \in \mathbb{B}_0 \quad \underline{x} = \underline{F}(t) \underline{X} \}$$

Jeżeli $\underline{T}(\mathbb{B}_0; t)$ jest jednorodnym tensorem naprężeń Cauchy'ego w konfiguracji \mathbb{B}_t /postaci określonej przez (1.12), (1.30) lub (2.5)/, to przez $\hat{\underline{T}}(\mathbb{B}_0; t)$ oznaczать będziemy odpowiadający mu tensor naprężeń Pioli-Kirchhoffa w konfiguracji \mathbb{B}_0 :

$$4.2. \quad \hat{\underline{T}}(\mathbb{B}_0; t) = J(t) \underline{T}(\mathbb{B}_0; t) \underline{F}^*(t), \quad \underline{F}^* = \underline{F}^{-1T}$$

a przez $\underline{N}(\mathbb{B}_0; t)$ - uogólnioną siłę termodynamiczną działającą w konfiguracji \mathbb{B}_0 /por. (1.26), (1.27)/:

$$\underline{N}(\mathbb{B}_0; t) = - \underline{S}(\mathbb{B}_0; t) \underline{F}^*(t)$$

$$4.3 \quad \underline{S}(\mathbb{B}_0; t) = V(t) \underline{T}(\mathbb{B}_0; t)$$

$$V(t) = \text{vol } \mathbb{B}_t = J(t) V(\mathbb{B}_0)$$

Wzór (4.3) jest uogólnieniem wzorów (1.7), (1.11), (1.12), (1.26), (1.27) na przypadek (4.2).

Oznaczmy przez $\underline{t}(\mathbb{B}_0; \underline{x}, t) = - \hat{\underline{T}}(\mathbb{B}_0; t) \hat{\underline{n}}(\underline{x})$, $\underline{x} \in \partial \mathbb{B}_0$ pole sił kontaktowych działających na brzeg $\partial \mathbb{B}_0$ konfiguracji \mathbb{B}_0 i wywołanych naprężeniem $\hat{\underline{T}}(\mathbb{B}_0; t)$ /por. (1.23)/. Dipolowy moment tego pola, liczony względem środka masy ciała w konfiguracji \mathbb{B}_0 , określony jest wzorem:

$$4.4 \quad \underline{M}(\mathbb{B}_0; t) = \int_{\partial \mathbb{B}_0} \underline{x} \otimes \underline{t}(\mathbb{B}_0; \underline{x}, t) dS(\underline{x})$$

Z (4.3) i (4.4) wynika wzór

$$4.5 \quad \underline{N}(\mathbb{B}_0; t) = \underline{M}(\mathbb{B}_0; t)^T$$

przyjęty w niniejszej pracy za regułę ustalającą fizyczny sens uogólnionej siły termodynamicznej /por.rozdział 1/. Oznacza to, że model dynamiki ciała w jednorodnym procesie termodynamicznym winien opierać się nie na bilansie sił /zewnętrznych i wewnętrznych/ działających na ciało, ale na bilansie momentów dipolowych tych sił.

Oznaczmy przez $\underline{b}(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \text{Int } \mathcal{B}_0$ pole masowych sił zewnętrznych działających w konfiguracji \mathcal{B}_0 w chwili t , przez $\underline{s}(\underline{x}, t)$, $\underline{x} \in \partial \mathcal{B}_0$ - pole powierzchniowych sił zewnętrznych działających na brzeg $\partial \mathcal{B}_0$ w chwili t oraz przez $\underline{v}(\underline{x}, t) = \dot{\underline{F}}(t)\underline{x}$, $\underline{x} \in \mathcal{B}_0$ - pole prędkości cząstek ciała. Rozważmy następujące momenty dipolowe względem środka masy ciała w konfiguracji \mathcal{B}_0 : $\underline{P}(\mathcal{B}_0; t)$ - moment dipolowy pędu ciała, $\underline{M}_b(\mathcal{B}_0; t)$ - produkcja momentu dipolowego w ciele oraz $\underline{M}_p(\mathcal{B}_0; t)$ - strumień momentu dipolowego przez brzeg $\partial \mathcal{B}_0$ ciała.

Momenty te przyjmiemy w postaci:

$$4.6 \quad \underline{P}(\mathcal{B}_0; t) = \int_{\mathcal{B}_0} \underline{x} \otimes \underline{v}(\underline{x}, t) dm(\underline{x})$$

gdzie $dm(\underline{x}) = \rho_0 dV(\underline{x})$, $\rho_0 = m/V_0$, $V_0 = \text{vol } \mathcal{B}_0$, m - całkowita masa ciała,

$$4.7 \quad \underline{M}_b(\mathcal{B}_0; t) = \int_{\mathcal{B}_0} \underline{x} \otimes \underline{b}(\underline{x}, t) dm(\underline{x})$$

oraz

$$\underline{M}_p(\mathcal{B}_0; t) = \underline{M}(\mathcal{B}_0; t) + \underline{M}_s(\mathcal{B}_0; t)$$

4.8

$$\underline{M}_s(\mathcal{B}_0; t) = \int_{\partial \mathcal{B}_0} \underline{x} \otimes \underline{s}(\underline{x}, t) dS(\underline{x})$$

gdzie $\underline{M}(\mathcal{B}_0; t)$ określone jest wzorem (4.4). Całkowita siła działająca na środek masy ciała wynosi:

$$4.9 \quad \underline{K}(\mathcal{B}_0; t) = \int_{\mathcal{B}_0} \underline{b}(\underline{x}, t) dm(\underline{x}) + \int_{\partial \mathcal{B}_0} \underline{s}(\underline{x}, t) dS(\underline{x})$$

Całkowity moment dipolowy działający na środek masy ciała wynosi:

$$4.10 \quad \underline{M}_c(\mathcal{B}_0; t) = \underline{M}_b(\mathcal{B}_0; t) + \underline{M}_p(\mathcal{B}_0; t)$$

Ze wzorów (4.3), (4.5) wynika, że

$$4.11 \quad \underline{M}(\mathcal{B}_0; t) = -V(t) \underline{\dot{F}}(t) \underline{T}(\mathcal{B}_0; t)$$

Wzór (4.6) można napisać w postaci

$$4.12 \quad \underline{P}(\mathcal{B}_0; t) = \underline{J}(\mathcal{B}_0) \underline{\dot{F}}^T$$

gdzie $\underline{J}(\mathcal{B}_0)$ jest tensorem bezwładności ciała \mathcal{B}_0 liczonym względem jego środka masy:

$$4.13 \quad \underline{J}(\mathcal{B}_0) = \int_{\mathcal{B}_0} \underline{X} \otimes \underline{X} dm(\underline{X})$$

W nieentropowych procesach izotermicznych funkcja energii swobodnej Ψ redukuje się do funkcji energii wewnętrznej \underline{E} . Jeżeli \mathcal{B}_0 jest idealnie termosprężystym ciałem /rozd. 1/, to w takich procesach jego reakcja naprężeniowa redukuje się do reakcji hipersprężystej. Dla tego przypadku w monografii [12] /por. także [13]/ zaproponowano model dynamiki ciała \mathcal{B}_0 będący naturalnym uogólnieniem klasycznej mechaniki hamiltonowskiej układu punktów materialnych. W modelu tym funkcja $H(\underline{F}) = \underline{E}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta)$ pełni rolę ^{energii potencjalnej} hamiltonianu a konfiguracyjną przestrzenią jest grupa tensorów walencji 2 o dodatnim wyznaczniku. Wtedy równania ruchu ciała \mathcal{B}_0 można wyprowadzić korzystając z odpowiednika klasycznej zasady wariacyjnej dynamiki układu punktów materialnych. Jeżeli na ciało nie działają zewnętrzne siły ($\underline{b} = \underline{0}$, $\underline{s} = \underline{0}$), to równania te przyjmują postać:

$$4.14 \quad \underline{J}(\mathcal{B}_0) \underline{\dot{F}}^T = \underline{N}(\mathcal{B}_0; t)^T$$

$$\underline{K}(\mathcal{B}_0; t) = \underline{0}$$

gdzie $\underline{N}(\mathcal{B}_0; t)$ określone jest wzorami (1.7) i (1.1) przy $\Theta = \text{const}$, $S = \text{const}$ a $\underline{K} = \underline{0}$ oznacza, że ciało posiada nie-

ruchomy środek masy. W niniejszej pracy przyjmiemy, uogólniając równanie (4.14), następujący

Postulat bilansu

W dowolnym jednorodnym procesie termodynamicznym obowiązuje prawo zachowania momentu dipolowego pędu ciała:

$$4.15 \quad \dot{\underline{P}}(\mathcal{B}_0; t) = \underline{M}_c(\mathcal{B}_0; t)$$

przy czym powinien być spełniony warunek nieruchomości środka masy:

$$4.16 \quad \underline{K}(\mathcal{B}_0; t) = 0$$

Równanie (4.15) można napisać w postaci:

$$4.17 \quad \underline{F} \underline{J}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta, \underline{D}, \dot{\theta}) \underline{F}^T = -\nabla \underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta, \underline{D}, \dot{\theta}) + \underline{F} \underline{M}_z(\mathcal{B}_0; t)$$

$$\underline{M}_z = \underline{M}_b + \underline{M}_s$$

gdzie $\underline{T}(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \theta, \underline{D}, \dot{\theta})$ jest tensorem naprężeń Cauchy'ego omawianym w rozdziałach 1 i 2, $\nabla = \nabla(\mathcal{B}_0) \det \underline{F}$.

W przypadku braku więzów procesy dopuszczalne termodynamicznie i dynamicznie opisywane są przez zamknięty układ równań (1.40), (4.17). W przypadku ciała idealnie termosprężystego z więzami zamiast równania (1.40) występuje równanie (2.18) a w ogólnym przypadku ciała z więzami - równanie (1.9) wraz ze wzorami: (1.5), (4.3), (1.5)₂ i (2.5).

Warto w tym miejscu wspomnieć, że w pracy [13] rozpatrywane jest również równanie postaci (4.17) ale przy pominięciu momentu dipolowego \underline{M}_s oraz określeniu $\underline{T}(\mathcal{B}_0; t)$ formułą (1.29). Należy podkreślić, że zarówno sens jak i metoda wprowadzenia tego równania przyjęta w pracy [13], różnią się istotnie od rozważań przedstawionych w niniejszej pracy. Różnica ta wynika z okoliczności, że w pracy [13] jednorodne deformacje interpretuje się jako postać więzów narzuconych na niejednorodne continuum i aby wyeliminować siły reakcji realizując te więzy całkuje się odpowiednio stronami lokalne "divergentne" równanie bilansu pędu

/tzw. równanie ruchu Cauchy'ego - [11]/. Ten sposób postępowania wymaga między innymi przyjęcia, że tensor naprężeń Cauchy'ego w ciele $\mathbb{T}(\underline{x}, t)$ jest niejednorodny o $\text{div} \mathbb{T} \neq 0$ oraz określenia $\mathbb{T}(\mathbb{B}_0; t)$ formułą (1.29). Widać, że metodą prezentowaną w pracy [13] nie można otrzymać równań postaci (4.17) dla jednorodnego, jednorodnie zdeformowanego ciała.

Rozdział 5. ELASTOMERYCZNE CIAŁO O CIECZOPODOBNEJ REAKCJI

Materiały, dla których wewnętrzna energia nie zależy od deformacji, nazywane są idealnymi elastomerami [25]. Jako idealne elastomery są np. rozważane kauczukopodobne materiały /np. [24], [25]/. W izotermicznych procesach fizycznie właściwym założeniem jest przyjęcie, że idealne elastomery /a w szczególności kauczukopodobne materiały/ posiadają więzy izotermicznej nieściśliwości /[24], [25]/. W niniejszej pracy elastomerycznym nazywać będziemy idealnie termosprężyste i izotermicznie nieściśliwe ciało, które spełnia warunek /por. (3.19)/:

$$5.1 \quad \frac{\partial E_e}{\partial F}(\mathbb{B}_0, F, \theta) = 0 \quad \text{dla } \theta \in I$$

gdzie E_e jest częścią energii wewnętrznej niezależną od wyboru więzów i określoną wzorem (2.17) /por. wzory (2.5) - (2.7)/. W rozdziale 3 /komentarz do wzoru (3.18)/ wskazaliśmy na istnienie pewnej analogii między specyfiką własności mechanicznych usieciowanych polimerów a charakterem funkcji naprężeń dla izotermicznie nieściśliwego ciała o cieczopodobnej reakcji. Najdalej posunięta jest ta analogia w przypadku elastomerycznych ciał o cieczopodobnej reakcji /por. wzór (3.19) i poprzedzający go komentarz/. Okoliczność ta powoduje, że wśród ciał o cieczopodobnej reakcji z więzami najbardziej interesujący, z uwagi na możliwość zastosowań, jest przypadek elastomerycznego ciała o cieczopodobnej reakcji. W tym przypadku warunek (5.1) jest równoważny przyjęciu, że wzorach (3.14) - (3.18):

$$5.2 \quad a(\theta) = \theta a_0, \quad b(\theta) = \theta b_0, \quad c(\theta) = \theta c_0$$

gdzie a_0 , b_0 , c_0 są niezależnymi od temperatury stałymi materiałowymi dla nielokalnego "elastomerycznego materiału o cieczopodobnej reakcji" /w sensie terminu "materiał" sprecyzowanym w końcu rozdziału 3/. Reakcja naprężeniowa jest wtedy określona wzorem (3.16) przy tensorze ekstra-naprężenia $T_e(\mathcal{B}_0, F, \theta)$ postaci:

$$T_e(\mathcal{B}_0; F, \theta) = \theta T_0(\mathcal{B}_0; F, \theta)$$

$$5.3 \quad T_0(\mathcal{B}_0; F, \theta) = a_0 \mathbf{1} + \frac{1}{V_0(\theta)} \underline{S}_0(\mathcal{B}_0; F), \quad V_0(\theta) = \int(\theta) V_0$$

$$\underline{S}_0(\mathcal{B}_0; F) = \left[b_0 \frac{\partial \hat{F}}{\partial F}(\mathcal{B}_0; F) + c_0 \frac{\partial \hat{M}}{\partial F}(\mathcal{B}_0; F) \right] F^T$$

gdzie $V_0 = V(\mathcal{B}_0)$ a funkcje \hat{F} i \hat{M} zostały zdefiniowane we wzorze (3.15). Równanie ewolucji temperatury (2.18) przyjmuje tu postać:

$$5.4 \quad K(\theta) \dot{\theta} = V_0(\theta) \theta T_0(\mathcal{B}_0; F, \theta) \cdot \underline{D} + Q_e(\mathcal{B}_0; F, \theta, \underline{D}, \dot{\theta})$$

gdzie $K(\theta)$ - pojemność cieplna zdefiniowana wzorem (2.19), \underline{D} - tensor zdefiniowany we wzorze (1.32) oraz:

$$5.5 \quad Q_e(\mathcal{B}_0; F, \theta, \underline{D}, \dot{\theta}) = \theta \dot{S}_e(\mathcal{B}_0; F, \theta)$$

Przyjmujemy, jak zwykle to się robi /por. [11] /, że /por. (2.19), (3.11), (3.13) i (5.2)/:

$$5.6 \quad K(\theta) = -\theta d''(\theta) > 0$$

Dystorsje termiczne $\underline{G}(\theta), \theta \in I$ są określone równaniem /por. (3.21) i (5.3) /:

$$5.7 \quad V_0(\theta) \operatorname{dev} T_0(\mathcal{B}_0; \underline{G}(\theta), \theta) = \operatorname{dev} \underline{S}_0(\mathcal{B}_0; \underline{G}(\theta)) = \underline{Q}$$

$$\det \underline{G}(\theta) = \int(\theta), \theta \in I$$

Dystorsje termiczne określają naturalne konfiguracje $\mathcal{B}_\theta =$

$\mathcal{B}_\Theta = I(\underline{G}(\Theta))(\mathcal{B}_0)$ ciała w temperaturze $\Theta \in I$. Względem tych konfiguracji /por. (3.25)/:

$$5.8 \quad \begin{aligned} T_0(\mathcal{B}_0; \underline{H}(\Theta), \Theta) &= T_0(\mathcal{B}_\Theta; \underline{H}, \Theta) \\ \det \underline{H} &= 1 \end{aligned}$$

Ze wzorów (2.17) i (5.3) - (5.5) wynika, że przyrost ekstre-entropii S_e /por. (2.5)/ w jednorodnym procesie termodynamicznym, może być przedstawiony w postaci:

$$5.9 \quad \begin{aligned} dS_e(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) &= -V_0(\Theta) T_0(\mathcal{B}_0; \underline{F}, \Theta) \cdot \delta \underline{D} + K(\Theta) \frac{d\Theta}{\Theta} \\ \det \underline{F} &= \underline{f}(\Theta) \end{aligned}$$

gdzie oznaczono

$$5.10 \quad \begin{aligned} \delta \underline{D} &= \underline{D} dt = \frac{1}{2} (\delta \underline{L} + \delta \underline{L}^T) \\ \delta \underline{L} &= \underline{L} dt = d\underline{F} \underline{F}^{-1} \end{aligned}$$

Niech $\underline{e}_i, i=1,2,3$ będzie ortonormalną bazą przestrzeni E^3 . Rozważmy walec kołowy \mathcal{B}_0 o osi symetrii równoległej do wektora \underline{e}_3 , środka symetrii w punkcie \mathcal{Q} , wysokości h oraz promieniu podstawy R , poddany działaniu czystej deformacji zachowującej jego kształt, tj.:

$$5.11 \quad \begin{aligned} \underline{F} &= \lambda_h \underline{E}_h + \lambda_R \underline{E}_R, \quad \lambda_h, \lambda_R \in \mathbb{R}^+ \\ \underline{E}_h &= \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, \quad \underline{E}_R = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \\ \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

Warunek izotermicznej nieściśliwości oznacza, że

$$5.12 \quad \lambda_h = \lambda, \quad \lambda_R = \int^{\lambda} \frac{1}{\lambda} d\lambda, \quad \lambda > 0$$

Tensor naprężeń odpowiadający tensorowi deformacji (5.11), (5.12) ma postać:

$$5.13 \quad \underline{T} = -\bar{p} \underline{1} + \underline{T}_e = T_h \underline{E}_h + T_R \underline{E}_R$$

$$\underline{T}_e = T_{eh} \underline{E}_h + T_{eR} \underline{E}_R$$

$$T_h = -\bar{p} + T_{eh}, \quad T_R = -\bar{p} + T_{eR}$$

Tensory \underline{S}_o i \underline{T}_o są postaci /dla $\det \underline{F} = f(\theta)$ /:

$$5.14 \quad \underline{S}_o(\mathcal{B}_o; \underline{F}) = S_{oh}(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta) \underline{E}_h + S_{oR}(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta) \underline{E}_R$$

$$\underline{T}_o(\mathcal{B}_o; \underline{F}, \theta) = q(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta) \underline{1} + T_o(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta) \underline{E}_h$$

gdzie oznaczono:

$$5.15 \quad q(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta) = a_o + \frac{1}{v_o(\theta)} S_{oR}(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta)$$

$$T_o(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta) = \frac{1}{v_o(\theta)} S_o(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta)$$

$$S_o(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta) = S_{oh}(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta) - S_{oR}(\mathcal{B}_o; \lambda, \theta)$$

Rozważmy dystorsje termiczne postaci:

$$5.16 \quad \underline{G}(\theta) = \alpha_h(\theta) \underline{E}_h + \alpha_R(\theta) \underline{E}_R$$

$$\alpha_h(\theta) = \alpha(\theta), \quad \alpha_R(\theta) = f^{1/2}(\theta) \alpha^{-1/2}(\theta)$$

Równanie (5.7) przyjmuje wtedy postać:

$$5.17 \quad T_o(\mathcal{B}_o; \alpha(\theta), \theta) = 0$$

$$\alpha(\theta) > 0, \quad \theta \in I$$

Reakcja naprężeniowa więzów realizująca te dystorsje termiczne określona jest wzorem /por. (3.22), (5.15) i (5.17)/:

$$5.18 \quad \bar{p} = \theta q(\mathcal{B}_o; \alpha(\theta), \theta)$$

W przypadku tzw. prostego rozciągania określonego przez żądanie aby tensorom deformacji \underline{F} postaci (5.11), (5.12) towarzyszyły naprężenia $\underline{T}(\mathcal{B}_o; \underline{F}, \theta)$ postaci:

$$5.19 \quad T(\mathcal{B}_\Theta; \underline{E}, \Theta) = T(\mathcal{B}_\Theta; \lambda, \Theta) \underline{E}_h$$

ze wzorów (3.16), (5.3), (5.14), (5.15) wynika, że:

$$5.20 \quad T(\mathcal{B}_\Theta; \lambda, \Theta) = \Theta T_0(\mathcal{B}_\Theta; \lambda, \Theta)$$

Niech \mathcal{B}_Θ będzie walcem o wysokości $h(\Theta)$ i promieniu podstawy $R(\Theta)$, określonym przez dystorsję termiczną (5.16) oraz konfigurację odniesienia \mathcal{B}_0 tj.:

$$5.21 \quad h(\Theta) = h \alpha_h(\Theta), \quad R(\Theta) = R \alpha_R(\Theta)$$

Przyjmując we wzorze (5.8) dystorsje termiczne postaci (5.16) oraz tensory deformacji \underline{H} zachowujące objętość walca \mathcal{B}_Θ postaci:

$$5.22 \quad \underline{H} = \mu_h \underline{E}_h + \mu_R \underline{E}_R$$

$$\mu_h = \mu, \quad \mu_R = \mu^{-1/2}$$

Otrzymujemy, że tensor \underline{S}_0 /por. (5.3)/ jest postaci:

$$5.23 \quad \underline{S}_0(\mathcal{B}_\Theta; \underline{H}) = \sigma_{0h}(\mathcal{B}_\Theta; \mu) \underline{E}_h + \sigma_{0R}(\mathcal{B}_\Theta; \mu) \underline{E}_R$$

Oznaczając

$$5.24 \quad t_0(\mathcal{B}_\Theta; \mu) = \frac{1}{V_0(\Theta)} [\sigma_{0h}(\mathcal{B}_\Theta; \mu) - \sigma_{0R}(\mathcal{B}_\Theta; \mu)]$$

$$t_\Theta(\mathcal{B}_\Theta; \mu) = \Theta t_0(\mathcal{B}_\Theta; \mu), \quad V_0(\Theta) = \text{vol } \mathcal{B}_\Theta$$

możemy przypadek prostego rozciągania w temperaturze $\Theta \in I$ izotermicznie nieściśliwego walca \mathcal{B}_0 sprowadzić do prostego rozciągania nieściśliwego walca \mathcal{B}_Θ , gdyż:

$$5.25 \quad T(\mathcal{B}_0; \mu \alpha(\Theta), \Theta) = t_\Theta(\mathcal{B}_\Theta; \mu)$$

$$T_0(\mathcal{B}_0; \mu \alpha(\Theta), \Theta) = t_0(\mathcal{B}_\Theta; \mu)$$

przy czym

$$5.26 \quad \forall \theta \in I \quad t_{\theta}(B_{\theta}; 1) = 0$$

Przyrost ekstra-entropii w procesie prostego rozciągania określa wzór /por. (5.9)/:

$$5.27 \quad \Theta dS_e = -V_0(\theta) T(B_{\theta}; \lambda, \theta) \frac{d\lambda}{\lambda} + K(\theta) d\theta$$

Dla izotermicznych procesów:

$$5.28 \quad \begin{aligned} \Theta dS_e &= -V_0(\theta) T(B_{\theta}; \lambda, \theta) \frac{d\lambda}{\lambda} = \\ &= -V_0(\theta) t_{\theta}(B_{\theta}; \mu) \frac{d\mu}{\mu}, \quad \Theta = \text{const} \end{aligned}$$

Odwracalnemu i izotermicznemu prostemu rozciąganiu lub ścisaniu elastomerycznego walca nie posiadającego naprężeń własnych /wzór (5.26)/, powinno towarzyszyć wydzielanie się ciepła /por. [25], [30]/ tj.:

$$5.29 \quad dQ_e = \Theta dS_e < 0 \quad \text{dla } \mu \neq 1$$

Dla funkcji $t_{\theta} = t_{\theta}(B_{\theta}; \mu)$, $\mu > 0$ spełniającej warunek (5.26), warunek (5.28), (5.29) równoważny jest warunkowi:

$$5.30 \quad \forall \theta \in I \quad t_{\theta}(B_{\theta}; \mu)(\mu - 1) > 0 \quad \text{dla } \mu \neq 1$$

Warunek (5.26), (5.30) nazwiemy "własnością izotermicznej rozciągłości". Jest to więc własność polegająca na tym, że przy prostym rozciąganiu lub ścisaniu walcowej próbki, pozbawionej naprężeń w stanie niezdeformowanym, deformacji ściskającej $0 < \mu < 1$ towarzyszą naprężenia ściskające a deformacji rozciągającej $\mu > 1$ - naprężenia rozciągające.

Izotermiczna rozciągłość jest np. obserwowana w izotermicznych doświadczeniach z kauczukopodobnymi materiałami /np. [20], [25]/. Doświadczenia te /a także analogiczne doświadczenia dotyczące sprężystej reakcji innych materiałów/ wskazują również, że

funkcja t_θ powinna monotonicznie rosnąć wraz ze wzrostem deformacji μ tj., że winna być:

$$5.31 \quad \forall \theta \in I \quad \frac{\partial t_\theta(\mathcal{B}_0; \mu)}{\partial \mu} > 0 \quad \text{dla } \mu > 0$$

Rozważmy teraz dynamikę rozciągania /lub ściskania/ walca kołowego siłami zewnętrznymi w postaci równomiernych ciągnięć /lub ciśnień/ przyłożonych do jego podstaw. Jeżeli $\mathcal{B}(\underline{F})$ jest aktualną konfiguracją walca \mathcal{B}_0 określoną przez jego deformację postaci (5.11), to siły t_θ /odniesione do aktualnego przekroju walca/ są postaci:

$$5.32 \quad \underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{F}, t) = \sigma(\underline{x}, \underline{F}, t) \underline{n}(\underline{x}, \underline{F}), \quad \underline{x} = x^i \underline{e}_i \in \partial \mathcal{B}(\underline{F})$$

$$\sigma(\underline{x}, \underline{F}, t) = \begin{cases} \sigma(\underline{F}, t) \text{ dla } x^3 = \pm \frac{\lambda_h h}{2}, (x^1)^2 + (x^2)^2 \leq (\lambda_R R)^2 \\ 0 \text{ dla } -\frac{\lambda_h h}{2} < x^3 < \frac{\lambda_h h}{2}, (x^1)^2 + (x^2)^2 = (\lambda_R R)^2 \end{cases}$$

gdzie $\underline{n}(\underline{x}, \underline{F})$ jest wektorem normalnym do brzegu $\partial \mathcal{B}(\underline{F})$ w punkcie $\underline{x} \in \partial \mathcal{B}(\underline{F})$ i skierowanym na zewnątrz $\mathcal{B}(\underline{F})$ oraz $\sigma(\underline{F}, t)$ - ciągnięcie /lub ciśnienie/ zmieniające się wraz z tensorem deformacji \underline{F} i czasem $t \geq 0$ wg. z góry określonego programu. Dipolowy moment tych sił powierzchniowych jest postaci

$$5.33 \quad \underline{M}_h = \underline{M}_h(\mathcal{B}_0; \underline{F}, t) = \int_{\partial \mathcal{B}(\underline{F})} \underline{x} \otimes \underline{\sigma}(\underline{x}, \underline{F}, t) dS(\underline{x}) = M_h \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3$$

$$M_h = \sqrt{\sigma(\underline{F}, t)}, \quad \sqrt{\sigma} = \hat{\sqrt{\sigma}}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) = J(\underline{F}) \sqrt{\sigma}(\mathcal{B}_0)$$

Jeżeli na ciało nie działają siły masowe, to równania opisujące dynamikę rozważanego czystego rozciągania są postaci /por. rozdział 4 i wzory (5.11), (5.13)/:

$$5.34 \quad \begin{aligned} J_h \ddot{\lambda}_h \lambda_h &= -V T_h + M_h \\ J_R \ddot{\lambda}_R \lambda_R &= -V T_R \end{aligned}$$

gdzie J_h i J_R określają tensor $J(\mathcal{B}_0)$ momentów bezwładności /względem środka masy/ walca kołowego o masie m /wzór (4.13) oraz [35]/:

$$J(\mathcal{B}_0) = J_h E_h + J_R E_R$$

5.35

$$J_h = \frac{1}{12} m h^2, \quad J_R = \frac{1}{4} m R^2$$

W przypadku izotermicznie nieściśliwego walca kołowego, równania (5.34) można napisać w postaci:

$$5.36 \quad [J_h \lambda + \frac{1}{2} J_R f(\theta) \lambda^{-2}] \ddot{\lambda} - \frac{3}{4} J_R f(\theta) \dot{\lambda}^2 \lambda^{-3} = -S_{int} + S_{ext} + S_{term}$$

$$\lambda_h = \lambda, \quad \lambda_R = f^{1/2}(\theta) \lambda^{-1/2}$$

gdzie oznaczono /por. (5.15) i (5.33)/:

$$S_{int} = \theta S_0(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta), \quad S_{ext} = M_h(F, t) \Big|_{\det F = f(\theta)} = V_0(\theta) \sigma(\lambda, \theta, t)$$

5.37

$$S_{term} = \frac{J_R}{2\lambda} f(\theta) [(\frac{1}{2} \beta^2(\theta) + \beta'(\theta)) \dot{\theta}^2 + \beta(\theta) (\ddot{\theta} - \dot{\theta} d)]$$

$$\beta = f'/f, \quad d = \dot{\lambda} \lambda^{-1}, \quad V_0(\theta) = f(\theta) V(\mathcal{B}_0), \quad V(\mathcal{B}_0) = \pi h R^2$$

Równanie (5.4) przyjmuje w tym przypadku postać /por. (2.27) i (5.14)/:

$$5.38 \quad [K(\theta) - V_0(\theta) \beta(\theta) q(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta)] \dot{\theta} - S_0(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta) d = \frac{1}{\theta} Q_e(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta, d, \dot{\theta})$$

Równania (5.36) - (5.38) tworzą zamknięty układ równań opisujący próbę czystego rozciągania izotermicznie nieściśliwego walca kołowego. W izotermicznych procesach układ ten redukuje się do równania (5.36) z $S_{term} = 0$ i $\theta = \text{const}$. Warto również zwrócić uwagę na okoliczność /wynikającą z postaci równań (5.34)/, że w dynamicznej próbie osiowego rozciągania walca kołowego nie można zrealizować /ogólnie biorąc/ stanu prostego rozciągania. W statycznej i izotermicznej próbie osiowego rozciągania / $\dot{\lambda}_h = \dot{\lambda} = \dot{\theta}$, $\dot{\lambda}_R = 0$, $\dot{\theta} = 0$ / izotermicznie nieściśliwego walca kołowego

ten stan naprężeń może być zrealizowany /wzory (5.13) - (5.15), (5.19) i (5.20)/. Z postaci prawej strony równania (5.36) wynika ponadto, że dla opisu dynamiki izotermicznej próby osiowego rozciągania, wystarcza znajomość funkcji naprężeń dla stanu prostego rozciągania w warunkach izotermicznych /wzory (5.25) - (5.31)/. Aby móc określić tę funkcję w jawnej postaci, dokonamy pewnej modyfikacji obiektu naszych rozważań /por.komentarz kończący rozdział 3/.

Rozważmy ciało \mathcal{B}_0 jako termodynamiczny układ, którego wszystkie przestrzenne konfiguracje $\mathcal{B} \subset E^3$ mają postać kołowych walców o wspólnym środku symetrii i wspólnej osi symetrii. Dopuszczalne konfiguracje mechaniczne ciała \mathcal{B}_0 bez więzów mogą być wtedy przyjęte w postaci pary tensorów /por.Dodatek oraz wzór (5.11)/:

$$\underline{E} = (\underline{E}_h, \underline{E}_R)$$

5.39 $\underline{E}_h = \lambda_h \underline{E}_h, \underline{E}_R = \lambda_R \underline{E}_R, \lambda_h, \lambda_R \in \mathbb{R}^+$

a naprężenia Cauchy'ego w ciele mają postać /por.Dodatek/:

$$\underline{T} = (\underline{T}_h, \underline{T}_R)$$

5.40 $\underline{T}_h = T_h \underline{E}_h, \underline{T}_R = T_R \underline{E}_R, T_h, T_R \in \mathbb{R}$

Przestrzeń tensorów postaci (5.40) można utożsamić z grupą \mathcal{M}_0 określoną w Dodatku. Wtedy przestrzenie: konfiguracji termodynamicznych \mathcal{M} oraz stanów termodynamicznych Ω , używane w rozdziale 2 do opisu więzów izotermicznej nieściśliwości, należy rozumieć w sensie ustalonym w Dodatku. Reguły operowania parami liczb tak, aby otrzymać formuły zgodne z przyjętą definicją konfiguracji mechanicznej ciała, zostały podane w Dodatku. Charakterystyki geometryczne walca \mathcal{B}_0 o wysokości h i promieniu podstawy R są następujące /[[22]] /:

$$V_0 = V(\mathcal{B}_0) = \pi h R^2$$

5.41

$$F_0 = F(\mathcal{B}_0) = 2\pi R(R+h)$$

$$M_0 = M(\mathcal{B}_0) = \pi(\pi R + h)$$

Cieczopodobną reakcję ciała, którego konfiguracje termodynamiczne są postaci

$$\underline{\lambda} = (F, \theta) \in \mathcal{M}$$

5.42

$$F = (\lambda_h, \lambda_R) \in \mathcal{M}_0, \theta \in I \subset \mathbb{R}^+$$

opisywać będziemy przez funkcję energii swobodnej Ψ postaci /por.rozdział 3/:

$$\Psi = \Psi(R, h; \underline{\lambda}) = a(\theta)\hat{V}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) + b(\theta)\hat{F}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) + c(\theta)\hat{M}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) + d(\theta)$$

5.43

$$\hat{V}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) = \pi h R^2 \lambda_h \lambda_R^2 = V_0 \det \underline{F}$$

$$\hat{F}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) = 2\pi R(R\lambda_R + h\lambda_h)\lambda_R$$

$$\hat{M}(\mathcal{B}_0; \underline{F}) = \pi(\pi R\lambda_R + h\lambda_h)$$

W przypadku braku więzów tensor naprężeń Cauchy'ego dla ciała o cieczopodobnej reakcji ma postać $\underline{T} = \underline{T}_e(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda})$ gdzie /por.Dodatek/:

$$\underline{T}_e(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) = \frac{1}{\hat{V}(\mathcal{B}_0; \underline{F})} \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{F}}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) \underline{F} = (T_{eh}, T_{eR})$$

5.44

$$T_{eh} = T_{eh}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) = \frac{1}{\hat{V}(\mathcal{B}_0; \underline{F})} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_h}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) \lambda_h$$

$$T_{eR} = T_{eR}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) = \frac{1}{\hat{V}(\mathcal{B}_0; \underline{F})} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_R}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) \lambda_R$$

Stąd:

5.45

$$T_{eh}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) = a(\theta) + \frac{2b(\theta)}{R} \lambda_R^{-1} + \frac{c(\theta)}{R^2} \lambda_R^{-2}$$

$$T_{eR}(\mathcal{B}_0; \underline{\lambda}) = 2a(\theta) + \frac{4b(\theta)}{h} \lambda_h^{-1} + \frac{2b(\theta)}{R} \lambda_R^{-1} + \frac{c(\theta)}{hR} \lambda_h^{-1} \lambda_R^{-1}$$

Dla elastomerycznego ciała o cieczopodobnej reakcji tensor naprężeń Cauchy'ego ma postać /por. (5.13)/:

$$\begin{aligned} \underline{T} &= (\underline{T}_h, \underline{T}_R) \\ 5.46 \quad \underline{T}_h &= -\bar{p} + \underline{T}_{eh}(\mathcal{B}_0; \lambda) \\ \underline{T}_R &= -\bar{p} + \underline{T}_{eR}(\mathcal{B}_0; \lambda) \end{aligned}$$

przy czym /por. (5.2), (5.12)/:

$$\begin{aligned} \underline{T}_e &= \Theta \underline{T}_0, \quad \underline{T}_0 = (\underline{T}_{0h}, \underline{T}_{0R}) \\ \underline{T}_{0h} &= a_0 + t_{0h}, \quad \underline{T}_{0R} = a_0 + t_{0R} \\ 5.47 \quad t_{0h} &= \frac{b_R}{f^{3/2}(\Theta)} \lambda^{3/2} + \frac{c_R}{f(\Theta)} \lambda \\ t_{0R} &= a_0 + \frac{b_R}{f^{3/2}(\Theta)} \lambda^{3/2} + b_h \lambda^{-1} + \frac{c_{R,h}}{f^{3/2}(\Theta)} \lambda^{-3/2} \end{aligned}$$

gdzie oznaczono:

$$\begin{aligned} 5.48 \quad b_R &= \frac{2b_0}{R}, \quad b_h = \frac{4b_0}{h} \\ c_R &= \frac{c_0}{R^2}, \quad c_{R,h} = \frac{\sigma c_0}{hR} \end{aligned}$$

Funkcja naprężeń dla stanu prostego rozciągania jest postaci:

$$\begin{aligned} 5.49 \quad \underline{T} &= (\underline{T}, \Theta), \quad \underline{T} = \Theta \underline{T}_0 \\ \underline{T}_0 &= t_{0h} - t_{0R} \end{aligned}$$

gdzie

$$5.50 \quad \underline{T}_0 = \underline{T}_0(\mathcal{B}_0; \lambda, \Theta) = -a_0 - b_h \lambda^{-1} - \frac{c_{R,h}}{f^{3/2}(\Theta)} \lambda^{3/2} + \frac{c_R}{f(\Theta)} \lambda$$

Niech $\underline{F} = \underline{H} \underline{Q}(\Theta)$ /por. Dodatek, wzór (2)/ będzie rozkładem tensora deformacji \underline{F} , określonego wzorami (5.42), (5.12), na tensor deformacji $\underline{H} = (\mu_h, \mu_R)$ zgodny z więzami nieściśliwości /por. (5.22)/ oraz dystorsję termiczną $\underline{Q}(\Theta) = (\alpha_h(\Theta), \alpha_R(\Theta))$

/por. (5.16)/ określoną równaniem (5.17), (5.50). Jeżeli \mathcal{B}_θ jest walcem o wysokości $h(\theta)$ i promieniu podstawy $R(\theta)$ określonym wzorem (5.21), to obowiązuje wzór (5.25) przy przyjęciu, że

$$5.51 \quad \begin{aligned} t_\theta(\mathcal{B}_\theta; \mu) &= -\alpha_0 - b_{h(\theta)} \mu^{-1} - c_{R(\theta), h(\theta)} \mu^{-\frac{1}{2}} + c_{R(\theta)} \mu \\ t_\theta(\mathcal{B}_\theta; \mu) &= \theta t_\theta(\mathcal{B}_\theta; \mu) \end{aligned}$$

Z warunków (5.30), (5.31) wynika, że winno być:

$$5.52 \quad b_0 \geq 0, c_0 \geq 0, b_0 + c_0 \neq 0$$

Wprowadźmy nową zmienną ϵ przepisem: jeżeli $h(t) = h(\theta)\mu(t)$, $t \geq 0$ jest zmienną w czasie wysokością walca \mathcal{B}_θ , to

$$5.53 \quad d\epsilon = \frac{dh}{h}, \quad h(0) = h(\theta)$$

co jest równoważne równaniu:

$$5.54 \quad d\epsilon = \frac{d\mu}{\mu}, \quad \mu(0) = 1$$

Rozwiązaniem (5.54) jest funkcja

$$5.55 \quad \epsilon = \epsilon(\mu) = \ln \mu, \quad \mu > 0$$

Zmienna ϵ postaci (5.55) nazywana jest naturalnym odkształceniem i używana przy formułowaniu wyników w próbie prostego rozciągania /np. [2]/. Przy pomocy zmiennej ϵ możemy funkcję $t_\theta(\mathcal{B}_\theta; \mu)$ zapisać w postaci:

$$5.56 \quad \begin{aligned} \bar{t}_\theta(\mathcal{B}_\theta; \epsilon) &= t_\theta(\mathcal{B}_\theta; e^\epsilon) \\ &= \theta \bar{t}_\theta(\mathcal{B}_\theta; \epsilon) \end{aligned}$$

$$\bar{t}_\theta(\mathcal{B}_\theta; \epsilon) = t_\theta(\mathcal{B}_\theta; e^\epsilon) = -\alpha_0 - b_{h(\theta)} e^{-\epsilon} - c_{R(\theta), h(\theta)} e^{-\frac{1}{2}\epsilon} + c_{R(\theta)} e^\epsilon$$

Oznaczmy

$$E_{\theta}(B_{\theta}; \epsilon) = \frac{dG_{\theta}(B_{\theta}; \epsilon)}{d\epsilon} = \theta E_0(B_{\theta}; \epsilon)$$

$$5.57 \quad E_0(B_{\theta}; \epsilon) = \frac{dG_0(B_{\theta}; \epsilon)}{d\epsilon} =$$

$$= b_{h(\theta)} e^{-\epsilon} + \frac{1}{2} c_{R(\theta), h(\theta)} e^{-\frac{1}{2}\epsilon} + c_{R(\theta)} e^{\epsilon}$$

Izotermicznym modułem rozciągliwości w temperaturze θ nazywać będziemy liczbę $E(\theta)$ zdefiniowaną przez:

$$E(\theta) = E_{\theta}(B_{\theta}; 0) = \theta E_0(\theta)$$

$$5.58 \quad E_0(\theta) = \frac{1}{R^2(\theta)} \left[c_0 + 4 \frac{b_0}{\chi(\theta)} R(\theta) + \frac{\pi}{2} \frac{c_0}{\chi(\theta)} \right]$$

$$\chi(\theta) = \frac{h(\theta)}{R(\theta)}$$

Jeżeli ϵ_h jest małym odkształceniem osi walca /por. (5.53)/:

$$5.59 \quad \epsilon_h = \frac{\Delta h}{h} = \mu - 1, \quad |\epsilon_h| \ll 1$$

to

$$5.60 \quad G_{\theta}(B_{\theta}; \epsilon) = E(\theta) \epsilon_h + o(\epsilon_h^2)$$

$$\epsilon = \epsilon_h + o(\epsilon_h^2)$$

Jeżeli spełniony jest warunek (5.52), to $E(\theta) > 0$. Moduł rozciągliwości jest więc analogiem tzw. modułu Young'e'a - podstawowej w zastosowaniach inżynierskich charakterystyki sprężystej reakcji ciała. Jednak warunkiem koniecznym na to, aby moduł rozciągliwości $E(\theta)$ mógł być interpretowany jako moduł Young'e'a, jest jednoznaczność jego określenia w danej temperaturze θ . Dalsza analiza stanu prostego rozciągania będzie więc zmierzała do wyodrębnienia tych przypadków, gdy moduł rozciągliwości jest jednoznacznie określony.

Z warunku (5.52) wynika, że

$$5.61 \quad E_0(\mathcal{B}_0; \epsilon) > 0, \quad \frac{d^2 E_0(\mathcal{B}_0; \epsilon)}{d\epsilon^2} > 0 \quad \text{dla } \epsilon \in \mathbb{R}$$

Oznacza to, że funkcja $E_0(\mathcal{B}_0; \epsilon)$ oraz funkcja

$$5.62 \quad E'_0(\mathcal{B}_0; \epsilon) = \frac{dE_0(\mathcal{B}_0; \epsilon)}{d\epsilon} = \\ = c_{R(\theta)} e^\epsilon - \frac{1}{4} c_{R(\theta), h(\theta)} e^{-\frac{1}{2}\epsilon} - b_{h(\theta)} e^{-\epsilon}$$

są funkcjami monotonicznie rosnącymi. Stąd równanie określające punkty osobliwe krzywej $E_0(\mathcal{B}_0; \epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{R}$:

$$5.63 \quad E''_0(\mathcal{B}_0; \epsilon) = \frac{d^2 E_0(\mathcal{B}_0; \epsilon)}{d\epsilon^2} = 0$$

posiada co najwyżej jedno rzeczywiste rozwiązanie.

Przypadek gdy równanie (5.63) określa punkt przegięcia na krzywej $E_0(\mathcal{B}_0; \epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{R}$ jest interesujący z uwagi na analogię - usieciowane polimery - elastomeryczne ciała o cieczopodobnej reakcji. Istnienie takiego punktu jest charakterystyczną cechą przebiegu próby prostego rozciągania np. dla wulkanizowanych kauczuków /np. [20], [33]/. Ponieważ w przypadku $c_0 = 0$ równanie (5.63), (5.52) nie posiada rozwiązania, więc dalej ograniczymy się do warunku /por. (5.52)/:

$$5.64 \quad b_0 \geq 0, \quad c_0 > 0$$

Równania (5.62) - (5.64) możemy napisać w postaci:

$$5.65 \quad \frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{R(\theta)} \left(\alpha(\theta) \mu^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right) = 4 \frac{b_0}{c_0} \geq 0$$

$$\alpha(\theta) = h(\theta)/R(\theta) > 0, \quad R(\theta) > 0, \quad \epsilon = \ln \mu$$

Rozwiązanie $\mu > 0$ równania (5.65) /o ile istnieje/ będziemy oznaczali przez $\mu = \mu_p(\theta)$. Ponieważ punkt przegięcia

$\epsilon_p(\Theta) = \ln \mu_p(\Theta)$ jest jednoznacznie określony /dla danej konfiguracji naturalnej \mathcal{B}_Θ / więc można rozważać deformację $\mu_p(\Theta)$ jako charakterystykę "materiałową" elastomerycznego walca kołowego o cieczipodobnej reakcji i traktować ją jako znaną skądinąd. Przy takiej interpretacji $\mu_p(\Theta)$ równanie (5.65) można potraktować jako warunek określający smukłość $\alpha(\Theta)$ naturalnej konfiguracji odniesienia \mathcal{B}_Θ . Oznaczmy przez $\alpha_p(\Theta)$ smukłość \mathcal{B}_Θ spełniającą warunek (5.65) oraz warunek /por. (5.26), (5.51)/:

$$5.66 \quad \mathcal{G}_\Theta(\mathcal{B}_\Theta; 0) = 0$$

Jeżeli

$$5.67 \quad b_0 > 0, c_0 > 0$$

to smukłość $\alpha_p(\Theta)$ winna spełniać równanie:

$$5.68 \quad 2 a_0 \mu_p^4(\Theta) \alpha^3 - 7 a_0 \mu_p^{5/2}(\Theta) \alpha^2 + \left[\frac{\pi^2 a_0}{8} \mu_p(\Theta) + 32 \frac{b_0^2}{c_0} (\mu_p^2(\Theta) - 1) \right] \alpha + 8 \pi \frac{b_0^2}{c_0} (4 - \mu_p^{3/2}(\Theta)) = 0$$

Jeżeli istnieje rozwiązanie $\alpha = \alpha_p(\Theta) > 0$ równania (5.68), to promień $R(\Theta)$ naturalnej konfiguracji odniesienia jest postaci $R(\Theta) = R_p(\Theta)$ gdzie

$$5.69 \quad R_p(\Theta) = \frac{\mu_p^{3/2}(\Theta)}{4} \left[\alpha_p(\Theta) \mu_p^{3/2}(\Theta) - \frac{\pi}{4} \right] \frac{c_0}{a_0}$$

przy czym powinien być spełniony warunek

$$5.70 \quad \alpha_p(\Theta) > \frac{\pi}{4} \mu_p^{-3/2}(\Theta)$$

Jeżeli

$$5.71 \quad b_0 = 0, c_0 > 0$$

to smukłość $\alpha = \alpha_p(\theta)$ jest smukłością naturalnej konfiguracji odniesienia dla funkcji $\sigma_\theta(\mathcal{B}_\theta; \epsilon)$ posiadającej punkt przegięcia $\epsilon = \epsilon_p(\theta) = \ln \mu_p(\theta)$ wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\alpha_p(\theta) = \frac{\pi}{4} \mu_p^{-3/2}(\theta)$$

$$5.72 \quad (\alpha_p(\theta) - \pi) a_0 > 0 \quad \text{gdy } a_0 \neq 0$$

$$\alpha_p(\theta) = \pi \quad \text{gdy } a_0 = 0$$

Jeżeli

$$5.73 \quad a_0 \neq 0, b_0 = 0, c_0 > 0$$

to promień $R(\theta)$ naturalnej konfiguracji odniesienia o smukłości $\alpha_p(\theta)$ jest postaci $R(\theta) = R_p(\theta)$ gdzie

$$5.74 \quad R_p^2(\theta) = [1 - 4\mu_p^{3/2}(\theta)] \frac{c_0}{a_0}$$

Wstawiając wzory (5.72) i (5.74) do formuł (5.56) i (5.58) otrzymujemy, że

$$5.75 \quad \sigma_\theta(\mathcal{B}_\theta; \epsilon) = \frac{E_0(\theta)}{1 + 2\mu_p^{3/2}(\theta)} [e^\epsilon + 4\mu_p^{3/2}(\theta)(1 - e^{-1/2\epsilon}) - 1]$$

$$E_0(\theta) = \frac{1 + 2\mu_p^{3/2}(\theta)}{1 - 4\mu_p^{3/2}(\theta)} a_0$$

przy czym

$$5.76 \quad \alpha_p(\theta) > \pi \quad \text{i} \quad \mu_p(\theta) < \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \quad \text{gdy } a_0 > 0$$

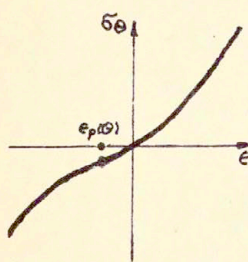
lub

$$5.77 \quad \alpha_p(\theta) < \pi \quad \text{i} \quad \mu_p(\theta) > \sqrt[3]{\frac{1}{16}} \quad \text{gdy } a_0 < 0$$

Jeżeli /oprócz (5.71) / $a_0 = 0$, to moduł rozciągłości $E(\theta)$ nie jest jednoznacznie określony.

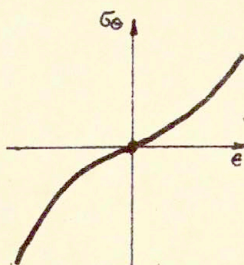
W przypadku (5.73) możliwe są trzy typy wykresów funkcji

$\sigma_\theta = \sigma_\theta(\mathcal{E}_\theta; \epsilon)$, $\epsilon \in \mathbb{R}$
 różniące się położeniem punktu prze-
 gięcia /por. [32]/:



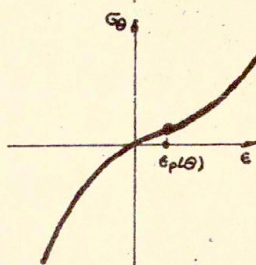
$$\epsilon_p(\theta) < 0$$

rys.1 - typ A



$$\epsilon_p(\theta) = 0$$

rys.2 - typ B



$$\epsilon_p(\theta) > 0$$

rys.3 - typ C

Typ C wykresu próby prostego rozciągania jest typowy np. dla wulkanizowanych kauczuków / [20], [33], [36] /; w monografii [2] podano, że wykres typu B jest również obserwowany dla tych materiałów. Z uwagi na tę analogię dalsze rozważania ograniczymy do przypadku gdy /por. (5.77)/:

5.78

$$a_0 < 0, b_0 = 0, c_0 > 0$$

W tym przypadku dystorsje termiczne /por. (5.16), (5.17), (5.48) i (5.50)/ są postaci:

5.79

$$\alpha_h(\theta) = \xi^2(\theta), \alpha_r(\theta) = \xi^2(\theta) \xi^{-1}(\theta)$$

gdzie $\xi(\theta)$ jest, dla dowolnej temperatury $\theta \in \bar{I}$, rozwiązaniem równania:

5.80

$$\xi^3 - \frac{a_0}{c_0} \xi(\theta) R^2 \xi - \frac{\pi R}{h} \xi^2(\theta) = 0$$

Równanie (5.80) posiada dokładnie jedno rzeczywiste i dodatnie rozwiązanie. Można je napisać w postaci /por. [32]/:

5.81

$$\xi(\theta) = \xi(\mathcal{E}_\theta; \theta) = 2R \left(-\frac{1}{3} \frac{a_0}{c_0}\right)^{1/2} \xi^2(\theta) \chi(V_0(\theta))$$

$$\chi(V) = \sinh \frac{1}{3} \gamma(V), V_0(\theta) = \xi(\theta) V_0, V_0 = \pi h R^2$$

gdzie funkcja $\gamma(V)$, $V \in \mathbb{R}^+$ określona jest wzorem:

$$5.82 \quad \sinh \gamma(V) = \frac{\pi^2}{2} \left(-3 \frac{c_0}{a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{V}$$

Ze wzorów (5.21), (5.79) i (5.81) wynika, że

$$5.83 \quad \chi_p(\theta) = \chi_{op}(V_0(\theta)) = \frac{8}{\pi} \left(-\frac{1}{3} \frac{a_0}{c_0}\right)^{3/2} V_0(\theta) \chi^3(V_0(\theta))$$

a więc /por.(5.72)/:

$$5.84 \quad \begin{aligned} \mu_p(\theta) &= \mu_{op}(V_0(\theta)) \\ \mu_{op}(V) &= -\frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{4/3} \frac{c_0}{a_0} V^{-2/3} \chi^{-2}(V) \end{aligned}$$

skąd /por.(5.58)/:

$$5.85 \quad \begin{aligned} E(\theta) &= \theta E_0(V_0(\theta)) \\ E_0(V) &= \frac{1+2\mu_{op}^{3/2}(V)}{1-4\mu_{op}^{3/2}(V)} a_0 > 0 \end{aligned}$$

Ostatecznie więc, w przypadku (5.78), funkcja naprężeń prostego rozciągania elastomerycznego ciała \mathcal{B}_0 o cieczipodobnej reakcji, odniesiona do naturalnej konfiguracji odniesienia \mathcal{B}_0 jest postaci /por.(5.56) i (5.75)/:

$$5.86 \quad \sigma_0(\mathcal{B}_0; \epsilon) = \theta \sigma_0(V_0(\theta), \epsilon), \quad V_0(\theta) = \text{vol } \mathcal{B}_0$$

gdzie

$$5.87 \quad \sigma_0(V, \epsilon) = \frac{E_0(V)}{1+2\mu_{op}^{3/2}(V)} \left[e^\epsilon + 4\mu_{op}^{3/2}(V) (1 - e^{-\frac{1}{2}\epsilon}) r^{-1} \right]$$

a odniesiona do konfiguracji \mathcal{B}_0 funkcja ta ma postać /por. (5.25), (5.51), (5.56), (5.79), (5.81) i (5.86)/:

$$T(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta) = G_0(\mathcal{B}_0; \ln \lambda \alpha_n^{-1}(\theta))$$

5.88

$$= \theta T_0(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta)$$

$$T_0(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta) = G(V_0(\theta)) \varphi(R, V_0(\theta), \lambda, \theta)$$

gdzie oznaczono

$$5.89 \quad G(V) = \left(-\frac{1}{3} \frac{\alpha_0}{c_0}\right)^{3/2} \frac{8 \mu_{op}^{3/2}(V)}{1 + 2 \mu_{op}^{3/2}(V)} E_0(V) \chi(V)$$

$$\varphi(R, V, \lambda, \theta) = R \int^{1/2}(\theta) \left(\frac{V}{\pi^2 R^2} \int^{3/2}(\theta) \lambda^{-1/2} - \frac{1}{4} \mu_{op}^{3/2}(V) + 1 \right)$$

Termodynamiczny proces osiowego rozciągania walca jest tu również opisywany przez układ równań (5.36) - (5.38), w którym należy przyjąć, że

5.90

$$S_0(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta) = V_0(\theta) T_0(\mathcal{B}_0; \lambda, \theta)$$

Ze wzoru (5.74) wynika, że:

$$5.91 \quad \mu_p(\theta) = \lambda_d \left[1 - \frac{\alpha_0}{c_0} R_p^2(\theta) \right]^{3/2}, \quad \lambda_d = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

Jeżeli więc naprężenie w elastomerycznym walcu kołowym o cieczo- podobnej reakcji, poddany izotermicznemu prostemu rozciąganiu oraz pozbawionym naprężen w stanie niezdeformowanym, nie zależy od zmiany pola powierzchni ograniczającej walec, to /por. wzory (5.84) - (5.87) i (5.91)/ można sformułować następujące wnioski:

Wnioski

W danej temperaturze efekt skali przejawia się w następujący sposób:

1. - Własności mechaniczne ciała zależą tylko od jego objętości. W szczególności moduł rozciągliwości jest monotonicznie malejącą funkcją objętości ciała a deformacja określająca punkt przegięcia wykresu funkcji naprężeń - monotonicznie rosnącą funkcją tej objętości.

2. - Deformacja określająca ten punkt przegięcia monotonicznie rośnie wraz ze zwiększaniem się promienia naturalnej konfiguracji ciała

Jeżeli temperatura izotermicznego procesu prostego rozciągania pokrywa się z temperaturą niezdeformowanej próbki tj./por.(2.26)/
 $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{\Theta_0}$ i $\xi(\Theta_0) = 1$, to /por.(5.85)/:

5.92

$$E(\Theta_0) = \Theta_0 E_0(V_0)$$

Liniowa zależność modułu rozciągliwości od temperatury próbki jest stwierdzona doświadczalnie np.dla wulkanizowanych kauczuków [2]; z teoretycznego punktu widzenia wzór (5.92) jest konsekwencją założenia (5.1).

Z uwagi na brak doświadczeń badających przejawy efektu skali dla usieciowanych polimerów /a w szczególności dla kauczukopodobnych materiałów/, powyższe wnioski mają tylko charakter logicznych przewidywań wymagających weryfikacji doświadczalnej. Warto jednak przytoczyć pewne dane doświadczalne dotyczące polimerów wrażliwych na prędkość deformowania. Zaobserwowano mianowicie w wielu przypadkach, że zmiana wykresu (ϵ, σ) w kierunku /por.rys. 2 i 3/:

$$B \rightarrow C$$

następuje m.innymi wskutek [2] :

- zwiększenia grubości próbki,
- obniżenia temperatury próbki,
- wzrostu prędkości rozciągania.

Pierwsza z tych obserwacji jest typowym efektem skali i jest zgodna z wnioskiem 2.

Dla uzyskania zgodności z drugą obserwacją należałoby przyjąć, że:

5.93

$$\forall \Theta \in I \quad \xi'(\Theta) < 0$$

Przyjęcie założenia (5.93) oznaczałoby jednak, że funkcja ξ nie może opisywać zwiększania się objętości ciała przy jego

ogrzewaniu - co ma np. miejsce dla kauczków [20]. Tę trudność sprzężenia efektów temperaturowych z efektem skali łatwiej zrozumieć jeśli uwzględnimy okoliczność, że /por.[25]/ opis kauczkopodobnych materiałów jako izotermicznie nieściśliwych, jest przypuszczalnie w ogóle fizycznie niepoprawny w sytuacji, w której temperatura ciała przestaje być stała /jak np. przy jego ogrzewaniu/.

W konkluzji widać więc dwie drogi kontynuowania rozważań dotyczących analogii elastomeryczne ciała o cieczopodobnej reakcji - usieciowane polimery. Bądź zawężenie rozważań do przypadku izotermicznych procesów i nieściśliwych ciał ($\xi(\Theta) \equiv 1$), bądź rozszerzenie ich na przypadek ciał o cieczopodobnej reakcji i ogólnych więzach ściśliwości zależnej od temperatury /rozdział 2, (2.24)/.

Rozdział 6. CIECZOPODOBNA REAKCJA WSZECHSTRONNIE ŚCISKANEJ KULI

Badanie ściśliwości krystalicznych ciał stałych przy poddawaniu ich ciśnieniu hydrostatycznemu ma istotne znaczenie dla określenia ich sprężystych własności. Wiąże się to z okolicznością, że w stanie hydrostatycznego ciśnienia można badać doświadczalnie nieliniową sprężystą reakcję ciała na deformację

$$6.1 \quad \underline{F} = \lambda \underline{1}, \lambda > 0$$

bez równoczesnego wywoływania, na skutek wpływu defektów sieci, odkształceń plastycznych /np. [1], [26]/. Dzięki temu wyeliminowaniu wpływu defektów struktury, określona przez pomiar zmiany objętości wraz ze zmianą ciśnienia, makroskopowa sprężysta reakcja ciała jest ściślej związana z charakterem oddziaływań międzatomowych niż przy innych typach deformacji. Wskazuje na to np. dobra zgodność z doświadczeniem formuł w rodzaju formuły Gillmana dla modułu ściśliwości K [27]:

6.2.

$$K = \frac{3e^2}{4\pi r_0^4}$$

gdzie e - ładunek elektronu, r_0 - promień atomowy. Typ krzywej opisującej reakcję ciała stałego na deformację (6.1) z $0 < \lambda < 1$ /ściskanie/ jest dość dobrze znany /np. [1], [28]/. Natomiast wszechstronne ciągnięcie, realizujące wszechstronną ekspansję /deformacja (6.1) z $\lambda > 1$ /, jest bardzo trudnym do zrealizowania stanem i w związku z tym brak jest danych doświadczalnych w tym zakresie deformacji. Z uwagi na to odwoływać się będziemy do pracy [28]. W pracy [28] krzywa, opisująca zależność ciśnienia lub ciągnięcia od deformacji (6.1), została określona na podstawie obliczeń numerycznych opartych na analizie zmiany energii wiązań w sześcienniej sieci krystalicznej poddanej tej deformacji; w zakresie ciśnień wyniki pracy [28] są zgodne ze znanym z doświadczeń typem tej krzywej.

Niech \mathcal{B}_0 będzie jednorodną kulą materialną o promieniu R_0 poddawaną wszechstronnemu ciśnieniu lub ciągnięciu oraz działaniu jednorodnych temperatur w zakresie pozwalającym na pominięcie zjawisk dysypatywnych. Załóżmy, że ta kula wykazuje, w rozważanych stanach, izotropię własności mechanicznych i termicznych /jak ma to np. miejsce dla kryształów o sześcienniej sieci - [16]/. Oznaczmy przez R^+ zbiór dodatnich liczb rzeczywistych oraz przez $I \subset R^+$ - pewien przedział bezwzględnych temperatur. Przy powyższych założeniach kula \mathcal{B}_0 może być rozważana jako termodynamiczny układ, którego konfiguracje termodynamiczne są postaci $\underline{\lambda} = (\lambda, \theta) \in R^+ \times I$ gdzie $\lambda > 0$ określa deformację (6.1) kuli \mathcal{B}_0 oraz $\theta > 0$ jest temperaturą zdeformowanej kuli /tj. kuli $\mathcal{B} = \iota(\underline{\lambda})(\mathcal{B}_0)$ o promieniu $R = \lambda R_0$ /.

Fizyczne własności kuli \mathcal{B}_0 mogą być opisane przy pomocy trzech skalarnych funkcji klasy $C^1(R^+ \times I)$: Ψ - energii swobodnej, E - energii wewnętrznej oraz S - entropii. Funkcje te są związane relacjami /por. [30]/:

6.3

$$\Psi = E - \theta S$$

$$S = - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad E = \frac{\partial}{\partial \theta}(\theta \Psi)$$

Z uwagi na założoną izotropię zależność tych funkcji od bryły \mathcal{B}_0 /por. rozdział 1/ redukuje się do zależności od parametru $R_0 > 0$ - promienia kuli.

Kulistym ciałem (o masie $m > 0$) nazywamy jednorodny układ termodynamiczny, którego konfiguracje termodynamiczne są postaci (R, Θ) gdzie $R > 0$ określa promień materialnej kuli oraz $\Theta > 0$ jej /jednorodną/ temperaturę bezwzględną. Kulę \mathcal{B} o promieniu R nazywamy będziemy aktualną konfiguracją kulistego ciała. Wyróżniamy kulę \mathcal{B}_0 o promieniu R_0 nazywamy będziemy konfiguracją odniesienia kulistego ciała. Konfiguracja odniesienia \mathcal{B}_0 kulistego ciała może być rozważana jako termodynamiczny układ o konfiguracjach termodynamicznych postaci $(\lambda, \Theta) \in R^+ \times I$ gdzie $\lambda = R/R_0$ określa deformację (6.1) przejścia od konfiguracji \mathcal{B}_0 do aktualnej konfiguracji \mathcal{B} kulistego ciała. Z definicji kulistego ciała wynika, że jeśli $\Phi = \Phi(R, \Theta)$ jest funkcją energii swobodnej kulistego ciała oraz $\Psi = \Psi(R_0; \lambda, \Theta)$ jest funkcją energii swobodnej jego konfiguracji odniesienia rozważanej jako układ termodynamiczny, to:

$$6.4 \quad \forall R_0 > 0 \quad \forall (\lambda, \Theta) \in R^+ \times I \quad \Psi(R_0; \lambda, \Theta) = \Phi(R_0 \lambda, \Theta)$$

Analogiczny warunek spełniają funkcje $E = E(R_0; \lambda, \Theta)$ oraz $S = S(R_0; \lambda, \Theta)$.

Uogólniona siła termodynamiczna N , działająca na kulę \mathcal{B}_0 , jest postaci

$$6.5 \quad N = N(R_0; \lambda, \Theta) = - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(R_0; \lambda, \Theta) \\ = - V(\lambda) t(R_0; \lambda, \Theta) \lambda^{-1}$$

gdzie oznaczono

$$6.6 \quad t(R_0; \lambda, \Theta) = \frac{1}{V(\lambda)} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}(R_0; \lambda, \Theta) \lambda$$

$$V(\lambda) = V_0 \lambda^3, \quad V_0 = 4/3 \pi R_0^3$$

Tensor $T(\mathcal{B}_0; F, \Theta) = \frac{1}{3} t(R_0; \lambda, \Theta) \mathbf{1}$ dla $F = \lambda \mathbf{1}$ jest tensorem naprężeń Cauchy'ego w aktualnej konfiguracji \mathcal{B} kuli \mathcal{B}_0 . Tensor ten określa, zgodnie z nomenklaturą przyjętą w rozdziale 1, "izotropowe idealnie termosprężyste ciało \mathcal{B}_0 " z efektem skali w postaci zależności własności mechanicznych

tego ciała od promienia R_0 . Warunek (6.4) jest analogiem rozważanego w rozdziale 3 określenia cieczipodobnej reakcji ciała \mathcal{B}_0 . Dalej będziemy mówili /zgodnie z umową przyjętą w rozdziale 3/, że kuliste ciało posiada cieczipodobną reakcję, jeżeli jego funkcja energii swobodnej Φ jest postaci /por.(3.11) /:

$$6.7 \quad \Phi(R, \Theta) = a(\Theta)V(R) + b(\Theta)F(R) + c(\Theta)M(R) + d(\Theta)$$

$$V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad F(R) = 4\pi R^2, \quad M(R) = 4\pi R$$

Wielkości $V(R)$, $F(R)$ oraz $M(R)$ oznaczają odpowiednio: objętość kuli o promieniu R , pole sfery o promieniu R oraz całkowitą krzywiznę średnią tej sfery.

Równanie ewolucji temperatury deformującej się kuli \mathcal{B}_0 ma postać /por.rozdział 1/:

$$6.8 \quad K_\lambda(R_0; \Theta) \dot{\Theta} = \int V(\lambda) \Theta \frac{\partial t}{\partial \Theta}(R_0; \lambda, \Theta) d + Q(R_0; \lambda, \Theta, d, \dot{\Theta})$$

$$V(\lambda) = V(R_0) \lambda^3, \quad d = \dot{\lambda} \lambda^2$$

gdzie $K_\lambda(R_0; \Theta)$ jest pojemnością cieplną przy stałej deformacji λ tj./por. (1.41) /:

$$6.9 \quad K_\lambda = \frac{\partial E}{\partial \Theta} = \Theta \frac{\partial S}{\partial \Theta} = -\Theta \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \Theta^2}$$

oraz $Q(R_0; \lambda, \Theta, d, \dot{\Theta})$ jest produkcją pracy cieplnej; ponieważ rozważamy odwracalne procesy termodynamiczne, więc $Q = \Theta \dot{S}$. Funkcje Q oraz K_λ są uważane za znane skądinąd.

Jeżeli na jednorodną kulę \mathcal{B}_0 o masie $m > 0$ działa zmienne w czasie zewnętrzne ciśnienie lub ciągnienie $\hat{p} = \hat{p}(t)$, uogólniona siła termodynamiczna $N(R_0; \lambda, \Theta)$ oraz pominiemy wpływ sił objętościowych, to dynamikę procesu deformacji tej kuli określa równanie /por.rozdział 4/:

$$6.10 \quad J_0 \ddot{\lambda} = \frac{1}{3} N(R_0; \lambda, \Theta) + V_0 \hat{p}(t)$$

$$J_0 = \frac{1}{5} m R_0^2, \quad V_0 = V(R_0), \quad \lambda(0) = 1$$

gdzie $3J_0$ - moment bezwładności kuli \mathcal{B}_0 względem jej środka masy. Równania (6.5), (6.8) i (6.10) tworzą zamknięty układ opisujący jednorodne procesy termodynamiczne dla kuli \mathcal{B}_0 .

Dalsze rozważania ograniczymy do przypadku gdy \mathcal{B}_0 jest konfiguracją odniesienia kulistego ciała.

Niech $d\alpha$ będzie względną zmianą aktualnej objętości $V = V(\lambda)$ /por.(6.6) / tj.:

$$6.11 \quad d\alpha = \frac{dV}{V}, \quad V(1) = V_0$$

to

$$6.12 \quad \alpha = \ln \frac{V}{V_0} = 3\epsilon, \quad \epsilon = \ln \lambda$$

Oznaczmy

$$6.13 \quad \begin{aligned} \mathfrak{G}(R_0; \alpha, \Theta) &= t(R_0; e^{\frac{1}{3}\alpha}, \Theta) \\ K_\Theta(R_0; \lambda) &= \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial \alpha}(R_0; 3 \log \lambda, \Theta) \end{aligned}$$

Zależną od parametrów R_0 oraz Θ funkcję $K_\Theta = K_\Theta(R_0; \lambda)$, $\lambda > 0$ nazywać będziemy izotermiczną ściśliwością konfiguracji \mathcal{B}_0 kulistego ciała. Rozważmy przypadek gdy w pewnym przedziale temperatur $I \subset \mathbb{R}^+$ spełniony jest warunek:

$$6.14 \quad \forall \Theta \in I \quad \exists R_0(\Theta) > 0 \quad t(R_0(\Theta); 1, \Theta) = 0$$

Konfigurację \mathcal{B}_Θ o promieniu $R_0(\Theta)$ spełniającym warunek (6.14) nazywać będziemy naturalną konfiguracją kulistego ciała o temperaturze Θ . Spełnienie warunku (6.14) oznacza, że kuliste ciało może być rozważone jako model opisujący własności pewnego ciała stałego /por.rozdział 3, komentarz po wzorze (3.19) /
Oznaczmy

$$6.15 \quad \begin{aligned} \mathfrak{G}_\Theta(\mu) &= t(R_0(\Theta); \mu, \Theta) \\ \nu(R_0; \Theta) &= \frac{R_0(\Theta)}{R_0} \end{aligned}$$

Ze wzorów (6.4) i (6.6) wynika, że

$$6.16 \quad \mathfrak{G}_\Theta(\mu) = t(R_0; \mu \nu(R_0; \Theta), \Theta)$$

Wzór (6.16) pozwala analizę własności mechanicznych kulistego ciała sprowadzić do analizy funkcji naprężeń dla naturalnych kon-

figuracji tego ciała. Np. obserwacje zachowania się realnych ciał materialnych pozwalają przyjąć następujący postulat /por. [11] /:

Postulat ściśliwości

Przy deformowaniu się naturalnej konfiguracji dla zwiększenia objętości tej konfiguracji konieczne jest naprężenie rozciągające a dla zmniejszenia tej objętości - naprężenie ściiskające.

Warunek (6.14) i postulat ściśliwości mogą być zapisane w postaci warunku dla funkcji $\sigma_\theta = \sigma_\theta(\mu)$:

$$6.17 \quad \forall \theta \in \mathbb{I} \quad (\sigma_\theta(1) = 0, \forall 0 < \mu \neq 1, \sigma_\theta(\mu)(\mu - 1) > 0)$$

W celu zbadania konsekwencji warunków (6.14) i (6.17) rozważmy małą względną zmianę Δ naturalnej konfiguracji \mathcal{B}_θ tj./por. (6.12)/:

$$\chi = \Delta + o(\Delta^2), \quad |\Delta| \ll 1$$

6.18

$$\Delta = \frac{V(\mu) - V_\theta(\theta)}{V_\theta(\theta)}, \quad V(\mu) = V_\theta(\theta)\mu^3, \quad V_\theta(\theta) = V(R_\theta(\theta))$$

Wtedy

$$6.19 \quad \sigma_\theta(\mu) = K(\theta)\Delta + o(\Delta^2)$$

6.19

$$\mu = 1 + \Delta/3 + o(\Delta^2)$$

gdzie oznaczono

6.20

$$K(\theta) = K_\theta(R_\theta(\theta); 1)$$

Z warunków (6.14), (6.17) i wzoru (6.19) wynika, że $K(\theta) > 0$ oraz jest w danej temperaturze $\theta \in \mathbb{I}$ / jednoznacznie określoną wielkością. Oznacza to, że $K(\theta)$ może być rozważone jako fizyczna charakterystyka ściśliwości kulistego ciała - ,tzw. izotermiczny moduł ściśliwości /por.np. [1], [28], [29] /. Funkcję

6.21

$$K_\theta(\mu) = K_\theta(R_\theta(\theta); \mu), \quad K_\theta(1) > 0$$

będziemy nazywać izotermiczną ściśliwością kulistego ciała w temperaturze $\theta \in \mathbb{I}$.

Niech \mathcal{B}_0 będzie dowolną konfiguracją odniesienia kulistego ciała. Termodynamiczną stabilność konfiguracji \mathcal{B}_0 określają

następujące kryteria /por. [30], [31]/:

6.21 $\forall \theta \in I \quad K_2(R_0; \theta) > 0$ /termiczna stabilność przy $\lambda = \text{const}$ /
oraz

6.22 $\forall \lambda \in R^+ \quad K_\theta(R_0; \lambda) > 0$ /mechaniczna stabilność przy $\theta = \text{const}$ /

gdzie $K_2(R_0; \theta)$ jest pojemnością cieplną /wzór (6.9)/ oraz
 $K_\theta(R_0; \lambda)$ - izotermiczną ściśliwością /wzór (6.13)/ konfiguracji
 \mathfrak{B}_0 . Kuliste ciało będziemy nazywać stabilnym jeżeli jego dowolna konfiguracja odniesienia jest termicznie i mechanicznie stabilna oraz - mechanicznie niestabilnym jeżeli jego dowolna konfiguracja odniesienia jest termicznie stabilna oraz nie jest mechanicznie stabilna w żadnej temperaturze $\theta \in I$.

Rozważmy teraz kuliste ciało o cieczipodobnej reakcji. W tym przypadku funkcja naprężeń określona jest wzorem /por. (6.4) i (6.6)/:

$$6.23 \quad t(R_0; \lambda, \theta) = 3a(\theta) + \frac{6b(\theta)}{R_0} \lambda^{-1} + \frac{3c(\theta)}{R_0^2} \lambda^{-2}$$

Izotermiczna ściśliwość konfiguracji \mathfrak{B}_0 o promieniu R_0 ma postać /por. (6.13)/:

$$6.24 \quad 3K_\theta(R_0; \lambda) = -\frac{2}{\lambda R_0^2} [b(\theta)R_0 + c(\theta)\lambda^{-1}]$$

Ze wzoru (6.23) oraz warunku (6.17) wynika, że winno być

$$6.25 \quad \forall \theta \in I \quad a(\theta) > 0, c(\theta) \leq 0$$

Z (6.25) wynika, że w dowolnej temperaturze $\theta \in I$ istnieje co najwyżej jedna naturalna konfiguracja odniesienia a jej promień $R_0(\theta)$ określony jest jedną z poniższych formuł:

$$R_0(\theta) = \frac{1}{a(\theta)} [-b(\theta) + \sqrt{b^2(\theta) - a(\theta)c(\theta)}] \quad \text{gdy } a(\theta) > 0, c(\theta) < 0$$

6.26

$$R_0(\theta) = -\frac{1}{2} \frac{c(\theta)}{b(\theta)} \quad \text{gdy } a(\theta) = 0, b(\theta) > 0, c(\theta) < 0$$

$$R_0(\theta) = -2 \frac{b(\theta)}{a(\theta)} \quad \text{gdy } c(\theta) = 0, b(\theta) < 0, a(\theta) > 0$$

W pozostałych szczególnych przypadkach warunku (6.25) naturalna konfiguracja nie istnieje. Ze wzorów (6.22) i (6.24) wynika, że kuliste ciało o cieczopodobnej reakcji jest mechanicznie stabilne /w dowolnej temperaturze $\theta \in \bar{I}$ i dla dowolnej konfiguracji odniesienia \mathcal{B}_0 / wtedy i tylko wtedy gdy

$$6.27 \quad \forall \theta \in \bar{I} \quad b(\theta) \leq 0, c(\theta) \leq 0, b(\theta) + c(\theta) \neq 0$$

Z warunków (6.25) - (6.27) wynika, że dla stabilnego kulistego ciała o cieczopodobnej reakcji, winny być spełnione warunki:

$$6.28 \quad \forall \theta \in \bar{I} \quad a(\theta) > 0, b(\theta) \leq 0, c(\theta) \leq 0, b(\theta) + c(\theta) \neq 0$$

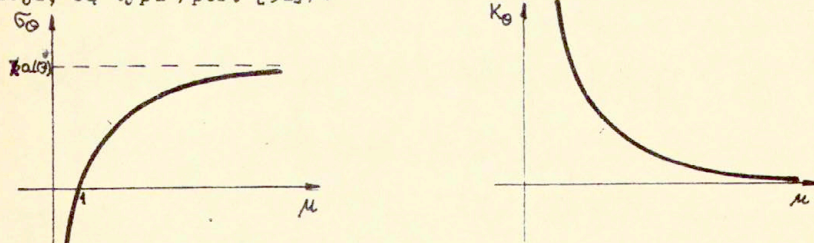
Z (6.25) - (6.27) wynika również, że dla mechanicznie niestabilnego kulistego ciała o cieczopodobnej reakcji, winny być spełnione warunki:

$$6.29 \quad \forall \theta \in \bar{I} \quad a(\theta) > 0, b(\theta) > 0, c(\theta) < 0$$

Funkcja naprężeń $t(R_0; \lambda, \theta)$ stabilnego kulistego ciała o cieczopodobnej reakcji jest monotonicznie rosnącą funkcją argumentu $\lambda \in \mathbb{R}^+$ przy czym

$$6.30 \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} t(R_0; \lambda, \theta) = 3a(\theta) > 0, \lim_{\lambda \rightarrow 0} t(R_0; \lambda, \theta) = -\infty$$

co oznacza, że /w danej temperaturze $\theta \in \bar{I}$ / dowolna konfiguracja tego ciała może przenieść nieograniczenie duże ciśnienie ale tylko ograniczone wszechstronne ciągnięcie. Dla dowolnej temperatury $\theta \in \bar{I}$ wykresy: naprężeń $\sigma_\theta(\mu)$ /por.wzory (6.15), (6.23)/ oraz izotermicznej ścisłości $K_\theta(\mu)$ /por.wzory (6.21), (6.24) i (6.26)/ stabilnego kulistego ciała o cieczopodobnej reakcji, są typu /por. [32]/:



rys. 4

Oznaczmy przez $t_\theta(R_o; \lambda) = t(R_o; \lambda, \theta)$ funkcję izotermicznych naprężeń mechanicznie niestabilnego kulistego ciała o cieczipodobnej reakcji /wzór (6.23), wraz z warunkami (6.28)/. Wykres tej funkcji posiada dwa charakterystyczne punkty: punkt maksimum (λ_p, t_p) oraz punkt przegięcia (λ_r, t_r) gdzie /por. [32]/:

$$6.31 \quad \lambda_p = \lambda_p(R_o; \theta) = -\frac{1}{R_o} \frac{c(\theta)}{b(\theta)}$$

$$t_p = t_p(\theta) = 3 \left[a(\theta) - \frac{b^2(\theta)}{c(\theta)} \right]$$

oraz

$$6.32 \quad \lambda_r = \lambda_r(R_o; \theta) = \frac{3}{2} \lambda_p(R_o; \theta)$$

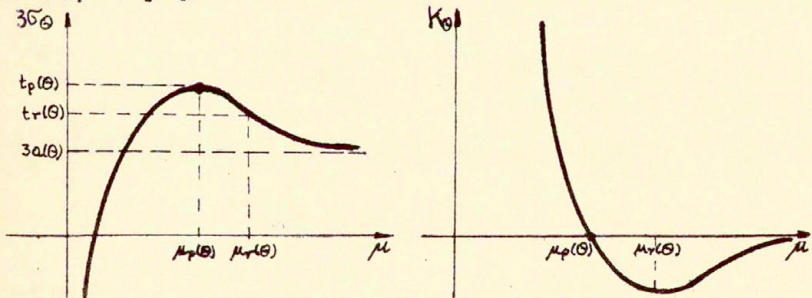
$$t_r = t_r(\theta) = 3 \left[a(\theta) - \frac{8}{3} \frac{b^2(\theta)}{c(\theta)} \right]$$

Jeżeli $R_o = R_o(\theta)$ jest promieniem naturalnej konfiguracji odniesienia w temperaturze $\theta \in I$, to funkcja $3\sigma_\theta(\mu) = t_\theta(R_o(\theta); \mu)$ /por. wzory (6.15), (6.23), (6.26), (6.29)/ posiada charakterystyczne punkty (μ_p, t_p) oraz (μ_r, t_r) gdzie:

$$6.33 \quad \mu_p = \mu_p(\theta) = \lambda_p(R_o(\theta); \theta), \quad \mu_r = \mu_r(\theta) = \lambda_r(R_o(\theta); \theta)$$

$$\mu_r(\theta) > \mu_p(\theta) > 1$$

W przedziale $(0, \mu_p(\theta))$ funkcja izotermicznych naprężeń $\sigma_\theta = \sigma_\theta(\mu)$ monotonicznie rośnie a funkcja izotermicznej ściśliwości $K_\theta = K_\theta(\mu)$ monotonicznie maleje. Dla $\mu = \mu_p(\theta)$ naprężenie jest maksymalnym a ściśliwość zanika. Wykresy tych funkcji mają postać /por. [32]/:



rys. 5

Ze wzorów (6.31)₁, (6.33) wynika, że

$$6.34 \quad R_o(\Theta) = -\frac{1}{\mu_p(\Theta)} \frac{c(\Theta)}{b(\Theta)}$$

a ze wzorów (6.20), (6.24), (6.31)₂ i (6.34) otrzymujemy:

$$6.35 \quad \begin{aligned} 3K(\Theta) &= -2 \frac{b^2(\Theta)}{c(\Theta)} \mu_p(\Theta) (\mu_p(\Theta) - 1) > 0 \\ \frac{b^2(\Theta)}{c(\Theta)} &= a(\Theta) - \frac{1}{3} t_p(\Theta) < 0 \end{aligned}$$

Jeżeli \mathcal{B}_o jest dowolną konfiguracją odniesienia, to uwzględniając, że $t(R_o; \lambda, \Theta) = \sigma_\Theta(\lambda \nu^{-1}(R_o; \Theta)) \cdot 3$ /por. (6.16)/ oraz wykorzystując wzory (6.34), (6.35), otrzymujemy:

$$6.36 \quad t(R_o; \lambda, \Theta) = t_p(\Theta) - \frac{3K(\Theta)}{2\mu_p(\Theta)(\mu_p(\Theta) - 1)} \left[1 - \nu(R_o; \Theta) \mu_p(\Theta) \frac{1}{\lambda} \right]^2$$

Z (6.36) oraz warunków (6.14) i $t_p(\Theta) > 0$ wynika, że

$$6.37 \quad t_p(\Theta) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu_p(\Theta)} \right) K(\Theta)$$

W izotermicznych procesach, w których temperatura procesu i temperatura naturalnej konfiguracji odniesienia pokrywają się, naprężenie jest postaci:

$$6.38 \quad 3\sigma_\Theta(\lambda) = t(R_o(\Theta); \lambda, \Theta) = t_p(\Theta) - \frac{3K(\Theta)}{2\mu_p(\Theta)(\mu_p(\Theta) - 1)} \left[1 - \mu_p(\Theta) \frac{1}{\lambda} \right]^2$$

We wspomnianej na początku niniejszego rozdziału pracy [28] rozważana jest deformacja (6.1) sześcianu /podstawowej komórki sieci krystalicznej/ a nie kuli jak w niniejszej pracy. Różnica ta nie ma jednak istotnego znaczenia gdyż funkcje naprężeń oraz izotermicznej ściśliwości dla sześcianu można sprowadzić do odpowiednich funkcji dla kuli w następujący sposób. Oznaczmy przez $V(L)$, $F(L)$ oraz $M(L)$ odpowiednio: objętość sześcianu o boku L , pole jego brzegu oraz całkowitą krzywiznę średnią tego brzegu tj./por. [22]/:

$$6.39 \quad V(L) = L^3, \quad F(L) = 6L^2, \quad M(L) = 3\pi L$$

Funkcja energii swobodnej $\Phi(L, \Theta)$ określająca cieczipodobną

reakcję sześciennego ciała jest postaci /por.(3.11)/:

$$6.40 \quad \Phi(L, \Theta) = \alpha(\Theta)V(L) + \beta(\Theta)F(L) + \gamma(\Theta)M(L) + \delta(\Theta)$$

Przyjmując we wzorze (6.40) $\alpha = a$, $\beta = \frac{1}{2}b$, $\gamma = \frac{1}{4}\pi c$, $\delta = d$ możemy opis reakcji naprężeniowej i ściśliwości, dla konfiguracji odniesienia w postaci sześcianu o boku l_0 i współczynnikach materiałowych $\alpha(\Theta)$, $\beta(\Theta)$, $\gamma(\Theta)$, $\delta(\Theta)$ sprowadzić do opisu dla konfiguracji odniesienia w postaci kuli o promieniu $R_0 = l_0$ i współczynnikach materiałowych $a(\Theta)$, $b(\Theta)$, $c(\Theta)$, $d(\Theta)$.

W pracy [28] rozważono trzy typy krystalicznych sieci sześciennych: prymitywną, objętościowo scentrowaną i powierzchniowo scentrowaną. Rozpatrywano centralne binarne oddziaływania z potencjałem typu Morse'a /i przy temperaturze naturalnej konfiguracji odniesienia $0^\circ K$ /. Pokazano, że jeśli sieć krystaliczna poddana jest deformacji (6.1) to wykresy funkcji izotermicznych naprężeń oraz izotermicznej ściśliwości są dla $\mu = (0, \mu_0)$, $\mu_p < \mu_0 < \mu_r$ typu jak na rys.5; dla przedziału (μ_0, ∞) nie podano wyników. Pokazano również, że jeśli potencjał opisujący centralne binarne oddziaływania jest dowolnego typu ale uwzględnia się tylko oddziaływania najbliższych sąsiadów, to deformacja μ_p zmiany znaku funkcji izotermicznej ściśliwości jest taka sama dla wszystkich rozważanych typów sieci, jeżeli potencjał ten jest typu Morse'a to ta wspólna wartość μ_p wynosi $\mu_p = 1,09120$ /w temperaturze $0^\circ K$ /. Przy uwzględnieniu wpływu wszystkich węzłów sieci i potencjału typu Morse'a wartości μ_p , dla rozważanych typów sieci są bliskie wielkości $\mu_p = 1,09120$: $\mu_p = 1,09167$; $1,09171$; $1,09199$ odpowiednio dla sieci powierzchniowo scentrowanej, objętościowo scentrowanej i prymitywnej. Wyniki te pozwalają zidentyfikować deformację μ_p jako parametr materiałowy charakteryzujący, w przybliżeniu binarnych centralnych oddziaływań, reakcję na wszechstronne ciągnięcie krystalicznego ciała o sześciennym sieci. Te wyniki pracy [28] pozwalają na zaproponowanie mechanicznie niestabilnego kulistego ciała o ciecypodobnej reakcji, jako nielokalnego fenomenologicznego modelu własności mechanicznych krystalicznej kuli o sześciennym sieci poddanej deformacji (6.1). Model ten uwzględnia nielocalne zjawiska w krystalicznym ciele wynikające z wpływu dalekich binarnych

oddziaływań. Ze wzorów (6.37) i (6.38) wynika, że jeżeli konfiguracja odniesienia jest w stanie niezdeformowanym pozbawiona naprężeń, to w warunkach izotermicznych własności mechaniczne kryształicznej kuli /lub sześcianu/ o sześciennej sieci są określone przez dwie /izotermiczne/ stałe materiałowe: moduł ściśliwości $K(\Theta)$ i deformację utraty stabilności $\mu_p(\Theta)$. Moduł ściśliwości $K(\Theta)$ jest wielkością wielokrotnie badaną doświadczalnie i obliczaną teoretycznie /np. wzór (6.2)/. Praca [28] wskazuje na możliwość teoretycznego obliczenia $\mu_p(\Theta)$. Jeżeli wartości $K(\Theta)$ i $\mu_p(\Theta)$ są znane, to wzory (6.37) i (6.38) pozwalają na eksperymentalną weryfikację modelu /np. w oparciu o objętościowe metody pomiaru ściśliwości kuli poddawanej hydrostatycznemu ciśnieniu w izotermicznych warunkach/.

UWAGI KOŃCOWE

Zasadniczą trudnością jaką napotyka się w nielokalnych teoriach continuum jest brak oddzielenia od siebie pojęć materiału i ciała tak, jak to się udało zrobić w teorii tzw. materiałów prostych /np. [11]/. W niniejszej pracy używano terminu "materiał" głównie w sensie odwoływania się do takich makroskopowo obserwowalnych własności ciała, które można jakościowo wytłumaczyć w terminach jego budowy atomowej lub molekularnej. W teorii fenomenologicznej taka intuicja pojęcia materiału jest jednak niewystarczająca i może dostarczyć tylko reguł interpretacyjnych dla pewnych wielkości i relacji między nimi. W rozdziale 1 pracy pokazano, że ograniczenie klasy rozważanych procesów termodynamicznych do tzw. jednorodnych procesów, pozwala na reprezentowanie własności mechanicznych ciał poprzez relację funkcyjną między dipolowymi momentami wewnętrznych sił powierzchniowych a stanami termodynamicznymi ciała. Jednorodność ciała pozwala rozważanie tych momentów dipolowych zredukować do rozważania naprężeń w ciele. W pracy istotną rolę gra specyfika nielokalności w postaci efektu skali polegająca na tym, że dla jednorodnych naprężeń i deformacji przejawia się on tylko w zależności relacji konstytutywnej od kształtu i wymiarów bryły konfiguracji odniesienia. Okoliczność ta umożliwiła nie tylko nawiązanie do teorii materiałów prostych /rozdziały 1 - 3/ ale także pozwoliła na wykorzystanie podstawowych obserwacji doświadczalnych dotyczących związku naprężenie - deformacja /rozdziały 5 i 6/. Jednak brak zarówno dostatecznej ilości danych doświadczalnych dotyczących efektu skali jak i ugruntowanych przesłanek teoretycznych spowodował, że w niniejszej pracy zrezygnowano z próby dokonania ogólnej analizy wpływu ciała na postać relacji konstytutywnej i ograniczono się do rozważania ciał o cieczipodobnej reakcji /rozdziały 3, 5 i 6/. Szczególna postać funkcji energii swobodnej, która określa taką reakcję dla ciał wypukłych, pozwoliła na skonstruowanie przykładu nielokalnego materiału nazwanego "materiałem o cieczipodobnej reakcji" /rozdział 3/. Istotną cechą

przyjętej definicji nielokalnego materiału jest to, że chociaż operuje ona wielkościami niezależnymi od geometrii ciała /co jest zgodne z intuicją pojęcia materiału/, to jednak nie odnosi się do wszystkich ciał ale tylko do pewnej ich klasy a mianowicie - do ciał wypukłych ograniczonych. Na koncepcji ciała o cieczopodobnej reakcji oparto również modele efektu skali w stanach prostego rozciągania /rozdział 5/ i wszechstronnego ściskania /rozdział 6/. Analiza tych modeli sugeruje, że efekt skali może mieć istotne znaczenie w przypadku istnienia osobliwych hiperpowierzchni relacji konstytutywnej. Wskazuje na to okoliczność, że w obu tych modelach opis efektu skali udało się zredukować do zależności parametrów opisujących punkty osobliwe reakcji naprężeniowej ciała od bryły konfiguracji odniesienia /por.wzory (5.84) - (5.87) oraz wzory (6.34) - (6.38)/. W ten sposób pojawia się problem związku efektu skali z parametryczną niestabilnością /będącą przedmiotem tzw.teorii katastrof - np. [37]/, relacji konstytutywnych. Jest to jednak problem wykraczający poza ramy niniejszej pracy.

DODATEK

Oznaczmy przez \mathbb{R}^2 przestrzeń uporządkowanych par liczb rzeczywistych ze standardową strukturą wektorowej przestrzeni euklidesowej. Niech $\mathcal{M}_0 \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem postaci:

$$1. \quad \mathcal{M}_0 = \{ \underline{A} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 > 0, a_2 > 0 \}$$

\mathcal{M}_0 jest otwartym i spójnym podzbiorem \mathbb{R}^2 zamkniętym ze względu na mnożenie przez dodatnie liczby rzeczywiste. W \mathcal{M}_0 można określić strukturę grupy przepisem:

$$2. \quad \underline{A} = (a_1, a_2), \underline{B} = (b_1, b_2) \implies \underline{A}\underline{B} = (a_1 b_1, a_2 b_2)$$

Element jednostkowy $\underline{1} \in \mathcal{M}_0$ oraz element odwrotny \underline{A}^{-1} do elementu $\underline{A} = (a_1, a_2) \in \mathcal{M}_0$ mają postać:

$$3. \quad \underline{1} = (1, 1), \quad \underline{A}^{-1} = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \right)$$

Jeżeli $\underline{A} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ to będziemy oznaczać:

$$\text{tr } \underline{A} = a_1 + 2a_2, \quad \mathcal{J}(\underline{A}) = \det \underline{A} = a_1 a_2^2$$

$$4. \quad \text{dev } \underline{A} = \left(\frac{2}{3}(a_1 - a_2), \frac{1}{3}(a_2 - a_1) \right)$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \text{tr}(\underline{A}\underline{B}), \quad \lambda \underline{A} = (\lambda a_1, \lambda a_2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Każdy element $\underline{A} \in \mathbb{R}^2$ ma przedstawienie:

$$5. \quad \underline{A} = \left(\frac{1}{3} \text{tr } \underline{A} \right) \underline{1} + \text{dev } \underline{A}$$

Oznaczmy przez τ zanurzenie

$$\tau: \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$6. \quad \forall \underline{A} \in \mathcal{M}_0 \quad \tau(\underline{A}) = \underline{A} \in \mathbb{R}^2$$

Grupa \mathcal{M}_0 jest topologiczną grupą względem topologii metrycznej określonej w zbiorze \mathcal{M}_0 przez metrykę:

7.
$$g^2(A, B) = (\tau(A) - \tau(B)) \cdot (\tau(A) - \tau(B))$$

(\mathcal{M}_0, g) może być uważane za podrozmaitość różniczkową /dwuwymiarową/ w \mathbb{R}^2 . Przestrzenią styczną do \mathcal{M}_0 w punkcie $A \in \mathcal{M}_0$ jest cała przestrzeń \mathbb{R}^2 . Oznaczmy /por. rozdział 2/:

8.
$$\mathcal{M}_\theta = \{ A \in \mathcal{M}_0 : J(A) = \{ \theta \} \}$$

\mathcal{M}_θ jest podrozmaitością rozmaitości \mathcal{M}_0 . Przestrzeń styczna $\mathcal{M}_\theta(A)$ do rozmaitości \mathcal{M}_θ w punkcie $A \in \mathcal{M}_\theta$ jest zbiorem postaci:

9.
$$\mathcal{M}_\theta(A) = \{ \underline{F} \in \mathbb{R}^2 : t_\tau(\underline{F} \dot{A}) = 0 \}$$

Niech \mathcal{M} będzie rozmaitością postaci:

10.
$$\mathcal{M} = \{ \underline{a} = (\underline{F}, \theta) : \underline{F} \in \mathcal{M}_\theta, \theta \in I \}$$

Przestrzeń styczna $\mathcal{M}(\underline{a})$ do \mathcal{M} w punkcie $\underline{a} = (\underline{F}, \theta)$ ma postać:

11.
$$\mathcal{M}(\underline{a}) = \{ (\underline{F}', \theta') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : t_\tau(\underline{F}' \dot{\underline{F}}) = \beta(\theta) \dot{\theta}' \}$$

Przez Ω oznaczymy wektorową wiązkę o bazie \mathcal{M} oraz włóknach $\Omega(\underline{a})$, $\underline{a} \in \mathcal{M}$ - zdefiniowane przepisami:

12.
$$\Omega = \{ \omega = (\underline{a}, \underline{x}) : \underline{a} \in \mathcal{M}, \underline{x} \in \Omega(\underline{a}) \}$$

$$\Omega(\underline{a}) = \{ \underline{x} = (\underline{D}, \theta') : \underline{D} = \underline{F}' \dot{\underline{F}}, (\underline{F}', \theta') \in \mathcal{M}(\underline{a}) \}, \underline{a} = (\underline{F}, \theta)$$

Niech \mathbb{R}^3 będzie przestrzenią wektorową uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych ze standartową strukturą euklidesową. Oznaczmy przez $\underline{e}_i, i=1,2,3$ standartową bazę w \mathbb{R}^3 : $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$. Przez $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^3$ oznaczamy dowolny walec kołowy o osi symetrii pokrywającej się z osią X^3 oraz środkiem w punkcie $\underline{0} = (0, 0, 0)$. Wysokość walca \mathcal{B}_0 oznaczamy przez h a promień jego podstawy - przez R . Czysta jednorodna deformacja /np. [1] / zachowująca kształt

walca \mathcal{B}_0 jest tensorem postaci:

$$13. \quad \underline{F} = \lambda_h \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + \lambda_R (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2), \quad \lambda_h, \lambda_R > 0$$

Oznaczmy przez $G(\mathcal{B}_0)$ zbiór wszystkich tensorów $\underline{F} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ postaci (13). $G(\mathcal{B}_0)$ jest podgrupą grupy wszystkich tensorów $\underline{A} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ o $\det \underline{A} > 0$ oraz podrozumnością wektorowej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$. Przestrzenie styczne do tej podrozumności są liniowymi przestrzeniami postaci:

$$14. \quad \mathcal{T} = \{ \underline{T} \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 : \underline{T} = t_h \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 + t_R (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2), t_h, t_R \in \mathbb{R} \}$$

Grupa $G(\mathcal{B}_0)$ jest izomorficzna z grupą \mathcal{M}_0 . Izomorfizm ten ustala odwzorowanie:

$$\iota_0 : G(\mathcal{B}_0) \rightarrow \mathcal{M}_0, \quad \iota_0 = \iota | G(\mathcal{B}_0)$$

15.

$$\iota : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \iota(\underline{T}) = (t_h, t_R)$$

Przy tym izomorfizmie jednostkowy tensor $\underline{1} = \delta^{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$ przechodzi na jedność $\underline{1} = (1, 1)$ grupy \mathcal{M}_0 oraz dla $\underline{A} \in \mathcal{T}$:

$$\iota(\underline{A}) \iota(\underline{B}) = \iota(\underline{A} \underline{B}), \quad \iota(\lambda \underline{A}) = \lambda \iota(\underline{A})$$

16.

$$\text{tr} \underline{A} = \text{tr} \iota(\underline{A}), \quad \det \underline{A} = \det \iota(\underline{A}), \quad \iota(\text{dev} \underline{A}) = \text{dev} \iota(\underline{A})$$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = \iota(\underline{A}) \cdot \iota(\underline{B}), \quad \|\underline{A} - \underline{B}\| = g(\iota(\underline{A}), \iota(\underline{B}))$$

gdzie przez $\|\cdot\|$ oznaczono standartową normę w $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^3$. Izomorfizm ten pozwala utożsamiać grupy $G(\mathcal{B}_0)$ i \mathcal{M}_0 oraz przestrzenie styczne \mathcal{T} i \mathbb{R}^2 . W szczególności przy tym utożsamieniu przestrzeń \mathcal{T} jest traktowana jako iloczyn kartezjański dwu jednowymiarowych podprzestrzeni liniowych $E_h, E_R \subset \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ postaci:

$$\mathcal{T} = E_h \times E_R$$

17.

$$E_h = \{ \underline{T}_h = t_h \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3, t_h \in \mathbb{R} \}$$

$$E_R = \{ \underline{T}_R = t_R (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2), t_R \in \mathbb{R} \}$$

a grupa $G(\mathcal{B}_0)$ - jako iloczyn kartezjański postaci:

$$G(\mathcal{B}_0) = E_n^+ \times E_R^+$$

18.

$$E_n^+ = \{T_n \in E_n : t_n > 0\}, \quad E_R^+ = \{T_R \in E_R : t_R > 0\}$$

Funkcja $f: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ rozważane są jako funkcje $f_{h,R}$ postaci:

$$f_{h,R} : E_n \times E_R \rightarrow \mathbb{R}$$

19.

$$f_{h,R}(F_n, F_R) = f(F_n + F_R)$$

Jeżeli $f: \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalną izotropową funkcją oraz oznaczmy

$$\overset{\circ}{f} = f \circ \overset{\circ}{c}_0 : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

20.

$$\hat{f} = f|_{\mathcal{T}}$$

to

$$21. \quad \frac{\partial \hat{f}_{h,R}}{\partial F_n} = \frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial \overset{\circ}{h}} \circ \overset{\circ}{c}_0 \circ e_3 \otimes e_3, \quad 2. \quad \frac{\partial \hat{f}_{h,R}}{\partial F_R} = \frac{\partial \overset{\circ}{f}}{\partial \overset{\circ}{R}} \circ \overset{\circ}{c}_0 \circ (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2)$$

Jeżeli

$$22. \quad \underline{F} = (F_n, F_R) : \mathbb{R}^+ \rightarrow G(\mathcal{B}_0)$$

jest krzywą w $G(\mathcal{B}_0)$ oraz

$$23. \quad \varphi(t) = f_{h,R}(F(t))$$

to

$$24. \quad \dot{\varphi}(t) = \frac{\partial f}{\partial \underline{F}} \cdot \dot{\underline{F}} = \frac{\partial f}{\partial \lambda_n} \dot{\lambda}_n + \sum \frac{\partial f}{\partial \lambda_R} \dot{\lambda}_R$$

gdzie oznaczono

$$25. \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{F}} = \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda_n}, \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \lambda_R} \right), \quad \dot{\underline{F}} = (\dot{\lambda}_n, \dot{\lambda}_R)$$

Powyższe utożsamienia pozwalają zbudować formalizm termodynamiczny dla konfiguracji jednorodnych postaci:

$$\underline{\lambda} = (F, \Theta)$$

26.

$$F = (F_h, F_R) \in E_h^+ \times E_R^+, \Theta \in I$$

w sposób analogiczny jak to zrobiono w rozdziałach 1 i 2 i przy wykorzystaniu wyprowadzonych tam formuł. Zamiast operować konfiguracjami (26) można równoważnie używać konfiguracji:

$$\underline{\lambda} = (F, \Theta)$$

27.

$$F = (\lambda_h, \lambda_R) \in \mathcal{M}_0, \Theta \in I$$

Wtedy przestrzeniom \mathcal{M} i Ω rozpatrywanym w rozdziale 2 należy przypisać sens nadany w tym dodatku. Formuły (2) - (4), (16) oraz (24) i (25) są przepisami na to jak, operując parami liczb, otrzymać formuły obowiązujące dla tensorów.

BIBLIOGRAFIA

- 1 COTTREL A.H., Własności mechaniczne materii, PWN, Warszawa 1970,
- 2 ZIABICKI A., Fizyka procesów formowania włókien, WNT, Warszawa 1970,
- 3 WEIBULL W., A statistical theory of the strength of materials, Proc.Roy.Swed.Inst.Res., Nr 151, 1939,
- 4 CHEVERTON K.J., BEATY M.F., On the mathematical theory of the mechanical behaviour of some non-simple material, ARMA 1975, vol.60, No 1,
- 5 MORGAN A.J.A., Inhomogeneous materially uniform higher order solids, Papers Univ.of Cal., 1974,
- 6 ROGULA D., Geometrical and dynamical nonlocality, Archives of Mechanics, 1979, 1,31,
- 7 ROGULA D., Wpływ akustycznej dyspersji przestrzennej na własności dynamiczne dyslokacji, Biul.WAT, XIV, 6/154/, 1965,
- 8 MORGAN A.J.A., Spatially cognite media; Arch.of Mech., 1975, 17/2,
- 9 KRÖNER E., Elasticity theory of materials with long range cohesive forces, Int.Journ.of Sol. and Struct; 3, 731-742 /1967/,
- 10 ZORSKI H., Non-existence of a continuum that models a Newtonian systems of interacting particles, ARMA 1974, vol.56, No 4,
- 11 TRUSDELL C., A first course in rational continuum mechanics, Hopkins Univ., Baltimore 1972,
- 12 SŁAWIANOWSKI J., Geometria przestrzeni fizycznych, PWN, Warszawa 1975,
- 13 SŁAWIANOWSKI J., Teoria deformacji wielomianowych, Prace IPPT, No 45/1975,
- 14 KRÖNER E., Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, ARMA 1960, vol.4, No 4,
- 15 WOJEWODA H., Metoda transformacyjna Legendre'a, Prace Nauk. Inst.Fiz.Tech.Polit.Wrocławskie, 1972, 5/1,
- 16 SCHULZE G., Metallphysic; Acad.-Verlag, Berlin 1967,
- 17 GUERTIN M.E., GUIDUGLI P.P., The thermodynamics of constrained materials, ARMA, 51, 3/1973/,
- 18 ZORSKI H., Direct Continuum Model of Interacting Particles;w "Continuum Models of Discrete Systems", Univ.of Waterloo Press 1977,
- 19 MANACORDA T., Zagadnienia elastodynamiki, "Ossolineum", Wrocław 1978,

- 20 TRELOAR T., Zagadnienia elastodynamiki; "Ossolineum", Wrocław 1978,
- 21 TRUESDELL C., Sześć wykładów nowoczesnej filozofii przyrody, PWN, Warszawa 1969,
- 22 HADWIGER H., Altes und Neues über konvex Körper; Birkhäuser Verlag, Basel 1955,
- 23 ГРЮНБАУМ Б., Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел, Наука, 1971,
- 24 LODGE A.S., Elastic Liquids; Acad.Press.London 1949 /tłum.ros. 1969/,
- 25 CHADWICK P., Termodynamika materiałów gumopodobnych; "Ossolineum", Wrocław 1978,
- 26 ГОЛЬДЕНБЛАТТ И.И., Непрерывные проблемы теории упругости, Наука, Москва 1963,
- 27 ŻUCHOWSKI R., Wpływ różnych czynników na wartość modułów sprężystości; Prace Naukowe Pol.Warszawskiej, 1975/24,
- 28 MILSTEIN F.M., HILL R., Theoretical properties of cubic Crystals at Arbitrary Pressure - I: Mech.Phys.Solids., 1977, vol.25, pp.445-477,
- 29 ОГИБАЛОВ П.М., КИЙКО И.А., Очерки по механике высоких параметров, Изд.Моск.Унив., Москва 1966,
- 30 КОМПАНИЕЦ А.С., Курс теоретической физики,- Т. II; Просвещение, Москва 1975,
- 31 GLANSDORFF P., PRIGOGINE I., Thermodynamic theory of structure stability and fluctuations; Wiley-Interscience; /tłum.ros. 1973/,
- 32 BRONSTEIN I.N., SIEMIADIEJEW K.A., Matematyka. Poradnik encyklopedyczny; PWN, Warszawa 1956,
- 33 ZAHORSKI S., Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy, Rozprawy Inżynierskie, CCXX, Tom X, Zesz.1, 1962,
- 34 JASTRZĘBSKI Z., Własności tworzyw konstrukcyjnych, WNT, Warszawa 1962,
- 35 ЯВОРСКИЙ Б.М., ДЕТЛАФ А.А., Справочник по физике; Наука, Москва 1960,
- 36 GREEN A.E., ADKINS J.E., Large elastic deformation, Oxford 1960,
- 37 BROCKER T.H., Differentiable Germs and Catastrophes, Lecture Notes in Mathematics 17, Springer-Verlag 1975,
- 38 ERINGEN A.C., Mechanics of Continua, J.Willey, New York 1967,
- 39 WESOŁOWSKI Z., Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości, PWN, Warszawa 1974.

STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono fenomenologiczną teorię tzw. "efektu skali" polegającego na wpływie kształtu i wymiarów ciała materialnego na jego własności mechaniczne. Rozważania ograniczono do przypadku gdy stan fizyczny ciała określony jest przez jego jednorodną deformację oraz jednorodną temperaturę. Zaproponowano termodynamiczny model efektu skali dla takich ciał. Model ten uwzględnia wpływ efektów prędkościowych oraz więzów termomechanicznych na reakcję naprężeniową ciała z efektem skali. Pokazano, że uogólnione siły termodynamiczne działające na takie ciało, mogą być przedstawione w postaci dipolowych momentów sił powierzchniowych. Ta własność uogólnionych sił termodynamicznych pozwoliła na zaproponowanie modelu dynamiki ciał z efektem skali polegającego na przyjęciu postulatu bilansu w postaci prawa zachowania dipolowego momentu pędu ciała.

Dalsze rozważania pracy dotyczą wyróżnionej klasy ciał z efektem skali nazwanej ciałami o cieczipodobnej reakcji. Wskazano na analogie między własnościami tej klasy ciał a własnościami obserwowanymi dla ciał z usieciowanych polimerów.

Praca zawiera również analizę dwu szczególnych przypadków efektu skali: przy wszechstronnej ekspansji krystalicznej kuli oraz osiowym rozciąganiu elastomerycznego walca kołowego o cieczipodobnej reakcji.