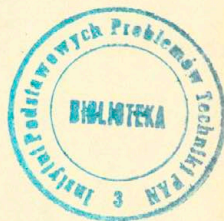


53 / 1979

Wanda Szemplińska-Stąpnicka

DRGANIA REZONANSOWE  
UKŁADU Z NIELINIOWĄ „JEDNORODNĄ”  
CHARAKTERYSTYKĄ SPRĘŻYSTĄ

P. 269



WARSZAWA 1979

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 18 października 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 53/1979



57193

Na prawach rękopisu

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 130 egz. Ark.wyd. 0,9. Ark. druk.1,5.

Oddano do drukarni w listopadzie 1979 r.

Nr zamówienia 678/0/79

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

Wanda Szemplińska-Stupnioka  
Zakład Układów Mechanicznych

DRGANIA REZONANSOWE UKŁADU Z NIELINIOWĄ  
"JEDNORODNĄ" CHARAKTERYSTYKĄ SPRĘŻYSTĄ

1. Wstęp

We wcześniejszych pracach przedstawiono zmodyfikowaną jednodobalną metodę badania drgań rezonansowych układów nieliniowych o wielu stopniach swobody [1, 2]. Prace te dotyczyły układów, w których spełniony jest warunek, że dla całej rodziny "krzywych szkieletowych" częstości własne  $\omega_i(a)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  są różne w całym rozpatrywanym zakresie amplitud. Obecnie podjęto próbę uogólnienia tej metody na układy, które tego warunku nie spełniają, a w szczególności na specjalną klasę nieliniowych układów drgających z tzw. "jednorodną" charakterystyką sprężystą. Termin ten wprowadził R.M.Rosenberg [3-6], który badał ich jakościowe własności za pomocą metod topologicznych w przestrzeni konfiguracji. Są to układy silnie nieliniowe, nielinearyzowalne, a bardzo istotną ich cechą jest to, że mają stałe postacie własne.

W obecnej pracy ograniczymy się do szczegółowego zbadania układu o dwóch stopniach swobody z "jednorodną" charakterystyką sprężystą z wykładnikiem  $r = 3$ .

2. Ogólne równania i własności układu

Rozważany układ składa się z dwóch skupionych mas  $m_1, m_2$ , sprężyn, których charakterystyka opisana jest funkcją  $x^3$  /bez części liniowej/, oraz liniowych tłumików. /Rys.1./. Równania ruchu układu są następujące:

$$m_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + K_{10} q_1^3 + K_{12} (q_1 - q_2)^3 + \bar{l}_1 \frac{dq_1}{dt} + \bar{l}_2 \left( \frac{dq_1}{dt} - \frac{dq_2}{dt} \right) = \bar{P} \cos \bar{\omega} t,$$

/2.1/

$$m_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + K_{12} (q_2 - q_1)^3 + \bar{l}_2 \left( \frac{dq_2}{dt} - \frac{dq_1}{dt} \right) + K_{23} q_2^3 = 0.$$

Po sprowadzeniu równań /2.1/ do postaci bezwymiarowej otrzymujemy:

$$\ddot{q}_1 + c_{10} q_1^3 + c_{12} (q_1 - q_2)^3 + l_1 \dot{q}_1 + l_2 (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = p \cos \nu \tau;$$

/2.2/

$$\nu \ddot{q}_2 + c_{12} (q_2 - q_1)^3 + c_{23} q_2^3 + l_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) = 0.$$

gdzie:  $\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt}$ ,  $\tau = t \sqrt{\frac{K_{10}}{m_1}}$ ;  $\nu = \frac{m_2}{m_1}$ ;

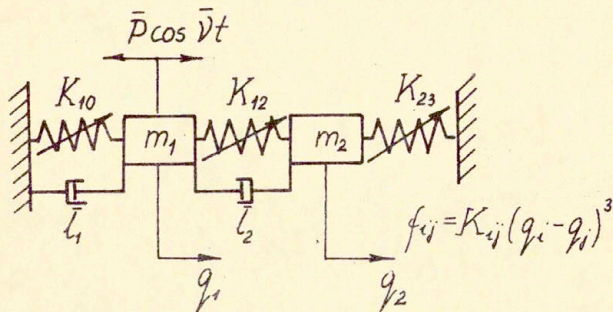
$$c_{ij} = \frac{K_{ij}}{K_{10}}; \quad p = \frac{\bar{P}}{K_{10}}; \quad l_i = \frac{\bar{l}_i}{K_{10}}; \quad \nu = \bar{\nu} \sqrt{\frac{m_1}{K_1}};$$

Zbadajmy najpierw podstawowe własności układu autonomicznego, zachowawczego tj. przy  $l_1 = l_2 = p = 0$ . Wykażemy, że układ ten posiada stałe postaci własne, tj. że posiada rozwiązania periodyczne spełniające warunki drgań głównych /wg uogólnionej definicji R.M.Rosenberga [3-6] /, w których:

$$\frac{q_2}{q_1} = \text{const}$$

W tym celu założymy rozwiązanie szczególne w postaci:

/2.3/  $q_1 = f(\tau)$ ;  $q_2 = b \cdot f(\tau)$



Rys. 1

gdzie  $f(\tau)$  nieznaną funkcją periodyczną o okresie  $T$ .  
 Po podstawieniu rozwiązania /2.3/ do równań ruchu /2.2//przy  
 $l_1 = l_2 = P = 0$  / otrzymujemy:

$$\ddot{f}(\tau) + C_{10} f^3(\tau) + C_{12} f^3(\tau)(1-b)^3 = 0,$$

/2.4/ 
$$\gamma \ddot{f}(\tau) \cdot b + C_{23} f^3(\tau) \cdot b - C_{12} f^3(\tau) \cdot (1-b)^3 = 0;$$

Z równań tych można wyeliminować nieznaną funkcję  $f(\tau)$  i otrzymać równanie algebraiczne z niewiadomą postacią własną  $b$  :

/2.5/ 
$$b^4 + b^3 \left( \frac{C_{23}}{\gamma C_{12}} + \frac{1}{\gamma} - 3 \right) + b^2 \left( 3 - \frac{3}{\gamma} \right) + b \left( \frac{3}{\gamma} + \frac{C_{10}}{C_{12}} - 1 \right) - \frac{1}{\gamma} = 0;$$

Pierwiastki tego równania dają nam wartości współczynnika  $b$  w rozw. /2.3/ - stałe, niezależne od czasu i od formy funkcji  $q(\tau)$ . W ten sposób, za pomocą elementarnych rozważań można wykazać istnienie stałych postaci własnych układów jednorodnych - własność wykazaną w [3-6] za pomocą metod topologicznych w przestrzeni konfiguracji.

Równanie /2.5/ jest stopnia czwartego względem  $b$ , co sugeruje możliwość istnienia czterech postaci własnych w układzie o dwóch stopniach swobody. Jak dotąd nie udowodniono ogólnie, że jest to niemożliwe, lecz nie znaleziono również układów, w których liczba postaci własnych /a zatem i drgań głównych/ była większa od liczby stopni swobody. Założmy więc, że równanie /2.5/ posiada dwa pierwiastki rzeczywiste -  $b_1$  i  $b_2$ . Z faktu, że wyraz wolny w /2.5/ jest ujemny wynika, że jeden z pierwiastków np.  $b_1$  jest dodatni, a drugi ujemny:

$$b_1 > 0 \quad ; \quad b_2 < 0$$

Dalsze szczegółowe rozważania oprzemy na założeniu, zgodnie z założeniami metody jednodalnej, że funkcja  $q(\tau)$  w rozw. /2.3/ jest harmoniczna:

$$q_1(\tau) = a \cos \omega \tau,$$

/2.6/

$$q_2(\tau) = a \cdot b \cos \omega \tau;$$

gdzie  $\omega$  jest nieznaną częstością własną układu. Ze względu na fakt, że układ jest "silnie nieliniowy" założenie przybliżonego rozwiązania w formie funkcji harmonicznej, może budzić pewne zastrzeżenia. Wyniki przedstawione w monografii [7], oraz przeprowadzone wstępne badania analogowe pozwalają przypuszczać, że założenie to jest dopuszczalne w badanym układzie.

Po przyjęciu rozwiązania w postaci /2.6/ i zastosowaniu metody bilansu harmonicznych otrzymujemy układ równań algebraicznych względem  $\omega$  i  $b$ :

$$\begin{aligned} & -\omega^2 + \frac{3}{4} C_{10} a^2 + \frac{3}{4} C_{12} a^2 (1-b)^3 = 0, \\ /2.7/ & \\ & -\gamma b \omega^2 + \frac{3}{4} C_{23} b^3 a^2 - \frac{3}{4} C_{12} a^2 (1-b)^3 = 0; \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy równanie z niewiadomą  $b$  /2.5/ oraz częstotliwość własną jako funkcję amplitudy  $a$  :

$$/2.8/ \quad \omega^2 = \frac{3}{4} a^2 [C_{10} + C_{12} (1-b)^3]$$

Krzywe szkieletowe  $\omega \equiv \omega(a)$  są więc liniami prostymi wychodzącymi z początku układu współrzędnych.

### 3. Wyznaczenie drgań rezonansowych za pomocą metody jednomodalnej

Powracając do układu dysypacyjnego z wymuszeniem harmonicznym /2.2/ - poszukujemy odpowiedzi układu w pobliżu rezonansów głównych tj, gdy spełniony jest warunek  $\omega \approx \nu$ . Jak wykazano we wcześniejszych pracach odpowiedź układu w pobliżu rezonansu można wyznaczyć w sposób przybliżony za pomocą metody jednomodalnej przyjmując, że postać drgań jest równa odpowiedniej postaci własnej. Zgodnie z tym założeniem szukamy odpowiedzi rezonansowej - w pobliżu pierwszego rezonansu w formie:

$$\begin{aligned} /3.1a/ \quad q_1(\tau) &= a_1 \cos(\nu\tau + \vartheta_1) \\ q_2(\tau) &= a_1 b_1 \cos(\nu\tau + \vartheta_1) \end{aligned} \quad ; \quad \nu \approx \omega_1(a_1);$$

a w pobliżu drugiego rezonansu w formie:

$$\begin{aligned} /3.1b/ \quad q_1(\tau) &= a_2 \cos(\nu\tau + \vartheta_2) \\ q_2(\tau) &= a_2 b_2 \cos(\nu\tau + \vartheta_2) \end{aligned} \quad ; \quad \nu \approx \omega_2(a_2);$$

gdzie  $b_1, b_2$  - postacie własne wyznaczone z równania /2.5/.  
Nawiązując do prac [1,2] na temat metody jednorodnej zapiszemy najpierw rozwiązania /3.1/ w ogólniejszej formie wprowadzając nieliniowe współrzędne normalne  $\xi_1, \xi_2$  :

$$\begin{array}{ll}
 /3.2/ & q_1 = \xi_1(\tau) ; & q_1 = \xi_2(\tau) \\
 & q_2 = b_1 \xi_1(\tau) ; & q_2 = b_2 \xi_2(\tau) \\
 & \nu \approx \omega_1, & \nu \approx \omega_2.
 \end{array}$$

Wykażemy, że dla rozważanego "jednorodnego" układu można wyprowadzić równania modalne w takiej samej formie jak dla układów linearyzowanych [1,2]. Wykażemy, że z dokładnością metody bilansu harmonicznych współrzędna normalna  $\xi_i$  rządzone jest równaniem:

$$\begin{array}{l}
 /3.3/ \quad M_i \ddot{\xi}_i + M_i \omega_i^2 \xi_i + h_i \dot{\xi}_i = Q \cos \nu \tau ; \\
 \quad \quad \quad i = 1, 2.
 \end{array}$$

gdzie  $\omega_i$  - częstość własna wyznaczona za pomocą /2.8/,

$$M_i = 1 + \gamma b_i^2 \quad - \text{uogólniona masa } i\text{-tej postaci drgań,}$$

$$h_i = \ell_1 + \ell_2 (1 - b_i) \quad - \text{efektywny współczynnik tłumienia } i\text{-tej postaci.}$$

Wyprowadzenia równania /3.3/ przeprowadzono za pomocą następującej procedury: po podstawieniu /3.2/ do równań ruchu /2.2/, drugie z równań mnożymy przez  $b_i$  i dodajemy, otrzymując:

$$\begin{array}{l}
 \ddot{\xi}_i (1 + \gamma b_i^2) + \xi_i^3 [1 + c_{23} b_i^4 + c_{12} (1 - b_i)^4] + \\
 /3.4a/ \quad \dot{\xi}_i [\ell_1 + \ell_2 (1 - b_i)] = P \cos \nu \tau ;
 \end{array}$$



Zauważmy, że zgodnie z równaniami bilansu harmonicznych dla układu autonomicznego /2.7/ spełniona jest zależność:

$$\frac{3}{4} a_i^2 [1 + C_{23} b_i^4 + C_{12} (1 - b_i)^4] = \omega_i^2 (1 + \gamma b_i^2) \equiv \omega_i^2 M_i ;$$

Następnie, z założenia, że  $f_i(t)$  jest funkcją harmoniczną, z metody bilansu harmonicznych wynika równość:

$$/3.4b/ \quad f_i^3 [1 + C_{23} b_i^4 + C_{12} (1 - b)^4] = M_i \omega_i^2 f_i ;$$

Zależność /3.4b/ sprowadza równanie /3.4a/ do postaci /3.3/.

Z równań modalnych /3.3/ otrzymujemy amplitudę i kąt fazowy współrzędnych  $f_1, f_2$  za pomocą metody bilansu harmonicznych:

$$/3.5/ \quad a_i = \frac{P}{M_i \sqrt{[\omega_i^2(a_i) - \nu^2]^2 + \frac{h_i^2 \nu^2}{M_i^2}}} ;$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_i = \frac{h_i \nu}{M_i [\omega_i^2(a_i) - \nu^2]} ;$$

#### 4. Przykład liczbowy

Jako pierwszy przykład liczbowy weźmy układ symetryczny tj. przyjmijmy:

$$\gamma = 1 ; \quad C_{10} = C_{23} = 1, \quad \text{oraz} \quad C_{12} = \frac{1}{2} ;$$

Jak wiadomo liniowy układ symetryczny posiada postacie własne  $b_1 = 1 ; b_2 = -1$ . Szczegółowa analiza wykazała, że 1

dla rozważanego układu nieliniowego wartości te spełniają równanie /2.5/ niezależnie od wartości współczynnika  $C_{12}$ .  
Do szczegółowych obliczeń wybrano wartość  $C_{12} = \frac{1}{2}$ , gdyż w tym przypadku równanie /2.5/ redukuje się do prostej postaci:

$$b^4 = 1$$

i otrzymujemy pierwiastki rzeczywiste

$$/4.1/ \quad b_1 = 1; \quad b_2 = -1,$$

oraz parę pierwiastków urojonych  $b_{3,4} = \pm i$

Następnie z wzoru /2.8/ obliczamy częstości własne:

$$/4.2/ \quad \omega_1^2 = \frac{3}{4} a_1^2;$$

$$\omega_2^2 = \frac{15}{4} a_2^2;$$

Krzywe szkieletowe  $\omega_1(a_1)$ ,  $\omega_2(a_2)$  przedstawione są na rys.2.

Zgodnie z metodą jednomodalną /3.1/ przewidujemy odpowiedź układu w pobliżu pierwszego rezonansu:

$$q_1 = a_1 \cos(\nu T + \vartheta_1)$$

/4.3/ I rezonans -

$$\nu \approx \omega_1(a_1)$$

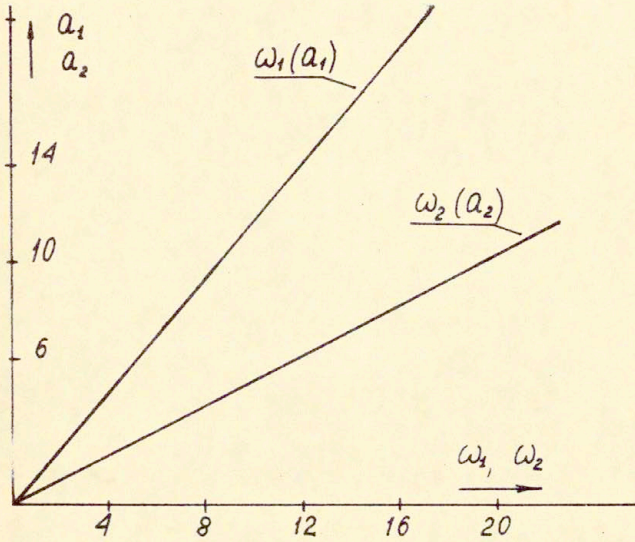
$$q_2 = a_2 b_1 \cos(\nu T + \vartheta_1) = a_1 \cos(\nu T + \vartheta_1);$$

$$q_1 = a_2 \cos(\nu T + \vartheta_2)$$

/4.4/ II rezonans -

$$\nu \approx \omega_2(a_2)$$

$$q_2 = a_2 b_2 \cos(\nu T + \vartheta_2) = -a_2 \cos(\nu T + \vartheta_2);$$



Rys.2. Wykresy częstości własnych jako funkcje amplitudy współrzędnej  $q_1$ .

Amplitudy  $a_1, a_2$  obliczamy według /3.4/:

$$a_1 = \frac{p}{2 \sqrt{\left(\frac{3}{4} a_1^2 - \nu^2\right)^2 + \frac{\ell_1^2 \nu^2}{4}}} ;$$

/4.5/

$$a_2 = \frac{p}{2 \sqrt{\left(\frac{15}{4} a_2^2 - \nu^2\right)^2 + \frac{1}{4} (\ell_1 + 4 \ell_2)^2 \nu^2}} ;$$

Analiza wzorów /4.5/ wykazała, że przy odpowiednim doborze stosunku współczynników tłumienia  $\ell_2/\ell_1$  można otrzymać dwa przypadki krzywych rezonansowych  $a_1(\nu)$  i  $a_2(\nu)$  :

przy  $\frac{\ell_2}{\ell_1} < 0,31$

- częstość drugiego rezonansu jest większa od częstości pierwszego rezonansu:

$$\nu_{2max} > \nu_{1max}$$

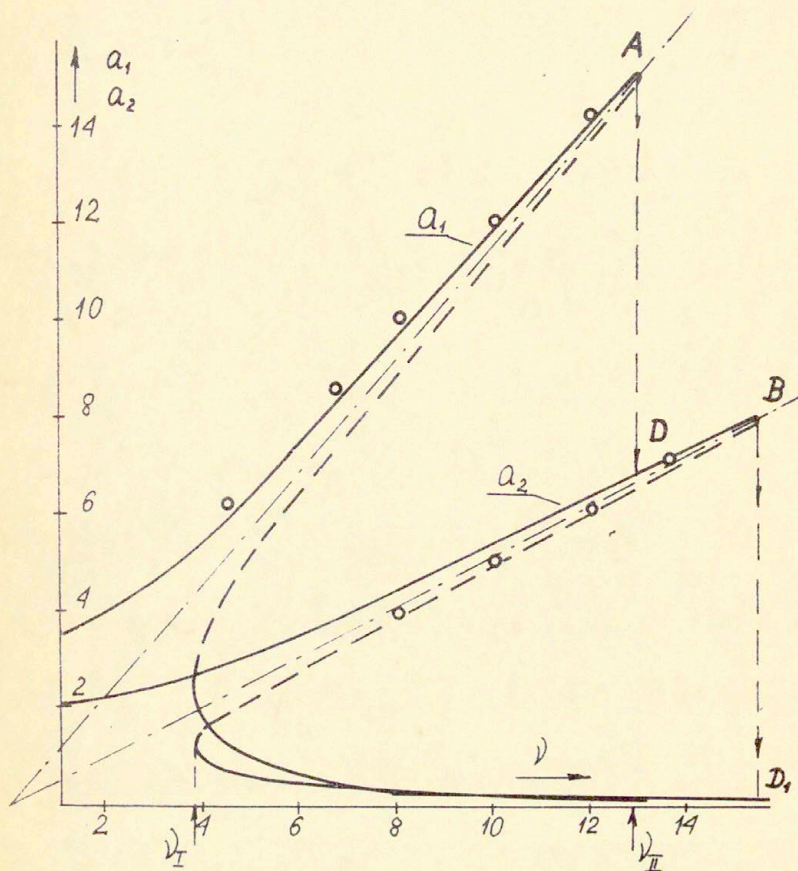
2. przy  $\frac{\ell_2}{\ell_1} < 0,31$

- częstość drugiego rezonansu jest mniejsza od częstości pierwszego rezonansu:

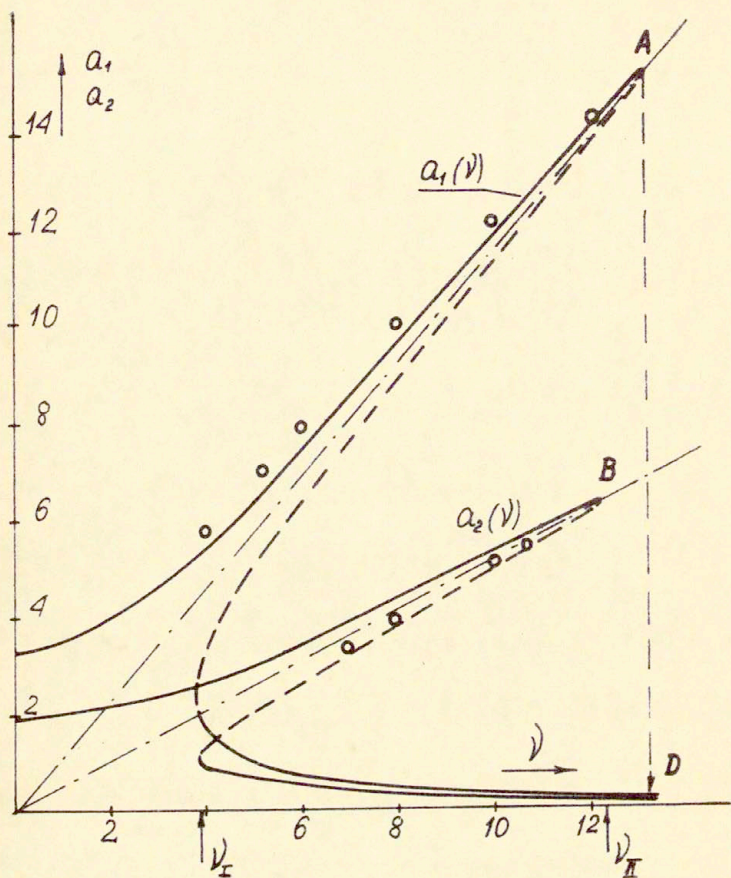
$$\nu_{2max} < \nu_{1max}$$

Dla przykładu podano krzywe rezonansowe  $a_1(\nu)$  i  $a_2(\nu)$  dla wartości  $\ell_2/\ell_1 = 0,15$  -(rys.3) i dla  $\ell_2/\ell_1 = 0,40$  (rys.4.)

Zgodnie ze znanymi kryteriami lokalnej stateczności rozwiązań ustalonych, części krzywych rezonansowych oznaczone linią ciągłą odpowiadają rozwiązaniom statecznym, a oznaczone linią przerywaną - rozwiązaniom niestatecznym. Zauważmy, że według tych kryteriów można przypuszczać, że przy wzrastającej częstości  $\nu$  w przykładzie przedstawionym na rys.3 po osiągnięciu maksymalnej amplitudy pierwszego rezonansu /pkt A na rys.3/ nastąpi przeskok do drugiego rezonansu, w którym fazy drgań obu mas są przeciwne, a amplituda odpowiada punktowi D. Nastę-



Rys.3. Krzywe rezonansowe wyznaczone metodą jednomodalną:  
przykład 1 -  $P = 50$  ;  $l_1 = 0,25$  ;  $l_2/l_1 = 0,4$  ;  
○ ○ ○ - wyniki badań analogowych.



Rys.4. Krzywe rezonansowe wyznaczone metodą jednomodalną:  
przykład 2 -  $P = 50$  ;  $l_1 = 0,25$  ;  $l_2/l_1 = 0,4$  ;  
○ ○ ○ - wyniki badań analogowych.

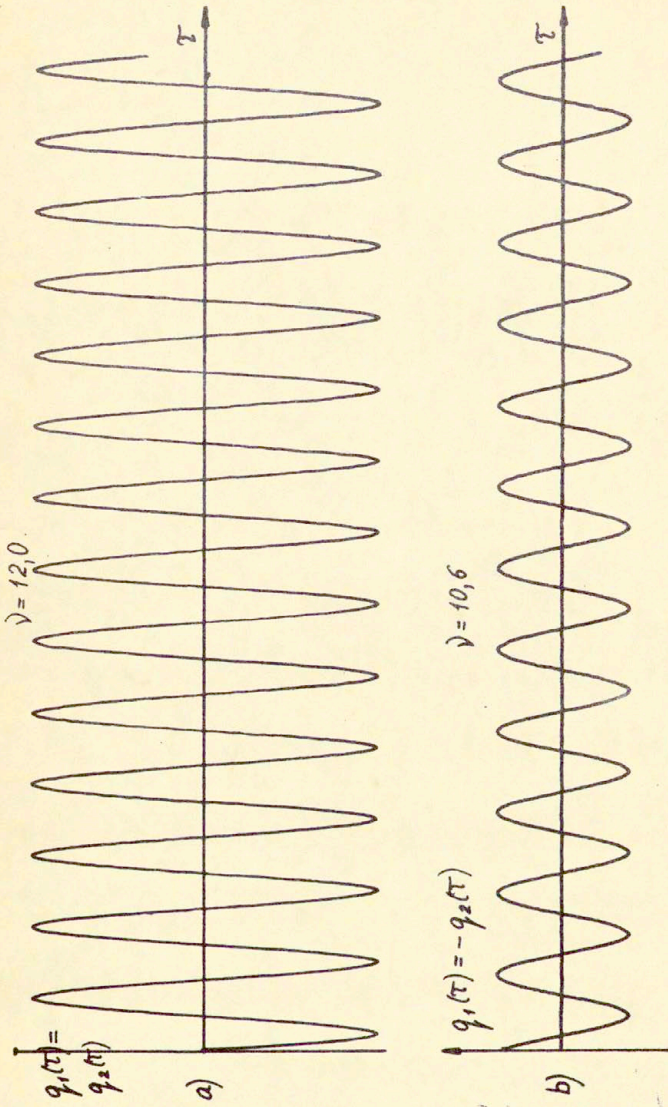
nie amplituda drugiego rezonansu będzie wzrastać do punktu B, po którym nastąpi gwałtowny przeskok do drgań nierezonansowych /punkt D<sub>4</sub>/. Natomiast w przykładzie przedstawionym na rys.4 przy wzrastającej od zera częstotliwości  $\nu$  - układ osiągnie wierzchołek pierwszego rezonansu - punkt A, a następnie przejdzie do stanu nierezonansowego - punkt D - nie realizując wcale drugiego rezonansu. Trudno natomiast przewidzieć zachowanie się układu przy malejącej częstotliwości .

Ogólnie należy podkreślić, że rozważany układ posiada osobliwe, nie zbadane dotąd własności: w pewnym zakresie częstotliwości wymuszenia od  $\nu$  I do  $\nu$  II występują lokalnie stateczne dwa stany rezonansowe - rezonans pierwszy odpowiadający częstotliwości własnej  $\omega_1$  i rezonans drugi odpowiadający częstotliwości własnej  $\omega_2$  . Nasuwa się wniosek, że by móc przewidzieć zachowanie się układu w tym zakresie częstotliwości, należy zbadać obszary przyciągania tych dwóch odpowiedzi rezonansowych. Jest to zagadnienie dotąd nie badane. W istniejącej literaturze obszary przyciągania dwóch stanów harmonicznych ustalonych - rozwiązania rezonansowego i nierezonansowego [7] .

#### 5. Badania analogowe

W celu weryfikacji własności drgań rezonansowych rozważanego układu, równania ruchu /2.2/ zamodelowano na maszynie analogowej MEDA 41 TC i przeprowadzono szczegółową analizę odpowiedzi układu. Wyniki badań analogowych przedstawione są na rys. 5-9.

Na rys.5 pokazano przebiegi czasowe odpowiedzi  $q_1(t)$  dla przykładu 2 zarejestrowane na rejestratorze BAK 5T. W przypadku 5a fazy obu współrzędnych  $q_1$  i  $q_2$  były zgodne, w przypadku 5b - przeciwnie. Wykresy wykonane zostały przy częstotliwościach wymuszenia  $\nu = 12,0$  i  $\nu = 10,6$ , przy których amplitudy drgań były bliskie amplitudom maksymalnym. Odpowiedź układu ma wyraźnie przebieg harmoniczny. Stwierdzono, że harmoniczny charakter odpowiedzi układu występuje w znacznym zakresie częstotliwości wymuszenia. W przykładzie 1 ( $\frac{\nu}{\omega_1} = 0,15$ ) odpowiedź harmoniczna o zgodnych fazach obu współrzędnych wystąpiła w zakre-



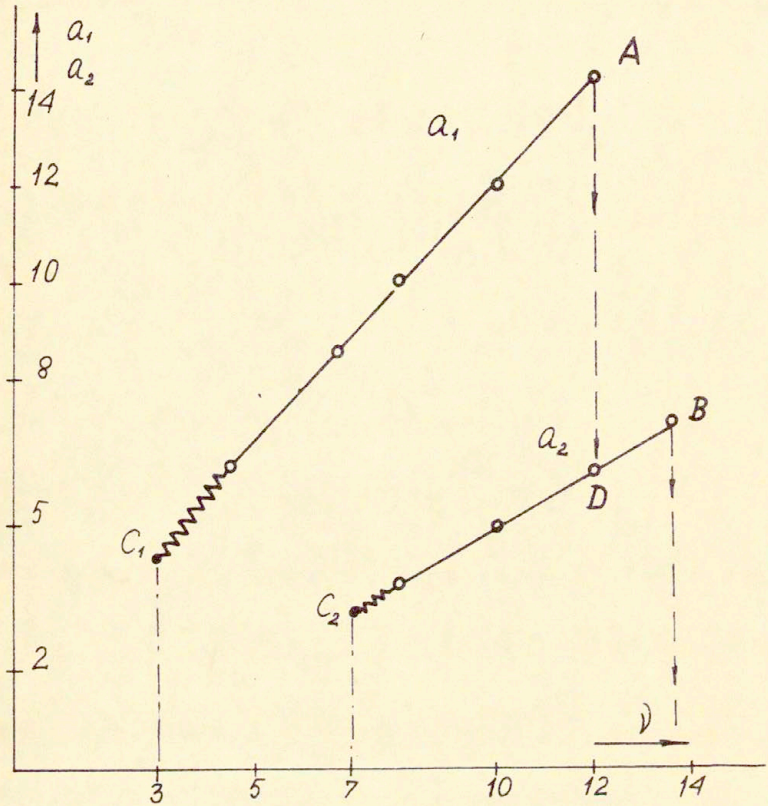
Rys. 5. Przebiegi osasowe odpowiedzi układu  $q_1(t)$  w pobliżu głównych rezonansów dla przykładu 1 - wyniki badań analogowych.



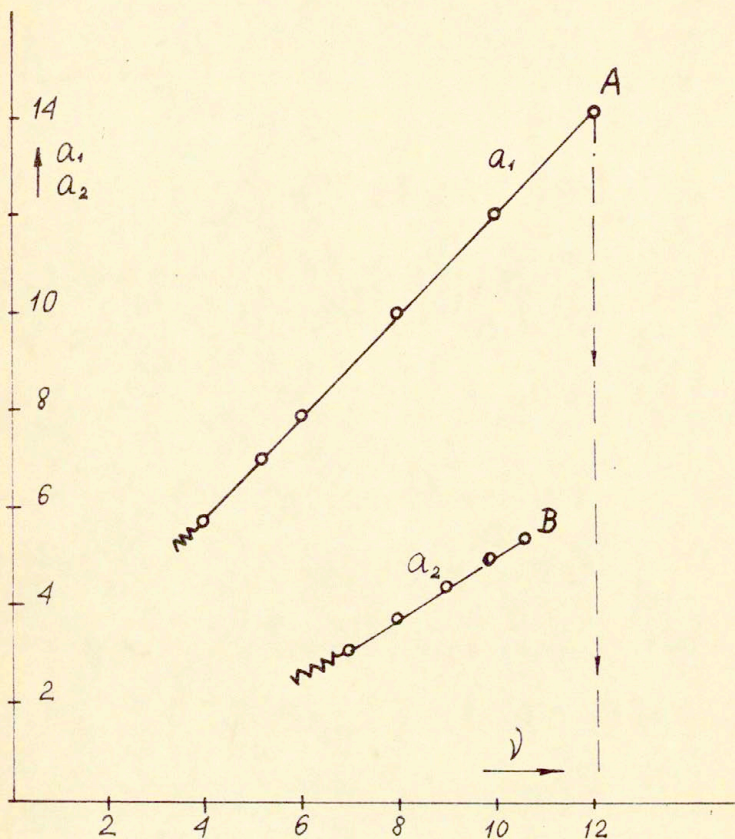
sie częstości  $\nu$  od 6,8 do 12,06, a o fazach przeciwnych w zakresie  $\nu$  od 8 do 13,8.  
W przykładzie 2 ( $b_1 = 0,4$ ) odpowiedź harmoniczna o zgodnych fazach  $q_1(t)$  i  $q_2(t)$  miała miejsce w zakresie częstości 4 - 12 a o fazach przeciwnych w zakresie częstości 7 - 10,6. Wyniki te w postaci wykresów amplitudy drgań harmonicznych w funkcji częstości wymuszenia naniesiono na wykresy 6 i 7. Obszary częstości  $\nu$  w których odpowiedź gwałtownie zmieniała swój charakter i znacznie odbiegała od przebiegu harmonicznego - oznaczono wężykiem. Wyniki te naniesiono również, dla porównania, na wykresy krzywych rezonansowych otrzymanych na drodze przybliżonych obliczeń teoretycznych tj. na wykresy 3 i 4. Wyniki analogowe w pełni potwierdzają założenia teoretyczne - otrzymano dwa typy drgań rezonansowych o przebiegach harmonicznych. Pierwszy rezonans, przy którym fazy współrzędnych są zgodne a amplitudy równe, co odpowiada założeniu współczynnika postaci drgań  $b_1 = 1$ , oraz drugi rezonans, przy którym fazy są przeciwne - zgodnie z założeniem współczynnika postaci  $b_2 = -1$ . Amplitudy drgań otrzymane z badań analogowych wykazują również dobrą zgodność z amplitudami obliczonymi teoretycznie.

Poza obszarami głównych rezonansów odpowiedź układu znacznie różniła się od odpowiedzi harmonicznej. Sprawa ta nie była poddana szczegółowej analizie, gdyż punktem zainteresowania były drgania rezonansowe. Dla ilustracji pokazano tylko przebiegi czasowe odpowiedzi  $q_1(\tau)$  dla przykładu 1 przy częstości  $\nu = 3$  oraz  $\nu = 7$  - co odpowiada mniej więcej punktom  $C_1$  i  $C_2$  na rys.6 - oraz dla porównania przebieg harmonicznej siły wymuszającej /Rys.8 i 9/.

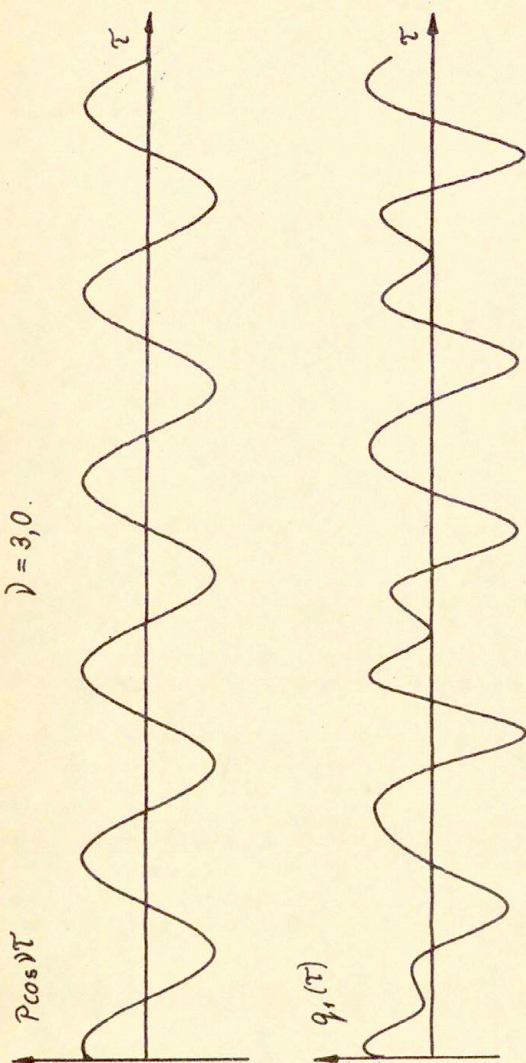
Badania analogowe przeprowadzono przy wzrastającej i malejącej częstości  $\nu$ . Zgodnie z przewidywaniami przy wzrastającej częstości  $\nu$  generowany był najpierw rezonans pierwszy /zgodne fazy/, a po osiągnięciu maksymalnej amplitudy /punkt A na rys.6/ następowała gwałtowna zmiana faz i amplitud oraz przeskok do punktu D. Przy dalszym wzroście częstości  $\nu$  realizowany był rezonans drugi aż do osiągnięcia maksymalnej amplitudy przy  $\nu = 13,8$ , po czym następował nagły spadek ampli-



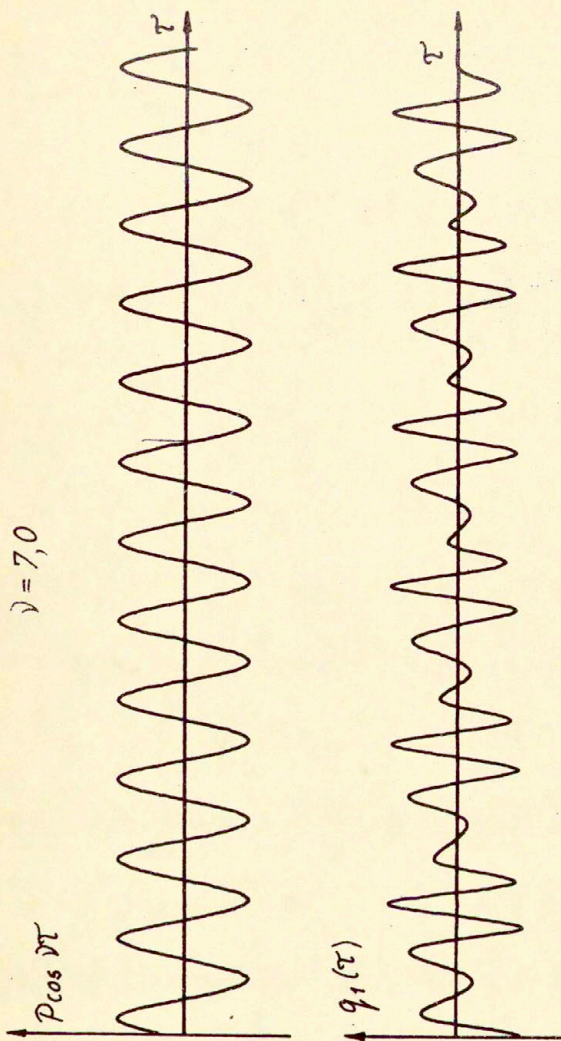
Rys.6. Amplitudy współrzędnej  $q_1$  w funkcji  $y)$  dla przykładu 1 - wyniki badań analogowych.



Rys.7. Amplitudy współrzędnej  $q_1$  w funkcji częstotliwości  $\nu$  dla przykładu 2 - wyniki badań analogowych.



Rys. 8. Przebiegi czasowe siły wymuszającej i odpowiedzi  $q_1(\tau)$  zdala od pierwszego rezonansu / punkt C<sub>1</sub> na rys. 6/ - wyniki analogowe.



Rys.9. Przebiegi czasowe siły wymuszającej i odpowiedzi  $q_1(\tau)$  zdala od drugiego rezonansu /punkt C<sub>2</sub> na rys.6/ - wyniki analogowe.

tudy drgań i przejście do stanu nieresonansowego. W przykładzie 2 /rys.7/ przy wzrastającej częstotliwości rezonans 2 o fazach przeciwnych nie był wogóle realizowany - po osiągnięciu maksymalnej amplitudy rezonansu pierwszego /punkt A na rys.7/ następowało gwałtowne przejście do drgań nieresonansowych. Rezonans 2 w tym przykładzie można było znaleźć tylko przy malejących częstotliwościach  $\nu$ , lub przy nadaniu układowi odpowiednich warunków początkowych. Badania analogowe przeprowadził mgr inż. Paweł Niezgodzki.

#### 6. Wnioski i uwagi końcowe

Przeprowadzona szczegółowa analiza teoretyczna i analogowa układu o dwóch stopniach swobody z silnie nieliniową "jednorodną" charakterystyką sprężystą stopnia  $\tau=3$  pozwoliła poznać nowe własności drgań rezonansowych, których nie można było zbadać ani za pomocą metod jakościowych, ani za pomocą tych przybliżonych metod analitycznych które opierają się na założeniu "małej nieliniowości" układu.

Wykazano, że nawet dla układu "nieliniaryzowalnego, ale wzbudzanego siłą harmoniczną, odpowiedź układu w pobliżu głównych rezonansów<sup>1</sup> przebieg harmoniczny w znacznym zakresie częstotliwości wymuszenia. Wykazano również, że i w tym przypadku przybliżona metoda badania drgań rezonansowych, zmodyfikowana metoda jednomodalna, przy której zakłada się, że postać drgań przy rezonansie jest równa "nieliniowej postaci własnej" [2] daje zadowalające wyniki. Warto zwrócić uwagę, że dotychczas metoda jednomodalna stosowana była jedynie do układów "słabonieliniowych", a zatem linearyzowalnych. Możliwość jej efektywnego zastosowania również do układu nieliniaryzowalnego wiąże się ze szczególną własnością układów o "jednorodnej" charakterystyce sprężystej - posiadają one bowiem stałe, niezależne od amplitudy postacie własne [3,6].

Otrzymane wyniki skłaniają do przypuszczenia, że klasa układów nieliniowych do której można stosować metodę jednomodalną jest znacznie szersza niż dotąd zakładano. Zagadnienie to wymaga dalszych badań.

LITERATURA

- [1] W.SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, Współrzędne normalne w analizie rezonansów głównych nieliniowych układów drgających o wielu stopniach swobody, Mech. Teoret. i Stosowana, 11, 1, 1973 str. 17-34.
- [2] W.SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, The modified single mode method in the investigations of the resonant vibrations of nonlinear systems, Journal of Sound and Vibration 63,4, 1979, str. 475-489.
- [3] R.M.ROSENBERG, On Nonlinear Vibrations of Systems with Many Degrees of Freedom, Advances in Applied Mechanics, v.9. 1966.
- [4] R.M.ROSENBERG, Steady-state forced vibration, Int. Journal of Non-Linear Mechanics, 1,3, 1966, str. 95-108.
- [5] R.M.ROSENBERG, C.S.HSU, On the geometrization of normal vibration of nonlinear systems, having many degrees of freedom, Symp. On Nonlinear Vibration, Kiev 1964.
- [6] R.M.ROSENBERG, The normal modes of Nonlinear n-Degree-of-freedom Systems, Journal ad Applied Mechanics, 2, 1962, str. 7-14.
- [7] C.HAYASHI, Nonlinear vibration in physical systems, McGraw Hill, 1964.