7.71 – ogólna teoria
układów mechanicznych

Stefan Kotowski

INWARIANTNOŚĆ RUCHÓW POŚLIZGOWYCH WZGLĘDEM MACIERZY STEROWANIA

43/1991

WARSZAWA 1991

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 grudnia 1991r.

N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 0,75 Ark.druk. 1,0
Oddano do drukarni w marcu 1992 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul.Jasna 1

Stefan Kotowski
Sam. Prac. Mechaniki Układów Dyskretnych
IPPT PAN

INWARIANTNOŚĆ RUCHÓW POŚLIZGOWYCH WZGLĘDEM MACIERZY STEROWANIA

Streszczenie

W pracy udowodniono twierdzenie, że rozwiązania poślizgowe układów równań różniczkowych z nieciągłymi funkcjami, z liniowo wprowadzonym sterowaniem, opisujące układy mechaniczne, są niezależne od parametrów macierzy wprowadzającej sterowanie.

Zaburzenia są stałym elementem towarzyszącym wszelkim zjawiskom fizycznym. Przyczyną ich mogą być zmiamy otoczenia w którym zachodzi interesujące nas zjawisko, jak i zmiany samego obiektu. W związku z tym niezwyle ważnym jest wyznaczenie cech obiektów które są odporne na zakłócenia, a następnie sformułowanie warunków pozwalających na syntezę układów inwariantnych względem zaburzeń. Zainteresowanie układani odpornymi na zaburzenia stale rośnie, wzrasta też ilość opracowań konkretnych układów odpornych na zaburzenia.

Wśród układów odpornych na zaburzenia znajdują sę także układy o zmiennej strukturze. Dla układów takich sformułowana została zasada inwariantności, podająca warunki odporności ukladu o zmiennej strukturze realizującego ruchy poślizgowe odporne na zaburzenia. Zasada inwariantności podaje warunki nieczułości układu o zmiennej strukturze na zaburzenia, bez wydzielania specjalnej klasy takich układów. Przedmiotem rozważań niniejszej pracy będzie inwariantność układów mechanicznych o zmiennej strukturze , a więc układów opisywanych układami równań różniczkowych drugiego rzędu, które następnie możemy przekształcić do układów równań rzędu pierwszego. Okazuje się ż układy takie są inwariantne względem zaburzeń parametrów wprowadzających sterowanie do takiego układu. Ta szczególna cecha układów mechanicznych o zmiennej strukturze stanowi temat rozważań niniejszej pracy.

Układy mechaniczne opisywane są przez równania różniczkowe II rzędu. Postać tych równań jest różna, zależnie od tego czy opis jest opisem Newtona, Lagrange'a, czy też Hamiltona, oraz zależy od tego czy są to układy holonomiczne czy też nieholonomiczne. Niemniej, niezależnie od rodzaju opisu, otrzymujemy w wyniku układ równań różniczkowych II rzędu który następniemoże być sprowadzony do układu równań różniczkowych rzędu pierwszego.

Sprowadzenie takich równań do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu może powodować, że otrzymane w wyniku macierze współczynników tych równań zawierają wiele elementów zerowych. Przy wyznaczaniu równań opisujących ruch w poślizgu, dla układu z nieciągłymi funkcjami prowadzimy przekształcenia tych macierzy. Duża ilość elementów zerowych pozwala postawić hipotezę, że istnieje możliwość eliminacji elementów niektórych macierzy w procesie konstrukcji równwń opisujących ruch w poślizgu. Pełna eliminacja macierzy oznaczałaby niezależność rozwiązań poślizgowych od elementów tej macierzy. Wyznaczenie warunków takiej niezależności jest celem niniejszej pracy.

1. Układy z nieciągłymi funkcjami i rozwiązania poślizgowe

Układy o zmiennej strukturze realizujące ruch poślizgowy najczęściej opisywane są przez równania różniczkowe z liniowo wprowadzonym sterowaniem. Mają one postać:

$$\dot{x}=Ax+Bu \quad (1.1)$$

$$s=Kx$$

$$u=\begin{cases} u^{+} \text{ dla } s>0 \\ u^{-} \text{ dla } s<0 \end{cases}$$

Tak opisywany układ ma zmienną strukturę, określoną przez funkcję sterującą u która zmienia się wzdłuż powierzchni s (w naszym przypadku jest to hiperpłaszczyzna). W pracy rozważamy własności ruchu realizowanego na tej powierzchni przełączeń, który nazywamy ruchem poślizgowym. Przy spełnieniu warunków poślizgu [2,4] na powierzchni nieciągłości generowany jest ruch poślizgowy opisywany przez równanie różniczkowe [1,2]:

$$\dot{x} = Ax - B(KB)^{-1}KAx \qquad (1.2)$$

Zauważmy, że rozwiązania poślizgowe, a więc rozwiązania równań (1.2) zależą od macierzy B. Inwariantność ich względem B oznacza redukcję macierzy B w iloczynie $B(KB)^{-1}$. Oznacza więc , że istnieją warunki przy spełnieniu których możliwa jest eliminacja macierzy B w równaniu (1.2). Jednak w przypadku ogólnym taka redukcja jest niemożliwa. Ważnym i interesującym jest ustalenie tych szczególnych przypadków w których, jeśli nawet taka redukcja nie jest możliwa a priori, to następuje redukcja wszystkich elementów macierzy B po wykonaniu wszystkich działań przewidzianych dla macierzy $B(KB)^{-1}$. Wówczas, także ruch poślizgowy byłby niezależny od elementów macierzy B,mimo iż struktura równania (1.2) zależna jest od struktury macierzy B i podobnie jest z rozwiązaniami poślizgowymi. W pracy zweryfikujemy hipotezę, że układy mechaniczne o zmiennej strukturze realizują ruchy poślizgowe niezależne od elementów macierzy B, mimo iż zależne są od jej struktury.

Naturalnym układem jest układ n równań różniczkowych ze sterowaniem jednowymiarowym postaci:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$

(1.3)

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots\ldots + a_nx_n + bu$$

$$s = d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots. + d_nx_n$$

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{dla } s>0 \\ u^- & \text{dla } s<0 \end{cases}$$

a więc układ w postaci macierzowej

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$s = d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots. + d_nx_n$$

(1.4)

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{dla } s>0 \\ u^- & \text{dla } s<0 \end{cases}$$

Macierze A i B mają tu postać

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Macierz $B(KB)^{-1}$ ma więc postać:

$$B(KB)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ b \end{bmatrix} ([d_1, d_2, \ldots . d_n] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ b \end{bmatrix})^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \\ b \end{bmatrix} (d_n b)^{-1} = \frac{1}{d_n} \qquad (1.5)$$

Otrzymujemy , w wyniku wyrażenie które nie zależy od macierzy B, a zatem i rozwiązanie poślizgowe też nie zależy od macierzy B. Udowodniony został następujący lemat.

LEMAT 1.

Dla układu (1.3) lub równoważnego mu układu (1.4) zarówno rozwiąnie poślizgowe jak i równanie je opisujące nie zależą od macierzy B.

Hipotezę, że dla układów mechanicznych rozwiązania poślizgowe nie zależą od macierzy B zweryfikujemy na przykładzie układu o dwóch stopniach swobody z dwiema przecinającymi się powierzchniami nieciągłości o następującej strukturze:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + b_2u \\
\dot{x}_3 &= x_4 \\
\dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + b_4u
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

$$s_1 = d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + d_{13}x_3 + d_{14}x_4$$

$$s_2 = d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + d_{23}x_3 + d_{24}x_4$$

$$u = \begin{cases} u^+ & s_i > 0 \\ u^- & s_i < 0 \end{cases}$$

Macierze A i B z (1.6) mają postać:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{bmatrix}$$

Dla powyżej opisanych macierzy sprawdzimy wynik operacji $B(DB)^{-1}$ który jest elementem opisu ruchów poślizgowych

$$B(DB)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{d_{12}\, d_{24} - d_{14} d_{22}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d_{24} & -d_{42} \\ 0 & 0 \\ -d_{22} & d_{12} \end{bmatrix}$$

A więc w przykładzie rozpatrywanym powyżej otrzymaliśmy, w wyniku przeprowadzonych operacji, macierz o elementach niezależnych od macierzy B. Natomiast struktura otrzymanej macierzy, zależna jest od struktury macierzy B. Tak więc ruch poślizgowy jest zależny strukturalnie od macierzy B, natomiast nie zależy od wartości elementów macierzy B. W wyniku uzyskaliśmy częściową inwariantność rozwiązań poślizgowych od macierzy B.

W przypadku ogólnym macierz $B(KB)^{-1}$ nie spełnia hipotezy niezależności od macierzy B. Ilustruje to kontrprzykład:

Niech $B(DB)^{-1} = C$, gdzie C jest pewną nieznaną macierzą. Mnożąc lewostronnie to wyrażenie przez DB, otrzymujemy

$$B=CDB$$

Jeśli nasza hipoteza jest spełniona (bez wyjątków), to powinien być spełniony warunek

$$CD = I \quad \text{(I-macierz jednostkowa)}$$

$$\text{tzn. } B=IB.$$

Tymczasem dla macierzy

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \frac{b_1 - b_2 a_{12}}{b_1} & a_{12} \\ a_{21} & \frac{b_2 - b_1 a_{21}}{b_2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

spełniona jest zależność $B = \bar{K}B$, przy czym macierz $\bar{K}$ nie jest macierzą jednostkową.

2. Układy mechaniczne z nieciągłymi funkcjami.

W poprzednim rozdziale podany został przykład układu mechanicznego z nieciągłymi funkcjami, którego rozwiązania poślizgowe są niezależne od macierzy B. W tej sytuacji aktualne staje się pytanie co jest powodem eliminacji elementów macierzy K. Otóż wynika to ze specyfiki układów mechanicznych opisywanych równaniami w których macierze mają wiele elementów zerowych i posiadają one swoistą strukturę (macierz B ma połowę elementów zerowych) będącą wynikiem sprowadzenia układu równań różniczkowych rzędu drugiego do układu równań rzędu pierwszego.

Dla układów mechanicznych mnożemy sformułować twierdzenie.

Twierdzenie 1.

Niech będzie dany układ mechaniczny postaci

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

z powierzchniani nieciągłości(2.1)

$$s = Dx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2,2k} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \ldots\ldots\ldots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{4,2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 & 0. & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\ a_{2k,1} & a_{2k,2} & a_{2k,3}. & \ldots\ldots\ldots\ldots & a_{2k,2k} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & \ldots\ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots & b_{2k} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11}, & d_{12}, & \ldots\ldots\ldots & d_{1,2k} \\ d_{21}, & d_{22} & \ldots\ldots\ldots & d_{2,2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ d_{k,1} & d_{k,2} & \ldots\ldots\ldots & d_{k,2k} \end{bmatrix}$$

$$u_i = \begin{cases} u_i^+ & s_i > 0 \\ u_i^- & s_i < 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie poślizgowe, powstające przy realizacji układu mechanicznego o zmiennej strukturze postaci (2.1) jest niezależne od macierzy sterowania B.

Dowód.

$$(DB)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} d_{11}, & d_{12}, & \dots\dots\dots & d_{1,2k} \\ d_{21}, & d_{22} & \dots\dots\dots & d_{2,2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{k,1} & d_{k,2} & \dots\dots\dots & d_{k,2k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ b_2 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots\dots\dots & b_{2k} \end{bmatrix} \right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{|D_{11}|}{b_2 b_4 \dots b_{2k}\ |D|}, & \dfrac{|D_{21}|}{b_2 b_4 \dots b_{2k}\ |D|}, \dots\dots & \dfrac{|D_{k1}|}{b_2 b_4 \dots b_{2k}\ |D|} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{|D_{1k}|}{b_2 b_4 \dots b_{2k}\ |D|}, & \dfrac{|D_{2k}|}{b_2 b_4 \dots b_{2k}\ |D|}, \dots\dots & \dfrac{|D_{kk}|}{b_2 b_4 \dots b_{2k}\ |D|} \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

D_{ji} - macierz z wykreślonym i-tym wierszem i j-tą kolumną.

$$(DB)^{-1} = \left[\frac{(-1)^{j+i}\,|D_{ji}|}{b_2 b_4 \dots b_{2k}\ |D|} \right]$$

gdzie $|D_{ji}| = b_2 b_4 \dots b_{2(j-1)} b_{2(j+1)} \dots b_{2k}\ |D_{ji}^{*}| =$

$$= \frac{\Pi b_i}{b_{2j}} (-1)^{j+i} |D_{ji}^{*}|$$

$$
D_{ji}^{*} = \begin{bmatrix}
d_{12} & d_{14} \cdots\cdots & d_{1,2(j-1)} & d_{1,2(j+1)} \cdots\cdots & d_{1,2k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
d_{i-1,2} & d_{i-1,4} \cdots & d_{i-1,2(j-1)} & d_{i-1,2(j+1)} \cdots & d_{i-1,2k} \\
d_{i+1,2} & d_{i+1,4} \cdots & d_{i+1,2(j-1)} & d_{i+1,2(j+1)} \cdots & d_{i+1,2k} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
d_{k,2} & d_{k,4} \cdots & d_{k,2(j-1)} & d_{k,2(j+1)} \cdots & k_{k,2k}
\end{bmatrix}
$$

$$
(DB)^{-1} = \left[(-1) \qquad \frac{1}{b_{2i}} \frac{|D_{ji}^{*}|}{|D|} \right]
$$

Na nocy powyższych wyników możemy wyprowadzić postać wyrażenia $B(DB)^{-1}$, przez wykonanie mnożenia macierzy B $(DB)^{-1}$ w postaci (2.2).

$$
B(DB)^{-1} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
b_2 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
0 & b_4 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & b_{2k}
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{|D_{11}^{*}|}{b_2|D|} & -\dfrac{|D_{21}^{*}|}{b_2|D|} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{(-1)^{k+1}|D_{k1}^{*}|}{b_2\ |D|} \\
-\dfrac{|D_{12}^{*}|}{b_4|D|} & \dfrac{|D_{22}^{*}|}{b_4|D|} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{(-1)^{k+2}|D_{k2}^{*}|}{b_4\ |D|} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{(-1)^{k+1}|D_{1k}^{*}|}{b_{2k}|D|} & \dfrac{(-1)^{k+2}|D_{2k}^{*}|}{b_{2k}|D|} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{(-1)^{k+k}|D_{kk}^{*}|}{b_{2k}|D|}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
(-1)^{2}\dfrac{|D_{11}^{*}|}{|D|} & -\dfrac{|D_{21}|}{|D|} & \cdots\cdots\cdots & (-1)^{k+1}\dfrac{|D_{k1}^{*}|}{|D|} \\
0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots\cdots\cdots & 0 \\
(-1)^{k+1}\dfrac{|D_{1k}^{*}|}{|D|} & (-1)^{k+2}\dfrac{|D_{2k}^{*}|}{|D|} & \cdots\cdots\cdots & (-1)^{k+k}\dfrac{|D_{kk}^{*}|}{|D|}
\end{bmatrix} \qquad (2.3)
$$

a więc macierz $B(DB)^{-1}$ nie zawiera elementów macierzy B, co kończy dowód twierdzenia.

W ten sposób zostało udowodnione twierdzenie że rozwiązania poślizgowe układu (2.1) są niezależne od elementów macierzy wprowadzającej starowanie , ale nie od jej struktury. Struktura macierzy B ma wpływ na ruch poślizgowy układu mechanicznego. twierdzenie udowodnione w tej postaci ograniczone jest do układów holonomicznych. Wydaje się celowe rozważenie czy podobna własność ma miejsce w przypadku układów nieholonomicznych.

Inwariantność rozwiązań poślizgowych względem zaburzeń zewnętrznych była przedmiotem badań równocześnie z początkiem badań ruchów poślizgowych [3]. Własność ta była jedną z głównych przyczyn wykorzystywania zjawiska poślizgu w realizacji konkretnych obiektów technicznych. Niniejsza praca rozszerza te badania na zagadnienie inwariantności parametrycznej i wskazuje że układy mechaniczne, a także układy innej natury fizycznej, lecz mające tą samą strukturę modelu matematycznego posiadają rozwiązania poślizgowe inwariantne względem parametrów macierzy wprowadzającej nieciągłe sterowanie.

LITERATURA

[1]. S.M.Madani-Esfahani, S.Hui and S.H.Żak. Estimating Regions ofAsymptotic stability with Sliding for Relay Control Systems, Dynamics and Control Vol.1,No2, 1991

[2]. V.I.Utkin, Sliding modes and their applications in variable structure systems. Mir , Moscow 1978,

[3]. Drazenovic, The invariance conditions in variable structure systems, Automatica, vol.5 ,No3, 1969

[4]. R.A.DeCarlo,S.H.Zak, and G.P.Matthews, variable structure control of non-linear multivariable systems, Proc IEEE, vol 76 No3 1988