

27/79 Stefan Jendo

**OPTIMALIZACJA KONSTRUKCJI
CIĘGNOWYCH I RAMOWNICOWYCH
W ZAKRESIE SPRĘŻYSTYM
WEDŁUG KRYTERIUM MINIMUM OBJĘTOŚCI
CIĘŻARU LUB KOSZTU**

Część 1 i 2

Araca habilitacyjna

P. 269a



WARSZAWA 1979

Rozprawa habilitacyjna

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 24 maja 1979 r.

Zarejestrowana pod nr 27/1979

Praca została wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12
"Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych"
Koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polskiej Akademii Nauk



57198



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 170 egz. Ark.wyd. 9,3. Ark.druk.12,25
Oddano do drukarni w czerwcu 1979 r.
Nr zamówienia 404/0/79

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Stefan Jendo

Pracownik Pól Odkształceń

OPTIMALIZACJA KONSTRUKCJI CIĘGNOWYCH I RAMOWNICOWYCH
W ZAKRESIE SPRĘŻYSTYM
WEDŁUG KRYTERIUM MINIMUM OBJĘTOŚCI, CIĘŻARU LUB KOSZTU

CZEŚĆ 1

WPROWADZENIE DO ZAGADNIEŃ OPTIMALIZACJI KONSTRUKCJI

1. Przedmiot rozważań

Przedmiotem rozważań jest optymalizacja konstrukcji cięgnowych i ramownicowych występujących w budownictwie.

Praca składa się z trzech części. W części 1 przedstawiono przedmiot rozważań, cel i zakres pracy oraz sposoby formułowania i rozwiązywania zagadnień optymalizacji konstrukcji.

W części 2 przedstawiono zagadnienie optymalizacji ustrojów cięgnowych jednopasowych, bez ograniczania zwisów cięgien a także przy ograniczeniu zwisów, naprężeń i przemieszczeń. Omówiono również zagadnienie optymalizacji ustrojów cięgnowych dwupasowych wstępnie naprężonych przy ograniczeniu zwisów cięgien nośnych i naprężających oraz przy ograniczeniu przemieszczeń. Opisano także podstawy kształtowania siatek cięgnowych wstępnie naprężonych oraz warunki konieczne i dostateczne statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej i aktualnej. Omówiono również zagadnienie kształtowania konstrukcji podporowych przy warunku znikania momentów zginających w pierścieniach podporowych.

W części 3 przedstawiono zagadnienie optymalizacji ramownic stalowych według kryterium minimum objętości, ciężaru lub kosztu przy zastosowaniu metod programowania nieliniowego. Podano sposoby formułowania zagadnień optymalizacji ramownic oraz przedstawiono system optymalizacji ramownic napisany w języku FORTRAN IV i uruchomiony na maszynach cyfrowych IBM 360/50 oraz

Riad 32. Na przykładach płaskich ramownic stalowych występujących w konstrukcjach okrętowych pokazano działanie systemu oraz dokonano analizy wyników.

W załącznikach 3.1 i 3.2 przedstawiono sposób wprowadzania oraz instrukcję przygotowywania danych wejściowych do systemu optymalizacji ramownic. Załącznik 3.3 zawiera kompletny zbiór instrukcji, procedur i funkcji występujących w systemie optymalizacji ramownic. Załączniki 3.4, 3.5, 3.6, 3.7 i 3.8 zawierają wydruki wyników optymalizacji trzech przykładów ramownic ilustrujących działanie systemu w różnych jego wersjach.

Na końcu każdej części zestawiono nie publikowany do tej pory, aktualny i kompletny spis bibliograficzny na temat rozpatrywanych zagadnień. W pracy cytowano tylko ważniejsze wybrane pozycje bezpośrednio związane z rozpatrywanymi zagadnieniami.

W części 2 przedmiotem rozważań są ustroje ciągnowe jednopasowe, dwupasowe i siatki ciągnowe. Ustroje jednopasowe są to pojedyncze ciągną zamocowane na podporach, usytuowanych na tym samym lub na różnych poziomach. Pojedyncze ciągną są stosowane jako elementy różnego rodzaju konstrukcji budowlanych. Mogą być elementami nośnymi, np. w kolejach linowych, sieciach energetycznych, maszynach budowlanych a także mogą być stosowane w przekryciach dachowych dużych rozpiętości, rys. 1.1.

Analogicznie do terminologii stosowanej w kratownicach, pod pojęciem ustrojów dwupasowych rozumiane są konstrukcje ciągnowe składające się z pasa dolnego, górnego i łączników między nimi. Pas dolny i górny stanowią ciągną nośne lub naprężające. Łącznikami mogą być wieszaki lub rozpórki w zależności od wzajemnego usytuowania ciągnien nośnych i naprężających, rys. 1.2. Ustroje dwupasowe są stosowane w budownictwie jako płaskie konstrukcje ciągnowe lub też jako elementy przestrzennych ustrojów wiszących w przekryciach dużych rozpiętości. W zależności od kształtu przekrycia w planie, mogą one być rozmieszczone równolegle do siebie lub radialnie, rys. 1.3,

[1.56] , [1.151] , [1.153] .^{*)}

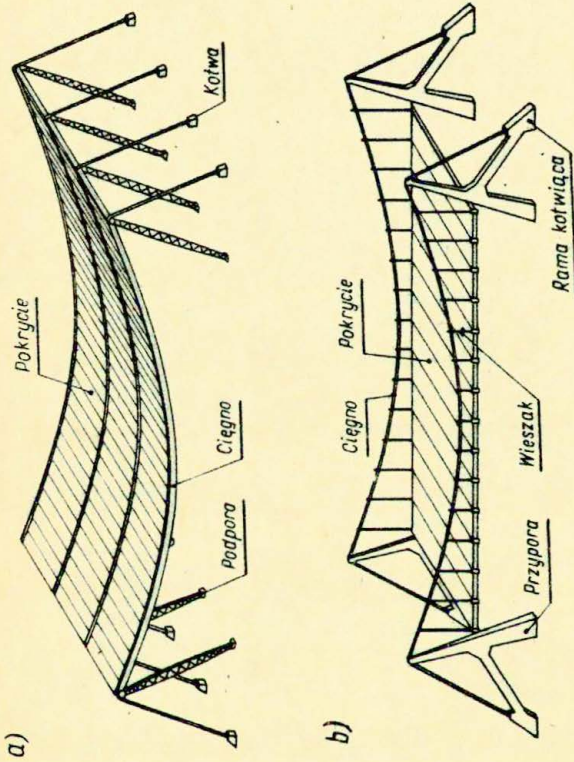
Siatki cięgnowe są to siatki nośne utworzone z cięgien rozmieszczonych regularnie na powierzchni ograniczonej linią brzegową zwaną dalej konturem. Kontury mogą mieć kształty krzywoliniowe lub prostoliniowe, rys. 1.4. Siatki cięgnowe są często stosowane jako przekrycia wiszące dużych rozpiętości. Podobnie jak pojedyncze cięgna także ustroje dwupasowe i siatki cięgnowe charakteryzują się również nieskończenie wieloma stopniami swobody, a zatem mogą przenosić obciążenia zewnętrzne tylko poprzez dostosowywanie kształtu do obciążenia; towarzyszą temu jednak duże przemieszczenia, które w wielu przypadkach są nie do przyjęcia. W celu zmniejszenia tych przemieszczeń stosujemy wstępne naprężenie konstrukcji. Pierwszym dachem wiszącym w postaci sprężonej siatki cięgnowej było przekrycie areny w Raleigh /Płn.Karolina, USA/ zrealizowane w 1953 roku według projektu polskiego architekta Macieja Nowickiego.

Integralną częścią przekryć wiszących są konstrukcje podporowe, którym poświęcono również nieco miejsca w rozdziale 10. Rozpatrzono mianowicie zagadnienie kształtowania konturów podporowych z warunku znikania momentów zginających w konstrukcji podporowej, występującej często w postaci pierścieni podporowych płaskich lub przestrzennych opartych na słupach w sposób przegubowy lub sztywny. Sztywne połączenia pierścieni ze słupami prowadzą do ramownic przestrzennych.

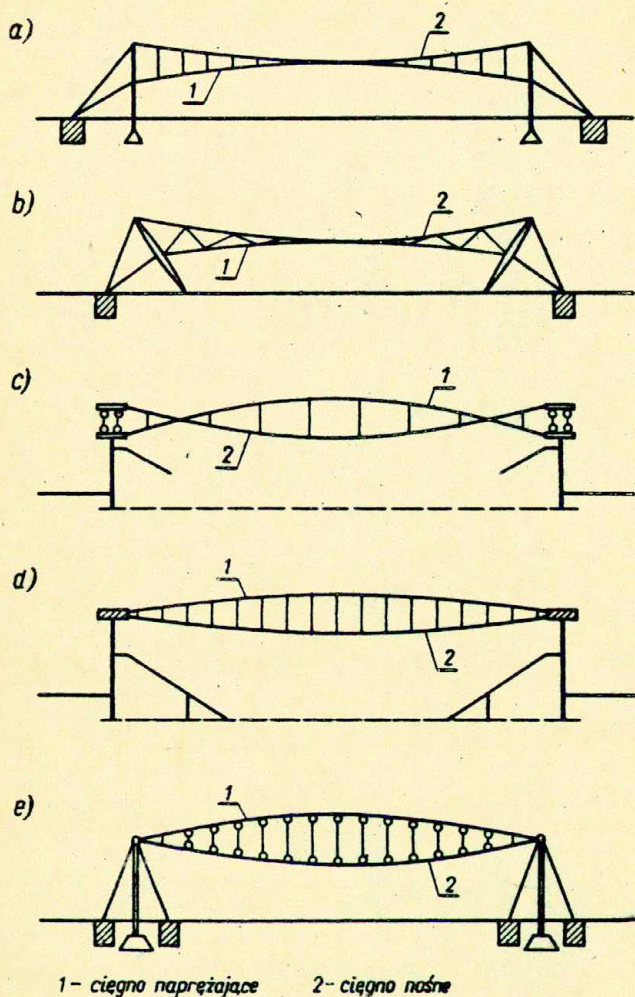
W części 3 pracy przedstawiono zagadnienia optymalizacji ramownic występujących nie tylko jako konstrukcje podporowe w przekryciach wiszących, ale przede wszystkim mających szerokie zastosowanie w budownictwie ogólnym, przemysłowym, mostowym, okrętowym i innych.

Ramownice są to ustroje prętowe o sztywnych węzłach przenoszących całkowicie lub częściowo momenty zginające. W niniej-

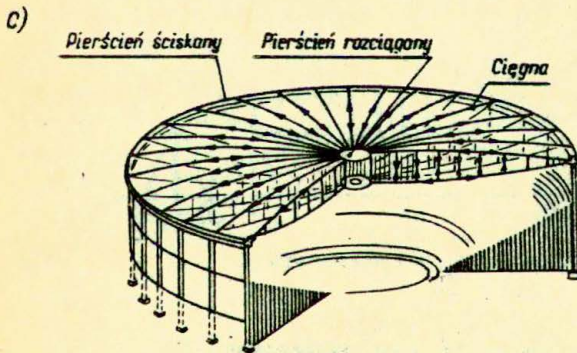
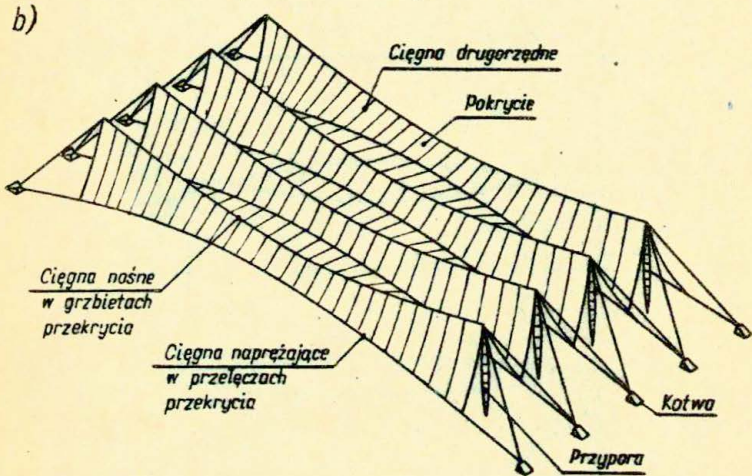
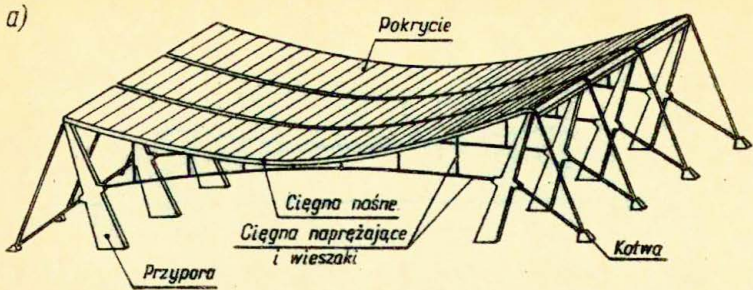
^{*)} Numery w nawiasach kwadratowych oznaczają pozycje spisu bibliograficznego zamieszczonego na końcu każdej części.



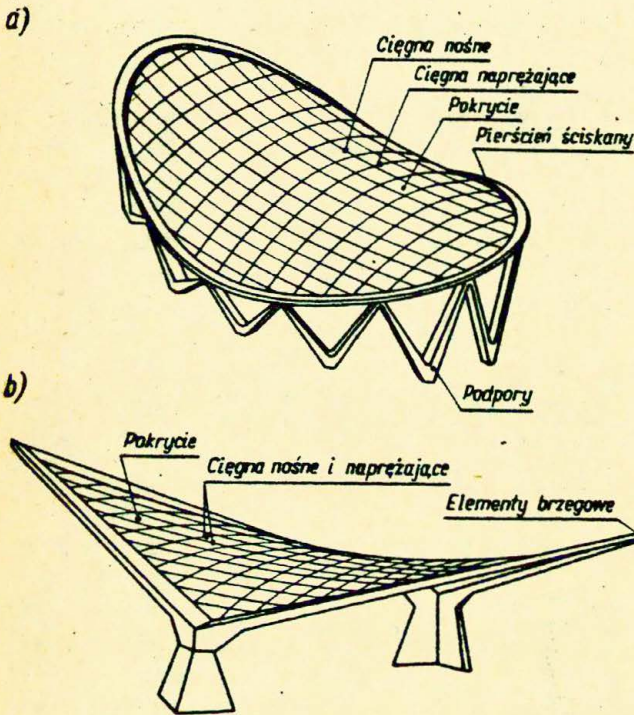
Rys. 1.1.1. Schematy ustrojów jednopasowych [2.580]



Rys. 1.2. Schematy ustrojów dwupasowych
1-ciągnio naprężające, 2-ciągnio nośne



Rys. 1.3. Schematy przekryć wiażących [2.580]



Rys. 1.4. Siatki cięgnowe o konturach krzywoliniowym i prostoliniowym [2.580]

szej pracy rozważano tylko optymalizację płaskich ramownic stalowych na podporach sprężystych, zbudowanych z prętów o zmiennej skokowo sztywności i poddanych obciążeniom ciągłym i skupionym działających w węzłach lub na długości prętów. Rozszerzenie rozważań na ramownice przestrzenne nie stanowi zasadniczych trudności lecz z uwagi na zwiększenie liczby prętów wymaga maszyn cyfrowych o dużej pojemności pamięci oraz możliwości korzystania z długich przebiegów czasowych. W wielu jednak przypadkach ramownice można rozpatrywać jako ustroje płaskie, wynika to z układu konstrukcyjnego oraz z rozkładu obciążeń działających na konstrukcję. Taki przypadek zachodzi np. w konstrukcjach okrętowych, szczegółowo przedstawionych w rozdziale 16, w których ramownice nośne zwane wręgami rozmieszczone są względem siebie równolegle w niewielkich odstępach. W tym przypadku obciążenia zewnętrzne i wewnętrzne przekazywane są na ramownice za pośrednictwem poszycia zewnętrznego i przepon podłużnych wewnątrz konstrukcji. Ten sposób rozmieszczenia ramownic oraz obciążeń nań działających pozwala je traktować jako ustroje płaskie.

Poszczególne rodzaje konstrukcji rozpatrywano w zakresie sprężystym, w którym konstrukcje zwykle pracują. W przypadku ustrojów ciągnowych naogół nie dopuszcza się do występowania stanów niesprężystych gdyż wcześniej zaczynają działać ograniczenia przemieszczeniowe nałożone na konstrukcję. Wynikają one z niskiej wytrzymałości na rozciąganie pokryć dachowych oraz z uwagi na zapewnienie szczelności pokryć w trakcie ich użytkowania. Duże przemieszczenia konstrukcji ciągnowych spowodowane są dwiema przyczynami. Pierwsza z nich wynika z faktu, że konstrukcje ciągnowe charakteryzują się nieskończenie wieloma stopniami swobody i przenoszą obciążenia tylko poprzez dostosowywanie swego kształtu do obciążeń, a więc zmianom obciążenia towarzyszą zmiany kształtu konstrukcji. Druga przyczyna wynika z własności mechanicznych cięgien, mianowicie cięgna wykonane ze stali wysokowytrzymałościowych charakteryzują się dużymi odkształceniami, które przy dużych rozpiętościach cięgien powodują duże przemieszczenia konstrukcji ciągnowych.

Natomiast konstrukcje ramownicowe często rozpatrywane są w zakresie sprężystym z uwagi na możliwość wyznaczenia i ograniczenia przemieszczeń konstrukcji a także ze względu na zwiększenie bezpieczeństwa konstrukcji poddanych działaniom obciążeń losowych często trudnych do określenia, jak obciążenia dynamiczne spowodowane działaniem wiatru, ruchami sejsmicznymi lub w przypadku ramownic tworzących konstrukcję statków - uderzeniami fal morskich w czasie sztormów itp.

Określenie tych obciążeń jest problemem samym w sobie i nie stanowi przedmiotu rozważań w niniejszym opracowaniu. W celu uproszczenia rozpatrywanego zagadnienia i tak już skomplikowanego z uwagi na optymalizację konstrukcji, przyjęto traktować obciążenia jako deterministyczne, mimo tego, że zarówno konstrukcje ciągnowe jak i konstrukcje ramownicowe poddawane są działaniom obciążeń losowych.

Jako kryterium optymalizacji przyjmowano kryterium minimum objętości, ciężaru lub kosztu, nie wymagające zapewne szerszych uzasadnień jego stosowania. W przypadku konstrukcji wykonanych z materiałów jednorodnych dwa pierwsze kryteria są zbieżne. Jeżeli w koszcie konstrukcji uwzględnić tylko koszty materiałowe, to również trzecie kryterium prowadzi do tych samych wyników.

W niniejszym opracowaniu korzystano z metod rachunku wariacyjnego i programowania nieliniowego. Programowanie nieliniowe pozwala rozwiązywać zagadnienia, w których zarówno funkcja celu jak i ograniczenia są nieliniowe. W optymalizacji konstrukcji budowlanych występują często funkcje nieliniowe gdyż zarówno ciężar jak i koszt konstrukcji a także ograniczenia naprężeniowe i przemieszczeniowe są nieliniowe.

W wielu pracach wprowadza się linearyzację zarówno funkcji celu jak i ograniczeń co prowadzi doznacznych uproszczeń w rozwiązywaniu zagadnień optymalizacji jednakże otrzymywane w ten sposób rozwiązania mogą prowadzić do błędów jakościowych i nieprawidłowo opisywać optymalizację rozpatrywanych konstrukcji.

2. Cel i zakres pracy

W rozważaniach dotyczących ustrojów ciągnowych celem jest wyznaczenie kształtu konstrukcji, wielkości wstępnego naprężenia oraz przekrojów poprzecznych ciągów. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimum objętości, ciężaru lub kosztu. W konstrukcjach podporowych utrzymujących siatki ciągnowe celem jest wyznaczenie kształtu konturów bezmomentowych przy danym obciążeniu lub wyznaczenie takiego rozkładu obciążeń przekazywanych z siatki ciągnowej na pierścień podporowy, który nie wywołuje momentów zginających przy danym kształcie konturu podporowego.

W rozważaniach dotyczących ustrojów ramownicowych celem jest wyznaczenie optymalnych wymiarów przekrojów poprzecznych prętów przy danej topologii konstrukcji oraz przy spełnieniu ograniczeń nałożonych na naprężenia w konstrukcji. Jako kryterium optymalizacji przyjęto kryterium minimum objętości, ciężaru lub kosztu.

Praca zawiera elementy poznawcze a przedstawione wyniki badań mogą być wykorzystane zarówno w optymalizacji jak i projektowaniu konstrukcji ciągnowych i ramownicowych.

Elementy oryginalne opracowane przez autora są następujące:

- w zakresie ustrojów ciągnowych jednopasowych rozważanych w rozdziale 7 wyznaczono optymalne parametry ciągów, przy których konstrukcja osiąga minimum ciężaru,

- w zakresie ustrojów ciągnowych dwupasowych wstępnie naprężonych rozpatrywanych w rozdziale 8 wyznaczono optymalne parametry ciągów nośnych i naprężających oraz optymalną wielkość wstępного naprężenia zarówno przy ograniczeniu przemieszczeń do wartości dozwolonych jak i bez tego ograniczenia,

- w zakresie siatek ciągnowych wstępnie naprężonych będących przedmiotem rozważań w rozdziale 9 przedstawiono ogólną teorię siatek ciągnowych w ujęciu kontynualnym oraz wyznaczono warunki konieczne i dostateczne statycznej dopuszczalności kon-

figuracji początkowej i aktualnej, których spełnienie pozwala traktować siatkę cięgnową jako kontinuum odkształcalne,

→ w zakresie konstrukcji ramownicowych rozpatrywanych w części 3 pracy elementy poznawcze polegają na przejściu od optymalizacji poszczególnych elementów konstrukcji budowlanych jakimi są słupy, belki, łuki, płyty itp. do optymalizacji konstrukcji traktowanych całościowo a więc do jednoczesnej optymalizacji szeregu elementów ze sobą połączonych i współpracujących oraz na opracowaniu systemu automatyzacji procesu optymalizacji konstrukcji ramownicowych; ten sposób optymalizacji konstrukcji stanowi jakościową zmianę w dotychczasowym rozwoju zagadnień optymalizacji konstrukcji. Należy zaznaczyć, że żaden z dotychczas znanych systemów analizy konstrukcji jak np. ASKA czy SEZAM nie zawiera algorytmów optymalizacji konstrukcji. To zagadnienie jest nowe i ciągle jeszcze w stadium rozpoznania i badań naukowych. W szczególności istotne jest opracowanie sposobu sprawdzania minimum globalnego oraz działania systemu w wersji stop/restart.

Prace nad wyżej wymienionymi zagadnieniami były prowadzone w ramach problemu węzłowego O5.1.8 → O.5.12 "Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych" koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

Opracowany system optymalizacji ramownic przekazano do wdrożenia w Centrum Techniki Okrętowej w Gdańsku. System ten jest tam obecnie uruchamiany i testowany na maszynie cyfrowej ICL. Przewidywana jest również jego rozbudowa na ramownice przestrzenne oraz optymalizację zładu poprzecznego konstrukcji okrętowych.

Przedstawiony system optymalizacji ramownic przekazano także do Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej gdzie jest obecnie uruchamiany i testowany na maszynie cyfrowej ODRA 1305. Przewiduje się tam wykonanie optymalizacji systemu w szczególności jego zoverlayowanie /nakładanie procedur/ w celu zmniejszenia obszaru pamięci zajmowanej przez system.

Dalsze prace nad rozwinięciem przedstawnionego systemu oraz wykorzystaniem systemu do optymalizacji innych rodzajów konstrukcji będą prowadzone również w problemie węzłowym.

Przewidywany rozwój zagadnień optymalizacji konstrukcji ciągłych i ramownicowych przedstawiono w rozdziałach 11 i 17.

3. Sposoby formułowania zagadnień optymalizacji

Przy formułowaniu zagadnień optymalizacji podstawowymi pojęciami są: zmienne decyzyjne, funkcja celu i obciążenie dopuszczalny.

Zmienne decyzyjne są wielkościami opisującymi konstrukcję i podlegają wariacjom w procesie optymalizacji. W odróżnieniu od zmiennych decyzyjnych, wielkości ustalone na podstawie innych kryteriów lub przesłanek projektowych przyjęto nazywać parametrami optymalizacji. Zmiennymi decyzyjnymi mogą być wymiary geometryczne poszczególnych elementów, wielkości opisujące konfigurację konstrukcji, wielkości mechaniczne lub fizyczne opisujące właściwości materiału z którego wykonana jest konstrukcja, jak również inne wielkości charakteryzujące daną konstrukcję. Przykładowo, zmiennymi decyzyjnymi mogą być pola przekrojów poprzecznych prętów ramownicy, momenty bezwładności elementów zginanych, grubości blach itp. Określenie tych zmiennych w procesie optymalizacji pozwala wyznaczyć optymalne rozmieszczenie materiału w przekroju danego elementu.

Wielkości geometryczne opisujące konfigurację konstrukcji są reprezentowane przez współrzędne węzłów. Wyznaczenie optymalnej konfiguracji konstrukcji jest zwykle zagadnieniem bardziej skomplikowanym niż określenie optymalnych wielkości przekrojów poprzecznych. Określenie mechanicznych właściwości materiałów konstrukcyjnych może być także przedmiotem optymalizacji.

Zmienne decyzyjne mogą mieć charakter ciągły lub dyskretny, [1.63]. W projektowaniu występują zwykle zmienne dyskretne np. określone wymiary kształtowników, grubości blach itp. Jednakże w pewnych przedziałach skoki w wymiarach są na tyle

małe, że zmienne dyskretne można traktować jak ciągłe, a w wyniku rozwiązania przyjąć możliwie najbliższe zmienne dyskretne. W języku matematycznym zmienne decyzyjne mają postać wektora $X_q = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ w przestrzeni n-wymiarowej /hiperprzestrzeni/. Każdy punkt tej przestrzeni odpowiada konstrukcji o n-zmennych decyzyjnych X_q . Przejście z punktu q do punktu q+1 można utożsamiać ze zmianą zmiennych decyzyjnych w postaci

$$/1.1/ \quad X_{q+1} = X_q + \alpha_q C_q$$

W powyższym wzorze C_q określa kierunek ruchu natomiast α_q określa długość kroku.

Z uwagi na kryterium optymalizacji rozróżnić można optymalizację jedno lub wielo-kryteriową. W tym drugim przypadku tworzony jest wektor kryteriów, którego składowymi są kolejne mierniki oszacowania konstrukcji. Ten sposób formułowania i rozwiązywania zagadnień optymalizacji wymaga dostępu do szybkich maszyn liczących o dużej pojemności pamięci operacyjnej. W niniejszym opracowaniu dalsze rozważania ograniczono do jednego wybranego kryterium optymalizacji, które można napisać w postaci funkcji celu lub funkcjonału.

Funkcją celu w optymalizacji konstrukcji przyjęto nazywać wyrażenie matematyczne opisujące pewną własność konstrukcji, stanowiącą podstawę oceny czy też kryterium oceny rozpatrywanej konstrukcji. Rozpatrywana własność konstrukcji może być opisana w postaci funkcji lub funkcjonału w zależności od sposobu formułowania zagadnienia optymalizacji. Zmiennymi decyzyjnymi mogą być nieznane funkcje lub współczynniki znanych funkcji albo po prostu pewne wielkości liczbowe. W przypadku gdy niewiadomymi są funkcje wówczas rozpatrywaną własność konstrukcji czy też kryterium optymalizacji zapisuje się w postaci funkcjonału. Natomiast gdy niewiadomymi są współczynniki znanych funkcji lub pewne wielkości liczbowe to kryterium ma postać funkcji, którą nazwano funkcją celu. Argumentami funkcji celu są zmienne decyzyjne w postaci wektora X . Oszacowanie wartości funkcji celu jest podstawą wyboru tej czy innej

konstrukcji z wielu możliwych alternatyw.

Funkcja celu jest funkcją skalarną, reprezentującą pewną własność konstrukcji, w rozważanym przypadku jest to objętość, ciężar lub koszt konstrukcji. Ciężar konstrukcji jest najczęściej spotykanym miernikiem oszacowania konstrukcji. Objętość konstrukcji również może być takim miernikiem. W przypadku konstrukcji z materiału jednorodnego, te dwa rodzaje mierników są proporcjonalne i nie ma większego znaczenia, który z nich przyjąć do rozważań.

Natomiast koszt konstrukcji składa się z kosztu materiałów i kosztu wykonania konstrukcji. Mogą tu również być uwzględnione koszty eksploatacji konstrukcji. Kryterium minimalizacji całkowitych kosztów jest rzadziej stosowane niż kryterium minimum ciężaru lub minimum objętości. Wynika to z trudności określenia jednostkowych kosztów materiałów a w szczególności jednostkowych kosztów wykonania i eksploatacji konstrukcji. Te koszty zależą w dużej mierze od cen materiałów i robocizny, które mogą być szacowane tylko lokalnie. Biorąc jednak pod uwagę względy ekonomiczne, kryterium minimum kosztu będzie odgrywało coraz to większą rolę w procesie projektowania konstrukcji. Wymienione wyżej kryteria są naturalne a nawet oczywiste i nie wymagają głębszych uzasadnień ich stosowalności.

W matematycznym formułowaniu zagadnień optymalizacji konstrukcji nie ma znaczenia jaki miernik wybrano za podstawę oszacowania konstrukcji. Metody numeryczne optymalizacji mogą być z większym lub mniejszym powodzeniem stosowane do rozwiązywania tych zagadnień bez względu na fizyczną postać kryterium optymalizacji.

W przypadku konstrukcji ciągnowych i prętowych zbudowanych z szeregu elementów oraz połączeń między nimi poszczególne elementy są wykonywane z różnych materiałów. Przy sumowaniu objętości lub ciężaru elementów muszą występować pewne współczynniki wagowe k_1 , a zatem można napisać

$$/1.2/ \quad F = \sum_{i=1}^n k_1 A_1 L_1 .$$

W przypadku przyjęcia kryterium minimum kosztów współczyn-
niki wagowe mają postać cen jednostkowych materiałów lub kosz-
tów jednostkowych wykonania poszczególnych elementów. Jeśli
uwzględnić również koszt połączeń elementów to całkowity koszt
konstrukcji można wyrazić jako sumę kosztu elementów F_m i ich
połączeń F_c , a zatem można napisać [1.13]

$$/1.3/ \quad F = F_m + F_c = \sum_{i=1}^m C_m^i \rho_i A_i L_i + \sum_{j=1}^c C_c^j$$

W powyższych wzorach przyjęto następujące oznaczenia:

m - liczba elementów,

c - liczba połączeń,

A_i, L_i - pole przekroju i długość elementu i ,

ρ_i - ciężar właściwy materiału w elemencie i ,

C_m - koszt jednostkowy materiału w elemencie i ,

C_c - koszt połączenia j .

Jeżeli połączenia mają być podatne to należy wprowadzić
do zależności /1.3/ tylko część drugiego składnika. Wartości
 C_m powinny być określone na podstawie analizy wykonanych kon-
strukcji. Okazuje się, że uwzględnienie kosztu połączeń ele-
mentów prowadzi do konstrukcji cięższych ale tańszych.

Oprócz kosztu zbudowania konstrukcji można uwzględnić
w funkcji celu także koszty spowodowane zniszczeniem konstruk-
cji tzn. zarówno bezpośrednie szkody materialne i osobowe jak
również koszty napraw lub konstrukcji zastępczych i poszuki-
wać minimum w ten sposób określonego całkowitego kosztu F_t :

$$/1.4/ \quad F_t = F_m + \sum_{k=1}^n C_{fk} P_{fk}$$

w tym wzorze drugi składnik oznacza spodziewany koszt spowodowa-
ny zniszczeniem konstrukcji. Koszt ten wyrażony jest jako
suma iloczynów kosztu zniszczenia C_{fk} w przypadku kolejnej
postaci zniszczenia k przez prawdopodobieństwo P_{fk} wystąpie-
nia tej postaci zniszczenia, przy czym sumowanie przebiega przez

wszystkie n postaci zniszczenia.

W niniejszym opracowaniu dalsze rozważania ograniczono do kosztów materiałowych biorąc pod uwagę trudności w określaniu kosztów jednostkowych wykonania elementów, ich połączeń oraz innych kosztów jednostkowych. Warto zauważyć, że uwzględnienie innych kosztów w funkcji celu nie przedstawia trudności merytorycznych i nie zmienia w niczym dalszego toku postępowania.

Jeżeli F jest funkcją liniową to przedstawia hiperpłaszczyznę w przestrzeni n -wymiarowej. Natomiast nieliniowa funkcja F przedstawia hiperpowierzchnię w tejże przestrzeni. O zachowaniu funkcji F w przestrzeni n -wymiarowej wiele mówi gradient funkcji F , oznaczany zwykle przez ∇F . Gradient ∇F jest wektorem normalnym do powierzchni F , którego składowymi są pochodne F względem każdej ze zmiennych decyzyjnych,

$$/1.5/ \quad \nabla F = \left[\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right]^T$$

Symbol T w powyższych wzorach oznacza transpozycję wektora.

Obszar dopuszczalnych rozwiązań stanowi zwykle część obszaru zawartego w n -wymiarowej przestrzeni zmiennych decyzyjnych. Granicę obszaru dopuszczalnego wymagają ograniczenia nałożone na zmienne decyzyjne. Ograniczenia występują w postaci równości lub nierówności opisujących pewne warunki stawiane konstrukcji, nałożone bezpośrednio na zmienne decyzyjne lub pośrednio poprzez ograniczenie pewnych wielkości, które zależą od zmiennych decyzyjnych. Matematycznie mają one zawsze postać równości lub nierówności

$$/1.6/ \quad \begin{aligned} g_i(x) &= 0, & i &= 1, 2, \dots, r \\ g_j(x) &\geq 0, & j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

W przypadku ograniczeń w postaci równości można spróbować zredukować wymiar rozważanej przestrzeni poprzez rozwiązanie tych równości, jednak nie zawsze jest to możliwe. Ograniczenia równościowe prowadzą naogół do rozwiązań o wyrównanych

naprężeniach lub wyężeniach, a często także do rozwiązań o zerowych przekrojach. Ograniczenia nierównościowe występują często przy poszukiwaniu rozwiązań przydatnych w praktyce inżynierskiej.

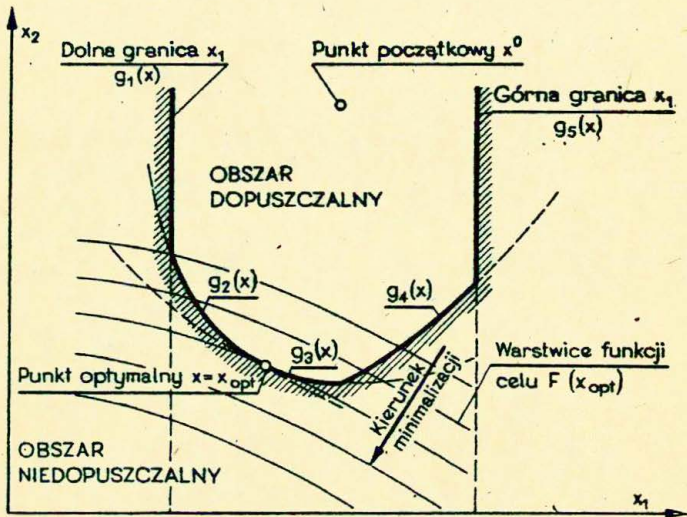
Wśród ograniczeń odróżnia się ograniczenia brzegowe i zachowawcze. Pierwsze z nich ograniczają maksymalne lub minimalne wymiary elementów konstrukcji. Mogą także dotyczyć maksymalnych i minimalnych wymiarów elementów konstrukcyjnych dostępnych na rynku np. grubości blach itp. Ograniczenia brzegowe występują w postaci jawnej i są nakładane na poszczególne zmienne decyzyjne, np. na wymiary geometryczne poszczególnych elementów. Mogą one także obejmować i ograniczać pewną grupę zmiennych decyzyjnych, jak np. maksymalne lub minimalne pola przekrojów poprzecznych elementów, czy też momenty bezwładności przekrojów poprzecznych albo inne charakterystyczne wielkości.

Ograniczenia zachowawcze mają postać warunków nałożonych na naprężenia lub przemieszczenia, mogą także dotyczyć ograniczenia częstotliwości drgań swobodnych konstrukcji lub też sił krytycznych przy wyboczeniu elementów. Ograniczenia zachowawcze występują w postaci uwikłanej, to znaczy w postaci ograniczeń nałożonych na pewne zależności, a nie bezpośrednio na zmienne decyzyjne.

W rozpatrywanej n-wymiarowej przestrzeni ograniczenia przedstawiają hiperpowierzchnię zawierającą punkty spełniające te ograniczenia w postaci równości. Hiperpowierzchnia jest ciągła gdy zmienne decyzyjne mają charakter ciągły. Wektor normalny do hiperpowierzchni reprezentującej ograniczenia, inaczej gradient ograniczeń można napisać analogicznie do gradientu funkcji celu

$$/1.7/ \quad \nabla g_1 /x/ = \left[\frac{\partial g_1 /x/}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g_1 /x/}{\partial x_n} \right]^T$$

W przypadku gdy zmienne decyzyjne występują w postaci liczb rzeczywistych, przestrzeń zmiennych decyzyjnych może być interpretowana geometrycznie jako n-wymiarowa przestrzeń liczbowa. Ilustrację geometryczną przy n=2 przedstawiono na rys.1.5



Rys. 1.5. Granice obszaru dopuszczalnego

Rozwiązanie zadania polega na wyznaczeniu punktu styczności krzywej lub prostej reprezentującej funkcję celu, z granicą obszaru dopuszczalnego utworzonego przez ograniczenia.

W języku matematycznym zagadnienie optymalizacji można sformułować zwięźle w następujący sposób. Należy wyznaczyć taki wektor zmiennych decyzyjnych $X = [x_1, \dots, x_n]^T$, który spełnia następujące równości lub nierówności zwane ograniczeniami.

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

$$/1.8/ \quad g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

oraz minimalizuje funkcję celu $F(X)$. W zależności od postaci wektora zmiennych decyzyjnych, można odróżnić następujące dwa sformułowania. Pierwsze, w którym składowymi wektora X są liczby rzeczywiste; kryterium optymalizacji można wtedy napisać w postaci funkcji celu $F(X)$, oraz drugie gdy składowymi wektora zmiennych decyzyjnych nie są liczby rzeczywiste lecz funkcje $z_1(x)$; kryterium optymalizacji przybiera tu postać funkcjonału $F[z_1(x)]$.

W pierwszym sformułowaniu można wyróżnić następujące dwa przypadki rozpatrywanego zagadnienia. Pierwszy przypadek dotyczy zagadnienia, w którym funkcja celu i ograniczenia są liniowe. Do rozwiązania tego zagadnienia korzysta się z metod programowania liniowego np. metody simpleks [1.12], [1.27] [1.37], [1.95]. Przypadek drugi obejmuje zagadnienia, w których funkcja celu i więzy mają charakter nieliniowy. Te zagadnienia należy rozwiązywać przy pomocy metod programowania nieliniowego [1.12], [1.27], [1.69], [1.149].

W drugim sformułowaniu zagadnienia optymalizacji, w którym zmiennymi decyzyjnymi są niewiadome funkcje, rozwiązanie polega na wyznaczeniu minimalnej wartości funkcjonału

$$/1.9/ \quad F[z_1(X)] = G[z_1(x), z_1'(x); x] dx,$$

opisującego ciężar, objętość lub koszt konstrukcji. W tym

przypadku mogą również występować ograniczenia w postaci równości lub nierówności pewnych wyrażeń całkowych

$$/1.10/ \quad \begin{cases} \int g_j [z_1(x), z_1'(x), x] dx = 0, & j = 1, 2, \dots, r \\ \int g_k [z_1(x), z_1'(x), x] dx \geq 0, & k = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Przy rozwiązywaniu powyższego zagadnienia korzysta się z metod rachunku wariacyjnego. W przypadku ograniczeń w postaci równości należy rozwiązać klasyczne zagadnienie izoperymetryczne rachunku wariacyjnego [1.12],[1.38]. Natomiast jeżeli ograniczenia występują w postaci nierówności, to korzysta się z nieklasycznych metod rachunku wariacyjnego [1.12],[1.140].

W przypadku gdy zmienne decyzyjne mają postać liczb rzeczywistych, to rozważana przestrzeń może być interpretowana jako n -wymiarowa przestrzeń liczbowa. Przyjmując zatem, że X leży w obszarze dopuszczalnym tej przestrzeni oraz δX jest dowolną wariacją w obszarze dopuszczalnym, to przy $g_1(x) = 0$ wariacja δX jest prostopadła do wszystkich wektorów $\nabla g_1(x)$, ($i=1, 2, \dots, r$). Podobnie, aktywne ograniczenia nierównościowe $g_j(x) \geq 0$, ($j = 1, 2, \dots, m$) implikują, że δX nie ma składowych w dodatnim kierunku $\nabla g_j(x)$, [1.96]. Stąd można wnioskować, że dla dowolnej liczby rzeczywistej λ_1 i dowolnego $\gamma_j \geq 0$, rzut δX na wektor

$$/1.11/ \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^m \gamma_j \nabla g_j(x)$$

nie jest dodatni. Przez \sum' oznaczono tu sumowanie odnoszące się do tych wskaźników j przy których $g_j(x) = 0$, ($j = 1, 2, \dots, m$). Inaczej można powiedzieć, że każdy kierunek zgodny z kierunkiem wektora /1.11/ prowadzi do obszaru niedopuszczalnego.

W celu zmniejszenia funkcjonału $F(x)$ należy poruszać się w kierunku przeciwnym do wektora $\nabla F(x)$, lecz jeśli kierunek $-\nabla F(x)$ jest dowolnym kierunkiem /1.11/, to żaden ruch w obszarze dopuszczalnym nie zmniejszy wartości funkcjonału $F(x)$. Dlatego w punkcie optymalnym, $-\nabla F(x)$ jest jedynym z kierunków /1.11/. Opierając się na powyższym widać, że jeśli X

jest punktem optymalnym, to istnieje taki zbiór liczb rzeczywistych λ_1 i nieujemnych liczb $\delta_j \geq 0$, że

$$/1.12/ \quad - \nabla F(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^n \delta_j \nabla g_j(x).$$

Powyższe warunki nazywane są warunkami Kuhna-Tuckera. Warto zauważyć, że w przypadku braku aktywnych ograniczeń nierównościowych, λ_1 można interpretować jako mnożniki Lagrange'a, natomiast w przypadku braku ograniczeń powyższe warunki przyjmują znaną postać $\nabla F(x) = 0$

Zależności /1.12/ stanowią jedynie warunki konieczne globalnego minimum funkcjonału $F(x)$ i mogą być jednocześnie warunkami dostatecznymi globalnego minimum ale tylko wtedy gdy obszar dopuszczalny jest wypukły a funkcja celu jest wszędzie wypukła albo wklęsła.

Niezależnie od sposobu formułowania zagadnień optymalizacji w każdym przypadku poszukuje się punktu minimalizującego funkcję lub funkcjonał. Do tego celu służą warunki konieczne i dostateczne istnienia minimum. Spełnienie jednych i drugich pozwala upewnić się, że znaleziono minimum globalne. Często jednak spełnienie warunków dostatecznych jest zbyt pracochłonne i w wielu opracowaniach technicznych sprawdzane są jedynie warunki konieczne.

4. Metody rozwiązywania zagadnień optymalizacji

W zależności od sposobu matematycznego sformułowania zagadnienia optymalizacji można odróżnić dwie grupy metod rozwiązywania tych zagadnień. Pierwszą grupę stanowią metody wariacyjne. Polegają one na sprowadzeniu zagadnienia optymalizacji do rozwiązania układu równań różniczkowych z odpowiednimi warunkami brzegowymi. W wyniku rozwiązania otrzymuje się poszukiwane funkcje opisujące kształt konstrukcji lub inne jej cechy. Jednakże nieraz z uwagi na wysoką nieliniowość równań, ich rozwiązanie mogą być nieregularne. Mogą występować również rozwiązania osobliwe lub niejednoznaczne a nieraz rozwiązanie może

w ogóle nie istnieć [1.12],[1.20],[1.38],[1.55],[1.74],[1.140], [1.149] .

Drugą grupę metod stanowią metody numeryczne nazywane często metodami programowania matematycznego. [1.12],[1.15],[1.27],[1.37],[1.63],[1.74],[1.106],[1.139],[1.148],[1.150],[1.154]. Mają one charakter iteracji, w której każdy krok prowadzi do lepszego rozwiązania to znaczy do zmniejszenia wielkości funkcji celu. Ich wspólną cechą jest generowanie ciągu punktów X_q w rozważanej podprzestrzeni, startując z dowolnego jej punktu. Podstawą każdej iteracji jest właściwy wybór kierunku i długości kroku, zmniejszających wartość funkcji F/X . Jeżeli przez D_q oznaczyć przyrost zmiennej decyzyjnej X_q , to przejście z punktu X_q do punktu X_{q+1} jest określone wzorem

$$X_{q+1} = X_q + D_q$$

Wielkość D_q określa się na podstawie gradientów ograniczeń równościowych $\nabla g_i(X_q)$ i nierównościowych $\nabla g_j(X_q)$ oraz gradientu funkcji celu $\nabla F(X_q)$ w punkcie X_q . Różnice między wieloma istniejącymi metodami polegają na sposobie określenia gradientu funkcji i kroku D_q . W najprostszym przypadku, gdy funkcja celu i ograniczenia są liniowe, do rozwiązywania zagadnienia optymalizacji stosuje się metody programowania liniowego. [1.12],[1.27],[1.37]. W przypadku liniowych ograniczeń i kwadratowej funkcji celu korzysta się z metod programowania kwadratowego [1.7],[1.33],[1.67]. W najbardziej ogólnym przypadku nieliniowych ograniczeń i funkcji celu korzysta się z metod programowania nieliniowego bezpośredniego lub pośredniego. Do metod bezpośrednich zalicza się metodę rzutów gradientowych [1.51],[1.134], metodę kierunków dopuszczalnych [1.154] oraz metodę kolejnych przybliżeń liniowych.

W metodzie rzutów gradientowych, punkt startowy wybiera się na brzegu obszaru dopuszczalnego. Dalejsza droga poszukiwań jest określana przez rzut $\nabla F(x)$ na brzeg. Jest oczywistym, że metoda ta jest efektywna tylko w przypadku gdy optimum występuje na brzegu a nie wewnątrz obszaru.

W metodzie kierunków dopuszczalnych punkt startowy X_q może być obierany na brzegu lub wewnątrz obszaru dopuszczalnego. Krok D_q jest określany na podstawie następującej zależności

$$/1.13/ \quad D_q = \alpha_q c_q$$

w której c_q jest optymalnym kierunkiem w pewnym skończonym otoczeniu punktu X_q , natomiast α_q jest optymalną długością kroku w kierunku c_q . Istnieje wiele różnych sposobów określania c_q i α_q stanowiących podstawę rozróżniania metod optymalizacji.

W metodzie kolejnych przybliżeń liniowych start następuje podobnie jak wyżej z wnętrza obszaru dopuszczalnego. Kolejne liniowe przybliżenia pozwalają określić jednocześnie kierunek c_q oraz długość kroku α_q .

Metody pośrednie rozwiązywania zagadnień optymalizacji z ograniczeniami polegają na sprowadzeniu tych zagadnień do problemu optymalizacji bez ograniczeń. W tym celu można zastosować metodę SUMT /Sequence of Unconstrained Minimization Technique/ opracowaną przez Fiacco i McCormicka, [1.26] a polegającą na modyfikacji funkcji celu przez wprowadzenie wyrazu reprezentującego "karę" za przekroczenie ograniczeń. Tak zmodyfikowaną funkcję celu nazwano funkcją kary. Przy wyznaczaniu ekstremum funkcji kary stosuje się jedną ze znanych technik poszukiwania ekstremum bez ograniczeń. W zależności od sposobu wprowadzenia funkcji kary można wyróżnić kilka odmian tej metody [1.150] .

Poniżej opisano dwie metody programowania nieliniowego, z których korzysta się w części 3 pracy do rozwiązania zagadnienia optymalizacji ramownic. Metody te nie są powszechnie znane, a zostały opracowane i przetestowane przy udziale autora na Uniwersytecie Michigan w Ann Arbor. Pierwszą z nich jest metoda poszukiwania minimum w hiperpłaszczyźnie stycznej do hiperpowierzchni ograniczeń a drugą jest metoda zewnętrznej funkcji kary.

4.1. Metoda poszukiwania minimum w hiperpłaszczyźnie stycznej do hiperpowierzchni ograniczeń

Metoda ta jest pewną kombinacją metody kierunków dopuszczalnych zawierających algorytmy umożliwiające przeszukiwanie wnętrza obszaru dopuszczalnego i metod gradientowych wykorzystywanych na brzegu obszaru dopuszczalnego. Metoda poszukiwania minimum w hiperpłaszczyźnie stycznej do hiperpowierzchni ograniczeń zawiera technikę Hooka i Jeevesa [1.52] przeszukiwania wnętrza obszaru dopuszczalnego. W przypadku wyjścia poza obszar dopuszczalny następuje powrót do ostatniego punktu dopuszczalnego a następnie opierając się na metodach gradientowych ekstremum jest poszukiwane wzdłuż hiperpłaszczyzny stycznej do hiperpowierzchni ograniczeń, rys. 1.6. Opisana powyżej procedura zapewnia powodzenie gdy bieżący punkt dopuszczalny znajduje się w bliskim otoczeniu brzegu. Zdaje ona także egzamin nawet w przypadku powierzchni o dużych krzywiznach, gdzie napewno często następuje wychodzenie poza obszar dopuszczalny i cofanie się do poprzedniego punktu dopuszczalnego. Metoda ta wymaga wielokrotnych obliczeń wartości funkcji niezbędnych do wyznaczenia gradientu ograniczeń, jednakże pozwala efektywnie przeszukiwać wnętrze obszaru dopuszczalnego i otoczenie jego brzegów [1.51].

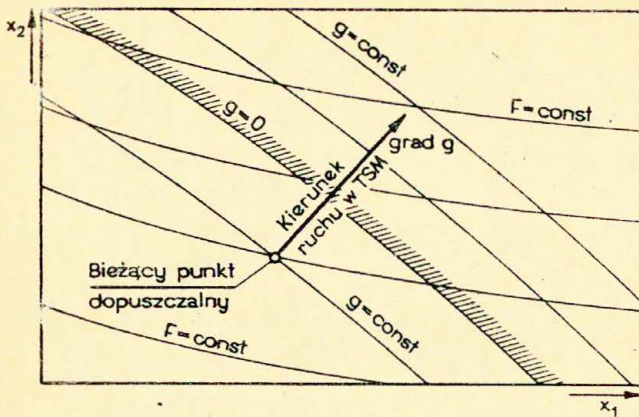
4.2. Metoda zewnętrznej funkcji kary

Metoda zewnętrznej funkcji kary, której twórcą był Zangwill [1.150], polega na sprowadzeniu zagadnienia optymalizacji z ograniczeniami do zagadnienia optymalizacji bez ograniczeń, które z kolei można rozwiązać przy pomocy znanych metod. W tym celu należy wykonać transformację funkcji celu $F(X)$ na funkcję "kary" $P(X, r_k)$ w następujący sposób

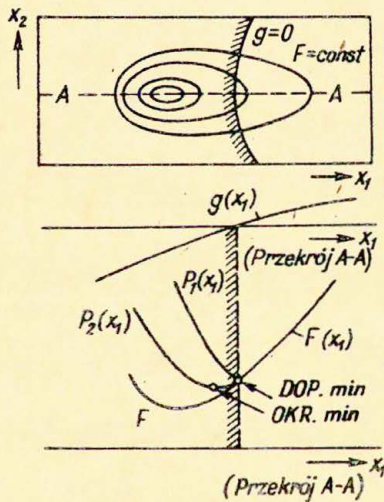
$$P(X, r_k) = F(X) + r_k \sum_{i=1}^{r+n} |g_i(X)|$$

/1.14/

$$\text{gdzie } g_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{przy } g_i(x) \geq 0 \text{ - obszar dop.} \\ g_i(x) & \text{przy } g_i(x) < 0 \text{ - obszar niedop.} \end{cases}$$



Rys. 1.6. Orientacja gradientu ograniczeń i kierunku stycznego do powierzchni ograniczeń



Rys. 1.7. Metoda zewnętrznej funkcji kary

Funkcja P różni się od F tylko na zewnątrz obszaru dopuszczalnego. Wyrazy związane z karą są włączane tylko wtedy gdy którekolwiek z ograniczeń zostaje przekroczone. Zamiast bezwzględnej wartości $g_1(x)$ można przyjąć także kwadrat $g_1^2(x)$. W przypadku wyboru dostatecznie dużej wartości r_k optimum dopuszczalne funkcji $F(x)$ leżące na granicy obszaru może ciągle jeszcze znajdować się na powierzchni transformowanej $P(x, r_k)$ lub może być bardzo blisko obszaru dopuszczalnego, rys. 1.7. A zatem przy odpowiednim doborze r_k w pierwszej próbie można osiągnąć optimum lub przynajmniej dobrą jego aproksymację. Każda z metod poszukiwania optimum bez ograniczeń może być zastosowana do wyznaczenia ekstremum funkcji P . W tym przypadku ekstremum poszukuje się wewnątrz i na zewnątrz obszaru dopuszczalnego. Bardziej szczegółowy opis obu wyżej wymienionych metod oraz ich zastosowanie do optymalizacji ramownic okrętowych przedstawiono w rozdziale 15.

5. Wybór metody i algorytmu

Przy poszukiwaniu ekstremum funkcji $F(x)$ z ograniczeniami w postaci równań i nierówności powstaje pytanie, z której z omawianych metod skorzystać, aby znaleźć rozwiązanie możliwie szybko. Odpowiedź na to pytanie nie jest prosta. Żadna z metod nie jest bowiem najlepsza we wszystkich przypadkach. Zbieżność poszczególnych metod zależy od postaci funkcji celu i ograniczeń, od tego czy ekstremum leży wewnątrz obszaru dopuszczalnego, na pojedynczym ograniczeniu czy w ostrzu, od liczby zmiennych, a także od wymaganej dokładności obliczeń.

Porównania różnych metod programowania nieliniowego można znaleźć w wielu pracach polekich [1.27], [1.133], [1.134], [1.135] i zagranicznych [1.28].

Wybór metody i odpowiadającego jej algorytmu zależy od sposobu sformułowania zagadnienia optymalizacji, a czasem również od możliwości korzystania z istniejących programów. W celu ułatwienia wyboru odpowiedniej metody rozwiązania zagadnienia programowania matematycznego w tablicy 11 przedstawiono schemat zaproponowany przez Fletchera, [1.28].

Schemat ten wskazuje drogę postępowania przy rozwiązywaniu problemów optymalizacyjnych, jednakże jest on dość zgrubny i nie zawiera różnych sposobów, które mogą być zastosowane jeszcze przed wyborem metody i algorytmu. Do sposobów tego rodzaju należy na przykład eliminacja niewiadomych z ograniczeń liniowych a czasem nawet i nieliniowych [1.27].

Niekiedy można także wyeliminować ograniczenia przez transformację zmiennych niezależnych, chociaż nie zawsze jest to celowe. Na przykład ograniczenia nierównościowe w postaci $x_1 > 0$, można wyeliminować przez wprowadzenie nowej zmiennej $y = \log x$. Przy poszukiwaniu ekstremum względem y , powyższe ograniczenia będą automatycznie spełnione. Inne przykłady takich transformacji można znaleźć m.in. w pracach Findeisena [1.27] i Boxa [1.8].

W celu uproszczenia nieliniowego zagadnienia optymalizacji, zmienne decyzyjne występujące w postaci liniowej w funkcji celu powinny być wyłączone z optymalizacji jeszcze przed sformułowaniem zagadnienia. W algorytmie optymalizacyjnym powinny występować tylko zmienne decyzyjne w postaci nieliniowej, gdyż wszystkie liniowe mogą być wyznaczone poprzez zastosowanie metody najmniejszych kwadratów.

Ten sposób formułowania nieliniowych zagadnień optymalizacji pozwala znacznie ograniczyć zakres i komplikację zadania przez zmniejszenie liczby zmiennych. Jednakże przy takiej modyfikacji wymagana jest szczególna ostrożność w obliczaniu pochodnych funkcji celu, [1.32].

Wybór metody jest często uzależniony również od lokalnych możliwości korzystanie z gotowych algorytmów, których zestawienie podano w tablicy 1.1. A oto kilka uwag ogólnych podanych przez Fletchera o pewnych grupach metod i algorytmów zestawionych w tej tablicy.

Metody optymalizacji oparte wyłącznie na szacowaniu wartości funkcji celu bez obliczania jej pochodnych stanowią grupę metod, które można jeszcze znacznie ulepszyć. Metoda Stewarda, która wydaje się być najlepszą z dotychczasowych nie jest jednak atrakcyjna przy obliczaniu gradientu przez zastosowanie różnic

skończonych i może być chyba ulepszona. Metody programowania z ograniczeniami liniowymi nie są jeszcze dostatecznie opracowane, a główną ich wadą jest częsta zawodność. Dużo informacji o zachowaniu się funkcji można uzyskać przez ocenę pierwszych pochodnych tam gdzie to jest możliwe.

W przypadku gdy F.17F można łatwo obliczyć, wskazane jest korzystać z drugich pochodnych i wtedy metody wymagające stosowania tylko pierwszych pochodnych mogą być najbardziej przydatne i odpowiednie. Tak samo, metody sum kwadratów dają wyniki zadawalające przy odpowiedniej aproksymacji poszukiwanego ekstremum.

Z opisu metod zestawionych w tabelicy 1.1. widać, że nie ma zbyt wiele algorytmów do bezpośredniego rozwiązania zagadnień z ograniczeniami liniowymi. Pomocną tu może być eliminacja ograniczeń nałożonych na górne i dolne granice zmiennych decyzyjnych przez zastosowanie odpowiedniej transformacji zmiennych niezależnych.

Trzeba również zwrócić uwagę na brak prostych algorytmów do rozwiązywania zagadnień nieliniowego programowania.

Badania w tej dziedzinie są obecnie jednak prowadzone bardzo intensywnie a obraz metod i algorytmów przedstawionych w tabelicy 1.1 może wkrótce ulec poważnym zmianom.

Bibliografia do części 1

- 1.1. J.L. ARMAND, Applications of optimal control theory to structural optimization; analytical and numerical approach. IUTAM Symposium in Warsaw on Optimization in Structural Design, editors: A. Sawczuk, Z. Mróz, Springer Verlag, Berlin 1975.
- 1.2. J.S. ARORA, Inverse problem of structural optimization. J. StructDiv., ASCE, 100, ST.11. 1974.
- 1.3. J. BAKER, J. HEYMAN, Plastic Design of Frames. 1. Fundamentals, 2. Applications, Cambridge University Press, 1969.
- 1.4. N. BANIČUK, Minimax approach to structural optimization problems. J. Optim. Theory and Applications, 20, 1, 1976.
- 1.5. R.L. BARNETT, Survey of optimum structural design. Exper. Mech., 6, 12, 1966, 19A-26A.
- 1.6. R.H. BARTELS, G.H. GOLUB, M.A. SAUNDERS, Numerical techniques in mathematical programming. 7th International Mathematical Programming Symposium, The Hague, 1970.
- 1.7. E.M.L. BEALE, On quadratic programming. Naval Research Logistics Quarterly, 6, 227, 1959.
- 1.8. M.J. BOX, D. DAVIES, W.H. SWANN, Nonlinear Optimization Techniques, ICI Monograph No 5, Oliver and Boyd, London 1969.
- 1.9. M.J. BOX, A new method of constrained optimization and a comparison with other methods. The Computer Journal, 8, 1965.
- 1.10. J. BRADLEY, L. BROWN, M. FEENEY, Cost optimization in relation to factory structures. Engng. Optimization, 1, 2, 1974.
- 1.11. A.M. BRANDT, W. MARKS, Optymalizacja w projektowaniu konstrukcji. Inż. Bud., 5, 1974, 197-200.
- 1.12. A.M. BRANDT, W. DZIENISZEWSKI, S. JENDO, W. MARKS, S. OWCZAREK, Z. WASIUTYŃSKI, Kryteria i Metody Optymalizacji Konstrukcji. PWN, Warszawa 1977.
- 1.13. A.M. BRANDT, W. DZIENISZEWSKI, J. GIERLIŃSKI, J. HOLNICKI-SZULC, S. JENDO, W. MARKS, S. OWCZAREK, A. STACHOWICZ, Podstawy Optymalizacji Elementów Konstrukcji Budowlanych. PWN, Warszawa 1978.
- 1.14. R.P. BRENDT, Algorithms for Minimization without Derivatives. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1973.

- 1.15. M.D.CANON, C.D.CULLUM, Jr, E.POLAK, Sterowanie Optymalne i Programowanie Matematyczne. Wyd. Nauk.-Techniczne, Warszawa 1975.
- 1.16. J.H.CASIS, L.A.SCHMIT, Jr., Optimum structural design with dynamic constraints. J. Struct. Div., ASCE, 102, ST.10, 1976, 2053-2071.
- 1.17. A.CELLA, R.D.LOGCHER, Automated optimum design from discrete components. J.Struct.Div., ASCE, 92, ST.6, 1966.
- 1.18. P.J. CORCORAN, Configurational optimization of structures. Int.J. Mech.Sciences, 12, 1970, 459-462.
- 1.19. H.L.COX, The Design of Structures of Least Weight. Pergamon Press, London 1965.
- 1.20. F.L.ČERNOUSKO, N.V.BANIČUK, Variacionnyé zadači mekhaniki i upravlenija. Izd. Nauka, Moskva 1973.
- 1.21. J.M.DAUSKIN, The Theory of Max-Min. Springer Verlag, Berlin 1967.
- 1.22. W.C.DAVIDON, Variable metric method for minimization. Argonne Nat. Lab., ANL-5990 Rev., Univ.of Chicago 1959.
- 1.23. L.DAVIDSON, L.FELTON, G.HART, Optimum design of structures with random parameters. Comput. Struct., 7, 3, 1977.
- 1.24. D.DAVIES, Some practical methods of optimization, in Integer and Nonlinear Programming /Ed.J.Abadie/, North-Holland, Amsterdam, 1970.
- 1.25. W.S.DORN, R.E.GOMORY, H.J.GREENBERG, Automatic design of optimal structures. Journal de Mecanique, 3, 1, 1964.
- 1.26. A.V. FIACCO, G.P.McCORMICK, Non-linear Programming; Suquential Unconstrained Minimization Techniques, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1968.
- 1.27. W.FINDEISEN, J.SZYMANOWSKI, A.WIERZBICKI, Teoria i Metody Obliczeniowe Optymalizacji. PWN, Warszawa 1977.
- 1.28. R.FLETCHER, Methods for the solution of optimization problems. Study No 5, Computer - aided Engineering. Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Ontario.
- 1.29. R.FLETCHER, M.J.D.POWELL, A rapidly convergent descent method for minimization. Computer Journal, 6, 163, 1963.

- 1.30. R.FLETCHER, C.M.REEVES, Function minimization by conjugate gradients. Computer Journal, 7, 149, 1964.
- 1.31. R.FLETCHER, Certification of Algorithm 251, Comm, ACM, 9, 686, 1966.
- 1.32. R.FLETCHER, An efficient globally convergent algorithm for unconstrained and linearly constrained optimization problems. AERE Report TP 431, 7-th International Mathematical Programming Symposium, The Hague, 1970.
- 1.33. R.FLETCHER, A Fortran subroutine for general quadratic programming. UKAEA Research Group Report, AERE Report R.6370, 1970.
- 1.34. P.L.FOX, Optimization Methods for Engineering Design. Addison Wersley, Reading, Mass., 1971.
- 1.35. E.FRIND, P.WRIGHT, Gradient methods in optimum structural design. J. Struct.Div., ASCE, 101, ST.4, 1975.
- 1.36. R.H.GALLAGHER, Fully stressed design. in Optimum Structural Design, editors: R.H.Gallagher and O.C.Zienkiewicz, John Wiley and Sons, London 1973.
- 1.37. S.I.GASS, Programowanie Liniowe, PWN, Warszawa 1973.
- 1.38. I.M.GELFAND, S.W.FOMIN, Rachunek wariacyjny, PWN, Warszawa 1970.
- 1.39. R.A.GELLATLY, R.H.GALLAGHER, A procedure for automated minimum weigh structural design. Aeronaucical Quart., 17, 1966, 216-230 and 332-342.
- 1.40. R.A.GELLATLY, L.BERKE, Optimality-criterion-based-algorithms, in Optimum Structural Design, editors: R.H. Gallagher and O.C. Zienkiewicz, John Wiley and Sons, London 1973.
- 1.41. E. GERASIMOV, V.REPKO, Modeli i metody vektornoj optimizacii i prilozhenije ich k zadacam stroitelnoj mekhaniki sterzhevykh sistem, Izv.Vyz.Uceb.Zav., Stroit.i Archit., 6, 1976.
- 1.42. D.N.GHISTA, Optimum frameworks under single load system. J.Struct. Div., ASCE, 92, ST.5, 1966.
- 1.43. G.GOBLE, F. MOSES, Practical applications of structural optimization. J.Struct. Div., ASCE, 101, ST.4, 1975.
- 1.44. D.GOLDFARB, L.LAPIDUS, Conjugate gradient method for nonlinear programming problems with linear constraints. I EC Fundamentals, 1, 142, 1966 /AERE Library subroutine VEOIA/.

- 1.45. S.M.GOLDFELD, R.E.QUANDT, H.F.TROTTER, Maximization by quadratic hill climbing, *Econometrica*, 34, 541, 1966.
- 1.46. J.GOLIŃSKI, Z.K.LEŚNIAK, Optimales Entwerfen von Konstruktionen mit Hilfe der Monte-Carlo-Methode, *Bautechnik* 9, 1966, 307-311.
- 1.47. J.GOLIŃSKI, Adaptacyjny system optymalizacji nieliniowej, *Arch.Inż.Ląd.* 20, 3, 1974.
- 1.48. J. GOLIŃSKI, Adaptacyjne Systemy Poszukiwania Konstrukcji Optymalnej, PWN, Warszawa 1976.
- 1.49. R.J.Haug, Jr., K.C.PAN, T.D.STREETER, A computational method for optimal structural design. I. Piecewise uniform structures, *Int., J. for Numer. Meth. in Engng.*, 5, 2, 1972, 171-184.
- 1.50. W.S. HEMP, *Optimum Structures*, Clarendon Press, Oxford 1973.
- 1.51. R.R.HILLEARY, The tangent search method of constrained minimization, *Tech. Rep. No.59*, United States Naval Postgraduate School, Monterey 1966.
- 1.52. R.HOOKE, T.A.JEEVES, Direct search solution of numerical and statistical problems, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 8, April 1962.
- 1.53. L.J.ICERMAN, Optimal structural design for given dynamic deflection, *Int. J. Solids Structures*, 5, 5, 1965, 473-490.
- 1.54. E.IEGI, Matematyčeskaja model zadači optimalnogo projektirovanija diskretnych sistem, V sb.Vses. Konf. Problemy optimizacii tverdogo deformirujemogo tela, Vilnius 1974.
- 1.55. A.D.IOFFE, V.N.TICHOMIROV, *Teoria' Ekstremalnych Zadač*. Izd. Nauka, Moskva 1974.
- 1.56. D.JAWERTH, Vorgespannte Hangekonstruktionen aus gegen-sinning gekrümten Seilen mit Diagonalverspannung, *Der Stahlbau*, 5, 1959.
- 1.57. S.JENDO, Programowanie nieliniowe, rozdział 6 w monografii "Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji" pod redakcją A.M.Brandta PWN, Warszawa 1977.
- 1.58. T. KACZOREK, *Teoria Sterowania*, t.1, Układy liniowe ciągłe i dyskretne. PWN, Warszawa 1977.
- 1.59. N.KHOT, V.VENKAYYA, L.BERKE, Optimum structural design with stability constraints. *Int.J.Numerical Methods in Engng.*, 10,5,1976.

- 1.60. T.P.KICHER, Optimum design - minimum weight versus fully stressed. J.Struct.Div., ASCE, 92, ST.6, 1966.
- 1.61. U.KIRSCH, Multilevel approach to optimum structural design. J.Struct.Div., ASCE, 101, ST.4, 1975.
- 1.62. U.KIRSCH, Synthesis of elastic structures with controlled forces. Int.J.Comp.and Struct., 6, 2, 1976.
- 1.63. A.A.KORBUT, J.J. FINKELSZTEJN, Programowanie Dyskretne, PWN, Warszawa 1974.
- 1.64. W.KRZYŚ, M.ŻYCZKOWSKI, Klasyfikacja problemów kształtowania wytrzymałościowego. Czasop. Techn., 68, 2, 1963, 1-3.
- 1.65. W.KRZYŚ, M.ŻYCZKOWSKI, Pewna metoda tzw. parametrycznego kształtowania wytrzymałościowego. Rozp. Inż., 11, 4, 1963, 643-666.
- 1.66. J.KUCHARCZYK, M.SYSŁO, Algorytmy Optymalizacji w Języku ALGOL 60, PWN, Warszawa 1975.
- 1.67. J.L. KUESTER, J.H.MIZE, Optimization Techniques with FORTRAN, Mc Graw-Hill Company, New York 1973.
- 1.68. R.KUNAR, A.CHAN, A method for the configurational optimization of structures. Comp.Meths Appl.Mech.Eng., 13, 3, 1976.
- 1.69. H.P.KUNZI, H.G.TZSCHACH, C.A. ZEHNDER, Numerical Methods of Mathematical Optimization, Academic Press, New York 1968.
- 1.70. L.S.LASDON, Optimization Theory of Large Systems, McMillan 1970.
- 1.71. Z.K.LEŚNIAK, Metody Optymalizacji Konstrukcji przy Zastosowaniu Maszyn Matematycznych. Arkady, Warszawa 1970.
- 1.72. Z.LEŚNIAK, G.RAKOWSKI, Kierunki rozwoju i problemy mechaniki komputerowej w Polsce. Arch.Inż.,Łąd., 20,3, 1974.
- 1.73. Z.LEŚNIAK, Optymalizacja systemów metodą dekompozycji. Mater. III Konf. Metody komputerowe w mechanice konstrukcji, t. 2, Opole 1977.
- 1.74. D.G.LUENBERGER, Teoria Optymalizacji. PWN, Warszawa 1974.
- 1.75. S.LUND, Application of optimization methods within structural design. Computers and Structures, 4, 1, 1974.
- 1.76. K.A.ŁURIE, Optimalnoe upravlenie v zadačach matematičeskoj fiziki. Izd. Nauka, Moskva 1975.

- 1.77. D.A. MACJULAVIČUS, Nekotorye algoritmy sinteza optimalnyh schem sterzhevych uprugich konstrukcij minimalnogo vesa. Primenenie EVM v stroitelnoj mehanike, Kiev 1968.
- 1.78. D.MACJULAVIČUS, Algoritm poiskovyh gipotez v zadacach optimizacii konstrukcii. Vilniuskij Inz.Stroit.Institut, Vilnius 1974.
- 1.79. K.I.MAJID, D.ANDERSON, Optimum design of hyperstatic structures. Int.J.Numer.Meths in Engng, 4, 1972.
- 1.80. K.I.MAJID, Optimum Design of Structures. Newnes-Butterworths, London 1974.
- 1.81. K. MAŃCZAK, Algorytmy optymalizacji statycznej dla zadań z ograniczeniami. Z.C.S. PAN, 1971.
- 1.82. W.MARKS, Optymalizacja elementów zginanych wstępnie naprężonych. Prace IPPT, 52, 1978.
- 1.83. D.W. MARQUARDT, An algorithm for least squares estimation of nonlinear parameters. Jour. SIAM, 11, 431, 1963.
- 1.84. E.MASUR, Optimal structural design for a discrete set of available structural members. Comp.Meths.Appl.Mech. Eng., 3, 2, 1974.
- 1.85. J.C. MAXWELL, On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Cambridge Univ.Press, Cambridge, England 1890.
- 1.86. A.G.M.MICHELL, The limits of economy of material in frame structures. Phil.Mag.Series, 8, 47, 1904.
- 1.87. N.I. MITROPOLSKIJ, Primenenie Teorii Matric k Rešeniju Zadač Stroitelnoj Mehaniki. Izd.Vysšaja Škola, Moskva 1969.
- 1.88. N.N.MOISEEV, Elementy Teorii Optimalnyh Sistem. Izd. Nauka, Moskva 1975.
- 1.89. A.J.MORRIS, A primal-dual method for minimum weight design of statically determinate structures with several system of load. Int.J. Mech.Sc., 16, 11, 1974.
- 1.90. Z.MRÓZ, On a problem of minimum weight design, Quart. Appl. Math., 19, 1961, 127-135.
- 1.91. Z.MRÓZ, Optimal design of elastic structures subjected to dynamic, harmonically-varying loads. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 50, 5, 1970, 303-309.
- 1.92. Z.MRÓZ, G.ROZVANY, Optimal design of structures with variable support conditions. J. Optimization Theory and Applications, 15, 1, 1975.

- 1.93. B.A.MURTAGH and R.W.H. SARGENT, Projection methods for nonlinear programming. 7th International Mathematical Programming Symposium, The Hauge, 1970.
- 1.94. J.C.NAGTEGAAL, A new approach to optimal design of elastic structures. Comp.Meths in Appl.Mech.and Enging, 2, 1973.
- 1.95. J.A.NELDER, R.MEAD, A simplex method for function minimization, Computer Journal, 7, 308, 1965.
- 1.96. F.I.NIORDSON, P.PEDERSEN, A review of optimal structural design. Proc.of the 13-th International Congress of Applied Mechanics, Moscow 1972, editors: E.Becker, G.K.Mikhailov, Springer Verlag, Berlin 1973. 269-278.
- 1.97. J.V.NEMIROVSKIJ, Optimalnoe Proektirovanie Konstrukcji. Bibliograficeskij ukazatel, c.1, Akademia Nauk SSSR, Sibirskoe Otdelenie, Novosybirsk 1975.
- 1.98. B.OLCZOWSKI, Optymalizacja parametryczna układu drgającego z 2 stopniami swobody. Rozpr. Inż., 18, 2, 1970.
- 1.99. Z.OSIŃSKI, J.WRÓBEL, Teoria Konstrukcji, Wyd. Polit. W-skiej, Warszawa 1977.
- 1.100. F.OTTO, Das Hangende Dach. Bauwelt Verlag, Berlin 1953.
- 1.101. B.L.PIERSON, A survey of optimal structural design under dynamic constraints. Int. J. for Numer. Meths in Engng., 4, 4, 1971, 491-499.
- 1.102. R.H.PLAUT, On minimizing the response of structures to dynamic loading. ZAMP, 21, 1970, 1004-1010.
- 1.103. R.H.PLAUT, Optimal structural design for given deflection under periodic loading. Quar. Appl. Math., 1971, 315-318.
- 1.104. J. POČTMAN, V.BARANENKO, Dinamičeskoje Programirovanije v Zadačach Stroitelnoj Mechaniki, Stroizdat, Moskva 1975.
- 1.105. J. POČTMAN, G.BAPIRO, Dinamičeskoje programirovanije v zadačach stroitelnoj mechaniki. Stroit.Mech. i Rasčet Sooruz., 5, 1976.
- 1.106. E.POLAK, Čislennye Metody Optimizacji, Izd. Mir, Moskva 1974.
- 1.107. G.G.POPE, The design of optimum structures of specified basic configuration. Int.J. Mech. Sc., 10, 1968, 251-263.
- 1.108. M.J.D.POWELL, A method for nonlinear constraints in minimization problems. AERE Harwell Report, TP310, 1967.

- 1.109. M.J.D. POWELL, A hybrid method for nonlinear equations, and A Fortran subroutine for solving systems of nonlinear algebraic equations, in Numerical Methods for Non-linear Algebraic Equations, Edited by P. Rabinowitz, Gordon and Breach, London 1970.
- 1.110. M.J.D. POWELL, A Fortran subroutine for unconstrained minimization, requiring first derivatives of the objective function. UKAEA Research Group Report, AERE R.6469, 1970.
- 1.111. B.N. PSCHENICHNYI, Necessary Conditions for an Extremum. Marcell Dekker, New York 1971.
- 1.112. P. RAJ, D. PACKIE, Optimum structural design by dynamic programming. J. Struct. Div., ASCE, 102, ST.8, 1976.
- 1.113. R. RAZANI, Behavior of fully stressed design of structures and its relationship to minimum weight design. AIAA J. 3, 12, 1965, 2262-68.
- 1.114. J.K. REID, A Fortran subroutine for the solution of a sparse system of nonlinear equations. UKAEA Research Group Report, AERE Library subroutine NSO2A, 1970.
- 1.115. M.I. REJTMAN, G.S. ŠAPIRO, Teorija optimalnogo proektirovanija v stroitelnoj mehanike, teorii uprugosti i plasticnosti, Mehanika, upr. i plasticnost, Moskva 1966.
- 1.116. S. ROLEWICZ, Analiza Funkcjonalna i Teoria Sterowania. PWN, Warszawa 1974.
- 1.117. G.I.N. ROZVANY, Z. MRÓZ, Optimal design taking cost of joints into account. Eng. Mech. Div., ASCE, 101, EM.6, 1975, 917-921.
- 1.118. G. ROZVANY, Optimal design of multiloop multispan systems. J. Mech. Div., ASCE, 102, 6, 1976.
- 1.119. A. SAMBURA, Uwagi o stosowaniu metody Rosenbrocka do optymalizacji konstrukcji. Arch. Inż. Łąd., 20, 3, 1974.
- 1.120. M. SAVE, A general criterion for optimal structural design. J. Optim. Theory and Applications, 15, 1, 1975.
- 1.121. L.A. SCHMIT, W.M. MORROW, Structural synthesis with buckling constraints. J. Struct. Div., ASCE, 89, ST.2, 1963.
- 1.122. L.A. SCHMIT, R.H. MALLET, Structural synthesis and design parameter hierarchy. J. Struct. Div., ASCE, ST.4, 1963, 266-299.

- 1.123. L.A.SCHMIT, R.L.FOX, An intergrated approach to structural synthesis and analysis. AIAA J. 3, 6, 1965, 1104-1112.
- 1.124. L.A.SCHMIT, H.MIURA, A new structural analysis/synthesis capability - ACCESS 1. AIAA Journal, 5, 1976, 661-671.
- 1.125. C.Y.SHEU, Elastic minimum-weight design for specified fundamental frequency. Int.J. Solids and Structures, 4, 10, 1968, 953-958.
- 1.126. C.Y.SHEU, W.PRAGER, Recent developments in optimal structural design. Appl. Mech. Rev., 21, 10, 1968, 985-992.
- 1.127. W.R.SPILLERS, A graph problem of structural design. IUTAM symposium in Warsaw on Optimization in Structural Design, editors: A.Sawczuk, Z.Mróz, Springer Verlag, Berlin 1975.
- 1.128. W.R.SPILLERS, Iterative design for optimal geometry. J. Struct. Div., ASCE, 101. ST.7, 1975.
- 1.129. W.R.SPILLERS, Iterative Structural Design, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam 1975.
- 1.130. G.W.STEWART III, A modification of Davidon's minimization method to accept difference approximations of derivatives. Jour. ACM, 14, 72, 1967.
- 1.131. G.SVED, Z.GINOS, Structural optimization under multiple loading. Int.J.Mech.Sc., 10, 10, 1968.
- 1.132. B.SZEFER, Deformable material continuum as a control system with spatially distributed parameters. Arch. Mech., Stos., 23, 1971, 927-952.
- 1.133. J.SZYMANOWSKI, J. BRZOSTEK, Porównania bezgradientowych metod optymalizacji statycznej. Arch. Aut. i Telemach. 1, 1971.
- 1.134. J.SZYMANOWSKI, S.JASTRZEBSKI, Porównanie gradientowych metod optymalizacji statycznej. Arch. Aut. i Telemach. 2, 1971.
- 1.135. J.SZYMANOWSKI, Przegląd metod poszukiwania ekstremum z ograniczeniami. Arch. Aut. i Telemach. 2, 1971.
- 1.136. S.ŚWISZCZOWSKI, Metody Modyfikacji w obliczeniach konstrukcji sprężystych. Arch.Inż.Ląd., 20, 3, 1974.
- 1.127. J.E.TAYLOR, On variational formulations for structures design problems, IUTAM Symposium in Warsaw on Optimization in Structural Design, editors: A. Sawczuk, Z.Mróz, Springer Verlag, Berlin 1975.

- 1.138. J. THOMSON, G. HUNT, Dangers of structural optimization. Engng. Optimization, 1, 2, 1974.
- 1.139. K.B. TLEČENOV, K.K. KALCAEV, P.P. ZAPLETIN, Metody Matematičeskogo Programirovanija. Izd. Nauka, Kaz. SSR, Alma-Ata 1975.
- 1.140. R.I. TRUCHAEV, V.V. CHOMENJUK, Teorija neklassičeskich variacionnyh zadač. Izd. Leningradskogo Universiteta, 1971.
- 1.141. L.A. TWISDALE, N. KHACHATURIAN, Absolute minimum weight structures by dynamic programming. J. Struct. Div., ASCE, 99, ST. 11, 1973, 2339-2344.
- 1.142. L.A. TWISDALE, N. KHACHATURIAN, Multistage optimization of structures, J. Struct. Div., ASCE, 101, ST. 5, 1975, 1005-1020.
- 1.143. V.B. VENKAYYA, Design of optimum structures. Journal Comp. Struct. 1, 1, 1971, 265-309.
- 1.144. G. WANGDAHL, The external penalty function optimization technique and its application to ship design, Rep. Np 129, Department of Naval Architecture and Marine Engineering, University of Michigan, 1971.
- 1.145. Z. WASIUTYŃSKI, O Kształtowaniu Wytrzymałościowym. cz. 1,2,3 Akademia Nauk Technicznych, Warszawa 1939.
- 1.146. Z. WASIUTYŃSKI, A.M. BRANDT, The present state of knowledge in the field of optimum design of structures. App. Mech. Rev., 16, 5, 1963, 341-350.
- 1.147. M. WELLS, Algorithm 251, function minimization. Comm. ACM, 8, 169, 1965.
- 1.148. P. WOLFE, Methods of non-linear programming; in Non-linear Programming, edited by J. Abadie, North-Holland, Amsterdam 1967.
- 1.149. L.C. YOUNG, Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory. W.B. Saunders Company, Philadelphia 1969.
- 1.150. W.I. ZANGWILL, Non-linear programming via penalty functions. Management Science, 13, 5, 1967.
- 1.151. M.S. ZARGHAMEE, Minimum weight design with stability constraints. J. Struct. Div., ASCE, 96, ST. 8, 1970.
- 1.152. L. ZETLIN, Toitures suspendue dun auditorium municipal a New York, Quatre projets, Larchitecture d'aujourd'hui. 1961, genn. 1962.

- 1.153. L.ZETLIN, Stiel cable creature novel structural space systems, Engineering Journal of AIICS, 1, 1, 1964,.
- 1.154. G.ZOUTENDIJK, Methods of Feasible Directions. Elsevier, Amsterdam 1960.

CZEŚĆ 2

OPTIMALIZACJA KONSTRUKCJI CIĘGNOWYCH METODAMI

RACHUNKU WARIACYJNEGO

6. Charakterystyka konstrukcji cięgnowych

6.1. Cechy szczególne konstrukcji cięgnowych

Ustroje cięgnowe różnią się zasadniczo od innych rodzajów konstrukcji, gdyż nieobciążone i nienaprężone mogą przyjmować rozmaite kształty. Dopiero przyłożenie obciążeń nadaje im określone kształty. Wskutek tego sposób analizy statycznej różni się zasadniczo od powszechnie znanych. Pierwsza różnica polega na tym, że warunki równowagi trzeba układać uwzględniając właściwy kształt ustroju i nie można stosować zasady zeszczywnienia. Druga różnica dotyczy niemożności stosowania zasady superpozycji. Wynika to z dużych przemieszczeń ustrojów cięgnowych wywołanych kinematycznymi zmianami kształtu, jak również powodowanych wydłużeniami cięgien, które przy dużych rozpiętościach mogą dawać znaczne przemieszczenia i powodować zmiany kształtu ustroju. A zatem warunki równowagi i odkształcalności trzeba wypisywać uwzględniając za każdym razem wszystkie obciążenia działające na ustrój o nie określonym z góry kształcie.

Odstąpienie od zasady zeszczywnienia i zasady superpozycji przy rozpatrywaniu ustrojów cięgnowych wiąże się ściśle z ich geometryczną i fizyczną nieliniowością. Cięgna są wykonywane na ogół z materiałów o wysokiej wytrzymałości na rozciąganie. Granica wytrzymałości stali używanej najczęściej do wyrobu lin sięga 14-20 tys. kG/cm^2 a włókna szklane mają wytrzymałość rzędu 22 tys. kG/cm^2 . A zatem w linach występują duże naprężenia które powodują znaczne odkształcenia, a te z kolei przy dużych rozpiętościach są przyczyną dużych przemieszczeń ustroju. Z tego względu zależność między przemieszczeniami i odkształceniami jest nieliniowa. Drugą przyczyną geometrycznej nieliniowości są kinematyczne zmiany kształtu cięgna przy zmianie obciążeń. Można pokazać, że w przypadku pojedynczego cięgna o kształcie z x zależność pomiędzy odkształceniem jednostkowym a składowymi u, w wektora przemieszczeń ma następującą postać:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{ds-dx}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dz}{dx} \frac{dw}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$$

Ze względu na materiał stosowany do wyrobu lin oraz sposób ich wykonania, ciągną wykazują także w pewnym zakresie nieliniowość fizyczną. Jednakże w celu uproszczenia rozważań przyjęto dalej liniowy związek między naprężeniami i odkształceniami. Linearyzacja związków fizycznych jest dopuszczalna, gdyż w przedziale naprężeń eksploatacyjnych ciągną podlegają prawu Hooke'a. A więc w dalszych rozważaniach ustrojów ciągnowych uwzględniono jedynie ich nieliniowość geometryczną.

Zapewnienie kinematycznej niezmienności oraz ograniczenie wielkości przemieszczeń jest podstawowym celem kształtowania i projektowania ustrojów ciągnowych. W przekryciach ciągnowych można to osiągnąć bądź przez zastosowanie ciężkich elementów pokrycia bądź w wyniku wstępnego naprężenia ciągien. Wprowadzenie wstępnego naprężenia do ustrojów ciągnowych pozwala stosować lekkie pokrycia, ułatwia ich wykonanie a także stwarza nowe możliwości w zakresie kształtowania bryły obiektu.

Ustroje ciągnowe wstępnie naprężone charakteryzują się specyficznymi właściwościami, które wyróżniają je zarówno wśród innych ustrojów ciągnowych jak też i innych rodzajów konstrukcji powierzchniowych.

Cięgno z założenia nie ma sztywności na zginanie i ściekanie stanowiąc układ kinematycznie zmienny, który po przyłożeniu obciążenia przemieszcza się kinematycznie bez zmiany odkształceń. W rozważanych konstrukcjach ciężar własny ciągną można pominąć jako wielkość małą wyższego rzędu w porównaniu z występującymi tu obciążeniami. Zależność funkcyjną pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami można ustalić dopiero po zakończeniu przemieszczeń kinematycznych. Dopiero od tego momentu ciągno ma sztywność na rozciąganie i wobec tego można napisać

$$12.1/ \quad J_e \neq 0 \iff \left(\bigwedge_X \wedge_P : \left\{ \begin{array}{l} X \in \Omega \\ P \in P \end{array} \Rightarrow \sigma(X, P) > 0 \right\} \right)$$

Oznacza to, że sztywność ustrojów ciągnowych jest różna od zera wtedy i tylko wtedy jeżeli dla każdego X i p należących odpowiednio do zbiorów \mathcal{R} i P zachodzi $\sigma(X, p) > 0$. W powyższym wzorze oznaczono przez J_e - sztywność ciągną na rozciąganie, X - punkty materialne konstrukcji, \mathcal{R} - obszar przestrzeni zajęty przez konstrukcję, p - obciążenie, P - zbiór obciążeń dopuszczalnych, $\sigma(X, p)$ - naprężenie wywołane działaniem obciążenia p .

Tak rozumianą sztywność ustrojów ciągnowych wstępnie naprężonych przyjęto nazywać sztywnością chwilową, podkreślając w ten sposób warunkowy charakter sztywności ustrojów ciągnowych [2,435]. Sztywność ustrojów ciągnowych zależy od ich kształtu $z = z(x)$, od wielkości wstępnego naprężenia σ_0 , od przekroji cięgien A_1 oraz od rodzaju obciążenia p_n , a więc w ogólnym przypadku jest następującą funkcją

$$J_e = J_e(z, \sigma_0, A_1, p_n)$$

Ponieważ ciągną mogą przenosić wyłącznie siły rozciągające zatem zapewnienie sztywności chwilowej ogranicza klasę dopuszczalnych konfiguracji konstrukcji ciągnowych.

6.2. Kształtowanie, optymalizacja i projektowanie

Właściwe kształtowanie ustrojów ciągnowych wstępnie naprężonych musi zapewniać im kinematyczną niezmienność w ciągu całego okresu eksploatacji. A zatem zawsze musi być spełniony następujący warunek $J_e > 0$. Spełnienie tego warunku jest podstawowym celem kształtowania ustrojów ciągnowych, nieraz jest to możliwe na drodze kolejnych prób, co wymaga dużego doświadczenia w przyjmowaniu kształtu konstrukcji, przekrojów cięgien i sił wstępnego naprężenia. Nie jest to jednak sposób zbyt efektywny i nie zapewnia uzyskania rozwiązania w pełni poprawnego tzw. często prowadzi do zbyt dużych sztywności; może to w sposób zasadniczy obniżyć efektywność ekonomiczną konstrukcji.

Należy bowiem zwrócić uwagę, że podstawową zaletą ustrojów ciągnowych wstępnie naprężonych jest możliwość regulowania wielkości przesieszczeń, co jednakże uzyskuje się zwykle kosztem

zwiększenia sił wciąganych i sił reakcji przekazywanych na konstrukcję podporową. A jakiegokolwiek nieusadnione zwiększenie tych sił, zwłaszcza tych ostatnich, obniża w sposób zasadniczy zalety ekonomiczne ustrojów wiszących.

Dlatego też w kształtowaniu ustrojów ciągnowych wstępnie napreżonych celowe wydaje się wyodrębnienie trzech etapów, w których zarówno cel rozważań, jak i metody rozwiązania są różne. W pierwszym etapie celem jest ogólnie rozumiane kształtowanie, które winno zapewnić i wyznaczenie takiego kształtu konfiguracji początkowej, przekroji cięgien i sił wstępnego naprężenia by warunek /2.1/ był spełniony, a rozwiązanie było ekonomiczne. Takie rozwiązanie przyjęto nazywać "częściowo optymalnym".

W drugim etapie celem jest wyznaczenie "w pełni optymalnego rozwiązania" zawartego w klasie rozwiązań dopuszczalnych określonych w pierwszym etapie oraz spełniającego wybrane kryterium optymalizacji czyli minimalizującego określoną funkcję celu.

W trzecim etapie, w którym obliczenia dotyczą konstrukcji już ukształtowanej, celem jest przeanalizowanie wpływu czynników dodatkowych, wyznaczenie sił, przemieszczeń, a zwłaszcza oddziaływań na konstrukcję podporową przy różnych układach obciążeń, a także ustalenie parametrów dynamicznych ustroju ciągnowego.

Etap pierwszy i drugi czasami można rozpatrywać łącznie. Ma to miejsce zwłaszcza wtedy, gdy warunki kinematycznej niezmienności oraz klasę konfiguracji dopuszczalnych można przedstawić w sposób jawny. Taki sposób postępowania przyjęto dalej w odniesieniu do ustrojów dwupasowych, natomiast przy kształtowaniu siatek ciągnowych trzeba rozpatrywać wszystkie trzy etapy oddzielnie.

6.3. Konfiguracje i stany obciążenia

Ustroje ciągnowe wstępnie naprężone mają naprężenia początkowe i wobec tego ich kształtowania formułowane być musi w odniesieniu do co najmniej dwóch konfiguracji, wywołanych dwoma stanami obciążenia. W dalszym ciągu odróżniono konfiguracje zdefiniowane następująco: Konfigurację, w której na ustrój działają wyłącznie obciążenia brzegowe wywołujące naprężenia początkowe nazwano konfiguracją początkową P_0 .

Pierwszą konfiguracją aktualną P_1 nazwano taką konfigurację ustroju, w której działają obciążenia maksymalne.

Drugą konfiguracją aktualną P_2 nazwano taką konfigurację w której na ustrój działają obciążenia minimalne. Przez obciążenie minimalne należy rozumieć ekstremalną wartość obciążeń o zwrocie przeciwnym do obciążeń występujących w konfiguracji pierwszej. Z uwagi na to, że jednoznaczny opis ustroju możliwy jest dopiero po wyeliminowaniu jego kinematycznej zmienności, konfiguracją początkową jest konfiguracja rzeczywista, taka, w której spełniony jest warunek: $b_0 > 0$.

Pierwsza konfiguracja aktualna. Układ obciążeń zasadniczych przyjmowanych w pierwszej konfiguracji aktualnej jest oczywisty: ciężar własny konstrukcji g , obciążenie śniegiem p_1 ; obciążenie użytkowe p_2 i parcie wiatru p_3 . Ustalenie łącznej wielkości tego obciążenia q_1 jest jednoznaczne. Pozostaje uwzględnienie czynników dodatkowych, takich jak wpływ temperatury i przemieszczenia podpór. Spadek temperatury powoduje zwiększenie sił wciągach, zaś jej podwyższenie-zwiększenie przemieszczeń. Natomiast przemieszczenia podpór, o ile wywołane są obciążeniem ustroju, powodują zmniejszenie sił i zwiększenie przemieszczeń. Przeciwny skutek jest możliwy wówczas, gdy przemieszczenia podpór wywołane są obciążeniem przyłożonym do konstrukcji podporowej. Przy kształtowaniu czynniki te mogą być uwzględnione przez wprowadzenie współczynnika zwiększającego obciążenie.

Druga konfiguracja aktualna. Rozpatrywanymi obciążeniami zasadniczymi działającymi w tej konfiguracji są: ciężar własny g i ssanie wiatru p_4 . Obciążenia dodatkowe uwzględniane są jak poprzednio. Konfigurację tę należy rozważać przy kształtowaniu tylko wtedy, gdy

$$/2.2/ \quad |p_4| > |g|$$

W zagadnieniach kształtowania ustrojów ciągnowych wstępnie naprężonych muszą być uwzględniane: konfiguracja początkowa i pierwsza konfiguracja aktualna, a gdy zachodzi /2.2/ także druga konfiguracja aktualna. Zagadnienia sformułowane w odniesieniu do trzech konfiguracji są trudniejsze co najmniej rachunkowo z uwagi na zwiększenie ilości równań opisujących stan układu. Dlatego też jeżeli

$$/2.3/ \quad |q_2| = |p_4| - |g| \ll g,$$

to można się ograniczyć do rozważania tylko dwóch konfiguracji, obniżając naprężenia dopuszczalne w ciągnach naprężających według zależności:

$$\tilde{\sigma}'_d = \left(1 - \frac{|q_2|}{g}\right)^{3/2} \tilde{\sigma}_d$$

Jeżeli warunek /2.3/ nie zachodzi, to oczywiście nie wyklucza to postępowania analogicznego, z tym że wielkość naprężeń zredukowanych $\tilde{\sigma}_d$ należy każdorazowo ustalić przez przeliczenie wstępne.

W odniesieniu do płaskich ustrojów ciągnowych warunek /2.2/ można osłabić przyjmując

$$\int_4 (|p_4| - |g|) dx > 0.$$

6.4. Założenia, warunki i kryterium optymalizacji

W dalszych rozważaniach dotyczących ustrojów ciągnowych przyjęto następujące założenia:

a/ ciągną są całkowicie wiotkie, tj. niezdolne do przeniesienia momentów zginających, sił ściskających i ścinających,

b/ pola przekrojów poprzecznych cięgien są niezmiennie wzdłuż ich długości,

c/ zależność między naprężeniami i odkształceniami jest liniowa,

d/ wpływ przemieszczeń podpór na wielkości sił wewnętrznych w cięgnach można pominąć.

Inne bardziej szczegółowe założenia w odniesieniu do wielkości zwisów cięgien i obciążeń są przyjmowane dalej przy rozpatrywaniu poszczególnych rodzajów ustrojów cięgnowych. Można pokazać, że w celu zapewnienia kinematycznej niezmienności ustrojów cięgnowych spełnione być muszą następujące warunki:

- w konfiguracji początkowej:

$$/2.4/ \quad H_{10} > 0,$$

Nierówność ta determinuje geometryczne warunki ograniczające klasę dopuszczalnych konfiguracji ustroju cięgnowego wstępnie naprężonego:

$$/2.5/ \quad z_{ij} = z_{ij}(x) = z_{ijdop.} ;$$

- w konfiguracji aktualnej:

$$/2.6/ \quad H_{1j} \geq 0.$$

Warunki /2.4 - 2.6/ wraz z warunkami wytrzymałościowymi

$$/2.7/ \quad \max H_{1j} = A_1 \bar{\sigma}_{1d}, \quad \max H_{2j} = A_2 \bar{\sigma}_{2d}.$$

stanowią zbiór warunków koniecznych. W powyższych wzorach przez H_{1j} oznaczono siły w cięgnach^{M)}, przez z_{ij} konfigurację ustroju, przez A_i , ($i=1,2$), pola przekrojów poprzecznych cięgien, a przez $\bar{\sigma}_{id}$ naprężenia dopuszczalne. Przy kształtowaniu cięgn-

^{M)} Indeksy ij przy H i z oznaczają odpowiednio rodzaj cięgna i konfigurację, $i = 1,2$ oznacza cięgna nośne i naprężające, $j=0,1,2$ oznacza konfigurację początkową, pierwszą drugą.

wych ustrojów wstępnie naprężonych być musi uwzględnionych wiele dodatkowych warunków kształtowania, określonych względami konstrukcyjnymi, architektonicznymi, eksploatacyjnymi czy też wynikającymi z kształtowania konstrukcji podporowej.

Wśród tych warunków odróżnić należy warunek wyrównania naprężeń :

$$/2.8/ \quad \frac{\partial H_{1j}}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, 2)$$

Konstrukcja ciągna na ogół wyklucza zmianę przekroju na długości ciągna, a ponieważ w ogólnym przypadku:

$$/2.9/ \quad \max \bar{\sigma}_\alpha = \bar{\sigma}_\alpha (X^\alpha \in \Gamma),$$

więc pominięcie warunku /2.8/ powoduje przewymiarowanie ciągna na całej długości. Natomiast przyjęcie tego warunku pozwala na zastąpienie warunku /2.7/ zależnościami:

$$/2.10/ \quad A_1 = H_{1j} / \bar{\sigma}_{1d}, \quad A_2 = H_{2j} / \bar{\sigma}_{2d}.$$

We wzorach /2.8/, /2.9/ przez x^α oznaczono współrzędne punktów materialnych ustroju, którego brzeg oznaczono przez Γ . Ponadto można odróżnić jeszcze dwa rodzaje warunków charakteryzujących ustroje ciągnowe wstępnie naprężone:

- warunki dotyczące ograniczenia wielkości przemieszczeń;
- warunki dotyczące rozkładu oddziaływań przekazywanych na konstrukcję podporową,

Pierwsze z nich mają postać:

$$w(x^1, x^2) \leq w_0(x^1, x^2),$$

lub

$$\max_{x^1, x^2} w \leq w_0 = w_{dop}$$

Możliwość wprowadzenia tych warunków, wynikających na ogół ze względów eksploatacyjnych, wyróżnia ustroje ciągnowe wstępnie naprężone spośród innych ustrojów ciągnowych.

Drugi rodzaj warunków pozwala na optymalne kształtowanie konstrukcji podporowej, która może być czynnikiem decydującym

o zaletach ekonomicznych obiektu. Szczegółową postać tych warunków podano w pracy [2.227].

Różnorodność i liczba warunków, które uwzględnione być muszą w kształtowaniu ciągnowych ustrojów wstępnie naprężonych, może tak ograniczać zbiór rozwiązań dopuszczalnych, że optymalizacja rozwiązania samego ustroju ciągnowego jest niemożliwa lub niecelowa. Kształtowanie sprowadza się wówczas do poszukiwania jakiegokolwiek rozwiązania mieszczącego się w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych, definiowanym przez warunki kształtowania. Zbiór ten jest szczególnie ograniczony przez warunki geometryczne wynikające z postulatów architektonicznych.

Jeżeli jednak w kształtowaniu ograniczyć się do warunków kształtowania, to nie można ocenić ilościowo poprawności pod względem techniczno-ekonomicznym rozwiązania samego ustroju ciągnowego. Do znalezienia najlepszego z możliwych rozwiązań nieodzowne jest uwzględnienie w kształtowaniu również kryterium optymalizacji.

Przy wprowadzaniu szczegółowych postaci kryteriów optymalizacji można wykorzystać jednorodność materiału ciągnien, wobec czego kryteria minimum ciężaru i minimum objętości materiału są równoważne, a w przypadku przyjęcia warunków /2,8/ i /2,10/ obydwa mogą być zastąpione przez kryterium wyrównania naprężeń.

7. Optymalizacja ustrojów jednopasowych

7.1. Podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia

Ciągna o dużych zwisach. Poniżej przedstawiono podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia ustrojów jednopasowych o dużych i małych zwisach wyprowadzone w pracy [2.92]. Zależności te są niezbędne do sformułowania zagadnienia optymalizacji rozważanego szczegółowo w pracach autora [2.209], [2.217] oraz omówionego poniżej w rozdziałach 7.2 i 7.3. Rozpatrując równowagę elementu różniczkowego de wiotkiego jednorodnego ciągnia pod dowolnym obciążeniem zewnętrznym q_x , q_z działającym w płaszczyźnie ciągnia /rys. 2.1/ można napisać [2.92] :

$$- N \frac{dx}{ds} + (N + dN) \frac{d}{dx} (x + dx) + q_x ds = 0,$$

$$- N \frac{dz}{ds} + (N + dN) \frac{d}{ds} (z + dz) + q_z ds = 0.$$

Dokonując prostych przekształceń oraz pomijając małe wyższego rzędu, otrzymano

$$\frac{d}{ds} \left(N \frac{dx}{ds} \right) + q_x = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(N \frac{dz}{ds} \right) + q_z = 0.$$

W przypadku cięgna pod obciążeniem pionowym tzn. gdy $q_x=0$ a $q_z \neq 0$, równania równowagi mają postać

$$/2.11/ \quad \frac{d}{ds} \left(N \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(N \frac{dz}{ds} \right) + q_z = 0.$$

Przy wyznaczaniu sił wewnętrznych w cięgnach o dużych zwisach można pominąć ich wydłużenia. Błąd spowodowany tym założeniem nie przekracza zwykle paru procent. Duże znaczenie ma natomiast dokładny opis obciążenia wzdłuż długości cięgien.

Cięgna o małych zwisach. W przypadku cięgien o małych zwisach $f/l \leq 0,1$ można przyjąć, że obciążenie jest rozmieszczone wzdłuż ich rozpiętości, jednakże należy uwzględnić rozciągłość cięgien. W tym przypadku siłę wzdłużną N można utożsamić z jej rzutem poziomym

$$N = H \frac{ds}{dx} \approx H$$

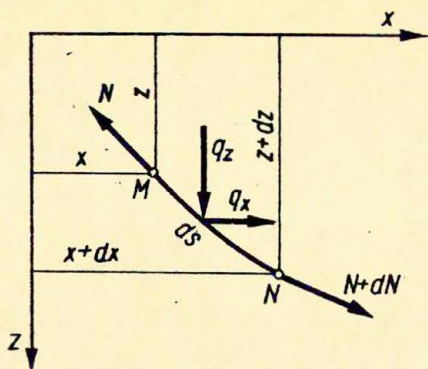
Równania równowagi cięgien o małych zwisach mają postać następującą:

$$\frac{d}{dx} H + q_x = 0, \quad \frac{d}{dx} \left(H \frac{dz}{dx} \right) + q_z = 0.$$

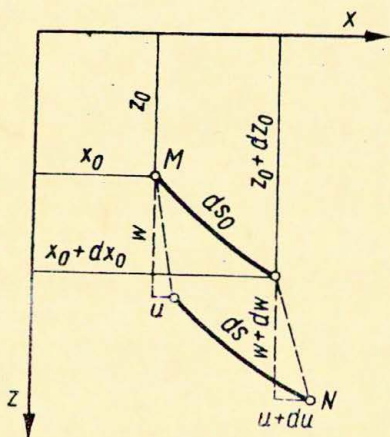
W przypadku cięgna pod działaniem obciążenia pionowego, z pierwszego równania równowagi wynika $H = \text{const}$; wobec tego drugie równanie ma postać:

$$H \frac{d^2 z}{dx^2} + q_z = 0.$$

Równania równowagi cięgien przestrzennych o małych zwisach pod dowolnym obciążeniem zewnętrznym mają postać:



Rys.2.1. Element różniczkowy cięgna pod obciążeniem



Rys.2.2. Element różniczkowy cięgna przed i po deformacji

$$\frac{d}{dx} H + q_x = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(H \frac{dy}{dx} \right) + q_y = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \left(H \frac{dz}{dx} \right) + q_z = 0.$$

Odształcenia cięgien o małych zwisach można określać względem ich rzutu poziomego /rys. 2.2/

$$\xi = \frac{ds-dx_0}{dx_0} = \frac{du}{dx_0} + \frac{dz_0}{dx_0} \frac{dw}{dx_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_0} \right)^2$$

Odształcenie cięgna można określić także z prawa Hooke'a

$$H = A \sigma, \quad \sigma = E \xi$$

i napisać równanie wiążące naciąg H z przemieszczeniami cięgna

$$H = EA \left[\frac{du}{dx_0} + \frac{dz_0}{dx_0} \frac{dw}{dx_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx_0} \right)^2 \right]$$

lub po scałkowaniu

$$H l = EA \left[(u_k - u_p) + \int \frac{dz_0}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right];$$

W powyższych wzorach $(u_k - u_p) = \Delta u = \int_l du$ oznacza całkowite przemieszczenie cięgna w kierunku poziomym, natomiast indeks 0 oznacza wielkości dotyczące konfiguracji początkowej.

W przypadku cięgna przestrzennego poprzez analogię otrzymano

$$H = EA \left[\frac{du}{dx} + \frac{dz_0}{dx} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{dy_0}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]$$

Pod działaniem obciążenia zewnętrznego siła w cięgnie wstępnie naprężonym zależy od wielkości wstępnego naciągu oraz od przemieszczeń wywołanych odkształcalnością cięgna.

$$/2.13/ \quad H = H_0 + \frac{EA}{l} \left[\Delta u + \int \frac{dz_0}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right].$$

Kształt cięgien o małych zwisach, poddanych działaniu obciążeń pionowych opisuje równanie /2.12/. Przyjmując długość początkową cięgna S_0 i rozpiętość l , można obliczyć długość w stanie odkształconym

$$S_1 = \int_0^l \sqrt{dx^2 + dz^2} \, dx = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx,$$

i jednostkowe odkształcenie cięgna ma postać:

$$\xi = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{1}{2S_0} \int_0^l \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx + \frac{l - S_0}{S_0}.$$

W przypadku cięgna rozciągliwego o skończonej sztywności na rozciąganie $\Delta l = S_1 - S_0$, oraz zgodnie z prawem Hooke'a

$$\Delta l = \frac{Hl}{EA}, \text{ stąd}$$

$$S_1 - S_0 = \frac{Hl}{EA}$$

Podstawiając wyrażenie na S_1 oraz $\frac{Q}{H} = \frac{dz}{dx}$ otrzymano

$$l = \frac{1}{2H^2} \int_0^l Q^2 dx - S_0 = \frac{Hl}{EA}$$

Po przekształceniach otrzymuje się równanie 3 stopnia, na wyznaczenie wielkości nacięgu H pod dowolnym obciążeniem pionowym

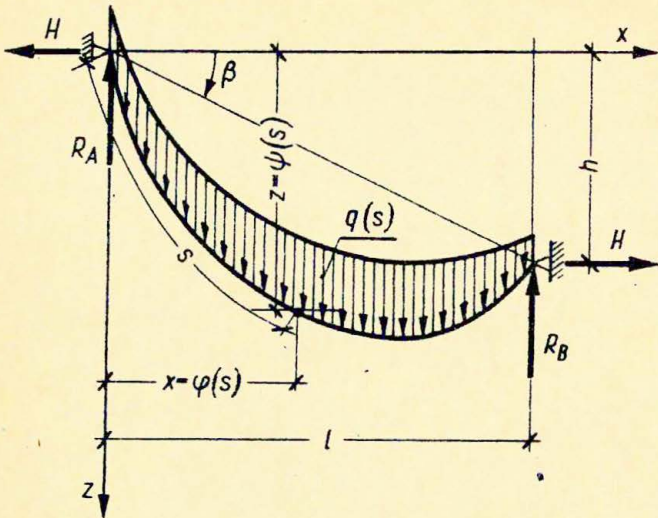
$$H^3 + \frac{\mu EA}{l} H^2 = \frac{DEA}{2l}, \quad \mu = S_0 - l, \quad D = \int_0^l Q^2 dx.$$

Całki typu $\int Q^2 dx$ można obliczyć mnożąc wykresy sił poprzecznych analogicznie jak w przypadku belki swobodnie podpartej.

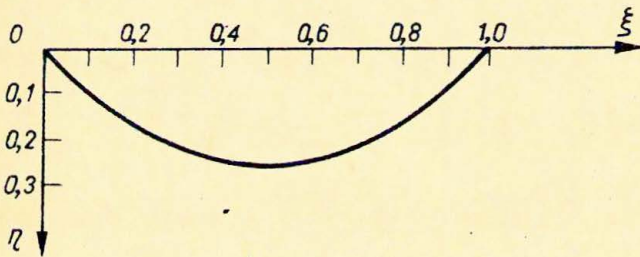
Szczegółową analizę stanu naprężenia i odkształcenia pojedynczych cięgien w przypadkach usytuowania podpór na różnych poziomach i poddanych działaniu różnych rodzajów obciążeń można znaleźć na przykład w monografii [2.167].

7.2. Optymalizacja cięgien o dużych zwisach

Poniżej rozpatrzono zagadnienie wyznaczenia optymalnego kształtu pojedynczego cięgna, którego końce zamocowane są na różnych poziomach /rys. 2.3/. Zagadnienie to zostało rozwiązane przez autora w pracy [2.217] a poniżej podano najważniejsze wyniki. Najpierw rozpatrzono cięgno pod dowolnym obciążeniem ciągłym, a następnie pod obciążeniem równomiernym i zmieniającym się liniowo wzdłuż długości cięgna.



Rys.2.3. Ciężno pod obciążeniem rozmieszczonym wzdłuż długości



ν	0,00	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500
ξ	0,00	0,082	0,169	0,275	0,385	0,500
η	0,00	0,082	0,153	0,209	0,246	0,258

Rys.2.4. Optymalny kształt ciężna pod obciążeniem równomiernym

Kształt cięgna poddanego dowolnemu obciążeniu ciągłemu $q(s)$, opisują funkcje $\varphi(s)$ i $\psi(s)$ zależne od parametru s mierzonego wzdłuż długości cięgna [2.342].

$$x = \varphi(s) = \pm \int \frac{ds}{\sqrt{1 + [A(s)]^2}} + D_2,$$

$$z = \psi(s) = \pm \int \frac{A(s) ds}{\sqrt{1 + [A(s)]^2}} + D_1.$$

W powyższych wzorach przyjęto następujące oznaczenia:

$$A(s) = \frac{Q(s)}{H}, \quad Q(s) = \int q(s) ds + C$$

Stałe C, D_1, D_2, S_1 można wyznaczyć z warunków brzegowych /rys. 2.3/

$$x = \varphi(0) = 0, \quad z = \psi(0) = 0,$$

$$x = \varphi(S_1) = 1, \quad z = \psi(S_1) = h.$$

Wielkość naciągu H wyznaczono na podstawie kryterium minimum ciężaru cięgna przy ograniczeniu maksymalnych naprężeń do wartości dozwolonych σ_d . Ciężar cięgna można napisać w następującej postaci

$$B = \gamma S_1 A = \gamma S_1 \frac{1}{\sigma_d} \frac{H}{\cos \psi_{\max}} = \frac{\gamma}{\sigma_d} S_1 H \sqrt{1 + A(s)^2}.$$

Warunek ekstremum funkcji B względem H ma postać

$$\frac{dB}{dH} = 0,$$

a warunki brzegowe pozwalają wyznaczyć wszystkie stałe. Przy dowolnym obciążeniu zewnętrznym zagadnienie można rozwiązać tylko numerycznie.

Optymalny kształt cięgna obciążonego równomiernie wzdłuż długości wyznaczono w pracy autora [2.209]. Dalsze uproszczenie rozważań może polegać na przyjęciu zamocowania końców cięgna na tym samym poziomie. W tym przypadku wyznaczony kształt cięgna w postaci parametrycznej ma postać:

$$\xi = \frac{1}{2} + \omega \operatorname{arsh} \left[(2\omega - 1) \operatorname{sh} \frac{1}{2\omega} \right],$$

$$\eta = \omega \left[\operatorname{ch} \frac{1}{2\omega} - \sqrt{1 + (2\nu - 1)^2 \operatorname{sh}^2 \frac{1}{2\omega}} \right]$$

W powyższych wzorach ξ i η oznaczają bezwymiarowe współrzędne,
 $\xi = x/l$, $\eta = z/l$. Pozostałe parametry oznaczają

$$\omega = \frac{H}{ql} \quad \nu = \frac{s}{S_1} \quad S_1 = \frac{2H}{q} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{2\omega} \right)$$

Optymalny zwis cięzna wyznaczony z kryterium minimum ciężaru $\kappa = f/l = 0,258$ /rys. 2.4/. Przebieg zmienności funkcji ciężaru ξ w zależności od κ przedstawiono na rysunku 2.5.

Poniżej rozpatrzono cięžno którego końce są zamocowane na różnych poziomach /rys. 2.6/. Obciążenie zmienia się linowo i rozmieszczone jest w sposób ciągły wzdłuż długości cięzna; $q_z = a + bx$, gdzie $a = \alpha bl$; α zmienia się w przedziale 0,05 - 1,0; l jest rozpiętością cięzna. W tym przypadku równanie równowagi /2.11/ przybiera postać:

$$/2.14/ \quad Hd \left(\frac{dz}{dx} \right) + q_z ds = 0.$$

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe $\xi = x/l$, $\eta = z/l$ oraz wyrażając ds w postaci

$$ds = l \sqrt{1 + (d\eta/d\xi)^2} d\xi$$

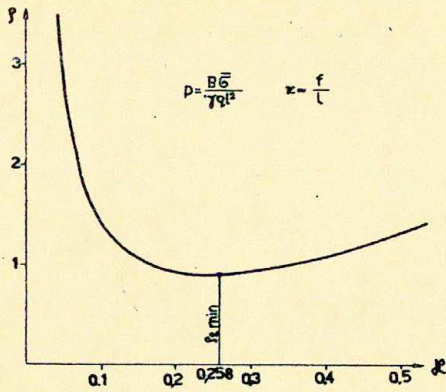
po przekształceniach otrzymano równanie /2.14/ w następującej postaci:

$$/2.15/ \quad \frac{d(d\eta/d\xi)}{\sqrt{1 + (d\eta/d\xi)^2}} = \frac{1}{\omega} (\alpha + \xi) d\xi$$

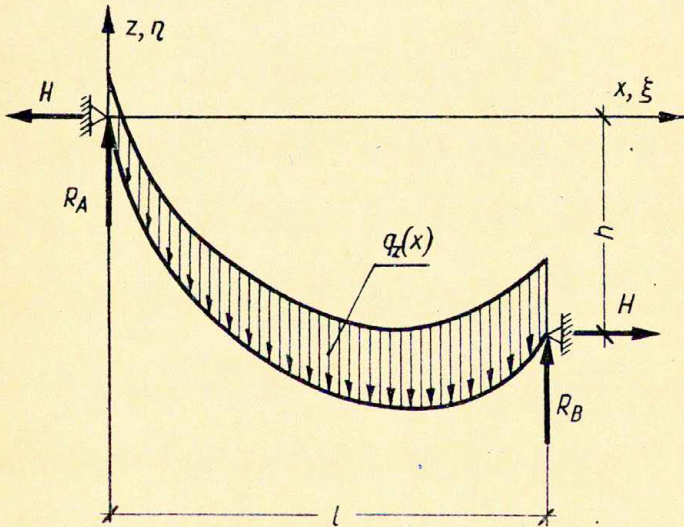
gdzie $\omega = \frac{H}{bl^2}$ jest bezwymiarową wielkością charakteryzującą składową poziomą H siły w cięźnie. Całkując równanie /2.15/ otrzymano

$$/2.16/ \quad d\eta/d\xi = \operatorname{sh} \left[\frac{1}{\omega} (\alpha + \frac{1}{2}\xi) \xi + C \right]$$

Przyjmując układ współrzędnych jak na rysunku 2.6 oraz wyrażając funkcję $\operatorname{sh} \left[\frac{1}{\omega} (\alpha + \frac{1}{2}\xi) \xi + C \right]$ przez funkcje



Rys.2.5. Wykres funkcji ciężaru ciężaru w zależności od zwisu



Rys.2.6. Schemat ciężaru pod obciążeniem zmieniającym się liniowo wzdłuż długości

wykładnicze można równanie /2.16/ po scałkowaniu napisać w postaci:

$$/2.17/ \quad \eta = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\frac{\exp C}{\exp F} \Psi_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2 \exp C} \Psi_2 \right] + D$$

Przez Ψ_1 i Ψ_2 w tym wzorze oznaczono następujące funkcje specjalne

$$\Psi_1 = \int_0^{(\alpha+\xi)\sqrt{G}} \exp t^2 dt - \int_0^{\alpha\sqrt{G}} \exp t^2 dt = K[(\alpha+\xi)\sqrt{G}] - K(\alpha\sqrt{G}),$$

$$\Psi_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(\alpha+\xi)\sqrt{G}} \exp(-t^2) dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha\sqrt{G}} \exp(-t^2) dt = \operatorname{erf}[(\alpha+\xi)\sqrt{G}] - \operatorname{erf}(\alpha\sqrt{G}),$$

nazywane funkcjami błędu; ich wartości liczbowe można znaleźć w tablicach zamieszczonych w pracach [2.526], [2.527], [2.630]. W celu uproszczenia wzorów oznaczono

$$G = \frac{1}{2\omega}, \quad F = \frac{\alpha^2}{2\omega}.$$

Występujące w równaniu /2.17/ stałe całkowania D, C oraz nie wiadomą ω charakteryzującą wielkość rozporu H wyznaczono z warunków brzegowych

$$/2.18/ \quad \begin{aligned} \eta &= 0 \quad \text{przy} \quad \xi = 0, \\ \eta &= \delta \quad \text{przy} \quad \xi = 1. \end{aligned}$$

Warunek /2.18/ prowadzi do $D = 0$, natomiast dwa pozostałe warunki tworzą następujący układ równań:

$$/2.19/ \quad \begin{aligned} \delta &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\frac{\exp C}{\exp F} \bar{\Psi}_1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\exp F}{\exp C} \bar{\Psi}_2 \right], \\ \gamma &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left[\frac{\exp C}{\exp F} \bar{\Psi}_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\exp F}{\exp C} \bar{\Psi}_2 \right]. \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{s_2}{\lambda} \quad , \quad s_2 = \int_0^{s_1} ds$$

W powyższych równaniach oznaczono przez

$$\bar{\Psi}_1 = K[(1+\alpha)\sqrt{G}] - K(\alpha\sqrt{G}) \quad ,$$

$$\bar{\Psi}_2 = \operatorname{erf}[(1+\alpha)\sqrt{G}] - \operatorname{erf}(\alpha\sqrt{G}) \quad ,$$

Dodając stronami równania /2.19/ otrzymano

$$/2.20/ \quad \exp C = \sqrt{G} \exp F(\delta + \gamma) \bar{\Psi}_1^{-1}$$

a następnie podstawiając /2.20/ do równania /2.19/₂ otrzymano następujące równanie przestępne:

$$/2.21/ \quad \gamma^2 - \delta^2 - \omega \sqrt{\pi} \bar{\Psi}_1 \bar{\Psi}_2 = 0$$

które pozwala wyznaczyć ω przy danych α , γ , δ . Podstawiając /2.20/ oraz $D = 0$ do równania /2.17/ po przekształceniach wyznaczono kształt cięgna w postaci funkcji:

$$/2.22/ \quad \eta = \frac{1}{2} \left[(\delta + \gamma) \bar{\Psi}_1^{-1} \Psi_1 - \omega \sqrt{\pi} (\delta + \gamma)^{-1} \bar{\Psi}_1 \Psi_2 \right] \quad ,$$

zależnej od parametru ω , który można obliczyć z równania /2.21/ przy danych parametrach geometrycznych α , δ oraz przy założonej wielkości γ . W rzeczywistości istnieje duża dowolność w przyjmowaniu tego ostatniego parametru. W pracy [2.21] wyznaczono optymalną wielkość parametru γ charakteryzującego zwis, przy którym ciężar własny cięgna osiąga minimum. Rozwiązanie zagadnienia zaprogramowano na maszynę cyfrową GIER. Program zakodowano w języku GIER-ALGOL. Przedziały zmienności parametrów geometrycznych α i δ przyjęto w następujący sposób:

$$/2.23/ \quad \left(\alpha = 0,05 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,4 \quad 0,6 \quad 0,9 \quad 1,0 \right) \\ \delta_{m} = 0,2m \quad (m = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

Pierwiastki ζ i ω charakteryzujące optymalne zwisy cięgien w zależności od parametrów α i δ obliczono i zestawiono w tabelicy 2.1. Rzędne optymalnych kształtów cięgien można obliczyć na podstawie wzoru /2.22/ przy danych α i δ i uwzględnieniu optymalnych parametrów ω i ζ zestawionych w tabelicy 2.1. Na rysunku 2.7 przedstawiono wykresy optymalnych kształtów cięgien w przypadku $\alpha = 0,05$ i δ zmieniającego się według zależności /2.23/. Na wykresach zaznaczono wielkości parametrów ζ przy którym ciężar cięgna osiąga minimum.

Ze względu na to, że minimum funkcji ciężaru występuje przy dużych zwisach, które nie zawsze są wskazane z punktu widzenia zastosowań praktycznych, zbadano przebieg zmienności funkcji ζ , w zależności od wielkości zwisu ζ oraz od parametrów geometrycznych α i δ . Na rysunku 2.8 przedstawiono przebieg zmienności funkcji ciężaru ζ przy $\alpha = 0,05$. Wartości liczbowe parametru δ przyjęto według zależności /2.23/. Natomiast zmienność parametru ζ przyjęto według zależności:

$$/2.24/ \quad \zeta_1 = /1 + 0,01 i/ \sqrt{1 + \delta^2},$$

$$i = 1, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50.$$

Jednakże ze względu na uwikłaną postać parametru ω w obliczeniach numerycznych ustalono przedział zmienności parametru $\omega = \omega(\zeta)$ w sposób następujący:

$$\omega_1 = 0,1 i,$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$$

a odpowiedniej wyznaczono z równania /2.21/.

Funkcja ciężaru przy ustalonym α przedstawia powierzchnię rozpiętą nad płaszczyzną $\zeta \delta$. Linia przerywaną na tej płaszczyźnie zaznaczono zmienność parametru ζ w zależności od δ , według wzoru /2.24/ przy $i = 0$. Na wykresie zaznaczono punkty, w których ciężar osiąga minimum w zależności od ζ i δ .

T A B L I C A 2.1

Optymalne parametry kształtów ciągników z kryterium minimum ciężaru w zależności od α i δ

$\alpha = 0,05$

$\alpha = 0,10$

δ	ω	γ	β
0,00	0,344	1,12	1,22
-0,20	0,332	1,14	1,08
-0,31	0,301	1,19	1,02
-0,40	0,240	1,31	1,09
-0,60	0,231	1,41	1,30
-0,80	0,220	1,53	1,56
-1,00	0,209	1,67	1,88

δ	ω	γ	β
0,00	0,370	1,12	2,30
-0,20	0,357	1,15	1,16
-0,28	0,326	1,19	1,13
-0,40	0,265	1,30	1,21
-0,60	0,255	1,40	1,45
-0,80	0,243	1,53	1,75
-1,00	0,232	1,66	2,11

$\alpha = 0,20$

$\alpha = 0,40$

δ	ω	γ	β
0,00	0,422	1,12	1,48
-0,20	0,407	1,15	1,32
-0,24	0,377	1,18	1,30
-0,40	0,316	1,29	1,46
-0,60	0,305	1,38	1,75
-0,80	0,292	1,50	2,15
-1,00	0,277	1,64	2,57

δ	ω	γ	β
0,00	0,535	1,13	1,84
-0,19	0,479	1,17	1,65
-0,20	0,426	1,22	1,66
-0,40	0,419	1,27	1,95
-0,60	0,405	1,36	2,36
-0,80	0,388	1,48	2,87
-1,00	0,370	1,68	3,49

$\alpha = 0,60$

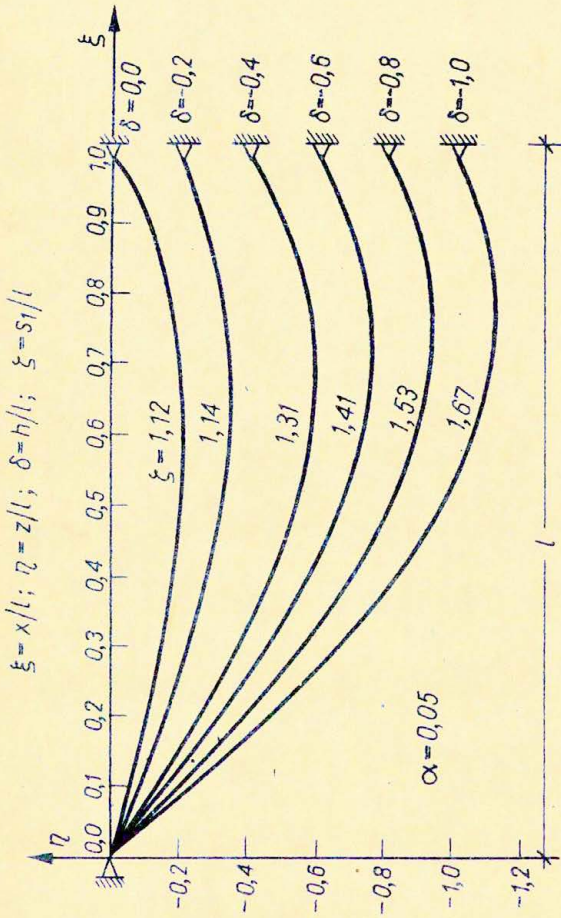
$\alpha = 0,80$

δ	ω	γ	β
0,00	0,629	1,13	2,20
-0,16	0,582	1,17	2,01
-0,20	0,630	1,21	2,07
-0,40	0,523	1,26	2,45
-0,60	0,506	1,35	2,97
-0,80	0,485	1,47	2,63
-1,00	0,463	1,61	4,42

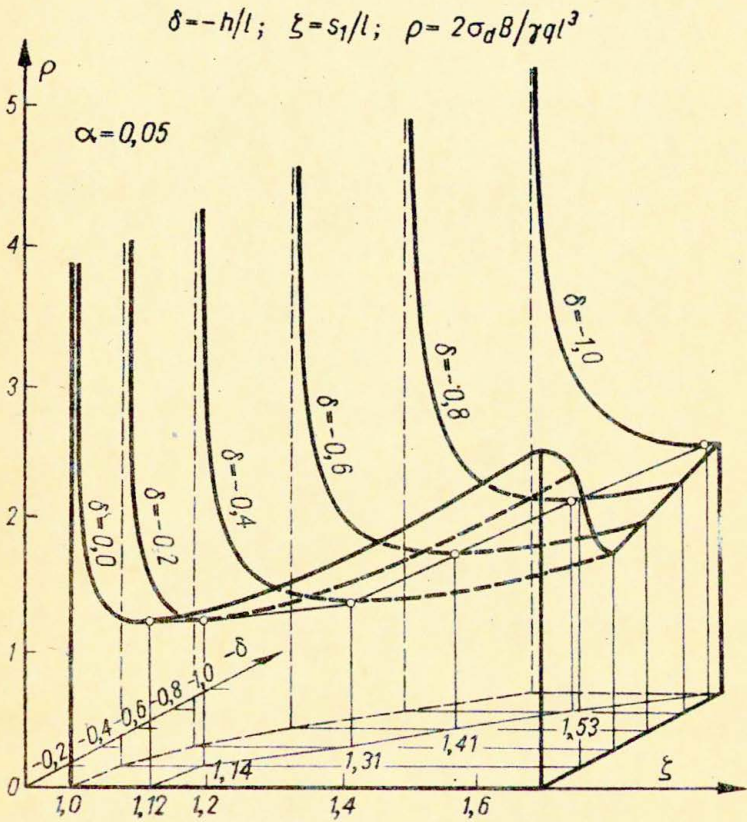
δ	ω	γ	β
0,00	0,733	1,14	2,56
-0,13	0,685	1,17	2,37
-0,20	0,635	1,20	2,49
-0,40	0,627	1,26	2,96
-0,60	0,607	1,35	3,59
-0,80	0,582	1,46	4,38
-1,00	0,557	1,60	5,35

$\alpha = 1,00$

δ	ω	γ	β
0,00	0,837	1,14	2,93
-0,12	0,789	1,16	2,73
-0,20	0,740	1,20	2,90
-0,40	0,730	1,25	3,46
-0,60	0,708	1,34	4,20
-0,80	0,680	1,46	5,14
-1,00	0,650	1,59	6,28



Rys.2.7. Wykresy optymalnych kształtów ciągien w zależności od parametru δ przy $\alpha=0,05$



Rys.2.8. Wykres funkcji ciężaru ciężna w zależności od parametrów γ i δ

W przypadkach gdy zastosowanie optymalnych zwisów nie jest możliwe, można przyjmować zwisy mniejsze od optymalnych, zawarte jednak w przedziałach wolnej zmienności funkcji β według wykresu na rysunku 2.8 lub zgodnie z danymi zamieszczonymi w tabelicy 2.1. Przyjmowanie zwisów zbyt małych w przedziale szybkiej zmienności funkcji β powoduje znaczne zwiększenie ciężaru ustroju.

Sposób korzystania z tablic jest następujący: należy ustalić parametry geometryczne α i δ , które wynikają z przesłanek konstrukcyjnych, architektonicznych lub innych; następnie trzeba znaleźć w tabelicy 2.1 odpowiadające im optymalne parametry ω i γ . Znając ω i γ można obliczyć optymalną wielkość naciągu $H = \omega b l^2$. W przypadkach pośrednich wyniki można interpolować względnie skorzystać z programu przygotowanego na maszynę cyfrową GIER.

Przykład 2.1. Optymalny kształt cięgien pod działaniem obciążenia zmieniającego się liniowo wzdłuż długości cięgna wyznaczono przy następujących wielkościach parametrów cięgna: $l = 50$ m, $\alpha = 0,05$, $\delta = -0,6$, $b = 12,5$ kG/m². W tabelicy 2.1. znaleziono wartości optymalnych parametrów: $\omega = 0,231$, $\gamma = 1,41$ $\beta = 1,30$. Wielkość rozporu $H = b l^2 \omega = 12,5 \cdot 50^2 \cdot 0,231 = 7253$ kG. Maksymalna wielkość siły wzdłużnej w cięgnię wystąpi na podporze w punkcie $\gamma = 0$.

$$N_{\max} = H \sqrt{1 + (d\psi/d\xi)_{\xi=0}^2}$$

Wielkość $\frac{d\psi}{d\xi}$ można obliczyć dwoma sposobami. Pierwszy sposób polega na wyznaczeniu C z wzoru /2.20/ i na podstawieniu do zależności /2.16/; stąd po uwzględnieniu $\xi = 0$ otrzymano

$$d\psi/d\xi = \operatorname{sh} \ln \left[\sqrt{G} \exp F(\delta + \gamma) \bar{\Psi}_1^{-1} \right]$$

Drugi sposób polega na wyznaczeniu pochodnej funkcji ψ danej wzorem /2.22/; stąd po uwzględnieniu $\xi = 0$ otrzymano

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{\sqrt{G}}{2} \left[(\delta + \gamma) \bar{\Psi}_1^{-1} \exp(\alpha^2 C) - \frac{2\omega}{(\delta + \gamma)} \bar{\Psi}_1^{-1} \exp(-\alpha^2 C) \right].$$

Po znalezieniu wartości funkcji $\bar{\Psi}_1$ w tablicach funkcji błędu i po podstawieniu odpowiednich wielkości do powyższych wzorów

otrzymano $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=0} = -2,01$, a następnie $N_{\max} = 16283$ kG. Optymalny kształt cięgna rozpatrywanego w wyżej podanym przykładzie przedstawi wykres na rys. 2.7 przy $\delta = -0,6$.

7.3. Optymalizacja cięgien o małych zwisach

Przeprowadzone powyżej rozważania wskazują, że cięgna o najmniejszym ciężarze charakteryzują się dużymi zwisami. W przypadku cięgna zawieszono w obu końcach na tym samym poziomie i poddanego działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego wzdłuż jego długości, minimum ciężaru występuje przy zwisie $\mu = f/l = 0,258$. Wynikają z tego dwa wnioski. Wielkość zwisu powinna być przyjmowana jako największa z dopuszczalnych, albowiem w przedziale praktycznie stosowanych zwisów ekstremum występuje zawsze na brzegu przedziału.

W przypadku cięgien o małych zwisach $\mu \leq 0,1$, ciężar jest funkcją szybko i monotonicznie malejącą, a jeżeli o wyborze zwisu decydują inne czynniki, to należy zdawać sobie sprawę ze zbyt dużego ograniczenia jego wielkości, gdyż powoduje to znaczne zużycie materiału.

Poniżej omówiono zagadnienie optymalizacji cięgien o małych zwisach przy ograniczeniu ich naprężeń i przemieszczeń przedstawione wcześniej szczegółowo w pracy autora [2.226]. Jako kryterium optymalizacji przyjęto minimalizację przekroju cięgna przy warunkach ograniczających

$$f \leq f_d, \quad N \leq N_d, \quad 0 < \delta \leq \delta_d, \quad A = \frac{H}{6d}$$

oraz warunkach określonych równaniami stanu naprężenia i odkształcenia. Jest to zagadnienie programowania matematycznego.

Podstawowe równania wynikające z analizy stanu naprężenia i odkształcenia cięgna poddanego działaniu obciążenia zewnętrznego $q(z)$ mają postać

$$H_3 + \frac{\mu EA}{I} H^2 = \frac{DEA}{2I} .$$

/2.25/

$$H = \frac{M_1}{z_{10} + w_1} . \quad \mu = s-1, \quad D = \int_0^l Q^2 dx.$$

Uwzględniając warunek kształtowania $A = H/\zeta_d$ otrzymano

$$H = \sqrt{\frac{DE}{21(\zeta + \mu E)}}, \quad H = \frac{M_1}{z_{10} + w_1}$$

W przypadku cięga poddanego działaniu ciężaru własnego i przy założeniu, że przybiera ono kształt paraboli kwadratowej, otrzymano

$$z_{10} = \frac{4f}{1^2} x(1-x), \quad \mu = \frac{8f^2}{31}$$

Z równania /2.25/ wyznaczono

$$/2.26/ \quad \zeta = \frac{DE}{2M_1^2 z_1} \left[\frac{4f}{1^2} x_1(1-x_1) + w_1 \right]^2 - \frac{8f^2}{31^2} E$$

lub w innej postaci

$$/2.27/ \quad w_1^2 + w_1 \left[\frac{8fx_1(1-x_1)}{1^2} \right] + \left[\frac{16f^2 x_1^2 (1-x_1)^2}{1^4} - \frac{16f^2 M_1^2}{301} - \frac{2\zeta(M_1)^2 z_1}{DE} \right] = 0.$$

Zagadnienie optymalizacji sformułować można następująco:

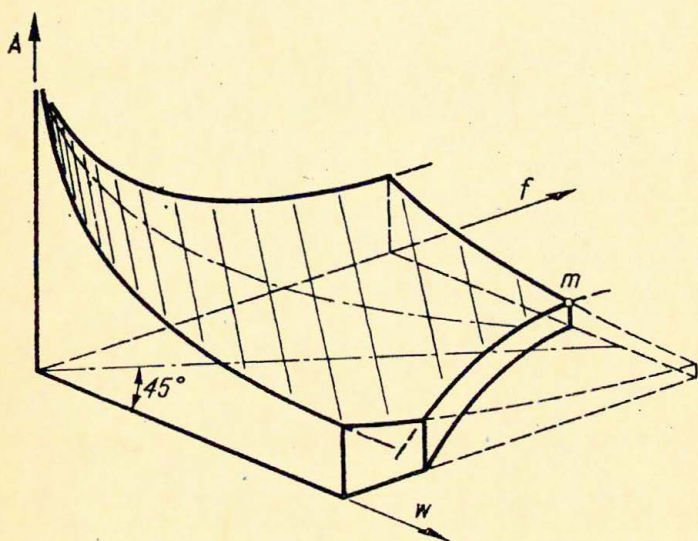
Należy wyznaczyć takie $f_0 \in Q$, by

$$/2.28/ \quad A(f_0) = \min A(f) = \min \frac{M}{\zeta_d \left[\frac{4f}{1^2} x(1-x) + w \right]}$$

przy czym zbiór rozwiązań dopuszczalnych Q określony jest przez warunki:

$$/2.29/ \quad \begin{aligned} f &\leq f_d, & w &\leq w_d, & \zeta &> 0, \\ \zeta &= \frac{DE}{2M_1^2 z_1} \left[\frac{4f}{1^2} x(1-x) + w \right]^2 - \frac{8f^2}{31^2} E \leq \zeta_d. \end{aligned}$$

Z interpretacji geometrycznej równania /2.28/ wynika, że przedstawia ono powierzchnię drugiego stopnia - niecentralny walec hiperboliczny /rys. 2.9/. Poszukiwane optymalne parametry cięga, czyli rozwiązanie odpowiadające minimum funkcji celu, zawsze znajduje się na granicy obszaru wyciętego z powierzchni funkcji celu płaszczyznami /2.29/_{1,2} oraz



Rys.2.9. Wykres funkcji pola przekroju poprzecznego
ciągną w zależności od zwisu, ugięć i naprężeń

cylicyryczną płaszczyzną /2.29/₄ przy czym możliwe są następujące rozwiązania

Rozwiązanie 2.1. Założono $f = f_d$ i $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_d$. Jeżeli wielkość naprężenia $\bar{\sigma}$ obliczona ze wzoru /2.26/ spełnia warunek $\bar{\sigma} > 0$, to ograniczenie naprężeń nie występuje i optymalnymi parametrami minimalizującymi funkcję celu są: $f_d, w_d, \bar{\sigma}_d$ /rys. 2.10a/.

Rozwiązanie 2.2. Założono $f = f_d$ i $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_d$. Jeżeli wielkość ugięcia w obliczona ze wzoru /2.27/ spełnia warunek $|w_1| \leq w_d$, to minimum funkcji celu występuje w punkcie przecięcia płaszczyzn ograniczających $\bar{\sigma}_d$ i f_d . Optymalnymi parametrami w tym przypadku są $f_d, w, \bar{\sigma}_d$ /rys. 2.10b/. W szczególnym przypadku optymalnymi parametrami mogą być $f_d, w_d, \bar{\sigma}_d$.

Rozwiązanie 2.3. Założono, że minimum funkcji celu występuje przy $w_1 = w_d$. Poszukiwano wielkości f , przy której funkcja celu osiąga minimum. Stąd otrzymano równanie na określenie f_{\max} przy $w_1 = w_d$.

$$f^2 \left[\frac{3Dx_1^2(1-x_1)^2}{M_1^2 l^3} - 1 \right] + f \left[\frac{3Dx_1^2(1-x_1)^2}{M_1^2 l^3} - \frac{1}{3} \right] \frac{l^2 w_1}{2x_1(1-x_1)} + \frac{3Dlw_1}{16M_1^2} = 0.$$

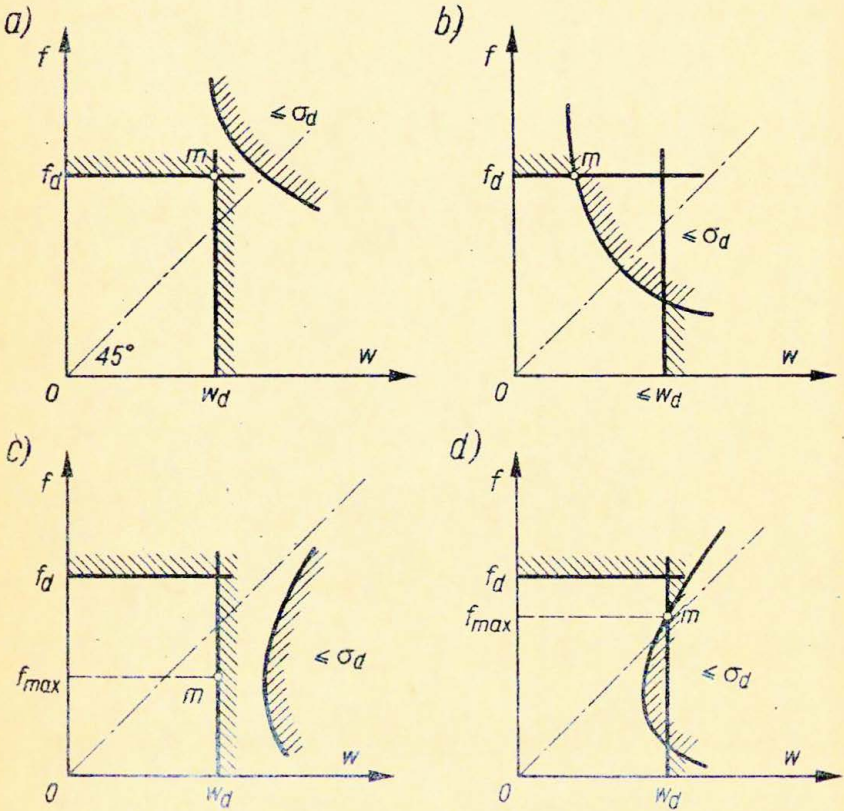
Przy wielkościach f_{\max} i $w_1 = w_d$ z wyrażenia /2.26/ określono wielkość naprężenia $\bar{\sigma}$.

Mogą występować tu następujące dwa przypadki szczególne:

a/ $f_{\max} \leq f_d$ i $0 < \bar{\sigma} < \bar{\sigma}_d$; w tym przypadku optymalnymi parametrami ciągną są: $f_{\max}, w_d, \bar{\sigma}$ /rys. 2.10c/.

b/ $f_{\max} \leq f_d, f_{\max} = f_{\min}, \bar{\sigma} \leq \bar{\sigma}_d$; tu optymalnymi parametrami ciągną są $f_{\max}, w_d, \bar{\sigma}_d$ /rys. 2.10d/.

Widać stąd, że w rozpatrywanym przedziale zmienności f zachodzi zawsze: $f_{\text{opt}} = f_{\max}$, potwierdza to poprzednie wnioski oraz twierdzenie, że optymalne wielkości parametrów $\bar{\sigma}$ i w leżą zawsze na brzegu dopuszczalnego przedziału ich zmienności.



Rys.2.10. Cztery warianty optymalnych parametrów ciężna

8. Optymalizacja ustrojów dwupasowych wstępnie naprężonych

8.1. Podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia

W ustrojach dwupasowych w zależności od wzajemnego położenia cięgna nośnego i naprężającego można odróżnić trzy schematy /patrz rys. 1.2/. W schematach /a, b/ cięgno nośne jest umieszczone wyżej, od naprężającego. W tym przypadku łączniki są rozciągane i mogą być wykonane z lin lub prętów okrągłych. Jednakże takie rozmieszczenie cięgien zwiększa wysokość konstrukcyjną ustroju, a także wymaga oddzielnych konstrukcji podporowych do kotwienia cięgien nośnych i naprężających. W przypadku rozmieszczenia cięgien według schematu /c/, w którym część łączników jest ściskana, a część rozciągana, zmniejsza się wysokość konstrukcyjna ustroju, jednakże podobnie jak w schemacie /a/ konstrukcja podpór jest bardziej skomplikowana. Zaletą tego sposobu rozmieszczenia cięgien jest możliwość dopuszczenia większych zwisów cięgien nośnych i naprężających, prowadzi to do zmniejszenia objętości materiału w cięgnach. Rozmieszczenie cięgien według schematów /d,e/ pozwala wyeliminować wady dwóch poprzednich układów, gdyż wykonuje się tu tylko jedną konstrukcję podporową do kotwienia cięgien nośnych i naprężających. Jednakże łączniki są tu ściskane a zatem ilość materiału w nich zawartego jest większa niż przy poprzednich rozwiązaniach konstrukcyjnych. Wybór schematu rozmieszczenia cięgien zależy w znacznej mierze od przeznaczenia konstrukcji.

Z punktu widzenia kinematyki ustroje dwupasowe są geometrycznie zmiennymi i mogą w nich występować duże przemieszczenia. W celu zmniejszenia tych przemieszczeń stosuje się wstępne naprężenie konstrukcji. Wstępne naprężenie powinno być tym większe im większy jest udział obciążeń użytkowych w stosunku do ciężaru własnego. Właściwy wybór wielkości wstępnego naprężenia ustrojów dwupasowych należy ustalić biorąc pod uwagę ograniczenie przemieszczeń wywołanych obciążeniem równomiernym i nierównomiernym, a także mając na względzie warunki zachowania sił rozciągających w cięgnach naprężających, przy maksymalnym

obciążeniu użytkowemu. Właściwy sposób określenia wielkości wstępnego naprężenia podany będzie niżej.

Przy rozpatrywaniu ustrojów dwupasowych przyjęto, że założenia ogólne podane w rozdziale 6.4 są spełnione. Ponadto przyjęto, że spełnione są również dalsze założenia, mianowicie:

a/ cięgna nośne i naprężające mają małe zwisy,

b/ obciążenia działają pionowo i rozmieszczone są w sposób ciągły wzdłuż rozpiętości ustroju,

c/ łączniki między cięgnami nośnymi i naprężającymi /rozpórki lub wieszaki/ są nieodkształcalne, tzn. przemieszczenia pionowe górnego i dolnego cięgna są sobie równe,

d/ łączniki są rozmieszczone dostatecznie gęsto, co pozwala założyć, że są rozmieszczone w sposób ciągły, a zatem można przyjąć różniczkową postać równań opisujących stan naprężenia i odkształcenia,

e/ łączniki przed i po odkształceniu ustroju pozostają pionowe.

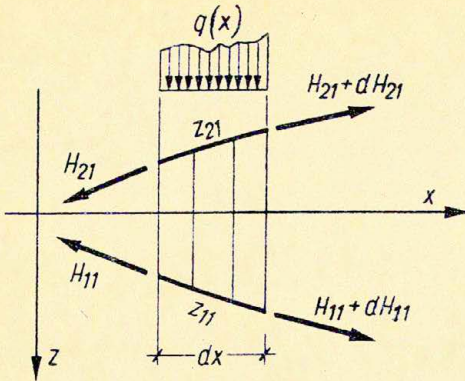
Analizę stanu naprężenia i odkształcenia ustrojów dwupasowych przeprowadzono przy założeniu, że model ośrodka jest ciągły oraz opierając się na teorii technicznej, którą stosuje się do cięgien o małych zwisach; pozwala to również przyjąć, że obciążenia normalne do cięgien są normalnymi do cięciwy cięgien łączącej punkty zamocowania cięgien. Pomimo tak mocnych założeń przeprowadzone badania eksperymentalne potwierdzają stosowanie tej teorii w praktyce [2.404], [2.541].

Rozpatrując zatem warunki równowagi elementu wyciętego z dwupasowego ustroju cięgowego wstępnie naprężonego (rys. 2.11) w stanie odkształconym otrzymano [2.221].

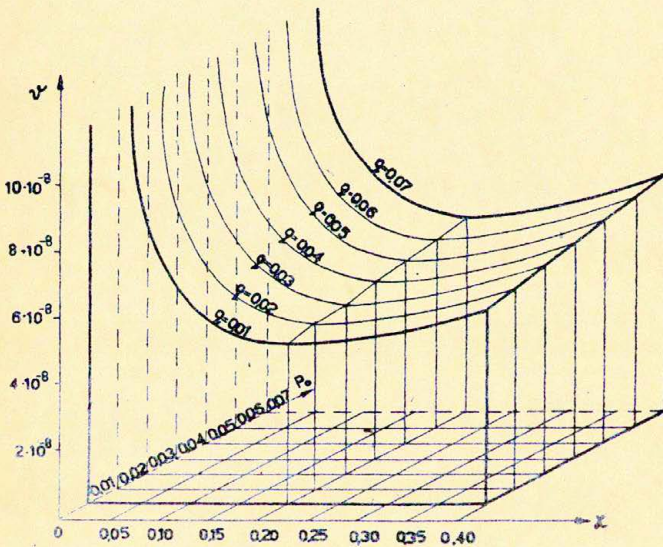
$$H_{11} + H_{21} - H_{11} - H_{21} = 0,$$

/2.30/

$$H_{11} \frac{d^2 z_{11}}{dx^2} + H_{21} \frac{d^2 z_{21}}{dx^2} + q(x) = 0.$$



Rys.2.11. Element różniczkowy ustroju dwupasowego



Rys.2.12. Wykres objętości zastępczej materiału w zależności od zwiśu cęgien i wielkości wstępnego naprężenia

W konfiguracji początkowej, przy której obciążenie $q(x) = 0$, otrzymano

$$/2.31/ \quad H_{10} \frac{d^2 z_{10}}{dx^2} + H_{20} \frac{d^2 z_{20}}{dx^2} = 0.$$

Równanie /2.30/ opisuje stan równowagi w konfiguracji odkształconej. W celu odniesienia go do konfiguracji początkowej należy napisać

$$/2.32/ \quad z_{i1} = z_{i0} + w_1,$$

bowiem wobec założenia nieodkształcalności łączników

$$w_{11} = w_{21} = w_1.$$

Podstawiając /2.32/ do /2.30/ otrzymano równanie równowagi odniesione do konfiguracji początkowej

$$/2.33/ \quad H_{11} \left(\frac{d^2 z_{10}}{dx^2} + \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) + H_{21} \left(\frac{d^2 z_{20}}{dx^2} + \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) + q(x) = 0.$$

Ponieważ $z_0 = z_{10} - z_{20} = z_{11} - z_{21}$, równania równowagi napisać można również w następującej postaci:

- w konfiguracji początkowej:

$$\left(H_{10} + H_{20} \right) \frac{d^2 z_{10}}{dx^2} - H_{20} \frac{d^2 z_{20}}{dx^2} = 0,$$

- w konfiguracji aktualnej

$$H_{11} + H_{21} \frac{d^2 z_{11}}{dx^2} - H_{21} \frac{d^2 z_{20}}{dx^2} + q(x) = 0,$$

- w konfiguracji aktualnej, odniesione do konfiguracji początkowej:

$$\left(H_{11} + H_{21} \right) \left(\frac{d^2 z_{10}}{dx^2} + \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) - H_{21} \frac{d^2 z_{20}}{dx^2} + q(x) = 0.$$

Równania odkształcalności wypisano analogicznie jak w przypadku ustrojów jednopasowych. Na podstawie /2.13/ otrzymano

$$\begin{aligned}
 (H_{11} - H_{10}) - \frac{EA_1}{I} \left[Au + \int \frac{dz_{10}}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] &= 0 \\
 /2.34/ \quad (H_{21} - H_{20}) - \frac{EA_2}{I} \left[\Delta u + \int \frac{dz_{20}}{dx} \cdot \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right] &= 0
 \end{aligned}$$

Układ równań /2.33/ i /2.34/ można sprowadzić do układu równań algebraicznych szóstego stopnia. W tym celu należy zcałkować równanie /2.33/ i obliczyć całki w równaniach /2.34/. W literaturze znanych jest kilka metod rozwiązania tego układu równań. Można tu np. wymienić metodę Dmitriewa [2.92], przedstawioną także w opracowaniu [2.221]. Porównanie wyników otrzymywanych na podstawie różnych metod można znaleźć w pracy [2.469].

8.2. Warunki i kryterium optymalizacji

Przedstawiona powyżej analiza stanu naprężenia i odkształcenia ustrojów dwupasowych jest punktem wyjścia do optymalizacji tych konstrukcji. Zagadnienie optymalizacji ustrojów dwupasowych wstępnie naprężonych zostało sformułowane i rozwiązane po raz pierwszy w pracy autora [2.215] a następnie rozwiązane w pracy [2.221]. Poniżej przedstawiono najważniejsze wyniki rozwiązań zilustrowane przykładem liczbowym.

Celem optymalizacji w ustrojach dwupasowych jest wyznaczenie kształtu cięgien nośnych i naprężających oraz pól przekrojów poprzecznych cięgien i wstępnego naprężenia, tak aby ustrój osiągał minimum ciężaru przy spełnieniu wyspecyfikowanych warunków kształtowania i warunków wytrzymałościowych.

W pracy [2.215], przyjmując jako kryterium optymalizacji minimum objętości zastępczej materiału cięgien nośnych, naprężających i łączników

$$V = k_1 V_1 + k_2 V_2 + k_3 V_3$$

wykazano, że powyższy funkcjonal V osiąga minimum w przypadku gdy cięgna nośne i naprężające mają kształt krzywych sznurów od obciążeń zewnętrznych, a wielkość wstępnego naprężenia

ustroju jest dobrana w taki sposób, aby ono zniknęło przy maksymalnym obciążeniu. W powyższym wzorze V_1, V_2, V_3 , oznaczające objętości cięgien nośnych, naprężających i łączników, natomiast k_1, k_2, k_3 są współczynnikami liczbowymi zależnymi od własności wytrzymałościowych albo od cen jednostkowych poszczególnych materiałów. A więc, w wyniku rozwiązania wyżej opisanego zagadnienia optymalizacji otrzymano:

- przy rozważaniu dwóch konfiguracji

$$z_{11}(x) = \frac{M(x)}{H_{11}} \text{ oraz } H_{21} = 0 \text{ lub } z_{21} = 0,$$

- przy rozważaniu trzech konfiguracji

$$z_{11}(x) = \frac{M_1(x)}{H_{11}}, \quad z_{22}(x) = \frac{M_2(x)}{H_{22}}, \quad H_{21} = H_{12} = 0,$$

Rysunek 2.12 przedstawia wykres objętości zastępczej materiału ustroju dwupasowego w zależności od zwisu cięgien X oraz wstępnego naprężenia p_0 . Łatwo odczytać z wykresu, że optymalna wysokość ustroju $h = 0,42$ l znajduje się poza przedziałem stosowanych w praktyce. Można również zauważyć, że objętość materiału jest funkcją monotonicznie rosnącą ze względu na zmienną p_0 charakteryzującą wstępne naprężenie ustroju, natomiast w przedziale stosowanych zwisów jest funkcją monotonicznie malejącą.

Z uwagi na powyższy wniosek w dalszych rozważaniach rozpatrzono ustroje o ustalonej wysokości, natomiast wielkość wstępnego naprężenia wyznaczono z warunku znikania sił wstępnego naprężenia pod działaniem maksymalnych obciążeń lub z warunku ograniczenia wielkości przemieszczeń ustroju.

W przypadku ustalonej wysokości ustroju można pominąć wpływ objętości łączników na zmianę objętości ustroju, gdyż w tym przypadku objętość łączników będzie wielkością stałą. A zatem kryterium optymalizacji sprowadzono do minimalizacji objętości cięgien nośnych i naprężających. Celem optymalizacji jest tu wyznaczenie takiego kształtu cięgien nośnych i naprężających /o przeda wszystkim stosunku ich zwisów/, ich przekroji poprzecznych, a także takiego wstępnego naprężenia,

aby objętość ustroju osiągała minimum przy spełnieniu warunków wytrzymałościowych, konstrukcyjnych i eksploatacyjnych.

Warunki wytrzymałościowe w tym przypadku mają postać

$$\max H_{1j} = A_1 \tilde{\sigma}_{1d}, \quad \max H_{2j} = A_2 \tilde{\sigma}_{2d}.$$

Warunek konstrukcyjny przyjęto w postaci ograniczonej wysokości ustroju: $h \leq 0.2 l$. Warunki eksploatacyjne przyjęto w postaci ograniczenia przemieszczeń pionowych

$$w(x) \leq w_0 x \quad \text{lub} \quad \max w \leq w_{\text{dop.}}$$

W celu zapewnienia kinematycznej niezmienności dwupasowych ustrojów ciągnowych muszą być spełnione ponadto pewne dodatkowe warunki, mianowicie

$$H_{i0} > 0 \text{ oraz } H_{ij} \geq 0, \quad /i, j = 1, 2/$$

Oznacza to, że siły w cięgnach nośnych i naprężających H_{i0} w konfiguracji początkowej oraz w każdej z konfiguracji aktualnych $/H_{ij}/$ muszą być rozciągające.

W dalszych rozważaniach rozpatrzono optymalizację ustrojów dwupasowych przy uwzględnieniu dwóch i trzech stanów obciążenia zdefiniowanych uprzednio w paragrafie 6.3.

8.3. Optymalizacja w dwóch stanach obciążenia

W przypadku rozpatrywania dwóch konfiguracji za zmienne decyzyjne można przyjąć

$$z_0 = z_0(x) \text{ lub } z_{10} = z_{10}(x) \text{ lub } z_{11} = z_{11}(x)$$

Równania opisujące stan naprężenia i odkształcenia mają postać następującą:

$$\frac{d^2 z_{10}}{dx^2} (H_{10} + H_{20}) - \frac{d^2 z_0}{dx^2} H_{20} = 0,$$

$$/2.35/ \frac{d^2 z_{11}}{dx^2} (H_{11} + H_{21}) - \frac{d^2 z_0}{dx^2} H_{21} - q(x) = 0.$$

$$/2.36/ \quad 2(H_{11} - H_{10}) \frac{\omega_1 l}{H_{11}} = \int_0^l \left[\left(\frac{dz_{11}}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dz_{10}}{dx} \right)^2 \right] dx ,$$

$$2(H_{20} - H_{21}) \frac{\omega_2 l}{H_{20}} = \int_0^l \left[\left(\frac{dz_{20}}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dz_{21}}{dx} \right)^2 \right] dx ,$$

gdzie $\omega_i = \frac{\sigma_{id}}{E_i}$, $i = 1, 2$.

Postulując pełne wykorzystanie przekroju przyjęto

$$A_1 = H_{11} / \sigma_{1d}, \quad A_2 = H_{20} / \sigma_{2d}.$$

Całkując równania równowagi /2.35/ otrzymano:

$$(H_{10} + H_{20}) z_{10} - H_{20} z_0 = C_1 x + C_2,$$

$$/2.37/ \quad (H_{11} + H_{21}) z_{11} - H_{21} z_0 = M(x) = C_3 x + C_4$$

Stałe C_1, C_2, C_3, C_4 wyznaczone z warunków brzegowych:

$$x = 0: z_{10}(0) = z_{11}(0) = z_0(0) = h,$$

$$x = l: z_{10}(l) = z_{11}(l) = z_0(l) = h;$$

stąd otrzymano:

$$C_1 = C_3 = 0, \quad C_2 = H_{10} h, \quad C_4 = H_{11} h.$$

Równania /2.37/ można przekształcić do postaci:

$$/2.38/ \quad z_0 = \frac{H_{10} + H_{20}}{H_{20}} z_{10} - \frac{H_{10}}{H_{20}} h,$$

$$z_{11} = \frac{H_{21}}{H_{11} + H_{21}} z_0 + \frac{M(x) - H_{11} h}{H_{11} + H_{21}}$$

Oznaczając:

$$z_{10} \Big|_{x=0,5l} = \eta h, \quad z_{11} \Big|_{x=0,5l} = (\eta - w_0) h, \quad w_0 = \frac{w(x=0,5l)}{h}$$

z warunku:

$$z_0 \Big|_{x=0,5l} = 0,$$

otrzymano:

$$(\eta - w_0) h = \frac{M(x) + H_{11} h}{H_{11} + H_{21}}, \quad \eta h = \frac{H_{10}}{H_{10} + H_{20}} \cdot h$$

Warunek /2.39/ opisuje ustrój dwupasowy wstępnie naprężony, którego ciągną nośne jest złączone z naprężającym w środku rozpiętości /rys. 2.13/. Przyjmując jako kryterium kształtowania minimum objętości cięgien nośnych i naprężających

$$F/z_{ij}/ = \min \int_0^l \left\{ A_1 \left[1 + 0.5 \left(\frac{dz_{1j}}{dx} \right)^2 \right] + A_2 \left[1 + 0.5 \left(\frac{dz_{2j}}{dx} \right)^2 \right] \right\} dx$$

przy warunkach ubocznych /2.36/ można wyznaczyć optymalne kształty cięgien nośnych i naprężających w konfiguracji początkowej

$$z_{10} = h \left[1 - (1 - \eta) \frac{M(x)}{M_0} \right],$$

$$/2.40/ \quad z_0 = h \left[1 - \frac{M(x)}{M_0} \right]$$

$$z_{20} = z_{10} - z_0 = h \frac{M(x)}{M_0}.$$

Korzystając z zależności /2.40/ opisujących optymalny kształt konfiguracji początkowej pod działaniem dowolnego obciążenia oraz oznaczając

$$w(x) = z_{10}(x) - z_{11}(x), \quad w_0 = \frac{1}{h} w \Big|_{x=0,5l}$$

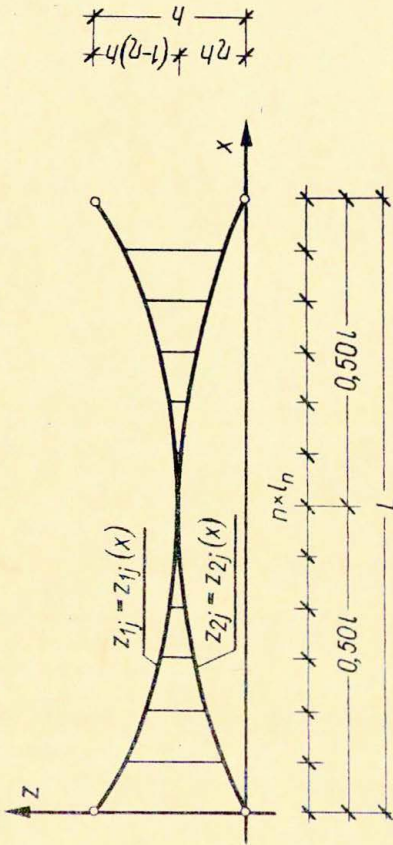
układ równań /2.35/ i /2.36/ można sprowadzić po prostych przekształceniach do układu równań algebraicznych:

$$H_{10}(1 - \eta) = H_{20}\eta,$$

$$(H_{11} + H_{21})(1 - \eta + w_0) = H_{21} + H_0,$$

$$/2.41/ \quad (H_{11} - H_{10}) K_{01} = 0,5 H_{11} w_0 [w_0 + 2(1 - \eta)],$$

$$(H_{20} - H_{21}) K_{02} = 0,5 H_{20} w_0 (2\eta - w_0),$$



Rys. 2.13. Ustrój dwupasowy o ograniczonej wysokości $h \leq 0.2l$

gdzie

$$K_{0i} = \frac{\omega_i}{h^2 A_{0i}}, \quad (i = 1, 2); \quad A_{01} = \frac{1}{M_0^2} \int Q^2(x) dx = \frac{D}{M_0^2}$$

W powyższych wzorach $M(x)$ i $Q(x)$ oznaczają moment zginający i siłę poprzeczną obliczone jak w belce wolno podpartej od obciążenia w pierwszej konfiguracji aktualnej, natomiast M_0 - wartość tego momentu w połowie rozpiętości belki.

Cięgna nośna i naprężająca na ogół wykonywane są z tego samego materiału, więc $\omega_1 = \omega_2$ oraz $K_{01} = K_{02}$. Oznaczając dalej $K_{01} = K_{02} = K_0$ oraz wprowadzając oznaczenia: $\varphi_1 = H_{10}/H_{11}$
 $\varphi_2 = H_{21}/H_{20}$, równania /2.41/ można napisać w następującej postaci:

$$H_{11} \varphi_1 (1 - \eta) = \eta H_{20},$$

$$H_{11} (1 - \eta + w_0) - \varphi_2 H_{20} (\eta - w_0) = H_0,$$

$$w_0^2 + 2(1 - \eta)w_0 - 2(1 - \varphi_1)K_0 = 0,$$

$$w_0^2 - 2\eta w_0 + 2(1 - \varphi_2)K_0 = 0,$$

przy czym, jak widać, parametry φ_1 i φ_2 określone są w przedziałach: $0 < \varphi_1 < 1$; $0 < \varphi_2 < 1$. Rozwiązując /2.42/ z uwagi na w_0 otrzymujemy w zależności od wyróżnika równania kwadratowego:

Rozwiązanie 2.4.

$$\Delta = 4 \left[\eta^2 - 2(1 - \varphi_2)K_0 \right] = 0, \quad w_0 = \eta, \quad H_{11} = H_0$$

$$\varphi_2 = 1 - \frac{\eta^2}{2K_0} = 1 - \frac{w_0}{2K_0},$$

$$\varphi_1 = 1 - \frac{1}{2K_0} (2w_0 - w_0^2)$$

$$H_{20} = \frac{1 - w_0}{w_0} \varphi_1 H_0; \quad H_{10} = \varphi_1 H_0; \quad H_{21} = \varphi_2 H_{20}.$$

Rozwiązanie przy ustalonej wartości w_0 jest jednoznaczne i spełnia jeden z warunków optymalności rozwiązania;

$z_{21}=0$, w oparciu o przedziały zmienności φ_1 otrzymano ograniczenie od góry przedziału zmienności w_0 przy którym istnieje rozwiązanie spełniające warunek: $H_{1j} \geq 0$. Ze względów konstrukcyjnych nie wydaje się celowe przyjmowanie tu w_0 mniejszego od określonego zależnością:

$$w_0 = 0,3 \sqrt{K_0}$$

Jako dopuszczalny przedział zmienności w rozwiązaniu /2.43/ można więc przyjąć

/2.44/ $0,3 \sqrt{K_0} < w_0 < 1 - \sqrt{1-2K_0}$, stąd, $0 < K_0 \leq 0,5$.

Rozwiązanie 2.5.

$$\Delta > 0; \quad \eta > w_0$$

Przyjmując drugi z warunków określających rozwiązanie optymalne: $H_{21} = 0$, otrzymano:

$$\eta = \frac{1}{w_0} (K_0 + 0,5 w_0^2); \quad \varphi_1 = 2 \left(1 - \frac{w_0}{2K_0} \right)$$

/2.45/ $H_{11} = \frac{H_0 w_0}{w_0 + 0,5 w_0^2 - K_0}; \quad H_{10} = \varphi_1 H_{11}$

$$H_{20} = \frac{H_{10} (w_0 - 0,5 w_0^2 - K_0)}{K_0 + w_0^2}; \quad H_{21} = \varphi_2 = 0.$$

Rozwiązanie jest jednoznaczne przy ustalonej wielkości w_0 z przedziału:

$$1 - \sqrt{1-2K_0} < w_0 < 2K_0$$

Rozwiązanie 2.6.

$$\Delta > 0; \quad H_{21} \neq 0.$$

Rozwiązanie to należy przyjmować wtedy, gdy $w_0 < 0,3 \sqrt{K_0}$ lub przy ustalonej wielkości η . Podobnie jak w rozwiązaniu 2 $\eta > w_0$.

$$\varphi_1 = 1 - \frac{1}{2K_0} \left[2(1-\eta)w_0 + w_0^2 \right],$$

$$\varphi_2 = 1 - \frac{1}{2K_0} (2\eta w_0 - w_0^2),$$

$$/2.47/ \quad H_{11} = \frac{\eta H_0}{\eta + w_0 \eta - \eta^2 - (1-\eta)\varphi_1\varphi_2(\eta - w_0)} = \varphi_3 H_0$$

$$H_{10} = \varphi_1 H_{11}; \quad H_{20} = \frac{1-\eta}{\eta} H_{10}; \quad H_{21} = \varphi_2 H_{20}.$$

Rozwiązanie jest jednoznaczne przy ustalonej wielkości η , przy czym, przedział zmienności w_0 ograniczony jest od góry mniejszą z dwu wielkości:

$$(1-\eta) \left[\sqrt{1 + \frac{2K_0}{1-\eta^2}} - 1 \right] \quad \text{lub} \quad \eta \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2K_0}{\eta^2}} \right)$$

O ile η nie jest ustalone, a rozwiązanie to jest przyjmowane gdyż $w_0 < 0,3\sqrt{K_0}$, to wyznaczenie optymalnej wielkości parametru η wymaga rozwiązania dodatkowego zadania ekstremalnego. Na rysunku 2.14 przedstawiono obszary, w których istnieją poszczególne rozwiązania.

Rozwiązanie 2.7.

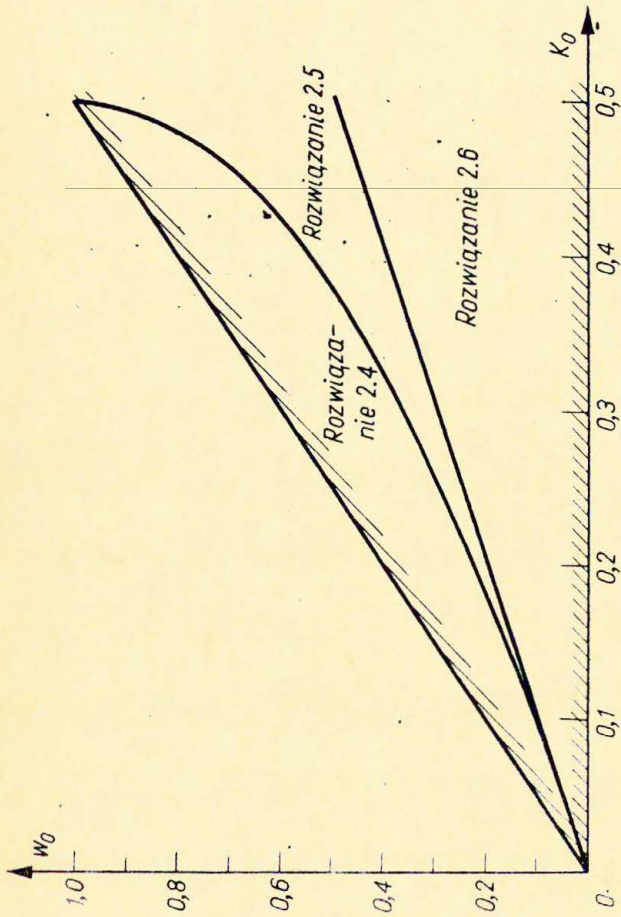
Rozwiązanie przy ustalonej wielkości siły H_{11} . Zakładając maksymalną wielkość siły w ciągu naprężającym przy obciążeniu maksymalnym, można uzyskać jednoznaczne rozwiązanie przy ustalonej wielkości parametru $\eta = \eta^*$. Rozwiązanie to będzie optymalne z uwagi na wielkość przemieszczeń.

Rozpatrywanie η jako zmiennej decyzyjnej nie jest tu celowe, bowiem funkcja $w_0 = w_0(\eta)$ w przedziale $(\eta_d, 1)$ nie ma ekstremum i zachodzi: $\inf w_0(\eta) = w_0(\eta_d)$. /rys. 2.15/.

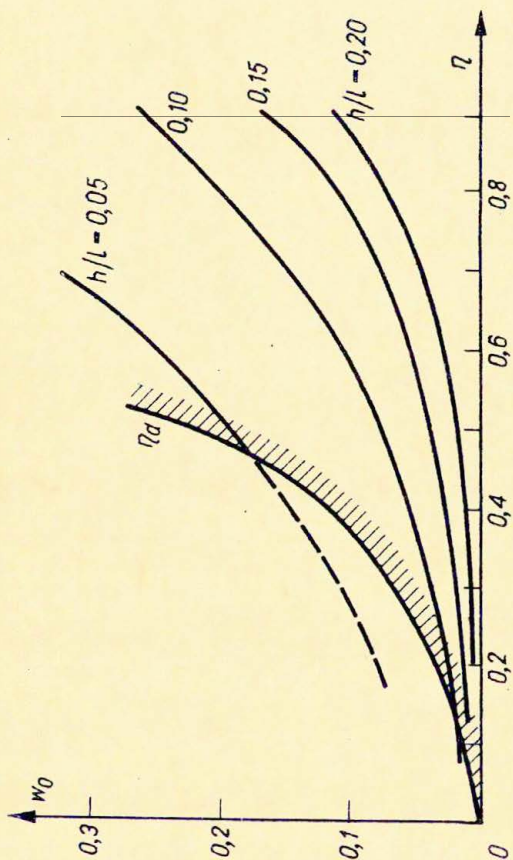
Przy ustalonych: $H_{11} = H_{11}^* > H_0$ i $\eta = \eta^*$ pozostałe wielkości wyznaczyć można z zależności uzyskanych z układu równań /2.42/:

$$w_0 = \sqrt{(1-\eta^*)^2 + K_0(2+K_0)} - (1 - \eta^* + K_0),$$

$$H_{10} = \frac{1}{\eta^* - w_0} \left[H_0(1 + \eta^* - w_0) - H_{11}^*(1 + w_0 - \eta^*) \right],$$



Rys. 2.14. Przedziały zmienności w_0 w zależności od K_0 w poszczególnych rozwiązaniach przy uwzględnieniu dwóch stanów obciążenia



Rys. 2.15. Wykres funkcji w_0 w zależności od η i h/l przy ustalonej sile H_{11}

$$H_{20} = \frac{1-\eta^*}{\eta^*} H_{10}; \quad H_{21} = H_{20} \left[1 - \frac{w_0}{2K_0} (2\eta^* - w_0) \right].$$

8.4. Optymalizacja w trzech stanach obciążenia

Równania równowagi i okształcalności opisujące stan układu w trzech konfiguracjach można napisać analogicznie jak przy dwóch konfiguracjach:

$$/2.48/ \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 z_{10}}{dx^2} (H_{10} + H_{20}) - \frac{d^2 z_0}{dx^2} H_{20} = 0, \\ \frac{d^2 z_{11}}{dx^2} (H_{11} + H_{21}) - \frac{d^2 z_0}{dx^2} H_{21} - q_1(x) = 0, \\ \frac{d^2 z_{12}}{dx^2} (H_{12} + H_{22}) - \frac{d^2 z_0}{dx^2} H_{22} + q_2(x) = 0, \end{array} \right.$$

$$/2.49/ \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 (H_{11} - H_{10}) \frac{\omega_1 l}{H_{11}} = \int_0^l \left[\left(\frac{dz_{11}}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dz_{10}}{dx} \right)^2 \right] dx, \\ 2 (H_{21} - H_{20}) \frac{\omega_2 l}{H_{22}} = \int_0^l \left[\left(\frac{dz_{21}}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dz_{20}}{dx} \right)^2 \right] dx, \\ 2 (H_{12} - H_{10}) \frac{\omega_1 l}{H_{11}} = \int_0^l \left[\left(\frac{dz_{12}}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dz_{10}}{dx} \right)^2 \right] dx, \\ 2 (H_{22} - H_{20}) \frac{\omega_2 l}{H_{22}} = \int_0^l \left[\left(\frac{dz_{22}}{dx} \right)^2 - \left(\frac{dz_{20}}{dx} \right)^2 \right] dx. \end{array} \right.$$

W powyższych równaniach uwzględniono warunek pełnego wykorzystania naprężeń

$$A_1 = H_{11} / \sigma_{1d}, \quad A_2 = H_{22} / \sigma_{2d}.$$

Przyjmując jako zmienną decyzyjną $z_{10} = z_{10}(x)$ i przedstawiając minimalizowany funkcjonwał w postaci:

$$[z_{10}(x)] = \int_0^l \left\{ \frac{H_{11}}{\sigma_{1d}} \left[1 + 0,5 \left(\frac{dz_{10}}{dx} \right)^2 \right] + \frac{H_{22}}{\sigma_{2d}} \left[1 + 0,5 \left(\frac{dz_{22}}{dx} \right)^2 \right] \right\} dx = \int_0^l F(z_{10}) dx.$$

na drodze analogicznej jak w przypadku dwóch konfiguracji
wyznaczono optymalny kształt konfiguracji początkowej:

$$z_{10} = h \left[1 - \frac{H_{20}}{H_{10} + H_{20}} \frac{M_1(x)}{M_{01}} - \alpha \left(\frac{M_{02} M_1(x)}{M_{01} \cdot h} - \frac{M_2(x)}{h} \right) \right]$$

gdzie: $M_1(x)$ - moment obliczony jak w belce wolnopodpartej od
obciążenia pierwszej konfiguracji aktualnej,

M_{01} - wartość tego momentu w 1/2 rozpiętości,

$M_2(x), M_{02}$ - jak wyżej lecz dotyczy drugiej konfiguracji
aktualnej.

W przypadku obciążenia równomiernego $q_1 = - \frac{q_2}{\mu} = \text{const}$
// μ oznacza współczynnik liczbowy/ optymalny kształt konfigu-
racji początkowej ma postać:

$$z_{10} = h \left[1 - \frac{4(1-\eta)}{1^2} (x_1 - x^2) \right]$$

/2.50/

$$z_0 = h \left[1 - \frac{4}{1^2} (x_1 - x^2) \right]$$

$$z_{20} = z_{10} - z_0 = \frac{4\eta h}{1^2} (x_1 - x^2)$$

Wykorzystując zależności /2.44/ i oznaczając

$$w_1(x) = z_{10}(x) - z_{11}(x), \quad w_{01} = \frac{1}{h} w_1 \Big|_{x=0,5l},$$

$$w_2(x) = z_{12}(x) - z_{10}(x), \quad w_{02} = \frac{1}{h} w_2 \Big|_{x=0,5l},$$

układ równań /2.48/ i /2.49/ można sprowadzić do układu równań algebraicznych:

$$(1 - \eta) H_{10} = H_{20},$$

$$(1 - \eta + w_{01}) (H_{11} + H_{21}) = H_{21} + H_{01}; \quad H_{01} = \frac{|q_1| l^2}{8h} > 0,$$

$$(1 - \eta - w_{02}) (H_{12} + H_{22}) = H_{22} - H_{02}; \quad H_{02} = \frac{|q_2| l^2}{8h} > 0.$$

$$\frac{H_{11} - H_{10} 3 \omega_1^2}{H_{22} 8h^2} = 2 w_{01} (1 - \eta) + w_{01}^2.$$

$$/2.51/ \quad \frac{(H_{20} - H_{21}) 3 \omega_2^2}{H_{22} 8h^2} = 2 \eta w_{01} - w_{01}^2$$

$$\frac{(H_{10} - H_{12}) 3 \omega_1^2}{H_{11} 8h^2} = 2 w_{02} (1 - \eta) - w_{02}^2.$$

$$\frac{(H_{22} - H_{20}) 3 \omega_2^2}{H_{22} 8h^2} = 2 \eta w_{02} + w_{02}^2.$$

Analogicznie jak w przypadku dwóch konfiguracji należy sprawdzić przedziały zmienności w_{01} w których istnieją rozwiązania przy poszczególnych warunkach określających rozwiązanie optymalne.

Rozwiązanie przy $\mu \approx 1$

Jeżeli obciążenia pierwszej i drugiej konfiguracji co do bezwzględnej wartości niewiele się różnią ($0,9 \leq \mu \leq 1,1$), to rozwiązanie optymalne otrzymuje się przy $\eta = 0,5$. Równania /2.51/ przybierają następującą postać:

$$H_{10} = H_{20}; \quad H_{11} (0,5 + w_{01}) = H_{21} (0,5 - w_{01}) + H_{01}.$$

$$H_{22} (0,5 + w_{02}) = H_{12} (0,5 - w_{02}) + H_{02}.$$

$$H_{10} = H_{11} \left[1 - \frac{1}{K_1} (w_{01} + w_{01}^2) \right],$$

$$/2.52/ \quad H_{20} = H_{22} \left[1 - \frac{1}{K_1} (w_{02} + w_{02}^2) \right],$$

$$H_{21} = H_{22} \left[1 - \frac{1}{K_1} (w_{01} + w_{02} + w_{01}^2 - w_{02}^2) \right],$$

$$H_{12} = H_{11} \left[1 - \frac{1}{K_1} (w_{01} + w_{02} + w_{01}^2 - w_{02}^2) \right],$$

$$\text{gdzie } K_1 = \frac{3 \omega_1^2}{8h^2}$$

Przyjmując $\mu = 1$ otrzymano:

$$H_{01} = H_{02} = H_0 = \frac{4h^2}{8h}, \quad w_{01} = w_{02} = w_0,$$

$$H_{11} = H_0/\alpha_1, \quad H_{10} = \alpha_2 H_0/\alpha_1, \quad H_{12} = \alpha_3 H_0/\alpha_1,$$

$$\alpha_1 = 0,5 + \frac{2w_0^2}{K_1}, \quad \alpha_2 = 1 - \frac{1}{K_1} (w_0 + w_0^2), \quad \alpha_3 = 1 - \frac{2w_0}{K_1}$$

$$H_{22} = H_{11}, \quad H_{20} = H_{10}, \quad H_{21} = H_{12}.$$

Rozwiązanie jest jednoznaczne przy

$$w_0 \leq 0,5 K_1 \quad \text{gdy } K_1 > 1.$$

$$w_0 < 0,5 \sqrt{K_1} \quad \text{gdy } K_1 < 1.$$

W przypadku $w_0 = 0,5 K_1$ otrzymano: $\alpha_3 = 0, \quad H_{12} = H_{21} = 0;$

$$\alpha_2 = 0,5 - 0,25 K_1, \quad \alpha_1 = 0,5 (1 + K_1) \rightarrow K_1 \leq 1,$$

$$/2.54/ \quad H_{11} = H_{22} = \frac{H_0}{0,5(1+K_1)}, \quad H_{10} = H_{20} = \frac{1-0,5K_1}{1+K_1} H_0.$$

W przypadku $w_0 = 0,5$ otrzymuje się $\alpha_3 = 0$; jeśli $\alpha_1 = 1,0$ to $K_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0,25, \quad H_{12} = H_{21} = 0.$

$$/2.55/ \quad H_{11} = H_{22} = H_0, \quad H_{10} = H_{20} = 0,25 H_0.$$

Jeżeli różnice w wielkości bezwzględnych obciążeń są większe to kształtowanie winno obejmować również wyznaczenie optymalnej wielkości parametru η .

Rozwiązanie przy $\mu \neq 1$.

W przypadku przyjęcia warunku optymalności w postaci

$z_{21} = 0$ i $z_{12} = h$, otrzymuje się:

$$w_{01} = \eta; \quad w_{02} = 1 - \eta; \quad H_{11} = H_{01}; \quad H_{22} = H_{02}.$$

$$H_{10} = H_{01} \left[1 - \frac{1}{K_1} (2\eta - \eta^2) \right],$$

$$H_{20} = H_{02} \left[1 - \frac{1}{K_1} (1 - \eta^2) \right].$$

$$H_{12} = H_{01} \left[1 - 1/K_1 \right]; \quad H_{21} = H_{02} \left[1 - 1/K_1 \right],$$

przy $K_1 < 1$.

Rozwiązanie zagadnienia kształtowania sprowadza się do wyznaczenia η z następującego równania:

$$/2.57/ \quad \eta^3 (1+\mu) - 3\eta^2 + \eta [K_1 (1+\mu) + 2 - \mu] - K_1 = 0,$$

otrzymanego z równania równowagi w konfiguracji początkowej.

Rozwiązanie jest jednoznaczne i istnieje przy $K_1 \geq 1$.

Przy $K_1 = 1$ otrzymuje się $H_{12} = H_{21} = 0$ oraz

$$H_{10} = H_{01} (1 - 2\eta + \eta^2)$$

$$H_{20} = H_{02} \eta^2.$$

Przy $\eta = 0,5$ równanie /2.53/ spełnione jest tożsamościowo.

W przypadku $K_1 < 1$ jako warunek optymalności rozwiązania można przyjąć $H_{12} = H_{21} = 0$. Rozwiązując układ równań /2.51/ otrzymano:

$$H_{11} = H_{01} / (1 - \eta + w_{01}); \quad H_{22} = H_{02} / (\eta + w_{02});$$

$$(1 - \eta) H_{10} = \eta H_{20}.$$

$$H_{10} = \frac{H_{01}}{1 - \eta + w_{01}} \left\{ 1 - \frac{1}{K_1} [2w_{01}(1 - \eta) + w_{01}^2] \right\},$$

$$/2.58/ \quad H_{20} = \frac{H_{02}}{\eta + w_{02}} \left\{ 1 - \frac{1}{K_1} [2\eta w_{02} + w_{02}^2] \right\},$$

$$H_{21} = \frac{H_{02}}{\eta + w_{02}} \left\{ 1 - \frac{1}{K_1} [2\eta w_{02} + w_{02}^2 + 2\eta w_{01} - w_{01}^2] \right\}$$

$$H_{12} = \frac{H_{01}}{1 - \eta + w_{01}} \left\{ 1 - \frac{1}{K_1} [2w_{01}(1 - \eta) + w_{01}^2 + 2w_{02}(1 - \eta) - w_{02}^2] \right\}.$$

z warunku $H_{12} = H_{21} = 0$ otrzymuje się:

$$2\eta(w_{01} + w_{02}) - w_{01}^2 + w_{02}^2 - K_1 = 0,$$

$$2(1 - \eta)(w_{01} + w_{02}) + w_{01}^2 - w_{02}^2 - K_1 = 0.$$

W efekcie w_{01} i w_{02} można przedstawić jako funkcje η :

$$/2.59/ \quad w_{01} = \eta - 0,5 (1 - K_1) ; \quad w_{02} = 0,5 (1 + K_1) - \eta .$$

Po podstawieniu /2.59/ do równań /2.58/_{1,2,4,5}, otrzymano

$$H_{11} = H_{01}/0,5 (1+K_1); \quad H_{22} = H_{02}/0,5 (1+K_1) ;$$

$$/2.60/ \quad H_{10} = \frac{H_{01}}{1+K_1} \left[1 - 0,5 K_1 - \frac{2}{K_1} (2\eta - 0,75 - \eta^2) \right],$$

$$H_{20} = \frac{H_{02}}{1+K_1} \left[1 - 0,5 K_1 - \frac{2}{K_1} (0,25 - \eta^2) \right].$$

Podstawiając dwie ostatnie zależności do /2.58/₃ otrzymano równanie na wyznaczenie η :

$$/2.61/ \quad \eta^3 (1+\mu) - 3\eta^2 + \eta [0,5 K_1 (1+\mu) - 0,25 K_1^2 (1+\mu) + 2,75 - 0,25\mu] - (0,75 + 0,5 K_1 - 0,25 K_1^2) = 0.$$

Przy $\mu = 1$ i $\eta = 0,5$ równanie /2.61/ spełnione jest tożsamościowo, a wzpry /2.60/ upraszczają się do zależności /2.56/. Rozwiązanie istnieje przy $K_1 < 1$.

W poprzednich dwóch przypadkach wszystkie wielkości, a więc i w_{01} , ustalone są jednoznacznie. Rozwiązanie przy ustalonej wielkości przemieszczenia można otrzymać przyjmując zależność

$$w_{0max} = w_{01} + w_{02}$$

W tym przypadku równania /2.51/ można napisać w następującej postaci:

$$(1 - \eta)H_{10} = \eta H_{20},$$

$$H_{11} (1 - \eta + w_{01}) - H_{21} (\eta - w_{01}) = H_{01},$$

$$/2.62/ \quad H_{12} (1 - \eta + w_{01} - w_0) - H_{22} (\eta + w_0 - w_{01}) = -H_{02},$$

$$H_{10} = H_{11} \left\{ 1 - \frac{1}{K_1} \left[2 w_{01} (1 - \eta) + w_{01}^2 \right] \right\},$$

$$H_{21} = H_{22} \left\{ 1 - \frac{1}{K_1} \left[2\eta w_0 - 2w_0 w_{01} + w_0^2 \right] \right\},$$

$$H_{20} = H_{22} \left\{ 1 - \frac{1}{K_1} \left[2\eta w_0 - 2\eta w_{01} + w_{01}^2 + w_0^2 - 2w_0 w_{01} \right] \right\},$$

$$H_{12} = H_{11} \left\{ 1 - \frac{1}{K_1} \left[2w_0(1-\eta) + 2w_0 w_{01} - w_0^2 \right] \right\}.$$

Jeżeli $\mu < 0$, to aby otrzymać rozwiązanie optymalne przy ustalonej wielkości $w_0 \max$, należy przyjąć $z_{21} = 0$, natomiast gdy $\mu > 0$, należy przyjmować $z_{12} = h$.

Przyjmując $z_{21} = 0$ otrzymano $w_{01} = \eta$, $H_{11} = H_{01}$,

$$H_{10} = H_{01} \left[1 - \frac{1}{K_1} (2\eta - \eta^2) \right],$$

$$H_{12} = H_{01} \left[1 - \frac{1}{K_1} (2w_0 - w_0^2) \right],$$

$$H_{22} = \frac{1-w_0}{w_0} \left[1 - \frac{1}{K_1} (2w_0 - w_0^2) \right] H_{01} + \frac{H_{02}}{w_0},$$

/2.63/

$$H_{20} = \frac{1-\eta}{\eta} H_{01} \left[1 - \frac{1}{K_1} (2\eta - \eta^2) \right],$$

$$H_{21} = \left\{ \frac{1-w_0}{w_0} \left[1 - \frac{1}{K_1} (2w_0 - w_0^2) \right] H_{01} + \frac{H_{02}}{w_0} \right\} \left(1 - \frac{w_0^2}{K_1} \right),$$

natomiast η wyznaczono z równania:

$$\eta^3 \left[H_{01} + H_{02} - \frac{H_{01}}{K_1} (2w_0 + 3w_0^2 - w_0^3) \right] - 3\eta^2 w_0 H_{01} +$$

$$+\eta \left[(K_{01} - w_0^2)(H_{01} + H_{02}) + \frac{H_{01}}{K_1} (2w_0^3 - 3w_0^4 +$$

$$+ w_0^5) \right] - w_0 K_1 H_{01} = 0.$$

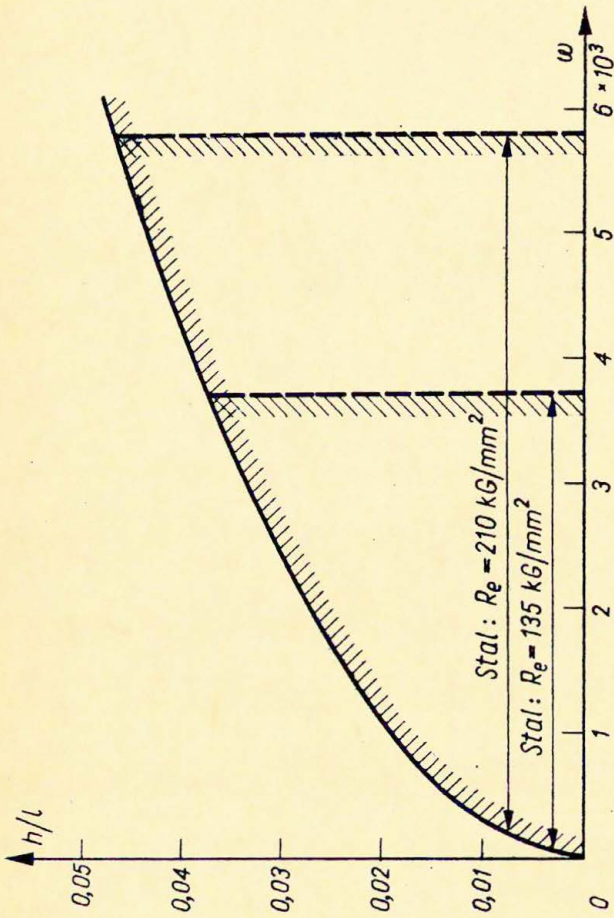
Rozwiązanie spełniające warunek $H_{11} \geq 0$ istnieje przy

/2.64/

$$w_0 \leq 1 - \sqrt{1 - K_1}.$$

Obszar rozwiązań dopuszczalnych przedstawiono na rysunku 2.16.

Wyprowadzone powyżej zależności można stosować bezpośrednio w przekryciach o równoległym układzie ustrojów dwupasowych. W układach racjalnych powyższe zależności mogą stanowić jedynie



Rys.2.16. Obzear dopuszczalnych wartosci ω w zalezności od h/l

podstawę do przestrzennej analizy ustrojów dwupowierzchniowych. Pozostają one także ważne w układach radialnych kołowo-symetrycznych, w których analizę całego przekrycia można sprowadzić do analizy oddzielnych ustrojów dwupasowych.

Przykład 2.2. Przedmiotem kształtowania jest hala o rozpiętości $l = 40$ m przekryta poprzecznie dwupasowymi ustrojami rozmieszczonymi równolegle w odstępach co 6 m. Na ustrój nośny o wysokości $h = 4$ m, działają obciążenia:

- ciężar własny /pokrycie z płyt PZW 3/A/S2/ = 80 kg/m^2 ,
- obciążenie śniegiem $50 \times 1,4$ = 70 kg/m^2 ,
- obciążenie wiatrem: parcie $0,40 \times 50$ = 20 kg/m^2 ,
- ssanie $1,60 \times 50$ = 80 kg/m^2 ,

Maksymalne obciążenie $q_1 = 6,0 / 80 + 70 + 20/$ = 1020 kg/m .

Minimalne obciążenie $q_2 = 6,0 / 70 - 80/$ = -60 kg/m .

Zgodnie ze wzorem /2.3/, w tym przypadku zagadnienie kształtowania można sformułować rozpatrując tylko dwie konfiguracje: pierwszą wywołaną działaniem stanu wstępnego naprężenia i drugą wywołaną maksymalnym obciążeniem q_1 . Ciężna przyjęto ze stali St 150, o wytrzymałości $R = 15000 \text{ kg/cm}^2$ i naprężeniach dopuszczalnych $\sigma_d = 7400 \text{ kg/cm}^2$; $E = 2,10^6 \text{ kg/cm}^2$. Z uwagi na rozpatrywanie tylko dwóch konfiguracji, obniżono naprężenia dopuszczalne w ciężnach naprężających według zależności:

$$\sigma'_d = \left(1 - \left|\frac{q_2}{q_1}\right|\right)^{3/2} \cdot \sigma_d = \left(1 - \left|\frac{10}{80}\right|\right)^{3/2} 7400 = 6057 \text{ kg/cm}^2$$

inne wielkości pomocnicze występujące w rozwiązaniu:

$$\omega = \frac{\sigma_d}{E} = \frac{7400}{2100000} = 0,003524,$$

$$A_{01} = \frac{1}{M_0^2} \int_0^l Q^2 dx = \frac{8^2}{q^2 \cdot 1^4} \cdot \frac{q^2 \cdot 1^3}{12} = \frac{16}{31},$$

$$K_0 = \frac{\omega \cdot 1}{h^2 \cdot A_{01}} = \frac{3 \cdot \omega \cdot 1^2}{16h^2} = \frac{3 \cdot 0,003524 \cdot 40^2}{16 \cdot 4^2} = 0,0661,$$

$$H_0 = \frac{q_1 l^2}{8h} = \frac{1,02 \cdot 40^2}{8 \cdot 4} = 51 \text{ T.}$$

W zależności od wielkości dozwolonego przemieszczenia wybrano jedno z dwóch rozwiązań:

$$w_0 < 1 - \sqrt{1 - 2K_0} = 0,0684$$

$$0,0684 < w_0 < 2K_0 = 0,1322$$

Powyższym bezwymiarowym wielkościami w_0 odpowiadają następujące wielkości przemieszczeń :

$$w = w_0 h = 0,0684 \cdot 400 = 27,36 \text{ cm} = 0,00684 \text{ l.}$$

$$w = w_0 h = 0,1322 \cdot 400 = 52,88 \text{ cm} = 0,01322 \text{ l.}$$

Przyjmując jako dopuszczalne przemieszczenie $w = 0,0051 = 20 \text{ cm}$, mamy $w_0 = w/h = 0,05$ i jak łatwo zauważyć z powyższych obliczeń, wybrano rozwiązanie pierwsze, w którym obowiązują wzory /2.43/.

$$w_0 = \eta = 20/400 = 0,05,$$

$$\varphi_1 = 1 - \frac{1}{2K_0} (2w_0 - w_0^2) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 0,0661},$$

$$(2 \cdot 0,05 - 0,05^2) = 0,2625,$$

$$\varphi_2 = 1 - \frac{w_0^2}{2K_0} = 1 - \frac{0,05^2}{2 \cdot 0,0661} = 0,9811,$$

$$H_{10} = \varphi_1 H_0 = 0,2625 \cdot 51 = 13,39 \text{ T.}$$

$$H_{20} = \frac{1 - w_0}{w_0} H_{10} = \frac{1 - 0,05}{0,05} \cdot 13,39 = 254,41 \text{ T.}$$

$$H_{11} = H_0 = 51 \text{ T.}$$

$$H_{21} = \varphi_2 H_{20} = 0,9811 \cdot 254,41 = 249,61 \text{ T.}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{H_{11}}{6d} + \frac{H_{20}}{8d} = \frac{51000}{7400} + \frac{254410}{6057} = 6,89 + 42,00 = 48,89 \text{ cm}^2.$$

Inne przykłady ilustrujące poszczególne rozwiązania można znaleźć w pracach [2.221] , [2.227].

9. Podstawy kształtowania siatek cięgowych wstępnie naprężonych

9.1. Charakterystyka siatek cięgowych

Siatki cięgnowe są stosowane jako przekrycia obiektów o złożonych i różnorodnych kształtach oraz o różnorodnym przeznaczeniu funkcyjnym. Świadczą o tym nie tylko przekrycia sportowych obiektów olimpijskich ale również obiektów użyteczności publicznej teatrów, kin, lodowisk, basenów itp. Siatki cięgnowe są stosowane także w budownictwie przemysłowym i specjalnym jako przekrycia hal przemysłowych, dworców kolejowych, lotniczych, hangarów itd. Tak szeroki zakres zastosowań stawia przed konstruktorami szereg istotnych problemów do rozwiązania. Racjonalne rozwiązania konstrukcyjne są możliwe tylko przy dokładnym poznaniu szczególnych właściwości siatek cięgowych i ich optymalnych kształtów. W tym celu konieczny jest możliwie dokładny opis siatek cięgowych, tym bardziej, że warunki określające dopuszczalność teorii technicznej nie zawsze mogą być zachowane z uwagi na skomplikowane kształty architektoniczne. Warunki te w przypadku siatek cięgowych są bardziej skomplikowane niż przy płaskich dźwigarach cięgowych. Osie cięgien są tu na ogół krzywymi przestrzennymi, zaś same warunki ograniczające dotyczyć mogą zarówno geometrii zewnętrznej jak i wewnętrznej, powierzchni na której rozpięta jest siatka cięgnowa. Dlatego też celowe jest wprowadzenie jak najbardziej ogólnego opisu przestrzennych siatek cięgowych przydatnego szczególnie przy kształtowaniu i projektowaniu a także w obliczeniach statycznych przy wielu stanach obciążenia.

Ogólną teorię siatek prętowych płaskich i przestrzennych zawierają prace [2.122] , [2.156] , [2.263] . Ustroje prętowo-cięgnowe są przedmiotem rozważań w pracy [2.408]. Zagadnienie analizy stanu naprężenia i odkształcenia siatek cięgowych rozważanych w założeniach teorii kontynualnej jest przedmiotem wielu opracowań, między innymi [2.92], [2.162], [2.221], [2.307] [2.308], [2.372], [2.396], [2.397], [2.457], [2.475].

[2.491]. W pracach [2.221] [2.307] wyprowadzono równania opisujące siatkę cięgnową o dużych zwisach. W pracy [2.221] analogicznie jak w nieliniowej teorii powłok pokazano przejście do teorii przybliżonych, przyjmując oraz to mocniejsze założenia odnośnie konfiguracji i odkształcalności siatek. W dalszych pracach wyżej cytowanych rozpatrywano siatki o małych zwisach w ramach teorii technicznej.

Inny sposób rozpatrywania siatek cięgnowych polega na założeniu dyskretnego modelu siatek cięgnowych, który nawet jest bardziej naturalny z uwagi na dyskretną strukturę rozpatrywanych ustrojów, jednakże uzyskanie efektywnych rozwiązań bardziej złożonych układów jest tu o wiele trudniejsze niż przy modelu ciągłym. Z uwagi jednak na szybki rozwój metod numerycznych można spodziewać się zmian jakościowych w metodach analizy siatek cięgnowych w oparciu o model dyskretny.

Analiza siatek cięgnowych w oparciu o model dyskretny jest także przedmiotem rozważań wielu prac, między innymi [2.10], [2.20], [2.33], [2.41], [2.92], [2.245], [2.520]. W pracach [2.20], [2.41] wyprowadzono równania opisujące siatkę w ujęciu dyskretnym i sprowadzono zagadnienie analizy siatek do rozwiązania układu równań algebraicznych. W pracach [2.20], [2.92], [2.245], [2.520] przedstawiono metody rozwiązywania układu równań opisujących dyskretną siatkę cięgnową. Prace [2.33], [2.188], [2.520] dotyczą siatek dyskretnych rozpiętych na prostokątnym rzucie konturu podporowego.

W dalszych rozważaniach rozpatrzono gęste, regularnie obciążone siatki cięgnowe, traktowane jako dwuwymiarowe odkształcalne kontinuum materialne. Dopuszczalność modelu ciągłego przy opisie ustrojów cięgnowych została potwierdzona badaniami doświadczalnymi w wielu pracach [2.78], [2.310], [2.427], [2.541], [2.542]. Zaletą tego opisu jest możliwość stosowania rozwiniętych już metod matematycznych.

Przyjęcie modelu ciągłego jest szczególnie dogodnie do wyprowadzenia warunków statycznej dopuszczalności konfiguracji siatek cięgnowych oraz wyznaczenia optymalnych kształtów powierzchni i optymalnych kierunków ciągnięć na powierzchni /patrz rozdziały 9.3 i 9.4/.

9.2. Podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia

Poniżej zestawiono podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia siatek ciągnowych wyprowadzone w pracy [2.221] na podstawie nieliniowej teorii powłok [2.562] i stanowiące punkt wyjścia do sformułowania warunków statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej i aktualnej siatek ciągnowych wstępnie naprężonych.

Siatką ciągnową przyjęto nazywać dwuwymiarowe kontinuum materialne P określone w przestrzeni V_2 charakteryzujące się strukturą wewnętrzną determinowaną układem cięgien przenoszących tylko siły rozciągające, oraz naprężeniami początkowymi zapewniającymi zachowanie kinematycznej niezmienności układu.

Poniżej przedstawione podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia uwzględniają zarówno duże przemieszczenia jak i duże odkształcenia oraz nieliniowe związki fizyczne. Jednakże analogia z nieliniową teorią powłok jest możliwa tylko przy spełnieniu określonych warunków wynikających z przedstawionej powyżej definicji siatek ciągnowych. Z uwagi na szczególne właściwości siatek ciągnowych, analogia z nieliniową teorią powłok nie obejmuje równań konstytutywnych. Właściwości fizyczne siatek ciągnowych mogą zmieniać się w zależności od punktu i kierunku, zatem równania konstytutywne muszą mieć następującą postać

$$/2.65/ \quad T^{\alpha\beta} = \psi^{\alpha\beta}(x, G_\alpha, e_{\alpha\beta}, \dot{e}_{\alpha\beta})$$

z tym, że przy $e_{\alpha\beta} = 0$ zachodzić musi

$$/2.66/ \quad T^{\alpha\beta} = \psi^{\alpha\beta}(x, G_\alpha, 0, 0) = t^{\alpha\beta} \neq 0$$

Ponieważ siatki ciągnowe mogą przenosić tylko siły rozciągające zatem w układzie współrzędnych $\{\bar{X}^\alpha\}$ pokrywającym się z układem cięgien musi zachodzić /patrz Załącznik 2.1, rys. 2.21 b/

$$/2.67/ \quad T^{(\alpha)} = \frac{T^{\alpha\alpha}}{\sqrt{G}} G_\alpha \geq 0$$

oraz przy wszystkich dopuszczalnych obciążeniach sztywność siatki ciągnowej musi być różna od zera zgodnie z zależnością /2.1/

$$/2.68/ \quad J_e = J_e(z^a, \hat{t}^{(a)}, \rho_0, p_n) \neq 0$$

Poniżej zestawiono układ 18 równań z 18 niewiadomymi opisujący siatkę ciągnową w konfiguracji aktualnej P_n [2.221].

- równania równowagi:

$$/2.69a/ \quad T^{\alpha\beta} \nu_\alpha + P^\beta + \sqrt{J_3} \rho_0 F^\beta = \sqrt{J_3} \rho_0 a^\beta, \\ T^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} + P^3 + \sqrt{J_3} \rho_0 F^3 = \sqrt{J_3} \rho_0 a^3, \quad (\beta=1,2)$$

- związki geometryczne:

$$/2.69b/ \quad G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + 2e_{\alpha\beta}; \quad B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + 2c_{\alpha\beta}, \\ B_{[\alpha\|\beta]}^\sigma = 0; \quad R_{1212}^* = \frac{1}{2} G B_{\alpha\beta} B^{\beta\alpha} = B,$$

- równania kinematyczne:

$$/2.69c/ \quad \dot{e}_{\alpha\beta} = \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial t} = \frac{1}{2} (\dot{V}_\alpha v_\beta + \dot{V}_\beta v_\alpha + \dot{V}_\alpha v_k \dot{V}_\beta v^k),$$

- równania konstytutywne:

$$/2.69d/ \quad T^{\alpha\beta} = G^{\beta\gamma} \hat{G}_{\gamma\alpha} (\hat{t}^{\alpha\alpha} + \hat{\theta}^{\alpha\alpha}) \sqrt{J_3}^2$$

Przedstawiony powyżej układ równań został wyprowadzony przy następujących założeniach:

1. dopuszczalność modelu ciągłego;
2. prawa zachowania pędu, momentu pędu, energii określone są przez równania klasycznej dynamiki ciała stałego;
3. masę, energię i siły masowe dowolnej części Ośrodka \mathcal{P} , w dowolnej chwili t można wyrazić za pomocą całek:

$$M = \int_{\Omega} S(X^{\alpha}, \tau) d\Omega$$

$$/2.70/ \quad E = \int_{\Omega} E(\varphi^{\alpha\beta}, t^{\alpha\beta}, X^{\alpha}) d\Omega$$

$$F = \int_{\Omega} F(X^{\alpha}, \tau) d\Omega.$$

Dopuszczalność tego opisu jest uwarunkowana spełnieniem zależności $J_0 \neq 0$, na podstawie której w rozdziale 9,3 wyprowadzono warunki konieczne dopuszczalności układu równań /2.69/. Bowiem przy wyprowadzaniu równań /2.69/ uwzględniono jedynie by nie były one sprzeczne z warunkiem $J_0 \neq 0$.

Warunki graniczne

Zakładając chwilowo, że opis siatek ciągnowych za pomocą równań /2.69/ jest dopuszczalny, to w celu jednoznaczności musi być uzupełniony warunkami granicznymi.

1/ Warunki początkowe: Z uwagi na zmienną czasową, równania /2.69/ są rzędu co najwyżej drugiego. Ponieważ ruch jest rozpatrywany w odniesieniu do konfiguracji początkowej P_0 to na podstawie definicji tej konfiguracji można przyjąć następujące warunki początkowe

$$/2.71a/ \quad \left. \left(\frac{dR^k}{dt} \right) \right|_{t=0} = 0, \quad (R^k)_{t=0} = r$$

Przy rozpatrywaniu ruchu w odniesieniu do konfiguracji P_{n-1} zajmowanej przez ciało P w chwili $t_{n-1} > t_0$, warunki początkowe będą ogólniejszego typu:

$$/2.71b/ \quad \left. \left(\frac{dR^k}{dt} \right) \right|_{t=t_{n-1}} = (v^k)_{t=t_{n-1}}, \quad (R^k)_{t=t_{n-1}} = r^k_{t=t_{n-1}}$$

2/ Warunki brzegowe. Rząd układu równań /2.69/ ze względu na zmienne przestrzenne wynosi 6. Wykazać to można przez sprowadzenie układu równań /2.69/ do układu trzech równań przemieszczeniowych rzędu drugiego. Równań tych nie wypisano tutaj gdyż są zbyt rozbudowane i nie będą przydatne w dalszych rozważaniach.

a/ Warunki przemieszczeniowe. Warunki te należą do najczęściej stosowanych i najbardziej naturalnych przy rozpatrywaniu siatek ciągnowych i mają następującą postać

$$/2.71c/ \quad \left(R^K \right)_{X \in \Gamma} = r^K.$$

b/ Warunki naprężeniowe i mieszane. Warunki naprężeniowe nie wynikają w sposób naturalny z analizy siatek ciągnowych. W pewnych jednak przypadkach mogą wynikać z kształtowania konstrukcji podporowych i wtedy mają następującą postać

$$/2.71d/ \quad \left(\hat{T}^{\alpha\alpha} n_\alpha \right)_{X \in \Gamma} = \beta^\alpha(X) \quad - \text{dana funkcja}$$

Jednakże dwa warunki naprężeniowe dane na brzegu nie wystarczają do jednoznacznego rozwiązania układu równań /2.69/ i dlatego należy dodać jeszcze warunek przemieszczeniowy, otrzymując w rezultacie warunki mieszane w następującej postaci

$$/2.71e/ \quad \left(\hat{T}^{\alpha\alpha} n_\alpha \right)_{X \in \Gamma} = \beta^\alpha(X),$$

$$\left(W^3 \right)_{X \in \Gamma} = 0.$$

Układ równań /2.69/ wraz z warunkami granicznymi /2.71/ opisuje jednoznacznie zarówno zagadnienia statyczne jak i dynamiczne siatek ciągnowych z dowolnego materiału.

9.3. Konfiguracje statycznie dopuszczalne

Zagadnienie dopuszczalnych konfiguracji siatek ciągnowych wstępnie naprężonych było przedmiotem rozważań w następujących pracach [2.23], [2.40], [2.200], [2.214], [2.221], [2.224], [2.226], [2.306], [2.509]. Zagadnienie to obejmuje nie tylko analizę dopuszczalnych kształtów powierzchni utworzonych przez siatki ciągnowe ale również analizę dopuszczalnych układów ciągnięć na powierzchni.

Wyznaczenie konfiguracji statycznie dopuszczalnych jest szczególnie ważne nie tylko z uwagi na możliwość wyznaczenia sił wewnętrznych w siatkach ciągnowych ale także z uwagi na

technologię wykonywania przekryć wiszących. Poszukiwanie konfiguracji dopuszczalnych jest niezbędne zarówno przy projektowaniu przekryć wiszących o skomplikowanych kształtach powierzchni i linii brzegowej ale także przy projektowaniu stosunkowo prostych układów konstrukcyjnych. W pierwszym przypadku jest to oczywiste gdyż wynika w sposób naturalny przy ustalaniu geometrii siatki i wyznaczaniu sił wewnętrznych. Natomiast przy projektowaniu stosunkowo prostych przekryć wiszących zagadnienie wyznaczania dopuszczalnych konfiguracji bywa często pomijane. Prowadzi to jednak do przewymiarowania konstrukcji lub zanizenia bezpieczeństwa, a także może powodować znaczne trudności wykonawcze.

Konfiguracja początkowa. Przedstawione powyżej równania siatek ciągnowych /2.69/ i /2.71/ są ważne tylko wówczas gdy sztywność $J_0 \neq 0$, czyli w przypadku spełnienia następujących warunków

$$/2.72/ \quad \hat{t}^{\alpha\alpha} > 0 \quad \hat{T}^{\alpha\alpha} \geq 0$$

Warunek $\hat{t}^{\alpha\alpha} > 0$ ogranicza klasę dopuszczalnych konfiguracji początkowych, natomiast spełnienie warunku $\hat{T}^{\alpha\alpha} \geq 0$ jest podstawowym celem kształtowania siatek ciągnowych.

Przedstawiając równania równowagi /2.69a/ w układzie współrzędnych X i w konfiguracji początkowej P_0 , otrzymano

$$/2.73/ \quad \begin{aligned} t_{,1}^{11} + \left(2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) t^{11} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} t^{22} &= 0 \\ t_{,2}^{22} + \left(2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) t^{22} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{11} &= 0 \\ t_{,b}^{11} + t_{,b}^{22} &= 0 \end{aligned}$$

Konfiguracja P_0 może być dowolną gdyż trzy równania /2.73/ zawierają dwie niewiadome $t^{\alpha\alpha}$, a rozwiązanie musi spełniać warunek /2.72/₁. W dalszych rozważaniach przyjęto, że konfiguracja początkowa statycznie dopuszczalna P_0^s jest to taka konfiguracja początkowa P_0 określona co do kształtu i struktury wewnętrznej odwzorowaniem

$$z^a = z^a (x^1, x^2; t_0),$$

przy której układ równań równowagi /2.73/ nie jest sprzeczny a jego rozwiązanie spełnia warunek $\hat{t}^{\alpha\alpha} > 0$.

Zakładając $t^{\alpha\alpha} > 0$ z równania /2.73/₃ otrzymano warunki konieczne statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej

$$/2.74/ \quad P_0 = P_0^s \Leftrightarrow \left(\hat{X} : \{ X \in \Omega \Rightarrow b_{11} = b_{22} = 0 \vee b_{11} b_{22} < 0 \} \right).$$

Uwzględniając warunek $b_{11} b_{22} < 0$ we wzorze na krzywiznę Gaussa

$$K = \frac{b_{11} b_{22} - (b_{12})^2}{g},$$

oraz fakt, że zawsze $g > 0$, otrzymano $K < 0$. Stąd wniosek, że statycznie dopuszczalna konfiguracja początkowa może być określona tylko na powierzchniach o ujemnej krzywiznie Gaussa lub na płaszczyźnie. Natomiast przedstawiając warunki /2.74/ w następującej postaci

$$b_{11} = g_{11} \bar{\sigma}_1 = 0,$$

$$b_{22} = g_{22} \bar{\sigma}_2 = 0,$$

zauważono, że ponieważ $g_{\alpha\alpha} \neq 0$, więc krzywizny normalne muszą spełniać warunki

$$/2.75a/ \quad \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_2 = 0.$$

Powyższe warunki spełnione są na płaszczyźnie lub na sieci asymptotycznej istniejącej tylko na powierzchniach o ujemnej krzywiznie Gaussa. Eliminując z rozważań płaszczyznę można napisać pierwszy warunek statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej

$$/2.75/ \quad P_0 = P_0^s \Leftrightarrow \left(\hat{X} : \{ X \in \Omega \Rightarrow K(X) < 0 \} \right).$$

W wielu publikacjach warunek /2.75/ jest określany jako warunek dostateczny wstępnego naprężenia siatek cięgnowych.

Jednak jest to prawdą tylko w ramach teorii technicznej i w dodatku tylko przy spełnieniu warunków wyprowadzonych poniżej.

Zgodnie z twierdzeniem Eulera krzywizny normalne $\tilde{\sigma}_\alpha$ można wyrazić przez krzywizny główne k_α w następującej postaci

$$\tilde{\sigma}_1 = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha,$$

$$\tilde{\sigma}_2 = k_1 \cos^2(\alpha + \omega) + k_2 \sin^2(\alpha + \omega)$$

Przez α oznaczono tu kąt między kierunkiem głównym 1 a kierunkiem X^1 natomiast ω oznacza kąt między kierunkami cięgien na powierzchni. Rozpatrzono dwa przypadki położenia cięgien względem układu współrzędnych X^α : $\alpha=0$ oraz $\alpha \neq 0$.

- w przypadku $\alpha = 0$ otrzymano

$$\tilde{\sigma}_1 = k_1 > 0,$$

$$\tilde{\sigma}_2 = k_1 \cos^2 \omega + k_2 \sin^2 \omega,$$

$$|k_2| \sin^2 \omega > k_1 \cos^2 \omega \rightarrow \operatorname{tg}^2 \omega > -k_1/k_2.$$

- w przypadku $\alpha \neq 0$, z warunku:

$$\tilde{\sigma}_1 > 0 \quad \text{wynika} \quad \operatorname{tg}^2 \alpha < -k_1/k_2,$$

$$\tilde{\sigma}_2 < 0 \quad \text{wynika} \quad \operatorname{tg}^2(\alpha + \omega) > -k_1/k_2.$$

Stąd wniosek, że konfiguracja początkowa statycznie dopuszczalna P_0^s musi spełniać następujące warunki

$$\begin{aligned} /2.76/ \quad P_0 = P_0^s \Leftrightarrow \left(\hat{X} : \left\{ X \in \Omega \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \omega > -k_1/k_2 \text{ gdy } \alpha=0 \right. \right. \\ \left. \left. \vee \operatorname{tg}^2(\alpha + \omega) > -k_1/k_2 > \operatorname{tg}^2 \alpha \text{ gdy } \alpha \neq 0 \right\} \right) \end{aligned}$$

Tak więc dopiero ograniczenia /2.75/ i /2.76/ stanowią warunki konieczne i dostateczne statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej siatki ciągnowej rozważanej w ramach teorii technicznej.

W ramach teorii ogólnej są to bowiem tylko warunki konieczne, za wyjątkiem siatek asymptotycznych, przy których konfiguracja początkowa jest statycznie dopuszczalna na dowolnej powierzchni o ujemnej krzywiznie Gaussa. Jednakże, przyjmowanie układu cięgien pokrywających się z siecią asymptotyczną nie jest wskazane, gdyż wobec zerowych krzywizn normalnych, cięgna siatki pracują jak struny przy obciążeniach normalnych. Prowadzi to oczywiście do dużych wielkości sił wewnętrznych i przemieszczeń. Cięgna pokrywające się z siecią asymptotyczną mogą być stosowane tylko w celu wyrównania oddziaływań na konstrukcję podporową.

Warunki dostateczne statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej można wyprowadzić całkując układ równań /2.73/. Równanie /2.73₃/ spełnione jest tożsamościowo z uwagi na warunki /2.75a/. Natomiast równania /2.73/_{1,2} tworzą następujący układ równań

$$t^{11}_{,1} + \left[2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] t^{11} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} t^{22} = 0,$$

$$t^{22}_{,2} + \left[2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] t^{22} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} t^{11} = 0,$$

który ma rozwiązanie przy dowolnych wartościach $\hat{t}^{\alpha\alpha}$ danych wzdłuż charakterystyk pokrywających się liniami współrzędnych.

W ogólnym przypadku w celu wyznaczenia warunku dostatecznego statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej z równania /2.73/₃ obliczono $t^{22} = -b_{11}t^{11}/b_{22}$ i podstawiono do równań /2.73/_{1,2} otrzymując

$$\begin{aligned} /2.77a/ \quad \partial_1 t^{11} + \left[\partial_1 \ln g - \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{g_{11}}{g_{22}} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] t^{11} &= 0, \\ \partial_2 t^{11} + \left[\partial_2 \ln g - \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{g_{22}}{g_{11}} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \partial_2 \ln \frac{b_{11}}{b_{22}} \right] t^{11} &= 0. \end{aligned}$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym aby układ równań /2.77a/ był zupełnie całkownym jest tożsamościowe spełnienie następującego równania

$$\partial_2 \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{b_{11}}{b_{22}} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \right] - \partial_1 \left[\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{b_{22}}{b_{11}} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] = \partial_{12} \ln \frac{b_{11}}{b_{22}},$$

które można przedstawić także w skróconej postaci

$$/2.77b/ \quad \partial_2 \beta_1 - \partial_1 \beta_2 = \beta_3, \quad \text{gdzie } \beta_i = \beta_i / X^i$$

Można zatem napisać trzeci warunek statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej

$$/2.77/ \quad P_0 = P_0^s \Leftrightarrow \left(\bigwedge_X : \{ X \in \Omega \Rightarrow \partial_2 \beta_1 - \partial_1 \beta_2 - \beta_3 = 0 \} \right)$$

W rezultacie powyższych rozważań udowodniono, że konfiguracja początkowa P_0 jest konfiguracją statycznie dopuszczalną wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są równocześnie warunki /2.75/, /2.76/ i /2.77/.

Warunek /2.77/ spełniony jest także w przypadku gdy spełnione są następujące równania

$$/2.77c/ \quad b_{22} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + b_{11} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \\ b_{22} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + b_{11} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = \partial_2 \ln \frac{b_{11}}{b_{22}}.$$

Przy sprawdzaniu warunków statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej nieraz może być dogodniej skorzystać z układu warunków /2.75/, /2.76/ i /2.77c/, lecz wówczas zbiór rozwiązań dopuszczalnych zawarty jest w zbiorze rozwiązań określonych przez warunki /2.75/, /2.76/ i /2.77/.

Konfiguracja aktualna. Siatka ciągnowa o konfiguracji początkowej statycznie dopuszczalnej poddana działaniu obciążeń zewnętrznych przechodzi w konfigurację aktualną, która jest statycznie dopuszczalną gdy spełniony jest warunek $\hat{T}^{ak} \geq 0$; można zatem sformułować następujący warunek statycznej dopuszczalności konfiguracji aktualnej

$$/2.78/ \quad P_n = P_n^s \Leftrightarrow \left(\bigwedge_X : \{ X \in \Omega \Rightarrow \hat{T}^{ak} \geq 0 \} \right)$$

Warunki statycznej dopuszczalności konfiguracji aktualnej można wyznaczyć na podstawie rozwiązania układu równań równowagi wypisanych w konfiguracji aktualnej /2.69a/. Ograniczając rozważania do zagadnień statycznych, równania równowagi w konfiguracji aktualnej w układzie $\{X^e\}$ można przedstawić następująco

$$\begin{aligned} \partial_1 T^{11} + \left[\partial_1 \ln G - \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} \right] T^{11} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} T^{22} + P^1 &= 0, \\ /2.79/ \partial_2 T^{22} + \left[\partial_2 \ln G - \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} \right] T^{22} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} T^{11} + P^2 &= 0, \\ T^{11} B_{11} + T^{22} B_{22} + P^3 &= 0. \end{aligned}$$

Wprowadzając funkcję pomocniczą T określoną następującymi związkami:

$$/2.80a/ \quad T^{11} = /P+T/B_{22}, \quad T^{22} = /P-T/B_{11}, \quad P = -P^3/2B_{11}B_{22}$$

można równanie /2.79/₃ spełnić tożsamościowo, natomiast równania /2.79/_{1,2} przybierają postać

$$\begin{aligned} /2.80/ \quad \partial_1 T &= \left(\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} \frac{B_{11}}{B_{22}} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} - \partial_1 \ln G - \partial_1 \ln B_{22} \right) T - \\ &- \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} \frac{B_{11}}{B_{22}} - \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} + \partial_1 \ln G + \partial_1 \ln B_{22} \right) P + \frac{P^1}{B_{22}} - \partial_1 P, \\ \partial_2 T &= \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} \frac{B_{22}}{B_{11}} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} - \partial_2 \ln G - \partial_2 \ln B_{11} \right) T + \\ &+ \left(\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} \frac{B_{22}}{B_{11}} - \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} + \partial_2 \ln G + \partial_2 \ln B_{11} \right) P - \frac{P^2}{B_{11}} - \partial_2 P. \end{aligned}$$

Napisać je można w następującej postaci

$$\partial_1 T = A_{01} T - B_{01} P - \partial_1 P + P^1/B_{22}$$

$$\partial_2 T = A_{02} T - B_{02} P - \partial_2 P - P^2/B_{11}$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym aby układ równań /2.80/ był zupełnie całkowny jest tożsamościowe spełnienie następującego równania:

$$\begin{aligned} /2.81/ \quad T(\partial_2 A_{01} - \partial_1 A_{02}) + (A_{01} B_{02} - A_{02} B_{01}) P - \\ - A_{01}(\partial_1 P + P^1/B_{22}) + A_{02}(\partial_2 P + P^2/B_{11}) - \\ - (\partial_2 B_{01} - \partial_1 B_{02}) P - \partial_2 P^1 + \partial_1 P^2 = 0 \end{aligned}$$

Współczynnik T nie zależy od obciążenia, zatem warunek /2.81/ rozdzielić można na dwa warunki:

$$\partial_2 A_{01} - \partial_1 A_{02} = 0$$

$$\begin{aligned} /2.82/ \quad & (A_{01} B_{02} - A_{02} B_{01}) P - (\partial_2 B_{01} - \partial_1 B_{02}) P + \\ & + A_{02} (\partial_2 P + \frac{P^2}{G_{11}}) - A_{01} (\partial_1 P + \frac{P^1}{G_{22}}) - \partial_2 P^1 + \partial_1 P^2 = 0 \end{aligned}$$

Warunek /2.82/₁ jest analogiczny do warunku statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej /2.77/ zatem równanie /2.82/₂ ogranicza klasę dopuszczalnych obciążeń w konfiguracji początkowej.

Jeżeli równanie /2.81/ jest spełnione tożsamościowo, to rozwiązanie układu /2.80/ przedstawić można w następującej postaci:

$$/2.83/ \quad T = C_0 + \exp A \int [\int (\partial_1 B_{02} - A_{01} B_{02}) P \exp(-A) dX^1] dX^2,$$

$$\text{gdzie } A = \int A_{01} dX^1$$

Na podstawie powyższego rozwiązania można stwierdzić, że warunek $T^{\alpha\alpha} > 0$ może być zawsze spełniony ponieważ rozwiązanie należy od stałej C_0 , którą można dobrać w zależności od wielkości T danych na charakterystykach.

Można również zauważyć, że poszukiwanie rozwiązań optymalnych sprowadzić można do minimalizacji funkcjonału /funkcji/ zależnego od wielkości B_{11} , B_{22} przy ustalonych wartościach parametrów T i P . Funkcjonał ten nie będzie zależał jawnie od X^α i $G_{\alpha\beta}$.

Jeżeli równanie /2.81/ nie jest spełnione tożsamościowo, to można wyznaczyć T jako funkcję obciążenia i parametrów geometrycznych konfiguracji aktualnej

$$\begin{aligned} /2.84a/ \quad T = & \frac{(A_{01} B_{02} - A_{02} B_{01} - \partial_2 B_{02} + \partial_1 B_{01}) P +}{\partial_2 A_{01} - \partial_1 A_{02}} \\ & - \frac{A_{01} (\partial_1 P + \frac{P^1}{B_{22}}) + A_{02} (\partial_2 P + \frac{P^2}{B_{11}}) - \partial_2 P^1 + \partial_1 P^2}{\partial_2 A_{01} - \partial_1 A_{02}} \end{aligned}$$

Warunek statycznej dopuszczalności konfiguracji aktualnej określony jest wówczas następującymi zależnościami

$$\begin{aligned} T^{11} &= (P + T) B_{22} > 0 \\ /2.84b/ \quad T^{22} &= (P - T) B_{11} > 0 \end{aligned}$$

Przyjmując $B_{11} > 0$, a więc $B_{22} < 0$ otrzymano

$$- P^3 + 2 B_{11} B_{22} T > 0$$

$$- P^3 - 2 B_{11} B_{22} T \geq 0$$

W przypadku $T^{22} = 0$ otrzymano warunek graniczny:

$$/2.84/ \quad T \geq \frac{P^3}{2B_{11} B_{22}}$$

Można więc napisać warunek statycznej dopuszczalności konfiguracji aktualnej $P_n = P_n^s$ w następującej postaci

$$/2.85/ \quad P_n = P_n^s \iff \left(\bigwedge_X \wedge_P : \left\{ \begin{array}{l} X \in \Omega \\ P \in P \end{array} \right\} \Rightarrow (2.82) \vee (2.84) \right)$$

Przykłady konfiguracji statycznie dopuszczalnych

a/ Konfiguracje P_0^s wyznaczone na ustalonej powierzchni.

W oparciu o wyniki otrzymane w pracach [2.221] i [2.308] przedstawiono poniżej bez dowodów wnioski umożliwiające określenie konfiguracji początkowych statycznie dopuszczalnych na powierzchniach o ujemnej krzywiznie Gaussa.

1/ Dla dowolnej jednoparametrowej rodziny krzywych można zawsze wyznaczyć drugą rodzinę krzywych tak aby $P_0 = P_0^s$.

2/ Istnieje zawsze co najmniej jedna sieć ortogonalna dla której konfiguracja początkowa jest konfiguracją statycznie dopuszczalną.

3/ Warunkiem koniecznym i dostatecznym statycznej dopuszczalności konfiguracji utworzonej przez sieć linii krzywizn głównych powierzchni jest aby przy odwzorowaniu sferycznym sieć ta była izotermiczną /sieć Bonneta/.

4/ W przypadku sieci utworzonej z płaskich krzywych warunkiem koniecznym i dostatecznym aby konfiguracja początkowa była konfiguracją statycznie dopuszczalną jest spełnienie zależności /2.76/.

5/ Na powierzchni minimalnej konfiguracja początkowa utworzona przez linie krzywizn głównych jest zawsze statycznie dopuszczalna.

b/ Konfiguracje P_0^g wyznaczone przy ustalonym typie sieci.

Na podstawie powyższych wniosków można wykazać następujące, dotyczące konfiguracji statycznie dopuszczalnych przy ustalonym typie sieci, mianowicie:

6/ Sieć ortogonalna na której konfiguracja początkowa jest statycznie dopuszczalna może być wyznaczona /co najmniej jedna/ na każdej powierzchni o ujemnej krzywiznie Gaussa.

8/ Sieć z płaskich krzywych spełniająca warunki /2.76/ jest konfiguracją statycznie dopuszczalną na każdej powierzchni o ujemnej krzywiznie Gaussa.

8/ Każda sieć półgeodezyjna jest statycznie dopuszczalna na powierzchniach stopnia drugiego o ujemnej krzywiznie Gaussa.

9/ Sieć linii krzywizn głównych, sieć półgeodezyjna i sieć z płaskich krzywych, określone na powierzchniach stopnia drugiego o ujemnej krzywiznie Gaussa i spełniające warunki /2.76/ są statycznie dopuszczalne.

Pomijając dalszą szczegółową analizę wniosków wynikających z warunków statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej i aktualnej należy jednak zwrócić uwagę, że nie spełnienie ich uniemożliwia traktowanie siatki cięgnowej jako ciała odkształcalnego. Pojęcie konfiguracji statycznie dopuszczalnych jest związane z własnościami mechanicznymi rzeczywistego ośrodka i pozostaje ważne zarówno w modelu ciągłym jak i dyskretnym.

9.4. Konfiguracje o największej sztywności i najmniejszym ciężarze

Konfiguracja początkowa. Zakładając $P_0 = P_0^s$, rozwiązanie układu równań /2.73/ można przedstawić następująco:

$$t^{11} = \frac{Ce^s}{g}, \quad t^{22} = \frac{b_{11}}{b_{22}} t^{11} = - \frac{b_{11}}{b_{22}} \frac{Ce^s}{g}$$

$$/2.86/ \quad s = \int \left[\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \frac{b_{11}}{b_{22}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] dx^1$$

Wobec powyższego założenia, wyznaczenie konfiguracji początkowej sprowadza się do rozwiązania układu równań zupełnie całkowalnego /2.77a/.

Oznaczając $t=Ce^s$ otrzymano $t^{11} = t/g$, $t^{22} = -b_{11}t/b_{22}g$ przy czym t określone jest przez warunki graniczne dla t^{11} lub t^{22} .

Celem wstępnego naprężenia siatek cięgnowych jest uzyskanie odpowiedniej sztywności konstrukcji. Maksymalną efektywność wstępnego naprężenia jest równoznaczna z maksymalną sztywnością i zależy od układu cięgien na powierzchni. Optymalny układ cięgien przy ustalonej wielkości t można wyznaczyć z warunku

$$\max (t^{11} + t^{22}) = \left(1 - b_{11}/b_{22}\right) \frac{t}{g}$$

Oznacza to, że $t^{11} + t^{22}$ osiąga maksimum gdy b_{11}/b_{22} osiąga minimum. Przedstawiając te wielkości zgodnie z wzorami Eulera

$$b_{11} = g_{11} \bar{\sigma}_1 = g_{11} (k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha)$$

$$b_{22} = g_{22} \bar{\sigma}_2 = g_{22} [k_1 \cos^2 (\alpha + \omega) + k_2 \sin^2 (\alpha + \omega)]$$

sformułować można następujący problem ekstremalny

Należy wyznaczyć α_0 i ω_0 takie aby $F/\alpha_0, \omega_0/ = \min F/\alpha, \omega/$,

$$F/\alpha, \omega/ = \frac{g_{11} (k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha)}{g_{22} [k_1 \cos^2 (\alpha + \omega) + k_2 \sin^2 (\alpha + \omega)]}$$

Warunki ekstremum funkcji prowadzą do następującego rozwiązania

$$/2.87/ \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \omega} = 0, \quad \alpha + \omega = \pi/2 \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \alpha = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \omega = \pi/2$$

Podstawiając optymalne parametry /2.87/ do zależności /2.86/ otrzymano

$$/2.88/ \quad s = \int \frac{1}{2g_{22}} \partial_1 g^{22} \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) dx_1$$

$$t^{11} = t/g, \quad t^{22} = -k_1 t/k_2 (g_{22})^2, \quad t = Ce^s,$$

natomiast w przypadku powierzchni stopnia drugiego

$$t = C \exp \left[\frac{1}{2} \frac{(k_2 - k_1)}{k_2} \right]$$

Przedstawiając minimalizowany funkcjonal w postaci

$$/2.89/ \quad F(z^3) = \int_{\Sigma} (t^{11} + t^{22}) \sqrt{g} dx^1 dx^2,$$

widać od razu, że problem wariacyjny prowadzi do klasycznego zagadnienia Plateau, którego rozwiązaniem jest powierzchnia minimalna.

Na podstawie rozwiązania /2.87/ oraz /2.89/ sformułować można następujące wnioski:

1/ maksymalną efektywność wstępnego naprężenia przy danych warunkach granicznych otrzymuje się przyjmując kierunki cięgien identyczne z kierunkami linii krzywizn głównych,

2/ przyjmując układ cięgien pokrywający się z liniami krzywizn głównych oraz przy danych geometrycznych warunkach brzegowych, minimalny ciężar siatki cięgnowej otrzymuje się określając konfigurację początkową na powierzchni minimalnej.

Wyznaczona w ten sposób konfiguracja początkowa zgodnie z wnioskiem 5 w rozdziale 9.3 jest statycznie dopuszczalna, a więc założenie wyjściowe $P_0 = P_0^B$ zostało spełnione.

Konfiguracja aktualna. Pozostając w dalszym ciągu przy zagadnieniach statycznych, analogicznie jak w przypadku konfiguracji początkowej można na danej powierzchni wyznaczyć optymalną konfigurację aktualną oraz wykazać następujący wniosek.

3/ konfiguracja aktualna utworzona przez linie krzywizn głównych jest optymalna przy obciążeniu normalnym oraz przy dowolnym obciążeniu ciągłym spełniającym tożsamościowo równanie /2.81/.

Poniżej przedstawiono warunki dostateczne optymalnego rozwiązania z uwagi na minimum ciężaru cięgien nośnych i naprężających. Zgodnie z zależnościami /2.80a/ można napisać

$$T^{11} = (P+T)B_{22} \quad T^{22} = (P-T)B_{11}$$

Ponieważ $B_{11} > 0$, $B_{22} < 0$, $P^3 < 0$,

więc podstawiając

$$P = - \frac{P^3}{2B_{11}B_{22}},$$

otrzymano

$$T^{11} = \frac{|P^3|}{2B_{11}} - |B_{22}| T, \quad T^{22} = - \frac{|P^3|}{2|B_{22}|} - B_{11}T.$$

Wobec tego, że $T^{22} \geq 0$, to

$$|T| \geq \frac{|P^3|}{2|B_{22}|}$$

i wówczas

$$T^{11} = \frac{|P^3|}{2B_{11}} + |B_{22}| T, \quad T^{22} = B_{11}|T| - \frac{|P^3|}{2|B_{22}|}.$$

$$/2.90a/ \quad T = \frac{T^{22}}{B_{11}} + \frac{|P^3|}{2B_{11}|B_{22}|}$$

Na podstawie zależności /2.90a/ przy danej powierzchni można sformułować następujący wniosek

4/ warunek dostateczny optymalnego rozwiązania z uwagi na minimum ciężaru siatki ciągnowej ma następującą postać

$$/2.90/ \quad T^{22} = 0 \quad \text{przy} \quad P = P_{\max}.$$

Rozwiązanie spełniające warunek /2.90/ istnieje gdy spełnione jest następujące równanie

$$/2.90b/ \quad \partial_1 P^3 + P^3 \partial_1 \ln \frac{k_1}{\sqrt{G_{22}}} + P^1 = 0.$$

Natomiast przy obciążeniu normalnym, rozwiązanie spełniające warunek /2.90/ istnieje tylko wówczas gdy $\{\hat{X}^k\}$ jest układem półgeodezyjnym.

Na podstawie zależności

$$T^{11} = \frac{1}{B_{11}} \left(|B_{22}| T^{22} + |P^3| \right)$$

można sformułować następujący wniosek

5/ warunkiem dostatecznym spełnienia zależności $T^{11} = \min_{Z^k} T^{11}$ jest

$$/2.91/ \quad B_{22} = 0 \wedge B_{11} = G_{11} k_1$$

Przy danym kształcie konturu jest bowiem

$$B_{11} = \max_{Z^k} B_{11} \Leftrightarrow B_{22} = 0 \wedge B_{11} = G_{11} k_1$$

i wobec tego słuszne są warunki /2.91/.

Zestawienie wniosków z analizy właściwości siatek ciągnowych

Przedstawione powyżej rozważania dotyczyły analizy właściwości siatek ciągnowych zbudowanych z dowolnego materiału, o dowolnej geometrii przekrycia oraz bez ograniczania wielkości odkształceń, przemieszczeń i rodzaju obciążeń. Na podstawie powyższych rozważań można sformułować następujące wskazówki, które mogą być przydatne przy kształtowaniu i projektowaniu siatek ciągnowych.

¹⁰ Z uwagi na zapewnienie odpowiedniej sztywności $J_e \neq 0$, konfiguracje siatek ciągnowych nie mogą być dowolne.

Zbiór dopuszczalnych konfiguracji siatek ciągnowych ograniczony jest do zbioru konfiguracji statycznie dopuszczalnych.

- 2^o Zbiór konfiguracji początkowych statycznie dopuszczalnych P_0^S określony jest warunkami /2.75, 2.76, 2.77/. Pierwszy z nich dotyczy tylko geometrii zewnętrznej, a trzeci tylko geometrii wewnętrznej V_2 . Natomiast warunek /2.76/ ogranicza wzajemne zależności pomiędzy geometrią zewnętrzną i wewnętrzną.
- 3^o Zbiór konfiguracji aktualnych statycznie dopuszczalnych P_n^S określony jest warunkami /2.81/ lub /2.85/. Zbiory definiowane przez te warunki są rozdzielne.
- 4^o Statyczna dopuszczalność wszystkich rozważanych konfiguracji jest warunkiem koniecznym aby siatka cięgnowa mogła być traktowana jako ciało odkształcalne.
- 5^o Analiza statycznej dopuszczalności konfiguracji siatek cięgnowych powinna stanowić nieodzowny element w projektowaniu tych konstrukcji.
- 6^o W zbiorze konfiguracji dopuszczalnych istnieją konfiguracje, których przyjęcie pozwala na racjonalne zaprojektowanie przekrycia. Przykłady takich konfiguracji określić można na podstawie wniosków 1 - 5 podanych w rozdziale 9.3.

9.5. Teoria techniczna siatek cięgnowych

W pracy [2.221] pokazano przejście od teorii ogólnej siatek cięgnowych do teorii przybliżonych przez wprowadzenie coraz to silniejszych założeń odnośnie geometrii, deformacji i obciążeń siatek cięgnowych. W oparciu o pracę [2.221] poniżej przedstawiono przejście do teorii technicznej w ramach której następnie w rozdziale 9.6 i 9.7 sformułowano zagadnienie kształtowania i optymalizacji siatek cięgnowych.

Podstawowym założeniem przyjmowanym w teorii technicznej jest traktowanie powierzchni na której rozpięta jest siatka cięgnowa jako powierzchni małowyniosłej. Pozwala to utożsamić geometrie sieci na powierzchni z geometrią jej rzutu na płaszczyznę, obciążenie pionowe z normalnym, siły w cięgnach z ich składowymi poziomymi.

Dalsze rozważania ograniczono do zakresu sprężystego gdyż siatki ciągnowe najczęściej wykonywane są z cięgien stalowych o wysokiej wytrzymałości. W ramach teorii technicznej przy uwzględnieniu

$$q_{11} = q_{22} = 1, \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right\} = 0,$$

układ równań /2.69/ można przedstawić w następującej postaci

$$\partial_1 T^{11} + P^1 = 0$$

$$\partial_2 T^{22} + P^2 = 0$$

$$/2.92/ \quad T^{11}(\zeta_1 + \partial_{11} w_3) + T^{22}(\zeta_2 + \partial_{22} w_3) + P^3 = 0$$

$$T^{11} = t^{11} + E \left[\partial_1 w_1 + \frac{1}{2} (\partial_1 w_3)^2 - \zeta_1 w_3 \right]$$

$$T^{22} = t^{22} + E \left[\partial_2 w_2 + \frac{1}{2} (\partial_2 w_3)^2 - \zeta_2 w_3 \right]$$

Ponieważ większość obliczeń dotyczących siatek ciągnowych wykonywana jest z konieczności w ramach teorii technicznej, warto ocenić błąd wynikający z przyjmowanych tu założeń. Błąd ten zależy oczywiście zarówno od powierzchni jak i typu siatki. Biorąc przykładowo sieć utworzoną z płaskich krzywych określoną na powierzchni: $z = \frac{1}{4L} (x^2 - y^2)$, co pozwala traktować poszczególne cięgna jako cięgna o małych zwisach, otrzymano

$$g_{11} = 1 + (\partial_x z)^2 = 1 + 0,25 \left(\frac{x}{L}\right)^2, \quad g_{12} = \partial_x z \partial_y z = -0,25 \frac{x \cdot y}{L^2}$$

$$g_{22} = 1 + (\partial_y z)^2 = 1 + 0,25 \left(\frac{y}{L}\right)^2, \quad g = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 = 1 + 0,25 \cdot$$

$$\cos \omega = \frac{-0,25 \cdot xy}{L^2 \sqrt{1 + 0,25 (x^2 + y^2) / L^2}}, \quad \frac{(x^2 + y^2)}{L^2},$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0,5 \cdot x / 2gL \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0,5y / 2gL ;$$

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{0,125 (xy^2 - x^2y)}{2L^3 g}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{0,125 (x^2y - xy^2)}{2L^3 g}$$

Z analizy powyższych wzorów wynika, że założenia teorii technicznej spełnione są tylko przy $x=y=0$, natomiast maksymalny błąd występuje przy $x=y=\pm 0,5L$ i wynosi

$$g_{11}=g_{22}=1.0625 (1), \quad g_{12}=-0.0625 (0),$$

$$g = 1.125 (1), \quad \cos \omega = -0.06 (0), \quad \omega = 86^\circ (90^\circ),$$

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.111 (0), \quad \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.052 (0).$$

Porównując wyniki obliczeń otrzymane na podstawie nieliniowej teorii siatek ciągnowych z wynikami otrzymanymi na podstawie założeń teorii technicznej /wielkości w nawiasach/ można stwierdzić, że dokładność teorii technicznej jest wystarczająca co najwyżej do obliczeń statycznych gdyż przy całkowaniu równań równowagi w całym obszarze siatki ciągnowej błędy podlegają uśrednieniu. Należy również brać pod uwagę fakt, że równania /2.92/ są poprawne tylko przy obciążeniach "prawie równomiernych", przy których przemieszczenia $u, v \ll w$.

Należy również pamiętać, że jakkolwiek w ramach teorii technicznej mała wyniosłość powierzchni i proste układy cięgien umożliwiają uproszczenia w analizie statycznej oraz warunki statycznej dopuszczalności spełnione są tożsamościowo na powierzchniach o ujemnej krzywiznie Gaussa, to jednak przybliżone ustalanie parametrów konfiguracji początkowej nie jest wskazane gdyż nawet niewielkie rozbieżności, nieistotne przy wyznaczaniu sił, powodują znaczne trudności przy montażu siatek ciągnowych ponieważ tutaj błędy sumują się.

Przybliżone spełnienie warunków statycznej dopuszczalności konfiguracji początkowej spowoduje, że siatka ciągnowa podczas wstępnego naprężania zajmie jakąś konfigurację początkową różną od projektowanej. W rezultacie nastąpi zmiana rozkładu sił wewnętrznych i zdeformowanie regularnego układu cięgien oraz zaburzenia w regularności powierzchni przekrycia.

Spełnienie warunków statycznej dopuszczalności nawet w sposób ścisły ale tylko w konfiguracji początkowej również nie jest wystarczające gdyż przy pewnych układach obciążeń

może wystąpić utrata kinematycznej niezmienności ustroju /naj-
częściej lokalna/ prowadząca do falowania lub łopotania powie-
rzchni przekrycia.

A zatem, tylko dokładne spełnienie warunków statycznej
dopuszczalności w konfiguracji początkowej i aktualnej za-
pobiega utracie kinematycznej niezmienności i pozwala trakto-
wać siatkę ścięgową jako ustrój odkształcalny.

Przyjmując tradycyjne oznaczenia stosowane w teorii tech-
nicznej siatek ścięgowych [2.92], mianowicie

$$w_1 = u, w_2 = v, w_3 = w, z^1 = x, z^2 = y, z^3 = z$$

oraz podstawiając $T^{\alpha\alpha} = T_\alpha$ i $\sigma_\alpha = \frac{\partial^2 z}{\partial x^{\alpha 2}}$ a także

- w konfiguracji początkowej

$$t_1 = H_{10}, \quad t_2 = H_{20},$$

- w konfiguracji aktualnej

$$T_1 = H_{11}, \quad T_2 = H_{21}, \quad P^1 = q_x, \quad P^2 = q_y, \quad P^3 = q_z, \quad z = z_0 + w,$$

równania równowagi w konfiguracji aktualnej /2.92/ _{1,2,3}
można napisać w następującej postaci

$$\frac{\partial H_{11}}{\partial x} + q_x = 0,$$

/2.93/
$$\frac{\partial H_{21}}{\partial y} + q_y = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(H_{11} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(H_{21} \frac{\partial z}{\partial y} \right) + q_z = 0.$$

Pod działaniem tylko obciążenia pionowego powyższe rów-
nania można jeszcze bardziej uprościć gdyż $H_{11} = \text{const}$, $H_{21} = \text{const}$,
stąd

/2.94/
$$H_{11} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + H_{21} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + q_z = 0$$

Równania równowagi /2.93/ można wyprowadzić również rozpatrując bezpośrednio stan równowagi elementarnego elementu powierzchni niewyniosłej [2.92], [2.162], [2.439], [2.475] .

Natomiast równania odkształcalności ciągłych obu kierunków można wyprowadzić analogicznie jak w przypadku ciągłych pojedynczych

$$\begin{aligned}
 H_{11} - H_{10} &= \frac{EA_1}{S_1} \left[\Delta u + \int_{x_1} \frac{dz_0}{dx} \frac{dw}{dx} dx + \frac{1}{2} \int_{x_1} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx \right], \\
 /2.95/ \quad H_{21} - H_{20} &= \frac{EA_2}{S_2} \left[\Delta v + \int_{y_2} \frac{dz_0}{dy} \frac{dw}{dy} dy + \frac{1}{2} \int_{y_2} \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 dy \right].
 \end{aligned}$$

Układ równań /2.94/ i /2.95/ opisujący stan naprężenia i odkształcenia siatki cięgnowej mimo znacznych uproszczeń teorii technicznej nie ma rozwiązania analitycznego w formie zamkniętej. Istnieje jednak szereg metod przybliżonych, umożliwiających numeryczne rozwiązanie tych równań, przy czym dokładność rozwiązań mieści się w wymaganiach stawianych obliczeniom inżynierskim. Dwie z nich przedstawiono w pracy [2.227]

Koncepcja pierwszej metody przybliżonej [2.308] polega na zakładaniu postaci funkcji aproksymującej funkcję przemieszczenia pionowego $w = w(x, y)$.

Zadawalającą dokładność wyników uzyskuje się tu jednak na ogół tylko w przypadku obciążeń jakościowo równoważnych tzn. o identycznym rozkładzie. Przy tych obciążeniach można łatwo dobrać odpowiednią funkcję aproksymującą przemieszczenia. Na ogół można ją nawet określić z dokładnością do stałego parametru. W przypadku innych obciążeń konieczną może się okazać metoda kolejnych prób. Nie musi się ona jednak okazać zbieżną. Dlatego wówczas wynik pierwszego przybliżenia należy raczej traktować jako rozwiązanie wstępne do metody małego parametru podanej w pracy [2.92], która charakteryzuje się szybką zbieżnością procesu obliczeniowego.

Z innych metod na szczególne podkreślenie zasługuje metoda zaproponowana przez L.G. Dmitriewa i A.V. Kasiłowa [2.92]. Metoda ta, nazywana metodą sprowadzania obciążenia do obciążenia równoważnego, pozwala stosunkowo szybko i dokładnie określić przemieszczenia i siły wewnętrzne ustroju. Oparta ona jest na założeniu, że w przypadku obciążenia równoważnego można pominąć wyrazy nieliniowe, przy czym dokładność rozwiązania będzie taka jak w przypadku zwykłych konstrukcji budowlanych. Przez obciążenie równoważne rozumiane jest tu takie obciążenie, które nie powoduje zmian kinematycznych siatki cięgnowej, a przemieszczenia ustroju są wywoływane jedynie odkształceniami sprężystymi.

Jeżeli obciążenie nie jest rodzajem obciążenia równoważnego, to rozwiązanie siatki cięgnowej można sprowadzić do rozwiązania innej siatki cięgnowej, przy której powyższe obciążenie będzie równoważne, dokonując przy tym stosunkowo prostego formalnego przekształcenia. Metoda ta jest dokładnie omówiona i zilustrowana przykładami liczbowymi w pracy [2.92]. W pracach [2.48], [2.49], [2.374], [2.409] przyjęto energetyczny sposób rozwiązywania ustrojów cięgnowych, którego podstawą jest minimalizacja energii potencjalnej układu, natomiast niewiadomymi są przemieszczenia węzłów siatki cięgnowej.

Podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia siatek cięgnowych przedstawione powyżej są podstawą do sformułowania zagadnienia kształtowania siatek cięgnowych wstępnie naprężonych.

9.6. Sformułowania zagadnienia kształtowania

Zagadnienie kształtowania odgrywa w projektowaniu siatek cięgnowych ważną rolę. Siatka cięgnowa jako ustrój musi być kinematycznie niezmienna, a więc należy ją tak ukształtować by spełniony był warunek /2.1/. Zagadnienie kształtowania siatek cięgnowych było rozważane wcześniej w pracach [2.40] [2.200] [2.214] [2.219] [2.221] [2.224] [2.226] [2.509]. Zagadnienie kształtowania wobec występowania naprężeń początkowych formułowane być musi tu w odniesieniu do co najmniej dwóch

konfiguracji. Liczba uwzględnianych konfiguracji zależy od ekstremalnych stanów obciążenia /patrz rozdz. 6.3/.

Ograniczając się do dwóch konfiguracji oraz pozostając w ramach teorii technicznej siatka cięgnowa może być opisana następującym układem równań:

$$H_{10} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + H_{20} \frac{\partial^2 z_0}{\partial y^2} = 0$$

$$/2.96/ \quad H_{11} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + H_{21} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + q(x, y) = 0$$

$$(H_{11} - H_{10}) \frac{l_1}{A_1 E} = \frac{1}{2} \int_{l_1} \left[\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 \right] dx$$

$$(H_{21} - H_{20}) \frac{l_2}{A_2 E} = \frac{1}{2} \int_{l_2} \left[\left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial z_1}{\partial y} \right)^2 \right] dy$$

W powyższych równaniach pominięto przemieszczenia poziome podpór. Równania /2.96/ mogą być traktowane jako statyczne warunki optymalizacji. Oprócz nich muszą być uwzględnione jeszcze warunki wytrzymałościowe:

$$/2.97/ \quad A_1 \geq H_{11} / \bar{\sigma}_d, \quad A_2 \geq H_{20} / \bar{\sigma}_d,$$

warunki związane ze sztywnością chwilową ustroju

$$/2.98/ \quad H_{ij} > 0,$$

oraz warunki określające statyczną dopuszczalność jednej z rozważanych konfiguracji, które ogólnie napisano w postaci

$$/2.99/ \quad P_0(z_0, \alpha, \beta) = P_0^s$$

Zależności /2.96-2.99/ stanowią zbiór koniecznych warunków kształtowania siatek ciągnowych, opisywanych równaniami, teorii technicznej. Ostatni warunek /2.99/ w ramach teorii technicznej może być zawsze spełniony. Warunek wyrównania naprężeń $\partial H_p / \partial x = 0$ jest tu również spełniony na mocy założeń teorii technicznej.

Oprócz powyższych koniecznych warunków kształtowania, w praktyce projektowej często należy uwzględnić szereg dodatkowych warunków determinowanych względami:

- konstrukcyjnymi np. warunek określający typ siatki,
- eksploatacyjnymi, np. warunek ograniczający wielkość przemieszczeń,
- architektonicznymi, np. warunki określające kształt powierzchni i konturu lub ich parametry geometryczne,
- wynikającymi z optymalizacji konstrukcji podporowej, np. warunki ograniczające rozkład lub wielkość zmian oddziaływań konstrukcji przekrycia na podpory.

Zadanie kształtowania siatek ciągnowych można więc sformułować następująco: należy wyznaczyć taką konfigurację początkową siatki, tj. kształt powierzchni i typ siatki, a także takie siły wstępnego naprężenia i przekroje ciągien, by spełnione były konieczne i ewentualnie dodatkowe warunki kształtowania.

Jeżeli dodatkowo określimy kryterium optymalizacji, to zadanie optymalnego kształtowania siatek będzie polegało na tym, by wyznaczone powyżej wielkości równocześnie minimalizowały funkcjonal lub funkcję celu - określone na podstawie kryterium optymalizacji.

Zagadnienie optymalnego kształtowania siatek ciągnowych w powyższym sformułowaniu, nawet rozważane w ramach teorii technicznej, prowadzi do złożonych zagadnień ekstremalnych. Decyduje o tym charakter operatorów występujących zarówno w funkcji celu, jak i w ograniczeniach, zwykle są to nieliniowe operatory różniczkowe i różniczkowo-całkowe o pochodnych częstkowych.

Rozwiązywanie takich zadań, przy aktualnym stanie teorii zadań ekstremalnych, nastrocza znaczne trudności. Dlatego też przy rozwiązywaniu zagadnień projektowych często rzeczą konieczną staje się ograniczenie rozważań do kształtowania siatek rozumianego jak wyżej, lecz bez optymalizacji. Uzyskanie rozwiązania racjonalnego może w tym przypadku ułatwić wykorzystanie wyników częściowych analiz optymalizacyjnych przedstawionych w rozdziale 9.4.

Przedstawiony poniżej tok postępowania przy kształtowaniu siatek ciągnowych wstępnie naprężonych pozwala na uzyskanie rozwiązania spełniającego konieczne warunki kształtowania. Rozwiązanie nazwano "częściowo optymalnym", jeśli do warunków kształtowania dołączyć warunki częściowej optymalizacji wymienione wyżej.

Tok postępowania przy kształtowaniu siatek ciągnowych, ilustrowany dalej na przykładzie, można ująć w następujący schemat:

1/ określenie obciążeń i konfiguracji P_n właściwych przy rozpatrywanym zadaniu projektowym /rozdział 6.3/;

2/ określenie postulatów; konstrukcyjnych, technologicznych, eksploatacyjnych, architektonicznych i optymalizacyjnych, determinujących warunki kształtowania;

3/ wyprowadzenie warunków określających statyczną dopuszczalność konfiguracji początkowej przy uwzględnieniu warunków kształtowania;

4/ sformułowanie zagadnienia kształtowania siatki ciągnowej z ewentualnym uwzględnieniem warunków "częściowej optymalizacji" przedstawionych w rozdziale 9.4.

5/ ewentualne przyjęcie kryterium kształtowania, sformułowanie zadania ekstremalnego i wyprowadzenie warunków określających rozwiązanie optymalne;

6/ rozwiązanie, na ogół przy pomocy metod numerycznych, układu równań wyprowadzonego w punkcie 5;

7/ wyznaczenie konfiguracji wstępnej i dokładnej geometrii konfiguracji początkowej.

Przykład 2.3. Przedmiotem kształtowania jest siatka cięgnowa stanowiąca konstrukcję nośną przekrycia obiektu przedstawionego na rys. 2.17. Przyjęto: $E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_d = 10^4 \text{ kg/cm}^2$ oraz odległość pomiędzy cięgnami $l_c = 3 \text{ m}$, $a = 30 \text{ m}$.

1/ Określenie obciążeń i konfiguracji P^n

Obciążenie stałe $q = 200 \text{ kg/m}^2$.

Obciążenia zmienne:

- obciążenie śniegiem $p_1 = 80 \text{ kg/m}^2$.

- obciążenie wiatrem:

parcie wiatru $p_2 = 60 \text{ kg/m}^2$,

ssanie wiatru $p_4 = -180 \text{ kg/m}^2$;

ekstremalne stany obciążenia:

- przy P_1 : $q_1 = q + p_1 + p_2 = 340 \text{ kg/m}^2$,

- przy P_2 : $q_2 = q + p_4 = 200 - 180 = 20 \text{ kg/m}^2$.

Ponieważ $q_2 > 0$, więc kształtowanie należy przeprowadzić w odniesieniu do dwóch konfiguracji.

2/ Sformułowanie warunków kształtowania

Jako dodatkowe warunki kształtowania przyjęto warunki wynikające z postulatów technologicznych, mianowicie przyjęto siatkę z płaskich krzywych

$$z^1 = z^1(x), \quad z^2 = z^2(y),$$

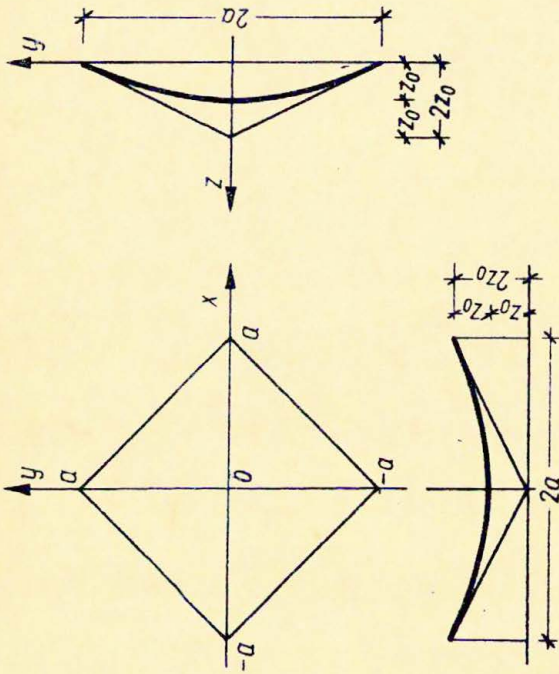
Rozpatrzono dwa warianty kształtowania. W wariacie 1 jako konfigurację początkową przyjęto powierzchnię minimalną określoną przez formę obiektu, a więc $\partial^2 z_0 / \partial x^2 = -\partial^2 z_0 / \partial y^2$.

W wariacie 2 natomiast przyjęto warunek ograniczenia maksymalnego przemieszczenia $w_{\max} \leq 100 \text{ cm}$, wynikający z postulatów eksploatacyjnych.

3/ Statyczna dopuszczalność P_0

Ponieważ w konfiguracji początkowej P_0 układ cięgien definiowany jest przez siatkę krzywych płaskich, której rzut na płaszczyznę jest siatką prostokątną, więc otrzymana w ten sposób konfiguracja początkowa będzie dopuszczalna, gdyż na każdej powierzchni o ujemnej krzywiznie Gaussa, spełnia warunki /2.75/ i /2.76/.

4/ Sformułowanie zagadnienia kształtowania



Rys. 2.17. Schemat przekrycia w kształcie paraboloidy hiperbolicznej

Wariant 1. Ponieważ nie ma ograniczeń na wielkość przeszczenia, optymalne rozwiązanie wyznaczone z warunku $H_{21} = 0$. Przyjmując warunki wytrzymałościowe /2.97/ w formie równości /w ramach teorii technicznej jest to zawsze dopuszczalne/, zagadnienie kształtowania sprowadzono do wyznaczenia $z_1, H_{10}, H_{20}, H_{11}$, z układu równań:

$$H_{10} = H_{20}, \quad H_{11} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + q_1 = 0$$

$$2 \left(1 - H_{10}/H_{11}\right) \frac{l_1 \bar{b}_d}{E} = \int \left[\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)^2 \right] dx,$$

$$- 2 \frac{l_2 \bar{b}_d}{E} = \int \left[\left(\frac{\partial z_0}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 \right] dy.$$

Rozwiązanie tego układu musi spełniać warunek $H_{11} > 0$. Powyższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie. Całkując dwukrotnie drugie równanie, otrzymano

$$z_1 = \frac{q_1}{2H_{11}} x^2 + c_1(y) x + c_2(y).$$

Funkcja ta po uwzględnieniu warunków brzegowych

$$z_1|_{x,y \in \Gamma} = z_0|_{x,y \in \Gamma}$$

ma postać

$$z_1 = \frac{3q_1}{2H_{11}} (x^2 - y^2 + 2ay - a^2) + \frac{z_0}{a} (a-y)$$

Podstawiając je do równań geometrycznych otrzymano

$$H_{11}^2 \left(\frac{2a\bar{b}_d}{E} + \frac{4}{3} \frac{z_0^2}{a^2} \right) - H_{10}H_{11} - \frac{1}{3} q_1^2 a^2 = 0,$$

$$H_{10}^2 \left(\frac{2a\bar{b}_d}{E} - \frac{4}{3} \frac{z_0}{a^2} \right) - 2q_1 z_0 H_{11} + \frac{q_1^3}{3} (a^2 - z_0^2) = 0.$$

Rozwiązując powyższe równania z uwzględnieniem warunku $H_{11} > 0$ otrzymano $H_{10} = 13,61 \text{ T}$, $H_{11} = 56,00 \text{ T}$. Można więc obliczyć i pozostałe wielkości będące niewiadomymi kształtowania, mianowicie powierzchnię konfiguracji aktualnej określonej jak wyżej oraz siły w cięgnach i przekroje cięgien:

$$H_{20} = H_{10} = 13,61 \text{ T}, \quad H_{21} = 0,$$

$$A_1 = H_{11} / \sigma_d = 5,60 \text{ cm}^2,$$

$$A_2 = H_{20} / \sigma_d = 1,36 \text{ cm}^2.$$

Rozwiązanie to daje jednak duże przemieszczenie

$$w_{\max} = (z_1 - z_0) \Big|_{x=y=0} = 1,32 \text{ mm}$$

Wariant 2. W tym przypadku ograniczono maksymalne przemieszczenia do wielkości dozwolonych. Przyjęcie warunku $H_{21}=0$ jest tu niemożliwe, ponieważ jest to sprzeczne z warunkiem dotyczącym ograniczenia wielkości przemieszczeń. Przyjmując jak poprzednio warunki wytrzymałościowe w formie równości i eliminując z_0 przez podstawienie $z_0 = z_1 + w$, zagadnienie kształtowania sprowadzono do wyznaczenia H_{10} , H_{20} , H_{11} , H_{21} , z_1 , w z układu równań:

$$H_{10} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + H_{20} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

$$H_{11} \frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + H_{21} \frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} - q_1 = 0,$$

$$\int_{-a}^a \left[\frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(1 - H_{10}/H_{11} \right) \frac{2\sigma_d}{E} \right] dx = 0,$$

$$\int_{-a}^a \left[\frac{\partial z_1}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(1 - H_{21}/H_{20} \right) \frac{2\sigma_d}{E} \right] dy = 0.$$

aby spełnione były warunki:

$$H_{ij} \geq 0 \quad i \quad w_{\max} \leq w_0$$

Cztery powyższe równania zawierają pięć niewiadomych. Jedną z nich można więc założyć wykorzystując przy tym warunki określające częściową optymalność rozwiązania, przyjmując na przykład z_1 jako powierzchnię minimalną lub można ją wyznaczyć na podstawie przyjętego kryterium optymalizacji.

5/ Przyjęcie kryterium kształtowania /punkt ten dotyczy już tylko wariantu 2/, sformułowanie zadania ekstremalnego i wyprowadzenie warunków określających rozwiązanie optymalne.

Jako kryterium kształtowania przyjęto minimalizację ciężaru siatki. Kryterium optymalizacji określa funkcjonal

$$F_{z_1, w} = \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a \left[\frac{H_{11}}{6d} \left[1 + 0,5 \left(\frac{\partial z_1}{\partial x} \right)^2 + 0,5 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial z_1}{\partial x} \right] + \frac{H_{20}}{6d} \left[1 + 0,5 \left(\frac{\partial z_1}{\partial y} \right)^2 + 0,5 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial z_1}{\partial y} \right] \right) dx \right) dy$$

Ponieważ warunki nierównościowe dotyczą parametrów, a nie funkcji, można potraktować je jako niezależne ograniczenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych. Przyjmując równania geometryczne jako warunki izoperymetryczne zagadnienia wariacyjnego, można wyprowadzić warunki konieczne istnienia ekstremum funkcjonału $F(z_1, w)$. Równania Eulera-Lagrange'a prowadzą do następujących zależności:

$$H_{11} \left[\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + H_{20} \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \lambda_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

$$(H_{11} + \lambda_1) \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (H_{20} + \lambda_2) \left(\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

przy warunkach brzegowych:

$$z_1|_{x,y \in \Gamma} = z_0|_{x,y \in \Gamma}, \quad w|_{x,y \in \Gamma} = 0.$$

9.7. Optymalne kształtowanie siatki ciągnowej przy ograniczeniu klasy dopuszczalnych konfiguracji

Rozpatrzono dwie konfiguracje siatki ciągnowej opisane układem równań /2.96/. Przyjmując warunki wytrzymałościowe /2.97/ w postaci równości należy wyznaczyć 6 niewiadomych: H_{10} , H_{20} , H_{11} , H_{21} , z_0 , z_1 . Przedstawiając z_0 i z_1 w postaci wielomianów o m_0 i m_1 współczynnikach oraz wykorzystując warunki geometryczne można wyznaczyć n współczynników. Winna zachodzić nierówność $m_0 + m_1 \geq n$. Jeżeli $m_0 + m_1 = n$ to wszystkie współczynniki mają interpretację geometryczną. Powierzchnie w obu konfiguracjach są określone przez znane funkcje o nieznanymi parametrach a_1 , b_1 :

$$z_0 = f_0(a_1, x, y)$$

$$z_1 = f_1(b_1, x, y)$$

Podstawiając te funkcje do równań /2.96/ można otrzymać układ czterech równań algebraicznych lub funkcyjnych oraz ewentualne dodatkowe ograniczenia na współczynniki, wynikające z warunków

$$k_{10} k_{20} < 0, \quad k_{11} k_{21} < 0, \quad H_{1j} \geq 0.$$

Rozwiązując otrzymany układ równań można wyznaczyć H_{1j} w postaci

$$H_{10} = H_{10} [a_1, b_j, q_1(y)]$$

$$H_{20} = H_{20} [a_1, b_j, q_2(x)]$$

$$H_{11} = H_{11} [a_1, b_j, q_3(y)]$$

$$H_{21} = H_{21} [a_1, b_j, q_4(x)]$$

oraz ewentualne dodatkowe ograniczenia wynikające z warunków wyrównania naprężeń

$$\frac{\partial H_{11}}{\partial x} - \frac{\partial H_{21}}{\partial y} = 0$$

Przyjmując na kryterium kształtowania minimalizację ciężaru

siatki opisanego funkcjonalnem

$$F(z_0) = \int_a^b \int_{x_1}^{x_2} G[a_i, b_j, q_\alpha(x), q_\beta(y)] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

można przez scałkowanie sprowadzić ciężar siatki do funkcji

$$F = F(a_1, b_j).$$

Wyznaczając minimum tej funkcji ze względu na a_1, b_j /w ogólnym przypadku minimum warunkowe/ otrzymuje się wartości współczynników spełniających warunki zadania i minimalizujące ciężar siatki.

Uzyskane rozwiązanie jest optymalne w klasie funkcji określonych przyjętymi wielomianami. Postać tych funkcji nie może być dowolna. Muszą one spełniać warunki zgodności określone przez geometrię rzutu przekrywanego obiektu i statyczną dopuszczalność konfiguracji aktualnej.

Poniżej na prostym przykładzie zilustrowano optymalne kształtowanie siatek ciągnowych przy ograniczeniu klasy konfiguracji dopuszczalnych. Wprowadzono dodatkowe ograniczenie zbioru rozwiązań dopuszczalnych, zakładając, że rozwiązanie ze względu na z_1 poszukiwane jest tylko w klasie określonych wielomianów: $F_1 = F_1(a_1, x, y)$. W każdym z tych wielomianów występuje n_1 współczynników

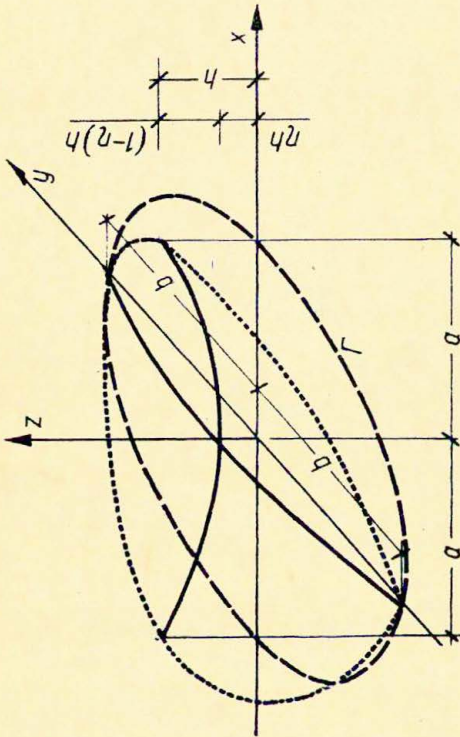
$$F_0 = m_{01}x^2 - m_{02}y^2 + m_{03}$$

$$F_1 = m_{11}x^2 - m_{12}y^2 + m_{13}x^2y^2 + m_{03}$$

Wykorzystując warunki geometryczne zadania wyznaczono n_1 współczynników. Wielomiany winny być tak dobrane, by $m_1 \geq n_1$. Jeżeli $m_1 = n_1$ to wszystkie współczynniki mają interpretację geometryczną i dalsze rozważania dotyczą wyłącznie optymalizacji parametrów geometrycznych a nie kształtu powierzchni.

Przyjmując warunki geometryczne cięgien głównych jak na rys. 2.18 otrzymano

$$z_0 = h \left(\frac{1-\eta}{a^2} x^2 - \frac{\eta}{b^2} y^2 + \eta \right).$$



Rys.2.18. Schemat przekrycia przy ograniczeniu klasy dopuszczalnych konfiguracji

$$z_1 = h \left[\frac{(1 - \eta + w_0)}{a^2} x^2 - \frac{(\eta - w_0)}{b^2} y^2 + cx^2 y^2 + \eta - w_0 \right], \quad w_0 = \frac{w}{h}$$

Warunki zgodności na brzegu

$$z_1 - z_0 \Big|_{x,y \in \Gamma} = h \left[\frac{w_0}{a^2} x^2 + \frac{w_0}{b^2} y^2 + cx^2 y^2 - w_p \right] = 0$$

spełnione są w przypadku:

rzutu eliptycznego

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \text{przy } c = 0,$$

rzutu prostokątnego

$$x = \pm a, \quad y = \pm b \quad \text{przy } c = -\frac{w_0}{a^2 b^2},$$

rzutu określonego równaniem

$$x^2 = \frac{(b^2 - y^2) a^2}{b^2 - c_1 y^2} \quad \text{przy } c = -\frac{c_1 w_0}{a^2 b^2}, \quad c_1 \neq 1.$$

W pierwszych dwóch przypadkach otrzymano $m_1 = n_1$, natomiast w trzecim: $m_0 = n_0$ i $m_1 > n_1$. Następnie rozpatrzono siatkę o rzucie eliptycznym. Obliczając odpowiednie pochodne z_0 i z_1 oraz podstawiając je do związków geometrycznych /2.96/_{3,4} otrzymano:

$$H_{10} = H_{11} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \omega \left[2(1 - \eta) w_0 + w_0^2 \right] \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \right\},$$

$$H_{21} = H_{20} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \omega x^2 \left[2\eta w_0 - w_0^2 \right] \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right\},$$

gdzie $\omega = E / \bar{\sigma}_d$.

Z równania równowagi /2.96/₄ otrzymano

$$/2.101/ \quad H_{10} = \frac{h}{1 - \eta} H_{20},$$

i wobec tego z równania /2.100/₁ wynika.

$$H_{11} = \frac{\frac{\eta}{1 - \eta} H_{20}}{1 - \frac{2}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \omega w_0 \left[2(1 - \eta) + w_0 \right] \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)}$$

Podstawiając H_{11} i H_{21} do równania równowagi /2.96/2 i całkując otrzymano

$$/2.102/ \quad H_{20} = \frac{qa^2}{2h} \alpha_1 \left(\eta, w_0, h, \kappa, a \right),$$

gdzie

$$\frac{1}{\alpha_1} = \eta \left(1 + \frac{w_0}{1-\eta} \right) - (\eta - w_0) \kappa^2 \left[1 - \alpha_2 (\alpha_3 - 4,1 \alpha_4 \alpha_4) \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{4}{9} w \left(\frac{h}{a} \right)^2 w_0, \quad \kappa = a/b$$

$$\alpha_3 = w_0 + 2(1-\eta) + 2.5 \kappa^2 (2\eta - w_0)$$

$$\alpha_4 = \kappa^2 \left[(1-\eta) (4\eta - 3w_0) + w_0 (\eta - w_0) \right]$$

Podstawiając /2.102/ do /2.100/ i /2.101/ otrzymano

$$H_{10} = \frac{\eta}{1-\eta} \frac{qa^2}{2h} \alpha_1.$$

$$/2.103/ \quad H_{21} = \frac{qa^2}{2h} \alpha_1 \left[1 - \frac{3}{2} \kappa^2 \alpha_2 (2\eta - w_0) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right]$$

$$H_{11} = \frac{qa^2}{2h} \alpha_1 \left\{ 1 - \frac{3}{2} \alpha_2 \left[2(1-\eta) + w_0 \right] \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \right\}.$$

Tak więc wielkości sił H_{1j} przedstawiono jako funkcję parametrów: a, κ, h, η, w_0 . Jeżeli w zadaniu projektowym parametry te są narzucone, to w wyniku powyższego postępowania wyznaczono wielkości sił i przekroje cięgien. W przeciwnym razie niektóre z tych parametrów można wyznaczyć na podstawie ciężaru siatki ciągnowej

$$P = \int_{\Omega} \frac{H_{11} + H_{20}}{b_d} d\Omega = \int_a^b \left\{ \int_{-a}^a \frac{H_{11} + H_{20}}{b_d} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_0}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx \right\} dy$$

Podstawiając H_{11} i H_{20} zgodnie ze wzorami /2.103/ otrzymano

$$F = \frac{qa^2 \omega_1}{2h \sigma_d} \int_{-b}^b \left\{ \int_{x_1}^x \left[1 + \frac{\eta}{(1-\eta) \left[1 - \alpha_5 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \right]} \right] \left[1 + 2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left(\frac{x}{a} \right)^2 (1-\eta)^2 + 2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 x^2 \eta^2 \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] dx \right\} dy,$$

gdzie $\alpha_5 = \frac{3}{2} \alpha_2 \left[2(1-\eta) + w_0 \right].$

Po zcałkowaniu funkcje celu ma następującą postać

$$/2.104/ \quad F = \frac{qa^2 b^2}{h \sigma_d} \chi \frac{(1-\eta) \alpha_5 + 2\eta + 2 \left(\frac{h}{a} \right)^2 \left\{ [3(1-\eta)^3 + \chi^2 \eta^2 (1-\eta)] \frac{\alpha_5}{4} + \eta^3 \chi^2 \right\}}{\alpha_5 \left\{ \eta(1-\eta + w_0) - (1-\eta)(\eta - w_0) \chi^2 [1 - \alpha_2 (\alpha_3 - 1.1 \alpha_1 \alpha_2)] \right\}},$$

w ogólnym przypadku zależy od zmiennych decyzyjnych: h, η, w_0 i χ .

Ograniczenia zbioru rozwiązań dopuszczalnych wynikają z warunków $H_{1j} \geq 0$; na podstawie równań /2.100/, /2.102/, /2.104/ przybierają następującą postać

$$/2.105/ \quad \begin{aligned} 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \omega \left[2(1-\eta) w_0 + w_0^2 \right] &> 0 \\ - \frac{2}{3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \omega \chi^2 (2\eta w_0 - w_0^2) &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\eta(1-\eta + w_0) - (\eta - w_0) \chi^2 \left[1 - \alpha_2 (\alpha_3 - 1.1 \alpha_1 \alpha_2) \right] > 0$$

Ponadto wszystkie zmienne decyzyjne mogą przyjmować jedynie wartości dodatnie.

Tak więc zadanie zostało sprowadzone do wyznaczenia minimum funkcji /2.104/ przy ograniczeniach /2.105/. Z uwagi na nieliniowy charakter funkcji celu i nieliniowe ograniczenia, rozwiązanie można otrzymać stosując metody programowania nieliniowego.

Numeryczne rozwiązanie przy ustalonych wartościach w_0 i q można uzyskać stosunkowo łatwo wobec niewielkiej liczby zmiennych decyzyjnych.

10. Zagadnienia kształtowania konstrukcji podporowych

W poprzednich rozdziałach przedstawiono zagadnienia analizy i optymalizacji ustrojów ciągnowych jednopasowych, dwupasowych i siatek ciągnowych. Poniżej rozpatrzono zagadnienie racjonalnego wyboru kształtu elementów brzegowych, którymi zwykle są konstrukcje podporowe płaskie lub przestrzenne. Przez konstrukcje podporowe rozumie się tu wyłącznie te elementy brzegowe, które służą do kotwienia ciągów przekrycia i przekazywania obciążeń z przekrycia na słupy i fundamenty. Z uwagi na rodzaj i sposób przyłożenia obciążenia, konstrukcje podporowe podlegają zginaniu i ścisaniu.

Celem kształtowania konstrukcji podporowych jest eliminacja momentów zginających i wyznaczenie takiego kształtu podłużnej osi konstrukcji podporowej, zwanej dalej konturem, przy którym występowałyby tylko siły ścisające. Z analizy statycznej prętów zakrzywionych wiadomo, że kształtem, który spełnia powyższy warunek, jest linia cieniń od obciążeń zewnętrznych. A więc celem kształtowania jest wyznaczenie kształtu konturu konstrukcji podporowej w postaci linii cieniń od obciążeń zewnętrznych. Wyznaczony w ten sposób kształt jest optymalnym tylko przy jednym stanie obciążenia. Dlatego też przy kształtowaniu należy wybierać stan obciążenia, który w sposób decydujący wpływa na wielkości przekrojów poprzecznych konstrukcji podporowej. W wyznaczonym w ten sposób bezmomentowym konturze przy maksymalnym stanie obciążenia, inne stany obciążenia wywołają tylko niewielkie momenty zginające, które można pominąć przy wymiarowaniu konstrukcji podporowej.

W sformułowaniu zagadnienia kształtowania przekryć wiszących można odróżnić dwa przypadki. Pierwszy, w którym kształt konturu jest określony na podstawie założeń architektonicznych lub innych, natomiast wyznaczyć należy rozkład oddziaływań siatki nie wywołujący zginania w konstrukcji podporowej. Następnie znając bezmomentowy rozkład oddziaływań siatki na konstrukcję podporową należy wyznaczyć kształt siatki odpowiadający określonej wyżej rozkładowi wzajemnych oddziaływań siatki i konstrukcji podporowej.

Drugi przypadek dotyczy zagadnienia, w którym dany jest kształt siatki ciągnowej a zatem i rozkład oddziaływań siatki na konstrukcję podporową. Tutaj celem jest wyznaczenie kształtu bezmomentowego konturu tzn. linii ciśnień od oddziaływań siatki na konstrukcję podporową. W tym przypadku zagadnienie nieco się komplikuje, gdyż z kolei rozkład oddziaływań zależy od nieznanego kształtu konstrukcji podporowej.

W dalszych rozważaniach zakłada się, że oddziaływania siatki są przyłożone od osi konstrukcji podporowej zwanej konturem który traktuje się jako nieściśliwy. Konstrukcje podporowe są często przestrzenne a nie płaskie. Jednakże niekiedy z uwagi na małe odstępki między słupami podporowymi oraz małą deplanację konturu można przyjąć, że wyniki otrzymane z rozważań konturu płaskiego pozostają również ważne przy konturach z deplanacją.

W pracy [2,227] przedstawiono warunki konieczne i dostateczne znikania momentów zginających w pierścieniu podporowym, w oparciu o wyniki otrzymane w pracy [2,308]. Na podstawie rozważań tam przeprowadzonych można stwierdzić, że oddziaływania siatki na kontur przy radialnym układzie cięgien są o $1/3$ mniejsze niż przy siatce ortogonalnej zbudowanej z płaskich krzywych, a zatem ustroje ciągnowe o radialnym układzie cięgien są bardziej ekonomiczne niż ortogonalne siatki ciągnowe. Powyższe stwierdzenie odnosi się nie tylko do samej siatki, ale także i do siły w pierścieniu podporowym, która przy radialnym rozmieszczeniu cięgien jest półtora raza mniejsza niż przy siatce ortogonalnej. Należy jednak pamiętać, że powyższe wnioski zostały sformułowane w odniesieniu do konstrukcji ciągnowych bez wstępnego naprężenia.

W przypadku radialnego rozmieszczenia cięgien o stałym kącie środkowym, siły w cięgnach, a zatem i przekroje poprzeczne cięgieł, będą różne w różnych cięgnach. Można jednak znaleźć takie położenie środkowego węzła cięgien, przy którym siły w cięgnach byłyby jednakowe przy stałym skoku kąta środkowego.

Można pokazać, że tylko elipsa, której jedno z ognisk pokrywa się z rzutem środkowego węzła układu cięgien na płaszczyznę, stanowi bezmomentowy kontur umożliwiający realizację

przekrycia o równych przekrojach cięgien przy stałym skoku kąta środkowego.

11. Przewidywany rozwój optymalizacji konstrukcji ciągnowych

Rozwój optymalizacji konstrukcji ciągnowych jest w znacznym stopniu uzależniony od rozwoju metod analizy statycznej i dynamicznej. Zależności i warunki wyprowadzone podczas analizy stanu naprężenia i odkształcenia stanowią podstawę optymalizacji ustrojów ciągnowych. Dokładność rozwiązań optymalnych zależy w dużym stopniu od przyjętego modelu opisującego zachowanie się konstrukcji pod obciążeniem.

Tak więc dalszy rozwój optymalizacji konstrukcji ciągnowych będzie uzależniony od rozwoju analizy tych konstrukcji i powinien obejmować:

1/ doskonalenie metod analizy statycznej zarówno w ujęciu ciągłym jak i dyskretnym, w szczególności przy zastosowaniu techniki elementów skończonych oraz metod rachunku różnicowego,

2/ transformację warunków statycznej dopuszczalności konfiguracji konstrukcji ciągnowych z modelu ciągłego na dyskretny,

3/ rozwój metod analizy dynamicznej ustrojów ciągnowych dwupasowych i siatek ciągnowych wstępnie naprężonych,

4/ wyprowadzenie warunków dynamicznej dopuszczalności konfiguracji konstrukcji ciągnowych wstępnie naprężonych,

5/ uwzględnienie w optymalizacji konstrukcji ciągnowych ograniczeń dynamicznych np. częstości drgań własnych itp.,

6/ rozwój analizy stochastycznej ustrojów ciągnowych przy uwzględnieniu obciążeń losowych /wiatr, śnieg, wpływy sejsmiczne/, wad materiałowych, niedokładności w wykonawstwie itp.

7/ uwzględnienie w optymalizacji ustrojów ciągnowych ograniczeń wynikających z analizy stochastycznej,

8/ uwzględnienie nieliniowych związków fizycznych w szczególności w konstrukcjach wykonywanych z materiałów plastycznych,

9/ przejście od optymalizacji poszczególnych elementów konstrukcji ciągnowych do optymalizacji całej konstrukcji tj. łącznie z podporami i fundamentami,

10/ badanie warunków stateczności konstrukcji ciągnowych oraz ich uwzględnienie przy optymalizacji tych konstrukcji,

11/ dalszy rozwój kryteriów optymalizacji konstrukcji ciągnowych oraz rozpatrzenie możliwości optymalizacji wielokryterialnej,

12/ dalszy rozwój metod optymalizacji konstrukcji ciągnowych w szczególności zastosowanie programowania matematycznego oraz metod teorii sterowania.

Bibliografia do części 2

- 2.1. G.A.ABOVIAN, G.C.POGOSIAN, Issledovania na modelach raboty dvuchpojasnykh predvaritelno-napražennykh vantovykh sistem. Materialy III Meždunarodnoj Konferencij po predvaritelno-napražennym metaličeskim konstrukciam, Leningrad 1971.
- 2.2. W. ADAMSKI, Pewna koncepcja dachów wiszących o prętach naciąganych. Inż. i Bud., 20, 3, 1963.
- 2.3. P.I. AGILIN, Predloženia po rascetu nesuščich nitej visjačykh konstrukcij s odnoj svobodno peremeščajemoj oporoj. Technologija stroitelnykh izdelij, zdania i sooruzhenia, Moskva 1973, /Sb. tr. CNIIEP Selstroja, 7/.
- 2.4. Z. AGOČ., Vlijanie postepennogo razetvenia vantov na raspredelenie vnutrennich usilij i žestkost vantovykh sistem. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.5. Z. AGOČ., P. DUTKO, P.FERENČIK, Ispolzovanie prednapražennykh gibkikh nitej v konstrukciach perekrytij, Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.6. Z. AGOČ., Z. CHLADNY, Ju.WIRČIK, Kanatnye konstrukcii piešochnodnykh mostikov. Proc.IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.7. M. AIZAWA, S. TANAKA, H. TSUBOTA, Theoretical analysis of pretensioned cable structures, 2-nd International Conference on Space Structures, University of Surrey, Guildford, England 1975.
- 2.8. A. ANIŠENKO, Architektura sooruzhenij s visjačimi pokrytjami. Sudivelnik, Kiev 1970.
- 2.9. E.V. ARCHIPOVA, Visjače pokrytia iz zblokirovannykh odnomodularnykh radialnykh vantovykh jačejek. Izv. Sev. - Kavk. Nauč. Centra Vyss. Školy, Serija Techn. Nauk., 3, 1973.
- 2.10. J.H. ARGYRIS, T. ANGELOPOULOS, Theorie, Programmen - twicklung und Erfahrung an vorgespannten Netzwerkkonstruktionen. Ninth Congress IABSE, Amsterdam 1972.
- 2.11. J.H. ARGYRIS, D.W. SCHERPF, Berechnung vorgespannter Netzwerke. Die Lösung eines nicht-linearen Problems. Bayer. Akad. Wiss. Math. - Natur. Kl S.-B. Abt.II, 1971.

- 2.12. S. ARINADAV, J. EIDELMAN, Stress analysis of prestressed suspended roofs. J. Struct. Div., ASCE, 90, ST.4, 1964.
- 2.13. V. ASKEGAARD, A. ABLERS, P. MORTENSEN, Test on a model of a cable roof. Space Structures, ed. by R.M. Davies, John Wiley and Sons, Inc. New York, N.Y., 1967.
- 2.14. R.R. AVENT, Nonlinear field analysis of structural nets. J. Struct. Div., ASCE, 95, ST.5, 1969, 889-907.
- 2.15. K.A. BABAEVA, Issledovanie statičeskoj raboty visjačich pokrytij dvojakoju krivizny /giperboliceskich paraboloidov/ s kvadratnym opornym konturom pod vozdejstvom vremennyh nagruzok vetra-snega. V sb. Osnovanija i fundamenty inž. konst., Strit. i Proiz-vo., Leningrad 1964, 63-65.
- 2.16. K.A. BABAEVA, Aerodinamičeskie issledovanija visjačich pokrytij paraboliceskogo ocertanija. Stroitel'naja Mehanika i Rasčet Sooruzenij, 2, 1964, 14-20.
- 2.17. J.C. BADOUX, Das Hängedach der Sportanlage in Oakland, Kalifornien, Schweizerische Bauzeitung, Zurich, H. 49.
- 2.18. E. BALGAC, Die neue Ausstellungshalle der Textilmesse in Leskovic. Beton und Stahlbetonbau, 7, 1961.
- 2.19. H. BANDEL, Betrachtungen über Hängedachkonstruktionen, Bauingenieur, 6, 1958, 221 - 225.
- 2.20. H. BANDEL, Das orthogonale Seilnetz hyperbolisch - parabolischer Form unter vertikalen Lastzuständen und Temperaturänderung. Bauingenieur, 34, 10, 1959, 394 - 396.
- 2.21. H. BANDEL, Das hängende Seil unter räumlicher Belastung und Temperaturänderung. Bauingenieur, 37, 4, 1962, 145 - 146.
- 2.22. H. BANDEL, Hang roofs and their structural solutions. Hanging Roofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, 33 - 41.
- 2.23. A. BARTLOVA, Řešení predpjaté niezatížene lanové sítě. Stavebnický časopis, SAV, 12, 5, 1964, 215 - 280.
- 2.24. J. BAUER, H. RÜHLE, M. JURZIG, Konstruktion und Bauausführung eines rotationsymmetrisch vorgespannten Falten - seildaches. Baupl. - Bautechnik, 12, 1964, 596 - 599.
- 2.25. G.S. BEDENIKOV, V.V. MASAROV, Vlijanie veličiny predvaritel'nogo napraženie na progiby ploskoj dvuchpojasnoj sistemy visjačego pokrytia. Stroit. i Archit., 2, 1974.
- 2.26. H. BERGER, Shaping cable supported lightweight tensile structures, Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične strediško, Bratislava 1975.

- 2.27. V.I. BEZUGLYJ, Geometrieskaja kompozycja visjacych sistem. Stroitelnye konstrukcii, 13, Budivelnik, Kiev 1969.
- 2.28. J. BEUTLER, Beitrag zur statischen Windbelastung von Seilnetzwerken - Ergebnisse von Windkanaluntersuchungen. Hanging Roofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, 76 - 86.
- 2.29. L. BIEGUN, R. HOFMAN, Wieloprześłowe wiszące przekrycia dachowe. Inż. i Bud., 21, 5, 1964.
- 2.30. A.I. BITJUCKIJ, Nekotoryjne voprosy rasčeta visjačykh pokrytij s ortogonalnoj prostranstvennoj setkoj nitaj. Visjače pokrytia, Gosstroizdat, Moskva 1962, 150- 158.
- 2.31. A.J.V. BITJUCKIJ, Issledovanie ortogonalnoj prostranstvennoj setki nitaj visjačego pokrytia, Sbornik Želazobeton. Konstrukcii, Knigoizdat, Kujbyšev 1963, 105 - 122.
- 2.32. F.V. BOBROV, V.A. BYCHOVSKIJ, A.N. GASANOV, Sejsmičeskie nagruzki na oboločki i visjače pokrytia. Stroizdat, Moskva 1974.
- 2.33. J. BOGUSZ, Obliczanie siatek ciągnowych przestrzennie naprężonych. Inż. i Bud., 19, 5, 1962, 169 - 174.
- 2.34. J. BOGUSZ, Obliczanie siatek ciągnowych przestrzennie naprężonych. Inż. i Bud., 21, 4, 1964.
- 2.35. J. BOGUSZ, Wpływ zmian temperatury na stan sił w siatkach ciągnowych przestrzennie naprężonych, Inż. i Bud., 21, 4, 1964.
- 2.36. T. BOROWICZ, P. ŚNIADY, Drganie ciągn wywołane ruchomym obciążeniem skupionym. Prace naukowe Inst. Inż. Łąd. PWR, 10, 1973, Seria Stud. Mater. z. 9.
- 2.37. W. BOWMAN, 1958 World's Fair is a structural show. Engineering News-Record, 159, 13, Sept. 26, 1957, 36 - 46
- 2.38. M.N. BRAINOV, Free hanging single curvature networks. Space Structures, ed. by R.M. Davies, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1967.
- 2.39. Cz. BRANICKI, Obliczenie wstępnie napiętego dachu wiszącego z uwzględnieniem odkształcalności belki brzegowej. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, 104, Bud. Łąd., 15, 1967.
- 2.40. Cz. BRANICKI, O dopuszczalnych geometriach wstępnie napiętych siatek ciągnowych. Sympozjum nt. Mechaniki Konstrukcji Ciągnowych, Jadwisin 1972.
- 2.41. V. BRÉZINA, Theory of a lens-shaped cable roof anchored in a plain ring. Rozprawy Československe Akademie Ved., 76, 2, 1966.

- 2.42. D.M. BROTTON, N.W. WILLIAMSON, M. MILLAR, The solution of suspension bridge problems by digital computers - part I. The Structural Engineer, 41, 4, 1963.
- 2.43. D.M. BROTTON, A General computer programme for the solution of suspension bridge problems. The Structural Engineer, 44, 5, 1966, 161 - 167.
- 2.44. W. BUBIEŃ, Z. MAZURKIEWICZ, Analiza statyczna wiotkiego ciężnego zawieszonoego na sprężystych podporach. Inż. i Bud., 29, 2, 1972.
- 2.45. G.R. BUCHANAN, The deflection analysis of structural nets using reflection method. Space Structures, ed. by R.M. Davies, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1967.
- 2.46. H.A. BUCHHOLDT, Deformation of prestressed cable nets. Acta Polytechnica Scandinavica, Trondheim, Series /b/, 138, 3, 1966.
- 2.47. H.A. BUCHHOLDT, The behaviour of small prestressed cable roofs subjected to uniformly distributed loading. Space Structures, ed by R.M. Davies, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1967.
- 2.48. H.A. BUCHHOLDT, A nonlinear deformation theory applied to two dimensional pretensioned cable assemblies. Proc. Inst. Civ. Engrs., 42, 1969, 129 - 141.
- 2.49. H.A. BUCHHOLDT, B.R. McMILLAN, Iterative methods for the solution of pretensioned cable structures and pinjointed assemblies having significant geometrical displacements. Proc. of the Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames, Tokyo and Kyoto, October 1971, Architectural Institute of Japan, edited by Y.Yokeo, Tokyo 1972.
- 2.50. H.A. BUCHHOLDT, Analysis and design of cable structures. I. Inst. Eng. /India/ Civ. Eng. Div., 5, 1973.
- 2.51. J. BUJAK, Przegląd zagadnień projektowania konstrukcji wiszących. Inż. i Bud., 26, 11, 1969.
- 2.52. J. BUJAK, W. HAMAN, Badania zakotwień ciężkich 7 \emptyset 5 i 9 \emptyset 5 zastosowanych w konstrukcji wiszącej. Biuletyn Techniczny, 12, 1971.
- 2.53. J. BUJAK, A. ŻURAWSKI, Problemy dynamiczne płaskiego przekrycia wiszącego. Arch. Inż. Ląd., 17, 4, 1971.
- 2.54. J. BUJAK, J. MIDAK, Zaciągi i zakotwienia ciężkich stalowych stosowane w konstrukcjach budowlanych. Inż. i Bud., 29, 8, 1972.

- 2.55. J. BUJAK, J. MIDAK, Zakotwienia klinowe i głowicowe cięgien stalowych. Biuletyn Branżowy Mostostalu, 2, 1972.
- 2.56. J. BUJAK, J. MIDAK, Przegląd zakotwień do cięgien o różnym przeznaczeniu. Konstrukcje Metalowe, Biuletyn Branżowy Mostostalu, 3, 1972.
- 2.57. J. BUJAK, Mechanika konstrukcji cięgnowych. Biuletyn Techniczny, 12, 1972.
- 2.58. J. BUJAK, J. SAMBORSKI, Zastosowanie EMC do obliczania ustrojów cięgnowych. Inż. i Bud., 31,12, 1974.
- 2.59. Z. BYCHAWSKI, J. LEDZIŃSKI, Termoreologiczka deformacja strukturalnych nitej. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.60. J. CABAJ, Z. KOWAL, Dimensioning methods of cable structures in the light of the theory of reliability. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS Edične stredisko Bratislava 1975.
- 2.61. J. CABAJ, Z. KOWAL, Konstrukcje cięgnowe przekryć o dużej rozpiętości, Cz.6.8.1.7. Analiza i ocena dotychczasowych rozwiązań konstrukcyjnych zrealizowanych w kraju, Cz. 6.8.1.3. Analiza stanu aktualnego w zakresie teoretycznych podstaw projektowania i oceny pracy konstrukcji cięgnowych. Raporty I-2 PWR nr I-2/R-37b/75, nr I-2/R-37a/75, Wrocław 1975.
- 2.62. J. CABAJ, Z. KOWAL, Nośność graniczna konstrukcji cięgnowych systemu Jawertha. Prace Naukowe Instytutu Budownictwa PWR., 20, seria: Konferencje, 2, 1976, Wrocław 1976.
- 2.63. J. CABAJ, Z. KOWAL, Przekrycia Cięgnowe. Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Polit. Wrocławskiej, 21, seria: Monografia, 7, 1977, Wrocław 1977.
- 2.64. G.F. CARRIER, On the non-linear vibration problem of the elastic string. Quart. App. Math., 3, 1945, 157 - 165.
- 2.65. F.C. CARSTARPHEN, A simple method of computing deflection of a cable span carrying multiple load evenly spaced. Trans. ASCE, 83, 1919, 1383 - 1408.
- 2.66. C.C. FERNANDEZ, Toiture Suspendue a Systeme Unique de Cablees pour le Pavillon I.N.I. a la Foire Internationale Agricole de Madrid. Hanging Roofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, 149 - 153.
- 2.67. P. CHELAZZI, Structures in membrane on co-acting ribs, Progressive Architecture, 35, 1956, 81-88

- 2.68. J.K. CHOUDHURY, Vibrations of overhead transmission lines. Indian Journal of Power and River Valley Development, 3; 1, 1953; 11 - 14.
- 2.69. R. CIESIELSKI, M.CZOSNOWSKI, Z. FAIX-DĄBROWSKI, Praktyczne ujęcie obliczeniowe pracy dynamicznej ciężna na obciążenie dynamiczne upadającym ciężarem. Sympozjum nt. Mechaniki Konstrukcji Ciężnowych, Jadwisin 1972.
- 2.70. R. CIESIELSKI, Practical calculation of cable on dynamic load caused by falling weight. Proc.IASS Symposium on Cable Structures. SVTS, Edičné stredisko, Bratislava 1975.
- 2.71. S.H. CLARK, Cable supported roof for olympic arena. Civil Engineering, 29, 9, 1959.
- 2.72. E. COHEN, H. PERRIN, Design of multi-level guyed towers: Wind loading and structural analysis. J. Struct. Div., ASCE, 83, ST.5, 1957.
- 2.73. D.B. COLE, C.B. DOUGHERTY, J.H. HUTH, Constant strain waves in strings, J. App. Mech., ASME, 75, 1953, 519 - 522.
- 2.74. R. CONTRO, G. MAIER, A. ZAVELANI, Inelectic analysis of suspension structures by nonlinear programming. Computer Methods in Appl. Mech. and Engng., 5, 1975.
- 2.75. W. CORNELIUS, Die statische Berechnung eines seilverspannten Daches am Beispiel des U.S. Pavillons auf der Weltausstellung in Brussel 1958. Stahlbau, 27, 4, 1958.
- 2.76. A. COSTA, M.R. MARTINEZ, A.C. SCORDELIS, Analysis design and construction of a long span cable concrete shell roof. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edičné stredisko, Bratislava 1975.
- 2.77. E. CZITARY, Seilschwebbahnen, Springer Verlag, Vienna 1951.
- 2.78. N.P. ČKUASELI, Eksperymentalne badania przekryć linowych. Prace Inst. Stroit. i Sejsmostoikosti Gruz.AN, Tbilisi 1969.
- 2.79. V.K. ČEADSEV, Proektirovanie visjačego pokrytija s primeneniem žestkich vant. Stroit.Mech. i Rascet Sooruz., 3, 1973.
- 2.80. A.G. DAVENPORT, The relationship of wind structure to wind loading. Wind Effects on Building and Structures, 1, HMSO, London 1965.
- 2.81. A.G. DAVENPORT, G.N. STEELS, Dynamic behavior of massive guy cables. J.Struct.Div., ASCE, 91, ST.2, 1965.

- 2.82. D.L. DEAN, Static and dynamic analysis of guy cables. J. Struct. Div., ASCE, 87, ST.1, 1961, 1 - 21, Discussion: 87, ST.4, 1961, 61-65; 87, ST.5, 1961, 99-108, ST.7, 1961, 283-291; Reply: 88, ST.8, 1962, 293-296.
- 2.83. D.L. DEAN, C.P. UGARTE, Analysis of structural nets, in Publications, IABSE, 23, 1963.
- 2.84. W. DETKO, K. DYDUCH, A. LIBURA, Zagadnienia technologiczne przy realizacji dachu wiszącego nad halą główną WHWS w Katowicach. Inż. i Bud., 29, 7, 1972.
- 2.85. W. DETKO, S. LIBURA, J. MŁYNARCZYK, Zakotwienia i ciągnięcia w konstrukcjach wiszących. Arch. Inż.Łąd., 19, 4, 1973.
- 2.86. R. DEREŃ, Z. GASZEWSKI, Montaż hali widowiskowo-sportowej w Katowicach. Mostostal 1945-1970; Postęp Techniczny Osiągnięcia, Kierunki Rozwoju.
- 2.87. J. DIMEFF, J. LANE, M. GARDNER, Large amplitude linear vibrations of tensioned strings. J. of Acoustic Society of America, 39, 5, 849-855.
- 2.88. L.G. DMITRIEV, K rasčetu vantovyh pokrytij. Vestnik ASIA, USSR, 2, 1961.
- 2.89. L.G. DMITRIEV, A.S. GORODECKIJ, Visjačie pokrytja. Stroitelstvo i Architektura, 7, 1962.
- 2.90. L.G. DMITRIEV, Rasčet visjačich pokrytij. Stroitelstvo i Architektura, 2, 1963.
- 2.91. L.G. DMITRIEV, P.M. Sosis, Programirovanie rasčeta pręstabstvennyh konstrukcji. Budivel'nik, Kiev 1963
- 2.92. L.G. DMITRIEV, A.V. KASILOV, Vantovyje Pokrytja. Budivel'nik, Kiev 1968.
- 2.93. L.G. DMITRIEV, G.B. GILMAN, A.V. KASILOV, Visjače pokrytie zdaniij i sooruzenij. Patent ZSRR nr 419603, kl. E04b7/14, 3.06.72, Otkrytja Izobretienia, Prom. Obrazcy, Tovarnye Znaki, 10, 1974.
- 2.94. D. DOČEV, V. NIKOLOV, St. IVANOV, An. ZAŠEV, Visjašči pokryvani na servizi za avtobusi v Burgas, Sumen i Varna. Stroitelstvo, 6, 1973.
- 2.95. E. DOMAŃSKI, B. MAYZEL, Nowe metody wyznaczania napięć i zwisów napowietrznych linii elektroenergetycznych. Nowa Technika, z. 60. WNT, Warszawa.
- 2.96. N. DRAGONOV, A. MALIK, Nekotorye voprosy proektrirovanija visiacyh sistem iz odinarnykh vant i oboločki zestkosti. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.

- 2.97. M. DRAPAŁA, Nowe rozwiązania konstrukcyjne w zakresie ustrojów ciągnowych. Sympozjum nt. Mechaniki Konstrukcji Ciągnowych, Jadwisin 1972.
- 2.98. A. DUBINSKIJ, V. SIMANOVSKIJ, Visjacie pokrytja promyslennych zdaniij s prjamougolnym planom. Prom. Stroit. i Inz. Soor., 3, 1964, 21 - 25.
- 2.99. A.J. DUKELSKIJ, Podvesnye kanatnye dorogi i kolebanye krany. Masgiz, Moskva 1951.
- 2.100. A.J. DUKIELSKI, Wytrzymałość złączeniowa lin nośnych. Przegląd Mech., 11, 1956.
- 2.101. A.J. DUKIELSKI, Badanie drgań lin nośnych metodą modelowania. Przegląd Mech., 16, 2, 1957.
- 2.102. P. DUTKO, P. FERENCIK, Opyty z vozvedenia predvaritel'no-naprazennogo truboprovodnogo mosta. Proc IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edicne stredisko, Bratislava 1975.
- 2.103. J.L. DURKEE, Advancements in suspension bridge cable construction. International Symposium on Suspension Bridges, Laboratorio Nacional Engenharia Civil, Lisbon 1969.
- 2.104. J.V. DVORKIN, Nekotoryje voprosy projektirovanija dwuchpojasnyh radialno-vantovyh sistem pokrytij. Osnovy teorii sgnovanno zestkich sisea, Leningrad 1973.
- 2.105. O.De DONATO, G. MAIER, G.SACCHI, Esperenze di laboratorio e numeriche sulla statica della tensostrutture piane. Costruzioni Metalliche, 5, 1972.
- 2.106. Ju.A.ELISEV, O.A. KURBATOV, L.S. MOSKALEV, Vnutrennyj opornyj kontur visjacego pokrytja, Patent ZSRR 424953, kl. E0467/14, Tgliata 3.05.67.
- 2.107. G. ERAS, H. ELZE, Zur Berechnung und statisch vorteilhaften Formgebung von Seilnetzwerken. Hanging Roofs, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1963.
- 2.108. H.R. ERNST, Der E-Modul von Seilen unter Berucksichtigung des Durchchanges. Bauingenieur, 45, 1965.
- 2.109. W. FEIFEREK, Przykłady stalowych przekryć hal o dużej rozpiętości. Inz. i Bud. 26, 8-9, 1969.
- 2.110. A. FEIGE, The evolution of german cable-stayed bridges an overall survey. Engineering Journal, AISC, 4, 3, 1967
- 2.111. P. FERENCIK, O visjacej pokrytji postroiennoj v 1826 godu. Proc.IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edicne stredisko, Bratislava 1975.

- 2.112. J. FILIPKOWSKI, Przekrycie amfiteatru w Koszalinie. Inż. i Bud. 34, 7, 1977.
- 2.113. J. FILIPKOWSKI, E. FILIPOW-CISKOWSKA, Sz. PAŁKOWSKI, Numeryczno-modelowa analiza pewnego przekrycia wiszącego, Arch. Inż.Łąd., 23, 4, 1977.
- 2.114. O. FISCHER, Effect of rope failure on a guyed mast. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edičné stredisko, Bratislava 1975.
- 2.115. Fr. FISCHER Jr. Cable-supported warehouse roof provides large open area. Civil Engineering, 36, 9, 1966.
- 2.116. Fr. FISCHER, Jr., Cable roof for Madison Square Garden. Civil Engineering, 6, 1967.
- 2.117. A. FISHMAN, Cable Suspended Structures, Thesis, Cornell University, 1961.
- 2.118. S. FLECKNER, Das Tragwerk des Daches der Kongresshalle Berlin, Beton und Stahlbetonbau, 9, 1957.
- 2.119. E.P. FOSTER, Experimental and nonlinear finite element analysis of roof decking placed on cable nets. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS-Edičné stredisko, Bratislava 1975.
- 2.120. A.J. FRANCIS, Analysis of suspension cable behaviour. Engineering, 219, 5709, 1965, 1094 - 1101.
- 2.121. A.J. FRANCIS, Single cables subjected to loads. Civil Engineering Transactions, The Institution of Civil Engineers, Australia, CE7, 2, 1965, 173 - 180.
- 2.122. H. FRĄCKIEWICZ, Mechanika Ośrodków Siatkowych, PWN, Warszawa 1970.
- 2.123. H.J. FREJNO, Sposób obliczeń statycznych promieniowego wstępnie napiętego układu cięgien z dostosowaniem obliczeń do maszyn cyfrowych. Biul. Techn. Biura Proj.Bud. Przem., 5, 1970.
- 2.124. B. FRITZ, Radial vorgespannte Stabhängewecke und ihre Verwendungsmöglichkeit. Stahlbau, 27, 5, 1958.
- 2.125. B. FRITZ, Von biegesteifen Fachwerksystem zum spannstreifen Seil-oder Stabhängewerk. Bauingenieur, 6, 1958, 209-212.
- 2.126. R. GABRIEL, J. SCHLAICH, On the development of cable structures in Western Germany. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edičné stredisko, Bratislava 1975.

- 2.127. Ju.V.GAJDAROV, Nekotoryje voprosy rasceta bezraspornych vantovyh i prostranstvenno-sprengelnyh sistem. Stroit. i Archit., 5, 1974.
- 2.128. Z. GASZEWSKI, A. ZÓRAWSKI, Montaż stalowej kopuły dachowej o średnicy 32 m. Inż. i Bud., 27, 11, 1970.
- 2.129. R.M. GENSERT., et.al., Cable Roof Structures. Booklet 2318, Bethlehem Steel Corp., Bethlehem, Pa., 1968.
- 2.130. J.M. GERE, B.J. GOODNO, Dynamic analysis of suspended-floor highrise buildings. Proc.IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.131. B.I. GERMAN, K rascetu płoskich setej postojannogo šaga. Stroit. Mech. i Rascet Sooruz., 2, 1974.
- 2.132. J.S. GERO, Some Problems Associated with Cable Structures. B.E. Honors Thesis, University of Sidney, Australia 1964.
- 2.133. J.S. GERO, The Analysis of Suspension Cable Roofs Used in Architecture. M.Bdg. Sc. Thesis, University of Sidney, Australia 1965.
- 2.134. J.S. GERO, D.G. DING, and H.J. COWAN, Research in space structures in the Department of Architectural Science, University of Sydney. Space Structures, ed.by.R.M. Davies, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1967.
- 2.135. J.S. GERO, Pneumatic structures constrained by cable networks. Proc.IASS Symposium on Pneumatic Structures, Stuttgart 1967.
- 2.136. J.S. GERO, Suspension structures. Polybuild, 4, 1967.
- 2.137. J.S. GERO, The analysis of cable networks using an iteration technique. Architectural Science Review, 10, 1967, 2+5.
- 2.138. F.A. GOCHBAUM, Bezmomentnye opornye kontury vantovyh sistem pokrytij. Sb. Vsiacze pokrytia, Akad. Stroit. i Archit. SSSR, Moskva 1962.
- 2.139. J. GOLDBERG, V. MEYERS, A study of guyed towers. J. Struct. Div., ASCE, 91, ST.4, 1965, 57-76.
- 2.140. J. GOLDBERG, R. RICHARD, Analysis of nonlinear structures. J. Struct. Div., ASCE, 89, ST. 4, 1963, 333-352.
- 2.141. J.J. GOLDENBLAT, K. rasvetu visjacch mostov i gazoprovodov na vetrovye i sejsmiceskie nagruzki. Tr.Centr. Na-go In-za Stroit. Konstr., Akad. Stroit. i Architekt. SSSR, 10, 1962, 3-19.

- 2.142. M. GOLLER, V. GLAVACEK, V. ROZENKRANZ, Razrabotka metodov rasčeta i stabilizacij deformacij visjačych pokrytij imejuščich bezmomentnyje opornyje kontury. Delegacija CSSR v postojannoju Komissii SEV po Stroitelstvu, Naučno-Issledovatelnyj Stroitelnyj Institut SU-CVUT, Praha 1973.
- 2.143. M. GOŁĄB, W. BRZOZOWSKI, Wiata strunowa na przystanku kolejowym Ochota w Warszawie. Inż. i Bud., 21, 6, 1964.
- 2.144. W.T. GOODEY, One of the natural modes of frequencies of a suspended chain, Quart. J. Mech. and App. Math, 14, 1961, 118 - 127.
- 2.145. V.N. GORDEEV, Rasčet visjačego pokrytja na nekotorye vidy nagruzok. Teorija plastin i oboloček, AN USSR, Kiev 1962, 382 - 385.
- 2.146. V.N. GORDEEV, Uravnenija dla rasčeta tkanevych oboloček. Prikładnaja Mechanika, 8, 6, 1962.
- 2.147. V.N. GORDEEV, K rasčetu setej, Prikładnaja Mechanika, 9, 5, 1963, 570 - 572.
- 2.148. V.N. GORDEEV, O povedenij tkanevych oboloček pod nagruzkoj, Teorija plastin i oboloček, AN Arm.SSR, Erevan 1964, 391-398.
- 2.149. S. GORECKI, Konstrukcje dachowe dwustronnie podwieszzone. Biuletyn Branżowy Mostostalu, 2, 15/6/68, 1968.
- 2.150. O. GRAF, E. BRENNER, Experiments on wire rope cables for a suspension bridge, /in German/. Bautechnik, 19, 38, 1941, 410 - 415.
- 2.151. D.P. GREENBERG, Inelastic analysis of suspension roof structures. J. Struct. Div., ASCE, 96, ST. 5, 1970, 905 - 930.
- 2.152. V. GRISA, M. DRDA, Viute Strachy, Praha 1966.
- 2.153. C.J. GUDADZE, Rasčet nesusčych kanatov. Trudy Gruz. Politech. Instytuta, Tbilisi, 1, 86, 1963.
- 2.154. K.N. GURIN, Ekonomičnost vantovych konsolnych form pri issledovanii ich osnovnych razmerov. Metaličeskie i Plastmassovyje Konstrukcie, Budivelnik, Kiev 1973
- 2.155. K.N. GURIN, Koefficienty charakterizujuščie sootnošenie mezdu faktičeskim i teoretičeskim objemom materiala v vantovych konsolnych formach. Metaličeskie i Plastmassovyje Konstrukcie, Budivelnik, Kiev, 1973.

- 2.156. W. GUTKOWSKI, Regularne Konstrukcje Prętowe, PWN, Warszawa 1973.
- 2.157. Š. HAJDU, The contribution of Czechoslovakia to the solution of problems of suspended roof structures, Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edičné stredisko, Bratislava 1975.
- 2.158. J. HAJDUK, Obliczanie jednowęzłowych dachów cięgnowych o niekołowym rzucie poziomym. Inż. i Bud., 24, 9, 1967.
- 2.159. J. HAJDUK, Obliczanie ustrojów cięgnowych podwieszonych na cięgnach brzegowych. Inż. i Bud., 25, 8, 1968.
- 2.160. J. HAJDUK, Dobór współczynnika bezpieczeństwa konstrukcji cięgnowych na zasadzie optimum ekonomicznego. Arch. Inż. Łąd., 19, 4, 1973.
- 2.161. J. HAJDUK, S. JENDO, Z. KAČZKOWSKI, Główne problemy analizy statycznej konstrukcji cięgnowych, Sympozjum nt. Mechaniki Konstrukcji Cięgnowych, Jadwisin 1972.
- 2.162. J. HAJDUK, S. JENDO, Z. KAČZKOWSKI, Podstawy teoretycznej statyki ustrojów cięgnowych. Arch. Inż. Łąd., 19, 4, 1973.
- 2.163. J. HAJDUK, J. OSIECKI, Ustroje Cięgnowe, teoria i obliczanie. WNT, Warszawa 1970.
- 2.164. F.D. HALES, A theoretical analysis of the lateral properties of suspension system. Proc. Inst. Mech. Engrs., 1964-65, 179, 2A, 73-91, Discuss. 91-97.
- 2.165. U. HANGLEITER, L. GRUNDIG, H.J. SCHEK, Beitrag zu den Genauigkeitsanforderungen bei Seilnetzen. Stahlbau, 1, 1974.
- 2.166. H. HÄHL, L'ossature metallique du pavillon des États-Unis a L'Exposition de Bruxelles 1958. Acier, Stahl, Steel, 2, 1958.
- 2.167. H. HÄHL, Die Stahlkonstruktion für den U.S. Pavillion auf der Weltausstellung in Brüssel 1958, Stahlbau, 27, 5, 1958.
- 2.168. A. HEATH, Massive ring, columns and cables, support stadium roof. Construction Methods a Equipment, 55, 12, 1973.
- 2.169. E. REDLUND, Das Jawerth System. Deutsche Bauzeitschrift, 11, 1964,.

- 2.170. V. HORAK, Vorgespanntes Seilnetzdach eines Polyekrantheatres in Prag. Hanging Roofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, 136-142.
- 2.171. R. HEILIG, Statik der schweren Seilen. Stahlbau, 23, 11, und 12, 1954.
- 2.172. R. HEILIG, Zur Theorie der schweren undenbaren Seile. Stahlbau, 24, 1955.
- 2.173. Z. HORVATH, Effect of stressing system of suspended roofs on simplification of execution, Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.174. H. HOTTINGER, Erfahrungen mit Details beim Bau von Spannseildachern. Hanging Roofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, 205-208.
- 2.175. I.G. HOTCHKISS, L'Acier a l'Exposition de New York 1964-65. Acier, Stahl, Steel, 4, 1964.
- 2.176. K. Hovath, Das Hängende Dach des Budapester Weinmuseums. Stahlbau, 32,7, 1963.
- 2.177. S. HOWARD, Prestressing prevents flutter of cable roof. Architectural Record, 126, 1959, 179-182.
- 2.178. S. HOWARD, Suspension structures. Architectural Record 128, 1960, 230-237.
- 2.179. H.S. HOWARD Jr., Suspended Structures Concepts. US. Steel Corporation Publication, Pittsburgh, Pa, 1966.
- 2.180. J. HRUBAN, Oldest funicular structures of the European Continent and their influence on further development of iron structures, Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.181. J. HRUBAN, Suspension roofs for housing and civil buildings invented in Czechoslovakia. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.182. F.H. HULL, Stability analysis of multi-level guyed towers. J. Struct. Div., ASCE, 88, ST. 2, 1962.
- 2.183. W. HUMIECKI, Dwa warianty przekrycia sztucznego lodowiska w Toruniu. Architektura, 10, 1970.
- 2.184. H.W. HUNT, Engineered structures at Expo'67. Civil Engineering, 37, 3, 1967.

- 2.185. M.A. IVANOV, T.A. USAČEV, Ekonomičeskoe obosnovanie vybora profila radialno-vantovykh pokrytij. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.186. IVOCIĆ, Nelinejnye kolebanijs gibkoj niti pri služajnom stacionarnom vozdejstvi. Priki. Mech., 3, 9, 1967.
- 2.187. W. JANKOWIAK, Praktyczny sposób wyznaczania sił i zwisów w czasie montażu. Biul. Branż. Mostostalu, Konstr. Metal., 3, 1971.
- 2.188. W. JANKOWIAK, Siatki ciągnowe rozpięte na prostokącie. Inż. i Bud., 20, 7, 1963.
- 2.189. D. JAWERTH, Spannkonstruktioner med linor. Byggnadsingenjörren, 2, 1956.
- 2.190. D. JAWERTH, Forspänd Hångkonstruktion med mot varandra spände linor. Byggnästaren, 19, 1959
- 2.191. D. JAWERTH, Vorgespannte Hångkonstruktion aus gegen-sinning gekrümmten Seilen mit Diagonalverspannung, Stahlbau, 28, 5, 1959, 126 - 131.
- 2.192. D. JAWERTH, Some counterstressed dual-cable structures. Hanging Roofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963.
- 2.193. D. JAWERTH, H. SCHULZ, Märkförankringar till Johannes hors Isstadion i Stockholm, Byggnästaren, 7, 1963.
- 2.194. D. JAWERTH, Hangar Mehrabad Teheran. Byggnästaren, 10, 1963, 251 - 252.
- 2.195. D. JAWERTH, Hangar d'avions a Mehrabad pres de Teheran, Acier, Stahl, Steel, 6, 1964.
- 2.196. D. JAWERTH, H. SCHULZ, Ein Beitrag zur Frage der Eigenschwingungen, windschafenden Kräfte und aerodynamischen Stabilität bei hängenden Dächern, Stahlbau, 35, 1, 1966.
- 2.197. D. JAWERTH, Eisstadion Stockholm-Johanneshov. Technologie, Statik, Dynamik und Bauausführung, Stahlbau, 35, 3, 1966.
- 2.198. D. JAWERTH, H. SCHULZ, Rolle des Versuchs beim Schalentwerfen Angefachte Hängedachschwingungen. Proc. IASS Sympozjum on Large Span Shells, Leningrad 1966.
- 2.199. J. JEDRZEJCZYK, J. KUBIK, Dobór parametrów materiału lepko-sprężystego ciągną. Arch. Inż. Łąd., 19, 4, 1973.

- 2.200. S. JENDO, O kształtowaniu siatek ciągnowych, Konwersatorium PTMTiS "Zagadnienia optymalizacji w mechanice", Gliwice 1967, 25 - 36.
- 2.201. S. JENDO, Optymalizacja kształtu cięgien w zależności od sposobu podparcia i rodzaju obciążenia, Konferencja ZMOC IPPT PAN, Bielsko-Biała 1967.
- 2.202. S. JENDO, Optymalizacja kształtu powierzchniowych ustrojów ciągnowych osiowo symetrycznych według kryterium minimum ciężaru, Konwersatorium PTMTiS "Zagadnienia optymalizacji w mechanice", Gliwice 1968, s. 49-80.
- 2.203. S. JENDO, Metoda wyznaczania optymalnych kształtów ustrojów ciągnowych, Konf. "Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych", Jabłonna, cz. I, Ossolineum, 1968, 158-205.
- 2.204. S. JENDO, Kształtowanie przekryć ciągnowych osiowo symetrycznych według kryterium minimum ciężaru, Konf. "Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych," Jabłonna, cz.I, Ossolineum, 1968, 106 - 231.
- 2.205. S. JENDO, Kształtowanie przekryć ciągnowych wstępnie naprężonych według kryterium wyrównania naprężeń, Konf. "Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych", Jabłonna, cz.I, Ossolineum, 1968, 232 - 253.
- 2.206. S. JENDO, Optymalizacja kształtu dwupasowych ustrojów ciągnowych wstępnie naprężonych według kryterium minimum objętości zastępczej materiału, Konf. "Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych", Jabłonna, cz.II, Ossolineum, 1969, 101 - 149.
- 2.207. S. JENDO, Przykłady i tablice do wyznaczania optymalnych parametrów kształtu ustrojów ciągnowych osiowo-symetrycznych, Konf. "Metody optymalizacji ustrojów odkształcalnych", Jabłonna, cz.II, Ossolineum, 1969, 150 - 166.
- 2.208. S. JENDO, O Optymalizacji Ustrojów Ciężnowych, Praca doktorska, IPPT PAN, Warszawa 1969.
- 2.209. S. JENDO, Optimum design method for suspended structures; Application of the minimum weight criterion, Bull. Acad. Pol. Sci., ser. Sci. Techn., 17, 2, 1969, 117 - 126.
- 2.210. S. JENDO, Optimum design method for suspended structures Application of the minimum elastic energy criterion, Bull. Acad. Pol. Sci., ser. Sci. Techn., 17, 3, 1969, 191-195.
- 2.211. S. JENDO, Optimum design of surface exi-symmetric suspended structures; Application of the minimum weight criterion, Bull. Acad. Pol. Sci., ser. Sci. Techn. 17, 3, 1969, 197 - 206.

- 2.212. S. JENDO, Optimum design of axi symmetric prestressed surface structures; Application of the stress equalization criterion. Bull. Acad. Pol. Sci., ser. Sci. Techn., 17, 4, 1969, 217 - 223.
- 2.213. S. JENDO, Metoda kształtowania ustrojów ciągnowych osiowo-symetrycznych, Rozp. Inż., 17, 2, 1969.
- 2.214. S. JENDO, Kształtowanie siatek ciągnowych obrotowo-symetrycznych z warunku wyrównania naprężeń, Arch. Inż. Łąd., 16, 1, 1970.
- 2.215. S. JENDO, Optimum design of prestressed two surface hanging structures. Arch. Inż. Łąd., 16, 4, 1970.
- 2.216. S. JENDO, Optymalizacja kształtu ustrojów ciągnowych. XVI Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii PAN i Komitetu Nauki PZITB, t. I, Krynica 1970.
- 2.217. S. JENDO, Optimum design of axially-symmetrical suspended structures, Romanian Journal of Technical Sciences, Applied Mechanics, Bucarest, 16, 3, 1971, 565-582.
- 2.218. S. JENDO, Niektóre problemy optymalizacji ustrojów ciągnowych. Sympozjum nt. "Mechaniki Konstrukcji Ciągnowych, Jadwisin 1972.
- 2.219. S. JENDO, Determination of shape of axi-symmetric hanging structures. Proc. of the 1971 IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames, Tokyo and Kyoto, October 1971, Architectural Institute of Japan, ed. by Y. Yokoo, Tokyo 1972.
- 2.220. S. JENDO, S. OWCZAREK, Przegląd prac polskich na temat konstrukcji ciągnowych. Arch. Inż. Łąd., 19, 4, 1973.
- 2.221. S. JENDO, A. STACHOWICZ, Przekrycia wiszące. Obliczenia Statyczne i Kształtowanie, Arkady, Warszawa 1974.
- 2.222. S. JENDO, A. STACHOWICZ, Optimum design of prestressed double-layer suspended system. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.223. S. JENDO, A. STACHOWICZ, Optimum design of prestressed cable nets. Proc. of CANCAM 1975.
- 2.224. S. JENDO, A. STACHOWICZ, Optimal design of suspension systems. IUTAM Sympozjum in Warsaw on Optimization in Structural Design, edited by A. Sawczuk and Z. Mróz, Springer Verlag, Berlin 1975.

- 2.225. S. JENDO, On certain problems of optimum design of cable nets. Materials of Euromech 69, International Colloquia on Large Elastic Deformations of Discrete Systems, Balatonszemes, Hungary, 1977.
- 2.226. S. JENDO, Przykłady optymalizacji w zakresie sprężystym, rozdział 4.3 w monografii "Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji" pod redakcją A.M. Brandta, PWN, Warszawa 1977.
- 2.227. S. JENDO, A. STACHOWICZ, Optymalizacja ustrojów ciągnowych, rozdział 8 w monografii "Podstawy optymalizacji elementów konstrukcji budowlanych", pod redakcją A.M. Brandta, PWN, Warszawa 1978.
- 2.228. J.J. JENSEN, Dynamic behavior of stressed ribbon structures. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.229. M. JENSEN, N. FRANCK, Proposed code of practice for wind loads for Denmark, Wind Effects on Buildings and Structures, 1, HMSO, 1965.
- 2.230. K. JERKA-KULAWIŃSKA, J. AUGUSTYN, Badanie konstrukcji przekrycia dachu hali walcowni konstrukcji metalowych. Centr. Ośr. Bad. Proj. Konstr. Metal. Mostostal, 1, 1972.
- 2.231. D. JOHNSON, D.M. BROTTON, A finite deflection analysis for space structures. Space Structures, ed. by R.M. Davies, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 1967.
- 2.232. J.J. JONATOWSKI, and C. BIRNSTIEL, Inelastic stiffened suspension space structures. J. Struct. Div., ASCE, 96, ST.6, 1970, 1143-1166.
- 2.233. T. KABAT, Własności płaskiego układu cięgien sprężonych. Inż. i Bud., 30, 5, 1973.
- 2.234. T. KABAT, Model analogowy płaskiego układu cięgien sprężonych. Inż. i Bud., 30, 6, 1973.
- 2.235. T. KABAT, Wpływ wstępnego napięcia na sztywność dźwigara ciągnowego. Inż. i Bud., 32, 3, 1975.
- 2.236. T. KABAT, Numeryczna analiza statyczna układów ciągnowych, Inż. i Bud., 34, 1, 1977.
- 2.237. T. KABAT, A. WATRAS, Numeryczna analiza stateczności układów kratowych i kratowo-cięgnowych, Inż. i Bud., 35, 7, 1978.
- 2.238. V.K. KAČURIN, Opredelenie deformacij gibkoj pologoju niti, Trudy Vojenno-transportnoj Akademii, 17, 1949.

- 2.239. V.K. KAČURIN, Vibor ocertanija pojasov vantovych ferm. Naučnye trudy Lenning. Inž. Stroitel., Gosstroizdat, 2, 1951.
- 2.240. V.K. KAČURIN, Gibkie niti s malymi strelkami, Gosstroizdat, Moskva 1958.
- 2.241. V.K. KAČURIN, O rascote krugovogo visjačego pokrytja s radialnym raspoloženem vant. V. sb Visjačie pokrytja, Gosstroizdat, Moskva 1962, 142-149.
- 2.242. V.K. KAČURIN, Teoria visjacich sistem, Gosstroizdat, Moskva 1962.
- 2.243. V.K. KAČURIN, Teoria Konstrukcji Wiszących. Arkady, Warszawa 1965.
- 2.244. J. KADLČAK, Obliczenie statyczne liny nošnej kołowego dachu wiszącego z pierścieniem środkowym. Inż. i Bud. 29, 4, 1972.
- 2.245. J. KADLČAK, Statical analysis of geometrically and physically nonlinear cable nets. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.246. P.T. KALINOVSKIJ, Novyj metod rešenija zadači o gibkoj niti. Oborongiz, Moskva 1945.
- 2.247. Z. KALMAN, Das hängende Dach des Budapester Weinmuseums. Stahlbau, 10, 1963.
- 2.248. A.K. KAR, C.Y. OKAZAKI, Convergence in highly nonlinear cable net problems. J. Struct. Div., ASCE 99, ST.3 1973.
- 2.249. J.V. KARDŽIEV, Issledovanie kanoničeskich uravnenij konstrukcji iz nitej. Inžyneryj Žurnal, 4, 4, 1964.
- 2.250. A.V. KARMISIN, Novye analogii mezdu voprosami o dviženij materjalnoj točki i voprosami o ravnovesij vpolne gibkoj niti. Sb. Statej, Voprosy mehaniki, Izdat. Moskov. Univ., 193, 1961, 11-21.
- 2.251. K.K. KARTASOVA, Visjače pokrytia obščestvennych zdanij. Architektura SSSR, 5, 1957.
- 2.252. Z. KAWECKI, J. STACHURSKI, Defektoskopia magnetyczna lin stalowych. Katowice 1969.
- 2.253. Z. KAČZKOWSKI, Z. REIPERT, Analiza kratownic ciągnowych metoda przemieszczeń. Arch. Inż. Ląd., 16, 2, 1970.

- 2.254. Z. KĄCZKOWSKI, Z. REIPERT, Kratownice ciągnowe, Arch. Inż.Łąd., 16, 2, 1970.
- 2.255. S. KEMPNY, Kształty powierzchniowe ustrojów wiszących z ciągien o minimalnej objętości. Arch.Inż.Łąd., 19, 4, 1973.
- 2.256. S. KEMPNY, Wyznaczanie kształtu powierzchniowego ustroju wiszącego o jednokierunkowym przebiegu ciągien. Arch. Inż.Łąd., 19, 4, 1973.
- 2.257. S. KEMPNY, Optymalne kształtowanie przekrycia wiszącego o jednokierunkowym przebiegu ciągien. Rozpr. Inż., 22, 3, 1974.
- 2.258. V.A. KISELEV, O formie równowesja tjażeloy niti pod dejstwem nagruzki proporcjonalnoj koordinate y. Trudy MADI, Dorizdat, 2, 1949.
- 2.259. V.A. KISELEV, Obščee uravnenie verevočnoj krivoj pri dejstvi vertikalnoj nagruzki. Trudy MADI, Dorizdat, 2, 1949.
- 2.260. O.M. KISELEV, Rešenje zadaci o rovnovesij gibkoj niti metodom izgibajuščich momentov. Uc. Zap. Kazansk. In-ta, 9, 1957, 90-94.
- 2.261. N.M. KIRSANOV, Rasčot predvaritelno naprjażennych sistem, sostojasčich iz niti, balki i gibkoj niti. Sb. tr. Voreněžak. Inż.Stroit.Institut, B7 1961, 101-118.
- 2.262. N.M. KIRSANOV, Album konstrukcij visjačich pokrytij. Vyš.Škola, Moskva 1965.
- 2.263. N.M. KIRSANOV, Deformacionnyj rasčot vantovyh kombinirovannyh sistem. Stroit. i Arch., 4, 1967.
- 2.264. N.M. KIRSANOV, Visjače Konstrukcji. Moskva 1968.
- 2.265. N.M. KIRSANOV, Visjače Sistemy Povyšennoj Žestkosti, Moskva 1973.
- 2.266. A.U. KOČEV, O.G. SULABERIDZE, Rozrabotka konstrukcii i issledovanie trecharočnogo visjačego pokrytia z treugolnoj jačejkoj vant. Proc.IASS Symposium on Cable Structures, SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.267. I.S. KOSENKO, Visjače Konstrukcji Pokrytij. Moskva 1966.
- 2.268. Z. KOWAL, Losowa nośność graniczna spójnej wiązki ciągien jako jednorodny proces stochastyczny. Arch. Inż. Łąd., 16, 3-4, 1972.
- 2.269. Z. KOWAL, Losowa nośność pręta rozciąganego jako jednorodny proces stochastyczny. Arch. Inż. Łąd., 19, 1, 1973

- 2.270. Z. KOWAL, G. LEMIESZ, Stochastic ultimate bearing capacity of non-uniformly tensioned ties as the non-homogeneous Poisson proces, Bull. Acad. Pol. Sci, ser.Sci.Techn., 20, 11, 1973.
- 2.171. Z. KOWAL, G. LEMIESZ, Probabilistic model similitude and statistical scale effect in non-uniformly tensioned ties, Bull. Acad. Pol. Sci. ser. Sci. Techn., 22, 2, 1974.
- 2.272. A.P. KOVALČUK, Iteracionnyj metod i algorytm rasceta vantovych form minimalnogo obejma, Perspektiva razvitiia i primenenia v stroitelstve metalličeskich konstrukcji. Ukr. resp. nauc.-techn. konferencija, 10, 1973.
- 2.273. J. KOZAK, Continuous cable structures of pipeline and foot bridges, Proc. IASS Symposium on Cable Structures SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.274. B. KOY, Badania modelowe sprężonej powłoki wiszącej. Inż. i Bud., 17, 7, 1960, 272 - 275.
- 2.275. B. KOY, Przyczynek do statyki powłok wiszących. Inż. i Bud., 18, 4, 1961, 159 - 163.
- 2.276. B. KOY, S.KUŚ, Przegląd światowych konstrukcji powłokowych, Sympozjum IASS w Leningradzie. Inż. i Bud., 24, 2, 1967.
- 2.277. W. KRAŚNICKI, J. RATYNSKI, J. WILBIK, Ciekawsze konstrukcje metalowe opracowane w BSiPKS "Mostostal" w Warszawie. Inż. i Bud., 27, 6, 1970.
- 2.278. P. KRISHNA, S.R. SPARKES, Analysis of pretensioned cable systems. Proceedings, The Institution of Civil Engineers, London, 39, 1968, 103 - 109.
- 2.279. P. KRISHNA, P.R. NATARAJAN, Analysis of doubly curved suspended cable roof networks. Bulletin of the International Association for Shell Structures, Madrid 1969.
- 2.280. P. KRISHNA, T.P. AGARWAL, Study of suspended roof model. J. Struct. Div., ASCE, June, 1971.
- 2.281. J. KUJAWSKI, Maksimum nacięgu cięzna wiotkiego. Arch. Inż. Łąd., 17, 4, 1971.
- 2.282. J. KUJAWSKI, Zastosowania szeregów Fouriera do wyznaczania charakterystyk obciążenia cięzna. Arch. Inż. Łąd., 17, 3, 1971.
- 2.283. J. KUJAWSKI, Obliczanie cięgien wiotkich sposobem energetycznym. Arch. Inż. Łąd., 18, 2, 1972.

- 2.284. J. KUJAWSKI, Równanie cięna wiotkiego przy założonej długości wyjściowej. Inż. i Bud., 29, 3, 1972.
- 2.285. J. KUJAWSKI, Wyznaczanie charakterystyki obciążenia cięna wiotkiego metodą iteracyjną. Inż. i Bud., 30, 2, 1973.
- 2.286. V.R. KULBACH, Uproščennyj rasčet predvaritelno-naprjazennyh visjačich pokrytji otricatełnoj krivizny. Tr. Tallinsk. Politech.In-ta, 17, 200, 1963, 63-79.
- 2.287. V.R. KULBACH, O povodennii visjačych pokrytjij otricatełnoj krivizny z konturom maloju izgibnoj žestkosti. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.288. V.V. KUPRANOV, Oboločka vraščeniija pokrytja /vantovaja konstrukcija/ minimalnogo vesa pri osesimetričnoj nagruzke. V sb. Rasčet Prostranstvennyh Konstrukcij, Moskva 1964.
- 2.289. O.A. KURBATOV, Industrialnye metody izgotovlenija i montaža visjačich pokrytjij, Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.290. G.I. KURDAKOVA, N.S. MOSKALEV, Rasčet po deformacijam radialnogo pokrytija iz nitej z izgibnoj žestkostiu. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.291. S. KUŚ, W. ZALEWSKI, Konstrukcja budynku Supermarket w Warszawie. Inż. i Bud., 16, 9, 1959.
- 2.292. S. KUŚ, Niektóre zagadnienia konstrukcyjne i wytrzymałościowe powłokowych przekryć dachowych. Inż. i Bud., 18, 2, 1961.
- 2.293. S. KUŚ, Pawilony sportowe AWF w Warszawie, Inż. i Bud., 20, 7, 1963.
- 2.294. S. KUŚ, Konstruktionslösungen von Hängedachern in Polen. Bauplanung Bautechnik, 9, 1964.
- 2.295. S. KUŚ, R. MISIAK, Własności wytrzymałościowe splotów i lin. Inż. i Bud., 25, 7, 1968.
- 2.296. S. KUŚ, R. MISIAK, W. NOWAKOWSKI, Badania wytrzymałościowych właściwości splotów 7 x 2,5; 7 x 5 i 19 x 2,5. Inż. i Bud., 26, 3, 1969.
- 2.297. S. KUŚ, J. RZYSKO, Badania eksperymentalne i projektowanie konstrukcji ciągnowych. Arch. Inż. Łąd., 19, 4, 1973.

- 2.298. E.N. KUZNECOV, Některýe voprosy rasčeta visjačich pokrytii. V sb. Visjačie pokrytja, Gosstr., Moskva 1962, 92 - 122.
- 2.299. E.N. KUZNECOV, Statičeskij rasčet dvuchpojasnyh vantovyh sistem. Stroitel'naja Mehanika i Rasčet Sooruzenij, 5, 1962, 7 - 14,
- 2.300. E.N. KUZNECOV, RASČOT visjačich pokrytii krugovogo očertanija v plane. Tr. N-i Instituta Betona i Želazobetona, Akad.Str-va i Architektury SSSR, 2, 1962, 57 - 113.
- 2.301. E.N. KUZNECOV, Visjačie pokrytja s radialnoj setkoj vant. Izv. Str-va i Architektury SSSR, 1, 1963, 80-87.
- 2.302. E.N. KUZNECOV, Mgnovenno-žestkie vantovye setki. Sb. statej, Issedovanija po teorii sooruzenij, 13, 231-236, Stroizdat, Moskva 1964.
- 2.303. E.N. KUZNECOV, O geometrii visjacich pokrytii s radialnoj setkoj vant i bezmomentnym konturnym kolcom. V sb. Teorja oboloček i plastin, AN. SSSR, Erevan 1964, 613-620.
- 2.304. E.N. KUZNECOV, Statičeskie seti poverchnostej. V sb. Stroitel'naja Mehanika, Moskva 1964.
- 2.305. E.N. KUZNECOV, Osnovnye uravneija statiki uprugoj seti, Trudy VI Vsesojuznoj Konferenciji po Teorii Oboloček i Plastinok, Baku 1966.
- 2.306. E.N. KUZNECOV, Někotorye voprosy stitiki uprugoj seti. Stroit. Mech. i Rasčet Sooruz., 2, 5, 1966.
- 2.307. E.N. KUZNECOV, Radjalnyje Vantovyje Sistemy. Gos. Izd. Liter. po Stroit. Arch. i Stroitel'nyh Materialam, Moskva 1963.
- 2.308. E.N. KUZNECOV, Vvedenje v Teoriju Vantovyh Sistem. Iz-vo Literatury po Stroitel'stvu, Moskva 1969.
- 2.309. Ch. Laul, V.R. Kulbach, A. Sumbak, O voprosach statičeskovo rasčeta i izpypanija konstrukciji pokrytja tallinskoj pevčeskoj estrady. Trudy Tall-go politgo In-ta, 184, 1961.
- 2.310. Ch. LAUL, V.R.KULBACH, Is opyta modelirovania i ispytania visjačego pokrytia Tallinskoj pevčeskoj estrady. Visjače Pokrytia, Moskva 1962.
- 2.311. E.W. LEE, Non-linear forced vibration of stretched string. British Journal of Applied Physics, 8, 10, 1957, 411-413.

- 2.312. T.E. LELAND, Short span sag calculations with insular bells. Journal of the Power Division, ASCE, 91, PO.1, 1965.
- 2.313. F. LEONHARDT, H. EGGER, E. HAUG., The German Pavilion at Expo '67 Montreal- A prestressed cable network structure, /in German/, Stahlbau, 37, 4, 1968, 97-105.
- 2.314. F. LEONHARDT, J. SCHLAICH, Vorgespannte Seilnetzkonstruktionen - Das Olympiastadion in München, STAHLBAU, 9, 10, 12, 1972 und 2, 1973
- 2.315. V.V. LESNIKOV, Voznikovenie i rasvite visjačich pokrytij krugovovo očertanija v plane. Trudy NIIŽB, 2, 1962.
- 2.316. S. LESSAER, Wyznaczenie kształtu lin nośnych w osiowo symetrycznych powierzchniowych urządzeniach wiszących obciążonych ciężarem własnym. Arch.Inż.Ląd., 9, 4, 1963.
- 2.317. S. LESSAER, Sposób ekonomicznego kształtowania osiowo symetrycznych powierzchniowych urządzeń wiszących. Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej, Budown., 14, 1964.
- 2.318. W. LI, Elastic flexible cable in plane motion under tension. Trans. ASME, 81, E26, 1959, 587-597.
- 2.319. A.F. LILEEV, Obščee rešenje i rasčet uprugich nitej na uprugich oprach. Materiały po Metaličeskim Konstrukcjam, 7, Gosstroizdat, Moskva 1962, 55-73.
- 2.320. A.F. LILEEV, Rasčet uprugich setčatych vantovyh pokrytji. Metaličeskie Konstrukcji, Moskva 1966.
- 2.321. A.F. LILEEV, E.N. SELEZNEVA, Metody Rasčeta Prostranstvennyh Vantovyh Sistem. Moskva 1964.
- 2.322. T.Y. LIN, B.W. YOUNG, Two large shells of post-tensioned precast concrete. Civil Engineering, 35, 7, 1965.
- 2.323. M.E. LIPNICKIJ, O primenenij visjačej konstrukciji v promyšlennom stroitelstve. Prom. Str-vo, 5, 1962, 23-6.
- 2.324. J.G. LJUDKOVSKIJ, Podvesnye konstrukciji pokrytji v SSSR i za rubežom. Architektura SSSR, 1, 1960.
- 2.325. J.G. LJUDKOVSKIJ, Charakterystyka vantovyh sistem i visjačich oboloček i nekotorye rekomendacii po ich proektirovaniju. Trudy NIIŽB, 2, 1962.
- 2.326. J.G. LJUDKOVSKIJ, Sovremennoe sostojanie i perspektivy primenienia visjačich pokrytij. Visjače pokrytia, Moskva 1962.
- 2.327. J.G. LJUDKOVSKIJ, On the choice of the optimum types of suspended roofs and of their bearing contours. Hanging Roofs. North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963. 176-189

- 2.328. J.G. LJUDKOVSKIJ, Visjaće pokrytia krugovogo ocertania v planie. Trudy NIIŽB, Moskva 1962.
- 2.329. M. ŁUKOWIAK, E. SAS, Zastosowanie rachunku macierzowego do rozwiązania dźwigarów linowych. Arch. Inż.Łąd., 16, 4, 1970.
- 2.330 R.N. MACELINSKI, Statieskij Rasčet Gibkich Visjaących Konstrukcji. Stroizdat, Moskva 1950.
- 2.331. R.N. MACELINSKI, Statieskij rascet gibkich visjaących niti. Stroit. Mechanika i Rasčet Sopruženij, 4, 1959, 3-9.
- 2.332. R.N. MACELINSKI, Rasčet gibkich nitej na proizvolnuju viertikalnuju nagruzku. Visjaće Pokrytia, Gosstroizdat Moskva 1962.
- 2.333. G. MAIER, O.De DONATO, Elastic analysis of plane pre-tensioned systems. Proc. of the Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames, Tokyo and Kyoto, October 1971, ed. by Y. Yokoo, Architektural Institute of Japan, Tokyo 1972.
- 2.334. M. MAJOWIECKI, Structures suspendues, systeme Jawerth, Acier, Stahl, Steel, 4, 1971.
- 2.335. F.E. MARBLE, The motion of a finite elastic cable. Report on North American Instruments, Inc. Altadena, California, 1954.
- 2.336. E. MARKLAND, Defection of a cable due to a single poin load. Philosophical Magazine, 42, 33, 1951.
- 2.337. W. MARIANOWSKI, Macierzowa metoda obliczania ortogonalnej siatki ciągnowej. Inż.i Bud., 34, 6, 1977.
- 2.338. J. MARTIN, Sag calculations by use of Martin's Tables. Copperweld Steel Company, Wire and Cable Division, Glassport, Pennsylvania 1931.
- 2.339. A. MATYSIAK, Sztywność konstrukcji wiszących wstępnie napiętych. Inż. i Bud., 26, 12, 1969.
- 2.340. M. MATEJER, Geneza przekryć wiszących w architekturze Bułgarii, Architektura, 1, 1971.
- 2.341. I.J. MASLENNIKOVA, Statieskij rasčet gibkoi niti, Stroit. i Archit., 2, 1965, 26-39.
- 2.342. Z. MAZURKIEWICZ, Kształtowanie osi łuków nie podlegających zginaniu pod wpływem danego obciążenia. Arch. Inż.Łąd., 4, 1, 1958.

- 2.343. J.M. McCORMICK, J.P. WRIGHT, Discussion of "Nonlinear field analysis of structural nets", by R. Richard Avent, J. Struct. Div., ASCE, 96, ST.3, 1970, 729-731.
- 2.344. W. McDANIELS, An analysis of galloping electric transmission lines, Transactions, American Institute of Electrical Engineers, 79, Part 3, 1960.
- 2.345. R.L. MEDLIN, Prestressed membrane tension structures. Progressive Architecture, 46, 1965, 162-167.
- 2.346. N.P. MELNIKOV, Metaliceskie konstrukcje za rubiezom. Moskva 1971.
- 2.347. F.S. MERRITT, Curved roof on cables spans big arena. Engineering News Record, 5, 1953.
- 2.348. J. MLYNARCZYK, Dach wiszący w sali gimnastycznej w Zakopanem. Przegląd Budowlany, 33, 5, 1961.
- 2.349. A. MALJUK, Lucevyje vantovyje fermy. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.350. M.B. MAWAL, S. MAHAVEER, Long span structures. Civil Eng. Constr., Public Works, J., 6, 3.
- 2.351. M.J. MEFELD, N.A. TELEPNEV, Vlijane predelnych uslovij raboty vant na ustojčivost stojki. Soprotivlenie materialov i Teoria Ssooruženij, Vyp. 20, Budiivelnik, Kiev 1973.
- 2.352. J. MICHAELOS, C. BIRNSTIEL, Movements of a cable due to changes in loading. Trans. ASCE, 127, Part 2, 1962, 267-282.
- 2.353. J. MICHAELOS, C. BIRNSTIEL, Movement of a cable due to changes in loading, J. Struct. Div., ASCE, 86, ST.12, 1960, 23-38; Discussion: 87, ST.5, 1961, 89-90; 87, ST.7, 1961, 263-279; Reply: 88, ST.1, 1962, 191-194.
- 2.354. G.W. MIDDLETON, Static analysis of cable antenna systems, Phd Thesis, Colorado State University, 1967.
- 2.355. C.A. MILLER, R.F. KAMM, Dynamic analysis of non-orthogonal grid systems. Space Structures, ed. by R.M. Davies John Wiley and Sons, New York N.Y., 1967.
- 2.356. H.A. MIKLOFSKY, M.G. ABEGG, Design of guyed towers by interaction diagrams. J. Struct. Div., ASCE, 92, ST. 1, 1966.
- 2.357. A. MITZEL, A. DZIENDZIEL, Badania modelowe przekrycia dachowego w postaci koła rowerowego. Inż. i Bud., 19, 1, 1962.

- 2.358. J. MLYNARCZYK, Dach wiszący w sali gimnastycznej w Zakopanem. Przegląd Budowlany, 5, 1961.
- 2.359. P. MOENAERT, Toitures et parois en cables precotrints. Acier, Stahl, Steel, 7-8, 1960.
- 2.360. H. MOLLMANN, A Study in the Theory of Suspension Structures. Akademisk Forlag, Denmark, 1965.
- 2.361. H. MOLLMANN, Suspension Structures. Akademisk Forlag, Denmark, 1965.
- 2.362. H. MOLLMANN P., MORIENSEN, The analysis of prestressed suspended roofs /cable nets/, Space Structures, ed. by R.M. Davies, John Wiley and Sons. Inc., New York, N.Y., 1967.
- 2.363. H. HOLLMANN, Analysis of hanging roofs using the displacement method. Acta Polytechnica Scandinavica, C, 168, 1971, 1-49.
- 2.364. T.P. MORAN, A basic mathematical model for cable networks. J. Archit. Struct., Cornell University, College of Architecture, 1, 1, 1966.
- 2.365. N.S. MOSKALEV, Rasčet visjaciich sistem po predelnym sostojanijam, V sb. Metalič. Konstrukcii, Moskva 1966, 272-281.
- 2.366. N.S. Moskalev, V.N. Labutin, Kominirovannoe vantovoe pokrytie dla odnoetažnyh promyšlennyh zdaniy. Izv. vyss. ucebn. zavedenij, Stroit. i Archit., 5, 1973.
- 2.367. N.S. MOSKALEV, G.P. KOROTKINA, Nesuščaja sposobnost trosovyh konstrukcii. Stroit. Mech. i Rasčet Sooruz., 2, 1974.
- 2.368. L.S. MOSKIN, Opredelenie optimalnyh usilij predvantelno go napraženia dla kombinirovannyh vantovyh sistem, Metalličeskie i plastmassovyje konstrukcii, Budivelnik, Kiev 1973.
- 2.369. L.S. MOSKIN, Optimalnoje usilenie predvaritelno napražennyh vantovyh konstrukcij, Metalličeskie i plastmassovyje konstrukcii, Budivelnik, Kiev 1973.
- 2.370. L.G. MUCHADZE, Približennyj rasčet dvuchpojasnyh predvaritelno napražennyh vantovyh sistem. V sb. Voprosy Rasčeta Složn. Statičeski Nieopred. Sistem, Mecniereba, Tbilisi 1966, 5-14.
- 2.371. L.G. MUCHADZE, N.P. CKUASELI O.G. SULABERIDZE, Nekotorye racjonalnye vidy visjaciich pokrytij. V sb. Voprosy Rasčeta Složn. Static. Neopr. Sistem, Mecniereba, Tbilisi 1966, 15-21.

- 2.372. L.G. MUCHADZE, Rešenje Nekotorych Zadač Teorii Uprugich Oboloček i Visjačich Sistem. Mecniereba, Tbilisi 1973.
- 2.373. N.V. MUCHSINA, Osobennosti raboty predvaritelno napryazhennykh visjačich sistem s vantovymi fermami žestkosti. Perspektiva razvitiia i primeniienia v stroitelstve metalličeskikh konstrukciji. Ukr. resp. nauc.-techn. konferencija, 1973, Dnepropetrovsk, Tezisy dokladov, Kiev 1973.
- 2.374. T.A. MURRAY, N. WILLEMS, Analysis of inelastic suspension structures. J. Struct. Div., ASCE, 97, 1971, 2791-2806.
- 2.375. G. MURTHY, B. RAMKRISHNA, Non-linear character of resonance in stretched strings. J. of the American Acoustic Society, 38, 3, 1965, 461-467.
- 2.376. T. NAWROT, Badania i przydatność dla budownictwa zużytych lin stalowych stosowanych w przedsiębiorstwach geologicznych. Inż. i Bud., 28, 1, 1971.
- 2.377. C.A. NECHAEV, Nekotorye voprosy kolebanij i ustoičivosti gibkoj nerastjazimoi niti na zestkikh i uprugich oporach. Dissertacija, MISI, 1958.
- 2.378. T.A. NECHAEV, Nekotorye voprosy statiki i dinamiki gibkoj nerastjazimoi niti. Naučn. dokl. vysšej školy, Stroitelstvo 1, 1959.
- 2.379. B.K. NEMČIMOV, Nekotorye voprosy optimalnogo proektirovaniia visjačich sistem konečnoj izgibnoj žestkosti. Perspektivy razvitiia i primeniienia v stroitelstvie metalličeskikh konstrukciji. Ukr. resp. nauc.-techn. konferencija 1973, Dnepropetrovsk, Tezisy dokladov, Kiev 1973.
- 2.380. V.F. NIKIFOROV, O rasčete kombinirovannykh konstrukcij s treugolnoj rešetkoj vantovoi fermy. Stroit. mech. i rasčet sooruz., 5, 1973.
- 2.381. V.F. NIKIFOROV, O metodike rasčeta kombinirovannykh sistem. Izv. vuzov, Stroit. i Archit., 11, 1973.
- 2.382. N.A. NIKONOV, Opyt proektirovaniia i stroitelstva visiačykh pokrytij v Baku. Visiačie pokrytia, Moskva 1962.
- 2.383. H. Odenhausen, Statistical principles of application of steel wire ropes in structural engineering. Acier, Stahl, Steel, 1965, 51-65.
- 2.384. H. ODENHAUSEN, Grande tribune pour l'avenue de Madison Square Garden. Acier, Stahl, Steel, 78, 1968.
- 2.385. E.G. ODLEY, Analysis of high guyed towers. J. Struct. Div., ASCE, 92, ST.1, 1966.

- 2.386. P.M. OGIBALOV, J.M. TJUNEEVA, Polnye statičeskie diagramy naprjaženija deformacii stalnykh trosov. Sb. Stat., Voprosy mekhaniki, Izd. Moss. Univ., 193, 1961.
- 2.387. S.S. ONISIN, Optimalnoe proektirovanie predvaritelno naprjažennykh kombinirovannykh vantovykh sistem s učetom deformativnosti schemy. Perspektiva razvitiia i primenenie v stroitelstve metalličeskikh konstrukcii. Ukr. resp. nauc.-techn. konferencija, 1973, Dnepropetrovsk. Tezisy dokladov, Kiev 1973.
- 2.388. W.T. O'BRIEN, A.J. FRANCIS, Cable movements under two-dimensional loads. J. Struct. Div., ASCE, 90, ST.3, 1964, 89-123.
- 2.389. W.T. O'BRIEN, General solution of suspended cable problems. J. Struct. Div., ASCE, 93, ST.1, 1967, 1-26.
- 2.390. W.T. O'BRIEN, Behavior of loaded cable systems, J. Struc. Div., ASCE, 94, ST.10, 1968, 2281-2302.
- 2.391. D.W. OPLINGER, Frequency response of a non-linear stretched string. J. of the Acoustic Society of America, 32, 12, 1960, 1529-1538.
- 2.392. F. OTTO, Das Hängende Dach. Bauwelt Verlag, Berlin 1953.
- 2.393. F. OTTO, The Hanging Roof, Ullstein Verlag, Berlin 1954.
- 2.394. F. OTTO, Dachy Wiszące, Arkady, Warszawa 1959.
- 2.395. F. OTTO, Zugbeanspruchte Konstruktionen für mehrgeschossige Bauwerke. Deut. Bauztschr., 7, 1962, 1073-80.
- 2.396. F. OTTO, R. TROSTEL, Zugbeanspruchte Konstruktionen, Vol. 1, Ullstein Fachverlag, Berlin 1962, translated by the Israel Program for Scientific Transtations and published as Tensile Structures, Vol. 1, MIT Press, Cambridge, Mass., 1967.
- 2.397. F. OTTO, F.K. SCHLEYER, Zugbeanspruchte Konstruktionen Vol.2 Ullstein Fachverlag, Berlin 1966, translated by the Israel Program for Scientific Translations and published as Tensile Structures, Vol. 2, MIT Press, Cambridge, Maes., 1969.
- 2.398. F. OTTO, F.K. SCHLEYER, Tentovye i vantovye stroitelnye konstrukcii, Moskva 1970.
- 2.399. M. OZKER, J. SMITH, Factor influencing the dynamic behaviour of tall stacks under action of wind. Trans. ASME, 78, 6, 1956, 1381-1392.
- 2.400. Z. PACZKOWSKI, T. KRAWCZAK, M. HAMBERG, Wybrane zagadnienia statyki i stateczności układów ramowo-ciężnowych. Sympozjum nt. Mechaniki Konstrukcji Ciężnowych, Jedwisin 1972.

- 2.401. Sz. PAŁKOWSKI, Obliczanie ustrojów ciągnowych złożonych z jednokierunkowego układu lin. Inż. i Bud., 34, 3, 1977.
- 2.402. Sz. PAŁKOWSKI, Iteracyjno przyrostowa metoda obliczania wstępnie sprzężonych ustrojów ciągnowych. Arch.Inż.Ląd. 24, 2, 1978.
- 2.403. Z. PARZNIIEWSKI, A. STACHOWICZ, Uproszczony sposób obliczania dwupasowych dźwigarów ciągnowych. Inż. i Bud., 29, 4, 1972.
- 2.404. Z. PARZNIIEWSKI, A. STACHOWICZ, Racjonalne kształtowanie płaskich dźwigarów ciągnowych. Arch. Inż.Ląd., 4, 19, 1973.
- 2.405. D.R. PEIRCE, Cantilever designs for hangars. Consulting Engineer, Dec. 1956, 49-53.
- 2.406. B. PEŃSKO, L. FILIPCZYŃSKI, O. WISZNIEWSKI, Z. KAWECKI, Zastosowanie ultradźwięków do badania wytrzymałości złączeniowej drutów stalowych lin. Arch.Inż.Ląd., 19, 4, 1973.
- 2.407. V.V. PETROV, K rasčetu pologich oboloček pri koniačnych progibach. Naucn. dokl.vyšej školy, Stroitelstvo, 1, 1959.
- 2.408. A.W. PIERELMUTER, Ustroje Prętowo-Ciągnowe. Arkady, Warszawa 1972.
- 2.409. J. PIETRZAK, R. TRAFAS, Analiza statyczna przestrzennych układów ciągnowych. Arch.Inż.Ląd., 1975.
- 2.410. L. PILICH, Hala montażowa Przedsiębiorstwa Wystaw i Targów w Warszawie. Inż. i Bud., 19, 7, 1962, 264-267.
- 2.411. E. PILISZEK, W. ZALEWSKI, Hala widowiskowo-sportowa w Katowicach. Inż. i Bud., 17, 4, 1960.
- 2.412. I.L. PIMENOV, Sovešenie po predvaritelnom metaličeskim i vantovym konstrukcjam. Stroit.mechan. i rasčot sooruženii, 48, 3, 1962.
- 2.413. A.C. PIPKIN, R.S. RIVLIN, Minimum weigh desing for pressure vessels reinforced with inextensible fibers. J. of App. Mech., 30, ser. E, 1, 1963
- 2.414. M. PIRNER, Statičeskoe rešenje predvaritelno naprjažennych vantovych visjacich pokrytii. Inż.Stavby, 10, 11, 1962, 431-436.
- 2.415. M. PIRNER, Podwójnie zakrzywione sprzężone siatki linowe pod obciążeniem statycznym i dynamicznym. Arch. Inż. Ląd., 11, 1, 1965, 29-38.

- 2.416. M. PIRNER, Actual effect of wind on suspended roofs. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS-Edičné stredisko, Bratislava 1975.
- 2.417. F. PLATTE, Die Olimpia-Sporthalle in Squav-Valei. Stahlbau, 2, 1960.
- 2.418. Ja.F. POGREBNOJ, A.P. TEREŠČENKO, Metalloplastmassovye kapyty dla springelnyh i vantovyh sistem. Metalličeskie i plastmassovye konstrukcii, Budivelnik, Kiev 1973.
- 2.419. L.N. POKROVSKIJ, O dinamičeskom rasčete radialnyh vantovyh sistem. Stroit. mech. i rasčet sooruz., 5, 1973.
- 2.420. N.N. POPOV, B.S. RASTORGUJEV, Dynamicskij rasčet visjačich sistem. Stroizdat, Moskva 1966.
- 2.521. T.J. POSKITT, R.K. LIVESLEY, Structural analysis of guyed masts. Institution of Civil Engineers, Proc., 24, March 1963.
- 2.522. T.J. POSKITT, Application of elastic catenary functions to the analysis of suspended cable structures, Structural Engineer, 41, 5, 1963, 167-1970.
- 2.523. T.J. POSKITT, Analysis of Suspended Cable Structures. PhD Thesis, Cambridge University, 1963.
- 2.524. T.J. POSKITT, The free oscillation of suspended cables. Structural Engineer, 42, 10, 1964, 351-354.
- 2.425. J. POSTULKA, Sportova hala s visutou strechou v Bratislave. Inž. Stavby., 2, 1963, 41-6.
- 2.426. J. POSTULKA, Circular utility structures with hanging roofs. SNTL Technical Digest, 6,7, 1964, 43-48.
- 2.427. J. POSTULKA, N.AMON, Pokrytie sportivnogo zala v Bratislave. Proc. IASS Symposium in Leningrad, 1966.
- 2.428. A.Ja. PRICKER, I.N. LEBODIC, Konsolnopodvesnoe pokrytie posadočnogo pavilona aeroportu, Metalličeskie i plastmassovye konstrukciji, Budivelnik, Kiev 1973.
- 2.429. K.G. PROTASOV, Novye vantovye fermy. Transželdorizdat, Moskva 1963.
- 2.430. G.J. PŠENIČNOV, K rasčotu visjačich pokrytij kruglyh v plane. Inžinernyj žurnal, 2, 3, 1962, 189-193.
- 2.431. G.J. PŠENIČNOV, K rasčetu visjačich pokrytij. V sb. Teorija oboloček i plastin, AN. Arm. SSR, Erevan, 1964, 824-825.

- 2.432. A.G. PUGSLEY, On the natural frequencies of suspension chains. *Quart. J. Mech. and App. Math.*, 2,4, 1949, 412-418.
- 2.433. A.G. PUGSLEY, The gravity stiffness of a suspension bridge cable. *Quart. J. Mech. and App. Math.*, 5, 4, 1952.
- 2.434. A.G. PUGSLEY, *The Theory of Suspension Bridges*, 2nd ed., Edward Arnold Ltd., London 1968.
- 2.435. I.M. RABINVIČ, *Visjače Pokrytia*. Gosstroizdat, Moskva 1962, tłumaczenie na niemiecki jako *Hängedächer*. Bauverlag, Berlin 1966.
- 2.436. I.M. RABINVIČ, O statičeskom rasčete gibkoj niti pri bolšykh provisjačach. *Stroitel'naja mehanika i rasčet sooruzenii*, 5, 1963, 16-22.
- 2.437. M. RADWAŃSKA, Z. WASZCZYŹYŹYN, Iteracyjne obliczanie linowych ustrojów dwupasowych. *Czasop. Techn.*, 142, 1-B, 1971.
- 2.438. G.E. RAJNUS, *Rasčet prostranstvennoj setki iz trosov. Teoria plastin i obolocek*, AN. USSR, Kiev 1962.
- 2.439. G.E. RAJNUS, Principy rasčeta visjačich pokrytii s nesušej konstrukcej iz gibkich nitej. V sb. *visjačie pokrytja*, Gosstroizdat, Moskva 1962, 123-141.
- 2.440. G.E. RAJNUS, *Staticseskij rasčet fera iz trosov*, Leningrad 1962.
- 2.441. G.E. RAJNUS, K rasčetu visjačich pokrytii s prostranstvennoj predvaritelno natjanutoj setkoj iz trosov. *Armocementn. konstrukcii v stroitelstve*, Gosstroizdat, Leningrad 1963, 101-114.
- 2.442. G.E. RAJNUS, *Upravlenie kolebanij visjačich pokrytij*. V kn. *Teoretičeskaja mehanika, Soprotivlenie materiatov, Stroitel'naja mehanika*, Doklady na XXII naučnoj konferencii, Leningrad 1964.
- 2.443. G.E. RAJNUS, *Rasčet mnogoproletnyh trosov i mnogoproletnyh ferm iz trosov*. Stroizdat, Leningrad 1968.
- 2.444. G.E. RAJNUS, A.A. GOLUBEV, O rasčete vantovyh pokrytij na sejsmičeskie vozdejatva, *Rasčet, proektrirovanie i vozvedenie sejsmostojkich prostranstvennyh konstrukcij*, Vsesojuznye soveščane, 1973.
- 2.445. G.E. Rajnus, *Osnovy analiza i sinteza mgnovennožestkikh žarnirosteržnevych sistem*, Proc. IASS Symposium on Cable Structures SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.

- 2.446. A.N. RAZMADZE, Novejšie visjacie konstrukciji pokrytii bolšeprolatnykh sooruzhenij i osnovy ich rasčeta. Tr. Gruz. politech.in-ta, 1, 86, 1963.
- 2.447. A.N. RAZMADZE, Ju.K. MELAŠVILI. Radialnolučevye kombinirovannye vantovye fermy. Stroit. i Archit., 10, 1973.
- 2.448. T. REZLER, Hala sportowa huty Baildon w Katowicach. Architektura, 10, 1970.
- 2.449. R. RICOLAIS, Le planchers de grande portee a deformation nulle, Architecture d'Aujourd, 168, 8, 1973.
- 2.450. V.G. RIEKAC, Priloženie teorii kolebanij gibkich nitej k rasčetu podvesnykh kanatnykh dorog. Sbornik MISI, 2, Stroizdat, Moskva 1949.
- 2.451. F.O. RINGLEB, Dynamics of a moving cable. Naval Air Material Center, Philadelphia, Pennsylvania, Report M-4812, 1948.
- 2.452. F.O. RINGLEB, Motion and stress of an elastic cable due to impact. J.App. Mech., Trans. ASME, 79, 417-425.
- 2.453. I.I. RIPISKIJ, O sovместnom učete izgiba i rastžajenia nitej ortogonalnoj vantovoj setki, nesuščej poperečnuju nagruzku. Stroit mech. i rasčet sooruz., 8, 1973.
- 2.454. R.S. RIVLIN, Plane strain of a net formed by inextensible cords. Rational Mech. and Analysis, 6, 1955.
- 2.455. J.H. ROHRS, On the oscillations of a suspended chain. Trans. Cambridge Philosophical Society, 9, 1851, 397-398.
- 2.456. B. ROLLER, Rasčot podvesnykh perekrytij na osnove teorii vtorogo porjadka. Melyépitestud. szemle, 12, 1962, 568-574.
- 2.457. B. ROLLER, Berechnung doppelt gekümmter, gespannter Dächer auf Grund der Theorie II Ordnung. Bautechnik, 40, 2, 1963, 48 - 52.
- 2.458. G. ROMARO, Le tecniche di costruzione e montaggio nella fase progettuale sella tensostrutture. Construzioni Metalliche, 5, 1973.
- 2.459. B. ROSENKRANZ, Stabilizacja modulujs uprogosti stalnych kanatov. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.460. R. ROWE, Amplification of stress and displacements in quayed towers. J. Struct. Div., ASCE, 84, ST.6, 1958, 1-19.

- 2.461. E.H. ROWLAND, Graphic analysis of guyed masts. Structural Engineering, 46, 5, 1968.
- 2.462. R. RUKKA, M. SZWARC, Kotwienie lin odciągowych za pomocą stalowych kotwi przenośnych. Inż. i Bud., 22, 5, 1965.
- 2.463. A.R. RZANICYN, Statika i dynamika pologoj uprugoj nitki. Trudy soveščania po issledovanii i vniedrenii visjačykh pokrytij, Visjace pokrytia, Gosstroizdat, Moskva 1962.
- 2.464. S.A. SAAFAN Theoretical analysis of suspension bridges. J. Struct. Div., ASCE, 92, ST.4, 1966, 1-11.
- 2.465. K.V. SACHNOVSKI, B.V. GORENSTEIN, V.D. LINECKIJ, Sbornye tonkostennye prostranstvennyye i bolšeproletnyye konstrukcii. Izd. literatury po stroitelstvu, Moskva 1969.
- 2.466. H. SAMELSON, Unsolicited commentary and comparison of plan recommendations on Manhattan Bridge Report. Proc. IASS Symposium on Cable Structures SVTS-Edične strédisko, Bratislava 1975.
- 2.467. H. SANDI, O rasčete gibkich sooruzhenii pri vozdejstvi vetra. Stroit. mech. i rasčet sooruz., 3, 1962, 30-32.
- 2.468. S. SANTATHAPORN, and W.F. CHEN, Interaction curves for sections under combined biaxial bending and axial forces. Bulletin 148, Wedling Research Council, 1970.
- 2.469. E. SASS, M. ŁUKOWIAK, Zastosowanie rachunku macierzowego do rozwiązywania dwupasmowych dźwigarów linowych. Arch. Inż. Łąd., 16, 4, 1970.
- 2.470. D.S. SAXON, A.S. CAHN, Modes of vibration of a suspended chain. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 6, 3, 1953, 273-285.
- 2.471. J.B. SCALZI, W. PODOLNY, Jr. W.C. TENG, Design fundamentals of cable roof structures, Booklet ADUSS 55-3580-01, United States Steel Corp., Pittsburgh, Pa, 1969.
- 2.472. V.S. ŠČEDROV, Osnovy Mechaniki Gibkoj Niti, Mašgiz, Moskva 1961.
- 2.473. G.G. SCHIERLE, Lightweight Tension Structures, Department of Architecture, University of California, Berkeley, Calif., 1968.
- 2.474. H. SCHÖN, F. MASANS, Constructions metalliques untriennes a l'Exposition Internationale de Bruxelles 1958, Acier, Stahl, Steel, 3, 1958.

- 2.475. F. SCHLEYER, Über die Berechnung von Seilnetzen, Dissertation, Technische Universität, Berlin 1960.
- 2.476. F. SCHLEYER, Die Berechnung von Seilnetzen. Hanging Roofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1963, 48-55,
- 2.477. Z. SCHNEIGERT, Koleje Linowe Napowietrzne. Warszawa 1957.
- 2.478. A. SCHOENWITZ, Dach wiszący z wieloprzęsłowych ciągien. Inż. i Bud., 20, 8-9, 1963, 325-327.
- 2.479. M. SCHUPACK, Cable-supported roof cuts cost. Civil Engineering, 28, 4, 1958.
- 2.480. Z. SCIŚLEWSKI, Zabezpieczenie kabli sprężających konstrukcje stalowe. Inż. i Bud., 26, 3, 1969.
- 2.481. A.C. SCORDELIS, F. BARON and T.Y. LIN, Optimum design of two large span shells of post-tensioned precast concrete. Proc. IASS Congress on Large Span Shells, vol. 1, Leningrad 1966.
- 2.482. F.N. SEVERUD, Cable suspended roof for Yale Hockey Rink. Civil Engineering, 28, 9, 1958.
- 2.483. H.H. SEYMOUR Jr., Suspended structures-concept. Booklet ADUSS, 55-1898, U.S. Steel Corp., Pittsburgh, Pa, 1966.
- 2.484. F.W. SHAW, Some notes on cable suspension roof structures. Journal of Institute of Engineers, 36, 4-5, 1964, 105-113.
- 2.485. S. SHORE, G.N. BATHISH, Membrane analysis of cable roofs, Space Structures, ed. by R.M. Davies, John Wiley and Sons. Inc. New York, N.Y. 1967.
- 2.486. S. SHORE, and B. CHAUDHARI, Bibliography-Structural Applications of Steel Cable Systems, The American Iron and Steel Institute, New York, N.Y. 1969.
- 2.487. E.M. SIDOROVIČ, K rasčetu mnogoproljetnyh pologich nitej. Stroit. i Arch., 12, 1965.
- 2.488. A. SIEV, Stability of Suspended Roofs, Thesis, Technion-Israel Institute of Technology, Haifa 1961.
- 2.489. A. SIEV, A general analysis of prestressed nets. International Association for Bridge and Structures - Publication, England, 23, 1963.
- 2.490. A. SIEV, and J. EIDELMAN, Shapes of suspended roofs. Hanging Roofs, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, 42-47.

- 2.491. A. SIEV, and J. EIDELMAN, Stress analysis of prestressed suspended roofs. J. Struct. Div., ASCE, 90, ST.4, 1964, 103-121.
- 2.492. A. SIEV, Experimental study of flutter in suspended roofs. Bulletin, IAASS, 23, 1965, 3-10.
- 2.493. A. SIEV, Geometry of suspended cloth roofs. J. Struct. Div., ASCE, 91, ST.6, 1965, 251-263.
- 2.494. A. SIEV, Prestressed suspended roofs bounded by main cables. Publications, IABSE, 27, 1967.
- 2.495. J.S. SIKORSKIJ, O formie ravnovesija tjaželoj niti ravnovo soprotivlenija podveržennoj dejstvu vier-tikalnych sil. Prikladnaja matematika i mehanika, 2, 1, 1938.
- 2.496. J. S. SIKORSKIJ, O formie ravnovesija nitej ravnovo soprotivlenija, Prikladnaja matematika i mehanika, 1, 1, 1938.
- 2.497. J.S. SIKORSKIJ, O ravnovesij cepnoj linij ravnovo soprotivlenija na poverchnosti vraščeniya. Prikladnaja matematika i mehanika, 1, 1, 1938.
- 2.498. A. SIMPSON, Aerodynamic instability of long span transmission lines. Proc. IEE, 112, 2, 1962, 315-324.
- 2.499. A. SIMPSON, Determination of the inplane natural frequencies of multispan transmission lines by a transfer-matrix method. Proc. IEE, 113, 5, 1966, 870-878.
- 2.500. W.E. SIMPSON, Cable suspended roof for San Antonio Assembly Building. Civil Engineering, 30, 11, 1969.
- 2.501. A. SINICYN, Kolebanija setok s bolsymi progibami. Vestnik Vojenno-Inž. Akademii K.A. im. V.V. Kujbyseva, 31, 1941.
- 2.502. A.P. SINICYN, The Dynamics of flexible roofs of large sag. Hangedächer, ed. by. I.M. Rabinovic, Bauverlag, Wiesbaden 1966.
- 2.503. A. SKORUPA, Z. KUZIELA, Obliczenie konstrukcji dachu wiszącego rotundy Panoramy Racławickiej, Zeszyty Nauk. PWr., 37, Budownictwo, 8, 1960.
- 2.504. A.F. SMIRNOV, S.A. ILJASEVIC, N.S. MOSKALEV, Rezrabotka metodov rasčeta i stabilizacii deformacij visjaščich pokrytij imejuščich bezmomentnyje opornyje kontury. Postojannaja Komissija SEV po stroitelstvu, Centralnyj Naucno-Issledovatel'skij Institut Stroitelnych Konstrukcii im. V.A. Kučerenko, Moskva 1973.

- 2.505. Z. SOBOTKA, *Visjače pokrytia*, Strojizdat, Moskva 1964.
- 2.506. Z. SOBOTKA, Cylindrical and annular suspension roofs with combined loading. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.507. J.L. SOPOČKO, K rasčetu predvaritelno napraženoj krugovoj vantovoj konstrukcii. *Stroitel'naja mehanika i rasčet sooruz.*, 6, 1960, 48-53.
- 2.508. A. STACHOWICZ, Kształtowanie płaskich dźwigarów ciągnowych w przypadku lekkich przekryć dachowych. *Czasopismo Techniczne*.
- 2.509. A. STACHOWICZ, Pewne problemy kształtowania ciągnowych powłok siatkowych. *Arch. Inż. Łąd.*, 19, 4, 1973.
- 2.510. A. STACHOWICZ, Ustroje ciągnowe w konstrukcjach hal dużych rozpiętości i metody ich kształtowania. *Problemy Projektowania, Biuro Proj.Zakł.Prod.*, 4, 1973.
- 2.511. E. STEIN, The design of pretensioned cable networks in the shape of hyperbolic paraboloids with edge cables. *Hanging Roofs*, Nort Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, 62-67.
- 2.512. Z. STEININGER, Wady drutów do betonów sprężonych. *Inż. i Bud.*, 23, 4, 1966.
- 2.513. Z. STEININGER, Druty, spłoty i liny do konstrukcji sprężonych. *Informator WEMA*, Warszawa 1969.
- 2.514. D.B. STEINMAN, *Suspension Bridges*, 2nd ed., John Wiley and Sons. Inc., New York, N.Y., 1929.
- 2.515. J.A. STERNER, Fabrication and erection of cable supported roff. *Civil Engineering*, 37, 10, 1967.
- 2.516. N.S. STRELECKIJ, E.I. BELENJA, *Metaličeskie Konstrukcii*, Moskva 1965.
- 2.517. A.A. SYED, Nonlinear dynamic response of segged cable due to wind loading. Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.518. O.G. SULABERIDZE, *Naturalnye nabludenia visjašej oboločki*, *Stroitel'naja mehanika prostranstvennych konstrukcii*, Mecniereba, Tbilisi 1972.
- 2.519. R. SYGULSKI, Sprężanie prostokątnych siatek ciągnowych za pomocą balastowania. *Inż. Bud.*, 32, 6, 1975.
- 2.520. R. ŚWITKA, R. SYGULSKI, Obliczanie prostokątnych siatek ciągnowych jako układów dyskretnych. *Arch. Inż.Łąd.*, 20, 4, 1974.

- 2.521. V.N. ŠIMANOVSKI, R.B. CHARČENKO, Eksperimentalno-teoretičeskoe issledovanie prostranstvennoj raboty niti konečnoj žestkosti. Stroitelnye konstrukcii, 12, Budivelnik, Kiev 1969.
- 2.522. V.M. ŠIMANOVSKI, i in., Bezopasnaja vantovaja ferma, Patent SSSR 434263, kl. E04 s.3/10, Otkrytia, Izobretania, Prom. obrazcy, Tovarnye znaki, 24, 1974.
- 2.523. J. SZYMCZYK, B. ZAWADZKI, Przekrycie wiszącą powłoką sprężoną hali sportowej w Chodakowie. Sympozjum nt. Mechaniki Konstrukcji Ciężnowych, Jadwisin 1972.
- 2.524. V. TAIROV, Setčatye prostranstvennye konstrukcii, Budivelnik, Kiev 1966.
- 2.525. H. TAKEYAMA, On iterative determination of frequencies of vibrations of strings or bars. Faculty Engineering Technical Reports, Tohoku University, 29, 1, 1964, 109-122.
- 2.526. H.M. TERRILL, An Extension of Dawson's Table of the integral of e^{x^2} . Journal of the Franklin Institute, 237, 6, 1944.
- 2.527. H.M. TERRILL, Table of the integral e^{x^2} . Journal of the Franklin Institute, 238, 3, 1944.
- 2.528. Al. Tesar, Coupled oscillation of suspension bridge structures. Proc. IASS Symposium on Cable Structures SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.529. F. THIELE, Zwei Sporthallen in Tokio, Stahlbau, 4, 1964.
- 2.530. C. THORNTON, Analysis of three dimensional suspension structures. Thesis, School of Engineering Science, New York University, 1966.
- 2.531. G.H. THORNTON, C. BIRNSTIEL, Three-dimensional suspension structures. J. Struct.Div., ASCE, 93, ST.2, 1967, 247-270.
- 2.532. M. TOCHAČEK, L. VENT, A new type of hop-garden structure, Proc. IASS Symposium on Cable Structures, SVTS, Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.533. V.V. TROFIMOVIČ, V.A. VLADIMIRSKI, A.P. KOVALČUK, O račete predvaritelno naprjazennyh i kombinirovannyh sistem pri peremennyh i podvižnyh nagruzkach. Metalličeskie i plastmassovyje konstrukcii, Budivelnik, Kiev, 1973.

- 2.534. V.V. TROFIMOVIČ, A.I. KOVALČUK, Optimalnoe proektirovanie predvaritelno naprjažennykh vantovykh ferm s učetom deformativnosti schemy. *Stroit. i Archit.*, 6, 1973.
- 2.535. Y. TSUBOI, M. KAWAGUCHI, Probleme beim Entwurf einer Hängedachkonstruktion an hand des Beispiels der Schwimmhalle für die Olympischen Spiele 1964 in Tokio. *Stahlbau*, 3, 1966, 65-85.
- 2.536. Y. TSUBOI, S. KAWAMATA, The design and construction of a suspension structure. *Space Structures*, ed. by R.M. Davies, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y. 1967.
- 2.537. Y. TSUBOI, M. KAWAGUCHI, The analysis and design of a suspension roof structure. *Space Structures*, ed. by R.M. Davies, John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y. 1967.
- 2.538. D. TUNG, R. KUDDER, Analysis of cables as equivalent two-force members. *Engineering Journal, AISC*, 5, 1, 1968, 12-19.
- 2.539. M.S. TUPOLEV, *Novye vidy prostranstvennykh pokrytii*. Rosvuzizdat, Moskva 1963.
- 2.540. A. UNIEJEWSKI, R. SUS, J. MARCINEK, K. PEŃSKO-STRUG, Zagadnienia projektowe montażu hali głównej Wojewódzkiej Hali Widowiskowo-Sportowej. *Biuletyn Branżowy Mostostalu*, 12/4/21/ 1969.
- 2.541. A.G. VAČNADZE, Eksperimentalno-teoretičeskoe issledovanie nesuščej sposobnosti prednaprjažennoj vantovoj sistemy. *Stroit. mech. prostranstv. konstr.*, Mecniereba, Tbilisi 1972.
- 2.542. A.G. VAČNADZE, Eksperimentalno-teoretičeskoe issledovanie nesuščej sposobnosti geometričeski neizmenjajemykh vantovykh sistem v formie giperboličeskogo paraboloida. *Mecniereba*, Tbilisi 1974.
- 2.543. F. VAESSEN, Windchannel test to investigate the wind pressure on a hyparsshell roof. *Hanging Roofs*, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1963, 87-92.
- 2.544. J. VERKERK, Design and erection of cable roof structure for a sports hall at Beverwijk, Holland. *Proc. IASS Symposium on Cable Structures*, SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.
- 2.545. J. VISONTAI, Approximate analysis of suspension bridges with cables in inclined planes. *Proc. IASS Symposium on Cable Structures*, SVTS-Edične stredisko, Bratislava 1975.

- 2.546. L.P. VOLKOV, A.S. KAC, Ustrojstvo dla regulirovania naprjazenij v vantach, Pat. SSSR nr 421753, kl. E04 h 5/15, 22.03.1972. Otkrytia, Izobretenia, Prom. obrazcy. Tovarnye znaki, 19, 1974.
- 2.547. N.S. VOSKRESENSKIJ, V.A. KOLTYNIUK, Issledovania pokryti prostranstvennogo tipa na modelach. Issledovania i ispitania novych tipov stroitelnych konstrukcii dla žiliščnograždanskiego stroitelstva, Leningrad 1973.
- 2.548. Z. WALCZYNA, Dach wiszący jako przekrycie garażu. Inż. i Bud., 19, 7, 1962, 267-270.
- 2.549. J. WANKE, Vorspannkrafte und Längen der Seile von abgespannten Masten, Ruckstellkräfte der Ankerseile durch Wind, Stahlbau, 33, 2, 1964, 59-62.
- 2.550. E. WARDASZKO, Nieważkie ciągnio wiotkie obciążone siłą skupioną. Inż. i Bud., 25, 7, 1968.
- 2.551. E. WARDASZKO, Napinanie konstrukcji siatkowej, Inż. i Bud., 25, 8, 1968.
- 2.552. E. WARDASZKO, Rozmieszczenie węzłów konstrukcji siatkowej w rzucie prostokątnym. Inż. i Bud., 25, 12, 1968.
- 2.553. E. WARDASZKO, Optymalne rozmieszczenie węzłów konstrukcji siatkowej. Inż. i Bud., 28, 10, 1971.
- 2.554. E. WARDASZKO, Proste ciągnio wiotkie obciążone siłą skupioną. Inż. i Bud., 29, 8, 1972.
- 2.555. L. WEISS, Przekrycia linowe w Czechosłowacji, Inż. i Bud., 23, 11, 1966.
- 2.556. B. WERNER, Ein Beitrag zum Thema Hängedachkonstruktionen. Wiss. Z. Hochschule Bauwesen Cottbus, 2, 2, 1958-1959, 175-179
- 2.557. J. WERYŃSKI, Budowa obiektu Panoramy Racławickiej we Wrocławiu. Inż. i Bud., 25, 2, 1968.
- 2.558. P. WILDE, E. BIELEWICZ, Cz. BRANICKI, Analiza statyczna przekrycia wiszącego o rzucie kwadratowym. Inż. i Bud., 23, 3, 1966.
- 2.559. P. WILDE, Some problems of the theory of membranes formed by inextensible cord. Arch. Mech. Stos., 13, 4, 1968.
- 2.560. R.A. WILLIAMSON, H. STEVENSON, P.P. VANDER, Computer design of a tower and cable system, J. Struct. Div., ASCE, 92, ST.6, 1966, 341-360.

- 2.561. R. WIRSZYŁO, Kryte lodowisko w Gdańsku. Architektura, 8/1963.
- 2.562. Cz. WOŹNIAK, Nieliniowa Teoria Powłok. PWN, Warszawa 1968.
- 2.563. Cz. WOŹNIAK, Siatkowe Dźwigary Powierzchniowe. PWN, Warszawa 1970.
- 2.564. Cz. WOŹNIAK, Z. WESOŁOWSKI, Podstawy Nieliniowej Teorii Sprężystości. PWN, Warszawa 1970.
- 2.565. T. WYATT, Secondary stresses in parallel wire suspension cables. J. Struct. Div., ASCE, 86, ST.7, 1960, 37-59, Discussion, Proc. ASCE, 87, ST.3, 1961, 49-52.
- 2.566. Y. YOKOO, T. NAKAMURA, T. TERABAYASHI, H. MUKAI, Nonlinear behavior of counter-stressed dual plane cable frames. Proc. 1971 IASS Pacific Symposium Part. II on Tension Structures and space frames, Tokyo and Kyoto, Architectural Institute of Japan, 1972, 275-288.
- 2.567. W. ZABŁOCKI, Architektura i konstrukcja narodowej hali sportowej w Yoyogi. Inż. i Bud., 21, 10, 1964.
- 2.568. W. ZABŁOCKI, Olimpijskie urządzenia sportowe w Monachium. Architektura, 10, 1970.
- 2.569. L.A. ZAGORJANSKIJ, Praktičeskij sposob rasceta ortogonalnych predvaritelno naprjażennych vantovych setok. V sb. Visjačie Pokrytja, Gosstroizdat, Moskva 1962, 159-168.
- 2.570. L.A. ZAGORJANSKIJ, Praktičeskij sposob rasceta predvaritelno naprjażennych kanatno-balocnych setok. Izv. Akad. Str.-va i Architektury SSSR, 2, 1963, 72-81.
- 2.571. W. ZALEWSKI, Konstrukcja rozporowo-wisząca przekrycia Supersamu. Inż. i Bud., 19, 9, 1963.
- 2.572. S. ZAWADA, Praktyczne metody obliczenia siatki ciągnowej o kształcie siodłowym. Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej, Budownictwo, 14, 1964.
- 2.573. S. ZAWADA, Obliczanie dachowej siatki ciągnowej rozpiętej między dwoma łukami parabolicznymi. Inż. i Bud. 23, 2, 1966.
- 2.574. G.G. ZEDGINIDZE, Metody opredelenia naprjażenno-deformirovannogo sostojanija radialno vantovoj systemy na stadii predvaritelnogo naprjażenija. Osnovy teorii mgnovonno zestkich sistem, Leningrad 1973.
- 2.575. W. ZERNA, Zur Berechnung vorgespannter Hängedächer. Precontrainte, 6-7, 2, 1956-1957, 51-54.

- 2.576. W. ZERNA, Design of prestressed suspension roofs. Architectural Science Review, 2, 2, 1959, 97-100.
- 2.577. L. ZETLIN, Toitures suspendue dun auditorium municipal a New York 7 Quatre projets, L'architecture d'aujourd'hui, dic. 1961, genn. 1962.
- 2.578. L. ZETLIN, Steel cable creates novel structural space systems, Engineering Journal of AICS, 1,1, 1964.
- 2.579. L. ZETLIN, Elimination of flutter in suspension roofs. Excerpts from Hanging Roofs, Booklet 2319, Bethlehem Steel Corp., Bethlehem, Pa., 1963.
- 2.580. L. ZETLIN, Basic design principles of cable roofs including static, dynamics and systems. Cable Roof Structures, Booklet 2318, Bethlehem Steel Corp., Bethlehem, Pa., 1963.
- 2.581. L. ZETLIN, Suspension Roofs, Chap. 22, Structural Engineering Handbook, edited by E. Gaylord and C. Gaylord, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., 1968.
- 2.582. W. ZIOBRÓN, Probabilistyczna postać współczynnika bezpieczeństwa stali w kablach Freyssineta. Inż. i Bud., 20,6, 1963.
- 2.583. W. ZIOBRÓN, Zagadnienie bazy pomiarowej stali kablowej \varnothing 5 mm w konstrukcjach sprężonych. Inż. i Bud., 24, 2, 1967.
- 2.584. W. ZIOBRÓN, Statystyczna analiza wyników wieloletnich badań własności mechanicznych stali sprężającej. Arch. Inż. Łąd., 19, 3, 1973.
- 2.585. P.V. ZOLOTOV, Raspredelenie poperečnogo davlenja vetra mezdu kabelem i proezżej częstju sistemy. Str-vo i Architekt., 6, 1959, 94-101.
- 2.586. A. ŻÓRAWSKI, Kilka uwag o projektowaniu eksperymentalnych obiektów. Biuletyn Techn. Biur Proj. Bud. Przem., 1-2, 1971.
- 2.587. A. ŻÓRAWSKI, Problemy bezpieczeństwa wiszących konstrukcji ciężnych. Biuletyn Techn. Biur Proj. Bud. Przem., 12, 1972.
- 2.588. A. ŻÓRAWSKI, Zagadnienia statyczno-konstrukcyjne płaskiego przekrycia linowego o rozpiętości 100 m. Biuletyn Techn. Biur Proj. Bud. Przem., 11, 1972.
- 2.589. T.R. ŽUKOVA, Praktičeskij priem issledovanija prostranstvennych elementov visiačich konstrukcij, V, sb. Vistjacie pokrytja, Gosstroizdat, Moskva 1962, 197-203.

- 2.590. T.R. ŽUKOVA, Sistemy gibkich nitej. Stroitel'naja Mehanika i Rasčet Sooruzhenii, 1, 1962, 15-19.
- 2.591. M. YOLLESS, Hang roof /Kanada/, Canad. Arch., 7, 12, 1962, 71-73.
- 2.592. Abstracts of EUROMECH 69, International Colloquia on Large Elastic Deformation of Discrete Systems, Balatonszemes, Hungary 1977.
- 2.593. AISI Committee on Building Research and Technology, Tentative criteria for structural applications of steel cables for buildings, American Iron and Steel Institute, New York, N.Y. 1966.
- 2.594. American Standards Association, American standard building code requirements for minimum design loads in buildings and other structures, ASA A 58.1., American Standards Association, New York, N.Y. 1955.
- 2.595. Bethlehem wire rope for bridges, towers, aerial tramways, and structures, Catalog 2277, Bethlehem Steel Corp., Bethlehem, Pa.
- 2.596. Building Engineering, Part 2, Parabolic cable roof, Architectural Forum, 98, 6, 1953, 170-171.
- 2.597. Cable construction in contemporary architecture, Booklet 2264A, Bethlehem Steel Corp., Bethlehem, Pa.
- 2.598. Cable hung olympic roof spans 300 feet, Engineering News Record, 163, 5, 1959, 30-34.
- 2.599. Cable hung roof goes to the races, Engineering News Record, 1961, 10, 1958, 33-36.
- 2.600. Cables support 130 foot hangar roof, Engineering News Record, 157, 26, 1956, 39-40.
- 2.601. Cable, concrete-pylon supported roof, Progressive Architecture, 41, 3, 1960.
- 2.602. Cables support steel plate roof, Engineering News Record, 175, 19, 1965, 33.
- 2.603. Cable-suspended roof construction state-of-the-art. J. Struct. Div., ASCE, ST.6, 1971.
- 2.604. Construction de trois pavillons en forme de tente a l'exposition internationale l'horticulture de Vienne 1974, Acier, Stahl, Steel, 1, 1974.
- 2.605. Dach o linowej konstrukcji nośnej. Inż. i Bud., 26, 10, 1969.

- 2.606. Dach wiszący nad halą Madison Square Garden. Biuletyn Branżowy Mostostalu nr 1/14/6/48. Artykuł opracowany na podstawie Fr. Fischer Jr., Cable roof for Madison Square Garden. Civil Engineering, 6, 1967.
- 2.607. Fresh forms and new directions from a special kind of problem solving. Architectural Record, 143, 5, 1968.
- 2.608. Hala sportowo-widowiskowa w Jastrzębiu. Architektura, 10, 1970.
- 2.609. Hala kwiatów w Wojewódzkim Parku Kultury i Wypoczynku w Chorzowie. Architektura, 10, 1970.
- 2.610. IASS Conference on Cable Structures. SVTS-Edičné stre-disko, Bratislava 1975.
- 2.611. IASS Conference on Lightweight Shell and Space Structures for Normal and Seismic Zones, Mir Publishers, Alma-Ata, USSR, 1977.
- 2.612. Instrukcja odbioru i obróbki stali sprężającej przeznaczony do wykonywania kabli. Arkady, Warszawa 1967.
- 2.613. Instrukcja programowania i techniki naciągu kabli. Arkady, Warszawa.
- 2.614. Instrukcja wykonania, odbioru i stosowania stalowych zakotwień kabli sprężających odcinkowych. Arkady, Warszawa 1967.
- 2.615. Kierunki rozwoju nowoczesnego budownictwa halowego w latach 1970-1985. Wyd. MB i PMB, Warszawa 1970.
- 2.616. Konstrukcje cięgnowe przekryć o dużej rozpiętości. Ocena stanu aktualnego w zakresie możliwości projektowania konstrukcji cięgnowych. Oprac. J. Kłobukowski w Centralnym Ośrodku Badawczo-Projektowym Konstrukcji Metalowych, Mostostal, Warszawa 1974.
- 2.617. Konstrukcje cięgnowe przekryć o dużej rozpiętości. Zapotrzebowanie na konstrukcje cięgnowe. Oprac. J. Kłobukowski w Centralnym Ośrodku Badawczo-Projektowym Konstrukcji Metalowych, Mostostal, Warszawa 1974.
- 2.618. Konstrukcje cięgnowe przekryć o dużej rozpiętości. Analiza statyczna i dynamiczna. Etap 1. Rozpoznanie. Oprac. Instytut Mechaniki Konstrukcji Inżynierskich, Zespół Mechaniki Budowli Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1974.
- 2.619. Konstrukcje wiszące. Materiały Sympozjum organizowanego przez PTMTiS, Oddział w Gdańsku, Politechnika Gdańska, Gdańsk 1966.

- 2.620. Our two largest airports- Dulles International Airport. Progressive Architecture, 44, 8, 1963.
- 2.621. Prestressing stabilizes unusual roof. Engineering News Record, 164, 17, 1960, 36-38.
- 2.622. Rekomendacji po proektrirovaniu visjacych konstrukcji. Moskva 1973.
- 2.623. Rukovodstvo po primeneniu armaturnych pradej i kanatov v predvaritelno napražennyh želazobetonnyh konstrukcijach, NIIZB, Moskva 1966.
- 2.624. Sala gier na AWF w Warszawie. Architektura, 10, 1970.
- 2.625. Savvy smooths erection of 427 Ft. cable roof. Engineering News Record., 177, 2, 1966, 24-26.
- 2.626. Sports complex features cable supported roof. Civil Engineering, 37, 1, 1967
- 2.627. Steel cables suspended 220 foot diameter roof from concrete cantilevers. Engineering News Record, 172, 24, 1964, 40-41.
- 2.628. Suspended steel blanket roof. Architectural Forum, 104, 4, 1956, 164.
- 2.629. Sztuczne lodowisko w Zakładach Azotowych w Tarnowie. Architektura. 1, 1971.
- 2.630. Tablicy verojatnostnych funkcji. vol. 1, Vyčislitelnyj centr AN SSSR, Moskva 1958.
- 2.631. The Task Committee on Wind Forces of the Committee on Loads and Stresses of the Structural Division, ASCE, Wind forces on structures, Trans. ASCE, 126, Part. II, 1961, 1124-1198.
- 2.632. Zestawienie zacisków i zakotwień stalowych ciggien w konstrukcjach budowlanych. Praca planowa ITB, 1970.

ZAŁĄCZNIK 2.1.

Podstawowe zależności z geometrii różniczkowej oraz objaśnienie oznaczeń i pojęć stosowanych w części 2 pracy

Układy współrzędnych

Geometria siatek cięgnowych opisywana jest w określonej konfiguracji P_n zajmującej obszar Ω w dwuwymiarowej przestrzeni V_2 w pewnej chwili t_n , $X \in V_2$. Przestrzeń V_2 , w której określona jest konfiguracja P_n , parametryzowana jest układem współrzędnych materialnych $\{x^\alpha\}$, w ogólnym przypadku krzywoliniowych i nieortogonalnych. Pomiedzy punktami materialnymi siatki X i parami liczb rzeczywistych x^1, x^2 zachodzi związek

$$/2.106/ \quad x \leftrightarrow (x^1, x^2).$$

Od układu $\{x^\alpha\}$ można przejść do innego układu $\{x^{\alpha'}\}$ za pomocą przekształcenia

$$/2.107/ \quad x^{\alpha'} = x^{\alpha'} / x^1, x^2; \quad x^\alpha = x^\alpha / x^1, x^2$$

Przekształcenie /2.106/ jest dopuszczalne gdy $\det \{x^{\alpha'}\} \neq 0$. Zbiór wszystkich układów $\{x^{\alpha'}\}$, które można otrzymać z układu $\{x^\alpha\}$ w wyniku przekształcenia /2.106/ nazwano zbiorem dopuszczalnych układów współrzędnych przestrzeni V_2 . W zbiorze dopuszczalnych układów współrzędnych wyróżniono układ $\{\hat{x}^\alpha\}$, którego linie współrzędnych $x^1 = \text{const}$ i $x^2 = \text{const}$ pokrywają się z osiami cięgien. W dalszych rozważaniach układ ten jest podstawowym układem współrzędnych.

Punkt X można odwzorować również w obszarze $\Delta \in E_3$. Parametryzując przestrzeń E_3 prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych $\{z^A\}$, każdemu punktowi materialnemu X odpowiada trójka liczb rzeczywistych z^1, z^2, z^3 nazywanych współrzędnymi przestrzennymi, a więc zachodzi następująca zależność:

$$/2.108/ \quad x \leftrightarrow (z^1, z^2, z^3),$$

Przy ustalonej parametryzacji przestrzeni V_2 układem współrzędnych $\{x^a\}$ można napisać zależność

$$/2.109/ \quad z^A = z^A/x^1, x^2/.$$

Baza lokalna i tensory metryczne powierzchni

Zaczeplając w punkcie o współrzędnych $z^1 = z^2 = z^3 = 0$ wektor wodzący punktów przestrzeni V_2 /rys. 2.19/ można napisać:

$$/2.110/ \quad R = R(X) = R(z^A) = R(x^a) .$$

zakłada się, że funkcja wektorowa /2.100/ jest ciągła i różniczkowalna a zatem w każdym punkcie można wyznaczyć wektory styczne do linii parametrycznych

$$/2.111/ \quad G_\alpha = R_{,\alpha}$$

które tworzą w tym punkcie bazę lokalną /styczną/.

Pierwszy tensor metryczny V_2 określony jest następująco:

$$/2.212/ \quad G_{\alpha\beta} = G_\alpha \cdot G_\beta$$

Definiując w każdym punkcie X pole jednostkowych wektorów normalnych

$$/2.213/ \quad G_3 = \frac{G_1 \times G_2}{\sqrt{G}}$$

otrzymano w każdym punkcie kowariantną bazę lokalną /przeszrzną/

$$/2.214/ \quad \{G_1, G_2, G_3\}$$

a tensor

$$/2.215/ \quad G_{KL} = G_K \cdot G_L$$

nazwano pierwszym kowariantnym tensorem metrycznym.

Drugi kowariantny tensor metryczny

$$/2.116/ \quad B_{\alpha\beta} = -G_{3+\alpha} \cdot G_\beta = G_3 \cdot G_{\alpha+\beta}$$

Obok bazy kowariantnej /2.114/ wprowadza się bazę lokalną kontrawariantną /rys. 2.20/.

$$/2.117/ \quad \{G^1, G^2, G^3\}$$

Pomiędzy wektorami obu baz zachodzą związki:

$$/2.118/ \quad G^K \cdot G_L = \delta_L^K$$

Tensor

$$/2.119/ \quad G^{KL} = G^K \cdot G^L$$

nazwano kontrawariantnym tensorem metrycznym

Wyznaczniki tensorów metrycznych kowariantnych oznaczono przez

$$/2.120/ \quad G = \det G_{\alpha\beta} = \det G_{KL} \\ B = \det B_{\alpha\beta}$$

Zależności z geometrii różniczkowej

- długość łuku krzywej na powierzchni:

$$(ds)^2 = (dx)^2 = G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$/2.121/ \quad s = \int_a^b \sqrt{G_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$$

- kąt pomiędzy liniami współrzędnych układu $\{x^\alpha\}$

$$/2.122/ \quad \cos \omega = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}, \quad \sin \omega = \sqrt{\frac{G}{G_{11}G_{22}}}$$

- powierzchnia:

$$/2.123/ \quad \pi = \int_{\pi} d\pi, \quad d\pi = \sqrt{G} dx^1 dx^2$$

- symbole Christoffela drugiego rodzaju:

$$/2.124/ \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} G^{\alpha\delta} (G_{\delta\beta,\gamma} + G_{\delta\gamma,\beta} - G_{\beta\gamma,\delta})$$

- krzywizna normalna linii parametrycznej.

$$/2.125/ \quad \tilde{G}_d = G_{\alpha\alpha} B_{\alpha\alpha}$$

- krzywizny główne powierzchni k_α są pierwiastkami równania:

$$/2.126/ \quad \begin{vmatrix} B_{11} - kG_{11} & B_{12} - kG_{12} \\ B_{12} - kG_{12} & B_{22} - kB_{22} \end{vmatrix} = 0$$

- twierdzenie Eulera:

$$/2.127/ \quad \tilde{G}_d = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha$$

gdzie α kąt pomiędzy X^1 a pierwszym kierunkiem głównym

- krzywizna Gaussa /powierzchni/

$$/2.128/ \quad K = k_1 k_2 = \frac{B_{11} B_{22} - (B_{12})^2}{G}$$

- krzywizna średnia

$$/2.129/ \quad H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) = \frac{1}{2} (G_{11} B_{11} - 2G_{12} B_{12} + G_{22} B_{22})$$

- krzywizna geodezyjna linii parametrycznych

$$/2.130/ \quad \kappa_\alpha = \sqrt{G} \left[\begin{matrix} a \\ r \delta \end{matrix} \right] \frac{\partial X^\alpha}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\delta}{\partial X^\alpha} - \begin{matrix} 1 \\ r \delta \end{matrix} \frac{\partial X^\delta}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\alpha}{\partial X^\beta} \frac{\partial X^\beta}{\partial X^\alpha} \frac{\partial X^\beta}{\partial X^{\alpha^2}} \right]$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \quad \alpha \neq \beta)$$

- równania Gaussa i Codaziego; Składowe tensorów metrycznych spełniają muszą następujące równania nierozdzielności

$$/2.131/ \quad B_{[\alpha\beta]}^\delta = B_{\alpha\beta}^\delta - B_{\beta\alpha}^\delta = 0$$

$$R_{1212}^* = \frac{1}{2} G B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} = B$$

- pochodne pól wektorowych i tensorowych określonych w V_2

$$T^{\alpha\beta}{}_{|\gamma} = \partial_\gamma T^{\alpha\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ r \beta \end{matrix} \right\} T^{\delta\beta}$$

/2.132/

$$T_{\alpha\|\beta} = \partial_{\beta} T^{\alpha} - \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} T_{\delta}$$

$$T^{\alpha\beta\|\delta} = \partial_{\delta} T^{\alpha\beta} + \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \delta \delta \end{matrix} \right\} T^{\delta\beta} + \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \delta \delta \end{matrix} \right\} T^{\alpha\delta}$$

$$T_{\alpha\beta\|\delta} = \partial_{\delta} T_{\alpha\beta} - \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \alpha \delta \end{matrix} \right\} T_{\delta\beta} - \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \beta \delta \end{matrix} \right\} T_{\alpha\delta}$$

$$T^{\alpha}_{\beta\|\delta} = \partial_{\delta} T^{\alpha}_{\beta} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \delta \delta \end{matrix} \right\} T^{\delta}_{\beta} - \left\{ \begin{matrix} \delta \\ \beta \delta \end{matrix} \right\} T^{\alpha}_{\delta}$$

Geometria konfiguracji odniesienia

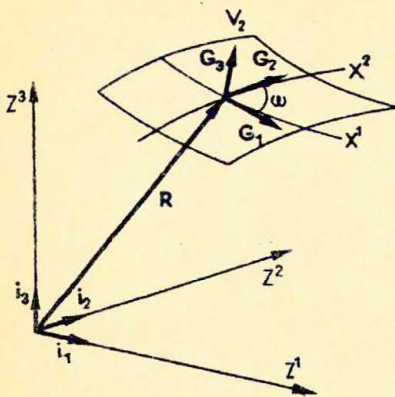
Geometria konfiguracji odniesienia może być opisana analogicznie do geometrii konfiguracji aktualnej P_n /rys.2.2la/

Dlatego też nie pisano tu powtórnie analogicznych związków w konfiguracji odniesienia. Należy zaznaczyć, że zgodnie z przyjętym schematem oznaczeń, wielkości dotyczące konfiguracji odniesienia oznaczano dalej małymi literami.

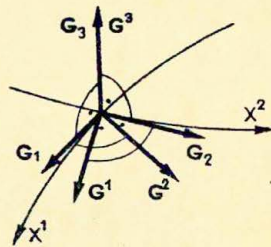
Konfigurację odniesienia może być zarówno konfiguracja początkowa P_0 jaką siatka ciągnowa zajmuje w chwili $t = t_0$ i tak naogół dalej przyjmowano jak i dowolna konfiguracja P_n zajmowana przez siatkę w jakiejś ustalonej chwili $t > t_0$.

Zgodnie z przyjętą parametryzacją V_2 , przy przejściu od jednej do drugiej konfiguracji zmieniają się jedynie współrzędne przestrzenne punktów X . Współrzędne materialne nie ulegają zmianie. Zmienia się natomiast sama przestrzeń V_2 a więc jej metryka jak i krzywizna. Zmieniają się obydwie tensory metryczne.

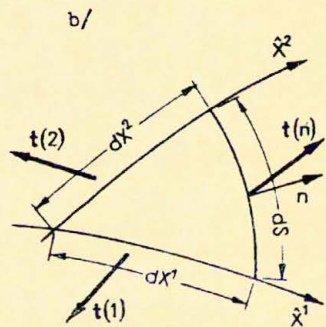
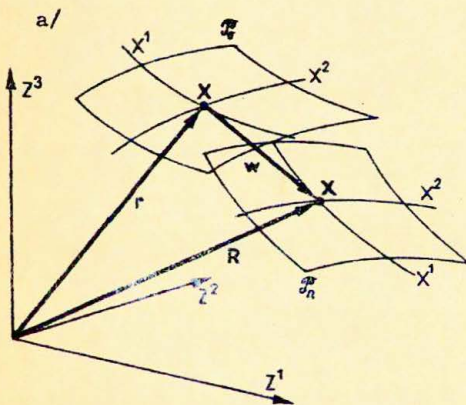
Oprócz konfiguracji początkowej P_0 i aktualnej P_n należy wyróżnić jeszcze konfigurację wstępną P_w w chwili $t < t_0$ odpowiadającą rozpoczęciu wstępnego naprężenia. W odniesieniu do tej konfiguracji oblicza się wstępne długości cięgien i usytuowanie węzłów siatki. Konfiguracja wstępna nie musi być konfiguracją rzeczywistą w przeciwieństwie do początkowej.



Rys.2.19. Baza lokalna kowariantna



Rys.2.20. Baza lokalna kontrawariantna



Rys.2.21. Opis stanu a/ przemieszczenia, b/ naprężenia

Oznaczenia:

1. Oznaczenia literowe:

- a - stała, przyśpieszenie
 - b - stała, drugi tensor metryczny w konfiguracji początkowej
 - c - stała, tensory deformacji i ich składowe
 - e - tensory deformacji i ich składowe
 - f - strzałka zwisu, funkcja
 - g - obciążenie, wektor ograniczeń zachowawczych, tensory metryczne i ich składowe
 - h - wysokość dźwigara
 - k - krzywizna główna powierzchni
 - l - rozpiętość dźwigara
 - n - wektor normalny i jego składowe
 - p - obciążenie
 - r - wektor wodzący
 - s - parametr, długość łuku
 - t - tensor naprężenia, współrzędna czasowa, czas
 - u - przemieszczenie
 - v - przemieszczenie
 - w - przemieszczenie
 - q - obciążenie
 - x - współrzędna przestrzenna, element zbioru
 - y - współrzędna przestrzenna, funkcja
 - z - współrzędna przestrzenna, funkcja
-
- A - stała, pole przekroju elementu
 - B - stała, drugi tensor metryczny w konfiguracji aktualnej
 - E - przestrzeń, moduł sprężystości Younga
 - F - operator, wektor sił objętościowych
 - G - wektor, tensor metryczny w konfiguracji aktualnej
 - H - składowa pozioma siły, krzywizna średnia
 - J - sztywność, niezmiennik tensora deformacji
 - K - parametr, krzywizna Gaussa
 - M - moment
 - N - siła w ciągnięciu

- P - zbiór obciążeń, funkcja obciążenia
Q - zbiór, siła poprzeczna
R - reakcja, wektor wodzący
S - długość krzywej
T - siła w ciągnię, wektor lub tensor naprężenia, funkcja rozwiązująca
U - przemieszczenie
V - przemieszczenie, objętość przestrzeni
W - przemieszczenie, funkcja
Z - współrzędne przestrzenne, funkcja
X - współrzędne materialne, punkt przestrzeni V_2 , punkt materialny, wektor zmiennych decyzyjnych

- α - parametr, kąt
 β - zmienna pomocnicza
 δ - parametr, zmienna pomocnicza
 δ - parametr
 ℓ - odkształcenie jednostkowe
 ξ - parametr, współrzędna bezwymiarowa
 η - parametr, współrzędna bezwymiarowa
 χ - parametr, krzywizna geodezyjna
 λ - parametr, stała
 μ - parametr, współczynnik obciążenia
 ν - parametr
 π - powierzchnia liczba 3,14
 ρ - funkcja, gęstość masy
 $\bar{\sigma}$ - naprężenie, krzywizna normalna linii
 φ - funkcja, parametr
 ψ - funkcja
 ω - parametr, kąt
- zbiory, odwzorowania, działania:
F : $X \rightarrow R$ - odwzorowanie zbioru X w zbiór R
{X : P/x/} - zbiór tych liczb, które mają własność P
 $x \in Q$ - element x należy do zbioru Q
 $P \subset Q$ - zbiór P jest podzbiorem Q
 \leftrightarrow - homeomorfizm

$a \times b$ - iloczyn wektorowy

$a \cdot b$ - iloczyn skalarny

- układy współrzędnych:

$\{Z^a\}$ - układ współrzędnych przestrzennych /ortokartezjański/

$\{x^\alpha\}$ - układ współrzędnych materialnych /krzywoliniowy/

$\{G_1, G_2, G_3\}$ - baza lokalna kowariantna

$\{G^1, G^2, G^3\}$ - baza lokalna kontrawariantna

$G^k, G^\alpha, G^{LK}, G^{\alpha\beta}$ - składowe kontrawariantne

$G_k, G_\alpha, G_{LK}, G_{\alpha\beta}$ - składowe kowariantne

$G^L_K, G^{\alpha\beta}$ - składowe mieszane

- Różniczkowanie:

ds - różniczka

$\frac{ds}{dt}$ - pochodna zwyczajna

$\frac{\partial s}{\partial x^\alpha}; \partial_\alpha s; R_{,\alpha} ()_{,\alpha}$ - pochodna cząstkowa /po x^α /

- skróty:

max - maksimum, ch, sh - cosinus i sinus hiperboliczne

min - minimum, exp - funkcja wykładnicza

inf - kres dolny, ln - logarytm naturalny

det - determinant,

Δ - wyróżnik równania, przyrost wielkości, obszar

ϕ - funkcja odkształceń

Σ - suma

Ω - obszar przestrzeni

Γ - brzeg obszaru

\mathcal{P} - konfiguracja

\mathcal{M} - masa

ξ - energia

\mathcal{F} - siły objętościowe

2. Wskaźniki:

- greckie: o ile nie zaznaczono inaczej, przebiegają ciąg wartości 1,2;
- łacińskie: przebiegają ciąg wartości 1,2,3 /o ile nie zaznaczono inaczej/
- w części drugiej wskaźniki: i, j używane są następująco: $i = 1, 2$, oznaczają rodzaj cięga /1-nośne, 2-naprężające/
 $j = 0, 1, 2$, oznaczają konfigurację początkową, aktualną - pierwszą i drugą
- konwencja sumacyjna: o ile nie zaznaczono inaczej, w odniesieniu do wskaźników znajdujących się na różnych poziomach obowiązuje konwencja sumacyjna,

3. Inne oznaczenia:

- symbole logiczne:

\wedge - czyta się: i

\vee - czyta się: lub

\bigwedge - czyta się: dla wszystkich x zachodzi

\Rightarrow - czyta się: jeżeli, to

\Leftrightarrow - czyta się: wtedy i tylko wtedy

SPIS TREŚCI

CZEŚĆ 1

WPROWADZENIE DO ZAGADNIEŃ OPTYMALIZACJI KONSTRUKCJI

1. Przedmiot rozważań
2. Cel i zakres pracy
3. Sposoby formułowania zagadnień optymalizacji
4. Metody rozwiązywania zagadnień optymalizacji
5. Wybór metody i algorytmu

Bibliografia do części 1

CZEŚĆ 2

OPTYMALIZACJA KONSTRUKCJI CIĘGNOwych METODAMI RACHUNKU
WARIACYJNEGO

6. Charakterystyka konstrukcji ciągnowych
 - 6.1. Cechy szczególne konstrukcji ciągnowych
 - 6.2. Kształtowanie, optymalizacja i projektowanie
 - 6.3. Konfiguracje i stany obciążenia
 - 6.4. Założenia, warunki i kryteria optymalizacji
7. Optymalizacja ustrojów jednopasowych
 - 7.1. Podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia
 - 7.2. Optymalizacja ciągów o dużych zwisach
 - 7.3. Optymalizacja ciągów o małych zwisach
8. Optymalizacja ustrojów dwupasowych wstępnie naprężonych
 - 8.1. Podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia
 - 8.2. Warunki i kryterium optymalizacji
 - 8.3. Optymalizacja w dwóch stanach obciążenia
 - 8.4. Optymalizacja w trzech stanach obciążenia
9. Podstawy kształtowania siatek ciągnowych wstępnie naprężonych
 - 9.1. Charakterystyka siatek ciągnowych
 - 9.2. Podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia

- 9.3. Konfiguracje statycznie dopuszczalne
 - 9.4. Konfiguracje o największej sztywności i najniższym ciężarze
 - 9.5. Teoria techniczna siatek ciągnowych
 - 9.6. Sformułowanie zagadnienia kształtowania
 - 9.7. Optymalne kształtowanie przy ograniczeniu klasy konfiguracji dopuszczalnych
 - 10. Zagadnienia kształtowania konstrukcji podporowych
 - 11. Przewidywany rozwój optymalizacji konstrukcji ciągnowych
- Bibliografia do części 2
- Załącznik 2.1. Podstawowe zależności z geometrii różniczkowej

Oznaczenia

Spis treści

CZEŚĆ 3

OPTIMALIZACJA KONSTRUKCJI RAMOWNICOWYCH METODAMI PROGRAMOWANIA NIELINIOWEGO

- 12. Charakterystyka konstrukcji ramownicowych
- 13. Podstawowe zależności analizy stanu naprężenia i odkształcenia
- 14. Sposoby formułowania optymalizacji ramownic
- 15. Dwie metody numeryczne optymalizacji w zastosowaniu do ramownic
- 15.1. Metoda poszukiwania minimum w hiperpłaszczyźnie stycznej do hiperpowierzchni ograniczeń
- 15.2. Metoda zewnętrznej funkcji kary
- 16. Optymalizacja ramownic stalowych stosowanych w budownictwie okrętowym
- 16.1. Przegląd prac z optymalizacji ramownic okrępowych
- 16.2. Model konstrukcyjny
- 16.3. Wymiarowanie elementów przeszłowych i przywęzłowych
- 16.4. Określenie sprężystości podpór
- 16.5. Określenie stanów obciążenia
- 16.6. Sformułowanie zagadnienia optymalizacji

- 16.7. Topologia konstrukcji
- 16.8. Opis danych wejściowych i wyjściowych oraz sposobu korzystania z systemu
- 16.9. Działanie systemu w wersji stop/restart
- 16.10. Opis procedur, funkcji i ważniejszych oznaczeń występujących w systemie
- 16.11. Przykłady ramownic
- 16.12. Analiza wyników
- 17. Przewidywany rozwój optymalizacji ramownic
- Bibliografia do części 3

- Załącznik 3.1. Dane wejściowe do systemu optymalizacji ramownic
- Załącznik 3.2. Instrukcja przygotowywania danych wejściowych
- Załącznik 3.3. Tabulogram systemu optymalizacji ramownic
- Załącznik 3.4. Wydruk wyników optymalizacji ramownicy 3-prętowej /przykład 1/ przy zastosowaniu metody TSM
- Załącznik 3.5. Wydruk wyników optymalizacji ramownicy 3-prętowej /przykład 1/ przy zastosowaniu metody EPT
- Załącznik 3.6. Wydruk wyników optymalizacji ramownicy 10-prętowej /przykład 2/ przy zastosowaniu metody TSM
- Załącznik 3.7. Wydruk wyników optymalizacji ramownicy 10-prętowej /przykład 2/ przy zastosowaniu procedury UNIMOD
- Załącznik 3.8. Wydruk wyników optymalizacji ramownicy 27-prętowej /przykład 3/ przy zastosowaniu metody TSM

Spis treści