BARCIŃ-
SKI

WYKŁAD
POCZĄTK.
ARYTME-
TYKI

POPULARNY WYKŁAD
POCZĄTKÓW ARYTMETYKI.

POPULARNY WYKŁAD

POCZĄTKÓW ARYTMETYKI

OBEJMUJĄCY:

LICZENIE, DZIAŁANIA NA LICZBACH CAŁKOWITYCH, WIADOMOŚĆ O MIARACH I WAGACH, DZIAŁANIA NA LICZBACH WIELORAKICH I ZASTOSOWANIA DZIAŁAŃ ARYTMETYCZNYCH DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ Z ŻYCIA POTOCZNEGO.

PRZEZ

A. Barcińskiego.

Wydanie drugie.

WARSZAWA,
Nakład i druk S. ORGELBRANDA, Księgarza i Typografa
przy ulicy Miodowéj, Nr. 496.

1856.

Wolno drukować, z warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby exemplarzy.

Warszawa, d. 14 (26) Stycznia 1856 r.

Starszy Cenzor, **F. Sobieszczański.**

ROZDZIAŁ I.

O ZNAKACH LICZEBNYCH CZYLI CYFRACH.

Henryś razu jednego zapytał, co to są liczby?

Moje dziecko, ciekawość twą pochwalam, zaspokoić ją pragnę, ale zarazem przestrzegam, że musisz cokolwiek bliżéj zastanowić się nad rzeczą zupełnie od liczby różną, nim będziesz mógł pojąć co jest liczba.

W tym celu aby nietylko Henrysia, ale i inne dzieci, które do mnie zgromadziły się na naukę, objaśnić, wydobyłem pudło, w którém były różne rzeczy, oświadczając, że to wszystko co się w niém znajduje, stanie się ich własnością, skoro w miarę zadawanych przezemnie pytań zręcznie i z uwagą odpowiadać będą.

Dzieci ciekawe były niezmiernie, co się w pudle znajdowało i zarazem dowiedzieć się chciały (o czém przekonałem się z natężonéj ich uwagi), coby to pudło za związek miało z liczbami, o których im mówić zamierzyłem. Odpakowawszy, wysypałem na stół wielki to wszystko, co się w tém pudle mieściło — i

Co to jest? zapytałem.

Henryś odpowiada: różne rzeczy, gruszki, i śliwki, i jabłka piękne.

Nie mógłbyś ty jednym wyrazem tego wszystkiego nazwać?

To trudno, bo tu jest wiele różnych rzeczy.

Jestem pewny, żeś nie raz ten wyraz słyszał.

O! nie wiém, doprawdy, nie wiém, bobym go sobie od razu przypomniał.

A co są owoce?

Owocami nazywają gruszki, jabłka, śliwki; a że tu są te same przedmioty, więc to można nazwać wszystko owocami.

Dla czegoż je tak nazwać można?

Bo wszystkie te rzeczy są do siebie podobne i jednéj natury, gdyby tu były i kamienie, nie mógłbym powiedzieć że to są owoce, tylko powiedziałbym że są owoce i kamienie.

Gdybym zaś zapytał was, jakiego tu są rodzaju owoce?

Odpowiedziałbym, że tu są gruszki, jabłka i śliwki.

Z tego com dotąd od was słyszał, wnieść można, że aby mieć wyobrażenie o rozmaitych rzeczach, trzeba koniecznie poznać dokładnie części, z jakich się one *składają. Części te zowią się jednostkami, i tak: nikt z was nie będzie wiedział co są gruszki, jabłka, śliwki, jeżeli nie wié co jest jedna gruszka, jedno jabłko, jedna śliwka; jeżeli zaś gruszki będą różne, twarde i miękkie, soczyste i mączyste, słodkie i niedojrzałe, wówczas nie będziecie mogli żadnego z tych przymiotów dodać do tego wyrazu gruszka, któryby wam rzecz dokładnie malował, wyjąwszy różne, co jest zbyt ogólne. Stąd jeszcze możecie się przekonać, dla czego ludzie kupujący gruszki, śliwki, jabłka, i t. p. rzeczy, dopytują się o ich przymioty. A przedający aby mogli naznaczyć cenę, oddzielają gatunki od siebie, przez co sobie i nabywającym znacznie ułatwiają. Rzecz jakakolwiek, z którą porównywamy inne rzeczy tego samego gatunku, nazywa się jednostką, a ich zbiór liczbą.*

I tak: jedna gruszka zowie się jednością i pisze się **1**.

Dwie gruszki, czyli II, *albo króciéj znak* **2**, *mówi się liczba dwa, czyli dwie jedności, z których każda jest gruszką.*

Trzy gruszki, czyli III, *albo znak* **3**, *mówi się trzy gruszki, czyli trzy jedności, z których każda jest gruszką.*

Cztery gruszki, czyli IIII, *albo znak* **4**, *oznacza cztery jedności.*

Pięć gruszek, albo IIIII, *czyli znak* **5**.

Sześć gruszek, czyli IIIIII, *albo znak* **6**.

Siedm gruszek, czyli I I I I I I I, *albo znak* 7.
Ośm gruszek, czyli I I I I I I I I, *albo znak* 8.
Dziewięć gruszek, czyli I I I I I I I I I, *albo znak* 9.

Widzicie więc dzieci moje, że jest dziewięć znaków następujących:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
I.	II.	III.	IIII.	IIIII.	IIIIII.	IIIIIII.	IIIIIIII.	IIIIIIIII.
jeden,	dwa,	trzy,	cztery,	pięć,	sześć,	siedm,	ośm,	dziewięć,

za pomocą których, wszystkie bez wyjątku zbiory jedności, całą kulę ziemską składające, oznaczyć potraficie.

Poznaliście już dotąd 24 *liter, i te wam wystarczyły do napisania tego wszystkiego, o czém tylko pomyślić możecie, nie tylko wy, ale wszyscy ludzie na ziemi; lecz jak ten co poznał litery, potrafił je pojedynczo wymówić, musiał się koniecznie nauczyć je razem z sobą spajać, łączyć i formować wyrazy, które są głosem wyrażającym pewien pomysł ludzki lub rzecz, jak nie dosyć było te wyrazy wymówić, aby pojąć ich szereg pewien, to jest mowę, ale trzeba było każdego w szczególności wartość czyli znaczenie poznać, tak również nie dosyć jest dziewięć znaków liczebnych umieć napisać i przeczytać, ale trzeba koniecznie mieć jasne wyobrażenie o ich względnéj wartości.*

Każdy z was czuje to dobrze, że trzy gruszki a dwie nie jest toż samo.

A jeżeli dwie,—zapytał się Henryś,—są tak dobre i wielkie jak trzy, to dwie będą równe trzem.

Sprawiedliwa twoja uwaga, ale wówczas jedna gruszka z dwóch i jedna z trzech nie jest to samo. Jednostki zatém nie są sobie równe i wówczas musiałbym powiedzieć: dwie gruszki duże, równają się trzem mniejszym. Na moje więc wychodzi, że do poznania dokładnego wartości liczb, potrzebna jest znajomość dokładna jednostek, z których te liczby się składają; jakoż trudność powyższego rozumowania zniknęłaby, gdybyś mi był pozwolił dokończyć. Powiedziałem bowiem że trzy gruszki a dwie nie jest to samo, i chciałem dodać na ten przypadek, gdy te gruszki zupełnie są sobie równe i niczém się od siebie nie różnią; wówczas każdy z was wolałby trzy a niżeli dwie.

Porównywać możecie z sobą tylko liczby takie, których jedności są sobie równe. Dla tego téż ile razy słyszycie, że kto mówi na głos: dwa, pięć, sześć, pytacie się zaraz, czego dwa, czego pięć; a gdy chcecie te liczby, których jednostek nie oznaczacie, z sobą porównać, musicie koniecznie przypuścić, że ich jednostki niczém się od siebie nie różnią, w razie przeciwnym porównanie miejsca mieć nie może.

Gdyście się nauczyły pisać i wymawiać te dziewięć znaków, które się jeszcze nazywają cyframi, przejdziemy do wykrycia ich względnéj wartości, co inaczéj nastąpić nie może, jak tylko w skutku ich wzajemnego porównania.

W liczbach pytamy się tylko o ich wielkość w stosunku do innych. Porównywamy zaś wielkości liczb, *których jednostki niczém się nie różnią z sobą, w dwojaki sposób; albo dochodzimy ich różnicy, i tak: o ile* **2** *jest mniejsze od* **6**, *lub o ile* **6** *większe od* **2**; *albo dochodzimy ile razy jedna liczba mieści się w drugiéj, np. ile razy* **2** *mieści się w* **6**, *albo ile dwójek jest w* **6**.

W pierwszym przypadku, jeżeli dwie liczby są te same, np. **2** *i* **2** *takie niczém się nie różnią, czyli inaczéj pierwsza od drugiéj, i druga od pierwszéj nie jest ani większa ani mniejsza. Jeżeli zaś dwie liczby nie są sobie równe, większą będzie ta, co ma w sobie więcéj jedności, a mniejsza zaś która ma mniéj w sobie jedności, np.* **6** *gruszek jest więcéj jak* **2** *gruszki, gdy te gruszki są równe.*

Liczby pojedyncze tworzą się z dodania do siebie pojedynczych jednostek, np. dwa jest to samo co jeden więcéj jeden, trzy jest to samo co jeden, więcéj jeden i więcéj jeden, albo toż samo co dwa więcéj jeden, albo jeden więcéj dwa.

1 *jeden*, dołóżcie do tego gatunek każdéj rzeczy na świecie, a będziecie mieli wszystkie jednostki, i tak: gruszka, jabłko, śliwka, ziemia, łokieć i t. d. *A liczby z oznaczonych ściśle jednostek złożone, zowią się liczbami mianowanemi, np.* **5** *jabłek,* **6** *gruszek; jeżeli zaś w liczbie jakiéjkolwiek nie wymieniamy gatunku jednostek ją składających, tylko po prostu mówimy lub piszemy* **5**, **6**, **7**, *i t. d. takie liczby których* *jednostki nie są oznaczone, zowią się ogólne, inaczéj oderwane.*

2 *dwa*, składa się z dwóch jedności czyli jest to samo co jeden, więcéj jeden, a zatém dwa od jednego jest o jeden większe, albo jeden w dwóch mieści się dwa razy, i tak macie dwie gruszki.

Ile razy sięgnąć musisz Henrysiu ręką, abyś po jednéj biorąc gruszce wziął je obie?

Dwa razy!—krzyknął i pokazał, raz, zabrał jednę, drugi raz, drugą, a że po jednę gruszkę sięgnął ręką raz, a po dwie dwa razy, więc 2 od jednego jest dwa razy większe.

3 *trzy*, składa się z trzech jedności czyli jednostek, lub liczba trzy jest to samo, co jeden więcéj jeden, więcéj jeden; a zatém trzy jest o dwa większe od jednego i przeciwnie, jeden od trzech jest o 2 mniejsze, bo gdy jednemu z was dam dwie gruszki a drugiemu jednę, *ile pierwszy ma mi oddać, aby miał toż samo co drugi?*

Jednę gruszkę.

Trzy więc składa się prócz tego z dwóch więcéj jeden, lub jeden więcéj dwa; a zatém, gdy Henryś ma trzy gruszki, Ludka dwie, a Włodzio jednę, *ile Henrysiu trzeba ci odebrać, abyś tylko miał tyle co Ludka?*

Jednę gruszkę.

A zatém Henryś ma więcéj od Ludki o jednę gru-

szkę. A ile trzeba wziąć od ciebie, abyś miał tyle co Włodzio?

Dwie gruszki.

Więc o te dwie gruszki masz więcéj jak Włodzio.

Powiedz mi Henrysiu, o ile gruszek masz więcéj od Ludki?

O jednę.

A o ile więcéj od Włodzia?

O dwie gruszki.

Któż ma najmniéj?

Włodzio.

A najwięcéj?

Ja.

Jakżebyś zrobił, żebyście wszyscy równo mieli?

A to bardzo łatwo, odezwał się Henryś, jak oddam jednę gruszkę będę miał dwie, a zatém tyle co Ludka, a moję trzecią gruszkę odstąpię Włodziowi, to i on będzie miał dwie, wszyscy zatém będziemy mieli równo po dwie.

Otóż dzieci moje, macie tu trzy gruszki.

Ile razy sięgniesz moja Ludko, ażebyś za każdym razem wzięła po jednéj gruszce?

Ludka sięgnęła ręką i wzięła jednę gruszkę, sięgnęła drugi raz i wzięła drugą gruszkę, sięgnęła trzeci raz i wzięła trzecią gruszkę, a że nic się nie pozostało, odpowiedziała, iż aby wziąć trzy gruszki trzeba sięgnąć trzy razy, aby za każdym razem mieć tylko jednę, stąd téż wypada, że trzy gruszki jest trzy razy więcéj aniżeli jedna, przeciwnie jedna gruszka jest trzy razy mniéj aniżeli trzy gruszki, jedna więc gruszka w porównaniu do trzech takich samych gruszek jest trzecią częścią. Trzema gruszkami można obdzielić trzy osoby.

Ile razy mogłabyś sięgnąć chcąc wziąć po dwie gruszki, i czylibyś mogła wszystkie zabrać?

Oto raz dwie wzięłam, zostaje jedna, a że ja nie mogę inaczéj brać jak po dwie, więc téj jednéj wziąć nie mogę, powiem zatém, że dwie gruszki mieszczą się tylko raz w trzech gruszkach i na resztę pozostaje jedna.

Poznaliście dotąd trzy liczby: 1, 2, 3, wiécie już jakie są ich własności, spodziewam się, że o reszcie znaków liczebnych już sami będziecie mi mówili.

Co jest cztery?

Cztery jest to samo co jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, i jeszcze więcéj jeden, i tak do jednéj gruszki dodawszy jednę, będzie dwie, do dwóch dodawszy jednę, będzie trzy, a do trzech dodawszy jednę, będzie cztery.

Na jakie liczby mógłbyś rozłożyć te 4 gruszki, Henrysiu?

Najprzód 1 gruszka, a potém razem trzy, będzie cztery 4.

Drugi raz 2 gruszki, a potém razem dwie będzie także 4.

Trzeci raz trzy gruszki, a potém jedna, będzie znów 4 gruszki.

Z tego przekonywacie się, że jedna gruszka od 4 gruszek jest o 3 gruszki mniéj, że dwie gruszki względem czterech jest połową, że 3 gruszki od 4ch jest mniéj o jednę gruszkę.

A ile też razy musiałbyś sięgnąć po te gruszki cztery leżące na stole, abyś biorąc po jednéj wszystkie zabrał?

Cztery razy, i tak, raz, mam jednę, drugi raz, mam już dwie, trzeci raz mam trzy, czwarty raz mam ich cztery, a zatém wszystkie.

Gdyby Ludka miała jednę gruszkę do wzięcia, a ty Henrysiu cztery, ale za każdym razem po jednéj, ile razy więcéj byś sięgnął ręką od Ludki?

Naturalnie że cztery, a zatém cztery gruszki równe, od jednéj, jest cztery razy więcéj.

A gdybyś miał brać za każdym razem po dwie gruszki, ile razy byś sięgnąć musiał abyś wziął te cztery gruszki?

Dwa razy,—rzekł Henryś,—jakoż biorę teraz dwie i sięgnąłem raz, pozostało dwie; sięgam drugi raz i nic nie pozostaje.

Gdybyś więc miał podzielić cztery gruszki między was dwoje, po ile by się dostało każdemu, abyście nie mieli krzywdy.

Po dwie.

A gdyby trzeba dać każdemu dziecku po jednéj gruszce, a jest tych gruszek cztery, ile powinno być dzieci?

Czworo, — odpowiedział Henryś.

Dobrze moje dziecko, widać że rzecz rozumiesz. *A czybyś mógł równo i bez rozkrajania te cztery gruszki podzielić między trzech?*

Niepodobna, i tak: Włodziu, masz jednę gruszkę, Ludko drugą, a ty Cesiu trzecią; wydałem trzy gruszki i każde ma równo, a mnie pozostała ostatnia, to jest czwarta, gdybym ją dał Włodziowi, toby krzywda była dla Ludki i Cesi, bo by one miały po jednéj a Włodzio miałby dwie, toż samo gdybym ją dał Ludce, skrzywdziłbym Włodzia i Cesię, słowem, że nie można bez pomocy noża podzielić równo czterech gruszek, między trzy osoby.

A jakżebyś podzielił za pomocą noża?

Oto tak: dzielę gruszkę na trzy części równe i daję jednę część Włodziowi, drugą Ludce, trzecią Cesi, wszyscy więc mają równo, bo piérwszy ma jednę gruszkę całą i trzecią część drugiéj, druga ma jednę gruszkę i trzecią część drugiéj, trzecia ma toż samo jednę gruszkę całą i trzecią część drugiéj.

A gdybyś napowrót chciał złożyć tę liczbę cztery, cobyś zrobił?

Ponieważ każde z trojga ma po jednéj gruszce i jeszcze do tego po jednéj trzeciéj części gruszki drugiéj, a zatém trzebaby sięgnąć po gruszkę i trzecią

część gruszki, aż trzy razy, żeby im wszystko odebrać, jakoż jak wezmę trzy razy po jednéj gruszce, będę miał gruszek . . . . 3.
Jak wezmę trzy razy po trzeciéj części gruszki, będę miał jednę gruszkę całą, bo całą gruszkę rozkroiłem na trzy części równe, a więc biorąc te trzy części, to jest to samo co całą gruszkę . 1.

Razem 4.

5 *Pięć*, jest to samo co jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden. Bo jeden więcéj jeden, daje dwa; dwa więcéj jeden, daje trzy; trzy więcéj jeden, daje cztery; cztery więcéj jeden daje pięć. Liczbę zatém pięć, czyli 5, można rozłożyć na następujące:

4 i 1 razem 5.
3 i 2 razem 5.
2 i 3 razem 5.
1 i 4 razem 5.

Macie tu po pięć gruszek, i rozkładajcie je na te liczby pojedyncze.

Dzieci wzięły się do roboty na wyścigi, i układały wskazane liczby, przez co dobrze sobie wbiły w pamięć układ i naturę liczb.

Cesiu, powiedz mi ile razy byś sięgnęła ręką po te pięć gruszek, biorąc za każdym razem po gruszce, abyś je wszystkie zabrała?

Pięć razy, i tak: sięgam raz, i już biorę jednę gruszkę, drugi raz, drugą gruszkę, trzeci raz, trzecią gruszkę, czwarty raz, czwartą gruszkę, piąty raz, mam ich już pięć, czyli wszystkie.

Cóż z tego wnosisz?

Z tego wnoszę, że pięć razy więcéj czasu potrzebuję, abym wzięła pięć gruszek, za każdym razem biorąc po jednéj, aniżeli gdybym wzięła wszystkie od razu; stąd jeszcze wypada, że pięć gruszek znaczy pięć razy więcéj aniżeli jedna.

A biorąc po dwie na raz, czybyś mogła wszystkie zabrać?

Sprobuję, odpowiedziała Cesia: biorę dwie, zostaje mi trzy, biorę drugi raz dwie, zostaje mi jedna; a zatém podług warunku danego, nie mogę téj ostatniéj wziąć; w pięciu więc jest dwójek czyli par dwie i jedna pojedyncza gruszka, stąd jeszcze wnoszę, że pięciu gruszek nie mogę na trzy części równe bez krajania podzielić, bo jak dam Ludce, Włodziowi i Henrysiowi po jednéj gruszce, to wydam trzy, a zostanie mi dwie, gdybym zaś z tych dwóch jednę dała Henrysiowi, a drugą Włodziowi, skrzywdziłabym Ludkę, bo pierwsi mieliby po dwie, a Ludka jednę. Ale ja wiem jak sobie poradzę, podzielę jednę gruszkę na trzy części równe, podzielę gruszkę drugą także na trzy części równe i dam najprzód z jednéj gruszki każdemu po części, i z drugiéj każdemu po części, a tak razem będą mieli po całéj jednéj gruszce i po dwie równe części gruszki, czyli po dwa kawałki, z których każdy jest trzecią częścią gruszki, odebrawszy więc każdemu po gruszce, będzie trzy całe gruszki, odebrawszy każdemu po dwa kawałki, będzie kawałków 6, a że tych trzy idzie na jednę gruszkę, więc 6 kawałków znaczy to samo co 2 gruszki, które z całemi czynią 5.

A jakbyś podzieliła Ludko, pięć tych gruszek między Henrysia i Włodzia?

Dam najprzód po gruszce, zostaje mi trzy, widzę że im dać mogę jeszcze po jednéj, będą więc mieli po dwie, a mnie zostanie jedna; nie mogę więc mieć z podziału równego całych gruszek, trzeba więc tę jeszcze gruszkę podzielić na połowę, przekroję ją równo i dam Włodziowi połówkę a Henrysiowi drugą połówkę, mnie zaś nic się nie zostanie z pięciu gruszek, a oni obydwa będą mieli po dwie gruszki i pół gruszki. Połowa więc z 5 gruszek jest dwie i pół gruszki.

Na ciebie koléj Włodziu, podziel mi pięć gruszek na cztery części równych.

I tego nie można bez krajania uskutecznić, bo np. jak dam każdemu po jednéj gruszce, zostanie mi jedna, którą muszę rozkrajać na dwie połówki, a każdą połówkę podzielę na dwie części równe, będę miał ćwiartek cztery i dopiero każdemu dodam do jednéj gruszki ćwiartkę, czyli czwartą część, co uczyni razem dla każdego gruszkę i ćwiartkę, co zebrawszy razem, będę miał całych gruszek cztery i cztery ćwiartki gruszki, czyli gruszkę jednę z czterech równych kawałków złożoną.

Pięć gruszek można dzielić bez krajania na 5 równych części, czyli przez 5 albo na pięciu i każdy będzie miał po gruszce całéj.

Porównajmy teraz z sobą liczby **5, 4, 3, 2, 1.**

I tak: 5 od 4 jest o jedność większe, to jest, iż trzeba jeden dodać do czterech i będzie tu pięć i tu pięć; albo od pięciu ująć jeden i tu będzie cztery i tu cztery.

Powtóre. Pięć od trzech jest o dwa większe, to jest, iż potrzeba albo od pięciu ująć dwa i pozostanie tu trzy równe trzem, albo trzeba do tych gruszek dodać dwie, a będzie tu pięć i tam pięć.

Potrzecie. Pięć od dwóch gruszek jest o trzy gruszki więcéj, to jest, iż albo trzeba od pięciu ująć trzy gruszki, to będziecie mieli tu 2 i tam 2, albo do dwóch dołożyć trzy, a będzie i tu pięć i tam pięć.

Poczwarte. Pięć od jednéj gruszki jest o 4 gruszki więcéj, to jest, iż albo trzeba od pięciu ująć cztery, a będzie i tu jedna gruszka i tu jedna, albo trzeba dołożyć do jednéj gruszki cztery gruszki i będzie i tu pięć i tam pięć.

Popiąte. Pięć od żadnéj gruszki jest o 5 gruszek więcéj, to jest, iż trzeba temu co nic nie ma, albo dać pięć gruszek, i pierwszy i drugi będzie miał po pięć, albo trzeba pierwszemu odebrać pięć gruszek, a wtedy i pierwszy i drugi nic nie będą mieli, a zatém równo.

Weźmy teraz liczbę następującą 6 sześć, czyli jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, wiecéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden; bo jeden więcéj jeden, daje dwa, dwa więcéj jeden, daje trzy, trzy więcéj jeden, daje cztery, cztery więcéj jeden, daje pięć, pięć więcéj jeden daje sześć; a zatém 6 składa się z 5 więcéj 1, albo 4 więcéj 2, albo 3 więcéj 3, albo 2 więcéj 4, albo 1 więcéj 5. Gdy więc naocznie niejako dzieci przekonały się z jakich liczb, dotąd im dobrze znanych, można złożyć liczbę sześć, przechodziłem z niemi dalsze téj liczby własności.

I tak: *Ile razy sięgnąć po te gruszki, aby biorąc po jednéj, można je wszystkie zabrać?*

Odpowiedziano mi, że sześć razy i pokazano; stąd wniesiono, że liczba 6, od jedności jest 6 razy większą, i że 6 od 1, tylko o 5 jest większe to się znaczy, że od pierwszéj trzeba ująć 5, aby druga liczba była równa pierwszéj i przeciwnie do jednego trzeba dodać pięć, aby druga liczba stała się równa pierwszéj.

Ile razy Włodziu sięgać trzeba aby sześć tu leżących gruszek zabrać, biorąc za każdym razem po 2 gruszki?

Włodz. Biorę teraz dwie, pozostaje cztery, biorę jeszcze raz dwie, pozostaje dwie, biorę ostatnie dwie i nic nie ma na stole; a zatém trzeba trzy razy sięgnąć, aby zabrać wszystkie gruszki, czyli że par gruszek jest trzy, można zatém sześć gruszek podzielić między trzy osoby, dając każdéj po dwie gruszki; czyli że sześć da się podzielić na 3 części równe.

A ile razy byś sięgnął, biorąc za każdym razem po trzy?

Wł. Trójek w 6 jest dwie, bo biorąc raz po trzy, pozostaje jeszcze trzy, biorąc drugi raz trzy nic nie pozostaje, a zatém trójek grószek w sześciu gruszkach jest dwie, czyli że sześć gruszek dzieląc na dwie części równe, każda część będzie się składała z trzech gruszek.

A mógłbyś podzielić 6 gruszek między 4 osoby równo?

Najprzód dałbym każdéj osobie po jednéj gruszce, zostałoby mi się jeszcze dwie, a ponieważ dwa jest mniéj jak 4, więc bez krajania nie mogę tych dwóch pozostałych gruszek podzielić. Abym więc krzywdy nie zrobił, podzieliłbym jednę gruszkę na 4 ćwiartki równe i drugą gruszkę na 4 ćwiartki równe i dałbym każdéj z tych osób po dwie ćwiartki, przeto każda z nich miałaby po jednéj gruszce i jeszcze po dwie ćwiartki.

A powiedz mi, jaką to częścią są dwie ćwiartki względem całéj gruszki?

Połową.

Czyliż więc potrzebnie dzieliłeś na cztery części równe każdą gruszkę?

Nie.

Cóż byś więc mógł zrobić?

Oto, zamiast na 4 części każdą gruszkę dzielić, podzieliłbym jednę gruszkę na połowę i drugą na połowę, dodałbym każdéj osobie po połówce, co będzie to samo co po dwie ćwiartki, a przeto umniejszyłbym sobie niepotrzebnéj pracy.

Dobrze mówisz mój Włodziu, ale jakżebyś się wziął do podziału 6 gruszek między 5 osób i to równo?

Dałbym najprzód każdéj po jednéj całéj gruszce i zostałaby mi się jedna', tę jednę rozkroiłbym na 5 części równych i przydałbym każdéj osobie po jednéj takiéj części. W skutek czego, każda z nich miałaby po jednéj całéj gruszce i po jednéj piątéj części gruszki. Gdybym zaś im to co dałem odebrał, miałbym napowrót 5 całych gruszek i pięć kawałków, które pochodząc z jednéj całéj gruszki, dałyby mi szóstą gruszkę, czyli to co miałem wprzód.

Liczba zatém sześć, jak to dobrze uważaliście, da się dzielić w całości bez krajania na 2 i 3 części równych, nie da zaś dzielić się ani na 4, ani na 5 części równych, bez pomocy noża.

Weźmy teraz następną liczbę 7 siedm. Jest to samo co jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden; bo jeden więcéj jeden daje dwa, dwa więcéj jeden daje trzy, trzy więcéj jeden daje cztery, cztery więcéj jeden daje pięć, pięć więcéj jeden daje sześć, sześć więcéj jeden daje siedm; liczba więc siedm, składa się z 6 więcéj 1, 5 więcéj 2, lub z 4 więcéj 3, lub z 3 więcéj 4, lub z 2 więcéj 5, lub 1 więcéj 6. Rozkładajcie te siedm gruszek, które na stole macie, na liczby powyższe i piszcie je na tablicy.

Gdy już dostatecznéj dzieci nabrały wprawy w rozkład téj liczby, zastanawiałem ich umysł nad rozpoznawaniem szybkiém o ile 7 jest większe od 6, 5, 4, 3, 2, 1 i 0.

Daléj, zapytałem Henrysia ile razy sięgnąłby ręką po te siedm gruszek, aby biorąc po jednéj, zabrał je wszystkie?

Uradowany chłopczyna, odpowiedział: aby zabrać te gruszki podług warunku pierwszego, muszę sięgnąć razy siedm, czyli siedm razy rękę wyciągnąć, biorąc jednę gruszkę po drugiéj i licząc ile ich wziąłem, a ile mi się jeszcze pozostało. Następnie biorąc po dwie gruszki, muszę sięgnąć trzy razy i tym sposobem wezmę ich 6 a jedna pozostanie; stąd widzę że w 7, jest tylko *par trzy* i jedna gruszka pojedyncza, czyli że 7 gruszek nie mogą być podzielone na trzy części równe bez krajania; gdybym zaś chciał równo podzielić między trzy osoby, musiałbym dać każdéj po dwie gruszki całe, a ostatnią rozkrajać na trzy kawałki równe i dołożyć każdéj osobie po jednym takim kawałku. Każda więc z tych trzech osób miałaby po 2 gruszki i trzecią część gruszki; a dwie osoby razem miałyby 4 gruszki, całe i 2 trzecie części czyli 2 kawałki, wszystkich zaś miałyby 6 gruszek całych i siódmą z trzech kawałków złożoną.

Tych 7 gruszek również nie można podzielić między dwie osób równo bez krajania, bo w 7 jest dwie trójki czyli 6 więcéj jeden, a zatém dałbym każdéj osobie po 3 gruszki, a pozostałą rozkrajałbym na dwie połówki i dołożyłbym każdéj z osób po połówce. Z tego się przekonywam, że połowa 7miu jest 3 i pół. Siedm gruszek nie może być podzielone między 4 osoby bez krajania, bo dając każdéj po jednéj wydam 4, a zostanie mi się trzy, które bez pomocy noża trudno podzielić. Kraję więc każdą gruszkę na połowę, i będę miał z 3ch gruszek całych 6 połówek, dając każdéj osobie po połówce, wydam 4 połówki i zostanie mi 3 połówki; a że jest 4 osób do podziału, więc każdą połówkę dzielę na 2 części równe, czyli na ćwiartki, będę ich miał 4 i przydam każdéj osobie po ćwiartce gruszki. Każda osoba będzie miała po 1 całéj gruszce, po połówce i po ćwiartce gruszki, a że połówka jest to samo co dwie ćwiartki, przeto każda osoba miéć będzie po całéj gruszce i 3 ćwiartki. Gdy zaś im to co dałem odbiorę, będę miał napowrót cztery całe gruszki — i pewną liczbę ćwiartek, — lecz ile, to tego nie umiem jeszcze zliczyć. Ale ja sobie poradzę; wezmę od każdéj osoby po ćwiartce, będę miał 4 ćwiartki, czyli całą gruszkę, a u każdéj z osób zostanie się jeszcze po 2 ćwiartki, odbiorę im jeszcze po ćwiartce i zrobi się druga gruszka cała, odbiorę nakoniec ostatnią ćwiartkę od każdéj i otrzymam trzecią gruszkę. A że odebrałem niepokrajane 4 gruszki, z pokrajanych zrobiło się trzy, razem mam 7.

Liczbę siedm gruszek, chcąc podzielić między 5 osób równo, trzeba każdéj dać po jednéj całéj gruszce, a pozostałe dwie podzielić każdą na 5 części równych i dać każdéj osobie z jednéj gruszki po jednéj części i z drugiéj gruszki także po jednéj, będą więc miały po jednéj gruszce całéj i po dwa kawałki, z których każdy będzie piątą częścią gruszki.

Aby 7 gruszek podzielić między 6 osób, trzeba każdéj dać po gruszce całéj, a pozostałą siódmą podzielić na 6 kawałków równych i przydać każdéj osobie po jednym kawałku, czyli po szóstéj części gruszki.

Tu, równie jak we wszystkich podobnych przypadkach, nauczyciel winien pytać się dzieci, ile będzie gruszek, dodając razem to co wzięły **2, 3, 4, 5** i t. d. *osób.*

Nakoniec, chcąc podzielić 7 gruszek między siedm osób, trzeba dać każdéj po jednéj gruszce.

Z tego co poprzedziło, przekonywamy się, że liczba 7 nie da się dzielić w całych jednostkach ani na 2, ani na 3, ani na 4, ani na 5, ani na 6 równych części.

8 ośm, jest to samo co jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden. Bo jeden więcéj jeden daje dwa, dwa więcéj jeden daje trzy, trzy więcéj jeden daje cztery, cztery więcéj jeden daje pięć, pięć więcéj jeden daje sześć, sześć więcéj jeden daje siedm, siedm więcéj jeden daje ośm. A zatém liczba 8, może być rozebrana na następujące:

1 więcéj 7, 2 więcéj 6, 3 więcéj 5, 4 więcéj 4, 5 więcéj 3, 6 więcéj 2, 7 więcéj 1. Można jeszcze tę liczbę 8 złożyć z trzech liczb, i tak: 1 więcéj 2 więcéj 5, 1 więcéj 3 więcéj 4, 1 więcéj 4 więcéj 3, 1 więcéj 5 więcéj 2, 1 więcéj 6 więcéj 1, 2 więcéj 3 więcéj 3, 2 więcéj 4 więcéj 2, 2 więcéj 5 więcéj 1, 3 więcéj 4 więcéj 1. Wszystkie zaś inne kombinacye, byłyby powtórzeniem tychże samych liczb w innym porządku. Tak rzecz wyłożywszy, dałem im 8 gruszek i takowe rozkładać na powyższe liczby poleciłem, a że to zatrudnienie ich bawiło, przeto z ochotą tém się zajęły.

Tu zadawałem im pytania, o ile 8 gruszek jest większe od 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Każde z dzieci odpowiedziało na to z łatwością, że 8 od 7 jest tylko o jednę gruszkę więcéj, 8 od 6 większe jest o dwie gruszki, 8 od 5 o 3 gruszki, 8 od 4 o 4 gruszki i t. d.

Włodziu, ile razy musisz ręką sięgnąć, abyś biorąc *po jednéj gruszce za każdym razem zabrał je wszystkie?*

Ośm razy, odpowiedział i pokazał mówiąc: sięgnąłem raz i mam jednę gruszkę, a siedm się pozostaje, sięgnąwszy drugi raz, będę miał dwie gruszki, a sześć się pozostanie, sięgnę trzeci raz będę miał trzy gruszki, a 5 się pozostanie, sięgnąwszy czwarty raz, będę miał cztery gruszki a pozostanie 4, sięgnąwszy piąty raz będę miał 5 gruszek a 3 pozostanie, sięgnąwszy szósty raz, będę miał 6 gruszek a 2 pozostanie, sięgnąwszy siódmy raz będę miał 7 gruszek a tylko jedna z 8 pozostanie, sięgnąwszy ósmy raz, będę miał ośm gruszek i nic nie pozostanie z ośmiu, czyli zabrałem wszystkie.

Z tego przekonywacie się, że 1 od 8 wziąwszy pozostanie 7, czyli 1 od 8 odjąwszy, reszta będzie 7; 2 od 8 odciągnąwszy pozostanie 6, 3 od 8 pozostanie 5, 4 od 8 pozostanie 4, 5 od 8 pozostanie 3, 6 od 8 pozostanie 2, 7 od 8 pozostanie 1, 8 od 8 nic. A zatém odciągać jest to brać pewną liczbę czegokolwiek z danéj liczby téjże saméj rzeczy. Po odciąganiu czyli po wzięciu, albo się nic nie zostanie, gdy wszystko biorę, albo się co zostanie, gdy mniéj biorę jak było.

A ile razy byś musiał sięgnąć, abyś biorąc za każdym razem po dwie gruszki, zabrał je wszystkie 8?

Zaraz sprobuję, rzekł Włodzio, raz dwie, pozostało 6, drugi raz dwie, będę miał 4 i pozostanie 4, trzeci raz 2, będę miał 6, a pozostanie 2, czwarty raz 2, będę miał 8 i nic nie pozostanie, a zatém muszę sięgnąć cztery razy, abym biorąc po dwie gruszki, zabrał je wszystkie 8, stąd wnoszę, że 4 razy po 2 gruszki daje 8 gruszek, albo też 8 gruszek dzieląc równo między cztery osoby, każda będzie miała po 2 gruszki.

Biorąc za każdym razem po 3 gruszki, za drugiém wyciągnieniem ręki, miałbym ich 6 i pozostałoby 2, a zatém nie mógłbym podług tego warunku wszystkich zabrać. Gdybym zaś chciał podzielić 8 gruszek między 3 osoby, dałbym każdéj po dwie gruszki, musiałbym zatém z ośmiu gruszek wziąć 6 i pozostałoby mi 2, z których każdą podzieliłbym na 3 części równe i rozdałbym z pierwszéj gruszki po jednym kawałku, z drugiéj także po jednym kawałku, każda więc osoba miałaby po 2 gruszki całe i po 2 kawałki, czyli po 2 trzecich części.

Odebrawszy im napowrót to co im dałem, miałbym 6 gruszek całych i 6 kawałków, a że z trzech kawałków utworzyłbym napowrót jednę gruszkę, z trzech drugich, drugą gruszkę, miałbym więc razem 6 gruszek całych i dwie z kawałków złożone.

Ośm gruszek między dwóch bardzo łatwo podzielić, bo dałbym jednéj osobie 4 gruszki, drugiéj 4 i nieby się nie pozostało, a zatém 2 razy po 4 gruszki daje 8 gruszek, i aby 8 gruszek podzielić między 2 osoby, daję każdéj po 4 gruszki.

Aby ośm gruszek podzielić między 5 osób, dam każdéj po jednéj gruszce całéj, wydam więc 5 gruszek całych, a każdą z trzech pozostałych, podzielę na 5 części równych i przydam każdéj osobie z pierwszéj gruszki piątą część, z drugiéj gruszki piątą część, z trzeciéj także piątą część, każda zatém osoba będzie miała po 1 gruszce całéj i po trzy kawałki czyli po 3 piąte części.

Odebrawszy zaś od nich to, co im dałem, będę miał napowrót 8 gruszek, najprzód 5 całych gruszek i kawałków o to tyle (co pokazał) biorę najprzód 5 kawałków i mam jednę gruszkę, drugie 5 i mam drugą gruszkę, trzecie pięć kawałków i mam trzecią gruszkę, a zatém z kawałków zrobiło się 3 gruszki, a było całych 5, razem 8.

Aby podzielić 8 gruszek między 7 osób, dam każdéj osobie po 1 gruszce, pozostanie mi jedna i tę rozkroję na 7 kawałków równych i przydam każdéj osobie po kawałku, będą więc miały po 1 gruszce i po kawałku gruszki. Odebrawszy im, będę miał 7 gruszek i ósmą złożoną z 7 kawałków, czyli razem 8.

Ośm gruszek między 6 osób podzielić można, dając każdéj po jednéj gruszce całéj, pozostałe dwie, chcąc rozdzielić między 6, podzielę jednę gruszkę na 6 równych części i drugą gruszkę na 6 równych części, przydam po takich kawałków dwa każdéj osobie.

Czyliby nie można te gruszki inaczéj podzielić?

Czemu nie, dałbym jednę gruszkę na trzech i drugą na trzech, to jest, podzieliłbym jednę gruszkę na 3 części równe i drugą gruszkę na 3 części równe, miałbym 6 kawałków, i po jednym takim kawałku dałbym każdéj osobie, wprzód miały po dwa kawałki, a teraz mają po jednym kawałku, ale te kawałki są tak wielkie jak pierwsze, w pierwszym razie miały po 2 szóste części, a teraz po jednéj trzeciéj.

9 Liczba dziewięć, jest to samo co jeden więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden, więcéj jeden. Bo jeden więcéj jeden czynią dwa, dwa więcéj jeden czynią trzy, trzy więcéj jeden toż samo co 4; cztery więcéj jeden czynią 5, 5 więcéj 1 czynią sześć, 6 więcéj jeden czynią 7, 7 więcéj 1 czynią 8, 8 więcéj 1 czynią 9.

Z tych pojedynczych gruszek, jakie możecie uformować liczby? zapytałem dzieci.

Henryś wziął się do roboty i układał je osobno po jednéj, mówiąc, że z liczby dziewięciu gruszek, można otrzymać 9 jedności i takowe na tablicy napisał, brał potém po 2 gruszki, uformował 4 pary i pozostała jedna gruszka, napisał więc tak: 2, 2, 2, 2, 1, co razem nie może więcéj uczynić jak 9; daléj kładł po 3 i znalazł trójek 3 w 9 gruszkach i napisał, że 9 jest toż samo co 3, 3, 3, czyli trzy razy po trzy czyni 9.

Następnie wziął na każdą kupkę po 4 gruszki, zrobił z 9 gruszek dwie kupki i pozostała mu gruszka jedna, i napisał 4, 4, 1, co razem czyni 9.

Daléj brał jednę kupkę po 5 gruszek i wiedział że z 9 gruszek można zrobić tylko jednę kupkę pięcio-gruszkową, a drugą cztero-gruszkową, stąd wniósł, że liczbę 9 można rozłożyć na dwie liczby, t. j. 5 i 4.

Gdy zaś brał na każdą kupkę po 6 gruszek, zrobił jednę kupkę 6-gruszkową, a drugą 3-gruszkową i przekonał się, że liczba 9 da się rozłożyć na 6 i 3.

Gdy brał 7 gruszek na kupkę, mógł tylko jednę kupkę ułożyć i dwie gruszki mu się zostało. Stąd wniósł, że liczba 9 składa się z dwóch liczb, t. j. 7 i 2.

Nakoniec, biorąc na kupkę 8 gruszek, pozostała mu jedna. A zatém 9 może być rozebrane na dwie liczby 8 i 1. Wreszcie gdy wziął 9 gruszek, biorąc po jednéj, zabrał je wszystkie, ułożył stąd kupkę dziewięcio-gruszkową.

Z tego rozkładu 9 gruszek na kupki doszły, że 9 nie da się bez krajania podzielić na części równych: 2, 4, 5, 6, 7, 8; ale da się rozdzielić na 3 części równe i każda część będzie miała po 3.

Tu kolejno dzieciom trzeba zadawać pytania, jakby podzielić 9 gruszek między 2, 4, 5, 6, 7, 8 osób, w sposób dotąd wskazany.

Pojedyncze znaki liczebne zowią się inaczéj cyframi, tych jest dziewięć, które już dostatecznie poznaliśmy.

ROZDZIAŁ II.

O LICZENIU.

Gdy już dzieci poznały dziesięć znaków liczebnych, wypadało im wytłómaczyć w dalszym ciągu własności niektóre, wszystkich innych liczb i podać zarazem sposoby ich pisania i wymawiania.

Do 9 jednostek przydawszy jednę jeszcze jednostkę, otrzymujemy dziesięć, co inaczéj zowie się dziesiątkiem.

Do jednostki zaś obejmującéj w sobie dziesięć jednostek pojedynczych, czyli do dziesięciu przydawszy jeden, będzie dziesięć więcéj jeden czyli jedenaście; przydawszy dwa, będzie dziesięć więcéj dwa czyli dwanaście; przydawszy trzy, będzie dziesięć więcéj trzy czyli trzynaście; przydawszy cztery, będzie dziesięć więcéj cztery czyli czternaście; przydawszy pięć, będzie dziesięć więcéj pięć czyli piętnaście; przydawszy sześć, będzie dziesięć więcéj sześć czyli szesnaście; przydawszy siedm, będzie dziesięć więcéj siedm czyli siedmnaście; przydawszy ośm, będzie dziesięć więcéj ośm czyli ośmnaście; przydawszy dziewięć, będzie dziesięć więcéj dziewięć czyli dziewiętnaście; przydawszy dziesięć, będzie dziesięć więcéj dziesięć, czyli 2 razy dziesięć, czyli dwadzieścia.

Do wyrażenia wszystkich powyżéj wymienionych liczb, zgodzono się używać dwóch znaków, ale w ten sposób, aby liczba dziesiątków była napisana po lewéj ręce, a liczba wyobrażająca jednostki proste, po prawéj. — I tak, w dziesięciu jest tylko dziesiątek jeden, a nie ma jednostek zwyczajnych, napiszemy więc tak: 10, gdzie jeden po lewéj ręce napisane, oznacza dziesiątek, a 0 wskazuje że nie ma jednostek prostych. Podobnież jedenaście, pisze się: 11, pierwsze jeden znaczy dziesiątek a drugie jeden, jednostkę prostą.

Dwanaście, inaczéj 12,—1 oznacza jeden dziesiątek a 2, dwie jedności.

Trzynaście, inaczéj 13, — 1 oznacza jeden dziesiątek, a 3, trzy jedności proste.

Czternaście, pisze się inaczéj 14, gdzie znowu 1 oznacza dziesiątek jeden, a 4, cztery jedności proste; w taki sam sposób pisze się piętnaście 15, szesnaście 16, siedmnaście 17, ośmnaście 18, dziewiętnaście 19; dwadzieścia zaś składa się z dwóch dziesiątków okrągło; chcąc więc tę okoliczność wyrazić piszemy tak: 20, gdzie 2 wyraża dwie jednostki dziesiątkowe, a 0 tylko nam przypomina, że w danéj liczbie nie ma jednostek prostych.

Do dwudziestu dołożywszy, jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedm, ośm i dziewięć, będziemy mieli dwadzieścia jeden czyli 21; dwadzieścia dwa czyli 22; dwadzieścia trzy czyli 23; dwadzieścia cztery czyli 24; dwadzieścia pięć czyli 25; dwadzieścia sześć czyli 26; dwadzieścia siedm czyli 27; dwadzieścia ośm czyli 28; dwadzieścia dziewięć czyli 29; — a gdy do dwudziestu czyli do dwóch dziesiątków dołożę jeden dziesiątek, będę miał dziesiątków trzy, czyli króciéj trzydzieści, co się pisze 30.

W dalszym ciągu, trzy dziesiątki więcéj jeden, będzie trzydzieści jeden czyli 31. Trzy dziesiątki więcéj dwa, będzie trzydzieści dwa czyli 32. Trzy dziesiątki więcéj trzy, będzie trzydzieści trzy czyli 33 i t. d., aż dotąd gdy powiem trzy dziesiątki więcéj dziesięć, będzie razem cztery dziesiątki, czyli czterdzieści, albo króciéj 40.

Do czterech dziesiątków przydawszy jedność, będzie czterdzieści jeden, czyli 41.

Do czterech dziesiątków przydawszy dwa, będzie czterdzieści dwa, czyli 42.

Do czterech dziesiątków przydawszy trzy, będzie czterdzieści trzy, czyli 43.

Następnie nauczyciel winien z dziećmi daléj postąpić, przydając do czterech dziesiątków cztery, pięć, sześć, siedm, ośm, dziewięć; i liczby stąd otrzymane pisać i wymawiać. Gdy zaś do czterech dziesiątków przydamy jeden dziesiątek, będzie ich razem pięć, czyli króciéj pięćdziesiąt, albo 50.

Do pięciu dziesiątków przydajmy jeden, dwa, trzy, cztery, pięć, sześć, siedm, ośm i dziewięć, a otrzymamy pięćdziesiąt jeden, czyli 51; pięćdziesiąt dwa, czyli 52 i t. d.

Do pięciu dziesiątków przyłożywszy jeszcze jeden dziesiątek, będzie dziesiątków sześć czyli sześćdziesiąt, albo 60; daléj już będzie sześćdziesiąt jeden, czyli 61, sześćdziesiąt dwa, czyli 62 i t. d. aż do 69 sześćdziesięciu dziewięciu.

Gdy zaś do sześciu dziesiątków przydamy jeszcze jeden dziesiątek, otrzymamy razem siedm dziesiątków czyli siedmdziesiąt, albo 70.

Do siedmiu dziesiątków przydawszy jeden, dwa, trzy, cztery, pięć i t. d. jedności prostych, będziemy mieli siedmdziesiąt jeden, siedmdziesiąt dwa, siedmdziesiąt trzy i t. d.

Gdy zaś do siedmiu dziesiątków dołożymy jeszcze jeden dziesiątek, otrzymamy dziesiątków ośm, czyli króciéj ośmdziesiąt, albo 80, do 80 przydawszy jeden, dwa, trzy, cztery i t. d. będzie ośmdziesiąt jeden, czyli 81, ośmdziesiąt dwa, czyli 82 i t. d.

Do ośmiu dziesiątków przydawszy jeszcze jeden dziesiątek, będzie razem dziesiątków dziewięć czyli króciéj wyrażając to, jest dziewięćdziesiąt, albo 90; następnie do téj liczby przydając jeden, dwa, trzy, cztery, i t. d będziemy mieli dziewięćdziesiąt jeden, dziewięćdziesiąt dwa, dziewięćdziesiąt trzy, i tak daléj.

Gdy zaś do dziewięciu dziesiątków przydamy jeszcze jeden dziesiątek, będziemy mieli dziesiątków dziesięć i to nazywa się sto; co już się wyraża za pomocą trzech znaków i pisze się 100.

Uwaga pierwsza. Skoro dzieci wprawią się w pisanie i czytanie wszystkich liczb, zacząwszy od 1 aż do 100,— nauczyciel winien zadawać im pytania treści następującéj, np. 65 z czego się składa?— Odpowiedź: z 6 dziesiątków i z 5 jedności.

(Toż samo powtórzyć na wszystkich innych liczbach).

Uwaga druga. Rozbiór wszelkich liczb w sposób podany w rozdziale piérwszym, aczkolwiek nie jednemu wydawać się może rozwlekły i nudny, jednakże ułatwi on dzieciom zrozumienie i pojęcie działań arytmetycznych i przyzwyczai ich zwolna do stosownego tychże działań używania przy rozwiązywaniu rozlicznych zagadnień z życia praktycznego.

Z tego względu radzę nauczycielom z własnego doświadczenia, aby przejąwszy się wskazaną metodą, przeszli z uczniami swemi w dalszym ciągu rozbiory wszystkich innych liczb od 10 do 100 nie pomijając żadnéj.

Każdy, który tego sposobu sprobuje, przekona się sam, że dla dzieci będzie ta praca miłą i korzystną.

Przy rachunkach pamięciowych szczególniéj daje się uczuwać potrzeba rozkładu liczb w myśli; nadto postępując z dziećmi tą drogą, przyzwyczajamy je zwolna do zastanawiania się, a przy ciągłém w różnych postaciach powtarzaniu rozlicznych kombinacyj liczbowych, dzieci dojdą do pożądanéj wprawy i szybkości w odbywaniu działań arytmetycznych.

Podział liczb na upodobaną liczbę części doprowadza mimowolnie do teoryi ułamków, a dzieci nie wiedząc co jest ułamek, wykonywają z niemi różne działania, np:

Gdy mam podzielić liczbę 7 jabłek między czterech, widzę, że każdy będzie miał po jedném jabłku całém i pozostanie trzy do podziału między czterech, dzielę więc każde jabłko pozostałe na 4 części równe czyli na 4 ćwiartki, a zatém z pierwszego jabłka dostanie się każdemu po ćwiartce, z drugiego także po ćwiartce, z trzeciego po ćwiartce; każdy będzie miał jedno jabłko całe i trzy ćwiartki, czyli trzy czwarte części jednego jabłka, co można dzieciom powiedzićć, że te trzy ćwiartki jednego jabłka, są czwartą częścią trzech pozostałych jabłek i zarazem wspomnićć, iż aby tę okoliczność wyrazić, zgodzono się użyć dwóch liczb, z których jedna wyobraża liczbę jabłek całych, a druga jaką cząstkę trzeba z nich wziąć, i że pierwsza pisze się nad poziomą linijką, np. $\frac{3}{4}$ jabłek, to jest z całych jabłek wzięta jest część czwarta, lub jak im wytłómaczyłem, ćwiartka czyli część czwarta z jednego jabłka, wzięta jest trzy razy, czyli takich ćwiartek jabłka bierzemy trzy.

Teraz przypuśćmy, że chcemy podzielić te same 7 jabłek na pięciu. Rozumując jak wyżéj, dojdziemy, że każdy dostanie po jedném jabłku całém i po dwie piąte części jabłka, czyli po $^2/_5$.

Gdybyśmy chcieli się przekonać o ile każdy z pierwszego podziału będzie miał więcéj od każdego z drugiego podziału.

Rozumuję z dziećmi w sposób następujący:

Ponieważ w pierwszym i drugim przypadku mają po jabłku, więc tu nie ma żadnéj różnicy, ale w pierwszym razie dostają $\frac{3}{4}$ jabłka, a w drugim po $\frac{2}{5}$ jabłka, czyli w pierwszym razie trzy kawałki a w drugim tylko dwa kawałki; ale że te kawałki nie są sobie równe, przeto nie można powiedziéć, że pierwszy bierze od drugiego o jeden kawałek więcéj.

W tym celu każę dzieciom podzielić każdą ćwiartkę jabłka na pięć części równych, a zatém całe jabłko będzie ich miało 20.

W dalszym ciągu mówię:

1. Ponieważ ćwiartka ma kawałków 5, z których

każdy jest dwudziestą częścią jabłka, więc ćwiartek 3 będzie miało tych samych kawałków 15.

2. Gdy całe jabłko ma kawałków 20, więc część jego piąta mieć ich będzie cztery. A ponieważ z drugiego podziału dostaje się każdemu po dwie piątych części, więc każdy z nich będzie miał dwa razy po 4 kawałki, czyli 8 kawałków będących dwudziestą częścią jabłka.

3. Pierwsi dostają po 15 kawałków, jakich drudzy tylko po 8, więc każdy z pierwszego podziału ma o 7 kawałków więcéj od każdego z drugiego podziału czyli o $^7/_{20}$, siedm dwudziestych.

Chcąc się dowiedziéć ile to uczyni razem co jeden z pierwszego podziału i drugi z drugiego podziału dostanie, powiadam:

pierwszy dostaje 1 jabłko i 15 kawałków,
drugi dostaje . . 1 jabłko i 8 kawałków,
razem 2 jabłka i 23 kawałków,

czyli $^{23}/_{20}$; a że na jedno jabłko takich kawałków idzie 20, więc z 23 kawałków tworzy się jedno jabłko i 3 kawałki, było wprzód 2 jabłka, będzie razem 3 i $^3/_{20}$ części jabłka.

Poprzedzający przykład ma służyć nauczycielom za wskazówkę postępowania przy odbywaniu ćwiczeń rachunkowych z uczniami. — Nie jest to przedmiot trudny i dzieci nawet 8mioletnie mogą to wszystko zrozumiéć i pojąć, przedstawiając im to zwłaszcza w początkach zmysłowo.

W dalszym ciągu, chcąc dać poznać dzieciom liczby większe od stu i nauczyć ich takowe pisać i wymawiać, wysypałem im na stół kilka funtów drobnego szrutu i zapytałem, ile tu wszystkich jest ziarnek?

Henryś, jako najstarszy i najlepiéj rzecz pojmujący, odpowiedział, że to jest niepodobném, aby mógł to wszystko zliczyć, gdyż daléj rachować nie umié, jak do sta.

Aby wyprowadzić go z kłopotu, postawiłem na stole szufladkę długą, podzieloną na siedm komórek i zapowiedziałem, że za pomocą téj szufladki potrafią obliczyć ilość wszystkich ziarnek. Pamiętajcie tylko na to, że mamy dziewięć znaków do wyrażenia wszystkich liczb, trzeba więc użyć pewnego sposobu, który zasadza się na samém położeniu względném tych znaków, na przypadek, gdy chcemy wszelkie inne liczby napisać, jaktoście już poznały, pisząc liczby złożone z dziesiątków i jedności.

Następnie zwróciłem ich uwagę na przeznaczenie komórek w szufladce; mówiąc, że do pierwszéj z nich od ręki prawéj ku lewéj, składać się będą same jednostki proste od 1 do 9 włącznie; *do drugiéj* dziesiątki, to jest zbiory tychże samych jednostek pojedynczych po dziesięć razem branych; *do trzeciéj* wkładać się będą sta, to jest zbiory dziesiątków po dziesięć razem branych; *do czwartéj* zbiory set po dziesięć razem branych, zbiory te nazywać będziemy tysiącami; *do piątéj* zbiory tysięcy po dziesięć razem branych, które nazywamy dziesięcio-tysiącami; *do szóstéj* zbiory dziesięćtysięcy po dziesięć na raz branych, które inaczéj będą sta tysiącami; *do siódméj* będą wkładane zbiory jednostek, z których każda będzie w sobie miała dziesięć razy po sto tysięcy, które to jednostki nazywać będziemy milijonami. Dla lepszego wyjaśnienia rzeczy, poleciłem dzieciom aby każde z nich wzięło część leżącego na stole śrutu i układało kupki po dziesięć na każdą, co się nazywa dziesiątkiem, zawinęło każdą kupkę w papier, i na wierzchu napisało: dziesięć, czyli jeden dziesiątek (*). Gdy się dzieci zajęły tą robotą, pilnowałem, aby wszystko szło porządnie i dokładnie. Po uformowaniu z całéj ilości szrutu na stole leżącego, pakiecików mających w sobie po dziesięć ziarnek, pozostało jeszcze ziarnek sześć, które kazałem wsypać do ostatniéj po lewéj ręce komórki, na któréj był napis: jednostki, i zarazem zapowiedziałem, aby dla pamięci zanotowali sobie, ile ziarnek do téj komórki wsypały.

(*) Przy obliczaniu kupek dziesiątkowych, rozmaicie im postępować kazałem, do jednych brały po ziarnku, do drugich po 2 razem do trzeciéj po trzy razem, do czwartéj razem po 5, i t. d., przez co wprawiały się w skład liczby 10 i zarazem było to dla nich powtórzeniem tego, czego się już poprzednio uczyły. I tak, po 3 ziarnka na raz, trzeba było brać trzy i dorzucić jedno ziarnko; aby otrzymać ich 10; po 4 trzeba było brać dwa razy i dorzucić 2 aby otrzymać 10 i t. d.

Potém rzekłem do nich: bierzcie na raz po dziesięć kupek i zawijajcie w papier; wzięły się do téj roboty i po pewnym czasie ukończyły. Na każdéj kupce napisały dziesięć dziesiątków czyli sto. Po obliczeniu pokazało się, iż pozostało kupek dziesiątkowych siedm, które kazałem włożyć w komórkę drugą obok ostatniéj, na któréj był napis dziesiątki i dla pamięci zanotować, że ich jest tam siedm.

Z pozostałych na stole kupek stu ziarnkowych, kazałem zbierać po dziesięć takich kupek na jednę, obwijać w papier i na każdéj napisać 10 set czyli tysiąc. Po obliczeniu znalazało się kupek tysiącznych pewna liczba i reszta z kupek sto-ziarnkowych 8,—te ośm kupek włożono do komórki trzeciéj, podług mojego zalecenia, to jest do téj, na któréj był napis sta.

Daléj zbierały kupek tysiącznych po 10 razem i obwijały je w papier, na każdéj z takich kupek pisząc dziesięć tysięcy—pozostałe 5 kupek tysiącznych włożyły podług mego polecenia, do czwartéj komórki od końca, na któréj był napis tysiące.

Następnie kupki obejmujące każda po dziesięć tysięcy, zbierano znowu po dziesięć razem, zawijano w papier, pisząc na każdéj dziesięć razy po dziesięć tysięcy czyli sto tysięcy, po zebraniu zostało się 2 kupki dziesięcio-tysiączne i te złożono w komórkę piątą, na któréj był napis dziesięcio-tysiące.

Sto tysięczne kupki zbierano po dziesięć na jednę, obwijano w papier i napisano na wierzchu dziesięć razy po sto tysięcy, czyli milijon, takich było 2 i nic nie pozostało, a zatém komórka szósta jest pusta, gdyż nie zostało się pakiecików sto-tysięcznych; dwa milijony umieszczam w komórce siódméj — i będzie:

Milijony	*Sta tysiące*	*Dziesięcio-tysiące*	*Tysiące*	*Sta*	*Dziesiątki*	*Jednostki*
2	0	2	5	8	7	6

albo napisawszy te liczby obok siebie bliżéj, będzie: 2025876.

Teraz spodziewam się, że powiécie łatwo, ile jest ziarnek w każdéj komórce?

Henryś odezwał się, że w pierwszéj jest dwa milijony, w drugiéj nie ma nic, w trzeciéj dwa razy po dziesięć tysięcy, w czwartéj 5 tysięcy, w piątéj 8 set, w szóstéj 7 dziesiątków, a w ostatniéj od prawéj ręki 6 ziarnek.

Ileż więc ich jest razem?

Włodzio odpowiedział: że jest ich dwa milijony więcéj dwadzieścia tysięcy, więcéj pięć tysięcy, czyli dwadzieścia pięć tysięcy ośmset siedmdziesiąt sześć. Czyli przeczytawszy gładko, powiemy, że jest ziarnek dwa milijony, dwadzieścia pięć tysięcy, ośmset siedmdziesiąt sześć.

Z tego przykonywacie się, że każda z komórek ma sobie właściwe przeznaczenie, i tak:

Pierwsza od prawéj ręki, zawierać tylko może liczby, których jednostka jest pojedyncza i ta się zowie jednostką pierwszego rzędu.

Druga ma w sobie liczby, których jednostka jest z dziesięciu pojedynczych złożona, i taka jednostka zowie się dziesiątkiem, czyli jednostką rzędu drugiego.

Trzecia ma takie tylko liczby, których jednostką jest liczba sto, z dziesięciu jednostek rzędu drugiego złożona, czyli ma dziesięć razy po dziesięć—i zowie się jednostką rzędu trzeciego.

Czwarta mieścić w sobie będzie liczby, których jednostką jest tysiąc, z dziesięciu jednostek rzędu trzeciego złożony, czyli ma w sobie 10 razy po sto, i zowie się jednostką rzędu czwartego.

Piąta ma liczby, których jednostka jest dziesięć tysięcy, czyli jednostka z dziesięciu jednostek rzędu czwartego złożona, czyli dziesięć razy po tysiąc i zowie się jednostką rzędu piątego.

Szósta ma liczby, których jednostką jest sto tysięcy, jednostka z dziesięciu jednostek rzędu piątego złożona, czyli dziesięć razy po dziesięć tysięcy i zowie się jednostką rzędu szóstego.

Siódma ma liczby, których jednostką jest milijon, czyli jednostka z dziesięciu jednostek rzędu szóstego złożona, czyli dziesięć razy po sto tysięcy i zowie się jednostką rzędu siódmego.

Ósma (gdyby było więcéj komórek) ma liczby których jednostką jest dziesięć milijonów, czyli jednostka z dziesięciu jednostek rzędu siódmego złożona, czyli 10 razy po milijonie i zowie się jednostką rzędu ósmego.

Dziewiąta ma liczby, których jednostką jest sto milijonów, czyli jednostka z dziesięciu jednostek rzędu ósmego złożona, czyli dziesięć razy po dziesięć milijonów, i zowie się jednostką rzędu dziewiątego i t. d.

Mając zatém w myśli komórki, o których była mowa, możecie łatwo każdą liczbę daną przeczytać, pamiętając tylko, że na pierwszém miejscu od ręki lewéj są jedności rzędu pierwszego, na drugiém rzędu drugiego czyli dziesiątki, na trzeciém rzędu trzeciego czyli sta, na czwartém miejscu jednostki rzędu czwartego czyli tysiące, na piątém miejscu jednostki rzędu piątego czyli dziesięcio-tysiące, na szóstém miejscu jednostki rzędu szóstego czyli sta tysiące, na siódmém miejscu są jednostki rzędu siódmego czyli milijony i t. d.

Podług tego, gdy powiem sześćset pięćdziesiąt cztery tysiące, ośmset pięćdziesiąt cztery, napiszę tę liczbę bardzo łatwo, gdy ją rozbiorę w myśli. Jakoż ona składa się z sześciu oddzielnych liczb, to jest z 6 set tysięcy, 5 dziesiątków tysięcy, z 4 tysięcy, z 8 set, z 5 dziesiątków i z 4 jedności. Ponieważ jednostki sto-tysiączne piszą się na miejscu szóstém od ręki prawéj ku lewéj, więc liczba 6 będzie na pierwszém miejscu od ręki lewéj; po liczbie wyobrażającéj sta tysiące, następują liczby których jednostkami są dziesięcio-tysiące, a tych tu jest 5, po liczbach wyobrażających dziesiątki tysięcy, następują liczby których jednostkami są tysiące, a tych w danym przykładzie jest 4, po liczbach wyobrażających tysiące, następują liczby, których jednostkami są sta i tych tu jest 8, po liczbach wyobrażających sta, następują liczby, których jednostkami są dziesiątki, a tych jest w obecnym razie 5, po liczbach nakoniec wyobrażających dziesiątki, następują liczby, których jednostki są rzędu pierwszego, z tego więc przekonywamy się, że liczba w danym przykładzie wymówiona, napisze się w sposób następujący:

set	pięćdziesiąt	cztery	set	pięćdziesiąt	cztery
6	5	4	8	5	4
tysiące					

Drugi przykład. Napisać liczbę pięć tysięcy cztery. — Liczba ta składa się tylko z dwóch liczb, to jest: z pięciu tysięcy i z czterech jedności. Pierwsza ma za jednostkę tysiąc, czyli jednostkę rzędu czwartego, która się musi pisać na miejscu czwartém od prawéj ręki, a liczba cztery, ma jednostkę rzędu pierwszego, a zatém musi być napisana na pierwszém miejscu od ręki prawéj. Między jednostkami tysiąc a jeden, mieszczą się sta i dziesiątki, tych w danéj liczbie nie ma, więc ich miejsce zastąpimy zerami i napiszemy: 5004.

Nauczyciel używający w pomoc téj książki, winien w tém miejscu zadawać uczniom wiele bardzo zadań, tyczących się pisania i czytania liczb wszelkich, aby wprawić ich w liczenie, co jest główną podstawą arytmetyki. Nie dosyć bowiem, aby dzieci pisały za dyktowaniem liczby, lub napisane przeczytały, ale potrzeba od nich żądać wytłómaczenia się jasnego, z tego co mówić w tym względzie będą, a to na wzór tego, cośmy dotąd w tym przedmiocie wyłożyli.

Gdy już dzieci nauczą się dobrze każdą liczbę bez błędu napisać i napisaną przeczytać, łatwo im będzie odgadnąć, ile w danéj liczbie jakiéjkolwiek znajduje się dziesiątków, set, tysięcy i t. d., bo każde z nich przypomni sobie pracę, przy układaniu kupek dziesiątkowych, setnych, tysiącznych i t. p. podjętą, i zarazem rachubę jaką uskutecznić musiało przy obliczaniu ziarnek. Co do mnie, dla tém lepszego przekonania się, poleciłem Henrysiowi, aby mi najprzód przeczytał liczbę 5603425.

Chłopczyna rzucił okiem i powiada: ponieważ ta liczba składa się z siedmiu znaków, a zatém ma w sobie milijony, które, jakto widzieliśmy, znajdowały się w siódméj przegródce i tych milijonów jest pięć, po jednostkach milijonowych, następują jednostki sto tysiączne, których w obecnym przypadku jest 6; po jednostkach sto tysiącznych, są jednostki dziesięcio-tysiączne, których tu nie ma wcale, czyli 0; po jednostkach dziesięcio-tysiącznych, następują jednostki tysiącowe i tych tu jest 3; po jednostkach tysiącznych, następują sta i tych tu jest 4; po stach, następują dziesiątki i tych jest 2; po dziesiątkach jednostki proste i tych jest pięć. Można więc całą daną liczbę rozebrać i napisać jak następuje:

pięć milijonów	5000000
sześćset tysięcy	600000
dziesiątków tysięcy	— —
trzy tysiące	3000
czterysta	400
dwadzieścia	20
pięć	5
razem: pięć milijonów, sześćset trzy tysiące, czterysta dwadzieścia pięć	5603425

Zaczynając od końca czytać tę liczbę, powiemy, że ona się składa z pięciu jedności rzędu pierwszego, z dwóch jednostek rzędu drugiego, z czterech jednostek rzędu trzeciego, z trzech jednostek rzędu czwartego, z żadnéj jednostki rzędu piątego, z sześciu jednostek rzędu szóstego i nakoniec z pięciu jednostek rzędu siódmego.

Powiédz że mi Henrysiu, ile w powyższéj liczbie znajduje się dziesiątków, set, tysięcy i t. d.?

Henryś zaczął się tłómaczyć w ten sposób:

1. W milijonie jest sto tysięcy kupek, z których każda ma po dziesięć ziarek, czyli sto tysięcy dziesiątków; a zatém w pięciu milijonach będzie ich 5 razy więcéj, czyli pięć set tysięcy dziesiątków.

2. W jedném sto tysięcy, jest dziesiątków dziesięć tysięcy, a zatém w 600000 jest dziesiątków sześćdziesiąt tysięcy.

3. W tysiącu znajduje się dziesiątków sto, a w trzech tysiącach będzie ich trzysta.

4. W stu jest dziesiątków dziesięć, a zatém w czterystu będzie ich czterdzieści.

5. W dwudziestu jest dziesiątków dwa.

Można więc teraz powiedzióć, że w danéj liczbie razem, znajduje się pięćset sześćdziesiąt tysięcy, trzysta czterdzieści dwa dziesiątki, czyli 560342 dziesiątki.

W téj liczbie ostatniéj jest set 56034, to jest dziesięć razy mniéj jak dziesiątków. W liczbie 56034 set, znajduje się 5603 tysięcy, a w tych tysiącach jest 560 dziesięcio-tysięcy, 56 sto tysięcy, a pięć milijonów.

Z tego co dotąd powiedziano, przychodzimy do wniosku bardzo ważnego, iż w danéj liczbie jakiéjkolwiek, tyle jest dziesiątków ile wynosi cała liczba, po opuszczeniu ostatniéj; tyle jest znowu set ile wynosi cała liczba dana, opuściwszy dwie ostatnie; tyle jest tysięcy, ile wynosi reszta pozostała z danéj liczby po opuszczeniu trzech ostatnich; tyle jest dziesiątków tysięcy, ile wynosi reszta liczby danéj po opuszczeniu czterech pozostałych i t. d.

Tu winienem zachęcić każdego nauczyciela, aby starał się uczniów swoich doprowadzić do tego stopnia wprawy, iżby z łatwością rozkładać mogli daną, jakąkolwiek liczbę na dziesiątki, sta, tysiące i t. d. i przytém aby umieli z tego co mówić będą zdać dokładną sprawę.

Nim postąpimy daléj, wprowadzimy tu jeszcze niektóre skrócenia, i tak: gdybyśmy chcieli liczbę 4 rozłożyć na jednostki, mówiliśmy i pisali jeden więcéj jeden, więcéj jeden i jeszcze raz więcéj jeden. Zamiast wypisywania tego wyrazu więcéj, zgodzono się używać znaku $+$, który jest krótszy, a znaczy to samo co więcéj.

Jak znowu do wyrażenia *mniéj* np. 5 mniéj 2 zgodzono się użyć tego znaku $-$.

Dla wyrażenia że 5 równe 5, używają znaku $=$ który zastępuje miejsce tego wyrazu: równe.

I tak: jeden więcéj jeden, równe dwa, można napisać $1 + 1 = 2$.

Podobnie, gdy powiem sześć mniéj trzy, równe trzy, napiszę $6 - 3 = 3$.

Takie skrócone wyrażenia przydadzą się nam póżniéj.

Wiadomość o liczbach rzymskich czyli kościelnych.

Prócz znaków liczebnych, których użycie dotąd okazaliśmy, a które się zowią cyframi arabskiemi, używają się niekiedy inne znaki, zwane rzymskiemi lub kościelnemi. Są to większe litery abecadła drukowanego; takich jest siedm. Litera I znaczy jednostkę, V znaczy 5, X znaczy dziesięć, L znaczy 50, C znaczy 100, D znaczy 500, M znaczy 1000. Litera I powtórzona dwa razy znaczy 2, powtórzona trzy razy znaczy 3, i tak II znaczy 2, III znaczy 3. Podobnież litera X powtórzona dwa razy lub trzy razy, znaczy dwa lub trzy dziesiątki. Litera C powtórzona dwa lub trzy razy, znaczy dwa lub trzy sta. I tak: XX znaczy 20, XXX zuaczy 30, CC znaczy 200, CCC znaczy 300. Litera I napisana przed literą V, znaczy to samo co 5 mniéj 1 czyli 4; ta sama litera napisana przed X, znaczy to samo co 10 mniéj 1 czyli 9. I tak: IV czyli 4; IX znaczy 9. Podobnież X napisane przed L, znaczy to samo co 50 mniéj 10 czyli 40; X napisane przed C znaczy to samo co 100 — 10 czyli 90. I tak: XL = 40, XC = 90. Toż samo mówić o literze C, która napisana przed M znaczy to samo co 1000 mniéj 100, czyli 900. C napisane zaś przed literą D, znaczy to samo co 500 mniéj sto czyli czterysta. I tak: CM = 900. CD = 400.

To samo litera I napisana po literze V, znaczy 5 + 1 czyli 6; napisana 2 lub 3 razy po V znaczy to samo co 5 więcéj 2 lub 3 czyli to samo co 7 lub 8. Podobnież napisana litera I po X, raz, dwa, trzy, daje jednaście, dwanaście, trzynaście; i tak: XI = 11, XII = 12, XIII = 13. Toż samo można powiedziéć o wszystkich innych cyfrach kościelnych, i tak: LI = 51, CII = 102, DIII = 503, MI = 1001. W taki sam sposób napisawszy po L, D, M, literę X raz, dwa, trzy, znaczy to samo, co do liczb przez te litery wyrażonych dodać dziesięć, dwadzieścia, trzydzieści i t. d.

I tak: LX = 60, LXX = 70, LXXX = 80,
CX = 110, CXXX = 130 etc.
DX = 510, DXX = 520, DXXX = 530;
MX = 1010, MXX = 1020 etc.

Podobnie C napisane po literze D, raz, powiększa jéj wartość o 100, napisane dwa razy, powiększa o 200 i t. d. np. DC = 600, DCC=700, DCCC = 800, MC = 1100, MCC = 1200, MCCC = 1300.

Podług tego co poprzedziło, możemy napisać następujące liczby:

19 = XIX, 49 = XLIX, 99=XCIX, 117=CXVII, 1856 = MDCCCLVI.

ROZDZIAŁ III.

DZIAŁANIA NA LICZBACH CAŁKOWITYCH.

Moje dzieci, wiécie, że liczba wyobraża wam zbiór jednostek tego samego gatunku, że aby dojść, ile w jednéj naprzykład kwarcie grochu znajduje się ziarnek, trzeba je liczyć czyli dodawać po jednemu, jaktoście same robiły, lecz gdybyście chciały się dowiedzieć, jaka będzie ogólna liczba ziarnek w trzech np. kupkach, z których pierwsza ma w sobie 54 ziarnka, druga 68, a trzecia 82. *Jakbyście sobie postąpiły?*

Mnie się zdaje,—rzekł Włodzio, że najkróciéj byłoby wszystkie te kupki razem zmięszać, a potém liczyć, czyli dodawać po jednemu, tobyśmy się dowiedzieli o całkowitéj liczbie ziarnek.

Dobrześ odpowiedział Włodziu, — ale to coś wyrzekł, mógłbyś uskutecznić, gdybyś rzeczywiście te kupki grochu miał przed sobą, a mając same tylko iczby ziarnek te kupki wyobrażające, jakbyś sobie wówczas postąpił?

W takim razie, w miejscu kupek, nakreśliłbym 54 krések na papierze lub tablicy, pod tym szeregiem wypisałbym 68 kresek, a jeszcze pod tym 82 kreski; i te kreski zliczyłbym po jednéj. Ale! ale! źlem powiedział, taki sposób byłby długi; poradzę sobie inaczéj; w pierwszym szeregu miałbym 5 kolumn po 10 kresek i zostałoby mi jeszcze 4; w drugim szeregu byłoby 6 kolumn, z ktorych każda byłaby dziesiątkiem i zostałoby kresek 8; w trzecim szeregu byłoby kolumn 8, i zostałoby dwie kréski. Razem więc kolumn dziesięcio-kreskowych, byłoby 5 a 6 czyli 11, jedenaście, a 8 czyli 19 kolumn dziesiątkowych. A że się jeszcze pozostało z pierwszego szeregu 4 kréski, z drugiego 8, a z trzeciego 2, czyli razem 14, co na jedno wychodzi 1 dziesiątek i 4 kreski pojedyncze, a z pierwszego zbioru otrzymałem 19 dziesiątków, z drugiego 1 dziesiątek i 4 kreski, ogółem mam ich 20 dziesiątków czyli dwieście i 4 kreski czyli kresek 204.

Z tego przykładu przekonywacie się, że ile razy wypadnie wam kilka lub kilkanaście, albo ilekolwiek liczb razem z sobą połączyć, aby otrzymać jednę ogólną, toż samo znaczącą, co wszystkie pojedyncze razem wzięte, trzeba je do siebie dodać. Działanie zaś, za pomocą którego z kilku liczb otrzymujemy je-

dnę równoważną tym, z których powstała, zowie się dodawaniem, liczba ta jedna, z kilku złożona, zowie się summą czyli zbiorem albo ogółem.

Jeżeliście dobrze zrozumiały, cośmy dotąd o dodawaniu i o liczeniu powiedzieli, łatwo rozwiążecie następujące przykłady.

Zadanie.

125 jabłek i 384 ile razem czynią?

Pierwsza liczba jabłek składa się: z 1 sta, 2ch dziesiąt. i 5ciu jedności

Druga liczba jabłek składa się: z 3-ch set, 8-miu dziesiąt. i 4 jedn.

Teraz razem jedno sto i trzy sta daje . . . . . . 4 sta

Dwa dziesiątki i ośm dziesiątków czyni 10 dziesiątków, czyli . . . . 1 sto

Pięć jedności więcéj cztery jedności daje . . . . . „ 9 jedności

Ogółem . . 5 set 9 jedności czyli 509.

Dodawanie małych liczb z pamięci, uskutecznia się zawsze, zaczynając od dodawania cyfr których jedno-

stki są najwyższe i tak stopniami, aż dojdzie się do cyfr, których jednostki są najniższe.

Zadanie.

Pewien handlarz zakupił w czterech borach następujące liczby sosien na pniu;

W pierwszym boru 5,624, w drugim 13,735, w trzecim 24,976, a w czwartym 1,220.

Pytanie, ile razem sosien zakupił?

Henryś, który był chłopczyna z bystrém pojęciem, wpadł zaraz na myśl, iż za pomocą szufladek mógłby to zadanie z łatwością rozwiązać, jakoż nakreślił na tablicy cztery szufladki podłóżne i te na komórki podzielił, w sposób następujący:

		5	6	2	4	Pierwsza szufladka
	1	3	7	3	5	Druga szufladka
	2	4	9	7	6	Trzecia szufladka
		1	2	2	0	Czwarta szufladka
Summa	4	5	5	5	5	

Gdy już sobie rozpisał liczby sosien zakupionych z każdego boru, robi potém uwagę, że dodać liczby w tych szufladkach umieszczone jest to samo, co z tych czterech szufladek uformować jednę, któraby tyle w sobie obejmowała, co te cztery razem wzięte.

W tym celu nakreślił sobie piątą szufladkę podzieloną na komórki i tak daléj rzecz prowadził:

Ponieważ z jednostek tworzą się dziesiątki, aby się więc dowiedzićć, ile będzie dziesiątków sosien z samych jednostek, dodam jednostki z czterech szufladek, i tak: w pierwszéj jest 4, w drugiéj 5 w dwóch 9; do 9 przydam 6 z szufladki trzeciéj, będzie 15, a że 15 jest to samo co 10 więcéj 5, czyli to samo co jeden dziesiątek i pięć jedności, więc te pięć jedności wypisuję w piątéj szufladce, w pierwszéj komórce od ręki prawéj, a jeden dziesiątek sosien dodaje do dziesiątków sosien w czterech szufladkach danych; w pierwszéj szufladce jest dziesiątków 2, w drugiéj 3, w trzeciéj 7, w czwartéj 2, a z jednostek zrobiło się 1, razem dziesiątków sosien jest 15; a że 15 dziesiątków jest to samo co dziesięć dziesiątków i pięć dziesiątków, a zatém, 5 dziesiątków wpisuję w drugiéj komórce szufladki piątéj, a jedno sto dodaję do set, czterech szufladek danych.

W pierwszéj szufladce jest set 6, w drugiéj 7, w trzeciéj 9, w czwartéj 2, a z dziesiątków było jedno sto, razem set 25; czyli 20 set i 5 set; dziesięć set czynią tysiąc, a zatém 20 set dają 2 tysiące, — 5 set wpiszemy w komórkę trzecią od końca szufladki piątéj, a dwa tysiące dodamy do tysięcy czterech szufladek danych.

Następnie zbierzemy tysiące razem, jakoż w pierwszéj szufladce jest 5 tysięcy, w drugiéj 3, w trzeciéj 4, a w czwartéj 1; ze set otrzymaliśmy tysięcy 2, ogółem tysięcy 15, czyli 10 tysięcy, czyli jeden dziesiątek tysięcy i 5 tysięcy;—5 tysięcy wpiszemy w komórce czwartéj od końca szufladki piątéj, a jeden dziesiątek tysięcy dodamy do dziesiątków tysięcy. Dziesiątków tysięcy, w pierwszéj komórce nie ma nic, w drugiéj 1, w trzeciéj 2, w czwartéj nic, czyli razem 3, a z tysięcy uformował się jeden dziesiątek tysięcy, ogółem będzie 4 dziesiątków tysięcy, które wypisuję w komórce piątéj od końca szufladki piątéj.

Gdy już teraz wszystkie pojedyncze liczby jednostek, dziesiątków, set, tysięcy, dziesięcio-tysięcy zebraliśmy razem, otrzymaliśmy liczbę składającą się z 5 jednostek, z 5 dziesiątków, z 5 set, z 5 tysięcy i 4-ch dziesiątków tysięcy. Czyli przeczytawszy odwrotnie, będzie czterdzieści pięć tysięcy, pięć set pięćdziesiąt pięć, co napiszemy 45555.

Zastanowiwszy się nad powyższym sposobem zbierania liczb kilku, w celu otrzymania jednéj ogólnéj, nazwanéj summą, spostrzegamy, iż można się obejść bez szufladek i komórek, wypada tylko dane liczby pod sobą porządnie podpisać, i to tak, aby liczby z jednostek pierwszego rzędu złożone, były pod sobą, liczby z dziesiątków złożone pod sobą, liczby z set złożone pod sobą i t. d.; potém podkreślają się te wszystkie liczby i zaczyna się dodawanie od zebrania w jednę liczbę samych jednostek, ta liczba może być albo mniejsza, albo większa, albo równa dziesięciu; jeżeli jest mniejsza, wypisuje się pod jednościami, jeżeli jest większa, musi się składać z jedności i dziesiątków, jednostki w takim razie piszą się pod jednościami, a dziesiątki dodają się do dziesiątków liczb danych, na przypadek, gdy summa jedności składać się będzie z jednego lub kilku dziesiątków i nic więcéj, wtedy pod jednościami pisze się 0, a liczba dziesiątków przenosi się do dziesiątków.

Potém zbierają się same dziesiątki, przydawszy i te, którebyśmy otrzymali z dodania jedności. Jeżeli liczba dziesiątków przewyższy 10, wtedy będzie ona składała się z set i dziesiątków, dziesiątki podpiszemy pod dziesiątkami, a sta dodamy do set w kolumnie pionowéj liczb danych znajdujących się.

Następnie zbierają się w trzecim szeregu pionowym same sta razem, i do nich dołączają się sta otrzymane z dziesiątków, liczba wyobrażająca sta, gdy jest równa lub większa od dziesięciu, składa się wówczas z tysięcy i set. Liczba tysięcy przenosi się do tzsięcy i razem z niemi się dodaje, a liczba set podpisuje się pod stami i t. d.

Aby działanie to dobrze pojąć i nabrać dostatecznéj wprawy, wypada wiele przykładów przerabiać, tym sposobem oswoić się można dostatecznie z prawidłami wskazanemi.

Przykład powyższy, podług tego com wyłożył, wypisze się w taki sposób:

$$
\begin{array}{lr}
(a) & 5624 \\
 & 13735 \\
 & 24976 \\
 & 1220 \\
\hline
 & 45555
\end{array}
$$

W tych czterech liczbach podanych do zebrania razem, macie w pierwszéj pionowéj kolumnie 4 + 5 6 + 0 razem 15, samych jedności, czyli 1 dziesiątek + 5 jedności.

W drugiéj pionowéj kolumnie 2 + 3 + 7 + 2 samych dziesiątków, razem 14, czyli 1 sto, 4 dziesiątki.

W trzeciéj pionowéj kolumnie 6 + 7 + 9 + 2 zamych set, razem 24, czyli 2 tysiące + 4 sta.

W czwartéj pionowéj kolumnie 5 + 3 + 4 + 1 samych tysięcy razem 13, 1 dziesiątek tysięcy + 3 tysiące.

W piątéj: 1 + 2, razem 3 samych dziesiątków tysięcy.

Dodawszy razem, będzie z pierwszéj kolumny 5 jedności;

1 dziesiątek z pierwszéj i 4 z drugiéj daje 5 dziesiątków;

1 sto z drugiéj, 4 sta z trzeciéj, daje 5 set;

2 tysiące z trzeciéj i 3 tysiące z czwartéj, daje 5 tysięcy.

1 dziesiątek tysięcy z czwartéj i 3 dziesiątki tysięcy z piątéj, razem 4 dziesiątki tysięcy, czyli ogółem: czterdzieści pięć tysięcy, pięć set pięćdziesiąt pięć.

Zgodno jak wyżéj pod (a).

Radzę, aby z dziećmi przerabiać przykłady dodawania w sposób tu wskazany, posłuży to niezawodnie do dokładniejszego pojęcia natury tego działania i lepiéj w ich pamięci utkwi skład i wartość względną liczb.

Odejmowanie liczb całkowitych.

Zadanie. Z 24 kopiejek wziąwszy 13, ile się pozostanie?

Włodzio. 24 jest to samo co 2 dziesiątki i 4 jedności, 13 jest to samo co 1 dziesiątek i 3 jedności.

Z dwóch dziesiątków wziąłem jeden dziesiątek, pozostaje jeden; z 4 jednostek wziąłem 3, pozostaje 1 jednostka; razem pozostaje jeden dziesiątek i jedna jednostka, czyli jedenaście.

Otóż, dzieci moje, działanie takie, za pomocą którego dochodzimy, ile po odjęciu pewnéj liczby od drugiéj od niéj większéj pozostaje, zowie się odejmowaniem, czyli odciąganiem; wypadek, czyli to co pozostaje z odjęcia zowie się różnicą, a czasem resztą.

Jakoż znacie już to, o ile pięć jest większe od dwóch.

Ludka odezwała się: o 3.

A 2 od 5 o ile jest mniejsze?

O 3 także, odpowiedziała.

A czém się różni 5 od 2?

O 3,—krzyknęły dzieciaki.

A z 5 wziąwszy 2, ile się zostanie?

Odpow. 3.

Z tego przykładu widzicie, że ile razy chcemy się dowiedziéć, o ile jedna liczba od drugiéj się różni, czyli o ile jedna jest mniejsza lub większa od drugiéj, lub ile się zostanie, po wzięciu pewnéj liczby jednostek z danéj drugiéj liczby, wszystkie te pytania rozwiązują się za pomocą odejmowania czyli odciągania.

I tak: Henryś dostał od mamy 254 orzechy, a Ludka tylko 123, o ile Henryś ma więcéj od Ludki orzechów, lub o ile Ludka ma ich mniéj od Henrysia? co jest to samo. Albo nakoniec, jaka jest różnica liczby orzechów, które ma Henryś, od liczby orzechów, które ma Ludka?

Włodzio zaczyna tak:

Henryś ma . . . 2 sta, 5 dziesiątków i 4 jedności
Ludka ma tylko 1 sto, 2 dziesiątki i 3 jedności

A zatém:

Henryś ma więcéj o 1 sto, 3 dziesiątki, 1 jedność czyli króciéj o 131 orzechów.

— Dobrześ odpowiedział.—Czémże więc będzie te 131 orzechów, czy różnicą, czy resztą?

Włodzio: — Oczywiście różnicą.

— A kiedy byłaby ta liczba resztą?

Włodzio:—Oto wtedy, gdyby np. Henryś miał 254 orzechy, a dał Ludce 123 orzechy, pozostałoby mu się czyli miałby na resztę 131.

— Ciekawy jestem, czyli Henryś z was tu wszystkich najstarszy, potrafi rozwiązać następujące zadanie: Włodzio ma ziarnek grochu 354305, daje z nich ziarnek Ludce 273824; ile mu się pozostanie?

Henryś: —Zdaje mi się, że na szufladkach najlepiéj sobie poradzę i tak: to co mam, przypuszczam że wkładam w komórki.

Tu są moje ziarnka	3	5	4	3	0	5
z których mam dać	2	7	3	8	2	4
Reszta		8	0	4	8	1

Teraz rozumuję tak:

1. Mam ziarnek 5, Ludce daję 4, pozostaje mi jedno ziarnko i to jedno ziarnko wpisuję w komórkę jednostek szufladki trzeciéj, dla pokazania co mi się pozostaje.

2, Ludce mam dać 2 dziesiątki ziarnek, a w mojéj komórce nie ma wcale dziesiątków, lecz wiém, że w mojéj trzeciéj komórce są 3 woreczki, z których w każdym znajduje się po 10 dziesiątków, biorę więc jeden z tych woreczków z komórki trzeciéj i wkładam je do drugiéj. W téj więc drugiéj już teraz jest 10 dziesiątków, Ludce z nich daje 2, pozostaje mi 8 dziesiątków, które zapisuję w komórce drugiéj szufladki trzeciéj.

3. Ludce mam dać 8 set, a ja miałem 3 sta, ale przeniosłem do komórki drugiéj jedno sto, pozostało mi tylko dwa sta, które, choćbym dał, jeszcze by jéj się należało 6, a zatém, udaję się do komórki czwartéj, w niéj znajdują się 4 woreczki po 1,000 każdy czyli w każdym jest po 10 set; biorę jeden taki woreczek i wkładam go do komórki trzeciéj od końca, czyli wkładam 10 set, a było w niéj już 2, razem będzie 12. Ludce odstępuję 8, pozostanie mi 4 woreczki mające po 100 ziarnek każdy i te 4 sta wypisuję w komórce trzeciéj szufladki trzeciéj.

4. Ludce mam dać jeszcze 3 tysiące, a ja miałem 4 tysiące, ale z nich już wziąłem 1 tysiąc, więc mi pozostało 3 tysiące, które, skoro Ludka zabierze,

zostanie mi się nic, czyli 0 i to notuję w czwartéj komórce szufladki trzeciéj.

5. Ludce mam dać 7 dziesiątków tysięcy, mam tylko sam 5 dziesiątków tysięcy, więc nie mogę inaczéj tego uskutecznić, tylko wezmę z komórki szóstéj od końca prawéj ręki jedno stotysięcy, czyli, co na jedno wychodzi, 10 dziesiątków tysięcy i to włożę do komórki piątéj, w któréj było już 5 dziesiątków tysięcy, razem więc będzie teraz 15 dziesiątków tysięcy. Ludka bierze 7 dziesiątków tysięcy, pozostanie mi 8 dziesiątków tysięcy, które w komórce piątéj szufladki trzeciéj wpisuję.

6. Miałem 3 sta tysięcy, wziąłem poprzednio jeszcze sto tysięcy, pozostało mi 2 sta tysięcy, a że tyleż daję Ludce, więc nie pozostanie nic i tego już nie notuję.

Przykład powyższy bez pomocy komórek.

354 305 liczba większa (B)
273 824 liczba mniejsza
80 481 różnica między liczbami danemi.

Działanie powyższe odejmowania uskuteczniliśmy w sposób następujący, pod liczbą 354 305, podpisaliśmy liczbę mniejszą 273 824, ale tak, aby liczba 4 jednostki była pod liczbą 5 jednostek, liczba 2 dziesiątki była pod liczbą 0 dziesiątków, liczba 8 set była pod liczbą 3 sta i t. d. Co się króciéj wyraża, iż podpisujemy te dwie liczby pod sobą, aby jednostki były pod jednostkami, dziesiątki pod dziesiątkami, sta pod stami, tysiące pod tysiącami i t. d. Liczby te dwie w tym porządku pod sobą podpisane, podkreślamy linijką i zaczynamy działanie od jednostek, mówiąc: z 5 jednostek wziąwszy 4, pozostanie 1 jednostka, którą podpisujemy pod jednostkami; 2 dziesiątki mamy wziąć z 0 dziesiątków, inaczéj nie wykonamy, jak tylko przez wzięcie z 3-ch set jednego sta czyli 10 dziesiątków, od których odjąwszy 2 dziesiątki, pozostałe 8 dziesiątków podpiszemy pod dziesiątkami w trzeciéj pionowéj kolumnie; w pierwszym rzędzie było 3 sta, z których już wzięliśmy jedno sto, pozostało tylko 2 sta, od których 8 set odjąć nie można, bierzemy od 4 tysięcy kolumy pionowéj czwartéj jeden tysiąc czyli 10 set i takowe dodajemy do 2 set, razem 12 set, od tych odjąwszy 8 set, pozostanie 4 sta, które podpisujemy pod stami.

W czwartéj kolumnie pionowéj, było 4 tysiące, wzięto jeden, pozostało 3, od nich odjąwszy 3 tysiące, pozostanie 0 tysięcy. Nakonicc z 5 dziesiątków tysięcy mamy wziąć 7 dziesiątków tysięcy, czego uskutecznić nie można, bierzemy więc od sta tysięcy jedno sto tysięcy, czyli 10 dziesiątków tysięcy, do tych przydajemy 5, razem 15 dziesiątków tysięcy, od czego odjąwszy 7 dziesiątków tysięcy, pozostanie 8 dziesiątków tysięcy.

W szustéj kolumnie pozostało z 3 set tysięcy 2 sta tysięcy, z tych mamy wziąć także 2 sta tysięcy, nie pozostanie nic set tysięcy. Reszta więc z odjęcia 273,824 od 354,305 jest 80,481.

Aby można było lepiéj spamiętać prawidła odejmowania liczb danych, powtórzę jeszcze raz w krótkości sposób postępowania.

Podpisawszy pod sobą dwie dane liczby, jak to widzieliśmy w przykładzie pod lit. (B). Odejmuje się potém każda cyfra szeregu drugiego od odpowiadającéj jéj cyfry szeregu pierwszego; jeżeli która z nich w szeregu drugim będzie większa od odpowiadającéj jéj w szeregu pierwszym, w takim razie do téj cyfry ostatniéj przydaje się 10 jedności tego samego gatunku, które nie są niczém inném tylko jednostką, wziętą z cyfry obok niéj leżącéj po ręce lewéj i rozebranéj na jednostki 10 razy mniejsze; od tak powiększonéj o 10 cyfry, odejmuje się dopiero cyfra drugiego szeregu, pamiętając w dalszém działaniu, że cyfra z któréj wzięliśmy już jednostkę, jest o 1 mniejsza.

Uwagi szczególne nad odejmowaniem.

1. Do liczby większéj z dwóch danych, przydawszy lub odjąwszy pewną dowolną liczbę jedności, a zostawiwszy drugą liczbę mniejszą tę samą; otrzymamy resztę czyli różnicę o tyle większą lub mniejszą, o ile powiększyliśmy lub zmniejszyliśmy liczbę pierwszą.

P r z y k ł a d.

$\begin{array}{r}15\\ 6\\ \hline 9\end{array}$	$\begin{array}{r}15+3=18\\ 6\\ \hline 12\end{array}$	$\begin{array}{r}15-7=8\\ 6\\ \hline 2\end{array}$
Mam 15 orzechów, a wydaję 6, pozostaje 9.	Mam 18 orzechów, to jest o 3 więcéj, wydaję 6, pozostaje mi 12, t. j. o 3 orzechy więcéj.	Mam 8 orzechów t. j. o 7 orzechów mniéj, jak w pierwszym razie, pozostanie mi 2, t. j. o 7 orzech. mniéj jak w 1-wszym razie.

2. Gdy zostawimy liczbę pierwszą niezmienną, a drugą którą mamy odjąć, powiększymy lub zmniejszymy o pewną dowolną liczbę, reszta w pierwszym razie o tyle się zmniejszy, o ile powiększyliśmy drugą, a w drugim, o tyle reszta będzie większa, o ile drugą liczbę zmniejszymy.

Objaśnienia na przykładach.

15 orzechów 6 ditto ——— 9	Od 15 Odjąć 6+4=10 ——— Reszta 5	15 Odjąć 6−4= 2 ——— Reszta 13
Z piętnastu orzech. wziąwszy 6, zostanie dziewięć.	Mam 15 orzechów, wydaję 10, to jest o 4 więcéj, pozostaje mi 5, to jest o 4 mniéj jak poprzednio.	Mam 15 orzechów, wydaję 2, to jest o 4 mniéj, pozostaje 13, o 4 więcéj.

3. Powiększając lub zmniejszając obie dane liczby o jednakową liczbę, otrzymamy resztę między tem i nowemi liczbami, zawsze taką samą, jaka była między pierwotnemi.

15	15+7=22	15−3=12
6	6+7=13	6−3=3
9	9	9

Wszystkie te wypadki są jednakowe, to jest: że różnice między 15 i 6, między 22 i 13, nakoniec między 12 i 3 są sobie równe, a to dla tego, że powiększając pierwszą liczbę, powiększamy resztę, powiększając drugą liczbę, zmniejszamy resztę, a że to powiększenie i zmniejszenie jest o tę samą liczbę, więc się reszta nie odmienia.

Osobom które z téj książki dzieci uczyć zechcą, radzę, aby starały się, na wzór tu podanych przykładów, wieloma innemi prawdy powyższe objaśniać. Będzie to dla początkujących późniéj bardzo pożyteczne.

Ogólne uwagi nad dodawaniem i odejmowaniem.

Jeżeli wypadnie czasami dodawać szereg bardzo długi liczb, po podpisaniu porządnie pod sobą, podług prawideł wskazanych, można dla uniknienia pomyłek, przekrajać niejako całą kolumnę liczb, na kilka mniejszych, składających się z pięciu, sześciu, siedmiu, lub tym podobnie, stosownie do nabranéj wprawy, i tych kolumn cząstkowych poznajdować summy, które to summy potém razem zebrawszy, otrzyma się na wypadek summę ogólną.

Nieźle byłoby także, wprawiać dzieci w dodawanie od razu całych liczb jedności i dziesiątków, set i tysięcy i t. d., przez co wiele się zyska na czasie. Również jestem tego zdania, aby dzieci, mając dodawać np. 5, 6, 7, 8, t. j. liczby z samych jedności pojedynczych złożone, zamiast wymawiać 5 a 6 jest 11, 11 a 7 jest 18, 18 a 8 jest 26, od razu patrząc tylko na liczby dane, dodając je w myśli, mówiły: 11, 18, 26.

Dla objaśnienia, weźmiemy następny przykład dodawania:

3	54	56	
1	12	34	
5	67	89	
4	21	12	
	45	23	145 591
	6	89	
	17	24	
	8	29	
3	49	45	7 765
1	23	45	
	72	82	
207 928			54 572

daną kolumnę z 11 liczb złożoną dzielę na 3 kolumny, z kolumny 1-széj na summę

otrzymałem	14	55	91
z drugiéj		77	65
z trzeciéj	5	45	72
te razem zebrane	207 928		

W pierwszéj kolumnie dodawałem po 2 cyfry razem, to jest jedności i dziesiątki, mówiąc: 12 a 89 czyni 101, 101 a 34 czyni 135, 135 a 56 = 191, 91 podpisuję przy końcu, a 1 sto przydaję do set, mówiąc: 21 a 1 daje 22, 22 a 67 czyni 89, 89 a 12 czyni 101, 101 a 54 czyni 155. Z tych 55 przypisuję do 91, a 1 dodaję do kolumny ostatniéj i mówię 1 a 4 czyni 5, 5 a 5 czyni 10, 10 a 1 daje 11, 11 a 3 daje 14 i to piszę obok 55.

Dla przekonania się czyli w dodawaniu pomyłka nie zaszła, wypada to działanie dwa razy powtarzać, ale tak, jeżeli w pierwszym razie zaczynaliśmy dodawać z dołu do góry, to w drugim razie dodawać należy z góry na dół, gdy z tak podwójnego dodawania otrzymamy summy równe, możemy być pewni, żeśmy działanie dobrze odbyli.

Naprzykład:

564	W pierwszym razie dodajemy z dołu.
1 345	Jednostki 6 + 7 + 5 + 4 = 22
6 307	Dziesiątki 8 + 0 + 4 + 6 = 18
286	Sta . . . 2 + 3 + 3 + 5 = 13
8 502 summa	Tysiące 6 + 1 = 7

Drugi raz dodajemy z góry:

Jedności 4 + 5 + 7 + 6 = 22
Dziesiątki 6 + 4 + 0 + 8 = 18
Sta . . . 5 + 3 + 3 + 2 = 13
Tysiące 1 + 6 = 7

W obu tych razach, wypadki są jednakowe, a zatém wnieść z tego możemy, że działanie jest dobrze wykonane.

Drugi sposób sprawdzenia tego działania.

Weźmy ten sam przykład:

```
 564
1345
6307
 286
────
8502
7
────
1502
13
────
 202
  18
────
  22
  22
────
  = =
```

Najprzód dodajemy zwyczajnym sposobem, zaczynając od jednostek, otrzymamy na summmę 8502; potém odbywamy dodawanie od jednostek najwyższych, jak w obecnym przypadku, od tysięcy.

Tych jest 7, które odjąwszy od 8 502, pozostanie 1 502. Następnie dodaję sta do siebie, tych jest 5 + 3 + 3 + 2 czyli 13, i to odejmuję od 1 502, pozostaje 202, daléj, dodaję dziesiątki 6+4+0+8, których jest 18, te odejmuję od 202, pozostaje 22, w końcu dodaję jedności 4+5 + 7 + 6=22, i odejmuję, po czém nic nie pozostaje, więc przekonywamy się, że działanie dobrze jest uskutecznione.

Zamiast wypisywania tych cząstkowych zbiorów, jak w obecnym razie 7, 13, 18, 22, lepiéj zaraz po ich otrzymaniu w myśli odejmować od sobie odpowiadającéj reszty.

564	7 tysięcy od 8 tysięcy zostaje 1
1345	13 set 15 set zostaje 2
6307	18 dzies. od 20 dziesiąt. zostaje 2 dziesiąt.
286	22 jedno. od 22 jedności, nic nie zostaje.
8502	

Trzeci sposób sprawdzenia tego działania.

Przykład ten sam:
8502 składa się z czterech liczb 564 + 1345 + 6307 + 286. Którąkolwiek z tych czterech ostatnich liczb przekreśliwszy, a trzy pozostałe dodawszy do siebie, otrzymamy na summę liczbę, która od summy pierwszéj widocznie różnić się będzie o liczbę, w powtórném dodawaniu opuszczoną. Jeżeli więc pierwsze i drugie dodawanie dobrze było wykonane, to po odjęciu tych dwóch summ na resztę koniecznie wypadnie liczba przekreślona.

5 6 4	
1 3 4 5	
~~6 3 0 7~~	
2 8 6	
8 5 0 2	pierwsza summa
2 1 9 5	druga summa
6 3 0 7	reszta równa liczbie przekreślonéj.

A zatém działanie nasze dokładne.

Wypada zadawać dzieciom stopniami i powoli coraz to dłuższe szeregi liczb do dodawania, trzymając się wyłożonych dotąd prawideł i przestróg, przez co ich uwaga i pamięć wzmacnia się.

Sprawdzenia odejmowania.

564567		
395678	albo 564567	liczba większa
168889 reszta czyli różn.	168889	reszta
564567	395678	liczba mniejsza

Liczba większa składa się z liczby mniejszéj więcéj resztą pozostałą, bo w saméj rzeczy, gdy mam 5 a wydam 3, pozostanie mi 2. Aby więc napowrót otrzymać 5, trzeba do dwóch które mi się pozostały przydać to com wydał, to jest 3, a tém samém będzie to co miałem wprzód, to jest 5.

Z téj uwagi mamy łatwy sposób sprawdzenia tego działania, to jest: dodaj do liczby mniejszéj resztę, a otrzymaszliczbę większą. Albo odejmiéj od większéj liczby resztę, a będziesz miał liczbę mniejszą na wypadek. Jeżeli w obu razach na wypadek otrzymasz liczby zgodne, będziesz miał dowód, żeś dobrze działanie wykonał.

Mnożenie.

Wzięcie jednéj liczby całkowitéj, którą nazywać będziemy mnożną, tyle razy, ile druga także całkowita, nazwana mnożnikiem, ma w sobie jedności, nazywamy mnożeniem. Wypadek z tego działania zowie się iloczynem czyli mnogością.

Mnożenie zatém jest dodawaniem skróconém. Jakiego gatunku są liczby do dodawania dane, takiego samego gatunku musi być summa. Z tego wniosek, iż mnogość czyli iloczyn, musi być zawsze tego samego gatunku co mnożna, a druga liczba, to jest mnożnik, jest stale liczbą oderwaną i wskazuje tylko ile razy pierwsza, to jest mnożna, ma być wzięta.

Dla objaśnienia tego co poprzedziło, weźmy następujące zadanie:

Jeżeli dostaję co dzień po 8 kopiejek, za 3 dni ile będę miał?

Za pierwszy dzień	8 kop.
Za drugi dzień	8 kop.
Za trzeci dzień	8 kop.
Razem będę miał summę tych trzech ósemek, to jest:	24 kop.

W tym przykładzie 8 kopiejek powtórzyłem trzy razy i dodałem do siebie i z tego dodania otrzymałem kopiejek 24, które to 24 kopiejki w dodawaniu nazywają summą, a w mnożeniu mnogością czyli iloczynem.

Ośm kopiejek jest mnożną, a w dodawaniu ósemki są liczbami danemi do dodawania. Liczba 3 wskazuje ile w 24-rech jest ósemek i zowie się mnożnikiem.

Zmieńmy teraz naturę zagadnienia powyższego w ten sposób. Przypuściwszy, że kto dostaje po 3 kopiejki dziennie, ile ich uzbiera za dni 8.

W zadaniu tém w porównaniu z piérwszém, zmienił się porządek pod względem mianowania liczb danych do mnożenia. Jakoż w pierwszym przykładzie 8 było liczbą mnożną i oznaczało kopiejki, a 3 było mnożnikiem i zarazem liczbą ogólną czyli oderwaną, niemianowaną, wskazującą prosto, ile razy ósemka kopiejki ma być wzięta, czyli do siebie dodana.

W drugim przykładzie przeciwnie, trójka stała się mnożną i zarazem liczbą mianowaną, a 8 stało się mnożnikiem, to jest liczbą ogólną, czyli oderwaną i wskazującą, że 3 ma być wzięte 8 razy, czyli do siebie dodane; wypadek jednak czyli mnogość i w pierwszym i w drugim razie jest jednakowy, to jest 24 kopiejki.

Napiszemy teraz obok siebie te dwa przypadki.

I. Przypadek.

8 kop. mnożna
3 „ mnożnik
24 kop. mnogość czyli iloczyn.

II. Przypadek.

3 kop. mnożna
8 liczba oderwana lub mnożnik.
24 kop. mnogość lub iloczyn.

Jeszcze inaczéj pierwszy przypadek.

I I I I I I I I raz
I I I I I I I I drugi raz
I I I I I I I I trzeci raz

razem 24 kreski, z których każda podług zadania ma wyobrażać kopiejkę jednę.

Inaczéj drugi przypadek.

I I I raz
I I I drugi raz
I I I trzeci raz
I I I czwarty raz
I I I piąty raz
I I I szósty raz
I I I siódmy raz
I I I ósmy raz

razem 24 kreski, z których każda podług zadania wyobraża kopiejkę jednę.

Gdybyśmy mieli zadanie w ten sposób wysłowione: ile uczyni 8 razy po 3 jedności, lub 3 razy po 8 jedności, na to odpowiemy: że w pierwszym i drugim razie jednakowa będzie liczba na wypadek, to jest 24, w saméj rzeczy:

Wypisawszy raz 8 kresek I I I I I I I I
drugi raz I I I I I I I I
trzeci raz I I I I I I I I

Wszystkich kresek summa czyni 24.

Szeregów poziomych jest 3, a w każdym z nich po 8 jedności, razem 24 jedności.

Szeregów pionowych jest 8, a w każdym po 3 jedności, razem nie może być ani mniéj ani więcéj, jak w pierwszym przypadku, bo tu są te same kreski, to jest: także 24.

Stąd wypada ta ogólna prawda: że iloczyn bezwzględny z mnożenia liczb ogólnych, otrzymany będzie zawsze ten sam, czy pomnożymy pierwszą z dwóch danych liczb przez drugą, czy drugą przez pierwszą,

Naprzykład: 2 razy po 5 czyni 10, 5 razy po 2 czyni 10.

Żeby jednak dać uczuć dzieciom, że w rozwiązaniu zadań z życia potocznego, ważną jest rzeczą rozróżnić mnożną od mnożnika, które zupełnie co innego oznaczają, dawałem im podobne przykłady.

—Henrysiu, masz 10 jabłek leżących na stole w drugim pokoju zabrać dla siebie i przynieść je tu, ale pod tym warunkiem, abyś za każdym razem wziął tylko po 2, ile razy musisz tam pójść, abyś mógł je zabrać wszystkie?

Ponieważ tego rodzaju zadanie już rozwiązywały dzieci, nie myśląc długo, odpowiedział: że musiałby pójść do drugiego pokoju 5 razy, aby wziął jabłka wszystkie, tamże leżące.

A gdybyś brał po 5 na raz jeden, ile razy tam byś się udał?

Dwa razy,—odrzekł chłopczyna.

Powiedz-że mi, ile to czyni 5 razy po 2 jabłka, i 2 razy po 5 jabłek?

Henryś. Dziesięć jabłek w pierwszym i drugim przypadku z tą tylko różnicą, że w pierwszém zadaniu mnożną jest 2 jabłka, liczba 5 mnożnikiem, a 10 jabłek iloczynem, a w drugiém zadaniu 5 jabłek jest mnożną, liczba 2 mnożnikiem, a 10 jabłek iloczynem.

Iloczyny tu są sobie równe, co się znaczy, że będę miał podług pierwszego i drugiego warunku tę samę liczbę jabłek, ale w pierwszym przypadku muszę aż 5 razy tam i napowrót do drugiego pokoju biegać, abym te 10 jabłek dostał, a w drugim, pójdę tylko 2 razy, co nie jest to samo.

Aby można z dziećmi przystąpić z korzyścią do wykonywania działań, nietylko mnożenia, ale i dzielenia na wszelkich liczbach całkowitych, wypada, aby dobrze pojęły i nauczyły się tabliczki mnożenia, i przekonywały się na kreskach, ziarnkach grochu, orzechach lub tym podobnych przedmiotach o prawdziwości wypadków. Postępując stopniami, przejść powinny następujące ćwiczenia:

Ćwiczenie I.

1 raz 1 jest 1	albo inaczéj	1 raz 2 jest 2
2 razy 1 jest 2		1 raz 3 jest 3
3 razy 1 jest 3		1 raz 4 jest 4
4 razy 1 jest 4		1 raz 5 jest 5
i t. d.		i t. d.

1 jest połową 2-ch
1 jest trzecią częścią 3-ch
1 jest czwartą częścią 4-ch
i t. d.

Albo: 1 mieści się w 2-ch 2 razy
1 mieści się w 3-ch 3 razy
1 mieści się w 4-ch 4 razy
i t. d.

Ćwiczenie II.

2 razy po 2 czyni 4	Toż samo inaczéj możemy napisać:
2 razy po 3 czyni 6	
2 razy po 4 czyni 8	$2 \times 2 = 4$
2 razy po 5 czyni 10	$2 \times 3 = 6$
2 razy po 6 czyni 12	$2 \times 4 = 8$
2 razy po 7 czyni 14	$2 \times 5 = 10$

2 razy po 8 czyni 16
2 razy po 9 czyni 18

2 jest tu wszędzie mnożnikiem; ***2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9****, mnożną; a* ***4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18****, iloczynem czyli mnogością.*

2 × 6 = 12
2 × 7 = 14
2 × 8 = 16
2 × 9 = 18

Co się czyta **2** pomnożone przez 2 czyni **4**, czyli dwa razy po dwa czyni 4 i t. d.

2 razy po 2 czyni 4	2 × 2 = 4
3 razy po 2 czyni 6	3 × 2 = 6
4 razy po 2 czyni 8	4 × 2 = 8
5 razy po 2 czyni 10	5 × 2 = 10
6 razy po 2 czyni 12	6 × 2 = 12
7 razy po 2 czyni 14	7 × 2 = 14
8 razy po 2 czyni 16	8 × 2 = 16
9 razy po 2 czyni 18	9 × 2 = 18
10 razy po 2 czyni 20	10 × 2 = 20

Tu wszystkie dwójki w środku kolumny pionowéj umieszczone, są mnożnemi. Pierwsze liczby po lewéj ręce w szeregu pionowym, mnożnikami, iloczynami zaś są liczby w szeregu pionowym ostatnie.

Iloczyn 4 składa się z 2 razy po 2, czyli 4 ma w sobie 2 dwójki, czyli 2 jest połową 4, czyli 2 mieści się 2 razy w 4.

Iloczyn 6 składa się z 2 razy po 3, lub 3 razy po 2, czyli 6 ma w sobie 3 dwójki lub 2 trójki.

Stąd wypada, że połowa 6 jest 3, a trzecia część 6 jest 2, a 2 w 6 mieści się 3 razy.

Przykłady.

(a) Kiedy jedna bułka kosztuje 2 kopiejki, 6 bułek kosztować będą 6 razy więcéj, czyli 6 razy po 2 kopiejki, czyli 12 kop.

(b) Gdy jedna bułka kosztuje 6 kopiejek, 2 bułki kosztować będą 2 razy więcéj, czyli 2 razy po 6 kopiejek, czyli 12 kopiejek.

(c) Gdy jedna bułka kosztuje 2 kopiejki, za 12 kopiejek dostanę tyle bułek, ile dwójek czyli par kopiejek znajduje się w 12 kopiejkach, lub ile 2 mieści się w 12, a zatém 6 bułek.

(d) Gdy jedna bułka kosztuje 6 kopiejek, za 12 kopiejek dostanę tyle bułek, ile szóstek kopiejek mieści się w 12, a że 6 w 12 mieści się 2 razy, przeto kupię 2 bułki, płacąc za każdą po 6 kopiejek.

W dalszym ciągu, obowiązkiem jest nauczyciela zadawać dzieciom podobnego rodzaju przykłady na wszystkie iloczyny, jak tu je wskazałem na 4 i 6.

Pytając się: 2 razy po 4 ile czyni? co jest mnożną mnożnikiem, iloczynem? 4 razy po 2 ile czyni? co jest mnożną, mnożnikiem, iloczynem?

Ile dwójek mieści się w 8, lub ile razy 2 mieści się w 8, lub co jest połową 8?

Ile czwórek jest w 8? ile razy 4 mieści się w 8? Czwarta część 8 ile czyni?

Następnie, biorąc iloczyny 10, 12, 14, 16, 18, 20, powtarzać z dziećmi wypada z pamięci wszystkie powyższe pytania, zmieniając tylko, co się samo przez się rozumie czynniki, nie pominąwszy za każdym razem zadań treści podanéj, jak były pod literami a, b, c, d, podane:

Ćwiczenie III.

3 razy po 3 czyni 9	Króciéj $3 \times 3 = 9$
3 razy po 4 czyni 12	$3 \times 4 = 12$
3 razy po 5 czyni 15	$3 \times 5 = 15$
3 razy po 6 czyni 18	$3 \times 6 = 18$
3 razy po 7 czyni 21	$3 \times 7 = 21$
3 razy po 8 czyni 24	$3 \times 8 = 24$
3 razy po 9 czyni 27	$3 \times 9 = 27$
3 razy po 10 czyni 30	$3 \times 10 = 30$

3 razy po 3 czyni 9	Króciéj $3 \times 3 = 9$
4 razy po 3 czyni 12	$4 \times 3 = 12$
5 razy po 3 czyni 15	$5 \times 3 = 15$
6 razy po 3 czyni 18	$6 \times 3 = 18$
7 razy po 3 czyni 21	$7 \times 3 = 21$
8 razy po 3 czyni 24	$8 \times 3 = 24$
9 razy po 3 czyni 27	$9 \times 3 = 27$
10 razy po 3 czyni 30	$10 \times 3 = 30$

Ćwiczenie IV.

4 razy po 4 czyni 16	Króciéj $4 \times 4 = 16$
4 razy po 5 czyni 20	$4 \times 5 = 20$
4 razy po 6 czyni 24	$4 \times 6 = 24$
4 razy po 7 czyni 28	$4 \times 7 = 28$
4 razy po 8 czyni 32	$4 \times 8 = 32$
4 razy po 9 czyni 36	$4 \times 9 = 36$
4 razy po 10 czyni 40	$4 \times 10 = 40$

4 razy po 4 czyni 16	Króciéj $4 \times 4 = 16$
5 razy po 4 czyni 20	$5 \times 4 = 20$
6 razy po 4 czyni 24	$6 \times 4 = 24$
7 razy po 4 czyni 28	$7 \times 4 = 28$
8 razy po 4 czyni 32	$8 \times 4 = 32$
9 razy po 4 czyni 36	$9 \times 4 = 37$
10 razy po 4 czyni 40	$10 \times 4 = 40$

Ćwiczenie V.

5 razy po 5 czyni 25	Króciéj $5 \times 5 = 25$
5 razy po 6 czyni 30	$5 \times 6 = 30$
5 razy po 7 czyni 35	$5 \times 7 = 35$
5 razy po 8 czyni 40	$5 \times 8 = 40$
5 razy po 9 czyni 45	$5 \times 9 = 45$
5 razy po 10 czyni 50	$5 \times 10 = 50$

5 razy po 5 czyni 25	Króciéj $5 \times 5 = 25$
6 razy po 5 czyni 30	$6 \times 5 = 30$

7 razy po 5 czyni 35	$7 \times 5 = 35$
8 razy po 5 czyni 40	$8 \times 5 = 40$
9 razy po 5 czyni 45	$9 \times 5 = 45$
10 razy po 5 czyni 50	$10 \times 5 = 50$

Ćwiczenie VI.

6 razy po 6 czyni 36	Krócićj $6 \times 6 = 36$
6 razy po 7 czyni 42	$6 \times 7 = 42$
6 razy po 8 czyni 48	$6 \times 8 = 48$
6 razy po 9 czyni 54	$6 \times 9 = 54$
6 razy po 10 czyni 60	$6 \times 10 = 60$

6 razy po 6 czyni 36	Krócićj $6 \times 6 = 36$
7 razy po 6 czyni 42	$7 \times 6 = 42$
8 razy po 6 czyni 48	$8 \times 6 = 48$
9 razy po 6 czyni 54	$9 \times 6 = 54$
10 razy po 6 czyni 60	$10 \times 6 = 60$

Ćwiczenie VII.

7 razy po 7 czyni 49	Krócićj $7 \times 7 = 49$
7 razy po 8 czyni 56	$7 \times 8 = 56$
7 razy po 9 czyni 63	$7 \times 9 = 63$
7 razy po 10 czyni 70	$7 \times 10 = 70$

7 razy po 7 czyni 49	Krócićj $7 \times 7 = 49$
8 razy po 7 czyni 56	$8 \times 7 = 56$
9 razy po 7 czyni 63	$9 \times 7 = 63$
10 razy po 7 czyni 70	$10 \times 7 = 70$

Ćwiczenie VIII.

8 razy po 8 czyni 64	Króciéj $8 \times 8 = 64$
8 razy po 9 czyni 72	$8 \times 9 = 72$
8 razy po 10 czyni 80	$8 \times 10 = 80$

i n a c z é j

9 razy po 8 czyni 72	Króciéj $9 \times 8 = 72$
10 razy po 8 czyni 80	$10 \times 8 = 80$

Ćwiczenie IX.

9 razy po 9 czyni 81	Króciéj $9 \times 9 = 81$
9 razy po 10 czyni 90	$9 \times 10 = 90$

i n a c z é j

10 razy po 9 czyni 90	Króciéj $10 \times 9 = 90$

Przy każdém z powyższych ćwiczeń wypada koniecznie przejść podobne pytania i zadania, jakie były podane przy ćwiczeniu drugiém.

Nauczyciel dopóty z dziećmi takowe ćwiczenia powtarzać będzie na pamięć, urozmaicając je licznemi zadaniami z życia potocznego, dopóki nie nabędą dostateczném wprawy.

Mnożenie liczb złożonych.

Nim podamy prawidła na mnożenie liczb złożonych jakichkolwiek, zastanowimy się pokrótce nad mnożeniem dziesiątków, set, tysięcy i t. p.

10 razy po 10 czyni 100
10 razy po 100 czyni 1000
10 razy po 1000 czyni 10000
10 razy po 10000 czyni 100000

W każdym z tych iloczynów jest tyle zer, ile ich było w mnożnéj i mnożniku (*).

100 razy po 10 czyni 1000
1000 razy po 10 czyni 10000

Dajmy, że mamy znaleźć iloczyn z tych trzech liczb 2, 3, 4, czyli mamy pomnożyć $2 \times 3 \times 4 = 24$

Rozwiązanie.

2 razy po 3 czyni 6 4 razy po 6 czyni 12	3 razy po 2 czyni 6 4 razy po 6 czyni 24	2 razy po 4 czyni 8 3 razy po 8 czyni 24
4 razy po 2 czyni 8 3 razy po 8 czyni 24	3 razy po 4 czyni 12 2 razy po 12 czyni 24	4 razy po 3 czyni 12 2 razy po 12 czyni 24

Z tego przekonywamy się, że iloczyn z trzech liczb jest zawsze ten sam, czyli pomnożymy iloczyn z 2 ch pierwszych przez ostatnią lub 2ch końcowych przez pierwszą liczbę, lub iloczyn dwóch skrajnych przez środkową.

Gdy mamy do mnożenia 4 liczby jakiekolwiek, w takim razie podług tego co poprzedziło, powiemy: że iloczyn z tych czterech liczb, równa się iloczynowi z trzech którychkolwiek przez czwartą liczbę.

(*) Mnożnik i mnożna razem wzięte, nazywają się czynnikami.

Iloczyn z pięciu liczb równa się iloczynowi z czterech którychkolwiek danych liczb przez piątą pozostałą i t. d.

W duchu powyższego prawidła wypada, że mając pomnożyć np. 100 przez 100 = 100 X 10 X 10 = 10 000; gdyż 100=10 razy po 10, a że 100 X 10 = 1000, a 1 000 X 10 = 10 000, a zatém 100 razy po 100, daje 10 000.

Z tego wnieść teraz możemy, że mając pomnożyć jedność, po któréj następuje pewna liczba zer przez jedność, po któréj również jest pewna liczba zer, dosyć jest dla otrzymania mnogości, po jedności napisać tyle zer, ile ich było w mnożnéj i mnożniku np. 1000 X 10 000 = 10 000 000.

W pierwszym czynniku po jedności jest zer 3
W drugim „ po „ „ „ 4
a zatém w iloczynie musi być po jedności zer 7, czyli będzie 10 milijonów.

Liczbę daną pomnożyć przez 10, 100, 1 000, i t. p. jest to samo co wziąć ją 10 razy, 100 razy, 1 000 razy i t. d. czyli powiększyć ją 10, 100, 1 000 razy i t. p.

Aby dana liczba mogła stać się 10 razy większą, to trzeba w téj liczbie jedności zamienić na dziesiątki, dziesiątki zamienić na sta, sta na tysiące, tysiące na dziesięcio-tysiące i t. p., w tym celu dosyć będzie do liczby danéj dopisać 0, jakoż mając 124 pomnożyć przez 10, czyli wziąć tę liczbę 10 razy, to trzeba liczbę 4 wziąć razy 10 będzie 40, czyli 4 dziesiątki, 2 dziesiątki wziąć razy 10 będzie dwa sta, jedno sto wziąć razy dziesięć będzie jeden tysiąc.

Gdyż istotnie 124 jest toż samo co jedno sto, dwa dziesiątki i 4 jedności, powiększyć zatém 124 dziesięć razy, czyli 124 wziąć razy dziesięć, jest toż samo co wziąć 4 jedności dziesięć razy, 2 dziesiątki wziąć 10 razy, 1 sto wziąć razy 10. Tym sposobem jednostki zamieniają się na dziesiątki, dziesiątki na sta, sta na tysiące i będzie na iloczyn 1240.

Podobnież chcąc pomnożyć 124 przez 100 czyli liczbę 124 powiększyć razy 100, trzeba 4 jedności pomnożyć przez 100 będzie 4 sta, 2 dziesiątki pomnożyć przez 100 będzie 2 tysiące, 1 sto pomnożyć przez sto będzie 10 tysięcy.

Aby więc 124 jedności zamieniły się na 124 sta, trzeba dopisać dwa zera i napisać 12400.

Aby 124 jedności zamienić na 124 tysiące, trzeba dopisać trzy zera i napisać tak 124 000.

Stąd prawidło: aby daną liczbę jakąkolwiek pomnożyć przez 10, 100, 1000 i t. d. dosyć jest do liczby danéj dopisać jedno zero, dwa zera, trzy zera i t. d. a liczba w ten sposób zmieniona będzie iloczynem szukanym.

Pomnożyć 128 przez 3 jest to samo co 128 wziąć razy trzy. Będzie zatém:

Raz . . .	128
Drugi raz	128
Trzeci raz	128
Summa	384

Na tym przykładzie pokazuje się, że 8 jedności jest tu wzięte 3 razy, co czyni 2 dziesiątki 4 jedności; 2 dziesiątki jest tu wzięte 3 razy, co czyni 6 dziesiątków, 1 sto jest tu wzięte 3 razy, co czyni 3 sta. A summa wynosi razem 384.

Ponieważ w ogólności pomnożyć liczbę całkowitą jakąkolwiek przez drugą, jest to samo co ją wziąć tyle razy, ile druga ma w sobie jedności, lub co na jedno wychodzi, daną liczbę wypisać pod sobą tyle razy, ile druga ma w sobie jedności, i następnie te liczby, sobie zupełnie równe do siebie dodać; przeto widziemy, że pewna liczba jednostek, następnie liczba dziesiątków, liczba set, i t. p. musi być zawsze powtórzona tyle razy, ile mnożnik ma w sobie jedności, a te cząstkowe zbiory czyli iloczyny zebrane razem, dadzą koniecznie wypadek czyli mnogość szukaną.

Podług tego, mając pomnożyć 5624 przez 8, postępuję tak:

$$\begin{array}{r} 5624 \\ 8 \\ \hline 44992 \end{array}$$

8 razy po 4 jedności, daje 32 jedności, 2 jedności piszę pod jednościami, a 3 dziesiątki zachowuję do dziesiątków.

8 razy po 2 dziesiątki daje 16 dziesiątków, a 3 z pozostałych razem 19 dziesiątków, czyli 9 dziesiątków które piszę pod dziesiątkami na miejscu dru-

giém od prawéj ręki ku lewéj, a jedno sto zachowuję do set.

8 razy po 6 set czyni 48 set, a z pozostałych jedno sto razem 49 set; czyli 9 set które piszę pod stami na miejscu trzeciém od prawéj ręki, a 4 tysiące zachowuję do tysięcy.

8 razy po 5 tysięcy daje 40 tysięcy, a z pozostałych 4 tysiące razem 44 tysiące, co wypisuję obok set, będzie więc na iloczyn 44992.

Taki to jest ogólny sposób postępowania w mnożeniu danéj liczby złożonéj przez liczbę pojedynczą.

Jeżeli mnożnik będzie złożony z samych dziesiątków, set, tysięcy, i t. p. np. 80, 800, 8000, i t. p., w takim przypadku, można ten mnożnik rozebrać na 8 wzięte razy 10 czyli 8×10; $800 = 8$ razy po 100; $8000 = 8$ razy po $1000 = 8 \times 1000$; a zatém daną liczbę jakąkolwiek chcąc pomnożyć przez 80, lub przez 800, lub przez 8000; będziemy ją najprzód w każdym z tych przypadków mnożyli przez 8, a iloczyn stąd otrzymany, pomnożymy przez 10, 100, 1000, czyli dodamy do otrzymanego poprzednio iloczynu jedno zero, dwa zera, trzy zera.

Wracając się do przykładów:

$$\begin{array}{r} 5624 \\ 8 \\ \hline 44992 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5624 \\ 80 \\ \hline 449920 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5624 \\ 800 \\ \hline 4499200 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5624 \\ 8000 \\ \hline 44992000 \end{array}$$

widziemy, że mnożna wszędzie jest jednakowa, to jest: 5624, mnożniki zaś są 10 razy jeden od drugiego większe, iloczyny więc muszą być 10 razy większe, to jest: drugi od pierwszego, trzeci od drugiego, czwarty od trzeciego jest dziesięć razy większy.

Gdy dzieci wprawią się dostatecznie w mnożenie liczb wszelkich przez liczby pojedyncze, wypada przystąpić do mnożenia liczb danych, jakichkolwiek przez liczby złożone, a to w sposób następujący:

5 648	mnożna	
239	mnożnik	
50 832	(a)	
16 944	(b)	(A)
11 296	(c)	
1 349 872	(d)	

a) Pierwszy cząstkowy iloczyn z liczby 5648 przez 9

b) Drugi cząstkowy iloczyn z liczby 5648, przez 3 dziesiątki.

c) Trzeci cząstkowy iloczyn z liczby 5648 przez 2 sta.

d) Summa ogólna wszystkich cząstkowych iloczynów czyli mnogość szukana.

Objaśnienie powyższego działania.

Mnożnik 239 składa się z 9 jedności, z 3-ch dziesiątków czyli 3 X 10 i z 2-ch set czyli 2 X 100. Liczba zatém mnożna, musi być wzięta 9 razy; potém

3 dziesiątki, a w końcu 2 sta razy, a summa tych cząstkowych iloczynów będzie mnogością czyli iloczynem dwóch liczb 5648 i 239.

Zmnożenia liczby 5648 przez 9, otrzymamy 50832, pierwszy cząstkowy iloczyn.

Następnie, mamy pomnożyć liczbę daną przez 3 dziesiątki, w tym celu mnożemy 8 jedności mnożnéj przez 3 dziesiątki, będzie 24 dziesiątki, z tych, cztery dziesiątki podpisujemy pod 3 dziesiątkami pierwszego cząstkowego iloczynu, a 2 sta zachowujemy dla dodania do set; 4 dziesiątki mnożnéj pomnożone przez 3 dziesiątki mnożnika, dają 12 set, a z pozostałemi dwoma czynią razem 14 set, z tych cztery sta podpisujemy pod 8 stami pierwszego iloczynu, a jeden tysiąc zachowujemy dla dodania do tysięcy; 6 set mnożnéj, pomnożone przez 3 dziesiątki daje 18 tysięcy, a z pozostałym jednym tysiącem otrzymamy razem 19 tysięcy, a z tych 9 tysięcy podpisujemy pod 0 tysięcy pierwszego cząstkowego iloczynu, a jeden dziesiątek tysięcy zachowujemy dla dodania do dziesiątków tysięcy; 5 tysięcy mnożnéj, pomnożone przez 3 dziesiątki daje 15 dziesiątków tysięcy, a z pozostałym jednym dziesiątkiem tysięcy uczyni razem 16 dziesiątków tysięcy, które obok 9 tysięcy wypisujemy w całości, drugi zatém cząstkowy iloczyn równa się 16 944 dziesiątkom. W końcu wypada daną liczbę 5 648 pomnożyć przez 2 sta. Zaczynamy od pomnożenia 8 jedności mnożnéj przez 2 sta i otrzymamy 16 set; z tych 6 set podpiszemy pod 4-ma stami drugiego cząstkowego iloczynu, a jeden tysiąc zachowamy dla dodania do tysięcy; 4 dziesiątki mnożnéj wziąwszy 2 sta razy, otrzymamy 8 tysięcy i te podpiszemy pod 9 tysiącami drugiego cząstkowego iloczynu; 6 set mnożnéj wzięte 2 sta razy, będzie 12 dziesiątków tysięcy, z tych 2 dziesiątki tysięcy podpiszemy pod 6 dziesiątkami tysięcy drugiego cząstkowego iloczynu, a 1 sto tysięcy zachowamy dla dodania do set tysięcy; 5 tysięcy mnożnéj wzięte 2 sta razy, otrzymamy 10 sto tysięcy, a jedno sto tysięcy pozostałe, czynią razem 11 sto tysięcy i te przypiszemy obok dwóch dziesiątków tysięcy, w trzecim cząstkowym iloczynie, który będzie wynosił 11296 set.

Te wszystkie cząstkowe iloczyny, to jest 50832 jednostek, 16844 dziesiątki i 11296 set, podpisawszy pod sobą w porządku wskazanym przy prawidłach dodawania, tak właśnie jak to na przykładzie pod lit. A. uskuteczniliśmy, i potém je razem zebrawszy, otrzymamy liczbę 1349872, która jest iloczynem 5648 przez 239.

Ogólne prawidło na mnożenie liczb całkowitych.

Dwie liczby dane do mnożenia podpisują się pod sobą zwykle tak, aby jedności były pod jednościami, dziesiątki pod dziesiątkami, sta pod stami i t. d., — i potém podkreślają się linijką poziomą.

1. Przez liczbę jednostek w mnożniku, mnoży się cała mnożna, a iloczyn stąd otrzymany, podpisuje się

w porządku należytym pod linijką, co będzie pierwszym cząstkowym iloczynem.

2. Cała mnożna mnoży się przez liczbę dziesiątków znajdujących się w mnożniku, a stąd otrzymany drugi cząstkowy iloczyn, podpisuje się pod liczbą dżiesiątków, będących w pierwszym cząstkowym iloczynie.

3. Cała mnożna mnoży się przez liczbę set znajdujących się w mnożniku, a iloczyn stąd otrzymany podpisuje się pod liczbą set drugiego cząstkowego iloczynu.

4. Cała mnożna, mnoży się przez liczbę tysięcy, (jeżeli są) znajdujących się w mnożniku, a iloczyn stąd otrzymany podpisuje się pod liczbą tysięcy iloczynu cząstkowego trzeciego i t. d.

W końcu, te wszystkie cząstkowe iloczyny zbierają się razem w jednę summę, która będzie iloczynem szukanym.

Uwaga. Zaledwie potrzeba tu wspomnieć, mając wzgląd na to co poprzedziło, że, jeżeli w miejscu np. set w mnożniku będzie zero, w takim razie cząstkowy iloczyn trzeci z porządku, będzie zerem, tego się więc nie wypisuje, ale za to czwarty z porządku iloczyn, z pomnożenia całéj mnożnéj przez liczbę tysięcy mnożnika, podpisuje się zaraz pod tysiącami cząstkowego drugiego iloczynu; ta przestroga stosuje się do wszystkich tym podobnych przypadków, co się jeszcze objaśni następującym przykładem.

2 483	mnożna
1 004	mnożnik
9932	
2483	
2492932	iloczyn

Mnogość 2 492 932 składa się z dwóch tylko cząstkowych iloczynów, lubo mnożnik ma 4 cyfry; pierwszy cząstkowy iloczyn jest 9932 $=2483\times4$, drugiego i 3-go cząstkowego iloczynu nie ma, bo w mnożniku nie ma dziesiątków i set, dopiero czwarty jest 2 483 tysiące, i te podpisaliśmy pod tysiącami pierwszego cząstkowego iloczynu.

Uwaga 2. Jeżeli mamy pomnożyć pewną liczbę całkowitą zakończoną na zera, przez drugą także całkowitą zakończoną na zera, w takim przypadku mnożą się same liczby, opuszczając zera, a do iloczynu dopisuje się tyle zer, ile ich było w obu czynnikach.

P r z y k ł a d.

Pomnożyć 2630 000 przez 2000.

Samo działanie.

$$\begin{array}{r} 2\,630\,000 \\ \underline{\quad 2\,000} \\ 5\,260\,000\,000. \end{array}$$

bo $2630000 = 262 \times 10000$

$2000 = 2 \times 1000$

a zatém $2\,630\,000 \times 2000 = 263 \times 2 \times 10\,000 \times 1000$; ponieważ $263 \times 2 = 526$, a $10\,000 \times 1000 = 10\,000\,000$, więc $263 \times 2 \times 10000 \times 1000 = 526 \times 10000000 = 5260000000$.

Uwaga 3. W mnożeniu liczb całkowitych, można brać dowolnie mnożną za mnożnik i przeciwnie mnożnik za mnożną, a iloczyn bezwzględny dwóch liczb, będzie zawsze ten sam. Z tego to powodu powszechnie, dla otrzymania bezwzględnego iloczynu dwóch danych liczb, bierze się za mnożnik liczba mniéj cyfr mająca, gdyż będziemy mieli mniéj cząstkowych iloczynów, a wypadek jednakowy.

Dzielenie liczb całkowitych.

Dzielenie służy do wynalezienia takiéj liczby, któraby pomnożona przez jednę z dwóch danych, wydała na iloczyn drugą daną.

Naprzykład. Niech będą dwie liczby dane 24 i 6, znaleźć trzecią, którąby pomnożona przez 6, wydała na iloczyn liczbę drugą, to jest: 24.

Liczbą tą trzecią szukaną w obecnym przykładzie jest 4, gdyż 6 razy po 4 daje 24. Liczba 24 zowie się dzielną, 6 dzielnikiem a 4 ilorazem.

Możnaby jeszcze powiedzieć, że dzielenie jest działaniem, za pomocą którego znajdujemy liczbę wskazującą, ile razy jedna z dwóch danych mieści się w drugiéj, jak w poprzedzającym przykładzie 24 składa się z 4 szóstek, a zatém jedna z nich mieści się w 24 razy 4.

Aby podług tego określenia znaleźć iloraz z podzielenia dwóch liczb całkowitych jakichkolwiek przez siebie, dosyć jest jednę z nich mniejszą odejmować od większéj dotąd, aż przyjdziemy do reszty zero, lub liczby mniejszéj od téj, którąśmy odejmowali; liczba wskazująca ile razy odjęliśmy mniejszą z dwóch danych od większéj, będzie ilorazem w pierwszym przypadku bez reszty, a w drugim z resztą pozostałą.

I tak: od 24
6 odejmuję raz
18 pozostaje
6 odejmuję drugi raz
12 pozostaje
6 odejmuję trzeci raz
6 pozostaje
6 odejmuję czwarty raz
nic nie pozostaje, a zatém w 24 mie-

ści się szóstka razy 4, czyli iloraz z podzielenia 24 przez 6 równa się 4.

Dla wskazania dzielenia dwóch liczb, zgodzono się wypisywać nad linijką poziomą dzielną, a pod linijką dzielnik, np. $\frac{24}{6}=4$, tu 24 jest dzielną, 6 dzielnikiem, 4 ilorazem.

Nim przystąpimy do podania ogólnych prawideł na dzielenie liczb całkowitych, musiemy sobie koniecznie przypomnieć to wszystko, cośmy powiedzieli o mnożeniu liczb całkowitych pojedynczych. I tak: 35 podzielone przez 7, daje na iloraz 5; to się znaczy, że siódma część 35 jest 5, czyli że w 35 znajduje się siódemek 5.

Każdy, który się nauczył dokładnie ćwiczeń podanych na stronicy (82), od razu zgadywać będzie, że w 36 np. jest czwórek 9, a dziewiątki 4, czyli że 9 mieści się w 36 razy 4, a 4 w 36 mieści się 9 razy; jedném słowem, kto zna gruntownie tabliczkę mnożenia, o któréj mowa, ten łatwo potrafi dzielić każdą liczbę z dwóch cyfr złożoną przez liczbę pojedynczą; np. 53 podzielone przez 6 daje nam iloraz 8 i zostaje się jeszcze 5 na resztę, bo w saméj rzeczy 6 w 48 jest 8, a 48 od 53 różni się o 5; powiemy więc że w 53 mieści się szóstek 8 i pozostanie na resztę 5.

Dzielenie przeto liczb dwu-cyfrowych przez liczbę pojedynczą, która się w zupełności w danych liczbach nie mieści, polega na rozebraniu w myśli liczby danéj do dzielenia na dwie inne, z którychby pierwsza była podzielną przez dany dzielnik w zupełności, a druga była mniejszą od dzielnika, np. 65 podzielić przez 8.

Przypominam sobie z tabliczki mnożenia, że największy iloczyn liczby 8 przez inną i zarazem najbliższy i mniejszy od 65 liczby danéj jest 64, a zatém 65 rozkładam na 64+1; 64 ma w sobie ósemek 8, powiemy więc, że ósma część 65 jest 8 i pozostanie na resztę 1.

Toż samo 78 podzielone przez 8 daje 9 i pozostanie na resztę 6, bo $8 \times 9+6=72+6=78$.

Rozbiór liczb od 1 do 100, którego wzór postępowania podaliśmy w rozdziale pierwszym, najwięcéj może się przyczynić do ułatwienia działania dzielenia, jak o tém mógł się czytelnik dostatecznie przekonać.

1) *Dzielna jest liczbą złożoną jakąkolwiek, a dzielnik liczbą pojedynczą.*

Ponieważ zachodzi ścisły związek między dzieleniem a mnożeniem, có z saméj definicyi dzielenia jasno się okazuje, z uważania przeto tego cośmy o mnożeniu powiedzieli, przyjdziemy do wykrycia prawideł dzielenia.

Podzielna równa się iloczynowi dzielnika przez iloraz; jeżeli więc chcemy sprawdzić działanie dzielenia, wypada dzielnik pomnożyć przez iloraz, a iloczyn stąd otrzymany (gdy dzielenie odbyło się bez reszty), musi być równy podzielnéj; gdyby zaś pozostała z dzielenia reszta, tę trzebaby dodać do iloczynu z dzielnika przez iloraz, a summa równać się będzie podzielnéj.

Aby wykryć prawidła dzielenia liczby złożonéj przez pojedynczą, weźmy przykład mnożenia:

9364	mnożna
6	mnożnik
56184	mnogość.

Z tego działania wypada: że iloczyn 56184 składa się z cząstkowych iloczynów następujących:

1) z 6 razy wziętych 4 jedności, 2) z 6 razy wziętych 6 dziesiątków, 3) z 6 razy wziętych 3 set, i nakoniec po 4) z 6 razy wziętych 9 tysięcy, czyli całkowity iloczyn składa się z czterech cząstkowych iloczynów, odpowiadających czterem cyfrom mnożnéj. Odwrotnie więc mając dany iloczyn 56184, i jeden z jego czynników 6, aby znaleźć czynnik drugi, potrzeba starać się przynajmniéj w myśli rozebrać 56184 na cząstkowe iloczyny, z którychby pierwszy wyobrażał całkowitą liczbę tysięcy, drugi całkowitą liczbę set, trzeci całkowitą liczbę dziesiątków, a czwarty całkowitę liczbę jedności, a biorąc każdego z tych iloczynów cząstkowych część szóstą i łącząc te ilorazy z sobą, otrzymamy całkowity iloraz czyli czynnik drugi.

Działanie to uskutecznia się:

Podzielna

56 184	6 dzielnik
21	9364 iloraz
38	
24	
0	

Pisząc dzielnik po prawéj stronie podzielnéj, przegradza się je od siebie linijką pionową, potém kreśli się linijka pozioma pod dzielnikiem i daléj postępujemy tak: bierze się od lewéj ręki dwie pierwsze cyfry wyobrażające 56 tysięcy, te uważamy za pierwszy cząstkowy iloczyn i dochodzimy ile razy liczba 6 mieści się w 56 tysiącach, lub ile szóstek znajduje się w 56 tysiącach, lub jaka liczba jest szóstą częścią 56 tysięcy; szóstą częścią 56 tysięcy jest 9 tysięcy, te się piszą pod dzielnikiem (jak to wskazano wyżéj), potém mnożę 9 tysięcy przez 6, a iloczyn 54 tytysiące odejmuję od 56 tysięcy, pozostaje 2 tysiące, które trzeba uważać jako za należące do drugiego cząstkowego iloczynu, to jest set przez jedności, 2 tysiące jest to samo co 20 set, spuszczamy 1 sto z dzielnéj, będzie razem 21 sto; biorę szóstą część 21 sta, to jest 3 sta, wypisuję je obok 9 tysięcy ilorazu, potém mnożę 3 sta przez dzielnik 6, iloczyn 18 set odejmuję od drugiego cząstkowego iloczynu, pozostaje 3 sta, które należą do trzeciego cząstkowego iloczynu dziesiątków przez jedności.

Do reszty 3 sta czyli 30 dziesiątków spuszczam 8 dziesiątków, będzie razem 38 dziesiątków, czyli 3-ci cząstkowy iloczyn, wziąwszy tego cząstkowego iloczynu część szóstą, będzie na iloraz 6 dziesiątków, które pod dzielnikiem zaraz po 3 stach wypisuję, a następnie iloczyn 6 dziesiątków ilorazu przez 6 jedności dzielnika, to jest 36 dziesiątków odejmuję od 38 dziesiątków dzielnéj i do pozostałéj reszty 2 dziesiątki spuszczam 4 jedności z dzielnéj otrzymamy razem 24 jedności, tych część szósta wynosi 4 jedności, które piszemy obok 6 dziesiątków ilorazu; iloczyn 4 X 6 czyli 24 odjąwszy od 24 dzielnéj, nic nie pozostanie, co jest dowodem, że liczba 6 mieści się w 56 184 razy 9364; bo w saméj rzeczy, ze wszystkich tych pojedynczych działań, przekonywamy się do widoczności, żeśmy następnie od podzielnéj odejmowali 6 razy po 9 tysięcy, 6 razy po 3 sta, 6 razy po 6 dziesiątków, 6 razy po 4 jedności; a że po odbyciu tych działań, żadnéj nie otrzymaliśmy reszty, stąd wypada, że 56 184 równa się iloczznowi z 9364 przez 6.

Zadanie 11. Jaki jest iloraz z liczby 25 344 przez 6?

Rozwiązanie. Znaleźć iloraz dwóch poprzedzających liczb, jest to samo, co podzielić 25344 przez 6, czyli wziąć szóstą część piérwszéj liczby, czyli znaleźć trzecią liczbę 6 razy mniejszą od 25 344 albo nakoniec znaleźć trzecią liczbę taką, któraby pomnożona przez 6, wydała na iloczyn liczbę daną większą.

Liczba dana składa się z 2-ch dziesiątków tysięcy, 5ciu tysię cy, 3 set, 4 dziesiątków i 4 jedności; wziąć zatém szóstą część całéj téj liczby, jest to samo co wziąć szóstą część każdéj liczby w szczególności, z których liczba dana się składa i te szóste części razem obok siebie wypisać. Dwóch dziesiątków tysięcy nie mogę podzielić na 6 części równych, aby każda z nich była liczbą całkowitą dziesiątków tysięcy, zamieniam je więc na tysiące, których będzie 20 i dodaję następnie 5 tysięcy, razem 25 tysięcy, szósta część 25 tysięcy jest 4 tysiące i zostaje jeszcze do podziału 1 tysiąc czyli 10 set, a że w danéj liczbie jest 3 sta, przeto razem będzie ich 13, których część szósta wynosi 2 sta i 1 sto czyli 10 dziesiątków zostanie się, do tych przydawszy z danéj liczby do podzielenia 4 dziesiątki, będzie razem 14 dziesiąt., a z tych wziąwszy szóstą część, otrzymamy na iloraz 2 dziesiątki czyli 20 jedności, do czego przydawszy 4 jedności ostatnie z danéj dzielnéj, będzie 24, których część szósta równa się 4, i nic nie zostanie.

Zebrawszy te cząstkowe ilorazy będzie:

1)	Szósta część	24 tysięcy	=	4000
2)	ditto	12 set	=	200
3)	ditto	12 dziesiąt.	=	20
4)	ditto	24 jedności	=	4

Ogółem 4224 jest 6-tą częścią

24 tysięcy
więcéj 12 set czyli 1 tysiąc + 2 sta
więcéj 12 dzieś. czyli 1 sto + 2 dziesiątki
więcéj 24 jednś. czyli + 2 dz. 4 jedn.

Razem 25 tysięcy 3 sta 4 dzies. i 4 jed.
= 25344.

Wziąwszy zatém dzielnik 6 razy 4224, otrzymamy niezawodnie na iloczyn, dzielną 25344.

6 dzielnik uważany za mnożnę
4224 iloraz uważany za mnożnika
24
12
12
24
25344 mnogość uważana za dzielną

W iloczynie tym jest cztery cząstkowe iloczyny.

Możemy jeszcze to samo działanie wskazać tak, jak w poprzedzającym przykładzie:

```
25344|6
 13  |4224
   14
    24
     0
```

Zadanie III. Podzielić 754264 przez 8?

Aby to działanie wykonać, udajmy się do nowego sposobu uważania liczb.

Dzielna	7 set tysięcy	5 dzies. tysięcy	4 tysiące	2 sta	6 dziesiątk.	4 jedności

Iloraz	9	4	2	8	3

Wziąć ósmą część dzielnéj, jest to samo, co wziąć ósmą część liczby z każdéj komórki.

I tak: najprzód widziemy że ósméj części 7 set tysięcy wziąć nie można, pod warunkiem, aby każda była sta tysiącami, a zatém tę liczbę z komórki pierwszéj przenoszę do drugiéj, zamieniwszy poprzednio sta tysięcy na dziesiątki tysięcy, z 7 set tysięcy, będzie 70 dziesiątkow tysięcy, a że już w drugiéj komórce jest ich 5, razem będzie 75 dziesiątków tysięcy, ktkrych ósma część równa się 9 dziesiątków tysięcy, co pomnożywszy przez 8, będzie 72, te odjąwszy 75 dziesiątków tysięcy, pozostanie jeszcze 3 dziesiątki tysięcy do podziału na 8 części. Z tego więc przekonywamy się, że pierwsza cyfra ilorazu, ma za jednostkę dziesiątek tysięcy, a zatém iloraz składać się będzie z 5 cyfr, bo do wyrażenia dziesiątków tysięcy potrzeba właśnie tyle znaków, jak to już wiemy. Gdyby zaś pierwszą cyfrą dzielnéj, w miejscu 7, była liczba albo równa 8, albo od niéj większa, w takim razie możnaby wziąć jéj 8mą część, którąby składała się z tych samych jednostek, co ta pierwsza liczba dzielnéj. W ilorazie byłaby taka sama liczba cyfr, co w dzielnéj, to jest, jak w obecnym przypadku, pierwsza cyfra ilorazu byłaby z jednostków sto-tysięcznych złożona.

Z tego rozumowania wyprowadzimy ogólne prawidło, że gdy dzięlnik jest liczbą pojedynczą jakąkolwiek, ale większą od pierwszéj cyfry po lewéj ręce dzielnéj; w takim przypadku, iloraz składać się będzie z liczby cyfr o jednę mniejszéj, od liczby cyfr dzielnéj, np. jeżeli w dzielnéj będzie 6 cyfr, to w ilorazie będzie ich tylko 5 i t. d. Gdy zaś dzielnik będzie równy, albo większy od pierwszéj cyfry po lewéj ręce w dzielnéj, wtedy iloraz składać się będzie z takiéj saméj liczby cyfr, z jakiéj się składa dzielna. To powiedziawszy, przejdźmy w dalszym ciągu do wynalezienia reszty cyfr ilorazu.

Z komórki drugiéj pozostało się nam 3 dziesiątki tysięcy, których nie można było rozdzielić na 8 części równych, z których każdaby była z dziesiątków tysięcy złożona. Aby je tak podzielić, przenosiemy te 3 dziesiątki tysięcy do komórki 3-ciéj, zamieniając je na sametysiące, co uczyni 30 tysięcy. A że w trzeciéj komórce są 4 tysiące, razem ich będzie 34 tysiące, tych więc ósma część czyni 4 tysiące; 8× 4 czyni 32, co odjąwszy od 34 tysięcy, pozostanie do podziału w téj komórce 2 tysiące.

Z komórki trzeciéj 2 tysiące zamieniam na sta, których będzie 20, te wkładam do komórki 4-téj, w któréj znajdują się już 2 sta, razem więc będzie 22 sta, z tych biorę ósmą część, wypadnie na iloraz 2 sta, co przez siebie pomnożywszy, będzie 16 set, te odjąwszy od 22, pozostanie 6 set, z których również mam wziąć ósmą część.

Z komórki czwartéj 6 set zamieniam na dziesiątki, których będzie 60 i te wkładam do komórki piątéj, a że w niéj już się znajdują 6 dziesiątków, razem 66, tych więc biorę ósmą część czyli 8 dziesiątków, co pomnożywszy przez 8, wypadnie 64 dziesiątków, pozostanie więc 2 dziesiątki z których mamy wziąć część ósmą.

Z komórki piątéj 2 dziesiątki zamieniam na jedności, których będzie 20 i te wkładam w komórkę 6-tą i ostatnią, w któréj znajdują się 4 jedności, czyli razem teraz będzie 24, ósma część 24 jest 3 jedności, i już nic do podziału nie zostanie. Część ósma zatém liczby 754264 składa się z 9 dziesiątków tysięcy, 2 set, 8 dziesiątków i 3 jedności, czyli razem: 94283, to jest: iloraz składa się z 5 cyfr, a dzielna z 6 cyfr, chcąc działanie to sprawdzić, dosyć będzie wziąć tę liczbę 94283 razy 6, a otrzymamy na iloczyn niezawodnie 754264 dzielną.

Powyższe działanie dzielenia, możemy tak jeszcze napisać:

Dzielna. Dzielnik.

```
754264 | 8
  34   |------
       | 94283  iloraz
   22
    66
     24
      0
```

Zadanie IV. Czemu się równa iloraz z podzielenia dwóch liczb 364 527 przez 9?

Rozwiązanie.

```
364527 | 9
       |------
    45 | 40503
     27
      0
```

Ponieważ w tym przykładzie pierwsza cyfra dzielnéj jest mniejsza od dzielnika, przeto iloraz składać się będzie z liczby cyfr o jednę mniéjszéj jak dzielna, to jest: z cyfr 5.

Dziewiąta część 36 dziesiątków tysięcy, jest 4, które podpisuję na pierwszém miejscu pod dzielnikiem, co wyobraża mi 4 dziesiątki tysięcy; liczbę tę mnożę przez dzielnik 9, a iloczyn 36 stąd otrzymany, odejmuję od 36 dziesiątków tysięcy dzielnéj i nic nie pozostanie; spuszczam liczbę 4 tysiące, 9 w 4-ch tysiącach nie mieści się, a zatém obok 4 dziesiątków tysięcy w ilorazie, w miejscu tysięcy piszę 0, dla pokazania, że nie ma jednostek tysięcznych; do 4-ch tysięcy dzielnéj, spuszczam 5 set, razem będę miał 45 set, tych część 9-ta czyni 5 set, które wypisuję przy tysiącach w ilorazie; następnie mnożę je przez 9, iloczyn 45 odejmuję od liczby odpowiadającéj, na resztę będzie 0; daléj spuszczam 2 dziesiątki, z tych nie mogę wziąć 9-téj części, aby każda z nich była dziesiątkiem, dla pokazania więc, że dziesiątków w ilorazie nie ma, piszę 0, i spuszczam do 2 dziesiątków dzielnéj 7 jedności, razem będę miał 27 jedności, których 9-ta część jest 3; te wypisuję obok dziesiątków w ilorazie, następnie mnożę je przez 3, iloczyn 27 odejmuję od 27 dzielnéj, na resztę otrzymam 0. Całkowity więc iloraz będzie 40503.

Zadanie V. Znaleźć iloraz liczby 634567 podzielonéj przez 7.

$$\begin{array}{l|l} \underline{634567} & 7 \\ 90652 & \text{iloraz} \\ & \text{więcéj} \\ & \text{reszta } 3. \end{array}$$

W praktyce dzielenie liczby jakiéjkolwiek przez liczbę pojedynczą skraca się w ten sposób: podkreśliwszy dzielną, mówi się: 7ma część 63 jest 9, które się podpisują jako iloraz pod linijką, 7 razy 9 czyni 63, co się w myśli odejmuje od 63, zostanie nic; następnie biorę 7mą część 4-ech tysięcy, wypada na iloraz 0 tysięcy, zamieniam 4 tysiące na sta, do nich przydaję w myśli 5 set dzielnéj,

będzie razem 45 set; tych 7-ma część jest 6 set, te wypisuję w ilorazie w miejscu właściwém, mnożę na pamięć 6 przez 7, iloczyn 42 odejmuję od 45, resztę 3 sta zamieniam na dziesiątki i przydaję 6 dziesiątków, razem będzie 36 dziesiątków; tych część 7-ma czyni 5, te wypisuję w ilorazie, mnożę 5 dziesiątków przez 7, iloczyn 35 odejmuję od 36, pozostały 1 dziesiątek zamieniam na jedności i przydaję 7, będzie 17 jedności; tego biorę 7mą część, iloraz 2 piszę obok 5 i następnie mnożę 2 przez 7, iloczyn odejmuję od 17, pozostanie na resztę 3. Całe to działanie odbywa się na pamięć. Iloraz znaleziony 90652 pomnożywszy przez 7, otrzymamy 634564
do czego przydawszy resztę 3

Będzie dzielna 634567

Przypadek drugi dzielenia.

Dzielna i dzielnik są liczbami złożonemi

Podzielić 16416 przez 24?

Ilorazem tych dwóch liczb będzie liczba wskazująca, ile razy 24 mieści się w 16416, czyli ile razy liczba 24 mniejsza od 16416, czyli jaka jest liczba będąca 24tą częścią 16416. Aby ją wyznaczyć, rozumować będziemy w ten sposób:

Dzielna składa się z 1 dziesiątka tysięcy + 6 tysięcy + 4 set + 1 dziesiątek + 6 jedności. Wziąć część

24-tą całéj téj liczby, jest to samo, co wziąć każdéj w szczególności część 24-tą.

1) 24-téj części z jednego dziesiątka tysięcy wziąć nie można tak, aby ta część 24 była dziesiątkami tysięcy, zamieniam więc ten 1 dziesiątek tysięcy na tysiące, będzie ich 10, i do nich przydaję z porządku 6 tysięcy, będzie razem 16 tysięcy.

2) 24-téj części 16 tysięcy wziąć nie mogę, aby otrzymać na każdą z tych części tysiące, zamieniam je więc na sta, których będzie 160, do tych przydaję 4 sta z porządku, będzie razem 164 sta.

3) 24 tą część 164 set mogę już wziąć, tych będzie 6 set całych, które pomnożywszy przez 24 otrzymam 144 sta, te odjąwszy od 164 sta, pozostanie 20 set, których części 24-téj już wziąć nie mogę w tém założeniu, aby każda z nich była stem, zamieniam je więc na dziesiątki i dodaję z liczby danéj 1 dziesiątek, będzie ich razem 201.

4) 24-ta część 201 dziesiątka jest 8 dziesiątków, te mnożę przez 24, otrzymam na iloczyn 192 dziesiątki, którąto liczbę odejmuję od 201, zostanie mi się na resztę 9 dziesiątków, z których 24-téj części wżiąć nie mogę, aby każda była dziesiątkiem, zamieniam je więc na jedności i przydaję do nich 6 jedności dzielnéj, będzie razem 96 jedności.

5) 24-tą częścią 96 jedności jest zupełne 4, te mnożę przez 24, będze 96, odejmuję od 96 jedności, i nic nie pozostaje.

Powtórzenie. Liczba dana w skutku tego rozumowania została rozebrana na 164 sta, czyli 144 sta + 20 set = 164 sta + 200 dziesiątków; 16 równa się 1 dziesiąt. i 6 jedności, czyli cała dzielna składa się teraz z 144 set + 201 dziesiątka + 6 jedności = 144 sta + 192 dziesiątków + 96 jedności.

24-ta część 144 set = 6 set
24-ta część 192 dz. = 8 dziesiątkom
24-ta część 96 jedn. = 4 jednościom

więc 24-ta część 16416 = 684 i to jest ilorazem szukanym.

Dzielna w przykładzie powyższym składa się z 5ciu cyfr, a dzielnik z 2-ch cyfr. Liczba jedno-cyfrowa przez liczbę dwu-cyfrową dzielona, nigdy na iloraz wydać nie może liczby całéj. Liczba dwu-cyfrowa dzielona przez dwu-cyfrową, musi być koniecznie większą od dzielnika, aby choć raz dzielnik w sobie mieścić mogła. Z tych uwag wypływa sposób bardzo łatwy do przekonania się z ilu liczb składać się powinien iloraz z podzielenia dwóch liczb jakichkolwiek; dosyć jest od lewéj ręki ku prawéj odciąć tyle cyfr, aby liczba stąd utworzona, mogła być podzieloną przez dzielnik; do pozostałéj liczby cyfr dzielnéj przydajmy jedność, to będzie liczbą cyfr ilorazu; np. w obecnym przykładzie 24 dzielnik, nie mieści się, ani w jednéj cyfrze, ani w dwóch pierwszych cyfrach dzielnéj, tylko dopiero w 3-ech pierwszych, a że te 3 pierwsze cyfry razem wzięte, wyobrażają liczbę set, a zatém pierwsza cyfra ilorazu wyobrażać będzie sta, czyli iloraz składać się będzie z trzech cyfr.

Ogólne prawidło na dzielenie liczb całkowitych.

```
Dzielna.    Dzielnik
12 567 894 | 6 734
 6 734     |------
-------    | 1 866  iloraz
 58 338    |
 53 872
 ------
  44 669
  40 404
  ------
   42 654
   40 404
   ------
    2 250  reszta
```

Dzielna składa się tu z 8 cyfr, a dzielnik z czterech.

a) 6 734 nie mieści się ani w 1 dziesiątku milijonów, ani w 12 milijonach ani w 125 sta-tysiącach, ani w 1 256 dziesiątkach tysięcy, rozumie się, aby na jedną sześcio-tysięczną siedmsetną trzydziestą czwartą część, otrzymać można w pierwszym razie dziesięcio-milijony, w drugim milijony, w trzecim sta-tysiące, a w czwartym dziesięcio-tysiące; ale dopiero w 12567 tysiącach 6 734 mieścić się może. Stąd wypada, że na pierwszą cyfrę w ilorazie otrzymamy tysiące, a zatém iloraz składać się będzie z 4-rech cyfr.

b) Aby dojść ile razy 6 734 mieści się w 12 567, zgadujemy najprzód ile razy 6 tysięcy mieści się w 12 tysiącach, (przypuszczam w myśli że w miejsce 7, 3, 4 dzielnika są zera, i w miejscu 5, 6, 7 dzielnéj są także zera), w takim razie 6 tysięcy w 12 tysiącach pójdzie 2 razy, gdy się wrócimy do liczb prawdziwych, tak w dzielnéj jak w dzielniku, postrzeżemy, że liczba 6 734 wzięta 2 razy, da więcéj jak 13 tysięcy, bo po 6ciu tysiącach dzielnika, następuje 7 set, które wzięte 2 razy, daje już 1 400; z tego przekonywamy się, iż liczba 6 734 mieści się tylko raz, co odjąwszy od części dzielnéj, pozostanie 5 833 tysiące; te zamieniamy na sta, przydając 8 z dzielnéj, będzie 58 338 set.

c) Aby się przekonać, ile razy ta ostatnia liczba set zawiera w sobie 6 734, czyli część 6 734-ta powyższéj liczby ile da, znowu sobie skracamy robotę mówiąc: 6 tysięcy w 58 tysiącach, poszłoby 9 razy, ale mając wzgląd na rzeczywistą wielkość dzielnéj i dzielnika, przekonywam się, że ten iloraz jest za wielki, bo 6 734 × 9 czyni 60 606. Zamiast więc 9 na iloraz, bierzemy 8 set i te piszemy pod dzielnikiem; 6 734 razy po 8, daje 53 872 sta, które podpisujemy pod cząstkową dzielną 58 338, podkreślamy i odejmujemy, pozostanie na resztę do podziału 4466 set, te zamieniamy na dziesiątki i dodajemy do nich z dzielnéj głównéj 9 dziesiątków, będzie razem 44 669 dziesiątków.

d) Tych 44 669 dziesiątków trzeba wziąć 6 734-tą część, czyli, co na jedno wychodzi, znaleźć liczbę wskazującą, ile razy ten dzielnik mieści się w cząstkowéj dzielnéj. Ponieważ dzielnik jest większy od półsiódma tysiąca, przeto można przepuścić, że mamy dzielić przez 7 000. 7 tysięcy w 44 tysiącach mieści się 6 razy; a zatém i 6 734 liczba mniejsza od 7 000 mieścić się będzie w 44 669 także 6 razy; te 6 dziesiątków podpisujemy pod linijką na 3-ciém miejscu z porządku, następnie mnożymy je przez dzielnik 6 734; iloczyn 40 404 odejmujemy od drugiéj częściowéj dzielnéj, i otrzymamy na resztę 4 265 dziesiątków, te zamieniamy na jednostki, przydając do nich pozostałe 4 jedności z głównéj dzielnéj, razem 42 654.

e) W 42 654, dzielnik mieści się także 6 razy, co piszemy w ilorazie; daléj mnożymy 6734 przez 6 a iloczyn 40 404 odejmujemy od 42 654; pozostanie w końcu 2250 jedności, które na 6 734 części równych w całości podzielić się nie dadzą.

Chcąc się przekonać, czyli działanie dobrze uskutecznionem zostało, dosyć jest otrzymany iloraz 1866 pomnożyć przez dzielnik 6 734, a do iloczynu przydać resztę pozostałą 2 250, summa niewątpliwie równa być musi podzielnéj.

```
     6734
     1866
   ──────
    40404
   40404
  53872
  6734
 ────────
 12565644 iloczyn ilorazu przez dzielnik,
     2250 reszta z dzielenia,
 ────────
 12567894 dzielna, która, jak widziemy z samego
```

działania mnożenia, składa się:

z 6734 tys. ta liczba podz. przez 6734 daje 1 tysiąc
z 53872 set ,, ,, ,, ditto ,, 8 set
z 40404 dzies. ,, ,, ,, ditto ,, 6 dzieś.
z 40404 jedn. ,, ,, ,, ditto ,, 6 jedn.
z 2250 jedn. ta liczba nie da się dzielić przez 6734.

Abyś dwie liczby całkowite podzielił przez siebie napisz dzielnik po prawéj stronie dzielnéj, rozłącz je linijką pionową, i podkreśl dzielnik linijką poziomą.

To uskuteczniwszy, weź z lewéj strony dzielnéj tyle cyfr, ile ich jest w dzielniku, albo o jednę więcéj, jeżeli ogół pierwszych tych cyfr jest mniejszy od dzielnika, tym sposobem otrzymasz *pierwszą cząstkową dzielną*, któréj ostatnia cyfra po prawéj ręce wyobraża najwyższego rzędu jednostki ilorazu. *Szukaj ile razy ta cząstkowa dzielna zawiera w sobie dzielnik*. (Ten iloraz otrzymuje się przez próby, uważając pierwszą lub dwie pierwsze cyfry po lewéj stronie dzielnéj, i pierwszą cyfrę lub 2 pierwsze po lewéj stronie dzielnika.) *Otrzymany iloraz wypisz pod dzielnikiem, pomnóż dzielnik przez tę cyfrę i odejmiéj iloczyn od pierwszéj cząstkowéj dzielnéj.* Obok reszty stąd otrzymanéj, spuść następującą cyfrę dzielnéj, i będziesz miał *drugą cząstkową dzielną; szukaj jak poprzednio, ile razy ta druga cząstkowa dzielna zawiera w sobie dzielnik i napisz ten nowy iloraz po prawéj stronie pierwszego; pomnóż dzielnik przez ten drugi iloraz i odejmuj iloczyn od drugiéj cząstkowéj dzielnéj.*

Spuść i napisz obok téj drugiéj reszty następującą cyfrę dzielnéj i będziesz miał trzecią dzielną cząstkową, z którą postąpisz tak samo, jak z poprzedzającą.

Taki szereg działań pociągniesz dopóty, dopóki nie spuścisz ostatniéj cyfry dzielnéj, pamiętając przy każdém działaniu napisać iloraz otrzymany po prawéj stronie poprzedzającego, aby temuż nadać prawdziwą wartość. Jeżeli po tych wszystkich działaniach nic nie pozostanie, wówczas dzielenie było zupełne; jeżeli zostanie się jaka reszta z tego działania, potrzeba ją w sprawdzeniu dodać do iloczynu dzielnika przez iloraz znaleziony.

Oswoiwszy się dobrze z różnemi częściami wskazanego postępowania, można znacznie skrócić cząstkowe działanie, wykonywając za jednym zachodem mnożenie i odejmowanie cząstkowe, co pokażemy w następującym przykładzie.

Podzielić 9639475 przez 2789

Biorę najprzód 4 pierwsze cyfry z lewéj strony dzielnéj, ponieważ takowe zawierają w sobie dzielnik, i dzielę 9639 przez 2789, albo prosto 9 przez 2 wypada 4 na iloraz, lecz ta cyfra jest za wielka, albowiem mając tylko wzgląd na 2 pierwsze cyfry dzielnika z lewéj strony, widzę że 4 razy 27 daje 108, liczbę większą od 96, probuję czy 3 nie będzie tym ilorazem, i przekonywam się: że gdy 3 razy 27 daje 81, liczbę mniejszą od 96, jestem prawie pewny, że 3 jest prawdziwą cyfrą tysięcy w ilorazie, które wypisuję pod dzielnikiem.

9639475	2789
12724	3456
15687	
17425	
691 reszta	

To założywszy, zamiast mnożyć 2789 przez 3, a iloczyn podpisać pod 9639 w celu odjęcia go, działam w sposób następujący, mówię: 3 razy 9 czyni 27, odejmuję 27 od 9 (ostatniéj cyfry z prawéj strony 9639-ciu) co być nie może, przypuszczam, że 9 jest powiększone o 2 dziesiątki, co daje 29 i odejmuję 27 od 29 pozostaje 2, które podpisuję pod 9639, podkreśliwszy poprzednio tę liczbę linijką; uważamy teraz, że 2 dziesiątki dodane, rzeczywiście były wzięte z 3ch dziesiątków dzielnéj pożyczanym sposobem, z nich więc teraz pozostał tylko 1 dziesiątek, lecz to na to samo wyjdzie, co zachować 2 dziesiątki z 27, w celu ich przyłączenie do iloczynu z 3-ch dziesiątków dzielnika, przez iloraz 3 i odjęcia wszystkiego od dziesiątków dzielnéj 9639.

Podług tego powiadam daléj: 3 razy 8 czyni 24, a 2 z pozostałych, daje 26, 26 odjąć od 3-ch nie można, lecz pożyczając 3 sta od cyfry set otrzymuję 33, a 26 od 33, daję na resztę 7, które podpisuję pod 3 dzielnéj cząstkowéj, i prócz tego 3 sta zatrzymuję.

3 razy 7 czyni 21, a 3 pozostałe, daje 24; 24 od 6 odjąć nie można, lecz 24 od 26 pozostaje 2, co piszę pod 6 dzielnéj cząstkowéj i 2 tysiące zachowuję.

Nakoniec 3 razy 2 czyni 6, a 2 pozostałe, dają 8, 8 od 9 pozostaje 1, co podpisuję pod 9.

Pozostaje więc 1272; obok téj liczby spuszczam cyfrę 4 dzielnéj i otrzymam drugą cząstkową dzielną 12724.

W 12724, ile razy mieści się 2789, lub w 12 ile razy mieści się 2?

Odpowiedź: 6 razy, lecz 6, nawet 5 razy jest za wiele, jak to łatwo się przekonać; piszę więc 4 z prawéj strony 3-ch w ilorazie i mówię: 4 razy 9 czyni 36, 36 od 4 nie można odjąć, lecz 36 od 44 pozostaje 8, co piszę pod 4 i 4 zachowuję.

4 razy 8 czyni 32, a 4 z pozostałe, daje 36, 36 od 2 nie można odjąć, lecz 36 od 42 pozostaje 6, co podpisuję pod 2 i 4 zachowuję.

Nakoniec 4 razy 2 czyni 8, a 3 czyni 11; 11 od 12 pozostaje 1, co podpisuję pod 2.

Reszta z tego nowego działania jest 1568, obok któréj spuszczam cyfrę następną dzielnéj i mam 15687 na trzecią dzielną cząstkową, z którą postępuję w ten sposób jak wyżéj wskazałem.

Uwaga 1. Jeżeli pomimo spuszczenia cyfry jednéj z dzielnéj głównéj, w celu otrzymania dzielnéj cząstkowéj, taż dzielna cząstkowa będzie mniejsza od dzielnika, na iloraz napisz jedno zero; jeżeli za spuszczeniem drugiéj cyfry dzielny głównéj, jeszcze dzielnik mieścić nie będzie, napisz drugie zero i tak daléj, póty, póki nie otrzymasz dzielnéj cząstkowéj większéj od dzielnika.

Uwaga 2. Liczbę daną podzielić przez 10, 100, 1000 i t. d., jest to samo co się dowiedziéć ile w danéj liczbie znajduje się dziesiątków, set, tysięcy i t.d. czyli, co na jedno wychodzi, odciąć w piérwszym razie jednę końcową cyfrę, a reszta pozostała będzie ilorazem; w drugim razie dwie końcowe cyfry od prawéj ręki, a reszta pozostała będzie ilorazem szukanym; w trzecim razie trzy końcowe cyfry, a reszta pozostała będzie ilorazem całkowitym, a odcięte cyfry należéć będą do reszty nie dającéj się dzielić w piérwszym razie przez 10, w drugim przez 100 i tam dal éj.

Uwaga 3. Jeżeli dzielna jest ta sama, a dzielnik dwa, trzy, cztery razy mniejszy od piérwszego dzielnika, iloraz będzie dwa, trzy, cztery razy większy od piérwszego. Wypadek ten jest sam z siebie widoczny, bo liczba dwa razy mniejsza w liczbie danéj stałéj mieścić się musi dwa razy więcéj; np. dzielna 36, dzielnik pierwszy 18, drugi 9, trzeci 6, czwarty 3. Iloraz w pierwszym przypadku będzie 2, w drugim 4, w trzecim 6, w czwartym 12; i odwrotnie, gdy dzielnik się powiększa pewną liczbę razy, iloraz zmniejszać się musi taką samą liczbę razy. I tak: dzielna 36, dzielnik 4 w pierwszym razie, 12 w drugim razie. Iloraz w pierwszym przypadku będzie 9, w drugim 3, to jest: w pierwszym przypadku iloraz jest 3 razy większy od ilorazu w drugim przypadku, a przeciwnie, dzielnik pierwszy od drugiego jest 3 razy mniejszy.

Gdy dzielnik jest stały a podzielna zmienna i pewną liczbę razy większa lub mniejsza od pierwiastkowéj swéj wielkości, w takim przypadku iloraz takąż samą liczbą razy będzie większy lub mniejszy od pierwszego swego stanu, np. dzielnik stały 6, dzielna pierwiastkowa 36, w drugim przypadku jest 72, lub 18; iloraz w pierwszym stanie będzie 6, w drugim 12, a w trzecim 3, to jest dzielna 2 razy większa dała iloraz 12, czyli liczbę dwa razy większą od 6; dzielna 18 dwa razy mniejsza, dała na iloraz 3, czyli liczbę 2 razy mniejszą.

Nakoniec, dzielną i dzielnik, pomnożywszy lub podzieliwszy razem przez jednakową liczbę, otrzymamy iloraz taki sam, jaki był z dwóch danych liczb, przed ich pomnożeniem lub podzieleniem, bo mnożąc np. dzielną przez 2, iloraz powiększyłby się 2 razy, gdy dzielnik został nietknięty; mnożąc dzielnik także przez 2, iloraz ten drugi byłby od pierwszego 2 razy mniejszy; gdy się więc iloraz raz powiększa, drugi raz zmniejsza o tę samę liczbę razy, przeto się nie odmieni, np. 36 przez 12, iloraz jest 3, pomnożywszy dzielnik i dzielną przez 3, będzie 108, przez 36, daje na iloraz także 3; lub dzieląc dzielnik i dzielną 36 i 12 np. przez 4, będzie do podzielenia 9 przez 3, co daje także 3.

Z tego jeszcze, cośmy dopiero powiedzieli, wypada, że gdy w dzielnéj i w dzielniku znajdują się zera, można wymazać tak w dzielnéj jak i w dzielniku, jednakową liczbę zer, a iloraz się nie zmieni; np. 5000 podzielić przez 200, jest to samo co dzielić 50 przez 2, bo odmazując 2 zera w dzielnéj, zmniejszyliśmy ją przez to 100 razy, odmazując znów w dzielniku także 2 zèra, zmniejszamy go 100 razy, iloraz więc pozostaje niezmienny.

Jeżeli tylko dzielnik zakończony będzie na zera, a dzielna nie, w takim razie dosyć te zera opuścić w dzielniku, a w dzielnéj od prawéj ku lewéj ręce odjąć tyle cyfr, ile było zer w dzielniku i dzielić resztę cyfr zwyczajnym sposobem, otrzymawszy na iloraz pewną liczbę całkowitą, a do reszty pozostałéj z tego dzielenia spuścić cyfry odcięte, i te będą razem zupełną resztą, np. 456784 podzielić przez 64000, znaczy to samo, co podzielić:

$$\begin{array}{l|l} 456784 & 64 \\ \cline{2-2} 448 & 7 \text{ iloraz} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

»8784 reszta, do podzielenia nie przez 64, ale przez 64000, cały dzielnik.

O tym przypadku dzielenia, powiemy obszerniéj i dokładniéj, mówiąc na swém miejscu o działaniach z ułamkami dziesiętnemi.

Aby dzieci wprawić powoli w odbywanie szybkie tego działania, powinni nauczyciele zaczynać od przykładów z małéj liczby cyfr złożonych, przywiązując zawsze do nich jakieś zadanie z życia potocznego. Stopniami potém przejść do przykładów coraz zawikłańszych, nie spuszczając jednak z uwagi téj okoliczności, aby się dzieci za każdym razem tłómaczyły w sposób wyżéj wskazany, dla czego tak, a nie inaczéj postępują, w wykonywaniu tego działania.

Uczenie bowiem prawideł na pamięć, na nic się nie przyda, nie są ony tak trudne, aby ich zrozumiéć i pojąć dzieci nie mogły, zależy to tylko od zręczności nauczyciela, który, jeżeli się przejmie duchem przedmiotu i poprzednio przeczyta z rozwagą, co mu tu przepisano, niezawodnie nie dozna najmniejszéj przeszkody w udzielaniu swych wiadomości pod względem rachunkowym i uprzyjemni dzieciom nabycie tego przedmiotu, tyle ważnego w każdém powołaniu.

Sprawdzenie mnożenia.

Sprawdzenie tego działania może się uskutecznić za pomocą dzielenia, bo w saméj rzeczy iloczyn równa się mnożnéj, pomnożonéj przez mnożnik; jeżeli więc podzielimy mnogość czyli iloczyn przez jeden z czynników, to jest przez mnożnik lub mnożną, otrzymać powinniśmy czynnik drugi, który, jeżeli rzeczywiście otrzymamy, będzie to dowodem, że działanie dobrze jest zrobione; dodać tu jednak wypada uwagę, że niezgodność służyć tylko będzie mogła za wskazówkę, iż jedno z działań błędnie wykonaném było.

Przykład. 14 pomnożone przez 15, daje na iloczyn 210; 210 podzielone przez 15, daje na iloraz 14, drugi czynnik; toż samo 210 podzielone przez 14, daje na iloraz 15.

Ogólne uwagi tyczące się mnożenia i dzielenia.

1. Chcąc iloczyn dwóch liczb całkowitych dowolnych, powiększyć pewną liczbę razy, dosyć jest powiększyć jeden z jego czynników, to jest mnożną lub mnożnik, tę samą żądaną liczbę razy.

Przykład.

15	mnożna	Chcąc zamiast iloczynu 90, otrzymać iloczyn 8 razy większy, dosyć będzie albo mnożną powiększyć 8 razy, a ten sam mnożnik zostawić, albo mnożną zostawić nietkniętą, a mnożnik 6, powiększyć 8 razy; i w pierwszym i w drugim przypadku, otrzymamy iloczyn 720, to jest 8 razy większy od iloczynu 90.
6	mnożnik	
90	iloczyn	

Jakoż	120	lub 15
	6	48
	720	120
		60
		720

Wypadki powyższe są same z siebie widoczne.

2. Gdy powiększywszy mnożną np. 4 razy, a mnożnik 3 razy, iloczyn będzie 12 razy większy od tego, jakibyśmy otrzymali przed powiększeniem.

Przykład. 8	$8 \times 4 = 32$	nowa mnożna
9	$9 \times 3 = 27$	nowy mnożnik
72	224	
	64	
	864	nowy iloczyn

$= 72 \times 12$, to jest iloczyn nowy 864 jest 12 razy większy od iloczynu danego 72.

Objaśnienie. Początkowo mieliśmy do pomnożenia 8×9 i otrzymaliśmy na iloczyn 72.

W drugim razie, zamiast 8 mnożnéj, mamy 8×4, a zamiast mnożnika 9, mamy 9×3, czyli zamiast mnożenia 8 przez 9, mamy pomnożyć iloczyn 8×4 przez iloczyn 9×3 (ob. str. 86), co się równa $8 \times 4 \times 9 \times 3 = 8 \times 9 \times 4 \times 3 = 8 \times 9 \times 12 = 72 \times 12$, czyli że nowy iloczyn od dawnego jest 12 razy większy.

3. Gdybyśmy jeden z dwóch czynników danych do mnożenia, zamiast powiększać zmniejszali pewną liczbę razy, w takim przypadku iloczyny zamiast się powiększać o tę samą liczbę razy, zmniejszać się będą. Gdyby zaś każdy z obu czynników pewną liczbę razy zmniejszony został, to iloczyn zmniejszyłby się tyle razy, ile jest jedności w liczbie przez którą podzieliliśmy czynnik pierwszy, pomnożonéj przez liczbę jedności zawartych w drugim dzielniku, przez który dzieliliśmy czynnik drugi.

Przykłady:

1.

564	pierwszy czynnik
28	drugi czynnik
4512	
1128	
15792	iloczyn.

II.

141 czynnik pierwszy 4 razy mniejszy od danego 564.
28 czynnik drugi niezmienny.

1 128
282

3 948 Iloczyn nowy, będący tylko czwartą częścią 15 792 iloczynu pierwiastkowego.

III.

564 *Pierwszy czynnik niezmienny.*
7 *Drugi czynnik 4 razy mniejszy od 28 czynnika danego.*

3948 *Iloczyn nowy 4 razy mniejszy od pierwiastkowego, pod numerem I.*

IV.

141 Pierwszy czynnik 4 razy mniejszy.
7 Drugi czynnik 4 razy mniejszy.

987 Iloczyn nowy, 16 razy mniejszy od pierwiastkowego 15 792,
bo 987 nowa mnożna
16 razy wzięta

5 922
987

15 792 iloczyn pierwiastkowy.

4. Wielkość ilorazu zawisła od względnéj wartości dzielnéj i dzielnika. (*)

a) Aby iloraz otrzymany z podzielenia dwóch danych liczb mógł być np. 8 razy większy, trzeba albo dzielną 8 razy powiększyć, nie zmieniając dzielnika, albo dzielnik zmniejszyć 8 razy, zostawiając tę samą dzielną; i w pierwszym i w drugim przypadku iloraz otrzymamy 8 razy większy od ilorazu pierwiastkowego.

b) Aby iloraz otrzymany z podzielenia dwóch danych liczb mógł być np. 8 razy mniejszy, trzeba albo dzielną 8 razy zmniejszyć, nie zmieniając dzielnika, albo dzielnik 8 razy powiększyć, zostawiając tę samą dzielną, w obu tych przypadkach, iloraz się stanie 8 razy mniejszy od pierwiastkowego.

Przykłady:

I.

Dzielna 6846 | 6 dzielnik
1141 pierwiastkowy iloraz.

II.

Dzielna 8 razy większa od pierwiastkowéj . . . . . 54768 | 6 dzielnik
9128

(*) Lubo na str. 120 już o tym przedmiocie była wzmianka, jednakże osądziłem za stosowne w krótkości tu jeszcze powtórzyć, aby rzecz tę na przykładach lepiéj wyjaśnić.

Iloraz nowy 9 128 jest od pierwiastkowego 8 razy większy, co też być powinno, bo liczba 6 w liczbie 8 razy większéj 54 768, widocznie musi się mieścić 8 razy więcéj.

III.

Dzielna pierwiastkowa . . . 6 846 | 3 dzielnik 2 razy mniejszy od pierwiastkowego

2282 Iloraz 2 razy większy od ilorazu pierwiastkowego, bo liczba dwa razy mniejsza mieści się w liczbie danéj 2 razy więcéj.

Podobnie możnaby okazać, i zmniejszanie się ilorazu.

5. Na mocy tego co poprzedziło wnieść można, iż mnożąc lub dzieląc pierwiastkowy dzielnik i dzielną przez pewną i tę samą liczbę dowolną, iloraz się nie zmieni nigdy; bo mnożąc np. dzielną, iloraz się powiększa, mnożąc dzielnik, iloraz się zmniejsza, a że to powiększenie i zmniejszenie jest tę samą liczbę razy, przeto iloraz nie zmieni się.

Przykłady:

I.

Dzielna pierwotna 624 | 6 dzielnik pierwotny

104

II.

$$\begin{array}{r|l} \text{Dzielna } 308 & 2 \text{ dzielnik} \\ \hline & 104 \end{array}$$

Tu dzielnik i dzielna stały się 3 razy mniejsze, a iloraz pozostał niezmienny.

III.

$$\begin{array}{r|l} 4368 & 42 \\ \hline 168 & 104 \\ \hline = = = & \end{array}$$

W przykładzie tym, dzielna i dzielnik są 7 razy większe, a iloraz pozostał niezmienny.

Niektóre skrócenia w odbywaniu działań mnożenia i dzielenia.

1. Liczba 5 jest połową dziesięciu; mnożąc zatém daną liczbę jakąkolwiek przez **10**, otrzymamy iloczyn 2 razy większy od iloczynu tejże saméj liczby przez 5, a zatém dość jest wziąć połowę pierwszego iloczynu, aby miéć iloczyn drugi.

Z tego wypada prawidło na mnożenie jakiéjkolwiek liczby danéj przez 5:

Pomnóż daną liczbę przez ***10***, (*czyli przypisz po prawéj stronie* ***0***), *weź połowę tego iloczynu czyli podziel przez* ***2***, *a iloraz będzie iloczynem liczby danéj przez* ***5***.

np. 3 413 pomnożyć przez 5.

Działanie. 3 413 $\times$ 10 czyli 34130 | 2

17065; iloraz liczb 34 130 przez 2 jest iloczynem liczby 3 413 przez 5.

2. Liczba 25 jest czwartą częścią liczby 100, mnożąc zatém liczbę daną jakąkolwiek przez 100, otrzymamy iloczyn cztery razy większy od iloczynu téjże saméj liczby przez 25. A zatém dość jest pierwszego iloczynu wziąć czwartą część, aby miéć iloczyn drugi;

np. 628 mnożna
25 mnożnik
3 140
1 256
15700 iloczyn

albo sposobem skróconym
628 $\times$ 100 = 62 800
62 800 | 4
15 700; iloczyn liczby danéj 628 przez 25.

3. Liczba 75 składa się z 50 + 25; 50 jest połową stu, a 25 jest połową 50. Pomnożyć więc daną liczbę jakąkolwiek przez 75, jest toż samo, co najprzód pomnożyć daną liczbę przez 50, a potém przez 25.

Mnożyć przez 50, jest to samo co liczby sto razy większéj od danéj wziąć połowę; pomnożyć zaś daną liczbę przez 25, jest to samo, co liczby sto razy większéj wziąć część czwartą lub jéj połowy połowę. Podług tego, mając jakąkolwiek liczbę daną do pomnożenia przez 75, dosyć będzie dopisać do liczby danéj po prawéj ręce 2 zera, potém wziąć jéj połowę i téj połowy połowę; a summa tych dwóch połów będzie iloczynem szukanym.

Przykład:

458 mnożna	sposobem skróconym
75 mnożnik	45800 | 2
2290	22900 jest połową 45800
3206	11450 jest połową 22900
34350 iloczyn	34350 iloczyn.

4) Liczba 125 jest ósmą częścią liczby 1000, mnożąc zatém jakąkolwiek liczbę daną przez 1000, otrzymamy iloczyn 8 razy większy od iloczynu téjże saméj liczby przez 125, a zatém dosyć będzie wziąć ósmą część iloczynu pierwszego, aby otrzymać iloczyn drugi.

Przykład:

624 mnożna	sposobem skróconym
125 mnożnik	624000 Liczba tysiąc razy większa od danéj.
3120	
1248	78000 Część ósma liczby 624000 czyli iloczyn liczby 624 przez 125.
624	
78000 iloczyn	

5) Ile razy wypadnie mnożyć jakąkolwiek liczbę daną przez liczbę złożoną z dwóch czynników, wówczas można rozebrać ten mnożnik na te czynniki i daną liczbę pomnożyć najprzód przez czynnik pierw-

szy, a iloczyn stąd otrzymany pomnożyć przez czynnik drugi, ten wypadek ostatni będzie iloczynem szukanym.

Przykład:

6284 mnożna	sposobem skróconym
72 mnożnik	Mnożnik 72 składa się z 9 pomnożonych przez 8.
12568	6284 mnożna
43988	8 pierwszy czynnik
452448 iloczyn	50272
	9 drugi czynnik
	452448 iloczyn ostateczny.

Zwykle jednak uskutecznia się mnożenie przez liczbę pojedynczą na pamięć, i dla tego mnożnik się nie wypisuje, samo zaś działanie odbywa się w kształcie następującym:

6284 mnożna
50272 iloczyn 6284 × 8
452448 iloczyn z 50272 × 9, czyli ostateczny iloczyn 6284 × 72.

Tak postępując, zyskujemy na tém, iż nie potrzebujemy, jak w zwyczajnym sposobie, cząstkowych iloczynów dodawać.

6) Pomnożyć liczbę daną jakąkolwiek przez liczbę złożoną z dziewiątek, jest to samo, co do liczby danéj dopisać tyle zer, ile jest dziewiątek w mnożniku i od tak powiększonéj liczby odjąć liczbę daną, reszta będzie iloczynem szukanym.

Przykład. Znaleźć iloczyn 564 przez 999.

Liczba 999 = 1000 — 1.

Gdybyśmy liczbę daną zamiast przez 999 pomnożyli przez 1000, otrzymalibyśmy wtedy iloczyn o liczbę 564 większy, aby więc iloczyn był prawdziwy, trzeba go o tę liczbę zmniejszyć.

Mnożę zatém 564 przez 1 000, otrzymam 564 000,
w téj liczbie niepotrzebnie raz jeden
jest wzięte 564, odejmuję więc 564

Reszta 563 436

jest liczbą, która liczbę 564 nie już 1 000 razy ale tylko 999 razy w sobie zawiera, czyli jest iloczynem 564 × 999.

7) Iloraz jakiéjkolwiek liczby danéj przez 5, równa się liczbie danéj, wziętéj dwa razy i podzielonéj przez 10.

Przykład. Znaleźć iloraz liczby 56 755 podzielonéj przez 5.

Aby to zadanie rozwiązać, mnożę liczbę daną na pamięć przez 2, iloczyn będzie 113510, dzielę ten iloczyn przez 10, czyli odcinam liczbę końcową, a reszta, to jest 11 351 będzie ilorazem 56755 przez 5.

Objaśnienia. Gdybym był wprost liczbę daną dzielił przez 10, a nie przez 5, otrzymałbym iloraz 2 razy mniejszy; a zatém wziąwszy liczbę dwa razy większą od danéj i podzieliwszy ją potém przez **10**, otrzymam iloraz prawdziwy liczby danéj przez **5**.

8) Iloraz jakiéjkolwiek liczby danéj przez **25** znajdziesz w sposób następujący:

*Liczbę daną pomnóż przez **4**, podziel potém iloczyn przez **100**, otrzymasz iloraz szukany.*

Przykład. Czemu się równa iloraz 34 525 przez 25?

Rozwiązanie. 34 525 × 4 = 138 100.

Liczbę 138 100 podzielę przez 100, czyli odetnę 2 końcowe zera i będę miał 1 381, iloraz szukany.

Objaśnienie. Dzieląc liczbę daną przez 100, otrzymam iloraz 4 razy mniejszy od ilorazu z podzielenia liczby danéj przez 25; a zatém biorąc liczby 4 razy większéj od liczby danéj część setną, ta będzie ilorazem liczby danéj przez 25.

9) Aby znaleźć iloraz jakiéjkolwiek liczby danéj przez 125, dosyć jest liczbę daną pomnożyć przez 8, a iloczyn stąd otrzymany podzielić przez 1 000.

Przykład. Czemu się równa iloraz z liczby 345125 przez 125.

Rozwiązanie. 345 125 × 8 = 2 761 000.

Podzieliwszy ten iloczyn przez tysiąc, czyli odciąwszy 3 końcowe zera, otrzymamy 2 761 liczbę na iloraz szukany.

Objaśnienie. Dzieląc daną liczbę wprost przez 1 000, otrzymam iloraz 8 razy mniejszy, od ilorazu z podzielenia liczby danéj przez 125; a zatém biorąc liczby 8 razy większéj od danéj część tysiączną, ta będzie ilorazem liczby danéj przez 125.

10) Iloraz z liczby danéj przez 75, jest trzy razy mniejszy od ilorazu tejże saméj liczby przez 25.

Przykład. 684975 podzielić przez 75.

Rozwiązanie: 684975
4

3) 27399,00 iloraz liczby danéj przez 25

9133 trzecia część ilorazu 27399 liczby danéj przez 25.

A zatém 9133 jest ilorazem szukanym liczby 684975, podzielonéj przez 75.

ROZDZIAŁ IV.

WIADOMOŚĆ O MONETACH, MIARACH I WAGACH.

I. O monetach.

Jednostką monet jest u nas rubel srebrny, który dzieli się na 100 kopiejek.

Prócz tego używany jest inny podział rubla, jako to: rubel = 2 półtynom, (sztuka sreb. 50 kop.), albo 5 dwugrywennikom, (sztuka sr. 20 kop.).

Połtyna = 2 półpołtynnikom, czyli czetwertakom, (sztuka sr. 25 kop.), albo téż 5 grywennikom, (sztuka sr. 10 kop.).

Półpołtynnik = $2\frac{1}{2}$ grywennikom, albo 5 piętakom (sztuka 5 kop.).

Dwugrywennik = 2 grywennikom.

Grywennik = 2 piętakom.

Piętak = 5 kopiejkom srebrnym.

Wszystkie sztuki tu wymienione, oprócz kopiejki, są srebrne.

Są oprócz tego jeszcze sztuki złote:

Imperjał, wartość 10 rubli w złocie, czyli 10 rubli 30 kop. srebrem.

Pół-imperjał wartości 5 rubli w złocie, czyli 5 rubli 15 kop. srebrem.

Jednostką monet dawniéj używaną był złoty, (sztuka srebrna), który się dzieli na 30 groszy.

Rubel srebrny ma złotych 6 i groszy 20, czyli groszy 200.

Kopiejka srebr. ma 2 grosze.

Do roku 1840 włącznie wybijano następne sztuki, których jednostką był złoty:

Sztuka srebrna, wartości $3/4$ rubla, czyli 75 kop., albo 5 zł. pol.

Sztuka srebrna wartości 30 kop., czyli 2 zł. pol.

Sztuka srebrna wartości 15 kop., czyli 1 zł. pol.

Bilony, pieniądze miedziane z przymięszaniem małéj części srebra, sztuka wartości 5 kop., czyli 10 groszy, zwana dziesiątką; sztuka 2 $1/2$ kop., czyli 5 groszy, piątką zwana.

Pieniądze miedziane: trojak wartości 1 $1/2$ kop., czyli 3 grosze, i grosz $=$ $1/2$ kop.

Od roku 1850 wybijają się sztuki miedziane wartości: 5 kop , 3 kop., 2 kop., 1 kop., oraz deneżka$=$ $1/2$ kop., i połuszka $=$ $1/2$ deneżki.

Jako monety rachunkowe po części używają się jeszcze w handlu, po części dawniéj używane były jednostki następujące:

Dukat, wartości 2 ruble 70 kop. sr., czyli złp. 18.

Talar, wartości 90 kop., czyli złp. 6. Trzy talary = dukatowi. Talar dzielono także na 30 srebrnych groszy, z których każdy wart jest 3 kop. Grosz srebrny = 6 fenigom.

Szeląg = $\frac{1}{3}$ grosza.

Denar = $\frac{1}{6}$ szeląga.

W Rossyi dawniéj były w użyciu ruble asygnacyjne, dzielące się podobnież na 100 kopiejek, miedzianemi zwanych.

350 rubli asygnacyjnych, równe są 100 rublom srebrnym; albo króciéj: 2 ruble sr. = 7 rub. assygnacyjnym.

Skrócone sposoby

ZAMIANY ZŁOTYCH, RUBLI ASSYGNACYJN. NA RUBLE SREBRNE I ODWROTNIE.

1. *Zamiana złotych polskich na ruble srebrne.*

Do danéj liczby złotych dopisz zero, liczbę tak powiększoną, oraz jéj połowę i połowę groszy, (jeżeli są dane), dodaj do siebie, a w summie odetniéj kréską z prawéj strony dwie cyfry, a będzies miał od lewéj strony kréski ruble, z prawéj zaś kopiejki.

Przykład. Złp. 2568 gr. 23, ile uczynią rubli srebrnych?

25680 (a) liczba 10 razy większa od danéj
12840 (b) liczba będąca połową liczby (a)
$11\frac{1}{2}$(c) połowa 23 groszy.

$385{,}31\frac{1}{2}$ summa, w któréj odciąłem dwie końcowe cyfry, jest liczbą szukaną rubli; to jest 2568 złp. gr. 23, czynią 385 rubli srebrem $31\frac{1}{2}$ kopiejki.

Objaśnienie działania. Złote zamieniam na kopiejki, każdy złoty ma 15 kopiejek, a zatém złotych 2568 miéć ich będą 2568 razy więcéj, czyli 15 kopiejek $\times$ 2568, lub co na jedno wychodzi, 2568 pomnożone przez 15, czyli pomnożone przez $10 + 5$. Daną liczbę 2568 pomnożyć przez 10, jest to samo, co przydać do téj liczby zero, otrzymamy liczbę pod (a); daną liczbę 2568 pomnożyć przez 5, jest to samo, co wziąć połowę liczby 10 razy większéj od danéj, czyli to samo co wziąć liczby pod (a) połowę i będzie 12840. Potém zamieniam 23 grosze dane na kopiejki, tych będzie $11\frac{1}{2}$, które piszę jak wskazałem przy (c), dodam te 3 liczby pod a, b, c, znajdujące się razem i otrzymam $38531\frac{1}{2}$ kopiejki; a że tych 100 idzie na jeden rubel, więc pytam się, ile w $38531\frac{1}{2}$ kopiejkach jest set; tych jest 385, czyli 385 rubli srebrem i pozostało $31\frac{1}{2}$ kopiejki.

2. *Zamiana rubli srebrnych na złote polskie.*

Ruble dane zamień na kopiejki, tych weź trzecią część i odejmiéj od całéj liczby kopiejek, a z pozostałéj reszty odetnij kreską od prawéj ręki jednę cyfrę, ta będzie wyrażała trojaki, a liczba z lewéj strony kréski, złote.

Przykład. Rubli srebrnych 56 748 i 8 kopiejek, ile czynią złotych?

5674808 kopiejek
1891602 $^2/_3$ trzecia część kopiejek danych

378320,5 $^1/_3$ reszta po odjęciu ostatniéj cyfry wyobraża złotówki, których jest 378320 i 16 groszy wartość cyfry 5 $^1/_3$ odciętéj.

Objaśnienie działania. Całe to postępowanie polega na tém, aby daną liczbę rubli srebrnych zamienić na trojaki.

Ruble zamieniają się na kopiejki, przez dopisanie do danéj liczby rubli dwóch zer po prawéj stronie, a że w obecnym przypadku było jeszcze 8 kopiejek, w miejscu więc drugiego zera napisaliśmy 8, i otrzymaliśmy ogółem 5674808 kop. Trojak równa się 1 $^1/_2$ kopiejkom, czyli 3 połówkom kopiejki. Gdyby zatém liczba 5 674808 nie była kopiejkami, ale tylko półkopiejkami, to część trzecia téj liczby, czyli 1891602 $^2/_3$ byłaby trojakami, a że liczba pierwsza wyobraża kopiejki, to jest dwa razy więcéj jak pół kopiejki, przeto z niéj liczba trojaków musi być 2 razy większa od $1891602\frac{2}{3}$, jaką jest właśnie liczba $3\,783\,205\,\frac{1}{3}$. Znalazłszy liczbę trojaków i wiedząc, że 10 trojaków idzie na jeden złoty, dosyć jest wziąć dziesiątą część liczby danéj trojaków, czyli odciąć ostatnią cyfrę po prawéj stronie, a reszta z liczby danéj będzie koniecznie złotówkami, a cyfra odcięta wyobraża liczbę trojaków, które łatwo zamienić na grosze.

3. *Zamiana rubli srebrnych na ruble assygnacyjne.*

Ruble dane zamień na kopiejki, pomnóż je przez 7, a iloczyn stąd otrzymany podziel przez 2, w ilorazie zaś odetniéj dwie cyfry, będziesz miał z lewéj strony kreski, ruble assygnacyjne, z prawéj zaś kopiejki.

Przykład. Rubli srebrnych 289 kopiejek 12, ile czynią rubli assygnacyjnych?

28 912 kopiejek
7
iloczyn 202 384 | 2
połowa
iloczynu: 101192 czyli 1011 rubli assygn. i 92 kop.

Objaśnienie działania. Na każde 100 rubli sreb. trzeba 350 rubli assygn., a zatém na 10 rubli srebr. trzeba 35 rubli assygn., lub na 2 rub. srebr. trzeba 7 rub. assygn., czyli (co jest prawda na rublach, to musi być prawdą na ich setnych częściach, czyli kopiejkach), dwie kopiejki srebrne czynią 7 kopiejek assygnacyjnych czyli miedzianych.

Chcąc zatém kopiejki srebrne zamienić na kopiejki miedz. trzeba pomnożyć połowę danych kopiejek srebrnych przez 7, lub, co na jedno wychodzi, mnożąc daną liczbę kopiejek srebrnych przez 7, otrzymalibyśmy na iloczyn 202 384 kop. miedzianych, w tém przypuszczeniu, że każda kopiejka srebrna równa się 7-miu kopiejkom miedzianym, a że właściwie nie jedna kopiejka srebrna ale dwie, dają 7 kop. miedzianych, przeto iloczynu danéj liczby kop. sreb. przez 7 kop. miedzianych, wypada wziąć połowę, czyli podzielić przez 2. Otrzymawszy już kopiejki miedz. dosyć je podzielić przez 100, czyli odciąć 2 końcowe cyfry od prawéj ręki, a będziemy mieli ruble i kopiejki assygnacyjne.

4. *Zamiana rubli assygnacyjnych na ruble srebrne.*

Ruble assygnacyjne zamień na kopiejki, pomnóż je przez 2, a iloczyn stąd otrzymany podziel przez 7, w ilorazie zaś odetniéj od prawéj ręki dwie cyfry, będziesz miał z lewéj strony kreski ruble srebrem, a z prawéj strony kopiejki.

Przykład. 1011 rubli assygn. i 92 kopiejek, ile czynią rubli srebrem?

101192 kopiejki miedziane
2
iloczyn 202384 | 7
siódma
część ilocz: 28912 czynią rubli sr. 289 i2 kop.

Objaśnienie działania. Sposób postępowania tu wskazany, jest wprost przeciwny poprzedzającemu. Wiemy już, że 7 kop. miedzianych, dają 2 kopiejki srebrne, co na jedno wychodzi, że 7 półkopiejek miedzianych idzie na 1 kopiejkę srebrną. Zamieniamy więc daną liczbę kopiejek miedzianych na półkopiejki, mnożąc ją przez 2, a iloczyn stąd otrzymany, dzielimy przez 7, iloraz będzie liczbą kopiejek srebrnych, które zamienić na ruble już umiemy.

II. Miary długości.

Jednostką miar długości jest sażeń.

Sażeń w handlu dzieli się na 3 arszyny.

Arszyn ma 16 werszków.

W miernictwie sażeń się dzieli na 7 stóp.

Stopa = 12 calom.

Cal = 10 linijom.

Do miar drożnych służy wersta = 500 sażniom.

Zaprowadzenie tych miar w Królestwie Polskiém, nastąpiło od dnia 19 kwietnia (1 maja) 1849 roku, w skutek postanowienia Rady Administracyjnéj.

Przed tém jednostką miar długości był łokieć.

Łokieć = 2 stopom = 4 ćwierciom = 24 calom = 288 linijom = 576 milimetrom.

Stopa = 2 ćwierciom = 12 calom = 144 linijom = 288 milimetrom.

Linija = 2 milimetrom.

Prócz tych są jeszcze do mierzenia długości:

Sznur mierniczy = 2 łańcuchom = 100 prętom = 1 000 pręcikom = 10 000 ławkom.

Łańcuch = 37 i pół łokciom.

Sążeń = 3 łokciom.

Do miar drożnych służyła mila = 7 werstom.

W przybliżeniu:

17 arszynów = 21 łokciom polskim.

17 sażni = 21 sążniom polskim.

164 sażni = 81 prętom polsklm.

17 stóp ross. = 18 stopom polskim.

III. Wagi.

Jednostką wag jest funt.

Pud = 40 funtom.

Funt = 96 zołotnikom.

Zołotnik = 96 doli.

Funt aptekarski = 12 uncyjom.

Uncyja = 8 drachmom.

Drachma = 3 skrupułom.

Skrupuł = 20 granom.

Funt ross. handlowy ma 9216 doli, a aptekarski 8 064 doli.

Przed zaprowadzeniem miar i wag rossyjskich jednostką wagi był funt polski = $^{1}/_{100}$ centnara.

Centnar = 4 kamieniom
Kamień = 25 funtom.
Funt = 2 grzywnom.
Grzywna = 8 uncyjom.
Uncyja = 2 łutom.
Łut = 4 drachmom.
Drachma = 3 skrupułom.
Skrupuł = 24 granom.
Gran = 5 $^{1}/_{2}$ granikom.
Granik = 8 miligramom

W przybliżeniu:

203 pudy = 82 centnarom
102 funty ros. = 103 fun. pol.
3 zołotn. = 1 łutowi

Znaki skrócone.

Cent. znaczy cetnar.
K. lub kam. kamień.
Fnt. znaczy funt.
G. c. M. grzywna czyli marka.
Unc. lub ℥ . . . uncyja.
ł. . . . . . . łut.
dr. lub ʒ znaczy drachma.

skr. lub ℈ znaczy skrupuł.
gr. . . . „ . gran.
grk. . . . „ . granik.

IV. Miary objętości.

a) *Sześcienne.*

Jednostką do mierzenia ciał stałych, jak np. drzewo, kamienie i t. p., jest sażeń sześcienny.

Sażeń sześcien. = 343 stopom sześciennym.

Stopa sześcien =1728 calom sześciennym.

Przed zaprowadzeniem miar ross., jednostką był sążeń sześcienny = 216 stopom sześć. polskim.

Stopa sześć. polska = 1728 calom sześć. pols.

W przybliżeniu:

17 saż. sz. ross. = 32 sążniom sześć. polskim.

27 stóp sz. ross. = 32 stopom sześć. polskim.

b) *do ciał sypkich.*

Jednostką do mierzenia ciał sypkich jest czetwert'.

Czetwert' = 8 czetwerykom.

Czetweryk = 8 garncom rossyjskim.

Garniec = 4 kwartom ross.

Dawniéj używaną jednostką, był korzec polski.

Korzec zawiera 4 ćwierci.

Ćwierć = 8 garncom.

Garniec = 4 kwartom.
Kwarta = 4 kwaterkom.

W przybliżeniu:

25 czetwerti = 41 korcom polskim.
25 czetweryków = 164 garncom polskim.
50 garncy ross. = 41 garnc. polsk.
50 kwart ross. = 41 kwart. polsk.

c) *do płynów.*

Jednostką do mierzenia ciał płynnych jest wiadro.

Wiadro = 10 krużkom.
Krużka = 10 czarkom.

Dawniéj używano garnca polskiego, dzielącego się na 4 kwarty, lub 16 kwaterek.

W przybliżeniu:

40 wiader = 123 garncom polskim.
13 krużek = 16 kwartom polskim.
65 czarek = 32 kwaterkom polskim.

V. Miary powierzchni.

Jednostką miar powierzchni jest sażeń kwadratowy.

Sażeń kwadrat. = 9 arszyn. kw. = 49 stopom kw.
Arszyn kwadr. = 256 werszkom kwadratowym.
Stopa kw. = 144 calom kwadr.
Cal kwadr. = 100 linijom kwadr.

Diesiatina = 2400 sążniom kwadr.
Werstka kw. = 250000 sążniom kwadratowym.
Dawniéj za jednostkę używano sążnia kw. i pręta kwadratowego.
Sążeń kwadr. = 9 łokciom kwadr.
Łokieć kw. = 4 stopom kw.
Stopa kwadratowa = 144 calom kwadr.
Cal kw. = 144 linijom kwadratowym.
Pręt kw. = 100 pręcikom kwadr.
Sznur kwadr. = 100 prętom kwadr.
Morga = 3 sznurom kwadr.
Włóka = 30 morgom.
W przybliżeniu:
21 sażni □ = 32 sążniom □ polskim.
21 arszynów □ = 32 łokciom □ pols.
42 stóp □ ross. = 47 stopom □ pols.
41 sażni □ = 10 prętom □.
41 diesiatyn = 80 morgom.

VI. Podział czasu.

Rok ma dni 365 = 12 miesiącom.
Dzień = 24 godzinom.
Godzina = 60 minutom.
Minuta = 60 sekundom.
Sekunda = 60 tercyjom.
Miesiące: Styczeń, Marzec, Maj, Lipiec, Sierpień, Październik, Grudzień, mają po dni 31, a miesiące:

Kwiecień, Czerwiec, Wrzesień, Listopad, po 30 dni. Miesiąc zaś Luty, zwykle ma 28 dni, a w roku przybyszowym ma 29 dni, wówczas rok liczy 366 dni zamiast 365.

Uwaga I. Aby dzieci miały wyobrażenie miary np. długości, najlepiéj pokazać im arszyn zrobiony z drzewa lub z czego innego, z podziałami na werszki, niech się takowemu arszynowi dobrze przypatrzą, niech różne pod oczy im podpadające przedmioty same rozmierzają, niech zgadują na oko odległości pewnych wskazanych im przedmiotów. Podobnież postąpić potrzeba, co do wszystkich innych miar i wag.

Przedstawiać im różne objętości, niech na oko zgadują, ile one mają w sobie kwart, garncy, i t. d. Taka wprawa będzie dla dzieci zabawką, a w przyszłém ich powołaniu, może stać się bardzo pożyteczną.

Uwaga II. Aby uczenie się na pamięć podziałów miar, wag i monet nie stało się dla dzieci przykrém i nudném, a może bezkorzystném, trzeba aby nauczyciele uczniom swoim zadawali podobnéj treści przykłady: co do monet: 1 kopiejka, 2 kop., 3 kop., 4 kop., 5 kop. i t. d., jaką są częścią jednego rubla, dwóch rubli, 3 rubli, i t. p., czyli inaczéj, ile osób można obdzielić rublem, dwoma rublami i t. d., dając każdéj po 1 kop., po 2 kop., po 3 kop. i t. d.

Co do miar długości, niech odpowiadają na pamięć: 1 cal, 2 cale, 3 cale, 4 cale, i t. d., jaką są częścią stopy, sążnia; 1 łut, 2 łuty, i t. d, jaką są częścią funta i t. p. Tym sposobem urozmaicając pytania, tyczące się wszystkich miar, wag i monet, ułatwi się dzieciom spamiętanie podziałów miar, wag i monet.

KILKA ZADAŃ

DLA POKAZANIA

JAK UCZNI WPRAWIAĆ W RACHUNKI PAMIĘCIOWE.

---

1. *Ile potrzeba zapłacić rubli srebrem za 98 funt. mięsa, po 7 kop. funt?*

Rozwiązanie. Gdybyśmy mieli kupić nie 98 funtów ale 100 fnt., gdybyśmy płacili nie po 7 kop. ale po 1 kop., to za 100 fnt. zapłacilibyśmy 100 kop. czyli 1 rubla. A że mamy płacić po 7 kop., to zapłacimy 7 razy więcéj, to jest 7 rub. sr. Ponieważ 98 funtów różnią się od 100 fnt. o 2 fnt, a 2 fnt. kosztują 14 kop., więc od 7 rsr. odtrąciwszy 14 kop., pozostałe 6 rsr. 86 kop będą wartością 98 fnt. mięsa.

2. *Jeżeli kopa jaj kosztuje 90 kop., po czemu mendel, a następnie jedno jajko?*

Rozwiązanie. Na mendel liczy się jaj sztuk 15, kopa jaj kosztuje 90 kop., półkopy czyli jaj 30 kosztować będą połowę 90ciu kop., czyli 45 kop., a zatém połowa 30 czyli mendel wart jest połowę 45ciu kop. to jest 22 i pół kop. Pół kopy jaj, czyli 30, kosztują 45 kop. Gdyby za pół kopy zapłacono tylko 30 kop., za jedno jajko zapłaconoby 1 kop., a że jeszcze za półkopy płaci się 15 kop. czyli 30 półkopiejek, albo deneżek, więc za każde jajko przybywa jeszcze deneżka czyli pół kopiejki; razem za jajko płacono po 1 i pół kopiejki.

3. *Jeżeli za arszyn sukna płaci się po 2 rsr. 94 kop., za 5 arszynów i 3 ćwierci (czyli 12 werszków) ile zapłacić wypadnie?*

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że za arszyn płaci się po 3 rsr., to jest 6 kop. więcéj, to za 5 arszynow zapłacimy 5 razy po 3 rsr. czyli 15 rsr.

Za pół arszyna, czyli 2 ćwierci połowę 3 rsr. czyli		1	„ kop.	50
Za jednę ćwierć arszyna, czyli połowę 2 ćwierci, zapłacimy połowę 1 rsr. 50 kop. czyli				75
	Razem rsr.	17	„	25

Ponieważ wartość arszyna w powyższém przypuszczeniu powiększyliśmy o 6 kop. na arszynie, a zatém na 5 arszynach policzyliśmy więcéj 5 razy po 6 kop., czyli o . . . . 30 kop.

Gdy na arszyn liczyliśmy więcéj o 6 kop., to na połowę arszyna

z przeniesienia . . . . 30 kop.
policzyliśmy więcéj o . . . . . 3 kop.
a na jednéj ćwierci o . . . . . $1\frac{1}{2}$ kop.

Razem policzyliśmy więcéj $34\frac{1}{2}$ kop.

Prawdziwa wartość $5\frac{3}{4}$ arszyna
sukna jest . . . . 16 rsr. $90\frac{1}{2}$ kop.

4. *Zamienić* **564** *dukaty na ruble srebrne, licząc każdy dukat po rsr.* **2** *kop.* **95**.

Rozwiązanie. Gdybyśmy dukat liczyli po 3 rsr., to jest o 5 kop. drożéj, więc za 564 dukaty otrzymalibyśmy: . . . . rsr. 1692
a że na każdym dukacie za wiele
liczyliśmy 5 kop., więc na 564 duk.
obliczyliśmy za wiele 2820 k. czyli rsr. 28 kop. 20.

Reszta jest odpowiedzią rsr. 1663 kop. 80.

5. *Za* **85** *arszynów tasiemki po* **95** *kop. ile zapłacimy rubli rsr.?*

Rozwiązanie. Płacąc arszyn po 1 rsr., zapłacilibyśmy za 85 arszynów 85 rsr., a że dajemy rzeczywiście za każdy arszyn o 5 kop. mniéj, więc wypada od 85 rsr. otrącić 85 razy po 5 kop. czyli 425 kop., albo 4 rsr. 25 kop., co odtrąciwszy pozostanie 80 rs. 75 kop., wartość 85 arszynów po 95 kop. każdy.

6. *Ile trzeba zapłacić rubli srebrem za przewiezienie* **64** *kloców, płacąc od każdego po rsr.* **1** *kop.* **20**?

Rozwiązanie. Za przewiezienie 64 kloców po 1 r. trzeba zapłacić 64 rsr, płacąc jeszcze po 20 kop., trzeba dać 64 dwugrywenniki, których idzie 5 na rubel, więc 64 razy 20 kop. znaczy to samo co piąta część 64 rubli, czyli 12 rsr. 80 kop.

Razem 76 rub. 80 kop. jest odpowiedzią.

7. *Za 68 arszynów tasiemki po 53 kop. arszyn, ile trzeba zapłacić rubli srebrem?*

Rozwiązanie. 53 kop. = 50 kop. + 3 kop.

Płacąc arszyn po 50 kop. czyli po półrublu, zapłacimy za 68 arszynów, 68 półrubli, czyli 34 ruble sr., płacąc jeszcze po 3 kop. za arszyn, zapłacimy 204 kop., a że 100 kopiejek idzie na rubla, a w liczbie 204 jest 2 sta i 4 jedności, więc dopłacimy 2 rub. 4 kop.; ogółem zapłacimy 36 rsr. 4 kop.

8. *Ile trzeba zapłacić za 27 kloców drzewa, płacąc kloc po 1 rsr. 52 kop.?*

Rozwiązanie. Płacąc kloc po 1 rsr. za 27 kloców zapłacimy . . . . 27 rs.
płacąc 1 kloc po 50 kop., zapłacimy
połowę pierwszéj summy . . . . 13 rs. 50 kop.
Płacąc 1 kloc po 2 kop. zapłacimy . . . 54 kop.
Razem 41 rs. 4 kop.

9. *Ile rubli srebrnych czynią 6184 kopiejki?*

Rozwiązanie. Sto kopiejek idzie na 1 rsr., w liczbie 6184 znajdują się 61 set i 84 jedności, a zatém liczba 6184 kop. = 61 rsr. 84 kop.

Uwaga. Chcąc jakąkolwiek daną liczbę kopiejek zamienić na ruble srebrne, dosyć jest dwie ostatnie cyfry od ręki prawéj odciąć kréską; liczba przed nią położona będzie liczbą rubli, a cyfry odcięte liczbą kopiejek.

10. *Ile czynią rubli srebrem 826 dwugrywenników?*

Rozwiązanie. Dwu-grywennik jest piątą częścią rubla. Aby znaleźć piątą część liczby danéj, wypada ją podwoić i ostatnią cyfrę od prawéj ręki odciąć; liczba po lewéj stronie kreski położona, będzie liczbą szukaną całkowitą, a odcięta cyfra liczbą części dziesiętnych, jakie wypadną z dzielenia. Podwoiwszy więc w myśli liczbę 826, otrzymamy 1652. Odciąwszy ostatnią cyfrę, będzie 165,2, czyli 165 rubli i $^2/_{10}$ rubla, a że dziesiąta część rubla jest 10 kop., więc będzie 165 rub. 20 kop.

11. *Ile uczyni arszynów 5 648 ćwierci arszyna?*

Rozwiązanie. Aby daną liczbę ćwierci czyli czwartych części arszyna zamienić na arszyny, trzeba wziąć na pamięć połowę liczby danéj i znalezionéj połowy znowu połowę. Połowa 5 648 czyni 2 824, połowa 2824 czyni 1412, a więc 5 648 ćwierci arszyna czynią 1 412 arszynów.

ZASTOSOWANIE CZTERECH DZIAŁAŃ

NA LICZBACH CAŁKOWITYCH

DO ROZWIĄZANIA NIEKTÓRYCH ZAGADNIEŃ.

Przykłady: 1. Ile jest linij w ***569*** *sażeniach?*

Rozwiązanie. Każdy sażeń ma stóp 7, przeto 569 sażeni mieć będą stóp 569 razy więcéj, czyli 7 pomnożone przez 569, gdzie 7 jest mnożną, a 569 mnożnikiem. Iloczyn tych liczb, będzie liczbą stóp, mającą tę samą wartość co 569 sażeni. Lecz tenże sam iloczyn mogę otrzymać, mnożąc 569 przez 7. (obacz str. 96).

Piszę więc 569 mnożnik
7 stóp mnożna
3 983 stopy; każda stopa ma 12 cali, a zatém 3 983 stopy mieć będą 3 983 razy, więcéj cali, niżeli ma ich jedna stopa. Wypada przeto 12 cali pomnożyć przez 3 983, a iloczyn będzie wypadkiem szukanym; a że 12 wzięte 3 983 razy, da taką samą liczbę, co 3 983 wzięte razy 12.

przeto piszę 3 983
12 cali
47 796 cali, to samo rozumowanie, gdy te cale zamienię na linije, których 10 idzie na 1 cal, będzie zatém 47 796 $\times$ 10 $=$ 477960 linij z 569 sażeni.

2. *Za* ***24*** *czetwerti żyta, zapłacono* ***192*** *rsr., za* ***84*** *czetwerti żyta, po téj saméj cenie ile wypadnie zapłacić?*

Rozwiązanie. Za 24 czetwerti żyta zapłacono 192 rsr., a zatém jedna czetwert będzie kosztowała 24 razy mniéj, czyli tyle, ile razy 24 mieści się w 192 rsr. Dzieląc więc 192 przez 24, otrzymam cenę jednéj czetwerti, to jest rsr. 8. Następnie powiadam: gdy jedna czetwert' kosztuje 8 rsr., 84 czetwerti kosztować będą 84 razy więcéj, czyli 8 rsr. wzięte 84 razy, albo pomnożone przez 84, czyli 672 rsr.

3. *Za* ***24*** *czetwerti żyta zapłacono* ***192*** *rub. sreb., za* ***1600*** *rsr. ile kupiemy czetwierti żyta, po téj saméj jak pierwsze cenie?*

Rozwiązanie. Aby dojść ceny jednéj czetwerti żyta, dosyć jest podług tego co poprzedziło, podzielić 192 rsr. przez 24, a iloraz 8 rsr. będzie ceną jednéj czetwerti; daléj rozumujemy tak: gdy za 8 rsr. dostajemy jednę czetwert', więc za 1600 rsr. dostaniemy tyle czetwerti, ile razy 8 rub. sreb. zawierają się w 1600, a że 1600 rsr. podzielone przez 8, daje na iloraz 200, więc z tego przekonywamy się, że 1600 rsr. składają się z 200 części, z których każda ma wartość 8 rsr., a że za każde 8 rsr. dostajemy jednę czetwert' żyta, za 200 więc takich kwot dostaniemy 200 czetwerti.

4. *Pewna żywność wystarczyła na dni* ***90*** *dla* ***15*** *ludzi, dla ludzi* ***45*** *na ile dni wystarczy?*

W tym przykładzie od razu można mieć odpowiedź; 3 razy więcéj ludzi w 3 razy krótszym czasie, tę samą żywność zjedzą, czyli w 30 dniach, ale ponieważ niezawsze tak łatwo zdarzają się takie wypadki, aby jedna liczba była wielokrotną względem drugiéj, przeto podamy tu ogólniejsze rozumowanie.

Piętnastu ludzi spożywa pewną żywność w przeciągu dni 90, a zatém, gdy będzie 90 razy więcéj ludzi, czyli 1 350, ci spożyją niezawodnie tę żywność w jednym dniu. Chcąc się teraz dowiedzieć, ile 45 ludzi potrzebować będą dni do spożycia téjże saméj żywności, którą zjadło 1 350 ludzi w jednym dniu, wypada 1 350 podzielić przez 45, co się znaczy rozebrać liczbę 1 350 ludzi na grupy, z których każda miałaby 45 osób takich grup będzie 30 i powiemy: jeżeli 30 grup ludzi, każda z 45 osób złożona spożywają daną żywność w jednym dniu, to dla jednéj z tych grup żywność ta wystarczy na czas 30 razy dłuższy, czyli na dni 30.

5. *Ośmnastu ludzi ukończyło pewną robotę w* **24** *dniach, aby tę samą pracę wykonać w* **36** *dniach, ile będzie potrzeba robotników?*

Aby robotę daną ściśle oznaczoną, która w 24-ch dniach przez 18 robotników była ukończoną, wykonał jeden robotnik, trzebaby użyć tyle razy więcéj dni, ile razy mniéj robotników chcemy użyć na wykonanie téj roboty. Czyli jak w obecnym przykładzie trzeba użyć 18 razy więcéj dni, co się znajdzie mnożąc liczbę 24 dni przez 18, co czyni 432 dni; rozebrawszy tę liczbę dni na grupy, z którychby każda złożona była z 36 dni, co się uskuteczni łatwo, dzieląc 432 przez 36, otrzymamy na iloraz 12, — z tego wypada, że w liczbie 432 znajduje się grup 12, z których każda ma po dni 36. Jeżeli więc jeden robotnik pracować musi przez dni 432, to gdyby tę samą pracę wypadało wykonać w 36 dniach, to jest: w czasie 12 razy krótszym, trzebaby użyć 12 razy więcéj robotników, czyli 12, co jest ilorazem z 432 dni przez 36.

6. *Ktoś potrzebuje na płaszcz sukna 9 arszynów, szerokiego na 2 arszyny, ile potrzeba będzie arszynów innego sukna, które byłoby szerokie na 3 arszyny?*

Rozwiązanie. Gdyby sukno było nie na 2 arszyny, ale na arszyn szerokie, potrzeba na płaszcz 2 razy więcéj arszynów, to jest: 9×2 czyli 18, a gdy sukno będzie miało nie jeden arszyn, ale 3, trzeba go będzie 3 razy mniéj, to jest 6.

7. *Pięćdziesięciu czterech robotników pracując dni 20, wykopali rów długi na 18 arszynów pewnéj oznaczonéj szerokości i głębokości; 72 robotników w ilu dniach wykopie rów długi na 12 arszynów téjże samej co pierwszy szerokości i głębokości?*

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że te 2 rowy są zupełnie sobie równe co do długości, szerokości i głębokości; inne warunki są te same, wyjąwszy że około pierwszego pracowało robotników 54, a około drugiego 72. Pierwsi potrzebowali do wykopania tego rowu dni 20, drudzy z równą gorliwością pracując, potrzebować będą mniéj czasu, bo ich jest więcéj. Aby tę liczbę dni znaleźć, postąpiemy sobie tak, jak w przykładzie (5).

Ponieważ 54 ludzi potrzebowali 20 dni na wykopanie danego rowu, przeto potrzeba 20 razy więcéj robotników, aby ten rów wykopać mogli w jednym dniu, to jest: 54 X 20, czyli 1 080 ludzi. Rozebrawszy tę liczbę ludzi na grupy złożone z 72 ludzi każda, czyli podzieliwszy 1 080 przez 72, iloraz 15 będzie liczbą grup ludzi, a w każdéj z nich po 72 ludzi. Każda z tych grup, których jest 15, pracować musi dzień jeden, aby robota zamierzona przyszła do skutku, a zatém gdyby jedna z nich, nie zaś wszystkie razem pracowały, tedy musiałaby 15 razy dłużéj pracować, czyli dni 15.

Mamy więc odpowiedź co do pierwszego warunku, że 72 ludzi rów takiéj wielkości, jakiéj jest pierwszy, ukończą w dniach 15.

Następnie zróbmy przypuszczenie, że 2 dane rowy różnią się tylko co do długości, to jest: że pierwszy jak jest w zadaniu ma długości arszynów 18, a drugi arszynów 12. Gdy rów był 18 arszynów długi, robotników 72 potrzebowało dni 15, a gdy jest tylko na 12 arszynów długi, potrzeba mniéj czasu; aby tę liczbę dni znaleźć, będziemy się starali najprzód obliczyć, ile dni potrzeba na zrobienie jednego arszyna przez 72 ludzi. Wiadomo nam, że w 15 dniach 72 ludzi wykopią rów 18 arszynów długości, a zatém na wykopanie jednego arszyna potrzebować będą 18-stéj części dni 15-stu; przypuściwszy, że dziennie pracują tylko godzin 12, więc w 15 dniach, godzin roboczych będzie $12 \times 15 = 180$ godzinom, co podzieliwszy przez 18, znajdziemy 10 godzin, których użyć muszą 72 robotników na wykopanie jednego arszyna rowu, a że oni mają wykopać rów na 15 arszynów długi, więc potrzeba będzie czasu 12 razy po 10 godzin, czyli 120 godz., a tych 12 godzin idzie na jeden dzień roboczy, z tego wypada, że 120 godzin znaczy to samo co 10 dni, i to jest odpowiedzią żądaną.

9. *Za 6 528 kwart mąki po 13 rsr. czetwerť, ile zapłacić rsr.?*

Rozwiązanie. Aby to zadanie rozwiązać, trzeba się najprżód dowiedziéć, ile 6 528 kwart czyni czetwerti; w tym celu zamieniamy te kwarty na garnce, dzieląc je przez 4. Iloraz 1 632 będzie liczbą garncy, (bo 1 garniec = 4 kwartom). Następnie 1632 garnce podzielimy przez ośm, a iloraz 204 będzie wyobrażał czetweryki, bo jeden czetweryk ma w sobie 8 garncy. Daléj 204 podzieliwszy przez 8 otrzymamy iloraz 25 i pół czetwierti, bo 8 czetweryków = 1 czetwerti. Moglibyśmy téż odrazu podzielić 6528 przez 256 kwart, wyobrażających jednę czetwierť, a otrzymalibyśmy na iloraz 25 i pół czetwierti.

Czetwert' kosztuje 13 rubli, czyli 10 rub. i 3 rub., a zatém: 25 czetwerti po 10 rub., daje . . 250 rsr.
25 czetwerti po 3 ruble daje . . . . . . 75 „
prócz tego, kiedy za czetwert' liczy się
13 rub., za pół czetwerti przypadać będzie. . . $6\frac{1}{2}$ rs.
Razem $331\frac{1}{2}$ rs.

Chcąc dojść ceny jednéj kwarty mąki, trzeba cenę jednéj czetwerti podzielić przez liczbę kwart w jednéj czetwierti, to jest przez 256, a że czetwert' kosztuje 13 rubli, czyli kop. 1 300, więc podzieliwszy 1 300 przez 256, otrzymamy na cenę kwarty 5 kop. i blisko 13-stą część kopiejki.

Ćwiczenia dla wprawy.

I. W roku 1840 w Królestwie Polskiém było ludności pod względem płci:

		mężczyzn	kobiét.
w mieście Warszawie		67 721	71 871
w dzisiajszéj gub. Warsz.		689 134	712 298
ditto	Radomskiéj	440 235	452 097
ditto	Lubelskiéj	468 538	482 531
ditto	Augustowskiéj	296 123	295 264
ditto	Płockiéj	253 098	259 099

W 1852 r. znajdowało się ludności obojéj płci:

w Warszawie		157 871
w gubernii Warszawskiéj		1 532 320
ditto	Radomskiéj	912 384

w gubernii	Lubelskiéj	1 027 481
ditto	Augustowskiéj	630 351
ditto	Płockiéj	552 170.

Pytania: 1) Ile w mieście Warszawie i w każdéj w szczególności gubernii znajdowało się w 1840 r. ludności mezkiéj i żeńskiéj razem? 2) Ile w całém królestwie było wówczas mężczyzn, ile kobiet? 3) Jaka była ogólna ludność całego królestwa, licząc razem mężczyzn i kobiety? 4) O ile w mieście Warszawie i w każdéj w szczególności gubernii powiększyła się ludność w ciągu lat 12, od 1840 do 1852? 5) Jaka była ludność królestwa w 1852 roku? 6) O ile powiększyła się ogólna ludność królestwa od 1840 do 1852 r.? 7) Przypuszczając, że w każdym roku przybytek ludności był jednakowy, obliczyć w liczbach całkowitych, ile rocznie przybywało mieszkańców w mieście Warszawie, w każdéj w szczególności gubernii i w całém królestwie? 8) Przypuszczając, że przybytek ludności przez następne lat 12 zupełnie takiż sam będzie, jaka będzie ludność miasta Warszawy, każdéj gubernii i całego królestwa w roku 1864, to jest za lat 12?

Uwaga. W tym i następnych przykładach bardzo często zdarza się sposobność do sprawdzeń, na które nauczyciel uwagę ucznia zwracać powinien. Tak np. tutaj odpowiedź na 4-te pytanie wskazuje o ile w szczególności powiększyła się ludność miasta Warszawy i każdéj gubernii w ciągu lat 12. Summa liczb jakie w téj odpowiedzi przypadają, wskazuje ogólne powiększenie ludności całego królestwa i powinna być zgodną z odpowiedzią na pytanie szóste; a dodana do odpowiedzi na trzecie pytanie, wskazującéj ogólną ludność w 1840 r. zgodzić się powinna z odpowiedzią na pytanie piąte. Takie ćwiczenia nader są pożyteczne, uczą oszczędzania czasu potrzebnego, na skrócenia, tam gdzie bez nich obejść się można, kształcą rozwagę i pojętność ucznia, dla tego téż nigdzie pomijać ich nie należy. Dla téjże saméj przyczyny korzystniejsze są zawsze dla ucznia przykłady, w których kilka jest pytań do rozwiązania, bo nastręczają sposobność do podobnych sprawdzeń, i wprawiają w obieranie dróg prędzéj prowadzących do obranego celu.

II. Pod względem obszerności ziemi:

	Obszerność w milach □	Ludność
Gubernija Warszaw. z miastem Warszawa ma . .	673	1 690 191
ditto Radomska ma . .	409	912 384
ditto Lubelska ma . .	563	1 027 481
ditto Płocka ma . . .	303	552 170
ditto Augustowska ma	342	630 351
Summa		

Pytanie, ile całe królestwo ma mil kwadratowych powierzchni; powtóre, obliczyć ile przypada ludzi w liczbach całkowitych na jednę milę kwadratową w każdéj gubernii najprzód, a potém, ile średnio liczyć można ludności na milę kwadratową w całém królestwie?

III. W królestwie polskiém w 1852 roku było:

Chrześcijan

Religii Rzymsko-Katolickiéj	3 726 882	ludzi.
— Greko-Rossyjskiéj . .	4 521	
— Unickiéj	241 482	
Filipinów	3 921	
Ewangelików wyznania Augsb.	261 678	
— wyznania reform.	7 106	
Menonistów	1 546	
Braci Morawczyków . . .	952	
Summa		

Niechrześcijan

Żydów	564 031
Mahometan i innych sekt	458
Summa	

IV. Chrześcijan zamieszkałych w r. 1840	w miastach	po wsiach	razem
	606 118	3 406 962	
Niechrześcijan . . .	409 594	5 335	

Pytanie, ile chrześcijan, a ile niechrześcijan znajdowało się razem w 1840 r., w królestwie polskiém, tak w miastach jak i po wsiach, powtóre, ile jest ludności zamieszkałéj w miastach, a ile po wsiach razem, bez względu na wyznanie?

V. Urodziło się w 1840 roku:

Chrześcijan	199 609
Żydów i innych niechrześcijan . .	16 515
Summa	

Umarło zaś Chrześcijan	118 829
Niechrześcijan	11 638
Summa	

Pytanie, ile urodziło się w 1840 roku w całém królestwie razem dzieci chrześcijańskich i niechrześcijańskich; powtóre, ile umarło razem chrześcijan i niechrześcijan; potrzecie, liczba narodzonych o ile przewyższa liczbę zmarłych w tymże samym roku?

VI. Ludność królestwa Polskiego wynosiła w 1840 roku 4 488 009 mieszkańców, w roku zaś 1852 — 4812577. Pytanie, ile przybyło ludności od 1840 do 1852 roku w całém królestwie? Ile rocznie przybywa w liczbach całkowitych, i ile lat potrzeba, aby ludność królestwa doszła do 6 000 000, jeżeli przypuścimy, że corocznie takaż sama liczba mieszkańców przybywać będzie?

VII. Pewien handlarz zbożowy zakupił 1440 czetwerti pszenicy i płacił za czetwert po 11 rs. W ciągu roku sprzedał czwartą część po 15 rsr. czetwert, piatą część po 18 rsr., ósmą część po 10 rsr., dziewiątą część po 16 rsr., resztę po 14 rsr. Pytanie, ile na téj sprzedaży zyskał?

VIII. 569 sażeni, 6 884 sażeni, 482 arszyny, 284 ćwierci arszyna, 684 stóp. Pytanie, ile uczyni każda w szczególności z danych liczb najprzód cali, a potém linii, i ile razem z danych w zadaniu liczb sażeni, arszynów, ćwierci arszyna i stóp, otrzymamy najprzód cali, a potém linii?

IX. 251 856 cali, 54 432 werszków, 4 176 stóp, 3 456 linii. Pytanie, ile uczyni każda w szczególności z danych liczb najprzód ćwierci arszyna, potém stóp, następnie arszynów, a w końcu sażeni? I ile razem z danych w zadaniu liczb cali, werszków, stóp i linii otrzymamy najprzód ćwierci arszyna, potém stóp, następnie arszynów, a w końcu sażeni?

X. 18000 złp.; 54 000 duk. po 2 rsr. 70 kop. każdy, 984 000 rsr. Pytanie, ile uczyni każda z liczb danych pojedynczo, najprzód połuszek, potém deneżek, kopiejek, dziesiątaków, półzłotków, dwu-złotówek i pięcio-złotówek, ile razem z danych liczb złp. i rubli otrzymamy najprzód groszy, po 2re trojaków, po 3ie piątaków, po 4te dziesiątaków, po 5te półzłotków, po 6te dwu-złotówek, po 7me nareszcie 5cio-złotówek?

XI. 196 800 złp., 8 400 deneżek, 61 500 kopiejek. Pytanie, ile uczyni każda z wymienionych liczb pojedynczo, najprzód złotych polskich, powtóre rubli; ile razem z danych liczb deneżek i kopiejek otrzymamy najprzód złp., a potém rubli srebrem?

XII. Ile fur parokonnych potrzeba, aby zwieźć od razu z pola 4 565 mendli zboża, wiedząc że na jednę furę zabrać można dwie kopy i mendel? (kopa = 60 snopkom, a mendel = 15 snopkom).

XIII. Ile wypada zapłacić za wymłócenie 6 895 mendli żyta, wiedząc że jeden człowiek przez dzień wymłaca jednę kopę i mendel, i że za każdy dzień pracy dostaje 17 kopiejek i ile otrzymamy z tych mendli czetwerti żyta, gdy jedna kopa wydaje średnio po wymłóceniu 1 czetwert i 15 garncy?

XIV. Pewien ekonom zapłacił 48 rsr. 40 kop. żniwiarzom złożonym z mężczyzn i kobiét. Gdy wiadomo nam tylko że 89 mężczyznom w liczbie ogólnéj żniwiarzy znajdującym się, zapłacił rsr. 31 kop 15, a resztę wypłacił kobietom, dając każdéj po 25 kop. Pytanie, ile było kobiet użytych do żniwa, i po czemu mężczyźnie płacono?

XV. Pewien gospodarz wiejski zakupił 254 owce po 2 ruble sr., 6 wołów po 15 dukatów, 12 krów po 24 talar., 2 wozy okute po 31 rsr. każdy. Za resztę pieniędzy, to jest za 848 rsr. wzbudował stajnię i oborę. Pytanie, ile wydał pieniędzy na wszystko?

XVI. Kto oszczędza dziennie 18 kop., ile oszczędzi rsr. w tygodniu, ile w całym roku, to jest w 52 tygodniach, a ile będzie miał oszczędności w 12-stu latach?

XVII. Kto zmarnuje tylko pół kop. na dzień, ile zmarnuje w ciągu całego życia swego, przypuściwszy że żył lat 65.

XVIII. Ile trzeba zapłacić rsr. za 364 czetwerti i 3 garnce pszenicy, wiedząc że garniec kosztuje 15 kopiejek.

XIX. Za 628 arsz. pewnéj materyi, ile trzeba zapłacić dukatów 18-sto złot., wiedząc, że ćwierć arszyna téjże saméj materyi kosztuje 48 kop.?

XX. Za 124 funty świéc ile wypada zapłacić rub. sr., wiedząc że funt kosztuje 18 kop.?

XXI. Za 22 572 fnt. wełny, ile trzeba zapłacić rsr. skoro jeden pud jéj kosztuje 8 rub. srebrem?

XXII. Znaleźć liczbę, któréj część szósta powiększona liczbą 1 234, uczyni razem 8018?

XXIII. Pewien gospodarz wiejski sprzedał:

1-ód 15 czetw. żyta za 66 rsr.
2-re 18 — pszenicy za 117 rsr.
3-cie 24 — owsa za 60 rsr.,

wiedząc, że na czetw. żyta zarobił 30 kop., na czetwerti pszenicy zarobił 1 rsr., a na czetw. owsa 50 kop. Pytanie, ile zarobił w ogólności na téj sprzedaży, powtóre, ile jego samego czetwierť żyta, pszenicy, owsa kosztowała, ile wydał na otrzymanie wszystkiego zboża razem, i jaką summę z sprzedaży dostał?

XXIV. Ktoś zapłacił jadąc dyliżansem z Warszawy do Lublina rsr. 9 kop. 24, wiedząc że za jednę werstę płaci się 6 kop.; obliczyć ile werst z Warszawy do Lublina?

XXV. Znaleźć liczbę taką, któréj część trzecia mniéj 12 równa się 11?

XXVI. Za 24 kopy jaj zapłacono 36 rsr. po czemu płacono mendel?

XXVII. 24567 złp. 18 gr.; 134 567 złp. 24 gr.; 6 348 złp. 22 gr. Ile każda z tych summ czyni rubli

15

srebrem, a ile rubli assygnacyjnych. Ile wszystkie summy dane czynią razem rubli srebrem, a ile razem rubli assygnacyjnych?

XXVIII. 6849 rubli sreb. 45 kop., 7342 rubli sr. 15 kop., 958 rub. sr. 14 kop. Ile każda z tych trzech summ danych czyni najprzód, rubli assygnacyjnych, ile czyni złp., a potém dojść ile razem z tych trzech danych summ otrzymamy rubli srebrem, powtóre rubli assygnacyjnych, potrzecie złotych polskich?

ROZDZIAŁ V.

O LICZBACH WIELORAKICH CZYLI RÓŻNOGATUNKOWYCH W OGÓLNOŚCI.

Liczba złożona z kilku liczb, których jednostki są częściami jednostki głównéj zowie się wieloraką, np. 5 sażeni, 4 stopy, 8 cali. Cała ta liczba zowie się wieloraką, składa się bowiem z trzech oddzielnych liczb, to jest: z 5 sażeni, 4 stóp, 8 cali; pierwszéj z nich jednostką jest sażeń, drugiéj stopa, a trzeciéj cal; jednostka cal jest 12-stą częścią stopy, to jest jednostki drugiéj liczby, a jednostka stopa jest 7-mą częścią sażenia, to jest: jednostki głównéj w danéj liczbie wielorakiéj. Zbiór zaś liczb: 5 duk., 3 arszyny, 4 czetw. razem uważanych, nie jest liczbą wieloraką, dla tego, że jednostki tych liczb: 1 dukat, 1 arszyn, 1 czetw., nie mają między sobą żadnego związzku, tak dalece, że nie można jednej z tych jednostek zamieniać na drugą.

Liczby wielorakie szczególnie mają tę własność, iż je można zredukować na liczbę pojedynczą, a liczbę mianowaną pojedynczą z mniejszych jednostek złożoną zamienić na wieloraką, jak to już na niektórych przykładach pokazaliśmy; np. 3 sażnie, 2 stopy, 5 cali,—całą tę liczbę wieloraką można zamienić na pojedynczą, za pomocą mnożenia i dodawania, bo w saméj rzeczy, 3 sążnie równają się 21 stopie a 2 stopy z danéj liczby, razem 23 stopy; 23 stopy pomnożywszy przez 12, otrzymamy 276 cali, do czego przydawszy 5 cali z danéj liczby, otrzymamy razem 281 cali = 3 sążniom, 2 stopom i 5 calom.

Z liczby pojedynczéj 787 cali łatwo przejść do liczby wielorakiéj, najprzód dzieląc 787 cali przez 12, otrzymamy na iloraz 65 stóp, a na resztę 7 cali; podzieliwszy następnie 65 stóp przez 7, otrzymamy na iloraz 9 sażeni, a reszta 2 będzie stopami; razem więc 787 cali=9 sażeniom, 2 stopom, 7 calom,—liczba wieloraka która z pojedynczéj powstała.

Uwaga. Nauczyciel nim przystąpi z dziećmi do innych działań na liczbach wielorakich, powinien zadawać im wiele, i to rozmaitych przykładów, zamiany liczb pojedynczych, mianowanych na wielorakie, i przeciwnie wielorakich na pojedyncze. Tym sposobem dzieci ustalą sobie w pamięci podziały miar, wag i monet, i coraz lepiéj wprawią się w szybkie odbywanie wszelkich rachunków.

Dodawanie liczb wielorakich.

Jak w liczbach całkowitych pojedynczych można było tylko liczby jednakowego gatunku do siebie dodawać, tak równie w liczbach wielorakich trzeba miéć na uwadze, że dodawane być mogą same tylko liczby wielorakie, których jednostki główne, to jest najwyższe, czy wyrażone w liczbach danych, czyli téż domyślne, są jednakowe.

Zadanie I. Przypuśćmy, że mamy zebrać razem następujące liczby wielorakie:

5	sażni	— 2	stopy	— 5	cali	
4	„	— 4	„	— 7	„	
6	„	— 2	„	— 8	„	
12	„	— 4	„	— 10	„	
29	sażni	— »	„	— 6	cali,	summa.

Objaśnienie działania. Zaczynam od zebrania liczb których jednostki są najmniejsze, jak w obecnym razie, zbieram czyli dodaję w sposób już znany liczby cali, tych jest ogółem 30; w 30 calach jest 2 stopy i cali 6.—Cali 6 wypisuję pod calami, a 2 stopy dodaję do stóp w danych liczbach wielorakich; stóp jest 12, a z cali zrobiło się 2 stopy, razem 14; stóp 14 znaczy tożsamo co 2 sażnie i nic nie pozostaje; oznaczam tę okoliczność pod liczbą stóp przez znak „ a 2 sażnie przydaję do 12 sażni + 6 + 4 + 5, będę miał razem 29 sażni. Summa więc szukana jest 29 sażni i 6 cali.

Zadanie II.

5	duk.	2	tal.	18	sr. gr.
6	„	—	„	14	„ „
7	„	1	„	20	„ „
8	„	—	„	4	„ „
27	duk.	1	tal.	26	sr. gr.

Summę tych czterech liczb wielorakich danych obliczyliśmy w sposób następujący: najprzód zebraliśmy razem liczby, których jednostki są najmniejsze to jest: liczby sr. gr., tych było 56, czyli 1 tal. 26 sr. gr.; 26 sr. gr. podpisaliśmy pod sr. groszami, a talar 1 dodaliśmy do 2 tal. + 1, co uczyni razem 4 talary czyli 1 duk. i 1 tal.; 1 talar napisaliśmy pod talarami a 1 dukat dodaliśmy do liczby dukatów, których razem jest 27.

Z tych dwóch poprzedzających zadań, możemy już wyprowadzić ogólne prawidło na dodawanie liczb wielorakich.

Liczby pojedyncze w skład liczb wielorakich wchodzące, podpisują się pod sobą tak, aby liczby których jednostki są tego samego gatunku, były jedna pod drugą; potém podkreślają się te szeregi liczb wielorakich linijką, i zaczyna się działanie, od zebrania liczb, których jednostki są najniższe; otrzymana stąd *summa, zamienia się na liczbę jednostek, bezpośrednio wyższych, i ta się do liczb tychże samych jednostek w drugiéj kolumnie dodaje; summa ich znowu zamienia się na liczbę złożoną z jednostek bezpośrednio wyższych w danych liczbach wielorakich, i ta się dodaje do liczb w kolumnie trzeciéj znajdujących się, a jeżeli będzie jaka reszta z każdéj z podobnych zamian, te się pod właściwemi jednostkami podpisują i t. d.*

Odejmowanie liczb wielorakich.

Odejmowanie równie jak dodawanie odbywać się tylko może na liczbach wielorakich, których jednostki główne są te same.

Zadanie I. Znaleźć różnicę dwóch liczb wielorakich 24 czetwierti — 25 garncy — 2 kwarty i 18 czetwierti — 28 garncy — 1 kwarta.

Rozwiązanie:

24 czetwierti	—25 garncy	—2 kwarty	liczba większa
18 ,,	—28 ,,	—1 ,,	liczba mniejsza
5 ,,	—61 ,,	—1 ,,	różnica szukana
24 ,,	—25 ,,	—2 ,,	sprawdzenie.

Objaśnienie działania. Z dwóch liczb wielorakich jednakowego gatunku, ta jest większa, która ma liczbę jednostek najwyższych największą; jak w obecnym przykładzie 24 czetw.: —25 garncy—2 kwarty jest liczbą większą od 18 czetw.—28 garncy—1 kwarty.

To założywszy, widziemy, że chcąc odjąć od siebie dwie liczby dane, trzeba pod liczbą większą podpisać liczbę mniejszą, tak jednak, aby ich jedności odpowiadały sobie co do porządku; następnie odejmuję 1 kwartę od 2 kwart, pozostałą 1 kwartę podpisuję pod kwartami; daléj 28 garncy od 25 garncy odjąć nie można, w tym celu z 24 czetw. biorę 1 czetwiert, czyli 64 garnce, dodaję je do 25 garncy, będę miał razem 89; od 89 garnc. odjąwszy 28 garncy, pozostałe 61 garn. podpisuję w szeregu pierwszym pod garncami, w końcu odejmuję 18 czetw. od 24 — 1 czyli od 23 czetw., pozostałe 5 czetwierti podpisuję w kolumnie czetw.; i w ten sposób dochodzę, że liczba pierwsza od drugiéj jest o 5 czetw. — 61 garncy — 1 kwartę większa od drugiéj, czyli że dwie liczby wielorakie dane o tę liczbę wieloraką znalezioną od siebie się różnią.

Sprawdzenie. Do liczby mniejszéj danéj przydawszy różnicę, otrzymamy liczbę większą, jak to właśnie wykonaliśmy na powyższym przykładzie.

Zadanie II. Jeżeli kto urodził się dnia 15 stycznia 1794 roku, o godzinie 4 minut 15 po południu, a umarł dnia 20 lutego 1841 roku, o godzinie 8 minut 20 z rana. Pytanie, ile żył lat, miesięcy, dni, godzin i minut?

Aby na to pytanie odpowiedziéć, wypada najprzód obliczyć, ile upłynęło lat, miesięcy, dni, godzin i minut od narodzenia Chrystusa, tak do śmierci tego człowieka, jak do jego urodzenia, odciągnąć drugą z tych liczb od pierwszéj, a reszta będzie przeciągiem czasu życia tego człowieka.

W tym celu uważam najprzód, że człowiek ten umarł w lutym 1841 r., a zatém od narodzenia Chrystusa do jego śmierci upłynęło lat całkowitych 1840, umarł w lutym, więc na rok 1841 było tylko 1 miesiąc, umarł 20 lutego, na drugi miesiąc przeto upłynęło dni całkowitych 19, umarł o godzinie 8 minut 20 z rana, upłynęło zatém do jego śmierci jeszcze 8 godzin i minut 19. W taki sam sposób dojdziemy, że od narodzenia Chrystusa do narodzenia tego człowieka upłynęło lat 1793, dni 14, godzin 16, minut 14. To mając, wypisujemy znalezione liczby i odejmujemy od siebie sposobem już podanym na pierwszym przykładzie.

	lata	mies.	dnie	godz.	minut.
	1840 —	1 —	19 —	8 —	19
	1793 —	,, —	14 —	16 —	14
żył więc	47 lat	1 mieś.	4 dni	16 god.	5 minut.

Dzień w obecnym przykładzie liczyliśmy na 24 godziny, a początek jego braliśmy od północy; miesiąc zaś w takich obliczaniach przyjmuje się zawsze za dni 30.

Mnożenie liczb wielorakich.

W mnożeniu liczb wielorakich zdarzyć się mogą trzy przypadki:

1) Gdy mnożna jest liczbą wieloraką, a mnożnik liczbą pojedynczą.

2) Gdy mnożna jest liczbą pojedynczą, a mnożnik wieloraką.

3) Gdy mnożnik i mnożna są liczbami wielorakiemi.

Aby podać sposoby postępowania we wszystkich powyższych przypadkach, rozwiążemy kolejno stosowne zadania.

PRZYPADEK 1.

Mnożna liczbą wieloraką, a mnożnik pojedynczą.

Zadanie 1. Jeżeli za jeden dukat dostajemy 6 arszynów, 3 ćwierci arszyna, 3 werszki płótna, za 548 dukatów ile dostaniemy arszynów, ćwierci i werszków tegoż samego płótna?

Rozwiązanie. Ponieważ za jeden dukat otrzymujemy arszynów 6, ćwierci 3 i werszków 3, więc za 548 dukatów będziemy mieli 548 razy więcéj, moglibyśmy więc to zadanie rozwiązać albo za pomocą dodawania, albo za pomocą mnożenia. W pierwszym razie trzebaby liczby 6 arszynów, 3 ćwierci, 3 werszki podpisać pod sobą 548 razy, następnie dodać, a summa stąd otrzymana byłaby odpowiedzią. W drugim razie pomnożylibyśmy każdą w szczególności z liczb składających mnożną przez 548 i zamieniwszy werszki na ćwierci i arszyny, dodalibyśmy je razem i ta summa byłaby odpowiedzią żądaną.

I tak:

6 arsz. × 548 = 3 288 arsz.

3 ćw. × 548 = 1644 = 411 arsz.

3 wersz. × 548 = 1644 wersz. = 102 arsz. 3 ćw.— wersz.

Zebrawszy razem, będzie:

3 288 arsz.
411
102 arsz., 3 ćw. — wersz.

Ogółem 3801 arsz. 3 ćw. — wersz. Odpowiedź.

Można jeszcze wszystkie tym podobne zadania rozwięzywać inaczéj. Zamienię liczbę mnożną na jednogatunkową, jak w obecnym razie na liczbę werszków, których z 6 arsz. — 3 ćw. — 3 wersz., będzie razem 111., a ponieważ za jeden dukat dostaję 111 wersz., za 548 dukatów dostanę werszków 548 razy więcéj; czyli 111 × 548 = 60 828 werszkom, czyli 3801 arszyn., 3 ćw.

Dwa powyższe sposoby, lubo prowadzą do rozwiązania zadania, nie są jednak w praktyce używane dla tego, że są długie i pociągają za sobą marnotrawstwo czasu; najużywańszy i zarazem najlepszy sposób postępowania jest rozbiorowy; aby go dać poznać, najprzód wskażemy samo działanie, a potém takowe wyjaśnimy.

Wzór działania.

Mnożna		6	arsz —	3 ćw. —	3 wersz.
Mnożnik		548	,, —	,, ,, —	,,
		3288	,, —	,, —	,,
3 ćwierci	2 ćw.	274	,, —	,, —	,,
	1 ćw.	137	,, —	,, —	,,
3 werszki	2 wersz.	68	,, —	2 ćw. —	,,
	1 wersz.	34	,, —	1 ćw. —	,,
iloczyn szukany		3801	arsz. —	3 ćw. —	wersz.

Objaśnienie. Za dukata dostajemy 6 arszynów, za 548 duk. dostaniemy 3288 arsz.,—piérwszy cząstkowy iloczyn; za jeden dukat mamy nie tylko 6 arsz. ale jeszcze 3 ćwierci, które rozbieramy na 2 ćwierci + 1 ćwierć, i mówimy: 2 ćwierci są połową arszyna, skoro zatém za dukata dostajemy pół arszyna, to za 548 dukatów, dostaniemy 548 połówek arszyna, czyli 274 arszyny, co jest drugim cząstkowym iloczynem. Za dukata dostaniemy jeszcze jednę ćwierć, czyli połowę dwóch ćwierci; a że licząc po 2 ćwierci za dukat, dostaliśmy za 548 duk. arsz. 274, więc licząc 1 ćwierć czyli połowę 2ch ćwierci za jednego duk., dostaniemy połowę 274 arszyn, czyli 137 arszynów i to jest trzeci cząstkowy iloczyn. Dotąd obliczyliśmy ile dostaniemy za 548 duk. licząc za dukata 6 arszynów i 3 ćwierci, a że my prócz tego dostajemy za dukata 3 werszki przeto rozbieramy te 3 werszki na 2 werszki + 1 werszek; 2 werszki są połową ćwierci, gdyśmy liczyli jednę ćwierć za jednego dukata otrzymaliśmy 137 arszynów licząc teraz po 2 werszki czyli po pół ćwierci, otrzymamy połowę 137 arszynów czyli 68 arszynów 2 ćwierci, co jest czwartym cząstkowym iloczynem; jeden werszek jest połową 2ch werszków, więc bierzemy połowę 68 arszynów i 2 ćwierci czyli liczbę 34 arszyny 1 ćwierć i ta będzie piątym i ostatnim cząstkowym iloczynem; te wszystkie cząstkowe iloczyny do siebie dodajemy i będziemy mieli 3801 arsz. i 3 ćwierci, iloczyn szukany z liczby 6 arszynów—3 ćwierci—3 werszki przez 548, czyli żądaną odpowiedź.

Uwaga. Branie jakiéjkolwiek danéj liczby połowy, części trzeciéj, czwartéj i t. d. zwykle uskutecznia się z pamięci, w co powinien nauczyciel uczni swoich należycie wprawić.

Zadanie 11. Pewna liczba ludzi spożyła w jednym dniu mąki czetwierti 24—czetwieryków 3—garncy 7; taż sama liczba ludzi (w takim samym stosunku spożywając dziennie) ile spożyje za dni 348?

Wzór działania.

24 czetwierti—3 czetweryki—7gar.
348

192
96
72

8352 czetwierti

	z przeniesienia	8352 czetwierti.					
po 3 czetweryki	po 2 czetw.	87					
	po 1 „	43	—	4 czetweryki			
po 7 garncy	po 4 garncy	21	—	6	—		
	po 2 „	10	—	7	—		
	po 1 „	5	—	3	—	4 gar.	
		8520	—	4	—	4 gar.	(odp.)

W tym przykładzie równie jak w poprzedzającym, rozpoczęliśmy działanie od pomnożenia liczby mającéj największą jednostkę to jest 24 czetwierti przez 348 i otrzymaliśmy 8352 czetwierti na piérwszy cząstkowy iloczyn; następnie 3 czetweryki rozebraliśmy na 2 czetweryki i 1 czetweryk, w skutku czego wzięliśmy czwartą część 348 czetwierti czyli 87 czetwierti na drugi cząstkowy iloczyn, ponieważ 2 czetweryki są czwartą częścią czetwierti; jeden czetwieryk jest połową dwóch, a że licząc po 2 czetweryki wypotrzebowano 87 czetwierti, więc zużywając po jednym czetwieryku spożyją połowę 87 czetwierti czyli 43 czetwierti 4 czetweryki, co będzie trzecim cząstkowym iloczynem; garncy 7=4+2+1, 4 garnce dziennie zużyją w dniach 348 połowę 43 korcy 4 czetwieryków czyli 21 czetwierti 6 czetwieryków—czwarty cząstkowy iloczyn; licząc po 2 garnce dziennie spotrzebują połowę 21 czetwierti 6 czetweryków czyli 10 czetwierti 7 czetweryków, piąty cząstkowy iloczyn. Po 1 garncu dziennie spotrzebują w 348 dniach połowę 10 czetwierti 7 czetwieryków, czyli 5 czetwierti 3 czetwieryki 4 garnce, szósty i ostatni cząstkowy iloczyn. Wszystkie te cząstkowe iloczyny dodawszy razem otrzymamy na wypadek iloczyn z 24 czetwierti, 3 czetwieryków, 7 garncy przez 348 czyli 8520 czetwierti, 4 czetwieryki 4 garnce,—odpowiedź żądaną.

Dwa poprzedzające zadania rozwiązane są dla dania dokładnego wyobrażenia, jak postępować należy w mnożeniu liczb wielorakich, na przypadek piérwszy.

PRZYPADEK II.

Mnożna jest liczbą pojedynczą, a mnożnik wieloraką.

Zadanie I. Ile potrzeba zapłacić za 26 arszynów—3 ćwierci arszyna i 3 werszki pewnéj roboty, któréj arszyn kosztuje 28 kop.

Zadanie to można w dwojaki sposób rozwiązać.

Piérwszy sposób. Zamieniam 26 arszynów, 3 ćwierci i 3 werszki na liczbę jednogatunkową, czyli pojedynczą i otrzamam 431 werszków; następnie powiadam: gdyby werszek téj roboty kosztował 28 kop. to 431 werszków, kosztowałoby 431 razy więcéj czyli 12068 kop.; lecz że płacimy nie za 1 werszek 28 kop. ale za 1 arszyn czyli za 16 werszków, a zatém liczyliśmy 16 razy drożéj, czyli iloczyn 12068 kop. jest 16 razy większy od prawdziwego; trzeba go przeto zmniejszyć 16 razy, czyli przez 16 podzielić, a otrzymamy na iloraz 754 i ćwierć kop. czyli 7 rsr. 54 $\frac{1}{4}$ kop. co właśnie będzie odpowiedzią szukaną,

Drugi sposób powszechnie używany:

Wzór działania.

	Mnożna	28 kop.
	Mnożnik	26 arsz.—3 ćw.—3 werszk i
		168
		56
		728 kop.
za 3 ćw.	za 2 ćw.	14
	za 1 ćw.	7
za 3 wer.	za 2 wersz.	3 k., 1 deneżka
	za 1 wersz.	1 k., 1 deneżka, 1 połuszka
		754 k.—den. 1 połuszka czyli 7 rsr. 54 $\frac{1}{4}$ kop.—odpowiedź szukana.

Objaśnienie. Arszyn po 28 kop.; 26 arszynów kosztować będą 26 razy więcéj czyli 728 kop.—pierwszy cząstkowy iloczyn; 3 ćwierci=2 ćwierciom + 1 ćwierci; 2 ćwierci połowa arszyna, a zatém zapłacę za nią połowę 28 kop. czyli 14 kop.—drugi cząstkowy iloczyn; za jednę ćwierć jako połowę 2 ćwierci zapłacę połowę 14 kop. czyli 7 kop.—trzeci cząstkowy iloczyn; 3 werszki = 2 werszkom + 1 werszek. Za 2 werszki jako połowę ćwierci zapłacę połowę 7 kop. czyli 3 kop. 1 deneżkę — czwarty cząstkowy loczyn. Za 1 werszek, jako połowę 2 werszków zapłacę połowę 3 kop. i 1 deneżki czyli 1 kop. 1 den. i 1 połuszkę—piąty cząstkowy iloczyn.

Te wszystkie cząstkowe iloczyny do siebie dodawszy, otrzymam na wypadek iloczyn z liczby 28 kop.

pomnożonéj przez 26 arszynów, 3 ćwierci, 3 werszki t. j. 7 rsr. 54 $\frac{1}{4}$ kop. — odpowiedź żądaną.

Zadanie II. Jeżeli za dukat mamy wykonanéj pewnéj roboty 19 sażeni ile téjże roboty wykonanem będzie za duk. 54 tal. 2 sr. gr. 19.

Zadanie to rozwiążemy za pomocą działania mnożenia, na co nas naprowadza sama natura rzeczy, bo gdy za jeden dukat otrzymujemy roboty 19 sażeni, to za 54 duk. 2 tal. 19 gr., otrzymamy tyle razy więcéj, ile razy ostatnia liczba wieloraka, jest większą od jednego dukata.

Wzór działania.

	Mnożna	19 sażeni
	Mnożnik	54 duk. 2 tal. 19 sr. gr.
		76
		95
		1026 sażeni
za 1 tal.		6 saż. 2 stopy 4 cale Liczba tylko pomocnicza.
za 2 tal.		12 saż. 4 stopy 8 cali
za 19 sr. gr.	za 15 sr. gr.	3 — 1 — 2 —
	za 3 sr. gr.	,, — 4 — 5 — 2 linije.
	za 1 sr. gr.	,, — 1 — 5 — 7 $\frac{1}{3}$ linij.
		1042 saż. 4 stopy 8 cali 9 $\frac{1}{3}$ linij,
		jest to odpowiedzią szukaną.

Objaśnienie. Aby się dowiedzieć ile otrzymamy sażeni roboty za 54 duk., trzeba pomnożyć 19 sażeni przez 54, a iloczyn 1026 sażeni, będzie pierwszym cząstkowym iloczynem. Za 1 tal. jako część trzecią dukata otrzymamy trzecią część 19 sażeni to jest 6 sażeni, 2 stopy, 4 cale; ta liczba nie będzie się z innemi dodawała, i wynalezioną tu została tylko w pomoc do obliczenia ile sażeni dostaniemy za 2 talary, a następnie za 19 sr. gr. i dla tego umieściliśmy ją tutaj między dwiema linijkami. Kiedy za 1 talar otrzymujemy roboty 6 saż. 2 stopy, 4 cale to za 2 talary otrzymamy 12 saż. 4 stopy, 8 cali,—drugi cząstkowy iloczyn; sr. gr. 19 = 15 + 3 + 1 sr. gr., Kiedy więc za 1 talar otrzymujemy 6 saż. 2 stopy 4 cale, to za pół talara czyli 15 sr. gr. otrzymamy 3 saż. 1 stopę 2 cale, — trzeci cząstkowy iloczyn; teraz 3 sr. gr. są piątą częścią 15 sr. gr., kiedy więc za 15 sr. gr. otrzymujemy 3 saż. 1 stopę 2 cale, to za piątą część 15 sr. gr. otrzymamy piątą część 3 saż. 1 stopy 2 cali t. j. 4 stopy, 5 cali, 2 linije—czwarty cząstkowy iloczyn. Trzecią częścią 3 sr. gr. jest 1 sr. gr. za 1 więc sr. gr. otrzymamy trzecią część tego co otrzymujemy za 3 sr. gr. czyli trzecią część 4 stóp, 5 cali, 2 linij; t. j. 1 stopę, 5 cali, 7 ⅓ linij:—piąty i ostatni cząstkowy iloczyn.

Te wszystkie iloczyny zebrawszy razem otrzymamy na summę liczbę 1042 sażenie, 4 stopy, 8 cali, 9 ⅓ linij: — odpowiedź żądaną.

Toż samo zadanie można jeszcze rozwiązać inaczéj: 54 duk. 2 tal., 19 sr. gr. zamieniam na srebrne grosze, tych będzie razem 4939 sr. gr. Gdybyśmy za

1 sr. gr. otrzymywali 19 sażeni, to za 4935 sr. gr. dostalibyśmy 93841 sażeni; ale że my nie za sr. gr, lecz za dukata t. j. za 90 sr. gr. otrzymujemy 19 sażeni, czyli co na jedno wychodzi, liczymy 90 razy drożéj; przeto 90 razy mniéj sażeni; otrzymamy t. j. $\frac{93841}{90}$ sażeni co się równa 1042 sażeniom, 4 stopom, 8 calom i $9\frac{1}{3}$ linijom.

PRZYPADEK III.

Mnożna i mnożnik są liczbami wielorakiemi.

Zadanie 1. Za arszyn sukna płacimy 3 rub. 80 kop. i 3 ćwierci kopiejki. Za arszynów 64—ćwierci 3—werszek 1, po téj saméj cenie arszyn ile zapłacimy?

Wzór działania.

	Mnożna	3 rub.	80 kop.	3 ćw. kop.	
	Mnożnik	64 arsz.	3 ćw. ar.	1 wersz.	
		192 rub.	. . . . .	. . . .	*a*)
po 80 kop.	po 50 k.	32 rub.	. . . . .	. . . .	*b*)
	po 25 k.	16 rub.	. . . . .	. . . .	*c*)
	po 5 k.	3 rub.	20	. . . .	*d*)
	po 1 k.	,,	64 kop	. . . .	*e*)
po 3 ćw. k.	po 2 ćw. k.		32 kop.	. . . .	*f*)
	po 1 ćw. k.		16 ,,	. . . .	*g*)
za 3 ćw. arsz.	po 2 ćw. ar. 1 . .		90	. 1 ćw. k .	*h*)
	po 1 ćw. ar. ,, . .		95	. . . .	*i*)
za 1 wersz.	. . . .		23	. . 3 ćw. k .	*k*)
		246 rub.	77 kop.	4 ćw. k.	

Objaśnienie. Wykonywając powyższe działanie mnożenia otrzymaliśmy 10 cząstkowych iloczynów. Z tych cząstkowe iloczyny pod literami *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, już wytłómaczyliśmy w przypadku pierwszym mnożenia; iloczyny zaś cząstkowe pod literą *h*, *i*, otrzymuje się skoro liczbę 3 ćwierci rozbierzemy na 2 ćwierci + 1 ćwierć.

Za 2 ćwierci jako połowę arszyna, zapłacimy połowę jego wartości to jest połowę liczby 3 rub. 80 kop. i 3 ćwierci kop. czyli 1 rub. 90 kop. 1 ćw. kop. *h*), ułamki ćwierci kopiejek, jako mało znaczące, i w użyciu praktycznem nie mogące być zapłacone opuszczamy, przez co błąd w naszym rachunku na całéj summie nawet kopiejki jednéj nie uczyni.

Za 1 ćwierci arszyna jako połowę 2 ćwierci zapłacimy połowę 1 rub. 90 kop. 1 ćw. kop. czyli 95 kop. *i*), bo pół ćwierci kop. opuszczamy.

Za 1 werszek jako czwartą część ćwierci arszyna otrzymamy czwartą część jéj wartości, co uczyni 21 kop. i 1 ćw. kop. *k*).

Zebrawszy te wszystkie cząstkowe iloczyny razem opuszczając tylko jeden zakreślony pod literą *e*) jako pomocniczy w rachunku, otrzymamy odpowiedź szukaną.

To samo zadanie można jeszcze rozwiązać innym sposobem, któr chociaż tu okazanym będzie, jednakże nie trzeba uczniów przyzwyczajać do używania go, bo jest bez porównania dłuższy.

Wartość jednego arszyna wyrażam w samych ćwierciach kop. to jest: 3 rub. 80 kop. 3 ćw. kop. = 1523 ćw. kop.

Daną liczbę 64 arsz. 3 ćw. arsz. 1 wersz. zamieniam na werszek, tych będzie 1037. Następnie zmieniam zadanie mówiąc: za werszek jeden płacę 1523 ćw. kop. za 1037 werszków ile zapłacę. Odpowiedź znajdziemy, mówiąc: 1523 ćw. kop. przez 1037, iloczyn 1579351 ćw. kop. będzie liczbą szukaną. Ponieważ my nie za jeden werszek płacilibyśmy 1523 ćw. kop. ale za 1 arszyn, to jest za 16 werszków, a zatém iloczyn znaleziony od prawdziwego jest 16 razy większy, dzielę przeto liczbę 1579351 przez 16, a iloraz 98709 ćwierci kopiejek będzie wartością 64 arszynów 3 ćwierci i 1 werszka; w dalszym ciągu ćwierci kopiejek zamieniam na kopiejki, kopiejki na ruble, otrzymam ten sam wypadek co wyżéj, to jest: 246 rub. 77 kop. z ułamkiem mniejszym na pół kopiejki, który w praktycznym rachunku się opuszcza.

Zadanie. Pewien handlarz zboża miał zysku na każdéj czetwierti sprzedanéj pszenicy 2 rub. 88 kop. na 234 czetwiertiach, 3 czetwierykach i 7 garncach ile zarobił?

Rozwiązanie.	2 rub.	88 kop.	mnożna
	234 czetw.	3 czet. 7 gar.	mnożnik
	468 rub.		

z przeniesienia 468 rub.

po 88 k.	po 50 k.	117 rub.		
	po 25 k.	58 —	50 kop.	
	po 10 k.	23 —	40 kop.	
	po 2 k.	4 —	68 —	
	po 1 k.	2 —	34 —	
za 3 czetweryki	za 2 cz.	,, —	72 —	
	za 1 cz.	,, —	36 —	
za 7 gar.	za 4 gar.	,, —	18 —	
	za 2 gar.	,, —	9 —	
	za 1 gar.	,, —	4 —	2 ćw. kop.
	Ogółem	675 —	31 —	2 ćw. kop. —

odpowiedź szukana.

Zadanie. Ile zapłacimy za 69 sażeni, 4 stopy, 11 cali pewnéj roboty, przypuściwszy że féj sażeń kosztuje 25 rub. 37 kop. i 3 ćw. kop.?

Wzór działania.

	Mnożna	25 rub.	37 kop.	3 ćw. k.	
	Mnożnik	69 saż.	4 st	11 cali.	
		225 rub.			
		1500			
po 37 k.	po 25 k.	17 —	25 kop.		
	po 10 k.	6 —	90 kop.		
	po 2 k.	1 —	38 —		
	po 1 k.	,, —	69 kop.	liczba pomoc.	
po 3 ćw. kop.	po 2 ćw. k.	,, rub.	34 kop.	2 ćw. k.	
	po 1 ćw. k.	,, —	17 —	1 ,,	
	za 1 stopę	3 —	62 —	2 ,,	licz. pom.
	za 4 stopy	14 —	50 —	,, ,,	
do przenies.—		1765 —	54 —	3 ,, — ,	

z przenieś.		1765 rub.		54 k.		3 ćw. k.
za 11 cali	za 6 cali	1	—	81	—	1 „
	za 3 cale	„	—	90	—	2 „
	za 2 cale	„	—	60	—	2 „
	Ogółem	1768	—	87	—	„ „

W tym równie jak w poprzednich i następnych przykładach, opuszczamy ułamki ćwierć kopiejek, jeżeli są mniejsze od połowy; jeżeli zaś większe liczymy je za całą ćwierć kopiejki, na mocy téj zasady, że w życiu praktyczném, to wszystko co się odważyć, odmierzyć lub zapłacić nie może z rachunku się wypuszcza. Rozwiązanie przeto nasze, chociaż nie jest ściśle matematyczne, ale wystarcza na potrzeby potocznego życia.

Zadanie. Jeżeli za jeden rubel można otrzymać pewnéj roboty 69 sażeni 4 stopy, 11 cali, za 25 rubli 37 kop. i 3 ćw. kop., ile mieć będziemy téjże samé roboty?

Wzór działania.

	Mnożna	69 saż.		4 stopy		11 cali
	Mnożnik	25 rub.		37 kop.		3 ćw. k.
		345 saż.				
		1380				
po 1 stopie		3 saż.		4 stopy		Liczba pomocnicza
	po 4 stopy	14	—	2	—	
po 11 cali	po 6 cali	1	—	5	—	6 cali
	po 3 cali	„	—	6	—	3 —
	po 2 cali	„	—	4	—	2 —
do przenies.		1742 saż.		3 st.		11 cali

z przenieś.		1742 saż.	3 stopy	11 cali
za 37 kop.	za 25 kop.	17 —	2 —	11—7 lin.
	za 10 kop.	6 —	6 —	9—5 —
	za 2 kop.	1 —	2 —	9—1 —
	za 1 kop.	,, —	4 —	10—5 Liczba pomocnicza
za 3 ćw. k.	za 2 ćw. k.	,, —	2 —	5—2
	za 1 ćw. k.	,, —	1 —	2—6
Ogółem odpowiedź.		1768 saż.	6 stóp	1 cali 1 lin.

Uwaga I. W tym ostatnim przykładzie obydwa czynniki w skład mnożenia wchodzące, są też same, jakie były w zadaniu poprzedzającém, a jednak otrzymaliśmy wypadki różniące się od siebie, w prawdzie nie co do liczb całkowitych, ale co do natury głównéj jedności i co do jéj podziałów. Z tego widzimy, że to prawidło któreśmy podali (na str. 96), iż można przemienić porządek czynników w mnożeniu, nie zamieniając iloczynu, ściśle rzeczy biorąc, jest prawdziwie tylko na ten przypadek, gdy to prawidło stosujemy do liczb ogólnych, czyli niemianowanych; bo z saméj definicyi mnożenia wypada, iż w mnożeniu liczb mianowanych, iloczyn i mnożna muszą być téjże saméj natury, to jest tego samego gatunku, a mnożnik, chociażby był mianowanym w zadaniu, musi być koniecznie liczbą oderwaną, która oznacza, ile razy powinna się powtarzać mnożna, albo jaka z niéj część ma być wzięta. W odbywaniu przeto działania mnożenia, starać się potrzeba oznaczyć ściśle, który z dwóch czynników ma być wzięty za mnożną, co łatwo zgadniemy, ponieważ musi być tego samego gatunku co mnogość, a ta ostatnia jest oznaczona warunkami zadania.

Uwaga II. Zapatrując sie na sposób postępowania w rozwiązaniu zadań z mnożenia liczb wielorakich, widziemy że definicyja tego działania, którą podaliśmy na liczby całkowite, tu uledz musi zmianie, i powiemy w ogólności: „działanie, za pomocą którego mając dwie liczby jakiekolwiek dane, znajdujemy trzecią, którąby się miała do jednéj z nich, jak druga do swojéj jedności, nazywa się mnożeniem.“

Uwaga III. Próba w mnożeniu liczb wielorakich odbywa się za pomocą dzielenia; tak jak na liczbach całkowitych; można ją jednak wykonać w sposób następujący: podwójną mnożną, pomnożywszy przez połowę mnożnika, lub przeciwnie, połowę mnożnéj pomnożywszy przez podwojony mnożnik, otrzymać powinniśmy na iloczyn liczbę zawsze tę samę, jeżeli działanie dobrze było wykonane.

Sprawdzenie zadania na str. 189.

Podwójna mnożna	5 rub.	76 kop.
Połowiczny mnożn.	117 czetw.	1 czetrk 7 gar. 2 kw.
	585 rubli.	

z przeniesienia 585 rub. — kop.

po 76 kop.	po 50 kop.	58 rub.	50 —
	po 25 kop.	29 —	25 —
	po 1 kop.	1 —	17 —
za 1 czetweryk		— —	72 —
za 7 garncy	za 4 garnce	— —	36 —
	za 2 garnce	— —	18 —
	za 1 garniec	— —	9 —
za 2 kwar. = ½ garnca		— —	4—2 ćw. k.
	ogółem	675 —	31—2 ćw. k.

Wypadek zgodny z tym, jaki otrzymaliśmy na str. 189.

Albo inaczéj:

Mnożna połowiczna 1 rub. 44 kop.
Podwojony mnożnik 468 czet. 7 czetwrk. 6 garncy

		468 rub.		
po 44 kop.	po 25 k.	117 —		
	po 10 k.	46 —	80 kop.	
	po 1 k.	4 —	68 k.	licz. pomocnicza
	po 9 k.	42 —	12 kop.	
po 7 czetwrk.	po 4 czet.	— —	72 —	
	po 2 czet.	— —	36 —	
	po 1 czet.	— —	18 —	
po 6 garncy	po 4 gar.	— —	9 —	
	po 2 gar.	— —	31—2 ćw. kop.	

Ogółem 675 rsr. 31—2 ćw. kop. Wypadek zgodny z powyższym.

Tego sposobu sprawdzania działań mnożenia liczb wielorakich, niech dzieci często używają, aby się lepiéj oswoiły z podanemi tu zasadami postępowania.

Dzielenie liczb wielorakich.

Tu wypada nam rozróżnić dwa główne przypadki: albo dzielna i dzielnik są tego samego gatunku pod względem ich jedności głównych, albo są różnego gatunku.

PIERWSZY PRZYPADEK.

Jeżeli dzielnik i dzielna są tego samego gatunku pod względem ich jedności głównych, trzeba zamienić pierwszą i drugą liczbę wieloraką na liczby pojedyncze, obejmujące w sobie najmniejsze jedności, jakie wchodzą w skład dwóch liczb danych, a potém podziel je przez siebie, a na iloraz, który będzie liczbą wieloraką stosownie do warunków zadania, otrzyma się odpowiedź szukaną.

Zadanie I. Sażeń pewnéj roboty kosztuje 47 rs. 27 kop. 3 ćw. kop., za 2 484 rs. 21 kop. i 1 ćw. kop. ile otrzymamy sażni téjże saméj roboty?

Wzór działania.

47 rub.	2 484 rub.
100	100
4 700	248 400
27	21
4 727 kop.	248 421
4	4
18 908	993 684
3	1
18 911 ćw. kop.	993 685 ćw. kop.

Dzielna Dzielnik

993 685 | 18 911

48 135 | 52 saż. — 3 stopy—9 cali—8 $^{1}/_{10}$ lin.; od- (powiedź.

10 313

7

72 191 stóp

1 5 458

12

30 916

1 5 4 58

185 496 cali

15 297

10

152 970 linii

1682

Sprawdzenie za pomocą mnożenia:

Ponieważ jeden sażeń pewnéj roboty kosztuje 47 rubli, 27 kop. 3 ćw. kop., za 52 sażnie, 3 stopy, 9 cali, 8 $^{1}/_{10}$ linii, ile zapłacimy?

Aby to zadanie rozwiązać, dosyć liczbę wieloraką pierwszą pomnożyć przez drugą, a gdy otrzymamy na iloczyn 2484 rub., 21 kop. i 1 ćw. kop., to będzie dowodem, żeśmy działanie dzielenia dobrze wykonali.

Wzór działania.

		47 rub.	27 kop.	3 ćw. kop.	
		52 saż.	3 st.	9 c.	8 $^{1}/_{10}$ lin.
		94 rub.			
		2350 —			
po 27 kop.	po 25 k.	13 —			
	po 2 k.	1 —	4 kop.		
po 3 ćw. k.	po 2 ć. k.	— —	26 —		
	po 1 ć. k.	— —	13 —		
za 1 stopę		6 —	75 k.	2 ćw. k.	licz. pom.
za 3 stopy		20 —	26 —	2 —	
za 9 cali	za 6 cali	3 —	37 —	3 —	
	za 3 cali	1 —	68 —	3 —	
za 1 cal		— —	56 —	1 —	licz. pomoc.
do przeniesienia		2483 rub.	76 kop.	— ćw. k.	

z przeniesienia 2483 rub. 76 kop.

$$\text{za } 8\tfrac{1}{10} \text{ linii} \left\{ \begin{array}{l} \text{za 5 linii — — 28 k.} \\ \text{za 2 linii — — 11 — 1 ćw. kop.} \\ \text{za 1 linije — — 5 — 2 —} \\ \text{za } \tfrac{1}{6} \text{ lin. — — 10 — 2 —} \end{array} \right.$$

Ogółem 2484 rs. 21 k. 1 ćw. kop. Wypadek ten jest zupełnie zgodny z zadaniem, mimo to że opuszczaliśmy ułamki ćwierć kopiejek, albo powiększaliśmy takowe, oraz resztę z dzielenia przyjęliśmy za $\frac{1}{10}$ część, gdy była nieco mniejszą.

Objaśnienie działania dzielenia.

Zamieniliśmy 47 rsr., 27 kop. i 3 ćw. kop. na same ćwierci kopiejek, których otrzymałiśmy 18911; następnie 2484 rub., 21 kop., 1 ćw. kop., razem czynią ćwierci kopiejek 993685. Zadanie zatém pierwotne zamieniło się na następujące: jeżeli za sażeń pewnéj roboty płacimy 18911 ćwierci kopiejek, ile otrzymamy sażni téjże saméj roboty i po téj saméj cenie za 993685 ćw. kop. Z natury tego pytania okazuje się, iż tyle otrzymamy sażni téj roboty, ile razy liczba ćwierci kopiejek 18911 mieści się w liczbie 993685, czyli mieć będziemy 18911-stą część liczby 993685; można więc tę liczbę 993685 uważać za sażnie, których mamy wziąć 18911-stą część. Jakoż dzieląc 993685 przez 18911, otrzymujemy na iloraz 52 całych sażni, a pozostałą liczbę sażni

10 313 zamieniamy na stopy, mnożąc przez 7, i tych będzie 72 191, które dzielimy przez 18 911, otrzymujemy na iloraz 3 stopy, a na resztę 15 458, te zamieniamy na cale, dzielimy przez 18 911 i t. d.

PRZYPADEK II.

Dzielnik i dzielna są różnogatunkowe.

Zadanie I. Za 28 arszynów sukna zapłacono 54 rsr. 32 kop., po czemu płacono arszyn?

Wzór działania.

54 rub. 32 kop.	28 dzielna
26 rub.	1 rub. 94 kop., iloraz, będący
100	żądaną odpowiedzią.
2600	
32	
2632 kop.	
112	
. . .	

Objaśnienie działania. Gdy za 28 arszynów płacimy 54 rsr. 32 kop., więc za 1 arszyn zapłacimy 28 razy mniéj, czyli 28-mą część liczby danéj, czyli zapłacimy tyle razy mniéj, ile razy 28 mieści się w 54 rs. 32 kop. Jakoż 28-mą część 54 rsr. jest 1 rubel i pozostanie na resztę 26 rsr., te zamieniam na kopiejki i dodaję 32 kop., będzie razem 2632 kop., tych 28ma część wynosi 94 kop. bez reszty. Więc 1 rs. 94 kop. jest ilorazem szukanym.

Sprawdzenie.

		1 rs. 94 k. (wartość 1 arsz.
		28 arszynów sukna)
		28 rub.
po 94 kop.	po 50 kop.	14 —
	po 25 kop.	7 —
	po 10 kop.	2 — 80 kop.
	po 1 kop.	— — 28 k. liczba pomocn.
	po 9 kop.	2 — 52 kop.
		54 rs. 32 kop.

Uwaga. W tém sprawdzeniu, równie jak w przykładzie mnożenia na str. 194, używamy liczby pomocniczéj 1, kiedy z 10 przychodzi brać wielokrotność 9. Możnaby tu sobie było inaczéj poradzić, albo liczbę 9 rozłożyć na 5 + 4, albo brać 1 + 8, ale sposób tu użyty, uwalnia jeszcze od mnożenia przez 9, gdyż 9 = 10 — 1, aby więc otrzymać iloczyn cząstkowy za 9 kop., dosyć jest liczbę pomocniczą odjąć od iloczynu za 10 k., a otrzymana różnica będzie cząstkowym iloczynem szukanym. W mnożeniu liczb wielorakich, rozmaite drogi obierać można; uczniowie wprawianemi być powinni do obioru takich, które najprędzéj wiodą do celu.

Zadanie II. Za 1 pud, 23 funt., 26 zołotnik. herbaty zapłacono 364 rsr., 44 kop., po czemu płacono 1 zołotnik?

Rozwiązanie. Zamieniam 1 pud, 23 funty, 26 zołotn. na zołotniki, których będzie 6074. Ponieważ za 6074 zołotn. zapłaciliśmy 364 rs. 44 kop., a zatém za 1 zołotnik zapłacimy 6074-tą część summy danéj, czyli trzeba daną summę pieniężną podzielić przez 6074, a iloraz będzie odpowiedzią żądaną.

Wzór działania.

364 rsr. 44 kop.	6074
100	0 rsr. 6 kop. wartość 1 zołot. (herbaty.
36400	
44	
36444 kop.	

Działanie to sprawdza się przez mnożenie, tu szczególnym przypadkiem sprowadzone do mnożenia liczb jednogatunkowych. Pomnożywszy 6 kop. przez 6074, otrzymujemy 36 444 kop., a zamieniając to na ruble, znajdziemy liczbę 364 rsr. 44 kop., zgodną z wyrażoną w zadaniu.

Zadanie III. Za 28 czetwerti pszenicy zapłacono 243 rsr., 11 kop., po czemu płacono czetwert'?

Wzór działania.

Dzielna

243 rub. 11 kop.	28 dzielnik
19	8 rs. 68 k. 1 ćw. k., wartość 1-éj czetwierti.
100	
1900	
11	
1911 kop.	
231	
7	
4	
28 ćw. kop.	
,,	

Sprawdzenie.

8 rub. 68 kop. 1 ćw. kop.
28 czet.

224 rub.

po 68 kop.	po 50 k.	14 —
	po 10 k.	2 — 80 kop.
	po 5 k.	1 — 40 —
	po 2 k.	,, — 56 —
	po 1 k.	,, — 28 —
	po 1 ćw. k.	,, — 7 —

243 rs. 11 kop.

Zadanie IV. Za 24 czetwierti, 3 czetweryki, 5 garncy pszenicy, zapłacono 179 rsr., 97 kop. i 2 ćw.

kop., po czemu więc płacono za czetwiert' téj pszenicy?

24 czetwierti
8
192
3
195 czetweryk.
8
1560
5
1565 garncy

Rozwiązanie. Zadanie powyższe w skutku zamiany czetwierti i czetweryków na garnce, może być teraz wysłowione w sposób następujący. Jeżeli za 1565 garncy pszenicy płacimy 179 rs. 97 kop. i 2 ćw. kop., po czemu zapłacimy za jeden garn.? Odpowiedź na to znajdziemy, dzieląc tę ostatnią liczbę wieloraką przez 1565, a iloraz będzie wartością jednego garnca; wartość tę pomnożywszy przez liczbę garncy w czetwierti, to jest przez 64, otrzymamy cenę jednéj czetwierti, o co nam właśnie pierwiastkowo chodziło. Z tego widziemy, że wartość 1-éj czetwierti jest 64 razy większa od ilorazu liczby 179 rs. 97 kop. i 2 ćw. kop. przez 1565, aby ją otrzymać od razu, dosyć dzielną powiększyć 64 razy i tak powiększoną podzielić przez ten sam dzielnik 1565.

Wzór działania.

179 rsr. 97 kop. 2 ćw. kop.

64

716

10 740

po 97 kop. { po 50 k. 32

po 25 k. 16

po 20 k. 12 rsr. 80 kop.

po 2 k. 1 „ 28 „

po 2 ćw. kop. „ „ 32 „

Razem 11518 rsr. 40 k. | 1565

563 | 7 rsr. 36 kop.

100 (wartość szukana

56 300 (1-éj czetwierti.

40

56340 kop.

9390

= = = =

Sprawdzenie działania.

7 rsr. 36 kop.

24 czet. 3 czetweryki 5 garncy

168 rub.

po 36 kop. { po 25 k. 6 —

po 10 k. 2 — 40 kop.

po 1 k. „ — 24 kop.

do przeniesienia 176 rub. 64 kop.

	z przenies.	176 rub.	64	kop.
za 3 czetweryki	za 2 czetw.	1 —	84	—
	za 1 czetw.	— —	92	—
za 5 garn.	za 4 garnce	— —	46	—
	za 1 garniec	— —	11	— 2 ćw. kop.
	Ogół	179 rsr.	97 kop.	2 ćw. kop.,

zgodny z zadaniem.

Zadanie V. Za 15 arszynów, 3 ćwier., 3 werszki sukna, zapłacono 52 rs., 27 kop., 2 ćw. k., po czemu płacono arszyn tego sukna?

Wzór działania.

15 arszynów
4
60
3
63 ćwierci
4
252
3
255 werszków

52 rsr. 27 k. 2 ćw. kop.
arszyn ma 16 werszk.; 16
312 rsr.
520 —

po 27 kop. {po 25 k. 4 —
{po 2 k. „ — 32 kop.
po 2 ćw. kop. „ — 8 kop.

Razem 836 rsr. 40 kop.

Dzielna 836 rs. 40 k. | 255 wersz. dzielnik

71	3 rs. 28 k. cena arszyna sukna.
100	
7100	
40	
7140 kop.	
2040	
″ ″ ″ ″	

Sprawdzenie działania.

3 rsr. 28 kop.
15 arsz. 3 ćwier. 3 werszki

		45 rsr.		
po 28 kop.	po 25 k.	3 —	75 kop.	
	po 2 k.	„ —	30 —	
	po 1 k.	„ —	15 —	
za 3 ćwier.	za 2 ćw.	1 —	64 —	
	za 1 ćw.	„ —	82 —	
za 3 wersz.	za 2 wer.	„ —	41 —	
	za 1 —	„ —	20 —	2 ćw. kop.

Ogół 52 rsr. 27 k. 2 ćw. kop.; wypadek zgodny z warunkami zadania.

ZASTOSOWANIE DZIAŁAŃ
NA LICZBACH WIELORAKICH
DO ROZWIĄZYWANIA NIEKTÓRYCH ZAGADNIEŃ.

Pewien handlarz zakupił do sklepu swego cztery następujące gatunki sukna:

A. 15 postawów,	18 arsz.,	3 ćw.;	po 37 duk.	1 tal.	postaw.
B. 14 ditto	12 —	1 —	po 32 —	„	ditto
C. 24 ditto	25 —	2 —	po 26 —	„	ditto
D. 28 ditto	14 —	3 —	po 22 —	2 tal.	ditto

Sukna z pod lit. A.

Sprzedał 12 post. 9 arsz., 2 ćw., $2^2/_3$ wersz., po 38 duk, 2 tal. post.

Sukna z pod lit. B.

ditto 10 post, 18 arsz., 2 ćw., $3^1/_3$ wersz., po 40 duk. 20 sr. gr.

Sukna z pod lit. C.

ditto 18 post. 19 ar., 2 ćw., 2 w., po 28 d., 2 tal. 10 sr. gr. post.

Sukna z pod lit. D.

ditto 27 post., 13 arsz., $3^1/_3$ wersz., po 24 duk. postaw.

Pytanie:

1. Ile mu się zostało z każdego gatunku sukna, i ile razem?

2. Ile zarobił na każdym gatunku sukna przedanego w szczególności?

3. Ile zarobił razem na sprzedaném suknie?

4. Za jaką summę w ogólności zakupił sukna?

5. Za jaką summę sukna sprzedał?

6. Po czemu (nie mając względu na gatunek) powinien sprzedawać arszyn pozostałego mu sukna, aby zarobił na sprzedaży téj reszty, summę 239 duk., 1 tal., 25 sr. gr., $4\frac{2}{3}$ fen.?

NB. Postaw sukna liczyć będziemy po 30 arszyn.

Ponieważ działań z ułamkami jeszcze nie znamy, przeto wprowadzone w zadanie trzecie część werszka, uważać będziemy jakby za liczbę oddzielnego mianowania, jakby przyjęty w handlu podział werszka. Tak samo używamy tu i wszędzie ćwierci arszyna, gdy możnaby używać samych werszków; ćwierci kopiejki, choć możnaby wyrażać ją ułamkami i t. d.

Sześć powyższych pytań, są sześcioma oddzielnemi zadaniami, które kolejno rozwiążemy.

PYTANIE I.

Ile mu zostało z każdego gatunku sukna i ile razem?

Miał sukna z pod lit. A.	15 p. 18 ar. 3 ćw. arsz.
sprzedał	12 p. 9 „ 2 ćw., $2\frac{2}{3}$ w.
z 1-go gat. pozostało mu	3 p. 9 „ 0 ćw. $1\frac{1}{3}$ w.
Miał sukna z pod lit. B.	14 p. 12 „ 1 ćw. —
sprzedał	10 p. 18 „ 2 ćw. $3\frac{1}{3}$ —
z 2-go gat. pozostało mu	3 p. 23 ar. 2 ćw. $\frac{2}{3}$ wer.
Miał sukna z pod lit. C.	24 p. 25 ar. 2 ćw. 0 wer.
sprzedał	18 p. 19 „ 2 ćw. 2 wer.
z 3-go gat. pozostało mu	6 p. 5 ar., 3 ćw. 2 wer.

Miał sukna z pod lit D.	28 p.	14 ar.	3 ćw.	0 w.	
sprzedał	27 p.	13 „	0 ćw.	3 ⅓ w.	
z 4-go gat. pozostało mu	1 p.	1 ar.	2 ćw.	⅔ w.	

Zebranie pozostałości.

A.	3 p. —	9 ar. —	0 ćw. —	1 ⅓	wersz.
B.	3 p. —	23 „ —	2 ćw. —	⅔	—
C.	6 p. —	5 „ —	3 ćw. —	2	—
D.	1 p. —	1 „ —	2 ćw. —	⅔	—
Razem	14 p. —	10 ar. —	„ ćw. —	⅔	—

Sprawdzenie.

Zakupił sukna	A. 15 p. —	18 ar. —	3 ćw.	
	B. 14 p. —	12 ar. —	1 ćw.	
	C. 24 p. —	25 „ —	2 ćw.	
	D. 28 p. —	14 „ —	3 ćw.	
Razem	83 p. —	11 „ —	1 ćw.	
Sprzedał	12 p. —	9 ar. —	2 ćw.	2⅔ w.
	10 p. —	18 „ —	2 ćw.	3⅓ „
	18 p. —	19 „ —	2 ćw.	
	27 p. —	13 „ —	0 ćw.	3⅓ w.
Razem	69 p. —	1 ar. —	0 ćw.	3⅓ w.

Porównanie.

	Miał sukna	83 p. —	11 ar. 1 ćw.	
	sprzedał	69 p. —	1 ar. 0 ćw.	$3^1/_3$ w.
Pozostało mu razem		14 p. —	10 ar. 0 ćw.	$^2/_3$ w.

PYTANIE II.

Ile zarobił na każdym gatunku sukna sprzedanego w szczególności?

Aby na to pytanie odpowiedzieć, wypada obliczyć, ile za sukno sprzedane z każdego gatunku kupiec zapłacił, a następnie, ile za nie dostał; różnica tych dwóch summ, będzie zyskiem szukanym.

Cenę sukna w pierwszym i drugim razie znajdziemy za pomocą mnożenia.

a) *Cena kupna z gatunku A.*

37 duk. 1 tal.
12 post. 9 ar. 2 ćw. $2\,^2/_3$ wer.

74 duk.
370

	po 1 tal.	4 duk.
za 9 arsz.	za 6 arsz.	7 — 1 tal. 12 sr. gr.
	za 3 arsz.	3 — 2 — 6 —
	za 1 arsz.	1 — „ — 22 sr gr.

do przeniesienia 459 duk. „ t. 18 sr. gr. „ fen.

z przeniesienia	459 duk.	„ tal.	18 sr. gr.	„ fen.
za 2 ćw.	„ —	1 —	26 —	„ —
za 2 wer.	„ —	„ —	14 —	„ —
za $^2/_3$ wer.	„ —	„ —	4 —	8 —
Razem	460 duk.	„ tal.	2 sr. gr.	8 fen.

b) *Cena sprzedaży tego samego sukna z pod lit. A.*

38 duk. 2 tal.
12 post. 9 ar. 2 ćw. $2^2/_3$ wer.

76 duk.
380 —

po 2 tal.		8 —
za 9 arsz.	za 6 arsz.	7 — 2 tal. 6 sr. gr.
	za 3 arsz.	3 — 2 „ 18 —
	za 1 arsz.	1 — „ „ 26 —
	za 2 ćw.	„ — 1 t. 28 sr. gr.
	za 2 wersz.	„ — „ „ 14 — 6 fen.
	za $^2/_3$ wersz.	„ — „ — 4 — 10 fen.
	Razem	476 d. 1 tal. 11 sr. gr. 4 fen.

Porównanie.

Sprzedał z gatun. A za 476 duk. 1 tal. 11 sr. gr. 4 fen.
kupił toż samo za 460 duk. „ tal. 2 sr. gr. 8 fen.

Zyskał na pierw. gatun. 16 duk. 1 tal. 8 sr. gr. 8 fen.

c) *Cena sukna z gatunku B.*

		32 duk.
		10 post. 18 arsz. 2 ćw. $3\frac{1}{3}$ w.
		320 duk.
za 18 arsz.	za 15 ar.	16 duk.
	za 3 ar.	3 duk. „ tal. 18 sr. gr.
	za 1 arsz.	1 duk. „ tal. 6 sr. gr.
	za 2 ćw.	„ duk. 1 tal. 18 sr. gr.
za $3\frac{1}{3}$ wer.	za 2 wer.	„ duk. „ tal. 12 sr. gr.
	za 1 wer.	„ duk. „ tal. 6 sr. gr.
	za $\frac{1}{3}$ wer.	„ duk. „ tal. 2 sr. gr.
	Razem	339 duk. 2 tal. 26 sr. gr.

d) *Cena sprzedaży sukna z gatunku B.*

		40 duk. „ tal. 20 sr. gr.
		10 pos. 18 ar. 2 ćw. $3\frac{1}{3}$ wer.
		400 duk.
po 20 sr. gr., 200 sr. gr. =		2 duk. „ tal. 20 sr. gr.
za 18 ar.	za 15 arsz.	20 duk. „ tal. 10 sr. gr.
	za 3 arsz.	4 duk. „ tal. 2 sr. gr.
	za 1 arsz.	1 duk. 1 tal. „ sr. gr. 8 fen.
	za 2 ćw.	„ duk. 2 tal. „ sr. gr. 4 fen.
za $3\frac{1}{3}$ wer.	za 2 wer.	„ duk. „ tal. 15 sr. gr. 1 fen.
	za 1 wer.	„ duk. „ tal. 7 sr. gr. $6\frac{1}{2}$ f.
	za $\frac{1}{3}$ wer.	„ duk. „ tal. 2 sr. gr. $6\frac{1}{6}$ f.
	Razem	427 duk. „ tal. 27 sr. gr. $5\frac{2}{3}$ f.
Za to samo suk. zapł.		339 duk. 2 tal. 26 sr. gr. — fen.
	Zyskano	87 duk. 1 tal. 1 sr. gr. $5\frac{2}{3}$ f.

e) *Cena kupna sukna z gatunku C.*

26 duk.
18 post. 19 ar. 2 ćw. 2 wer.

208 duk.
260

za 19 arsz.	za 15 ar.	13 duk.
	za 3 ar.	2 duk. 1 tal. 24 sr. gr.
	za 1 ar.	„ duk. 2 tal. 18 sr. gr.
	za 2 ćw.	„ duk. 1 tal. 9 sr. gr.
	za 2 wer.	„ duk. „ tal. 9 sr. gr. 9 fen.
	Razem	485 duk. „ tal. „ sr. gr. 9 fen.

f) *Cena sprzedaży sukna z gatunku C.*

28 duk. 2 tal. 10 sr. gr.
18 pos. 19 ar. 2 ćw. 2 wersz.

224 duk.
280

	po 2 tal.	12 duk.
	po 10 sr.gr.	2 duk.
za 19 arsz.	za 15 arsz.	14 duk. 1 tal. 5 sr. gr.
	za 3 arsz.	2 duk. 2 tal. 19 sr. gr.
	za 1 arsz.	„ duk. 2 tal. 26 sr. gr. 4 fen.
	za 2 ćw.	„ duk. 1 tal. 13 sr. gr. 2 fen.
	za 2 wer.	„ duk. „ tal. 10 sr. gr. 9 ½ f.
	Razem	536 duk. 2 tal. 14 sr. gr. 3 ½ f.
	Kupiono za	485 duk. „ tal. „ sr. gr. 9 fen.
	Zyskano	51 duk. 2 tal. 13 sr. gr. 6 ½ f.

g) *Cena kupna sukna z gatunku D.*

22 duk. 2 tal.

27 pos. 13 ar. ,, ćw. ar. 3 ⅓ w.

154 duk.

440

po 2 tal. 18 duk.

po 13 arsz. { za 10 ar. 7 duk. 1 tal. 20 sr. gr.
za 3 ar. 2 duk. ,, tal. 24 sr. gr.

za 1 ar. ,, duk. 2 tal. 8 sr. gr.

za 3 ⅓ wer. { za 2 wer. ,, duk. ,, tal. 8 sr. gr. 6 f.
za 1 wer. ,, duk. ,, tal. 4 sr. gr. 3 f.
za ⅓ wer. ,, duk. ,, tal. 1 sr. gr. 5 f.

Razem 621 duk. 2 tal. 28 sr. gr. 2 f.

h) *Cena sprzedaży sukna z gatunku D.*

24 duk.

27 post. 13 ar. 3 ⅓ wersz.

168 duk.

480

za 13 arsz. { za 10 ar. 8 duk.
za 3 ar. 2 duk. 1 tal. 6 sr. gr.

za 1 ar. ,, duk. 2 tal. 12 sr. gr.

za 3 ⅓ wer. { za 2 wer. ,, duk. ,, tal. 9 sr. gr.
za 1 wer. ,, duk. ,, tal. 4 sr. gr. 6 fen.
za ⅓ wer. ,, duk. ,, tal. 1 sr. gr. 6 fen.

Razem 658 duk. 1 tal. 21 sr. gr. ,, fen.

Kupiono za 621 duk. 2 tal. 28 sr. gr. 2 fen.

Zyskano 36 duk. 1 tal. 22 sr. gr. 10 fen.

A zatém, pod literami *b*, *d*, *f*, *h*, znaleźliśmy żądane odpowiedzi na pytanie drugie.

PYTANIE III.

Ile zarobił razem na sprzedaném suknie?

Na suknie sprzedaném:

Z gatunku	A.	zyskał	16 duk.	1 tal.	8 sr. gr.	8 fen.
ditto	B.	ditto	87 duk.	1 tal.	1 sr. gr.	$5\frac{2}{3}$ f.
ditto	C.	ditto	51 duk.	2 t.	13 sr. gr.	$6\frac{1}{2}$ f.
ditto	D.	ditto	36 duk.	1 t.	22 sr. gr.	10 fen.
Razem na całéj sprzedaży		zyskał	192 duk.	— t.	16 sr. gr.	$6\frac{1}{6}$ f.

PYTANIE IV.

Za jaką summę w ogólności zakupił sukna?

Na to pytanie odpowiemy, skoro cenę każdego gatunku kupionego sukna pomnożymy przez odpowiadającą jéj ilości tegoż sukna, a potém te iloczyny otrzymane zbierzemy razem, czyli je do siebie dodamy.

Gatunek A.

37 duk. 1 tal.
15 pos. 18 arsz. 3 ćw.

185 duk.
37
po 1 tal. 5

za 18 arsz. {za 15 ar. 18 duk. 2 tal.
za 3 ar. 3 — 2 — 6 sr. gr.

za 1 ar. 1 — „ — 22 sr. gr.

za 2 ćw. „ — 1 tal. 26 sr. gr.
za 1 ćw. „ — „ — 28 sr. gr.

Razem 583 duk. 1 tal. „ sr. gr.

Gatunek B.

32 duk.
14 post. 12 arsz. 1 ćw.

128
32
za 10 arsz. 10 duk. 2 tal.
za 2 arsz. 2 — „ — 12 sr. gr.
za 1 ćw. „ — „ — 24 sr. gr.

Razem 461 duk. „ tal. 6 sr. gr.

Gatunek C.

26 duk.
24 post. 25 arsz. 2 ćw.

104 duk.
52

za 25 arsz.: za 15 ar. 13 duk.
za 25 arsz.: za 10 ar. 8 — 2 tal.

za 1 ar. „ — 2 tal. 18 sr. gr.

za 2 ćw. „ — 1 tal. 9 sr. gr.

Razem 646 duk. „ tal. 9 sr. gr.

Gatunek D.

22 duk. 2 tal.
28 pos. 14 arsz. 3 ćw.

176 duk.
44

po 2 tal. 18 duk. 2 tal.

za 14 arsz.: za 10 ar. 7 — 1 — 20 sr. gr.
za 14 arsz.: za 3 ar. 2 — „ — 24 sr. gr.
za 14 arsz.: za 1 ar. „ — 2 — 9 sr. gr.

za 2 ćw. „ — 1 — 4 sr. gr.
za 1 ćw. „ — „ — 17 sr. gr.

Razem 645 duk. 2 tal. 13 sr. gr.

Zebranie ogólne.

Za sukno z gat.	A. zapł.	583	duk.	1 tal.		
ditto	B. ditto	461	—	„ —	6 sr. gr.	
(p) ditto	C. ditto	646	—	„ —	9 sr. gr.	
ditto	D. ditto	645	—	2 tal.	13 sr. gr.	
	Ogółem	2336	duk.	„ tal.	28 sr. gr.	

Sprawdzenie.

Odpowiadając na pytanie drugie, obliczyliśmy ile handlarz zapłacił za sukno sprzedane, gdy teraz dojdziemy wartości pozostałego sukna z każdego gatunku i dodamy razem; summy powinny się zgodzić z dopiéro co wynalezionemi.

Wartość pozostałości z gatunku A.

		37 duk. 1 tal.
		3 post. 9 arsz. 1⅓ wersz.
		111 duk.
	po 1 tal.	1 duk.
za 9 arsz.	za 6 arsz.	7 duk. 1 tal. 12 sr. gr.
	za 3 arsz.	3 — 2 — 6 —
	za 1 arsz.	1 duk. „ — 22 sr. gr.
	za 1 wer.	„ duk. „ tal. 7 sr. gr.
	za ⅓ wer.	„ duk. „ tal. 2 sr. gr. 4 fen.
	Razem	123 duk. „ tal. 27 sr. gr. 4 f.

z przeniesienia 123 duk. „ tal. 27 sr. gr. 4 f. do czego przydawszy . 460 duk. „ tal. 2 sr. gr. 8 f. wartość sukna sprzedanego.

Ogół 583 duk. 1 tal. „ sr. gr. „ f. będzie zgodny z rachunkiem (p).

Wartość pozostałości z gatunku B.

		32 duk.
		3 pos. 23 ar. 2 ćw. $^2/_3$ wer.
		96 duk.
	za 15 arsz.	16 —
za 23 ar.	za 5 arsz.	5 duk. 1 tal.
	za 3 arsz.	3 duk. „ tal. 13 sr. gr.
	za 1 arsz	1 — „ — 6 —
	za 2 ćw.	„ — 1 — 18 sr. gr.
	za 1 wer.	„ — „ — 6 sr. gr.
	za $^2/_3$ wer.	„ — „ — 4 sr. gr.

Razem 121 duk. „ — 10 sr. g. do czego przydawszy . . 339 duk. 2 tal. 26 sr. g. wartość sukna sprzedanego.

Ogół 461 duk. „ tal. 6 sr. gr. zgodny z rachunkiem pod lit. (p).

Wartość pozostałości z gatunku C.

26 duk.
6 pos. 5 arsz. 3 ćw. 2 wer.

156 duk.
za 5 arsz. 4 — 1 tal.
za 1 arsz. „ — 2 — 18 sr. gr.
za 3 ćw. { za 2 ćw. „ — 1 — 9 sr. gr.
za 1 ćw. „ — „ — 19 sr. gr. 6 fen.
za 2 wer. „ — „ — 9 sr. gr. 9 fen.

Razem 161 duk. „ tal. 8 sr. gr. 3 f. do
czego przydawszy . . 485 duk. „ tal. „ sr. gr. 9 f. wartość sukna sprzedan.

Ogół 646 duk. „ tal. 9 sr. gr. „ f. zgodny z rachunkiem pod lit. (p).

Wartość pozostałości z gatunku D.

22 duk. 2 tal.
1 pos. 1 arsz. 2 ćw. $^2/_3$ wer.

22 duk. 2 tal.
za 1 arsz. „ — 2 tal. 8 sr. gr.
za 2 ćw. ar. „ — 1 tal. 4 sr. gr.
za 1 wersz. „ — „ — 4 sr. gr. 4 f.
za $^2/_3$ wer. „ — „ — 2 sr. gr. 10 f.

Razem 23 duk. 2 t. 14 sr. gr. 10 f. do
czego przydawszy . . 621 duk. 2 t. 28 sr. gr. 2 fen. wart. sukn. sprzedan.

Ogół 645 duk. 2 t. 13 sr. gr. „ fen. zgodny z rachunkiem pod lit. (p).

Dla wprawy, może nauczyciel kazać uczniom podpisać wartości sukna sprzedanego po cenie kupna obliczone, następnie wartości sukna pozostałego, z czego będzie ośm liczb wielorakich, które po dodaniu do siebie, muszą dać liczbę zupełnie równą téj, jaką otrzymaliśmy pod literą (p).

PYTANIE V.

Za jaką summę sprzedał sukna?

Obacz odpowiedź na pytanie drugie, gdzie znajdziesz:

Że z gat.	A.	sprzedał za	476 duk.	1 tal.	11 sr. gr.	4 f.
ditto	B.	ditto za	427 —	„ —	27 —	$5^2/_3$f.
ditto	C.	ditto za	536 —	2 —	14 —	$3^1/_2$f.
ditto	D.	ditto za	658 —	1 —	21 —	—
Razem		sprzedał za	2099 duk.	„ t.	14 sr. gr.	$1^1/_6$f.

Za to samo sukno kupiec zapłacił:

Z gat. A.	460 duk.	„ tal.	2 sr. gr.	8	fen.
ditto B.	339 —	2 t.	26 sr. gr.	„	—
ditto C.	485 —	„ —	„ —	9	—
ditto D.	621 —	2 tal	28 sr. gr.	2	—
Razem	1906 duk.	2 tal.	27 sr. gr.	7	fen.

Porównanie.

Dostał za sukno:	2099 duk.	„ tal.	14 sr. gr.	$1\frac{1}{6}$ fen.
Zapłacił za nie:	1906 duk.	2 tal.	27 sr. gr.	7 fen.
Zyskał na sprzed.	192 duk.	„ tal.	16 sr. gr.	$6\frac{1}{6}$ fen.

wypadek zgodny z tym, jaki otrzymaliśmy na odpowiedź na pytanie trzecie.

PYTANIE VI.

Po czemu (nie mając względu na gatunek) powinien sprzedawać łokieć sukna, aby zarobił na sprzedaży całéj reszty summę 239 duk, 1 tal., 25 sr. gr., 5 fen.?

Rozwiązanie. Pozostałość obliczyliśmy odpowiadając na pierwsze pytanie, ta wynosi razem 14 postawów, 10 arsz., „ ćw., $^2/_3$ werszka.

W odpowiedzi zaś na pytanie czwarte znaleźliśmy wartość pozostałości każdego w szczególności gatunku, i tak:

Wartość pozostałości:

z gatunku A. wynosi	123 duk.	„ tal	27 sr. gr.	4 fen.
ditto B. ditto	121 —	„ —	10 sr. gr.	„ fen.
ditto C. ditto	161 —	„ —	8 sr. gr.	3 fen.
ditto D. ditto	23 —	2 tal.	14 sr. gr.	10 fen.
Razem resz. kosztow.	429 duk.	1 tal.	„ sr. gr.	5 fen.

z przenies.	429 duk. 1 tal. „ sr. gr. 5 fen.
Do czego przydawszy zysk mający się otrzymać	239 duk. 1 tal. 25 sr. gr. 5 fen.
Ogółem za	668 duk. 2 tal. 25 sr. gr. 10 fen.

powinien sprzedać 14 post., 10 arsz. $^2/_3$ wersz., aby na téj sprzedaży mógł zyskać 239 duk., 1 tal., 25 sr. gr., 5 fen.

Aby dojść po czemu powinien sprzedawać arszyn sukna, dosyć będzie 14 post. 10 arsz. $^2/_3$ wersz. zamienić wszystko na trzecie części werszka, co uczyni 20642; a summę 668 duk. 2 tal. 25 sr-gr. 10 fen. podzielić przez 20642 trzecie części werszka. Otrzymamy na iloraz wartość trzeciéj części werszka, którą pomnożywszy przez 48, będziemy mieli wartość jednego arszyna, albo co na jedno wychodzi, wziąć dzielną 48 razy większą i podzielić ją przez tenże sam dzielnik 20642, a iloraz będzie ceną jednego arszyna.

Wykonanie.

	668 duk. 2 tal. 25 sr. gr. 10 f.
	48
	5 344 duk.
	2 672
po 2 tal.	32 duk.
do przeniesienia	32096 duk.

z przenieś. 32096 duk.

po 25 sr. gr. { po 15 sr.gr. 8 duk.
po 10 sr.gr. 5 duk. 1 tal.

po 10 fen. „ — 1 — 10 sr. gr.

32109 duk. 2 tal. 10 sr. gr.

Dzielenie.

32109 duk. 2 tal. 10 sr. gr. | 20642
11467 | 1 duk. 1 tal. 20 sr. gr.
3 wartość szukana 1-go arsz.
34401
2
34403 tal.
13761
30
412830
10
412840
. . . . .

Zadania, które na wzór poprzedzającego rozwiązać można.

Zadanie 1. Na pewnym składzie było w ogóle wełny 31 171 pud., 20 fnt.; pud średnio kupowany był po 27 rsr. 20 kop.

Sprzedano zaś:

Część 15-stą téj wełny po 31 rsr. 44 kop. pud.
— 18-stą ditto po 35 rsr. 28 kop. pud.
— 24-tą ditto po 39 rsr. 72 kop. pud.

Pytania:

1. Ile kupno wszystkiéj wełny kosztowało?

2. Ile otrzymano pieniędzy za 15-stą część sprzedanéj wełny, ile za część 18-stą, ile za część 24-tą, a ile razem za te 3 częściowe sprzedaże?

3. Ile zyskano na sprzedaży pierwszéj partyi, ile na sprzedaży drugiéj, iie na sprzedaży trzeciéj, i ile zyskano razem?

4. Po czemu trzebaby sprzedawać resztę pozostałą wełny, aby na téj ostatniéj sprzedaży zyskać 57338 rrs. 24 ¼ kop.

Zadanie II. Za 18 bell, 8 ryz, 18 liber, 23 arkusze papieru, ile trzeba zapłacić, płacąc za bellę 24 rsr., i po czemu wypada arkusz tego papieru?

Wiedząc, że bella ma w sobie 10 ryz, ryza ma 20 liber, a libra 24 arkusze papieru.

Zadanie III. Za 154 duk. 1 tal. 24 sr. gr. ile kupić możemy bell, ryz, liber i arkuszy papieru, płacąc za arkusz po 2 fenigi?

Zadanie IV. Za 51 diesiatyn 270 sażni kwadratowych gruntu, zapłacono 13636 rs. 91 ½ k., po czemu płacono za diesiatinę?

Zadanie V. Za 44 diesiatyny, 208 sażni kwadr. ile wypadnie zapłacić, płacąc za 1 saż. kwadr. 18 kop.?

Zadanie VI. Za 12 fur desek ile trzeba zapłacić, wiedząc, że na każdéj furze jest desek 24, i że za kopę płacimy po 23 rub. 85 kop., i jaka jest cena jednéj deski?

Zadanie VII. Pewien handlarz zakupił pszenicy:

A.	179	czetwierti,	2	czetweryki,	4	garnce
B.	226	—	,,	—	2	—
C.	187	—	2	—	,,	—
D.	101	—	1	—	4	—

za co zapłacił	1922	rub.	23	kop.
ditto	2205	—	91 ¼	kop.
ditto	1554	—	17 ½	kop.
ditto	894	—	49¾	kop.

Pszenicę pod	A.	sprzedał	po 15	rub.	56	kop. czetw.
ditto	B.	ditto	po 10	,,	32	,, ,,
ditto	C.	ditto	po 12	,,	48	,, ,,
ditto	D.	ditto	po 13	,,	20	,,

Pytania:

1. Po czemu kupował czetwert' pszenicy z pod A. B, C, D, w szczególności.

2. Jaka jest różnica ceny kupna i sprzedaży czetw. pszenicy z każdego gatunku.

3. Ile razem kupił pszenicy i ile za nią zapłacił.

4. Ile ze sprzedaży pszenicy otrzymał, i ile miał zysku?

Zadanie VIII. Pewien handlarz zakupił na targu, cztery gatunki wełny:

A. 24 pudy	20 fnt.	po 48 rsr.	14 kop.
B. 22 —	31 —	po 69 rsr.	40 kop.
C. 19 —	19 —	po 88 rsr.	„ kop.
D. 25 —	23 —	po 66 rsr.	„ kop.

Z 1-go	gat. sprzed.	15 pud.	20 fnt.	po 50 r. 55 k. pud.
Z 2-go	ditto	18 —	26 —	po 70 r. 10 k. —
Z 3-go	ditto	17 —	16 —	po 90 r. 5 k. —
z 4-go	ditto	20 —	18 —	po 80 r. 80 k. —

Pytania:

1. Ile mu zostało z każdego gatunku wełny, i ile razem?

2. Ile zarobił razem na sprzedanéj wełnie?

3. Za jaką summę zakupił wełny?

4. Za jaką summę sprzedał wełny?

5. Po czemu powinienby sprzedać pud, (nie mając względu na gatunek wełny), aby na całéj pozostałéj reszcie, po sprzedaniu mógł zarobić 1 054 rsr. 50 kop.?

Zadanie IX. Pewien podróżny zrobił drogi werst 288; dziennie szedł godzin 8, a każde 4 wersty uchodził w 45 minutach. Pytanie, ile dni i godzin potrzebował do odbycia swéj podróży?

Zadanie X. Pewien kupiec zarabiając na sprzedaży każdego arszyna sukna 37 kop. i 3 ćw. kop., zarobił w ciągu roku 1 385 rs. 42 $1/2$ kop. Pytanie, ile sprzedał arszynów tego sukna?

KONIEC.

SPIS RZECZY.

Str.