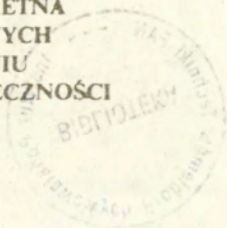


4.41 — optymalizacja  
4.43 — układy prętowe  
1.12 — metody numeryczne

Praca doktorska  
Mariusz Pyrz

OPTYMALIZACJA DYSKRETNA  
KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH  
PRZY UWZGLĘDNIENIU  
WARUNKÓW UTRATY STATECZNOŚCI

35/90



P.269



WARSZAWA 1990

<http://rcin.org.pl>

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 23 maja 1990

P r a c a   d o k t o r s k a

recenzent - Prof.dr hab.inż. Adam Borkowski

promotor - Prof.dr hab.inż. Witold Gutkowski



56797



---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 100 egz. Ark.wyd.6,6 Ark.druk.8,25

Oddano do drukarni w sierpniu 1990 r.

Nr zamówienia 296/90

---

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,  
ul.Śniadeckich 8

OPTIMALIZACJA DYSKRETNĄ KONSTRUKCJI PRĘTOWYCH  
PRZY UWZGLĘDNIENIU WARUNKÓW UTRATY STATECZNOŚCI

STRESZCZENIE

Praca poświęcona jest zagadnieniom dyskretnej optymalizacji sprężystych konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności. Problem optymalizacji sformułowany został jako zadanie minimalizacji ciężaru prętów konstrukcji przy ograniczeniach na naprężenia dopuszczalne i stateczność elementów oraz stateczność globalną układu. Zmiennymi decyzyjnymi są pola i momenty bezwładności przekrojów poprzecznych prętów, dobierane z dyskretnych, skończonych katalogów. Zadanie optymalizacji rozwiązano przy wykorzystaniu metody przeglądu według rosnących wartości funkcji celu. Rozważaniami objęto małowyniosłe układy kratowe wykazujące zachowanie geometrycznie nieliniowe oraz regularne konstrukcje ramowe przy założeniu małych przemieszczeń w stanie przedkrytycznym.

W przykładach numerycznych poświęconych optymalizacji konstrukcji kratowych zbadano wpływ sposobu przyjęcia stref sztywności na dyskretne rozwiązania optymalne, dokonano porównania rozwiązań ciągłych i dyskretnych oraz rozwiązań otrzymanych przy nieliniowej i zlinearyzowanej analizie stateczności. Przedstawiono pewną metodę szacowania przekrojów optymalnych i zbadano wpływ imperfekcji geometrii konstrukcji na rezultat optymalizacji dyskretnej. Obciążenia krytyczne wyznaczano z warunku minimum energii potencjalnej układu. W przykładach obliczeniowych dotyczących optymalizacji regularnych konstrukcji prętowych porównano wyniki otrzymane przy różnych katalogach przekrojów. Obciążenia krytyczne określano metodą zakładania postaci utraty stateczności przy wykorzystaniu rachunku różnic skończonych.

## 1 WSTĘP

### 1.1 Przedmiot rozważań

W zdecydowanej większości zagadnień optymalnego projektowania układów konstrukcyjnych przyjmowane jest założenie, że zmienne decyzyjne, określające wymiary elementów, przybierają wartości stanowiące zbiór ciągły. W praktycznych problemach optymalizacji konstrukcji inżynierskich projektant często ma ograniczony zestaw możliwości. Zmienne projektowe, którymi dysponuje, mogą przybierać jedynie pewne, określone z góry wartości. W przypadku konstrukcji metalowych dyskretny, skończony zbiór dopuszczalnych elementów jest np. zdeterminowany aktualnym programem produkcji wyrobów hutniczych. Chęć wprowadzenia w życie optymalnych rozwiązań ciągłych implikowałaby wówczas odmienny i kosztowny proces produkcji każdego elementu. Pożądane jest zatem wyznaczenie rozwiązania zadania optymalizacji przy uwzględnieniu faktu, że zmienne projektowe dobierane są z ograniczonego zestawu dopuszczalnych wielkości. Zagadnienie takie nosi nazwę zadania optymalizacji dyskretnej a jego rozwiązanie jest możliwe przy wykorzystaniu numerycznych metod programowania dyskretnego. Sformułowanie problemu w zmiennych dyskretnych jest niejednokrotnie bliższe rzeczywistym warunkom projektowania i bardziej odpowiednie z praktycznego punktu widzenia.

Założenie, że dobre wyniki projektowania optymalnego można otrzymać poprzez zaokrąglenie wymiarów otrzymywanych w optymalizacji ciągłej ( w górę lub w dół ) do najbliższych, dopuszczalnych wymiarów z danego katalogu nie zawsze prowadzi do rozwiązania optymalnego z punktu widzenia optymalizacji dyskretnej. W przypadku poszukiwania rozwiązań minimalnych rozwiązanie optymalne programo-

wania ciągłego stanowi ograniczenie od dołu wartości funkcji celu otrzymywanych w programowaniu dyskretnym lecz nie jest to koniecznie dobre przybliżenie [64,18,41,71]. Zaokrąglenie wymiarów w górę prowadzi do zwiększenia wartości funkcji celu, natomiast zaokrąglenie w dół może spowodować naruszenie warunków ograniczających. Ustalenie a priori które wymiary należy zaokrąglić w dół a które w górę jest przeważnie niemożliwe. Uzyskiwanie rozwiązań problemu dyskretnego przez zaokrąglenie rozwiązań ciągłych może być małoefektywne zwłaszcza w przypadku dużej liczby zmiennych decyzyjnych i nieliniowych warunków ograniczających.

We współczesnej technice szerokie zastosowanie znajdują przeszerzone ustroje prętowe. Konstrukcje te wykorzystuje się między innymi jako przekrycia obiektów o dużej powierzchni (hale przemysłowe i widowiskowe, hangary samolotowe), ściany osłonowe budynków wysokich, podpory sieci energetycznych, maszty, dźwigi, konstrukcje platform wiertniczych oraz elementy wsporcze w mostownictwie i przemyśle lotniczym. Do podstawowych zalet konstrukcji prętowych należy ich niewielki ciężar własny przy stosunkowo dużej nośności. Istotna jest również możliwość oddzielenia procesów wytwarzania, montażu podzespołów i konstrukcji oraz możliwość otrzymywania różnorodnych układów konstrukcyjnych przy jednoczesnej unifikacji kształtów, wymiarów i sposobu połączeń elementów. W budownictwie konstrukcji prętowych wykorzystuje się zazwyczaj produkowane seryjnie typowe pręty. Projektowanie tych ustrojów wprowadza konieczność wyboru elementów składowych układu z dyskretnego, skończonego zbioru-katalogu dopuszczalnych wielkości.

Na ogólny koszt konstrukcji składają się: koszt jej zaprojektowania, produkcji elementów składowych, wzniesienia całej struk-

tury oraz koszt zużytego materiału. W przypadku układu o określonych wymiarach geometrycznych, projektowanego ze skatalogowanych prętów, sumę trzech pierwszych, wymienionych wyżej, składowych kosztu konstrukcji można traktować, popełniając nieduży błąd, jako wielkość niezmienną. O ogólnym koszcie decyduje w istotny sposób ilość materiału (ciężar) elementów. W przypadku kryterium minimalnego ciężaru, spośród wszystkich konstrukcji spełniających dane warunki ograniczające i poddanych takim samym obciążeniom, za optymalną uważana jest konstrukcja najlżejsza. Założenie o proporcjonalności ciężaru budowli do jej kosztu nabiera znaczenia wraz z rosnącą potrzebą oszczędności materiału.

Wraz ze wzrostem dokładności wykonania i ulepszaniem właściwości wytrzymałościowych stosowanych stopów metali zaczęły powstawać coraz bardziej smukłe, bardziej wiotkie, a tym samym podatne na utratę stateczności prętowe formy strukturalne. Katastrofy wynikające z nieuwzględnienia problemów stateczności w fazie projektowania, montażu i eksploatacji obiektu podkreślają znaczenie tego problemu [103,65,85,88,89]. Wymiary elementów projektowanego układu konstrukcyjnego określone są przez dominujące warunki ograniczające, zależne w ogólności od cech geometrycznych układu i charakteru przyłożonego obciążenia. W projektowaniu przestrzennych konstrukcji prętowych decydujące znaczenie mogą mieć zjawiska związane z ich statecznością.

Zjawiska utraty stateczności przestrzennych konstrukcji prętowych mogą mieć różny charakter. Przez pojęcie utraty stateczności globalnej [59,103] rozumiemy utratę stateczności konstrukcji jako całości, związaną z bifurkacją położenia równowagi lub zjawiskiem przeskoku. Możliwa jest również utrata stateczności kon-

strukcji spowodowana niestatecznością pojedynczych elementów układu tzn. wyboczeniem poszczególnych prętów między węzłami. Takie zjawisko określać będziemy jako utratę stateczności "lokalnej" [59,103].

Przedmiotem niniejszej pracy jest zagadnienie zastosowania techniki programowania dyskretnego do optymalizacji sprężystych konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności. Rozważany problem polega na minimalizacji ciężaru konstrukcji o ustalonych wymiarach geometrycznych i znanych wielkościach obciążenia tak, aby przyłożone obciążenie zewnętrzne nie spowodowało utraty stateczności układu. Zadanie optymalizacji sformułowane w zmiennych dyskretnych, którymi są pola i momenty bezwładności przekrojów poprzecznych prętów, dobierane z danych, skończonych zbiorów-katalogów.

## 12 Przegląd literatury

W poniższym przeglądzie zestawione zostały pozycje literatury dotyczące dwóch zagadnień: metod programowania dyskretnego w optymalizacji konstrukcji inżynierskich oraz optymalizacji konstrukcji prętowych z uwagi na obciążenie krytyczne.

Intensywny rozwój programowania dyskretnego rozpoczął się w latach pięćdziesiątych i spowodowany został rosnącymi potrzebami w zakresie rozwiązywania zagadnień natury ekonomicznej. Metody programowania dyskretnego tworzone były z myślą o problemach planowania ekonomicznego i logicznego, rozmieszczenia i specjalizacji produkcji, teorii harmonogramów oraz różnorodnych zagadnieniach lokalizacyjno-transportowych, załadunku, rozkroju, przydziału itp.

Matematycznym aspektom metod optymalizacji dyskretnej poświęcone są między innymi monografie Garfinkela, Nemhausera [29], Korbuta, Finkelsztejna [58] i Walukiewicza [98].

Powszechne stosowanie wyników optymalizacji w praktycznych problemach projektowania konstrukcji metalowych wymaga odejścia od koncepcji ciągłych zmiennych decyzyjnych i uwzględnienia dyskretnego charakteru parametrów, którymi dysponuje projektant. Ponieważ zagadnienia optymalnego projektowania układów konstrukcyjnych mają nieco inny charakter niż większość zagadnień ekonomicznych, dla których opracowane zostały biblioteczne procedury programowania dyskretnego, powstał cały szereg nowych algorytmów szczególnie przydatnych w problemach inżynierskich.

Metody numeryczne dyskretnego programowania matematycznego stosowane w optymalizacji konstrukcji inżynierskich podzielić można na trzy podstawowe grupy [8]:

1) Metody przybliżone, do których należą metody heurystyczne, charakteryzujące się dużą prostotą i wykorzystujące specyficzne własności rozwiązywanych zagadnień oraz metody poszukiwania przypadkowego, gdzie rozwiązanie optymalne znajduje się na drodze losowego badania obszaru dopuszczalnych rozwiązań;

2) Metody płaszczyzn odcinających, polegające na tymczasowym odrzuceniu warunków dyskretności i takiej modyfikacji obszaru rozwiązań dopuszczalnych, aby rozwiązanie dyskretne zadania wyjściowego pokryło się z rozwiązaniem ciągłym zmodyfikowanego zadania końcowego;

3) Metody kombinatoryczne, których idea jest stosowanie algorytmów umożliwiających rozwiązanie zadania optymalizacji na drodze częściowego przeglądu rozwiązań, bez uciekania się do rozpatrywa-



nia wszystkich możliwych wariantów.

W pierwszych pracach dotyczących optymalizacji konstrukcji przy uwzględnieniu faktu, że w procesie projektowania inżynierskiego ma się do wyboru jedynie skończony zbiór parametrów charakteryzujących elementy nie korzystano z algorytmów programowania dyskretnego. Brown i Ang [16] określali przekroje elementów sprężystych ram stalowych, spełniających warunek minimum ciężaru i warunki ograniczające na maksymalne przemieszczenia i naprężenia. W pierwszej kolejności wyznaczano optymalne rozwiązanie ciągłe posługując się metodą gradientową. Następnie modyfikowano je, szukając rozwiązania dla dopuszczalnych przekrojów elementów w sąsiedztwie otrzymanego rozwiązania ciągłego. Badano wszystkie możliwe kombinacje rozwiązań, sprawdzając ograniczenia dla przypadków odpowiadających malejącemu ciężarowi konstrukcji. Przy większej liczbie zmiennych przeszukiwania dokonywano intuicyjnie. Masur [66,67,68] oraz Sheu i Prager [84], posługując się wariacyjnymi metodami poszukiwania ekstremum warunkowego, wyprowadzili warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązania dla belek, ram oraz płyty kołowej o najmniejszym ciężarze, spełniających warunek maksymalnej sztywności lub minimalnego ugięcia. Założono, że przekroje pręta lub grubość płyty w pewnych obszarach przyjmują stałą wartość, która może być dobrana z katalogu. Wyznaczano położenie tych obszarów i dla określonych z góry parametrów (przekrojów lub grubości) poszukiwano optymalnego kształtu konstrukcji. Sposób doboru elementów z katalogów nie stanowił w tym przypadku tematu rozważań. Мацюлявичюс [64] zastosował algorytm Gomory'ego do wyznaczania optymalnej konfiguracji prętów kratownicy wspornikowej przy warunku minimum ciężaru i ograniczeniach na ugięcia i naprę-

żenia. Metoda Gomory'ego jest rozszerzeniem stosowanej przy zmien-  
nych ciągłych metody Simplex i umożliwia otrzymanie rozwiązania  
dla zmiennych całkowitoliczbowych poprzez wprowadzenie pewnych  
warunków ograniczających. Мацюлявичюс wykazał, że przy uwzględnie-  
niu skończonego katalogu przekrojów prętów można uzyskać rozwią-  
zania różniące się zarówno ilościowo jak i jakościowo od wyników  
otrzymanych z przybliżenia rozwiązania, w którym pominięto warun-  
ki dyskretności. Algorytm Gomory'ego stosował również Toakley  
[95]. Rozwiązywał on zadania optymalizacji na minimum ciężaru  
sprężysto-plastycznych układów ramowych oraz sprężystych kratownic  
statycznie wyznaczalnych przy ograniczeniach na dopuszczalne  
przemieszczenia i naprężenia. Zagadnienie sprowadzone zostało do  
zadania programowania liniowego o zmiennych zero-jedynkowych, jed-  
nakże wykorzystywany algorytm wykazał słabą zbieżność przy nie-  
wielkiej liczbie zmiennych decyzyjnych. Stosowana była również  
metoda przeszukiwania losowego. Reinschmidt [77] optymalizował na  
minimum ciężaru proste ramy plastyczne i sprężyste ustroje kratowe  
przy warunkach na naprężenia, przemieszczenia i dobór materiału.  
Nieliniowe warunki ograniczające zostały zlinearyzowane przez zas-  
tąpienie ich pierwszymi wyrazami rozwinięcia w szereg Taylora, co  
zmniejszało jednak prawdopodobieństwo uzyskania optimum globalne-  
go. Do rozwiązywania powyższych zadań używano algorytmów metody  
przeglądu sterowanego, przeszukiwania losowego i przybliżonych  
metod programowania liniowego. Do efektywnych rezultatów optymal-  
izacji dyskretnej w przypadku większej liczby zmiennych decyzyjnych  
doprowadziło zastosowanie przez Cellę, Logchera [19] i przez Cellę  
i Soosaara [20] metody podziału i ograniczeń. Rozwiązanie optymal-  
ne znajdowano na drodze sukcesywnego podziału wszystkich kombi-

nacji dopuszczalnych rozwiązań na podobszary . W każdym z nich określano minimalną wartość funkcji celu, wybierano podobszary do następnego podziału i eliminowano te z nich, które nie mogą zawierać optimum. Analizowane w [19] i [20] układy - prętowe konstrukcje wsporcze teleskopu i radioteleskopu oraz belka o przekroju skrzynkowym zawierały po kilkadziesiąt zmiennych decyzyjnych. W pracy [18] Cella dokonał porównania optymalnych rozwiązań ciągłych i rozwiązań dyskretnych, otrzymanych przy wykorzystaniu metody podziału i ograniczeń. Wariant tej metody do optymalizacji ustrojów kratowych stosował również Niemierko [71]. Zauważył on, że sformułowanie zagadnień optymalizacji kratownic ze skatalogowanych prętów w zmiennych dyskretnych daje mniejsze wartości funkcji celu niż formułowanie tych zagadnień w zmiennych ciągłych i dobieranie najbliższych, dostępnych pól przekrojów z katalogów. Zastosowanie programowania dynamicznego w optymalizacji sprężystych konstrukcji prętowych z ograniczeniami na przemieszczenia i naprężenia oraz zestawienie wyników otrzymanych przy różnych katalogach elementów można znaleźć w pracy Distefano i Ratha [21]. Zastosowany algorytm okazał się bardziej wydajny niż rozwiązanie analogicznego zadania dla ciągłych zmiennych decyzyjnych, jednakże w przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych może on prowadzić do wyznaczenia minimum lokalnego. Problem optymalnego projektowania hal stalowych podjęty został przez Leśniaka, Grodzkiego, Jakubowską [61] oraz Garsteckiego, Gawęckiego i Gawęckiego [30]. W obu przypadkach posługiwano się metodami dekompozycji i zastępowano przegląd zupełny zadania dla wszystkich zmiennych sumą przeglądów zupełnych szeregu odpowiednio ze sobą powiązanych zadań o mniejszej liczbie parametrów. W ostatniej z prac, w związku

z faktem, iż funkcja celu jest niemalejąca ze względu na wszystkie zmienne decyzyjne, poszukiwanie rozwiązania optymalnego ograniczono wyłącznie do brzegu obszaru rozwiązań dopuszczalnych. Optymalizacji przekryć strukturalnych poświęcony jest szereg publikacji Karczewskiego i Paczkowskiego [45-49]. Prace [46,47] dotyczą optymalizacji na minimum ciężaru kratownicy przestrzennej o ortogonalnej siatce prętów. Zastosowana metoda pełnego przeglądu wariantów polegała na sprawdzaniu warunków ograniczających dla wszystkich możliwych kombinacji zmiennych decyzyjnych. Ze względu na dużą pracochłonność wyznaczania rozwiązania zaproponowano w [45] przybliżony sposób analizy statycznej konstrukcji. W pracy [48] dokonano porównania efektywności algorytmów kilku różnych metod optymalizacji, które można zastosować do optymalizacji na minimum ciężaru kratowego przekrycia strukturalnego. Za najbardziej przydatne w optymalizacji konstrukcji o dużej liczbie zmiennych uznano metodę Gaussa-Seidela i metodę siatki, których algorytmy można znaleźć np. w opracowaniu [24]. Doświadczenia z prac [45-49] posłużyły Paczkowskiemu do zbudowania programu dyskretnej optymalizacji ortogonalnych kratownic przestrzennych [74]. W pracy Leśniaka [60] rozwiązania optymalnego szukano metodą Monte-Carlo, polegającą na badaniu obszaru rozwiązań dla wylosowanych wartości zmiennych decyzyjnych. W wyniku otrzymywane jest rozwiązanie przybliżone. Gawkowska [31] szukała optymalnego doboru przekrojów elementów w przekryciach strukturalnych ze względu na zużycie materiału. Zadanie optymalizacji dyskretnej rozwiązywano metodą przeglądu sterowanego. Polegał on na wprowadzeniu warunków pozwalających stwierdzić, czy w podobzdarze wydzielonym z obszaru dopuszczalnych rozwiązań istnieje kombinacja zmiennych,

dająca rozwiązanie lepsze niż uprzednio otrzymane. Umożliwiło to wyłączenie z przeszukiwania pewnych podobszarów rozwiązań. Schmit i Fleury w pracy [81] podali algorytm optymalizacji konstrukcji dla przypadku, gdy zmienne decyzyjne mogą mieć charakter mieszany (ciągły i dyskretny). Zagadnienie syntezy konstrukcji sprowadzone zostało do szeregu oddzielnych zadań, które z kolei rozwiązywano budując odpowiednie zadania dualne. Przedstawiono porównanie wyników optymalizacji dyskretnej i ciągłej na przykładzie układów modelujących skrzydła samolotów. Zadania optymalizacji ciągłej i dyskretnej traktowane były jako przypadki szczególne przedstawianej metody. Zauważono, że pomimo pewnych niekonsekwencji matematycznych w rozszerzeniu sformułowania dualnego na zagadnienia dyskretne metoda prowadzi do poprawnych rozwiązań. W pracy [25] Fleury i Braibant proponują znajdowanie optimum problemu dyskretnego poprzez rozwiązywanie odpowiedniego problemu dualnego. Zaprezentowany przykład optymalizacji wieży kratowej potwierdza efektywność metody przy dużej liczbie zmiennych decyzyjnych. Grierson i Lee [34] również wykorzystywali metody programowania dualnego do optymalizacji dyskretnej płaskich ram przy uwzględnieniu ograniczeń na dopuszczalne naprężenia, przemieszczenia oraz odpowiednią wytrzymałość na zniszczenie plastyczne. Sepulveda i Cassis [83] podjęli problem optymalizacji na minimum ciężaru płaskich i przestrzennych konstrukcji prętowych dla dyskretnych i mieszanych zmiennych decyzyjnych. Rozwiązania otrzymane przy wykorzystaniu technik dualnych porównano z wynikami pracy [81]. Yates, Boffey i Templeman [104] podali heurystyczną metodę na wyznaczenie przybliżonego rozwiązania problemu optymalizacji na minimum ciężaru kratownicy wspornikowej przy ograniczeniach na naprężenia

i przemieszczenia. Metoda ta ze względu na ograniczony zakres stosowalności nie może być bezkrytycznie używana bez wcześniejszych badań określających jej efektywność. Templeman i Yates w pracy [91] wyznaczali konstrukcje prętowe o najmniejszym ciężarze przy warunkach na dopuszczalne naprężenia i przemieszczenia metodami programowania liniowego. Przyjmowano skokową zmienność przekrojów elementów i wprowadzano odpowiednie zmienne zero-jedynkowe. Przybliżone rozwiązanie optymalizacji dyskretnej problemu uzyskiwano poprzez zaokrąglenie przekroju każdego elementu (z założenia przyzmatycznego) do największego przekroju jego segmentów. Praca Lipsone i Agrawala [63] poświęcona została optymalizacji dyskretnej płaskich konstrukcji prętowych przy możliwości zmian topologii układu. Do rozwiązania problemu wykorzystano jedną z odmian metody Simplex, lecz otrzymanie globalnego optimum zadania uzależnione było od dokładności podania wartości początkowych, generowanych losowo. Liebman, Khachaturian, Chanaratna [62] optymalizowali między innymi ustroje ramowe przy ograniczeniach na naprężenia. Zastosowano metodę całkowitoliczbowych kierunków gradientów, która przy użyciu funkcji kary pozwoliła na rozwiązywanie zadań optymalizacji o dużej liczbie zmiennych. Fox i Liebman [26] zmodyfikowali algorytm nieliniowej metody Simplex, dostosowując go do zagadnień optymalizacji przy założeniach, że niektóre lub wszystkie zmienne mogą przybierać wartości dyskretne. Hua [37] optymalizował na minimum ciężaru konstrukcje prętowe i model skrzydła samolotu, wprowadzając ograniczenia na naprężenia w elementach i przemieszczenia wybranych węzłów. Przyjęte zostało założenie, że gdy przy pewnej wartości zmiennej decyzyjnej z katalogu nie są spełnione warunki ograniczające, warunki te nie będą speł-

nione dla zmiennych mniejszych od rozpatrywanej. Powyższe spostrzeżenie wykorzystano do budowy algorytmu metody przeglądu sterowanego, eliminującego rozwiązania dopuszczalne nie prowadzące do minimum. Stosowanie tej metody przy bardziej skomplikowanych, nieliniowych warunkach ograniczających prowadzić może jednak do błędnego określania rozwiązań. John, Ramakrishnan, Sharma [42] przedstawiają między innymi sposób otrzymywania rozwiązania optymalizacji dyskretnej konstrukcji prętowych w trakcie szukania rozwiązań optymalizacji ciągłej. Na podstawie wielkości przekrojów z optymalizacji ciągłej przyjmowano najbliższe, większe przekroje z dostępnych katalogów a rozwiązania dyskretne poszukiwano w ich otoczeniu na każdym kroku iteracyjnej procedury wyznaczania rozwiązania ciągłego. Annamalai, Lewis, Goldberg [1], Farkas i Szabo [23], Jarmai [41] oraz Berkowski i Boroń [9] proponują użycie jednej z kombinatorycznych metod systematycznego przeszukiwania "back-track" w zagadnieniach optymalizacji dyskretnej przy nieliniowej funkcji celu. Metody tej używano do optymalnego projektowania dźwigarów spawanych [1,23], dwuteowych belek hybrydowych [23], ram [23,41,9], oraz kratownic stalowych [9] przy warunkach ograniczających na dopuszczalne naprężenia i stateczność miejscową elementów. Potwierdzono przydatność metody w procedurach dekompozycyjnych, gdy liczba zmiennych decyzyjnych jest mniejsza od 10. Metoda "back-track" prowadzi do lepszych rezultatów niż inne metody przybliżone, stosowane w zagadnieniach z nieliniową funkcją celu [41]. Inną z metod kombinatorycznych, znajdującą zastosowanie przy liniowej funkcji celu jest metoda przeglądu według rosnących wartości funkcji celu. Bauer [5] posłużył się nią do optymalizacji dyskretnej uźebrowanych płyt i powłok. Bauer, Gutkowski, Iwanow

[8] zastosowali jej algorytm do optymalizacji przekrycia strukturalnego typu "Unistrut" na minimalną objętość materiału. W analizie statycznej przyjęto dyskretny, uproszczony model konstrukcji, której równowagę opisano równaniem różnicowym. Ci sami autorzy w [7] analizują problem optymalizacji dyskretnego podobnego przekrycia posługując się algorytmem Balasa, zaliczanym do metod podziału i ograniczeń. W pracy [36] dobierano przekroje prętów dla różnych ustrojów kratowych przy ograniczeniach na naprężenia i przemieszczenia. Konstrukcje o najmniejszym ciężarze materiału wyznaczano szukając najpierw rozwiązania problemu w zmiennych ciągłych. Następnie posługiwano się zmodyfikowaną wersją metody przeglądu według rosnących wartości funkcji celu i na podstawie znanego rozwiązania ciągłego szukano rozwiązań dyskretnych rozważanego problemu. Metody kombinatoryczne wykorzystywano również w [22] i [86]. Prace [13],[32] poświęcone są natomiast rozwiązywaniu zadań o zmiennych dyskretnych w przypadku wielokryterialnej optymalizacji konstrukcji.

Intensywny rozwój programowania dyskretnego jest wynikiem rosnących potrzeb w zakresie projektowania inżynierskiego przy dyskretnym charakterze zmiennych projektowych. Powyższy przegląd prac, dotyczących optymalizacji dyskretnego układów konstrukcyjnych, ukazuje różnorodność stosowanych metod i potwierdza konieczność tworzenia algorytmów, które mogłyby znaleźć szerokie zastosowanie w praktyce projektowej.

Problemy optymalizacji konstrukcji z uwagi na najniższą wartość własną (siłę krytyczną, częstość drgań własnych) mają bogatą literaturę. Obszerny spis publikacji, dotyczących optymalnego kształtowania ustrojów prętowych przy warunkach stateczności



podany został między innymi przez Gajewskiego i Zyczkowskiego [27]. W zdecydowanej większości podejmowanych zagadnień uwzględniano jedynie ciągły charakter zmiennych decyzyjnych, co może powodować pewne trudności przy bezpośrednim wykorzystywaniu wyników w praktyce inżynierskiej.

Stosunkowo niewiele prac poświęconych jest optymalizacji złożonych przestrzennych konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności globalnej (tzn. utraty stateczności konstrukcji jako całości a nie tylko utraty stateczności pojedynczych jej elementów). Zarghamee [105] uwzględnił możliwość utraty stateczności globalnej ściskanego słupa kratowego, optymalizowanego na minimalny ciężar. W warunkach ograniczających uwzględniono maksymalne naprężenia, stateczność elementów i ograniczenia na dopuszczalne przekroje prętów. Obciążenia krytyczne wyznaczane były przy zlinearyzowanej analizie stateczności konstrukcji. Zauważył on, że wielkości naprężeń przy krytycznej postaci wyboczenia optymalizowanej konstrukcji są w przybliżeniu stałe dla wszystkich elementów, których pola nie były ograniczone przez warunek minimalnego przekroju. Kiusalaas [54] podjął między innymi temat optymalizacji czterosegmentowej ramy. Wielkości obciążeń krytycznych, powodujących utratę stateczności globalnej, znajdował przez rozwiązanie zagadnienia na wartości własne posługując się techniką metody elementów skończonych. Khot, Venkayya oraz Berke w pracy [53] optymalizowali na minimum ciężaru ramy, wieżę kratową oraz prętowe przekrycie strukturalne w kształcie kopuły. Wartość obciążenia krytycznego wyznaczano na drodze zlinearyzowanej analizy stateczności. Wyprowadzono kryterium optymalności mówiące, że "konstrukcja o określonej postaci wyboczenia osiąga minimalny

ciężar, gdy stosunek gęstości energii sprężystej do ciężaru właściwego, odpowiadający znormalizowanej postaci wybożenia, jest taki sam dla wszystkich elementów". Rozwiązania otrzymywano wprowadzając pewien schemat rekurencyjny modyfikowania zmiennych decyzyjnych oraz odpowiednio skalując otrzymywane wyniki. Podobnie jak w poprzedniej pracy wykorzystano oprogramowanie MES. Khot [50,51] zajmował się optymalizacją konstrukcji prętowych ze względu na określone z góry zależności między wartościami własnymi, odpowiadającymi poszczególnym postaciom wybożenia. Posługując się metodą mnożników Lagrange'a i wykorzystując idee pracy [53] wyznaczył w [51] przekroje elementów wieży kratowej przy warunku, aby wielkości obciążeń krytycznych, odpowiadających pewnym postaciom wybożenia różniły się dla konstrukcji optymalnej o podaną wcześniej wartość. W publikacji [50], dotyczącej podobnego problemu dla prętowego przekrycia strukturalnego, autor przeanalizował również wpływ wstępnych imperfekcji geometrycznych na otrzymywane rozwiązania optymalne. W analizie stateczności uwzględniono geometrycznie nieliniowe zachowanie się konstrukcji. Kamat, Khot i Venkayya [44] na przykładzie dwu- i czteroprętowych kratownic małowyniosłych badali problem optymalizacji konstrukcji na maksymalną wartość obciążenia (punkt graniczny odpowiadający przeskokowi) przy warunku stałej objętości materiału elementów. Stwierdzono, że pomimo faktu geometrycznie nieliniowego zachowania się konstrukcji, kryterium optymalności jest stała wartość gęstości energii sprężystej w prętach. Potwierdzono również dualność problemu maksymalizacji obciążenia krytycznego przy ustalonej objętości i problemu minimalizacji ciężaru dla danego obciążenia. Khot i Kamat [52] analizowali zagadnienie optymalizacji

zacji przestrzennych ustrojów prętowych, wykazujących geometrycznie nieliniowe zachowanie. Wykorzystując związki rekurencyjne określali oni przekroje prętów prostych kratownic, dźwigara kratowego i przestrzennej powłoki prętowej o minimalnym ciężarze. Wartość obciążenia krytycznego wyznaczano na podstawie twierdzenia o minimum energii potencjalnej konstrukcji. Schmit, Ramanathan [82] optymalizowali na minimum ciężaru słup kratowy i strukturę skrzydła samolotu, włączając ograniczenia na stateczność elementów oraz konstrukcji jako całości. Przy pewnych wariantach obciążenia ograniczeniem krytycznym okazał się warunek stateczności globalnej. Romstad, Runge [78] oraz Murthy, Christiano [70] podjęli temat optymalizacji prostych ram, maksymalizując obciążenie krytyczne przy warunku stałej objętości. Prato [75] maksymalizował wartości własne (siły krytyczne, częstości drgań własnych) konstrukcji prętowych przy warunku ustalonego ciężaru i minimalnych przekrojów poprzecznych elementów. Amari, Yamakawa, Okumura [2] przyjmując skokowo zmienne przekroje elementów, zajęli się optymalizacją belek i ustrojów ramowych i poszukiwali kształtu konstrukcji maksymalizującego obciążenie krytyczne przy stałej masie układu. Switzky i Wang [87] optymalizowali na minimum ciężaru jedno- i kilkusegmentowe ramy. Wielkości określające konstrukcję optymalną przy założonych postaciach utraty stateczności przedstawione zostały na wykresach. Rosen i Schmit [80] przedstawili metodę optymalizacji konstrukcji prętowych z uwzględnieniem wstępnego zakrzywienia elementów oraz imperfekcji geometrii układu. Rozważany problem dotyczył optymalizacji na minimalny ciężar przy warunkach ograniczających na wielkości przekrojów, naprężenia, przemieszczenia, wyboczenie prętów i utratę statecz-

ności całej konstrukcji. Stwierdzono, że występowanie małych, wstępnych imperfekcji prowadzi do znacznego wzrostu ciężaru i odmiennego rozkładu materiału w porównaniu z optymalną konstrukcją idealną. Pokazano również, że uwzględnianie wrażliwości układu na imperfekcje poprzez wprowadzanie pewnych współczynników bezpieczeństwa w analizie konstrukcji idealnej prowadzi do nieprawidłowych rozwiązań rozpatrywanego zadania. W pracy Turnera i Plauta [96] podjęto natomiast problem optymalizacji belek i prostych ram, poddanych działaniu wielu niezależnych od siebie obciążeń. Dla ustalonej masy konstrukcji maksymalizowano obciążenie krytyczne przy różnych stosunkach działających obciążeń zewnętrznych. Elementy rozpatrywanych konstrukcji podzielone zostały na segmenty o podobnym kształcie lecz różnych polach przekrojów poprzecznych.

W przytoczonych powyżej pozycjach literatury, dotyczących optymalizacji konstrukcji prętowych z uwagi na obciążenie krytyczne, dyskretny charakter rzeczywistych zmiennych projektowych - przekrojów prętów - nie został uwzględniony.

### **13 Zakres i cel pracy**

Zagadnienie optymalizacji dyskretnej nabiera szczególnego znaczenia wraz z rozwojem prętowych przestrzennych form strukturalnych. Optymalizacji przestrzennych konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków stateczności globalnej poświęcony jest szereg prac lecz dotyczą one jedynie optymalizacji ciągłej. Dyskretny charakter rzeczywistych zmiennych projektowych - elementów prętowych dobieranych z katalogów - nie został w nich uwzględniony.

Przejrzał literatury dotyczącej metod optymalizacji dyskretnej

proceeds to the conclusion, that combinatorial methods belong to the most effective in solving optimization problems of engineering construction. In the present work one of them - the method of the complete enumeration of the values of the objective function [33,39]. It enables the determination of the global minimum of the considered problem by performing a partial, incomplete enumeration of the possible solutions and it can be applied in the case of linear objective function under arbitrary constraints.

In the work the following assumptions concerning the considered truss structures are made:

- structures are built from simple prismatic members;
- material of the members is homogeneous, isotropic and obeys Hooke's law;
- known are the geometric dimensions, the distribution and the magnitude of the applied load and its division into zones, corresponding to the members of the same cross-sections and physical properties of the material;
- single parametric, conservative external load is applied in the form of concentrated forces in the joints of the structure;
- geometry of the whole structure is completely defined by a finite number of generalized coordinates, which are the displacements (or displacements and rotation angles) of the joints of the structure (discrete model of the structure).

Considerations include:

- smallness of the truss structures at the joints in the form of ideal hinges when taking into account the geometrically nonlinear behavior of the structure; ideal and imperfect structures are considered; imperfections of the geometric dimensions;

- regularne, idealne konstrukcje ramowe przy założeniu małych przemieszczeń w stanie przedkrytycznym.

Obciążenia krytyczne rozważanych konstrukcji kratowych wyznaczano na podstawie statycznego kryterium utraty stateczności z warunku minimum energii potencjalnej. Obciążenia krytyczne konstrukcji ramowych określano metodą zakładania postaci utraty stateczności przy wykorzystaniu rachunku różnic skończonych.

Do zasadniczych celów postawionych w pracy i stanowiących nowe elementy w dziedzinie optymalizacji konstrukcji prętowych należy zaliczyć:

- zastosowanie programowania dyskretnego w optymalizacji konstrukcji prętowych z uwagi na warunki utraty stateczności globalnej;
- opracowanie algorytmu projektowania konstrukcji ze skatalogowanych części z uwzględnieniem stateczności układu;
- zbadanie zależności między rozwiązaniami optymalizacji ciągłej i dyskretnej w przypadku aktywnych warunków ograniczających na stateczność układu i określenie możliwości wykorzystania wyników optymalizacji ciągłej w zagadnieniach dyskretnych;
- analiza wpływu imperfekcji geometrii konstrukcji na wynik optymalizacji dyskretnej.

Oryginalną część pracy stanowi również rozszerzenie metody określenia stateczności regularnych konstrukcji prętowych [6] na przypadek walcowych powłok prętowych o dwóch krzyżulcach, bez krzyżulców i walcowych powłok otwartych oraz wykorzystanie otrzymanych zależności w rozważanym zagadnieniu. Wnioski wynikające z przeprowadzonych obliczeń numerycznych mogą okazać się przydatne w praktyce projektowej.

## 2 SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTIMALIZACJI

Rozważany problem polega na określeniu optymalnego doboru elementów konstrukcji o danej geometrii i znanych wartościach obciążenia tak, aby przyłożone obciążenie zewnętrzne  $P$  nie spowodowało utraty stateczności układu. Funkcją celu w zadaniu optymalizacji jest ciężar materiału prętów  $W$ . Konstrukcja została podzielona na  $k$  stref, odpowiadających prętom o jednakowych przekrojach i właściwościach fizycznych materiału. Przekroje prętów  $A_i$  w poszczególnych strefach i odpowiadające im momenty bezwładności dobierane są z różnych katalogów dostępnych elementów.

Zagadnienie optymalizacji sformułowano następująco:

Funkcja celu (ciężar materiału prętów)

$$(2.1) \quad W(A_i) = \sum_{i=1}^k d_i A_i \rho_i \longrightarrow \min ;$$

ograniczenia:

warunek wytrzymałości

$$(2.2) \quad -\sigma_{dop}^- \leq \sigma_s^P(A_i, I_i) \leq \sigma_{dop}^+, \quad s=1, \dots, M ;$$

warunek stateczności "lokalnej"

$$(2.3) \quad \sigma_s^P(A_i, I_i) \leq \sigma_s^{lok}(A_i, I_i), \quad s=1, \dots, M ;$$

warunek stateczności globalnej

$$(2.4) \quad \Lambda_{kr}(A_i, I_i) > \Lambda_P ;$$

warunek dyskretności zmiennych

$$(2.5) \quad \begin{aligned} A_i &\in \{ \bar{A}_i^1, \bar{A}_i^2, \dots, \bar{A}_i^{q_i} \}, \\ I_i &\in \{ \bar{I}_i^1, \bar{I}_i^2, \dots, \bar{I}_i^{q_i} \}, \end{aligned} \quad i=1, \dots, k ;$$

gdzie:

$M$  - liczba prętów konstrukcji,

$k$  - liczba stref sztywności,

$i = 1, \dots, k$  - numer strefy,

$s = 1, \dots, M$  - numer pręta,

$\{ \bar{A}_i^1, \bar{A}_i^2, \dots, \bar{A}_i^{q_i} \}$  - katalog  $q_i$  przekrojów prętów  $i$ -tej strefy,

$\{ \bar{I}_i^1, \bar{I}_i^2, \dots, \bar{I}_i^{q_i} \}$  - katalog  $q_i$  momentów bezwładności, odpowiadających przekrojom prętów z  $i$ -tej strefy,

$q_i$  - liczba prętów w katalogu  $i$ -tej strefy.

Ponadto przyjęto następujące oznaczenia:

$A_i$  - pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta z  $i$ -tej strefy;

$\bar{A}_i^j$  - pola przekrojów prętów w katalogu dla  $i$ -tej strefy ( $j=1, \dots, q_i$ );

$I_i$  - moment bezwładności odpowiadający przekrojowi  $A_i$ ;

$\bar{I}_i^j$  - moment bezwładności związany z przekrojem  $\bar{A}_i^j$ ;

$d_i$  - suma długości wszystkich prętów z  $i$ -tej strefy,

$$(2.6) \quad d_i = \sum_{m_i} l_{m_i},$$

gdzie:  $l_{m_i}$  - długość  $m_i$ -tego pręta;  $m_i$  - numery prętów należących do  $i$ -tej strefy;

$\rho_i$  - ciężar właściwy materiału pręta;

$\sigma_s^P$  - naprężenie w  $s$ -tym pręcie przy obciążeniu  $P$  (za dodatnie przyjęto naprężenia ściskające);

$\sigma_{dop}^-, \sigma_{dop}^+$  - naprężenia dopuszczalne przy rozciąganiu i ściskaniu;

$\sigma_{lok}^*$  - naprężenie odpowiadające utracie stateczności pojedynczego pręta  $s$  (wyboczeniu).



Symbolem  $\Lambda_p$  oznaczono skalarny parametr charakteryzujący wielkość przyłożonego obciążenia zewnętrznego

$$(2.7) \quad P = \Lambda_p p$$

gdzie:  $P$  - wektor obciążeń zewnętrznych,  $p$  - wektor obciążeń porównawczych.

Parametr obciążenia  $\Lambda_{kr}$  określa obciążenie krytyczne  $P_{kr} = \Lambda_{kr} p$ , powodujące utratę stateczności globalnej konstrukcji.

Zmiennymi decyzyjnymi zadania optymalizacji są przekroje prętów  $A_i$  w poszczególnych strefach i odpowiadające im momenty bezwładności, natomiast parametry stałe to wymiary globalne i długości elementów konstrukcji oraz wielkość obciążenia zewnętrznego.

Problem optymalizacji (2.1)-(2.5) sprowadzono do zadania programowania całkowitoliczbowego poprzez wprowadzenie zmiennych zero-jedynkowych  $z_i^j$  w następujący sposób:

$$(2.8) \quad z_i^j = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli w miejsce pręta konstrukcji} \\ & \text{z } i\text{-tej strefy wybrano } j\text{-ty pręt} \\ & \text{z katalogu,} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wówczas

$$(2.9) \quad \begin{aligned} A_i &= \sum_{j=1}^q A_i^j z_i^j, \\ I_i &= \sum_{j=1}^q I_i^j z_i^j, \end{aligned} \quad i=1, \dots, k,$$

przy warunku

$$(2.10) \quad \sum_{j=1}^q z_i^j = 1, \quad i=1, \dots, k.$$

Funkcję celu zagadnienia optymalizacji można napisać w postaci

$$(2.11) \quad W(z_l^j) = \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^{q_l} d_l z_l^j \bar{A}_l^j \rho_l \longrightarrow \min,$$

przy ograniczeniach

$$\left. \begin{aligned} (2.12) \quad \sigma_{dop}^- &\leq \sigma_s^p(z_l^j) \leq \sigma_{dop}^+ \\ (2.13) \quad \sigma_s^p(z_l^j) &\leq \sigma_s^{lok}(z_l^j) \\ (2.14) \quad \Lambda_{kr}(z_l^j) &> \Lambda_p \\ (2.15) \quad z_l^j &\in (0; 1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} s=1, \dots, M, \\ i=1, \dots, k, \\ j=1, \dots, q_l, \end{array}$$

$$(2.16) \quad \sum_{j=1}^{q_l} z_l^j = 1, \quad i=1, \dots, k.$$

Przy takim sformułowaniu pola przekrojów prętów  $\bar{A}_l^j$  oraz momenty bezwładności  $\bar{I}_l^j$  są parametrami stałymi, zmiennymi decyzyjnymi są natomiast  $z_l^j$ . Problem optymalizacji opisany jest liniową funkcją celu, lecz występują nieliniowe ograniczenia (2.12)-(2.14). Warunki dyskretności nie są jawnie narzucone na te ograniczenia, jednakże wielkości  $\sigma_s^p, \sigma_s^{lok}, \Lambda_{kr}$  są zdeterminowane poprzez wielkości  $z_l^j$  i w rzeczywistości nie mają charakteru ciągłego. Mamy więc do czynienia z dyskretnym, nieliniowym zadaniem programowania matematycznego o zmiennych zero-jedynkowych. Liczba zmiennych decyzyjnych zwiększyła się co prawda od  $k$  do  $\sum_{l=1}^k q_l$  ale pozwala to na zastosowanie jednej z metod programowania całkowitoliczbowego jaką jest metoda przeglądu według rosnących wartości funkcji celu [33, 39].

### 3 METODA ROZWIĄZANIA

#### 3.1 Metoda przeglądu według rosnących wartości funkcji celu

Wykorzystanie metod kombinatorycznych do rozwiązywania zadań programowania dyskretnego polega na stosowaniu takich algorytmów, aby rozwiązanie optymalne uzyskać dokonując częściowego, niepełnego przeglądu kombinacji zmiennych decyzyjnych, bez uciekania się do rozpatrywania wszystkich możliwych wariantów. W pracy wykorzystana została metoda przeglądu według rosnących wartości funkcji celu [33]. Pozwala ona na efektywne rozwiązanie zagadnienia (2.11)-(2.16) przy różnych katalogach zmiennych dyskretnych. Metoda przeglądu według rosnących wartości funkcji celu może być stosowana w przypadku liniowej funkcji celu i dowolnych warunków ograniczających. Idea wykorzystania jej algorytmu do zagadnień optymalizacji konstrukcji prętowych podana została po raz pierwszy w pracy [39].

Rozważany problem optymalizacji można zapisać w ogólnej postaci następująco:

$$(3.1) \quad F = \sum_{j=1}^n c_j u_j \longrightarrow \min,$$

$$(3.2) \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D},$$

gdzie:  $\mathbf{y} := (u_1, u_2, \dots, u_n)$  - wektor zmiennych decyzyjnych;

$u_j$  - całkowite ( $j=1, \dots, n$ );

$c_j \geq 0$  ( $j=1, \dots, n$ ) - współczynniki określające poszczególne składowe funkcji celu;

$\mathcal{D} \subset N^n$  - zbiór określony przez ograniczenia.

Rozwiązanie zadania optymalizacji (3.1), (3.2) polega na wyznaczeniu wektorów zmiennych decyzyjnych  $\mathbf{y}$  tak, aby odpowiadał im niemalejący ciąg wartości funkcji celu

$$(3.3) \quad ( F^0, F^1, F^2, \dots ),$$

zdefiniowany w następujący sposób:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} F^0: & \bigvee_{\mathbf{y}^0 \in N^n} F(\mathbf{y}^0) = F^0 \wedge \bigwedge_{\substack{\mathbf{y} \in N^n \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^0}} F(\mathbf{y}) \geq F(\mathbf{y}^0), \\ F^i: & \bigvee_{\mathbf{y}^i \in N^n} F(\mathbf{y}^i) = F^i \wedge \bigwedge_{i \geq j} F^i \geq F^j \wedge \bigwedge_{\substack{\mathbf{y} \in N^n \\ \mathbf{y} \neq \mathbf{y}^j, j=1, \dots, i-1}} F(\mathbf{y}) \geq F(\mathbf{y}^j). \end{aligned}$$

Wyraży ciągu wektorów zmiennych decyzyjnych

$$(3.5) \quad ( \mathbf{y}^0, \mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots ),$$

gdzie  $\mathbf{y}^i := ( y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i )$ ,

związane z poszczególnymi wartościami funkcji celu mają następujące własności:

$$(3.6) \quad \bigwedge_{\mathbf{y} \in N^n} F(\mathbf{y}) \geq F(\mathbf{y}^0) \wedge \bigwedge_{i > 0} \bigwedge_{\mathbf{y} \neq \mathbf{y}^j} F(\mathbf{y}) \geq F(\mathbf{y}^i) \\ j=0, 1, \dots, i-1.$$

Wynika stąd następujący fakt. Jeżeli  $j_{\min}$  jest najmniejszą wartością  $j \in N$ , spełniającą warunek (3.2) tzn.

$$(3.7) \quad j_{\min} := ( \min j \in N : \mathbf{y}^j \in \mathcal{D} ),$$

to rozwiązaniem zadania optymalizacji (3.1), (3.2) jest

$$(3.8) \quad \mathbf{y}^{\min} = \mathbf{y}^{j_{\min}}, \quad F^{\min} = F(\mathbf{y}^{j_{\min}}).$$

Znalezienie minimum funkcji celu przy określonych warunkach ograniczających sprowadza się zatem do tworzenia ciągów (3.3) i (3.5) oraz sprawdzania, czy zmienne decyzyjne spełniają warunki ograniczające (3.2). Rozwiązaniem optymalnym jest pierwsza taka wartość  $F^i$ , dla której zmienne decyzyjne  $\mathbf{y}^i$  spełniają (3.2).

### 3.2 Algorytm metody przeglądu

Sposób tworzenia ciągów (3.3) i (3.5) przy przyjęciu początkowych wartości zmiennych  $y^0 = 0$  oraz  $F^0 = 0$  opisuje poniższy algorytm.

1) Uporządkować współczynniki  $c_j$  opisujące funkcję celu w postaci

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n & \end{array} \quad \begin{array}{l} F^0 = 0 \\ y^0 = 0 \end{array}$$

2) Znaleźć  $c_r = \min c_j$ ; minimum  $c_j$  poszukiwana jest po wszystkich nieoznakowanych grupach kolumn,

$$c = c_r$$

3) Dopisać nową grupę kolumn do aktualnej tablicy według następującej zasady:

a) Wyznaczyć  $c'_j = c + c_j$  dla wskaźników odpowiadających nieoznakowanym kolumnom w grupie kolumn zawierającej kolumnę  $r$ ; wartości  $c_j$  pochodzą z pierwszej (wyjściowej) grupy kolumn.

b) Przyjąć kolumnę  $r$  jako znakowaną.

c) Dodać kolumny z nowo wyliczonymi wartościami  $c'_j$  jako nową grupę kolumn do istniejącej tablicy;  $c'_j$  rozpatrujemy jako nowe wartości  $c_j$ .

d) Przyporządkować nowej grupie kolumn wektor  $y$  z grupy do której należała kolumna  $r$ , z wartością  $y_r$  zwiększoną o 1.

4) Przejść ponownie do punktu 2).

Pierwszy z wektorów  $y$ , utworzonych zgodnie z punktem 3d), należący do zbioru  $D$ , wyznacza rozwiązanie optymalne.

Istotę działania podanego algorytmu zilustruje prosty przykład.

Zadanie polega na wyznaczeniu kolejnych wartości funkcji  $F$ , spełniających zależność

$$F = \sum_{j=1}^3 c_j u_j = 3 u_1 + 4 u_2 + 7 u_3$$

dla całkowitych  $u_1, u_2, u_3 \geq 0$ .

Porządkujemy współczynniki  $c_j$  opisujące funkcję celu w postaci grupy kolumn (1).

(1)

1	2	3
$3^{*1}$	$4^{*2}$	7
$y_1=0$	$y_2=0$	$y_3=0$

Minimalną wartością  $c_r = \min c_j$  jest 3 w pierwszej kolumnie. Zgodnie z punktem 3 algorytmu tworzymy nową grupę kolumn (2) i znakujemy  $c_r$  (np. symbolem \*1).

(2)

1	2	3
$6^{*3}$	7	10
$y_1=1$	$y_2=0$	$y_3=0$

Minimalnym nieoznakowanym elementem jest teraz 4 w drugiej kolumnie grupy kolumn (1). Tworzymy zatem nową grupę kolumn (3) i znakujemy 4 symbolem \*2.

(3)

2	3
8	11
$y_2=1$	$y_3=0$

Wobec punktu 3a) algorytmu, w grupie kolumn (3) nie mamy kolumny oznaczonej przez 1, gdyż byłaby ona powtórzeniem kolumny 2 w (2). Następną wartość tworzy 6 z grupy kolumn (2).

1	2	3
9	10	13
$y_1=2$	$y_2=0$	$y_3=0$

Dalsze wykonywanie algorytmu prowadzi do tworzenia nowych grup kolumn:

3	2 3	2 3	1 2 3	3	2 3	3	2 3
14	11 14	12 15	12 13 16	17	14 17	18	15 18
$u_1=0$	$u_1=1$	$u_1=0$	$u_1=3$	$u_1=1$	$u_1=2$	$u_1=0$	$u_1=1$
$u_2=0$	$u_2=1$	$u_2=2$	$u_2=0$	$u_2=0$	$u_2=1$	$u_2=1$	$u_2=2$
$u_3=1$	$u_3=0$	$u_3=0$	$u_3=0$	$u_3=1$	$u_3=0$	$u_3=1$	$u_3=0$

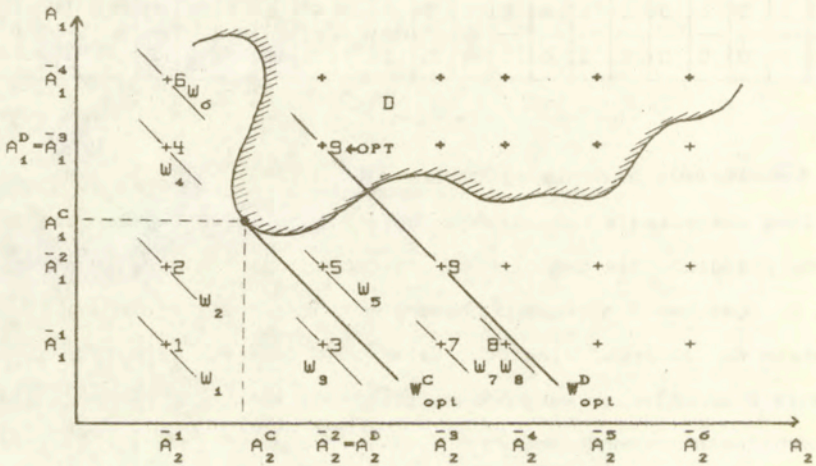
Kolejne wartości funkcji F można zatem zapisać:

F	0	3	4	6	7	7	8	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	14	15
$u_1$	0	1	0	2	0	1	0	3	1	2	0	1	0	4	2	0	0	1	2	0
$u_2$	0	0	1	0	0	1	2	0	0	1	1	2	3	0	0	2	0	1	2	2
$u_3$	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	2	1	0	1

### 3.3 Rozwiązanie zadania optymalizacji

Ideę wyznaczania rozwiązania optymalnego przy wykorzystaniu metody przeglądu dla dwóch zmiennych decyzyjnych  $A_1$  i  $A_2$  ilustruje rys. 1. Symbolem D określono obszar, w którym przekroje  $A_1$  i  $A_2$ , należące do zbiorów ciągłych, spełniają warunki ograniczające zadania z pominięciem warunków dyskretności zmiennych. W rozważanym problemie zmienne decyzyjne  $A_1$  i  $A_2$  mogą przybierać, jedynie wartości dyskretne  $A_1 \in (\bar{A}_1^1, \bar{A}_1^2, \bar{A}_1^3, \bar{A}_1^4)$ ,  $A_2 \in (\bar{A}_2^1, \bar{A}_2^2, \dots, \bar{A}_2^d)$  a dopuszczalne warianty doboru  $A_1$  i  $A_2$  w optymalizacji dyskretnej oznaczone zostały przez krzyżyki. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych  $\mathcal{D}$  (wzór (3.2)) zadania optymalizacji dyskretnej (3.1), (3.2) wyznaczony jest przez wszystkie kombinacje zmiennych dyskretnych, należące do obszaru D. Na rys. 1 zbiór  $\mathcal{D}$  tworzą warianty doboru

zmiennych  $A_1$  i  $A_2$  oznaczone krzyżkami pogrubionymi. Liniom pochyłym odpowiada stała funkcja celu (jednakowy ciężar). W metodzie przeglądu warunki ograniczające zadania sprawdzane są kolejno dla kombinacji doboru  $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ , którym odpowiadają rosnące wartości funkcji celu. Cyframi oznaczono kolejność, w jakiej wyznaczane są warianty doboru  $A_1$  i  $A_2$ . Poszczególnym kombinacjom zmiennych decyzyjnych odpowiada funkcje celu  $w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq \dots$ . Dyskretne rozwiązanie optymalne  $w_{opt}^D$  wyznaczone jest przez  $A_1^D = \bar{A}_1^3, A_2^D = \bar{A}_2^2$ , będące pierwszą kombinacją szukanych wielkości, dla której spełnione są ograniczenia. Przez  $w_{opt}^C$  oraz  $A_1^C$  i  $A_2^C$  oznaczono rozwiązanie optymalizacji ciągłej.



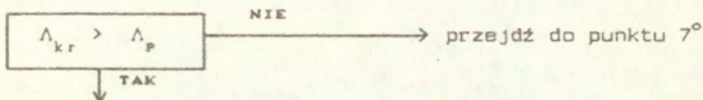
Rys. 1

Rozwiązanie zadania (2.1)-(2.5) polega na tworzeniu kombinacji przekrojów prętów, którym towarzyszą rosnące wartości funkcji celu. Dla każdego wariantu doboru zmiennych decyzyjnych  $y^i, F^i$

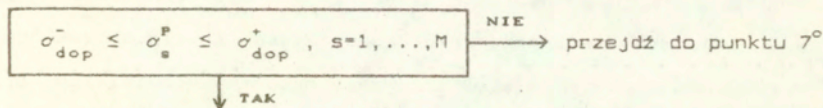


(którymi w rozważanym zadaniu są zmienne  $z_j^i$  i odpowiada im ciężar konstrukcji  $W(z_j^i)$ ) sprawdzanie warunków ograniczających odbywa się według następującego schematu:

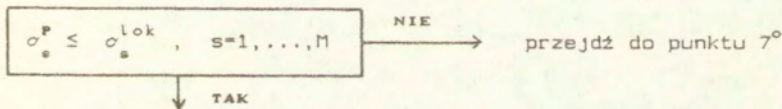
- 1° Obliczenie obciążenia krytycznego  $\Lambda_{kr}$ .
- 2° Sprawdzenie warunku stateczności globalnej.



- 3° Określenie stanu naprężeń  $\sigma_s^P$  w elementach ( $s=1, \dots, M$ ).
- 4° Sprawdzenie warunku wytrzymałości.



- 5° Sprawdzenie warunku stateczności "lokalnej".



- 6° Rozpatrywany wariant doboru zmiennych decyzyjnych  $y^i, F^i$  spełnia wszystkie warunki ograniczające i wyznacza rozwiązanie optymalne  $y^{opt} = y^i, F^{opt} = F^i$ .
- 7° Przejdź do sprawdzenia warunków ograniczających dla następnego wariantu doboru zmiennych decyzyjnych  $y^{i+1}, F^{i+1}$ .

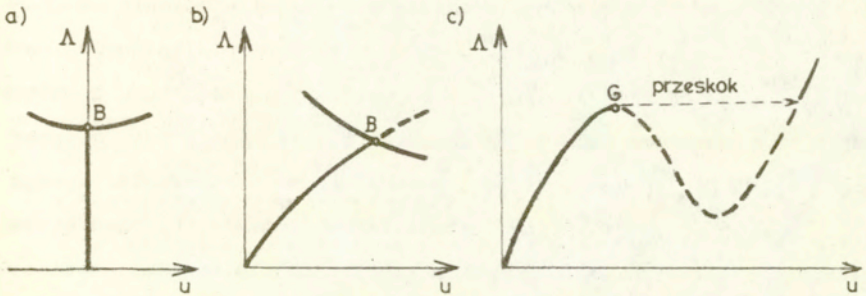
## 4 WARUNKI STATECZNOŚCI W ZADANIU OPTIMALIZACJI

### 4.1 Utrata stateczności konstrukcji sprężystych

Analiza stateczności układu konstrukcyjnego polega na określeniu warunków, przy których konstrukcja znajdująca się dotychczas w równowadze przestanie być stateczna. Stateczność równowagi konstrukcji sprężystych jest często definiowana jako szczególny przypadek stateczności jej ruchu (np. [106],[79]). Analizie stateczności dyskretnych układów sprężystych poświęcone są między innymi monografie [92,93,94,38,15,17].

Założmy, że konstrukcja znajduje się początkowo w stanie równowagi statycznej pod wpływem działania pewnego obciążenia. Jest to konfiguracja stateczna, przy której małe chwilowe zakłócenia (jak przyłożenie niewielkich sił czy nadanie niewielkich przemieszczeń) nie spowodują zmian położenia równowagi. W konfiguracji niestatecznej małe zaburzenia powodują przejście układu do nowego stanu równowagi, odległego od początkowego. Stanem przejściowym pomiędzy konfiguracją stateczną a niestateczną jest konfiguracja krytyczna. Statyczne kryterium utraty stateczności określa konfigurację krytyczną jako taki stan układu, w którym przy danym obciążeniu równowaga istnieje również w pewnym położeniu sąsiednim do położenia rozpatrywanego [106]. Wartość obciążenia, przy którym układ przestaje być stateczny (związanego z konfiguracją krytyczną) nazywana jest obciążeniem krytycznym. Tworzy się wówczas nowa postać równowagi (czyli następuje bifurkacja stanu równowagi) lub obciążenie osiąga lokalne maksimum, związane ze zjawiskiem przeskoku.

Zależność pewnego przemieszczenia charakterystycznego konstrukcji od obciążenia obrazuje ścieżka równowagi (droga położeń równowagi). Na rys.2 przedstawiono kilka typowych ścieżek równowagi sprężystych układów konstrukcyjnych. Przez  $\Lambda$  oznaczono wartość parametru obciążenia, przez  $u$  - pewną skalarną miarę stanu przemieszczenia, natomiast linia ciągła i przerywana opisuje odpowiednio stan stateczny i niestateczny.



Rys.2

Obciążeniu krytycznemu, związanemu z utratą stateczności konstrukcji, odpowiada na ścieżce równowagi punkt krytyczny. Istnieją dwa typy punktów krytycznych. W pierwszym przypadku (rys.2a, 2b) pierwotna ścieżka równowagi, wychodząca z początku układu współrzędnych  $\Lambda$ - $u$  przecina się z pewną wtórną ścieżką równowagi w punkcie  $B$ . W punkcie  $B$ , zwanym punktem bifurkacji, istnieje więcej niż jedno rozwiązanie podstawowego układu równań równowagi problemu i każde z nich odpowiada innej ścieżce równowagi (innemu stanowi równowagi). Drugim typem punktów krytycznych jest punkt gra-

niczny (punkt maksimum obciążenia) oznaczony na rys.2c literą G. Przy powiększaniu obciążenia  $\Lambda$  tak, aby dojść na ścieżce równowagi do punktu G, obserwuje się zjawisko tzw. przeskoku. Charakteryzuje się ono nagłym przejściem danej konfiguracji do nowego położenia równowagi. Warunek utraty stateczności globalnej (2.14) zadania optymalizacji (2.11)-(2.16) związany jest z wyznaczeniem najmniejszej wartości obciążenia, przy którym napotykamy na jeden z punktów krytycznych.

W ogólnym przypadku zależność obciążenie - przemieszczenie ma charakter nieliniowy (rys.2b,2c). Jedną z przyczyn nieliniowego zachowania się konstrukcji sprężystych są nieliniowości typu geometrycznego, spowodowane dużymi przemieszczeniami i obrotami elementów układu. Prawidłowa analiza zjawiska utraty stateczności wymaga wówczas uwzględnienia wpływu przemieszczeń na zmiany geometrii konstrukcji i prowadzi do skomplikowanych zależności matematycznych.

W wielu ważnych, praktycznych problemach zadowalające wyniki mogą być otrzymane na podstawie zlinearyzowanej analizy stateczności sprężystej. Zakłada się wtedy proporcjonalność przemieszczeń konstrukcji do przyłożonych obciążeń a pierwotną ścieżkę równowagi układu konstrukcyjnego można przedstawić w postaci linii prostej (np. rys.2a). Podejście to okazuje się przydatne w określaniu punktów bifurkacji niektórych konstrukcji [3,55,57].

Przedstawiane w pracy rozważania obejmują optymalizację małowyniosłych układów kratowych oraz regularnych konstrukcji ramowych. W rozdziale 4.2 podano sposób określania obciążeń krytycznych dla ustrojów kratowych wykazujących zachowanie geometrycznie nieliniowe. W rozdziale 4.3 omówiono problem zlinearyzowanej ana-

lizy stateczności. W rozdziale 4.4 przedstawiono metodę wyznaczenia obciążeń krytycznych dla ramowych, regularnych konstrukcji prętowych (analiza stateczności początkowej).

#### 4.2 Stateczność konstrukcji geometrycznie nieliniowych

Stateczność konserwatywnych układów sprężystych określana być może na podstawie statycznego kryterium utraty stateczności [38, 15, 79, 92, 93].

Konfiguracja rozważanej konstrukcji jest jednoznacznie opisana przez  $N$  niezależnych parametrów przemieszczeniowych - współrzędnych uogólnionych  $Q_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ), oraz w przypadku obciążenia jednoparametrycznego przez jeden parametr obciążenia  $\Lambda$ . Dla każdej wartości  $\Lambda$  można określić całkowitą energię potencjalną układu  $U$ , składającą się z energii odkształceń sprężystych  $\Pi$  i energii potencjalnej przyłożonego obciążenia  $\Omega$

$$(4.1) \quad U(Q_j, \Lambda) = \Pi(Q_j) + \Omega(Q_j, \Lambda) .$$

Całkowita energia potencjalna jest stacjonarna względem każdego kinematycznie dopuszczalnego przemieszczenia ze stanu równowagi. Powyższy, konieczny i wystarczający warunek równowagi prowadzi do układu  $N$  równań równowagi konstrukcji

$$(4.2) \quad U_i(Q_j, \Lambda) \equiv \frac{\partial U(Q_j, \Lambda)}{\partial Q_i} = 0 \quad , \quad i=1, \dots, N ,$$

gdzie indeks przy  $U$  oznacza cząstkowe różniczkowanie względem odpowiedniej współrzędnej uogólnionej.

Równania równowagi (4.2) wynikają ze znikania pierwszej wariacji funkcji energii  $\delta U=0$ . Koncepcja stateczności związana jest z drugą ( lub w niektórych przypadkach wyższego rzędu ) wariacją  $U$ .

Zasada minimum energii potencjalnej głosi, że "układ konserwatywny jest w stanie równowagi statecznej tylko wtedy, gdy wartość energii potencjalnej osiąga minimum względne". Warunkiem wystarczającym, aby  $U$  osiągała minimum względne jest dodatnia określoność drugiej wariacji energii potencjalnej  $\delta^2 U$ . Konfiguracji krytycznej układu konserwatywnego, odpowiadającej krytycznemu stanowi równowagi odpowiada znikanie tzw. wyznacznika stateczności (np. [38,93])

$$(4.3) \quad \det \left| U_{i,j} \right| \equiv \det \left| \frac{\delta^2 U}{\delta Q_i \delta Q_j} \right| = 0$$

W ogólnym przypadku utrata stateczności konstrukcji jest zagadnieniem nieliniowym. Analiza stateczności ustrojów prętowych, gdy węzły układu doznają dużych przemieszczeń, wymaga uwzględnienia wpływu deformacji na warunki równowagi. Zmiany geometrii mają istotny wpływ np. na stateczność małowyniosłych, prętowych przekryć strukturalnych, w których przyłożone obciążenie spowodować może zjawisko przeskoku [40,103]. Problemom geometrycznych nieliniowości w analizie stateczności konstrukcji poświęcone są między innymi prace [3,79,55,15,17].

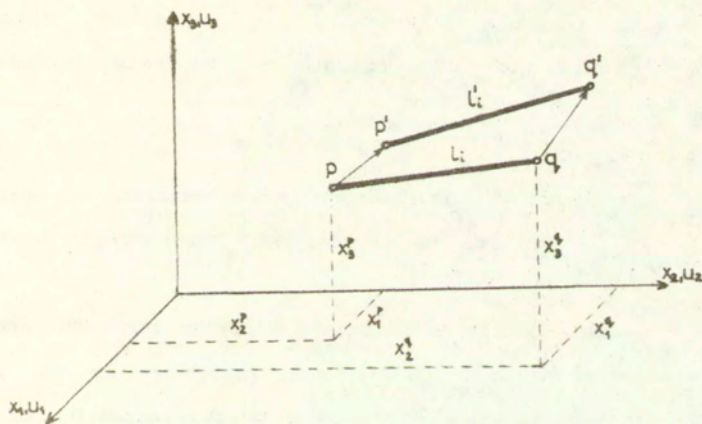
W zagadnieniach geometrycznie nieliniowych, w związkach pomiędzy odkształceniem i przemieszczeniem uwzględnia się cziony nieliniowe. Ma to takie same konsekwencje jak ułożenie równań równowagi dla odkształconej geometrii układu. Poniższe rozważania dotyczą sposobu określania obciążeń powodujących utratę stateczności globalnej, gdy możliwe są duże przemieszczenia węzłów układu, natomiast odkształcenia pozostają małe. Rozważana konstrukcja jest układem prostoliniowych prętów pryzmatycznych, połączonych idealnymi przegubami i przenoszącymi jedynie siły osiowe. Przemieszcze-

niowe równania równowagi i stateczności rozważanych układów kratowych zapisano w globalnym układzie odniesienia związanym z początkową, niezdeformowaną konfiguracją geometrii konstrukcji ( $\Lambda=0$ ). Współrzędne uogólnione  $Q_i$  odpowiadają przemieszczeniom poszczególnych węzłów konstrukcji.

Nieliniowa zależność między odkształceniem a przemieszczeniem elementu prętowego  $i$  pokazanego na rys.3 otrzymana będzie przy następującej definicji odkształcenia

$$(4.4) \quad \varepsilon_i = \frac{l'_i - l_i}{l_i},$$

gdzie  $l_i$  jest długością początkową pręta  $i$  a  $l'_i$  jego długością po odkształceniu.



Rys. 3

Wielkości współrzędnych położenia węzłów  $p$  i  $q$  elementu oraz przemieszczeń w tych węzłach określone są w lokalnym układzie

odniesienia odpowiednio przez  $x_k^p, x_k^q$  oraz  $u_k^p, u_k^q$  ( $k=1,2,3$ ).

Ponieważ zgodnie z wcześniej poczynionymi założeniami, nawet duże ( skończone ) przemieszczenia końców pręta wywołują na tyle małe odkształcenia, aby poprawne było przyjęcie liniowej zależności pomiędzy odkształceniem a naprężeniem, energia sprężystości typowego elementu prętowego  $i$  może być przedstawiona

$$(4.5) \quad e_i = \frac{1}{2} E_i A_i l_i \varepsilon_i^2,$$

gdzie  $E_i$  -moduł Younga,  $A_i$  - pole przekroju poprzecznego  $i$ -tego elementu. Wartość  $\varepsilon_i$  jest powiązana z przemieszczeniami końców pręta zależnością

$$(4.6) \quad \varepsilon_i = \frac{1}{l_i} \left[ \sum_{k=1}^3 (\Delta x_k + \Delta u_k)(\Delta x_k + \Delta u_k) \right]^{0.5} - 1,$$

gdzie  $\Delta$  jest operatorem różnicy współrzędnych  $x_k$  lub różnicy wartości przemieszczeń  $u_k$  ( $k=1,2,3$ ) w węzłach  $q$  i  $p$ .

Całkowita energia potencjalna konstrukcji o  $N$  stopniach swobody, zbudowanej z  $M$  takich elementów przedstawiona być może za pomocą zależności

$$(4.7) \quad U = \Pi + \Omega = \sum_{i=1}^M e_i - \mathbf{Q}^T \mathbf{P},$$

gdzie  $\mathbf{Q}_{Nx1}$  jest wektorem uogólnionych przemieszczeń w węzłach konstrukcji,  $\mathbf{P}_{Nx1}$  - wektorem sił zewnętrznych przyłożonych w tych węzłach.

Wprowadzając jeden parametr obciążenia  $\Lambda$  i wektor rozkładu obciążeń zewnętrznych  $\mathbf{P}_{Nx1}$  ( wzór (2.7) ) oraz przyrównując do zera pierwszą wariację  $U$  względem uogólnionych przemieszczeń  $\mathbf{Q}$  otrzymujemy układ  $N$  nieliniowych równań równowagi konstrukcji, który można zapisać w postaci macierzowej

$$(4.8) \quad \frac{\partial U}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{Q}} - \Lambda \mathbf{p} - \mathbf{K}(\mathbf{Q}) - \Lambda \mathbf{p} = \mathbf{0},$$



Wyraży macierzy  $K(Q)$  w globalnym układzie współrzędnych uogólnionych  $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_N)$  budowane są przez odpowiednie sumowanie członów macierzy  $\left[ \frac{\partial e_i}{\partial u} \right]$ , określających sztywności poszczególnych elementów. Reguły transformacji z lokalnego układu współrzędnych do układu globalnego podane są np. w [4,28]. Składowe macierzy  $\left[ \frac{\partial e_i}{\partial u} \right]$  ( $u = (u_1^p, u_2^p, u_3^p, u_1^q, u_2^q, u_3^q)$ ) elementu prętowego pokazanego na rys.3 mają postać

$$(4.9) \quad \frac{\partial e_i}{\partial u_j^p} = \frac{E A_i (1_i - 1_i')}{1_i 1_i'} (x_j^q - x_j^p + u_j^q - u_j^p),$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial u_j^q} = - \frac{\partial e_i}{\partial u_j^p}, \quad j = 1, 2, 3,$$

gdzie

$$(4.10) \quad 1_i' = \left[ \sum_{k=1}^3 (\Delta x_k + \Delta u_k)^2 \right]^{0.5}.$$

Punkt krytyczny, który może być punktem bifurkacji lub punktem granicznym, określa najmniejsza wartość obciążenia, przy której równowaga przestaje być stateczna. Zgodnie z twierdzeniem o minimum energii potencjalnej statecznemu stanowi konstrukcji odpowiada warunek dodatniej określoności drugiej wariacji energii potencjalnej układu  $\delta^2 U$ . Obciążeniu krytycznemu odpowiada zatem taka wartość parametru  $\Lambda$ , przy której

$$(4.11) \quad \det \left| \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial Q_j \partial Q_i} \right\} \right| = 0.$$

Podobnie jak w przypadku równań równowagi konstrukcji wyraży macierzy  $\left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial Q_j \partial Q_i} \right\}$  tworzy się odpowiednio sumując człony  $\frac{\partial^2 e}{\partial u_i \partial u_j}$  poszczególnych prętów:

$$\frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^p)^2} = E_i A_i \left[ \frac{1}{l_i} \left( 1 - \frac{l_i}{l_i'} \right) + \frac{(\Delta x_j + \Delta u_j)^2}{(l_i')^3} \right],$$

$$\frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^p)^2} = \frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^q)^2} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_j^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_j^p}, \quad J=1,2,3,$$

$$(4.12) \quad \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^p} = E_i A_i (\Delta x_j + \Delta u_j) (\Delta x_k + \Delta u_k) \frac{1}{(l_i')^3}, \quad J=1,2,3,$$

$$k=1,2,3,$$

$$\frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^p} = \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_k^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_k^p}, \quad J \neq k.$$

Naprężenia w elementach  $\sigma_s^p$  przy obciążeniu  $P = \Lambda p_p$ , występujące w warunkach (2.12) i (2.13), można określić rozwiązując układ  $N$  nieliniowych równań równowagi (4.8). Obciążenia krytyczne  $P_{kr}$  oraz odpowiadające im naprężenia można natomiast wyznaczyć rozwiązując układ  $N+1$  równań (4.8), (4.11) ze względu na niewiadome  $\Lambda$  i  $Q_i$  ( $i=1, \dots, N$ ). Ponieważ przedstawiane w pracy przykłady numeryczne dotyczą konstrukcji o niedużej liczbie stopni swobody (maksymalnie 21), do rozwiązywania nieliniowych układów równań algebraicznych wybrano metodę Newtona-Raphsona. Należy dodać, że w układach konstrukcyjnych o dużej liczbie niewiadomych należałoby zastosować procedury bardziej efektywne numerycznie (zwłaszcza w przypadku wyznaczania obciążeń krytycznych). Przegląd takich metod zawarty jest między innymi w pracach [99],[100],[101].

Utrata stateczności lokalnej konstrukcji prętowych związana jest z przekroczeniem obciążeń, powodujących wyboczenie poszczególnych prętów. W sprężystych konstrukcjach prętowych o węzłach w postaci idealnych przegubów wyboczenie pręta spowoduje siła

$$(4.13) \quad p_s^{\text{lok}} = \frac{\pi^2 E_s I_s}{l_s^2}$$

gdzie  $I_s$  - moment bezwładności przekroju pręta  $s$ . W warunkach utraty stateczności "lokalnej" pręta (2.13) można zatem zapisać

$$(4.14) \quad \sigma_s^{\text{lok}} = \frac{\pi^2 E_s I_s}{A_s l_s^2}$$

### 4.3 Zlinearyzowana analiza stateczności

W szerokiej klasie zagadnień wpływ nieliniowości geometrycznych pozostaje nieznaczący do krytycznej wartości obciążenia. Pominięcie w równaniach równowagi pewnych członów nieliniowych prowadzi do tzw. problemu stateczności zlinearyzowanej a przy zaniechaniu wpływu początkowych przemieszczeń do problemu stateczności początkowej [56,101]. Przemieszczenia przed utratą stateczności są dostatecznie małe, aby równania równowagi można było zapisać dla początkowej, niezdeformowanej konfiguracji układu. Przy założeniu, że zachowanie się konstrukcji przed utratą stateczności jest liniowe a obciążenia zewnętrzne  $\mathbf{P}$  i naprężenia w elementach narastają proporcjonalnie do jednego parametru obciążenia  $\Lambda$ , warunek osiągnięcia stanu krytycznego można przedstawić w postaci zależności [28,56,96]

$$(4.15) \quad \det [ \mathbf{K}_E + \Lambda \mathbf{K}_G ] = 0.$$

Macierze  $\mathbf{K}_E$  i  $\mathbf{K}_G$  dotyczą całej konstrukcji i w nomenklaturze metody elementów skończonych noszą nazwy odpowiednio macierzy sztywności sprężystej i sztywności geometrycznej. Mogą być one generowane z macierzy sztywności poszczególnych elementów konstrukcji [4,28]. Wyrazy macierzy sztywności sprężystej elementu prętowego

pokazanego na rys.3 można zapisać

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^p)^2} &= \frac{E_i A_i}{l_i^3} (\Delta x_j)^2 \\
 \frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^p)^2} &= \frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^q)^2} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_j^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_j^p}, \quad j=1,2,3, \\
 (4.16) \quad \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^p} &= \frac{E_i A_i}{l_i^3} \Delta x_j \Delta x_k, \quad j=1,2,3, \\
 & \quad k=1,2,3, \\
 \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^p} &= \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_k^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_k^p}, \quad j \neq k,
 \end{aligned}$$

natomiast wyrazy macierzy sztywności geometrycznej elementu pręto-  
wego poddanego działaniu jednostkowej siły osiowej mają postać

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^p)^2} &= - \frac{(\Delta x_j)^2}{l_i^3} + \frac{1}{l_i} \\
 \frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^p)^2} &= \frac{\partial^2 e_i}{(\partial u_j^q)^2} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_j^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_j^p}, \quad j=1,2,3, \\
 (4.17) \quad \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^p} &= - \frac{\Delta x_j \Delta x_k}{l_i^3}, \quad j=1,2,3, \\
 & \quad k=1,2,3, \\
 \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^p} &= \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_k^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^p \partial u_k^q} = - \frac{\partial^2 e_i}{\partial u_j^q \partial u_k^p}, \quad j \neq k.
 \end{aligned}$$

Analiza stateczności wymaga rozwiązania zagadnienia na wartości  
własne (4.15). Obciążeniu krytycznemu konstrukcji odpowiada naj-  
mniejsza wartość własna  $\Lambda_{\min}$  równania (4.15).

## 4.4 Stateczność regularnych konstrukcji prętowych

### 4.4.1 Geometria konstrukcji

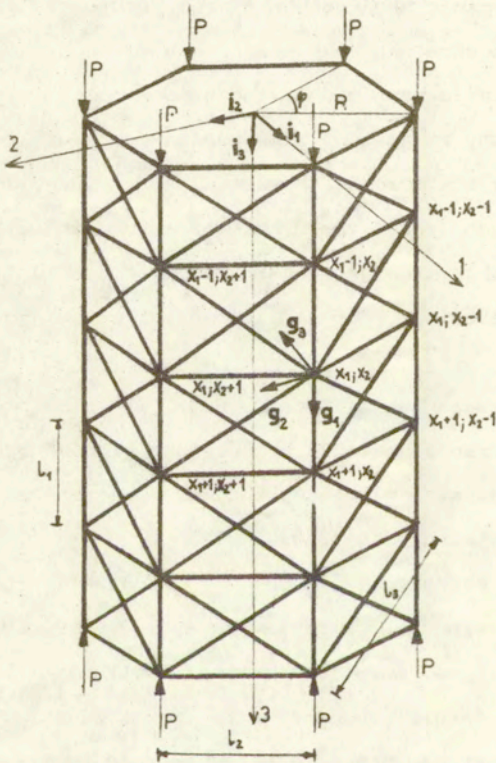
Wśród konstrukcji prętowych bardzo często spotyka się ustroje zbudowane z dużej liczby jednakowych lub podobnych prętów; charakteryzujące się regularnością kształtów i rozmieszczenia elementów. Powtarzalność elementów takich ustrojów konstrukcyjnych może być wykorzystana do rozwiązania zagadnienia stateczności. Wykorzystanie rachunku różnic skończonych przy przyjęciu matematycznego modelu ośrodka dyskretnego w postaci siatki punktów pozwala na znaczne uproszczenie problemu stateczności i ograniczenie trudności obliczeniowych, związanych z występowaniem dużej liczby elementów. Analizie stateczności konstrukcji zbudowanych z elementów powtarzalnych przy posłużeniu się rachunkiem różnicowym poświęcone zostały między innymi monografie [10,14,102,35,97], w których przedstawiono również liczną literaturę, dotyczącą tej tematyki.

Poniższe rozważania są kontynuacją i rozszerzeniem metody odwrotnej wyznaczania obciążeń krytycznych regularnych konstrukcji prętowych, przedstawionej między innymi w pracach [6],[35] i dotyczą problemu stateczności początkowej.

Przyjęty w [35] matematyczny model ośrodka dyskretnego w postaci siatki punktów zapewnia opisanie punktów węzłowych konstrukcji liczbami całkowitymi, przy jednoczesnej możliwości zmiany układu współrzędnych. Bardzo dogodnie przy rozwiązywaniu analitycznym i numerycznym jest odwzorowanie zbioru węzłów w zbiór par uporządkowanych  $(x_1; x_2)$ , będących elementami iloczynu kartezjańskiego dwóch zbiorów liczb całkowitych. Regularność konstrukcji można

wykorzystać ograniczając rozważania do jednego, powtarzalnego węzła konstrukcji. Pozwala to na znaczne ograniczenie trudności obliczeniowych związanych z występowaniem dużej liczby elementów i prowadzi do niedużej liczby równań różnicowych.

Zajmiemy się analizą stateczności sprężystej, prętowej powłoki prostokątnościennej o podstawie regularnego wielokąta przedstawionej na rys.4.



Rys. 4

Położenie węzła konstrukcji w przestrzeni określone jest za pomocą wektora  $\mathbf{x}$ , którego składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych  $\mathbf{i}_j$  ( $j=1,2,3$ ) określone są jako funkcje dwóch argumentów całkowitych  $x_1, x_2$ . Przy przyjęciu sposobu numeracji węzłów konstrukcji jak na rys.4 wektor  $\mathbf{x}$  można zapisać

$$(4.18) \quad \mathbf{x} = R \cos(x_2 \varphi) \mathbf{i}_1 + R \sin(x_2 \varphi) \mathbf{i}_2 + x_1 \mathbf{i}_3,$$

gdzie:  $R$  - promień koła opisanego na podstawie prostopadłościanu,  $l_1$  - długość prętów wzdłuż tworzącej,  $l_2$  - długość prętów obwodowych. Gdy podstawa powłoki jest  $L_2$  - kątem foremnym

$$(4.19) \quad \varphi = \frac{2\pi}{L_2},$$

$$(4.20) \quad R = \frac{l_2}{2\sin\frac{\varphi}{2}},$$

gdzie:  $L_1$  - liczba segmentów powłoki ( $x_1 = 0, 1, \dots, L_1$ ) a  $L_2$  - liczba prętów obwodowych ( $x_2 = 1, 2, \dots, L_2$ ).

Wygodniej jest przyjąć układ odniesienia związany z rozpatrywanym węzłem, złożony z trzech liniowo niezależnych wektorów bazy  $\mathbf{g}_k$  ( $k=1,2,3$ )

$$(4.21) \quad \mathbf{g}_\alpha = \frac{\Delta_{2^\alpha} \mathbf{x}}{\left| \Delta_{2^\alpha} \mathbf{x} \right|}, \quad \alpha=1,2,$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\left| \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 \right|}$$

W rozważaniach posłużono się elementami rachunku różnicowego. Poniżej podano definicje podstawowych operatorów różnicowych używanych w dalszych przekształceniach. Bliższe informacje na temat własności operacji różnicowych zawierają między innymi monografie [43,35].

Operator przesunięcia  $E_n^r$  powoduje przesunięcie argumentu funkcji  $x_n$  o wielkość  $r$  i jest ogólnie określony następująco:

$$(4.22) \quad E_n^r f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n+r, x_{n+1}, \dots, x_m),$$

gdzie  $r$  jest liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną.

Dla przypadku dwóch zmiennych mamy

$$(4.23) \quad E_1^{r_1} E_2^{-r_2} f(x_1, x_2) = f(x_1+r_1, x_2-r_2).$$

Operatory różnicy zdefiniowane są przez

$$(4.24) \quad \Delta_i^r = E_i^r - 1, \quad \bar{\Delta}_i^r = E_i^{-r} - E_i^{-r},$$

operatory sumy

$$(4.25) \quad \nabla_i^r = E_i^r + 1, \quad \bar{\nabla}_i^r = E_i^r + E_i^{-r},$$

w przypadku gdy  $r=1$ , symbol ten jest opuszczany

$$(4.26) \quad E_1 E_2 f(x_1, x_2) = f(x_1+1, x_2+1).$$

Posłużono się ponadto następującymi operatorami:

$$(4.27) \quad \begin{aligned} \Delta_{12}^2 &= E_1 E_2 + E_1^{-1} E_2^{-1} - 2, & \Delta_{12}^{2*} &= E_1 E_2^{-1} + E_1^{-1} E_2 - 2, \\ \bar{\Delta}_{12}^2 &= E_1 E_2 - E_1^{-1} E_2^{-1}, & \bar{\Delta}_{12}^{2*} &= E_1^{-1} E_2 + E_1 E_2^{-1}, \\ \nabla_{12}^2 &= E_1 E_2 + E_1^{-1} E_2^{-1} + 2, & \nabla_{12}^{2*} &= E_1 E_2^{-1} + E_1^{-1} E_2 + 2. \end{aligned}$$

Układ prętów zbiegających się w węźle konstrukcji o współrzędnych  $x_1, x_2$  opisany jest za pomocą trzech wzajemnie prostopadłych wektorów kierunkowych  $\underline{t}_\lambda, \tilde{\underline{t}}_\lambda, \check{\underline{t}}_\lambda$ ,

$$(4.28) \quad \underline{t}_\lambda = \frac{(E_\lambda - 1) \mathbf{x}}{|(E_\lambda - 1) \mathbf{x}|}$$

$$(4.29) \quad \underline{t}_\lambda \times \tilde{\underline{t}}_\lambda = \check{\underline{t}}_\lambda,$$

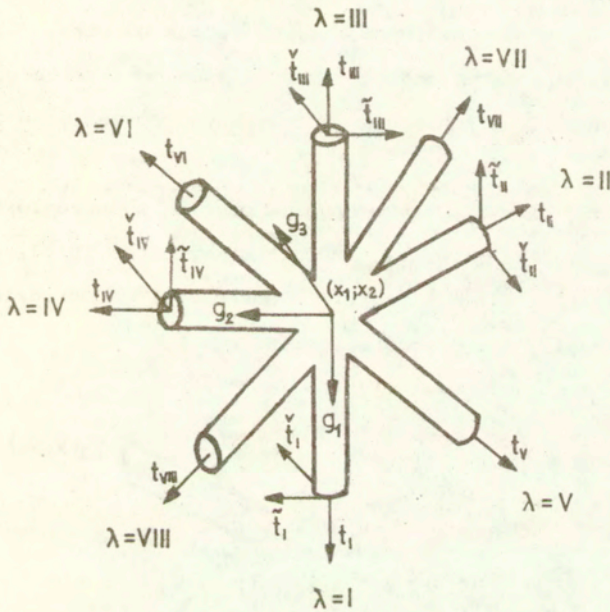
gdzie symbol "x" oznacza iloczyn wektorowy. Operator przesunięcia  $E_\lambda$  powoduje przesunięcie wartości rozpatrywanej funkcji do sąsiedniego węzła  $\lambda$  ( $\lambda = I, II, \dots, \lambda_0$ ) a  $\lambda_0$  oznacza liczbę prętów zbiegających się w węźle.



Każdy z punktów węzłowych ma inne wektory bazy. Zależność pomiędzy wektorami bazy dla dwóch węzłów połączonych prętem: wektorami bazy  $\mathbf{g}_i$  w węźle  $(x_1, x_2)$  oraz wektorami bazy  $E_\lambda \mathbf{g}_i$  w sąsiednim węźle  $E_\lambda(x_1, x_2)$  można przedstawić za pomocą związku

$$(4.30) \quad E_\lambda \mathbf{g}_i = E_\lambda a_i^k \mathbf{g}_k,$$

gdzie  $E_\lambda a_i^k$  oznaczają składowe  $i$ -tego wektora  $E_\lambda \mathbf{g}_i$  na  $k$ -ty wektor  $\mathbf{g}_k$ . Typowy powtarzalny węzeł prostokątnej powłoki prętowej pokazany został na rys.5.



Rys. 5

W przypadku konstrukcji przedstawionej na rys.4

$$(4.31) \quad \begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{g}_2 &= -\sin(x_2 \varphi) \mathbf{i}_1 + \cos(x_2 \varphi) \mathbf{i}_2, \\ \mathbf{g}_3 &= -\cos(x_2 \varphi) \mathbf{i}_1 - \sin(x_2 \varphi) \mathbf{i}_2. \end{aligned}$$

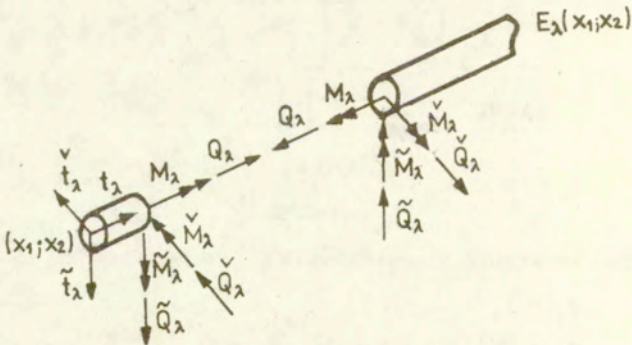
Wektor przesunięcia dowolnego węzła konstrukcji pod wpływem obciążenia oznaczono przez  $u$ , wektor nieskończenie małego kąta obrotu przez  $v$ . W układzie odniesienia  $g_i$  można je przedstawić

$$(4.32) \quad u = u^i g_i, \quad v = v^i g_i.$$

#### 4.4.2 Równania równowagi węzła

Równania równowagi pojedynczego, powtarzalnego węzła wyprobowano przy założeniu, że konstrukcja zbudowana jest z prostych, sprężystych prętów przyzmatycznych, połączonych sztywno w węzłach tak, że osie obojętne przecinają się w jednym punkcie. Obciążenie zewnętrzne ma charakter statyczny, siły skupione zostały przyłożone w węzłach i przebiegają przez punkt przecięcia się osi obojętnych.

Związki między siłami występującymi w pręcie a przemieszczeniami jego końców wyrażają wzory metody odkształceń [12]. Dodatkowo zwroty momentów i sił dla pręta  $\lambda$  w prawoskrętnym układzie współrzędnych  $t_\lambda, \tilde{t}_\lambda, \check{t}_\lambda$  przedstawiono na rys.6.



Rys. 6

W przypadku gdy na pręt działają duże siły osiowe, siły wewnętrzne mogą być zapisane następująco:

$$\begin{aligned}
 \overset{v}{M}_\lambda &= \tilde{k}_\lambda l_\lambda^2 [(\bar{D}_1 + \bar{D}_2 E_\lambda)(v^j t_{\lambda j})] - \frac{\bar{D}_3}{l_\lambda} (E_\lambda - 1)(u^j t_{\lambda j}) , \\
 \tilde{M}_\lambda &= \overset{v}{k}_\lambda l_\lambda^2 [(\bar{D}_1 + \bar{D}_2 E_\lambda)(v^j t_{\lambda j})] + \frac{\bar{D}_3}{l_\lambda} (E_\lambda - 1)(u^j t_{\lambda j}) , \\
 M_\lambda &= - k_\lambda (E_\lambda - 1)(v^j t_{\lambda j}) , & j=1,2,3 , \\
 \overset{v}{Q}_\lambda &= - \overset{v}{k}_\lambda l_\lambda [D_3 (E_\lambda + 1)(v^j t_{\lambda j}) + \frac{\bar{D}_4}{l_\lambda} (E_\lambda - 1)(u^j t_{\lambda j})] , \\
 \tilde{Q}_\lambda &= \tilde{k}_\lambda l_\lambda [D_3 (E_\lambda + 1)(v^j t_{\lambda j}) - \frac{\bar{D}_4}{l_\lambda} (E_\lambda - 1)(u^j t_{\lambda j})] , \\
 Q_\lambda &= - c_\lambda (E_\lambda - 1)(u^j t_{\lambda j}) .
 \end{aligned}
 \tag{4.33}$$

We wzorach przyjęto oznaczenia

$$\begin{aligned}
 c_\lambda &= \frac{E A_\lambda}{l_\lambda} , & \tilde{k}_\lambda &= \frac{E \tilde{I}_\lambda}{l_\lambda^3} , \\
 k_\lambda &= \frac{G J_\lambda}{l_\lambda} , & \overset{v}{k}_\lambda &= \frac{E I_\lambda}{l_\lambda^3} ;
 \end{aligned}
 \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{\alpha(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)}{2(1-\cos\alpha) - \alpha\sin\alpha} , \\
 D_2 &= \frac{\alpha(\alpha - \sin\alpha)}{2(1-\cos\alpha) - \alpha\sin\alpha} , \\
 D_3 &= \frac{\alpha^2(1-\cos\alpha)}{2(1-\cos\alpha) - \alpha\sin\alpha} , \\
 D_4 &= \frac{\alpha^3 \sin\alpha}{2(1-\cos\alpha) - \alpha\sin\alpha} ,
 \end{aligned}
 \tag{4.35}$$

$$\alpha = \left[ \frac{P_\lambda l_\lambda^2}{\overset{v}{E} I_\lambda} \right]^{0.5} ,
 \tag{4.36}$$

gdzie:  $E, G$  - moduł Younga i Kirchhoffa;  $l_\lambda$  - długość pręta  $\lambda$ ;  
 $\tilde{I}_\lambda, I_\lambda$  - osiowe momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta  
 $\lambda$  odpowiednio względem  $\tilde{t}_\lambda$  i  $t_\lambda$ ;  $J_\lambda$  - odśrodkowy moment bezwład-  
 ności pręta  $\lambda$ ;  $P_\lambda$  - siła działająca na pręt  $\lambda$ .

Współczynniki  $\bar{D}_k$  ( $k=1,2,3,4$ ) zbudowane są analogicznie jak  $D_k$  (4.35)  
 z tym zastrzeżeniem, że zamiast  $\alpha$  występuje teraz

$$(4.37) \quad \bar{\alpha} = \left[ \frac{P_\lambda l_\lambda^2}{EI_\lambda} \right]^{0.5}$$

W przypadku gdy w pręcie  $\lambda$  nie występują duże siły osiowe należy  
 przyjąć

$$(4.38) \quad D_1 = \bar{D}_1 = 4; \quad D_2 = \bar{D}_2 = 2; \quad D_3 = \bar{D}_3 = 6; \quad D_4 = \bar{D}_4 = 12.$$

Równania równowagi pojedynczego węzła otrzymamy sumując w lokalnym  
 układzie współrzędnych  $g_l$  wypadkowe siły i momenty działające na  
 dany węzeł. W każdym węźle powłoki (rys.5) zbiega się osiem prętów  
 $\lambda=I, II, \dots, VIII$ .

Przy wyprowadzaniu równań równowagi poczyniono następujące  
 założenia :

- 1) Sztywności i długości prętów wzdłuż tworzącej  $\lambda=I, III$  są jedna-  
 kowe - oznaczono je indeksem 1.
- 2) Sztywności i długości prętów obwodowych  $\lambda=II, IV$  są jednakowe -  
 - oznaczono je indeksem 2.
- 3) Sztywności i długości prętów krzyżulców  $\lambda=V, VI, VII, VIII$  są  
 jednakowe - oznaczono je indeksem 3.
- 4) Pręty są połączone sztywno w węzłach.
- 5) Sztywność giętna prętów krzyżulców  $\lambda=V, VI, VII, VIII$  jest na ty-  
 le mała, że wystarczy uwzględnić wyłącznie ich sztywność osio-  
 wą (połączenie przegubowe).

6) Działaniu dużych sił osiowych P podlegają tylko pręty tworzącej  $\lambda=I, III$ ; siły wewnętrzne pochodzące od P w prętach obwodowych i krzyżulcach są małymi wyższego rzędu w porównaniu z P.

Jeżeli przez  $M_i^z$  i  $Q_i^z$  oznaczymy rzuty obciążenia zewnętrznego, przyłożonego do węzła  $(x_1; x_2)$ , na kierunki lokalnego układu współrzędnych  $Q_i$ , to ogólne równania równowagi pojedynczego węzła powłoki prętowej można zapisać w postaci

$$(4.39) \quad \sum_{\lambda=I}^{VIII} (t_{\lambda i} Q_{\lambda} + \tilde{t}_{\lambda i} \tilde{Q}_{\lambda} + t_{\lambda i} Q_{\lambda}) + Q_i^z = 0, \quad i=1,2,3$$

$$\sum_{\lambda=I}^{VIII} (t_{\lambda i} M_{\lambda} + \tilde{t}_{\lambda i} \tilde{M}_{\lambda} + t_{\lambda i} M_{\lambda}) + M_i^z = 0.$$

Przy przyjęciu  $M_i^z = Q_i^z = 0$ , wykorzystaniu związków (4.24), (4.25), (4.33) oraz uwzględnieniu podanych wyżej założeń upraszczających, otrzymuje się komplet sześciu równań opisujących równowagę pojedynczego węzła powłoki prętowej (rys. 4), poddanej działaniu sił ściskających P

$$(4.40)_{1-3} \quad [c_1 \Delta_1^2 + 12k_2 \Delta_2^2 + c_3 S_1^2 (\Delta_{12}^2 + \Delta_{12}^{2*})] u^1 + c_3 \cos^2 \varphi S_1 S_2 (\Delta_{12}^2 - \Delta_{12}^{2*}) u^2 -$$

$$- c_3 \sin^2 \varphi S_1 S_2 (\Delta_{12}^2 - \Delta_{12}^{2*}) u^3 + 6k_2 l_2 \sin^2 \varphi \Delta_2^2 v^2 + 6k_2 l_2 \cos^2 \varphi \Delta_2^2 v^3 = 0,$$

$$c_3 S_1 S_2 \cos^2 \varphi (\Delta_{12}^2 - \Delta_{12}^{2*}) u^1 + [k_1 \bar{D}_4 \Delta_1^2 - 12k_2 \sin^2 \varphi \Delta_2^2 + c_2 \cos^2 \varphi \Delta_2^2 +$$

$$+ c_3 S_2^2 \cos^2 \varphi (\Delta_{12}^2 + \Delta_{12}^{2*})] u^2 - [(12k_2 + c_2) \bar{\Delta}_2^2 + c_3 S_2^2 (\bar{\Delta}_{12}^2 +$$

$$+ \bar{\Delta}_{12}^{2*})] \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi u^3 + 6k_2 l_2 \sin^2 \varphi v^1 - k_1 l_1 \bar{D}_3 \bar{\Delta}_1 v^3 = 0$$

$$c_3 S_1 S_2 \sin^2 \varphi (\bar{\Delta}_{12}^2 - \bar{\Delta}_{12}^{2*}) u^1 + [(12k_2 + c_2) \bar{\Delta}_2^2 + c_3 S_2^2 (\bar{\Delta}_{12}^2 +$$

$$+ \bar{\Delta}_{12}^{2*})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi u^2 + [12k_2 \cos^2 \varphi \Delta_2^2 + k_1 D_4 \Delta_1^2 - c_2 \sin^2 \varphi \Delta_2^2 -$$

$$- c_3 S_2^2 \sin^2 \varphi (\Delta_{12}^2 + \Delta_{12}^{2*})] u^3 - 6k_2 l_2 \cos^2 \varphi v^1 + k_1 l_1 D_3 \bar{\Delta}_1 v^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
 & -6k_2 l_2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} u^2 - 6k_2 l_2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} u^3 + [2k_2 l_2^2 (\Delta_2^2 + 6) - k_1 \Delta_1^2] v^4 = 0, \\
 & -6\tilde{k}_2 l_2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} u^1 + k_1 l_1 D_3 \bar{\Delta}_1 u^3 + [-2\tilde{k}_2 l_2^2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} (\Delta_2^2 - 2) + k_1 l_1^2 (2D_1 + \\
 (4.40)_{4-6} & + D_2 \bar{\nabla}_1) - k_2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} \Delta_2^2] v^2 + [-2\tilde{k}_2 l_2^2 \bar{\Delta}_2 + k_2 \bar{\Delta}_2] \sin^2 \frac{\varrho}{2} v^3 = 0, \\
 & 6\tilde{k}_2 l_2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} u^1 - k_1 l_1 D_3 \bar{\Delta}_1 u^2 + [2\tilde{k}_2 l_2^2 \bar{\Delta}_2 - k_2 \bar{\Delta}_2] \sin^2 \frac{\varrho}{2} \cos^2 \frac{\varrho}{2} v^2 + \\
 & + [k_1 l_1^2 (2D_1 + D_2 \bar{\nabla}_1) + 2\tilde{k}_2 l_2^2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} (\Delta_2^2 + 6) + k_2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} v^2] v^3 = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$(4.41) \quad S_1 = \frac{l_1}{l_3}, \quad S_2 = \frac{l_2}{l_3}, \quad l_3 = \left[ l_1^2 + l_2^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Przy pominięciu w (4.40) operatorów różnicowych oznaczonych gwiazdką otrzymuje się równania równowagi węzła powłoki prętowej z pojedynczym wykrzyżowaniem (tzn. pominięcie prętów  $\lambda=U$  i  $\lambda=VI$ ).

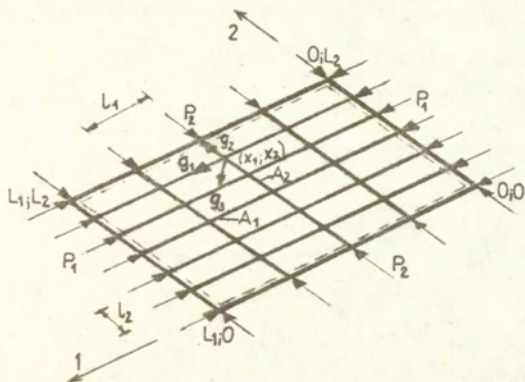
Przyjęcie w (4.40)  $c_3=0$  prowadzi do równań równowagi dla powłoki prętowej bez wykrzyżowań (pominięcie prętów  $\lambda=U, VI, VII, VIII$ ).

Przyjmując natomiast  $c_3=0$  i  $\frac{\varrho}{2}=0$  otrzymamy komplet równań opisujących równowagę pojedynczego węzła ortogonalnej płyty prętowej, ściskanej w kierunku 1 (rys.7,  $P_2=0$ )

Równania równowagi dla przypadku ortogonalnej płyty prętowej, poddanej działaniu sił ściskających  $P_1$  i  $P_2$  w dwóch kierunkach (rys.7) otrzymać można w podobny sposób, przyjmując, że wektor położenia węzła rusztu można przedstawić w postaci

$$(4.42) \quad \mathbf{x} = l_1 \times_1 \mathbf{i}_1 + l_2 \times_2 \mathbf{i}_2,$$

gdzie:  $l_1, l_2$  - długości prętów w kierunku 1 i 2.



Rys. 7

Przyjmując w ogólnych równaniach równowagi (4.39)  $\lambda = I, II, III, IV$  i stosując oznaczenia dla powtarzalnego węzła konstrukcji jak na rys.8, po podobnych przekształceniach otrzymujemy komplet równań opisujących równowagę pojedynczego węzła rusztu, poddanego działaniu sił ściskających w dwóch kierunkach.

$$\begin{aligned}
 & (c_1 \Delta_1^2 + k_2 \bar{D}_4^* \Delta_2^2) u^1 + k_2 l_2 \bar{D}_3^* \bar{\Delta}_2 v^3 = 0, \\
 & (c_2 \Delta_2^2 + k_1 \bar{D}_4 \Delta_1^2) u^2 - k_1 l_1 \bar{D}_3 \bar{\Delta}_1 v^3 = 0, \\
 & (k_1 \bar{D}_4 \Delta_1^2 + k_2 \bar{D}_4^* \Delta_2^2) u^3 - k_2 l_2 \bar{D}_3^* \bar{\Delta}_2 v^1 + k_1 l_1 \bar{D}_3 \bar{\Delta}_1 v^2 = 0, \\
 & k_2 l_2 \bar{D}_3^* \bar{\Delta}_2 u^3 + [k_1 \Delta_1^2 - k_2 l_2^2 (2\bar{D}_1^* + \bar{D}_2^* \bar{\nabla}_2)] v^1 = 0, \\
 & k_1 l_1 \bar{D}_3 \bar{\Delta}_1 u^3 - [k_2 \Delta_2^2 - k_1 l_1^2 (2\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \bar{\nabla}_1)] v^2 = 0, \\
 & \tilde{k}_2 l_2 \bar{D}_3^* \bar{\Delta}_2 u^1 - \tilde{k}_1 l_1 \bar{D}_3 \bar{\Delta}_1 u^2 + [k_1 l_1^2 (2\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \bar{\nabla}_1) + \tilde{k}_2 l_2^2 (2\bar{D}_1^* + \bar{D}_2^* \bar{\nabla}_2)] v^3 = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.43}$$

Współczynniki  $D_i$  i  $\bar{D}_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) w (4.43) zależą od sił ściskających  $P_1$  i należy w nich przyjąć odpowiednio

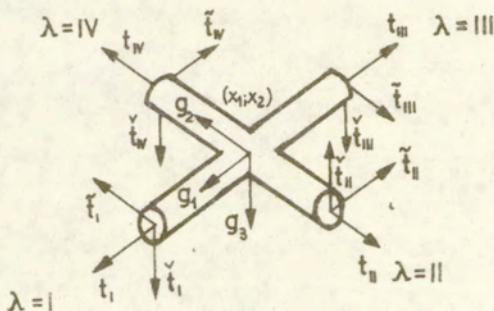
$$(4.44) \quad \alpha = \left[ \frac{P_1 l_1^2}{E I_1} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{\alpha} = \left[ \frac{P_1 \tilde{l}_1^2}{E \tilde{I}_1} \right]^{\frac{1}{2}};$$

natomiast współczynniki  $D_i^*$  i  $\bar{D}_i^*$  zależą od sił  $P_2$  i są wyznaczone odpowiednio dla

$$(4.45) \quad \alpha^* = \left[ \frac{P_2 l_2^2}{E I_2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{\alpha}^* = \left[ \frac{P_2 \tilde{l}_2^2}{E \tilde{I}_2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

W przypadku, gdy ruszt poddany jest działaniu sił ściskających tylko w jednym kierunku (np. w kierunku 1)

$$(4.46) \quad D_1^* = \bar{D}_1^* = 4, \quad D_2^* = \bar{D}_2^* = 2, \quad D_3^* = \bar{D}_3^* = 6, \quad D_4^* = \bar{D}_4^* = 12.$$



Rys. 8



#### 4.4.3 Wyznaczanie obciążenia krytycznego

Rozwiązanie problemu stateczności regularnych konstrukcji prętowych polega na znalezieniu funkcji, spełniających warunki brzegowe i opisujących wywołany działającym obciążeniem stan przemieszczenia punktów konstrukcji. Wstawienie tych funkcji do różnicowych równań równowagi pojedynczego, powtarzalnego węzła prowadzi po przekształceniach do układu jednorodnych równań algebraicznych

$$(4.47) \quad W [ U^1 \ U^2 \ U^3 \ U^1 \ U^2 \ U^3 ]^T = 0 ,$$

gdzie:  $U^i, U^i$  ( $i=1,2,3$ ) - niewiadome współczynniki opisujące postać utraty stateczności;  $W$  - macierz współczynników przy niewiadomych. Rozwiązanie układu równań (4.47) będzie miało sens, gdy wyznacznik charakterystyczny ze współczynników przy niewiadomych będzie równy zeru

$$(4.48) \quad \det [ W ] = 0 .$$

W wyznaczniku tym jedyną niewiadomą jest wielkość siły osiowej  $P_\lambda$ , zawarta w wyrażeniach (4.35). Rozwiązanie równania (4.48) da zatem siłę  $P_\lambda$ , powodującą utratę stateczności konstrukcji przy założonej uprzednio postaci utraty stateczności. W zagadnieniach stateczności regularnych konstrukcji prętowych, podobnie jak w stateczności klasycznych płyt i powłok [94] przyjmuje się często postać wyboczenia w formie funkcji trygonometrycznych.

W przykładach obliczeń numerycznych (rozd. 5.6 i 5.7) miejsce zerowe wyznacznika macierzy (4.48) wyznaczano stosując bezwarunkowo zbieżną metodę bisekcji.

W wielu przypadkach optymalnego kształtowania elementów konstrukcji na podstawową wartość własną (częstość drgań własnych lub siłę krytyczną) okazało się, że optymalnie zaprojektowany na pierwszej wartości własnej element lub układ konstrukcyjny może posiadać

taką samą lub nawet mniejszą wartość drugiej wartości własnej, związanej z wyższą formą drgań lub postacią wybożenia [73,11,69]. Dlatego w rozważanych przykładach obliczeniowych (rozd. 5.6, 5.7) nie ograniczono się do sprawdzenia wartości obciążenia krytycznego dla jednej, najbardziej prawdopodobnej dla danej konstrukcji postaci utraty stateczności ale badano możliwość wybożenia dla kilku różnych form. Sprawdzenie warunku utraty stateczności lokalnej związane jest z przyjęciem odpowiednich funkcji, opisujących postacie utraty stateczności konstrukcji.

Sposób doboru zależności, opisujących formy utraty stateczności dla poszczególnych układów konstrukcyjnych przedstawiony został w rozdziałach 5.6 i 5.7, poświęconych przykładom numerycznym.

Wyniki otrzymywane dla przypadku wybożenia płyt prętowych z płaszczyzny pokrywają się z wartościami uzyskanymi na podstawie [72]. W przykładach testowych stwierdzono również zgodność z rezultatami uzyskanymi za pomocą metody elementów skończonych, podanymi w pracy [101]. Wielkości obciążeń krytycznych, obliczone dla przeszczennych konstrukcji ramowych na podstawie przedstawionej metody, są zbieżne z rezultatami badań doświadczalnych, zamieszczonymi w pracach [90] i [35] (różnice rzędu 3-5 %).

## 5 PRZYKŁADY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Przedstawione w pracy przykłady obliczeniowe dotyczą dyskretnej optymalizacji układów prętowych na minimum ciężaru z uwzględnieniem warunków utraty stateczności. Rozwiązania otrzymano wykorzystując algorytm metody przeglądu według rosnących wartości funkcji celu. Przyjęto założenie, że połączenia węzłowe prętów są jednakowe i nie uwzględniano ich ciężaru w funkcji celu. Główny nacisk położono na prześledzenie właściwości otrzymywanych rozwiązań dyskretnych. Obliczenia numeryczne przeprowadzono na mini-komputerze SM-4 oraz mikrokomputerze REDSTONE kompatybilnym z IBM PC/XI.

Zamieszczone przykłady obliczeniowe można podzielić na dwie podstawowe grupy. W pierwszej (rozd. 5.1-5.5) optymalizacja dotyczy małowyniosłych konstrukcji kratowych, w których utrata stateczności może mieć charakter przeskoku i których analiza wymaga uwzględnienia nieliniowości geometrycznych, związanych z występowaniem dużych przemieszczeń. Porównano wyniki optymalizacji ciągłej i dyskretnej. Przedstawiono pewną metodę skalowania znanych rozwiązań optymalnych, służącą do oszacowania przekrojów, spełniających warunek stateczności globalnej przy innych obciążeniach. Pokazano również błędy do jakich prowadzi stosowanie zlinearyzowanej analizy stateczności do tego typu zagadnień. Własności otrzymywanych rozwiązań dyskretnych prześledzono na przykładzie małowyniosłych dwu- i czteroprętowych układów kratowych, lecz cechy te mogą być uogólnione na konstrukcje bardziej rozbudowane. Przedmiotem rozważań były również prętowe przekrycia strukturalne w kształcie kopuł, w których analizowano ponadto wpływ wstępnych

imperfekcji geometrii na wyniki optymalizacji dyskretnej.

W analizowanych przykładach przyjmowano moduł Younga  $E=7000 \text{ kN/cm}^2$  ( lub  $6894 \text{ kN/cm}^2$  ),  $\sigma_{dop}^+ = \sigma_{dop}^- = 20 \text{ kN/cm}^2$  i  $\rho=0,0275 \text{ N/cm}^3$  ( lub  $0,02715 \text{ N/cm}^3$  ), odpowiadające własnościom stopów aluminium stosowanych w budownictwie. Przekroje poprzeczne ( z wyjątkiem przykładu 5.2.1) dobierane były na podstawie katalogów wyrobów aluminiowych według PN-80/H-93667.

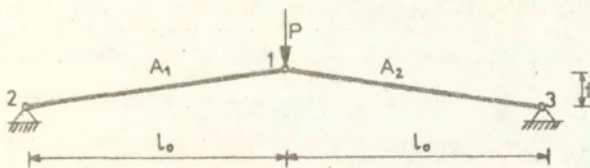
Druga grupa przykładów (rozdz. 5.6 i 5.7) związana jest z optymalizacją regularnych konstrukcji prętowych [76]. W tym przypadku chodziło również o pokazanie możliwości zastosowania metody odwrotnej wyznaczania obciążeń krytycznych regularnych konstrukcji ramowych (rozdz.4.4) w rozważanym zagadnieniu.

W przykładach numerycznych przyjmowano jak dla stali konstrukcyjnych  $E=20500 \text{ kN/cm}^2$ ,  $G=8000 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_{dop}^+ = \sigma_{dop}^- = 21,5 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\rho=0,0785 \text{ N/cm}^3$ . Przekroje prętów dobierano na podstawie katalogów wyrobów stalowych PN-62/H-93200. Przy sprawdzaniu warunku wytrzymałości założono, że naprężenia w stanie przedkrytycznym, wywoływane w prętach przez momenty zginające i skręcające są małe w porównaniu z naprężeniami normalnymi, pochodzącymi od sił zewnętrznych  $P$ . Przyjęto ponadto, że sprawdzanie stateczności połączeń węzłowych nie jest konieczne.

## 5.1 Optymalizacja konstrukcji narażonych na utratę stateczności przez przeskok

### 5.1.1 Kratownica dwuprętowa

Problem optymalizacji dotyczy prostego układu prętowego pokazanego na rys.9 przy założeniu, że utrata stateczności zachodzi w płaszczyźnie konstrukcji.



$$\begin{aligned}
 E &= 7000 \text{ kN/cm}^2 \\
 \sigma_{\text{dop}} &= 20 \text{ kN/cm}^2 \\
 \rho &= 0,0275 \text{ N/cm}^3 \\
 l_0 &= 200 \text{ cm} \\
 f &= 6 \text{ cm} \\
 P &= 1,5 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Rys. 9

Optymalizację przeprowadzono dla przypadku, gdy przekroje obu prętów  $A_1$  i  $A_2$  są sobie równe oraz jeżeli mogą one przybierać różne wartości. Wyniki otrzymane przy wielkości obciążenia zewnętrznego  $P=1,5 \text{ kN}$  i przekrojach prętów dobieranych z katalogu

$$(5.1) \quad A_1, A_2 [\text{cm}^2] \in \{ 12,57; 15,9; 19,63; 23,76; 28,27; 33,18; 38,48 \}$$

zestawiono w tablicy 1.

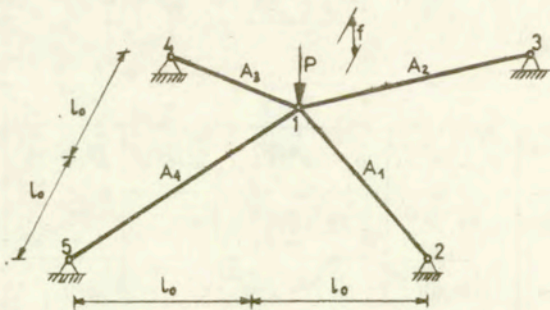
Tablica 1

	$A_1 [\text{cm}^2]$	$A_2 [\text{cm}^2]$	$P_{kr} [\text{kN}]$	$W [\text{N}]$
równe przekroje	23,76	23,76	1,728	261,5
różne przekroje	19,63	23,76	1,563	238,8
	23,76	19,63	1,563	238,8

W rozważanym przykładzie rozwiązanie optymalne wyznaczone jest przez pręty o różnych przekrojach. Spełnienie warunku stateczności globalnej (2.14) przy optymalizacji dyskretnej konstrukcji zbudowanych i obciążonych symetrycznie nie zawsze wymaga zatem symetrycznego doboru przekrojów elementów. Rozwiązanie optymalizacji ciągłej takiej konstrukcji prowadzi natomiast do prętów o równych przekrojach [44,52]. Przy równych przekrojach prętów  $A_1 = A_2$  mamy do czynienia z symetryczną postacią utraty stateczności globalnej, kiedy węzeł 1 przemieszcza się pionowo w dół. Przy rozwiązaniu  $A_1 \neq A_2$  utrata stateczności następuje przy przesunięciu węzła 1 do dołu, lecz również przy niewielkim przemieszczeniu w kierunku poziomym. Węzeł 1 przesuwana się wówczas poziomo w kierunku pręta o mniejszym przekroju. O tym, czy jako rozwiązanie dyskretne otrzymamy konstrukcję o równych czy różnych przekrojach decyduje również katalog prętów jakimi dysponujemy.

### 5.12 Kratownica czteroprętowa o 2 płaszczyznach symetrii

Rozważany będzie przypadek optymalnego doboru przekrojów prętów kratownicy przedstawionej na rys.10.



- $E=7000 \text{ kN/cm}^2$
- $\sigma_{\text{dop}}=20 \text{ kN/cm}^2$
- $\rho=0,0275 \text{ N/cm}^3$
- $l_0=200 \text{ cm}$
- $f=7 \text{ cm}$
- $P=2,75 \text{ kN}$

Rys.10

Przekroje prętów dobierane były z następującego katalogu:

(5.2)  $A_i$  [cm<sup>2</sup>] ∈ {19,63; 23,76; 28,27; 33,18; 38,48; 44,18; 50,27}.

Przy obciążeniu zewnętrznym  $P=2,75$  kN dokonano optymalizacji konstrukcji dla czterech wariantów podziału na strefy sztywności:

- a) przekroje wszystkich prętów są równe ( $A_1=A_2=A_3=A_4$ );
- b) 2 strefy sztywności ( $A_1=A_2$ ,  $A_3=A_4$ );
- c) 2 strefy sztywności ( $A_1=A_3$ ,  $A_2=A_4$ );
- d) 4 strefy sztywności (każdy pręt może mieć inny przekrój).

Otrzymane rozwiązania zamieszczone zostały w tabelicy 2.

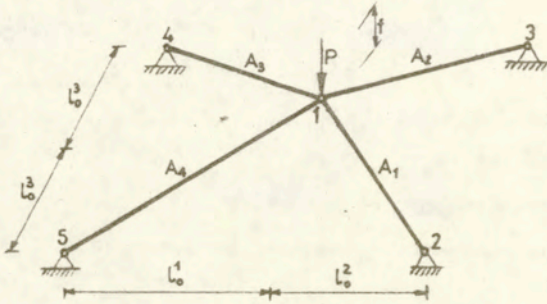
Tablica 2

wariant podziału	a	b	c	d
$A_1$ [cm <sup>2</sup> ]	38,48	33,18	23,76	23,76
$A_2$ [cm <sup>2</sup> ]	38,48	33,18	44,18	44,18
$A_3$ [cm <sup>2</sup> ]	38,48	38,48	23,76	23,76
$A_4$ [cm <sup>2</sup> ]	38,48	38,48	44,18	44,18
$P_{kr}$ [kN]	3,138	2,907	2,775	2,775
$W$ [N]	1197,583	1115,109	1057,222	1057,222

Podobnie jak w poprzednim przykładzie rozwiązanie optymalne nie jest równoznaczne z przyjęciem prętów o równych przekrojach. Wynika to z faktu, że spełnienie ograniczenia na obciążenie krytyczne zależy od wzajemnego stosunku powierzchni przekrojów poprzecznych elementów. Bardziej korzystny jest podział konstrukcji na strefy sztywności według wariantu c) niż b), prowadzący przy danym katalogu do mniejszej wartości funkcji celu.

### 5.13 Kratownica czteroprętowa o 1 płaszczyźnie symetrii

Problem optymalizacji dotyczy kratownicy pokazanej na rys.11.



$$E=7000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{dop}}=20 \text{ kN/cm}^2$$

$$\rho=0,0275 \text{ N/cm}^3$$

$$l_0^1=200 \text{ cm}$$

$$l_0^2=150 \text{ cm}$$

$$l_0^3=200 \text{ cm}$$

$$f=7 \text{ cm}$$

$$P=2,95 \text{ kN}$$

Rys.11

Wyniki optymalizacji dla  $P=2,95 \text{ kN}$  przy katalogu przekrojów (5.2) i podziale konstrukcji na strefy sztywności jak w przykładzie 5.1.2 zawiera tablica 3.

Tablica 3

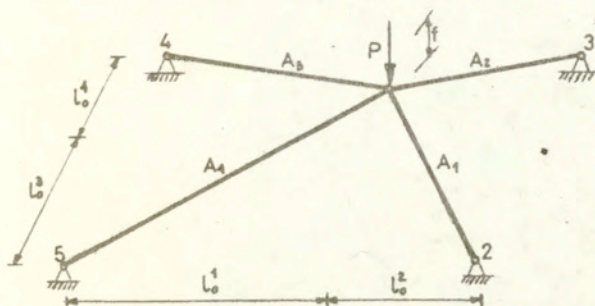
wariant podziału	a	b	c	d
$A_1 \text{ [cm}^2\text{]}$	38,48	44,18	33,18	38,48
$A_2 \text{ [cm}^2\text{]}$	38,48	44,18	38,48	44,18
$A_3 \text{ [cm}^2\text{]}$	38,48	28,27	33,18	28,27
$A_4 \text{ [cm}^2\text{]}$	38,48	28,27	38,48	28,27
$P_{kr} \text{ [kN]}$	3,314	3,063	3,085	2,963
$W \text{ [N]}$	1207,048	1105,627	1123,922	1066,424

Podobnie jak w poprzednim przykładzie najbardziej korzystny jest dobór przekrojów według podziału d). Obecnie jednak lepsze rezultaty otrzymuje się przy podziale b) niż c).



### 5.14 Kratownica czteropiętowa niesymetryczna

Rozważmy jeszcze zagadnienie optymalizacji (2.11)-(2.16) dla konstrukcji pokazanej na rys.12.



$$E=7000 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_{\text{dop}}=20 \text{ kN/cm}^2$$

$$\rho=0,0275 \text{ N/cm}^3$$

$$l_0^1=250 \text{ cm}$$

$$l_0^2=150 \text{ cm}$$

$$l_0^3=225 \text{ cm}$$

$$l_0^4=175 \text{ cm}$$

$$F=7 \text{ cm}$$

$$P=3,5 \text{ kN}$$

Rys. 12

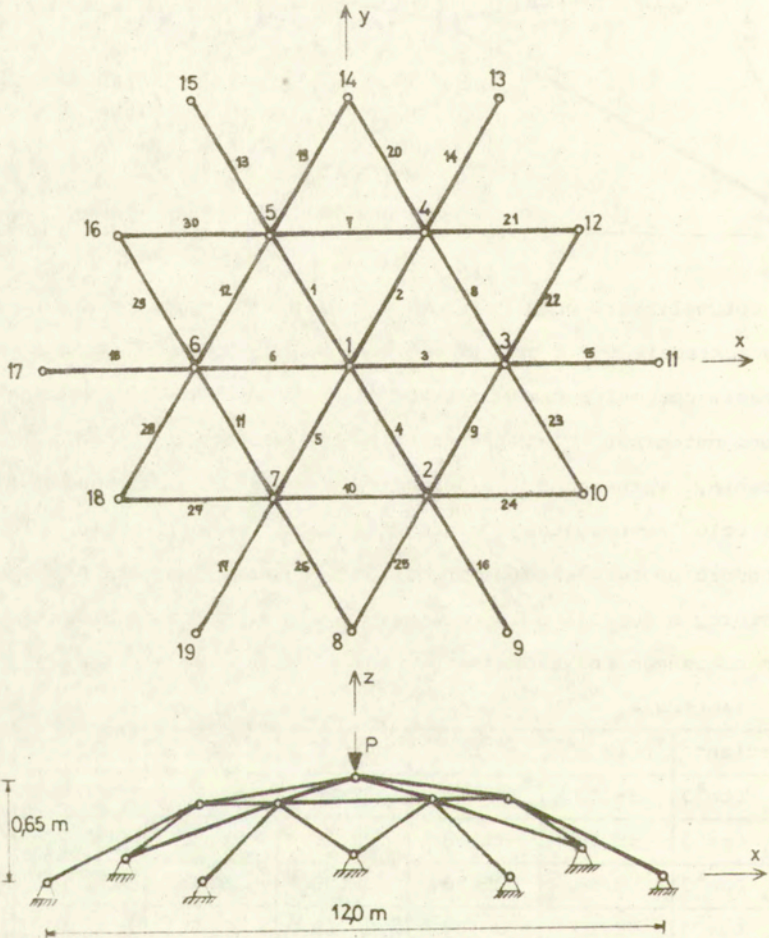
Wyniki optymalizacji przy  $P=3,5 \text{ kN}$  i podziale na strefy sztywności jak w przykładzie 5.1.2 podaje tablica 4. Symbolem  $d$  oznaczono rozwiązanie optymalne przy podziale na 4 różne strefy. Przez  $d'$  oznaczono natomiast kolejne, spełniające wszystkie ograniczenia rozwiązanie, wyznaczone w metodzie przeglądu. Odpowiada ono funkcji celu "następującej" w ciągu wartości funkcji celu (3.30) bezpośrednio po rozwiązaniu optymalnym. Zauważmy, że przy niewielkiej różnicy w funkcji celu rozwiązania  $d$  i  $d'$  charakteryzują się całkiem odmiennym rozkładem sztywności elementów konstrukcji.

Tablica 4

wariant	a	b	c	d	d'
$A_1$ [ $\text{cm}^2$ ]	44,18	44,18	38,48	44,18	38,48
$A_2$ [ $\text{cm}^2$ ]	44,18	44,18	44,18	44,18	50,27
$A_3$ [ $\text{cm}^2$ ]	44,18	38,48	38,48	38,48	33,18
$A_4$ [ $\text{cm}^2$ ]	44,18	38,48	44,18	33,18	38,48
$P_{kr}$ [kN]	3,867	3,569	3,626	3,512	3,519
$W$ [N]	1388,396	1309,848	1298,147	1238,783	1239,543

### 5.15 Powłoka prętowa

Rysunek 13 przedstawia 30-elementową, trójwymiarową powłokę prętową, której węzły leżą na sferze o promieniu 28,0 m.



Rys. 13

Węzły 8-19 są zamocowane. Współrzędne punktów węzłowych jednej ćwiartki konstrukcji zestawiono w tabelicy 5. Współrzędne pozostałych węzłów mogą być znalezione przez symetrię.

Tabela 5

nr węzła	x [cm ]	y [cm ]	z [cm ]
1	0,0	0,0	65,041
3	300,0	0,0	48,923
4	150,0	259,8075	48,923
11	600,0	0,0	0,0
12	450,0	259,8075	16,404
13	300,0	519,615	0,0
14	0,0	519,615	16,404

Podział konstrukcji o dużej liczbie elementów na strefy sztywności wykorzystuje cechy geometrii i charakter przyłożonego obciążenia. Projektowanie takich układów odrzuca jednak zbyt duże zróżnicowanie przekrojów prętów, ograniczone przez trudności w wykonaniu rzeczywistych konstrukcji. Konstrukcja pokazana na rys.13 podzielona została na cztery strefy, odpowiadające prętom o jednakowych przekrojach, długościach i sztywnościach. Strefa I obejmuje pręty 1-6, strefa II - pręty 7-12, strefa III - pręty 13-18, strefa IV zawiera elementy o numerach 19-30.

Wyniki optymalizacji dla dwóch wartości obciążenia  $P=15$  kN oraz  $P=25$  kN przy katalogu przekrojów

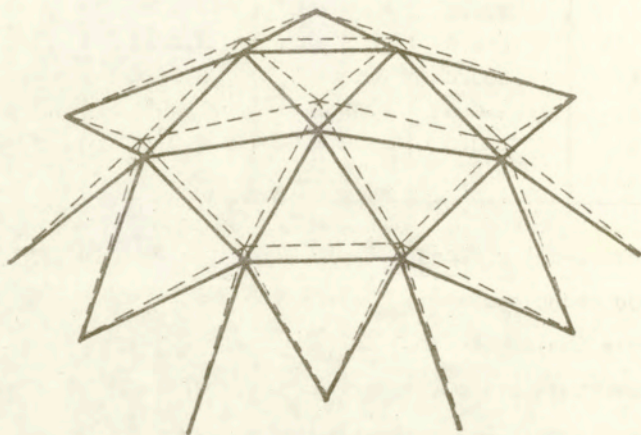
$$(5.3) A_i [\text{cm}^2] \in ( 12,57; 15,9; 19,64; 23,76; 28,27; 33,18; \\ 38,48; 44,18; 50,27 )$$

zestawione zostały w tabelicy 6.

Tablica 6

P[kN]	$A_1$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_2$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_3$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_4$ [cm <sup>2</sup> ]	$P_{kr}$ [kN]	$W$ [ N ]
15,0	38,48	15,9	19,64	12,57	16,33	6177,587
25,0	44,18	33,18	19,64	12,57	26,486	7315,504

Postać utraty stateczności konstrukcji przedstawia rys.14.



Rys. 14

Należy dodać, że w przypadku kratownic małowyniosłych zjawisko przeskoku może nastąpić przy zachowaniu prostoliniowości prętów. Jeżeli jednak podstawowa ścieżka równowagi konstrukcji przecina się z wtórną ścieżką równowagi, opisującą wyboczenie jednego lub kilku prętów jeszcze przed osiągnięciem punktu granicznego (punktu typu maksimum obciążenia), wówczas możemy mieć do czynienia z utratą stateczności przy obciążeniu mniejszym niż obciążenie odpowiadające punktowi granicznemu [15,17]. W szczególnym przypadku wyboczenie pojedynczych prętów i zjawisko przeskoku mogą nastąpić jednocześnie.

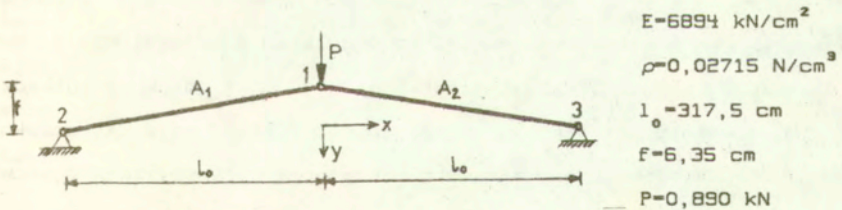
## 5.2 Rozwiązania ciągłe a rozwiązania dyskretne

Uzyskanie rozwiązania dyskretnego na podstawie optymalnego rozwiązania ciągłego nie zawsze jest oczywiste i przedstawia niejednokrotnie wiele trudności. Jest to szczególnie widoczne w przypadku optymalizacji konstrukcji przy ograniczeniach na utratę stateczności.

W poniższym rozdziale porównane zostały wyniki optymalizacji dyskretnej małowyniosłych konstrukcji kratowych z rozwiązaniami optymalnymi otrzymanymi w pracy [52] przy ciągłych zmiennych decyzyjnych. We wszystkich przykładach zamieszczonych w tym rozdziale przyjęto zgodnie z [52]:  $E=68,94$  GPa,  $\sigma_{dop}^+ = \sigma_{dop}^- = 0,2$  GPa,  $\rho=27,15$  kN/m<sup>3</sup>. Podobnie jak w [52] założono, że pojedyncze pręty konstrukcji nie wybaczą się ani nie osiągną nośności granicznej i w warunkach ograniczających rozpatrywana była jedynie utrata stateczności globalnej.

### 5.2.1 Kratownica dwupętowa

Problem optymalizacji dotyczy symetrycznej kratownicy prętowej (kratownicy Misesa), obciążonej siłą  $P=0,890$  kN, przyłożoną w węźle 1 w dodatnim kierunku osi  $y$  (rys.15).



Rys. 15

Wyniki optymalizacji przy założeniu ciągłości zmiennych decyzyjnych (przekrojów prętów) podane za pracą [52] oraz rezultaty optymalizacji dyskretnej przy przyjęciu pięcioelementowego katalogu przekrojów

(5.4)  $A_i [\text{cm}^2] \in \{ 38,0 ; 41,0 ; 44,0 ; 47,0 ; 50,0 \}$ ,  $i=1,2$ ,  
zamieszczono w tabelicy 7.

Tabela 7

	$A_1 [\text{cm}^2]$	$A_2 [\text{cm}^2]$	$P_{kr} [\text{kN}]$	$W [\text{N}]$
rozwiązanie ciągłe [52]	41,92	41,92	0,890	723,0
równoważne dyskretne rozwiązania optymalne	38,0	47,0	0,891	733,0
	47,0	38,0	0,891	733,0
	41,0	44,0	0,900	733,0
	44,0	41,0	0,900	733,0
kolejne rozwiązania dyskretne spełniające warunki ograniczające	38,0	50,0	0,916	758,8
	50,0	38,0	0,916	758,8
	41,0	47,0	0,929	758,8
	47,0	41,0	0,929	758,8
oszacowanie rozwiązania ciągłego z góry	44,0	44,0	0,933	758,8
	....	....	.....	.....

Analiza otrzymanych wyników prowadzi do następujących spostrzeżeń. W przypadku optymalizacji dyskretnej konstrukcji przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności dobór przekrojów prętów poprzez oszacowanie z góry wyników otrzymanych dla ciągłych zmiennych decyzyjnych nie zawsze prowadzi do rozwiązania optymalnego z punktu widzenia optymalizacji dyskretnej. Podobnie jak w przykładzie 5.1.1 spełnienie warunku stateczności (2.14) dla konstrukcji zbudowanych i obciążonych symetrycznie przy optymalizacji dyskretnej nie musi być jednoznaczne z symetrycznym doбором przekrojów elementów. Stosowanie katalogów, w których pola przekrojów wykazu-

ją regularność (np. są wielokrotnościami pewnej wielkości) w przypadku konstrukcji symetrycznych może prowadzić do całego zestawu równoważnych (jeżeli chodzi o wartość funkcji celu) rozwiązań.

W pracy [52] podany został również przykład optymalizacji układu kratowego z rys.15 przy założonym stosunku przekrojów prętów  $A_1/A_2=2$ . W przypadku rzeczywistych katalogów przekrojów (np. katalogu przekrojów okrągłych) ścisłe spełnienie tak sformułowanego warunku przedstawia pewne trudności. Dlatego w poniższych obliczeniach przyjęto założenie, że  $1,9 \leq A_1/A_2 \leq 2,1$ .

Wyniki otrzymane dla katalogów przekrojów

$$(5.5) \quad \begin{aligned} A_1 [\text{cm}^2] &\in \{ 61,0 ; 62,0 ; 63,0 ; 64,0 ; 65,0 \} \\ A_2 [\text{cm}^2] &\in \{ 30,0 ; 31,0 ; 32,0 ; 33,0 ; 34,0 \} \end{aligned}$$

zestawiono w tabelicy 8.

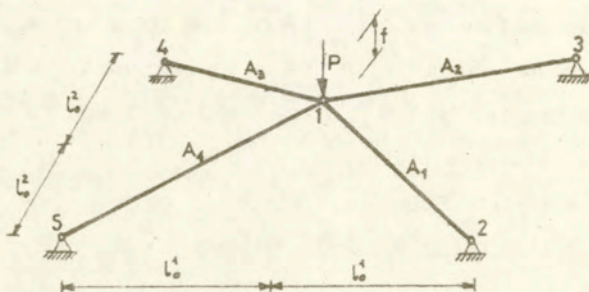
Tablica 8

	$A_1 [\text{cm}^2]$	$A_2 [\text{cm}^2]$	$A_1/A_2$	$P_{kr} [\text{kN}]$	$W [\text{N}]$
rozwiązanie ciągłe [52]	62,88	31,44	2,0	0,890	813,4
dyskretne → rozw.optimalne	61,0	32,0	1,91	0,891	802,0
oszacow.rozw. → ciągłego z góry	62,0	32,0	1,94	0,895	810,6
	63,0	32,0	1,97	0,900	819,2
	63,0	33,0	1,91	0,920	827,8
kolejne rozw. dyskr. spełn. ograniczenia	65,0	31,0	2,1	0,891	827,8
	64,0	32,0	2,0	0,904	827,8
	....	....	....	.....	.....

Odejście od ścisłego spełnienia warunku  $A_1/A_2=2$  w optymalizacji dyskretnej może prowadzić do konstrukcji lżejszych niż przy optymalizacji ciągłej.

### 5.2.2 Kratownica czteropętowa symetryczna

Problem optymalizacji dotyczy czteropętowej kratownicy o dwóch płaszczyznach symetrii (rys.16), obciążonej w węźle 1 siłą pionową  $P=0,890$  kN.



$$E=6894 \text{ kN/cm}^2$$

$$\rho=0,02715 \text{ N/cm}^3$$

$$l_0^1=243,84 \text{ cm}$$

$$l_0^2=259,08 \text{ cm}$$

$$F=7,62 \text{ cm}$$

$$P=0,890 \text{ kN}$$

Rys. 16

Optymalizację konstrukcji dla katalogu przekrojów kwadratowych

$$(5.6) \quad A_i [\text{cm}^2] \in \{ 12,96 ; 16,81 ; 21,16 ; 25,0 \}$$

przeprowadzono dla przypadków: a)  $A_1=A_2=A_3=A_4$ ; b)  $A_1=A_2, A_3=A_4$ ;

c) dowolne przekroje  $A_i$  ( $i=1,2,3,4$ ). W tabelicy 9 zamieszczono kolejne, spełniające warunki ograniczające, rozwiązania optymalizacji dyskretnej, uzyskane w metodzie przeglądu.

Stosowanie optymalizacji dyskretnej przy różnych przekrojach elementów konstrukcji (wariant c) prowadzi do mniejszych wartości funkcji celu niż oszacowanie z góry znanego rozwiązania ciągłego a). Rozwiązania odpowiadające jednakowej funkcji celu są konsekwencją symetrii analizowanego układu. Warto zwrócić uwagę na fakt, że niewielkiemu wzrostowi funkcji celu może towarzyszyć znacznie "bezpieczniejsze" spełnienie warunku stateczności glo-



balnej konstrukcji. Np. przy wariancie b) podziału konstrukcji na strefy wzrostowi funkcji celu o 0,03% w porównaniu z rozwiązaniem optymalnym towarzyszy wzrost wielkości  $P_{kr}$  o 9,7%.

Tablica 9

	$A_1$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_2$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_3$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_4$ [cm <sup>2</sup> ]	$P_{kr}$ [kN]	$W$ [N]
rozw. ciągłe	17,08	17,08	17,08	17,08	0,890	660,2
a	21,16	21,16	21,16	21,16	1,102	817,9
b	12,96	12,96	25,0	25,0	0,891	733,6
	25,0	25,0	12,96	12,96	0,891	733,6
	16,81	16,81	21,16	21,16	0,976	733,8
	21,16	21,16	16,81	16,81	0,976	733,8
	.....	.....	.....	.....	.....	.....
c	12,96	16,81	16,81	25,0	0,905	691,7
	16,81	12,96	25,0	16,81	0,905	691,7
	16,81	16,81	16,81	21,16	0,926	691,8
	16,81	16,81	21,16	16,81	0,926	691,8
	.....	.....	.....	.....	.....	.....

### 5.2.3 Powłoka prętowa

Dokonyamy jeszcze porównania wyników optymalizacji ciągłej i dyskretnej dla 30-elementowej powłoki prętowej, której węzły leżą na sferze o promieniu 77,72 m, zbudowanej podobnie jak konstrukcja przedstawiona na rys.13. Układ obciążony jest siłą  $P=8,9$  kN, działająca pionowo do dołu w węźle 1. Węzły 8-19 są zamocowane. Współrzędne punktów węzłowych jednej ćwiartki konstrukcji zestawiono w tablicy 10. Współrzędne pozostałych węzłów mogą być określone przez symetrię.

Tablica 10

nr węzła	x [cm ]	y [cm ]	z [cm ]
1	0,0	0,0	218,216
3	914,4	0,0	164,241
4	457,2	791,894	164,241
11	1828,8	0,0	0,0
12	1371,6	791,894	55,141
13	914,4	1583,787	0,0
14	0,0	1583,787	55,141

Konstrukcję podzielono na cztery strefy prętów o jednakowych przekrojach, sztywnościach i długościach: strefa I obejmuje pręty 1-6, strefa II - pręty 7-12, strefa III - pręty 13-18 i strefa IV zawierająca pręty o numerach 19-30. Wyniki optymalizacji dyskretnej dla katalogów przekrojów okrągłych

$$(5.7) \quad \begin{aligned} A_I [\text{cm}^2] &\in ( 10,18 ; 11,34 ; 12,57 ) , \\ A_{II} [\text{cm}^2] &\in ( 8,04 ; 9,08 ; 9,62 ; 10,18 ) , \\ A_{III} [\text{cm}^2] &\in ( 1,77 ; 2,01 ) , \\ A_{IV} [\text{cm}^2] &\in ( 0,785 ; 0,95 ) , \end{aligned}$$

zestawiono w tablicy 11. Przekroje prętów IV strefy dobrane zostały jako ograniczenie z góry podanego w [52] warunku na minimalny przekrój elementów ( $A_{\min} = 0,645 \text{ cm}^2$ ).

W tablicy 11 przyjęto następujące oznaczenia:

- 1° - Optymalne rozwiązanie ciągłe [52] przy równych przekrojach.
- 2° - Optymalne rozwiązanie ciągłe [52] przy różnych przekrojach.
- 3° - Optymalne rozwiązanie dyskretne przy katalogach (5.7) i równych przekrojach prętów.

- 4° - Optymalne rozwiązanie dyskretne przy katalogach (5.7) i różnych przekrojach prętów.
- 5° - Rozwiązanie otrzymane przez zaokrąglenie rozwiązania ciągłego przy różnych przekrojach prętów (2°) do najbliższych, większych przekrojów z katalogów.

Rozwiązania optymalizacji dyskretnej nie są w tym przypadku równoznaczne z oszacowaniem od góry rozwiązań ciągłych. Dyskretne pola powierzchni prętów niektórych stref mogą być mniejsze niż pola powierzchni, wyznaczające optymalne rozwiązanie w zmiennych ciągłych.

Tablica 11

	$A_I$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{II}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{III}$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_{IV}$ [cm <sup>2</sup> ]	$P_{kr}$ [kN]	$W$ [N]
1°	9,858	9,858	9,858	9,858	8,90	7390,0
2°	10,92	8,874	1,737	0,645	8,90	3408,2
3°	10,18	10,18	10,18	10,18	9,18	7631,4
4°	10,18	9,62	1,77	0,785	8,91	3455,9
5°	11,34	9,08	1,77	0,785	9,16	3548,5

### 5.3 Szacowanie rozwiązań dyskretnych przez skalowanie

Wyznaczanie rozwiązań optymalizacji dyskretnej przy obszer-  
nych katalogach, zawierających wszystkie produkowane elementy,  
jest zadaniem bardzo czasochłonnym. Wiąże się to ze sprawdzaniem  
ograniczeń dla dużej liczby wariantów doboru zmiennych decyzyj-  
nych. Istotne staje się zatem zmniejszenie liczby przekrojów

w poszczególnych katalogach poprzez odrzucenie tych elementów, o których wiadomo z góry, że nie spełniają warunków ograniczających zadania. Dobrym przybliżeniem rozwiązania dyskretnego są wyniki uzyskane w optymalizacji ciągłej i na ich podstawie można dobrać zestawy przekrojów prętów poszczególnych stref.

W przypadku gdy rozwiązanie ciągłe zadania jest nieznane, natomiast gdy dysponujemy ciągłym lub dyskretnym rozwiązaniem problemu lecz przy innej, niż interesująca nas obecnie, wielkości  $\Lambda$  w ograniczeniu na stateczność (2.14), stosunkowo dobre przybliżenie rozwiązania zagadnienia (2.11)-(2.16) można otrzymać poprzez odpowiednie wyskalowanie zmiennych znanego rozwiązania. Przedstawiony poniżej sposób dotyczy doboru przekrojów prętów konstrukcji kratowych, spełniających warunek utraty stateczności globalnej (2.14).

Energia sprężysta konstrukcji (4.7) jest liniową funkcją zmiennych  $A_i$  nawet w przypadku geometrycznie nieliniowym. Skalując zatem pola wszystkich elementów konstrukcji przy pomocy pewnego współczynnika  $\mu$  mamy efekt skalowania parametru obciążenia  $\Lambda$  przez ten sam współczynnik (bez zmiany w postaci odkształcenia). Wynika to ze wzoru

$$(5.8) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial Q} - \Lambda p = 0,$$

w którym człony  $\partial \Pi / \partial Q$  są liniowe ze względu na pola przekrojów elementów, chociaż są nieliniowymi funkcjami przemieszczeń. O ile znana jest zatem optymalna konfiguracja prętów  $K$  przy obciążeniu zewnętrznym  $\Lambda$  (której odpowiadają przekroje poprzeczne  $A_i$ ), to konfiguracji  $K^*$ , związanej z wartością obciążenia zewnętrznego  $\Lambda^*$  odpowiadają przekroje poprzeczne elementów

$$(5.9) \quad A_i^* = \mu A_i, \quad i=1, \dots, k,$$

gdzie

$$(5.10) \quad \mu = \frac{\Lambda^*}{\Lambda_{kr}}$$

przy czym  $\Lambda_{kr}$  oznacza wielkość obciążenia krytycznego, odpowiadającą rozwiązaniu optymalnemu przy obciążeniu  $\Lambda$ . Przez pojęcie konfiguracja prętów rozumiemy w tym przypadku określony stosunek (rozkład) przekrojów i sztywności elementów konstrukcji. W związku z zachowaniem wzajemnych relacji pomiędzy przekrojami prętów po przejściu od konfiguracji  $K$  do  $K^*$ , nie zmienia się również postać utraty stateczności. Wielkości  $A_i^* = \mu A_i$  mogą być zatem pewnym przybliżeniem przekrojów spełniających warunek utraty stateczności globalnej przy obciążeniu zewnętrznym  $\Lambda^*$ . Niezbędne staje się jednak sprawdzanie warunku wytrzymałości i stateczności "lokalnej". Wynika to z faktu, że wartości naprężeń w prętach przy nowym obciążeniu są nieznane oraz że zmiany sztywności elementów nie muszą być proporcjonalne do zmian przekrojów.

W tabelicy 12 zestawiono rozwiązania problemu optymalizacji symetrycznej kratownicy czteroprętowej (rys.10) dla  $P^*=3,2$  kN oraz zamieszczono oszacowane wartości przekrojów, uzyskane na drodze skalowania znanego rozwiązania dyskretnego przy  $P=2,75$  kN (rozdz. 5.1.2). Wartości współczynników  $\mu$  obliczano wykorzystując wyniki z tabelicy 2. Rozwiązania dyskretne wyznaczano przyjmując katalog (5.2).

Tablica 12

wariant		$A_1$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_2$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_3$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_4$ [cm <sup>2</sup> ]	$P_{kr}$ [kN]	$W$ [N]
a	skalowanie	39,24	39,24	39,24	39,24	3,2	1221,24
	rozv. dyskret.	44,18	44,18	44,18	44,18	3,604	1374,98
b	skalowanie	36,52	36,52	42,36	42,36	3,2	1227,46
	rozv. dyskret.	38,48	38,48	44,18	44,18	3,350	1286,28
c ≡ d	skalowanie	27,40	50,95	27,40	50,95	3,2	1219,21
	rozv. dyskret.	28,27	50,27	28,27	50,27	3,208	1222,17

Szacowanie rozwiązań optymalnych przez skalowanie prowadzi do wartości bliskich rozwiązaniu dyskretnemu, jeżeli ograniczeniem aktywnym jest warunek stateczności globalnej. Oszacowane wartości obarczone będą jednak większym błędem, gdy w znanym rozwiązaniu optymalnym część zmiennych wyznaczona była przez inne ograniczenia, np. minimalne dopuszczalne pola powierzchni elementów, warunek stateczności lokalnej. Oszacowane wielkości przekrojów i ciężaru konstrukcji dają jednak pewną informację o poszukiwanych wielkościach optymalnych i mogą zostać wykorzystane do przyspieszenia wyznaczenia rozwiązania. Rozwiązań dyskretnych można poszukiwać przyjmując w katalogach poszczególnych stref elementy "należące do otoczenia" wielkości przybliżonych, otrzymanych przez skalowanie. Oszacowaną wielkość funkcji celu, przyjmowaną z odpowiednim współczynnikiem zmniejszającym można również traktować jako oszacowanie od dołu rozwiązania dyskretnego. Postępowanie takie powinno być jednak prowadzone z dużą ostrożnością ze względu na możliwość wyznaczenia optimum lokalnego.

#### 5.4 Stateczność nieliniowa i stateczność zlinearyzowana

Opis niektórych zjawisk występujących w mechanice wymaga odejścia od zasady zeszytnienia i założenia o liniowej zależności między obciążeniem a przemieszczeniem. Zlinearyzowana analiza stateczności w wielu przypadkach odbiega zbyt od rzeczywistości i nie pozwala na prawidłowe wyznaczanie wielkości obciążeń krytycznych [3]. W niniejszym rozdziale pokazano błędy, do jakich może ona prowadzić w zagadnieniach optymalizacji dyskretnej małowymiosłych konstrukcji prętowych.

Wyznamy pola przekrojów prętów kraty Misesa (rys.9) o minimalnym ciężarze, poddanej działaniu siły skupionej  $P$ . Konstrukcja ma wymiary  $l_0=1,25$  m,  $f=0,05$  m. Materiał prętów charakteryzuje  $E=70$  GPa,  $\sigma_{dop}=20$  GPa i  $\rho=27,5$  kN/m<sup>3</sup>. Przekroje prętów (jednakowe dla obu elementów) dobierano z katalogu przekrojów okrągłych

$$(5.11) \quad A \text{ [cm}^2\text{]} \in \{ 5,726; 6,158; 7,069; 8,042; \\ 9,079; 9,621; 11,34; 12,57 \}.$$

Wyniki optymalizacji dyskretnej dla  $P=1,5$  kN oraz  $P=2,0$  kN dla warunków ograniczających sprawdzanych przy geometrycznie nieliniowej analizie stateczności (rozd.4.2) i analizie stateczności początkowej (rozd.4.3) zestawione zostały w tablicy 13.

Optymalizacja dyskretna przy zastosowaniu analizy stateczności początkowej prowadzi do mniejszych wartości funkcji celu jednakże rozwiązania te nie spełniają warunków ograniczających, sformułowanych w podejściu geometrycznie nieliniowym. Wynika to z faktu, iż zlinearyzowana analiza problemu prowadzi do mniejszych niż w rzeczywistości wielkości przemieszczeń i nie pozwala na prawidł-

łowe oszacowanie obciążeń powodujących utratę stateczności.

Tablica 13

P [kN]	analiza	A [cm <sup>2</sup> ]	P <sub>kr</sub> [kN]	Ogranicz. decydujące	W [N]
1,5	liniowa	7,069	6,33	war. stat. "lokalnej"	48,46
	nielin.	9,079	1,56	war. stat. "lokalnej"	62,47
2,0	liniowa	8,042	7,20	war. stat. "lokalnej"	55,33
	nielin.	12,57	2,17	war. stat. globalnej	86,49

Do podobnych wniosków prowadzi porównanie wyników optymalizacji dyskretnej dla podejścia nieliniowego i zlinearyzowanego w przypadku prętowego przekrycia strukturalnego z przykładu 5.1.5.

Tablica 14 zawiera zestawienie otrzymanych wyników przy obciążeniu P=15 kN i katalogu (5.3).

Tablica 14

Analiza	A <sub>1</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>2</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>3</sub> [cm <sup>2</sup> ]	A <sub>4</sub> [cm <sup>2</sup> ]	P <sub>kr</sub> [kN]	W [N]
liniowa	28,27	12,57	15,9	12,57	57,00	5319,052
nielin.	38,48	15,9	19,64	12,57	16,33	6177,587

Ograniczeniem aktywnym w przypadku analizy nieliniowej jest warunek utraty stateczności globalnej, natomiast o wielkościach przekrojów prętów przy podejściu zlinearyzowanym decydują w rozważanych przykładach warunki utraty stateczności "lokalnej".



## 5.5 Wpływ wstępnych imperfekcji geometrii na rozwiązanie dyskretne

Początkowe niedokładności konstrukcji, spowodowane pewnymi odchyłkami od zakładanej geometrii czy sposobu przyłożenia obciążeń, powodują odmienne jakościowo zachowanie się takiej realnej konstrukcji niż ustroju idealnego. Małe niedokładności powodować mogą istotne zmiany w stateczności i znaczną utratę nośności niektórych ustrojów konstrukcyjnych [38,79].

W tej części pracy, na przykładzie przekrycia prętowego, pokazanego na rys.17, przeanalizowano wpływ wstępnych niedokładności geometrii układu na dyskretne rozwiązania optymalne problemu (2.11)-(2.16).

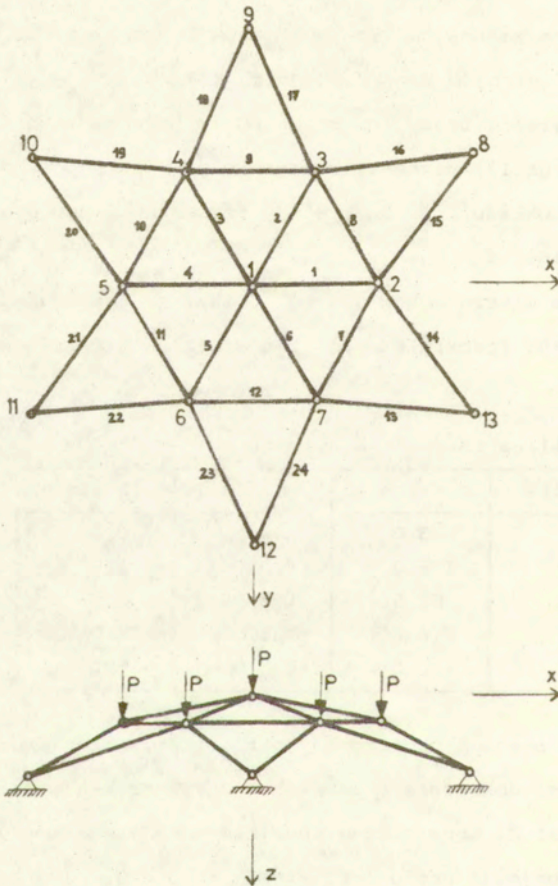
Współrzędne wierzchołków jednej ćwiartki konstrukcji zestawiono w tabelicy 15. Pozostałe współrzędne węzłów można określić przez symetrię.

Tablica 15

Nr węzła	x [cm ]	y [cm ]	z [cm ]
1	0,0	0,0	0,0
2	125,0	0,0	5,5
3	62,5	-108,2532	5,5
8	216,5064	-125,0	25,0
9	0,0	-250,0	25,0

Przekrycie prętowe obciążone jest siłami skupionymi  $P=6,5$  kN, przyłożonymi dokładnie w węzłach 1-7 i działającymi w dodatnim kierunku osi Z. Konstrukcję podzielono na trzy strefy sztywności. Strefa 1 obejmuje pręty 1-6, strefa 2 -pręty 7-12, do strefy 3 należą elementy 13-24. Wpływ imperfekcji geometrii przekrycia na

dyskretne rozwiązania optymalne badano dla siedmiu różnych, założonych z góry niedokładności wykonania układu. Rozpatrywano niewielkie odchyłki od idealnej geometrii ustroju, narzucone na współrzędne 2 węzłów 1-7. W tablicy 16 zestawione zostały współrzędne węzłów 1-7 konstrukcji idealnej, oznaczonej przez I oraz konstrukcji z różnymi niedokładnościami, oznaczonymi literami A-G.



Rys. 17

Tablica 16

Nr	Współrzędne Z węzłów przekrycia prętowego [cm]							
	I	A	B	C	D	E	F	G
1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,115	-0,115	0,0	0,0
2	5,5	5,225	5,225	5,225	5,5	5,5	5,725	5,725
3	5,5	5,5	5,225	5,725	5,5	5,5	5,5	5,725
4	5,5	5,5	5,5	5,225	5,5	5,5	5,5	5,5
5	5,5	5,5	5,5	5,725	5,5	5,5	5,5	5,5
6	5,5	5,5	5,5	5,225	5,5	5,5	5,5	5,5
7	5,5	5,5	5,225	5,725	5,5	5,5	5,5	5,725

W optymalizacji stosowano następujące katalogi przekrojów dla poszczególnych stref:

$$A_1 [\text{cm}^2] \in \{ 9,621 ; 10,18 ; 11,34 \} ,$$

$$(5.12) \quad A_2 [\text{cm}^2] \in \{ 8,042 ; 9,079 ; 9,621 ; 10,18 \} ,$$

$$A_3 [\text{cm}^2] \in \{ 11,34 ; 12,57 ; 13,85 ; 15,9 \} .$$

Należy dodać, że dobór prętów do katalogów nie był w tym przypadku podyktowany zamiarem znalezienia rozwiązania optymalnego w całym zakresie dostępnych przekrojów prętów okrągłych, lecz służył ilustracji problemu uwzględnienia niedokładności geometrii konstrukcji w optymalizacji dyskretnej.

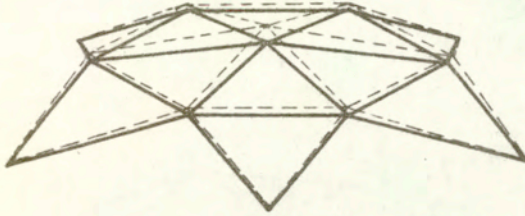
Rozwiązanie optymalne dla konstrukcji idealnej I otrzymano przy polach powierzchni przekrojów poprzecznych prętów  $A_1=10,18 \text{ cm}^2$ ,  $A_2=8,042 \text{ cm}^2$  i  $A_3=12,57 \text{ cm}^2$ . Tę konfigurację prętów (tj. stosunek powierzchni i sztywności elementów konstrukcji) oznaczymy symbolem  $K_I$  a odpowiada jej funkcja celu  $W_I=1010,8 \text{ N}$ . Wartości obciążenia krytycznego  $P_{kr}$  przy konfiguracji prętów  $K_I$  dla różnych rodzajów imperfekcji zamieszczono w tablicy 17.

Tablica 17

P <sub>kr</sub> [kN]							
I	A	B	C	D	E	F	G
6,86	6,57	6,00	6,78	6,19	7,64	7,14	7,73

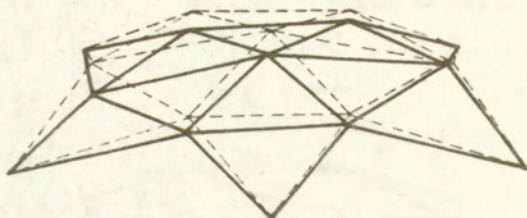
Konfiguracja  $K_I$  przy imperfekcjach typu B i D nie spełnia warunku stateczności globalnej, gdyż wielkości obciążeń krytycznych są wówczas mniejsze od przyłożonego obciążenia zewnętrznego P. Imperfekcje A,B,C,D obniżają sztywność przekrycia przy analizowanej konfiguracji prętów natomiast niedokładności typu E,F,G zmniejszają wrażliwość konstrukcji na utratę stateczności globalnej. Rozwiązanie optymalne przy uwzględnieniu imperfekcji B i D związane będzie zatem z przyjęciem większych przekrojów prętów (wzrost funkcji celu w porównaniu z  $W_I$ ), natomiast w przypadkach E,F,G spodziewać się można spadku wartości funkcji celu, spowodowanego wzrostem sztywności przekrycia. Powyższe spostrzeżenia dotyczą jedynie analizy rozpatrywanej konfiguracji prętów czyli określonego stosunku (rozkładu) sztywności prętów poszczególnych stref. Wstępne niedoskonałości geometrii ustroju "naruszają" niejako postać utraty stateczności, towarzyszącą wartości obciążenia krytycznego i zmiany w konfiguracji przekrojów prętów (zmiany w stosunku sztywności elementów poszczególnych stref) mogą mieć wpływ nie tylko na ilościowy, lecz również jakościowy charakter zjawiska utraty stateczności. Wprowadzeniu imperfekcji geometrycznych typu D i E towarzyszy (podobnie jak w konstrukcji o idealnej geometrii I) postać utraty stateczności pokazana na rys.18. Przemieszczenia węzłów w kierunkach X i Y są bardzo małe

w porównaniu z przemieszczeniami w kierunku osi Z, dlatego też przy poszczególnych przypadkach utraty stateczności omówione zostaną jedynie przemieszczenia w kierunku Z.

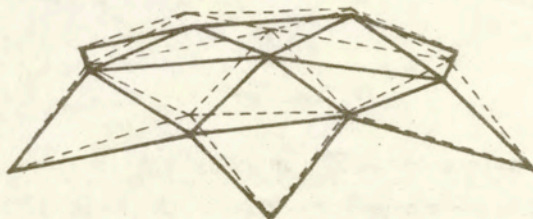


Rys. 18

Postać utraty stateczności z rys.18 charakteryzuje symetryczne względem osi Z przemieszczenie węzłów 1-7 w dodatnim jej kierunku. Przemieszczenia węzłów  $z_2-z_7$  są równe, zaś stosunek  $z_1/z_2$  jest większy od 2. Postać ta jest symetryczna względem płaszczyzn XZ i YZ. Postać utraty stateczności związana z wprowadzeniem imperfekcji typu A (rys.19) wykazuje symetrię względem płaszczyzny ZX. Węzły 1-7 przemieszczają się w dodatnim kierunku osi Z przy czym  $z_1 > z_5 > z_4 = z_6 > z_3 = z_7 > z_2$ . Podobny charakter postaci utraty stateczności powoduje wprowadzenie niedokładności B. Interesująca postać związana jest z przypadkiem C. Węzły 1-7 przemieszczają się wówczas w dodatnim kierunku osi Z, przy czym  $z_1 > z_3 = z_5 = z_7 > z_2 = z_4 = z_6$ , zaś wierzchołki 2-7 w konfiguracji odkształconej "tworzą" falę sinusoidalną na powierzchni walca o osi Z i promieniu równym  $x_2$  (rys.20). Imperfekcje typu E i F związane są z podobnymi postaciami utraty stateczności jak w przypadkach A i B z tym, że odpowiadają im przemieszczenia jak na rys.19 przy obrocie punktów węzłowych względem osi Z o kąt  $180^\circ$ .



Rys. 19



Rys. 20

Wyniki optymalizacji konstrukcji dla katalogów (5.12) w przypadku imperfekcji A-G zestawiono w tablicy 18.

Tablica 18

wariant	$A_1$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_2$ [cm <sup>2</sup> ]	$A_3$ [cm <sup>2</sup> ]	$P_{kr}$ [kN]	Utrata stat.	$w$ [N]
I	10,18	8,042	12,57	6,86	rys.20	1010,8
A	10,18	8,042	12,57	6,57	rys.21	1010,8
B	11,34	8,042	12,57	6,82	rys.21	1034,5
C	10,18	8,042	12,57	6,77	rys.22	1010,8
D	11,34	8,042	12,57	7,07	rys.20	1034,5
E	9,621	8,042	12,57	7,08	rys.20	999,4
F	10,18	8,042	12,57	7,14	rys.21	1010,8
G	9,621	8,042	12,57	7,15	rys.21	999,4

Porównanie wyników zamieszczonych w tablicach 17 i 18 prowadzi do następujących spostrzeżeń. Imperfekcje typu E,F,G powodują wzrost sztywności konstrukcji przy konfiguracji prętów odpowiadającej optymalnemu rozwiązaniu dyskretnemu dla konstrukcji idealnej  $K_I$ . W związku z tym, optymalna konfiguracja przekrojów prętów  $K_E$  konstrukcji z imperfekcjami E prowadzi do funkcji celu  $W_E$  mniejszej niż  $W_I$ , otrzymana dla konstrukcji I. Konfiguracja  $K_E$  nie spełnia jednak warunków ograniczających w przypadku optymalizacji konstrukcji idealnej. Podobną sytuację mamy przy niedokładnościach typu G. Wprowadzenie imperfekcji A,C czy F, zmieniające co prawda wartości obciążenia krytycznego w porównaniu z konfiguracją  $K_I$ , nie prowadzi natomiast do konieczności zmiany pól powierzchni przekrojów elementów. Dyskretne rozwiązanie optymalne, otrzymane przy katalogach (5.12) nie wykazuje zatem wrażliwości na niedokładności A,C i F. Imperfekcje te nie powodują na tyle dużych zmian wartości obciążenia krytycznego (jakkolwiek charakteryzują je różne postacie utraty stateczności), aby konieczna była zmiana konfiguracji przekrojów  $K_I$ . Wprowadzenie imperfekcji typu B lub D prowadzi do wzrostu funkcji celu konstrukcji optymalnej. Jest to wynikiem zmniejszenia sztywności konstrukcji.

W przypadku pewnych konstrukcji wstępne imperfekcje geometrii mogą mieć znaczący wpływ na rozwiązania optymalizacji dyskretniej. Niektóre rodzaje nieznaczących odchyłek od geometrii idealnej, podanej przez projektanta, powodują spadek zdolności przenoszenia obciążeń. Znajomość tolerancji wykonania projektowanego ustroju nośnego może pozwolić po analizie imperfekcji geometrii w optymalizacji dyskretniej na wybór takiej konfiguracji przekrojów elementów, która zapewni odpowiednie bezpieczeństwo. Wiąże się to z ba-

daniem możliwości utraty stateczności konstrukcji przy postaciach odbiegających od postaci utraty stateczności konstrukcji idealnej. Należy podkreślić, że wrażliwość dyskretnego rozwiązania optymalnego na imperfekcje geometrii w znacznym stopniu zależy ( oprócz czysto mechanicznych i wytrzymałościowych parametrów samej konstrukcji) od katalogu zmiennych dyskretnych, którymi dysponujemy.

## 5.6 Optymalizacja regularnych płyt prętowych

### 5.6.1 Stateczność przy wyboczeniu z płaszczyzny

Rozpatrzmy przypadek płyty prętowej swobodnie podpartej na brzegach (rys.7), gdy utrata stateczności zachodzi poprzez ugięcie prętów w kierunku prostopadłym do płaszczyzny konstrukcji. Powierzchnię wyboczenia płyty prętowej można przedstawić w postaci następujących funkcji, opisujących przemieszczenia i kąty obrotu poszczególnych węzłów

$$(5.13) \quad \begin{aligned} u^3 &= U^3 \sin(ax_1) \sin(bx_2) \quad , \\ v^1 &= U^1 \sin(ax_1) \cos(bx_2) \quad , \\ v^2 &= U^2 \cos(ax_1) \sin(bx_2) \quad , \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.14) \quad a = \frac{m \pi}{L_1} \quad , \quad b = \frac{n \pi}{L_2} \quad .$$

$L_1$  i  $L_2$  oznaczają liczbę prętów w kierunku 1 i 2,  $m$  i  $n$  - liczbę półfal w kierunku 1 i 2, natomiast  $U^3, U^1, U^2$  - współczynniki charakteryzujące postać wyboczenia. Funkcje (5.13) spełniają warunki swobodnego podparcia na brzegach



$$(5.15) \quad \begin{aligned} x^1=0 \text{ i } x^1=L_1 : u^3=0, v^1=0 \quad (\tilde{M}_2=0) , \\ x^2=0 \text{ i } x^2=L_2 : u^3=0, v^2=0 \quad (\tilde{M}_1=0) . \end{aligned}$$

Wyboczenie z płaszczyzny przy ścisnaniu płyty w dwóch kierunkach opisują równania (4.43)<sub>3</sub>, (4.43)<sub>4</sub>, (4.43)<sub>5</sub>. Po wstawieniu zależności (5.13) do równań (4.43)<sub>3</sub>, (4.43)<sub>4</sub>, (4.43)<sub>5</sub> otrzymamy układ trzech jednorodnych równań algebraicznych z trzema nieznanymi współczynnikami  $U^3, U^1, U^2$ .

$$(5.16) \quad W [ U^3 \ U^1 \ U^2 ]^T = 0 ,$$

gdzie

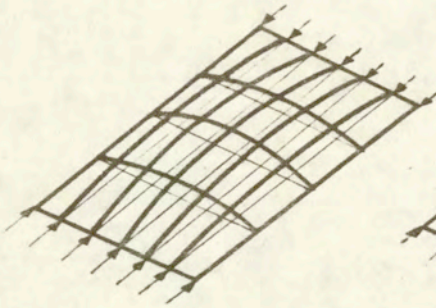
$$(5.17) \quad \begin{aligned} w_{11} &= -2k_1 D_4^v (\cos\alpha - 1) + 2k_2 D_4^v (\cos\beta - 1) , \\ w_{12} &= -w_{21} = -2k_2 l_2 D_3^v \sin\beta , \\ w_{13} &= -w_{31} = -2k_1 l_1 D_3^v \sin\alpha , \\ w_{22} &= -2k_1 (\cos\alpha - 1) - 2k_2 l_2^2 (D_1^v + D_2^v \cos\beta) , \\ w_{23} &= -w_{32} = 0 , \\ w_{33} &= -2k_2 (\cos\beta - 1) - 2k_1 l_1^2 (D_1^v + D_2^v \cos\alpha) . \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu (5.16) będzie miało sens gdy wyznacznik charakterystyczny ze współczynników  $w_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) przy niewiadomych  $U^3, U^1, U^2$  będzie równy zeru.

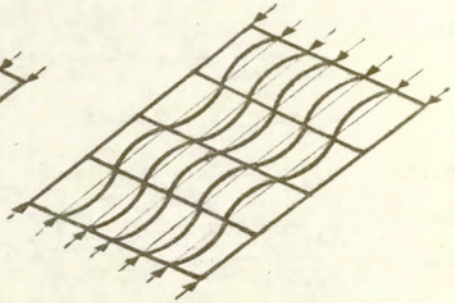
$$(5.18) \quad \det | W | = 0$$

W wyznaczniku tym niewiadomymi wielkościami są wartości sił osiowych  $P_1, P_2$  zawarte we współczynnikach  $D_k$  i  $D_k^v$ . Przy znanym stosunku wielkości  $P_1, P_2$  ze związku (5.18) można określić obciążenie krytyczne, powodujące utratę stateczności rusztu przy przemieszczeniach i obrotach węzłów określonych przez (5.13). Jeżeli we współczynnikach (5.17) uwzględnimy związki (4.46), to otrzymamy wielkość obciążenia krytycznego  $P_{kri}$  w przypadku ścisnania płyty prętowej w jednym kierunku.

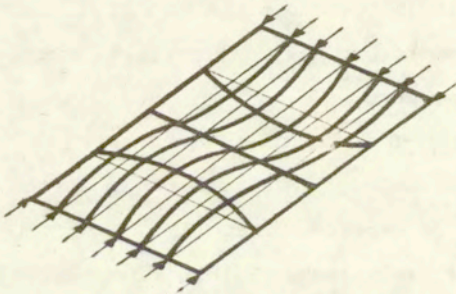
Odpowiedni dobór liczby półfal  $m$  i  $n$  w opisie wyboczenia (5.13) pozwala na analizę różnych przypadków utraty stateczności rusztu. Przyjęcie  $m=1$  i  $n=1$  opisuje postać utraty stateczności pokazaną na rys.21. Rozwiązanie dla  $m=1$ , i  $n=1$  (rys.22) opisuje tzw. "lokalną" utratę stateczności, przy której węzły pozostają w płaszczyźnie a wyboczeniu ulegają pręty pomiędzy węzłami. Rysunek 23 obrazuje przypadek, gdy  $n=1$ ,  $m=2$ .



Rys. 21



Rys. 22



Rys. 23

### 5.6.2 Stateczność przy wyboczeniu w płaszczyźnie

W przypadku, gdy mamy do czynienia z utratą stateczności poprzez ugięcie prętów w kierunku płaszczyzny konstrukcji, do opisu przemieszczeń i kątów obrotu poszczególnych węzłów można użyć następujących funkcji

$$(5.19) \quad \begin{aligned} v^3 &= U^3 \cos(ax_1) \cos(bx_2) , \\ U^1 &= U^1 \cos(ax_1) \sin(bx_2) , \\ U^2 &= U^2 \sin(ax_1) \cos(bx_2) , \end{aligned}$$

gdzie współczynniki  $a$  i  $b$  określone są przez (5.14).

Funkcje te spełniają warunki brzegowe

$$(5.20) \quad \begin{aligned} x^1=0 \text{ i } x^1=L_1 : U^2=0, M_2^v=0, \\ x^2=0 \text{ i } x^2=L_2 : U^1=0, M_1^v=0. \end{aligned}$$

Wstawienie zależności (5.19) do równań (4.43)<sub>1</sub>, (4.43)<sub>2</sub>, (4.43)<sub>3</sub>, opisujących wyboczenie konstrukcji w płaszczyźnie, prowadzi do układu trzech jednorodnych równań z nieznanymi współczynnikami  $U^1, U^2, U^3$

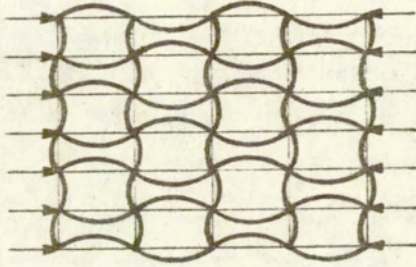
$$(5.21) \quad W [ U^3 \ U^1 \ U^2 ] = 0 ,$$

gdzie

$$(5.22) \quad \begin{aligned} w_{11} &= 2\tilde{k}_1 l_1^2 (\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \cos a) + 2\tilde{k}_2 l_2^2 (\bar{D}_1^* + \bar{D}_2^* \cos b) , \\ w_{12} = w_{21} &= -2\tilde{k}_1 l_1 \bar{D}_3 \sin a , \\ w_{13} = w_{31} &= 2\tilde{k}_2 l_2 \bar{D}_3^* \sin b , \\ w_{22} &= -2\tilde{k}_1 \bar{D}_4 (\cos a - 1) - 2c_2 (\cos b - 1) , \\ w_{23} = w_{32} &= 0 , \\ w_{33} &= -2\tilde{k}_2 \bar{D}_4^* (\cos b - 1) - 2c_1 (\cos a - 1) . \end{aligned}$$

Wartości obciążenia krytycznego, powodującego utratę stateczności rusztu według postaci wyboczenia (5.19) można wyznaczyć korzyś-

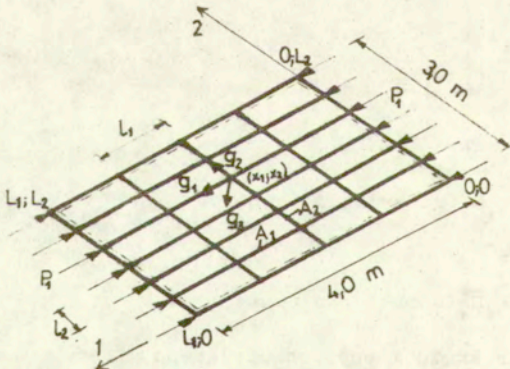
tając z warunku (5.18). Uwzględnienie wiązków (4.46) we współczynnikach (5.22) pozwala na określenie obciążenia krytycznego dla rusztu poddanego działaniu sił ściskających w jednym kierunku. Rysunek 24 obrazuje "lokalną" postać utraty stateczności przy liczbie półfal  $m=L_1$  i  $n=L_2$ .



Rys. 24

### 5.6.3 Płyta prętowa ściskana w jednym kierunku

Problem optymalizacji dotyczy swobodnie podparte, ortogonalnej płyty prętowej, pokazanej na rys.25.



- $L_1 = 4$
- $L_2 = 6$
- $l_1 = 1,0 \text{ m}$
- $l_2 = 0,5 \text{ m}$
- $P_1 = 3,0 \text{ kN}$

Rys. 25

Konstrukcję podzielono na dwie strefy sztywności  $A_1$  i  $A_2$ . Obciążenie zewnętrzne w postaci sił skupionych, przyłożonych w węzłach wynosi  $P_1 = 3,0$  kN. Obliczenia wykonano dla dwóch katalogów prętów stalowych o przekrojach okrągłych.

katalog I  $A_1, A_2 [cm^2] \in (0,785; 3,14; 7,07; 12,57; 19,64)$   
 (5.23)  
 katalog II  $A_1, A_2 [cm^2] \in (1,13; 1,54; 2,01; 2,54; 3,14)$

Bardziej "gęsty" katalog II przyjęto w celu porównania wyników dla różnych zbiorów przekrojów prętów.

W warunku ograniczającym (2.14) sprawdzano kilka najbardziej prawdopodobnych z inżynierskiego punktu widzenia postaci utraty stateczności. Dla wyboczenia płyty z płaszczyzny przyjęto w (5.13) współczynniki  $m=1, n=1$  (rys.21) ;  $m=2, n=1$  (rys.23) ;  $m=2, n=2$  oraz  $m=4, n=6$  (rys.22). Dla przypadku wyboczenia w płaszczyźnie uwzględniono w (5.19)  $m=4, n=6$  (rys.24). Wyniki obliczeń zamieszczono w tablicy 19.

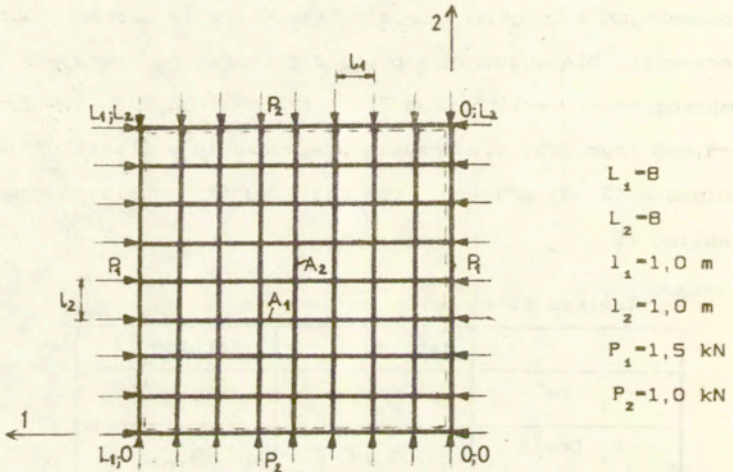
Tablica 19

	Katalog I	Katalog II
$A_1 [cm^2]$	3,14	2,01
$A_2 [cm^2]$	3,14	3,14
Postać utraty stateczności	$m = 1$ $n = 1$	$m = 1$ $n = 1$
$P_{kr} [kN]$	4,54	3,10
$W [N]$	1059,9	811,5

### 5.6.4 Płyta prętowa ściskana w dwóch kierunkach

Problem optymalizacji dotyczy płyty prętowej swobodnie podpartej na brzegach, pokazanej na rysunku 26. Obciążenie zewnętrzne wynosi  $P_1=1,5$  kN i  $P_2=1,0$  kN. Przy podziale konstrukcji na dwie strefy sztywności  $A_1$  i  $A_2$ , obliczenia wykonano dla dwóch katalogów prętów o przekrojach okrągłych

- katalog I  $A_1, A_2 [\text{cm}^2] \in (0,785; 3,14; 7,07; 12,57; 19,64)$ ,  
 (5.24)  
 katalog II  $A_1, A_2 [\text{cm}^2] \in (3,8; 4,52; 5,31; 6,16; 7,07)$ .



Rys. 26

W warunku ograniczającym (2.14) uwzględniono następujące postacie utraty stateczności:

- dla wyboczenia z płaszczyzny (5.13)  $m=1, n=1$  (rys.21),  $m=2, n=1$ ; (rys.23);  $m=4, n=1$ ;  $m=1, n=4$ ;  $m=2, n=2$ ;  $m=4, n=4$ ;  $m=8, n=8$ ;
- dla wyboczenia w płaszczyźnie (5.19)  $m=8, n=8$  (rys.24).

Otrzymane wyniki przedstawia tablica 20.

Tablica 20

	Katalog I	Katalog II
$A_1$ [cm <sup>2</sup> ]	3,14	5,31
$A_2$ [cm <sup>2</sup> ]	7,07	5,31
Postać utraty stateczności	m = 1 n = 1	m = 1 n = 1
$P_{kri}, P_{krz}$ [kN]	1,60 ; 1,07	1,54 ; 1,03
$W$ [ N ]	5770,6	6002,4

## 5.7 Optymalizacja regularnych powłok prętowych

### 5.7.1 Stateczność walcowej powłoki prętowej symetrycznej

Rozważmy przypadek symetrycznej, walcowej powłoki prętowej, poddanej działaniu sił ściskających  $P$ . Powłoka z dwoma krzyżulcami przedstawiona jest na rys. 4. Podobny sposób postępowania dotyczy powłoki, w której nie występują pręty krzyżulców, tzn. nie ma prętów  $\lambda=0, VI, VII$  i  $VIII$ .

Wzoruując się na analizie stateczności ciągłych konstrukcji powłokowych, poddanych działaniu dużych sił ściskających, można posłużyć się podobnymi zależnościami opisującymi postać utraty stateczności. Dotyczy to oczywiście stateczności regularnych konstrukcji prętowych, zbudowanych z dużej liczby powtarzalnych segmentów. Przez analogię do cienkich, ciągłych powłok walcowych, poddanych

działaniu dużych sił ściskających [94], dla regularnych, symetrycznych powłok prętowych przyjęto następujący opis pola przemieszczeń:

$$\begin{aligned}
 (5.25) \quad u^1 &= U^1 \cos(bx_1) \sin(ax_2), \\
 u^2 &= U^2 \sin(bx_1) \cos(ax_2), \\
 u^3 &= U^3 \sin(bx_1) \sin(ax_2), \\
 v^4 &= U^4 \sin(bx_1) \cos(ax_2), \\
 v^5 &= U^5 \cos(bx_1) \sin(ax_2), \\
 v^6 &= U^6 \cos(bx_1) \cos(ax_2),
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$(5.26) \quad a = \frac{2n\pi}{L_2}, \quad b = \frac{m\pi}{L_1},$$

natomiast  $m$  i  $n$  oznaczają liczbę fal odpowiednio w kierunku tworzącej i kierunku obwodowym.

Wstawiając związki (5.25) do równań równowagi pojedynczego węzła (4.40) otrzymujemy układ sześciu jednorodnych równań algebraicznych na niewiadome współczynniki  $U^1, U^2, U^3, U^4, U^5, U^6$ , opisujące postać utraty stateczności.

$$(5.27) \quad W [ U^1 \ U^2 \ U^3 \ U^4 \ U^5 \ U^6 ] = 0$$

Wyrazy macierzy  $W$  mają postać

$$\begin{aligned}
 (5.28) \quad w_{11} &= 2c_1 (\cos b - 1) + 24k_2 (\cos a - 1) + 4c_3 S_1^2 (\cos a \cos b - 1), \\
 w_{12} = w_{21} &= -4c_3 S_1 S_2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} \sin a \sin b, \\
 w_{13} = w_{31} &= -4c_3 S_1 S_2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} \cos a \sin b, \\
 w_{14} = w_{41} &= 0, \\
 w_{15} = w_{51} &= 12k_2 l_2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a - 1), \\
 w_{16} = w_{61} &= -12k_2 l_2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} \sin a, \\
 w_{22} &= 2k_1 \bar{D}_4 (\cos b - 1) - 24k_2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a + 1) + 2c_2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a - 1) + \\
 &\quad + 4c_3 S_2^2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a \cos b - 1),
 \end{aligned}$$



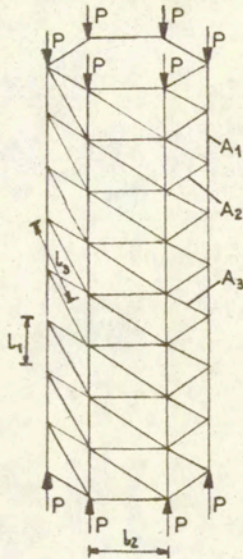
$$\begin{aligned}
 w_{23} = w_{32} &= -2(12k_2^v + c_2) \cos^2 \frac{\varrho}{2} \sin^2 \frac{\varrho}{2} \sin a - 4c_3 S_2^2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} \sin^2 \frac{\varrho}{2} \sin a \cos b, \\
 w_{24} = w_{42} &= 12k_2^v l_2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a + 1), \\
 w_{25} = w_{52} &= 0, \\
 w_{26} = w_{62} &= 2k_1^v l_1 \bar{D}_3 \sin b, \\
 w_{33} &= 24k_2^v \cos^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a - 1) + 2k_1^v D_4 (\cos b - 1) - 2c_2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a + 1) - \\
 &\quad - 4c_3 S_2^2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a \cos b + 1), \\
 w_{34} = w_{43} &= 12k_2^v l_2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} \sin a, \\
 (5.28) \quad w_{35} = w_{53} &= -2k_1^v l_1 D_3 \sin b, \\
 w_{36} = w_{63} &= 0, \\
 w_{44} &= 2k_1^v (\cos b - 1) - 4k_2^v l_2^2 (\cos a + 2), \\
 w_{45} = w_{54} &= 0, \\
 w_{46} = w_{64} &= 0, \\
 w_{55} &= 2k_2^v \cos^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a - 1) - 2k_1^v l_1^2 (D_1 + D_2 \cos b) + 4k_2^v l_2^2 \sin^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a - 2) \\
 w_{56} = w_{65} &= 2(-2k_2^v l_2^2 + k_2) \sin^2 \frac{\varrho}{2} \cos^2 \frac{\varrho}{2} \sin a, \\
 w_{66} &= -2k_1^v l_1^2 (\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \cos b) - 4k_2^v l_2^2 \cos^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a + 2) - 2k_2^v \sin^2 \frac{\varrho}{2} (\cos a + 1).
 \end{aligned}$$

Przyjmując w powyższych wzorach  $c_3 = 0$  otrzymamy wartości współczynników odpowiadających powłoce prętowej bez krzyżulców.

Wykorzystując warunek (4.48) można wyznaczyć wielkość obciążenia krytycznego, powodującego wyboczenie konstrukcji przy postaci utraty stateczności opisaną przez (5.25). Odpowiedni dobór  $m$  i  $n$  w równaniach (5.26) pozwala na modelowanie różnych form utraty stateczności.

### 5.7.2 Stateczność walcowej powłoki prętowej "niesymetrycznej"

Przez powłokę prętową "niesymetryczną" rozumiemy w tym przypadku konstrukcję, w której występują tylko pojedyncze krzyżulce (rys.27)



Rys. 27

Wykorzystując analogię do klasycznych, cylindrycznych powłok ciągłych, poddanych jednoczesnemu ścisnaniu i skręcaniu [94], przyjęto następujące funkcje, opisujące pole przemieszczeń:

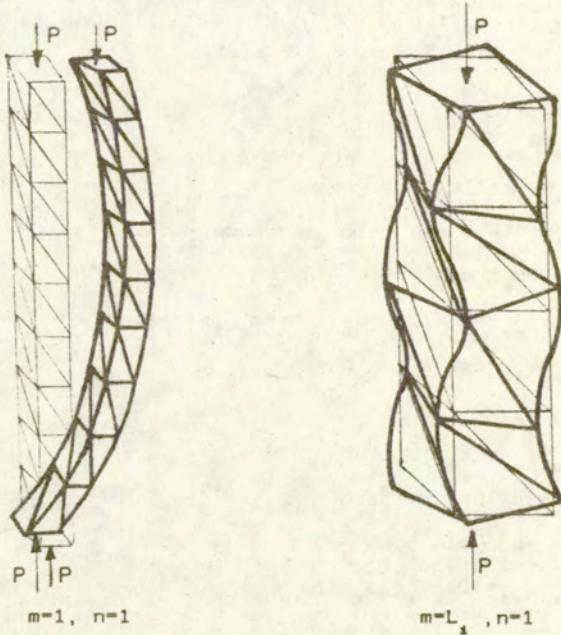
$$(5.29) \quad \begin{aligned} u^1 &= U^1 \cos(ax_2 - bx_1), \\ u^2 &= U^2 \cos(ax_2 - bx_1), \\ u^3 &= U^3 \sin(ax_2 - bx_1), \\ v^4 &= U^4 \cos(ax_2 - bx_1), \\ v^5 &= U^5 \cos(ax_2 - bx_1), \\ v^6 &= U^6 \sin(ax_2 - bx_1), \end{aligned}$$

gdzie współczynniki  $a$  i  $b$  określone są przez (5.26). Przemieszczenia  $u^1, u^2, u^3$  opisują tzw. linie śrubowe.

Wstawienie związków (5.29) do równań (4.40) przy uwzględnieniu faktu, iż występuje tylko jeden pręt krzyżulca, prowadzi do układu sześciu jednorodnych równań (5.27). W tym przypadku wyrazy symetrycznej macierzy  $\mathbb{W}$  można zapisać

$$\begin{aligned}
 w_{11} &= -4(c_1 \sin^2 \frac{2b}{2} + 12k_2 \sin^2 \frac{2a}{2} + c_3 S_1^2 \sin^2 \frac{2a-b}{2}), \\
 w_{12} = w_{21} &= -4c_3 S_1 S_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{2a-b}{2}, \\
 w_{13} = w_{31} &= -2c_3 S_1 S_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin(a-b), \\
 w_{14} = w_{41} &= 0, \\
 w_{15} = w_{51} &= -24k_2 l_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{2a}{2}, \\
 w_{16} = w_{61} &= -12k_2 l_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin a, \\
 w_{22} &= -4(k_1 \bar{D} \sin^2 \frac{2b}{2} + 12k_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{2a}{2} + c_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{2a}{2} + \\
 &\quad + c_3 S_2^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{2a-b}{2}), \\
 w_{23} = w_{32} &= -2[(12k_2 + c_2) \sin a + c_3 S_2^2 \sin(a-b)] \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \\
 w_{24} = w_{42} &= 24k_2 l_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{2a}{2}, \\
 w_{25} = w_{52} &= 0, \\
 (5.30) \quad w_{26} = w_{62} &= -2k_1 l_1 \bar{D} \sin b, \\
 w_{33} &= -4[(12k_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{2a}{2} + k_1 \bar{D} \sin^2 \frac{2b}{2} + c_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{2a}{2} + \\
 &\quad + c_3 S_2^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{2a-b}{2})], \\
 w_{34} = w_{43} &= -12k_2 l_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin a, \\
 w_{35} = w_{53} &= -2k_1 l_1 \bar{D} \sin b, \\
 w_{36} = w_{63} &= 0, \\
 w_{44} &= 4[(2 \sin^2 \frac{2a}{2} - 3)k_2 l_2^2 - k_1 \sin^2 \frac{2b}{2}], \\
 w_{45} = w_{54} &= 0, \\
 w_{46} = w_{64} &= 0, \\
 w_{55} &= -2[2k_2 l_2^2 (2 \sin^2 \frac{2a}{2} + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + k_1 l_1^2 (\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \cos b) + \\
 &\quad + 2k_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{2a}{2}], \\
 w_{56} = w_{65} &= -2(2k_2 l_2^2 - k_2) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin a, \\
 w_{66} &= -2k_1 l_1^2 (\bar{D}_1 + \bar{D}_2 \cos b) + 4k_2 l_2^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} (2 \sin^2 \frac{2a}{2} - 3) - 4k_2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{2a}{2}.
 \end{aligned}$$

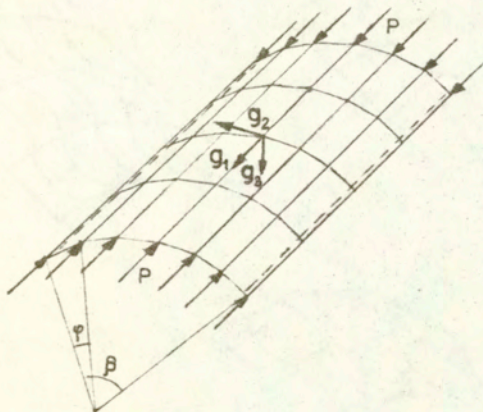
Z warunku zerowania się wyznacznika charakterystycznego (4.48) otrzymuje się wartość obciążenia krytycznego przy postaci utraty stateczności określonej przez (5.29). Niektóre postacie utraty stateczności pokazane zostały na rys.28 na przykładzie konstrukcji o przekroju kwadratowym.



Rys. 28

### 5.7.3 Stateczność walcowej powłoki prętowej otwartej

Układ równań równowagi (4.40) może być również wykorzystany do określenia obciążenia krytycznego dla walcowych powłok prętowych otwartych (rys. 29).



Rys. 29

W tym przypadku do opisu pola przemieszczeń można użyć zależności

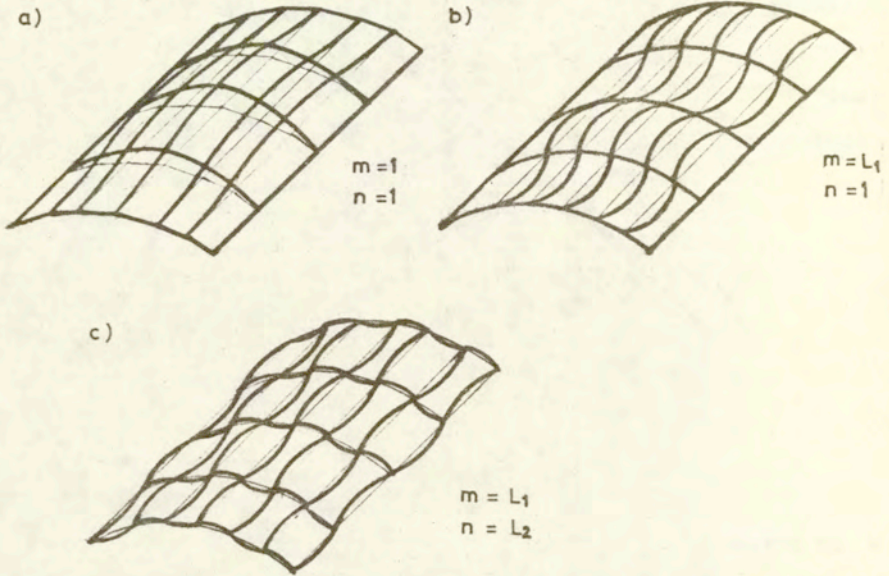
(5.25) przyjmując

$$(5.31) \quad a = \frac{n \pi}{L_2} \quad , \quad b = \frac{m \pi}{L_1} \quad ,$$

oraz

$$(5.32) \quad \varphi = \frac{\beta}{L_2} \quad .$$

Odpowiada to warunkom swobodnego podparcia z tym, że  $u^2$  nie znika wzdłuż tworzących  $x^2=0$  i  $x^2=L_2$  i w płaszczyznach stycznych do obwiedni powłoki istnieją pewne przemieszczenia obwodowe. Jest to przypadek, gdy brzegi powłoki opierają się w rowkach o kształcie litery U z pewnym luzem. Niektóre postacie utraty stateczności pokazane zostały na rys.30.



Rys. 30

#### 5.7.4 Powłoka prętowa o przekroju sześciokątnym

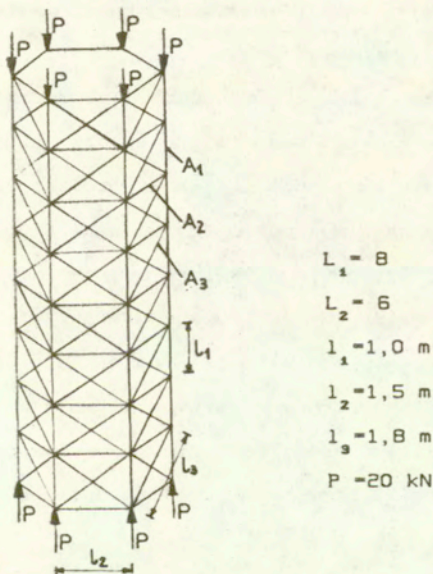
Rozważmy przypadek optymalnego doboru prętów powłoki pokazanej na rys.31. Konstrukcja podzielona została na trzy strefy sztywności obejmujące jednakowe pręty:  $A_1$  - pręty tworzącej,  $A_2$  - pręty obwodowe,  $A_3$  - pręty krzyżulców. Założenia dotyczące sposobu połączeń prętów podane zostały w rozdziale 4.4.2 pracy.

Odpowiedni dobór liczby półfal  $m$  i  $n$  (5.26) pozwala na modelowanie różnych form utraty stateczności. Przy przyjęciu  $n=0$  utrata stateczności nastąpi przez wyboczenie prętów tworzącej w kierunku stycznym do obwiedni powłoki przy powstaniu  $m$  półfal w kierunku tworzącej. Dla  $n=1$  mamy przypadek wyboczenia przy "wyjściu" prętów z obwiedni powłoki i powstaniu  $m$  półfal w kierunku tworzącej;

wręgi zostają obrócone względem siebie i wychodzą z płaszczyzny poziomej. Przyjęcie  $m=8$  opisuje "lokalną" postać utraty stateczności. W rozważanym przykładzie w warunku ograniczającym (2.14) przyjmowano w (5.26)  $m=1, n=0$ ;  $m=2, n=0$ ;  $m=4, n=0$ ;  $m=8, n=0$ ;  $m=1, n=1$ ;  $m=2, n=1$ ;  $m=4, n=1$ ;  $m=8, n=1$ . Przypadek  $n \geq 2$ , charakteryzujący się dużym zdeformowaniem przekrojów poprzecznych powłoki został pominięty jako mało prawdopodobny i dający w wyniku siły krytyczne znacznie przekraczające wartości otrzymywane dla przypadków opisanych powyżej. Wyniki optymalizacji przy wykorzystaniu dwóch katalogów przekrojów okrągłych

$$(5.33) \quad \begin{aligned} & \text{katalog I } A_i [\text{cm}^2] \in \{ 2,01; 3,14; 4,52; 7,07; 12,57 \}, \\ & \text{katalog II } A_i [\text{cm}^2] \in \{ 1,54; 2,01; 2,54; 3,14; 3,8 \}, \end{aligned}$$

gdzie  $i=1,2,3$ , przedstawia tablica 21.



Rys. 31

Tablica 21

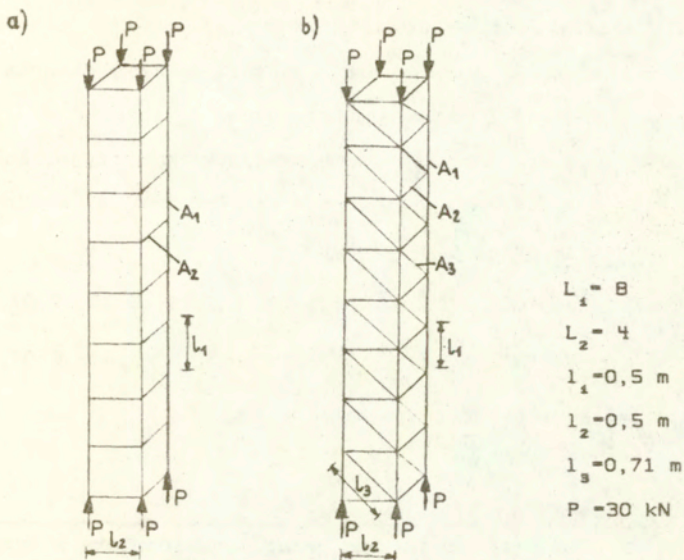
	Katalog I	Katalog II
$A_1$ [ $\text{cm}^2$ ]	4,52	3,80
$A_2$ [ $\text{cm}^2$ ]	2,01	1,54
$A_3$ [ $\text{cm}^2$ ]	2,01	1,54
Postać utraty stateczności	$m = 8$ $n = 0$	$m = 8$ $n = 0$
$P_{kr}$ [ kN ]	33,9	23,8
$W$ [ N ]	5711,8	4503,2

### 5.7.5 Symetryczna i "niesymetryczna" powłoka o przekroju kwadratowym

W poniższym przykładzie porównano wyniki optymalizacji otrzymane dla powłoki prętowej o przekroju kwadratowym bez krzyżulców (rys.32a) oraz z pojedynczym krzyżulcem (rys. 32b).

Przy sprawdzaniu warunku (2.14) w zależnościach (5.25) i (5.29) przyjęto  $m=1, n=0; m=2, n=0; m=4, n=0; m=8, n=0; m=1, n=1; m=2, n=1; m=4, n=1; m=8, n=1$ . Należy zwrócić uwagę na fakt, że opis pola przemieszczeń powłoki symetrycznej (5.25) różni się od związków (5.29) dla powłoki niesymetrycznej i w rezultacie ustalonym wartościom  $m$  i  $n$  odpowiadają podobne, lecz nie jednakowe postacie utraty stateczności. Wyniki otrzymane dla katalogów (5.33) zamieszczono w tablicy 22.





Rys. 32

Tablica 22

	Powłoka symetryczna		Powłoka niesymetryczna	
	Katalog I	Katalog II	Katalog I	Katalog II
$A_1$ [ cm <sup>2</sup> ]	4,52	3,14	2,01	2,01
$A_2$ [ cm <sup>2</sup> ]	3,14	3,80	2,01	1,54
$A_3$ [ cm <sup>2</sup> ]	-	-	2,01	1,54
Postać utraty stateczności	$m = 1$ $n = 1$	$m = 1$ $n = 1$	$m = 8$ $n = 0$	$m = 8$ $n = 0$
$P_{kr}$ [ kN ]	32,7	31,9	35,7	31,9
$W$ [ N ]	1011,4	931,3	893,4	743,6

### 5.7.6 Powłoka prętowa otwarta

Na rysunku 33 przedstawiono prętową powłokę otwartą bez krzyżulców i powłokę z podwójnym krzyżulcem.

Możliwość utraty stateczności analizowano przyjmując w (5.31)  $m=1, n=1$ ;  $m=2, n=1$ ;  $m=3, n=1$ ;  $m=6, n=1$ ;  $m=6, n=0$  i  $m=6, n=6$ . Wyniki otrzymane dla katalogów przekrojów

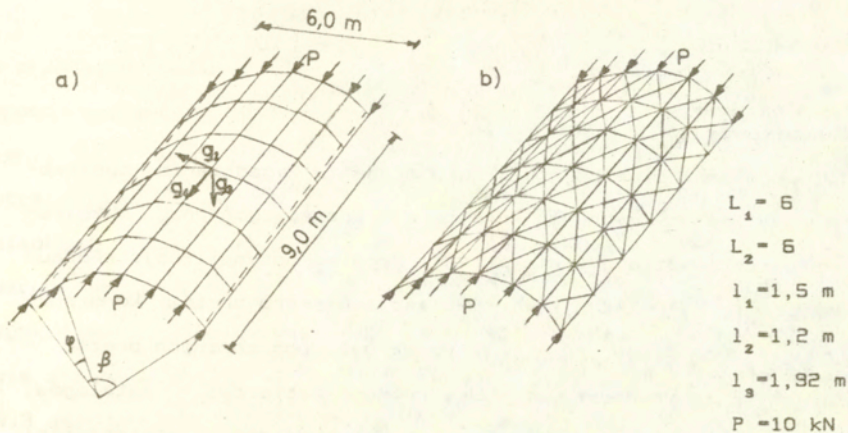
$$(5.34) \quad \text{katalog I } A_i [\text{cm}^2] \in ( 2,01; 5,13; 6,16; 7,07; 8,04 ) ,$$

$$\text{katalog II } A_i [\text{cm}^2] \in ( 2,01; 3,14; 4,52; 7,07; 12,57 ) ,$$

gdzie  $i=1,2,3$ , przedstawia tablica 23.

Tablica 23

	Powłoka bez krzyżulców		Powłoka z krzyżulcami	
	Katalog I	Katalog II	Katalog I	Katalog II
$A_1 [ \text{cm}^2 ]$	5,13	7,07	5,31	4,52
$A_2 [ \text{cm}^2 ]$	6,16	4,52	2,01	2,01
$A_3 [ \text{cm}^2 ]$	-	-	2,01	2,01
Postać utraty stateczności	$m = 1$ $n = 1$	$m = 1$ $n = 1$	$m = 6$ $n = 0$	$m = 6$ $n = 0$
$P_{kr} [ \text{kN} ]$	11,0	10,9	20,5	15,2
$W [ \text{N} ]$	5063,2	5003,1	5603,6	5212,9



Rys. 33

## 6 ZAKOŃCZENIE

### 6.1 Podsumowanie

Głównym zamierzeniem pracy było zbadanie zagadnienia dyskretnej optymalizacji prętowych konstrukcji sprężystych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności. Problem optymalizacji sformułowany został jako zadanie minimalizacji ciężaru prętów konstrukcji gdy zmienne decyzyjne - pola przekrojów poprzecznych prętów - dobierane są ze skończonych, dyskretnych zbiorów - katalogów. W ograniczeniach uwzględniono warunki wytrzymałości, stateczności globalnej i "lokalnej" układu konstrukcyjnego. W rozdz. 1.2 dokonano przeglądu literatury z zakresu optymalizacji dyskretnej konstrukcji inżynierskich i optymalizacji konstrukcji ze względu na warunek utraty stateczności globalnej. Do rozwiązania zadania wybrano metodę przeglądu według rosnących wartości funkcji celu, której algorytm przedstawiono w rozdz. 3. Rozdz. 4 poświęcono warunkom stateczności w rozważanym problemie optymalizacji. Podano sposób określania obciążeń krytycznych konstrukcji wykazujących zachowanie geometrycznie nieliniowe i omówiono analizę stateczności początkowej. W rozdz. 4.4 opisano metodę poidwrotną wyznaczania obciążeń krytycznych dla regularnych konstrukcji prętowych. Metodę tę uogólniono na przypadek walcowych powłok prętowych bez krzyżulców, z podwójnymi krzyżulcami oraz walcowych powłok otwartych. Wykonane testy numeryczne wykazały zgodność otrzymanych wyników z rezultatami proponowanymi w pracach [72] i [101] oraz danymi z badań doświadczalnych [35],[90].

W przykładach obliczeń numerycznych 5.1 zbadano wpływ, jaki ma sposób przyjęcia stref sztywności konstrukcji na dyskretne rozwiązania optymalne małowyniosłych ustrojów prętowych, narażonych na utratę stateczności przez przeskok. Dokonano porównania rozwiązań ciągłych i dyskretnych w zadaniach optymalizacji, gdy decydującym warunkiem ograniczającym jest stateczność globalna układu oraz dyskutowano możliwość otrzymania rozwiązań dyskretnych na podstawie znajomości rozwiązań ciągłych problemu (rozdz. 5.2). W rozdz. 5.3 zaproponowano pewną metodę szacowania rozwiązań dyskretnych na podstawie znajomości rozwiązań optymalnych dla tej samej konstrukcji przy innych wielkościach obciążenia. Metoda ta dotyczy sposobu doboru pól przekrojów elementów konstrukcji kratowych ze względu na spełnienie warunku stateczności globalnej. Porównano ponadto wyniki optymalizacji dyskretniej małowyniosłych konstrukcji prętowych przy stosowaniu nieliniowej i zlinearyzowanej analizy stateczności tych ustrojów (rozdz. 5.4). Na przykładzie przekrycia w kształcie kopuły zbadano wpływ wstępnych imperfekcji geometrii konstrukcji na rezultat optymalizacji dyskretniej (rozdz. 5.5). W rozdz. 5.6 i 5.7 do wyznaczania obciążeń krytycznych regularnych konstrukcji prętowych zastosowano metodę zakładania postaci utraty stateczności (rozdz. 4.4) i wyznaczano rozwiązania optymalne dla płyt i powłok przy różnych "gęstościach" przekrojów przyjmowanych w katalogach. Dorobkiem autora jest ponadto opracowanie programów obliczeniowych, umożliwiających realizację algorytmu metody przeglądu oraz określanie obciążeń krytycznych rozważanych konstrukcji. Wnioski wynikające z przeprowadzonych obliczeń numerycznych zestawione zostały w następnym rozdziale.

## 6.2 Wnioski i spostrzeżenia

Sformułowane poniżej wnioski i spostrzeżenia obejmują własności rozwiązań dyskretnych, zaobserwowane na podstawie wykonanych przykładów numerycznych i nie muszą one obowiązywać we wszystkich problemach dyskretnej optymalizacji rozważanej klasy konstrukcji. Ich znajomość jest jednak istotna w przypadku zagadnień do rozwiązania w praktyce.

Z przeprowadzonych rozważań i obliczeń wynikają następujące zasadnicze wnioski:

1) Optymalnego rozwiązania dyskretnego rozważanego problemu nie należy wyznaczać poprzez zaokrąglenie znanego rozwiązania ciągłego do najbliższych przekrojów podanych w katalogu. Zaokrąglenie w dół powoduje naruszenie warunków ograniczających na stateczność. Zaokrąglenie w górę nie prowadzi z reguły do rozwiązań optymalnych z punktu widzenia optymalizacji dyskretnej (przykłady 5.2.1-5.2.3). Wyznaczenie rozwiązania optymalnego wiąże się zatem z koniecznością stosowania metod programowania dyskretnego.

2) Optymalizacja ciągła konstrukcji wykazujących symetrię budowy i przyłożonego obciążenia prowadzi zazwyczaj do symetrii w doborze przekrojów elementów [52,44]. Rozwiązaniem dyskretnym takich zagadnień może być jednak układ, w którym symetria rozmieszczenia elementów nie jest zachowana (przykłady 5.1.1, 5.1.2, 5.2.1, 5.2.2).

3) W optymalizacji dyskretnej (zwłaszcza konstrukcji zbudowanych symetrycznie) jednej wartości funkcji celu mogą odpowiadać różne warianty doboru przekrojów prętów. Poszczególne rozwiązania mogą różnić się wielkościami obciążeń krytycznych. Jest to konsekwencją faktu, że dyskretne rozwiązania optymalne przeważnie nie leżą na

brzegu obszaru rozwiązań D (rys.1), wyznaczanego przez warunki ograniczające zadania z pominięciem warunków dyskretności. Niejednoznaczność ta stwarza możliwość wyboru rozwiązania najbardziej odpowiedniego ze względu na inne kryteria, nie uwzględnione w ograniczeniach (przykład 5.2.1).

4) W zadaniach praktycznych godne uwagi może być przejrzenie kilku kolejnych rozwiązań dyskretnych spełniających ograniczenia, "następujących" po rozwiązaniu optymalnym. Nieznacznemu wzrostowi funkcji celu może bowiem towarzyszyć istotny wzrost obciążenia krytycznego (przykład 5.2.2, wariant b, c). Projektant ma wtedy możliwość zwiększenia stateczności kosztem nieznacznego, w porównaniu z rozwiązaniem optymalnym, wzrostu ciężaru. Jest to jednak równoznaczne ze zrezygowaniem z optimum wynikającego z analizy matematycznej postawionego zagadnienia.

5) Pewne konstrukcje przestrzenne wykazują dużą wrażliwość na małe, wstępne niedokładności wymiarów geometrycznych i pod wpływem obciążenia zachowują się inaczej niż konstrukcje idealne. Wpływ imperfekcji na stateczność układu może być znaczny. Wstępnym niedokładnościom wykonania konstrukcji towarzyszą zmiany obciążeń krytycznych i postaci utraty stateczności, i niejednokrotnie decydują o rozwiązaniu dyskretnym. Niewielkie odchylenia od zakładanej geometrii układu mogą istotnie obniżać zdolność konstrukcji do przenoszenia obciążeń. Jako rozwiązanie zadania optymalizacji otrzymuje się wówczas konstrukcje o większym ciężarze niż optymalna konstrukcja idealna. Niektóre rodzaje imperfekcji, mimo że zmniejszają wielkości obciążeń krytycznych, nie powodują naruszenia warunków ograniczających na stateczność. Wpływ tych imperfekcji na rozwiązanie optymalne jest nieistotny. Można powiedzieć, że

optymalna konstrukcja idealna jest na nie niewrażliwa. Wynika to z faktu, że rozwiązania dyskretne z reguły nie leżą na brzegu obszaru rozwiązań dopuszczalnych  $D$  (rys.1) w analogicznym zadaniu optymalizacji ciągłej, tzn. obszaru wyznaczanego przez warunki ograniczające zadania z pominięciem warunków dyskretności zmiennych.

Analiza przedstawionych przykładów numerycznych prowadzi ponadto do następujących spostrzeżeń:

6) Metoda przeglądu według rosnących wartości funkcji celu okazała się przydatna i efektywna w rozważanych zagadnieniach. Jej zaletą jest duża prostota i możliwość wyznaczania optimum globalnego rozważanych problemów przy dowolnej postaci warunków ograniczających oraz dowolnie przyjmowanych katalogach dopuszczalnych zmiennych decyzyjnych.

7) Najprostszym sposobem rozwiązania zadania optymalizacji dyskretnej jest sprawdzenie wszystkich możliwych kombinacji doboru zmiennych decyzyjnych (pełny przegląd wariantów). Jeżeli katalogi poszczególnych stref zawierają po tyle samo elementów, tzn. dla każdej z  $k$  stref mamy katalog złożony z  $q$  elementów, to liczba kombinacji  $L_k$  w pełnym przeglądzie rozwiązań wynosi  $L_k = q^k$ . Jeżeli liczby prętów dla poszczególnych stref różnią się między sobą i dla strefy  $i$  mamy  $q_i$  prętów w katalogu, to liczba kombinacji w pełnym przeglądzie wynosi  $L_k = q_1 * q_2 * \dots * q_k$ . W zadaniach praktycznych wielkości  $L_k$  są bardzo duże. Chęć znalezienia rozwiązania przy katalogach zawierających wszystkie aktualnie produkowane elementy często jest zadaniem niemożliwym do zrealizowania. Projektant zmuszony jest zatem do "zawężenia" (zmniejszenia) liczby elementów  $q_i$  w katalogach poszczególnych stref. Od odpowiednie-



go doboru przekrojów prętów i ich liczby w katalogach zależy szybkość wyznaczenia optymalnego rozwiązania dyskretnego. Przez "odpowiedni dobór" należy rozumieć wobec tego odrzucenie tych elementów, o których wiadomo z góry, że nie spełniają warunków ograniczających zadania, oraz takie przyjęcie katalogów zmiennych dyskretnych, aby rozwiązanie rozważanego aktualnie problemu optymalizacji pokryło się z rozwiązaniem otrzymanym przy uwzględnieniu wszystkich dostępnych zmiennych projektowych. Jest to równoznaczne z oszacowaniem rozwiązania dyskretnego na podstawie analizy podobnych konstrukcji bądź wykorzystaniem doświadczenia projektanta. Czas wykonywania metody przeglądu uzależniony jest od liczby zmiennych decyzyjnych, liczby warunków ograniczających typu (2.16) oraz liczby elementów w katalogach i zwiększa się wraz ze wzrostem wymienionych wielkości. Odpowiedni dobór elementów w katalogach poszczególnych stref umożliwia szybsze wyznaczenie rozwiązania.

8) Optymalizacja ciągła rozważanych konstrukcji na minimum ciężaru wyznacza dolną granicę wartości funkcji celu, otrzymywanych przy wykorzystaniu metod optymalizacji dyskretnej. "Odległość" rozwiązania dyskretnego od ciągłego zależy w ogólności od dostępnych katalogów przekrojów. Do mniejszych wartości funkcji celu prowadzi korzystanie z katalogów bardziej "gęstych" (przykłady 5.6.1-5.7.6). Potwierdza to intuicyjne spostrzeżenia dotyczące relacji pomiędzy rozwiązaniami ciągłymi i dyskretnymi.

9) Znajomość wielkości funkcji celu, odpowiadającej optymalnemu rozwiązaniu ciągłemu, umożliwia szybsze wyznaczenie rozwiązań dyskretnych. Rozwiązanie ciągłe wyznacza dolną granicę rozwiązań dyskretnych. Warunków ograniczających rozważanego zadania optymalizacji nie potrzeba zatem sprawdzać w przypadkach, gdy kombinacje

przekrojów prętów związane są z funkcjami celu mniejszymi od znanego rozwiązania optymalizacji ciągłej.

10) Znajomość wymiarów przekrojów z rozwiązania ciągłego stanowi dobre przybliżenie początkowe do optymalizacji dyskretnej (rozdz. 5.2). Projektant nie musi wówczas poszukiwać rozwiązań przy wszystkich dostępnych mu elementach, bowiem katalogi prętów dobrane dla poszczególnych stref można "zawęzić" w oparciu o znane rozwiązania ciągłe. Tym samym zmniejszeniu ulega liczba kombinacji sprawdzanych w metodzie przeglądu. Rozwiązań dyskretnych należy szukać dobierając w katalogach przekroje zarówno większe jak i mniejsze od znanego rozwiązania ciągłego. Przyjmowanie przekrojów do katalogów poszczególnych stref należy przeprowadzać jednak ostrożnie ze względu na możliwość wyznaczenia minimum lokalnego.

11) Szacowanie rozwiązań przez skalowanie (rozdz. 5.3) może skrócić czas optymalizacji dyskretnej dla konstrukcji kratowych, jeżeli znane jest optymalne rozwiązanie ciągłe lub dyskretne przy innych niż rozpatrywane obecnie wartościach obciążeń. Dzięki znajomości oszacowanych wielkości przekrojów przy których spełniony jest warunek utraty stateczności globalnej (2.14), ograniczyć można liczbę przekrojów w katalogach poszczególnych stref.

12) Sposób podziału konstrukcji na strefy sztywności, odpowiadające elementom o jednakowych polach przekrojów poprzecznych, ma duży wpływ na otrzymane rozwiązanie dyskretne. Łżejsze konstrukcje otrzymuje się przy większym zróżnicowaniu stref sztywności (przykłady 5.1.2-5.1.4). Należy dodać, że nie są to jednak konstrukcje najbardziej ekonomiczne z punktu widzenia techniki wykonania. Zbyt duże zróżnicowanie elementów i ich rozmieszczenia w konstrukcji jest niewskazane między innymi z powodu komplikowania procesu

montażu obiektu. Praktyczne wykorzystanie rozwiązań optymalnych sugeruje podział układu konstrukcyjnego na kilka stref o jednakowych przekrojach. Określenie położenia tych stref zależy od projektanta i jest poddyktowane różnymi w każdym przypadku wymogami użyteczności i wykonawstwa. W przedstawionych przykładach obliczeniowych przyjmowano maksymalnie cztery strefy sztywności.

13) Czas sprawdzania warunków ograniczających (2.12)-(2.14) zadania optymalizacji geometrycznie nieliniowych konstrukcji z przykładów 5.1.5, 5.2.3 czy 5.5 był znacznie większy niż czas trwania metody przeglądu. W zadaniach praktycznych, gdy liczba niewiadomych jest wielokrotnie większa niż w układach optymalizowanych w pracy, pożądane jest zatem stosowanie najbardziej efektywnych procedur wyznaczania obciążeń krytycznych i stanu naprężeń lub też korzystanie z metod przybliżonych, wystarczająco dokładnych z inżynierskiego punktu widzenia. Istotne jest również ustalenie kolejności, w jakiej sprawdzane są poszczególne ograniczenia, aby w przypadku gdy pierwsze z nich nie jest spełnione uniknąć niepotrzebnego sprawdzania pozostałych i szybko wyeliminować kombinacje nie spełniające narzuconych warunków. W analizowanych przykładach jako pierwszy sprawdzano warunek utraty stateczności globalnej.

14) Analiza stateczności sprężystych konstrukcji prętowych, których elementy mogą doznawać dużych przemieszczeń, wymaga uwzględnienia nieliniowości geometrycznych. Dotyczy to zwłaszcza przestrzennych konstrukcji małowyniosłych, w których może wystąpić utrata stateczności przez przeskok. Stosowanie podejścia zlinearyzowanego do tej klasy konstrukcji prowadzi do istotnych błędów. W rozważanym zadaniu optymalizacji związane to jest z aktywnością

warunków utraty stateczności "lokalnej". Otrzymuje się wówczas zaniżone wielkości przekrojów poprzecznych elementów a wyznaczone rozwiązanie nie spełnia warunku stateczności globalnej, formułowanego w podejściu nieliniowym (rozdz. 5.4).

15) Postępując analogicznie jak w przypadku imperfekcji geometrii układu, można uwzględnić w zagadnieniach optymalizacji dyskretnej niedokładności przyłożonego obciążenia. Zadanie można też uogólnić na problem wielu stanów obciążenia. Dla każdego stanu obciążenia należałoby wyznaczyć konstrukcję o minimalnym ciężarze a rozwiązanie zagadnienia byłoby określone przez przekroje prętów, dobrane w oparciu o obwiednię największych przekrojów w każdym stanie.

Ponieważ efektywna optymalizacja konstrukcji prętowych narażonych na utratę stateczności nie może ograniczać się jedynie do optymalizacji ciągłej a czas wykonywania programów optymalizacji dyskretnej można skrócić wykorzystując znajomość rozwiązań ciągłych, zdaniem autora, najbardziej efektywne algorytmy optymalizacji mogą powstać poprzez umiejętne połączenie optymalizacji ciągłej i dyskretnej.

LITERATURA

1. N. Annamalai, A.D.M. Lewis, J.E. Goldberg, Cost Optimization of Welded Plate Girders, J. of Structural Division, ASCE, 97, ST1, 1971.
2. M. Amari, H. Yamakawa, A. Okumura, Optimum Design of Framed Structures with Regard to Elastic Buckling, Bulletin of the JSME, 22, 165, 1979.
3. J.H. Argyris, M. König, D.A. Nagy, M. Haase, G. Malejannakis, Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych, w: Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej, Ossolineum, Wrocław 1977
4. J.H. Argyris, D.W. Scharpf, Large Deflection Analysis of Prestressed Networks, J. of Structural Division, ASCE, 98, ST3, 1972
5. J. Bauer, Optymalizacja konstrukcji z uwzględnieniem dyskretnego charakteru zmiennych decyzyjnych, w: VIII Konferencja "Metody komputerowe w mechanice konstrukcji", Jadwisin, 26-30 maja 1987, Referaty t.1, Warszawa 1987
6. J. Bauer, W. Gutkowski, Stateczność regularnych konstrukcji prętowych, Arch. Inż. Łądowej, 19, 1, 1973.
7. J. Bauer, W. Gutkowski, Z. Iwanow, A Discrete Method For Lattice Structures Optimization, Engrg Optimization, 5, 1981
8. J. Bauer, W. Gutkowski, Z. Iwanow, Metody numeryczne w optymalizacji dyskretnej, Mechanika i Komputer, T.4, Warszawa 1981

9. P.Berkowski, J.Boroń, Synteza wybranych konstrukcji prętowych metodą programowania dyskretnego "back-track", Inżynieria i Budownictwo, 6, 1986
10. F.Bleich, H.H.Bleich, Buckling Strength of Metal Structures, Mc Graw-Hill, New York 1952
11. J. Błachut, A.Gajewski, Unimodalna oraz bimodalna optymalizacja narażonych na utratę stateczności prętów i łuków, w: Optymalizacja Wytrzymałościowa Konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1983
12. S.Błaszkwski, Z.Kączkowski, Metoda Crossa, PWN, Warszawa 1967
13. J.Boroń, J.M.Sieczkowski, Dwukryterialna optymalizacja dyskretna jako sposób projektowania kratownic metalowych, w: Prace VI Krajowej Konferencji "Poliptymalizacja w projektowaniu - Mielno-87", Zeszyt Naukowy Wydziału Mechanicznego Nr 10, WSIInż., Koszalin 1987
14. В.А.Бовин, Разностно-вариационные методы строительной механики, Госстройиздат, Киев 1963.
15. S.J.Britvec, The Stability of Elastic Systems, Pergamon Press Inc., New York 1973
16. D.M.Brown, A.H.S.Ang, Structural Optimization by Nonlinear Programming, J. of Structural Division, ASCE, 92, ST6, 1966
17. D.O.Brush, B.O.Almroth, Buckling of Bars, Plates and Shells, Mc Graw-Hill, New York 1975

18. A.Cella, Properties of Discrete Optima in Structural Optimization, J. of Structural Division, ASCE, 98, ST3, 1972
19. A.Cella, R.D. Logcher, Automated Optimum Design from Discrete Components, J. of Structural Division, ASCE, 97, ST1, 1971
20. A.Cella, K. Soosaar, Discrete Variables in Structural Optimization, in: Optimum Structural Design. Theory and Applications, Ed. R.M. Gallagher, O.C. Zienkiewicz, John Wiley and Sons, London 1973
21. N. Distefano, A. Rath, A Dynamic Programming Approach to the Optimization of Elastic Trusses, J. of Optimization Theory and Applications, 15, 1, 1975
22. Duan Ming-Zhu, An Improved Templeman's Algorithm for the Optimum Design of Trusses with Discrete Member Sizes, Eng. Opt., 9, 1986, pp. 303-312
23. J. Farkas, L. Szabó, Optimum Design of Beams and Frames of Welded I-Sections by Means of Backtrack Programming, Acta Techn. Hung., 91, 1980
24. W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki, Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji, PWN, Warszawa 1980
25. C. Fleury, U. Braibant, Structural Optimization Involving Discrete Design Variables, Euromech Colloquium 164, Optimization Methods in Structural Design, 1982
26. D.B. Fox, J.S. Liebman, A Discrete Nonlinear Simplex Method for Optimized Engineering Design, Engrg Optimization, 5, 1981

27. A.Gajewski, M.Zyczkowski, Optymalne kształtowanie ustrojów prętowych przy warunkach stateczności, w: Wybrane zagadnienia stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1987
28. R.H.Gallagher, Finite Element Analysis.Fundamentals, Prentice-Hall Inc., New Jersey 1975
29. R.S.Garfinkel, G.L.Nemhauser, Programowanie całkowitoliczbowe, PWN, Warszawa 1978
30. A.Garstecki, A.Gawęcki, M.Gawęcki, Optymalizacja systemu lekkich hal stalowych, Prace IPPT PAN, 6, 1978
31. L.Gawkowska, Dobór optymalnych przekrojów w strefach sztywności przekryć strukturalnych, Arch.Inż.Lądowej, 31, 1-2, 1985
32. Е. Н. Герасимов, Ю. М. Почтман, В. В. Скалозуб, Многокритериальная оптимизация конструкций. Вища Школа. Киев-Донецк 1985
33. H.Greenberg, Integer Programming, Academic Press, New York 1971
34. D.F.Grierson, W.H.Lee, Optimal Synthesis of Frameworks under Elastic and Plastic Performance Constraints Using Discrete Sections, J. Struct. Mech., 14, 4, 1986
35. W.Gutkowski, Regularne konstrukcje prętowe, PWN, Warszawa 1973
36. W.Gutkowski, J.Bauer, Z.Iwanow, Minimum Weight Design of Space Frames from a Catalogue, in: Shells, Membranes and Space Frames, Proc.IASS Symposium, vol.3, Osaka 1986



37. H.M.Hua, Optimization for Structures of Discrete-Size Elements, Computers & Structures, 17, 1, 1983
38. K.Kuseyin, Nonlinear Theory of Elastic Stability, Nordhoff Intern. Publ., Leyden 1975
39. Z.Iwanow, The Method of Enumeration According to the Increasing Value of the Objective Function in the Optimization of Bar Structures, Bull. Acad. Polon. Sci., Serie Scie. Tech., 29, 9-10, 1981
40. D.S.Jagannathan, K.I.Epstein, P.Christiano, Nonlinear Analysis of Reticulated Space Trusses, J. of Structural Division, ASCE, 101, ST12, 1975
41. K.Jarmai, Computer-Aided Optimal Design of Structures Made of Higher Strength Steels, w: VII Międzynarodowa Konf. Nauk.-Techn. KILiW PAN, Konstrukcje metalowe, T.1, Gdańsk 1984
42. K.V.John, C.V.Ramakrishnan, K.G.Sharma, Minimum Weight Design of Trusses Using Improved Move Limit Method of Sequential Linear Programming, Computers & Structures, 27, 5, 1987
43. C.Jordan, Calculus of Finite Differences, Chelsea Pub. Com., New York 1950
44. M.P.Kamat, N.S.Khot, V.B.Venkayya, Optimization of Shallow Trusses Against Limit Point Instability, AIAA J., 22, 3, 1984

45. J.A.Karczewski, W.M.Paczkowski, Efektywna metoda optymalizacji stalowych kratownic przestrzennych, w: XXVII Konferencja Nauk. KILiW PAN i Kom. Nauki PZITB, Konstrukcje metalowe T.3, Warszawa 1981 Krynica
46. J.A.Karczewski, W.M.Paczkowski, Analiza optymalizacyjna kratownicy przestrzennej, Inżynieria i Budownictwo, 3, 1979
47. J.A.Karczewski, W.M.Paczkowski, Optymalizacja kratownicy przestrzennej metodą pełnego przeglądu wariantów, Inżynieria i Budownictwo, 3, 1980
48. J.A.Karczewski, W.M.Paczkowski, Analiza efektywności wybranych metod optymalizacji w kształtowaniu kratownic przestrzennych, w: XXVII Konferencja Nauk. KILiW PAN i Kom. Nauki PZITB, Konstrukcje metalowe, T.2, Wrocław 1980 Krynica
49. J.A.Karczewski, W.M.Paczkowski, Optymalne projektowanie kratownicy przestrzennej o ortogonalnym układzie prętów, w: VII Międzynarodowa Konf. Nauk.-Techn. KILiW PAN, Konstrukcje metalowe, T.1, Gdańsk 1984
50. N.S.Khot, Nonlinear Analysis of Optimized Structure with Constraints on System Stability, AIAA J., 21, 8, 1983
51. N.S.Khot, Optimal Design of a Structure for System Stability for a Specified Eigenvalue Distribution, in: New Directions in Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, Chichester 1984

52. N.S.Khot, M.P.Kamat, Minimum Weight Design of Truss Structures with Geometric Nonlinear Behavior, AIAA J., 23, 1985
53. N.S.Khot, U.B.Venkayya, L.Berke, Optimum Structural Design with Stability Constraints, Int. J. For Numerical Methods in Engineering, 10, 1976
54. J.Kiusalaas, Optimal Design of Structures with Buckling Constraints, Int. J. Solids Structures, 9, 1973
55. M.Kleiber, Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum, PWN, Warszawa-Poznań 1985
56. M.Kleiber, Numeryczna analiza statycznych i dynamicznych zagadnień stateczności konstrukcji, Politechnika Poznańska, Materiały dla studiów doktoranckich i podyplomowych, Nr 16, Poznań 1987
57. M.Kleiber, Numeryczne aspekty analizy ciał i konstrukcji sprężysto-plastycznych, Mechanika i Komputer, T.3, Warszawa 1980
58. A.A.Korbut, J.J.Finkelsztejn, Programowanie dyskretne, PWN, Warszawa 1974
59. Latticed Structures: State-of-the-Art Report, J. of Structural Division, ASCE, 102, ST11, 1976
60. Z.Łeśniak, Metody optymalizacji konstrukcji przy zastosowaniu maszyn matematycznych, Arkady, Warszawa 1970

61. Z.K.Leśniak, Z.Grodzki, B.Jakubowska, OSY-system optymalizacji hal stalowych, Arkady, Warszawa 1978
62. J.S.Liebman, N.Khachaturian, V.Chanaratna, Discrete Structural Optimization, J. of Structural Division, ASCE, 107, ST11, 1981
63. S.L.Lipson, K.M.Agrawal, Weight Optimization of Plane Trusses, J. of Structural Division, ASCE, 100, ST5, 1974
64. Д. А. Мацюлявичюс, Синтез оптимальных шарнирностержневых конструкций по заданному сортаменту материала, Литовский Механический Сборник, 2, 3, 1968
65. Z.S.Makowski, A history of the development of domes and a review of recent achievements world-wide, in: Z.S.Makowski (Ed.), Analysis, Design and Construction of Braced Domes, Granada Technical Books, London 1984
66. E.F.Masur, Optimal Placement of Available Sections in Structural Eigenvalue Problems, J. of Optimization Theory and Applications, 15, 1, 1975
67. E.F.Masur, Optimal Structural Design for a Discrete Set of Available Structural Members, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3, 2, 1974
68. E.F.Masur, Optimality in the Presence of Discreteness and Dicontinuity, in: Optimization in Structural Design, IUTAM Symposium, Ed.A.Sawczuk, Z.Mróz, Springer-Verlag, Berlin 1975

69. E.F.Masur, Z.Mróz, Nonstationary Conditions in Structural Design, Int. J. Solids Structures, 15, 1979
70. K.N.Murthy, P.Christiano, Optimal Design for Prescribed Buckling Loads, J. of Structural Division, ASCE, 100, ST11, 1974
71. A.Niemierko, Optymalizacja kratownic metodami programowania matematycznego, Praca doktorska, Prace IPPT, 2, 1978
72. W.Nowacki, Mechanika budowli, T.2, PWN, Warszawa 1967
73. N.Olhoff, H.Rasmussen, On Single and Bimodal Buckling Loads of Clamped Columns, Int. J. Solids Structures, 13, 1977
74. W.M.Paczkowski, Program dyskretnej optymalizacji ortogonalnych kratownic przestrzennych, w: VIII Konferencja "Metody komputerowe w mechanice konstrukcji", Jadwisin, 26-30 maja 1987, Referaty t.1, Warszawa 1987
75. C.A.Prato, Maximization of Eigenvalues by Conjugate Gradients, J. of Structural Division, ASCE, 96, ST1, 1970
76. M.Pyrz, Optymalizacja dyskretna regularnych konstrukcji prętowych przy uwzględnieniu warunków utraty stateczności, Rozprawy Inż., 35, 3, 1987
77. K.F.Reinschmidt, Discrete Structural Optimization, J. of Structural Division, ASCE, 97, ST1, 1971
78. K.M.Romstad, K.H.Runge, Efficient Frame Design for Stability Constraints, J. Engng Mech. Division, ASCE, 100, EM6, 1974

79. J.Roorda, Problemy stateczności konstrukcji sprężystych, w: Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1981
80. A.Rosen, L.A.Schmit, Optimization of Truss Structures Having Local and System Geometric Imperfections, AIAA J., 19, 5, 1980
81. L.A.Schmit, C.Fleury, Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Methods, AIAA J., 18, 12, 1980
82. L.A.Schmit, R.K.Ramanathan, Multilevel Approach to Minimum Weight Design Including Buckling Constraints, AIAA J., 16, 2, 1978
83. A.Sepulveda, J.H.Cassis, An Efficient Algorithm for the Optimum design of Trusses with Discrete Variables, Int. J. Numer. Methods Eng., 23, 6, 1986
84. C.Y.Sheu, W.Prager, Minimum-Weight Design with Piecewise Constant Specific Stiffness, J. of Optimization Theory and Applications, 2, 3, 1968
85. M.V.Soare, Investigation of the collapse of a large-span braced dome, in: Z.S.Makowski (Ed.), Analysis, Design and Construction of Braced Domes, Granada Technical Books, London 1984
86. Sun Huan-Hun, Cao Zheng, Two-level Optimum Design of Reinforced Concrete Frames with Integer Variables, Eng. Opt., 2, 3, 1985

87. H.Switzky,P.C.Wang, Design and Analysis of Frames for Stability, J. of Structural Division, ASCE, 95, ST4, 1969
88. II Sympozjum Naukowe nt."Problemy bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych na tle zaistniałych katastrof i awarii", Szczecin 1976
89. III,IV,U Sympozjum nt. "Badanie przyczyn i zapobieganie awariom konstrukcji budowlanych", Szczecin 1977, 1978, 1979
90. J.Y.Tamayo,M.Ojalvo, Buckling of Three-Legged Columns with Batten Bracing, J. of Structural Division, ASCE,91,ST1,1965
91. A.B.Templeman,D.F.Yates, A Segmental Method for the Discrete Optimum Design of Structures, Engng Optimization, 6, 3, 1983
92. J.M.T.Thompson, G.W.Hunt, A General Theory of Elastic Stability, J.Wiley and Sons, London 1973
93. J.M.T.Thompson, G.W.Hunt, Elastic Instability Phenomena, J.Wiley and Sons, Chichester 1984
94. S.P.Timoshenko, Teoria stateczności sprężystej,Arkady, Warszawa 1963
95. A.R.Toakley, Optimum Design Using Available Sections, J. of Structural Division, ASCE, 97, ST5, 1968
96. H.K.Turner,R.H.Plaut, Optimal Design for Stability Under Multiple Loads, J. Eng. Mech. Division, ASCE, 12, EM6, 1980
97. T.Wah,L.R.Calcote, Structural Analysis by Finite Differences, Van Nostrand Reinhold Company, New York 1970

98. S.Walukiewicz, Programowanie dyskretne, PWN, Warszawa 1986
99. Z.Waszczyzyn, Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych, w: Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1981
100. Z.Waszczyzyn, Cz.Cichoń, Metody rozwiązywania nieliniowych zagadnień statyki i stateczności konstrukcji w ujęciu MES, w: Wybrane zagadnienia stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1987
101. M.Wieczorek, Numeryczna analiza konstrukcji podatnych na wyboczenie, Dodatek do biuletynu nr 11 (411) Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa 1986
102. А. С. Вольмир, Устойчивость упругих систем, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Москва 1963
103. D.T.Wright, Membrane Forces and Buckling in Reticulated Shells, J. of Structural Division, ASCE, 91, ST1, 1965
104. D.F.Yates, I.B.Boffey, A.B.Templeman, A Heuristic Method for the Design of Minimum Weight Trusses Using Discrete Member Sizes, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 37, 1, 1983
105. M.S.Zarghamee, Minimum Weight Design with Stability Constraints, J. of Structural Division, ASCE, 96, ST8, 1970
106. M.Życzkowski, Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych, w: Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1981



MARIUSZ PYRZ

Zakład Teorii Konstrukcji

IPPT PAN

DISCRETE OPTIMIZATION OF TRUSS STRUCTURES  
UNDER LOSS OF STABILITY CONSTRAINTS

SUMMARY

The thesis deals with problems of discrete optimization of elastic truss structures with loss of stability constraints. The problem under consideration consists of minimizing the weight of the bars under constraints on element stresses, element stability and global structural stability. Design variables are areas and moments of inertia of members' cross sections, selected from a discrete, finite catalogues. An enumeration method according to the increasing value of the objective function is applied. Shallow truss structures with nonlinear geometrical behavior and regular frame structures under the assumption of small displacements in undercritical state are considered.

In numerical examples of shallow trusses the influence of stiffness zones on discrete solutions has been investigated. The discrete optimal solutions have been compared with the results of continuous design variables optimization as well as optimal solutions obtained for nonlinear and linearized stability analysis. A method of optimal members estimation has been found, the influence of small initial imperfections of geometry on discrete optimal designs has been examined. The critical loads were calculated from the minimum potential energy condition.

In numerical examples of regular frames optimization discrete solutions have been analysed for different cross-sectional catalogues. The finite differences calculus and estimation of instability modes method were used to obtain critical loads.

MARIUSZ PYRZ

Zakład Teorii Konstrukcji

IPPT PAN

ДИСКРЕТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ  
С УЧЁТОМ УСЛОВИЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена задачам дискретной оптимизации упругих стержневых конструкций с учётом потери устойчивости. Задача оптимизации сформулирована как минимизация общего веса стержней при условиях ограничивающих напряжения, обеспечивающих устойчивость отдельных элементов и устойчивость конструкции в целом. Переменными проектирования являются поля и моменты инерции поперечных сечений стержней, определяемые на основе дискретных, конечных каталогов. Задача оптимизации решена методом перебора согласно растущим значениям функции цели. Рассматриваются пологие стержневые, геометрически нелинейные конструкции и регулярные рамы при условии малых перемещений в докритическом состоянии.

Численные примеры оптимизации стержневых конструкций проанализированы с точки зрения влияния подбора зон одинаковой жёсткости на дискретные, оптимальные решения. Сравниваются дискретные и непрерывные решения, полученные с учётом нелинейной устойчивости с одной стороны, и линейного приближения, с другой. Представлен метод оценки оптимальных поперечных сечений. Изучено влияние геометрического несовершенства конструкции на решения задачи дискретной оптимизации. Критические нагрузки определены с использованием условия минимума потенциальной энергии.

Прилагаются численные примеры оптимизации рам в случае различных каталогов значений поперечных сечений. Критические нагрузки получены методом предварительного определения разновидностей потери устойчивости, с использованием конечных разностей.

SPIS TRESCI

	str.
1 WSTĘP . . . . .	4
1.1 Przedmiot rozważań . . . . .	4
1.2 Przegląd literatury . . . . .	7
1.3 Zakres i cel pracy . . . . .	20
2 SFORMUŁOWANIE PROBLEMU OPTYMALIZACJI . . . . .	23
3 METODA ROZWIĄZANIA . . . . .	27
3.1 Metoda przeglądu według rosnących wartości funkcji celu	27
3.2 Algorytm metody przeglądu . . . . .	29
3.3 Rozwiązanie zadania optymalizacji . . . . .	31
4 WARUNKI STATECZNOŚCI W ZADANIU OPTYMALIZACJI . . . . .	34
4.1 Utrata stateczności konstrukcji sprężystych . . . . .	34
4.2 Stateczność konstrukcji geometrycznie nieliniowych . . . . .	37
4.3 Zlinearyzowana analiza stateczności . . . . .	43
4.4 Stateczność regularnych konstrukcji prętowych . . . . .	45
4.4.1 Geometria konstrukcji . . . . .	45
4.4.2 Równania równowagi węzła . . . . .	50
4.4.3 Wyznaczanie obciążenia krytycznego . . . . .	57
5 PRZYKŁADY OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH . . . . .	59
5.1 Optymalizacja konstrukcji narażonych na utratę stateczności przez przeskok . . . . .	61
5.1.1 Kratownica dwuprętowa . . . . .	61
5.1.2 Kratownica czteroprętowa o 2 płaszczyznach symetrii	62
5.1.3 Kratownica czteroprętowa o 1 płaszczyźnie symetrii	64
5.1.4 Kratownica czteroprętowa niesymetryczna . . . . .	65
5.1.5 Powłoka prętowa . . . . .	66

5.2 Rozwiązania ciągłe a rozwiązania dyskretne . . . . .	69
5.2.1 Kratownica dwuprętowa . . . . .	69
5.2.2 Kratownica czteroprętowa symetryczna . . . . .	72
5.2.3 Powłoka prętowa . . . . .	73
5.3 Szacowanie rozwiązań dyskretnych przez skalowanie . . .	75
5.4 Stateczność nieliniowa i stateczność zlinearyzowana . . .	79
5.5 Wpływ wstępnych imperfekcji geometrii na rozwiązania dyskretne . . . . .	81
5.6 Optymalizacja regularnych płyt prętowych . . . . .	88
5.6.1 Stateczność przy wyboczeniu z płaszczyzny . . . . .	88
5.6.2 Stateczność przy wyboczeniu w płaszczyźnie . . . . .	91
5.6.3 Płyta prętowa ściskana w jednym kierunku . . . . .	92
5.6.4 Płyta prętowa ściskana w dwóch kierunkach . . . . .	94
5.7 Optymalizacja regularnych powłok prętowych . . . . .	95
5.7.1 Stateczność walcowej powłoki prętowej symetrycznej	95
5.7.2 Stateczność walcowej powłoki prętowej "niesymetrycznej" . . . . .	97
5.7.3 Stateczność walcowej powłoki prętowej otwartej . .	100
5.7.4 Powłoka prętowa o przekroju sześciokątnym . . . . .	102
5.7.5 Symetryczna i "niesymetryczna" powłoka o przekroju kwadratowym . . . . .	104
5.7.6 Prętowa powłoka otwarta . . . . .	106
6 ZAKOŃCZENIE . . . . .	108
6.1 Podsumowanie . . . . .	108
6.2 Wnioski i spostrzeżenia . . . . .	110
LITERATURA . . . . .	117