Krzysztof TATARKIEWICZ

Zasada Maupertuis

JEJ TWÓRCA; JEJ SFORMUŁOWANIE
I JEJ DZIEJE

Wydanie II rozszerzone

WARSZAWA 2000

Praca ta zawiera materiały do referatu wygłoszonego na XIII *Ogólnopolskiej Szkole Historii Matematyki,* która odbyła się w Kołobrzegu w dniach 17-21 maja 1999 oraz do referatu wygłoszonego na XIV *Ogólnopolskiej Szkole Historii Matematyki,* która odbyła się w Zielonej Górze w dniach 10-17 maja 2000.

II wydruk II wydania

Egzemplarz nr 10

Labor omnia vincit

W e r g i l i u s z, *Georgiki*

1. Pierre Luis Moreau de M a u p e rtu i s, 15.IX.1698 - 27.VII.1759

WPROWADZENIE[1]

0.1. Cel referatu. Ten referat ma - między innymi - pewien konkretny cel: chciałbym rozpropagować tezę, że z wykładów mechaniki teoretyczne) (o ile takie jeszcze na wyższych uczelniach bywają !) należy opuścić omawianie tak zwanej *Zasady Maupertuis.* Bowiem należy ona obecnie już tylko do historii nauki.

I właśnie z tego powodu, tutaj o historii *Zasady Maupertuis* (a raczej o historii kilku *Zasad Maupertuis* blisko z sobą związanych) chcę mówić. Szczególnie, że w prawie wszystkich dostępnych na rynku (bądź już tylko w bibliotekach) drukowanych źródłach, jej przedstawienie zawiera liczne błędy lub przynajmniej luki. Istnieje parę wyjątków, ale nawet w tych wyjątkowych wypadkach, występujące sformułowania też nie są - z różnych powodów - absolutnie poprawne i co gorzej teksty te ograniczają się do omówienia Zasady Maupertuis bez choćby wspomnienia jej dość zawiłej historii.

By osiągnąć ten cel, omówię dokładniej okoliczności powstania - koło połowy XVIII wieku - tej Zasady. Ale właściwie, początkowo był to tylko całkiem niejasny projekt na taką - jak ją dziś rozumiemy - zasadę. Okres ten mówię go nieco dokładniej, gdyż przecież XIII Ogólnopolska Szkoła Historii Matematyki odbyta w KOŁOBRZEGU w dniach 17 -21 maja 1999 roku poświęcona była właśnie *„Historii matematyki* w*XVIII wieku"* - a niniejszy tekst jest częściowo zbiorem materiałów do referatu o Zasadzie Maupertuis, który na nią przygotowałem (referat ten miał tytuł *„Od fałszywego do nieciekawego twierdzenia - czyli* 230 *lat historii tak zwanej* <<*Zasady Maupertuis* »" - patrz **[85]** oraz **[86])**. Prześlizgnąłem się w tym referacie niemal całkowicie nad następnymi 140 latami 1756 - 1896, by omówić dokładniej jej historię od 1896 do 1970 roku - czyli historię tej Zasady w okresie jej ostatecznego doprecyzowania i podawania jej poprawnych dowodów.

Tę lukę w referacie z 1999 częściowo zapełniłem referatem *„Zasada Maupertuis wczoraj (od S.J. Kóniga i J.L. Lagra∩ge'a do H. Hertza i E.T. Whittakera*)" wygłoszonym na XIV Ogólnopolskiej Szkołę Historii Matematyki (poświęconej *„Matematyce czasów Gaussa* "), a odbytej w ZIELONEJ GÓRZE W dniach 8-14 maja 2000 roku - patrz **[87]** oraz **[88].** Dokładniejsze omówienie 140 lat okresu 1756 - 1896 wymagałoby nie kilkunastu czy nawet kilkudziesięciu, lecz kilkuset stron. I to nudnych stron - referowałyby one błędy, często trudne do uchwycenia. Dlatego też obecnie dodane (niżej) materiały powinny całkowicie wystarczyć, by jako tako przygotowany czytelnik mógł się zorientować w historii Zasady Maupertuis w tej jej *«epoce błędów i wypaczeń ».*

Mój referat kończę (tak jak był skończony referat o rok wcześniejszy) na omawianiu stanu rzeczy w roku 1970 roku, gdyż - o ile dobrze wiem - w późniejszym okresie czasu nie zanotowano już żadnych ważniejszych wyników, które mogłyby nas tutaj zainteresować). Też całkowite i poprawne umieszczenie tej zasady na terenie dzisiejszej mechaniki teoretycznej wymagałoby 2 godzinnego, semestralnego - lub nawet rocznego - wykładu (i odpowiedniej długości tekstu drukowanego). Dlatego zajmę się tylko jednym, acz najbardziej charakterystycznym przypadkiem (przy najmocniejszych założeniach) jej możliwych sformułowań.

Nieniejszy referat jest - właściwie - zbiorem materiałów do tych wyżej wspomnianych referatów. Dlatego też nie może być uważany za starannie wykończony tekst. Liczne jego usterki (redakcyjne) mogą być, choć nieco, usprawiedliwione tym, że nie jest on drukiem, a tylko wydrukiem, który ma być powielony tylko w niewielkiej liczbie egzemplarzy.

0.2. Źródła. Jeśli chodzi o źródła, to nie ma problemu ze źródłami pochodzącymi z ostatniego wieku - będę je cytować w odpowiednich miejscach. Natomiast, bardzo jest źle z źródłami z okresu powstawania Zasady Maupertuis. Oryginalne wydawnictwa są niedostępne w POLSCE (między innymi brak dzieł zbiorowych P.L. de Maupertuis **[59]).** A chyba nie dokonywano ich przedruków później niż w XVIII wieku. A jeśli nawet one istnieją, to też są trudno dostępne (a raczej chyba całkiem niedostępne) w WARSZAWIE. O ile dobrze wiem, to istnieje tylko tomik przedruków artykułów opublikowanych koło 1800 roku w serii *Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften* (patrz **[31] -** brak go zresztą w zasobach Biblioteki Głównej Uniwersytetu Warszawskiego). Być może fakt istnienia tylko jednego tomikowi w tej serii poświęconemu zasadom wariacyjnym mechaniki spowodowany jest pewnymi ciągotami metafizycznymi samego P.L. de Maupertuis (nie łubianymi przez wydawców tej serii).

Jedynym dostępnym - jeśli chodzi o źródła przynajmniej względnie z pierwszej ręki ("względnie", bo tłumaczone) - jest prawie 1000 stronnicowe wydawnictwo L.S. Polaka [67]. Ale zawiera ono dość specyficzny wybór tekstów, a przy tym tekstów wydrukowanych wyłącznie w tłumaczeniach. A wiadomo jak tłumaczenia (szczególnie starych) tekstów potrafią je zafałszować. Ponadto załączony komentarz L.S. Polaka dziś już tylko śmieszy swoimi marksistowskiemi sloganami (na szczęście niezbyt - jak na epokę druku książki - licznymi). Zresztą tą problematyką zajmowano się w byłym Związku Radzieckim dużo. Literatura tematu jest tu spora, ale wszystko są to publikacje z 3, 4 czy nawet 5 ręki. Nie w rosyjskim języku wydana jest antologia **[20]**, ale zawiera ona mało materiałów, które mogłyby nas zainteresować.

Najnowszą - o ile wiem - książką poświęconą życiorysowi P.L. de Maupertuis jest dostępna w WARSZAWIE[2] pozycja P. Brunet **[10]**, wydana jednak już dość dawno temu, bo w 1929 roku. Pisana była ona jako praca doktorska na wydziale humanistycznym Uniwersytetu w STRASBURGU (*doctorat és lettres à la Faculte des Lettres de Strasbourg*) z oczywistymi skutkami tego faktu : mało w niej jest o wynikach naukowych (w szczególności matematycznych) P.L. de M a u p e r t u i s, ale za to dużo jest (dość dokładnych) szczegółów biograficznych. Zawiera ona dużą bibliografię przedmiotu (ma ona 88 pozycji drukowanych i rękopiśmiennych). Z niej i z innych źródeł wynika, że w ciągu XIX wieku ukazało się sporo opracowań (głównie we FRANCJI) życia i osiągnięć naukowych P.L. de Maupertuis.

Podobno, jedyny pełny spis opublikowanych prac P.L. de Maupertuis jest załączony do jego (nieosiągalnej w POLSCE) biografii **[1]** napisanej przez Wawrzyńca Angliviel de La Beaumelle (1726 - 1773), ale wydanej dopiero w połowie XIX wieku.

Wielekie encyklopedie francuskie zawierają dłuższe artykuły [98] oraz [99], które jednak nie wnoszą wiele nowego do naszej wiedzy o P.L. de Maupertuis.

Jak się zdaje, do końca XIX wieku istniało zainteresowanie zarówno osobą P.L. de M a u p e r t u i s jak i jego osiąnięciami - można tu się powołać, choćby na pracę **[13]** znanego fizjologa Emila Du Bois-Reymonda (1818 - 1896) - jest to tekst odczytu wygłoszonego 28 stycznia 1889 na posiedzeniu Niemieckiej Akademii Nauk w BERLINIE. Poczym - już w XX wieku - zainteresowanie to niemal zanikło. E. Du Bois-Reymonda (tego od *„Ignoramus. Ignorabimus* !" z roku 1872) nie należy mylić z jego bratem - matematykiem

Pawłem Dawidem Gustawem Du Bois - Reymondem (1831 - 1889) o którym będzie niżej jeszcze mowa [3].

Przynajmniej do 1929 roku sporo rękopiśmiennych materiałów tyczących się P.L. de M a u p e r t u i s nie było wydanych drukiem i - jak się zdaje - po tej dacie nikt niemi się specjalnie nie interesował (trudno jest rzecz sprawdzać w odpowiednich działach *Mathematical Review* czy *Zentralblattu...*). Dotyczy to, między innymi, innymi korespondencji między P.L. deMaupertuis a Wolterem -P. Brunet korzystał z rękopisów znajdujących się głównie w *Bibliotheque Nationale* w PARYŻU. Wolter, w ciągu swego długiego życia napisał nieprawdopodobną ilość listów - uważa się, że było ich około 40 000. Z czego połowa mniej więcej ocalała do dziś. W początku XX wieku zaczęto je wydawać, do II Wojny Światowej wydano ich 10 000, a drugie tyle czekało na wydanie. Od 1945 roku wydano wprawdzie kilka dalszych tomów, ale - znów o ile dobrze wiem - nie zawierają one korespondencji z P.L. de M a u p e r t u i s.

Część listów (ale nie wszystkie) Fryderyka II do P.L de M a u p e rtu i s zawiera pozycja [38], dostępna w WARSZAWIE[4]. Inne listy - przynajmniej do niedawna - nie były wydane drukiem.

Materiały do - omawianych niżej tylko bardzo skrótowo - dziejów Zasady Maupertuis w XIX wieku są w Polsce względnie łatwo dostępne. Można je znaleźć nie tylko w Bibliotece Głównej Uniwersytetu Warszawskiego, ale i w niektórych innych bibliotekach polskich (biblioteka Instytutu Matematycznego PAN w Warszawie, Biblioteka Jagiellońska w Krakowie i biblioteka Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Jagiellońskiego). Może ktoś zechce przedrzeć się dokładniej przez tę niezachęcającą literaturę ? Jest ona niezachęcająca, gdyż (z naszego punktu widzenia) jest ona nieścisła i operuje symbolami oraz pojęciami dziś już nie stosowanymi. Jej spis można znaleźć (przynajmniej w sporym wyborze) w bibliografii rachunku wariacyjnego Maurycego L e c a t [44], [45], [46] oraz [47].

Przy okazji cytowania pracy M. L e c a t, można zauważyć, że pisanie historii rachunku wariacyjnego w XIX wieku jest zadaniem bardzo niewdzięcznym. Acz, naogół (ale nie zawsze !), wypowiadane są w pracach z tego zakresu wyniki prawdziwe, to jednak w najlepszym wypadku podane dowody zawierają luki (a często wogóle w pracach tych brak nawet prób udowodnienia - skądinąd prawdziwych - twierdzeń). A wszystko to w atmosferze mglistych pojęć i niezrozumiałych dla nas (a może one były już wtedy niezrozumiałe ?) rozważań i przekształceń...

0.3. Ograniczenia referatu. Historia *Zasady Maupertuis,* o której mam mówić, jest skomplikowana i nie we wszystkich szczegółach jasna - specjalnie jeśli chodzi o sam jej okres powstawania w połowie XVIII wieku. Chociażby ze względu na te jej komplikacje, a ponadto na owe - wspomniane wyżej - braki literaturowe, trudno jest przedstawić klarownie początkowy proces jej powstawania. Natomiast jej historia przez następne 140 lat, to jest jej historia w okresie mniej więcej od 1755 do 1896 roku, jest też bardzo zawikłana i chyba - (jak już wspomnieliśmy wyżej) z dzisiejszego punktu widzenia - nie przedstawia specjalnego interesu dla matematyka (najwyżej może zainteresować wyspecjalizowanego historyka nauki).

Okres 1896 - 1970 jest bardzo ważny, ale jego zrozumiałe omówienie wymaga daleko idących wyjaśnień z zakresu mechaniki teoretycznej. Stąd też ściślej należałoby powiedzieć, że nie będę tu referować całej historii *Zasady Maupertuis,* lecz będę referować głównie historię jej tworzenia oraz jej istotę. Dlatego też - niestety - dużo czasu zajmie mi precyzyjne sformułowanie niektórych pojęć. Bez takiego wstępu absolutnie nie byłby zrozumiały zasadniczy ciąg rozważań tego referatu. Ten ciąg będzie przedstawiony w sposób skrótowy - pełny tekst mógłby zająć całkiem spory tomik. A jeśliby miał uwzględnić również - choćby najkrótsze - odwoływania się do podstaw mechaniki teoretycznej i rachunku wariacyjnego, na pograniczu których leży ta tematyka, to taki tekst mógłby nawet urosnąć do sporego tomu (nie mówiąc już nic o omawianiu uogólnień wykraczających po za najprostsze przypadki).

Na to by nie komplikować mych wypowiedzi, ograniczę się do (bardzo kulawych) zasad nieparametrycznych - takiemi są bowiem, przynajmniej niektóre, zagadnienia mechaniczne, w których występuje czas w sposób wyraźny. Omówienia zasad parametrycznych (też ważnych z punktu widzenia mechaniki) zainteresowani mogą znaleźć w moim *Rachunku Wariacyjnym,* tom II, **[83],** gdzie rzecz jest (też w sposób nie całkiem pełny) przedstawiona w rozdziale 10 (a w szczególności na stronach 200 - 212) oraz na stronach 223 - 224. Niestety, przerobiona wersja tego rozdziału, zawierająca wiele oryginalnych wyników (a która miała być opublikowana w języku francuskim) nigdy nie ukazała się w druku.

0.4. Różnice w stosunku do poprzedniego wydania. Poprzednie wydanie tej pracy też było zaopatrzone w relatywnie długi rozdział tworzący wprowadzenie do terminologii i wyników rachunku wariacyjnego oraz mechaniki - bez takiego wstępu nie było (i nie jest) możliwe poprawne i powszechnie zrozumiałe (jak już wyżej wspomniałem) dzisiejsze sformułowanie Zasady

Maupertuis. Popełniłem jednak błąd : chcąc być bardziej zrozumiały dla nie przygotowanych słuchaczy starałem się być choć trochę bliższym oznaczeń spotykanych w większości dotychczas wydanych podręczników oraz wykładów i nieco uprościłem (patrz **[81], [85]** lub **[86])** symbolikę pracy **[82]** i **[83],** zamiast stosować ją nieuproszczoną. Ponieważ mało kto zaglądał do tego ostatniego podręcznika, więc wywołało to jednak kilka nieporozumień. Dlatego poniżej rezygnuję tu z tych uproszczeń, kosztem dalszego przedłużenia rozważań wstępnych. Zmieniłem też parę, powszechnie nie przyjętych, terminów na inne.

Rozdział I - P.L. DE MAUPERTUIS

Fecił quod potuit, faciant meliora potentes.
Napis na nagrobku w kościele w Janowcu.

1.1. P.L. de Maupertuis - młodość. Piotr Ludwik Moreau de Maupertuis[5] był urodzony w SAINT-MALO 15.IX.1698 roku. Był całe swe życie - przynajmniej formalnie - katolikien. Jego ojciec Řene Maureau seigneur de Maupertuis (? - 1746; pisał się on "M a u r e a u" przez "au" - w przeciwieństwie do swego syna, który się pisał przez "o") był, w zasadzie, oficerem marynarki, pracował też jako urzędnik w *„Conseil de Commerce”*. Był też, przez pewien czas, delegatem do zgromadzenia prowincji NORMANDII. Matką była Jeanne-Eugeńe z domu Ba u drań. Podobno bardzo rozpuszczała młodego syna. W SAINT-MALO rodzina mieszkała przy dzisiejszej ulicy DE LA HARPE (patrz **[100]).**

Rodzina P.L. de M a u p e r t u i s nie była liczna - o ile dobrze wiem - to nie miał on rodzeństwa. Był to rodzina szlachecka, ale nie arystokratyczna (nie utytułowana). Należała ona do tak zwanej *„noblesse d́epée"* („szlachta szpady” - to jest szlachtą ziemiańsko-wojskową), a nie do (nieco przez nią dyskryminowanej) *„noblesse de robę”* („szlachty togi” - to jest szlachty urzędniczo-sądowej) [6].

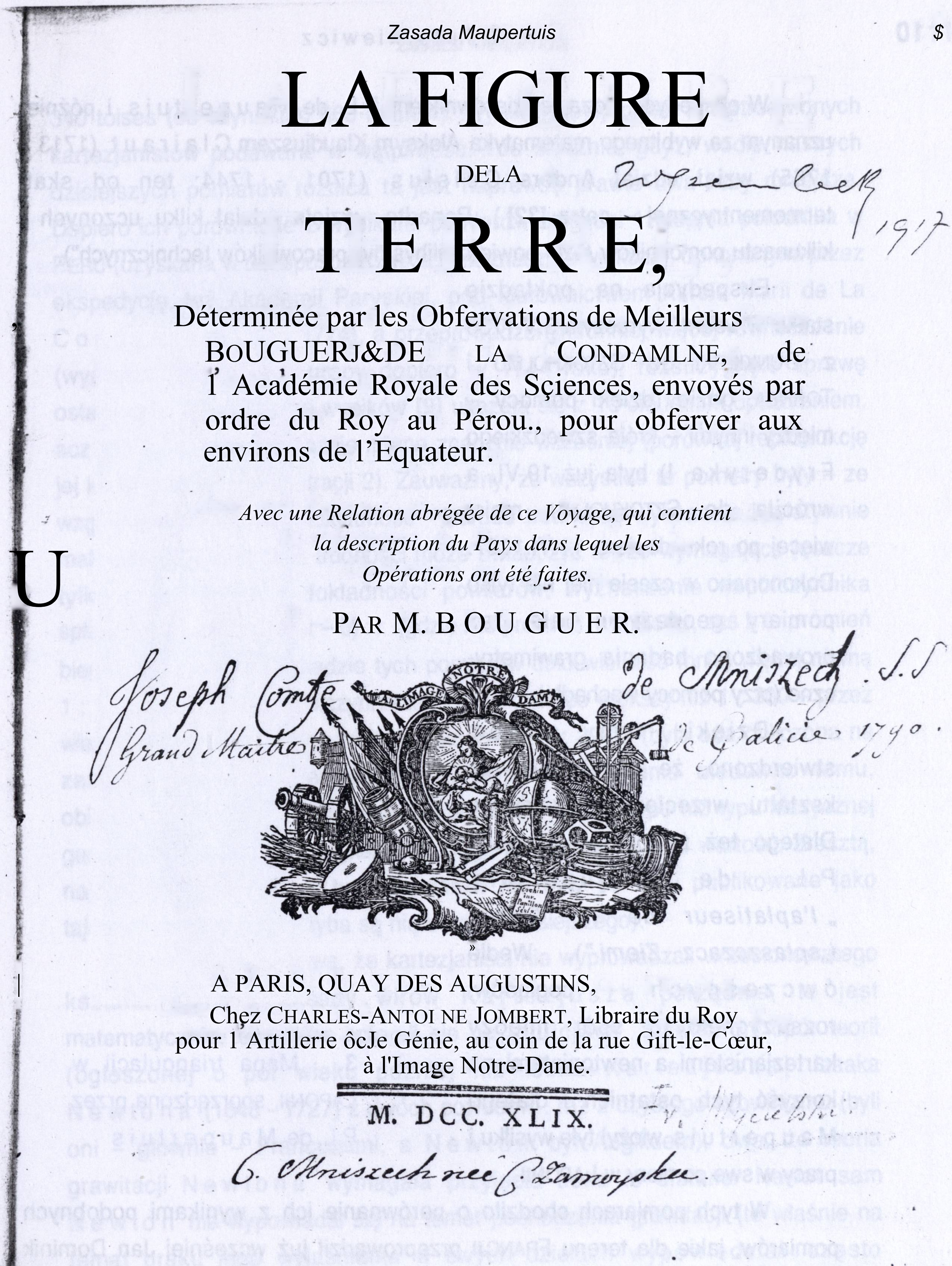
P.L. de M a u p e r t u i s od 1714 roku uczył się w PARYŻU W Collége de la Marche, poczym prywatnie studiował w PARYŻU pod kierownictwem niejakiego Bernier. Powrócił do domu w 1716. Chciał - po ojcu - robić karierę w marynarce, ale (rozpuszczająca go - podobno - ciągle jeszcze) matka wymogła na nim, że zrezygnował z tych planów. Podróż do HOLANDII 1717. Po powrocie zajmuje się muzyką i budową instrumentów muzycznych. W 1718 roku, w dalszym ciągu wbrew opinii swej matki, wstąpił do wojska - tyle, że nie do marynarki, lecz do armii lądowej. Służył przez 2 lata w oddziale „szarych" muszkieterów. Nie było wtedy żadnej wojny. Miał on więc wiele czasu do dyspozycji - wykorzystywał go, między inymi, na przesiadywanie w PARYŻU w sławnym *Café Procope* z literatami (naogół dość znanymi - między innymi był wśród nich i Pierre de M a r i v a u x; 1688 - 1763). Poczym był - dość krótko - dowódcą kompanii kawalerii pułku *de la Rocheguyon* w LILLE (był to - chyba - pułk dragonów) w stopniu "lieutenant" (= "porucznika") lub kapitana (byty to wtedy wyższe stopnie oficerskie). 1722 odchodzi z wojska i wraca do PARYŻA. Zostaje w 1723 roku członkiem *Akademii Paryskiej* (dokładniej : *Académie des Sciences).* Został nim jako ceniony specjalista od kształtu instrumentów muzycznych (! porównaj jego publikację **[51]).** Ale publikuje też prace matematyczne, jak, na przykład, pracę **[52]** i fizyczne, jak, na przykład (w 1733 roku), pracę o ruchu bańki powietrznej, która podnosi się w płynie. Był chyba doceniany i awansowany. W roku 1742 (w którym właśnie zaczęły się rozluźniać jego związki z PARYŻEM) został nawet dyrektorem paryskiej *Académie des Sciences.*

Zauważmy, przy okazji, że P.L. de Maupertuis publikował - w zasadzie - wyłącznie po francusku. Był to zwyczaj nie tylko różnych Akademii Paryskich (czy innych francuskich), ale w XVIII wieku zaczęła - na przykład - dołączać do niego (rezygnując z łaciny) też i Akademia Berlińska (może właśnie pod wpływem swego ówczesnego prezesa, czyli właśnie P.L. de Maupertuis). Ale jednak w XVIII matematycy (jak na przykład Leonhard Euler; 1707 - 1783), czy nawet jeszcze w I połowie XIX wieku (jak Carl Fryderyk Gauss; 1777 - 1855) najczęściej drukowali swoje prace po łacinie. Odgrywało tu pewnie rolę francuskie pochodzenie P.L. de M a u p e r t u i s i jego związki z nauką francuską, która wtedy już od dawna posługiwała się językiem francuskim, zamiast powszechnie, gdzie indziej, używanej łaciny. O początek tej akcji, przechodzenia z łaciny na współczesne języki narodowe, która tak fatalnie wpłynęła na uniwersalność nauki europejskiej, oskarża się zwykle Kartezjusza (Rene Dés Cartes; 1596 - 1650). Jest to oskarżenie niesłuszne, gdyż - chyba - pierwszym, który przechodził z łaciny w pracach naukowych na język francuski był wcześniejszy od Kartezjusza o przeszło 200 lat Mikołaj Oresme (około 1315 - 1382), zmarły jako biskup LISIEUX. W dalszym rozwoju, w I połowie XX wieku prace naukowe publikowano nie tylko w 5 „językach kongresowych", ale i w wielu innych. Dopiero dziś, po 400 latach, zaczynamy mieć znowu uniwersalny język nauki - zaczyna nim się stawać powoli język angielski, ale przy wielkich (przynajmniej do roku 1989) oporach Rosjan i przy wielu - ciągle jeszcze - publikacjach w innych językach.

P.L. de Maupertuis zajmował w swej Akademii różne stanowiska. Początkowo od 11.XII.1723 jest „adjoint mecanique" (jako następca Aleksego Klaudiusza C l ai rau lta ; 1713- 1765);od 1.VIII.1725jest „associé géometre", od 24.VII.1731 jest „pensionnaire géometre", a od 1742 - jak już wspomnieliśmy - nawet "dyrektorem" tej Akademii. Dopiero w 1743 zostaje członkiem *Académie Franęaise* (czyli *"nieśmiertelnym").* Może warto przypomnieć, że dziś niektóre akademie (na przykład PAN = Polska Akademia Nauk czy też Akademia Nauk byłego ZSRR - nie wiem jak się ona teraz nazywa), składają się organizacyjnie z dwóch części. Jedną stanowi grono wysoko ocenianych specjalistów (którzy często sami swą obecnością przynoszą zaszczyt danej akademii), nie mających z tytułu należenia do niej żadnych obowiązków (a często i żadne lub tylko względnie niewielkie korzyści materialne), drugą zaś tworzą instytuty badawcze, w których zatrudnieni są (na podstawie umowy o pracę, lub mianowani) pracownicy, na podobnych zasadach jak w wyższych uczelniach (na przykład, na uniwersytetach), tyle, że na ogół nie mają żadnych obciążeń dydaktycznych (a tylko obowiązek pracy naukowej - za którą otrzymują odpowiednie do swych kwalifikacji pensje). Otóż w XVIII wieku obie te kategorie osób związanych z akademiami były łączone w jedną - było się "akademikiem", ale to zobowiązywało do zgłaszania swojej akademii (i ogłaszania) prac naukowych i w zamian otrzymywało się, mniejsze lub większe, często nawet spore uposażenie.

Dłuższa podróż (sześciomiesięczna) P.L. de Maupertuis do LONDYNU odbyła się w 1728 roku. Też długi pobyt w BAZYLEI W domu Bernouillich u Jana I Bernouilliego (starszego; 1667 - 1748) w roku 1729/30 oraz w CIREY u pani Du Chatelet (Gabriela Emilia Le Tonnelier de Breteuil, markiza Du Chatelet; 1706 - 1749) i u (przebywającego tam wtedy właśnie u niej) Voltaire'a (Franęois Marie Ar o u et; 1694 - 1778) czyli po polsku Woltera.

1.2. Pomiar długości stopnia południka. W związku z dyskusjami (a raczej - postawmy kropkę nad "i" - kłótniami) pomiędzy kartezjanistami (do których, między innymi należeli członkowie rodziny Cassinich), a newtonistami zorganizowano, firmowane przez Akademię Paryską, zaś kierowane przez P.L. de M a u p e r t u i s pomiary w LAPONII długości jednego stopnia południka. Przeprowadzono je w latach 1736 - 1737 w północnej SZWECJI, na północ od TORNEA. Wymagały one przezwyciężania wielu trudności, nie tylko klimatycznych.



LA FIGURE DE LA TERRE,

Déterminée par les Obſervations de Meſſieurs BOUGUER, & DE LA CONDAMINE, de l'Académie Royale des Sciences, envoyés par ordre du Roy au Pérou, pour obſerver aux environs de l'Equateur.

Avec une Relation abrégée de ce Voyage, qui contient la description du Pays dans lequel les Opérations ont été faites.

PAR M. BOUGUER.

Joseph Comte de Mniszech S. S. Grand Maître de Galicie 1790.

A PARIS, QUAY DES AUGUSTINS,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roy pour l'Artillerie & le Génie, au coin de la rue Gît-le-Cœur, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. XLIX.

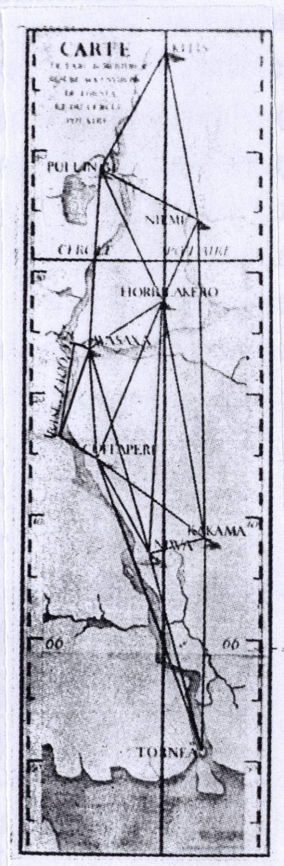
C. Mniszech née Zamoyska

2. Karta tytułowa książki [9] publikującej wyniki pomiarów długości łuku jednego stopnia w Peru.

W ekspedycji, poza jej kierownikiem P.L. deMaupertuis i później uznanym za wybitnego matematyka Aleksym Klaudiuszem Clairaut (1713 - 1765) wziął udział Anders Celsius (1701 - 1744; ten od skali termomentrycznej - patrz **[32])**. Ponadto wzięłu udział kilku uczonych i kilkunastu pomocników (dziś powiedzielibyśmy „pracowników technicznych").

Ekspedycja na pokładzie statku *"Prudent*" wyruszyła 3.V.1736 z DUNKIERKI do SZTOKHOLMU i TORNEA, gdzie (dzięki pomocy - między innymi - króla szwedzkiego Fryderyka I) była już 19.VI, a wróciła do SZTOKHOLMU mniej więcej po roku dopiero 11.VI.1737. Dokononano w czasie niej nie tylko pomiary geodezyjne, ale też prowadzono badania grawimetryczne (przy pomocy wachadła).

Dzięki tym pracom stwierdzono, że Ziemia nie ma kształtu wrzeciona lecz dysku. Dlatego też żartobliwie nazwano P.L. de Mau pertuis *„ 1'aplatiseur de la Terre"* *(„sptaszczacz Ziemi")*. Wedle ówczesnych poglądów, rozstrzygnęło to spór miedzy kartezjanistami a newtonistami na korzyść tych ostatnich i dlatego M a u p e r t u i s włożył tyle wysiłku i pracy w swe pomiary w LAPONII.



3. Mapa triangulacji w LAPONII, sporządzona przez P.L. de Maupertuis

W tych pomiarach chodziło o porównanie ich z wynikami podobnych pomiarów, jakie dla terenu FRANCJI przeprowadził już wcześniej Jan Dominik Cassini (1625 - 1712) oraz jego syn Jakub (1677 - 1756). Wedle ostatecznych wyników tych pomiarów długość jednego stopnia (w rzeczywistości zmierzono tylko 57' 28,5", które przeliczono na wyniki jakie by uzyskano dla pomiarów 1 stopnia). Te porównania dały pozytywny, ale niezbyt pewny wynik. Bowiem różnica w długości 1 stopnia południka we FRANCJI i w LAPONII jest mała - wedle wyników ekspedycji P.L. M a u p e r t u i s wynosi ona tylko

340 toises (co czyni koło 663 metrów). Wyniki te były przez zacietrzewionych kartezjanistów podawane w wątpliwość. I to słusznie, gdyż, wedle naszych dzisiejszych pomiarów różnica ta jest naprawdę prawie dwa razy mniejsza. Dopiero ich porównanie z wynikami pomiarów długości 1 stopnia południka w PERU (uzyskana w ten sposób różnica, jest znacznie większa), dokonanymi przez ekspedycję, też Akademii Paryskiej, pod kierownictwem Karola Marii de La C o n d a m i n e (1701 - 1774), a przeprowadzonymi mniej więcej równocześnie (wyprawa wróciła do Europy dopiero w 1744 roku), rozstrzygnęło sprawę ostatecznie. Publikacja jej wyników [9] ukazała się z 10-cio letnim opóźnieniem, acz one same były publicznie znane znacznie wcześniej (porównaj reprodukcję jej karty tytułowej na ilustracji 2). Zauważmy, że wszystkie te pomiary byty - ze względu na wymaganą dokładność - bardzo trudne do wykonania i relatywnie mało precyzyjne. O skali trudności może świadczyć to, że wymagające jeszcze tylko nieco większej dokładności pomiarów, wyznaczenie współczynnika spłaszczenia Ziemi κ = (r - b): r (gdzie r to promień równikowy, zaś b to promień biegunowy Ziemi) na zasadzie tych pomiarów dało wielkość mniej więcej równą 1 :178. Tymczasem współczynnik ten jest tylko nieco większy niż 1 : 300 - przez wiele lat przyjmowano jego wartość jako równą 1 : 298,3 (była ona obliczona na zasadzie pomiarów geodezyjnych). Dopiero względnie niedawno temu, obliczono go dokładniej (na zasadzie pomiarów innego typu niż typu klasycznej geodezji) : jest on nieco większy niż długo przyjmowana jego wartość. Zresztą, najdokładniejsze dane z tych pomiarów nie były od razu publikowane jako tajemnica wojskowa (i chyba są nią do dnia dzisiejszego).

Jest rzeczą ciekawą, że kartezjaniści nie wyprowadzali wrzecionowatego kształtu Ziemi z zasady wirów Kartezjusza porządnie, to jest matematycznie, lecz tylko opierali się na intuicjach. Stawiali oni opór teorii (ogłoszonej o pół wieku później niż teoria Kartezjusza) Izaaka Newtona (1643 - 1727) z dwóch powodów : raz z czystego szowinizmu (byli oni - głównie - Francuzami, a Newton był Anglikiem), dwa, że teoria grawitacji Newtona wymagała przyjęcia *actio in distans.* Nawet sam Newton nie wypowiadał się na temat pochodzenia grawitacji (to właśnie na temat braku jego wyjaśnienia w swych dziełach wypowiedział często cytowane słowa *„hipotheses non fingo”* - są one bardzo trudne do przetłumaczenia na współczesny polski język naukowy bez zmiany, choćby częściowej, ich sensu).

Zresztą, poprawne (z zasad teorii Newtona) wywiedzenie teoretyczne, że wirująca ciężka bryła jednorodna (płynna) powinna być spłaszczoną

4 Portret P.L. de Maupertuiswstroju w jaki ubierał się on w zimie, w czasie pobytu w LAPONII (współczesny miedzioryt D a u 11 e wedle olejnego obrazu T ourniera).

5. Portret Franciszka Marii A r o u e t czyli Woltera - antagonisty P.L. Moreau de M a u p e r t u i s (miedzioryt współczesny).

6. Karykatura przedstawiająca P.L. de Maupertuis jako Don Quichota. Winieta z tomu *Maupertuisiana* **[57],** wydanego w HAMBURGU w 1753 roku. Z ust P.L. de Maupertuis wychodzi okrzyk *„Trembles "* *[„Drżyjcie "],* zaś satyr z prawego dolnego rogu głosi *„Sic itur ad astra "* *[„tak wstępuje się do gwiazd "].*

elipsoidą też nie dokonano w XVII czy XVIII wieku. Dokonano tego dopiero w XIX wieku (Carl Gustaw Jacob J a c o b i; 1804 - 1851). A wykazanie tego dla brył, których gęstość jest jednakowa na współogniskowych elipsoidach obrotowych (co dopiero odpowiada, mniej więcej, realnej sytuacji jaka panuje na Ziemi - a raczejwewnątrz Ziemi) jest dopiero dziełem I połowy XX wieku - najważniejszymi (jak dotychczas) są tu wyniki Leona Lichtensteina (1878 - 1933).

Zresztą, poprawne (z zasad teorii Newtona) wywiedzenie teoretyczne, że wirująca ciężka bryła jednorodna (płynna) powinna być spłaszczoną elipsoidą też nie dokonano w XVII czy XVIII wieku. Dokonano tego dopiero w XIX wieku (Carl Gustaw Jacob J a c o b i; 1804 - 1851). A wykazanie tego dla brył, których gęstość jest jednakowa na współogniskowych elipsoidach obrotowych (co dopiero odpowiada, mniej więcej, realnej sytuacji jaka panuje na Ziemi - a raczej wewnątrz Ziemi) jest dopiero dziełem I połowy XX wieku -

najważniejszymi (jak dotychczas) są tu wyniki Leona Lichtensteina (1878 - 1933).

Warto pamiętać, że W o 11 e r w pewnym momencie napisał dwie książki związane z fizyką : jest ona tylko wspomniana w jego *Listach o Anglikach,* (polskie tłumaczenie patrz [93]) natomiast w całości poświęcił jej książkę *Elementy filozofii Newtona* (druk 1738, poczym praca miała zmieniany tytuł i była uzupełniania; polskie tłumaczenie patrz [94]). Otóż rękopis pierwszej z tych dwóch książek czytał (w 1732 roku) w charakterze - jak byśmy dziś powiedzieli - konsultanta właśnie P.L. de M a u p e r t u i s.

1.3. **P.L de Maupertuis - dalszy ciąg życia.** P.L. de M a u p e r t u i s był barwną postacią. Może nieco mniej barwną niż starszy od niego o pokolenie Klaudiusz hrabia de B o n n e v a l [7], nie interesujący się kobietami basza turecki, czy też młodszy od niego o pokolenie, kochanek wielu kobiet, nawet i zakonnic Jan Jakub Casanova (1725 - 1798), ale jednak - nawet jak na wiek XVIII - jest on postacią nietuzinkową. Na przykład z podróży do LAPONII przywiózł do PARYŻA nie tylko odmrożonne nogi, lecz też i... dwie Laponki (podobno były one obie bardzo ładne (?)), które były dość długo jego kochankami. Jedną z nich, po paru latach wydał za mąż (za jakiegoś prowincjusza z NORMANDII), a drugą (ochrzciwszy) oddał do klasztoru. Nieco później zaagażował murzyna o imieniu Orion (chyba nie do celów erotycznych), z którym bardzo długo się nie rozstawał (pojechał z nim też między innymi i do BERLINA).

P.L. de Maupertuis przez całe życie podróżował opętanie dużo. Mniej więcej tyleż, co teraz papież Wojtyła (czyli Jan P a w e ł II). Tyle tylko, że wtedy nie było samolotów, a tylko dyliżanse, bryczki, karety czy powozy (ewentualnie mogła wchodzić w grę jeszcze konna jazda), dlatego też jego podróże (poza wyprawą do LAPONII) ograniczały się do środkowej Europy. Prawie co roku gdzieś jeździł: to do ANGLII, to HOLANDII, czy SZWAJCARII. Gdy mieszkał w PARYŻU, to jeździł do BERLINA. Gdy zamieszkał na stałe w BERLINIE to prawie co roku zaglądał do PARYŻA i do swego rodzinnego SAINT-MALO.

W czasie pierwszej (czy też może raczej, jednej z pierwszych) podróży do PRUS podążył za Fryde rykie m 11(1712 - 1786, król od 1740) na ŚLĄSK, gdzie właśnie toczyła się wojna *{„Pierwsza Wojna Śląska* ") z AUSTRIĄ (ponoć złośliwi jego wrogowie mieli mówić, że pojechał tam na grzbiecie osła, gdyż na tę podróż skąpy Fryderyk II miał mu dać za mało pieniędzy by mógł sobie kupić konia). W czasie bitwy (ostatecznie zwycięskiej dla Prusaków) pod MOLLWITZ (obecnie MALUJOWICE koto WROCŁAWIA) w dniu 14 kwietnią 1741 w czasie pierwszej fazy działań bitewnych, zwycięskiej dla Austriaków

(Fryderyk II uciekł wtedy z pola bitwy, patrz **[64],** ale druga faza - i cala bitwa - była jednak zwycięska dla Prusaków), został przez nich zagarnięty. Puścili go oni jednak wolno. Pojechał wtedy do Wiednia, skąd dopiero udał się z powrotem do BERLINA.

P.L. de M a u p e r t u i s wygłosił w 1744 roku, a opublikował w druku nieco później swoją *"Zasadę"*, tą której poświęcony jest właśnie ten referat - będzie ona omówiona dokładnie nieco niżej. W paru następnych latach poświęcił jej jeszcze dalsze dodatkowe prace. Mniej więcej wtedy przeniósł się na stałe do BERLINA, gdzie w 1741 roku został członkiem Akademii Berlińskiej. A w 1745 roku Fryderyk II mianował go nawet jej prezesem, obdarzył dużą pensją i postawił przed nim zadanie zreformowania tejże Akademii. Akademia ta była założona jeszcze przez elektora Fryderyka III (1657 1713, elektor Brandenburski od 1688, znany jako Fryderyk III, król w Prusach od 1713, znany jako Fr y d e r y k I), ale jego następca, król Fryderyk-Wilhelm I ("król-sierżant") dopuścił do jej upadku (jej fundusze zabrał na potrzeby wojska). Fryderyk II chciał doprowadzić do jej rozkwitu. Między innemi przez sprowadzanie z zagranicy wybitnych uczonych na jej członków.

W tymże 1745 roku - rozstawszy się wcześniej ze swymi dwoma Laponkami (chciał się ich pozbyć już koło 1739 roku) - ożenił się (być może nieco późno...) z niezbyt już wtedy młodą Eleonorą von B o r c k e (nie znam dat jej życia - w każdym razie przeżyła swego męża). Jak się zdaje, ten jego romans parysko - berliński trwał już parę lat przed ślubem. Jej ojciec był pruskim generałem-majorem, zaś matka była z domu baronówną (Freiin[8]) von M a r d e n f e l d. Sama rodzina jego teściów nie była utytułowana, lecz kuzyn jego teścia, parę lat tylko od niego starszy, pruski marszałek polny Fryderyk-Wilhelm von B o r c k e otrzymał w 1740 roku pruski tytuł hrabiowski.

1.4. Spór o *Zasadę*. Ale akademicka idylla P.L. de M a u p e r t u i s w BERLINIE nie trwała długo. W pewnym momencie - nie wiadomo dokładnie dlaczego - P.L. de Maupertuis został gwałtownie zatakowany przez samego Fryderyka II i wtórującemu mu Szwajcara Samuela J. Kö n ig a (1712 - 1757). A mianowicie ogłosili oni, że ową *"Zasadę"* znał już Godfryd Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) i miał się o niej wypowiedzieć w liście do - Szwajcara, niejakiego Jakuba Hermanna (1678 - 1733) w roku 1707. Był on w BAZYLEI uczniem Jakuba Bernouilliego (1654 - 1705), a później lata 1725 do 1731 spędził w PETERSBURGU, ale w okresie w którym list ten miał być pisany, przebywał w SZWAJCARII. Wprawdzie - mimo nalegań - nie mógł przedstawić owego rzekomego listu, w związku z czym Akademia Berlińska (specjalnie nie pod przewodnictwem swego prezesa, lecz L. Eulera) uwolniła go z zarzutu plagiatu i przyznała mu priorytet (patrz - na przykład - Jean Orieux [66]). Pozostały jednak pewne formalne wątpliwości : na te posiedzenie Akademii nie przybyła - świadomie - jedna trzecia jej członków (rzeczywistych). Zresztą sam L. Euler brał żywy udział w owych sporach, publikując kilka artykułów, na przykład **[19]** oraz **[17].**

Listu szukano - bez powodzenia - na polecenia różnych osób, między innymi, w spuściźnie ściętego dwa lata wcześniej w BERNIE konspiratora, niejakiego kapitana Samuela Henzi (1701 - 1749)[θ]. Istnieje hipoteza, że list Leibniza nie znaleziono dlatego tylko, że był on skierowany nie do J. Hermanna, lecz do Piotra Varignona (1654 - 1722), ale nie wydaje się, żeby to była hipoteza słuszna. Sprawa ta narobiła wtedy dużo hałasu - ilustracją tego mogą być publikacje **[57]** (i jej tłumaczenie **[58]**) oraz [63]. Dziś, po znalezieniu drugiego (?) odpisu (w 1911 roku) owego listu Leibniza, nie można wykluczyć, że taki list Leibniza rzeczywiście istniał. Ale, jednak jak dotychczas, nie znaleziono autografu Leibniza iw dalszym ciągu są uzasadnione wątpliwości czy on kiedykolwiek istniał. Nie można bowiem też wykluczyć, że ten "odpis" jest nie odpisem, lecz falsyfikatem, napisanym po 1750 roku. W wyniku całej tej afery S.J. Kónig zrezygnował z członkowstwa Akademii Berlińskiej, ale całe odium z jej powodu spadło jednak na jej ofiarę, czyli na P.L. deMaupertuis.

Sprawa priorytetu P.L. deMaupertuis w dalszym ciągu nie jest całkiem jasna. Rzeczywiście opublikował on jako pierwszy swą zasadę, ale opublikował ją w zupełnie nonsensownej postaci. Natomiast - na przykład - L. Euler wprawdzie zanotował ją parę lat wcześniej w swych (nie od razu wtedy opublikowanych) prywatnych notatkach, i to we względnie poprawnej postaci, ale ograniczoną do bardzo szczegółowego przypadku, natomiast publikować swe prace na ten temat, zaczął parę miesięcy później niż P.L. de M a u p e r t u i s. Zresztą, w ciągu nie całych 10 lat opublikował ich aż koło 10 (patrz też niżej na dalsze uwagi na ten temat).

Na dodatek wtedy, po roku 1750, w BERLINIE przebywał L. Euler (1707 - 1783) oraz Wolter - obaj oni z kolei zatakowali M a u p e r t u i s. Wogóle wytworzyła się wtedy sytuacja, że wszystkie 4 osoby :Fryderyk II, L. Euler, Wolter oraz P.L. de Maupertuis kłóciły się z sobą. Cała szóstka stosunków między nimi była napięta - jedne mniej, drugie więcej, ale nikt się z nikim nie sprzymierzał przeciw pozostałym. Ostatecznie - oczywiście - Fryderyk II został się w BERLINIE (i to sam). Wolter (po różnych perypetiach) szybko wrócił do FRANCJI, Maupertuis wyjechał z BERLINA w lecie 1756 roku, tylko Euler wytrzymał w BERLINIE jeszcze dość długo (do 1766 roku), aby i tak w końcu wyjechać powtórnie do PETERSBURGA (gdzie - całkowicie oślepły - zmarł).

Ataki na P.L. de Maupertuis wywołane były częściowo względami religijnym - wprawdzie nie był on ortodoksyjnym katolikiem (ani nawet ortodoksyjnym chrześcijaninem) - ale był nastawiony bardziej pro-religijnie niż Fryderyk II oraz tym bardziej pro-Kościelnie niż Wolter (dlatego na początku podkreślałem jego katolicyzm - szczególnie, że niektórzy posądzają go, bezpodstawnie, o hugenotyzm). Ponadto L. Euler uważał go za słabego matematyka.

Do tego mogła dochodzić zazdrość finansowa : obaj ci panowie - Euler i Wolter - dostawali od króla PRUS F ryd e ry ka II wprawdzie duże pensje, ale nie jest jasne jakie byty stosunki ich wielkości do dochodów P.L. de M a u p e r t u i s. W różnych źródłach są one różnie przedstawiane. Być może chodzi o to, że publikowane dane nie odnoszą się do jednego roku, a tylko do lat rozrzuconych w ciągu ćwierćwiecza. I tak - wedle [10] - Euler otrzymywał od Akademii tylko 1900 talarów rocznie (ale miał sporo innych dochodów, miedzy innymi z majątku ziemskiego leżącego pod BERLINEM, z nagród, z dochodów z kalendarzy na które miał monopol i - któregoś roku - z ... dużej wygranej na loterii!), P.L. de M a u p e r tu i s - jako prezes Akademii pobierał 3000 talarów, a Jan d'Alembert (1717 - 1783) 12 000 i Wolter aż 20 000 talarów (dla porównania : krowa kosztowała koło 100 talarów[10]). Wedle innych źródeł, dochody Woltera były - przynajmniej przez pewien czas - wyraźnie mniejsze niż pensja jaką otrzymywał Maupertuis. Wedle tych samych źródeł, nieco później Wolter miał dostawać o 2 000 talarów więcej niż Maupertuis. Trzeba wszakże pamiętać, çed'Alembert i Wolter (w czasie gdy ten ostatni nie mieszkał w NIEMCZECH) otrzymywali pieniądze "dla pięknych oczu" - po prostu były to łapówki dla ludzi mających wpływ na światową opinię publiczną [11]. P.L. Maupertuis otrzymywał ponad to pensję 1200 liwrów francuskich rocznie (nie wiem jakiej ilości talarów pruskich to się równało) wyznaczoną mu przez króla francuskiego (Ludwika XV) jako nagroda za zasługi w czasie ekspedycji lapońskiej. Zresztą w połowie XVIII wieku panoszyła się nie tylko inflacja (a raczej dewaluacje pieniędzy), ale też - w związku z powtarzającymi się nieurodzajami i wojnami - wahania cen (nie tylko żywności), z roku na rok, były bardzo duże. Tak, iż porównanie dochodów różnych osób w różnych latach, a wyrażonych w talarach jest zupełnie nie miarodajne co do ich realnych dochodów.

W 2 i 3 ćwierci w Berlinie przebywało sporo dobrych matematyków. Byłoby ciekawe stwwierdzić ile oni zarabiali licząc w talarach, ile zarabiali w przeliczeniu na kilogramy chleba czy mięsa i wreszcie jaki był stosunek ich zarobków do zarobków innych ludzi. Wymagałoby to na pewno nie tylko dotarcia do licznych druków nie niedostępnych w Polsce, ale też i korzystania z źródeł rękopiśmiennych. Mógłby w ten sposób powstać spory (i ciekawy) tom [12].

Wolter i Euler zgodnie obaj twierdzili, że Maupertuis jest leniuchem nic nie robiącym. Na przykład, Mikołaj Sebastian Roch C h a m fo rt (lub de Chamfort; 1741 - 1794) powtarza za nimi anegdotkę, że Maupertuis rozciągnięty w fotelu (i ziewając) miał powiedzieć : *„Chętnie bym* w *tej chwili rozwiązał jakiś interesujący problem, byleby nie było to zbyt trudne*" (patrz **[12],** str. 311 [13]). Najbardziej jednak "obsmarował" go Wo l te r w słynnym paszkwilu pod tytułem *„Diatribe du docteur Akakia, Médecin du papę" („Diatryba doktora Akakii, papieskiego lekarza")* z mniej więcej 1752 roku. Dokładna chronologia tego pisma, rozpowszechnianego początkowo rękopiśmiennie, a w końcu (z licznymi uzupełnieniami i pod różnymi tytułami) parokrotnie drukowanego, nie jest dobrze znana (patrz [95]). Niektóre wydania tego paszkwilu dodawały, zresztą, na końcu tytułu „... *natif de Saint-Malo " („... urodzonego w Saint-Malo"),* a więc stawiały „kropkę nad i" identyfikując kim naprawdę jest ów doktór Akakia. Zresztą wiele osób wiedziało, iż przyjaciele żartobliwie nazywali P.L. de Maupertuis *„Doktorem Akaki ą"* (patrz [89], str. 83) - nie wiem skąd się te przezwisko wzięło. Rosyjskie tłumaczenie tego dziełka Woltera znaleźć można w **[67],** na str. 723 - 741.

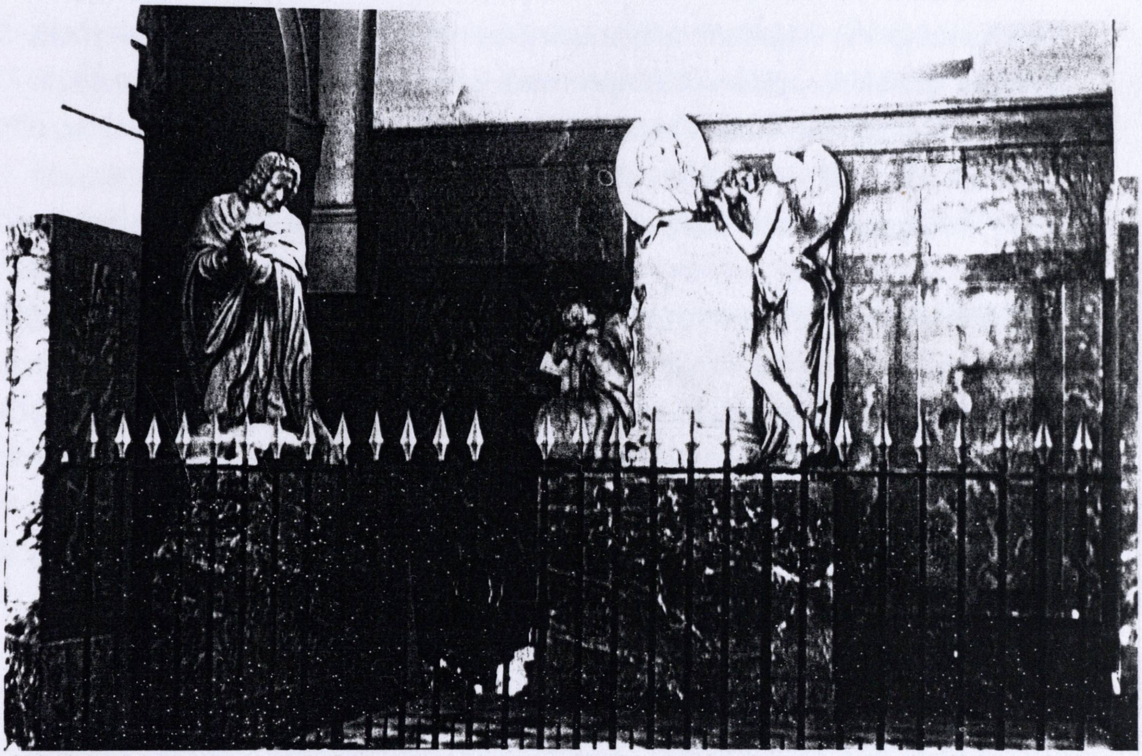
Sądząc po liczbie publikacji M a u p e r t u i s, nie mógł być on leniuchem. Ale chyba było coś w oskarżaniu go o lenistwo, gdyż swoją Zasadę (patrz niżej) uzasadniał teologicznie w ten sposób, że Bóg tak stworzył świat, by rzeczywiste ruchy były "jak najoszczędniejsze", to jest by zużywały jak najmniej "akcji" (tak jak te pojęcie rozumiano wtedy; być może, że ta jego "akcja", w gruncie rzeczy, miała być naszą dzisiejszą "energią" czyli czymś równoważnym "pracy"). Ale interesował się nie tylko "oszczędzającą" stroną Stwórcy - interesował się też i innymi działami wiedzy. Na przykład, badał białe dziecko, którego rzekomym ojcem był murzyn, starał się wyznaczyć z większą dokładnością, niż ówcześnie była znana, paralaksę księżyca, opublikował też pracę o kształcie jaki winny mieć koła zębate, pracę o salamandrach, parę prac filologicznych, etc. Na pewno nie były to działania leniwego człowieka. Natomiast rzeczywiście większość osób, które go znały oskarżały go (chyba nie bezpodstawnie) o zły charakter, o arogancję i inne tym podobne grzechy... Ponadto, podobno gdzieś od 1745 roku, pod pretekstem leczenia się, nadużywał (trudno wiedzieć w jakim stopniu) alkoholu.

Ale P.L. de Maupertuis miał nie tylko wrogów. Na przykład jego długoletnim przyjacielem był Wawrzyniec (Laurent) Angliviel de La B e a u m e 11 e (1726 - 1773). Był on protestantem i na prawdę nazywał się A n g l i v i e l, ale jest wspominany lub cytowany jest (patrz, na przykład, [97] lub [98]) niemal wyłącznie jako de La Beaumelle (lub skrótowo nawet jako La Beaumelle). Był bardzo dziwną postacią, wrogiem Woltera (wrogowie naszych wrogów są naszymi przyjaciółmi - może dlatego przyjaźnił się z P.L. de M a u p e r t u i s). Ta - już wyżej cytowana - jego książka **[1]** o P.L. de Maupertuis (z którym utrzymywał kontakty przez dłuższy czas) była napisana jeszcze w trzeciej ćwierci XVIII wieku, ale została wydana (jak już wspomnieliśmy w n° 0.2) dopiero po połowie XIX wieku przez Maurycego Angliviel (potomka jej autora) - wydawca uzupełnił rękopis przodka długim aneksem. N.b. jest ciekawostką, że na wiosnę 1753 roku P.L. de Maupertuis swój paszkwil na W o 11 e r a wydał właśnie pod nazwiskiem de La B e a u m e 11 e'a (który zresztą w owym momencie właśnie był uwięziony w PARYŻU W Bastylii...).

1.5. Koniec życia P.L. de Maupertuis. Dalsze dzieje P.L. de Maupertuis nie są zbyt wesołe. Całe życie był on mocno chorowity. Ale już dość wcześnie zaczął być nie tylko człowiekiem chorowitym, schorowanym. Na przykład, od 1745 (ewentualnie dopiero od 1747) roku, pluł krwią. Cyniczny (i chciwy na pieniądze) Wolter bardzo zmartwił się, że M a u p e r t u i s z tej choroby nie umarł - miałby bowiem wtedy nadzieję na objęcie po nim stanowiska prezesa Akademii Berlińskiej. Nie bardzo wiadomo na co chorował - może początkowo była to gruźlica. Ale wydaje się (po jej objawach), że - przynajmniej w dalszej fazie tej choroby - był to rak jakichś wewnętrznych organów.

Ostatecznie, P.L. de Maupertuis (jak już wspomnieliśmy) w czerwcu 1756 roku - zgnębiony sporami w BERLINIE oraz już bardzo źle się czujący fizycznie z powodu swej choroby (swych chorób ?), wyjechał na - jak byśmy dziś powiedzieli - na „urlop zdrowotny" (zachowując swoje stanowisko w Akademi Berlińskiej). W zasadzie planował swój powrót do BERLINA - choćby ze względu na swą żonę, która była damą dworu księżniczki Amalii (siostry króla Fryderyka II - nie mylić z niedoszłą jego żoną Amalią Hanowerską). Chyba z tego powodu nie wziął jej z sobą w podróż. Po

7. Ocalała część pierwotnego nagrobka P.L. de M a u p e r t u i s - widać długi napis ułożony przez Ch.M. de La C o n d a m i n e.



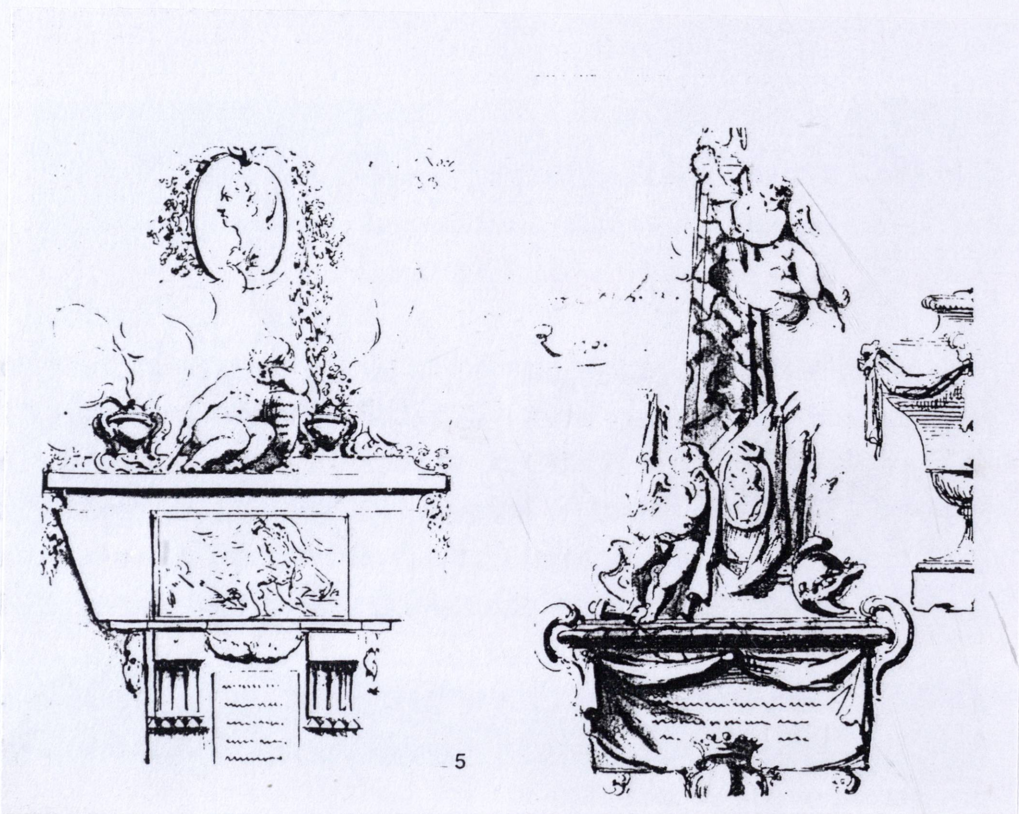
8. Widok pierwszej (drugiej) prawej kaplicy w kościele św. Rocha w PARYŻU - na lewo od nagrobka P.L. de Maupertuis widać figurę kardynała W. D u b o i s

miesiącu był w PARYŻU, poczym pojechał do swojego miejsca urodzenia, to jest do SAINT MAŁO. Ale tamtejszy klimat - jak mu się wydawało - mu nie służył i cały prawie1757 rok spędził w BORDEAUX. W początku 1758 roku pojechał przez NARBONNE i NtMES do LYONU. W każdej z tych miejscowości spędził dłuższy okres czasu, gdyż po dojazdach do nich bywał tak zmęczony, że nie nadawał się do dalszej podróży. Ostatecznie w październiku 1758 dotarł do BAZYLEI do domu Jana II B e r n o u i 11 e g o (młodszego; 1710 - 1790), syna Jana I Bernouillego (starszego). Czuł się coraz gorzej, ale nie pozwalał wzywać żony, którą listownie pocieszał, że niedługo wyzdrowieje. Ostatecznie, przed jej przyjazdem, umiera 27 lipca 1759.

Chciał być pochowany na katolickim cmentarzu, a takiego nie było w protestanckiej, nie tolerancyjnej BAZYLEI, trumnę więc zaczęto z BAZYLEI wieźć do odległego o 130 km STRASBURGA. Ale ostatecznie nie nie dowieziono jej tam, tylko (z nieznanych mi powodów) po przebyciu w linii powietrzej niecałych 30 km, urządzono mu pogrzeb w miasteczku DORNACH. DORNACH stanowi obecnie południowe przedmieście MILUZY (MULHOUSE), leżącej obecnie we FRANCJI [14]. W PARYŻU, w kościele Saint-Roch (286 rue Saint-Honoré) w 1766 roku postawiono mu nagrobek z pieniędzy zgromadzonych przez subskrypcję, z długim łacińskim napisem ułożonym przez K.M. de La Condamine[15].

Kościół św. Rocha wybrano - prawdopodobnie - dlatego, iż w nim pochowano w roku 1746 jego ojca, R.Maureau de Maupertuis.

Nagrobek został zniszczony w czasie Rewolucji (podobnie jak większość nagrobków znajdujących się w paryskich kościołach), ale jego główną cześć udało się po niej zrekonstruować (patrz **[5])**. Obecnie znajduje się on w drugiej (a pierwszej, jeśli nie liczyć małej półokrągłej kapliczki - licząc od głównego wejścia do kościoła) prawej kaplicy bocznej. W dzisiejszej swej postaci składa się on z prostopadłościennej kolorowej podstawy (raczej zrobionej ze stiuku niż z kamienia - chyba nowszej, XIX wiecznej) na której stoi wysoka na około 1,5 m rzeźba z białego marmuru. Sama rzeźba składa się z ułamanej kolumny z



9. Do jednego z tych dwóch nagrobków mógł być podobny pierwotny nagrobek P.L. de M a u p e r t u i s.

długim napisem (ułożonym przez K. de Condamine). O kolumnę opierają się płaczący anioł oraz mały amorek, stojący wśród symboli osiągnięć naukowych P.L. de M a u p e r tu i s. Nad kolumną umieszczony jest medalion (wyrzeźbiony w tym samym białym marmurze co główna figura) z biustem P.L. deM a u p e rtu i s. Zarówno figura, jak i medalion zostały wykonane przez znanego rzeźbiarza Jana-Chrzciciela d'Huez (1728 - 1793). Niewątpliwie, zgodnie z ówczesną modą na nagrobki, pierwotnie medalion ten był otoczony jakiemiś elementami architektonicznymi - na przykład - umieszczony był wysoko na tle spłaszczonej piramidy (czy też spłaszczonego obelisku). O ile wiem, to nie istnieje dokumentacja stanu pierwotnego tego nagrobka. Natomiast istnieje dokumentacja, prawdopodobnie dość do niego podobnego nagrobka kardynała W. Dubois (1665 - 1723) - figura (dłuta Wilhelma I Coustou; 1677 - 1746), pochodząca z niego, znajduje się obecnie w tej samej kaplicy co nagrobek P.L. de M a u p e r t u i s.

Znacznie później - prawdopodobnie w 1826 roku - ekshumowano szczątki P.L. de M a u p e r t u i s w DORNACH i powtórnie pochowano w PARYŻU w tym samym kościele Świętego Rocha, w którym był ustawiony jego nagrobek i w którym był pochowany jego ojciec (nie wiem, kto o to zadbał - przecież żadnego potomstwa, przynajmniej legalnego - o ile się nie mylę - nie zostawił po sobie).

P.L. de Maupertuis faktycznie nie spełniał obowiązków prezesa Akademii Berlińskiej od wyjazdu z BERLINA w lecie 1756 roku. W tym czasie zastępował go, pełniącym obowiązki prezesa, L. Euler. Po śmierci Maupertuis liczył na to, że właśnie to on zostanie pełnoprawnym prezesem (zarabiałby wtedy dwa razy więcej), ale Fryderyk II nieobsadził tego stanowiska ani wtedy, ani nawet po jego wyjeździe z BERLINA, gdy sprowadził rzekomo na to stanowisko Józefa Ludwika Lagrange'a (został on tylko dyrektorem klasy matematycznej).

Dość zabawną, ale zrozumiałą jest rzeczą, że źródła niemieckie (jak - na przykład - książka autorstwa I. Mittenzwei **[64]** lub artykuł H. Reichenberga **[72])** w życiorysach P.L. de Maupertuis eksponują zupełnie inne elementy jego życia, niż źródła francuskie (jak - na przykład - książka autorstwa P. Brunefa **[10]**, lub XIX-wieczna encyklopedia L a r o u s s e'a **[99])**.

1.6. Powstawanie Zasady Maupertuis. To co będę dalej referować o początkach Zasady Maupertuis, nie będzie klarownie jasne. Po prostu muszę się oprzeć na źródłach jakiemi dysponuję. Otóż zawarte w nich informacje nie są jednoznaczne - brak mi najważniejszych prac oryginalnych (dysponuję tylko kilkoma - złymi - tłumaczeniami, głównie rosyjskiemi), a w każdym z opracowań napisane jest co innego. Stan ten wynika - chyba - stąd, że od 200 lat jedni przepisują od drugich, przy okazji, za każdym razem, deformując informacje. Myślę, że autorzy (którzy mogliby mieć względnie łatwy dostęp do źródeł) niechętnie odwołują się do nich, bowiem prace samego Maupertuis są bardzo ogólne, ale mało mają wspólnego z poprawnością logiczną (i merytoryczną), natomiast prace innych (przez które należałoby się jednak przedrzeć) są bardzo liczne i, przynajmniej te, które powstały koło 1750 roku, odnoszą się do bardzo szczegółowych przypadków. Ponadto, sprawą początków Zasady Maupertuis, najwięcej zajmowali się humaniści (ze względu na wmieszanie się do całej tej sprawy Woltera), których, oczywiście, XVIII wieczne teksty matematyczne (ani tymbardziej ich subtelności) zupełnie nie interesowały ani, które nawet nie mogły być dla nich zrozumiałe.

Ponieważ Zasada Maupertuis odgrała jednak dość dużą rolę w historii nauki (zarówno w historii mechaniki teoretycznej, jak i historii rachunku wariacyjnego) warto by może, by jakiś nie-humanista źródłowo opracował jej początkowe dzieje, to jest dzieje dwudziestolecia 1740 - 1760. Nie jest to jednak możliwe w POLSCE : prawdopodobnie byłoby to wykonania w PARYŻU (potrzebne drukowane materiały powinne by się znajdować w *Bibliothèque Nationale* oraz w *Bibliotheque Mazzarine),* ale nie wykluczałbym konieczności dodatkowego skorzystania z jakichś bibliotek w NIEMCZECH. Natomiast, wydaje mi się, że dla badania powstania Zasady Maupertuis są - prawdopodobnie - mniej ważne nie wydane dotychczas rękopisy (mogą one mieć raczej znaczenie dla ustalenia pewnych faktów z życia P.L. de M a u p e r t u i s) niż źródła drukowane.

Jak zobaczymy raczej można mówić o powstawaniu Zasady Maupertuis niż o jej powstaniu.

1.7. Prehistoria Zasady Maupertuis. Niektórzy uważają, że już - być może - Arystoteles zajmował się pewnymi zasadami ekstremalnymi. Ale - na pewno - w pierwszej połowie XVII wieku zajmował się niemi Piotr de Fermat (1601 - 1665). Udowodnił on (w sposób długi i nie całkiem nas przekonywujący) w roku 1662 roku pewne dwa twierdzenia, zwane później Zasadami Optycznymi Fermata. Zasady te mówią, że czas przebiegu promienia świetlnego (przy założeniu, że prędkość światła jest skończona, założeniu wtedy, za życia P. Fermata, raczej rzadko przyjmowanego) po drodze rzeczywistej jest możliwie najkrótszy - zarówno wtedy gdy promień w jednorodnym środowisku ulega odbiciu, jak też w przypadku gdy przebiega przez dwa różne, ale optycznie jednorodne ośrodki. Sytuacja tych *Zasad* radykalnie się jednak zmieniła gdy w 1673 roku, duńczyk Olaf R oe me r (1644 - 1710) wykazał, że światło ma dużą, ale skończoną prędkość (ze względu na ówczesną złą znajomość rozmiarów orbity Ziemi, wyznaczył on prędkość światła za małą o około 25 %). O podobnych zasadach pisali też, jeszcze w samym końcu XVII wieku, Chrystian Huyghens (1629 - 1695) oraz Jan I Be r n o u 11 i.

Te wyniki Fermata oraz jego następców bardzo się ludziom o umysłach filozoficznych (czy teologicznych) podobały. Była pokusa, żeby dzięki jakimś podobnym uogólnieniom wyprowadzić całą fizykę z teologii. Ale nie wszyscy (przynajmniej od czasów Galileusza; Galileo Galilei 1564 - 1642) uważali takie postępowanie za sensowne. Ot, choćby Izaak Newton (1643 - 1727), który był bardzo religijnym człowiekiem (między innemi, zajmował się teologią i pisał traktaty teologiczne), uważał, że teologii nie należy mieszać z naukami przyrodniczymi. Niemniej jednak w pewnych kręgach chęć mieszania teologi i fizyki brała górę - do kręgów tych należał też i P.L. de M a u p e r t u i s.

Maupertuis szukał ogólnej zasady całej (?) fizyki. Taką zasadę nazwał *Zasadą Najmniejszej Akcji* (niektórzy mówią „najmniejszego działania", ale - by uniknąć pomieszania z Zasadą Hamiltona, może lepiej stosować oryginalny termin "akcja"). Wychodząc już w 1740 roku (patrz **[53])** od - wspomnianej wyżej - zasady minimum Fermata dla odbicia i załamania się światła, sformułował swoją zasadę „minimum akcji" w 1744 roku (wygłosił ją w kwietniu tego roku, nieco później ukazała się ona w druku jako praca **[54])**.

Koncepcje ogólne tych prac nie bardzo są dla nas zrozumiałe. Chociażby dlatego, że nie bardzo wiadomo co jest właściwie tą "akcją" (a jest to przecież główne i charakterystyczne pojęcie tych prac). Sam Maupertuis swoją "akcję" określał jako

(1.7.1) • *mvs,*

gdzie *m*- masa, v- prędkość, s - droga. Dobrze, ale w jakim czasie przebyta droga ? Jak na to zwrócił uwagę, między innemi (a chyba nie był on tu pierwszym) Ernest Mach (1838 - 1916) w książce **[49]**, jeśli s jest drogą w czasie całego przebiegu zdarzenia i nie jest to ruch jednostajny, to w jakim momencie ma być brana ta prędkość ? A jeśli s jest drogą przebytą w ("małej") jednostce czasu, to będzie ono równe (lub - dla ruchu niejednostajnego - mniej więcej równe) w owej jednostce czasu prędkości *v* I

Dalsza praca **[55]**, ogólniejsza, poświęcona temu tematowi ukazała się cztery lata później, w roczniku Akademii Berlińskiej za rok 1746. Jest rzeczą ciekawa, że ukazała sie ona nie w dziale matematvcznvm teao rocznika, lecz w dziale publikacji *Classe de Philosophie Spéculative* - zresztą wzory matematyczne (bardzo elementarne) są w niej tylko na ostatnich dwóch stronach. Te ogólniejsze sformułowanie brzmi : wszystkie zdarzenia w Świecie przebiegają w taki sposób, że w czasie ich przebiegu coś nazwanego "akcją" jest możliwie najmniejsze. Podobnie jak w poprzednich pracach M a u p e rtu i s dowodzi tej Zasady opierając się na fakcie istnienia Boga uważając, że jest ona dowodem Jego oszczędności w koniecznych Jego działaniach. Zresztą nie zakłada on istnienia Boga, lecz nawet je dowodzi (a raczej pseudo-dowodzi) przy pomocy tak zwanego *dowodu ontologicz∩ego* [16].

Nota bene, wyciągał on i odwrotny wniosek (w nieco późniejszej pracy [56]) : skoro zachodzi taka Zasada, to musi istnieć jakaś jakaś Wyższa Istota (dzięki której panują takie zasady na Świecie) i to Ona działa w naszym Świecie.

"Najogólniejsze" twierdzenie, mówiące, że wszędzie i zawsze "akcja" jest możliwie najmniejsza, jest - oczywistą - bzdurą, natomiast szczególne sformułowanie (1.7.1) - po prostu, o ile się je jakoś sensownie wyinterpretuje - jest twierdzeniem fałszywym. Od niego, zresztą, pochodzi tytuł mego referatu (patrz [86]) wygłoszonego przeze mnie na sesji XIII Ogólnopolskiej Szkole Historii Matematyki w KOŁOBRZEGU. Maupertuis chciał stosować swą zasadę do całej przyrody, też i do ożywionej. Ale przecież, jak słusznie zauważono, chociażby - na przykład - ogon pawia, jest uderzającym kontrprzykładem na tezę, że Przyroda zawsze postępuje w sposób możliwie najoszczędniejszy...

Ciekawą jest rzeczą, że L. E u l e r, który wprawdzie był bardzo religijnym człowiekiem, ale w zasadzie nie mieszał teologii do nauki, jednak uległ w pewnym momencie „metafizycznej atmosferze”, którą niektórzy usiłowali rozsiewać w BERLINIE i opublikował pracę [18]. W pracy tej usiłował wygłosić jakąś sensowną Zasadę Najmniejszej Akcji oraz podać jej - teologiczny, ale mogący być przyjęty przez szeroką grupę ludzi - dowód. L. E u l e r - mimo swej trzeźwości - jednak uważał, że wszystkie prawa fizyczne, które nie dają się rozumowo uzasadnić dają się wyprowadzić z atrybutów Boga. Widzimy więc, że wtedy nie tylko P.L. de M a u p e r t u i s, ale i inni (nawet znacznie wybitniejsi od niego) uczeni chcieli mieszać teologię (jak byśmy obecnie ten zakres ludzkiej myśli nazwali) oraz fizykę (przyrodoznawstwo). Dziś nam może się wydawać dziwne, że XVIII wieczni deiści (i panteiści), aż tak chcieli łączyć Boga i nauki przyrodnicze. Różne kościoły (protestanckie, ale też i - niestety - Katolicki), postępowały podobnie i, często, postępują tak i dotychczas (porównaj niektóre ustępy ostatniej encykliki papieża Jana Pawła II *Fides et ratio* **[30]**, szczególnie przypis na str. 66 oraz jego przemówienie na Uniwersytecie

Mikołaja Kopernika w TORUNIU, wygłoszone w czasie jego pielgrzymki w czerwcu 1999).

W roku 1751 szwajcarski matematyk (wspomniany już wyżej) S. J. Kó n i g sformułował względnie poprawnie taką Zasadę, ale tylko dla bardzo specjalnych ruchów swobodnych jednego punktu (i tylko w współrzędnych kartezjańskich), przy okazji pisząc, że w grę wchodzić nie musi minimum pewnej wielkości, lecz też czasami i jej maksimum. Nie zdołałem dotrzeć do oryginału tej pracy, ale przy dzisiejszym, poprawnym sformułowania Zasady Najmniejszej Akcji istnienie takiego przypadku nie jest możliwe - najwyżej ruch rzeczywisty jest tylko krzywą stacjonarną odpowiedniej całki, krzywą nie będącą argumentem żadnego ekstremum, patrz niżej n° 4.2. L. E u l e r też coś takiego dowodził (dla ruchów centralnych jednego punktu i to nawet wcześniej niż to zrobił Maupertuis). Z niejasnych dla mnie powodów, Maupertuis uważał te (względnie jednak jakoś poprawne, nawet w jego własnym mniemaniu) sformułowania za skandaliczne. Może chodziło o to, że nie były one wypowiedziane tak ogólnie jak on by tego pragnął i, że nie byty związane z teologią ? A może poprostu chodziło o to, że były publikowane przez jego wrogów, będących jego konkurencją w tym zakresie ? Wywoływały one dalsze kłótnie i dyskusje.

1.8. Inni autorzy. Nieomal równocześnie (w ciągu paru lat) z P.L. Maupertuis jego Zasadę wypowiedziało i "udowodniło" kilku uczonych, między innym kilkunastu (!) innych autorów podejmowało podobne tematy. Warto tu może tu wymienić - na przykład - nazwiska Jana Le Rond d'Alemberta(1717 - 1783), Patryka kawalera d'A rcy (1725 - 1779; autora pierwszego matematycznego sformułowania prawa pól) patrz [3] i [4], Samuela J. Króniga (1712 - 1757) oraz Kacpra de Courtivron (1715 - 1785). Możnaby tu dołączyć i L. Eulera. Wszyscy oni formułowali Zasadę Najmniejszej Akcji tylko w bardzo specjalnych przypadkach (ruch centrany jednego punktu it.p.). Warto może - jeszcze raz - zwrócić uwagę na publikacje listów P.L. de Maupertuis i króla Fryderyka II **[57]** oraz **[58]** - są to nieomal równoczesne wydania zarówno oryginałów francuskich [17]> jak i ich tłumaczeń niemieckich ! (świadczące o szerokim zainteresowaniu sporem o ową *Zasadę).*

Jak już zauważyliśmy wyżej, Maupertuis swoją "akcję" określał jako *mvs* (gdzie *m* - masa, *v* - prędkość, s - droga). L. E u l e r - już bardziej nowocześnie (i bardziej sensownie) - proponował tę zasadę sformułować (w ówczesnej symbolice) jako

(1.8.1) $\int mvds = \text{minimum}$

(opublikował to parę miesięcy po P.L. de Maupertuis), gdzie *ds* ma być "elementem łuku" (warto zauważyć, że tu *m* jest stałą). L. Euler zresztą poświęcił wtedy - jak już zauważyliśmy wyżej - temu tematowi około 10 prac.

Sam Maupertuis swą Zasadę stosował chętnie też i do innych zjawisk niż czysto mechaniczne. I tak w pracy z 1746 zastosował ją do wyprowadzenia wzorów na zderzenia sprężyste, gdzie indziej zastosował ją też do Zasady Fermata (dla załamania się promienia światła) a także do podania kształu zwisającej nici wiotkiej.

1.9. Ówczesne uogólnienia. Względnie ogólnie Zasadę Maupertuis, ale tylko dla zagadnienień mechanicznych sformułował dopiero J.L. de Lagrange w 1760 roku (patrz, na przykład W.W. R o u s e Bali **[74],** str. 408) wypowiadając twierdzenie, że ruch rzeczywisty układu n punktów jest krzywą stacjonarną całki (tu stosuję tylko nieco zmodyfikowaną ówcześnie stosowaną symbolikę -

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \int v_i \, ds_i \,,$$

gdzie ds_i jest "elementem łuku" krzywej po której porusza się punkt Pj. Niestety ta jego wypowiedź jest trudno zrozumiała - my jej raczej nie rozumiemy, a tylko ją (w sposób korzystny dla niej) próbujemy interpretować. Zauważmy, że w pracy tej jest wyraźnie powiedziane, że wynik ten stosuje się wyłącznie do zjawisk w których zachodzi *Zasada Zachowania Energii* - o ile tylko nasza interpretacja tego wyniku jest poprawna - to ten sposób J.L. de Lagrange zaczął się zbliżać, być może, do względnie poprawnej wypowiedzi Zasady Maupertuis.

Zauważmy, że dziś formułuje się różne zasady wariacyjne nie tylko dla mechaniki punktów czy ciał sztywnych. W różnych działach fizyki (nawet w teorii kwantów) występują takie zasady (ale naogół nie są one uogólnieniami czy analogonami Zasady Maupertuis tylko najczęściej Zasady Hamiltona). Naogół, jest to tylko inny sposób zapisania wzorów, które mają spełniać funkcje, o których się wie, że są funkcjami stacjonarnymi pewnych zagadnień ekstremalnych (pewnych "całek").

Rozdział II - RACHUNEK WARIACYJNY

2.1. Ekstrema (abstrakcyjne). Weźmy pod rozwagę pewien zbiór A oraz funkcję rzeczywistą (funkcjonał rzeczywisty) $I : A \to R$.

DEFINICJA 2.1.1. Mówimy, że ${}^0x \in A$ jest *argumentem minimum absolutnego funkcji* I *w zbiorze* A, jeśli mamy

$$(2.1.1) \qquad I[{}^0x] \leq I[x]$$

dla każdego $x \in A$, zaś liczbę $I[{}^0x]$ nazywamy *minimum funkcji* I. Jeśli w tym ostatnim wzorze (2.1.1), dla wszystkich $x \neq {}^0x$, mamy znak mocnej nierówności" <", to mówimy o *argumencie właściwego minimum absolutnego funkcji* I *w zbiorze* A (w wypadku, gdy minimum nie jest właściwe, mówimy o *argumencie niewłaściwego minimum).*

Podobnie definiujemy *argument maksimum* i *argument ekstremum absolutnego* (oraz *maximum* i *ekstremum funkcji* I).

UWAGA 2.1.1. Niektórzy *argument minimum* nazywają po prostu *minimum, ale* wtedy liczbę $I[{}^0x]$ nazywać trzeba *wartością minimum funkcji* I (tak, że obie, konkurujące z sobą, terminologie są równie skomplikowane, lub jeśli kto woli - równie proste).

2.2. Pewne konkretne zbiory. Przez C^k oznaczać będziemy (jak to się zazwyczaj robi) zbiór funkcji jednej zmiennej, k krotnie różniczkowalnych (k = 0,1,2, ... , gdzie przez C^0 oznaczymy zbiór funkcji ciągłych), zaś przez $C^k(a,b)$ jego podzbiór funkcji zdefiniowanych w przedziale domkniętym (a,b).

DEFINICJA 2.2.1. Rozpatrzym zbiór układów n funkcji C^k e x_i: $(a,b) \to$ $\to R$, $i = 1,n$, to takich funkcji, że jest $x_j \in C^k(a,b)$. Położmy

$$_nC^k(a,b) := \underbrace{C^k(a,b)\times\ldots\times C^k(a,b)}_{n}.$$

Tu i w dalszym ciągu będziemy - oczywiście - zamiast $_1C^k(a,b)$ pisać często po prostu $C^k(a,b)$. Podobnie będzimy postępować przy wszystkich innych typach zbiorów (przestrzeni).

A więc $_nC^k(a,b)$ jest zbiórem n-ek funkcji (xı, ..., x_n), k krotnie różniczkowalnych. Będziemy też pisać ***x***(t) := (x- | (t), ..., x∏(t)) oraz konsekwentnie x = (xı,...,x∏) oraz ***x*** *e* $_nC^k(a,b)$. Skrótowo (acz niechlujnie) zamiast $_nC^k(a,b)$ można nawet pisać $_nC^k$. Ponadto połóżmy **c** := (ci,..., c_n)

Uwaga 2.2.1. W dalszym ciągu pracy będziemy zawsze zakładać, że jeśli jakaś funkcja należy do jakiegoś podzbioru (przestrzeni) C(a,b) funkcji zdefiniowanych w przedziale (a,b) (na przykład należy do zbioru $C^k(a,b)$), to wolno nam operować też wszystkiemi jej ucięciami do dowolnego przedziału domkniętego (u,v) c (a,b). Na dobrą sprawę, gdyby być na prawdę pedantycznym, to należałoby w dalszym ciągu, do każdego zbioru C(a,b), wprowadzić odpowiadający mu jednoznacznie zbiór

$$\underline{C}(a,b) := \bigcup_{a\le u<v\le b} C(u,v)$$

Będziemy zawsze zakładali, że w miejscach w których tego kontekst wymaga, zamiast zbioru C(a,b), występuje - będący sumą pewnych jego podzbiorów - zbiór $\underline{C}(a,b)$.

Stosuję tu (podobnie jak w moim podręczniku **[82]** i **[83])** następującą konwencję (jest to uproszczona symbolika Karla Mengera - patrz podręcznik **[62]** oraz moją polską pracę **[79])** : liczby - małe litery, antykwa; funkcje - małe litery, kursywa; układy liczb - tłuste małe litery, antykwa, układy funkcji - tłuste małe litery, kursywa; zbiory - duże litery; funkcjonały - tłuste duże litery, antykwa, operatory - tłuste duże litery, kursywa; *j* - funkcja tożsamościowa.

Definicja 2.2.2. Dla s ≥ 0 przez $_nC^s$(a,bj **c,d)** oznaczać będę podzbiór zbioru $_nC^s(a,b)$ takich układów funkcji, że

$$x_i(u) = a_i, \quad x_i(v) = b_i, \qquad i = 1, ..., n,$$

czyli

$$\boldsymbol{x}(a) = \mathbf{c}, \quad \boldsymbol{x}(b) = \mathbf{d}.$$

Definicja 2.2.3. Dla s ≥ 0 przez $_nC^s$ (a; **c,d)** oznaczać będziemy podbiór zbioru $_nC^s$ wszystkich układów n funkcji x = x(t) takich, że istnieje dla każdego z nich przedział (a, t_0) (gdzie t_0 >0 zależyć może od x) w którym jest on zdefiniowany i taki, że

$$x_i(a) = c_i, \quad x_i(t_0) = d_i, \qquad i = 1, ..., n,$$

czyli

$$\boldsymbol{x}(a) = \mathbf{c}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \mathbf{d}.$$

Ponieważ w dalszym ciągu rozpatrywać będziemy często funkcje wielu zmiennych nie zależne w sposób wyraźny od czasu t, więc jako jego początek liczenia możnaby wtedy przyjmować 0, zaś układ odniesienia możnaby obierać czasem tak, że by jego początek **0** := (0,0) pokrywał się z jednym z rozpatrywanych punktów. Oczywiście, w pewnych zastosowaniach oraz w pewnych uogólnieniach należy te wielkości obierać jako dowolne, ale w takim razie konieczna symbolika staje się jeszcze bardzie ciężka i skomplikowana.

DEFINICJA 2.2.4. Dla pewnej funkcji g: H → R i dla s ≥ 0 (gdzie H C R_n) podzbiór zbioru $_nC^s(a,b)$, utworzony przez elementy x = (x- | ,..., x_n) spełniające warunek

$$g(x_1(t), ..., x_n(t)) = 0$$

czyli

$$g(\boldsymbol{x}(t)) = 0,$$

oznaczymy przez $_nC^k(a,b;g)$. Ogólniej, elementy zbioru $_nC^s(a,b)$ układów funkcji xı,..., x_n, spełniające warunki uboczne

$$g_i(x_1(t), ..., x_n(t)) = 0, \qquad i = 1, ..., k$$

dla wszystkich t e (a;b), czyli takie, że

(2.2.1) $$g_i \circ (x_1, ..., x_n) = 0, \qquad i = 1, ..., k$$

oznaczymy przez $_nC^k(a,b; g_1, ..., g_k)$

Piszę g o **(x)** lub g o(χ· | ,.... χ_n) na to, by móc rozróżnić funkcję złożoną zdefiniowanej wzorem g o(χ_1,..., χ $_n$)(t) := g (x_1(t),..., x_n(t)) od wartość funkcji g dla argumentów liczbowych xı(t), ...,x_n(t), to jest od liczby g(x√t),..., x_n(t)). Przez *0* oznaczam funkcję tożsamościowo znikającą : *0* (t) = 0 - ewentualnie jej odpowiednie ucięcie. Oznaczać będziemy też ***0** := (0,..., 0).*

DEFINICJA 2.2.5. Przez $_nC^s$ (a,b; **c,d;g)** oznaczać będę podzbiór zbioru $_nC^s$ (a; **c,d)** układów spełniających warunek uboczny (2.2.1) dla n = 1.

Jeśliby tych warunków "ubocznych" było więcej, na przykład gdyby gdyby funkcje należące do rozważanego zbioru miały spełniać p warunków ubocznych

$$g_b(j, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = 0, \qquad b = 1, ..., p$$

to taki zbiór oznaczymy $_nC^s(a,b;\mathbf{c},\mathbf{d};g_1,...,g_k)$.

Weźmy teraz pod rozwagę jakieś dwa ustalone punkty $\mathbf{a} = (a_1,...,a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1,...,b_n)$ oraz rozpatrzmy wszystkie możliwe krzywe ciągle, prostowalne, dane wzorami parametrycznymi

$$x = x_i(s), \qquad i = 1, ..., n$$

łączące punkt **a** z punktem **b.**

Istnieje tu parę możliwości co do dziedzin tych funkcji. Ze względu na dalszy ciąg przyjmiemy, że tworzy je jakiś stały przedział, powiedzmy przedział (u, v) (acz z pewnego, innego, punktu widzenia byłoby najkorzystniej obierać za parametr s właśnie długość łuku tej krzywej). A więc ma być

$$x_i(u) = a_i, \quad x_i(v) = b_i, \qquad i = 1, ..., n,$$

czyli

$$(2.2.2) \qquad \boldsymbol{x}(u) = \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{x}(v) = \mathbf{b}.$$

Weźmy pod rozwagę funkcję

$$s = s(t)$$

taką, że istnieje funkcjonał $\mathbf{T}_1$ (zależny od funkcji s) taki, że

$$(2.2.3) \qquad C^1 \ni s : \langle u, \mathbf{T}_1[u,v;s] \rangle \leftrightarrow \langle u, v \rangle$$

(a więc funkcja s musi być silnie monofoniczna) oraz

$$x_i(s(u)) = a_i, \quad x_i(s(\mathbf{T}_1[u,v;s]) = b_i, \qquad i = 1, ..., n.$$

Rozpatrzmy teraz zbiór układów $y=(y_1,..., y_n)$, n funkcji złożonych

$$(2.2.4) \qquad y_i = y_i(t) := x_i(s(t)) \qquad i = 1, ..., n,$$

czyli

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) := \boldsymbol{x}(s(t))$$

- są one więc zdefiniowane w przedziałach $\langle u, \mathbf{T}_1[u,v;s] \rangle$ i spełniają warunki

$$(2.2.5) \qquad \boldsymbol{y}(u) = \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{y}(\mathbf{T}_1[u,v;s]) = \mathbf{b}.$$

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać wyłącznie takie funkcje złożone (2.2.3), że $y \in C^s$ gdzie s = 0,1,2, ... (to jest funkcje s-krotnie różniczkowalne - dla nas najważniejsze będą wypadki, gdy s = 1 lub 2). Przypuśćmy, że mamy daną pewną ustaloną różniczkowalną funkcję 2n zmiennych $g = g(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

DEFINICJA 2.2.6. Przez

$$ {}_n^{*}C^s\,(u; \mathbf{a},\mathbf{b}; g; h) $$

oznaczać będziemy zbiór układów $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$ n funkcji złożonych $y_j = y_j(t)$, $i = 1, \dots, n$, zdefiniowanych wyżej, s krotnie różniczkowalnych i takich, że mamy dla nich i dla pewnej z góry ustalonej stałej h (przypominam, że w symbolice K. M e n g e r a funkcję stałą o stałej wartości h oznacza się literą *h* kursywa) związek

$$ g(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}) = h, $$

to jest związek

$$ g\,((\boldsymbol{y}(t), \dot{\boldsymbol{y}}(t)) = h \tag{2.2.6} $$

dla wszystkich $t \in (0, T_1[u,v; s])$. O ile funkcja $g = g\,(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ zależy efektywnie od zmiennej **x**, to musi być $s > 1$.

Ze względu na to, że mamy odpowiedniość (2.2.3), to zachodzi związek

$$ [\boldsymbol{x}, s] \leftrightarrow \boldsymbol{y}, $$

(do **x** i h dobieramy *s,* tak by związek (2.2.6) był spełniony). A więc dla ustalonego **x** i h mamy ustalone s, a więc i ustalone **y.** Możemy więc położyć

$$ T[u; \boldsymbol{y}; h] := T_1[u,v; s], \tag{2.2.7} $$

a więc z (5) ma być

$$ \boldsymbol{y}\,(u) = \mathbf{a}, \qquad \boldsymbol{y}\,(\,\mathbf{T}[u; \boldsymbol{y}; h]\,) = \mathbf{b}. \tag{2.2.8} $$

- operowanie funkcjonałem T[u; $\boldsymbol{y}$; h] jest naogół wygodniejsze niż operowanie funkcjonałem T_1[u,v, s].

UWAGA 2.2.2. Jak się w dalszym ciągu okaże, zmienna u w symbolu ${}_n^{*}C^s$ (u; **a,b** ; *g^,* h) oraz w symbolu T[u; **y;** h] nie będzie dla nas istotna.

UWAGA 2.2.3. Przez liczbę u, przez punkty **a,b** funkcję *g* oraz stałą (liczbę) h jest zdeterminowana dziedzina każdej z funkcji **y** należącej do zbioru ${}_n^{*}C^s$ (u; **a,b;** g; h).

UWAGA 2.2.4. Gdybyśmy chcieli rozważać zagadnienia eksplicite zależne od "czasu" t, to należałoby tu wprowadzić, pewne modyfikacje, gdyż nie byłby wtedy obojętny początek rozpatrywanego "zmodyfikowanego czasu".

UWAGA 2.2.5. Zauważmy, że konieczność spełnienia przez elementy $_n^*C^s$ (u; **a,b** ; *g;* h) obu warunków (2.2.6) oraz (2.2.8) powoduje, że ten zbiór może być pusty lub zawierać tylko jeden element (patrz niżej Przykłady 3.6.1 oraz 3.6.3).

2.3. Pewne przestrzenie. Wprowadźmy teraz w zbiór A jakąś metrykę p. Przestrzeń utworzoną ze zbioru A z metryką p będziemy oznaczali A_p.

Dla funkcji $C^k \ni x : \langle a,b\rangle \to R$ i dla $0 < r < k$; połóżmy

$$d^0(x) := d(x) := \max_{t \in \langle a,b\rangle} |x_i(t)|,$$

$$d^r(x) := \max [d(x), d(\dot{x}), ..., d(x^{(r)})], \qquad \text{dla } r = 0,1,..., k$$

oraz dla układów n takich funkcji

$$_nd^r(\boldsymbol{x}) := {_nd^r}([x_1, ..., x_n]) := \max [d^r(x_1), d^r(x_2), ..., d^r(x_n)]$$

Oczywiście $_1d^r([x]) = d^r(x)$. Przyjmijmy

DEFINICJA 2.3.1. Zbiór $_nC^k$(a,b) układów funkcji $\boldsymbol{x} = (x_1,..., x_n)$ z metryką

$$_n\rho^r(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := {_nd^r}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

gdzie $0 \leq r \leq k$ nazwiemy przestrzenią i oznaczymy $_nC_r^k$(a,b). Przestrzeń powtałą ze zbioru C przez dołączenie takiej metryki oznaczymy przez C_r.

DEFINICJA 2.3.2. Dla s > r > 0 zbiór $_nC^s$ (a,b; a,b) z metryką $_n\rho^r$ nazywać będziemy przestrzenią $_nCf$ (a,b; a,b). Podobnie zbiór $_nC^s$ (a; a,b;g) z metryką typu $_nd^r$ nazwiemy przestrzenią $_nCf$ (a;a,b;g), zaś zbiór $_nC^s$ z metryką $_n\rho^r$ nazwiemy przestrzenią $_nC_r^s$

Zbiór funkcji $^*_nC^s$(u; a,b; *g;* h) możemy odwzorować wzajemnie jednoznacznie na pewien podzbiór zbioru funkcji $_nC^s$ (0,1; a,b;g;h) - wystarczy w funkcjach należących do pierwszego z tych zbiorów podstawić nową zmienną

$$w = \frac{t-u}{T[u;\boldsymbol{x};h]-u}$$

i położyć

(2.3.1) $$\boldsymbol{z}(w) := \boldsymbol{y}(u + w(T[u;\boldsymbol{x};h] - u)).$$

Definicja 2.3.3. Jeśli położymy $^i\mathbf{z}(w) := {}^i\mathbf{y}(u + w(T[u; \mathbf{x}; h] - u))$, i = 1,2, to za odległość układów funkcji $^i\mathbf{y}$, i = 1,2 w $_n{}^*C^s(u; \mathbf{a,b}; g; h)$ przyjmiemy odległość odpowiadających im wzorem (2.3.1) układów funkcji $^i\mathbf{z}$, i = 1,2 w przestrzeni $_nC^s_r(0,1; \mathbf{a,b})$.

Definicja 2.3.4. Przestrzeń utworzoną ze zbioru $^*C^s(u; \mathbf{a,b}; g; h)$ z taką metryką oznaczać będziemy

$$(2.3.2) \qquad {}_n^*C^S_r\,(u; \mathbf{a,b}; g; h).$$

2.4. jeszcze jedna przestrzeń. Symbole $^*_nC^s(u; \mathbf{a,b}; g; h)$ oraz $^*_nC^s_r(u; \mathbf{a,b}; g; h)$ nie są zbyt dobrze skonstruowane. Zawierają bowiem zbyt wiele informacji, przyczym informacji te nie są niezależne. A z drugiej strony nie podają innych potrzebnych informacji - na przykład, iż dziedziną ich elementów jest $(0, T[u; \mathbf{y}; h])$, w której - z kolei brak zaznaczenie, iż zależy ona też i od obioru funkcji g. Ale o tyle jest to nieistotne, że w dalszym ciągu będziemy mieli do czynienia wyłącznie z jedną, ustaloną z góry, funkcją g.

Wobec powyższej uwagi może być korzystna inna definicja zbioru $^*_nC^s(u; \mathbf{a,b}; g; h)$. Można go bowiem zdefiniować inaczej - w sposób pozornie mniej elegancki, ale jak się później okaże, w sposób najlepiej tłumaczący sens pewnego wyniku. W tym celu weźmy pod rozwagę układ funkcji $\mathbf{y} = \mathbf{y}^0(t)$ zdefinowanych w przedziale $t \in (u,v)$ i spełniających dla pewnego ustalonego h warunek (2.2.6). Ustalmy też dwa punkty **a** oraz **b.** Ma być

$$\mathbf{y}^\circ(t) = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{y}^\circ(T[u; \mathbf{y}^\circ; h]) = \mathbf{b}$$

Definicja 2.4.1. Oznaczymy przez

$$(2.4.1) \qquad {}^{**}_{\ n}C^S\,(\mathbf{y}^\circ; u; \mathbf{a,b}; g; h)$$

zbiór układów funkcji $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, zdefiniowanych w odpowiednio w przedziałach $(u, T[u; \mathbf{x}; h])$, spełniających warunki (2.2.6) oraz takich, że

$$\mathbf{x}(u) = \mathbf{a}, \qquad \mathbf{x}(T[u; \mathbf{x}; h]) = \mathbf{b}.$$

Odpowiednią przestrzeń z metryką $_n\rho^r$ oznaczymy przez

$${}^{**}_{\ n}C^S_r\,(\mathbf{y}^\circ; u; \mathbf{a,b}; g; h).$$

Może być taka sytuacja, że dla danych u i v nie istnieje, oczywiście poza krzywą $\mathbf{y}^\circ$, żadna krzywa $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ spełniająca równocześnie warunki (2.2.2) oraz

(2.2.6) - patrz przykłady z n° 3.6. Zbiór $_n^*C^s$ (u; **a,b;** *g;* h) może być pusty (zobacz niżej Przykład 3.6.4). Jeśli zbiór $^*C^s_n$ (u; **a,b;** *g;* h) nie jest pusty, to mamy

$$^{**}_{\ n}C^S(\boldsymbol{y}^\circ; u; \mathbf{a,b}; g; h) = {}_n^*C^S(u; \mathbf{a,b}; g; h).$$

Definicja zbioru $_n^*C^s$(u; a,b; *g;* h) nie wyróżnia żadnego jego elementu, natomiast w definicji zbioru $^*{}_n^*C^s$ (y °; u,v;a,b;g; h) element $\mathbf{y^0}$ jest wyróżniony, i - dlatego - definicja pierwszego z nich wydaje się być pozornie elegantsza. Tymczasem w zastososowaniach (a raczej w jedynym zastosowaniu tego oznaczenia) istotną odgrywa rolę właśnie en jego wyróżniony element.

2.5. Ekstrema lokalne. Weźmy pod rozwagę pewną przestrzeń A_p (to jest zbiór A z metryką p) oraz funkcję rzeczywistą (funkcjonał rzeczywisty) I: A → R. Wprowadźmy definicję

DEFINICJA 2.5.1. Mówimy, że $^\theta$xe A jest *argumentem minimum lokalnego funkcji* jeśli istnieje takie ε > 0, że dla wszystkich x e A, takich, że

(2.5.1) $$\rho({}^0\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) < \varepsilon$$

mamy (2.1.1).

Jeśli w takim wypadku we wzorze (2.1.1), dla wszystkich $\boldsymbol{x} \neq {}^0\boldsymbol{x}$, mamy znak mocnej nierówności" <", to mówimy o *argumencie właściwego minimum lokalnego funkcji* I *w przestrzeni* A_p.

Podobnie definiujemy *argumenty lokalnych maksimów* i *ekstremów* oraz *lokalne maksima, lokalne ekstrema,* etc.

Zamiast wprowadzania metryki wystarczyłoby wprowadzić topologię i zamiast o *kulach* danych wzorem (2.5.1) mówić o *otoczeniach* w sensie tej topologii.

Oczywiście, że argument minimum (maksimum) lokalnego jest też minimum (maksimum) absolutnym w podzbiorze zbioru A elementów spełniających warunek (2.5.1) i, naodwrót, warunek ten może służyć też jako definicja minimum (maksimum) lokalnego. A mianowicie minimum lokalne (w danej metryce lub topologii) °x jest minimimum absolutnym w pewnym otoczeniu tego elementu.

2.6. Podstawowe pojęcia rachunku wariacyjnego i ekstrema miejscowe. Zgodnie z zapowiedzią, że będę omawiać tylko zasady nieparametryczne ograniczę się tylko do, tak zwanych, całek nieparametrycznych.

DEFINICJA 2.6.1. Wprowadźmy oznaczenie $Q_n := \langle a,b\rangle \times \mathbf{R}_n \times {}^*\mathbf{R}_n$, gdzie $^*\mathbf{R}_n$ jest zbiorem wektorów nad przestrzenią $\mathbf{R}_n$.

Weźmy pod rozwagę funkcję C^1 3 $f{:}Q_n \to$ R oraz - jak zwykle - połóżmy $x := [x_1, \ldots, x_n]$, $\dot{x} := [\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n]$. Stosuję tu nawiasy [...] bowiem χ oraz $\dot{x}$ (a właściwie x(t) dla ustalonego t) są wektorami należącym do przestrzeni wektorów $^*\mathbf{R}_n$ nad przestrzenią $\mathbf{R}_r$>).

Rozpatrzmy funkcjonał If zdefiniowany w przestrzeni $_nC_r^k(a,b)$, dla $1 \le k$ oraz dla $0 \le r \le k$, to jest rozpatrzmy funkcję rzeczywistą If : $_nC^k(a,b) \to$ R, daną analitycznie wzorem

$$\mathbf{I}_f\,[a,b;\,x\,] = \mathbf{I}_f\,[a,b;\,x_1, \ldots, x_n] :=$$

$$(2.6.1) \qquad := \int_a^b f \circ (j, x, \dot{x}\,) = \int_a^b f \circ (j, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) =$$

$$= \int_a^b f(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))\,dt.$$

Piszę (tak jak już zaznaczyliśmy w n^0 2.2) f o (/', x, $\dot{x}$), na to, by móc rozróżnić wartość funkcji *f* dla argumentów liczbowych t, x- | (t),x- | (t), ... od funkcji złożonej f o(/,χ_1,..., $\dot{\chi}_1$,...) zdefiniowanej wzorem

$$f \circ (j\,, x_1, \ldots, \dot{x}_1, \ldots)(t) := f(t, x(t), \ldots, \dot{x}_1(t), \ldots).$$

Przez *j* oznaczamy - jak zawsze - funkcję tożsamościową, to jest taką, że *j* (t) = t dla wszystkich t (ewentualnie jej ucięcie do jakiegoś podzbioru zbioru R, na przykład, do przedziału (a,b)). Dla skrótu, można też zamiast If [ab; x] pisać też krócej If [a,b; x] lub If, a nawet - po prostu - **I.** Zgodnie z tradycją (acz niechlujnie) będziemy nazywali funkcjonał If *catką,* zaś funkcję *f funkcją tworzącą* całki, ewentualnie *funkcją tworzącą problemu(ekstremalizacji całki).*

Możemy tu zastosować Definicję 2.1.1 do funkcjonału 1/ zdefiniowanego w zbiorze $_nC^k(a,b)$ otrzymamy wtedy definicję *argumentu minimum absolutnego (właściwego,* etc.) *całki* If w zbiorze $_nC^k$ (a,b).

Analogicznie otrzymuje się definicje *argumentów maksimów, ekstremów, właściwych* lub *nie,* etc. Podobnie z Definicji 2.5.1 otrzymamy definicje *ekstremów lokalnych* dla całek (2.6.1). Jeśli zastosować definicję 2.5.1 do funkcjonału If zdefinowanego w przestrzeni $_nC_r(a,b)$, to otrzymamy wtedy definicję *argumentu minimum lokalnego (właściwego,* etc.) *całki* 1/ w przestrzeni ${}_nC_r^k(a,b)$. Tradycynie stosuje się nastąpującą terminologię :

DEFINICJA 2.6.2. Argument minimum lokalnego całki 1/ w przestrzeni ${}_n$cJ(a,b) (lub jej podprzestrzeniach) nazywamy *argumentem minimum mocnego tej całki \f,* natomiast takiż argument minimum 1/ w przestrzeni ${}_n$C^(a,b) (lub jej podprzestrzeniach) nazywamy *argumentem minimum słabego tejże całki* 1/.

Dość skomplikowaną sprawą jest wyjaśnienie, jakie funkcjonały dają się zapisać jako "całki". O tyle jest to dla nas mało ważne, jako że w mechanice teoretycznej i tak wszystkie funkcjonały (a przynajmniej wszystkie klasyczne funkcjonały) są z góry dane jako całki.

W rachunku wariacyjnym można badać, między innemi, całki w przestrzeniach ${}_nC_r^k(a,b)$, ale ten dział matematyki staje się on dopiero wtedy ciekawy i użyteczny, gdy całki bada się w podprzestrzeniach ${}_n$C?(a,b;c,d) lub ${}_n$Cf (a,b;c,d;g) przestrzeni ∏C^k(a,b) (patrz Definicje 2.2.2, 2.2.5 oraz 2.3.2). Ogólniejsze przestrzenie ${}_nC^k$(a,b; *g↑,...,* gκ) oraz ${}_nC_r^k$(a,b; c,d ;gi,..., *g⅛)* wprawdzie wystąpią u nas, ale tylko implicite.

Wprowadźmy teraz pewne pojęcie, bardzo użyteczne w mechanice teoretycznej. Nie daje się ono zdefinionwać dla dowolnych funkcjonałów, ale tylko dla pewnej ich klasy obejmującej "całki". Jest ono implicite znane od - chyba - conajmniej 150 lat, ale w sposób wyraźny zostało sformułowane dopiero przeze mnie ćwierć wieku temu (patrz **[82],** str. 82).

Przyjmijmy definicję

DEFINICJA 2.6.3. Mówimy, że $^0\mathbf{x}$ = ($^\theta$x- | ,..., ^0x_n) jθst *argumentem minimum miejscowego słabego (mocnego, absolutnego, właściwego* lub *nie,* etc.) *całki* **1/**[a,b; x] w zbiorze układów funkcji ${}_n$C?(a,b; **c,d),** jeśli dla każdego a ≤ u < b istnieje liczba b(u) >0, taka, że u + b(u) ≤ b oraz układ funkcji °x uciętych do przedziału (u ; u + b(u)) jest argumentem minimum słabego (mocnego, absolutnego, właściwego lub nie, etc.) całki l/[u, u +b(u); x] danej wzorem (2.6.1) w przestrzeni

(2.6.2) $\qquad {}_nC_r^S\,(u, u+b(u);\, {}^0\mathbf{x}\,(u),\, {}^0\mathbf{x}\,(u+b(u)))$.

Ponadto - po pierwsze - trzeba tu dodać warunek (odgrywający jakąś istotną rolę tylko w nielicznych wypadkach) istnienia liczby a ≤ v_0 < b takiej, że

°***x*** ucięte do przedziału (v_0, b) jest argumentem minimum (odpowiedniego typu) całki 1/ [v_0,b; ***x***] w przestrzeni $_n$C ® (v_0,b; °***x*** (v), °***x*** (b))[18].

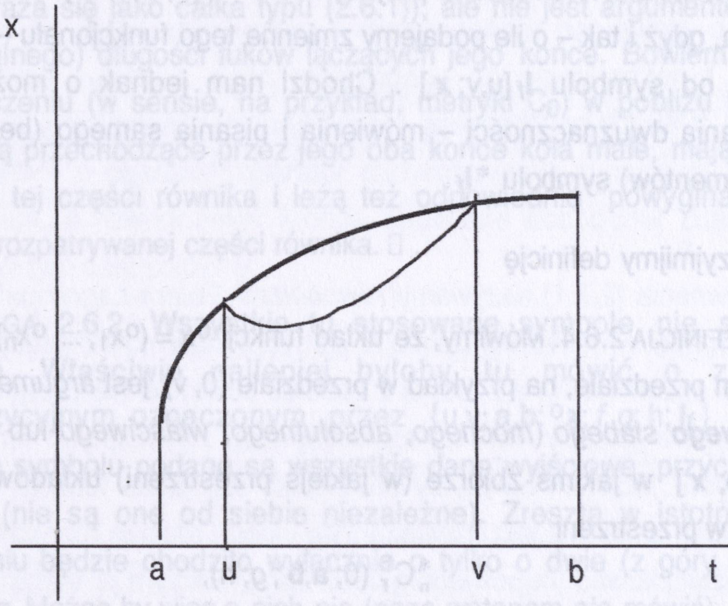
Dla ekstremów miejscowych absolutnych należy operować nie przestrzeniami, lecz zbiorami, to jest należy opuszczać dolny wskaźnik r, zaś dla ekstremów innych typów (na przykład, w zadaniach zwanych „zadaniami z ruchomymi końcami") należy tę definicję odpowiednio zmodyfikować.

Ponadto, pozornie wydaje się, że byłoby tu eleganciej założyć, że nie rozpatrujemy tu całego zbioru funkcji (2.6.2), lecz tylko jego podzbiór funkcji ***x*** uciętych do przedziału (u, u+Z>(u)) i nie tylko takich, że

$$\boldsymbol{x}(u) = {}^{o}\boldsymbol{x}(u), \quad \boldsymbol{x}(u+b(u)) = {}^{o}\boldsymbol{x}(u+b(u)),$$

lecz spełniających też i warunki

(2.6.3) $$\dot{\boldsymbol{x}}(u) = {}^{o}\dot{\boldsymbol{x}}(u), \quad \dot{\boldsymbol{x}}(u+b(u)) = {}^{o}\dot{\boldsymbol{x}}(u+b(u)),$$



10. Ilustracja do definicji pojęcia ekstremum miejscowego.

to jest prowadzących do "gładko sklejonych" funkcji w całym przedziale (a ,b). Jednak dość skomplikowane rozważania prowadzące do lematów o "wygładzaniu" argumentów funkcjonałów dających się zapisać jako regularne (to jest spełniające warunek Legendre'a) całki pokazują (patrz [70], str. 29 - 44), że takie "wygładzanie" nie jest w wielu wypadkach konieczne. Wynika to z - tak zwanej - teorii rozwiązań nieciągłych rachunku wariacyjnego, stworzonej, między innemi, przez Dawida H i l b e r ta (1862 - 1943), ale w oparciu o pewne wyniki P.D.G. Du Bois - Reymonda (1839 - 1889; patrz [14] oraz [15]) - wspomniemy jeszcze o tym niżej.

Przypomnijmy jeszcze raz, że dla innych zbiorów niż zbiory funkcji i dla funkcjonałów innych niż całki trudno jest mówić o ekstremach miejscowych.

Natomiast dla przestrzeni typu (2.3.2) czy (2.4.1) będzie dla nas konieczne zdefiniowanie bardziej skomplikowanego funkcjonału i jego ekstremów. Przypuśćmy, że mamy daną jakąś funkcję tworzącą całki f : $^*Q_n \to$ $\to R$, gdzie $^*Q_n$ jest pewnym obszarem zawierającym domknięcie zbioru Q_n. Dla pewnego $a \leq u < b$ i dla $\boldsymbol{x} \in {}_n^*C_r^s(u; \mathbf{a},\mathbf{b}; g; h)$ i połóżmy

$$(2.6.4) \qquad {}^*\mathbf{I}_f[u; \mathbf{a},\mathbf{b}; \boldsymbol{x}] := {}^*\mathbf{I}_f[u; \mathbf{a},\mathbf{b}; x_1, ..., x_n] := \int_u^{T[u;\boldsymbol{x};h]} f \circ (j, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}).$$

gdzie liczba T[u; x; h] jest zdefiowana wzorem (2.2.7).

Uwaga 2.6.1. Gwiazdka przy symbolu *I/[u; **a,b;** x] właściwie nie jest konieczna, gdyż i tak - o ile podajemy zmienne tego funkcjonału - to symbol ten różni się od symbolu If[u,v;x] . Chodzi nam jednak o możliwość - bez wywoływania dwuznaczności - mówienia i pisania samego (bez wymieniania jego argumentów) symbolu *1/.

Przyjmijmy definicję

Definicja 2.6.4. Mówimy, że układ funkcji $^0x = (^0x_1, ..., {}^0x_n)$, zdefiniowany w pewnym przedziale, na przykład w przedziale (0, v) jest *argumentem minimum* ***miejscowego*** *stabego {mocnego, absolutnego, właściwego* lub *nie,* etc.) *catki* *I/[u; **a,b;** x] w jakimś zbiorze (w jakiejś przestrzeni) układów funkcji C, na przykład, w przestrzeni

$${}_n^*C_r^s(0; \mathbf{a},\mathbf{b}; g; h),$$

jeśli dla każdego $0 \leq u < b$ istnieje liczba $b(u) > 0$, taka, że $u + b(u) \leq b$ oraz układ funkcji °x uciętych do przedziału (u ; u+b(u)) jest argumentem minimum słabego (mocnego, absolutnego, właściwego lub nie, etc.) całki *If[u; a,b; x] danej wzorem (2.6.4) w przestrzeni

$$(2.6.5) \qquad {}_n^*C_r^s(u; {}^0\boldsymbol{x}(u), {}^0\boldsymbol{x}(u+b(u)); g; h).$$

Ponadto, po pierwsze trzeba tu jeszcze dodać warunek (odgrywający jakaś role tv | ko w nielicznych wypadkach) by istniało T?M, takie, że w przedziale (b-T2[y], b) °*x* byłoby argumentem minimim (ekstremum etc.) odpowiedniej całki typu ***If** miała minimum w odpowiednim zbiorze funkcji - czytelnik zechce sam sformułować odpowiednie warunki i zapisać odpowiednią całkę. A po drugie byłoby eleganciej założyć, że nie rozpatrujemy tu całego zbioru funkcji (2.6.5), lecz tylko jego podzbiór funkcji ***x,*** spełniających warunki (2.6.3) (porównaj też uwagę podaną po tym wzorze).

Łatwo pokazuje się, że jeśli °***x*** jest jakimś argumentem minimum całki I/ (słabego, silnego, absolutnego, właściwego lub nie, etc), ewentualnie całki *1/, w jakimś zbiorze, ewentualnie w odpowiedniej przestrzeni, to wtedy jest ono też argumentem takiegoż mininimum miejscowego całki **1/,** ewentualnie całki ***If.** Natomiast na prostych przykładach pokazuje się, że odwrotna relacja nie zawsze zachodzi.

Przykład 2.6.1. Część łuku równika kuli zawierająca wewnątrz siebie antypodę jednego z końców tego łuku, jest argumentem miejscowego (nawet absolutnego) minimum długości łuków na kuli (zauważmy od razu, że długość krzywej wyraża się jako całka typu (2.6.1)), ale nie jest argumentem minimum (nawet lokalnego) długości łuków łączących jego końce. Bowiem w dowolnie małym otoczeniu (w sensie, na przykład, metryki Co) w pobliżu takiej części równika leżą przechodzące przez jego oba końce koła małe, mające mniejszą długość od tej części równika i leżą też odpowiednio "powyginane" krzywe, dłuższe od rozpatrywanej części równika. □ .

Uwaga 2.6.2. Wszystkie tu stosowane symbole nie są najlepiej pomyślane. Właściwie najlepiej byłoby tu mówić o zagadnieniu ekstremalizycyjnym oznaczonym przez {u,v;a,b;°x; *f, g-,* h; I/} - w tym zawikłanym symbolu.podane są wszystkie dane wyjściowe, przyczym jest ich zbyt dużo (nie są one od siebie niezależne). Zresztą w istotnym dla nas zastosowaniu będzie chodziło wyłącznie o tylko o dwie (z góry wyróżnione) funkcje *f* i *g.* Można by więc o nich nic (poza wstępem nie mówić). Będą one w jednoznaczy sposób wyznaczać wielkość stałej h. A więc wystarczyłoby w tym symbolu uwzględniać tylko 5 pierwszych liter.

Możnaby Definicję 2.6.4 sformułować inaczej (eleganciej), przy pomocy "dwugwiazdkowego" zbioru. A mianowicie przyjąć

Definicja 2.6.4a. Mówimy, że ${}^{\theta}x$ = (${}^{\theta}x$- | ,..., ${}^{0}x_n$) jest *argumentem minimum **miejscowego** słabego {mocnego, absolutnego, właściwego* lub *nie,* etc.) *całki* *I/[u,v;x] w przestrzeni (zbiorze) układów funkcji

$$ {}^{**}_{\ n}C^{S}_{r}\,(\boldsymbol{x}^{\circ};\ a,b;\ \mathbf{a},\mathbf{b};\ g;\ h), $$

jeśli dla każdego a ≤ u < b istnieje liczba *b* (u), taka, że u < b(u) ≤ b oraz układ funkcji °x uciętych do przedziału {u, b(u)) jest argumentem minimum słabego (mocnego, absolutnego, właściwego lub nie, etc.) całki *If[u;x] danej wzorem (2.6.4) w przestrzeni

$$ {}^{**}_{\ n}C^{S}_{r}\,(\boldsymbol{x}^{\circ};\ u, b(u);\ {}^{o}\boldsymbol{x}(u),\ {}^{o}\boldsymbol{x}(b(u));\ g;\ h), $$

Ponad to, należy tu dodać oba warunki, które wspomnieliśmy wyżej po sformułowaniu samej Definicji 2.6.4.

2.7. Równania Eulera-Lagrange'a. Załóżmy dość dużo, na przykład, że $f \in C^3$ (można założyć znacznie mniej). Weźmy pod rozwagę układ dość dziwnych równań funkcyjnych (acz jesteśmy do nich przyzwyczajeni od tak dawna, tak, że ta ich dziwność uchodzi nam naogół z pola widzenia)

$$ (2.7.1) \qquad \boldsymbol{E}_i[f; x_1, \dots, x_n] = 0, \qquad i = 1, \dots, n, $$

∩r⌋7ip

$$ (2.7.2) \qquad \boldsymbol{E}_i[f; x_1, \dots, x_n](t) := \frac{d}{dt}\left[\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j}\right|_{\substack{x_r = x_r(t)\\ \dot{x}_s = \dot{x}_s(t)}}\right] - \left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\substack{x_r = x_r(t)\\ \dot{x}_s = \dot{x}_s(t)}}, $$

dla i = 1, ..., n.

Równania (2.7.1) nazywamy *równaniami Eulera-Lagra∩ge'a,* zaś operator ***E***j *lagrange'ianem.* Wbrew opiniom licznych studentów (dających się słyszeć nawet i na egzaminach), a zgodnie z obecnie powszechnie przyjętą definicją, nie są to równania (układy równań) różniczkowych zwyczajnych (ani tym bardziej cząstkowych). Bowiem na to, by stwierdzić, czy jakaś funkcja (czy też układ funkcji) jednej zmiennej jest rozwiązaniem układu równań różniczkowych, należy ją (je) zróżniczkować (odpowiednią ilość razy), poczym ją samą i jej pochodną (pochodne) wstawić do równania. A tu, w celu stwierdzenia czy jakaś funkcja (czy jakiś układ funkcji) jednej zmiennej jest rozwiązaniem równań (2.7.1), należy tę funkcję (te funkcje) raz zróżniczkować, podstawić do równania, a potym jeszcze wykonać najbardziej zewnętrzne różniczkowanie. Inna rzecz, że gdy choćby tylko $f \in C^2$, to układ równań (2.7.1) można banalnie sprowadzić do układu n równań różniczkowych 2 rzędu. Ale nie będzie to układ równań o postaci normalnej tylko układ równań uwikłanych - który, co gorzej, nie zawsze integralnie (a czasami nawet lokalnie) daje się rozwikłać do postaci normalnej. W związku z czvm. nie można do układu równań (2.7.1) bezpośrednio stosować twierdzeń o istnieniu rozwiązań (ponadto mogą być trudności związane z brakiem dostatecznej regularności równań, gdy HC^3). Poza wypadkami, gdy równania te dają się przekształcić (rozwikłać) do równań o postaci normalnej (daje się to dokonać - na przykład - przy spełnieniu pewnego dalszego warunku, a mianowicie nieznikania hesjanu funkcji *f* - wynikającego, na przykład, z założenia *silnego warunku Legendre'a,* patrz niżej n° 2.8). N.b. nie widziałem nigdzie porządnie i do końca przeprowadzonego rozumowania prowadzącego do dowodu istnienia rozwiązań układu (2.7.1) - nawet istnienia lokalnego (szczególnie bez założenia nie znikania hesjanu funkcji tworzącej). Jak zresztą wiadomo, mogą tu też występować zaskakujące podwyższania klasy regularności rozwiązań tych równań (dla całek regularnych - patrz niżej, zaś dla tak zwanych rozwiązań nieciągłych - patrz **[70]**, str. 29 - 51, lub **[83]**, str. 5 - 26).

Najczęściej równania te zapisuje się skrótowo, w zupełnie niepoprawnej postaci:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, k.$$

Na to by je zapisać krótko i równocześnie poprawnie potrzebne są jeszcze pewne symbole, dość niewygodne do wprowadzenia (ale bardzo użyteczne do poprawnego formułowania pewnych twierdzeń). Chodzi tu - między innymi - o operator (operator różniczkowania zupełnego) pozwalający na eleganckie, a równocześni krótkie zapisanie pochodnej zupełnej funkcji złożonych. W tym celu połóżmy

$$\boldsymbol{D}({}^{o}t; {}^{o}x_1, \ldots, {}^{o}x_k; t, x_1, \ldots, x_k, v_1, \ldots, v_k)\,[g({}^{o}t, {}^{o}x_1, \ldots, {}^{o}x_k)] :=$$

$$:= \frac{\partial g}{\partial t}(t, x_1, \ldots, x_k) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g}{\partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_k)\, v_j. \tag{2.7.3}$$

Ponadto, jeśli mamy 2k funkcji

$$x_i = x_i(t), \quad v_i = v_i(t), \qquad i = 1, \ldots, k,$$

to - jak zwykle - położymy

$$\boldsymbol{D}({}^{o}t; {}^{o}x_1, \ldots, {}^{o}x_k; j, x_1, \ldots, x_k, v_1, \ldots, v_k)\,[g({}^{o}t, {}^{o}x_1, \ldots, {}^{o}x_k)](t) :=$$

$$:= \boldsymbol{D}({}^{o}t; {}^{o}x_1, \ldots, {}^{o}x_k; t, x_1, \ldots x_k, v_1, \ldots, v_k)\,[g({}^{o}t, {}^{o}x_1, \ldots, {}^{o}x_k)]\Big|_{\substack{x_i = x_i(t) \\ v_j = v_j(t)}}.$$

W skrócie (ostatecznie, tak zdefiowane symbole są bardzo długie) można nisać nawet Dt ∩ C7vtelnik∩w choaovoh sie 7 hliζs7vmi własnościami te∩∩

operatora $\boldsymbol{D}$ (i jego uogólnieniami) zapoznać, odsyłam do mego podręcznika *Rachunku Wariacyjnego* **[82],** str. 32.

Te oznaczenia tu wprowadzone pozwalają nam w sposób elegantszy niż wzór (2.7.2) zdefinować operator Ej, a mianowicie

$$\boldsymbol{E}_j[f; x_1, \ldots, x_n](t) :=$$

$$:= \boldsymbol{D}(t; x_1, \ldots, x_k, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k; j x_1, \ldots, x_k, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k, \ddot{x}_1, \ldots, \ddot{x}_k)\left[\frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j}(t, x_1, \ldots, x_k, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k)\right] +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x_j}(j, x_1, \ldots, x_k, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_k).$$

Używając skrótowego zapisu możemy równania (2.7.1) zapisać w formie zarówno poprawnej jak i eleganckiej oraz nawet krótszej niż niezbyt poprawny klasyczny zapis równań Eulera-Lagrange'a, a mianowicie w postaci

(2.7.1a) $$\boldsymbol{D}_t \frac{\partial f}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0.$$

Definicja 2.7.1. Każde rozwiązanie układu równań Eulera-Lagrange'a (2.7.1) nazywamy *rozwiązaniem stacjonarnym* (lub *funkcją,* ewentualnie, *krzywą stacjonarną*) problemu ekstremalizacyjnego całki o funkcji tworzącej *f*.

Uwaga 2.7.1. Czasami (rzadko) mówi się o zdefiniowanych tutaj funkcjach stacjonarnych jako o funkcjach stacjonarnych *w sensie Lagra∩ge'a.* Stosujemy tę dłuższą nazwę, gdy musimy równocześnie stosować nieco inne (często stosowane dawniej), pojęcie funkcji stacjonarnej, a mianowicie *słaby* i *mocny element stacjonarny* (patrz niżej Definicje 3.7.2 oraz 3.7.4).

W sposób łatwy, ale dość długi i wymagający sporej ilości rachunków wykazuje się następujące twierdzenie

Twierdzenie 2.7.1. *Każdy argument ekstremum miejscowego (a więc tymbardziej każdy argument ekstremum nie tylko o charakterze miejscowym) funkcjonału (całki)* If *jest funkcją stacjonarną problemu o funkcji tworzącej f.*

Można tu wprowadzić pojęcia wariacji funkcji i wariacji funkcjonału. Ponieważ w XVIII i XIX wieku uwielbiano operować różniczkami, a te pojęcia są do nich podobnie (a przynajmniej wydawały się, że są one do nich podobne), więc też powyższą definicję i powyższe twierdzenie formułowano inaczej, a mianowicie funkcję ***x°*** dla której znikała wariacja funkcjonału nazywano ekstremalą. Poczym pokazywano, że tak zdefiniowana ekstremala spełnia układ równań Eulera-Lagrange'a (2.7.1) (zauważmy, że odwrotny wynik jest też jest prawdziwy), a więc jest krzywą stacjonarną (w naszym sensie). I na odwrót każda ekstemala (przy odpowiednich założeniach regularnościowych) jest krzywą stacjonarną (w naszym sensie). Skoro każda ekstremala jest krzywa stacjonarną i naodwrót, ale nie każda ekstremala jest argumentem ekstremum, więc nazwa ta, jako myląca, powinna być unikana. Historycznie rzecz biorąc nazwa ta powstała w czasach, kiedy (mylnie) uważano, że krzywe stacjonarne przynajmniej "naogół" są argumentami ekstremów.

Ponieważ dziś operowanie wariacjami wydaje się nam kłopotliwe, więc obecnie raczej nie stosuje się (przynajmniej eksplicite) tej drogi. Inna rzecz, że w nowoczesnej analizie funkcjonalnej dają się zdefiniować wariacje jako *różniczki* w *sensie Fŕecheta* (na przykład, w przestrzeni $_nC^\wedge(a;b)$), lub jako *różniczki* w *sensie Stolza,* ale nie wpływa to na zwiększenie ich użyteczności. Różniczka w sensie Fŕecheta jest pojęciem nieco mocniejszym niż kontyngens, ale słabszym niż różniczka w sensie Gateaux (patrz niżej n° 3.7).

Wariacja **Ólf[x; δx]** funkcjonału **l/[x]** ze względu na wariację **δx** funkcji (raczej układu funkcji) **x** (argumentu/argumentów tego funkcjonału) odpowiada pochodnej kierunkowej funkcji (wielu zmiennych) w danym kierunku (tutaj w kierunku **δx).** Z tym, że tak jak kierunek nie jest elementem przestrzeni n-wymiarowej lecz tylko elementem przestrzeni wektorów nad nią, tak tutaj wariacja funcji **δx** nie należy do rozpatrywanej przestrzeni w której zdefiniowany jest funkcjonał, lecz do nieco innej przestrzeni (na przykład, gdy funkcjonał lf jest zdefiniowany w $_nC^k$(a,bja- | , ...,a_n, b‰...,b_n), to wariacje są zdefiniowane w zbiorze $_nC^k$(a,b; 0,..., 0, 0,..., 0) - patrz niżej też n° 3.7).

Zauważmy, że równania Eulera-Lagrange'a pierwszy wyprowadził L. Euler (koło 1740 roku) przy pomocy swojej metody łamanych (o tyle było to wyprowadzenie nie poprawne, że konieczne przejścia graniczne nie były wystarczająco - przynajmniej z naszego punktu widzenia - uzasadniane). Metodę wariacji (i wariacje) wprowadził nieco później J.L. de Lag rangę. Metoda łamanych Eulera (w przeciwieństwie do metody wariacji Lagrange'a) tylko w najprostszych wypadkach prowadziła do znalezienia analitycznych rozwiązań zagadnień wariacyjnych i dlatego została w rachunku wariacyjnym szybko zarzucona. Niemniej jednak, do niedawna stosowano ją powszechnie do dowodu twierdzenia Peany o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych o postaci normalnej. Dziś przy słabym założeniu (tylko założeniu ciągłości prawej strony takich równań), korzysta się tu raczej z twierdzenia o statym punkcie Schaudera.

2.8. Warunek Legendre'a. Są rozmaite postacie *warunku Legendre'a.* Omówimy tylko najprostsze, gdyż już one będą nam wystarczały. Przyjmijmy dwie definicje

DEFINICJA 2.8.1. Mówimy, że problem ekstremalizacji całki (2.6.1) o funkcji tworzącej *f* spełnia *silniejszy warunek Zermeli,* jeśli odpowiadająca funkcji tworzącej *f* forma hesjanowa *w* zmiennych $z_1,...,z_n$

$$w(f; z_1, ..., z_n; t, x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_n) :=$$

$$:= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_n)\, z_i z_j$$

jest określona dodatnio dla wszystkich układów

$$(t, x_1, ..., x_n, v_1, ..., v_n) \in Q_n,$$

gdzie zbiór Q_n został zdefiniowany ma początku n° 2.6 (czasami mówi się też, że problem ekstremalizacji całki (2.6.1) o funkcji tworzącej *f* spełnia *silniejszy warunek Legeпdre'a).*

DEFINICJA2.8.2. Mówimy, że układ funkcji $[x_1,..., x_n]$ *spełnia silniejszy warunek Legendre'a,* jeśli forma wi zmiennych $z_1,..., z_n$ (odpowiadająca funkcji tworzącej *f* oraz układowi funkcji $[x_1,....,x_n]$)

$$w_1(z_1, ..., z_n; t) := w(f; z_1, ..., z_n; t, x_1(t), ..., x_n(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t))$$

jest określona dla wszystkich t e (a,b).

Oczywiście, jeśli jest spełniony silniejszy warunek Zermeli, to każdy układ funkcji (o odpowiedniej dziedzinie) spełnia silniejszy warunek Legendre'a

Ze względu na nasze założenie *f* e C^3, mamy ciągłość formy wi względem te (a,b) (gdzie (a,b) jest przedziałem domkniętym o skończonej długości), a więc gdy forma *w*↑ jest określona i, choćby dla jednego t, jest określona dodatnio (ujemnie), to jest określona dodatnio (ujemnie) dla wszystkich t e (a,b).

Przyjmijmy

DEFINICJA 2.8.3. Mówimy, że problem ekstremalizacji całki (2.6.1) o funkcji tworzącej *f* spełnia *silniejszy warunek hesjanowy,* jeśli hesjan funkcji tworzącej *f* utworzony względem zmiennych vı,...,v_n

$$det \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n) \right|_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$$

dla wszystkich te(a,b) i dla wszystkicl h $x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n$.

Podobnie przyjmiemy

DEFINICJA 2.8.4. Mówimy, że układ funkcji [x- | ,..., x_n] *silniejszy warunek hesjanowy,* jeśli

$$det \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)) \right|_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$$

dla wszystkich t ∈ {a,b}.

Warunek hesjanowy dla problemu ekstremalizacji (dla układu funkcji) jest warunkiem nieco słabszym niż silniejszy warunek Zermeli (silniejszy warunek Legendre'a).

W rachunku wariacyjnym wprowadza się też słabszy warunek Legendre'a, słabszy warunek hesjanowy, etc. Ponieważ warunki te są warunkami koniecznymi istnienia ekstremów, więc nie są one tu dla nas specjalnie interesujące.

Natomiast ważną dla nas definicją będzie

DEFINICJA 2.8.5. Problem wariacyjny jest *regularny,* jeśli jego funkcja tworząca *f* e C^3 oraz spełnia silniejszy warunek Zermeli.

DEFINICJA 2.8.6. Stacjonarny układ funkcji (x- | ,..., x_n) jest *regularny,* jeśli są one klasy C^2 oraz spełniają silniejszy warunek Legendre'a.

Wykazuje się (wspomnieliśmy już o tym w n° 2.6), że jeśli krzywa stacjonarna klasy C^1 jest regularna, to jest też klasy O^2 (patrz wyżej cytowane jeszcze XIX wieczne prace P.D.G. Du Bois-Reymonda oraz już XX wieczne D. H i l b e r ta). A więc krzywe stacjonarne regularnego problemu są klasy C^2, co znaczy, że są one układem regularnym. Zauważmy, że na to by układ [x- │,..., x∏] spełniał układ równań Eulera-Lagrange'a, to sam nie musi być aż klasy C^2.

Wykazuje się dwa ważne twierdzenia

TWIERDZENIE 2.8.1. *Regularna krzywa stacjonarna całki* If *jest argumentem jej miejscowego słabego ekstremum; jest to minimum (maksimum) gdy forma* wi *jest określona dodatnio (ujemnie).*

TWIERDZENIE 2.8.2. *Gdy problem ekstremalizacji całki* **I/** *jest regularny, to wszystkie jego funkcje stacjonarne są argumentami jego miejscowych silnych ekstremów.*

2.9. Dalsze uwagi. Ostatnie twierdzenie formułuje się tradycyjnie w następujący sposób :

TWIERDZENIE 2.8.2a. *Jeśli różnica* b - a *jest dostatecznie mała, to krzywa stacjonarna* (tradycyjnie : *ekstremala) problemu regularnego jest argumentem jego silnego ekstremum* (a więc tymbardziej *słabego ekstremum).*

Niestety, po pierwsze, te tradycyjne sformułowanie nie używa kwatyfikatorów i - dlatego - bez odpowiedniego komentarza jest niezrozumiałe (czy "istnieje" taka różnica, a jeśli tak, to jaka ?). A pod drugie, jeśli już zrozumiemy poprawnie tę tradycyjną wypowiedź, to zbadanie kiedy ta różnica jest dostatecznie mała (to znaczy jaka ma być - dla konkretnego problemu i ustalonego a - liczba h, taka że jeśli jest b - a < h, to mamy już ekstremum - zwykłe, nie tylko miejscowe) jest - na ogół - bardzo trudne do efektywnego wykonania. Regularne krzywe stacjonarne całki If często są nawet argumentami jej miejscowego silnego minimum (lub maksimum), ale zbadanie warunków, przy spełnieniu których, słabe ekstremum jest też *silnym ekstremym* jest bardzo kłopotliwe. Natomiast metodami rachunku wariacyjnego nie da się bezpośrednio dojść do wyznaczania ekstremów absolutnych (nawet miejscowych), acz należy ich szukać wśród ekstremów lokalnych.

A dlaczego sprawdzenie kiedy mamy do czynienia z ekstremami nie tylko miejscowymi jest takie trudne ? Bowiem musi - dla słabego ekstremum - być wtedy jeszcze spełniony *warunek Jacobiego.* Dla stwierdzenia tego faktu trzeba znaleźć pewne szczególne własności rozwiązań pewnego skomplikowanego równania różniczkowego, tak zwanego *równania Jacobiego.* Równanie to, nie tylko jest trudne do zbudowania w konkretnych przypadkach, ale nawet jeśli uda się je zbudować, to mimo, iż jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, liniowym, drugiego rzędu, to tylko wyjątkowo daje się rozwiązać efektywnie (szczególnie przy pomocy funkcji elementarnych). Inna rzecz, że właśnie fakt, że silniejszy warunek Legendre'a wystarcza dla tego by funkcja stacjonarna była ekstremum miejscowym opiera się na wykorzystaniu własności właśnie tego równania Jacobiego. A dla silnych ekstremów musi być dodatkowo spełniony jeszcze jeden warunek : *warunek Weierstrassa,* też bardzo trudny do efektywnego sprawdzenia (wymaga on rozwiązywania pewnych równań różniczkowych i to nie wystarcza nam znalezienie jednego ich rozwiaząnia, ale musimy znaleźć ich całą, odpowiednią, rodzinę), lub też - znacznie łatwiejszy do sprawdzenia, ale zato znacznie mocniejszy - wspomniany już wyżej - *warunek Zermeli.*

Przypuśćmy, że mamy do czynienia z jakimś argumentem ekstremum miejscowego **°*x*** **-** dla ustalenia uwagi, niech będzie to miejscowe minimum w przestrzeni $_nC$ ^(a,b; **c,d)** (a więc minimum słabe) całki (2.6.1). Weźmy dowolne a ≤ u < b i rozpatrzmy funkcję b = b(u) występującą w Definicji 2.6.4. Jak pokazuje Przykład 2.6.1 może się zdarzyć, że v(u) := Sup [u + b(u)] < b (rozpatrujeny tu kres górny dla wszystkich dopuszczalnych tu, dodatnich funkcji *b*). Wtedy liczbę v(u) nazywamy odległością ogniskową (ze względu na całkę (2.6.1)) liczby (punktu) u (natomiast punkt $^0\boldsymbol{x}$ (v(u)) nazywamy ogniskiem sprzężonym z punktem **°*x*** (u) krzywej **°x).** Wtedy też dla u < v < v(u) w przestrzeni

$$_nC^2_1(u, v; {}^0\boldsymbol{x}(u), {}^0\boldsymbol{x}(v))$$

nasza całka będzie miała minimum (słabe) - zwykłe minimum ! nie tylko minimum miejscowe ! Natomiast gdy v > u + Z?(u), czyli, gdy górna granica całkowania będzie większa od odległości ogniskowej, to nasza całka nie będzie miała w **°*x*** ekstremum (a więc nie będzie to ani minimum, ani maksimum, nawet lokalne). Przykładem takiej sytuacji jest już cytowany Przykład 2.6.1, gdzie leżący na łuku antypoda jego początku jest ogniskami sprzężonymi z danym punktem [19].

Rozdział III- PODSTAWY MECHANIKI

Nieprawda może się doskonale zmieścić w paru zdaniach, natomiast, by ją sprostować nie wystarczy nieraz i paru stron.

Tadeusz Żeleński (Boy)

3.1. Podstawy mechaniki lagrange'owskiej. Przypuśćmy, że mamy dany układ n punktów przestrzeni R3 o współrzędnych (w symbolice Pawła S tä c k l a) w jakimś (ustalonym) ortonormalnym układzie odniesienia U

$$P_1 = (x_1, x_2, x_3)_U, \quad P_2 = (x_4, x_5, x_6)_U, \quad \ldots, \quad P_n = (x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n})_U$$

Układy 3n liczb (×ı, ...,x3n)u w naturalny sposób tworzą pewną przestrzeń **Rg** := **R**$_3$**×** **...x** **R**$_3$ (n krotny iloczyn kartezjański przestrzeni kartezjańskich **R3).** Zauważmy, ża ta przestrzeń **R§** *(przestrzeń Stäckla)* wprawdzie może być traktowana jako pewnego typu przestrzeń kartezjańska, ale jest różna od przestrzeni **R3**$_{r1}$ (ma bowiem inne - ostrzejsze - reguły transformacyjne), czego zapis jej współrzędnych w postaci Stäckla (x- | ,... ,x3$_{rl}$)∪ nie uwidacznia. Zakładamy, że położenia tych punktów są funkcjami pewnego parametru t, zwanego *czasem*x | = x | (t), i =.,1,3n; funkcje te mają być conajmniej klasy C^2. Ich prędkości [ẋ- | (t), ...,ẋ3n(t)]u należą wtedy do przestrzeń wektorów *Rθ nad przestrzenia **R** 3. Oczywiście wtedy v | = ẋ | (t), i = 1,..., 3n jest jednoparametrowym polem wektorowym.

Zakładamy, iż każdy z punktów Pj może przyjmować dowolne położenia w **R3** (układ swobodny) lub też, że układ punktów (t; x- | ,..., **X3**$_{r1}$**)** musi pozostawać na pewnej rozmaitości *14/ **C** (a,b) × **R** 3 (układ skrępowany więzami). Zresztą w tym ostatnim wypadku, raczej należałoby mówić, że w momencie t układ punktów (x_1,..., x3_n) ma pozostawać na odpowiedniej rozmaitości (4/(t) **C** **R§**, gdzie 14⁄= (*V*(t) tworzą jednoparametrową rodzinę rozmaitości) danej uwikłanymi wzorami

$$(3.1.1) \qquad g_j(t, x_1, \ldots, x_{3n}) = 0, \qquad j = 1,2, \ldots, 3n-k,$$

gdzie funkcje g_j są klasy C^2 (przyczym $0 < k \leq 3n$, dla $k = 3n$ mamy brak warunków (3.1.1)) oraz rząd macierzy jakobianowej ma być dla wszystkich ($t; x_1, \ldots, x_{3n}$) równy

(3.1.2) $$\Re\left[\frac{\partial g_j}{\partial x_i}(t, x_1, \ldots, x_{3n})\right]_{\substack{j=1,\ldots,3n-k\\ i=1,\ldots,3n}} = 3n-k$$

czyli ma być dla wyszystkich (t; ×ı,..., X3n) maksymalny.

Znaczy to, że funkcje x | =xj(t)„ i = 1, 3n podające położenia punktów Pi,..., P_n muszą spełniać warunki

(3.1.3) $g_j \circ (j; x_1, \ldots, x_{3n}) = 0,$ $\quad j = 1, \ldots, 3n-k,$

to jest że muszą spełniać warunki

(3.1.3a) $g_j(t, x_1(t), \ldots, x_{3n}(t)) = 0,$ $\quad j = 1, \ldots, 3n-k$

dla wszystkich t należących do pewnego przedziału.

Definicja 3.1.1. Mówimy wtedy o *skrępowaniu układu więzami holonomicznymi (uwikłanymi) regularnymi* o k *stopniach swobody.* Dopuszczamy tu wypadek k = 3n, to jest brak warunków (3.1.1) - znaczy to, że układ swobodny jest też przykładem układu holonomicznego regularnego (o 3n stopniach swobody).

Definicja 3.1.2. Jeśli funkcje g⅛ nie zależą w sposób wyraźny od t, to jeśli mamy dane więzy

(3.1.4) $g_j(x_1, \ldots, x_{3n}) = 0,$ $\quad j = 1, 2, \ldots, 3n-k,$

to mówimy, że więzy te są *skleronomiczne.* Więzy równoważne więzom (3.1.4) też nazywamy więzymi skleromicznymi.

Mówimy wtedy też, żer więzy (3.1.1) są reonomiczne.

Skoro punkty P; mają pozostawać na rozmaitości (3.1.1) to musi być (3.1.3a) dla wszystkich t z jakiegoś przedziału. O takich ruchach mówimy, iż są *zgodne z więzami.*

Uwaga 3.1.1. Mamy tu trzy pojęcia : 1° układ funkcji *g*↑,..., g3„-k, 2° układ warunków "geometrycznych" (3.1.1) oraz 3° układ warunków "kinematycznych" (3.1.3). Różni autorzy nazywają różne z tych warunków więzami (często nawet zamiennie).

Przypuśćmy, że na te punkty działają siły - są to wektory przestrzeni *R3, zbudowanej nad przestrzenią R3 (zapisane też w symbolice P. S t a c k I'a):

$$F_1 = [F_1, F_2, F_3]_U, \quad F_2 = [F_4, F_5, F_6]_U, \quad ..., \quad F_n = [F_{3n-2}, F_{3n-1}, F_{3n}]_U,$$

gdzie wyrażenia Fj, i = 1, ... 3n mogą być funkcjami wszystkiego możliwego. Wyrażenie [F- | ,..., F3$_{r1}$] ∪ jest wektorem przestrzeni $*R^n_3$. Zakładamy *dodatkowo,* że są one tylko funkcjami tego parametru t (czasu), położeń Xj oraz prędkości v |', to znaczy iż zakładamy iż istnieją funkcje fj e C^1 takie, że

$$F_i = f_i(t, x_1, ..., x_{3n}, v_1, ..., v_{3n}), \qquad i = 1, ..., 3n.$$

DEFINICJA 3.1.3. Mówimy, że siła jest *pozycyjna,* jeśli zależy wyłącznie od od zmiennych "przestrzennych" x- | , ..., x3$_n$. Mamy wtedy h = *f* {×↑,..., x3$_r$,), dla j= 1,...,3n.

DEFINICJA 3.1.4. Mówimy, że siła pozycyjna Fj (a więc siła postaci Fj = A,(x 1,..., X3∏)) jest potencjalna, jeśli istnieje funkcja C^1 3^1 *u* : R^n_3 →R taka, że

$$f_i(x_1, ..., x_{3n}) = \frac{\partial^1 u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{3n}), \qquad j = 1, ..., 3n.$$

Funkcję ^{c}*u* nazywamy *potencjałem układu* (lub *potencjałem sił układu) we współrzędnych kartezjańskich* (ewentualnie *potencjałem kartezjańskim).*

Czasem wprowadza sią jeszcze jedną wielkość definicją

DEFINICJA 3.1.5. Funkcję

$$\underline{u}(t) := {}^1u(x_1(t), ..., x_{3n}(t))$$

nazywamy *energią potencjalną ruchu* danego układu w momencie t.

3.2. Dynamika lagrange'owska. Wszystkie te pojęcia stają się elementami teorii (to jest mechaniki teoretycznej) dopiero po wprowadzeniu pewnika :

POSTULAT 3.2.1. (Newtona - Lagrange'a) *Istnieją takie (ortonormalne) układy odniesienia* U *przestrzeni* R3 *zwane układami inercyjnymi, istnieje taka parametryzacja* t *zwana czasem inercyjnym, istnieje* 3n *stałych* m⅛, j = 1,..., 3n, *takich, że*

$$m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{3i}, \qquad i = 1, ..., n$$

zwanych masami punktów?} oraz istnieje wektor [R- | ,..., R3$_n$] ∪ *przestrzeni* $*R^n_3$ *zwany reakcją więzów (określony dla wszystkich punktów rozmaitości* W(t) *danej wzorem* (3.1.1)), *taki, że tor układu (to znaczy układ funkcji* x | = x |˙(t), i = 1,..., 3n), *zwany ruchem rzeczywistym spełni w każdym takim układzie odniesienia* U *równania*

$$(3.2.1) \qquad m_{(i)}\ddot{x}_i = F_i + R_i, \qquad i = 1, ..., 3n$$

(wskaźnik w nawiasie oznacza brak sumowania) *oraz związki* (3.1.3).

Jeśli mamy układ holonomiczny regularny o k stopniach swobody, o działających siłach pozycyjnych, to układ (3.2.1) przyjmie postać

$$m_{(i)}\ddot{x}_i = f_i(x_1, ..., x_{3n}) + R_i, \qquad i = 1, ..., 3n.$$

Nie formułujemy naszego postulatu i wynikających zeń twierdzeń, dla więzów ogólniejszych (na przykład, dla anholonomicznych) czy też ogólniejszych sił (na przykład, opisujących histerezę). Odwrotnie, jeszcze bardziej, zmniejszymy ogólność tych równań. W tym celu przyjmijmy definicję

Definicja 3.2.1. Mówimy, że realizacja więzów (3.1.1) holonomicznych regularnych jest *gładka,* jeśli dla każdego t e (a,b) wektor [R- |, ..., R3$_{r1}$]u jest prostopadły do rozmaitości *W*(t) w każdym jej punkcie, a ponadto, jeśli istnieją funkcje

$$r_i = r_i(t, x_1, ..., x_{3n}, z_1, ..., z_{3n}), \qquad i = 1, ..., 3n$$

zdefinowane i klasy C^2 dla wszystkich t z jakiegoś przedziału, dla wszystkich punktów (×- | ,..., X3) ∪ ∈ *W*(t) oraz dla wszystkich wektorów [z- | ,..., Z3$_n$] ∪ stycznych do IA<t), takie, że dla każdego ruchu x |˙ = x⅛ (t), i = 1,..., 3n ruchu rzeczywistego (a więc zgodnego z więzami) i dla każdego t (z odpowiedniego przedziału) mamy

$$R_i = r_i(t, x_1(t), ..., x_{3n}(t), \dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_{3n}(t)), \qquad i = 1, ..., 3n.$$

Uwaga 3.2.1. A więc dla układów skleronomicznych jeśli realizacja jest gładka , to wektor [R- |,..., R3n] ∪ ma być prostopadły do rozmaitości *W* C **R**$_3^n$ (której kształt nie zależy tu od parametru t) w każdym jej punkcie. Oczywiście wektory [R1,..., R3n] ∪ przestrzeni *R¾ są zdefiniowane tylko na tej rozmaitości.

Uwaga 3.2.2. Nazwa "gładka" nie jest bardzo dobra, ale inne w tym miejscu stosowane nazwy (n.p. "więzy idealne" lub "beztarciowe") są jeszcze ∩∩rs7fi.

UWAGA 3.2.3. W mojej pracy **[81],** w tej definicji (str. 129 - stosuję w niej zresztą wyżej skrytykowany termin : „więzy beztarciowe") są błędy korektorskie (brak wielu kropek nad literami).

UWAGA 3.2.4. Nie omawiamy tutaj (brak miejsca ! patrz **[78]** i **[80])** problemu równoważności więzów zapisanych różnymi wzorami analitycznymi.

W każdym ustalonym momencie t e {a,b) w przestrzeni R^n_g wszystkie wektory prostopadłe do IAZ(w każdym punkcie tej rozmaitości) mają współrzędne

$$s_i = \sum_{j=1}^{3n-k} ł_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(t, x_1, ..., x_{3n}),$$

gdzie łj, i = 1,., 3n-k są dowolnymi (dla każdego ustalonego punktu rozmaitości 1A/ i dla każdego ustalonego momentu t) stałymi - można je więc traktować jako funkcje zmiennych t, x- | ,... ,x3$_{r1}$, czyli, że mamy łj = */ | (t, x1,..., X3$_{r1}$), a więc dla każdego ruchu x | = x⅛ (t) zgodnego z więzami skleronomicznymi mamy

$$R_i = \sum_{j=1}^{3n-k} ł_j(t) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(t, x_1(t), ..., x_{3n}(t)), \qquad i = 1, ..., 3n,$$

gdzie $ł_i = ł_j(t) := *ł_j\,(t, x_1(t), ..., x_{3n}(t))$, są funkcjami zależnymi od rozpatrywanego ruchu $x_i = x_i(t)$, i = 1, ..., 3n.

Wprowadźmy jeszcze jedną definicję

DEFINICJA 3.2.2. Układy punktów skrępowane więzami holonomicznymi regularnymi o k stopniach swobody, skleronomicznymi, o realizacji gładkiej i poruszające się pod wpływem pozycyjnych sił potencjalnych nazywamy układami *ortonomicznymi.*

Z powyższych rozważań wynika natychmiast

TWIERDZENIE 3.2.1. *Dla każdegu ruchu* x_i = *x,* (t), i = 1,..., 3n *układu ortonomicznego skrępowanego więzami* (3.1.4) /' *poruszającego się pod wpływem sił o potencjale* ¹u *istnieją funkcje* łj = /j (t), j = 1,..., 3n-k, *takie iż układ* 6n-k *funkcji* x↑,...,x3$_n$,/↑,..., b_n-k *spełnia układ* 3n *równań*

$$(3.2.2) \qquad m_{(i)}\, \ddot{x}_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{3n}) + \sum_{j=1}^{3n-k} ł_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x_1, ..., x_{3n}), \qquad i = 1, ..., 3n,$$

zwany układem równań Lagra∩ge'a \-go rodzaju oraz układ równań (3.1.4).

Warunki (3.1.1) przy założeniu (3.1.2) dają się - przynajmniej lokalnie - rozwikłać. To znaczy, że istnieje układ funkcji C^2 3 *h* : D → R, i = 1,..., 3n (gdzie obszar D ⊂ R × R | <), takich, że

$$(3.2.3) \qquad g_j(t, h_1(t, q_1, ..., q_k), ..., h_{3n}(t, q_1, ..., q_k)) = 0, \qquad j = 1, ..., 3n-k$$

dla wszystkich układów (t, q- | , ...,qκ) e D. Ograniczymy się w dalszym ciągu do więzów *skleronomicznych* (3.1.4), to jest takich, że funkcje *g* | nie zależą od zmiennej (parametru) t. Wtedy istnieją układy funkcji *h* też niezależnych od zmiennej t i spełniające warunek (3.2.3), to jest istnieć będą funkcje

$$(3.2.4) \qquad x_i = h_i(q_1, ..., q_k), \qquad i = 1, ..., 3n$$

- w dalszym ciągu będziemy zajmować się tylko takimi układami (więzy parametryczne skleronomiczne). Można je też uważać za analitycznie inaczej zapisane więzy (tak zwane *więzy parametryczne).*

Jeśli więzy są holonomiczne regularne, to wtedy funkcje /7- | ,...,/)3∏ mogą być takie, że

$$\Re\left[\frac{\partial h_i}{\partial q_j}(q_1, ..., q_k)\right]_{\substack{i=1,...,3n\\ j=1,...,k}} = k,$$

to jest, że ich jakobian ma rząd maksymalny, co w dalszym ciągu będziemy stale zakładać (porównaj warunek (3.1.2)).

UWAGA 3.2.5. Oznaczając t = q_0 można nawet w wypadkach nie skleronomicznych *(reonomicznych),* uzyskać pewne uproszczenia licznych wzorów, ale asymetrii tej zmiennej q_0 w stosunku do innych zmiennych q | i tak nie da się w sensowny sposób uniknąć.

Dla więzów parametrycznych (3.2.4) istnieją funkcje $C^2 \ni q_j : \langle c,d\rangle \to R$, j = 1,..., k, takie, że

$$x_i(t) = h_i(q_1(t), ..., q_k(t)), \qquad i = 1, ..., 3n$$

dla wszystkich t należących do pewnego przedziału (być może zależnego od rozpatrywanego układu funkcji q |).

Układ funkcji q = q(t), j = 1, ..., 3n będziemy nazywali *ruchem we współrzędnych Lagra∩ge'a,* zaś zmienne q- | ,...,q | < *zmiennymi Lagrange'a.* Przestrzeń tych funkcji z metryką typu C_r, oznaczymy jak zwykle | <C r 2 (c,d). Jθśli funkcje *q↑,..., q⅛* mają spełniać jakiś dodatkowy warunek

$$g \circ (q_1, \ldots, q_k) = 0,$$

(gdzie O jest funkcją stałą, tożsamościowo równą liczbie 0, to jest taką, że mamy 0(t) = 0 dla wszystkich t), czyli, że ma być spełniona tożsamość

$$h(q_1(t), \ldots, q_k(t)) = 0$$

w jakimś przedziale zmiennej t, to ich zbiór, będący podzbiorem przestrzeni $_kC^2_r(c,d)$, oznaczymy, jak zwykle, przez $_RC^2_r(c,d; g)$.

Na to by poprawnie formułować następując rozważania muszę wprowadzić parę dość skomplikowanych oznaczeń (w niezbyt uczciwy sposób autorzy podręczników starają się bez nich obejść). Wprowadźmy więc funkcje

$$(3.2.5) \qquad {}^1h_i(q_1, \ldots, q_k; r_1, \ldots, r_k) := \sum_{a=1}^{k} \frac{\partial h_i}{\partial q_a}(q_1, \ldots, q_k)\, r_a, \qquad i = 1, \ldots, 3n$$

oraz

$$(3.2.6) \qquad {}^2h_i(q_1, \ldots, q_k; r_1, \ldots, r_k; s_1, \ldots, s_k) := \sum_{a=1}^{k} \frac{\partial h_i}{\partial q_a}(q_1, \ldots, q_k)\, s_a \; + \; \sum_{a=1}^{k} \sum_{b=1}^{k} \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_a \partial q_b}(q_1, \ldots, q_k)\, r_a r_b, \qquad i = 1, \ldots, 3n.$$

Funkcje te są wprowadzone, oczywiście, na to by mieć związki

$$(3.2.7) \qquad \dot{x}_i(t) = {}^1h_i(q_1(t), \ldots, q_k(t); \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_k(t)), \qquad i = 1, \ldots, 3n,$$

$$(3.2.8) \qquad \ddot{x}_i(t) = {}^2h_i(q_1(t), \ldots, q_k(t); \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_k(t); \ddot{q}_1(t), \ldots, \ddot{q}_k(t)), \qquad i = 1, \ldots, 3n.$$

Dla skrótu - jak już zauważyliśmy - można operator różniczkowania zupełnego (wprowadzony wzorem (2.7.3)) zapisywać też jako $\boldsymbol{D}\uparrow$. Mając do dyspozycji ten operator, można wzór (3.2.7) definiujący funkcje ^1h_i zapisać w sposób bardziej przejrzysty i intuicyjny jako

$${}^1h_i(q_1, \ldots, q_k; r_1, \ldots, r_k) := \boldsymbol{D}_t(^0t; {}^0x_1, \ldots, {}^0x_k; t, q_1, \ldots, q_k, r_1, \ldots, r_k)\,[h_i(^0x_1, \ldots, {}^0x_k)],$$

skąd wzór (3.2.7) daje się zapisać krótko jako

$$(3.2.7a) \qquad x_i = \boldsymbol{D}_t(^0t; {}^0x_1, \ldots, {}^0x_k; j, q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k)\,[h_i(^0x_1, \ldots, {}^0x_k)].$$

Zauważmy, iż tutaj funkcje *h* są niezależne od zmiennej t (czasu).

Możnaby podobnie wprowadzić operator drugiego różniczkowania zupełnego *D[*^{2} - definiując go albo bezpośrednio (wzorem analogicznym do wzoru (2.7.3)), albo jako iterację dwóch operatorów Dt, a mianowicie jako Dt^2 *g* .= *D{* (Dt *g*)■ Można wtedy zapisać wzór (3.2.8) na drugą pochodną x ˙˙ w postaci podobnej do wzoru (3.2.7a) - szczegóły wykonania tego można pozostawić Czytelnikowi (patrz też **[82],** str. 127 - 128).

Połóżmy jeszcze

$$a_{ij}(q_1, ..., q_k) := \sum_{a=1}^{3n} m_a \frac{\partial h_a}{\partial q_i}(q_1, ..., q_k) \cdot \frac{\partial h_a}{\partial q_j}(q_1, ..., q_k), \qquad i,j = 1, ..., k$$

oraz

$$t(q_1, ..., q_k; r_1, ..., r_k) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(q_1, ..., q_k)\, r_i\, r_j$$

(nie ma obawy o pomylenie funkcji *t* z oznaczeniem czasu t, gdyż czas nie jest nigdy zapisywany jako kursywa, zaś funkcja *t* jest zapisywana przy jej pomocy zawsze - chcieliśmy tutaj jednak zachować choćby aluzję do tradycyjnego oznaczenia *T).*

UWAGA 3.2.6. Więzy parametryczne układów mechanicznych nie prowadzą (bezpośrednio) do parametrycznych zagadnień wariacyjnych. A więc wariacyjne zagadnienia parametryczne są czymś całkiem innym niż mechanika lagrange'owska dla więzów parametrycznych.

UWAGA 3.2.7. Zauważmy, że istnieją też i inne typy więzów niż rozpatrywane tutaj więzy holonomiczne regularne. Na przykład, ważną klasą więzów, są *więzy anholonomiczne,* to jest takie, że poza warunkami (3.2.4) spełnione są dodatkowo warunki

$$(3.2.9) \qquad {}^1g_j(q_1, ..., q_k; r_1, ..., r_k) = 0, \qquad j = 1,...,p$$

(gdzie 0 < p < k), lub reonomiczne warunki ^{1} gj(t, q- | ,..., q | $_{\varsigma}$ j r- | ,..., r | <) = 0, gdzie j = 1,...,p, wtedy funkcje qj = qr,(t), i = 1,...k nie są (wjakimś sensie) dowolne, lecz, że muszą spełniać warunki (skleronomiczne)

$$(3.2.10) \qquad {}^1g_j(q_1, ..., q_k, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_k) = 0, \qquad j = 1,...,k_1$$

przyczym warunki (3.2.4) razem z tymi warunkami (3.2.10) nie są równoważne jakimś więzom holonomicznym typu warunków (3.2.4), ale o mniejszej ilości zmiennych qµ Szczegóły (i doprecyzowanie pojęcia równoważności więzów) czytelnik może znaleźć w moich pracach [78] i [80] oraz [77]. Teoria układów anholonomicznych jest wyraźnie różna od teorii układów holomicznych. Są jeszcze i inne typy układów. A ponadto mogą być różne ich realizacje, nie tylko gładkie. Na przykład możliwe są realizacje regulujące (występują one w układach z serwomechanizmami), z histerezą (prowadzą one do równań różniczkowych z opóźnionym argumentem), z tarciem i jeszcze różne dalsze ich typy-

3.3. Energia i kinecjał. Wyrażenie

(3.3.1) $$ {}^1e\,(v_1, \ldots, v_{3n}) := \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{3n} m_a (v_a)^2 $$

nazywamy *kinecjałem układu we współrzędnych karłezjańskich.* Natomiast, po podstawieniu do kinecjału prędkości otrzymamy energię kinetyczna układu (nazwa *kinecjał* jest wprowadzona ze względu na analogie *energia potencjalna -potecjał* versus *energia kinetyczna -kinecjał)*

$$ e(t) := {}^1e\,(\dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_{3n}(t)) $$

(te oznaczenie *e* jest oczywistą aluzją do klasycznego symbolu *E).*

Łatwo można sprawdzić, że

$$ {}^1e({}^1h^1(q_1, \ldots, q_k; r_1, \ldots, r_k), \ldots, {}^1h_{3n}(q_1, \ldots, q_k; r_1, \ldots, r_k)) = $$

(3.3.2) $$ = t\,(q_1, \ldots, q_k; r_1, \ldots, r_k) $$

- wynika stąd, że funkcja *t,* zwana kinecjałem we współrzędnych Lagrange'a, jest (dla układów skleronomicznych) formą kwadratową określoną dodatnio dla wszystkich wartości (qi,... ,q | <) e D.

Mamy też

$$ e(t) = t\,(q_1(t), \ldots, q_k(t); \dot{q}_1(t), \ldots, \dot{q}_k(t)). $$

Wprowadźmy jeszcze *potencjał (układu czyli sił układu) we współrzędnych Lagra∩ge'a* przy pomocy wzoru

$$ u(q_1, \ldots, q_k) := {}^1u\,(h_1(q_1, \ldots, q_k), \ldots, h_{3n}(q_1, \ldots, q_k)) $$

- czasem mówimy o *potencjale lagrangeówskim.*

Oczywiście mamy tutaj też

$$ u(t) = u(q_1(t), \ldots, q_k(t)) $$

Funkcją Lagranпge'a układu nazywamy funkcję

$$l(q_1, ..., q_k; r_1, ..., r_k) := t(q_1, ..., q_k; r_1, ..., r_k) - u(q_1, ..., q_k).$$

Mamy

$$\frac{\partial^2 l}{\partial r_i \partial r_j}(q_1, ..., q_k; r_1, ..., r_k) = a_{ij}(q_1, ..., q_k) \qquad \text{dla} \qquad i,j, = 1, ..., k.$$

Wynika stąd natychmiast, że formy hesjanowe zarówno kinecjału t jak i funkcji Lagrange'a /, mają postać

$$w(q_1, ..., q_k; r_1, ..., r_k) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(q_1, ..., q_k)\, r_i r_j,$$

a więc - jak to wynika ze wzorów (3.3.1) oraz (3.3.2) - są one formami określonymi dodatnio.

Przy założeniu gładkości więzów, całkowicie elementarnymi, ale bardzo długiemi i żmudnymi rachunkami (na dość szybkim wykładzie zajmują one - naogół - koło dwóch godzin wykładowych), po podstawieniu do równań Lagrange'a 1-go rodzaju (3.2.2) nowych funkcji q_i otrzymujemy równania (z których zniknęły mnożniki Lagrange'a /j):

$$(3.3.3) \qquad E_i[l; q_1, ..., q_k] = 0, \qquad i = 1, ..., k$$

gdzie operatory ***E*** j są zdefiniowane wzorem (2.7.2), czyli, że mamy

TWIERDZENIE 3.3.1. *Dla układów ortonomicznych ruch układu we współrzędnych Lagrange'a* (g√t), ..., g | <(t)) *spełnia równania* (3.3.3), *zwane równaniami Lagrange'a W-go rodzaju i drugiej postaci.*

UWAGA 3.3.1. Równaniem Lagrange'a 2-go rodzaju i pierwszej postaci nazywamy równania ruchu układów ogólniejszych niż układy ortonomiczne (o siłach nie koniecznie potencjalnych). W równaniach tych po prawej stronie mamy lagrange'iany o funkcji t (a nie nie o funkcji tworzącej /), a po lewej ich stronie stoją współrzędne Lagrange'a sił (siła Lagrange'a) - ich postać można znalźć w każdym podręcznku mechaniki teoretycznej.

Dla układów ortonomicznych mamy ważne twierdzenie, które można wypowiadać na różne sposoby :

TWIERDZENIE 3.3.2a (Mechaniczna zasada zachowania energii we współrzędnych kartezjańskich). *Dla każdego ruchu układu ortonomicznego istnieje stała {zwana stałą energii)* e_0, *taka, że mamy*

$$(3.3.4) \qquad {}^1e(\dot{x}_1(t),\dots,\dot{x}_{3n}(t)) + {}^1u(x_1(t),\dots,x_{3n}(t)) = e_0$$

dla wszystkich t *z dopuszczalnego przedziału czasu.*

Wzór (3.3.4) może być też zapisany w krótszej (ale mniej intuicyjnie zrozumiałej) postaci

$$e(t) + \underline{u}(t) = e_0.$$

TWIERDZENIE 3.3.2b (Mechaniczna zasada zachowania energii we współrzędnych Lagrange'a). *Dla każdego ruchu układu ortonomicznego istnieje stała* e_0 *{zwana stałą energii), taka, że mamy*

$$t(q_1(t),\dots,q_k(t);\dot{q}_1(t),\dots,\dot{q}_k(t)) + u(q_1(t),\dots,q_k(t)) = e_0$$

dla wszystkich t *z dopuszczalnego przedziału czasu.*

TWIERDZENIE 3.3.2c (Jeszcze inna forma mechanicznej zasady zachowania energii we współrzędnych Lagrange'a). *Dla każdego układu ortonomicznego wyrażenie*

$$(3.3.5) \qquad t(q_1,\dots,q_k;\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k) + u(q_1,\dots,q_k) = c$$

jest całką pierwszą (tak zwaną *całką pierwszą energii) układu równań* (3.3.3).

Te twierdzenia stanowią szczególne przypadki Ogólnej Zasady zachowania Energii [20].

Przypominam, że zgodnie z naszą uproszczoną symboliką Mengera symbol *c* oznacza funkcję stałą o wartościach równych liczbie c (to znaczy, że jest funkcję taką, że *c* (t) = c dla wszystkich c e R).

UWAGA 3.3.2. Różni autorzy różne wyrażenia nazywają *całkami pierwszymi'.* 1°funkcję 2k zmiennych (ewentualnie 2k + 1 zmiennych) *t* + *u,* 2° tę samą funkcję przyrównaną do stałej i wreszcie 3° to samo po podstawieniu *q* zamiast q⅛ oraz podstawieniu *q* zamiast r, (tę ostatnią definicję zastosowaliśmy tutaj, nazywając (3.3.5) całką pierwszą układu (3.3.3)).

Czytelnik zechce porównać tę Uwagę 3.3.2 z Uwagą 3.1.1.

3.4. Zasada Hamiltona. Stąd, że ruch rzeczywisty we współrzędnych Lagrange'a spełnia równania (3.3.3). wynika natychmiast, że ruch ten jest krzywą stacjonarną całki

$$(3.4.1) \qquad \mathbf{A}_l[c,d;q] := \mathbf{A}_l[c,d;q_1,...,q_k] := \int_c^d l\circ(q_1,...,q_k,\dot{q}_1,...,\dot{q}_k)$$

zwanej *działaniem Hamiltona* w przestrzeni $C^2(c,d)$. Skoro - jak już zauważyliśmy - forma hesjanowa jej funkcji tworzącej / jest formą kwadratową określoną dodatnio (dla wszystkich dopuszczalnych układów zmiennych (q- | ,...,qk)), więc spełnia ona silniejszy warunek Zermeli. Wynika stąd natychmiast, tak zwana, *Zasada Hamiltona* :

TWIERDZENIE 3.4.1 (Hamiltona słabe, czyli Zasada Hamiltona słaba). *Ruch rzeczywisty układu ortonomicznego jest argumentem miejscowego minimum działania Hamiltona* **A***l w przestrzeni* RC^2_1 (c,d; **a,b).**

Tradycyjnie (bez stosowania pojęcia ekstremum miejscowego) wypowiada się te twierdzenie w następujący sposób :

TWIERDZENIE 3.4.1 a (Hamiltona słabe - inne sformułowanie). *Ruch rzeczywisty układu ortonomicznego jest argumentem słabego minimum działania (Hamiltona)* **A***l w przestrzeni* RC^2_1 (c,d; ai,..., aR, b- | ,..., bk) (to jest *słabego minimum w zbiorze* kC^2 (c,d; **a,b)**), *o ile tylko różnica* d-c *jest dostatecznie mata.*

Wynik ten, niemal natychmiastowo, można wzmocnić. Bowiem skoro problem spełnia silniejszy warunek Zermeli, to uzyskane ekstremum jest nie tylko słabym, lecz nawet mocnym minimum (patrz **[83],** str. 125), a ponadto też ze spełnienia warunku Zermeli i z odpowiedniego lematu o "o wygładzaniu" (patrz też **[83],** str. 102) wynika natychmiast, że te silne ekstremum pozostanie takim nie tylko dla odpowiedniego zbioru funkcji klasy C^2 lecz nawet C^1. Udowodniliśmy więc (patrz **[83],** str. 197, Lemat 10.2).

TWIERDZENIE 3.4.2 (Hamiltona silniejsze, czyli Zasada Hamiltona Mocniejsza). *Ruch rzeczywisty układu ortonomicznego jest argumentem miejscowego minimum działania Hamiltona* **A***l w przestrzeni* $kC\theta^1$(c,dj **a,b),** to jest silnym minimum miejscowym w zbiorze RC^1 (c,d; **a,b).**

Można pokazać nawet więcej, ale już nie metodami rachunku wariacyjnego, (patrz H.D. Błock **[8])**:

TWIERDZENIE 3.4.3 (Hamiltona - Błocka czyli Absolutna Zasada Hamiltona). *Ruch rzeczywisty uktadu ortonomicznego jest argumentem miejscowego absolutnego minimum działania Hamiltona* **A/** *w zbiorze* kC¹(c,⅛a,b).

Nie będę tu omawiać uogólnień tej Zasady na układy nie ortonomiczne.

Zauważmy, że mimo, iż w naszych rozumowaniach mówimy o różnych parametrach, to jednak rozpatrywane funkcjonał nie jest całką parametryczną. Ale i takie można tu wprowadzić - patrz G. P r a n g e **[69],** str. 581 i następne.

3.5. Dzisiejsze sformułowanie Zasady Maupertuis. Przyjmijmy definicję

DEFINICJA 3.5.1. *Akcją Maupertuis* nazywamy wyrażenie

$$(3.5.1)\qquad {}^{*}\mathbf{A}_t[\mathrm{u};\mathbf{c},\mathbf{d};\boldsymbol{q}] := {}^{*}\mathbf{A}_t[\mathrm{u};\mathbf{c},\mathbf{d};q_1,\ldots,q_n] := \int_{\mathrm{u}}^{\mathbf{T}[\mathrm{u};\boldsymbol{q};\mathrm{h}]} t\circ(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

zdefiniowane dla $\boldsymbol{q} \in {}^{*}_{n}C^{s}_{r}(\mathrm{u};\mathbf{c},\mathbf{d};t+u;\mathrm{h})$, gdzie $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_n)$.

W skrócie będziemy też pisać ${}^{*}\mathbf{A}_t[\mathrm{u};\boldsymbol{q}]$ zamiast ${}^{*}\mathbf{A}_t[\mathrm{u};\mathbf{c},\mathbf{d};\boldsymbol{q}]$.

UWAGA 3.5.1. W symbolu ***A |** stosujemy gwiazdkę, aby zwrócić uwagę na nietypową dla symbolu typu **1/** górną granicę całki występującej po prawej stronie. Gwiazdka ta też pozwala na łatwiejsze rozróżnienie akcji Maupertuis *Af od działania Hamiltona **A/.**

Dla nas najciekawsze jest (patrz H.D. Błock **[8])**:

TWIERDZENIE 3.5.1. (Zasada Błocka - rzekomo Maupertuis czyli Absolutna Zasada Maupertuis). *Ruch rzeczywisty* q = °g(t) *uktadu ortonomicznego jest argumentem miejscowego absolutnego minimum akcji Maupertuis* Af w zbiorze ${}^{*}_{n}C^{s}$(u; **c,d;** *t* + u; h), *gdzie* h *jest stałą energii rozpatrywanego ruchu rzeczywistego* q = ${}^{\theta}$q(t) (to znaczy, że ma być - na przykład -

$$\mathrm{h} := t({}^{o}\boldsymbol{q}(\mathrm{u}), {}^{o}\dot{\boldsymbol{q}}(\mathrm{u})) + u({}^{o}\boldsymbol{q}(\mathrm{u}))).$$

Może bardziej przekonywujące do małego znaczenia tej zasady będzie jej inne, równoważne, sformułowanie :

TWIERDZENIE 3.5.1 a. (Błocka - rzekomo Maupertuis - Absolutna Zasada Maupertuis - inne sformułowanie). *Ruch rzeczywisty* q = ${}^0q(t)$ *układu ortonomicznego jest argumentem właściwego miejscowego absolutnego minimum akcji Maupertuis* m = * Af [a; *q]* w zbiorze

$$ {}^{*}{}^{*}_{k}C^{S}\,({}^{o}\boldsymbol{q}\,;\,u;\,\mathbf{c,d};\,t+u\,;\,t\,({}^{o}\boldsymbol{q}\,(u),{}^{o}\dot{\boldsymbol{q}}(u))+u\,({}^{o}\boldsymbol{q}\,(u))). $$

Te sformułowanie (najelegantsze) pokazuje nam po co był nam potrzeby zbiór z dwoma gwiazdkami (patrz Definicja 2.4.1) oraz pokazuje banalność tego twierdzenia.

Moża pokazać, że i na odwrót, jeśli pewien ruch q = ${}^0g(t)$ jest argumentem miejscowego minimum (choćby słabego) akcji Maupertuis oraz ${}^0\dot{q}(t) \neq \mathbf{0}$ dla wszystkich t e (a, b), to ruch ten jest ruchem rzeczywistym. Na przykładach (patrz niżej Przykład 3.6.3) można pokazać, że jeśli istnieją punkty w których wartość bezwzględna prędkości (lagrange'owskiej) argumentu minimum miejscowego (nawet absolutnego) akcji Maupertuis znika, to argument ten nie musi być ruchem rzeczywistym.

Zazwyczaj udowadnia się (metodami, które bywają metodami zbliżonemi do metod rachunku wariacyjnego) Zasadę Maupertuis w znacznie słabszej postaci, a mianowicie w postaci:

TWIERDZENIE 3.5.2. (Zasada rzekomo Maupertuis). *Ruch rzeczywisty* q = ${}^0q(t)$ *układu ortonomicznego jest argumentem miejscowego lokalnego minimum akcji Maupertuis* Δt *w* przestrzeni $^*\hat{C}_n$(u; **c,d;** f + u; h) (to jest argumentem słabego miejscowego minimum w zbiorze $^*C^2_n$(u; **c,d;** f + *u;* h)), *gdzie* h := $t({}^0q(a), {}^0\dot{q}(a)) + u({}^\theta q(a))$ *jest stałą energii rozpatrywanego ruchu rzeczywistego* q = ${}^0q(t)$).

Często formułuje się tę Zasadę jeszcze słabiej, jako zasadę stacjonarną. Ale to ostatnie sfromułowanie jest dość mylące. Wprawdzie - jak wiemy - ruch rzeczywisty jest rozwiązaniem pewnych równań typu równań Eulera-Lagrange'a, ale nie jest jasne jak się one mają mieć do funkcjonału (całki) * Af. Przecież nie będą to równania o funkcji tworzącej *t,* to jest funkcji tworzącej tej całki. Również archaiczne sformułowania o znikaniu wariacji nie mogą stosować sią tutaj, gdyż - jak zobaczymy - chodzi tutaj o zupełnie specyficzną (nigdzie indziej nie stosowaną) definicję wariacji.

Twierdzenie Hamiltona odnosi się do funkcjonału wyrażonego przez całkę, której funkcją tworzącą jest funkcja Lagrange'a, natomiast twierdzenie Maupertuis odnosi się do funkcjonału wyrażonego przez całkę, której funkcją tworzącą jest kinecjał i który ma minimum w znacznie mniejszym zbiorze niż działanie Hamiltona. Inne - tak zwane - zasady wariacyjne, jak naprzykład Zasada - a raczej Zasady - Jacobiego (patrz niżej n° 4.5) są rzadziej wspominane w wykładach mechaniki. Zauważmy, że fakt iż mamy do czynienia wyłącznie z układami ortonomicznymi, a więc z więzami skleronomicznymi i siłami pozycyjnymi bardzo upraszcza nasze rozważania : istotne są tu długości przedziałów czasu, a nie momenty ich początku (i ich końca). Upraszcza to też manipulowania zarówno całką (3.5.1) (jak zresztą też i całką (3.4.1)).

Ze względu na wychodzenie (w dość skomplikowanej definicji) od krzywych ruchu, a nie od samych ruchów, można intuicyjnie zrozumieć, dlaczego w większości (poprawnych lub niepoprawnych) dowodów Zasady Maupertuis wychodzi się z Zasady Jacobiego, która mówi właśnie coś o krzywych ruchu.

Nie będę tu omawiać uogólnień obu zasad na układy inne niż układy ortonomiczne.

Zauważmy, jeszcze raz, iż mimo, iż w naszych rozumowaniach mówimy o różnych parametrach, to jednak rozpatrywane funkcjonały nie są całkimi parametrycznymi. Ale można i takie tutaj wprowadzić - patrz G. P r a n g e **[69]**, strona 581 i następne. Trzeba wszakże pamiętać, że wykresy wszystkich ruchów rzeczywistych $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ (t) leżą w sposób normalny w stosunku do osi czasu (czas bowiem "nie cofa" się nigdy) i dlatego naturalne są wszystkie nieparametryczne całki z całkowaniem w stosunku do czasu. Jedynie naturalne są parametryczne całki, gdy zmienną całkowania jest nie czas, lecz inne wielkości, na przykład, długość krzywej ruchu.

UWAGA 3.5.2. Tradycynie zapisuje się prawą stronę wzoru (3.5.1) w postaci

$$2\int E\, dt$$

co w naszej (wykazującej więcej precyzji) symbolice, dałoby się - od biedy - zapisać jako

$$2\int_a^b e$$

- oczywiście tradycyjny zapis jest nieporozumiem, związanym z nierozróżnianiem przynajmniej trzech różniących się między sobą trzech funkcji:

funkcji *e* (funkcji jednej zmiennej), funkcji ^1e (funkcji 3n - ewentualnie 3n + 1 - zmiennych) oraz funkcji *t* (funkcji 2k - ewentualnie 2k + 1 - zmiennych).

3.6. Przykłady. Warto dlatego rozpatrzyć tutaj parę prostych przykładów.

PRZYKŁAD 3.6.1. Rozpatrzmy punkt o masie 2, poruszający się po - mówiąc fizycznie - poziomej prostej bez tarcia. Czyli weźmy pod rozwagę ruch punktu o masie 2, skrępowanego więzami holonomicznymi regularnymi (zapisanymi w odpowiednim układzie odniesienia) $x2 = 0$, $x3 = 0$, gładkimi, bez działania sił. Takim ruchem rzeczywistym może być - na przykład - ruch

(3.6.1) $$^ox_1(t) = vt, \quad ^ox_2(t) = 0, \quad ^ox_3(t) = 0 \qquad \text{dla} \qquad t \in \langle 0, t_o \rangle,$$

gdzie v jest pewną stałą dodatnią (o oczywistej interpretacji). Mamy więc mieć

(3.6.2) $$^ox_1(t_o) = vt_o =: d.$$

W naszym przypadku siły znikają tożsamościowo, więc potencjał jest stały - możemy go przyjąć jako równy zeru. Wtedy

(3.6.3) $$t = l$$

i mamy tu (przyjmując x = x$\mid$ za zmienną Lagrange'a) funkcjonał zdefiniowany w zbiorze -$\mid$ C^1 $(0,t_o;\ (0),(d))$ dla - na przykład - s = 1 = r (oznaczam tutaj przez - na przykład - (a) punkt o jedynej współrzędnej a). Uwzględniając (3.6.2) otrzymamy tu

(3.6.4) $$\mathbf{A}_l\,[0,\ t_o;\ (0),(d);\ ^ox] := \int_0^{t_o} l\circ(\,^ox,\,^o\dot{x}) = \int_0^{t_o} l\circ{}^o\dot{x}^{\,2} = v^2\,t_o = vd.$$

Można tu, względnie elementarnie, pokazać bezpośrednio, że argumentem minimum absolutngo **A***l* w zbiorze -$\mid$ C^1 $(0,t_o;\ (0),(d))$ jest właśnie funkcja x(t) = vt.

Będzie tu dla $^ox \in {}^*_1C^1(0;\ (0),(d);\ t\ ;\ h\ )$ i dla $n = 1$ też

$$^*\mathbf{A}_t\,[0;\ (0),(d);\ ^ox] = vd.$$

Ale będzie to wynik banalny, bowiem w tym przypadku, skoro *u* = 0, to ma być *t* = *h*. Wynika stąd po prostu, że t (x, *) = *2 = h, czyli wynika, że *X* –const, a więc skoro mamy (3.6.1), to zbiór

$$ {}^*_1C^1(0, t_0; (0),(d); t; h) $$

składa się tutaj tylko z jednego ruchu, a mianowicie z ruchu rzeczywistego... □ .

PRZYKŁAD 3.6.2. Rozpatrzmy punkt o masie 2, poruszający się po - mówiąc fizycznie - poziomej płaszczyźnie bez tarcia. Czyli weźmy pod rozwagę ruch punktu ruch punktu skrępowanego więzami holonomicznymi regularnymi (zapisanymi w odpowiednim układzie odniesienia) x3 = 0, gładkimi, bez działania sił. Takim ruchem rzeczywistym może być - na przykład - znowu ruch (3.6.1), a więc

$$ {}^o x_1(t_o) = vt_o =: d. $$

I w tym przypadku siły znikają tożsamościowo, więc potencjał jest stały - możemy go przyjąć jako równy zeru. Wtedy zachodzi (3.6.3) i mamy tu (przyjmując x- | , ×2, za zmienne Lagrange'a) funkcjonał (działanie Hamiltona) wynosi

$$ \mathbf{A}_l\,[0,t_o; x_1, x_2] := \int_0^{t_o} l \circ (x_1, x_2) = \int_0^{t_o} t \circ (x_1, x_2) = \int_0^{t_o} \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 $$

i jest zdefiniowany w zbiorze $2C^1(0,t_o;\ (0,0),(d,0))$. Jak łatwo obliczyć i tutaj mamy wzór analogiczny do wzoru (3.6.4)

$$ \mathbf{A}_l\,[0,t_0; {}^o x_1, {}^o x_2] = v^2 t_o = vd. $$

Tu jest nieco trudniej bezpośrednio pokazać słuszność Zasady Hamiltona, ale i tu można to zrobić elementarnie.

Akcja Maupertuis będzie tu miała tę samą funkcję podcałkową

$$ {}^*\mathbf{A}_t\,[0; x_1, x_2] :=^* \mathbf{A}_t\,[0; (0,0),(d,0); x_1, x_2] := \int_0^{T[u;(x_1,x_2);vd]} t \circ (x_1, x_2), $$

tyle że będzie ona zdefiniowana w zbiorze ⅛C¹ (0; (0,0),(d,0); *t*, h), a ponadto całka będzie miała inną górną granicę. Tu też *Af [u; ${}^o x_1$, ${}^o x_2$] = $v^2 t_o$ = vd. A jaka będzie wartość akcji dla innych ruchów porównawczych ? Ponieważ ich stała energii ma być taka sama, a energia potencjalna równa się zeru, więc i energie kinetyczne ruchów porównawczych muszą być takie same. Skoro mamy do czynienia z jednym punktem poruszającym się musi on -- w tych warunkach - mieć stałą wartość bezwględną prędkości, też równą v.

Przypuśćmy, że rozpatrujemy ruch porównawczy ×ı = ¹x√t), ×2 = ¹x2(t).

Skoro jest on zdefiniowany w zbiorze ⅜C¹ (0; (0,0),(d,0); *t*, h), to musi on spełniać warunki

$$
{}^{1}x_1(0) = 0 = {}^{\circ}x_1(0), \quad {}^{1}x_2(0) = 0 = {}^{\circ}x_2(0), \tag{3.6.5}
$$
$$
{}^{1}x_1(t_1) = d = {}^{\circ}x_1(t_o), \quad {}^{1}x_2(t_1) = 0 = {}^{\circ}x_2(t_o).
$$

gdzie ti =**T** [0 ; (x- ∣ , *x2)'*, h] i **T** jest funkcjonałem zdefiniowanym wzorem (2.2.7).

Przypuśćmy, że długość krzywej danej parametrycznie wzorami

$$
x_1 = {}^{1}x_1(t), \; x_2 = {}^{1}x_2(t) \quad \text{dla} \quad t \in \langle 0, \mathbf{T}[0 ; (x_1, x_2); h] \rangle.
$$

wynosi di . Oczywiście, jeśli

$$
[{}^{\circ}x_1, {}^{\circ}x_2] \neq [{}^{1}x_1, {}^{1}x_2]
$$

to mamy

$$
d < d_1,
$$

a więc

$$
{}^{*}\mathbf{A}_t[0; {}^{\circ}x_1, {}^{\circ}x_2] = v^2 t_o = vd < vd_1 = {}^{*}\mathbf{A}_t[0; {}^{1}x_1, {}^{1}x_2]
$$

- (stosując skrótową formę zapisu akcji At) wykazaliśmy tu bezpośrednio słuszność (w tym przypadku) absolutnej Zasady Maupertuis w zbiorze $\overset{*}{2}C^1$(0; (0,0), (d,0) ;f; h).

Ale ruch rzeczywisty [⁰x- ∣ , ⁰x2] nie jest argumentem minimum (ani nawet ekstremum) nawet słabego miejscowego (to jest lokalnego, miejscowego) akcji Maupertuis w przestrzeni utworzonej w sumie przestrzeni

$$
C =: \bigcup_{0<h} {}^{*}_{2}C^{1}_{1}(0,t_0; (0,0), (d,0); t ; h),
$$

to jest dla przestrzeni wszystkich ruchów porównawczych spełniających zasadę zachowania energii, czyli dla przestrzeni typu C(a,b; f) jak często myślą czytelnicy bardziej niechlujnych formułować Zasady Maupertuis. Istotnie w takim zbiorze, ruchy w naszym wypadku muszą mieć stałą wartość bezwzględną prędkości oraz spełniać warunki (3.6.5).

Istotnie, przypuśćmy, że ruch porównawczy odbywa się po krzywej o długości d· ∣ . Wartość bezwzględna prędkość ma być stała, na przykład, równa vi, a więc ma bvć

$$
h = (v_1)^2.
$$

Mamy wtedy

$$*A_t[u; {}^1x_1, {}^1x_2] = v_1 d_1.$$

Ale wtedy możemy obrać taki ruch porównawczy po krzywej leżącej dowolnie blisko ruchu rzeczywistego, a więc di może być dowolnie bliskie do d. Natomiast przy obecnych naszych założeniach vi jest dowolne. Wystarczy więc obrać bliskie mu v, ale takie, że v- | dı jest mniejsze od vd. A więc istnieją ruchy porównawcze w C, dowolnie bliskie ruchowi rzeczywistemu (w odpowiedniej metryce, na przykład w metryce C^2 lub nawet C^1), takie że dla nich akcja jest mniejsza niż dla ruchu rzeczywistego. Wynika stąd, że w przestrzeni ruchów spełniających zasadę zachowania energii (z dowolną stałą tej ostatniej) ruch rzeczywisty nie jest argumentem minimum akcji Maupertuis. □ .

Przykład 3.6.3. Rozpatrzmy punkt o masie 2 i jego ruch będący, mówiąc fizycznie, ruchem po ukośnej płaszczyźnie. Matematycznie jest to ruch o dwóch stopniach swobody, skrępowany uwikłanymi więzami ortonomicznymi (to jest więzami holonomicznymi, regularnymi, skleronomicznymi) uwikłanymi - na przykład - o postaci

$$x_1 = x_3,$$

o realizacji gładkiej, poruszającego się pod wpływem stałej sity (siła ciężkości w odpowiednio dobranych jednostkach):

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = -8.$$

Obierzmy jako współrzędne Lagrage'a ×ı i ×2, to jest połóżmy xı =qi, ×2 = Q2, ×3 = Q1 ■ Wtedy potecjałem jest funkcja

$$u(q_1, q_2) = 8q_1,$$

zaś kinecjałem

$$t(q_1, q_2; r_1, r_2) = 2r_1^2 + r_2^2$$

i mamy

$$t(q_1, q_2; r_1, r_2) + u(q_1, q_2) = 2r_1^2 + r_2^2 + 8q_1.$$

oraz

$$l(q_1, q_2; r_1, r_2) = t(q_1, q_2; r_1, r_2) - u(q_1, q_2) = 2r_1^2 + r_2^2 - 8q_1.$$

Natomiast zasada zachowania energii przyjmie tu postać

$$2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 8q_1 = h,$$

(gdzie h jest stałą energii), czyli

$$2\dot{q}_1^2(t) + \dot{q}_2^2(t) + 8q_1(t) = h$$

w odpowiednim przedziale zmiennej t.

Poprzez elementarnie dające się tutaj rozwiązać równania Lagrange'a II rodzaju problemu, to jest poprzez równania

$$4\ddot{q}_1 - 8 = 0, \quad 2\ddot{q}_2 = 0,$$

łatwo tutaj można obliczyć, że ruchem rzeczywistym spełniającym warunki brzegowe, na przykład, warunki

$$q_1(0) = 0, \ q_2(0) = 0, \quad q_1(2v) = 0, \ q_2(2v) = 0$$

(gdzie v jest pewną stałą, o oczywistej interpretacji ⅛ι(0) = 2v) będzie ruch

$$q_1(t) = -t^2 + 2vt, \quad q_2(t) = 0.$$

Tutaj g- | (0) = 2v, ⅛2(θ) = 0, więc stałą energii ruchu rzeczywistego będzie h := $8v^2$. Zgodnie z Twierdzeniem 3.5.1, ruch rzeczywisty będzie argumentem miejscowego absolutnego minimum akcji Maupertuis *Af[0; *q↑ ,q½]* *w* zbiorze $\overset{*}{{}_2C}{}^1(0; (0,0),(0,0); t; 8v^2)$.

Weźmy pod rozwagę ruch

$$q_1(t) = \begin{cases} -t^2 + 2vt & \\ v^2 & \text{dla} \\ v^2 - [t-(v+k)]^2 & \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in \langle 0, v \rangle \\ t \in \langle v, v+k \rangle \\ t \in \langle v+k, 2v+k \rangle \end{matrix}$$

$$q_2(t) = 0 \qquad \text{dla} \qquad t \in \langle 0, 2v+k \rangle.$$

Jest to ruch w którym rozpatrywany punkt spoczywa w punkcie $(v^2,0)$ - na ukośnej płaszczyźnie, a więc nie może to być ruch rzeczywisty (czytelnik zechce tę intuicję sam formalnie udowodnić). Niemniej jednak jest to argument miejscowego absolutnego minimum akcji Maupertuis *Af [0; *q1,q2]* *w* zbiorze $\overset{*}{{}_n C}{}^1(0,2v; (0,0),(0,0); f; 8v^2)$ - inna rzecz, że jest to minimum niewłaściwe. □ .

Przykład 3.6.4. Rozpatrzmy jeszcze raz układ opisany w poprzednim przykładzie. Zauważmy, że tutaj zbiór

$$\overset{*}{{}_2C}{}^1(0; (0,0), (0,0); t+u; h)$$

będzie *pusty* dla $h < 8v^2$. (gdzie $v > 0$). □.

Nie warto rozpatrywać jeszcze prostszego przykładu ruchu punktu po prostej ukośnej (to jest układu z naszego Przykładu 3.6.3 skrępowanego dodatkowo jeszcze więzami ×2 = 0), gdyż jest to ruch banalny, gdyż w nim ruch rzeczywisty jest jedynym elementem zbioru ^C¹ (0; (0),(0); *ł*; 2v²).

3.7. Wariacje i elementy stacjonarne. Dziś można się doskonale obejść bez pojęcia wariacji. Na przykład, w monografii Rolfa Klótzlera **[36]** (poświęconej naogólniejszym - dziś już rozwiązanym - zagadnieniom rachunku wariacyjnego i do dziś dnia najlepszej monografii w swoim zakresie) wogóle brak pojęcia wariacji funkcji, a pojęcie wariacji całki (w sensie Lagrange'a) występuje dopiero na str. 68. Niemniej jednak w XVIII wieku (począwszy od J.L. de L a g r a n g e'a) i w XIX (a nawet jeszcze i w XX wieku) stosowano obficie pojęcie wariacji funkcji i wariacji funkcjonałów (a raczej wariacji tylko pewnego typu funkcjonałów, a mianowicie wariacji całek). Niestety, nieomal każdy ze stosujących ją przyjmował inną jej definicję, przyczym te definicje nie były równoważne. Dziś pojęcie wariacji stosuje się rzadko. A jak można by je dziś definiować ?

Dla przestrzeni skończenie wymiarowych C (a właściwie wedle uproszczonego schematu jaki niżej zastosujemy, to tylko dla przestrzeni kartezjańskicj lub podobnych) wprowadza się pojęcie przestrzeni *C wektorowych nad przestrzenią C. Jest to pojęcie dobrze znane i użyteczne, na przykład, przy wprowadzaniu jednego z wielu możliwych pojęć różniczki. I my tutaj - w ogólniejszych przestrzeniach - postąpimy podobnie.

Weźmy pod rozwagę dwa zbiory C i D. Zakładamy, że C jest metryczną przestrzenią o metryce p (będziemy ja więc też oznaczać symbolem C_p). Natomiast o D zakładamy, że tworzy ona przestrzeń wektorową rzeczywistą. Wprowadzamy operację, na parach należących elementów należących do C, którą oznaczymy symbolem" -", a której wartości należą do zbioru D. To jest dla każdej pary *x,y* e C ma istnieć element *x-y* = *d* e D i dla każdego *d* $\in$ D ma istnieć nieskończenie par *x,y* tC takich, że *d* :=*x-y* . Przyjmujemy, że jeśli tylko *d* :=*x-y*, to wtedy wszystkie wartości p(x, y) są takie same (ale niekoniecznie naodwrót). Możemy więc położyć

(3.7.1) $$|d| := \rho(x, y).$$

Wynika stąd, że |ó | spełnia wszystkie warunki jakie musi spełniać norma - zakładamy więc, że tworzy |. | normę w przestrzeni wektorowej D. W zastosowaniach przestrzenie D będą zawsze przestrzeniami zupełnymi, a więc będą przestrzeniami Banacha, ale dopiero później będzie dla nas konieczne przyjęcie tego założenia.

W te przestrzenie C i D wprowadzamy działanie " +". A mianowicie, jeśli *x* e C oraz *d* ∈ D, to element *x* + *d* istnieje i należy do C. Skoro D jest przestrzenią wektorową, to wynika stąd, że dla każdego *x* e C, każdego *d e* D i dla każdej liczby rzeczywistej a jest *x* + *ad* e C. A więc w pewnym sensie " +" jest działaniem odwrotnym do działania" -". Widzimy, że w ten sposób, struktura wektorowa przestrzeni D narzuca pewną podobną strukturę (ale nie musi to być struktura wektorowa). Przy naszych (dość skomplikowanch założeniach i definicjach) możemy traktować zbiór D jako przestrzeń wektorową nad przestrzenią C (a więc i oznaczać *C := D). Zauważmy, że możemy tutaj zdefiniować prostą przestrzeni C przechodzącą przez dwa różne punkty x,y e C jako zbiór {z = *x* + a(y - x) : a e R }. A także możemy zdefiniować prostą przechodzącą przez punkt xe C i mającą kierunek d e C jako zbiór

$$\{z = x + ad : a \in R\}.$$

Przykład 3.7.1. Weźmy pod rozwagę przestrzenie C = C_0^2(0,1; c,d) oraz D = C^2(0,1; 0,0). Są to przestrzenie funkcji jednej zmiennej *x* zdefiniowanych w przedziale (0,1), z drugiemi pochodnymi ciągłymi i takiemi, że mamy x(0) = c, x(1) = d lub odpowiednio x(0) = 0, x(1) = 0.

Przestrzeń C ma ze swej definicji metrykę p(x, y) = max I x(t) - y(t)I Natomiast funkcją x + *y* w D jest taka funkcja, że (x+y)(t) = x(t) + y(t), oraz dla a ∈ R funkcja ax jest funkcją taką, że (ax)(t) = ax(t) (wszystko oczywiście dla te(0,1)) i jest to przestrzeń rzeczywista wektorowa. Łatwo widać, że jeśli dla każdej pary x,y e C, położymy (x-y)(t) := x(t)-y(t) dla te (0,1), to wtedy

x - y e D.

Łatwo też widać, że funkcja określona wzorem (3.7.1) istotnie może być uważana za normę w przstrzeni D. Natomiast, jeśli tylko $c^2 + d^2 > 0$, to przestrzeń C nie jest przestrzenia wektorową (przynajmniej dla "naturalnych" definicji dodawania i mnożenia). Możemy zatem uważać, że przestrzeń C^2(0,1; 0,0) jest przestrzenią wektorową nad przestrzeni* ą C_0^2(0,1; c,d). □.

Rozpatrzmy funkcjonał I: C → R, gdzie zbiory C i D spełniają wyżej wprowadzone założenia. Otóż może się zdarzyć, że istnieje funkcjonał °W: Cx D → R, to jest funkcjonał od "dwóch" zmiennnych, a więc jest to funkcjonał w = °**W** [*x*,*d*], liniowy w stosunku do drugiej zmiennej, a oprócz tego taki, że mαm /

(3.7.2) $\quad | \mathbb{I}[x] - \mathbb{I}[°x] - °\mathbf{W}[°x, x - °x] | \leqslant a [\rho(x, °x)]^2$

- naumyślnie, nie napisałem tu żadnego kwatyfikatora : wprawdzie w dalszym ciągu będziemy zakładać, iż istnieje takie a > 0, że dla każdego *x* e C z pewnego otoczenia °*x* zachodzi relacja (3.7.2). Ale czasem stosuje się słabsze założenie, że stała a jest dobierana do elementu *x*. Ponadto, czasami po prawej stronie tego wzoru stosuje się inny wykładnik niż 2, na przykład, stosuje się wykładnik 1 + ε, gdzie ε > 0. Jeżeli taki dla danego funkcjonału I istnieje taki funkcjonał °W , to przyjmujemy następującą definicję :

DEFINICJA 3.7.1. Funkcjonał °W (o ile istnieje) i jest liniowy w stosunku do drugiej zmiennej, nazywamy *mocną wariacją* (lub *wariacją w sensie Stolza*) *funkcjonału* I w punkcie *x* przestrzeni C_p.

Zamiast ^{0}W [x,d] powinniśmy raczej pisać bardziej pedantycznie °W[I;x,dj. Tradycyjnie element *d* zbioru D nazywamy wariacją elementu (funkcji) i oznaczamy δx, natomiast wariację funkcjonału I oznaczymy symbolem ^{0}δI. W przypadku dowolnych funkcjonałów I mówi się czasam o *abstrakcyjnej mocnej wariacji* tego funkcjonału.

Nie rozstrzygamy tu dla jakich funkcjonałów I istnieje mocna wariacja °W.

DEFINICJA 3.7.2. Jeżeli dla funkcjonału I: C → R i dla pewnego elementu °*x e* C istnieje mocna wariacja i mamy

$$°\mathbf{W}[°x, d] = 0$$

dla wszystkich *d* e D, to mówimy, że °*x* jest *mocnym elementem stacjonarnym* (lub *elementem stacjonarnym w sensie Stolza) funkcjonału* I *w przestrzeni* C_p.

Przy przyjętych przez nas definicjach mamy natychmiast:

TWIERDZENIE 3.7.1. *Jeżeli* istnieją liczby a i b, takie że

$$| \mathbb{I}[x] - \mathbb{I}[°x] | \leqslant a [\rho(x, °x)]^2$$

dla wszystkich $\rho(x, °x) < b$ (gdzie $x \in C$), to °*x* *jest mocnym elementem stacjonarnym (lub elementem stacjonarnym w sensie Stolza) funkcjonału* I.

W konkretnych przypadkach zazwyczaj jest bardzo trudno znaleźć mocną wariację i mocne elementy stacjonarne. Łatwiejsze naogół jest wyznaczanie zbliżonych - słabszych - pojęć. W tym celu trzeba startować z definicji będącej analogonem jedego z wariantów pojęcia kontyngensu dla funkcji wielu zmiennych.

Weźmy więc znowu pod rozwagę dwa zbiory C i D spełniające te same co wyżej założenia i znowu rozpatrzmy jakiś funkcjonał I: C → R. Przyjmijmy

DEFINICJA 3.7.3. O ile dla pewnego °x e C i dla każdego *d* e D istnieje funkcjonał

$$\mathbf{W}[°x, d] := \frac{d}{da}\mathbf{I}[°x + ad]\Big|_{a=0}$$

liniowy w stosunku do drugiej zmiennej, to nazywamy go słabą *wariacją* (lub *wariacją w sensie Ĝateaux,* albo też *wariacją w sensie Lagra∩ge'a) funkcjonału* **I** *w punkcie* °*x przestrzeni* C_p.

Jeśli więc chcemy wyznaczyć wariację W dla danego °*x* e C, (tu ani C ani D nie musi mieć wprowadzonej metryki), to dla każdego, ale ustalonego elementu *d* t D znajdujemy funkcję

(3.7.3) $$h = h_{°x,d}(a) := \mathbf{I}[°x + ad],$$

poczym obliczamy jej pochodną w punkcie 0. Taka funkcja $n°_{x},j$ istnieje **dla** każdego elementu °*x* e C oraz każdego elementu *d* e D.

I tutaj, zamiast W[x,d] powinniśmy raczej pisać zdecydowanie bardziej pedantycznie W[l;x,dj. I tak samo jak dla mocnej wariacji, tutaj tradycyjnie element *d* = x - °x nazywamy wariacją elementu (funkcji) i oznaczamy δx, natomiast wariację funkcjonału **I** oznaczymy symbolem δl. W przypadku dowolnego funkcjonału I mówi się często o *abstrakcyjnej stabej wariacji* tego funkcjonału.

Założyliśmy, że C_p jest przestrzenią wektorową metryczną. Na to by istniała słaba wariacja funkcjonału **I,** muszą być spełnione dodatkowe założenia Z gwarantujące, że dla pewnego ustalonego x funkcja

$$h = h_{x,d}(a)$$

jest różniczkowalna w punkcie 0 dla każdego *d,* takiego, *że d* e D. Te ostatnie żądanie można nieco osłabić, jeśli zbiór D jest przestrzenią metryczną wektorową o metryce p : wystarczy wtedy ograniczyć się do *d* e D, takich, że p(d, *0*) = 1. Też można wtedy żądać, że dla x e C, *d* e D mamy x+ *ad* e C tylko dla "małych" a e R.

Mając pojęcie słabej wariacji funkcjonału możemy przyjąć definicję :

DEFINICJA 3.7.4. Mówimy, że element °x należący do dziedziny funkcjonału **I** jest jego *słabym elementem stacjonarnym* (lub *argumentem stacjonarnym* w *sensie Gâteaux*), jeśli dla każdego *d* e D mamy

$$\mathbf{W}\,[°x, d\,] \;=\; 0.$$

UWAGA 3.7.1. Lepiej jest nie mówić o różniczne w sensie Lagrange'a (a tylko w sensie Ĝateaux), gdyż odpowiadający jej element stacjonarny (słaby argument stacjonarny) nie jest funkcją stacjonarną w sensie Lagrange'a tak jak zdefiowaliśmy ją wyżej (jako rozwiązanie układu równań Eulera-Lagrange'a problemu - patrz Definicja 2.7.1 oraz Uwaga 2.71) i w ten sposób łatwo może dojść do nieporozumienia.

UWAGA 3.7.2. Zauważmy, że obie te różniczki są zdefiniowane w dwóch różnych sensach kontyngensu, a nie paratyngensu (który w wogóle w ogólniejszych przestrzeniach jest trudniejszy do wprowadzenia).

Można pokazać, że jeśli istnieje mocna wariacja, to istnieje też słaba wariacje i jest jej równa. Podobnie, jeśli dla pewnego funkcjonału jakiś element jest jego mocnym elementem stacjonarnym, to jest też jest jego słabym elementem stacjonarnym.

A jak wyglądają słabe wariacje i słabe argumenty stacjonarne dla funkcjonałów dających zapisać się jako całki ? Okazuje się, że trudno jest to załatwić jednym rozumowaniem.

Na przykład, weźmy pod rozwagę przestrzeń C = kCθ²(O,1j **c,d)** oraz zbiór D = i<C²(a,b; **0,0)** z "naturalnymi" działaniami "+"".ï. Rozpatrzymy, już wyżej wprowadzoną całkę

$$(3.4.1) \qquad \mathbf{A}_l\,[q_1, ..., q_k] \;:=\; \int_c^d l \circ (\,q_1, ..., q_k, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_k\,)$$

przedstawiającą działanie Hamiltona. Weźmy ustalony układ funkcji ***q*** e C = = │<C²(a,bj **c,d)** oraz ustalony układ funkcji ***d*** e D = kC²(a,b; **0,0).** Tutaj dla każdego a e R mamy ***q+*** ad e C = kC²(a,b; **c,d).** O ile potencjał *u* jest funkcją conajmniej klasy C², to wtedy istnieje funkcja

$$h_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}}(\mathrm{a}) := \;\mathbf{A}_l[\boldsymbol{q} + \mathrm{a}\boldsymbol{d}] \;=\; \int_c^d l \circ (\boldsymbol{q} + \mathrm{a}\boldsymbol{d}\,,\; \dot{\boldsymbol{q}} + \mathrm{a}\,\dot{\boldsymbol{d}}\,)$$

różniczkowalna (w stosunku do a). Wynika to z założenia $q\uparrow \in C^2$ oraz z faktu, że kinecjał ^{1}e eC^2 ze w zględu na zmienne "nie kropkowane" i jest funkcją analityczną (jako wielomian) ze względu na zmienie "kropkowane".

Przy pomocy dość długich, ale banalnych rachunków, pokazuje się, że tutaj

$$\mathbf{W}[\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}] := \frac{d}{da}\mathbf{A}_l[\boldsymbol{q} + a\boldsymbol{d}]\big|_{a=0} = \int_a^b \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{E}_i[l; q_1, ..., q_k]\, d_i ,$$

a więc, że słabe elementy stacjonarne są tu, po prostu, argumentami stacjonarnymi działania Hamiltona i - jak łatwo można pokazać - też argumenty stacjonarne są słabymi elementami stacjonarnymi.

Niestety, okazuje się, że wariacje i funkcje stacjonarne akcji Maupertuis muszą być zdefiniowane wedle nieco innego schematu. Musiałyby one raczej wychodzić od analogonów przestrzeni wektorowych nad (nieliniowymi) rozmaitościami. Ale stworzenie takich analogonów jest tutaj mocno kłopotliwe.

Natomiast, jeśli zrezygnujemy z abstrakcyjnej teorii, a ograniczymy się tylko do odpowiednio skonstruowanych przestrzeni funkcyjnych, to rzecz zaczyna się robić dość prosta, bowiem argumentami akcji Maupertuis nie są jakieś elementy abstrakcyjnyh zbiorów, lecz właśnie pewne funkcje. A dla funkcji (rzeczywistych) mamy "naturalne" działania dodawania i mnożenia przez liczbę rzeczywistą - a mianowicie dla funkcji x i *y* (na przykład należących do przestrzeni C^s)oraz liczby (rzeczywistej) a, funkcjami *x*+*y* oraz ax są takie funkcje, że

$$(x+y)(t) := x(t) + y(t) \qquad \text{oraz} \qquad (ax)(t) := ax(t)$$

w części wspólnej dziedzin *x* i y oraz odpowiednio w dziedzinie *x*.

Weźmy więc pod rozwagę przestrzeń $C = {}^*_nC^2(u;\ \mathbf{c},\mathbf{d};\ t + u;\ h)$ oraz zdefiniowaną w niej akcję Maupertuis, to jest funkcjonał

$$(3.7.4) \qquad {}^*\mathbf{A}_t[u; \mathbf{c},\mathbf{d}; \boldsymbol{q}] := \int_u^{\mathbf{T}[u;\boldsymbol{q};h]} t \circ (\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}).$$

Trzeba tu przyjąć nową definicję wariacji i argumentu stacjonarnego, ale tak, by nie zostały one sprzecznymi dla definicji pojęć wcześniej już przyjętych. Podarujmy sobie tutaj definicję wariacji, ale przyjmijmy opartą o nią definicję elementu stacjonarnego opartą o analogię do Twierdzenia 3.7.1, a mianowicie :

Definicja 3.7.5. Mówimy, że układ funkcji °*q* jest *silnym argumentem stacjonarnym* akcji Maupertuis danei wzorem (3.7.4) (zaś funkcjonał **T** dany jest wzorem (2.2.7) w przestrzeni $\ ^{*}_{n}C(u,v ; \mathbf{c},\mathbf{d}; t+u; h)$, jeśli istnieje k takie, że dla każdego $\boldsymbol{q}$ tej przestrzeni, spełniającego warunek $\rho(\boldsymbol{q}, {}^{\circ}\boldsymbol{q}) \leqslant k$ mamy

$$(3.7.5) \qquad | {}^{*}\mathbf{A}_t[u; \mathbf{c},\mathbf{d}; \boldsymbol{q}] - {}^{*}\mathbf{A}_t[u; \mathbf{c},\mathbf{d}; {}^{\circ}\boldsymbol{q}] | \leqslant a[r(\boldsymbol{q}, {}^{\circ}\boldsymbol{q})]^2.$$

Ale jak już mówiliśmy, bardzo trudno jest tu przeprowadzać odpowiednie rachunki do końca, na przykład, korzystając bezpośrednio lub tylko pośrednio ze wzoru (3.7.3).

Jeśli chodzi o słabe wariacje, to prawdzie można rozpatrywać i tu przestrzeń metryczną $C = {}_nC^2_0(0,1; \mathbf{c},\mathbf{d})$ i przestrzeń wektorów $D = {}_nC^2(0,1; \mathbf{0},\mathbf{0})$ nad nią. Nich x e C oraz niech $^{*}\mathbf{d}$ e D. Ale te przestrzenie nie będą nas interesowały tu bezpośrednio. Rozpatrzmy elementy (układy funkcji) $\boldsymbol{z} = x + a{}^{*}d$ przestrzeni C - dla pewnych takich układów $\boldsymbol{z}$ będzie natomiast istnieć funkcja r e C^2, taka, że

$$\boldsymbol{q} := \boldsymbol{z} \circ r \in {}^{*}_{n}C^2(u; \mathbf{c},\mathbf{d}; t+u; h).$$

(patrz Definicja 2.2.2 oraz Definicja 2.2.3). Dla układów takich funkcji (jeśli one istnieją) istnieje też liczba T[u; $\boldsymbol{q}$, h] taka, że

$$r(0) = u, \qquad r(\mathbf{T}[u; \boldsymbol{q}; h]) = 1$$

i funkcja r jest zdefiniowana w przedziale {u, T[u; $\boldsymbol{q}$; h]). A więc i w tym samym przedziale zdefiowany jest układ funkcji $\boldsymbol{z}$ o r = (x + a*d) <> r, to jest układ funkcji (xi o r) + a (*dj o r) dla i = 1,..., n. Połóżmy $\boldsymbol{q}$:= x o r, d := :=*d o r oraz niech

$$(3.7.6) \qquad {}^{*}q_i(a,t) := q_i(t) + a\, d_i(t), \qquad i = 1, ..., n,$$

to jest niech

$${}^{*}\boldsymbol{q}(a,t) := \boldsymbol{q}(t) + a\boldsymbol{d}(t).$$

Przypuśćmy że dla pewnego $\boldsymbol{q} = (g_1, ..., g_n)$, oraz dla pewnych $d = (d_1, ..., d_n)$ dana wzorem (3.7.6) funkcja $^{*}q$ jest zdefiniowana jest dla a należących do pewnego otoczenia 0.

Weźmy pod rozwagę (patrz Definicja 2.4.1) przestrzeń $C = {}^{**}_{n}C^{s}_{r}(\boldsymbol{q}; u,v; \mathbf{a},\mathbf{b}; g, h)$ - jest ona tożsama z przestrzenią ${}^{*}_{n}C^2(u,v; \mathbf{c},\mathbf{d}; t+u; h)$, ale jej zastosowanie (a raczej zastosowanie jej symbolu) będzie dla nas wygodniejsze oraz zdefiniowaną w niej akcję Maupertuis, to jest funkcjonał (3.5.1).

Ustamy funkcje $\boldsymbol{q}$ i połóżmy

$$w_{\boldsymbol{d}}(a) := \mathbf{T}[u; \boldsymbol{q} + a\boldsymbol{d}; h].$$

Zgodnie z definicją przestrzeni $\,^{**}_{n}C^{s}_{r}\,(\boldsymbol{q}\,; \mathrm{u,v}; \mathbf{a,b}; g; \mathrm{h})$ będziemy mieli

(3.7.7) $$w_{\boldsymbol{d}}(0) = \mathrm{v}.$$

Połóżmy też

$$^{*}h_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}}(\mathrm{a}) := {}^{*}\mathbf{A}_{t}\,[\mathrm{u};\, \mathbf{c},\mathbf{d};\, \boldsymbol{q} + \mathrm{a}\,\boldsymbol{d}]$$

Może warto wypisać ten ostatni wzór w sposób wyraźny

$$^{*}h_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}}(\mathrm{a}) = \int_{\mathrm{u}}^{w(\mathrm{a})} t \circ (\boldsymbol{q} + \mathrm{a}\boldsymbol{d},\, \dot{\boldsymbol{q}} + \mathrm{a}\,\dot{\boldsymbol{d}}\,).$$

Będziemy uważać za funkcje **d** dopuszczalne, takie, że dla nich funkcja bę.d istnieje w otoczeniu zera

Ze względu na nieco inny schemat tworzenia tutaj funkcji *h* niż było to podane wzorem (3.7.4) musimy przyjąć nowe definicje

DEFINICJA 3.7.6. Nazywamy sfebą *wariacją całki* (3.7.4) funkcjonał

(3.7.8) $$\mathbf{W}[\boldsymbol{q}, \boldsymbol{d}] := \frac{d}{d\mathrm{a}}\, {}^{*}h_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}}(\mathrm{a})\Big|_{\mathrm{a}=0},$$

jeśli jest on liniowy względem swej drugiej zmiennnej.

DEFINICJA 3.7.7. Słabymi funkcjami stacjonarnymi całki (3.7.4) nazywamy funkcje należące do przestrzeni $\,^{*}_{n}C^{2}(\mathrm{u};\ \mathbf{c},\mathbf{d};\ t + u;\ \mathrm{h})$, takie, że dla każdego dopuszczalnego elementu ***d*** mamy

$$\mathbf{W}[\mathbf{q},\mathbf{d}] = 0.$$

A więc by znaleźć ewentualne słabe funkcje stacjonarne całki (3.7.4) musimy zacząć od obliczenia pochodnych (3.7.8) funkcji *hq ,d w* punkcie zero, to jest obliczyć pochodne (względem parametru) całki

$$\frac{d}{d\mathrm{a}} \int_{\mathrm{u}}^{w_{\boldsymbol{d}}(\mathrm{a})} t \circ (\boldsymbol{q} + \mathrm{a}\boldsymbol{d},\, \dot{\boldsymbol{q}} + \mathrm{a}\,\dot{\boldsymbol{d}}\,)$$

- otrzymamy w ten sposób słabą wariację akcji Maupertuis.

Powszechnie znany jest wzór (by uniknąć wątpliwości, zaznaczamy tutaj wyjątkowo zmienną całkowania):

$$\frac{d}{da}\int_u^{w(a)} f(a,t)\,dt =$$

$$(3.7.9) \qquad = \int_u^{w(a)} \frac{\partial}{\partial a} f(a,t)\,dt + f(a, w(a)).\frac{d}{da}w(a)$$

na różniczkowanie całki względem parametru występującego zarówno w (górnej) granicy całkowania jak i w funkcji podcałkowej (patrz, na przykład **[48],** str. 205).

Oznaczmy - dla ustalonego $\boldsymbol{d}$ -przez ***V{q,d,*** a) wielkość (3.7.9) w której przyjęliśmy

$$f(a,t) := t(\boldsymbol{q}(t) + a\boldsymbol{d}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t) + a\dot{\boldsymbol{d}}(t)),$$

$$w(a) = w_{\boldsymbol{d}}(a).$$

Mamy go zastosować dla a = 0 - zakładamy, że zrobiliśmy wystarczająco mocne założenia, by nasze pochodne były ciągłe w punkcie 0. Celem obliczenia wyrażenia (3.7.9) połóżmy

$$V_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}) := \int_u^v \frac{\partial}{\partial a} t(\boldsymbol{q}(t) + a\boldsymbol{d}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t) + a\dot{\boldsymbol{d}}(t))\Big|_{a=0} dt,$$

$$V_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}) := t(\boldsymbol{q}(v), \dot{\boldsymbol{q}}(v))\frac{dw_{\boldsymbol{d}}}{da}(0).$$

Z (3.7.7) mamy $w_d(0) = v$, więc oczywiście

$$V(\boldsymbol{q},\boldsymbol{d};a) = V_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}) + V_2(\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}).$$

Po dość długich, ale standardowych rachunkach otrzymamy

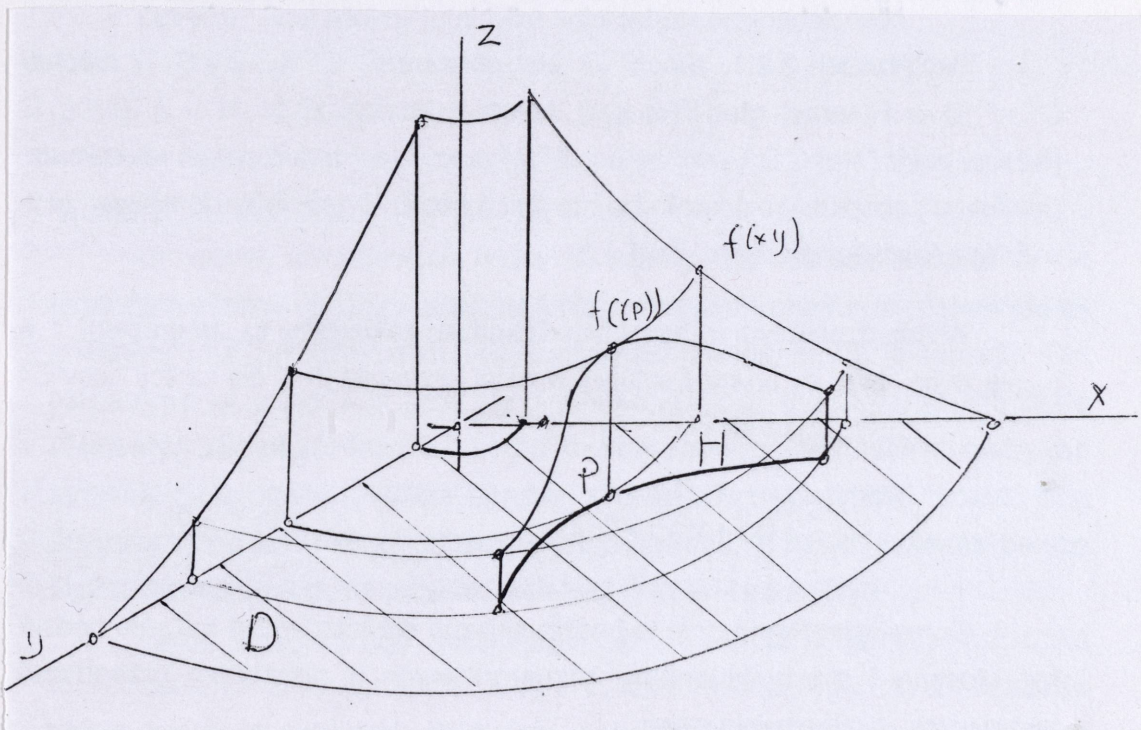
$$(3.7.10) \qquad V_1(\boldsymbol{q},\boldsymbol{d}) = \int_u^v \sum_{i=1}^n \boldsymbol{E}_i[t; q_1, ..., q_n]\, d_i$$

(przy ostrożniejszym przeprowadzaniu przekształceń otrzymalibyśmy w podcałkowej sumie nie lagrange'iany, lecz wyrażenia całkowo-różniczkowe, które wymagają słabszych założeń, ale nie chcemy tu, na takie wzmocnienie wyników, tracić czasu).

Gdyby nie było wyrażenia ***V↑(q,d),*** to też standardowymi rozważaniami wyniknęłoby stąd (z założenia, że rozpatrujemy ***V↑(q,d)*** zdefiniowanego dla a = 0 i dla wszystkich dθDuszczalnych funkcii ***d).*** że mieiscowe minimum akcii

Maupertuis musi spełniać równania Eulera-Lagrange'a (tutaj są nimi równania Lagrange'a II rodzaju) o funkcji tworzącej *t,* wobec czego z dodania wyrażenia ***V2(q,d)*** musi wynikać (wobec zachodzenia tych związków dla wszystkich dopuszczalnych ***d)*** spełnienie równań Eulera-Lagrange·a o funkcji tworzącej / = = *t-u.* Ale oznacza to, że dodanie ***V2(q,d)*** winno spowodować odjęcie od lewych stron równań Lagrange'a II rodzaju o funkcji tworzącej **f,** lagrange'ianów od funkcji tworzącej u = *u* (qı,..., q_n). Ale ta funkcja nie zależy od wielkości kropkowanych, więc powinne dojść tylko wyrażenia

$$-\frac{\partial u}{\partial q_i}(q_1, ..., q_n).$$



11. Ilustracja do Twierdzenia 3.8.1

Nie będziemy przeprowadzali rachunków, by udowodnić poprawność tego intuicyjnego rozumowania. Nie będziemy ich przeprowadzać, bowiem tutaj wyznaczanie argumentów (czy ewentualnie funkcji stacjonarnych) jest zupełnie nieciekawe, gdyż wiemy, że interesujące nas układy funkcji są nie tylko niemi, ale miejscowymi minimami, i to nawet absolutnymi miejscowymi minimami. A przytym (patrz praca H.D. Błocka **[8])** dowód tego znacznie silniejszego wyniku jest nieporównanie prostszy (pojęciowo) i krótszy rachunkowo niż pokazana w tym paragrafie droga. Najwyżej należałoby jeszcze pokazać, że owe minima są tymbardziej słabymi (i mocnymi) argumentami (funkcjami) stacjonarnymi.

Dlaczego więc załączyłem ten długi i dość zawikłany (bez do końca udowodnionych wyników) paragraf ? Po prostu dlatego, że wydaje mi się, że dostarcza on jeszcze jednego argumentu za małym sensem umieszczania zasady Maupertuis w wykładach mechaniki teoretycznej...

3.8. Zasada Maupertuis jest "kulawa". Zauważmy pewien dość banalny fakt (patrz - na przykład - **[86]),** którego znajomość za chwilę się nam się przyda. A mianowicie weźmy pod rozwagę jakąś funkcję *f* zdefinowaną i różniczkowalną w sposób ciągły w dowolnym obszarze DC $\mathbf{R_n}$. Niech p będzie dowolnym punktem obszaru D, w którym gradient funkcji *f* nie znika. Mamy wtedy:

TWIERDZENIE 3.8.1. *Niech* D *jest obszarem* CR_n, peD */' niechaj* C^1 *3 f*: D → R oraz grad f(p) ≠ 0, *to wtedy istnieje zbiór* H := Z^-(p) **C** D *(istnieje zbiór* Z^+(p) CD), *taki, że* p e *Z* ~(p) *oraz* p *jest argumentem maksimum (minimum) absolutnym funkcji f* /H , *to jest funkcji f obciętej do zbioru* H = = Z ^(p)) *(obciętej do zbioru* Z^+(p)).

W twierdzeniu tym (o banalnym dowodzie) zakładamy tu, że gradient *f* \W **Po** nie znika, na to by uniknąć sytuacji w jakiej jest punkt (0,0) dla funkcji klasy C^2

$$f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{dla } x^2+y^2=0 \\ (x^2+y^2)^6 \, sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & \phantom{\text{dla }} x^2+y^2>0\,. \end{cases}$$

Oczywiście, twierdzenie to będzie słuszne dla każdego n > 2. Ale będzie też słuszne i dla funkcjonałów rozpatrywanych w obszarach przestrzeni funkcyjnych. A mianowicie mamy

TWIERDZENIE 3.8.2. *Niech* D *jest obszarem* przestrzeni C, *p* e D */ niechaj* **I/**: D → R, *o funkcji tworzącej f* e C^2, *jest całką typu* (3.4.1) *spełniającą silny warunek Zermeli, to wtedy istnieje zbiorY~(p)* C D *(istnieje zbiór* Y^+(p) CD), *taki, że p* e Y^(p) *oraz p jest argumentem maksimum (minimum) absolutnym funkcjionału* **h** *w zbiorze Y~(p) (w zbiorze* Y^+*~(p)).*

DOWÓD. Połóżmy

$$^*Y^-(\boldsymbol{p}) := \{\, \boldsymbol{q} : I_f[\boldsymbol{q}] < I_f[\boldsymbol{p}] \,\}\,.$$

W zbiorze $Y^-(\boldsymbol{p}) := {}^*Y^-(\boldsymbol{p}) + \{\boldsymbol{p}\}$ element *p* będzie argumentem minimum (i to absolutnego) całki I/. c.n.d.

Wynik ten nie jest ciekawy, bowiem uzyskane zbiory nie muszą być nawet spójne. Ale możemy uzyskać nieco mocniejszy (ale niewiele elegantszy) wynik :

TWIERDZENIE 3.8.3. *Niech* D *jest przestrzenią Banacha oraz niech* **If** : D → R *jest całką typu* (3.4.1) *o funkcji tworzącej f* $\in C^2$, *spełniającą silny warunek Zermeli. Jeżeli* **p** e D *i wariacja całki* **1/** *nie znika w tym punkcie tożsamościowo, to wtedy istnieje spójny zbiór* Z ~{p) C D {*istnieje spójny zbiór* $Z^+(p)$ C D), *taki, że* **p** e Z ~{p), Z ~{p) — {p} *jest zbiorem niepustym oraz* **p** *jest argumentem maksimum {minimum) absolutnym funkcjonału* **h** *w zbiorze* ***ZZ{p)*** {*wzbiorze* $Z^+(p)$).

DOWÓD. Rozpatrzmy tutaj tylko najprostszy przypadek całki

$$(3.8.1)\qquad \mathbf{I}_f[u,v;\boldsymbol{x}] := \mathbf{I}_f[u,v;x_1,\ldots,x_n] := \int_u^v f\circ(j,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$$

w zbiorze ${}_nC^s$(u,vjc,d).

Oznaczmy półtradycyjnie przez δ/ =: **W [p,** δx] wariację tej całki w ustalonym punkcie **p.** Przy ustalonej funkcji *f* staje się ona funkcjonałem jednej zmiennej *dx* (niezręcznie, acz tradycyjnie zwanej wariacją funkcji). Dla rozpatrywanej przez nas całki If i zbioru ${}_nC^s$(u,vj **c,d),** wariacjami będą elementy zbioru ${}_nC^s$(u,vj **0,0).** Dla innych zbiorów w których rozpatrywać możemy naszą całkę (lub dla bardziej skomplikowanych całek), konstrukcja zbioru wariacji jest naogół bardziej skomplikowana, a nawet czasami bardzo skomplikowana (patrz, na przykład, książka G.D. Bl i s s a [7]).

Skoro dla naszego ustalonego **p** wariacja **W[p,** δx] nie znika tożsamościowo, to istnieje wariacja δy ≠ *0*, taka, że **W[p,** δy] ≠ 0, dla ustalenia uwagi, niech na przykład, **VK[p,** δy] < 0. Z własności wariacji całek (ich jednorodności względem drugiej zmiennej) wynika, że będzie też (mamy przecież już ustalone **p** i y)

$$w(a) := \boldsymbol{W}[\boldsymbol{p}, a\delta\boldsymbol{y}] = a\,\boldsymbol{W}[\boldsymbol{p}, \delta\boldsymbol{y}] < 0.$$

dla a > 0. Wynika stąd, że istnieje $\bar{a}$ >0, takie że dla 0 < a < $\bar{a}$ będziemy mieli

$$\mathbf{I}_f[u,v;\boldsymbol{p}+a\,\delta\boldsymbol{y}] < 0.$$

Połóżmy

$$L^- := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + a\,\delta\boldsymbol{y},\ 0 < a < \bar{a}\},$$

a więc dla xeL mamy If[u,v;x] < 0.

Oznaczmy

$$**Z^-(p) := \{ q : I_f[q] < I_f[p] \}$$

W zbiorze $*Z^-(p)$:= $**Z^-(p)+$ ***{p}*** element ***p*** będzie oczywiście argumentem minimum (i to absolutnego) całki 1/. Oznaczmy przez $\bar{Z}(p)$ tę składową zbioru *Z^(p), która zawiera punkt p - jest ona z definicji zbiorem spójnym (i - oczywiście - nie pustym). A wobec tego, że L" C Z "(p), a zbiór L~ zawiera conajmniej dwa różne punkty (a nawet ich continuum). Skąd i spójny zbiór Z~(p) zawiera conajmniej dwa różne punkty, a więc zawiera ich continuum.

Wychodząc z podobnie zdefiniowanego zbioru $**Z^+(p)$ oraz odcinka L^+ zdefiniowanego dla $a^+ < a^- < 0$ otrzymamy zbiór w którym pjest maksimym absolutnym, podobnie będzie, gdy będzie W[p, óy] >0. c.n.d.

W gruncie rzeczy, twierdzenie to jest dość banalne, bowiem zbiór Z^(p) nie musi mieć jakiejś "przyzwoitej" struktury (nie jest ono obszarem, ani zbiorem domkniętym - tyle tylko, że zawiera w sobie conajmniej odcinek prostej). Natomiast nie banalne może być wyznaczenie jakiegoś elegancko zdefiniowanego (i o jasnej strukturze) podzbioru Y zbioru Z "(p), takiego że p e Y. W każdym takim zbiorze oczywiście będzie p argumentem maksimum (minimum) absolutnym funkcjonału ***If.***

Z twierdzernia tego wynika, że jeśli weźmiemy pod rozwagę dowolny ruch y nie będący ruchem rzeczywistym, należący do zbioru $_nC^s$(u,vj **c,d),** to można znaleźć dwa podzbiory tego zbioru, takie, że w jednym z nich y będzie argmentem minimum działania Hamiltona, a w drugim argumentem jego maksimum.

Weźmy pod rozwagę całkę

$$(3.8.2) \qquad \mathbf{I}_f[u,v;\boldsymbol{x}] := \mathbf{I}_f[u,v;x_1,\ldots,x_n] := \int_u^v t \circ (j,\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$$

oraz ruch rzeczywisty **y.** Jeżeli tylko potencjał układu ***u*** nie jest stały w żadnym podobszarze swej dziedziny, to wariacja tej całki ⅛ w żadnym punkcie o ustalonej pierwszej **y** zmiennej nie znika tożsamościowo względem drugiej zmiennej, bowiem wtedy znika wariacja całki 1/. Zastosujmy teraz twierdzenie 3.8.3 do całki (3.8.2). Otrzymamy zbiór w którym dany ruch **y** jest jej argumentem minimum. Ale w żadnym razie nie otrzymamy w ten sposób Zasady Maupertuis - bowiem w Twierdzeniu 3.8.3 (przynajmniej w udowodnionej przez nas jego wersji) wyszliśmy ze zbioru $_nC^s$(u,v; **c,d)** i otrzymaliśmy jakiś jego podzbiór, natomiast w Zasadzie Maupertuis wychodzimy od innego zbioru $^*C^s_n$ (u; **a,b;** *g*, h). W Zasadzie Maupertuis modyfikuje się też granice całkowania : mamy więc znacznie większą swobodę działania niż nam to dopuszcza Twierdzenie 3.8.3 i dlatego intuicyjnie wydaje się nam oczywiste, że tym bardziej startując z dużego zbioru C otrzymamy ruchu rzeczywisty będący argumentem minimum (miejscowego) absolutnego akcji Muapertuis w odpowiednim (wystarczająco "małym") podzbiorze zbioru C.

Można wykazać słuszność tych intuicji. Bowiem Twierdzenie 3.8.3 może być bardzo wzmocnione : warunek Zermeli może być zastąpiony słabszym założeniem, a nawet całka **h** może być zastąpiona elementem dość szerokiej klasy funkcjonałów.

Otóż jak już dawno temu zauważono (patrz - choćby - **[69]),** przykładem zastosowania takiego uogólnionego Twierdzenia 3.8.3 jest Zasada Maupertuis.

Funkcjonał * *At* [u; *q]* dany wzorem (3.5.1) zdefiniowany jest w „bardzo dużym" zbiorze $_nC^s$(a;c,d). Do funkcjonału *Af tego zbioru i do ruchu rzeczywistego ***x°*** dobieramy "mniejszy" zbiór $^{**}C^s_n$(x°; u,v; **a,b;** *t* + *u* ; h) (który, jak wiemy, jest równy zbiorowi $_n{}^*C^s$(a,b; c,d; *t* + u; h)), pełniący tu funkcję zbioru Z^(p). Oczywiście

$$^{**}{}_nC^s(\boldsymbol{x}^\circ; u,v; \mathbf{a,b}; t+u; h) \subset {}_nC^s(a,b; \mathbf{c,d}; t+u; h)$$

(oraz tym bardziej jest on zawarty w zbiorze $_nC^s$ (a; **c,d)).** A więc Zasada Maupertuis (nawet w swej absolutnej postaci Blocka-Maupertuis) jest wynikiem całkiem banalnym.

Możnaby też i inne podzbiory typu Z^+(p) zbioru $_nC^s$(a,b; **c,d;** f+ *u)* dobierać tak by ruch rzeczywisty był w nich argumentem conajmniej miejscowego minimum akcji Maupertuis. Ale - trzeba to podkreślić - że otrzymane w ten sposób twierdzenia nie byłyby już żadnymi Zasadami Maupertuis.

Widoć tu wyraźnie, iż Zasada Maupertuis (Twierdzenie 3.5.1) jest - w gruncie rzeczy - wynikiem dość banalnym. Ciekawe jest tu jedynie to, że skoro funkcją tworzącą akcji Maupertuis jest kinecjał *t* (po podstawieniu czasowym dający energię kinetyczną poruszającego się układu punktów), to zbiór mający własności wyżej wspomnianego zbioru H := Z^(p) ma dość prostą (i elementarną) definicję opartą na funkcji *t* + ^{1}ıv (po podstawieniu czasowym dającą całkowitą energię mechaniczną tego układu punktów). Ale jest to tylko ciekawostka, o korzeniach tkwiących w historii mechaniki.

Uwaga G. Prangego (zresztą, to chyba nie on był jej pierwszym autorem) ma pozornie inny charakter - mówi ona, że na to by udowodnić wariacyjną Masadę Maupertuis dobiera się (jaka to zrobił - na przykład - O.L. H ó l d e r) specjalny sposób wariacji (w danym wypadku wariacja z czasem właśnie O.L. Hōld era) i że w ten sposób (oczywiście wariacjami innych typów) można udowodnić każdą - w zasadzie - zasadę wariacyjną. Ale tę "wariacyjną" uwagę łatwo można przetłumaczyć na nasz język minimum i dobierania (ogólniejszego niż w Twierdzeniu 3.8.3) odpowiedniego zbioru **Z^(p).**

Ponieważ nie podaję odpowiedniego uogólnienia Twierdzenia 3.8.3, więc może bardziej przekonywujący zwolenników Zasady Maupertuis będzie przykład całek typu (3.4.1), ale w których funkcją tworzącą całki (funkcją podcałkową) nie będzie funkcja /, lecz będzie na przykład funkcja *f*= *JI* lub też funkcja *f* = $u^2+ \sqrt{7}$, dla których i dla ruchów rzeczywistych istnieją odpowiednie zbiory, w których owe ruchy stają się argumentami minimów (maksimów) całek mających te funckje za funkcje tworzące. Oczywiście efektywne opisanie takich zbiorów jest na pewno trudne i zuepłnie nie ciekawe.

3.9. Omówienie własności obu Zasad. Dla układów o jednym stopniu swobody Zasada Maupertuis jest banalna, gdyż zbiór ruchów porównawczych składa się z jednego tylko ruch (rozpatrywanego ruchu rzeczywistego). Natomiast dziedziną działania Hamiltona dla takich układów jest nieskończony zbiór funkcji, w którym ruch rzeczywisty jest argumentem minimum (miejscowego, absolutnego).

Dla układów o conajmniej dwóch stopniach swobody Zasada Maupertuis przestaje być zasadą banalną. Ale i tak dostarcza ona argument minimum w znacznie mniejszym zbiorze funkcji niż Zasada Hamiltona. Wprawdzie pod znakiem całki mamy w definicji akcji Maupertuis funkcję prostszą (i intuicyjnie będącą tutaj bardziej na swoim miejscu) niż w Zasadzie Hamiltona (która z kolei wynika niemal natychmiast ze spełniania przez ruch rzeczywisty równań Lagrange'a II rodzaju), ale za to ma ona nieustaloną górną granicę całkowania, zależną od całkowanej właśnie funkcji. Jest to skutek definicji zbioru w którym jest zdefiniowana akcja Maupertuis, rzecz jednak leży w tym, że - jak już wiemy - dla każdej funkcji (każdego) funkcjonału (przy bardzo słabych założeniach o jej, ewentualnie jego, dziedzinę) i dla każdego elementu tej dziedziny można znaleźć taki podzbiór tej dziedziny, że ów element stanie się argumentem minimum funkcji (funkcjonału) w owym podzbiorze. Gdyby jeszcze ów podzbiór występujący w Zasadzie Maupertuis miał jakąś prostą definicję, lub był w jakimś sensie bardzo intuicyjny, to możnaby się z tą Zasadą jakoś pogodzić, ale w sytuacji jaka tu rzeczywiście istnieje, to Zasada ta winna ona przenieść się z podręczników mechaniki dla studentów do niskonakładowych monografii historii matematyki czy mechaniki.

Nieporęczność, nieużyteczność i nieintuicyjność Zasady Maupertuis poświadcza jej historia : 150 lat (1746 - 1896; lat, które możnaby nazwać latami jej „błędów i wypaczeń"), lub nawet prawie 225 lat (1746 - 1970) w czasie którym "walczono" o jej poprawne sformułowanie i o jej poprawne, a potym też i o jej eleganckie udowodnienie.

Rozdział IV - ZASADA MAUPERTUIS W XIX WIEKU

«Les idées qui ne sont pas claires,
ne se prononcent pas clairement »

Trawestacja znanego francuskiego powiedzenia :
«Les idées claires ce prononcent d'une façon claire».

Étudiez et la foi vous viendra !

Prawdziwa (lub rzekoma) odpowiedź J. d'Alemberta na wyrażone wątpliwości co do poprawności Analizy.

4.1. Trudności. Swego czasu nosiłem się z zamiarem napisania (krótkiej) notki pod tytułem *„Dlaczego nie można napisać historii Zasady Maupertuis w okresie* 1746 - 1895 " (nie notki ; *„Dlaczego ja nie mogę napisać historii Zasady Maupertuis* w *okresie* 1746 - 1895") i w pewnym sensie - mimo niniejszej publikacji - do dziś podtrzymuję tezę zawartą w proponowanym tej notki tytule. Chodzi po prostu o to, że nie tylko wszystkie prace o Zasadzie Maupertuis, które powstały przed 1896 rokiem zawierają - z dziejszego punktu widzenia - wyniki bądź wręcz fałszywe, bądź przynajmniej niedostatecznie uzasadnione. Ale, co gorzej, prace te są tak sformułowane, że trudno jest wskazać palcem : tu w tym miejscu jest luka w rozumowaniach (lub też błąd). Ich autorzy mieli jakieś intuicje (z zakresu rachunku wariacyjnego i z zakresu mechaniki teoretycznej), ale nie potrafili tych intuicji poprawnie uzasadnić. Można powiedzieć, iż wiedzieli, że dzwonią, ale nie wiedzieli w którym kościele. Mv nip 7namv ich intuicii fiak wszplkip intuicip hvlv to nrzecież tvlko ich subjektywne przekonania) i dlatego nie wiemy jak sensownie referować ich poglądy - oczywiście można by ograniczyć się do dosłownego cytowania ich prac, ale to nie dałoby żadnej korzyści czytelnikom takich referatów. Nawet gdyby byli to czytelnicy dobrze obznajmieni z ówczesnym stanem matematyki (jej aparatem pojęciowym i ze znanymi jej rezultatami).

Ówcześni matematycy, z reguły w swych wypowiedziach, nie używali kwantyfikatorów (one też były zastępowane intuicjami). Często wypowiedzi ówczesnych matematyków zawierały explicite lub tylko implicite słowo "naogół". A przecież jeśli coś zachodzi "naogół", to znaczy, że z punktu widzenia logiki coś zachodzi lub może nie zachodzić. Natomiast wedle intuicyjnego ich przekonania autorów znaczyło to, że coś ma nie zachodzić "rzadko", przyczym w XX wieku okazało się w wielu wypadkach, że to coś co miało naogół zachodzić "naogół" właśnie zachodzi wyjątkowo - klasycznym przykładem jest tu przekonanie, że "naogół" funkcje ciągłe są niemal wszędzie różniczkowalne, a tymczasem, jak dziś dobrze wiadomo, funkcje mające choćby jedne punkt w którym są różniczkowalne są wyjątkami (w pewnym dobrze zdefiowanym sensie) w zbiorze wszystkich funkcji ciągłych... To też bardzo utrudnia sensowne referowanie XIX-wiecznych wyników tyczących się Zasady Maupertuis. Niemniej jednak trzeba pamiętać, że olbrzymia większość wyników matematyki XVVIII- i XIX-wiecznej daje się - najczęściej po odpowiednim przeformułowaniu - i dzisiaj udowodnić.

Jak dalej zobaczymy, dużą rolę w poprawnym formułowaniu Zasady Maupertuis odgrywają granice całkowania odpowiednich całek. Dlatego warto tu przypomnieć historię ich stosowania (patrz - na przykład - Florian C a j o r i **[11]**, t.II, str. 228, 242 - 252, szczególnie str. 250). Sam symbol całki $\int$ (stylizowana litera" S ") wprowadził Godfryd Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) jeszcze w ostatniej ćwierci XVII wieku - nie zawierał on jednak granic całkowania. Dopiero L. Euler zaczął odczuwać potrzebę ich zaznaczania w trzeciej ćwierci XVIII, ale robił to innych miejscach odpowiednich wzorów, niż my to dziś robimy. Natomiast nasze miejsca na zaznaczanie granic całkowania służyły od czasu do czasu do zapisu innych informacji (na przykład do zapisu zmiennej całkowania *x*, którą my teraz zapisujemy w zestawie *dx*).

Pierwszym, który stosował nasz sposób zapisu całki oznaczonej był Jean-Babtiste Joseph de Fourier (1768 - 1830) koło 1820 roku. Od razu wszedł on do zasobu symboli matematyki, ale nie znaczy to żeby był on w XIX wieku powszechnie stosowany. Jeszcze Henryk Hertz (1857 - 1894) w pracy **[25]** pisanej po 1890 roku wprawdzie zaczyna niektóre nowe rozdziały (patrz - na przykład niżej - jego § 625, nasz n^{θ} 4.7) od wypisania całki oznaczonej z zaznaczonymi granicami całkowania, ale później stale opuszcza te granice w swych wzorach. Dziś, sto lat później, kiedy całki "nieoznaczone" występują w praktyce wyłącznie w wykładach rachunku różniczkowego i całkowego (i ćwiczeniach) poświęconych „elementarnym metodom całkowania" oraz w wykładach poświąconych elementarnym metodom rozwiązywania równań różniczkowych (a ponadto matematycy często stosują - dla uproszczenia - te zapisy w swych brulionowych rachunkach), trudno nam jest zrozumieć przyczyny stosowania takiej symboliki. Szczególnie, że - jak dziś to dobrze wiemy - prowadziło to często to błędów. I dlatego to nie zaznaczanie granic całkowania w symbolu całki ∫... *dx* nie ułatwia dziś studiowania starych (nawet tych tylko z przed 1914 roku) prac.

Może wypowiedziałem się wyżej za ostro, że nie można napisać historii Zasady Maupertuis w okresie 1746 - 1896. Może mogły ją jednak napisać napisać ktoś, kto doskonale opanował oznaczenia, pojęcia i wyniki matematyki tego okresu. Osoba która by nie tylko wiedziała jakie i kiedy wyniki opublikowano, ale też kiedy weszły one naprawdę w świadomość, jeśli nie wszystkich matematyków, to przynajmniej specjalistów z tej dziedziny. I która potrafiłaby sobie wyrobić intuicje podobne do intuicji do ówczesnych matematyków (podobne, gdyż o takich samych nie może być nawet mowy - zresztą każdy z ówczesnych matematyków musiał mieć, przynajmniej częściowo, różne intuicje). Pewnie nie mam racji, ale przynajmniej w Polsce, nie widzę żadnego kandydata na autora takiego artykułu o Zasadzie Maupertuis w XIX wieku (a tym bardziej na autora jakiejś wyczerpującej monografii na ten temat). W każdym razie musiałby to historyk nauki (matematyki) o doskonałym "warsztacie" - nie ma mowy by temat ten zaatakować "z drogi". Oczywiście, że nie chodzi mi tutaj o sporządzenie jakiejś listy prac (z bezkrytycznymi streszczeniami) na ten temat, czegoś w stylu monografii [90] Izaaka Todhuntera (1820 - 1884), napisanej 140 lat temu. Wprawdzie jest ona poświęcona nie mechanice, lecz rachunkowi wariacyjnemu, ale rozpatrywany przez nas dział mechaniki należy też i do rachunku wariacyjnego i jak on był - dobrze to widać z książki I.Todhuntera - tylko bagnem.

Zauważmy, że wszystkie te uwagi co do trudności opracowania historii Zasady Maupertuis odnoszą się też do znacznie szerszego tematu jakim jest owo bagno, czyli historia rachunku wariacyjnego w XIX wieku, a raczej historia rachunku wariacyjnego przed około 1880 rokiem, to jest przed pracami Karola Weierstrassa (1815 - 1897) i P.D.G. du Bois-Reymonda, a nawet historia rachunku wariacyjnego przed pracami D. Hil berta (patrz [26]) z początku XX wieku. Mówię tu o tym, gdyż proponowano mi, bym wygłosił na XIV Szkole Historii Matematyki referat o historii rachunku wariacyjnego w XIX wieku. Odrzuciłem tę propozycję, gdyż opracowanie historii tego działu matematykiw XIX wieku, jest jeszcze trudniejsze niż opracowanie historii Zasady Maupertuis w tym okresie : poszczególne prace z zakresu rachunku wariacyjnego są równie mętne jak prace poświęcone Zasadzie Maupertuis, tyle, że jest ich znacznie więcej...

Dlatego też ograniczę się tylko do krótkiego omówienia tylko niektórych wcześniejszych prac o Zasadzie Maupertuis z okresu między działalnością P.L. Maupertuis, a pracą O.L. H ó l d e r a. Dokładniej omówię tylko ostatnią pracę na ten temat z tego okresu, a mianowicie pracę [25] H. Hertza. Ona bowiem dopiero jest - z dzisiejszego punktu widzenia - na tyle (przynajmniej częściowo) poprawnie sfromułowana, że można wskazać w niej łatwo niektóre (acz nie wszystkie) usterki. Oczywiście nie będę omawiać wszystkich poprzedzających ją prac - chociażby dlatego, że jest ich zbyt wiele - ale mimo to chciałbym przekonać czytelników, że w tym okresie było ciągłe zainteresowanie tą Zasadą i że - mimo to przez kilkadziesiąt lat nie umiano sobie dać z nią rady. Może właśnie dlatego Zasada ta wzbudziła takie zainteresowanie ? A może zainteresowanie nią wynikało z prostoty występującej w sformułowaniu tej Zasady funkcji podcałkowej (funkcji tworzącej całki), utożsamianej z energią kinetyczną układu (acz, na prawdę, był to kinecjał). Bowiem nie zauważano, że potencjał (lagrange'owski) i tak musi być wspomniany, tyle, że w definicji zbioru (przestrzeni) w którym ta całka jest rozpatrywana. A równocześnie nie zdawano sobie sprawy z banalności jej sensu fizycznego.

Streszczając, trudności oceny prac XIX-wiecznych polegają na kilku usterkach (z naszego punktu widzenia) całej matematyki tego okresu:

1^0 Nikt wtedy nie mówił o dziedzinach funkcji. Pojęcie to formułowane eksplicite, zjawiło się bardzo późno, a przynajmniej zjawiło się bardzo późno jako pojęcie stosowane na codzień, chyba dopiero koło roku 1900 (myślę, że nastąpiło to pod wpływem badań dziedziny naturalnej funkcji analitycznych).

2° Nie stosowano wtedy też naszego zapisu całek - jak już zauważyliśmy zapisywano je wtedy tak samo, niezależnie od tego czy miała to być całka nieoznaczona czy też oznaczona - bez zaznaczania granic całkowania. W wypadku całek oznaczonych granice całkowania były przyjjmowane w zasadzie w sposób milczący (a tylko rzadko kiedy formułowane, i to wtedy tylko w sposób uboczny).

3° O ile wtedy, mniej więcej wszyscy, stosowali pojęcie różniczki, przynajmniej w intuicyjnie, w tym samym sensie, o tyle pojęcie wariacji (które usiłowano zdefiniować jako uogólnienie pojęcia różniczki - zresztą w pewnym sensie jest ono nim istotnie) w różnych momentach XIX wieku, a nawet u równicześnie żyjących różnych autorów, mogło znaczyć co innego. Warto - na przykład - zauważyć różnice (istotne) w definiowaniu wariacji u L. E u l e r a, J.L de Lagrange'a i C.G.J. Jacobiego (patrz, na przykład, książkę I. Todhuntera [90]).

A tymczasem widzieliśmy jaką rolę odgrywają pojęcia dziedziny funkcji oraz dziedziny funkcjonału (całki) przy poprawnym formułowaniu Zasady Maupertuis. A też jaką rolę odgrywają przy samej jej definicji granice całkowania (zależne od funkcji podcałkowej!). W tych warunkach trudno jest nawet sprawdzać, czy stosowano wariacje w sensie dla nas zrozumiałym (i - oczywiście - poprawnym).

4° Ogólnym grzechem matematyki XIX-wieczne było nie stosowanie w sposób wyraźny kwantyfikatorów. I tu mamy kłopoty ze zrozumieniem odpowiednich sformułowań Zasady Maupertuis : czy zachodzi ona dla *każdej statej* energii (a więc dla wszystkich zachowawczych ruchów porównawczych) czy tylko gdy *istnieje stata* energi (zresztą równa stałej energii rozpatrywanego ruchu rzeczywistego), której są równe stałe h energii porównawczych ruchów (zachowawczych).

5° Do tego często dochodzą mylne wypowiedzi, że minimum poza ogniskiem sprzężonym z początkiem krzywej staje maksimum odpowiedniej całki (porównaj uwagi z końca n° 2.9, Przykład 2.6.1 oraz Przypis [19]).

Wszystko to razem powoduje, że lepiej nie czytać żadnych opracowań, a tylko próbować przegryzać się przez źródła, to jest przez oryginalne prace. Oczywiście o ile napisane są one w znanym czytającemu języku i o ile są one wogóle u nas dostępne (co rzadko kiedy ma w Polsce miejsce w wypadku starszych źródeł). A nawet lepiej nie opierać się na, naogół łatwiej dostępnych, późniejszych tłumaczeniach - każde tłumaczenie jest przecież też interpetowaniem danego tekstu. Czytając opracowania nie poznajemy myśli autora, tylko myśli opracowywającego go interpretatora, lub też myśli interpretatora, którego tekst przepisał (może nawet z błędami) czytany przez nas dalszy opracowywujący ten temat...

4.2. XVIII wiek. Możemy przystąpić do omawiania właściwego tematu tego referatu. Dość beznadziejny spis literatury można znaleźć w bibliografii rachunku wariacyjnego Maurycego Lecat **[44], [45], [46]** oraz **[47].** A właściwie to nie on jest beznadziejny, co beznadziejne jest studiowanie zamieszczonych w nim pozycji, gdyż ich autorzy w XVIII i w XIX wieku naogół przepisywali jeden od drugiego i to teksty, które z naszego punktu widzenia są trudno zrozumiałe i z reguły zawierają liczne podstawowe błędy.

W literaturze podaje się, iż bardzo szybko, zaraz po 1750 roku stwierdzono (na przykładach), że ruch rzeczywisty może nie tylko być argumentem minimum akcji, ale też i argumentem jej maksimum. Tymczasem, jeżeli jakiś ruch jest choćby argumentem słabego, miejscowego minimum akcji, to nie może ani on, ani choćby jego ucięcie do dowolnie małego przedziału, być argumentem maksimum (jakiegokolwiek bądź typu) akcji w zbiorze typu $^{**}C^s_n(x°;\ u,v;a,b;\ t+u;\ h)$. A przecież zgodnie z Twierdzeniem Błocka - rzekomo Maupertuis wszystkie ruchy rzeczywiste układów ortonomicznych (te założenie możnaby zresztą nieco osłabić) są argumentami miejscowych (absolutnych) minimów. Niestety, oryginalne (XVIII-wieczne i późniejsze) prace na ten temat nie były dla mnie dostępne, a nie zauważyłem żeby były one gdzieś dosłownie przytaczane w referujących te "wyniki" pracach historycznych..

Dlatego też nie wiem, czy owo stwierdzenie o istnieniu maksimów akcji jest po prostu stwierdzeniem fałszywym, czy też chodzi w nim tylko o to, że dla "długich" przedziałów czasu argumenty miejscowego minimum mogą (acz nie muszą !) przestać być argumentami minimum (ale nie mogą stać się wtedy argumentami maksimów !), czy też wreszcie, przy dawniejszym złym doprecyzowaniu Zasady Maupertuis, owo maksimum ma zachodzić (wedle naszych dzisiejszych sformułowań) dla innego zbioru lub nawet dla innej całki niż występują one w "naszej" Zasadzie Maupertuis (porównaj też n° 3.8 wyżej oraz Przypis 1θ).

4.3. J.L. Lagrange.. Względnie ogólnie Zasadę Maupertuis, ale tylko dla zagadnienień mechanicznych sformułował dopiero J.L. de Lagrange (1736 - 1813) w 1760 roku, (w pracy **[39]).** Jego wypowiedź tyczyła się ruchów rzeczywistych układów n punktów, odbywających się jedynie pod wpływem sił skierowanych od jednego punktu do drugiego (takie siły występują w układach planetarnych, szczegółowo badanych właśnie przez niego - mówiąc dzisiejszym językiem są to układy punktów w których działają wyłącznie siły wewnętrzne, spełniające silne prawo akcji i reakcji). Wypowiadział on twierdzenie, że przy tych założeniach ruch rzeczywisty jest krzywą stacjonarną całki (stosuję tu pewną modyfikację symboliki ówcześnie stosowanej)

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \int v_i \, ds_i ,$$

gdzie d§ jest "elementem i-tego łuku" krzywej po której porusza się punkt Pj. Niestety ta jego wypowiedź jest trudno zrozumiała - my jej raczej nie rozumiemy, a tylko (w sposób korzystny dla niej) próbujemy ją interpretować. Chciał on też zastosować jakąś zasadę ekstremalną do wyznaczenia kształtu swobodnie zwisającej wiotkiej nici.

Ale o ile nasza interpretacje są poprawne, to jedna z jego sugestii była bardzo ważna. A mianowicie jego sugestia, że ten wynik stosuje się wyłącznie do zjawisk w których zachodzi *Zasada Zachowania Energii* (jest to bardzo istotne, gdyż w ten sposób zaczął się zbliżać, być może, do względnie poprawnej wypowiedzi Zasady Maupertuis).

J.L. de Lagrange zajął się dokładniej (ogólniejszymi) zasadami całkowymi dopiero w swej *Mechanice,* wydanej po raz pierwszy w 1788 roku [patrz **[40]),** ale mimo, iż napisana była ona znacznie wcześniej niż była wydrukowana, to jednak właściwie należy ona (ze względu na swe prekursorstwo) już do matematyki XIX wieku. Natomiast jej drugie, bardzo rozszerzone, już dwutomowe, wydanie z 1811 roku (patrz **[41]),** nawet formalnie (i merytorycznie) należy już do matematyki XIX wieku. Było ono opracowane przez Jakuba Filipa Marię B i n e ta (1786 - 1856) oraz przez Kacpra barona de Prony (1755 - 1839). Dalsze wydania *Mechaniki,* zamieszczane w dziełach zbiorowych J.L. de Lagrange'a były już tylko redagowane (a nie opracowywane) przez Józefa Bertranda (1822 - 1900) oraz Gastona D a r b o u x (1842 - 1917). Wprawdzie drugie wydanie *Mechaniki* jest bardzo powiększone, ale jeśli chodzi o zasady wariacyjne (całkowe) to mało się różni od pierwszego wydania. Badania tych zasad mają wreszcie bardziej systematyczny charakter i podają ogólniejsze sformułowanie Zasady Maupertuis. Niestety budzą one wątpliwości ze względu - choćby - na brak wszystkich potrzebnych założeń. Ponadto, oczywiście (fałszywie) mieszają one znikanie wariacji, a więc stacjonarną wariacyjną Zasadę Maupertuis z ekstemalną Zasadę Maupertuis (i to w postaci, która nie uwzględnia faktu, że może ona dotyczyć wyłącznie ekstremum miejscowego).

Jak już kiedyś napisałem (patrz **[84]** : « *Niestety, moim zadaniem, nie są udane prace Lagrange'a poświęcone zasadom wariacyjnym mechaniki. Nawet* *nieważne jest, że Lagrange nie rozróżnia zasad wariacyjnych i ekstremalnych (mimo iż dobrze wiedział, że znikanie pierwszej wariacji nie jest warunkiem dostatecznym na istnienie ekstremum). Gorzej, iż są one tak mętne, że jedni doszukują się w nich zasady Maupertuis, inni Hamiltona* [patrz - na przykład - komentarze Filipa E.B. J o u r d a i n do przedruków tych prac w **[31] -** dopisane w roku 2000], *wreszcie jeszcze inni zasady Jacobiego ».*

Należy jednak pamiętać, że P.L. de Lagrange w swoim najogólniejszym pojęciu wariacji wprowadzał też i zmianę zmiennej niezależnej. Takie postawienie sprawy jednak nie przyjęło się i pozostało przez prawie cały XIX wiek bez dalszego ciągu. Zastosował je dopiero Otto Ludwik H ó l d e r (1851 - 1937) w pracy **[27],** a właściwie zastosował tylko jego szczególny przypadek, tak zwaną wariację z czasem (Hóldera). O ile wiem nie interesował się on specjalnie historią matematyki i mechaniki, ale w XIX wieku czas nauki płynął wolniej niż teraz i w tym czasie prace P.L. de L a g r a n g e'a dopiero powoli odchodziły do archiwum historii nauki i nawet, jeszcze w czasach jego studiów, zalecano studiowanie oryginalnych prac L a g r a n g e'a (było to o tyle łatwe, że jego *Mechanika analityczna* była w ciągu XIX wieku parokrotnie przedrukowywana, a nowe wydanie jego *Dzieł zbiorowych* właśnie wychodziło koło 1880 roku - patrz **[41]).** I dlatego sugestie P.L.de L ag ra n g e'a mogły były mieć wpływ na dalsze dzieje Zasady Maupertuis.

Nieco później opublikował (patrz **[73]),** niezbyt ciekawe wyniki swych przemyśleń, Benjamin Olinde R o d r i g u e s (1794 - 1851).

4.4. XIX wiek Niemniej jednak, na początku XIX wieku, Zasada Maupertuis była w dalszym ciągu wynikiem conajmniej "podejrzanym". Ale jednak Zasada Maupertuis odegrała jakąś pozytywną rolę, gdyż, niewątpliwie na jej obraz i podobieństwo, udowodnił w 1833, a opublikował w 1834 roku (patrz **[21],** rosyjskie tłumaczenie jest opublikowane w **[67],** na str. 175 - 233) Sir Wiliam Rowan Hamilton (1805 - 1865) nasze Twierdzenie 3.4.1 (raczej w formie 3.4.1 a). Jest to zasada dziś złączona z jego imieniem - zresztą, być może, to nie on ma tutaj priorytet. Sprawa tego priorytetu jest rzeczą skomplikowaną i wymagałaby dalszych badań - niektórzy bowiem twierdzą, że to właśnie J.L. de Lagrange pierwszy ją udowodnił (a nie Zasadę Maupertuis !). Nie można wszakże wykluczyć, że wobec mętności tekstu Lagrange'a nigdy nie da się tego stwierdzić z całą pewnością. Dla mnie osobiście jest rzeczą dziwną, że zasada ta została wypowiedziana aż tak późno - przecież wszystkie jej elementy : funkcja Lagrange'a i równania Eulera-Lagrange'a były znane już w 4 ćwierci XVIII wieku.

Historycy nauki i filozofowie poświęcali w XIX wieku sporo miejsca Zasadzie Maupertuis. Sporo informacji o jej XIX historii - ale informacji wymagających bardzo krytycznego odbioru - znaleźć można na przykład w pracy **[16]** z 1872 roku Eugeniusza D ü h r i ng a (1833 - 1921; tego samego, którego później zwalczał Włodzimierz I. Lenin; 1870 - 1924). E. D u ḧ r i n g uważał, że wpływ metafizyki na fizykę był fatalny. Jego książka jest - dla nas - mało pociągająca, między innemi dlatego, że nie zawiera żadnych wzorów, a tylko "filozoficzne" rozważania o nich. Nieco nieco późniejsza jest praca **[49]** Ernesta Mac ha (1838- 1916).

Dalszymi pracami - do przeczytania, i to pracami matematyków (ale też należy je czytać krytycznie), są prace **[34]** oraz **[35]** Feliksa Kleina (1849 - 1925), praca **[37]** Adolfa K n e s e r a (1862 - 1930), oraz Lwa Salomonowicza Polaka **[68].** Nieco dalszych jezcze informacji o pracach poświęconych Zasadzie Maupertuis można znaleźć w wydrukowanym odczycie Adolfa Mayera **[61].** Ten sam autor próbował uogólnić ekstremalne zasady mechaniki, tak żeby stały się ogólnym wynikiem rachunku wariacyjnego (patrz, na przykład **[60]) -** ale próba ta nie była udana.

Jednak nie tylko matematycy i filozofowie interesowali się osobą P.L. de Maupertuis. Można tu - na przykład - przypomnieć cytowany już wyżej odczyt fizjologa E. duBois-Reymonda wygłoszony 28 stycznia 1889 na posiedzeniu Niemieckiej Akademii Nauk w BERLINIE i opublikowany jako praca **[13].**

W ciągu XIX wieku „stawano na głowie", by wykazać, że wariacja (naogół nie mówiono - jak już zauważyliśmy - o ekstremach, acz o nich stale - implicite - myślano) "całki" mającej pod swoim znakiem energię kinetyczną dla ruchów rzeczywistych znika. Oczywiście - też jak już zauważyliśmy - pisano wtedy tam (od połowy XIX wieku) literę *E,* co odpowiadało, w zasadzie, naszej funkcji *e,* a więc była to bzdura. Oczywiście chodziło o jakiś kinecjał. Ale wszystkie te rozważania - nawet z tą poprawką - jak się zdaje, nie były bez zarzutu. Może nawet w niektórych tkwiły jakieś słuszne drogi rozumowania, ale wszystko to było przedstawiane w sposób całkowicie nie zrozumiały (przynajmniej dziś dla nas, ale być może te rozumowania już wtedy dla współczesnych nie były w pełni zrozumiałe). Stan badań nad Zasadą Maupertuis w końcu XIX wieku znaleźć można, między innemi, w różnych wydaniach podręcznika **[2]** Pawła Appella (1855 - 1930).

Zauważmy, że wszystkie te uwagi co do trudności opracowania historii Zasady Maupertuis odnoszą się też do znacznie szerszego tematu jakim jest historia rachunku wariacyjnego w XIX wieku, a raczej historia rachunku wariacyjnego przed około 1880 rokiem, to jest przed pracami Karola Weierstrassa (1815 - 1897) i P.D.G. duBois-Reymonda, a nawet historia rachunku wariacyjnego przed pracami D. Hilberta z początku XX wieku (patrz [26]).

4.5. C.G.J. Jacobi. Karol Gustaw Jakub Jacobi (1804 - 1851) opublikował swą pierwszą pracę z teorii ekstremalnych (całkowych) zasad mechaniki chyba dopiero w 1837 roku. Najważniejsze w tym zakresie były jego wykłady z zakresu mechaniki analitycznej, które wygłosił w roku akademickim 1842/43. Nie wydał ich sam drukiem (może dlatego, iż mniej więcej w tym czasie stwierdzono u niego początki cukrzycy, w związku z czym całe 12 miesięcy po wygłoszeniu tych wykładów spędził w podróży po Europie). Jednak zrobione z nich notatki przez Karola Wilhelma Borchardta (1817 - 1880) zostały wydane (dopiero) w 1866 przez Alfreda C l e b sc h a (1833 - 1872) jako praca [29]. Acz do drukowanej literatury matematycznej trafiły później, to jednak byty powszechnie już wcześniej znane z notatek (i ich odpisów) dokonywanych przez różne osoby.

Największym wkładem C.G.J. Jacobiego w zasady ekstremalne mechaniki jest sformułowanie i dowiedzenie (?) tak zwanej Zasady Jacobiego. Z dzisiejszego punktu widzenia rzecz wygląda w następujący sposób. Weźmy pod rozwagę pewien układ ortonomiczny (to jest układ skrępowany więzami holonomicznymi regularnymi, skleronomicznymi o realizacji gładkiej i poruszający się pod wpływem sił pozycyjnych, potencjalnych). W takim układzie parametryczne równania więzów mogą być tak obrane żeby funkcje je określające nie zależały explicite od czasu (od zmiennej niezależnej, czyli zmiennej różniczkowania). Wtedy zarówno kinecjał t jak i potencjał u nie zależą explicite od czasu. A więc i funkcja Lagrang'a / nie będzie zależyć w sposób wyraźny od czasu.

UWAGA 4.5.1. *„Równania więzów mogą być dobrane tak, by..."* znaczy, że do danych więzów można znaleźć więzy im równoważne, które już spełniają zadane warunki (tutaj warunkami tymi jest niezależność w sposób wyraźny od czasu t; patrz moje prace **[78]** oraz **[80]**).

Przy przyjętych wyżej założeniach dla rozpatrywanego układu zachodzi Zasada Zachowania Energii (Twierdzenie 3.3.2), a więc równania Lagrange'a II rodzaju mają całkę pierwszą (całkę pierwszą energii), co pozwala zredukować rząd tego układu równań (równy 2k) o jeden. Ponieważ funkcja Lagrange'a / -

jak już stwierdziliśmy - w tym wypadku, nie zależy eksplicite od zmiennej t, więc i te rozwikłane równania różniczkowe o postaci normalnej nie będą miały prawych stron zależnych w sposób wyraźny od tej zmiennej t. Wynika stąd (w znany dobrze sposób) redukcja rzędu układu o dalsze jeden. Obie te redukcje rzędu są niezależne od siebie i - ostatecznie - możemy otrzymać układ 2k—2 rzędu.

Tymczasem można pokazać coś więcej, a mianowicie, że tutaj układ k równań Lagrange'a (równań 2 rzędu) z którego startowaliśmy może być przekształcony nie tylko na jakiś układ 2k—2 rzędu, ale nawet na układ k—1 równań o postaci równań Lagrange'a II rodzaju (a więc też równań 2 rzędu, czyli może być przekształcony na układ 2k — 2 rzędu o pewnej specjalnej strukturze), tylko o innej funkcji tworzącej, mianowicie o funkcji zwanej *funkcją Jakobiego*

$$°i\,(s;\ {}^*q_1, \ldots, {}^*q_{k-1};\ {}^*r_1, \ldots, {}^*r_{k-1}) :=$$

$$:= [\,(c° - u\,(s;\ {}^*q_1, \ldots, {}^*q_{k-1})\; g\,(s;\ {}^*q_1, \ldots, {}^*q_{k-1};\ {}^*r_1, \ldots, {}^*r_{k-1})]^{-1/2},$$

(dodajemy znaczek "°" przy oznaczeniu funkcji *°i*, by nie mylić ją z mengerowską funkcją tożsamościową-selektorem /) gdzie c° jest stałą energii ruchu, *u* jest potencjałem lagrange'owskim z odpowiednim podstawieniem, zaś fukcja *g* jest po prostu kinecjałem *t*, w którym obrano jedną zmienną wyróżnioną (na przykład, może to być jedna ze zmiennych Lagrange'a lub długość łuku s) i w której zastąpiono zmienne n przez inne zmienne, w sposób zależny od obrania zmiennej s (szczegóły - długie i mało pouczające - Czytelnik może znaleźć w **[83]**, na str. 202 i str. 207).

Równania

$$E_i\,[°i\,;\ q_1, \ldots, q_{k-1}] = 0, \qquad i = 1, \ldots, k-1,$$

nazywamy *równaniami eksteemalizacyjnymi Jacobiego.* Mają one pewną (nową) zmienną niezależną (zmienną różniczkowania), która oznaczymy przez s. Może nią być - na przykład, jak już wspomnieliśmy - któraś ze zmiennych Lagrange'a układu, może nią być też długość łuku krzywej ruchu (w odpowiedniej metryce), etc.

Rachunek wariacyjny poucza nas, że te równania Jacobiego - skoro są to równania typu równań Lagrange'a II rodzaju i drugiej postaci - będą równaniami Eulera-Lagrange'a całki

$$\text{(4.5.1)} \qquad \mathbf{J}[a,b;\ \boldsymbol{w}] := \int_a^b °i\,(\boldsymbol{w}, \dot{\boldsymbol{w}})$$

(działania Jacobiego). A więc rozwiązania równań Jacobiego będą argumentami funkcji stacjonarnych całki (4.5.1). Można pokazać, że jeśli dla takiego argumentu nie znika nigdzie wartość bezwględna prędkości (we współrzędnych Lagrange'a), że wtedy przy naszym założeniu, że *układ jest układem ortonomicznym* rozwiązanie *układu równań Jacobiego będzie argumentem minimum absolutnego, miejscowego działania Jacobiego.*

Nie rozumiem dowodu C.G.J. Jacobiego (patrz [29]) - zresztą w nim całka (4.5.1) występuje tylko w sposób milczący (może jest ona sformułowana w jakiejś innej pracy C.G.J. Jacobiego do której nie zdołałem dotrzeć). Ale w każdym razie intuicje C.G.J. Jacobiego musiały być poprawne, skoro jego wynik daje się i dziś utrzymać (patrz **[83]**, str. 200 - 212). Jakiś wkład - trudny dla mnie do ocenienia - miał tutaj (znacznie później) E.T. W h i t t a k e r (patrz [92]), który w swych pracach przeprowadzał podobne redukcje przy pomocy całek pierwszych cyklicznych. Zresztą, wedle mnie, oryginalne prace E.T. W h i 11 a k e r a zawierały liczne luki czy nawet błędy - patrz niżej n° 4.8.

Okazuje się, że flak już wspomnieliśmy) za ową zmienną niezależną s (zmienną różniczkowania równań Jacobiego i zmienną całkowania działania Jacobiego) można przyjąć długość krzywej ruchu. Wtedy odpowiednie równania są względnie najprostsze, a ponadto funkcjonał (4.5.1) staje się całką parametryczną.

Zasada Hamiltona odnosząca się do funkcjonału wyrażonego całką (3.4.1), to jest całką

(4.5.2) $$\mathbf{A}_l\,[q_1, \ldots, q_k] := \int_c^d l \circ (q_1, \ldots, q_k, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k).$$

która ma pod całką funkcję / = *t— u,* sprowadza się metodą Jacobiego do całki której zmienną całkowania jest ów nowy parametr s . Korzysta się dalej z Zasady Zachowania Energii w postaci

$$t + u = c$$

też z wprowadzonymi nowymi zmiennymi i otrzymuje się związek *u = c — t,* skąd

/ = — c + 2f,

którą to wielkość podstawia się do całki (4.5.2) i otrzymuje się w ten sposób akcję Maupertuis. Wszystko to w XIX wieku robiono bez zaznaczania podstawień całek, i - co gorzej - bez zaznaczenia odpowiedniej zmiany granic całkowania (wtedy - acz już wtedy czasem graficznie zaznaczanych - to jednak naogół, jak już zauważyliśmy wyżej, wogóle nie wypisywanych). Poczym robiono jakieś - niezrozumiałe dla mnie (po prostu nie zdołałem znaleźć, w dostępnych mi publikacjach, odpowiednich definicji i twierdzeń) - przekształcenia wariacji całki. Ale - wbrew temu co pokazaliśmy w Części I - chyba - te wariacje robi się tak jakby górna granica całki była stała. A ponadto nigdzie nie jest omówiana stała c - czy to jest jedna stała (równa stałej energii ruchu rzeczywistego), jak być powinno, czy też c jest stałą "dowolną", należącą do jakiegoś dopuszczalnego zbioru jej wartości.

Istotna uwaga : może jednak było coś poprawnego w intuicjach owych badaczy, gdyż ich wyniki dają jednak i dziś utrzymać (przy całkiem innych dowodach). Szczególnie, że - przynajmniej pozornie - droga stosowana w XIX wieku jednak wydaje się iść przez te same etapy co dziś : najpierw ustala się krzywe ruchu (rzeczywistego lub porównawczych - porównaj z naszą Definicję 2.2.2 zbioru ${}_{n}^{*}C^{s}(u;\ \mathbf{a,b};\ g\backslash\ h)$), a później wykorzystując zasadę zachowania energii determinującej wartość bezwzględną prędkości w każdym punkcie krzywej dochodzi się do określenia dopuszczalnych ruchów.

Ale na początku wyżej wypisanego zdania *«może jednak było coś poprawnego w intuicjach owych badaczy »* muszą koniecznie być słowa *„może jednak”*. Gdyż nie moża wykluczyć, że ich intuicje (mimo, iż były różne od intuicji samego P.L. Maupertuis) były jednak całkiem fałszywe, a tylko do nich dało się później dorobić poprawne sformułowanie zasad i ich poprawny dowód. A wszystko to na zgodnie z uwagą (wspominaną choćby przez G.Prangego - patrz **[69]** oraz nasz n° 3.8), że dla każdej funkcji (każdego funkcjonału) i dla każdego (nieosobliwego) punktu dziedziny owej funkcji (owego funkcjonału) można tak obciąć ową dziedzinę, że w tym punkcie fukcja (funkcjonał) miała (miał) minimum absolutne w tak obciętej dziedzinie.

Oczywiście, wyniki C.G.J. Jacobiego podające warunki dostateczne na istnienie ekstremum całki znalazły swoje zastosowanie i rozpowszechnienie w wykładach rachunku wariacyjnego. Ale były one rozważane tylko tam, a nie w podręcznikach i monografiach mechaniki. W tych ostatnich najwyżej bywały one uzasadnieniem (szczegółowo znanym ich autorom i nie przekazywanym przez nich dalej) też o ekstremalnym charakterze owych zasad. *Nota bene* dostateczne warunki C.G.J. Jacobiego nie stosują sią (bezpośrednio) do uzasadnienia ekstremalnego charakteru Zasady Maupertuis.

4.6. H.G. Niewęgłowski. Warto zauważyć, że w najobszerniejszym polskim XIX-wiecznym podręczniku mechaniki teoretycznej **[65]** Henryka Grakcha Niewęgłowskiego (1807 - 1882) brak jest nawet wzmianki o Zasadzie Maupertuis. Nie wiem, czy jest to wywołane, mimo jego objętości, jego dość elementarnym charakterem ? Czy też świadomym rezygnowanaiem z niejasnych wypowiedzi ? Za drugą możliwością przemawiałoby umieszczenie w nim jednak Zasady Hamiltona (t. II, str.327-329), co - przynajmniej z dzisiejszego punktu widzenia - dobrze by świadczyło o autorze i o jego dziele.

4.7. H. Hertz. W końcu XIX wieku wiele hałasu narobiły pośmiertnie wydane (w 1894 roku) *Prinzipien der Mechanik* **[25]** Henryka Hertza (1857 - 1894). Pisał on tę książkę przez 3 ostatnie lata swego życia. Niestety, podał w niej swoją teorię układów skrępowanych więzami (w tej teorii odgrywają wielką rolę różne, tak nazwane przez niego, "ukryte" elementy - masy, cykle, etc.) i dlatego jest ona dość trudno zrozumiała. W pierwszej chwili - z filozoficznego punktu widzenia - po swym ukazaniu się książka ta wydawała się rewelacją (przynajmniej dla filozofów). Niestety, stosowanie jej wyników do konkretnych wypadków jest bardzo trudne, w wielu wręcz praktycznie niewykonalne. Dlatego nie miała ona właściwie żadnego dalszego ciągu i dziś sprawia wiele kłopot swym (teraz już nielicznym, wyłącznie rekrutującym się spośród historyków nauki) czytelnikom - mimo dużej (jak na ową epokę) ścisłości rozważań i bardzo przejrzystej formalnej strony.

Może właśnie ze względu na ową ścisłość i przejrzystość książki H. Hertza warto jej zawartość zreferować i wyszukać w niej błędy. Jej błędy są (chyba ?) typowymi błędami XIX-wiecznej mechaniki, a poza tym są właśnie błędami którym przeciwstawił się dwa lata póżniej O.L. H ö l d e r (patrz **[27]** ; n.b. nie ma wątpliwości, że impuls do tej pracy dała właśnie O.L. H ö l d e r o w i lektura książki H. Hertza- wspomina ją zaraz na początku swej pracy **[27],** patrz reprodukcja 14). Początek, nas interesujących, rozważań H. Hertza jest dość niezachęcający. W § 613 podaje on - w zasadzie - definicję naszej akcji Maupertuis **A?** (patrz niżej).

W § 625 tej książki H. Hertza wprowadza się (bez nazwy) działanie Hamiltona **A/**. W następnym paragrafie formułuje się Zasadę Hamiltona w postaci minimalnej (przyczym tu w samym sformułowaniu twierdzenia - *Lehrsatz* 1 - zupełnie wyjątkowo zapisuje się całkę jako całkę oznaczoną). Ta wypowiedź zawiera wprowadzone przez autora pojęcie *„ukrytych adiabatycznych cykli "* (*„verborgene adiabatische Cykeln "*) systemu. Ale dowodzi (a raczej usiłuje się dowieść) tego twierdzenia tylko w postaci wariacyjnej, a mianowicie próbuje się dowieść, że wariacja działania **A/** ma znikać dla ruchu rzeczywistego - niestety i tego też dowodu nie jestem w stanie zrozumieć. W następnych paragrafach omawia się różne warianty Zasady Jacobiego.

12. Heinrich Hertz

Zresztą H. Hertz tylko ze znikania wariacji funkcjonału **A/** (bez badania - choćby - drugiej wariacji) wyciąga wniosek, że mamy tu do czynienia nawet z minimum (choć parę razy jest zaznaczone, że całka może nie przyjmować dla ruchu rzeczywistego wartości minimalnej), a przecież pisał swą książkę 80 lat po opublikowaniu odpowiednich wyników o istnieniu i wyznaczaniu ekstremów całek przez Adriana Marii Legend re'a (1752 - 1833). Nie mówiąc już nic o warunkach dostatecznych wprowadzonych przez C.G.J.Jacobiego...

W § 639 tej książki mówi się, że Zasada (wariacyjna) Maupertuis, dla ruchów spełniających zasadę zachowania energii wynika z jednej z Zasad Jacobiego - niestety, też nie rozumiem jak to ma następować. Sama zaś ta Zasada formułowana (jako *Lehrsatz* 3) jest jako zasada minimalna. Oryginalne sformułowanie H. Hertza wyraźnie stwierdza, że ruchy porównawcze (nasza terminologia) muszą być ruchami, do których stosuje się Zasada Zachowania Energii i to z tą samą stałą energii co ruch rzeczywisty. Te słuszne zastrzeżenie jest - jak gdyby - poddane w wątpliwość w ostatnim zdaniu § 640. Prawdopodobnie jest to wywołane faktem, że w XIX wieku ciągle jeszcze matematycy w zasadzie nie stosowali kwantyfikatorów i - być może - ówcześni czytelnicy jednak mogli domyśleć się jak, przynajmniej poprawnie, zrozumieć można ten tekst.

Zresztą w tymże § 640 podaje się uwagę, że ten *Lehrsatz* 3 podaje pierwotne sformułownie Zasady Najmniejszej Akcji - co na pewno jest stwierdzeniem fałszywym. Poczym dodaje się, że ta forma Zasady jest nieelegancka, gdyż zawiera w sobie czas (położenie jako funkcję czasu), a przecież odnosi się ona tylko do krzywej ruchu.

Nad omówionym tekstem H. Hertza zastanawiałem się wielokrotnie : zarówno wiele lat temu, gdy miewałem wykłady z mechaniki teoretycznej i z rachunku wariacyjnego jak i w ostatnich latach, gdy zajmowałem się referatem o Zasadzie Maupertuis. Przez ten czas wielokrotnie zmieniałem moją jego oceną. Ale wydaje mi się, że obecnej mojej oceny już nie zmienię.

Książka H. Hertza nie dostarcza żadnego dowodu, tylko propozycję idei dowodu (startowanie z Zasady Jacobiego i przekształcanie jej poprzez Zasadę zachowania Energii). Można się jednak tutaj zastanawiać, czy rzeczywiście obecne dowody (przeprowadzone przy pomocy pojęcia wariacji czy też metodami rachunku wariacyjnego) rzeczywiście wypełniają ten schemat proponowany przez H. H e r tz a ? A więc - mówiąc złośliwie - czy jego tekst składa się z samych luk w dowodzie ? Czy też podobieństwa między ideą Hertza, a rzeczywistymi dowodami są zupełnie przypadkowe ? A więc - też mówiąc złośliwie - czy jego tekst składa się z samych błędów w dowodzie ?

Wszystko to byłoby dość (z dzisiejszego punktu widzenia) kompromitujące dla H. Hertza, gdy nie następujące później paragrafy 641 - 643. W paragrafie 641 wypisuje on 5 całek (patrz reprodukcja 13). Pierwsza z nich przedstawia zcałkowaną Zasadę Zachowania Energii, druga działanie Hamiltona, trzecia i czwarta występują przy formułowania Zasad Jacobiego, a piątą jest właśnie akcja Maupertuis. W § 642 pisze on, że wprawdzie specjalnie wyróżnione wartości niektórych tych całek tworzą prawa fundamentalne, nawet jeśli są one skomplikowane i niejasne. Może chodzi tu też o to, że nie dają się one bezpośrednio uogólnić na układy anholonomiczne (których pionierskim badaczem był właśnie H. Hertz). Dalej pisze on, że stwierdzenie odnoszące się do piątej całki jest iluzoryczne, gdyż tylko bezpodstawnie wydaje się, że ma ona niezależne i proste znaczenie fizyczne :

> 642 ... Verwickelt und undurchsichtig ist aber die Form des Grundgesetzes hier deshalb geworden, weil das Gesetz verwickelten und undurchsichtigθn Voraussetzungen angepaBt ist. Die Aussage, welche sich auf das untere Integral bezieht *[chodzi o całkę przedstawiającą akcję Maupertuis - moja uwaga],* hat dem trügerischen Schein einer selbständigen, einfachen physikalischen Bedeutung.

> {... Tutaj jednak forma podstawowego twierdzenia jest zawikłana i nieprzejrzysta, gdyż samo to twierdzenie jest dopasowane do zawikłanych i nieprzejrzystych założeń. Wypowiedź, która się odnosi do dolnej całki *[chodzi o całkę przedstawiającą akcję Maupertuis - moja uwaga*] oszukańczo wydaje się, że ma niezależne, proste znaczenie fizyczne .}

Paragraf 643 zawiera dalszą (nie jasną dla mnie) krytykę całkowych praw fizyki (może chodzi w niej o to, że nie tworzą one warunków koniecznych i wystarczających, by ruch był rzeczywisty):

> 643 Dass die Natur nicht darauf eingerichtet ist, daB das eine oder das anderejener Integraleein Mimum werde, geht erstens daraus hervor, daB schon in holonomen Systemen bei ausgedehnter Bewegung das Minimum im allgemeinen nicht eintritt, und zweitens daraus, daB es natürliche Systeme giebt, für welche des Minimum niemals eintritt, und für welche nicht einmal die Variation jener Integrale verschwindet. Ein umfassender Ausdruk für die Gesetze der natürlichen Bewegung kann daher auch an keines jener Integrale *[chodzi tu o wymienione wyżej 5 całek, patrz reeprodukcja* 13 - *moja uwaga]* angeknüpft werden, und hieraus nahmen wir das Recht her, den Schein einfacher Bedeutung des letzten Integrales *[i tu chodzi o całkę przedstawiającą akcję Maupertuis - moja uwaga*] für trügerisch zu halten.

> {Natura nie jest urządzona tak, żeby jedna czy druga z tych całek przyjmowała wartość minimalną. Po pierwsze, wynika to stąd, iż już w systemach holonomicznych, przy dłużej trwającym ruchu, naogół nie występuje ich minimum,

$$\int\sqrt{U+h}\sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, m_{\nu}\, ds_{\nu}^{2}}\ ,$$

welches, wiederum bis auf einen konstanten Faktor, das JACOBi'sche Integral ist.

Die physikalische Bedeutung des JACOBi'schen Prinzipes kann nach unserer Auffassung keine andere sein, als die des Lehrsatzes 352, bez. 347, aus welchem es abgeleitet ist; es stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze geben müssen, damit er trotz vorhandener Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegungen zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. Die Gültigkeit auch des JACOBi'schen Satzes erstreckt sich nur auf holonome Systeme.

639 Lehrsatz 3. Beim Übergang eines freien holonomen konservativen Systems zwischen hinreichend benachbarten Lagen ist das Zeitintegral der kinetischen Energie kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System von den gegebenen Anfangswerten zu den Endwerten der sichtbaren Koordinaten überführt, und welche mit demselben gegebenen, in der Zeit, konstanten Werte der mathematischen Energie ausgeführt wird.

Denn nennen wir h den gegebenen Wert der mathematischen Energie, so ist für alle in Betracht kommenden Bahnen **(611)**

$$T-U=K\,,$$

also ist das Integral, von welchem der Satz handelt, nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} T\,dt\ ,$$

bis auf einen konstanten Faktor dasselbe Integral, von welchem der Lehrsatz 2 handelt; der gegenwärtige Satz ist daher **nur eine andere Form, den Inhalt jenes Lehrsatzes auszusagen.**

Die zu dem Lehrsatz 2 gemachten Anmerkungen 1 und 2 finden daher auch hier sinnentsprechende Anwendung.

Anmerkung. Der Lehrsatz 639 giebt die ursprüngliche 640 MAUBERTUis'sche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Diese Form hat vor der JACOBi'schen den Vorzug, dafs sie sich in einfachen Worten aussprechen läfst und daher einen einfachen physikalischen Sinn zu enthalten scheint. Sie hat aber gegenüber der JACOBi'schen Form den Nachtheil, dafs sie unnötigerweise die Zeit enthält, obwohl doch die eigentliche Aussage nur die Bahn des Systems bestimmt, nicht die Bewegung in dieser, und obwohl diese Bewegung vielmehr nur durch die hinzugefügte Bemerkung bestimmt ist, dafs überhaupt nur Bewegungen mit konstanter Energie in Betracht gezogen werden sollen.

Rückblick auf 625 bis 640.

1. Nach den Ergebnissen unserer Überlegung nimmt für 641 die natürliche Bewegung eines freien konservativen Systems ein jedes der Integrale:

$$\int(T-U)\,dt\ ,\qquad \int(T+U)\,dt\ ,$$

$$\int\frac{ds}{\sqrt{U+h}}\ ,\qquad \int\sqrt{U+h}\,ds\ ,$$

$$\int T\,dt\ ,$$

unter bestimmten Verhältnissen einen ausgezeichneten Wert an. Dabei beziehen sich die beiden oberen Integrale auf die Bewegung des Systems, die übrigen in Wahrheit nur auf die Bahn desselben. Die beiden links stehenden Integrale beziehen sich auf den Fall, dafs alle, auch die cyklischen Koordinaten des Systems in Betracht gezogen werden, und dafs nur solche Lagen des Systems als gleiche gelten, bei welchen auch die letzteren Koordinaten die gleichen Werte haben. Die übrigen Integrale beziehen sich auf den Fall, dafs die cyklischen Koordinaten des Systems verborgen sind, und dafs schon solche Lagen des Systems als gleich gelten, bei welchen **die sichtbaren Koordinaten gleiche Werte haben.** *Die Betrachtung des letzten Integrals setzt die Gültigkeit des Prinzips von der Erhaltung der Energie ...*

a po drugie, że istnieją naturalne systemy dla których nigdy nie występuje ich minimum i dla których nawet wariacja tych catek nie znika. Żadnej z tych całek *[chodzi tu o wymienione wyżej 5 catek, patrz reprodukcja* 13 - *moja uwaga*] nie możemy przypisać wyrażania jakiegoś bardzo ogólnego prawa ruchów naturalnych. I dlatego mamy prawo uważać, iż tylko pozornie, acz fałszywie, wydaje się, że ostatnia całka [/ *tu chodzi o całkę przedstawiającą akcję Maupertuis - moja uwaga*] ma niezależne, proste znaczenie fizyczne. }.

Tekst ten jest dość trudny do tłumaczenia. Jego tłumaczenie nie jest zręczne, ale chciałem by merytorycznie było możliwie bliskie oryginału.

4.8. EJ. Routh i E.T. Whittaker. Chronologicznie praca H. Hertza jest ostatnią poważniejszą pracą i godną wzmianki o Zasadzie Maupertuis przed publikacją O.L. H ó l d e r a **[27],** ale swoją zawartością należy ona - czywiście - do przed-Hólderowskiej epoki (podobnie jak liczne inne, nawet jeszcze znacznie później opublikowane prace). Istnieje pogląd, że mechanika teoretyczne jest zatęchłym kącikiem w którym nic nowego nie dochodzi do głosu, a stare poglądy dziesiątkami (jeśli nie setkami lat) są propagowane przez podręczniki. Myślę, że ten pogląd został stworzony przez outsiderów przeglądających głównie podręczniki pisane przez nieinteligentnych wykładowców niektórych politechnik... Na to, że nowe wyniki mogą dojść szybko do głosu można podać przykład niemieckiej encyklopedii matematyki [69], wydrukowanej w roku 1935, a o zawartości zamkniętej w grudniu 1933 roku. Na przykład, cytuje się w niej prace Aleksandra Wundheilera i Michała Kern era, obie z roku 1931 (n.b. opublikowane w polskich *Pracach Matematyczno - Fizycznych*) oraz Antoniego Przeborskiego z tegoż 1933 roku (ale praca ta drukowana była w niemieckim czasopiśmie).

Książka **[75]** Edwarda Johna Routh a (1831 - 1907) w ustępach poświęconych Zasadom Najmniejszej Akcji i Najmniejszego Działania zawiera mnóstwo błędów i to błędów wyjaśnionych już dawno przed momentem jej wydania, ale chcąc choć nieco jej autora usprawiedliwić (słabe jest to, zresztą, usprawiedliwienie !) można powołać się na konserwatyzm angielski i na nie najlepszy stan ówczesnej matematyki angielskiej. Trudniej jest usprawiedliwić fakt, że przedrukowano ją (i to w popularnym wydaniu) jeszcze koło 1960 roku.

Wzmiankowana książka E.J. R o u th a wyszła po raz pierwszy jeszcze w XIX wieku, dokładniej w 1898 roku. Ale, zauważmy, że "stare " może być powielane latami, i to już w XX wieku - na dowód czego zacytuję dwa, dostępne w języku polskim, dzieła : Maksymiliana Tytusa Hu bera **[28]** i Edmunda Taylora W h i 11 a k e r a **[92].** Książka E.T. W h i 11 a k e r a na str. 283 polskiego tłumaczenia ma sformułowaną Zasadę Maupertuis (jej nazwa podana jest dopiero na następnej stronie i brak jej w ogóle w indeksie książki). W tym miejscu jest to Zasada Maupertuis stacjonarna (to jest wariacyjna bez wyraźnego stosowania wariacji). Ale jest ona sformułowana nie tylko dziwnie, ale i niepoprawnie. Na pewno dziwnie, bowiem nie wypisuje się całki (3.5.1) o uderzająco prostej funkcji tworzącej *t,* lecz rozpatruje się wprawdzie całkę o tej samej funkcji tworzącej, lecz zapisanej w niezwykle skomplikowany sposób jako

$$\sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \frac{\partial l}{\partial \dot{q}_r}$$

(zauważmy, że ponadto $l = t - u$!). Ta dziwna forma funkcjit tworzącej całki, jest chyba wywołana chęcią przeniesienia Zasady Maupertuis na niektóre układy nie zachowawcze.

Natomiast można dyskutować, czy owa stacjonarna Zasada Maupertuis jest wypowiedziana poprawnie, czy też nie poprawnie. W jej wypowiedzi brak bowiem założenia, że zachodzi ona dla układów holonomicznych zachowawczych, ale w nazwie paragrafu (§100) założenie to jest wypowiedziane eksplicite. A tego rodzaju sposoby redakcji były powszechnie stosowane w XIX wieku. Większe wąpliwości może budzić stwierdzenie, że - wedle naszej terminologii - ruchy porównawcze mają spełniać *to samo* (moje podkreślenie) równanie energii. Jednak z dowodu wynika, chyba, że chodzi tu o ruchy z (wedle terminologii O.L. Hóldera) z wariacją czasu. Też nie jest wytłumaczone co się dzieje w przypadkach gdy istnieje takie t_0, , że $e(t_0) = 0$. Niestety, jeszcze gorzej jest z samym dowodem : mamy tu do czynienia z tym samym błędem co u H. Hertza, a mianowicie traktowanie stałej energii (a raczej jej przyrostu *Δh)* jako wielkości stałej. Wystarczy porównać samą długość dowodu : u E.T. Wh i tta ke r a zabiera on nieco mniej niż stronę miejsca, zaś u Stefana Banacha **[6]** wprawdzie nie jest on dłuższy, ale tylko dzięki temu, że właściwy dowód poprzedzają rozważania przygotowawcze zajmujące około 9 stron (i to gęstszego niż u E.T. W h i 11 a k e r a) druku.

Natomiast w §103 podany jest dowód, że działanie dla „małych przedziałów" jest nie tylko stacjonarne, ale nawet osiąga minimum. Dowód nie wykorzystujący nawet warunku Legendre'a (już nie mówiąc o warunku Jacobiego) jest krótki, ale zawiera luki i wręcz niepoprawne wnioskowania. Ale przynajmniej dobrze, że E.T. Whittaker jednak odczuwał potrzebę jego umieszczenia. W końcu paragrafu nawet jest próba wykazania (tym razem też bez powołania się na warunek czy warunki Jacobiego) jak długi może być rozpatrywany przedział czasu, by rzeczywiście zachodziło ekstremum (minimum) działania.

4.9. M.T. Huber. Jak mówią znający się na rzeczy (ja się do nich nie zaliczam) Maksymilian Tytus Huber (1872 - 1950) był wybitnym, i to na skalę światową, specjalistą od teorii sprężystości i wytrzymałości materiałów. Nie ogłosił jednak żadnych oryginalnych prac z mechaniki teoretycznej. Naogół nie jest dobrze, gdy ktoś nie pracujący w jakiejś dziedzinie pisze jej podręcznik. I rzeczywiście przykładem tego może być książka M.T. H u b e r a **[28].** Powstała ona na zasadzie jego wykładów jeszcze z lat 1906 - 1909 i była wydana jako skrypt w latach 1909 - 1910. Przepracowana w 1941 roku wyszła znowu jako skrypt w 1943 roku. Ostatecznie książkowe wydania (dwa) miała dopiero po śmierci autora w latach 1951 i 1956.

Książka M.T. Hu bera ma charakter w dużej mierze kompilacyjny. Autor, między innymi, korzystał w szeroko, z wyżej omówionej, monografii E.T. Whittakera **[92],** posuwając sie nawet do dosłownego przepisywanie z niej pewnych ustępów i to do dosłownego przepisywania ich wraz z błędami w nich zawartymi. Niestety, jeśli chodzi o omówienie Zasady Maupertuis to M.T. Huber nie skorzystał z książki Whittakera (gdzie, jak pokazaliśmy wyżej, Zasada ta jest omówiona w sposób, mogący być interpretowany, jako względnie poprawny), lecz z jakiegoś innego, mnie nie znanego, źródła.

Zasadzie Maupertuis (i nie nazwanej tak Zasadzie Jacobiego) jest w podręczniku **[28]** poświęcony krótki § 229. W samej wypowiedzi brak założenia, że chodzi tylko o układy zachowawcze, natomiast w tezie mówi się że ruch rzeczywisty jest argumentem ekstremum akcji, nie dołączając zatrzeżenia, że chodzi tu o argument ekstremum (minimum) miejscowego. A więc wypowiada się twierdzenie ze zbyt słabymi założeniami i ze zbyt mocną tezą. Dowód jest króciutki - próbuje się w nim wykazać tylko znikanie wariacji. Oczywiście jest on błędny, o ile można się w nim zorientować, to oparty jest on na błędnym (ewentualnie na pełnym luk) schemacie H. Hertza. Natomiast nie ma w tej książce nigdzie nawet próby wykazania, że chodzi tu nie tylko o stacjonarność działania lecz i o (zawartą w wypowiedzi twierdzenia) jego ekstremalność.

Rozdział V - WIE K X X

5.1. Dalsza historia Zasady Maupertuis. Dopiero pod sam koniec wieku XIX, a mianowicie w 1896 roku Otto Ludwik Hólder (Hoelder; 1859 - 1937) opublikował pracę **[27]** poświęconą, między innemi, Zasadzie Maupertuis, z której wynikami i rozumowaniami możemy się w pełni zgodzić. Opiera się ona na pojęciu wariacji z wariacją czasu (pojęcia - o ile wiem - wprowadzonego właśnie przez O. Hol dera). Mianowicie "zwyczajną" wariacją funkcji, w najprostszym zadaniu wariacyjnym, jest, zgodnie ze swą definicją, dowolna funkcja odpowiedniej klasy regularności i, która - ewentualnie - spełnia właściwe warunki brzegowe. Na przykład, wariacjami w przestrzeni $_nC_r^k(a,b;a,$ **b)** będą (jak już zauważyliśmy) układy funkcji $x\uparrow$, **..., x3$_{r1}$,** same nie należące do przestrzeni $_nC_r^k(a,b;$ **a, b),** lecz należące do przestrzeni $_nC_r^{lę}$ (a,b; **0,0),** to jest stosując innaczej zapisane jej oznaczenie, do przestrzeni $_nC_r^k$ (a,b; 0,..., 0, 0,..., 0). Są to więc układy takich funkcji, że x | (a) = 0 = x | (b), i = 1, ..., n (i ich układy są one "dostatecznie małe" w odpowiedniej metryce). Tymczasem tu modyfikuje się przebieg czasu funkcją *d* stosując funkcje złożone y" (t) = Xj(d(t)), i = 1, ..., n, gdzie funkcja *d* jest tak dobrana, by ruchy "porównawcze" *(y↑,... ,y$_n$)* ∪ spełniały Zasadę Zachowania Energii.

Nareszcie poprawny dowód O. Hóldera Zasady Maupertuis obnażył całą jej sztuczność. Na przykład, G. P r a n g e w [69] w przypisie 75 na str. 565 (ale - chyba - nie jest to najdawniejsza tego typu uwaga) uważa, że taka "Zasada" jest całkowicie sztuczna, gdyż w ten sposób można cokolwiek bądź (tutaj - jak pisze on złośliwie - *„Hólderowski sposób wariacji")* uważać za wariację (funkcji i całki) byleby tylko prowadziła one do poszukiwanego wyniku. Podaje on zresztą i inne przykładu takiego postępowania. Przed dowodem O.L. Hóldera taki zarzut trudno było postawić : skoro wszystko było dość mętne, to można było wierzyć, że w cieniu niezrozumiałości chowa się jakaś głębia wspaniałego wyniku...

5.2. Polski tekst. W Polsce osoby zainteresowane tymi rozważaniami mogą dotrzeć do nich z łatwością. Mianowicie są one powtórzone w książce St. Banacha [6]. St. B a n a c h był wielkim uczonym (nie ma powodu by to stale powtarzać, ale może warto to jednak przypomnieć przy okazji omawiania

Ueber
die Principien von Hamilton und Maupertuis.

Von

0. **Hölder** in Tübingen.

(Vorgelegt von F. Klein).

In der Einleitung zu seiner Mechanik hat Heinrich Hertz gesagt *), daß das H a m i 11 o n sehe Princip manchmal physikalisch falsche Resultate ergebe. Zum Beleg führt er einen Fall an, in dem man, wie er selbst bemerkt, durch bloße Betrachtung ohne Rechnung sowohl die Bewegungen, die ausgeführt werden können, als auch diejenigen, welche dem Ha mil ton ’ sehen Princip entsprechen würden, übersieht. Hertz fügt noch hinzu, daß das Ergebniß sich nicht ändert, wenn man statt des Princips von Hamilton das Ma up er t uis ’ sehe Princip der kleinsten Wirkung benutzt. Betrachten wir sein Beispiel. Es besteht in einer Kugel, die allein ihrer Trägheit folgend auf einer festen horizontalen Ebene ohne Gleitung rollt[1] [2]). Die Bewegungen, die dem Hamilton’schen Princip entsprechen, sind hier nach Hertz solche, die bei gegebener constanter lebendiger Kraft gegebene Ziele in kürzester Zeit erreichen, woraus sich ergiebt, daß aus jeder Anfangslage in jede Endlage ohne Einwirkung einer Kraft ein Uebergang möglich sein müßte. Dieser Schluß, der sich besser dem Princip der kleinsten Wirkung, als dem von Hamilton anschließt, wird ungefähr so ausgeführt. Wählt man die Anfangslage und die Endlage der Kugel beliebig aus, so giebt es stets rein rollende Uebergänge[3]) von der einen zur anderen. Unter diesen Uebergängen, deren jeder bei constanter lebendiger Kraft,

1) Gesammelte Werke 1894, Bd. III p. 23.

2) Die Kugel braucht nicht homogen zu sein. Ist sie homogen, so wird eine gleichförmige Bewegung des Kugelmittelpunkts combinirt mit einer gleichförmigen Drehung der Kugel um eine in ihr feste, durch den Mittelpunkt gehende Axe eintreten.

3) Hinsichtlich der Existenz dieser Uebergänge vgl. man die letzte Anm. von § 12. Daß auch die Uebergänge, die hier zum Beweis herbeigezogen werden,

14. Widok pierwszej strony (str. 122) pracy [27] O.L H ö l d e r a mechaniki teoretycznej, którą się on nigdy twórczo nie zajmował) i skontrolował na pewno - poprawność rozważań H ô l d e r a, ale nie wprowadził do nich żadnych specjalnych zmian. Po przeszło 100 latach od ich powstania są one dla nas dość odstręczające - ale jeśli komuś na tym zależy, to może te rozumowania sobie (może nieco je samemu unowocześniając) przyswoić. W Polsce na studiach matematycznych na uniwersytetach, gdzieś do około 1960 roku, obowiązywał egzamin z mechaniki teoretycznej. Często wykładowcy zalecali studentom przygotowywać się do egzaminu właśnie z podręcznika B a n a c h a , ale na ogół zastrzegali się, że można opuścić jego Rozdział XI : *Zasady wariacyjne mechaniki...*

Autor najlepszego - jak dotychczas - polskiego podręcznika-monografii **[71]** mechaniki teoretycznej Antoni P r z e b o r s k i (1871 -1941) musiał sobie zdawać sprawę (napisał przecież też i początek doskonałego podręcznika rachunku wariacyjnego **[70]**) z trudności związanych z Zasadą Maupertuis. Omawia ją w t. II. n° 315 (str. 371 - 373). Formułują ją tylko (oczywiście poprawnie), ale nie podaje dowodu, wskazując tylko na to, że daje się ona wyprowadzić z (udowodnionej w tym podręczniku) Zasady (Eulera-) Jacobiego. Podaje, że potrzebne w celu wyprowadzenia z niej równań Lagrange'a II rodzaju wariacje (przesunięcia przygotowane) nie mają sensu fizycznego (czyli mówi innymi słowami to o czym pisze G. P r a n g e w **[69]**). Ponadto podaje nieścisłą informacją historyczną (przypisując sformułowanie akcji jako całki (1.8.1) samemu P.L. de Maupertuis) oraz podaje ciekawą interpretacją akcji Maupertuis.

5.3. Jeszcze dalsza historia Zasady Maupertuis. Pierwszy, poprawny dowód Zasady Maupertuis nie tylko nie sformułowany przy pomocy wariacji, ale nawet nie wykorzystujący pojęcia wariacji, podał w - cytowanej już wyżej w parokrotnie w numerach 3.4, 3.4 i 3.7 - pracy **[8]** dopiero H.D. Błock w 1955. Jego wynik jest bardzo silny, gdyż (dzięki zastosowaniu innych metod niż metody rachunku wariacyjnego) udało mu się wykazać, że w odpowiednim zbiorze ruch rzeczywisty jest argumentem minimum miejscowego nie tylko lokalnego, lecz nawet absolutnego akcji Maupertuis. Intuicyjnie wynika to stąd, iż dla układów ortonomicznych kinecjał we współrzędnych Lagrange'a e = *t*(qi,..., qi<; h,..., rk) jest wszędzie ze względu na zmienne qi,...,qk (to znaczy dla wszystkich dopuszczalnych wartości zmiennych q-|, ..., qk) formą określoną dodatnio zmiennych r-i,rk,.,a więc problem ekstremalizacji akcji Maupertuis Aj danej wzorem (3.5.1) jest problemem regularnym (a nawet więcej, jest kwadratowym funkcjonałem wielomianowym) - ze wszystkiemi skutkami tego faktu.

A więc dowód Zasady (a nawet samo jej sformułowanie) w najmocniejszej jej postaci przeprowadzono bardzo późno. Jeszcze bardziej może być zaskakujące, że - o ile wiem - to pierwszy dowód Zasady Maupertuis metodami rachunku wariacyjnego podałem dopiero ja w II tomie mego *Rachunku Wariacyjnego* [83] (druk w 1970 roku). Oczywiście mój dowód prowadzi do wyniku słabszego niż wynik H.D. Błocka, gdyż klasycznemi metodami rachunku wariacyjnego nie można wykazać więcej niż to co ja zrobiłem, to znaczy , że można uzyskać tylko wynik : *ruchy rzeczywiste są argumentami silnego miejscowego minimum akcji Maupertuis* Δt

5.4. Nieciekawa Zasada ? Wydaje mi się, że wyniki zarówno H.D. Błocka jak i mój pokazują, że *Zasada Maupertuis* jest zupełnie nieciekawa i, że powinna była już dawno temu zniknąć z podręczników i monografii mechaniki (zostając się tylko w obszerniejszych historiach mechaniki czy matematyki). Te wyniki, które pokazały "nicość" Zasady Maupertuis były jednak - w chwili ich publikacji - ważnymi wynikami, gdyż rozbiły mit powtarzany uparcie już od około dwustu lat. Ale w przyszłości (o ile wogóle można coś przewidywać co będzie za kilkadziesiąt, czy kilkaset, lat) będą one cytowane najwyżej w książkach poświęconych historii nauk, wskazując na ślepe drogi (czy dróżki) na które czasem schodzi nauka.

5.5. Pojęcie "Zasady". Dlaczego mówimy o "zasadach", a nie o "twierdzeniach" ? Otóż okazuje się, że dla dość dużych klas zagadnień (na przykład dla układów ortonomicznych) z aksjomatów (na przykład, z Postulatu 3.2.1 przyjętego przez nas) nie tylko wynika Zasada Maupertuis, ale, i na odwrót z niej wynikają aksjomaty (przy odpowiednim ich sfromułowaniu). I dlatego mówimy tu o "zasadach", a więc o czymś równoważnym aksjomatom, a nie o twierdzeniach. Czasami - jak w przypadku „Zasady Zachowania Energii" słowo "zasada" tradycyjnie oznacza coś całkiem innego, a mianowicie jakieś wyjątkowo ważne stwierdzenie (twierdzenie).

5.6. Zasady całkowe. Jak można się zorientować z tego wszystkiego co napisaliśmy dotychczas, mogą występować zasady całkowe (Hamiltona, Jacobiego, Maupertuis i inne) pięciu różnych typów, a mianowicie :

1. Zasady wariacyjno - stacjonarne
   1.1. Zasady wariacyjne
   1.2. Zasady stacjonarne
2. Zasady ekstremalne (oczywiście miejscowe)
   2.1. Słabe
   2.2. Mocne
   2.3. Absolutne

Zasady te wymieniłem od najsłabszej do najmocniejszej. Trudno jest dla nich wszystkich znaleźć jedną odpowiednią nazwę. Wybrałem - dość powszechnie stosowaną - nazwę „zasady całkowe", acz chętniebyśmy taką nazwę też zastosowali i do niektórych twierdzeń z teorii niezmienników całkowych (a może można by dla nich i dla naszych zasad całkowych wprowadzić obejmującą większy zakres stosowania nazwę „zasady całkowe w sensie szerszym" ?)

Wariacyjna zasada całkowa stwierdza, że wariacja danej całki dla ruchów rzeczywistych znika. W przypadku Zasady Hamiltona została ona wypowiedziana właśnie przez sir Wiliama Rowana Hamiltona (1805 - 1865) w latach 1834 - 1835 (patrz **[21]** oraz **[23]**). Zasadę tego najniższego typu znaleźć można jeszcze w podręczniku G.K. S u s ł o w a [76], przyczym uważa ją też za zasadę stacjonarną (bez powołania sią na żaden dowód - może zresztą uważał on stacjonarność za synonim znikania wariacji ?)

Całkowa zasada stacjonarna stwierdza, że dla ruchy rzeczywiste spełniają odpowiednie równanie Eulera - Lagrange'a II rodzaju. A więc z pewnego punktu widzenia są banałem, chyba że zasady stacjonarne, przy odpowiednich założeniach regularności, mają być wyprowadzone z zasad wariacyjnych przy pomocy ogólnych wyników rachunku wariacyjnego - a więc ich banalność zależeć może od struktury danego wykładu mechaniki. Na odwrót, jeżeli mamy już udowodnione, że ruchy rzeczywiste (układów ortomicznych) spełniają równania Lagrange'a II rodzaju i drugiej postaci (a więc są krzywymi stacjonarnymi pewnych całek, dokładniej : działania Hamiltona), to dość prosto wykazuje się, że dla ruchów rzeczywistych znika wariacja owej całki. A więc i w ten sposób możnaby wykazać zasadę stacjonarną. W tym sensie zasady takich typów są równoważne. Można jednak uważać, że mocniejsze są zasady stacjonarne, gdyż zwykła (mechaniczna) droga ich wykładu i dowodu prowadzi od zasad wariacyjnych poprzez wykorzystanie pewnych twierdzeń rachunku wariacyjnego (a te ostatnie wcale nie są banalne - wymagają one bardzo

ON THE MINIMALITY OF THE VARIATIONAL PRINCIPLES OF CLASSICAL PARTICLE MECHANICS

H. D. BLOCK, University of Minnesota

1. Introduction. We shall be concerned here mainly with the variational principles which are associated with the names of Hamilton, Jacobi, Maupertuis and Hilbert. Each principle involves a functional in the form of an integral. The requirement of the vanishing of the first variation of the functional provides the differential equations characterizing the motion. For this reason these principles are called variational or stationary principles. If, in addition, the actual motion minimizes the functional, then the principle is called a minimum principle. We shall show here that some of the classical variational principles are minimum principles under certain conditions and only stationary principles under other conditions; others are always minimum principles, while still others are always only stationary principles. Some facts of this type are well known,* but it is hoped that the treatment presented here not only provides more complete results, but also is more elementary in method, simpler in development and yields results in more convenient form.

2. Notation having a fixed significance throughout the remainder of this paper. We shall consider a system 9ft of *N* particles. Let the configuration of 9ft be described by *n* = *3N* Cartesian coordinates [zi, z_2, • • • , z„] in the usual manner; *i.e., Zzr-i,* Z3T-I, *Zzr* are the coordinates of the r-th particle (r= 1, 2, • • • , *N).* The configuration of 9ft is then represented by a point z = {zi, z_2, • • • , z„} in ^-dimensional Euclidean space E_n. The following summation convention will be used: an index appearing more than once in the same term will be understood to be summed over its range unless otherwise specified. The range of *i* and *j* will be [l, 2, • • • , «]; the range of cr will be [l, 2, • • • , &], where *k* will be introduced below. Unless otherwise stated it will be understood that any statement in which any of these indices appear unsummed, applies when such indices are assigned each value in their range.

The mass of the r-th particle (r = l, 2, • • • TV) is denoted by w_{3r-2} = w_{3r-}i = w_{3r}, and w = min,- *mi* while Af = maxi ra_t-.

We shall suppose that 9ft is subjected to certain forces, the details of which will be considered subsequently; under the influence of these forces the configuration of 9ft during the time interval *D:* Zo^Z^Zi is described by the Un-valued function x(Z) = {x_x(Z), x_2(Z), • • • , x_n(Z)}. Let x(Z_0) =x° and x(Z_x) = xh We shall suppose that the origin of the coordinate system has been chosen at x° and that t_x — Zo = 5 >0. The function *x* will be called the *actual motion* or the *solution.* If A is any time interval (TO^Z^TI) then any £„-valued function £(Z) = {£i(Z), $£_2$(Z), • • • , £n(Z)} having a continuous derivative on A and such that £(TO) = X° and £(TI) =x^r will be called a *^-motion of* 9ft. A region 2 of E_n*XD*

* *Cf. c.g.,* E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics,* Dover 1944, pp. 250-253; also W. F. Osgood, *Mechanics,* Macmillan 1937, pp. 381-388.

161

15. Reprodukcja pierwszej strony (str.161) pracy **[8]** H.D. Błocka długiego dowodu). Rozważania obniżające rząd zakładanej regularności pochodzą (patrz **[14]**) dopiero od P.D.G. Du Bois-Reymonda.

Zasady ekstremalne słabe podają ekstrema (miejscowe) słabe odpowiednich całek, to jest ekstrema miejscowe lokalne w przestrzeniach typu kC_p^1 ewentualnie w przestrzeniach typu $| <C_1^2$. Wynikają one z zasad ekstremalnych mocnych. Nie wiem kto pierwszy udowodnił (w sposób dziś przez nas akceptowalny) Zasadę Hamiltona w tej postaci. Dowód ten wymaga zastosowania do zasady stacjonarnej warunku Legendre'a lub Zermeli oraz (implicite) warunku Jacobiego. W każdym razie wyłącznie twierdzeniami rachunku wariacyjnego można by było ją udowodnić już gdzieś od czasów C.G.J. Jacobiego, to jest od około 1850 roku. Wydaje mi się, że jednak to dopiero ja jako pierwszy udowodniłem ją w ten sposób w roku 1970 (acz jej poprawny dowód był już wtedy znany - wynikał on w sposób natychmiastowy z już wcześniej (w 1954 roku) udowodnionej ekstremalnej miejscowej absolutnej Zasady Hamiltona.

Zasady ekstremalne mocne podają ekstrema (miejscowe) mocne odpowiednich całek, to jest ekstrema miejscowe lokalne w przestrzeniach typu kC_θ^t, ewentualnie w przestrzeniach typu $| <C_0^2$. Też nie wiem kto pierwszy udowodnił Zasadę Hamiltona w tej postaci - wymaga on zastosowania do zasady ekstremalnej słabej (lub zasady stacjonarnej) warunku Legendre'a lub Zermeli oraz (implicite) warunku Jacobiego i Weierstrassa. I ten typ zasady mógły być już dawno temu udowodniony czystemi twierdzeniami rachunku wariacyjnego - to jest można by ją było udowodnić już gdzieś od czasów K. Weierstrassa, czyli gdzieś od około 1880 roku. Być może, że jednak to dopiero ja jako pierwszy udowodniłem ją w ten sposób w roku 1970 (acz jej poprawny dowód był już wtedy znany - wynikał on (podobnie jakdla Zasady Słabej) z już wcześniej (w 1954 roku) udowodnionej ekstremalnej miejscowej absolutnej Zasady Hamiltona.

Zasady ekstremalne absolutne podają ekstrema (miejscowe) absolutne odpowiednich całek, to jest ekstrema miejscowe lokalne w zbiorach typu kC^1, ewentualnie w zbiorach typu kC^2. Jako zasadę tego typu formułowano już Zasadę Hamiltona już dawno temu, gdzieś w głębi XIX wieku, ale było to wywołane brakiem ścisłej terminologii tej gałęzi matematyki. Pierwszy poprawny dowód (i być może pierwsze świadome poprawne sformułowanie) miejscowej absolutnej Zasady Hamiltona podał - jak już wzmiankowaliśmy - H.D. Błock w pracy **[8]** z 1954 roku

5.7. Zasada Maupertuis. A jak to było z najbardziej nas interesującą Zasadą Maupertuis ? Sformułowanej w postaci zasady wariacyjnej, a czasem i nawet ekstremalnej - i to absolutnej (nawet !) spotykamy ją w zasadzie od jej początków w połowie XVIII wieku. Ale pierwszy poprawny dowód przeprowadził dopiero O.L. H ö l d e r **[27]** w 1896 roku (mimo, że - jak już wspomnieliśmy - wariację wraz z wariacją czasu wprowadził już J.L. de L a g r a n g e już mniej więcej 100 lat wcześniej). Ale dziś trudno jest stwierdzić, czy chodziło właśnie o taką wariację z wariacją czasu.

Wszystko wskazuje na to, że metodami rachunku wariacyjnego Zasada Maupertuis mogła być już wtedy udowodniona nawet postaci mocniejszej, to jest ekstremalnej miejscowej lokalnej (słabej lub nawet mocnej). Tymczasem nie dokonano tego wtedy. Jest bowiem zaskakujące, że to jednak dopiero ja jako pierwszy (i tu jest to pewne) udowodniłem ją w ten sposób w roku 1970 (acz jej poprawny dowód był już wtedy znany - wynikał on z wcześniej (w 1954 roku) udowodnionej ekstremalnej miejscowej absolutnej zasady Maupertuis - dokonał tego H.D. Błock w pracy **[8]** z 1954 roku, w tej samej pracy w której podał pierwszy poprawny dowód absolutnej miejscowej Zasady Hamiltona.

5.8. Możliwe uogólnienia. Zajmowaliśmy się zasadami całkowymi (wariacyjnemi, stacjonarnymi i ekstremalnymi różnych typów) tylko dla układów ortonomicznych. Bez większego trudu można je próbować uogólniać na nieco ogólniejsze układy holonomiczne. Ale - jak się okazuje - znane takie uogólnienia, niezbyt daleko wykraczają swym zakresem poza twierdzernia tutaj przedstawione. I co gorzej, na przykładach (a raczej na kontrprzykładach) można pokazać, że dalsze uogólnienia są albo wogóle nie możliwe, albo conajwyżej możnaby znane wyniki już tylko nieco rozszerzyć.

Przy okazji zauważmy, że proste przeniesienie rozwiązywania zagadnień ekstremalizacji całek z warunkami anholonomicznymi do mechaniki daje wyniki niepoprawne. Po prostu ruchy rzeczywiste mechanicznych układów anholonomicznych, to jest układów skrępowanych dodatkowo więzami anholonomicznymi I4/, nie są argumentami ekstremów (minimów) takiego zagadnienia ekstremalizacji w dostatecznie dużych przestrzeniach - na przykład - zagadnienia ekstremalizacji całki przedstawiającej działanie Hamiltona z dołączonymi anholonomicznymi warunkami będącymi właśnie warunkami 14/. (czyli odpowiedniego, tak zwanego, zagadnienia anholonomicznego Lagrange'a). Chodzi o to, że przynajmniej z grubsza zgodny z wynikami doświadczeń, ruch rzeczywisty mechanicznych układów anholonomicznych dany jest równaniami Lagrange'a II rodzaju i drugiej postaci, w których zamiast zera, po prawej stronie stoi suma iloczynów „mnożników Lagrange'a” i pochodnych (parametrycznych) więzów anholonomicznych względem "kropkowanych" wielkości, natomiast argument ekstremum wariacyjnego, anholonomicznego zagadnienia wariacyjnego jest rozwiązaniem równań Lagrange'a II rodzaju, w których zamiast zera, po prawej stronie stoi suma lagrange'ianów iloczynów „mnożników Lagrange'a” i więzów anholonomicznych zagadnienia.

Prościej niż słowami, można to pokazać przy pomocy wzorów. I tak na to, by układ funkcji x = **x** (t) byt argumentem ekstremum całki

$$\mathbf{I}_f[\boldsymbol{x}] = \mathbf{I}_f\,[x_1, \dots, x_n] :=$$

$$:= \int_a^b f \circ (j, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \int_a^b f \circ (j, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$$

w przestrzeni ${}_n\mathrm{C}f$ (a,b;c,d;gi, g_p), to jest w przestrzeni układów funkcji spełniających anholonomiczne dodatkowe warunki :

$$g_b\,(j, \boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = 0, \qquad b = 1, \dots, p$$

i jeśli jest układem normalnym (patrz **[82]**, str. 101), to warunkiem koniecznym jest, by spełniał on równania

$$(5.8.1) \qquad \boldsymbol{E}_i\,[f; x_1, \dots, x_n] = \sum_{b=1}^{p} \boldsymbol{E}_i\; l_b\,[g_b; x_1, \dots, x_n], \qquad i = 1, \dots, n.$$

Natomiast, układ x = g(t) jest ruchem rzeczywistym układu skrępowanego więzami anholonomicznych

$$(3.2.10) \qquad {}^1g_j(j; q_1, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k) = 0, \qquad j = 1, \dots, p$$

o realizacji gładkiej, jeśli spełnia on równania

$$(5.8.2) \qquad \boldsymbol{E}_i\,[f; q_1, \dots, q_n] = \sum_{b=1}^{p} l_b \frac{\partial g_b}{\partial \dot{q}_i} \circ (j; q_1, \dots, q_k; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k), \qquad i = 1, \dots, n$$

gdzie przez qj oznaczyliśmy (jakieś) współrzędne lagrange'owskie (holonomiczne). Wynika stąd też, że o ile układy mechaniczne spełniające równania (5.8.2) mogą być aholonomiczne, o tyle problemy wariacyjne, rozwiązywalne równaniami (5.8.1) muszą być (poza pewnymi zdegenerowanymi przypadkami) anholonomiczne (nie wystarcza by byty tylko aholonomiczne). Dokładne definicje układów aholonomicznych i anholonomicznych znajdzie Czytelnik w [82], str. 99.

Niemniej jednak pewne wyniki typu ekstemalnego można też uzyskać i dla mechanicznych układów anholonomicznych, ale są one tak skomplikowane, że uzyskane wyniki mało przypominają dość proste (w gruncie rzeczy) wypowiedzi wyżej przedstawionych twierdzeń słusznych dla układów ortonomicznych (a więc w będących pewnym szczególnym przypadkiem układów holonomicznych).

5.9. Podsumowanie. Proszę nie rozumieć mego referatu jako przykładu samochwalstwa i próby reklamowanaia moich wyników. Bowiem :

1° Intuicyjne pojęcie "miejscowych ekstremów" (różnych rodzajów) jest znane mniej więcej - chyba - od 150 czy 160 lat. Ja je tylko formalnie sprecyzowałem, ale i przedtem te pojęcie musiało być intuicyjnie w ten sam sposób rozumiane.

2° Już G. P rangę, najpóźniej w 1935 roku, zauważył sztuczność Zasady Maupertuis.

3° Jej dowód w najmocniejszej postaci (klasycznej - jak pokazują przykłady - mocniejsze mogły by być tylko jakieś niewielkie i bardzo sztuczne jej uogólnienia) przeprowadził H.D. Błock 1955 roku.

4° W 1970 roku ja tylko uzupełniłem pewną lukę w eleganckim przedstawieniu teorii - skoro Zasada Maupertuis ma być zasadą wariacyjną (i długo była formułowana przy pomocy pojęcia wariacji), to jest rzeczą naturalną, że należy ją dowieść metodami rachunku wariacyjnego. Ale wobec nieco wcześniejszego i mocniejszego wyniku H.D. Błocka jest to - jak to lubi określać Jan K i s y ń s k i - tylko wynik sportowy.

I jeżeli mym referatem ja coś reklamuję, to tylko skreślenie z podręczników i programów wykładów mechaniki teoretycznej *Zasady Maupertuis* (przy ewentualnym pozostawieniu niektórych innych tak zwanych zasad wariacyjnych). Może się ona zostać tylko jako krótka wzmianka w książkach poświęconych historii nauk (historii fizyki, historii mechaniki teoretycznej), jako przykład (jak już zauważyliśmy) ślepej dróżki prowadzącej do nikąd, a którą ludzie próbowali iść przez mniej więcej dwa wieki... Takich ująć mechaniki jest - zresztą - teraz już sporo. Jedną z nich jest - na przykład - książka C. Lanczosa [42].

ZAKOŃCZENIE

6.1. Zakończenie. W ciągu trzech czwartych wieku, między 1896, a 1970 rokiem nareszcie dokonano czterech rzeczy :

1° podano poprawne sformułowanie i poprawny (acz nie oparty o wyniki rachunku wariacyjnego) dowód Zasady Maupertuis (na co czekano aż 140 lat),

2° zauważono, że ma ona charakter zupełnie banalny,

3° wykazano ją w postaci możliwie najsilniejszej (minimum miejscowe absolutne), oraz

4° udowodniono ją metodami rachunku wariacyjnego. Wspomnieliśmy (wraz z odpowiedniemi danymi bibliograficznymi) o tym na początku tego referatu (i w poprzednim n° 5.9).

6.2. Dalsze pozycje do skreślenia w wykładach mechniki. Zasada Maupertuis nie jest jedyną w mechanice rzeczą do skreślenia z jej wykładu (nawet dość obszernego, ale nie mającego aspiracji do przedstawiania jej rozwoju historycznego). Całkiem słusznie uważana za zasadę ekstremalną, tak zwana, *Zasada Najmniejszego Skrępowania Gaussa* (nie będąca jednak ani zasadą wariacyjną, ani nawet całkową w żadnym sensie tych słów), jest tylko skomplikowanym zapisem skądinąd dość prostych twierdzeń (lub aksjomatów), czyli jak mówią Niemcy *„Warum es einfach machen, wen es auch kompliziert sein kann"* ... *(„Poco robić coś prosto, kiedy można to samo zrobić w sposób skomplikowany"...).* Podobnie rzecz się ma też z *Zasadą Prac Przygowanych d'Alemberta* - acz tu mogę się spotkać z protestami niektórych bardziej tradycyjnie nastawionych znawców tematu. Ona też wyraża w sposob bardzo skomplikowany (uwikłany) względnie prostą tezę. Tą tezę można łatwo uogólnić, kiedy Zasada Prac Przygotowanych tylko z trudem poddaje się takiej operacji (patrz A. Przeborski **[71]).** Jedyną zaletą tej Zasady jest nieobecność w niej wielkości niemierzalnych w systemie mechaniki lagrange'owskiej (a mianowicie reakcji więzów, niemierzalnych w tym sensie, że - skoro wogóle w niej nie figurują - więc nie zachodzi w niej potrzeba podawania procedury wykonywania ich doświadczalnych pomiarów fizycznych). Ale owe wielkości są jednak mierzalne w ogólniejszych nadsystemach. Niestety omówienie tego problemu - mającego też swe korzenie w XVIII wieku przekracza zakres mojego tematu fi mieisca iakim tutai dvsDonuiek

To samo - w jeszcze większym stopniu - odnosi się i do podobnych "zasad" w hydrodynamice, optyce, teorii kwantów, etc.

6.3. Propozycje dalszych badań. Przedstawione tutaj materiały mogą - i powinny być - być traktowane :

1° Jako wstęp do miarodajnego, z dzisiejszego punktu widzenia, opracowania "przedwczoraj" Zasady Maupertuis (to jest do miarodajnego opracowania jej dziejów w XVIII wieku). Badania te - jak już zauważyliśmy - nie dałyby się przeprowadzić przy wyłącznym wykorzystaniu materiałów znajdujących się w Polsce.

2° Jako wstęp do opracowania dziejów "wczorejszych" tej Zasady, to jest jej dziejów w XIX wieku (przed O.L. H ó l d e r e m), badań zdecydowanie - pod względem dostępu do źródeł - łatwiejszych niż badania jej dziejów XVIII wiecznych i, jednak znacznie łatwiejszych do pełnego przeprowadzenia w Polsce. Ale za to dość beznadziejnych (jak już zauważyliśmy w n° 4.4) jeśli chcodzi o samo meritum sprawy.

A może jednak - mimo to - ktoś podejmie się przeprowadzenia tych badań ?

6.4. Ostateczny wniosek z tej pracy. Obecnie Zasada Maupertuis, po 220 latach figurowania we wszystkich obszerniejszych podręcznikach powinna nareszcie spocząć w zakurzonym archiwum ślepych uliczek matematyki (mechaniki), do którego zaglądaliby tylko historycy nauki zainteresowani sporami jakie wokół niej toczono w wiekach XVIII - XX...

PRZYPISY

1 Tekst niniejszy stanowią materiały zebrane jako podstawa : referatu wygłoszonego na Ogólnopolskiej XIII Szkole Historii Matematyki, która odbyła się w dniach 17-21 maja 1999 roku w KOŁOBRZEGU oraz referatu wygłoszonego na Ogólnopolskiej XIV Szkole Historii Matematyki, która odbyła się w dniach 8-14 maja 2000 roku w ZIELONEJ GÓRZE. Rzutuje się to, zarówno na ich formę (nie w pełni wykończoną), jak i na ich (niekompletną) zawartość. Skrócona wersja tych materiałów, pod tytułem *„Od fałszywego do nieciekawego twierdzenia - czyli* 230 *lat historii tak zwanej <<Zasady Maupertuis »* " ukażą się w *"Materiałach* " XIII Szkoły (patrz pozycja [86] załączonej bibliografii) oraz pod tytułem *„Historia Zasady Maupertuis wczoraj* " w *"Materiałach"* XIV Szkoły (patrz pozycja [88]).

2 Można ją znaleźć, na przykład, w Bibliotece Głównej Uniwersytetu Warszawskiego #13581.

3 Nagół mówi się, że rodzina du Bois-Reymondów pochodziła od fracuskich hugenotów, którzy wyemigrowali z Francji w końcu XVII wieku. Nie jest to prawda. Feliks Henryk du Bois-Reymond (1782 - 1865) był urodzony pod miejscowością NEUCHÀTEL (po niemiecku NEUENBURG), obecnie leżącą we francuskiej SZWAJCARII, ale wtedy będącą stolicą księstwa pozostającego we władaniu króla PRUS. Z tytułu miejsca swego urodzenia, pracował on różnych stanowiskach urzędniczych (w końcu jako Tajny Radca) w BERLINIE w zarządzie obszaru tego książstewka. W domu mówiono u niego po francusku. Ożenił się on z Minette Henry (1789 - 1864), córką pastora francuskiej kolonii w BERLINIE, a wnuczką znanego plastyka Daniela Chodowieckiego (1726 - 1801; ten ostatni był synem polskiego mieszczanina i hugenotki). Feliks i Minette mieli pięcioro dzieci. Drugim z rzędu dzieckiem był fizjolog Emil (1818 - 1896), trzecim w dzieciństwie zmarły syn i ostatnim matematyk Paweł Dawid Gustaw (1831 - 1889), o którym będzie niżej mowa. Ponadto były dwie córki.

Z kolei Emil miał 10 dzieci. Z nich Ellen Lucia (1858 - 1915) wyszła za mąż za znanego matematyka (specjalisty od metod przybliżonych) z GETTYNGI Karola DawidaToime Rungego (1856- 1927).

4 Biblioteka Główna Uniwersytetu Warszawskiego # 18.32.11.1.

5 "Moreau" znaczy mniej więcej tyle co polskie (a raczej tureckie) słowo "kary" lub też oznacza czarny, błyszczący kolor (n.b. od słowa "Maur" pochodzi nazwa

"moreau" - natomiast od tego ostatniego pochodzi polskie słowo "mora"). *"Moreau"*, po francusku, nazywa się też kosz z obrokiem, z którego zwierzęta juczne mogą w czasie drogi jeść (nie wiem, czy istnieje jakiś polski odpowiednik tego słowa, gdyż - chyba - w POLSCE, przynajmniej w ostatnich czasach, było to urządzenie zupełnie nieznane). Nie należytego urządzenia mylić z workiem z obrokiem, który zawieszać można na dyszlu, dla umożliwienia nakarmienia koni poza stajnią - po francusku nazywa się on *"musettemangeoire"* (też nie wiem czy istnieje polskie słowo będące jego odpowiednikiem). Jak się jednak wydaje, nazwisko "M a u p e r t u i s " pochodzi raczej od poprzedniego znaczenia.

"Maupertuis" oznacza w średniowiecznej francuszczyźnie "złą" - ewentualnie "niedobrą" - "dziurę", "jamę" lub "zagrodę". W„Le *roman du Renard",* i to już w jego najwcześniejszych "gałęziach" (IV ćwierć XII wieku), nazywa się tak legendarny zamek lisa R e i n h a r d a . Zauważmy przy okazji, że ten tytuł *„Le roman du Renard"* niesłusznie jest tłumaczony na polski jako *„Romans Lisa "* czy też *„Romans o Lisie"* - oczywiście powinno być *„Opowieść* (lub *„Opowieści) o Reinhardzie".* Było kilka objektów geograficznych, rzeczywiście istniejących we Francji, zwanych "MAUPERTUIS", m. in. pod POITIERS. Ale prawdopodobnie rodzina naszego matematyka wywodziła się z miejscowości o tej samej nazwie, ale leżącej koło 100 km, prawie dokładnie na wschód od PARYŻA.

A więc P.L. de Maupertuis nazywałby sie po polsku "Kary-" (lub ewentualnie "Czarny czy "Čzerny -") "Z ł o d z i u r s k i".

[6] W POLSCE, wedle najczęściej cytowanych szacunków około 10 % ludności należało do szlachty (ale ostatnio obniża się do liczbę, na przykład, robi to Piotr W a n d y c z obniżając ją do około 7 % - patrz [91], str. 18). We FRANCJI natomiast było jej poniżej 1 % całej ludności. Obie grupy francuskiej szlachty - zarówno *„noblesse de 1'epee "* jak i *„noblesse de robę "* (mimo pewnych antagonizmów między niemi) utrzymywały bliskie kontakty (częste bywały między niemi małżeństwa). W wojsku służyli przedstawiciele obu grup (acz - zgodnie ze swym określeniem - w wojsku było więcej przedstawicieli *noblesse d·epée).*

[7] Jan Jakub Casanowa jest postacią znana wszystkim i nie ma potrzeby wyjaśniać kim on był - przecież jego zainteresowanie kobietami przeszło nawet jako zwrot do języka codziennego. Natomiast może warto napisać parę słów o K. de Bonneval. Klaudiusz Aleksander de Bonneval hrabia de Coussac (1675 - 1747), nie interesował się kobietami, natomiast jego zainteresowania (podobno bardzo żywe !) skierowane były - jeśli można tak powiedzieć - wręcz przeciwnie. Służył on od 1691 roku w wojsku francuskim. Przyczym jego bronią, jaką sobie wybrał, była - co było wtedy jeszcze wśród osób utytułowanych rzadkością -

artyleria. Od 1698 roku był porucznikiem ("lieutenant" - był to wtedy wysoki stopień wojskowy). Koło 1704 nastąpiło - po jakimś skandalu poderastycznym - załamanie jego kariery. Uciekł wtedy do WŁOCH - zaocznie skazano go na śmierć, a jego rodzinne majątki (leżące w pobliżu LIMOGES) we FRANCJI skonfiskowano. W 1706 książę Eugeniusz Sabaudzki (tak zwany przez Niemców *"Prinz Eugen"*, 1663 - 1736) zwerbował go do armii austriackiej, czyli do armii wrogów FRANCJI. Został cesarskim *generał-majorem* i jako taki walczył w w latach 1710 - 1712 w hiszpańskiej wojnie sukcesyjnej oraz w 1715 roku z Turkami. W 1717 zostaje *Hofkriegsratem,* to jest zostaje członkiem *Hofkriegsratu.* Było to 26 osobowe kolegium (mające liczny personel pomocniczy), które w ówczesnej monarchii habsburskiej pełniło rolę pośrednią pomiędzy dzisiejszym ministerstwem wojny, a sztabem generalnym. Posłany w 1723 roku do HOLANDII, po jakimś nowym skandalu pederastycznym, zostaje zdegradowany i uwięziony. Został on - po trzech latach pobytu w więzieniu - wypuszczony w 1726 roku. Poczym, po pewnym czasie, jedzie do TURCJI. Przyjął tam islam (czyli, jakby wtedy, w pierwszej połowie XVIII wieku, powiedzieli nasi przodkowie, *"zbisurmanił się"*) i jako Ahmed Pasza zreorganizował i postawił na bardzo wysokim poziomie sułtańską artylerię (była ona najlepszą na świecie w XV wieku, ale później bardzo podupadła). Jest zabawną rzeczą, że gdy tylko przybył z AUSTRII do BELGRADU, zaraz mianowano go paszą i przystano mu sporo pieniędzy, poczym zażądano by jako pasza (po polsku - bliżej języka tureckiego - by się raczej powiedziało "basza") utworzył sobie harem z conajmniej 8 kobiet (mimo, iż wiedziano doskonale o jego bardzo jednostronnych skłonościach seksualnymi) - podobno stary pasza nie mógł mieć mniejszego haremu, a młody winien mieć w nim conajmniej 12 kobiet... Mimo haremu i tureckiego patrzenia przez palce na jego skłonności, które w STAMBULE nie wywoływały takich skandalów jak w chrześcijańskiej EUROPIE, pod koniec życia popadł w TURCJI w niełaskę. Chciał wrócić do FRANCJI, ale umarł, nim pertraktacje (o jego ułaskawienie) z Ludwikiem XV dobiegły do końca. Jego rzekome pamiętniki (wydane w 1757 roku i powtórnie w 1806 roku) są fałszerstwem.

8 W Niemczech można było mieć, nadawany tylko przez Cesarza Świętego Cesarstwa Narodu Niemieckiego (i to tylko do likwidacji owego cesarstwa w 1806 roku), tytuł *Freiherr* (żona : *Freifrau,* córka *Freifreulein,* w skrócie *Freiin).* \W wypadkach, gdy było się bezpośrednim lennikiem cesarza, to można było mieć tytuł *Reichsfreiherr.* Natomiast tytuł *Baron* (żona : *Baronin,* córka *Baronesse)* mogli nadawać poszczególni władcy państw (i państewek Rzeszy). W XIX wieku liczni Żydzi (zarówno Zachodnio-Europejscy jak i Polscy) kupowali u co uboższych książąt Rzeszy najczęściej właśnie tytuł Barona - wyśmiewał się z tego snobizmu (w *„L'Ille des pinguins")* nawet Żyd z pochodzenia Anatol France (1844 - 1924). Oba te

tytuły *Freiherra* i *Barona* tłumaczy się tak samo na język polski : jako *baron.* Trzeba pamiętać, że jednak tytuł "Freiherra" (nie mówiąc już o "Reichsfreiherrze") naogół jest (i był) traktowany w Niemczech jako - conajmniej - równy, jeśli nawet nie jako wyższy niż tytuł "hrabiego" ("Grafa") nadany nie przez Cesarza.

9 Samuel Henzi (lub Hentzi), berneńczyk, po różnych przygodach (był między innemi kapitanem wojsk księcia MODENY) został nauczycielem w w swym rodzinnym BERNIE w domu Samuela J. K ó n i g a, matematyka i prawnika. Za udział w sprzysiężeniu zwanym „akcją petycyjną", mającym na celu poszerzenie kręgu osób mających w BERNIE prawa polityczne, został w 1744 roku (wraz z owym - wzmiankowanym wyżej - S. Königiem) wygnany na 5 lat. Ułaskawiony, wrócił do BERNA, gdzie wziął udział w drugim sprzysiężeniu. Skazany wraz z trzema innymi osobami na karę śmierci. Mimo protestów dochodzących z różnych stron EUROPY, że jest to tylko morderstwo sądowe, został ścięty. Ze względu na owe kontakty dwóch Samuelów :Kóniga i Henzi szukanie listu Leibniza (i to listu wysłanego do SZWAJCARII) u tego ostatniego nie było rzeczą aż tak dziwną.

10 Nie wszyscy znają historię słowa "talar" (używane na bieżąco w ciągu XVI - XVIII wieków też i w POLSCE), określającego większą srebrną monetę. Późnostarożytne określenie jednostki monety "denar" było używane też i w średniowieczu. Od X wieku denar gwałtownie się dewaluował. I dlatego koło 1300 roku przeprowadzono jego denonimację : wprowadzono nie (jak przy denominalizacji parę lat temu w POLSCE) "nowy" lecz "duży" denar - *grossus denarus, w* polskim skrócie *"grosz".* Grosze bite w początku XVI wieku - między innemi - w mennicy w JOACHIMSTHALU - obecnie JÁCHYMOVIE - w CZECHACH (gdzie od XV wieku wydobywano, razem z różnymi innymi kopalinami, też i srebro, a od połowy XIX wieku do mniej więcej 1960 roku - uran) nazywano *"Joachimsthalergroschen"* - w skrócie "talar" (a w wymowie amerykańsko-łacińskiej *"dolar"* - która to nazwa przeszła i do USA).

11 Jeśli chodzi o tego rodzaju "łapówki", to wielcy tego świata dawali je conajmniej od średniowiecza. Na przykład, już dwa wieki przed Wolterem, Piętro A r e t i n o (B a c c i; 1492 - 1556), pierwszy nowożytny dziennikarz (a ponad to, nie pierwszy szantażysta w jednej osobie) dostawał je od różnych władców. A dwa wieki po Wo lte r z e, niejacy J o l io t o w ie (Fryderyk Joliot-Curie 1900 - 1958 i Irena Joliot z domu Curie 1897-1956) dostawali stalinowskie „Nagrody Pokoju" - wcale nie za swe osiągnięcia naukowe (skądinąd rzeczywiste, przecież otrzymali oni też i nagrodę Nobla...). Mieli oni tylko jeden kłopot: jako zapobiegliwi burżuje, chcieli ulokować swoją „Premię Stalinowską", w najwyżej procentujących papierach,

lecz akurat trwała Zimna Wojna i dlatego wtedy były to akcje imperialistycznego przemysłu zbrojeniowego - ale jak to zrobić, by to nie wyszło na jaw ?

12 Nie dysponuję żadnymi - nawet skromnymi - materiałami porównawczymi dla stosunku dochodów i cen w BERLINIE koło połowy XVIII. Dostępne są mi jednak starsze dane, tyczących się innych miejsc. Na przykład, z tabeli zamieszczonej na str. 357 książki [33] można wyciągnąć pewne wnioski co do dochodów i ich wachań robotników w Warszawie w latach 1568 - 1652. Okazuje się, że w tym okresie dniówka wzrosła licząc w groszach przeszło 5 krotnie, ale nie wzrastała ona monotonicznie. Natomiast liczona w kilogramach chleba była ona dość stała, ale w niektórych latach spadała do połowy, a nawet do jednej czwartej naogół spotykanej wielkości ! Związane to było - między innemi - z wahaniem się ceny w groszach kilograma chleba i to w stosunku jak 1 do aż 10 !

13 Ustęp DXXIX w„*Caracteres et Anecdotes*" M. Chamforta (patrz [12], str. 311) brzmi dokładnie : *„Maupertuis etendu dans son fauteil et baillant, dit un jour : « Je voudrais, dans ce moment-ci resoudre un beau probleme qui ne fût pas difficile. » Ce mot le peint tout entier." [„Pewnego dnia, Maupertuis ziewający i rozciągnięty na fotelu powiedział: « Chętnie bym w tej chwili rozwiązał jakiś interesujący problem, byleby nie był on zbyt trudny.» Te powiedzenie charakteryzuje go doskonale. "*].

14 Oczywiście, że nie chodzi tu o DORNACH leżące na terenie SZWAJCARII, w pobliżu SOLURY.

15 Serdecznie dziękuje Pani Marcie Nowickiej za dostarczenie mi obfitych materiałów tyczących się kościoła św. Rocha w PARYŻU.

16 *Dowód ontologiczny* istnienia Boga pochodzi od św. Anzelma (Kantuaryjskiego; 1033 -1109). Ma on następujący kształt: *Bóg jest bytem doskonałym. A do atrybutów bytu doskonałego należy też i istnienie* (tak przynajmniej uczy, tak zwana, ontologia). *A więc Bóg istnieje.* Rozumowanie to zawiera w sobie błąd jednego z wariantów, tak zwanego, błędnego koła. Nie uznaje go za poprawne, między innemi, teologia Kościoła Katolickiego.

17 Zarówno P.L. de Maupertuis jak i Fryderyk II pisali swe listy po francusku. Nie wiem, czy Francuz Maupertuis umiał po niemiecku, ale przebywając wiele lat w BERLINIE i mając za żonę Niemkę pewnie nauczył są tego języka. Natomiast Niemiec Fryderyk II w zasadzie pisywał tylko po francusku. Jedynymi jego znanymi tekstami niemieckiemi są jego listy miłosne do kamerdynera

(który nie umiał fo francusku). Są one pisane niegramatyczną niemczyzną i zupełnie fantazyjną ortografią...

18 Nazwę *argument ekstremum miejscowego* można przetłumaczyć ma język francuski jako *l'argument de l'extremum topique,* zaś na niemiecki jako *Argument eines topischen Extremum.*

19 Nie wiem skąd się wzięło mylne (i bardzo stare) przekonanie (fizyków ?), że argument X° minimum miejscowego (lokalnego, a tym bardziej absolutnego) minimum (ewentualnie maximum), a więc dla niewielkich długości przedziału całkowania będący minimum (lokalnym) zwykłym, dla przedziału całkowania dłuższego od odpowiedniej odległości ogniskowej będzie, wręcz przeciwnie, argumentem *maximum* (odpowiednio *minimum*) ! Przecież te X° wogóle nie może być wtedy argumentem żadnego (innego niż miejscowe) ekstremum - wspominamy o tym dodatkowo niżej w n° 4.1. Bliższe szczegóły Czytelnik może znaleźć w dość już starej monografii Marston M o r s e'a [50].

Conajmniej dwóch laureatów Nagrody Nobla jeszcze w II połowie XX wieku wyrażało takie (błędne) poglądy o przechodzeniu poza ogniskiem minimum miejscowego w maksimum (nie miejscowe). Chodzi mi tutaj o Stephena W. H a w k i n g a (ur. 1942; patrz [24], str. 50 - mamy tu stwierdzenie, że geodezyjna może być *najdłuższą* krzywą łączącą dwa *sąsiednie* punkty oraz str. 233 - definicja geodezyjnej) i Lwa D. Landaua (1901 - 1968; patrz [43], str. 10 - gdzie figuruje fałszywa, nie miejscowa postać Zasady Hamiltona; książka ta zresztą pisana była we współpracy z E. M. L i f s z i c e m). Jeśli chodzi o drugą z tych pozycji, to porównaj moje uwagi w [83], na str. 195.

20 Pozycja metodologiczna Mechanicznej Zasady Zachowania Energii jest jasna : należy ona do pewnego modelu, a przez niego do pewnego systemu (systemu Mechaniki). Mniej jasna jest pozycja Ogólnej Zasady Zachowania Energii (a naogół myśli się o niej, gdy mówi się - skrótowo - o Zasadzie Zachowania Energii). Jaka jest jej historia ? Najpierw wprowadzono pojęcie energii kinetycznej (pod nazwą *sity żywej,* równej podwojonej energii kinetycznej). Potym zaczęto do niej dodawać energię potencjalną. Dalej (z pewnymi oporami, już w XIX wieku) dodawano energię cieplną, energię sprężystą (różne jej rodzaje), elektryczną, magnetyczną, etc. Już w XX wieku dodano do niej równoważność energetyczną masy i różne typy energii jądrowych (odpowiadające słabym i silnym oddziaływaniom). Robiono to tak, by Zasada Zachowania Energii (Ogólna) zachodziła dla wszystkich znanych, w danym momencie, rodzajów energii. Urządzenia, które miałyby funkcjonować wbrew tej, tak pojętej zasadzie, nazywano *perpetuum mobile* ("wieczny ruch" po łacinie). A więc

pojęcie perpetuum mobile, jest pojęciem, które trzeba relatywizować do rozpatrywanego momentu czasu (historycznego). I coś co dziś nie jest perpetuum mobile, mogło by nim być (gdyby było znane) kiedyś dawniej. Na przykład, gdyby stos atomowy byłby znany 110 lat temu, to uchodziłby za perpetuum mobile...

W końcu XIX wieku Akademia Paryska, ściśle rzecz biorąc *Academie des Sciences,* podjęła uchwałę, że nie będzie rozpatrywać projektów perpetuum mobile, czyli uznała Zasadę Zachowania Energii (Ogólną) za prawdziwą w sposób nie podlegający dyskusji. Uchwała wydaje się dziwna, zaprzeczająca zasadom, którymi winni się kierować (jak uważamy przynajmniej od XVIII wieku) uczeni w swej działalności. Ale jeśli zinterpretujemy ją w następujący sposób *„nie będziemy rozpatrywać projektów perpetuum mobile, gdyż jeśli takie, rzeczywiście funkcjonujące urządzenie się zjawi, to po prostu - do do znanych nam już rodzajów energii - dodamy jej nowy rodzaj, taki, że owe urządzenie przestanie już być perpetuum mobile"*.W ten sposób Ogólna Zasada Zachowania Energii zaczyna być czystą konwencją. Gdyby istniał (jeszcze takiego nie ma) szeroki, nie banalny i poprawny system (nadsystem) całej fizyki teoretycznej - najlepiej tak ogólny, że nie dawałoby się go już w sposób nie banalny rozszerzyć, to w nim dałoby się, wypisaną wyżej naszą interepretację owej uchwały Akademii, uznać za definicję (ogólną) energii. Definicja ta prowadziłaby do Ogólnej Zasady Zachowania Energii, jako do tezy modelu.

Ogólna Zasada Zachowania Energii formułowana w wyżej podany sposób, była kilkakrotnie poddawana w wątpliwość. Zachodziło to wtedy, gdy nie umiano wymyśleć "czegoś nowego" (jakiegoś "nowego" rodzaju energii) co (który) należałoby dodawać do znanach rodzajów energii, by w dalszym ciągu zachodziła Ogólna Zasada Zachowania Energii. Dość ciekawą jest rzeczą, że (przynajmniej w bardziej znanych wypadkach) taka konieczność wcale nie zachodziła. Można tu zacytować parę przykładów. WI połowie XIX wieku powodowała trudności *sucha bateria Zamboniego.* Ale dość szybko okazało się, że po prostu nie uzględniano faktu, że wytwarza ona ładunki elektryczne kosztem pewnych dość (pozornie) trudnych do uchwycenia reakcji chemicznych. Podobnie, mniej więcej 100 lat później, kłopoty ze znikaniem części energii przy przemianach β wyjaśniły się po zasugerowaniu przez Wolfganga Pau lego (1900 - 1958), że ta energia zabierana jest energią kinetyczną nie znanych wtedy jeszcze cząstek, zwanych obecnie neutrinami.

Zauważmy, że nie zawsze uchwały różnych akademii dają się tak korzystnie dla nich zinterpretować. Też w końcu XIX wieku, Akademia Szwedzka podjęła uchwałę (!), że *„wstrzemięźliwość płciowa nigdy nikomu nie zaszkodziła, a nawet jest korzystna dla zdrowia"*. Uchwałę tę (podkreślam, że *uchwałę,* a nie przyjęcie do wiadomości wyników badań doświadczalnych) pozostawiam bez komentarza...

Bibliografia

Ta dość długa bibliografia mogłaby być jeszcze parę razy dłuższa, gdybym cytował w tekście dalsze prace z zakresu tej pracy lub gdybym podał zalecane do czytania dalsze pozycje (chociażby uzupełniając ją na zasadzie bibliografii [10]). Kompletna bowiem bibliografia przedmiotu mogłaby zająć dość grubą broszurę. Wydaje mi się jednak, że już taka bibliografia, poprzez bibliografie zawartych w niej publikacji, powinna wystarczyć kompetentnym osobom do znalezienia danych bibliograficznych wszystkich pozycji literatury przedmiotu (inna rzecz, że nie znaczy to wcale, i'ż w tej sposób łatwo dotrą one do samych tych publikacji).

[1] Angliviel de L a B e a u m e 11 e L.: *Vie de Maupertuis, suivie des lettres inédites de Frédéric le Grand et de Maupertuis et d'un appendixe* [publieé par M. A n g l i v i e l]. Paris 1856

[2] AppellP. : *Traite de mecaniqque rationnelle.* Paris, od 1893 roku. Liczne wydania w różnej ilości tomów. Istnieją tłumaczenia (m.in. rosyjskie)

[3] ArcyP.d' : *Reflexio∩s sur le principe de la moindre action de Mr de Maupertuis,* Histoire de ΓAcadémie des Sciences (Paris) 1749, éd. 1753, p.179

[4] ---------------- *: Replique a un Memoíre de Mr de Maupertuis sur le principe de moindre action, inseré dans les Mémoires de 1'Académie Royale des Sciences de Berlin de 1'année 1752,* Histoire de 1'Académie des Sciences (Paris) 1752, ed.´1756

Arnold W. - patrz: H.Wussing, W. Arnold

[5] B a b e l o n J.P.: *L'eglíse Saint-Roch a Paris.* Paris1991

Bali R o u s e W. W. - patrz W. W. R o u s e Bali

[6] Banach St. : *Mechanika,* t. 2. Warszawa - Lwów 1938 - wyd. II, przedruk fotograficzny dokonany w Szwecji 1947. Wyd. II (faktycznie III - w owych latach wydawnictwo "Czytelnik" liczyło tylko wydania powojenne), niezmienione. Warszawa 1949. Wyd. III (faktycznie IV), niezmienione. Warszawa 1949. Wyd. IV (faktycznie V), zmienione. Warszawa 1956 (str. 558); istnieje angielskie tłumaczenie : *Mechanics* (tłumaczył E.J. Scott). Warszawa 1951

Beaumelle L. - patrz :L. Angliviel de LaBeaumelle

[7] Bliss G.A.: *Lectures on the Calculus ot Variatio∩.* Chicago 1946

Borchardt **K.**W. - patrz : C.G.J. Jacobi

[8] Block H.D. : *On the minimality of the variational principles of classical particle mechanics,* Amer. Math. Monthly **62** (1955) 161 - 168

[9] Bouguer M. : *La figure de la Terre, Déterminé par les Observations de Messieurs Bouguer, & de La Condamine,* .... Paris 1749

[10] Brunet P. : *Maupertuis. Etude biographique.* Paris 1929

[11] Cajori F. : A *History of Mathematical Notations,* t. I *Notations in Elementary Mathematics.* Chicago 1928, t. II *Notations Mainly in Higher Mathematics.* Chicago 1929. Wydanie (przedruk fotograficzny) II, New York 1993

[12] Ch amfort N. : *Maximes et Anecdotes* [ze wstępem A. Camusa], Monaco 1944

Clebsch A. - patrz : C.G.J. Jacobi

[13] Du Boi s-Reymond E. : *Maupertuis.* Leipzig 1893

[14] Du Boi s-Reymond P.D.G. : *Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung,* Math. Ann **15** (1879) 282 - 314

[15] Du Boi s-Reymo nd P.D.G. : *Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung,* Math. Ann **15** (1879) 564 - 576

[16] Dühring E. : *Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik,* Leipzig 1872, II Aufl. Leipzig 1887

[17] Euler L. : *Exposé concernant l'examen de la lettre de M. de Leibnitz, allégué parM. le prof. Koenig, dans le mois de mars 1751, des Actes de Leipzig à l'occasion de principe de la moidre action,* Mem de l'Acad. d. Sei. de Berlin **6** (1750), druk 1752

[18] -------------- : *Essay d'une démonstration métaphysique de principe général de l'équilibre,* Mém. de l'Acad. des Sei. de Berlin **7** (1751), Berlin 1753, 264-284

[19] -------------- : *Dissertatio de principio minimæ actionis una cum examine abiectionum prof. Koeniggi contra hoc principium factorum.* Berlin 1753

[20] Fauve IJ., G r a y J. : *The History of Mathematics.* London 1987 (druk Hongkong)

Gray J. - patrz : J. F a u v e I, J. G r a y

[21] H a m i l to n W.R. : *On a general Method in Dynamics, by whitch the Study of Motions of all free Systems Atracting or Repelling Points is Reduced to the Search and Differentiation of One Central Relations or Charakteristic Function,* Phil. Trans, of the Roy. Soc. II part of 1834, 247 - 308. [Przedrukowane w W.R. Hamilton : *Mathematical Papers,* t. II, Cambridge 1940 (str. 103 - 162); rosyjskie tłumaczenie jest przedrukowane w **[67],** na str. 175 - 233]

[23] --------- : *Second Essay on a General Method in Dynamics,* Phil. Trans, of the Roy. Soc. I part of 1835, 95 - 144. [Przedrukowane w W.R. Hamilton: *Mathematical Papers,* t. 2 (str. 162 - 212), Cambridge 1940; rosyjskie tłumaczenie jest przedrukowane w **[67],** na str. 234 - 283]

[24] H a w k i n g S. W. : *Une breve histoire du temps. Du Big Bang aux trous noires.* Paris 1991. Jest to tłumaczenie książki *A Brief History of Time. From Big Bang to Black Poles,* New Yourk 1988, dokonane przez I. Naddeo-Souriau. [Istnieje też polskie tłumaczenie]

[25] Hertz H. : *Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhänge dargestelt.* Leipzig 1894; przedruk: *Gesammelte Werke,* t. 3. Leipzig 1904, wyd. 2, Leipzig 1910. Istnieją tłumaczenia, na przykład angielskie : *The Principles of Mechanics* (tłumaczyli D.E. Jones, J.T. Walley). London 1899, przedruk fotograficzny New York 1956

[26] Hilbert D. : *Zur Variationsrechnung,* Gött. Nachrichten (1905) 159 - 180; przedrukowane bez większych zmian w Math. Ann. **62** (1906) 351 - 370 oraz w D. H i l b e r t : *Gesammelte Abhandlungen,* t. 3, str. 38 - 55. Leipzig 1936

[27] Holder O. : *Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis.* Nachr. d. Gesellschaft d. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl. (1896), zesz. 2, 122 - 157 [czasem podaje się strony 1 - 36 (patrz, na przykład, **[67],** str. 564), ale chodzi wtedy o cytowanie odbitki ze zmienioną - własną - paginacją]. Rosyjskie tłumaczenie jest przedrukowane w **[67],** na str. 538 - 563

[28] Huber M.T. : *Mechanika ogólna i techniczna.* Warszawa 1951. **Wyd** II, Warszawa 1956

[29] Jacobi C .G.J. : *Vorlesungen über Dynamik.* Leipzig 1866 (na zasadzie notatek K.W. Borchardta z wykładów w sem. zimowym 1842 -1843 wydał A. Clebsch; też w : *Gesammelte Werke* (red. E. L o ttn e r), *Supplementband.* Wyd. II. Berlin 1884. Istnieje tłumaczenie na język rosyjski. Interesujące nas fragmenty są zamieszczone w rosyjskim tłumaczeniu w **[67],** str. 297 - 314

[30] Jan P aweł II [Karol Wojtyła] : *Encyklika Fides et ratio* (wydanie polskie). Kraków 1998

[31] Jourdain Ph.E.B. (red.) : *Abhandlungen über die Prinzipien der Mechanik von Lagrange, Rodrigues, Jacobi und Gauss.* [Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften # 167]. Leipzig 1908

[32] KantH. : *G.D. Fahrenheit, P.-A.F. de Péamur, A. Celsius.* Leipzig 1984 (Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner, Bd. 73)

[33] Karpiński A. : *Pauperes - o mieszkańcach Warszawy XVI /' XVII wieku.* Warszawa 1983

[34] Klein F. : *Die prinzipien der Mechanik, historisch und kritisch dargestelt,* Leipzig 1872

[35] ------------ : *Vorlesungen über die Entwicklung der mathematik im 19.Jahrhundert,* Bd. I. Berlin 1926

[36] KlötzlerR. : *Mehrdimensionale Variationsrechnung.* Berlin 1969. Wyd. II. Berlin 1971

[37] Kneser A. : *Das Prinzip der kleinsten Wirkung von Leibniz bis zur Gegenwart.* Leipzig 1928

[38] Koser R. (red.) : *Briefwechsel Friede rieh der Grosse mit Grumbke und Maupertuis.* Leipzig 1898 (Publikationen aus der K. Preussischen Staatsarchiven, Bd. 72)

La Beaumelle L. - patrz : L. Angliviel de La Be a u me 11 e

[39] Lagrange [De la G ra ng e] J.L. *'.Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution des différents poblèmes de dynamique,* Miscellanea Tauricensia **2** (1760 -1761); przedruk w *: Oevres complètes,* t. 1, str. 365 - 468. Rosyjskie tłumaczenie (skrócone) jest zamieszczone w **[67],** str. 297 - 314

[40] -------------------; *Mécanique analytique.* Paris 1788 [przedrukowywane w różnych wydaniach *Dzieł Zbiorowych* J.L. L a g r a n g e'a]

[41] —----------------: *Mécanique analytique,* wyd. II rozszerzone, t. I, Paris 1811, t. II (opracowany częściowo przez G. de Pro n y i J. B i n e ta), wyd. III (wydane przez J. Bertranda), Paris 1853; wyd. IV (opracowane przez G.Darboux)w: *Oevres complètes,* t. 11 it. 12, Paris 1888 - 1889. Liczne tłumaczenia na języki : niemiecki, angielski, rosyjski i inne; fragment rosyjskiego tłumaczonia jest zamieszczony w **[67],** na str. 157-166

[42] Lanczos C. : *The variational principles of mechanics,* wyd. 2. Toronto 1962. Istnieje tłumaczenie rosyjskie : *Wariacionnye principy mechaniki,* Moskwa 1965

[43] Landau L.D., Lifszic E.M. : *Mechanika.* Warszawa 1961, [tłumaczenie książki *Mechanika.* Moskwa 1958, (wyd. II Moskwa 1965), dokonane przez St. B a ż a ń s k i e g o]

[44] Lecat M. : *Bibliographie du calcul des variations depuis les origines jusqu'à 1850.* Paris-Gand; istnieją późniejsze przedruki

[45] ------------------ : *Bibliographie du calcul des variations 1850 - 1913.* Gand 1913; istnieją późniejsze przedruki

[46] ------------------: *Bibliographie des séries trigonométriques.* Louvain - Bruxelles 1921, (dodatek na str. 155 -167)

[47] ------------------: *Bibliographie de la relativité.* Bruxelles 1924 {*Appendice* na str. 15-22)

L i f s z i c E.M. - patrz : L.D. L a n d a u, E.M. L i f s z i c

[48] Ł o m i c k i A. : *Rachunek różniczkowy i całkowy dla potrzeb przyrodników i techników,* tom. II, *Rachunek całkowy.* Kraków 1936

[49] Mach E. : *Die mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritrisch dargestellt,* Leipzig 1883, 5 Aufl. 1904. [Istnieją tłumaczenia : T.J. McCormacka: *The science of Mechanics,* Chicago 1893 oraz E. B e r t r a n d a '*La Mécanique,* Paris 1903]y

[50] Morse M. : *The Calculus of Variations in the Large.* New York 1934 (Coll. Publication n° 18)

[51] M a u p e r t u i s P.L. de : *Sur la forme des instruments de musique.* Paris 1724

[52] ____________________ : *Sur une question de maximas et minimas,* Histore de l'Académie des Sciences de Paris 1726

[53] ____________________ : *La lois du repos, Oevres de M. de Maupertuis,* t. IV, Lyon 1756, str. 45 - 63

[54] ____________________ : *Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles,* Histore de l'Académie des Sciences de Paris 1744. [Przedruk w **[59]**, na str. 3 - 28; rosyjskie tłumaczenie jest w **[67]**, na str. 23 - 30]

[55] ____________________ : *Les lois du mouvement et du repos déduites d'un Principe Métaphysique,* Histore de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres pour l'anné1746 (Berlin 1748), (Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin 1746), str. 267 - 294. [Rosyjskie tłumaczenie jest w **[67]**, na str. 41 - 56]

[56] ---------------------------- : *Essai de Cosmologie,* Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin 1750

[57] ---------------------------- : *Maupertuisiana - Démêlés de M. de Maupertuis.* Hamburg 1753

[58] ---------------------------- : *Vollständige Sammlung aller Streitschriften die neulich zwischen Maupertuis und König Gewechselt worden.* Leipzig 1753. [Jest to tłumaczenie pozycji **[57]** tej bibliografii]

[59] ---------------------------- : *Oevres de M. de Maupertuis,* nouv. éd., t. 4, Lyon 1756. Podobno lepsze jest późniejsze wydanie : Leipzig 1768

[60] Mayer A. : *Der satz der Variationsrechnung, welcher dem Prinzipe des kleinsten Wirkung in der Mechanik entspricht,* Math. Ann. 2(1870) 243- 149

[61] ---------------------------- : *Geschichte des Prinzips der kleinsten Action* (Akademische Antritsvorlesung). Leipzig 1877

[62] M e n g e r K. : *Calculus - A Modern Approach.* Boston, etc. 1955

[63] M e r i a n J.B. : *Mémoires pour servi re à l'histoire du jugement de l'Académie.* Berlin 1753

[64] Mittenzwei I.: *Friedrich II. von Preussen,* Berlin 1984

[65] N i ewęgłowski G.H. : *Kurs mechaniki rozumowej,* t. I, Paryż 1873, t. II, Paryż 1876

[66] O r i e u x J. : *Wolter* (tłumaczył K. Arustowicz). Warszawa 1986

[67] Polak L.S. (red.) : *Wariacjonnyje principy mechaniki.* Moskwa 1959. [Książka ta zawiera, między innemi, rosyjskie tłumaczenia prac **[21]**, **[23]**, **[27]**, **[53]**, **[54]**,**[55]** oraz **[73]**, **[95]** i fragment książki **[40]**

[68] ----------- : *Wariacjonnyje principy mechanik ich razwitie i primenenija* w *fizike.* Moskwa 1960

[69] Prange G. : *Die algemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik,* Eneyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. IV,1,11, (Heft 4), 505 - 804, Leipzig 1935

[70] Przeborski A. : *Rachunek wariacyjny,* 1.1, cz. 1. Warszawa 1926

[71] ------------------------- : *Wykłady mechaniki teoretycznej,* 1.1. Warszawa 1930, t. II. Warszawa 1935

[72] Reichenberg H. : *Maupertuis,* Neue Deutsche Biographie, Bd. 16. Berlin 1990, str. 431 -432

[73] Rodrigues B. O. : *De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenire les équations du mouvement rapportées aux variables independentes,* Correspondance sur l'école Polytechnique **3** (1816). z. 2 159 - 162; Niemieckie tłumaczenie jest zamieszczone w **[31],** rosyjskie w **[67],** na str. 167 - 169

[74] Rouse Ball W.W. : A *Short Account of the History of Mathematics.* New York 1960 [przedruk fotograficzny IV wydania z 1908]

[75] R o u t h E.J. : *A Treatise on dynamics ot a particle.* Cambridge 1898

[76] Su st ow G.K. : *Mechanika teoretyczna* (tłumaczył zespół). Warszawa 1960 [rosyjski oryginał miał różne tytuły w różnych wydaniach : *Teoreticzeskaja mechanika,* wyd. III Moskwa - Leningrad 1946]

[77] Tatarki e w i c z K. : *Une généralisation des équations de Maggi et d'Appell,* Ann. UMCS (A) **10** (1956) 5 - 32

[78] --------------------------- : *Sur la notion des liaisons,* Ann. UMCS (A) **12** (1958) 59-66

[79] ---------------------------: *Symbolika Mengera rachunku różniczkowego i całkowego,* Wiad. Mat. 3 (1960) 267 - 283

[80] —■■-----: *Sur la notion de l'équivalence des liaisons,* **Ann. UMCS (A) 21** (1967)27-45

[81] -------------------------: *Rachunek tensorowy a mechanika teoretyczna,* w P. Kucharczyk (red.) : *Metody geometryczne w fizyce i technice.* Warszawa 1968, str. 123-149

[82] ------------------------- *'.Rachunek wariacyjny,* cz. I - *Warunki konieczne Eulera i Legendre'a.* Warszawa 1969

[83] —-------—---------— *'.Rachunek wariacyjny,* cz. II - *Warunki dostateczne. Zastosowania.* Warszawa 1970

[84] ------------------------ : *Joseph Luis Lagrange* (1735 - 1813) /' *jego twórczość w zakresie mechaniki,* w St. Fudali (red.) : *Probabilistyka i mechanika w szkicach historycznych (Materiały z V Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki - Dziwnów* 1991), str, 337 - 349. Szczecin 1992

[85] ________________ ■.*Zasada Maupertuis (przedwczoraj i dziś).* Warszawa 1999 (na prawach rękopisu)

[86] ________________ : *Od fałszywego do nieciekawego twierdzenia, czyli 230 lat historii tak zwanej Zasady Maupertuis,* w St. Fudali (red.) *Matematyka XVIII wieku (Materiały* zXIII *Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki - Kołobrzeg 1999),* Uniwersytet Szczeciński, Materiały - Konferencje, nr. 51, str. 153 - 176, Szczecin 2000 (w druku)

[87] ________________ -.*Historia Zasady Maupertuis wczoraj.* Warszawa 2000 (na prawach rękopisu)

[88] ________________ '.*Historia Zasady Maupertuis wczoraj,* w *Materiały* XIV *Ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki - Zielona Góra* 2000 - oddane do druku,

[89] Thiele R. : *Leonhard Euler* (Biographien hervorragender Natur-wissenschaftler, Techniker und Mediziner # 56). Leipzig 1982

[90] Todhunter J. : 4 *History of the Progress of the Calculus of Variations during the Nineteeth Century.* Cambridge - London 1861; przedruk New York 1961

Voltaire F.M. A r o u e t, zwany de - patrz Wolter

[91] Wandycz P. : *Pod zaborami* 1795 - 1918. Warszawa 1994, [tłumaczenie książki *The Lands of Partitioned Poland* 1795 - 1918, dokonane przez W. Zajączkowskiego]

[92] Whittaker E.T. : *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies.* Cambridge 1904; wyd III, Cambridge 1952; istnieje polskie tłumaczenie *: Dynamika analityczna* (tłumaczył St. Dobrzycki). Warszawa 1959

Wojtyła K.-patrz: Jan-Paweł II

[93] Wolter (F.M. Aro u et, zwany de Voltaire) : *Listy o Anglikach albo listy filozoficzne* [książkę *Lettres anglaises ou lettres philosphiques* (pierwsze wydanie 1734, wiele wydań oddzielnych lub w dziełach zbiorowych) tłumaczył J. Rogoziński]. Warszawa 1952, Biblioteka Klasyków Filozofii

[94] Wolter (F.M. A r o u e t, zwany de V o 11 a i r e) : *Elementy fizyki Newtona* [książkę *Éléments de philosophie de Newton,* pierwsze wydanie 1738, wiele wydań oddzielnych lub w dziełach zbiorowych, tłumaczyła H. Konczewska]. Warszawa 1956, Biblioteka Klasyków Filozofii

[95] ——— *: Diatribe du docteur Akakia, Médecin du pape, natif de Saint-Malo,* w V o 11 a i r e *: Oevres* (wyd. B e u c h o t). Paris 1892. Rosyjskie tłumaczenie jest w **[71],** str. 723 - 741

[96] Wussing H., Arnold W. (redaktorzy) : *Biographien Bedeutender Mathematiker.* Berlin 1978

[97] * * * *: Catalogue de la Bibliothèque Nationale.* Paris od 1892

[98] * * * *: Grand Larousse Universel,* vol. X. Paris 1984

[99] * * * *: La Grande Encyclopédie,* t. 23. Paris [bez daty]

[100] * * * *: Les guides bleus - Guide littéraire de la France.* Paris 1965

Streszczenie

Referat ma na celu wykazanie, że tak zwana *Zasada Najmniejszej Akcji Maupertuis* nie powinna być uwzględniana w kursowych wykładach mechaniki teoretycznej, a tylko - conajwyżej - w jakichś historycznych opracowaniach (ewentualnie w jakichś dodatkach historycznych do obszerniejszych podręczników).

Ustępy n° 1.1 -1.5 (Rozdziału I) poświęcone są osobie Piotra Ludwika Moreau de M a u pe rtu i s (1698 - 1759). Ustępy n° 1.7 -1.9 poświęcone są (zupełnie nonsensownym) wypowiedziom pewnej ekstremalnej zasady sformułowanej przez niego oraz tylko nieco bardziej sensownym (też i nieco poprawniejszym, acz o bardzo ograniczonym zakresie stosowalności) sformułowaniom, podanym w XVIII wieku przez inne osoby. Rozdział 4 i Rozdział 5 referują dalszą historię tej zasady ekstremalnej w XIX i w XX wieku. Poprawne sformułowanie tego co obecnie nazywa się *Zasadą Maupertuis* podane jest w n° 3.5. Wykazuje ono, że Zasada ta jest - w gruncie rzeczy - zupełnie nieciekawa.

Potrzebne do zrozumienia referatu wiadomości z rachunku wariacyjnego (w szczególności pojęcie argumentu ekstremum miejscowego = *argument de l'extremum topique*) podaje Rozdział II, natomiast wiadomości z mechaniki teoretycznej są zawarte w Rozdziale III. Źródła do tego referatu zaprezentowane są we Wstępie (n° 0.2). Załączona jest bibliografia.

Podsumowanie pracy znajduje się w jej"*Zakończeniu*".

RÉSUMÉ

Cette note *„Le principe de la moidre action de Maupertuis "* a comme but la démonstration du fait que le Principe de la moindre action de Maupertuis n'est pas intéressant et comme tel ne doit pas être mentionné dans des leçons (ou dans des manuels) de la mécanique rationnelle. Il ne doit intéresser que les historiens de la mathématique (plus exactement les historiens de la mécanique rationnelle).

Les passages n° 1.1 -1.5 (du chapitre I) sont consacré à Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698 - 1759). Les passages n° 1.7 - 1.9 présentent l'énoncé original de ce Principe (il n'a pas de grand sens), publié par P.L. de Maupertuis lui-même et quelques autres énoncés lui un peu postérieurs (ayant plus de sens et formulés par d'autres personnes, mais qui ne s'apliquent qu'aux cas bien particuliers). Le chapitre IV présente l'histore du Principe de Maupertuis au XIX et XX siede. On trouve au n° 3.5 l'état actuel des résultats des travaux sur le Principe de Maupertuis. Il s'ensuit que ce Principe, sous sa forme correcte, ne présente aucun intérêt (autre qu'un l'intérêt historique).

Le chapitre II présente une introduction du point de vue du Calcul des variations contemporain (en outre on introduit la notion de *l'argument de l'extremum topique – argument ekstremum miejscowego*) et le chapitre III est une introduction semblable du point de vu de la mécanique rationnelle. Le problème des sources est considéré dans l'Introduction (n° 0.2). Une bibliographie est jointe.

Les *„Conclusions "* résument les thèses de cette note.

Indeks nazwisk

Indeks nazw i pojęć

Pojęcia mające dwa lub więcej określenia, cytowane są oddzielnie, z jednym tylko określeniem. Na przykład, <<*ekstremum lokalne, miejscowe* » należy szukać pod « *ekstremum lokalne* » oraz «*ekstremum miejscowe* ».

Wskazuje się tylko miejsce definicji pojęcia. Ogólnie znane pojęcia nie są tu wzmiankowane.

Symbole

Podane są miejsca zdefiniowania symboli, lub też miejsca ich pierwszego występowania. Uporządkowanie aproksymatywne, wedle pierwszej litery lub pierszego symbolu

Spis ilustracji

Spis rzeczy

Wydruk ukończono w listopadzie 2000

Wydruk ukończono w listopadzie 2000