SUR

LE MOUVEMENT DU PÉRIGÉE DE LA LUNE

Bulletin astronomique, t. 17, p. 87-104 (mars 1900).

Les termes du mouvement de la Lune qui ne dépendent ni de l'inclinaison, ni de la parallaxe, ni de l'excentricité solaire, sont déterminés par les équations

$$(1)\quad \begin{cases} x'' - 2my' + \dfrac{\varkappa x}{r^3} = 3m^2 x, \\ y'' + 2mx' + \dfrac{\varkappa y}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Ici, on a posé

$$m = \frac{n'}{n - n'},$$

n' étant le moyen mouvement du Soleil et n celui de la Lune; et l'on a choisi l'unité de temps de telle façon que $n - n' = 1$. Quant à $\varkappa$, c'est la somme des masses de la Terre et de la Lune.

Si l'on pose

$$V_1 = \frac{\varkappa}{r} + \frac{3}{2} m^2 x^2,$$

ces équations peuvent s'écrire

$$(1\ bis)\qquad x'' - 2my' = \frac{dV_1}{dx}, \qquad y'' + 2mx' = \frac{dV_1}{dy},$$

et l'on en déduit l'intégrale de Jacobi

$$(2)\qquad \frac{x'^2 + y'^2}{2} = V_1 + \text{const.}$$

M. Hill a déterminé une solution particulière de ces équations; cette solution que je désignerai spécialement par x, y, est une solution périodique et elle représente l'ensemble des termes de degré zéro par rapport aux deux excentricités, à l'inclinaison et à la parallaxe. Elle correspond à la valeur zéro de la constante d'intégration e qui joue le rôle de l'excentricité.

Désignons par $x+\xi$, $y+\eta$, une solution infiniment voisine de la précédente, de telle sorte que nous puissions négliger les carrés des variations ξ et η. Alors ξ et η représenteront l'ensemble des termes qui seront du premier degré par rapport à e.

Il est clair que ξ et η devront satisfaire aux équations aux variations

$$\xi'' = 2m\eta' = P\xi + Q\eta, \qquad \eta'' + 2m\xi' = Q\xi + R\eta, \tag{3}$$

où j'ai posé pour abréger,

$$P = \frac{d^2 V_1}{dx^2}, \qquad Q = \frac{d^2 V_1}{dx\,dy}, \qquad R = \frac{d^2 V_1}{dy^2}.$$

De plus, on déduit de l'intégrale de Jacobi

$$x'\xi' + y'\eta' - \frac{dV_1}{dx}\xi - \frac{dV_1}{dy}\eta = \text{const.} \tag{4}$$

Ces équations (3) et (4) permettent de calculer les termes du premier degré par rapport à e et la partie du mouvement du périgée, qui est indépendante des excentricités, de l'inclinaison et de la parallaxe et dépend seulement du rapport des moyens mouvements.

Les équations (3) sont des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques; le système est du quatrième ordre puisqu'il se compose de deux équations du deuxième ordre. M. Hill, pour calculer le mouvement du périgée, commence par ramener le système au deuxième ordre et parvient à le remplacer par une équation unique

$$w'' + \Theta w = 0,$$

où Θ est une fonction périodique du temps.

Je voudrais indiquer une méthode par laquelle on pourrait déterminer ce mouvement du périgée sans avoir recours à cette transformation.

Pour cela cherchons à nous rendre compte de la forme de l'intégrale générale du système (3). J'ai dit que les équations (1) admettent une solution périodique; en réalité, elles en admettent une infinité (une pour chaque valeur de m) qui peuvent s'écrire

$$x = \varphi(\tau, m), \qquad y = \varphi_1(\tau, m),$$

où φ et φ_1 sont des fonctions développées, d'une part suivant les puissances de m, d'autre part suivant les cosinus et les sinus des multiples impairs de τ. Quant à τ, c'est la différence des longitudes moyennes de la Lune et du Soleil.

$$\tau = (n - n')(t + \varepsilon).$$

J'ai écrit les équations (1) en adoptant une unité de temps particulière, à savoir la période synodique divisée par 2π; je ne puis le faire si je veux faire varier m, parce que cela fera varier précisément cette période synodique. Je rétablis donc l'homogénéité et j'écris les équations (1) sous la forme

$$(1\ ter)\qquad \begin{cases} x'' - 2n'y' + \dfrac{\varkappa x}{r^3} = 3n'^2 x, \\[2mm] y'' + 2n'x' + \dfrac{\varkappa y}{r^3} = 0. \end{cases}$$

Mes solutions périodiques deviennent alors

$$x = \varphi\left[(n - n')(t + \varepsilon), \frac{n'}{n - n'}\right], \qquad y = \varphi_1\left[(n - n')(t + \varepsilon), \frac{n'}{n - n'}\right],$$

contenant deux constantes d'intégration n et ε.

On obtient évidemment deux solutions particulières des équations aux variations en différentiant par rapport à ces deux constantes. Ces deux solutions particulières sont

$$\xi_1 = \frac{dx}{d\varepsilon} = (n - n')\frac{dx}{d\tau}, \qquad \eta_1 = \frac{dy}{d\varepsilon} = (n - n')\frac{dy}{d\tau}$$

et

$$\xi_2 = \frac{dx}{dn} = (t + \varepsilon)\frac{dx}{d\tau} - \frac{n'}{(n - n')^2}\frac{dx}{dm},$$

$$\eta_2 = \frac{dy}{dn} = (t + \varepsilon)\frac{dy}{d\tau} - \frac{n'}{(n - n')^2}\frac{dy}{dm}.$$

Après la différentiation, je puis supposer de nouveau $n - n' = 1$, d'où $\tau = t + \varepsilon$, ce qui donne

$$\xi_1 = \frac{dx}{d\tau} = x', \qquad \eta_1 = \frac{dy}{d\tau} = y',$$

$$\xi_2 = \tau x' - m\frac{dx}{dm}, \qquad \eta_2 = \tau y' - m\frac{dy}{dm}.$$

Outre ces deux solutions particulières, la théorie des équations linéaires à coefficients périodiques nous enseigne qu'il en existe une troisième de la forme suivante :

$$\xi_3 = \Sigma\varepsilon_j \zeta^{2j+1+c}, \qquad \eta_3 = \sqrt{-1}\,\Sigma\varepsilon'_j \zeta^{2j+1+c}.$$

Les ε_j et les ε'_j sont des coefficients constants; j est un entier, c est l'exposant caractéristique dont dépend le mouvement du périgée; enfin

$$\zeta = \cos\tau + i\sin\tau.$$

Si l'on change τ en $-\tau$, ξ en $-\xi$, η en $-\eta$, les quantités x, r et y se changeront en x, r et $-y$ et les équations ne changeront pas. Nous aurons donc une quatrième solution

$$\xi_4 = \Sigma\varepsilon_j\zeta^{-2j-1-c}, \qquad \eta_4 = -\sqrt{-1}\,\Sigma\varepsilon'_j\zeta^{-2j-1-c}.$$

Nous en déduisons une cinquième

$$\xi = F(\tau) = \frac{\xi_3+\xi_4}{2} = \Sigma\varepsilon_j\cos(2j+1+c)\tau,$$

$$\eta = F_1(\tau) = \frac{\eta_3+\eta_4}{2} = \Sigma\varepsilon'_j\sin(2j+1+c)\tau.$$

Quelles sont les conditions initiales correspondantes? On a d'abord

$$F'(0) = F_1(0) = 0.$$

Reprenons maintenant l'équation (4); je dis que pour cette solution particulière la constante qui figure dans le second membre de (4) doit être nulle. Il suffit, en effet, de prouver qu'il en est ainsi pour les deux solutions particulières ξ_3, η_3 et ξ_4, η_4. Or la solution ξ_3, η_3, jouit de cette propriété de se reproduire multipliée par $-(\cos c\pi + \sqrt{-1}\sin c\pi)$ quand on change τ en $\tau+\pi$.

Le premier membre de (4) est donc multiplié par le même facteur, si après y avoir fait $\xi=\xi_3$, $\eta=\eta_3$, on change τ en $\tau+\pi$. Comme ce facteur n'est pas égal à 1 et que le second membre est une constante, il faut que cette constante soit nulle; elle le sera encore, pour la même raison, si l'on fait $\xi=\xi_4$, $\eta=\eta_4$; et, par conséquent, on aura

$$x'F'(\tau) + y'F'_1(\tau) = \frac{dV_1}{dx}F(\tau) + \frac{dV_1}{dy}F_1(\tau).$$

Pour $\tau = 0$, F' et F_1 s'annulent, et il reste

$$y'F'_1(0) = \frac{dV_1}{dx}F(0) = F(0)\left(3m^2x - \frac{\varkappa x}{r^3}\right).$$

Mais pour $\tau = 0$, on a $x = r$; d'où

$$y'_0F'_1(0) = F(0)\left(3m^2x_0 - \frac{\varkappa}{x_0^2}\right)$$

en appelant x_0 et y'_0 les valeurs de x et y' pour $\tau = 0$.

Comme F et F_1 ne sont définis jusqu'ici qu'à un facteur constant près, nous pourrons prendre pour les conditions initiales qui définissent complètement cette solution particulière

$$F'(0) = F_1(0) = 0,$$
$$F(0) = \Sigma\varepsilon_j = y'_0,$$
$$F'_1(0) = \Sigma\varepsilon'_j(2j+1+c) = 3m^2 x_0 - \frac{\varkappa}{x_0^2}.$$

On aura alors

$$F(\pi) = \Sigma\varepsilon_j \cos(\pi + c\pi) = -y'_0 \cos c\pi,$$
$$F'_1(\pi) = \Sigma\varepsilon'_j(2j+1+c)\cos(\pi + c\pi) = -\left(3m^2 x_0 - \frac{\varkappa}{x_0^2}\right)\cos c\pi.$$

Ces équations vont nous fournir un moyen de calculer $\cos c\pi$; il suffit pour cela de calculer par exemple $F(\pi)$.

Observons que P, Q, R sont des fonctions périodiques de τ; la période étant π, les développements procéderont suivant les lignes trigonométriques des multiples de 2τ. De plus, par raison de symétrie, les développements de P et R ne contiendront que des cosinus et celui de Q ne contiendra que des sinus; soit

$$P = \Sigma P_j \cos 2j\tau, \qquad Q = \Sigma Q_j \sin 2j\tau, \qquad R = \Sigma R_j \cos 2j\tau.$$

Posons maintenant

$$\xi = \rho\cos\tau + \sigma\sin\tau, \qquad \eta = \rho\sin\tau - \sigma\cos\tau;$$

nos équations deviendront

$$\rho'' + 2(m+1)\sigma' - (2m+1)\rho = P'\rho + Q'\sigma,$$
$$\sigma'' - 2(m+1)\rho' - (2m+1)\sigma = Q'\rho + R'\sigma,$$

en posant

$$P' = P\cos^2\tau + 2Q\cos\tau\sin\tau - R\sin^2\tau,$$
$$Q' = Q(\sin^2\tau - \cos^2\tau) + (P - R)\cos\tau\sin\tau,$$
$$R' = P\sin^2\tau - 2Q\cos\tau\sin\tau + R\cos^2\tau,$$

c'est-à-dire

$$P' = 3m^2\cos^2\tau - \frac{x}{r^3} + 3\frac{x}{r^5}(x\cos\tau + y\sin\tau)^2.$$

$$Q' = 3m^2\cos\tau\sin\tau + 3\frac{x}{r^5}(x\cos\tau + y\sin\tau)(x\sin\tau - y\cos\tau),$$

$$R' = 3m^2\sin^2\tau - \frac{x}{r^3} + 3\frac{x}{r^5}(x\sin\tau - y\cos\tau)^2.$$

Il est aisé de voir que $(x+iy)\zeta^{-1}$, $(x-iy)\zeta$, et par conséquent r, $x\cos\tau + y\sin\tau$, $x\sin\tau - y\cos\tau$, et enfin P', Q', R' sont developpables suivant les puissances de m, $m^2\zeta^2$ et $m^2\zeta^{-2}$.

Il en résulte que si l'on pose

$$P' = \Sigma P'_j \cos 2j\tau, \qquad Q' = \Sigma Q'_j \sin 2j\tau, \qquad R' = \Sigma R'_j \cos 2j\tau,$$

les coefficients P'_j, Q'_j, R'_j seront d'ordre $|2j|$, m étant regardé comme du premier ordre. J'observe de plus que Q'_0 est nul.

Ne laissons dans le second membre que les quantités du second ordre; nos équations deviendront

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho'' + 2(m+1)\sigma' - (2m+1)\rho - P'_0\rho = (P' - P'_0)\rho + Q'\sigma, \\ \sigma'' - 2(m+1)\rho' - (2m+1)\sigma - R'_0\rho = Q'\rho + (R' - R'_0)\sigma. \end{cases}$$

Il s'agit de déterminer $F(\tau)$ et pour cela il faut chercher une solution particulière des équations (5), assujettie aux conditions initiales

$$(6) \qquad \rho = y'_0, \qquad \rho' = \sigma = 0, \qquad \sigma' = 3m^2 x_0 - \frac{x}{x_0^2} \qquad (\text{pour } \tau = 0).$$

Cette solution particulière dépendra évidemment des coefficients P'_j, Q'_j, R'_j.

Un théorème général relatif aux équations linéaires nous apprend que notre solution peut se développer suivant les puissances de P'_j, Q'_j, R'_j, et que le développement ainsi obtenu converge, *quelles que soient les valeurs attribuées à ces coefficients*. En d'autres termes, notre solution est une fonction *entière* de ces coefficients.

Je veux dire que c'est une fonction entière par rapport aux coefficients

$$\begin{array}{llll} P'_0, & P'_1, & P'_2, & \ldots, \\ & Q'_1, & Q'_2, & \ldots, \\ R'_0, & R'_1, & R'_2, & \ldots, \end{array}$$

Mais je développerai seulement suivant les puissances des coefficients

$$\begin{array}{lll} P'_1, & P'_2, & \ldots, \\ Q'_1, & Q'_2, & \ldots, \\ R'_1, & R'_2, & \ldots, \end{array}$$

qui sont très petits.

Pour cela, je prendrai les équations (5) et j'attribuerai d'abord dans le second membre les valeurs 0 à ρ et à σ; et je chercherai à satisfaire aux équations (5,1) ainsi obtenues et aux conditions initiales (6); j'aurai ainsi une première approximation pour ρ et σ. Je substituerai ces valeurs approchées dans le second membre; j'aurai ainsi des équations (5,2) dont les premiers membres seront ceux des équations (5) et dont les seconds membres seront des fonctions connues; je chercherai à satisfaire à ces équations (5,2) et aux conditions initiales (6), ce qui me donnera une seconde approximation pour ρ et σ, et ainsi de suite.

La première approximation nous fera connaître exactement les termes des p premiers ordres du développement suivant les puissances des P'_j, Q'_j, R'_j.

D'ailleurs l'intégration des équations (5,1), (5,2), etc., ne présentera aucune difficulté, car ce sont des équations linéaires à second membre, et les premiers membres sont à *coefficients constants*.

On aura ainsi le développement de ρ, de σ, et, par conséquent, ceux de $F(\tau)$, $F(\pi)$ et $\cos c\pi$ suivant les puissances des P'_j, Q'_j, R'_j; ces développements convergeront très rapidement, car la convergence a lieu quelles que soient les valeurs attribuées à ces coefficients.

Il pourra néanmoins être avantageux de procéder autrement.

Soient (5 *bis*) des équations de même forme que les équations (5); mais où les coefficients P'_j, Q'_j, R'_j, au lieu d'avoir les valeurs particulières qu'elles ont dans les équations (5), ont des valeurs quelconques arbitraires.

Le système (5 *bis*) étant du quatrième ordre admettra quatre solutions linéairement indépendantes. Parmi ces quatre solutions, j'en distinguerai deux qui seront telles que ρ se change en $-\rho$ et σ en $-\sigma$ quand τ se change en $-\tau$. D'après les propriétés générales des équations linéaires à coefficients périodiques, ces deux solutions seront de la forme suivante :

$$\rho = \varphi_1(\tau) = \Sigma\alpha_j \cos(2j+q)\tau, \qquad \sigma = \psi_1(\tau) = \Sigma\beta_j \sin(2j+q)\tau,$$
$$\rho = \varphi_2(\tau) = \Sigma\alpha'_j \cos(2j+q')\tau, \qquad \sigma = \psi_2(\tau) = \Sigma\beta'_j \sin(2j+q')\tau,$$

où q et q' sont des constantes.

Quand les coefficients P'_j, ... prenant des valeurs particulières, les équations (5 *bis*) se réduisent aux équations (5), q se réduit à c et q' à zéro; et l'on a

$$\varphi_1(\tau) = F(\tau)\cos\tau + F_1(\tau)\sin\tau, \qquad \psi_1(\tau) = F(\tau)\sin\tau - F_1(\tau)\cos\tau;$$
$$\varphi_2(\tau) = x'\cos\tau + y'\sin\tau, \qquad \psi_2(\tau) = x'\sin\tau - y'\cos\tau.$$

Le procédé que nous avons développé plus haut consistait à chercher une solution des équations (5 *bis*) de la forme suivante :

$$\rho = A\varphi_1(\tau) + B\varphi_2(\tau), \qquad \sigma = A\psi_1(\tau) + B\psi_2(\tau), \tag{7}$$

à déterminer les coefficients constants A et B de façon à satisfaire aux conditions initiales (6) et à développer la solution ainsi définie suivant les puissances des P'_j, ...

Nous pouvons aussi envisager la solution

$$(7\,bis)\qquad \rho = A\varphi_1(\tau), \qquad \sigma = A\psi_1(\tau),$$

et déterminer le coefficient A de telle façon que

$$(6\,bis)\qquad A\varphi_1(0) = y'_0,$$

la condition *unique* (6 *bis*) remplaçant les conditions (6).

Les deux solutions (7) et (7 *bis*) sont identiques quand les coefficients P'_j, ..., prenant des valeurs particulières, les équations (5 *bis*) se réduisent aux équations (5); mais l'identité ne subsiste plus pour les autres valeurs des P'_j, ...

Nous pouvons alors nous proposer de développer suivant les puissances des P'_j, ..., non plus la solution (7), mais la solution (7 *bis*); ce développement représentera encore $y'_0 \cos c\pi$, quand on y fera $\tau = \pi$ et qu'on donnera aux P'_j, ..., les valeurs particulières qui correspondent aux équations (5).

Cherchons à nous rendre compte de la forme du développement; supposons qu'on ait développé les $A\alpha_j$ et q suivant les puissances des P'_j, ...; soient q_0 et q'_0 les valeurs des nombres q et q' pour

$$P'_1 = P'_2 = \ldots = Q'_1 = Q'_2 = \ldots = R'_1 = R'_2 = \ldots = 0.$$

On voit que le développement de $\cos(2j+q)\tau$ pourra s'écrire

$$\cos(2j+q)\tau = \cos(2j+q_0)\tau - \frac{(q-q_0)\tau}{1}\sin(2j+q_0)\tau - \frac{(q-q_0)^2\tau^2}{1.2}\cos(2j+q_0)\tau,$$

de sorte que le développement de $A\varphi_1(\tau)$ devra contenir seulement des termes de l'une des deux formes

$$(8)\qquad \tau^{2k}\cos(2j+q_0)\tau, \qquad \tau^{2k+1}\sin(2j+q_0)\tau.$$

Voici alors comment nous devons opérer pour former effectivement le développement en question. Remplaçons d'abord ρ et σ par zéro dans les seconds membres des équations (5 *bis*) ou (5), nous obtiendrons les équations (5,1) dont la solution générale est

$$\rho = A\cos q_0\tau + A_1 \sin q_0\tau + A_2\cos q'_0\tau + A_3 \sin q'_0\tau.$$

Nous prendrons $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ et nous choisirons A de façon à satisfaire à la condition (6 *bis*). Nous aurons ainsi une première approximation pour ρ et nous en déduirons σ. Nous substituerons ces valeurs approchées de ρ et de σ

dans les seconds membres des équations (5) et nous obtiendrons ainsi les équations (5,2), dont la solution générale est

$$\rho = \mathrm{H} + \mathrm{A}\cos q_0\tau + \mathrm{A}_1 \sin q_0\tau + \mathrm{A}_2 \cos q'_0\tau + \mathrm{A}_3 \sin q'_0\tau,$$

où H est un ensemble de termes de la forme (8) et les A des constantes arbitraires. Nous prendrons $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}_2 = \mathrm{A}_3 = 0$ et nous choisirons A de façon à satisfaire à (6 *bis*). Nous aurons ainsi une seconde approximation pour ρ et nous en déduirons σ; et ainsi de suite.

On voit qu'à chaque approximation, on choisit les constantes arbitraires de façon à satisfaire à la condition (6 *bis*) et à éviter l'introduction dans l'expression de ρ de termes de la forme $\sin q_0\tau$, $\cos q'_0\tau$ ou $\sin q'_0\tau$.

Le développement obtenu par ce nouveau procédé n'est pas identique à celui que nous avons d'abord envisagé; il n'y a donc pas de raison pour qu'il reste convergent *quelles que soient les valeurs attribuées aux* P'_j, ... Mais la convergence n'en est pas moins suffisamment rapide, à cause de la petitesse de ces quantités P'_j, et la forme de chaque terme est notablement plus simple.

Les procédés de calcul que nous venons d'exposer ne seront sans doute jamais employés pour le calcul numérique; sous ce rapport ils ne présentent que peu d'avantages sur la méthode de M. Hill, et ce savant a d'ailleurs poussé le calcul à un tel degré de précision qu'il n'est pas probable que personne songe jamais à le reprendre par un procédé nouveau. Mais ces procédés n'en sont pas moins utiles à connaître, car ils peuvent servir à mettre en évidence certaines propriétés du nombre c considéré comme fonction de m.

2. Reprenons les équations (1) du paragraphe 1 et observons que l'on peut les écrire

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{X}}, \qquad \frac{d\mathrm{X}}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}}{dx},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{Y}}, \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{dt} = -\frac{d\mathrm{F}}{dy},$$

en posant

$$\mathrm{X} = x' - my, \qquad \mathrm{Y} = y' + mx,$$

$$\mathrm{F} = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - \mathrm{V}_1.$$

Les équations (1) prennent ainsi la forme canonique des équations de la Dynamique.

Les équations (3) du paragraphe 1 sont les équations aux variations des équations (1); elles jouissent donc des propriétés des équations aux variations des équations de la Dynamique.

Rappelons ces propriétés. Soient

$$x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n,$$
$$y_1,\quad y_2,\quad \ldots,\quad y_n$$

les deux séries de variables conjuguées; soient

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i},\qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}$$

les équations canoniques. Soit (x_i, y_i) une solution particulière de ces équations; $(x_i+\xi_i, y_i+\eta_i)$ une solution infiniment voisine. Les ξ et les η satisferont aux équations aux variations

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\sum\frac{d^2F}{dx_k dy_i}\xi_k+\sum\frac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k,$$
$$\frac{d\eta_i}{dt}=-\sum\frac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k-\sum\frac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k.$$

Soient ξ_i^0, η_i^0 et ξ_i^1, η_i^1 deux solutions particulières de ces équations aux variations. On aura

$$\Sigma(\xi_i^0\eta_i^1-\xi_i^1\eta_i^0)=\text{const.}$$

Appliquons ce principe à nos équations (3); nous verrons que nous devons avoir

$$\xi_1(\xi_2'-m\eta_2)-\xi_2(\xi_1'-m\eta_1)+\eta_1(\eta_2'+m\xi_2)-\eta_2(\eta_1'+m\xi_1)=\text{const.},$$

ou bien

$$(\xi_1\xi_2'-\xi_2\xi_1')+(\eta_1\eta_2'-\eta_2\eta_1')+2m(\eta_1\xi_2-\eta_2\xi_1)=\text{const.}\tag{9}$$

La même relation devra subsister si l'on remplace un des indices 1 ou 2 ou ces deux indices par l'indice 3 ou par l'indice 4.

Désignons, pour abréger, par (1, 2) le premier membre de la relation (9) et, le plus généralement, par (i, k) une expression analogue où les indices 1 et 2 ont été remplacés par i et k.

On aura alors

$$-(1, k)=(\xi_k x''-\xi_k' x')+(\eta_k y''-\eta_k' y')+2m(\eta_k x'-\xi_k y')=\text{const.}$$

Cela peut s'écrire aussi, en changeant les signes,

$$x'\xi_k'+y'\eta_k'-\frac{dV_1}{dx}\xi_k-\frac{dV_1}{dy}\eta_k=\text{const.}$$

et nous retrouverons ainsi l'équations (4) du paragraphe 1.

Si l'on fait $k=1$, le premier membre est identiquement nul; je dis que pour $k=3$ ou 4 la constante du second membre doit être nulle.

Il est clair en effet que $(1, 3)$ est multiplié par $-\cos c\pi - i\sin c\pi$ et $(1, 4)$ par $-\cos c\pi + i\sin c\pi$ quand on change τ en $\tau+\pi$. Et comme ce facteur n'est pas égal à 1, il faut bien que la constante soit nulle.

Au contraire, $(1, 2)$ est égal à une constante qui ne peut être nulle. Car si les quatre expressions $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ et $(1, 4)$ étaient nulles, à la fois, on aurait quatre équations d'où l'on tirerait

$$\xi_1 = \eta_1 = \xi'_1 = \eta'_1 = 0.$$

Considérons maintenant les expressions $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$. Nous avons évidemment

$$-(2, k) = -\tau(1, k) + (\xi_k x' + \eta_k y') - m\left(\xi_k \frac{dx'}{dm} + \eta_k \frac{dy'}{dm}\right)$$
$$+ m\left(\xi'_k \frac{dx}{dm} + \eta'_k \frac{dy}{dm}\right) + 2m^2\left(\xi_k \frac{dy}{dm} + \eta_k \frac{dx}{dm}\right).$$

Nous n'avons pas à nous inquiéter de $(2, 2)$, qui est identiquement nul; et si nous nous rappelons que $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$ sont nuls, nous pourrons écrire

$$-(2, k) = (\xi_k x' + \eta_k y') - m\left(\xi_k \frac{dx'}{dm} + \eta_k \frac{dy'}{dm}\right)$$
$$+ m\left(\xi'_k \frac{dx}{dm} + \eta'_k \frac{dy}{dm}\right) + 2m^2\left(\xi_k \frac{dy}{dm} - \eta_k \frac{dx}{dm}\right) \qquad (k = 1, 3, 4).$$

On verrait alors que $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$ se reproduisent multipliés respectivement par 1, $-\cos\pi c - i\sin\pi c$, $-\cos\pi c + i\sin\pi c$ quand on change τ en $\tau+\pi$, et l'on en conclurait, comme plus haut, que $(2, 3)$ et $(2, 4)$ sont nuls.

Nous savons d'ailleurs que $(2, 1) = -(1, 2)$ n'est pas nul.

Il reste à envisager l'expression $(3, 4) = -(4, 3)$, qui doit être égale à une constante.

Je dis que cette constante n'est pas nulle. En effet, $(3, 3)$ est identiquement nulle. Nous venons de voir que $(1,3)$ et $(2,3)$ sont nulles. Or les quatre expressions $(1, 3)$, $(2, 3)$ $(3, 3)$ $(4, 3)$ ne peuvent être nulles à la fois, sans quoi l'on aurait quatre équations d'où l'on tirerait

$$\xi_3 = \eta_3 = \xi'_3 = \eta'_3 0.$$

Donc $(3, 4) = -(4, 3)$ n'est pas nulle. C. Q. F. D.

Il résulte de là que ξ_3, η_3 et ξ_4, η_4 satisfont aux équations

$$(10) \quad \begin{cases} \xi' x' + \eta' y' = \xi(x'' - 2my') + \eta(y'' + 2mx'), \\ \xi' \dfrac{dx}{dm} + \eta' \dfrac{dy}{dm} = \xi\left(\dfrac{dx'}{dm} - \dfrac{x'}{m} - 2m\dfrac{dy}{dm}\right) + \eta\left(\dfrac{dy'}{dm} - \dfrac{y'}{m} + 2m\dfrac{dx}{dm}\right). \end{cases}$$

Ces équations forment un système du second ordre d'équations linéaires à coefficients périodiques. On pourrait s'en servir pour déterminer le mouvement du périgée; car le calcul des séries $\frac{dx}{dm}$ et $\frac{dy}{dm}$ peut se faire avec la même facilité que celui des séries x et y.

Je me propose de montrer dans un autre article comment on pourrait imaginer une méthode d'approximations successives où le le calcul des termes d'ordre supérieur, par rapport aux excentricités et à l'inclinaison, serait ramené à l'intégration d'équations linéaires à second membre, dont le premier membre serait la différence des deux membres des équations (10). On aurait ainsi affaire à un système de deux équations linéaires à second membre *du premier ordre*, qui pourrait remplacer le système (1) considéré plus bas du paragraphe 3, lequel est un système de deux équations linéaires à second membre *du second ordre*.

3. Les relations, mises en évidence dans le paragraphe 2, peuvent fournit d'intéressants procédés de vérification, mais elles sont susceptibles aussi d'une autre application sur laquelle je désirerais attirer l'attention.

Le calcul des termes qui sont proportioneels à la parallaxe ou à l'excentricité solaire et le calcul des termes d'ordre supérieur se ramènent à l'intégration des équations à second membre

$$(1)\qquad \begin{cases} \xi'' - 2m\eta' - P\xi - Q\eta = A, \\ \eta'' + 2m\xi' - Q\xi - R\eta = B, \end{cases}$$

où A et B sont des fonctions connues de τ, développées en séries trigonométriques.

Pour étudier l'intégration des équations (1), occupons-nous d'un problème un peu plus général. Soient

$$x_1,\ x_2\ \ldots,\ x_n,$$
$$y_1,\ y_2\ \ldots,\ y_n,$$

deux séries de variables conjuguées; formons les équations canoniques

$$(2)\qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Soient ξ_i et η_i les variations de x_i et y_i; formons les équations aux variations

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \sum \dfrac{d^2F}{dy_i dx_k}\xi_k + \sum \dfrac{d^2F}{dy_i dy_k}\eta_k, \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\sum \dfrac{d^2F}{dx_i dx_k}\xi_k - \sum \dfrac{d^2F}{dx_i dy_k}\eta_k. \end{cases}$$

Considérons $2n$ solutions particulières de ces équations (3) et écrivons-les

(4) $$\xi_i = \xi_{i.p}, \qquad \eta_i = \eta_{i.p} \qquad (p = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Posons

$$(p, q) = \Sigma_i(\xi_{i.p}\eta_{i.q} - \eta_{i.p}\xi_{i.q}),$$

nous aurons, d'après le paragraphe précédent,

$$(p, q) = \text{const}.$$

Il est clair que nous pourrons choisir les solutions particulières (4) de telle façon que

$$(2p, 2p-1) = 1$$

et que les (p, q) soient nuls si les deux nombres p et q ne sont pas l'un un nombre impair et l'autre le nombre pair qui le suit.

Cela posé, nous envisageons les équations à second membre

(5) $$\begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} - \sum \dfrac{d^2F}{dy_i\,dx_k}\xi_k - \sum \dfrac{d^2F}{dy_i\,dy_k}\eta_k = A_i, \\[2ex] \dfrac{d\eta_i}{dt} + \sum \dfrac{d^2F}{dx_i\,dx_k}\xi_k + \sum \dfrac{d^2F}{dx_i\,dy_k}\eta_k = B_i, \end{cases}$$

où les A_i et les B_i sont des fonctions connues de t.

Multiplions les équations (5) par $\eta_{i.p}$ et $-\xi_{i.p}$; multiplions, d'autre part, les équations

$$\frac{d\xi_{i.p}}{dt} - \sum \frac{d^2F}{dy_i\,dx_k}\xi_{k.p} - \sum \frac{d^2F}{dy_i\,dy_k}\eta_{k.p} = 0,$$
$$\frac{d\eta_{i.p}}{dt} + \sum \frac{d^2F}{dx_i\,dx_k}\xi_{k.p} + \sum \frac{d^2F}{dx_i\,dy_k}\eta_{k.p} = 0$$

par $-\eta_i$, ξ_i; et ajoutons toutes les équations ainsi obtenues, il viendra

$$\frac{d}{dt}\Sigma(\xi_i\eta_{i.p} - \eta_i\xi_{i.p}) = \Sigma(A_i\eta_{i.p} - B_i\xi_{i.p}).$$

Le second membre, étant une fonction connue, nous aurons immédiatement par quadrature

(6) $$\Sigma(\xi_i\eta_{i.p} - \eta_i\xi_{i.p}) = C_p,$$

les C_p étant des fonctions connues. Il reste à résoudre les $2n$ équations (6) par rapport aux $2n$ inconnues ξ_i et η_i.

Pour cela, posons

$$\xi_i = \Sigma F_q\xi_{i.q}, \qquad \eta_i = \Sigma F_q\eta_{i.q};$$

les équations (6) deviendront

$$\Sigma(q, p)\, F_q = C_p$$

ou, à cause des valeurs particulières des constantes (q, p),

$$F_{2p} = C_{2p-1}, \qquad F_{2p-1} = -C_{2p},$$

d'où les formules

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi_i = \Sigma_p(\xi_{i.2p}\, C_{2p-1} - \xi_{i.2p-1}\, C_{2p}), \\ \eta_i = \Sigma_p(\eta_{i.2p}\, C_{2p-1} - \eta_{i.2p-1}\, C_{2p}), \end{cases}$$

qui donnent la solution générale des équations (5) par de simples quadratures.

Appliquons cette méthode aux équations (1) et, pour cela, observons que ces équations peuvent se mettre sous une forme analogue à celle des équations (5).

Posons, en effet,

$$X = x' - my, \qquad Y = y' + mx,$$

$$F = \frac{x'^2 + y'^2}{2} - V_1, \qquad V_1 = \frac{\varkappa}{r} + \frac{3}{2} m^2 x^2;$$

les équations (1) du paragraphe 1 pourront s'écrire

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dF}{dX}, \qquad \frac{dy}{d\tau} = \frac{dF}{dY},$$

$$\frac{dX}{d\tau} = -\frac{dF}{dx}, \qquad \frac{dY}{d\tau} = -\frac{dF}{dy}.$$

Les équations (3) du paragraphe 1, qui sont les équations aux variations des équations (1) du paragraphe 1, s'écriront

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \delta\frac{dF}{dX} = \frac{d^2F}{dX\,dx}\xi + \frac{d^2F}{dX\,dy}\eta + \frac{d^2F}{dX^2}\delta X + \frac{d^2F}{dX\,dY}dY,$$

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \delta\frac{dF}{dY}, \qquad \frac{d\delta X}{d\tau} = -\delta\frac{dF}{dx}, \qquad \frac{d\delta Y}{d\tau} = -\delta\frac{dF}{dy},$$

en appelant

$$\xi, \quad \eta, \quad \delta X = \xi' - m\eta, \quad \delta Y = \eta' + m\xi, \quad \delta\frac{dF}{dX}, \quad \ldots,$$

les variations de

$$x, \quad y, \quad X, \quad Y, \quad \frac{dF}{dX}, \quad \ldots.$$

Les équations (1) du paragraphe 3 s'écriront alors

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} - \delta\dfrac{dF}{dX} = 0, & \dfrac{d\eta}{d\tau} - \delta\dfrac{dF}{dY} = 0, \\[2ex] \dfrac{d\delta X}{d\tau} + \delta\dfrac{dF}{dx} = A, & \dfrac{d\delta Y}{d\tau} + \delta\dfrac{dF}{dy} = B \end{cases}$$

et sont ainsi ramenées à la forme (5),

Les équations (3) du paragraphe 1 admettent quatre solutions distinctes, que nous avons représentées par des notations

$$\xi = \xi_p, \qquad \eta = \eta_p \qquad (p = 1, 2, 3, 4).$$

Nous avons vu que les expressions (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) sont nulles, tandis que (1, 2) et (3, 4) sont des constantes différentes de zéro.

Comme les solutions ξ_p, η_p ne sont déterminées qu'à un facteur constant près, nous pourrons disposer de ce facteur de telle façon que

$$(1, 2) = (3, 4) = -1.$$

Si alors nous posons

$$\delta X_p = \xi'_p - m\eta_p, \qquad \delta Y_p = \eta'_p + m\xi_p,$$

de telle sorte que

$$(p, q) = \xi_p\,\delta X_q - \xi_q\,\delta X_p + \eta_p\,\delta Y_q - \eta_q\,\delta Y_p,$$

nous serons conduits par analogie avec le cas des équations (5) à poser

$$C_p = \xi\,\delta X_p - \xi_p\,\delta X + \eta\,\delta Y_p - \eta_p\,\delta Y,$$

et alors nos équations (8) nous donneront

$$\frac{dC_p}{d\tau} = -A\xi_p - B\eta_p; \tag{9}$$

nous aurons donc les formules

$$\begin{cases} \xi = \xi_2 C_1 - \xi_1 C_2 + \xi_4 C_3 - \xi_3 C_4, \\ \eta = \eta_2 C_1 - \eta_1 C_2 + \eta_4 C_3 - \eta_3 C_4 \end{cases} \tag{10}$$

analogues aux formules (7).

On observera que A et B sont des séries trigonométriques; il en est de même de ξ_1, η_1, ξ_3, η_3, ξ_4, η_4 et par conséquent, de

$$\frac{dC_1}{d\tau}, \qquad \frac{dC_3}{d\tau}, \qquad \frac{dC_4}{d\tau}.$$

Le calcul pourra toujours être dirigé de telle façon que $\frac{dC_1}{d\tau}$, $\frac{dC_3}{d\tau}$, $\frac{dC_4}{d\tau}$ ne contiennent pas de terme tout connu et, par conséquent, que C_1, C_3 et C_4 soient encore des séries trigonométriques.

Il reste à examiner C_2.

On a

$$\xi_1 = x', \qquad \eta_1 = y'.$$

$$\xi_2 = \tau x' - m\frac{dx}{dm}, \qquad \eta_2 = \tau y' - m\frac{dy}{dm}$$

et, par conséquent,

$$\frac{dC_2}{d\tau} = \tau \frac{dC_1}{d\tau} + m\left(A \frac{dx}{dm} + B \frac{dy}{dm}\right).$$

Si donc nous posons

$$C_2 = \tau C_1 + C'_2,$$

on aura

$$\frac{dC'_2}{d\tau} = -C_1 + m\left(A \frac{dx}{dm} + B \frac{dy}{dm}\right).$$

Le second membre est une série trigonométrique; comme C_1 n'est défini que par sa dérivée $\frac{dC_1}{d\tau}$, c'est-à-dire à une constante arbitraire près, nous pouvons toujours disposer de cette constante arbitraire de telle façon que cette série trigonométrique ne contienne pas de terme tout connu.

Alors C'_2 sera aussi une série trigonométrique et nous aurons

$$(10\,bis) \quad \begin{cases} \xi = -m \dfrac{dx}{dm} C_1 - x' C'_2 + \xi_4 C_3 - \xi_3 C_4, \\ \eta = -m \dfrac{dy}{dm} C_1 - y' C'_2 + \eta_4 C_3 - \eta_3 C_4, \end{cases}$$

formules qui donnent ξ et η sans autre calcul que des multiplications de séries trigonométriques et des quadratures de séries trigonométriques.

Cette méthode est en somme celle qui a été appliquée avec succès par M. Brown, pour le calcul des termes de l'ordre le plus élevé; mais il n'était pas sans intérêt de la rattacher à des principes généraux.