SUR LES PETITS DIVISEURS

DANS

LA THÉORIE DE LA LUNE

Bulletin astronomique, t. 25, p. 321-360 (septembre 1908).

1. Dans le développement de la théorie de la Lune, on voit s'introduire de petits diviseurs de la forme suivante :

$$p_1 n_1 + p_2 n_2 + p_3 n_3 + p_4 n_4;$$

les p sont des entiers, positifs ou négatifs; n_1 et n_2 sont les moyens mouvements de la Lune et du Soleil, n_3 et n_4 sont ceux du périgée et du nœud. Si l'on pose

$$\frac{n_2}{n_1} = m,$$

on voit que ce petit diviseur est divisible par m si p_1 est nul, et par m^2 si

$$p_1 = p_2 = 0.$$

Parmi les diviseurs, tels que p_1 et p_2 soient nuls, diviseurs qui sont par conséquent divisibles par m^2, il en est qui méritent une attention particulière. Considérons le développement de n_3 et de n_4 suivant les puissances croissantes de m; on sait que les termes en m^2 sont égaux et de signe contraire, au moins si nous négligeons les carrés de la parallaxe, des excentricités et de l'inclinaison. Si donc nous supposons

$$p_1 = p_2 = 0, \qquad p_3 = p_4,$$

nous aurons un petit diviseur de la forme

$$p_3(n_3 + n_4)$$

qui sera divisible par m^3. Ce sera ce que nous appellerons un *très petit diviseur analytique*.

Mais on sait que les termes en m^3 sont presque aussi grands que les termes en m^2; il en résulte que le rapport $\frac{n_3}{n_4}$, au lieu d'être égal à -1, ainsi qu'il arriverait si l'on pouvait négliger les termes en m^3, est sensiblement égal à -2. Si donc nous supposons

$$p_1 = p_2 = 0, \qquad 2p_3 = p_4,$$

nous aurons un diviseur de la forme

$$p_3(n_3 + 2n_4)$$

dont la valeur numérique est très petite. Ce sera un *très petit diviseur numérique*. Les très petits diviseurs numériques ne sont pas analytiquement divisibles par m^3, mais ils sont numériquement de l'ordre de m^3. Au contraire, les très petits diviseurs analytiques sont analytiquement divisibles par m^3, mais ils sont numériquement de l'ordre de m^2.

Dans les applications, il est clair que ce sont les très petits diviseurs numériques qui pourraient sembler susceptibles de jouer un rôle important. Mais on peut se placer à un autre point de vue. Supposons qu'on se propose, comme le faisait Delaunay, de développer les coordonnées de la Lune suivant les puissances de m, des excentricités, de l'inclinaison et de la parallaxe. On peut se demander si le développement ne contiendra que des puissances positives, ou si par suite de l'intervention des petits diviseurs, divisibles par m, m^2 ou m^3, nous n'allons pas arriver à des termes où l'exposant de m sera négatif. Dans cette question, il est évident que le rôle important sera joué par les très petits diviseurs analytiques.

C'est là la question qui va être l'objet du présent travail.

2. Il importe de remarquer avant d'aller plus loin que les très petits diviseurs, tant analytiques que numériques, ne pourront intervenir que dans des termes d'ordre très élevé. Commençons par les très petits diviseurs analytiques.

Soient L et L' les longitudes moyennes de la Lune et du Soleil, ϖ et θ celles du périgée et du nœud; soient

$$\tau = L - L', \qquad l = L - \varpi, \qquad \lambda = L - \theta$$

la différence des longitudes (moyennes), l'anomalie moyenne et la distance de la Lune au nœud. Les termes de la fonction perturbatrice qui pourront donner lieu à un très petit diviseur analytique seront de la forme

$$k(\varpi + \theta) = k(2L' - l - \lambda + 2\tau).$$

Or les termes qui dépendent de l'argument

$$m_1 L' + m_2 l + m_3 \lambda + m_4 \tau$$

contiennent en facteur $e'^{|m_1|} e^{|m_2|} \gamma^{|m_3|}$, e et e' étant les excentricités de la Lune et du Soleil et γ l'inclinaison; notre terme contiendra donc en facteur $e'^{2k} e^k \gamma^k$. Mais la fonction perturbatrice ne peut contenir que des puissances paires de γ, d'où il résulte que k est au moins égal à 2 et que notre terme doit contenir en facteur $e^2 \gamma^2 e'^4$. Dans les expressions de la longitude, les termes correspondants contiendront au moins en facteur $e\gamma^2 e'^4$, et dans les expressions de la latitude, au moins $e^2 \gamma e'^4$.

Passons aux très petits diviseurs numériques; les termes correspondants sont de la forme

$$k(\varpi + 2\theta) = k(3L' - l - 2\lambda + 3\tau).$$

Ils contiennent en facteur $e'^{3k} e^k \gamma^{2k}$.

De plus, ils contiennent en facteur la parallaxe α si le coefficient de τ est impair. Si donc $k = 1$, nous aurons en facteur $\alpha e'^3 e\gamma^2$, et, si $k = 2$, $e'^6 e^2 \gamma^4$.

Nous aurons alors en facteur, dans les expressions de la longitude, $\alpha e'^3 \gamma^2$ ou $e'^6 e\gamma^4$, et, dans celles de la latitude, $\alpha e'^3 e\gamma$ ou $e'^6 e^2 \gamma^3$.

3. Venons maintenant à la question que j'ai posée à la fin du paragraphe 1 et qui fait l'objet de ce travail. Je ne l'aborderai pas immédiatement et je vais traiter successivement une série de cas de plus en plus compliqués en commençant par un exemple extrêmement simple.

Soit un système d'équations canoniques

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}. \tag{1}$$

F est une fonction des n variables x et des n variables y, périodique de période 2π par rapport aux y. De plus, F est développable suivant les puissances d'un paramètre α sous la forme

$$F = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \ldots.$$

F_0 est fonction des x seulement, et il n'y a entre les dérivées $\frac{dF_0}{dx_i}$ aucune relation linéaire à coefficients constants entiers. C'est là un problème très simple et déjà bien des fois traité; je vais néanmoins, à titre d'exemple, le traiter par la méthode que je compte employer dans des cas plus compliqués.

Si la fonction F, et non pas seulement son premier terme F_0, était indépendante des y, l'intégration des équations (1) serait immédiate, les x se réduiraient à des constantes et les y à des fonctions linéaires du temps. Si F_0, F_1, ..., F_{q-1} étaient indépendants des y et que α fût assez petit pour que α^q fût négligeable, cela reviendrait encore au même, puisque nous négligerions précisément les termes qui dépendent des y et qui figurent seulement dans F_q, F_{q+1}, ...

Voici donc comment nous allons opérer; nous allons faire une série de changements de variables qui n'altéreront pas la forme des équations (1) et qui seront tels qu'après le premier changement de variables F_0 et F_1, après le deuxième F_0, F_1 et F_2, après le troisième F_0, F_1, F_2 et F_3, après le $q^{\text{ième}}$ F_0, F_1, ..., F_q soient indépendants des y.

Pour expliquer en quoi consistent ces changements de variables, supposons donc qu'on ait effectué le $(q-1)^{\text{ième}}$ et qu'on se propose d'effectuer le $q^{\text{ième}}$. Je suppose, par conséquent, que F_0, F_1, ..., F_{q-1} sont indépendants des y; et je me propose de faire un changement de variables tel qu'après ce changement les équations restent de même forme, mais de telle façon que F_q soit indépendant des y.

Le changement de variables devra d'abord être *canonique*, c'est-à-dire ne pas altérer la forme canonique des équations. Il faut pour cela que, si les x et les y sont les variables anciennes, et les x' et les y' les variables nouvelles, l'expression

$$\Sigma x\, dy - \Sigma x'\, dy'$$

soit une différentielle exacte. Pour cela nous introduirons une fonction quelconque S des variables anciennes x de la première série et des variables nouvelles y' de la deuxième série, $S(x, y')$, et nous poserons

$$(2)\qquad y_i = \frac{dS}{dx_i}, \qquad x'_i = \frac{dS}{dy'_i},$$

d'où

$$dS = \Sigma y\, dx + \Sigma x'\, dy'.$$

Les équations (2) définissent les relations entre les variables anciennes et nouvelles. Je prendrai

$$S = \Sigma x y' + \alpha^q \theta(x, y'),$$

la fonction θ étant périodique de période 2π par rapport aux y'.

On voit alors que, si l'on résout les équations (2) par rapport aux x et aux y, les variables anciennes seront exprimées en fonction des nouvelles; les différences $x - x'$, $y - y'$ seront alors des fonctions des x', des y' et du paramètre α; ces fonctions seront développables suivant les puissances croissantes de α et elles seront périodiques par rapport aux y'.

Il en sera donc de même de $F(x, y)$, de sorte que la forme de nos équations ne sera pas altérée par le changement de variables. Il reste à disposer de θ de façon à rendre F_q indépendant des y'.

On aura, en négligeant α^{q+1},

$$x_i = x'_i - \alpha^q \frac{d\theta'}{dy'_i}, \qquad y_i = y'_i + \alpha^q \frac{d\theta'}{dx'}.$$

Je désigne par

$$\theta', \quad \frac{d\theta'}{dx'}, \quad \frac{d\theta'}{dy}$$

ce que deviennent

$$\theta, \quad \frac{d\theta}{dx}, \quad \frac{d\theta}{dy'}$$

quand on y remplace les x par les x'.

On a (toujours en négligeant α^{q+1})

$$F_0 = F'_0 + \sum \frac{dF'_0}{dx'_i}(x_i - x'_i) = F'_0 - \sum n_i (x_i - x'_i).$$

Je désigne par F'_k ce que devient F_k quand on y remplace les x et les y par les x' et les y'; je pose d'ailleurs

$$n_i = -\frac{dF'_0}{dx'_i},$$

de telle sorte que les n_i représentent les moyens mouvements. On tire de là

$$F_0 = F'_0 + \alpha^q \sum n_i \frac{d\theta'}{dy'_i}.$$

On a également, toujours au même degré d'approximation,

$$\alpha^h F_h = \alpha^h F'_h,$$

d'où, toujours en négligeant α^{q+1},

$$F = F'_0 + \alpha F'_1 + \alpha^2 F'_2 + \ldots + \alpha^{q-1} F'_{q-1} + \alpha^q \left[F'_q + \sum n_i \frac{d\theta'}{dy'_i} \right].$$

Comme $F'_0, F'_1, \ldots, F'_{q-1}$ sont indépendants des y', il suffit de choisir θ' de telle façon que

$$F'_q + \sum n_i \frac{d\theta'}{dy'_i}$$

soit indépendant des y'. Il suffit de rappeler que, si φ est une fonction quelconque donnée des y', périodique par rapport à ces variables y' et développable par conséquent en série de Fourier, on peut toujours déterminer une fonction inconnue θ' de même forme par l'équation

$$(3) \qquad \sum n_i \frac{d\theta'}{dy'_i} = \varphi,$$

où les n_i sont des coefficients constants, à la double condition :

1° Qu'il n'y ait entre les n_i aucune relation linéaire à coefficients entiers (condition que nous avons supposée remplie au début de ce paragraphe);

2° Que la série de Fourier qui représente φ n'ait pas de terme indépendant des y'.

Si donc $[F'_q]$ est le terme indépendant des y' dans la série de Fourier qui représente F'_q, nous pourrons déterminer θ' par l'équation

$$(4) \qquad \sum n_i \frac{d\theta'}{dy'_i} = [F'_q] - F'_q,$$

qui se traite comme l'équation (3), en regardant les x' et, par conséquent, les n comme des constantes. Alors

$$F'_q + \sum n_i \frac{d\theta'}{dy'_i} = [F'_q]$$

sera indépendant des y', ce qui était la condition que nous nous étions imposée.

La suite des changements de variables se poursuivra donc sans difficulté. Soient alors x_i et y_i les variables primitives, $x_i^\star$ et $y_i^\star$ les variables finales. On voit que toute fonction des x, des y et de α, développable suivant les puissances de α et périodique par rapport aux y, sera également une fonction des $x^\star$, des $y^\star$ et de α, développable suivant les puissances de α et périodique par rapport aux $y^\star$; et en effet ces propriétés ne sont pas altérées par les changements de variables successifs. D'ailleurs, puisque après le dernier changement de variables les $y^\star$ ne figurent plus dans F que dans les termes que nous négligeons, les $x^\star$ se réduisent à des constantes et les $y^\star$ à des fonctions linéaires du temps. Il résulte de là *qu'on n'a pas à craindre que α passe jamais au dénominateur* et qu'on n'aura que des puissances positives de α dans le développement.

4. Abordons maintenant un problème un peu plus compliqué; supposons qu'il y ait entre les dérivées $\frac{dF_0}{dx_i}$ des relations linéaires à coefficients constants et entiers. Nous pouvons d'ailleurs immédiatement, par un changement linéaire de variables, supposer que ces relations sont de la forme

$$\frac{dF_0}{dx_1} = 0, \qquad \frac{dF_0}{dx_2} = 0, \qquad \ldots,$$

ce qui nous ramène au cas où F_0 ne dépend pas de toutes les variables x.

Nous distinguerons ainsi deux sortes de variables x; il nous sera commode d'appeler les unes z et les autres u, et, s'il y a par exemple p variables z et q variables u, de désigner la même variable par x_i ou z_i si $i \leqq p$, ou bien encore par x_{i+p} ou u_i si $i + p > p$.

De même, nous aurons deux sortes de variables y, à savoir les v correspondant aux z et les w correspondant aux u. Grâce à ces conventions, nous pourrons écrire indifféremment par exemple $\Sigma x\, dy$ ou bien

$$\Sigma z\, dv + \Sigma u\, dw.$$

Reprenons donc les équations (1), et supposons que F_0 dépende seulement des z et pas des u ni des v ou des w et que, d'autre part, F_1 dépende seulement des z et des u, mais pas des v ni des w (ou ce qui revient au même seulement des x et pas des y).

Je suppose d'ailleurs qu'il n'y a ni entre les $\frac{dF_0}{dz}$, ni entre les $\frac{dF_1}{du}$ aucune relation linéaire à coefficients constants entiers.

Nous allons opérer comme au numéro précédent, c'est-à-dire que nous allons faire une série de changements de variables de telle façon qu'après le $q^{\text{ième}}$ changement $F_0, F_1, \ldots, F_q$ soient indépendants des y; et pour définir ce changement de variables, je suppose comme plus haut qu'avant le changement $F_0, F_1, \ldots, F_{q-1}$ soient indépendants des y, et je me propose de faire un changement tel que les équations conservent la même forme, mais de telle façon que F_q devienne indépendant des y comme le sont déjà $F_0, F_1, \ldots, F_{q-1}$.

Nous conserverons pour définir ce changement de variables les équations (2), en convenant de désigner, par exemple, indifféremment par z'_i ou x'_i ou bien par u'_i et x'_{i+p} la variable nouvelle qui correspond à la variable ancienne $z_i = x_i$ ou bien $u_i = x_{i+p}$.

Je prendrai cette fois

$$S = \Sigma x y' + \alpha^q \theta(x, y') + \alpha^{q-1} \theta_1(x, w').$$

Les fonctions θ et θ_1 sont périodiques par rapport aux y'; mais, tandis que θ dépend de tous les y', c'est-à-dire des v' aussi bien que des w', la fonction θ_1 ne dépend que des w'.

Ce que nous avons dit au paragraphe 3 subsiste, c'est-à-dire que le changement de variables n'altère pas la forme des équations; on aura d'ailleurs, en négligeant α^{q+1},

$$x_i = x'_i - \alpha^q \frac{d\theta'}{dy'_i} - \alpha^{q-1} \frac{d\theta'_1}{dy'_i},$$

ou, puisque θ'_1 ne dépend que des w',

$$z_i = z'_i - \alpha^q \frac{d\theta'}{dv'_i},$$

$$u_i = u'_i - \alpha^q \frac{d\theta'}{dw'_i} - \alpha^{q-1} \frac{d\theta'_1}{dw'_i}.$$

Il vient ensuite, toujours au même degré d'approximation,

$$F_0 = F'_0 + \sum \frac{dF'_0}{dz'_i}(z_i - z'_i),$$

$$\alpha F_1 = \alpha F'_1 + \alpha \sum \frac{dF'_1}{dz'_i}(z_i - z'_i) + \alpha \sum \frac{dF'_1}{du'_i}(u_i - u'_i),$$

ou, en posant

$$n_i = -\frac{dF'_0}{dz'_i}, \qquad n_i^1 = -\frac{dF'_1}{du'_i}$$

et en remplaçant $z_i - z'_i$ et $u_i - u'_i$ par leurs valeurs,

$$F_0 = F'_0 + \alpha^q \sum n_i \frac{d\theta'}{dv'_i},$$

$$\alpha F_1 = \alpha F'_1 + \alpha^q \sum n_i^1 \frac{d\theta'_1}{dw'_i}.$$

On a d'ailleurs

$$\alpha^2 F_2 = \alpha^2 F'_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha^q F_q = \alpha^q F'_q,$$

d'où

$$F = F'_0 + \alpha F'_1 + \ldots + \alpha^{q-1} F'_{q-1} + \alpha^q \left[F'_q + \sum n_i \frac{d\theta'}{dv'_i} + \sum n_i^1 \frac{d\theta'_1}{dw'_i} \right].$$

Il faut donc choisir θ' et θ'_1 de telle façon que

$$F'_q + \sum n_i \frac{d\theta'}{dv'_i} + \sum n_i^1 \frac{d\theta'_1}{dw'_i}$$

soit indépendant des y'. Pour cela, comme F' est une fonction périodique des y', supposons-la développée en série de Fourier; soit A_q l'ensemble des termes de cette série qui dépendent des v'; soit B_q l'ensemble de ceux qui dépendent des w' sans dépendre des v'; soit C_q l'ensemble de ceux qui sont indépendants à la fois des v' et des w', c'est-à-dire de tous les y', de telle sorte que

$$F'_q = A_q + B_q + C_q.$$

Nous déterminerons alors θ' et θ'_1 par les équations

$$(5) \qquad \sum n_i \frac{d\theta'}{dv'_i} = -A_q,$$

$$(6) \qquad \sum n_i^1 \frac{d\theta'_1}{dw'_i} = -B_q,$$

qui se traitent comme l'équation (3), de sorte que

$$F'_q + \sum n_i \frac{d\theta'}{dv'_i} + \sum n_i^1 \frac{d\theta'_1}{dw'_i} = C_q$$

soit indépendante des y'.

Inutile de répéter la suite des raisonnements du paragraphe 3; nous voyons ici encore que l'on *ne peut avoir que des puissances positives de* α.

5. Les difficultés commencent quand on suppose que F, au lieu d'être développable suivant les puissances d'un seul paramètre α, est développable suivant celles de deux paramètres α et β, de telle sorte que l'on ait

$$F = \Sigma \alpha^p \beta^q F_{pq}.$$

On peut ramener ce cas au précédent en posant

$$\beta = \lambda\alpha.$$

On trouve alors

$$F = \Sigma \alpha^h F_h = \Sigma\Sigma \alpha^{p+q} \lambda^q F_{pq},$$

de telle sorte que

$$F_0 = F_{00}, \qquad F_1 = F_{10} + \lambda F_{01}, \qquad F_2 = F_{20} + \lambda F_{11} + \lambda^2 F_{02}, \qquad \ldots,$$

et l'on peut ensuite appliquer l'analyse des paragraphes 3 ou 4. On en conclura donc encore que les inconnues x et y peuvent se développer suivant les puissances croissantes de α, le coefficient de α^h dépendant entre autres choses de λ et pouvant être désigné par $\varphi_h(\lambda)$. Mais il reste à savoir si ces inconnues x et y peuvent également se développer suivant les puissances croissantes de α et β, quand ces deux paramètres sont regardés comme indépendants. Pour cela, il faut et il suffit que $\varphi_h(\lambda)$ soit un polynome entier de degré h au plus en λ. En est-il réellement ainsi, c'est la question qu'il nous reste à traiter. Dans le cas du paragraphe 3, c'est-à-dire si F_{00} dépend de toutes les variables x sans qu'il y ait entre ses dérivées de relation linéaire à coefficients entiers, elle se résout immédiatement.

En effet, la forme des équations n'étant pas altérée par les changements de variables successifs, il suffira d'examiner ce qui se passe dans un de ces changements et pour cela d'envisager l'équation (4). Nous voyons alors que $[F'_q]-F'_q$ se présente sous la forme d'un polynome entier d'ordre q en λ, puisque

$$F_q = \Sigma\lambda^p F_{q-p,p}.$$

Quant au premier membre, il est indépendant de λ, puisque

$$F_0 = F_{00}$$

et ses dérivées $-n_i$ sont indépendantes de λ. Il en résulte que θ sera un polynome entier d'ordre q en λ.

Nous rencontrons au contraire des difficultés dans le cas du paragraphe 4. Nous avons alors à envisager au lieu de l'équation (4) les équations (5) et (6). Les seconds membres $-A_q$ et $-B_q$ sont encore des polynomes entiers de degré q en λ au moins pour le premier changement de variables. Le premier membre de (5) est encore indépendant de λ; mais il n'en est pas de même du premier membre de (6), car F_1 et, par conséquent, les n'_i sont des polynomes du premier degré en λ.

En général, par conséquent, l'intégration de (6) introduira des diviseurs qui seront des polynomes du premier degré en λ; ces diviseurs entreront au premier degré dans le dénominateur de θ_1; aux approximations suivantes A_q et B_q ne seront plus alors des polynomes entiers en λ, mais des fonctions rationnelles contenant ces diviseurs au dénominateur; donc, dès le second changement de variables, le dénominateur de θ_1 pourra contenir ces diviseurs à des puissances supérieures.

Il résulte de tout cela que $\varphi_h(\lambda)$ ne sera plus un polynome entier en λ, mais une fonction rationnelle de λ dont le dénominateur sera décomposable en facteurs du premier degré. Qu'arrive-t-il alors si l'on veut développer suivant les puissances de α et de β? On aura, par exemple, un terme en $\frac{\alpha^q}{a+b\lambda}$ et l'on pourra écrire

$$\frac{\alpha^q}{a+b\lambda} = \sum \pm \frac{b^p\lambda^p}{a^{p+1}}\alpha^q = \sum \pm \frac{b^p}{a^{p+1}}\beta^p\alpha^{q-p}$$

ou bien

$$\frac{\alpha^q}{a+b\lambda} = \sum \pm \frac{a^p}{b^{p+1}\lambda^{p+1}}\alpha^q = \sum \pm \frac{a^p}{b^{p+1}}\alpha^{q+p+1}\beta^{-p-1},$$

suivant qu'on veut développer d'abord suivant les puissances de α et ensuite suivant celles de β, ou inversement. *D'aucune manière, on ne pourra éviter l'introduction des exposants négatifs.*

6. Il y a cependant un cas où la difficulté ne se présente pas. Supposons que $F_{00}, F_{10}, \ldots, F_{q0}$ ne dépendent ni des u ni des w; alors

$$\frac{dF_{10}}{du'_i} = 0$$

et

$$n_i^1 = -\frac{dF'_{10}}{du'_i} - \lambda\frac{dF'_{01}}{du'_i}$$

est divisible par λ.

D'autre part, B_q est un polynome de degré q en λ, mais ce polynome est divisible par λ; et en effet B_q représente l'ensemble des termes de F'_q qui dépendent des w' sans dépendre des v' et, pour $\lambda = 0$, F'_q se réduit à F'_{q0} qui par hypothèse ne dépend pas des w', de sorte que B_q s'annule pour $\lambda = 0$.

Nous pouvons alors diviser l'équation (6) par λ, de telle façon que le second membre devient un polynome de degré $q-1$ en λ, et le premier membre devient indépendant de λ. Il ne s'introduit donc plus de diviseurs dépendant de λ.

Pour que ce raisonnement soit valable, il faut que les changements de variables successifs n'altèrent pas la forme des équations, c'est-à-dire que les F_{q0} restent indépendants des u et des w. Or, si nous supposons $\lambda = 0$, les variables u et w disparaissent de nos équations; et la suite des changements de variables ne peut les y introduire. Donc, après un changement quelconque, ces variables doivent cesser de figurer dans les équations dès qu'on y fait $\lambda = 0$, c'est-à-dire quand F_q se réduit à F_{q0}.

C'est ce qui arrive en particulier quand $F_{q0} = 0 \, (q \geqq 1)$. *Si donc* F *ne contient que des termes indépendants à la fois de α et de β ou des termes divisibles par β, nous n'aurons pas de puissances négatives de α et de β dans les expressions des coordonnées.*

Cela est encore vrai si les termes indépendants de β dépendent seulement des z.

7. Ce qui précède suffirait pour que nous puissions en faire l'application au cas de la Lune, si les développements des coordonnées de cet astre procédaient seulement suivant les puissances de α et de e', qui sont des paramètres donnés figurant dans les équations différentielles. Mais ils procèdent également suivant celles de e et de l'inclinaison, qui sont des constantes d'intégration. Cela m'oblige à reprendre la question encore à un autre point de vue.

Supposons des équations canoniques

$$(1\ bis) \qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dF}{dx_i}, \qquad \frac{d\xi_i}{dt}=\frac{dF}{d\eta_i}, \qquad \frac{d\eta_i}{dt}=-\frac{dF}{d\xi_i}.$$

Je suppose que

$$F=\Sigma\alpha^q F_q$$

est développable suivant les puissances du paramètre α, que F est périodique par rapport aux y et développable suivant les puissances des ξ et des η; je suppose enfin que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y, des ξ et des η.

C'est précisément ce qui arrive dans le problème des trois corps, quand on adopte les variables képlériennes canoniques, c'est-à-dire les deux variables L proportionnelles aux racines carrées des grands axes et qui jouent le rôle des x, les deux longueurs moyennes qui jouent le rôle des y, et de plus les quatre combinaisons

$$L\left(1-\sqrt{1-e^2}\right), \quad L\sqrt{1-e^2}\,(1-\cos i),$$

deux pour chacune des deux planètes que nous appellerons les ρ_i, et les longitudes des périhélies et des nœuds changées de signe que nous appellerons les ω_i, et que l'on pose ensuite

$$\xi_i=\sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \eta_i=\sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

Supposons F_q développé suivant les puissances des ξ et des η, et écrivons

$$F_q=\Sigma F_{qp},$$

F_{qp} étant l'ensemble des termes homogènes de degré p par rapport aux ξ et aux η; comme F_{qp} est une fonction périodique des y, nous pouvons la supposer développée en série de Fourier et désigner par $[F_{qp}]$ le terme de cette série de Fourier qui est indépendant des y.

Il est clair que $[F_{10}]$ dépend seulement des x, et je supposerai :

1° Que $[F_{11}]=0$;

2° Que $[F_{12}]$ est de la forme

$$[F_{12}] = \sum \frac{\gamma_i}{2}(\xi_i^2 + \eta_i^2),$$

les γ_i dépendant seulement des x.

Si ces deux conditions n'étaient pas remplies, il suffirait pour qu'elles le fussent de faire un changement linéaire *canonique* de variables, de façon que les nouvelles variables ξ'_i et η'_i fussent des fonctions linéaires (non homogènes en général) des ξ_i et des η_i, les coefficients dépendant seulement des x; on aurait, par exemple,

$$\xi'_i = \Sigma \beta_{ik}\xi_k + \Sigma \beta'_{ik}\eta_k + \beta_{i0},$$

les β dépendant seulement des x. On pourra remarquer en passant que la première condition est remplie d'elle-même dans le cas du problème des trois corps. Il résulte de tout cela que nous pouvons supposer les deux conditions remplies.

Si F dépendait seulement des x et des combinaisons

$$\rho_i = \frac{\xi_i^2 + \eta_i^2}{2},$$

l'intégration serait immédiate. En effet, on aurait

$$\frac{dx}{dt} = 0, \qquad x = \text{const.}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \xi\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\eta}{dt} = \xi\frac{dF}{d\eta} - \eta\frac{dF}{d\xi},$$

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{dF}{d\rho}\frac{d\rho}{d\xi} = \xi\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{dF}{d\eta} = \eta\frac{dF}{d\rho},$$

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \qquad \rho = \text{const.}, \qquad \frac{dF}{dx} = \text{const.}, \qquad \frac{dF}{d\rho} = \text{const.},$$

ce qui montre que les y sont des fonctions linéaires du temps; d'ailleurs, les équations

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta\frac{dF}{d\rho}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -\xi\frac{dF}{d\rho}$$

sont des équations linéaires à coefficients constants immédiatement intégrables.

Nous sommes donc conduit à reprendre l'artifice du paragraphe **3** et à faire une série de changements de variables dirigés de façon à rendre successivement les divers termes F_{qp} indépendants de toute autre variable que les x et les combinaisons ρ.

D'après notre hypothèse, la condition est déjà remplie pour

$$F_{00}, \quad F_{01} = F_{02} = \ldots = 0.$$

Par un premier changement de variables tout à fait pareil à ceux du paragraphe 3, nous pouvons faire disparaître les termes dépendant des y dans F_1, de façon à réduire F_1 à $[F_1]$; la condition est alors remplie pour

$$F_{10} = [F_{10}], \qquad F_{11} = [F_{11}] = 0, \qquad F_{12} = [F_{12}].$$

8. Pour montrer en quoi doivent consister les changements de variables successifs, imaginons que, par suite d'une série de changements de variables antérieurs, on soit arrivé à ce résultat que $F_{\mu\nu}$ ne dépende que des x et des ρ, toutes les fois que

$$\mu < q, \qquad \nu \leqq p$$

ou que

$$\mu = q, \qquad \nu < p$$

et proposons-nous de faire un nouveau changement qui, tout en conservant les résultats acquis, fasse que F_{qp} ne dépende non plus que des x et des ρ.

Nous désignerons encore par x', y', ξ', η' les nouvelles variables. Nous considérerons une fonction S des x, des y', des ξ et des η', et nous poserons

$$(2\ bis) \qquad y_i = \frac{dS}{dx_i}, \qquad x'_i = \frac{dS}{dy'_i}, \qquad \eta_i = \frac{dS}{d\xi_i}, \qquad \xi'_i = \frac{dS}{d\eta'_i}.$$

Nous prendrons d'ailleurs

$$S = \Sigma xy' + \Sigma \xi\eta' + \alpha^q \theta(x, y', \xi, \eta') + \alpha^{q-1}\theta_1(x, \xi, \eta').$$

Nous supposerons que θ est périodique par rapport aux y', θ_1 indépendant des y', et que θ et θ_1 sont des polynomes entiers homogènes de degré p en ξ et η'. La condition étant déjà remplie pour $F_{0\mu}$, F_{10}, F_{11}, F_{12}, nous devrons supposer ou $q > 1$, ou $q = 1$, $p > 2$.

Qu'arrive-t-il alors si nous résolvons les équations (2 *bis*) par rapport aux variables anciennes de telle façon que ces variables se trouvent exprimées en fonction des anciennes et de α? Je dis que les différences

$$x - x', \quad y - y', \quad \xi - \xi', \quad \eta - \eta'$$

seront des fonctions périodiques de y', développables suivant les puissances de α, des ξ' et des η'.

En effet, il suffit d'observer que, quand on fait $\alpha = 0$, les équations (2 *bis*) se réduisent à

$$x = x', \qquad y = y', \qquad \xi = \xi', \qquad \eta = \eta',$$

de sorte que le déterminant fonctionnel des premiers membres par rapport aux inconnues se réduit à 1 et ne s'annule pas, de sorte qu'on peut appliquer le théorème de Cauchy sur les fonctions implicites.

Il y a exception si $q=1$; car les équations se réduisent à

$$x=x', \qquad y=y'+\frac{d\theta_1}{dx}, \qquad \xi'=\xi+\frac{d\theta_1}{d\eta'}, \qquad \eta=\eta'+\frac{d\theta_1}{d\xi}.$$

Néanmoins le déterminant fonctionnel reste égal à 1 pour

$$\xi=\eta=\xi'=\eta'=0$$

si $p>2$, ce que nous supposerons, de sorte que le résultat subsiste.

Nous pourrons négliger α^{q+1}, ou bien encore les termes de degré supérieur à p en ξ' et η', puisque nous n'avons à considérer que les termes F_{qp} ou $F_{\mu\nu}$, où $\mu \leqq q$, $\nu \leqq p$. Dans ces conditions, nous avons

$$x=x'-\alpha^q\frac{d\theta'}{dy'}, \qquad y=y'+\alpha^q\frac{d\theta'}{dx'}+\alpha^{q-1}\frac{d\theta'_1}{dx'},$$

$$\xi=\xi'-\alpha^q\frac{d\theta'}{d\eta'}-\alpha^{q-1}\frac{d\theta'_1}{d\eta'}, \qquad \eta=\eta'+\alpha^q\frac{d\theta'}{d\xi'}+\alpha^{q-1}\frac{d\theta'_1}{d\xi'}.$$

Nous donnons, bien entendu, aux notations θ', $\frac{d\theta'}{dx'}$, F'_q, ... la même signification que dans les paragraphes précédents. L'erreur commise sur y sera alors de l'ordre $2q-2$ en α, de l'ordre $2p-2$ en ξ' et η'; l'erreur sur x sera de l'ordre $2q-1$ en α et $2p-2$ en ξ' et η'; l'erreur sur ξ et η sera d'ordre $2q-2$ en α, d'ordre $2p-3$ en ξ' et η'.

Passons au calcul de F; il viendra

$$F_0=F'_0-\Sigma n_i(x_i-x'_i),$$

en négligeant α^{q+1} et *a fortiori* α^{2q} et, par suite,

$$F_0=F'_0+\alpha^q\sum n_i\frac{d\theta'}{dy'_i},$$

l'erreur commise étant de l'ordre de α^{2q-1} et par conséquent d'ordre au moins égal à α^{q+1}, si $q>1$, et de l'ordre de ξ^{2p-2} et par conséquent d'ordre plus grand que ξ^p, si l'on a $q=1$ et, par conséquent $p>2$, cette erreur étant par conséquent dans tous les cas négligeable. Il vient ensuite

$$F_1=F'_1+\sum\frac{dF'_1}{dx'}(x-x') +\sum\frac{dF'_1}{dy'}(y-y')+\sum\frac{dF'_1}{d\xi'}(\xi-\xi')+\sum\frac{dF'_1}{d\eta'}(\eta-\eta'),$$

en négligeant α^q, ou bien encore

$$F_1 = F'_1 + \alpha^{q-1}\left[+\sum \frac{dF'_1}{dy'}\frac{d\theta'_1}{dx'} - \sum \frac{dF'_1}{d\xi'}\frac{d\theta'_1}{d\eta'} + \sum \frac{dF'_1}{d\eta'}\frac{d\theta'_1}{d\xi'}\right].$$

L'erreur commise sera de l'ordre de α^{3q-3}, c'est-à-dire de l'ordre de α^q, si $q > 1$; si $q = 1$, elle sera de l'ordre $2p - 2$ en ξ' et η', c'est-à-dire d'ordre plus grand que p, puisqu'on a alors $p > 2$. Nous pourrons encore la négliger.

Nous observerons ensuite que nous pouvons dans le coefficient de α^{q-1} remplacer F'_1 par $F'_{10} + F'_{11} + F'_{12}$ (puisque l'erreur ainsi commise sera de l'ordre de ξ^{p+1}) ou même par F'_{12} (puisque $F'_{10} + F'_{11}$ ne dépend que des x'). Il restera donc finalement

$$\begin{aligned} F_1 &= F'_1 + \alpha^{q-1}\sum\left(\frac{dF'_{12}}{d\eta'}\frac{d\theta'_1}{d\xi'} - \frac{dF'_{12}}{d\xi'}\frac{d\theta'_1}{d\eta'}\right) \\ &= F'_1 + \alpha^{q-1}\sum \gamma\left(\eta'\frac{d\theta'_1}{d\xi'} - \xi'\frac{d\theta'_1}{d\eta'}\right). \end{aligned}$$

On trouve de même pour $h > 1$ et au même degré d'approximation

$$\alpha^h F_h = \alpha^h F'_h,$$

d'où finalement

$$\begin{aligned} F = {} & F'_0 + \alpha F'_1 + \ldots + \alpha^{q-1} F'_{q-1} \\ & + \alpha^q\left[F'_q + \sum n\frac{d\theta'}{dy'} + \sum \gamma\left(\eta'\frac{d\theta'_1}{d\xi'} - \xi'\frac{d\theta'_1}{d\eta'}\right)\right]. \end{aligned}$$

Nous devons donc nous arranger de telle façon que

$$F'_q + \sum n\frac{d\theta'}{dy'} + \sum \gamma\left(\eta'\frac{d\theta'_1}{d\xi'} - \xi'\frac{d\theta'_1}{d\eta'}\right)$$

ne dépende que des x' et des ρ'. Pour cela nous observerons d'abord :

1° Que nous pouvons laisser de côté les termes d'ordre plus grand que p en ξ' et η', c'est-à-dire F'_{qh} où $h > p$, termes que nous négligeons ;

2° Que la condition est déjà supposée remplie pour F'_{qh} où $h < p$, de sorte qu'il suffit de s'occuper de l'expression

$$F'_{qp} + \sum n\frac{d\theta'}{dy'} + \sum \gamma\left(\eta'\frac{d\theta'_1}{d\xi'} - \xi'\frac{d\theta'_1}{d\eta'}\right);$$

3° Que cette expression est homogène de degré p en ξ' et η', puisque θ' et F'_{qp} sont des polynomes homogènes de degré p.

Posons

$$\xi'_i = \sqrt{2\rho'_i}\cos\omega'_i, \qquad \eta'_i = \sqrt{2\rho'_i}\sin\omega'_i;$$

cette expression devient

$$F'_{pq}+\sum n\frac{d\theta'}{dy'}-\sum\gamma\frac{d\theta'_1}{d\omega'}.$$

D'ailleurs, F'_{qp} devient une fonction périodique par rapport aux y' et aux ω', et développable en série de Fourier. Soient A_{qp} l'ensemble des termes de cette série qui dépendent des y'; B_{qp} ceux qui dépendent des ω' sans dépendre des y'; C_{qp} ceux qui sont indépendants à la fois des y' et des ω'.

Nous pourrons déterminer θ' et θ'_1 par les équations

$$\sum n\frac{d\theta'}{dy'}=-A_{qp},$$
$$\sum\gamma\frac{d\theta'_1}{d\omega'}=\quad B_{qp},$$

qui se traitent comme (3), (5) et (6); et l'on verra que

$$F'_{qp}+\sum n\frac{d\theta'}{dy'}-\sum\gamma\frac{d\theta'_1}{d\omega'}=C_{qp}$$

ne dépend plus que des x' et des ρ'.

Nous pourrions répéter ce que nous avons dit à la fin du paragraphe 3; représentons les variables primitives par des lettres non accentuées, les variables finales, après tous les changements de variables, par des lettres marquées d'astériques. Nous verrons que ces variables primitives x, y, ξ, η sont des fonctions de α, des constantes $x^\star$, des arguments $y^\star$ qui varient proportionnellement au temps, et enfin des combinaisons

$$\xi_i^\star=\varepsilon_i\cos w_i,\qquad \eta_i^\star=\varepsilon_i\sin w_i,$$

où les ε_i sont des constantes d'intégration et les w_i des arguments variant proportionnellement au temps.

Ces fonctions sont périodiques par rapport aux $y^\star$ et développables suivant les puissances de α, des $\xi^\star$ et des $\eta^\star$; on voit que nous n'aurons partout que des puissances positives de α et des ε.

Ce qui précède s'applique au problème des trois corps, ainsi que nous l'avons fait remarquer plus haut. C'est peut-être la manière la plus rapide de *démontrer* les théorèmes fondamentaux relatifs à la *forme* des développements des coordonnées, bien que cette méthode ne puisse être recommandée pour le calcul direct de ces développements.

Dans le cas que nous venons d'examiner, on n'a pas à craindre de voir s'introduire d'exposants négatifs; mais il serait aisé, en opérant comme au paragraphe 5, d'en déduire d'autres cas analogues où cette circonstance se produirait.

9. Cherchons maintenant, après ce long préambule, à appliquer à la Lune les principes précédents. Soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées de la Lune par rapport à des axes de direction fixe ayant leur origine au centre de la Terre, y_1, y_2, y_3 les composantes de la vitesse de la Lune par rapport à ces mêmes axes. Soient u l'anomalie moyenne du Soleil, et v une variable auxiliaire que nous définirons plus loin. Soit $T = \frac{1}{2}\Sigma y^2$; soit U l'énergie potentielle due à l'attraction des trois corps; soit U_1 l'énergie potentielle qui serait due à l'attraction du Soleil sur le système Terre-Lune supposée concentrée en son centre de gravité; soient m_1 et m_7 les masses de la Lune et de la Terre, et soit

$$m'_1 = \frac{m_1 m_7}{m_1 + m_7};$$

soit enfin β le moyen mouvement du Soleil.

Les équations du mouvement de la Lune prendront alors la forme canonique

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dy_i}\left(T + \frac{U}{m'_1}\right), \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d}{dx_i}\left(T + \frac{U}{m'_1}\right).$$

La fonction $T + \frac{U}{m'_1}$ dépend des coordonnées x de la Lune et des composantes y de sa vitesse; mais elle dépend également des coordonnées du Soleil par rapport au centre de gravité D du système Terre-Lune; mais celles-ci peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps, ou si l'on aime mieux de l'anomalie moyenne u du Soleil; car le mouvement du Soleil autour du point D peut être regardé comme képlérien. La fonction

$$T + \frac{U}{m'_1}$$

est donc une fonction des x, des y et de u.

Nous observerons, d'autre part, que U_1 dépend seulement de u; ses dérivées par rapport aux x et aux y sont nulles, de sorte que l'on peut remplacer dans les équations précédentes U par $U - U_1$; d'autre part, nous pouvons introduire la variable auxiliaire v et poser

$$F = T + \frac{U - U_1}{m'_1} - \beta v,$$

d'où les équations canoniques

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{d}{dy_i}\left(T + \dfrac{U - U_1}{m'_1}\right) = \dfrac{dF}{dy_i}, \\ \dfrac{dy_i}{dt} = -\dfrac{d}{dx_i}\left(T + \dfrac{U - U_1}{m'_1}\right) = -\dfrac{dF}{dx_i}, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dF}{du}, \qquad \dfrac{du}{dt} = \beta = -\dfrac{dF}{dv}. \end{cases}$$

L'équation en $\frac{dv}{dt}$ peut être considérée comme la définition de la variable auxiliaire v.

Pour transformer ces équations, nous allons introduire les variables képlériennes, c'est-à-dire les éléments osculateurs de l'orbite de la Lune. Soit L une quantité proportionnelle à la racine carrée du grand axe de cette orbite osculatrice; soit

$$\rho_1 = L(1 - \sqrt{1 - e^2}), \qquad \rho_2 = L\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i),$$

e et i étant l'excentricité et l'inclinaison osculatrices; soient λ l'anomalie moyenne, ω_1 et ω_2 les longitudes du périgée et du nœud (osculateurs) changées de signe; soit

$$\xi_i = \sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i, \qquad \eta_i = \sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i.$$

Le changement de variables sera canonique et les équations (1) deviendront

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dF}{d\lambda}, & \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{dF}{d\eta_i}, & \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dF}{du}, \\ \dfrac{d\lambda}{dt} = -\dfrac{dF}{dL}, & \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\dfrac{dF}{d\xi_i}, & \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{dF}{dv}. \end{cases}$$

Nous voyons d'abord que F peut s'écrire

$$F = F_0 + \beta F_1 + \beta^2 F_2.$$

F_0 est ce que deviendrait la fonction F, si le Soleil n'existait pas; le mouvement serait alors képlérien et F_0 se réduirait à une constante divisée par L^2; F_1 est tout simplement égal à $-v$; quant à $\beta^2 F_2$, c'est la fonction perturbatrice qui est, comme on sait, proportionnelle à β^2. Quelle est sa forme?

1° Elle dépend des variables L, λ, ξ, η et de u, et en outre de deux paramètres qui sont la parallaxe α et l'excentricité e' du Soleil;

2° Elle est développable suivant les puissances de α et e';

3° Elle est périodique par rapport à λ et à u;

4° Elle est développable suivant les puissances des ξ et des η;

5° Si l'on y remplace ξ et η par $\sqrt{2\rho}\cos\omega$ et $\sqrt{2\rho}\sin\omega$, elle sera une fonction périodique de λ, de u et des ω, qui pour $e'=0$ dépendra seulement des différences des quatre variables

$$\lambda, \quad u, \quad -\omega_1, \quad -\omega_2;$$

6° Ce sera une fonction paire par rapport à ξ_2 et η_2.

Il résulte de la cinquième condition que, si l'on développe F_2 en série de Fourier selon les lignes trigonométriques de λ et de u, et que l'on envisage le terme constant que j'appellerai $[F_2]$, ce terme constant ne dépendra que de la différence $\omega_1-\omega_2$, et, comme il est développable suivant les puissances des ξ et des η, on voit que son développement ne pourra contenir que des termes de degré pair. En vertu de la sixième condition tous les termes devront être pairs, d'une part par rapport à ξ_1 et η_1, d'autre part par rapport à ξ_2 et η_2;

7° Mais il y a plus; dans le développement de $[F_2]$ envisageons les termes qui sont de degré zéro par rapport à α et à e' et de degré 2 par rapport aux ξ et aux η; ces termes se réduiront à

$$C[\xi_1^2+\eta_1^2-\xi_2^2-\eta_2^2],$$

C ne dépendant que de L. C'est pour cette raison que, dans les développements des vitesses du périgée et du nœud, les termes en m^2 (ou en β^2) sont égaux et de signes contraires.

10. Cela posé, nous allons, comme dans les paragraphes précédents, faire une série de changements canoniques de variables, n'altérant pas la forme de la fonction F, mais simplifiant progressivement cette fonction jusqu'à ce que, finalement, les termes non négligeables de cette fonction ne dépendent plus que des nouvelles variables L', ρ', ξ', η' et pas de λ' et u', et que de plus elle ne dépende des ξ' et η' que par les combinaisons

$$\xi_1'^2+\eta_1'^2, \quad \xi_2'^2+\eta_2'^2.$$

Nous dirons alors que ces termes satisfont aux conditions A. Le premier de ces changements de variables aura pour but de faire disparaître dans F_2 les termes dépendant de λ et de u; il suffira d'appliquer le procédé du paragraphe **4**. La fonction F deviendra

$$F = F'_0+\beta F'_1+\beta^2 F'_2+\beta^3 F'_3+\ldots,$$

où F'_0, F'_1 et F'_2 sont formées avec les nouvelles variables comme F_0, F_1 et $[F_2]$

l'étaient avec les anciennes. Si, pour économiser les notations, nous convenons de supprimer les accents après chaque changement de variables, une fois que ce changement est accompli (ce que nous avons fait, en somme, dans les paragraphes précédents), nous aurons

$$F = F_0 + \beta F_1 + \beta^2 [F_2] + \beta^3 F_3 + \ldots,$$

F_3, F_4, ... remplissant les conditions énoncées pour F_2 au paragraphe 9.

On remarquera que F_1 reste égal à $-v$, les autres termes F_0, $[F_2]$, F_3, ... ne dépendant pas de v. Cette circonstance subsistera dans toute la suite des changements de variables. Cela tient à ce que les fonctions qui joueront le rôle de la fonction θ du paragraphe 3 ne dépendront pas de v, de sorte que les différences entre chaque variable ancienne et la variable nouvelle correspondante sera indépendante de v.

Si les termes du second degré de $[F_2]$ se réduisaient à

$$\gamma_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \gamma_2(\xi_2^2 + \eta_2^2)$$

sans qu'il y eût entre γ_1 *et* γ_2 *de relation linéaire à coefficients entiers*, on n'aurait qu'à combiner sans y rien changer les principes des paragraphes précédents et l'on verrait que les quantités β, α, e, e', γ par rapport auxquelles on développe ne peuvent jamais être affectées d'exposants négatifs; mais il n'en est pas ainsi, car on a $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, ainsi que nous l'avons dit plus haut (§ 9, 7°), et c'est ce qui nous oblige à examiner la question de plus près.

11. Nous appellerons *caractéristique* d'un terme un produit de la forme

$$\beta^{\mu_1} \alpha^{\mu_2} e^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} e'^{\mu_5},$$

où μ_1, μ_2, μ_5 ne sont autre chose que les exposants de β, α et e' dans ce terme, tandis que μ_3 est le degré du terme en ξ_1 et η_1, et μ_4 son degré en ξ_2 et η_2.

Comme nous le verrons plus loin, il peut s'introduire des termes où l'exposant μ_1 est négatif, et c'est précisément le fait que nous nous proposons de mettre en évidence; mais cela n'arrivera que pour des termes pour lesquels les autres exposants μ sont notables; cela ne se présentera pas au début du calcul; nous supposerons donc qu'au point où nous en sommes arrivé le fait ne s'est pas encore produit, de telle façon que tous les termes de F aient une caractéristique à exposants positifs. Ce qui nous autorise à faire cette hypothèse, c'est que, dès que le fait en question se produira, nous pourrons arrêter le calcul, le but (qui était de démontrer la possibilité de ce fait) étant atteint.

Soit

$$K = \beta^{\nu_1}\alpha^{\nu_2}e^{\nu_3}\gamma^{\nu_4}e'^{\nu_5}.$$

Je suppose que, par suite des changements de variables déjà faits, tous les termes de F *dont la caractéristique est un diviseur de* K (K lui-même étant exclu) *satisfassent aux conditions* A, *c'est-à-dire ne dépendant que de* L, v, $\xi_1^2+\eta_1^2$, $\xi_2^2+\eta_2^2$. Je me propose de faire un changement canonique de variables tel qu'après ce nouveau changement les termes en question dont la caractéristique est un diviseur de K ne soient pas altérés et continuent par conséquent à satisfaire aux conditions A, et *que de plus les termes dont la caractéristique est* K *satisfassent également à ces conditions* A.

Il est clair qu'on peut conduire une suite de semblables changements de variables de façon que finalement tous les termes non négligeables satisfassent aux conditions A.

Les variables anciennes s'appelant d'après nos conventions

$$L,\quad \lambda,\quad v,\quad u,\quad \xi_i,\quad \eta_i,$$

les variables nouvelles s'appelleront

$$L',\quad \lambda',\quad v',\quad u',\quad \xi'_i,\quad \eta'_i.$$

Et nous introduirons comme au paragraphe 3 une fonction S qui définira le changement de variables par l'identité

$$dS = \lambda\, dL + u\, dv + \Sigma\eta\, d\xi + L'\, d\lambda' + v'\, du' + \Sigma\xi'\, d\eta'.$$

Cette fonction S sera d'ailleurs de la forme suivante :

$$S = L\lambda' + vu' + \Sigma\xi\eta' + \Theta.$$

Nous prendrons

$$\Theta = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3,$$

où θ_0, θ_1, θ_2, θ_3 auront respectivement pour caractéristiques K, $\frac{K}{\beta}$, $\frac{K}{\beta^2}$ et $\frac{K}{\beta^3}$; où θ_1 sera indépendant de λ', θ_2 et θ_3 indépendants de λ' et de u'; où enfin θ_3 satisfera à l'équation

$$\xi_1\frac{d\theta_3}{d\eta'_1} - \eta'_1\frac{d\theta_3}{d\xi_1} - \xi_2\frac{d\theta_3}{d\eta'_2} + \eta'_2\frac{d\theta_3}{d\xi_2} = 0. \tag{3}$$

Nous ferons la même approximation qu'au paragraphe 3, c'est-à-dire que nous remplacerons les équations exactes

$$\lambda = \lambda' + \frac{d\Theta}{dL}, \qquad L = L' - \frac{d\Theta}{d\lambda'}, \qquad \ldots \tag{4}$$

par les équations approchées

$$\lambda = \lambda' + \frac{d\Theta'}{dL'}, \qquad L = L' - \frac{d\Theta'}{d\lambda'}, \tag{4 bis}$$

Θ' c'est ce que devient Θ quand on y accentue les lettres L, v, ξ_i. *Nous évaluerons plus loin, au paragraphe* 14, *l'erreur qui résulte de cette approximation.*

Dans ces conditions, après le changement de variables, F deviendra

$$F' + [F', \Theta'],$$

en négligeant le carré de Θ', en désignant par F' ce que devient F quand on y accentue toutes les lettres, et en posant

$$\begin{aligned}[F', \Theta'] = &\left(\frac{dF'}{d\lambda'}\frac{d\Theta'}{dL'} - \frac{dF'}{dL'}\frac{d\Theta'}{d\lambda'}\right) \\ &+ \left(\frac{dF'}{du'}\frac{d\Theta'}{dv'} - \frac{dF'}{dv'}\frac{d\Theta'}{du'}\right) + \sum\left(\frac{dF'}{d\eta'}\frac{d\Theta'}{d\xi'} - \frac{dF'}{d\xi'}\frac{d\Theta'}{d\eta'}\right).\end{aligned} \tag{5}$$

12. Nous ne conserverons dans F que les termes qui ont pour caractéristique K ou un diviseur de K, et qui sont les seuls qui nous intéressent. Avant d'aller plus loin, considérons deux termes quelconques A' et B', et formons le crochet $[A', B']$ défini comme nous venons de le faire pour $[F', \Theta']$: ce crochet se composera de quatre termes, les deux premiers correspondant aux deux premières parenthèses du second membre de (5) et les deux derniers aux parenthèses réunies sous le signe Σ dans le dernier terme de ce second membre.

Si alors nous supposons que A' et B' aient respectivement pour caractéristiques K_1 et K_2, nous voyons que les deux premiers termes de $[A', B']$ ont pour caractéristique $K_1 K_2$, et les deux derniers $\frac{K_1 K_2}{e^2}$ et $\frac{K_1 K_2}{\gamma^2}$.

Observons en passant que dans le cas qui nous occupe le second terme de $[A', B']$ est généralement nul, car Θ ne dépend pas de v', et le seul terme de F qui dépende de v est le terme F_1 ; c'est donc seulement quand $A' = F'_1$ que le second terme en question n'est pas nul.

De ce que Θ ne dépend pas de v, il résulte également que

$$u = u'.$$

Considérons les différents termes de $[F', \Theta']$ et d'abord

$$[F', \Theta'_0] = [F'_0, \Theta'_0] + \beta[F'_1, \Theta'_0] + \beta^2[F'_2, \Theta'_0] + \beta^3[F'_3, \Theta'_0] + \dots$$

F'_0 et F'_1 ont pour caractéristique 1, et sont indépendants des ξ' et des η', de sorte qu'on n'a pas à envisager les deux derniers termes du second membre de (5); comme θ'_0 a pour caractéristique K, on voit que $[F'_0, \theta'_0]$ et $\beta[F'_1, \theta'_0]$ ont pour caractéristiques K et βK; le premier de ces crochets doit donc être conservé et le second rejeté. Prenons ensuite les différents termes de $\beta^n[F'_n, \theta'_0]$.

Si le terme envisagé de F'_n a pour caractéristique K_1, les deux premiers termes du second membre de (5) nous donneront des termes de caractéristique $\beta^n KK_1$, et les deux derniers des termes de caractéristique

$$\frac{\beta^n KK_1}{e^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\beta^n KK_1}{\gamma^2}.$$

Tous ces termes doivent être rejetés, car il n'est pas possible que $\beta^n KK_1$, $\frac{\beta^n KK_1}{e^2}$ ou $\frac{\beta^n KK_1}{\gamma^2}$ soit égal à K ou à un diviseur de K.

Il n'y a pas à craindre d'ailleurs que $\frac{\beta^n KK_1}{e^2}$ par exemple soit fractionnaire; quelle est en effet l'origine des termes qui ont cette caractéristique ? On les obtiendra en considérant un terme A' de F'_n ayant pour caractéristique K_1, et en formant le troisième terme du second membre de (5) dans le crochet $\beta^n[A', \theta'_0]$; or ce troisième terme est nul si les dérivées de A' par rapport à ξ'_1 et η'_1 sont nulles, c'est-à-dire si K_1 n'est pas divisible par e, ou encore si les dérivées de θ'_0 par rapport à ξ'_1 et η'_1 sont nulles, c'est-à-dire si K n'est pas divisible par e. Il faut donc bien que KK_1 soit divisible par e^2.

En résumé, de $[F', \theta'_0]$ il convient de conserver seulement

$$[F'_0, \theta'_0] = -\frac{dF'_0}{dL'}\frac{d\theta'_0}{d\lambda'}.$$

Considérons maintenant

$$[F', \theta'_1] = [F'_0, \theta'_1] + \beta[F'_1, \theta'_1] + \beta^2[F'_n, \theta'_1] + \ldots.$$

Le premier terme $[F'_0, \theta'_1]$ est nul, parce que θ'_1 ne dépend pas de λ'; le second,

$$\beta[F'_1, \theta'_1] = \beta\frac{d\theta'_1}{du'},$$

a pour caractéristique K et doit être conservé. On verrait, comme plus haut, que les autres termes ont pour caractéristiques

$$\beta^{n-1}KK_1, \quad \frac{\beta^{n-1}KK_1}{e^2}, \quad \frac{\beta^{n-1}KK_1}{\gamma^2} \qquad (n > 1)$$

et doivent être rejetés. Passons à

$$[F', \theta'_2] = \Sigma\beta^n[F'_n, \theta'_2].$$

Nous avons

$$[F'_0, \theta'_2] = [F'_1, \theta'_2] = 0,$$

parce que θ'_2 ne dépend ni de λ' ni de u'. Les autres termes provenant de $\beta^n[F'_n, \theta'_2]$ ont pour caractéristiques

$$\beta^{n-2}KK_1, \quad \frac{\beta^{n-2}KK_1}{e^2}, \quad \frac{\beta^{n-2}KK_1}{\gamma^2}, \tag{6}$$

K_1 étant toujours la caractéristique du terme de F'_n envisagé. Tous les termes pour lesquels $n > 2$ doivent être rejetés, car, si $n > 2$, aucune des quantités (6) ne peut être égale à K ou à un diviseur de K. Reste donc à envisager les termes provenant de $B^n[F'_2, \theta'_2]$; ils ont pour caractéristiques

$$KK_1, \quad \frac{KK_1}{e^2}, \quad \frac{KK_1}{\gamma^2}.$$

Nous devons donc prendre $K_1 = 1$, $K_1 = e^2$, $K_1 = \gamma^2$, ce qui nous donnera la caractéristique K (ou bien $K_1 = e$, $K_1 = \gamma$, ce qui nous donnerait les caractéristiques $\frac{K}{e}$ ou $\frac{K}{\gamma}$, K étant supposé divisible soit par e, soit par γ).

Nous rejetterons l'hypothèse $K_1 = 1$, parce que F_2 a été réduit par le changement de variables du paragraphe **10** à la forme $[F_2]$ et a conservé cette forme dans les changements suivants, de sorte que celui de ses termes qui a pour caractéristique 1 ne dépend que de L', et, comme θ_2 ne dépend pas de λ', le crochet du terme en question et de θ'_2 est nul.

Nous rejetterons les hypothèses $K_1 = e$, $K_1 = \gamma$; et en effet $[F_2]$ ne contient que des termes d'ordre pair par rapport aux ξ et aux η.

Nous conserverons les hypothèses $K_1 = e^2$, $K_1 = \gamma^2$; nous aurons donc à conserver dans $[F_2]$ les termes qui sont du second ordre par rapport aux ξ et aux η, indépendants d'ailleurs de α et de e' et qui se réduisent (§ 9, 7°) à

$$C[\xi_1^2 + \eta_1^2 - \xi_2^2 - \eta_2^2].$$

Nous n'aurons d'ailleurs à envisager dans l'équation (5) que les deux derniers termes du second membre, de sorte qu'il nous restera finalement pour les termes conservés de notre crochet

$$[F', \theta'_2] = \beta^2 C\left(\eta'_1 \frac{d\theta'_2}{d\xi'_1} - \xi'_1 \frac{d\theta'_2}{d\eta'_1} - \eta'_2 \frac{d\theta'_2}{d\xi'_2} + \xi'_2 \frac{d\theta'_2}{d\eta'_2}\right),$$

ce que j'écrirai, pour abréger $\beta^2 D(\theta'_2)$.

Il reste à envisager

$$[F', \theta'_3] = \Sigma\beta^n[F'_n, \theta'_3].$$

On verrait, comme plus haut, que

$$[F'_0, \theta'_3] = [F'_1, \theta'_3] = 0,$$

puisque θ'_3 ne dépend ni de λ' ni de u'. De même les termes provenant de $\beta^n[F'_n, \theta'_3]$ auront pour caractéristiques

$$\beta^{n-3}KK_1, \quad \beta^{n-3}\frac{KK_1}{e^2}, \quad \beta^{n-3}\frac{KK_1}{\gamma^2}$$

et doivent tous être rejetés, sauf ceux pour lesquels $n = 3$ ou $n = 2$.

Parlons d'abord de l'hypothèse $n = 3$; on verrait, comme plus haut, qu'elle conduit à l'une des hypothèses suivantes :

$$K_1 = 1, \qquad K_1 = e^2, \qquad K_1 = \gamma^2, \qquad K_1 = e, \qquad K_1 = \gamma.$$

Considérons dans F_3 les termes qui admettent l'une de ces cinq caractéristiques; nous pouvons admettre que par des changements de variables antérieurs ils aient été amenés à satisfaire aux conditions A. Soient B'_1, B'_{e^2}, B'_{γ^2}, B'_{e^2} B'_{γ^2} les termes correspondants de F'_3; nous verrons que B'_1 ne dépend que de L', et que B'_e et B'_γ sont nuls. Il en résulte que $[B'_1, \theta'_3] = 0$, puisque θ'_3 ne dépend pas de λ'.

Nous ne devrons donc retenir que $[B'_{e^2} + B'_{\gamma^2}, \theta'_3[$, en nous bornant aux deux derniers termes du second membre de (5), qui sont de la forme

$$\sum C_i\left(\eta'_i\frac{d\theta'_3}{d\xi'_i} - \xi'_i\frac{d\theta'_3}{d\eta'_i}\right),$$

C_1 et C_2 ne dépendant que de L' et que je représenterai par la notation abrégée $D_1\theta'_3$.

Supposons maintenant $n = 2$, de telle sorte que nos caractéristiques deviennent

$$\frac{KK_1}{\beta}, \quad \frac{KK_1}{\beta e^2}, \quad \frac{KK_1}{\beta\gamma^2}.$$

Pour que ces caractéristiques soient égales à K ou à un diviseur de K, il faut et il suffit que K_1 soit égal au dénominateur β, βe^2, $\beta\gamma^2$, ou à l'un de ses diviseurs. Or F_2 c'est par définition le coefficient de β^2; il résulte de là que K_1 n'est pas divisible par β, car F_2 est indépendant de β. Nous devons donc supposer

$$K_1 = 1, \quad e, \quad \gamma, \quad e^2 \quad \text{ou} \quad \gamma^2.$$

Si nous appelons E'_1, E'_e, ... les termes correspondants de F'_2, nous verrions, comme plus haut, que

$$[E'_1, \theta'_3] = 0, \qquad E'_e = E'_\gamma = 0,$$

et, d'autre part,

$$[E'_{e^2} + E'_{\gamma^2},\ \theta'_3] = D\theta'_3 = 0,$$

puisque θ'_3 satisfait à l'équation (3).

En résumé, les seuls termes qu'il convienne de conserver dans $[F', \Theta']$ sont les suivants :

$$-\frac{dF'_0}{dL'}\frac{d\theta'_0}{d\lambda'} + \beta\frac{d\theta'_1}{du'} + \beta^2 D\theta'_2 + \beta^3 D_1\theta'_3.$$

13. On peut se demander si le changement de variables, en dehors des termes que nous conservons, ne va pas introduire des termes à caractéristique fractionnaire, où l'un des exposants μ serait négatif.

Je dis que cela n'arrivera pas si Θ ne contient pas lui-même de termes à caractéristique fractionnaire; et en effet, reprenons les équations

$$(4) \qquad \lambda = \lambda' + \frac{dL}{d\Theta}, \qquad L = L' - \frac{d\Theta}{d\lambda'}, \qquad \dots,$$

d'où l'on peut tirer les variables anciennes en fonction des nouvelles, d'après le théorème de Cauchy sur le retour des suites et les fonctions implicites; les expressions ainsi obtenues seront développables suivant les puissances de β, α, e', des ξ' et des η', de sorte qu'il n'y aura pas de caractéristique fractionnaire; il ne pourra donc pas s'introduire de caractéristique fractionnaire quand dans F on remplacera ces variables anciennes par les expressions trouvées.

J'ajouterai qu'après cette substitution toutes les caractéristiques dans F' seront divisibles par β^2, à l'exception de F'_0 qui ne dépend que de L' et de $\beta F'_1$, qui se réduit à $-\beta v'$. En effet,

$$\beta^2 F_2 + \beta^3 F_3 + \dots$$

est divisible par β^2 et restera divisible par β^2 après la substitution. D'autre part, F_0 ne dépend que de L, et la différence

$$L - L' = -\frac{d\Theta}{d\lambda'}$$

est divisible par β^2. En effet, θ_1, θ_2, θ_3 ne dépendant pas de λ', il reste

$$L - L' = -\frac{d\theta_0}{d\lambda'}.$$

Or la caractéristique de θ_0 est égale à K; elle est donc divisible par β^2, puisque celle de θ_2 qui est supposée non fractionnaire est égale à $\frac{K}{\beta^2}$. Il résulte de là que $F_0 - F'_0$ est divisible par β^2. Il en sera de même de

$$\beta(F_1 - F'_1) = \beta(v' - v),$$

car

$$v' - v = \frac{d\Theta}{du'} = \frac{d\theta_0}{du'} + \frac{d\theta_1}{du'}.$$

Or les caractéristiques de θ_0 et θ_1 sont K et $\frac{K}{\beta}$ et, par conséquent, divisibles par β. La proposition énoncée se trouve donc établie.

Remarquons que θ_3 est au moins du quatrième degré par rapport aux ξ et aux η'. En effet, θ_3 satisfait à l'équation (3); si l'on remplace ξ_i et η'_i par $\sqrt{2\rho_i}\cos\omega_i$ et $\sqrt{2\rho_i}\sin\omega_i$, ce sera donc une fonction périodique de la somme $\omega_1 + \omega_2$, développable par conséquent suivant les

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p(\omega_1 + \omega_2).$$

Nous pouvons supprimer les termes indépendants de

$$\omega_1 \quad \text{et} \quad \omega_2 \qquad (p = 0).$$

Nous n'avons pas de terme où $p = 1$, parce que nous n'avons dans nos développements que des puissances paires de ξ_2, η_2, ξ'_2, η'_2; nous avons donc au moins $p = 2$; et comme le degré par rapport aux ξ et η' est au moins égal à $2p$, ce degré est au moins égal à 4. On démontrera aussi, au paragraphe **16**, que θ_3 est divisible pas e'^4.

14. Je me propose maintenant d'évaluer l'erreur que nous avons commise au paragraphe **11** en remplaçant les équations (4) par les équations (4 *bis*) et en négligeant quelques lignes plus loin le carré de Θ'.

Cherchons la caractéristique des divers termes négligés; mais, afin d'abréger la discussion, nous ne considérerons pas séparément le degré en ξ_1 et η_1 et le degré en ξ_2 et η_2; c'est-à-dire que nous envisagerons la *caractéristique réduite*, qui sera par définition la caractéristique ordinaire où l'on a fait $\gamma = e$. Dans le présent paragraphe, il s'agira toujours des caractéristiques réduites.

Écrivons les équations (4) sous la forme

$$(7) \qquad \lambda - \lambda' = \frac{d\Theta}{dL}, \qquad L - L' = -\frac{d\Theta}{d\lambda'}, \qquad \ldots.$$

Dans les seconds membres figurent les variables L et ξ; nous les remplacerons par $L' + (L - L')$, $\xi' + (\xi - \xi')$, et nous développerons suivant les puissances de $L - L'$ et de $\xi - \xi'$.

En première approximation, nous ferons dans les seconds membres $L - L' = \xi - \xi' = 0$ et nous retomberons ainsi sur les équations ($4\,bis$); on trouve dans les seconds membres les caractéristiques

$$K, \quad \frac{K}{\beta}, \quad \frac{K}{\beta^2}, \quad \frac{K}{\beta^3}$$

en ce qui concerne les variables autres que ξ et η et les caractéristiques (réduites)

$$\frac{K}{e}, \quad \frac{K}{e\beta}, \quad \frac{K}{e\beta^2}, \quad \frac{K}{e\beta^3}$$

en ce qui concerne les ξ et les η. Ces quatre types de caractéristiques correspondent respectivement à θ_0, θ_1, θ_2, θ_3; le dernier disparaît donc si $\theta_3 = 0$; les termes correspondant aux deux derniers ne dépendent ni de λ' ni de u'; ceux qui correspondent aux trois derniers ne dépendent pas de λ'.

En deuxième approximation, nous négligeons dans les seconds membres les carrés de $L - L'$, $\xi - \xi'$, et nous remplaçons $L - L'$, $\xi - \xi'$ par leurs premières valeurs approchées; cela introduit les nouveaux termes ayant pour caractéristiques

$$\frac{K^2}{e^h \beta^l} \qquad (h = 0, 1, 2, 3;\ l = 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6).$$

Pour le comprendre, il faut se rappeler qu'en différentiant par rapport à ξ ou à η, on divise la caractéristique par e; de sorte que, par exemple, le terme

$$\frac{d^2\theta'}{d\lambda'\, d\xi'}(\xi - \xi')$$

aura pour caractéristique le produit de celle de $\dfrac{d\theta}{d\lambda'}$ par celle de $\xi - \xi'$ divisée par e.

En troisième approximation, nous négligeons dans les seconds membres les cubes de $L - L'$, $\xi - \xi'$, et nous remplaçons $L - L'$, $\xi - \xi'$ par leurs secondes valeurs approchées; les nouveaux termes introduits auront pour caractéristiques.

$$\frac{K^3}{e^h \beta^l} \qquad (h \leqq 5,\ l \leqq 9).$$

Et plus généralement, en $n^{\text{ième}}$ approximation, les caractéristiques des termes nouveaux seront

$$\frac{K^n}{e^h \beta^l} \qquad (h \leqq 2n - 1, \qquad l \leqq 3n).$$

Mais quelques remarques sont nécessaires :

1° Si $\theta_3 = 0$, on a $l \leqq 2$ en première approximation, d'où $l \leqq 4$ en deuxième et $l \leqq 2n$ en $n^{\text{ième}}$ approximation;

2° Supposons toujours $\theta_3 = 0$; en première approximation, les termes où $l = 2$ sont indépendants de λ' et de u'; il en sera donc de même en deuxième approximation des termes où $l = 4$, qui ne peuvent provenir que de la combinaison de deux termes de première approximation pour lesquels $l = 2$; il en sera de même en $n^{\text{ième}}$ approximation des termes où $l = 2n$. On démontrerait de même que les termes où $l = 2n - 1$ ne dépendent pas de λ'.

3° Dans $L - L'$ (toujours si $\theta_3 = 0$), on a $l \leqq 2n - 2$ parce que $\frac{d\Theta}{d\lambda'} = \frac{d\theta_0}{d\lambda'}$, et dans $v - v'$ on a $l \leqq 2n - 1$ parce que

$$\frac{d\Theta}{du'} = \frac{d\theta_0}{du'} + \frac{d\theta_1}{du'}.$$

Cela posé, considérons le développement de

$$F(L, \ldots) = F[L' + (L - L'), \ldots]$$

suivant les puissances de $L - L'$, ...

Le premier terme sera tout simplement F' et le terme général sera, d'après la formule de Taylor, $AD\pi$, A étant un coefficient numérique, D une dérivée partielle d'ordre p de l'un des termes de F', et π un produit de p facteurs de la forme $L - L'$, ... Si K_1 est la caractéristique du terme envisagé de F', celle de D sera

$$\frac{K_1}{e^{h_1}} \qquad (h_1 \leqq p).$$

Celle des différents facteurs de π sera de la forme

$$\frac{K^n}{e^h \beta^l}.$$

Celle de $AD\pi$ sera donc

$$\frac{K_1 K^N}{e^H \beta^M}, \tag{8}$$

avec

$$N = \Sigma n, \qquad H = h_1 + \Sigma h, \qquad M = \Sigma l.$$

Le terme ne doit être conservé que si cette expression est égale à K ou à un diviseur de K.

1° Supposons $\theta_3 = 0$. Soient q et q_1 les exposants de β dans K et dans K_1; l'exposant de β dans (8) sera

$$q_1 + Nq - M;$$

pour que (8) divise K, on doit avoir

$$M - q_1 \geqq (N-1)q.$$

Comme

$$M = \Sigma l \leqq 2\Sigma n = 2N,$$

on aura

$$2N - q_1 \geqq (N-1)q$$

ou

$$2 - q_1 \geqq (N-1)(q-2).$$

D'après le paragraphe précédent, nous aurons $q \geqq 2$, de sorte que le second membre ne peut être négatif; l'inégalité ne peut donc être satisfaite que si

$$q_1 = 2, \qquad N = 1.$$

Mais les termes pour lesquels $N = 1$ sont précisément ceux que nous n'avons pas négligés en remplaçant les équations (4) par les équations (4 *bis*) ou en négligeant le carré de Θ', ou si

$$q_1 = 2, \qquad q = 2, \quad \text{cas que nous réservons,}$$

ou si

$$q_1 = 1 \qquad \text{ou} \qquad q_1 = 0.$$

Mais, si $q_1 = 0$, le terme de F' envisagé n'est autre que F'_0 qui ne dépend que de L'; en vertu de la remarque faite plus haut (3°), on aura non plus $l \leqq 2n$, mais $l \leqq 2n - 2$ et par conséquent

$$M \leqq 2N - 2,$$

de sorte que la condition à remplir devient

$$2N - 2 \geqq (N-1)q$$

ou

$$0 \geqq (N-1)(q-2),$$

ce qui entraîne encore

$$q = 2 \qquad \text{ou} \qquad N = 1.$$

Dans le cas de $q_1 = 1$, on aurait pour une raison analogue

$$M \leqq 2N - 1$$

et l'on arriverait au même résultat.

2° Il nous reste à examiner le cas de $q = 2$, que nous n'avons pu traiter par la considération de l'exposant de β.

Soient s et s_1 les exposants de e dans K et K_1; l'exposant de e dans ADπ sera

$$s_1 + Ns - H;$$

pour que (8) divise K, on doit avoir

$$H - s_1 \geqq (N - 1)s.$$

Mais

$$H \leqq 2N - 1,$$

d'où

$$2N - 1 \geqq (N - 1)s,$$

inégalité qui ne peut être satisfaite pour $N = 1$, c'est-à-dire pour un terme non négligé, ou pour $s = 0$, 1 ou 2.

3° Il nous reste donc le cas de $q = 2$, $s = 0$, 1 ou 2 et celui où $\theta_3 = 0$. Pour cela, soient encore t et t_1 l'exposant de α (ou celui de e') dans K et K_1; dans (8) il sera $t_1 + Nt$ et devra être au plus égal à t, ce qui ne peut arriver que pour $N = 1$ ou pour $t_1 = t = 0$. Il ne peut donc y avoir de difficulté que si l'exposant de α et celui de e' sont nuls dans K et K_1.

4° De sorte que, si $\theta_3 = 0$, les seuls cas douteux correspondent à

(9) $$q = 2, \qquad s = 0, \quad 1 \text{ ou } 2, \qquad t = 0.$$

Mais, après le changement de variables du paragraphe 10, F_2 s'est trouvé réduit à $[F_2]$. Les termes de $[F_2]$ qui satisfont aux conditions (9), c'est-à-dire ceux qui sont indépendants de α et de e' et de degré 2 au plus par rapport aux ξ et aux η, satisfont d'eux-mêmes aux conditions A. On n'aura donc jamais à faire un changement de variables avec une caractéristique K satisfaisant aux conditions (9).

5° Supposons que θ_3 ne soit pas nul; nous verrons au paragraphe 16 que θ_3 est toujours divisible par e'^4; donc K, si θ_3 n'est pas nul, est divisible par e'^4, de sorte que la condition $t = 0$ n'est pas remplie, ce qui nous ramène à un cas déjà examiné (3°).

Il résulte de cette discussion que les seuls termes dont la caractéristique soit K ou un diviseur de K sont ceux dont nous avons tenu compte dans les paragraphes 11, 12, 13.

15. Donc, en nous bornant aux termes dont la caractéristique divise K, nous aurons

$$F = F' + [F', \Theta']$$

ou, d'après le paragraphe 12,

$$F = F' - \frac{dF'_0}{dL'}\frac{d\theta'_0}{d\lambda'} + \beta\frac{d\theta'_1}{du'} + \beta^2 D\theta'_2 + \beta^3 D_1\theta'_3.$$

Tous les termes du second membre, sauf F', ont pour caractéristique K ; nous pourrons écrire

$$F' = G + H,$$

H contenant tous les termes de caractéristique K, et G les termes dont la caractéristique divise K sans être égale à K. Les autres termes sont négligés.

Nous décomposerons H en cinq parties :

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + [H].$$

Voici comment se fera la décomposition. Remplaçons ξ'_i et η'_i par $\sqrt{2\rho'_i}\cos\omega'_i$ et $\sqrt{2\rho'_i}\sin\omega'_i$; H deviendra une fonction périodique de λ', u', ω'_1, ω'_2 et pourra être exprimée en série de Fourier.

Dans cette série :

H_0 représentera les termes dépendant de λ' ;

H_1, les termes indépendants de λ', mais dépendant de u' ;

H_2, les termes indépendants de λ' et de u', mais dépendant de ω'_1 et ω'_2 de telle façon que les coefficients de ces deux variables ne soient pas égaux;

H_3, les termes qui ne dépendent que de la combinaison $\omega'_1 + \omega'_2$, mais en dépendent effectivement;

$[H]$, les termes indépendants à la fois de λ', u' et des ω'.

Les termes G dont la caractéristique divise K ne seront pas altérés par le changement de variables. Nous déterminerons les θ par les équations

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &H_0 - \frac{dF_0}{dL'}\frac{d\theta'_0}{d\lambda'} = 0,\\ &H_1 + \beta\frac{d\theta'_1}{du'} = 0,\\ &H_3 + \beta^3 D_1\theta'_2 = 0,\\ &H_2 + \beta^2 D\theta'_3 = 0,\end{aligned}\right.$$

de sorte que les termes de caractéristique K se réduiront à $[H]$ et satisferont ainsi aux conditions A.

Il ne peut se présenter aucune difficulté pour la résolution des trois premières équations (10), car la caractéristique K est toujours divisible par β^2, c'est-à-dire que H_0, H_1 et H_2 sont divisibles par β^2. Il n'en est pas de même en ce qui concerne la dernière équation (10), car H_3 est divisible par β^2, mais peut ne pas être divisible par β^3, *de sorte que* β *peut s'introduire au dénominateur.*

16. La fonction F présente une symétrie particulière dont j'ai parlé au paragraphe 9. Elle dépend de la longitude de la Lune λ, de l'anomalie moyenne du Soleil u, des longitudes du nœud et du périgée $-\omega_1$ et $-\omega_2$; elle dépend également de la longitude ϖ du *périgée solaire*, qui est une constante et que nous avions jusqu'ici supposée nulle par un choix convenable de l'origine des longitudes. Soit alors

$$e'^p \cos(a\lambda + bu + c_1\omega_1 + c_2\omega_2 + h\varpi)$$

un terme quelconque; comme la fonction F doit être indépendante de l'origine des longitudes, on aura

$$a + b + h = c_1 + c_2.$$

D'autre part, si nous prenons pour variables u et la longitude $u + \varpi$, nous voyons que, pour $e' = 0$, F dépendra seulement de $u + \varpi$, et que plus généralement ce sera une fonction de λ, des ω, de ϖ, de $e'\cos u$, de $e'\sin u$, *developpable suivant les puissances de* $e'\cos u$ *et* $e'\sin u$. On aura donc

$$p \geqq |b - h|.$$

De plus, c_2 sera toujours pair (*voir* paragraphe 9).

Toutes ces symétries ne sont pas altérées par les changements de variables, ainsi qu'on le vérifierait aisément.

Quels peuvent être alors les termes H_3 s'ils ne sont pas tous nuls? D'abord on doit avoir

$$a = b = 0, \qquad c_1 = c_2 \gtrless 0,$$

d'où

$$h = 2c_2, \qquad p \geqq 2|c_2|.$$

Mais c_2 est toujours pair; donc

$$p \geqq 4.$$

Ainsi H_3 est nul ou divisible par e'^4. Donc θ'_3 et θ_3 sont nuls ou divisibles par e'^4.

17. Que H_3 puisse être divisible par β^2 sans l'être par β^3, il suffit pour s'en assurer de considérer les termes dont la caractéristique est $\beta^2 e'^4 e^2 \gamma^2$.

Il résulte de là qu'il y aura des termes à caractéristique fractionnaire; mais cela ne peut arriver tant que H_3 et, par conséquent θ_3 sont nuls. Cela n'arrivera donc pas si l'inclinaison est nulle, c'est-à-dire si $\xi_2 = \eta_2 = 0$. Cela n'arrivera pas si $e' = 0$; cela ne pourra pas arriver non plus pour les termes dépendant de e. Cela ne pourra arriver que quand s'introduira ce que nous avons appelé un *très petit diviseur analytique*; et en effet les termes de F que nous avons appelés H_3 correspondent précisément à ces très petits diviseurs analytiques.

Au lieu de β, nous pouvons introduire la constante m de Delaunay, qui n'en diffère que par un facteur constant. Nous n'avons pu conserver dans l'analyse précédente cette constante m, parce que ce facteur constant $\frac{m}{\beta}$ dépend de la variable L, ce qui nous aurait gêné.

Mais l'exposant de m est évidemment le même que celui de β. Il peut donc devenir négatif. Si donc on poussait assez loin les développements de Delaunay, on arriverait à des termes où m figurerait à une puissance négative. Mais on n'y arriverait que quand on rencontrerait de très petits diviseurs analytiques, ce qui, nous l'avons dit, ne peut se produire que pour des termes d'ordre très élevé. C'est pour cette raison que cette circonstance a échappé à Delaunay.