SUR

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DE LA LUNE

Bulletin astronomique, t. 17, p. 167-204 (mai 1900).

1. A l'exemple de MM. Hill et Brown, nous rapporterons la Lune à trois axes tournants, la vitesse de rotation étant égale à n', moyen mouvement du Soleil. Les axes des x et des y sont dans le plan de l'écliptique et l'axe des z perpendiculaire à ce plan. Dans ces conditions, les équations du mouvement de la Lune sont de la forme suivante :

$$(1) \qquad x'' - 2n'y' = \frac{dV_1}{dx}, \qquad y'' + 2n'x' = \frac{dV_1}{dy}, \qquad z'' = \frac{dV_1}{dz}.$$

Les lettres accentuées x', x'', ..., désignent les dérivées de x par rapport au temps. Quant à V_1 c'est une fonction des coordonnées x, y, z de la Lune et de l'anomalie moyenne l' du Soleil. Elle dépend en outre de deux constantes, à savoir : la *parallaxe* α qui est une quantité inversement proportionnelle au grand axe de l'orbite solaire et l'*excentricité* e' de l'orbite solaire.

Considérée comme fonction de α, e' et l', elle est développable suivant les puissances de α, $e'\cos l'$ et $e'\sin l'$. Considérons-la maintenant comme fonction de α, x, y, z, nous verrons qu'elle se réduit à

$$\frac{\varkappa}{r} + \frac{3}{2} n'^2 x^2$$

pour $\alpha = 0$ ($\varkappa$ est un coefficient constant et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$). Quant au coefficient α^n, c'est un polynome homogène d'ordre $n + 2$ en x, y et z.

Les équations peuvent être mises sous la forme canonique par l'artifice suivant. Posons

$$X = x' - n'y, \qquad Y = y' + n'x, \qquad Z = z';$$
$$T = \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2}; \qquad F = T - V_1 - n'L;$$

L étant une variable auxiliaire. En prenant pour variables conjuguées

$$\begin{array}{cccc} x, & y, & z, & L; \\ X, & Y, & Z, & l', \end{array}$$

nos équations prennent la forme canonique

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dF}{dX}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dF}{dY}, & \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dF}{dZ}, & \dfrac{dL}{dt} = \dfrac{dF}{dl'}, \\ \dfrac{dX}{dt} = -\dfrac{dF}{dx}, & \dfrac{dY}{dt} = -\dfrac{dF}{dy}, & \dfrac{dZ}{dt} = -\dfrac{dF}{dz}, & \dfrac{dl'}{dt} = -\dfrac{dF}{dL}. \end{array} \right.$$

Les trois premières équations de chaque ligne se déduisent directement des équations (1); on a d'ailleurs $\frac{dl'}{dt} = n'$ et $\frac{dF}{dL} = -n'$; quant à la dernière équation de la première ligne, elle peut être regardée comme la définition de la variable auxiliaire L.

J'ai déjà fait usage des équations (2) dans un article antérieur (*Bull. astron.*, mars 1900).

Toutes les théories de la Lune conduisent à développer x, y et z en fonction : 1° de trois constantes d'intégration a, e et γ; 2° de trois arguments fonctions linéaires du temps τ, l et λ; 3° de l'anomalie moyenne solaire l'; 4° des deux constantes solaires α et e'.

Des trois constantes a, e et γ, la première est une sorte de demi-grand axe moyen de l'orbite lunaire, la seconde joue le rôle de l'excentricité et la troisième de l'inclination. Les trois arguments τ, l et λ représentent respectivement la distance *moyenne* de la Lune au Soleil, la distance moyenne de la Lune au périgée, la distance moyenne de la Lune au nœud.

Nous remarquons alors : 1° que les coordonnées sont des fonctions périodiques de période 2π des quatre arguments τ, l, λ et l'; 2° que si l'on regarde pour un instant τ et a comme des constantes et si l'on considère les coordonnées comme des fonctions de l, λ, l', e, γ, e' et α, ces coordonnées sont développables suivant les puissances des quantités

$$(3) \qquad \alpha, \quad e\cos l, \quad e\sin l, \quad \gamma\cos\lambda, \quad \gamma\sin\lambda, \quad e'\cos l', \quad e'\sin l'.$$

De tous ces faits bien connus, on peut déduire diverses conséquences.

Nos quatre arguments τ, l, λ et l' sont des fonctions linéaires du temps et nous pouvons écrire

$$\tau = c_1 t + \varepsilon_1, \quad l = c_2 t + \varepsilon_2, \quad \lambda = c_3 t + \varepsilon_3, \quad l' = c_4 t + \varepsilon_4,$$

ou plus simplement, en posant

$$\tau = w_1, \quad l = w_2, \quad \lambda = w_3, \quad l' = w_4,$$

nous pouvons écrire

$$w_i = c_i t + \varepsilon_i.$$

Il est clair que $c_4 = n'$ et que $c_1 + c_4 = n$, n étant le moyen mouvement de la Lune.

Cela posé, considérons α et e' comme des constantes et regardons nos coordonnées comme fonctions de t et des quantités

$$(4) \qquad a, \quad e, \quad \gamma, \quad L_0, \quad \varepsilon_i,$$

L_0 est une constante choisie de telle façon que l'équation des forces vives s'écrive

$$F = -n' L_0.$$

Nous désignerons par des ∂ les dérivées prises par rapport à t et aux variables (4), et je poserai.

$$[\beta, \beta'] = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \frac{\partial X}{\partial \beta'} - \frac{\partial x}{\partial \beta'} \frac{\partial X}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial L}{\partial \beta} \frac{\partial l'}{\partial \beta'} - \frac{\partial L}{\partial \beta'} \frac{\partial l'}{\partial \beta}.$$

Dans cette équation je désigne par β et β' deux quelconques des quantités (4); j'ajoute que sous le signe Σ on doit changer x et X d'abord en y et Y, puis en z et Z.

D'après un théorème bien connu, nos équations étant canoniques, les crochets $[\beta, \beta']$ doivent se réduire à des constantes.

Regardons maintenant nos coordonnées comme des fonctions des quantités

$$(5) \qquad a, \quad e, \quad \gamma, \quad L_0, \quad w_i$$

et désignons par des d les dérivées prises par rapport à ces quantités (5). Posons

$$(\beta, \beta') = \sum \left(\frac{dx}{d\beta} \frac{dX}{d\beta'} - \frac{dx}{d\beta'} \frac{dX}{d\beta} \right) + \frac{dL}{d\beta} \frac{dl'}{d\beta'} - \frac{dL}{d\beta'} \frac{dl'}{d\beta},$$

où β et β' sont deux quelconques des quantités (5).

J'observe alors que l'on a

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon_k} = \frac{dx}{d\varpi_k}; \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} = \frac{dx}{d\beta} + t \sum \frac{dx}{d\varpi_j} \frac{dc_j}{d\beta}$$

si β est l'une des quantités a, e, γ, L_0, et j'en conclus :

$$(6) \qquad [\varepsilon_i, \varepsilon_k] = (\varpi_i, \varpi_k); \qquad [\varepsilon_i, \beta] = (\varpi_i, \beta) + t \sum \frac{dc_j}{d\beta} (\varpi_i \, \varpi_j).$$

On aurait une expression analogue pour le crochet $[\beta, \beta']$, si β et β' désignaient deux des quantités a, e, γ, L_0.

On voit d'abord que (ϖ_i, ϖ_k) doit se réduire à une constante. Considérons maintenant la seconde équation (6). Le premier membre est une constante; comme (ϖ_i, β) et (ϖ_i, ϖ_j) sont des fonctions périodiques des quatre arguments, le second membre est égal à une fonction périodique, plus une autre fonction périodique multipliée par t; il ne peut donc se réduire à une constante que si le coefficient de t s'annule et si en même temps (ϖ_i, β) se réduit à une constante dépendant seulement de a, e, γ, L_0.

On démontrerait de même que si β et β' sont deux quelconques des quantités a, e, γ, et L_0, la parenthèse (β, β') se réduit à une constante.

Mais il y a plus, grâce à une circonstance particulière au cas de la Lune. Nous savons que x, Y, Z et L sont des fonctions paires des ϖ, tandis que X, y, z et l' sont des fonctions impaires. Il en résulte que (si β et β' sont toujours deux des quantités a, e, γ et L_0) les dérivées

$$\frac{dx}{d\beta}, \quad \frac{dY}{d\beta}, \quad \frac{dZ}{d\beta}, \quad \frac{dL}{d\beta}, \quad \frac{dX}{d\varpi}, \quad \frac{dy}{d\varpi}, \quad \frac{dz}{d\varpi}, \quad \frac{dl'}{d\varpi}$$

sont des fonctions paires tandis que les dérivées

$$\frac{dx}{d\varpi}, \quad \frac{dY}{d\varpi}, \quad \frac{dZ}{d\varpi}, \quad \frac{dL}{d\varpi}, \quad \frac{dX}{d\beta}, \quad \frac{dy}{d\beta}, \quad \frac{dz}{d\beta}, \quad \frac{dl'}{d\beta}$$

sont impaires

Donc les parenthèses (ϖ_i, ϖ_j) et (β, β') sont des fonctions impaires des ϖ et elles doivent se réduire à des constantes indépendantes des ϖ, elles doivent être nulles. Cette circonstance simplifie beaucoup la démonstration du théorème que nous avons en vue et qui serait vrai dans des cas beaucoup plus généraux.

Si μ, μ' et μ'' sont trois quelconques des quantités (5), on a évidemment l'identité

$$\frac{d(\mu, \mu')}{d\mu''} + \frac{d(\mu', \mu'')}{d\mu} + \frac{d(\mu'', \mu)}{d\mu'} = 0.$$

Cette identité nous donne en particulier

$$\frac{d(\varpi_i, \beta)}{d\beta'} = \frac{d(\varpi_i, \beta')}{d\beta}$$

puisque (β, β') est indépendant des ϖ et que $(\beta', \varpi_i) = -(\varpi_i, \beta')$.

On peut donc trouver quatre fonctions A_1, A_2, A_3, A_4 de a, e, γ et L_0 telles que

$$\frac{dA_i}{d\beta} = (\beta, \varpi_i).$$

De ces trois relations

$$(\varpi_i, \varpi_j) = (\beta, \beta') = 0, \qquad \frac{dA_i}{d\beta} = (\beta, \varpi_i),$$

il est aisé de conclure que

$$dS = \Sigma x\, dX + L\, dl' - \Sigma A_i\, d\varpi_i$$

est une différentielle exacte (je regarde, bien entendu, a, e' et n' comme des constantes).

Si je me rappelle que $\varpi_4 = l'$, je puis écrire

$$dS = \Sigma x\, dX + (L - A_4)\, dl' - A_1\, d\tau - A_2\, dl - A_3\, d\lambda.$$

J'observe ensuite que dX, dY, dZ, dl' $d\tau$, dl, $d\lambda$ sont indépendants de dL_0; il en résulte que S est indépendant de L_0 et il doit en être même de $L - A_4$, A_1, A_2 et A_3.

Donc A_1, A_2, A_3 dépendent seulement de a, e, γ (et en outre, bien entendu, de α, e' et n').

D'autre part, l'équation $F = -n' L_0$ me donne

$$L = L_0 + \frac{T - V_1}{n'}$$

et comme T et V_1 ne dépendent pas de L_0, $A_4 - L_0$ n'en dépendra pas non plus. Nous pourrons donc poser

$$A_4 - L_0 = \frac{G}{n'},$$

G étant une fonction de a, e, et γ

Donc en résumé

$$(7) \qquad \begin{aligned} dS = {} & x\, dX + y\, dY + z\, dZ - A_1\, d\tau \\ & - A_2\, dl - A_3\, d\lambda + \frac{T - V_1 - G}{n'}\, dl' \end{aligned}$$

est une différentielle exacte. Tel est le premier fait que je voulais mettre en évidence. Je n'insiste pas sur les procédés de vérification qui en résultent.

2. Si nous regardons e', α et n' comme des constantes, G, A_1, A_2 et A_3 ne dépendent de a, e et γ.

Voyons ce que deviennent les équations (2) si, au lieu de

$$x,\quad y,\quad z,\quad L;$$
$$X,\quad Y,\quad Z,\quad l',$$

on prend pour variables nouvelles

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4;$$
$$w_1,\quad w_2,\quad w_3,\quad w_4.$$

L'expression

$$\Sigma x\,dX + L\,dl' - \Sigma A_i dw_i$$

étant une différentielle exacte, la forme canonique des équations ne sera pas altérée et elles deviendront

$$\frac{dA_i}{dt} = \frac{dF}{dw_i},\qquad \frac{dw_i}{dt} = -\frac{dF}{dA_i}.$$

Mais on a

$$F = -n'L_0 = G - n'A_4.$$

Les équations deviennent donc (si l'on observe que G ne dépend que de a, e, γ et, par conséquent, de A_1, A_2, A_3)

$$\frac{dA_i}{dt} = 0,\qquad \frac{dw_1}{dt} = -\frac{dG}{dA_1},\qquad \frac{dw_2}{dt} = -\frac{dG}{dA_2},$$
$$\frac{dw_3}{dt} = -\frac{dG}{dA_3},\qquad \frac{dw_4}{dt} = n'.$$

Mais nous devons avoir $\dfrac{dw_i}{dt} = c_i$.

On a donc

$$-dG = c_1\,dA_1 + c_2\,dA_2 + c_3\,dA_3. \tag{8}$$

3. Nous avons dit que x, y, z, X, Y, Z sont des fonctions périodiques des quatre arguments w et, de plus, sont développables suivant les puissances des quantités (3).

Il est aisé d'en conclure qu'il en est de même de

$$\frac{dS}{da},\quad e\frac{dS}{de},\quad \gamma\frac{dS}{d\gamma},$$

et par conséquent de

$$S - S_0.$$

(S_0 étant une fonction qui ne dépend que de quatre arguments ϖ et des constantes α, e' et n', mais qui est indépendante de a, e et γ).

D'autre part, il en est encore de même de

$$\frac{dS}{d\tau} + A_1, \quad \frac{dS}{dl} + A_2, \quad \frac{dS}{d\lambda} + A_3, \quad \frac{dS}{dl'} + \frac{G}{n'},$$

et par conséquent de

$$\frac{dS_0}{d\tau} + A_1, \frac{dS_0}{dl} + A_2, \quad \frac{dS_0}{d\lambda} + A_3, \quad \frac{dS_0}{dl'} + \frac{G}{n'}.$$

Comme, d'une part $\frac{dS_0}{d\tau}$, $\frac{dS_0}{dl}$, $\frac{dS_0}{d\lambda}$, $\frac{dS_0}{dl'}$ ne dépendent que de τ, l, λ, l' et de α, e' et n'; et que d'autre part A_1, A_2, A_3 et G ne dépendent que de a, e, γ et de α, e' et n', nous devrons conclure que l'on aura

$$\frac{dS_0}{d\tau} = \frac{dS'_0}{d\tau} + D_1, \qquad \frac{dS_0}{d\lambda} = \frac{dS'_0}{d\lambda} + D_3,$$

$$\frac{dS_0}{dl} = \frac{dS'_0}{dl} + D_2, \qquad \frac{dS_0}{dl'} = \frac{dS'_0}{dl'} + D_4,$$

$$A_1 = A'_1 - D_1, \qquad A_2 = A'_2 - D_2, \qquad A_3 = A'_3 - D_3, \qquad \frac{G}{n'} = \frac{G'}{n'} - D_4;$$

les D étant des constantes dépendent seulement de α, e' et n'; tandis que A'_1, A'_2, A'_3, G', S'_0 sont comme $\frac{dS_0}{d\tau} + A$, ..., des fonctions périodiques des ϖ, développables suivant les puissances des quantités (3). (Remarquons que S'_0 ne devant pas dépendre de a, e et γ, ne pourra contenir que les arguments τ et l', puisqu'il ne peut dépendre de l, par exemple, sans dépendre de e; d'autre part, les A'_i et G' ne devant pas dépendre des arguments ϖ seront développables suivant les puissances α, e^2, e'^2, γ^2; je devrais même ajouter de α^2, e^2, e'^2, γ^2, mais les considérations précédentes ne suffiraient par pour l'établir.)

Remarquons maintenant que si D_1, D_2, D_3, D_4 sont quatre constantes dépendant seulement de α, e' et n', l'égalité

$$dS = \Sigma x\, dX - A_1\, d\tau - A_2\, dl - A_3\, d\lambda + \frac{T - V_1 - G}{n'} dl'$$

entraîne la suivante :

$$d(S - D_1\tau - D_2 l - D_3\lambda - D_4 l') = \Sigma x\, dX - (A_1 + D_1)\, d\tau - (A_2 + D_2)\, dl$$
$$- (A_3 + D_3)\, d\lambda + \frac{T - V_1 - G + n'D_4}{n'} dl'.$$

Nous pouvons donc sans altérer notre relation fondamentale changer S en $S - D_1\tau - D_2 l - D_3\lambda - D_4 l'$, et en même temps A_1, A_2, A_3, G en $A_1 + D_1$, $A_2 + D_2$, $A_3 + D_3$, $G + n'D_4$, ou, ce qui revient au même, S en $S - S_0 + S'_0$, S_0 en S'_0, A_1, A_2, A_3, G en A'_1, A'_2, A'_3, G'.

Nous pouvons donc toujours supposer, et c'est là que je voulais en venir :

1° Que la fonction S est périodique par rapport à τ, l, λ et l' et qu'elle est développable suivant les puissances des quantités (3);

2° Que A_1, A_2, A_3 et G sont développables suivant les puissances de

$$\alpha, \quad e^2, \quad \gamma^2, \quad e'^2.$$

Cela posé, comme S est développable suivant les puissances de $e \cos l$ et de $e \sin l$, tous les termes de S qui contiennent l contiendront aussi e : donc $\frac{dS}{dl}$ est divisible par e; il en est de même pour la même raison de $\frac{dX}{dl}$, $\frac{dY}{dl}$, $\frac{dZ}{dl}$. Donc

$$A_2 = \Sigma x \frac{dX}{dl} - \frac{dS}{dl}$$

est divisible par e, et comme A_2 ne contient que des puissance paires de e, γ et e', il sera divisible par e^2.

On trouverait de même que A_3 doit être divisible par γ^2.

Remarquons, avant d'aller plus loin, que les constantes a, e et γ ne sont pas entièrement définies; nous pourrions, sans avoir rien à changer à ce qui précède, remplacer a, e et γ par

$$\varphi_0, \quad e\varphi_1, \quad \text{et} \quad \gamma\varphi_2,$$

φ_0, φ_1 et φ_2 étant trois fonctions quelconques de a, e, γ, α et e' développables suivant les puissances de α, e^2, γ^2, et e'^2.

Rien ne nous empêcherait donc de supposer, par exemple,

$$A_1 = \sqrt{a}, \qquad A_2 = e^2, \qquad A_3 = \gamma^2.$$

4. Voyons maintenant comment on peut appliquer ces considérations au calcul des coordonnées par approximations successives. Nous supposerons d'abord $\alpha = e' = 0$; nous supposerons en outre $\gamma = 0$ et, par conséquent, $z = Z = 0$ et nous nous proposerons de développer x et y suivant les puissances de l'excentricité e.

Soient

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots,$$
$$y = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots,$$

ces développements. Soient

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_0 + \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \ldots,$$
$$\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_0 + \mathrm{Y}_1 + \mathrm{Y}_2 + \ldots,$$

les développements correspondants de X et Y. Alors x_i, y_i, Y_i, Z_i sont les termes d'ordre i par rapport à l'excentricité e.

Soit de même

$$\mathrm{S}_1 = \mathrm{S}_0 + \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \ldots,$$

le développement de S.

Je supposerai de même A_1, A_2, A_3 développés suivant les puissances de e; et les développements pourront s'écrire

$$\mathrm{A}_1 = \xi_0 + \xi_2 + \ldots, \qquad \mathrm{A}_2 = \eta_2 + \eta_4 + \ldots, \qquad \mathrm{A}_3 = 0;$$

il est clair, en effet que les développements ne peuvent contenir que des termes d'ordre pair, que celui de A_2 commence par un terme du second ordre, enfin que A_3 est nul puisque $\gamma = 0$.

Je développerai enfin sous la même forme les moyens mouvements c_i

$$c_1 = f_0 + f_2 + f_4 + \ldots,$$
$$c_2 = g_0 + g_2 + g_4 + \ldots,$$
$$c_3 = h_0 + h_2 + \ldots.$$

(D'ailleurs c_3 n'interviendra pas puisque nous supposons $\gamma = 0$.)

Il importe de remarquer que les constantes a, e et γ n'ayant pas été complètement définies, ainsi que je l'ai fait observer plus haut, ces développements restent arbitraires dans une certaine mesure. Je pourrais, par exemple, choisir arbitrairement ξ_2, ξ_4, ξ_6, ... Le mieux, afin de faciliter la comparaison avec les autres méthodes, est de supposer $c_1 = f_0$, $f_2 = f_4 = \ldots = 0$.

Les premiers termes du développement x_0, y_0, X_0 et Y_0 sont ceux que M. Hill a calculés dans son Mémoire sur la variation (*American Journal of Mathematics*, tome I); nous les regarderons comme connus; ainsi x_0, y_0, X_0 et Y_0 seront des fonctions connues de τ et de ξ_0; ces fonctions satisferont d'ailleurs à la condition

$$d\mathrm{S}_0 = x_0\, d\mathrm{X}_0 + y_0\, d\mathrm{Y}_0 - \xi_0\, d\tau.$$

Considérons maintenant les termes du 1^{er} degré, nous trouvons

$$d\mathrm{S}_1 = \Sigma x_1\, d\mathrm{X}_0 + \Sigma x_0\, d\mathrm{X}_1,$$

ce qui, en posant

$$S'_1 = S_1 - \Sigma x_0 X_1,$$

peut s'écrire

$$dS'_1 = \Sigma x_1\, aX_0 - \Sigma X_1\, dx_0.$$

Nous savons que S'_1 doit contenir e en facteur; d'autre part, dX_0 et dx_0 (ni, par conséquent, la différentielle totale dS'_1) ne dépendent pas de de. Cela ne peut arriver que si S'_1 est nul. Nous avons donc

$$\Sigma x_1\, dX_0 - \Sigma X_1\, dx_0 = 0. \tag{9}$$

Pour mettre cette équation (9) sous la forme d'équations différentielles, je remarque que l'on a

$$X = x' - n'y = c_1 \frac{dx}{d\tau} + c_2 \frac{dx}{dl} - n'y,$$

$$Y = y' + n'x = c_1 \frac{dy}{d\tau} + c_2 \frac{dy}{dl} + n'x.$$

En remplaçant x, y, c_1 et c_2 par leurs développements, et égalant les termes de même ordre, je trouve

$$X_0 = f_0 \frac{dx_0}{d\tau} - n'y_0,$$

$$X_1 = f_0 \frac{dx_1}{d\tau} + g_0 \frac{dx_1}{dl} - n'y_1,$$

$$X_2 = f_0 \frac{dx_2}{d\tau} + f_2 \frac{dx_0}{d\tau} + g_0 \frac{dx_2}{dl} - n'y_2,$$

$$X_3 = f_0 \frac{dx_3}{d\tau} + f_2 \frac{dx_1}{d\tau} + g_0 \frac{dx_3}{dl} + g_2 \frac{dx_1}{dl} - n'y_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

avec des formules analogues pour les Y_i.

Ces formules sont simplifiées, si nous supposons comme je l'ai dit plus haut

$$f_0 = c_1, \qquad f_2 = f_4 = \ldots = 0.$$

J'introduirai la notation suivante; je poserai

$$Dx = f_0 \frac{dx}{d\tau} + g_0 \frac{dx}{dl},$$

Dx représente alors ce qui serait la dérivée de x par rapport au temps t, si l'on y remplaçait τ et l par $f_0 t + \varepsilon_1$, $g_0 t + \varepsilon_2$ (au lieu de $c_1 t + \varepsilon_1$, $c_2 t + \varepsilon_2$).

Dans ces conditions, on a

$$\begin{array}{ll} X_0 = D x_0 - n' y_0, & Y_0 = D y_0 + n' x_0, \\ X_1 = D x_1 - n' y_1, & Y_1 = D y_1 + n' x_1, \\ X_2 = D x_2 - n' y_2, & Y_2 = D y_2 + n' x_2, \\ X_3 = D x_3 - n' y_3 + g_2 \dfrac{dx_1}{dl}, & Y_3 = D y_3 + n' x_3 + g_2 \dfrac{dy_1}{dl}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots ; & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

On trouve ainsi les équations suivantes :

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & x_1 \frac{dX_0}{d\tau} - (D x_1 - n' y_1) \frac{dx_0}{d\tau} + y_1 \frac{dY_0}{d\tau} - (D y_1 + n' x_1) \frac{dy_0}{d\tau} = 0, \\ & x_1 \frac{dX_0}{df_0} - (D x_1 - n' y_1) \frac{dx_0}{df_0} + y_1 \frac{dY_0}{df_0} - (D y_1' + n x_1) \frac{dy_0}{df_0} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (10) sont deux équations différentielles linéaires qui définissent les deux fonctions inconnues x_1 et y_1 en fonction de t (en supposant que τ et l aient été remplacés par $f_0 t + \varepsilon_1$, $g_0 t + \varepsilon_2$). Ces deux équations sont du premier ordre, de sorte que le système est du second ordre.

Elles sont identiques aux équations (10) de mon article antérieur (*Bull. astron.*, mars 1900, p. 99). Toutefois comme cette identité pourrait être dissimulée par la différence des notations, quelques explications sont nécessaires. En premier lieu, dans les équations du Mémoire cité, les inconnues étaient désignées par ξ et η; il conviendrait donc pour les retrouver de remplacer x_1, y_1, Dx_1, Dy_1 par ξ, η, ξ', η'. Ensuite x_0 et y_0 doivent être remplacés par x et y. Enfin nous employions dans le Mémoire cité la valeur m définie par l'égalité $f_0 = \frac{n'}{m}$, et nous avions choisi une unité de temps telle que $\tau = t$, ce qui nous permettait de faire (après la différentiation par rapport à f_0 ou à m) $f_0 = 1$, $n' = m$. Dans ces conditions on doit remplacer

$$\frac{dx_0}{d\tau}, \quad \frac{dy_0}{d\tau}, \quad \frac{dX_0}{d\tau}, \quad \frac{dY_0}{d\tau}, \quad \frac{dx_0}{df_0}, \quad \frac{dy_0}{df_0}, \quad \frac{dX_0}{df_0}, \quad \frac{dY_0}{df_0}, \quad n'$$

par

$$x', \quad y', \quad x'' - my', \quad y'' + mx', \quad -m\frac{dx}{dm}, \quad -m\frac{dy}{dm},$$

$$x' - m\frac{dx'}{dm} + m^2\frac{dy}{dm}, \quad y' - m\frac{dy'}{dm} - m^2\frac{dx}{dm}, \quad m,$$

et l'on retrouvera les équations citées.

5. Passons aux termes du second ordre; il vient

$$dS_2 = \Sigma x_2 dX_0 + \Sigma x_0 dX_2 + \Sigma x_1 dX_1 - \xi_2 d\tau - \eta_2 dl,$$

ce qui, en posant

$$S'_2 = S_2 - \Sigma x_0 X_2,$$

s'écrit

$$dS'_2 = \Sigma(x_2\, dX_0 - X_2\, dx_0) + \Sigma x_1\, dX_1 - \xi_2\, d\tau - \eta_2\, dl.$$

Je suppose que je regarde pour un instant τ et f_0 comme des constantes. Alors,

$$d\tau = dX_0 = dx_0 = 0$$

et

$$dS'_2 = \Sigma x_1\, dX_1 - \eta_2\, dl. \tag{11}$$

Cette équation détermine S'_2. En effet, x_1 et X_1 sont connus.

$$\frac{dS'_2}{dl} = \sum x_1 \frac{dX_1}{dl} - \eta_2$$

est un polynome entier par rapport aux cosinus et aux sinus des multiples de l, et ce polynome ne doit pas contenir de terme indépendant de l, puisqu'il est la dérivée de S'_2 qui doit être un polynome de même forme.

Nous disposerons donc de l'indéterminée η_2 de façon à faire disparaître ce terme indépendant de l. Alors dS'_2 sera entièrement déterminée; il en sera encore de même de S'_2 à une constante près indépendante de e et de l. Mais comme S'_2 doit contenir e^2 en facteur, cette constante devra être nulle et S'_2 sera entièrement connue.

Nous trouvons ensuite les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\sum\left(x_2\frac{dX_0}{d\tau} - X_2\frac{dx_0}{d\tau}\right) = \frac{dS'_2}{d\tau} - \sum x_1\frac{dX_1}{d\tau} + \xi_2, \\ &\sum\left(x_2\frac{dX_0}{df_0} - X_2\frac{dx_0}{df_0}\right) = \frac{dS'_2}{df_0} - \sum x_1\frac{dX_1}{df_0}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Quelle est la forme des équations (12) ? Les premiers membres ne diffèrent de ceux des équations (10) que par la substitution des inconnues x_2 et y_2 aux inconnues x_1 et y_1. Dans les seconds membres, tout est connu, sauf la constante ξ_2 que nous déterminerons plus loin.

Le calcul de x_2 et y_2 est donc ramené à l'intégration d'équations linéaires à second membre, dont les premiers membres sont ceux des équations (10); c'est ce que j'avais annoncé dans le Mémoire cité, p. 99, à la fin du paragraphe 2.

Prenons maintenant les termes du troisième ordre

$$dS_3 = \Sigma(x_3\, dX_0 + x_0\, dX_3 + x_1\, dX_2 + x_2\, dX_1).$$

Nous poserons

$$S'_3 = S_3 - \Sigma x_0 X_3,$$
$$dS'_3 = \Sigma(x_3\, dX_0 - X_3\, dx_0) + \Sigma(x_1\, dX_2 + x_2\, dX_1).$$

Et si nous regardons pour un instant τ et f_0 comme des constantes,

(11 *bis*) $$dS'_3 = \Sigma(x_1\, dX_2 + x_2\, dX_1).$$

Cette équation déterminera S'_3 comme l'équation (11) a déterminé S'_2. (Ici le terme indépendant de l dans $\frac{dS'_3}{dl}$ disparaît de lui-même.)

Nous formerions ensuite des équations analogues aux équations (12) et dont la première serait

$$\sum\left(x_3\frac{dX_0}{d\tau} - X_3\frac{dx_0}{d\tau}\right) = \frac{dS'_3}{d\tau} - \sum\left(x_1\frac{dX_2}{d\tau} + x_2\frac{dX_1}{d\tau}\right),$$

et dont la seconde s'en déduirait par la substitution de df_0 à $d\tau$.

Mais pour que l'analogie soit complète, il convient de poser

$$X_3 = X'_3 + g_2\frac{dx_1}{dl}, \qquad Y_3 = Y'_3 + g_2\frac{dy_1}{dl},$$

de telle façon que

$$X'_3 = Dx_3 - n'y_3, \qquad Y'_3 = Dy_3 + n'x_3.$$

Nous obtenons ainsi les équations

(13) $$\left\{\begin{aligned} \sum\left(x_3\frac{dX_0}{d\tau} - X'_3\frac{dx_0}{d\tau}\right) &= \frac{dS'_3}{d\tau} - \sum\left(x_1\frac{dX_2}{d\tau} + x_2\frac{dX_1}{d\tau}\right) + g_2\sum\frac{dx_1}{dl}\frac{dx_0}{d\tau}, \\ \sum\left(x_3\frac{dX_0}{df_0} - X'_3\frac{dx_0}{df_0}\right) &= \frac{dS'_3}{df_0} - \sum\left(x_1\frac{dX_2}{df_0} + x_2\frac{dX_1}{df_0}\right) + g_2\sum\frac{dx_1}{dl}\frac{dx_0}{df_0}. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres sont ceux des équations (10). Dans les seconds membres tout serait connu si nous connaissions les deux constantes g_2 et ξ_2; mais la première de ces constantes figure explicitement dans nos équations, la seconde y figure implicitement puisque x_2, y_2 et, par conséquent, S'_3 en dépendent.

6. Il reste donc à déterminer ces deux constantes. Commençons par ξ_2. Je me servirai pour cela de l'équation (8) qui, A_3 étant nulle, se réduit ici à

(14) $$-dG = c_1\, dA_1 + c_2\, dA_2.$$

J'y remplacerai c_1 par f_0 et A_1, A_2, c_2 par leurs développements; je remplacerai également G par son développement

$$G = G_0 + G_2 + G_4 + \ldots.$$

Nous aurons d'abord

$$-dG_0 = f_0\, d\xi_0,$$

ce qui ne nous apprend rien, et ensuite

$$-dG_2 = f_0\, d\xi_2 + g_0\, d\eta_2$$

ou

$$(15)\qquad \begin{cases} -\dfrac{dG_2}{df_0} = f_0 \dfrac{d\xi_2}{df_0} + g_0 \dfrac{d\eta_2}{df_0}, \\[2ex] -\dfrac{dG_2}{de} = f_0 \dfrac{d\xi_2}{de} + g_0 \dfrac{d\eta_2}{de}. \end{cases}$$

Comme G_2, ξ_2 et η_2 sont homogènes d'ordre 2 par rapport à e, la dernière équation (15) entraîne la suivante :

$$-G_2 = f_0 \xi_2 + g_0 \eta_2.$$

En différentiant par rapport à f_0 et retranchant la première équation (15), je trouve

$$\xi_2 + \frac{dg_0}{df_0} \eta_2 = 0.$$

Comme η_2 a été calculé antérieurement, cette équation nous donnera ξ_2.

Avant d'aller plus loin, montrons comment le même procédé permettra d'obtenir ξ_4 quand on connaîtra η_4 et g_2. Nous aurons

$$-dG_4 = f_0\, d\xi_4 + g_0\, d\eta_4 + g_2\, d\eta_2,$$

d'où

$$-\frac{dG_4}{df_0} = f_0 \frac{d\xi_4}{df_0} + g_0 \frac{d\eta_4}{df_0} + g_2 \frac{d\eta_2}{df_0}$$

$$-\frac{dG_4}{de} = f_0 \frac{d\xi_4}{de} + g_0 \frac{d\eta_4}{de} + g_2 \frac{d\eta_2}{de}.$$

Comme G_4, ξ_4 et η_4 sont homogènes d'ordre 4 et η_2 homogène d'ordre 2 par rapport à e, on aura

$$-G_4 = f_0 \xi_4 + g_0 \eta_4 + \frac{1}{2} g_2 \eta_2.$$

Si l'on différentie par rapport à f_0 et qu'on élimine $\dfrac{dG_4}{df_0}$, il viendra

$$\xi_4 + \eta_4 \frac{dg_0}{df_0} + \frac{1}{2}\left(\eta_2 \frac{dg_2}{df_0} - g_2 \frac{d\eta_2}{df_0}\right) = 0,$$

ce qui donne ξ_4 et ainsi de suite.

7. Avant de déterminer g_2, voyons comment on pourra intégrer les équations à second membre (12) et (13) et les équations de même forme par la méthode de la variation des constantes.

Soient x et y nos deux fonctions inconnues et écrivons nos équations sous la forme

$$(16)\quad \begin{cases} \sum\left(x\dfrac{dX_0}{d\tau} - X'\dfrac{dx_0}{d\tau}\right) = P, \\ \sum\left(x\dfrac{dX_0}{df_0} - X'\dfrac{dx_0}{df_0}\right) = Q, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$X' = Dx - n'y, \qquad Y' = Dy + n'x.$$

Les seconds membres P et Q sont regardés comme connus.

Posons

$$\Delta = \frac{dx_0}{d\tau}\frac{dy_0}{df_0} - \frac{dx_0}{df_0}\frac{dy_0}{d\tau}.$$

Nous connaissons la solution générale des équations sans second membre,

$$x = x_1, \qquad y = y_1.$$

Il est clair que les équations étant linéaires et la solution subsistant quelle que soit la constante ε_2,

$$x = \frac{dx_1}{d\varepsilon_2} = \frac{dx_1}{dl}, \qquad y = \frac{dy_1}{d\varepsilon_2} = \frac{dy_1}{dl}$$

sera encore une solution. Soit

$$x_1\frac{dy_1}{dl} - y_1\frac{dx_1}{dl} = k\Delta,$$

il est aisé de voir que k est une constante.

Posons alors

$$x = \beta_1 x_1 + \beta_2\frac{dx_1}{dl}, \qquad y = \beta_1 y_1 + \beta_2\frac{dy_1}{dl}.$$

Il s'agit de déterminer β_1 et β_2; or nos équations deviennent

$$\left(x_1 D\beta_1 + \frac{dx_1}{dl}D\beta_2\right)\frac{dx_0}{d\tau} + \left(y_1 D\beta_1 + \frac{dy_1}{dl}D\beta_2\right)\frac{dy_0}{d\tau} = -P,$$

$$\left(x_1 D\beta_1 + \frac{dx_1}{dl}D\beta_2\right)\frac{dx_0}{df_0} + \left(y_1 D\beta_1 + \frac{dy_1}{dl}D\beta_2\right)\frac{dy_0}{df_0} = -Q.$$

d'où

$$D\beta_1 = \frac{\frac{dy_1}{dl}\left(Q\frac{dy_0}{df_0} - P\frac{dy_0}{d\tau}\right) + \frac{dx_1}{dl}\left(Q\frac{dx_0}{df_0} - P\frac{dx_0}{d\tau}\right)}{k\Delta^2},$$

$$D\beta_2 = \frac{y_1\left(P\frac{dy_0}{d\tau} - Q\frac{dy_0}{df_0}\right) + x_1\left(P\frac{dx_0}{d\tau} - Q\frac{dx_0}{df_0}\right)}{k\Delta^2}.$$

L'application de ce procédé ne présente pas de difficulté, parce que Δ ne s'annule pas.

8. Par ce procédé, ou par tout autre, on verrait que si P et Q sont des fonctions périodiques de t et de l, la solution des équations (16) est de la forme

$$x = \varphi_0 + C_1 t x_1 + C_2 t \frac{dx_1}{dl},$$

$$y = \varphi_1 + C_1 t y_1 + C_2 t \frac{dy_1}{dl};$$

φ_0 et φ_1 étant des fonctions périodiques de τ et l, C_1 et C_2 des coefficients constants.

Si, de plus, P est une fonction paire de τ et l, et Q une fonction impaire, x devra être une fonction paire de τ, l et t, et y une fonction impaire. Donc la constance C_1 devra être nulle.

Si, dans les premiers membres des équations (16), on substitue à la place de x et y, soit x_1 et y_1, soit $\frac{dx_1}{dl}$ et $\frac{dy_1}{dl}$, on trouve zéro; mais si l'on substitue

$$t\frac{dx_1}{dl}, \quad t\frac{dy_1}{dl},$$

on trouve

$$-\sum \frac{dx_1}{dl}\frac{dx_0}{d\tau}, \qquad -\sum \frac{dx_1}{dl}\frac{dx_0}{df_0}.$$

Cela posé, cherchons à déterminer g_2 et pour cela écrivons les équations (13) sous la forme

$$\sum\left(x_3\frac{dX_0}{d\tau} - X_3'\frac{dx_0}{d\tau}\right) = P + g_2\sum\frac{dx_1}{dl}\frac{dx_0}{d\tau}$$

$$\sum\left(x_3\frac{dX_0}{df_0} - X_3'\frac{dx_0}{df_0}\right) = Q + g_2\sum\frac{dx_1}{dl}\frac{dx_0}{df_0}.$$

Comme la constante ξ_2 a été déterminée plus haut, P et Q sont des fonctions entièrement connues. Ces fonctions sont périodiques, la première paire et la seconde impaire.

Si g_2 était nul, ces équations nous donneraient

$$x_3 = \varphi_0 + C_2 t \frac{dx_1}{dl},$$

$$y_3 = \varphi_1 + C_2 t \frac{dy_1}{dl},$$

φ_0 et φ_1 étant périodiques. Si, au contraire, g_2 n'est pas nul, ces mêmes équations donnent

$$x_3 = \varphi_0 + C_2 t \frac{dx_1}{dl} - g_2 t \frac{dx_1}{dl},$$

$$y_3 = \varphi_1 + C_2 t \frac{dy_1}{dl} - g_2 t \frac{dy_1}{dl}.$$

Comme x_3 et y_3 doivent être périodiques, on devra prendre $g_2 = C_2$, ce qui détermine g_2.

9. Le calcul des termes d'ordre supérieur se ferait de la même manière. En égalant les termes du quatrième ordre, nous aurons l'expression de dS_4, et, par conséquent, celle de dS'_4 où

$$S'_4 = S_4 - \Sigma x_0 X_4.$$

Si dans cette expression on regarde τ et f_0 comme des constantes on obtiendra une équation analogue à l'équation (11) qui déterminera S'_4; on choisira η_4 de façon que S'_4 soit périodique, c'est-à-dire de façon que le terme indépendant de l dans $\frac{dS'_4}{dl}$ disparaisse.

Connaissant η_4 et g_2 on calculera ξ_4 par le procédé du paragraphe 6. On formera ensuite des équations analogues aux équations (12) qui détermineront x_4 et y_4.

On calculera ensuite S'_5 à l'aide d'une équation analogue à (11) ou plutôt à (11 *bis*); le terme constant de $\frac{dS'_5}{dl}$ disparaîtra de lui-même.

On formera ensuite des équations analogues à (13) dont l'intégration déterminera x_5 et y_5; on choisira g_4 par le procédé du paragraphe 8 de telle façon que x_5 et y_5 soient périodiques. Et ainsi de suite.

10. J'attirerai l'attention sur une circonstance bien digne de remarque et qui semble d'abord tout à fait paradoxale.

Mon but était d'intégrer les équations (2) *et, dans tout le cours de cette analyse, je ne me suis pas servi une seule fois de ces équations.*

Il faut donc que je les aie introduites implicitement; mais où et comment l'ai-je fait ?

J'ai supposé d'abord que les équations étaient de la forme canonique.

Je me suis servi ensuite des conditions

$$X = x' - n'y, \qquad Y = y' + n'x.$$

Cela revenait à supposer que la fonction F était de la forme suivante :

$$F = \frac{(X + n'y)^2 + (Y - n'x)^2}{2} + \varphi(x, y).$$

Comme e' est supposé nul, nous pouvons supposer $L = 0$ et F se réduit à $T - V_1$; la fonction $\varphi(x, y)$ n'est autre chose que $-V_1$. Mais il semble que nous n'avons fait aucune hypothèse sur la fonction $\varphi(x, y)$.

Bien entendu, ce n'est pas là qu'une apparence. Nous avons au début regardé x_0 et y_0 comme des fonctions connues de τ et de f_0. Or il se trouve que si l'on se donne x_0 et y_0 en fonction de τ et de f_0, cela suffit pour déterminer la fonction $\varphi(x, y)$.

Si nous connaissons en effet x_0 et y_0 en fonction de τ et de f_0, nous connaîtrons également

$$X_0 + n'y_0 = f_0 \frac{dx_0}{d\tau}, \qquad Y_0 - n'x_0 = f_0 \frac{dy_0}{d\tau}$$

et, par conséquent,

$$T = \frac{(X_0 + n'y_0)^2 + (Y_0 - n'x_0)^2}{2}.$$

D'après l'équation des forces vives, $F = T + \varphi(x_0, f_0)$ devra se réduire à une constante qui ne pourra dépendre que de f_0. Je puis donc écrire.

$$T + \varphi = \theta(f_0).$$

On voit ensuite que

$$\sum \left(\frac{dX_0}{d\tau} \frac{dx_0}{df_0} - \frac{dX_0}{df_0} \frac{dx_0}{d\tau} \right)$$

est une constante, dépendant seulement de f_0, soit $\psi(f_0)$. Cette fonction $\psi(f_0)$ peut être regardée comme connue puisque x_0, y_0, X_0 et Y_0 le sont.

Nous trouvons ensuite

$$\psi(f_0) \frac{d\tau}{dt} = \frac{dF}{df_0} = \frac{d\theta}{df_0},$$

d'où

$$\theta = \int f_0 \, \psi(f_0) \, df_0,$$

ce qui détermine θ (à une constante près qui ne joue aucun rôle).

Comme T et θ sont maintenant des fonctions connues, φ sera une fonction connue de τ et de f_0; comme x_0 et y_0 sont aussi des fonctions connues de τ et de f_0, on peut regarder φ comme une fonction connue de x_0 et de y_0 et le paradoxe se trouve expliqué.

11. Supposons maintenant $e = \alpha = e' = 0$ et cherchons à développer suivant les puissances de γ. Comme e' est nul, nous pouvons encore supposer

$$L = 0, \qquad F = T - V_1.$$

Soient

$$\begin{array}{lllll} x = \Sigma x_i, & y = \Sigma y_i, & z = \Sigma z_i, & X = \Sigma X_i, & Y = \Sigma Y_i, \\ Z = \Sigma Z_i, & S = \Sigma S_i, & F = \Sigma F_i, & A_1 = \Sigma \xi_i, & A_2 = \Sigma \eta_i, \\ A_3 = \Sigma \zeta_i, & G = \Sigma G_i, & c_1 = \Sigma f_i = f_0, & c_2 = \Sigma g_i, & c_3 = \Sigma h_i, \end{array}$$

nos développements procédant suivant les puissances des γ. Observons :

1° Que x, y, X, Y, S, F, A_1, A_2, A_3, G, c_1, c_2, c_3 ne contiennent dans leurs développements que des termes d'ordre pair, tandis que z et Z ne contiennent que des termes d'ordre impair;

2° Que $A_2 = 0$;

3° Que le développement de A_3 commence par le terme ζ_2. Nous poserons

$$S'_i = S_i - \Sigma x_0 X_i.$$

La considération de dS_0 ne nous apprend rien; nous trouvons ensuite

$$\Sigma(x_2\,dX_0 + x_0\,dX_2) + z_1\,dZ_1 - \xi_2\,d\tau - \zeta_2\,d\lambda = dS_2,$$

$$\Sigma(x_2\,dX_0 - X_2\,dx_0) + z_1\,dZ_1 - \xi_2\,d\tau - \zeta_2\,d\lambda = dS'_2.$$

Faisons varier d'abord γ, les autres variables demeurant constantes; comme $dX_0 = dx_0 = d\tau = d\lambda = 0$, il vient

$$z_1 \frac{dZ_1}{d\gamma} = \frac{dS'_2}{d\gamma}.$$

Comme S'_2 est homogène d'ordre 2 et Z_1 d'ordre 1 par rapport à γ, on en conclut

$$S'_2 = \frac{z_1 Z_1}{2}.$$

En tenant compte de cette relation et en égalant les deux valeurs de $\frac{dS'_2}{d\tau}$, ainsi que celles de $\frac{dS'_2}{d\lambda}$, on trouve

$$(17)\quad \begin{cases} \sum\left(x_2\frac{dX_0}{d\tau} - X_2\frac{dx_0}{d\tau}\right) + \frac{1}{2}\left(z_1\frac{dZ_1}{d\tau} - Z_1\frac{dz_1}{d\tau}\right) = \xi_2, \\ \frac{1}{2}\left(z_1\frac{dZ_1}{d\lambda} - Z_1\frac{dz_1}{d\lambda}\right) = \zeta_2. \end{cases}$$

Considérons ensuite le développement de F suivant les puissances de z et de Z; le premier terme indépendant de z et de Z, c'est F_0; le second terme (d'ordre 2 en z et Z) sera de la forme

$$\frac{\Phi z^2}{2} + \frac{Z^2}{2},$$

Φ étant une fonction de x et de y.

On trouve alors

$$F_2 = \sum\left(\frac{dF_0}{dx_0}x_2 + \frac{dF_0}{dX_0}X_2\right) + \frac{\Phi z_1^2}{2} + \frac{Z_1^2}{2}.$$

D'autre part e' étant nul, S ne soit pas dépendre de l'; donc $\frac{dX}{dl'}, \frac{dS}{dl'}, \ldots,$ sont nuls. Donc

$$T - V_1 = G,$$

et comme nous avons déjà $F = T - V_1$, il vient

$$F = G, \qquad F_2 = G_2.$$

Si nous tenons compte des équations

$$\frac{dX_0}{dt} = f_0\frac{dX_0}{d\tau} = -\frac{dF_0}{dx_0}, \qquad \frac{dx_0}{dt} = f_0\frac{dx_0}{d\tau} = \frac{dF_0}{dX_0},$$

nous pouvons donc écrire

$$(18)\quad -f_0\sum\left(x_2\frac{dX_0}{d\tau} - X_2\frac{dx_0}{d\tau}\right) + \frac{\Phi z_1^2}{2} + \frac{Z_1^2}{2} = G_2.$$

Nous poserons, par une notation analogue à celle des paragraphes précédents

$$Dx = f_0\frac{dx}{d\tau} + g_0\frac{dx}{dl} + h_0\frac{dx}{d\lambda} + n'\frac{dx}{dl'},$$

de telle façon que Dx est la dérivée de x par rapport à t, si l'on suppose que τ, l, λ et l' y ont été remplacés par $f_0 t + \varepsilon_1$, $g_0 t + \varepsilon_2$, $h_0 t + \varepsilon_3$, $n't + \varepsilon_4$ (au lieu de $c_1 t + \varepsilon_1, \ldots$).

Comme ici e et e' sont supposés nuls, nos fonctions ne dépendent ni de l, ni de l', de sorte que nous avons simplement

$$Dx = f_0 \frac{dx}{d\tau} + h_0 \frac{dx}{d\lambda}.$$

Nous aurons donc

$$Dz_1 = f_0 \frac{dz_1}{d\tau} + h_0 \frac{dz_1}{d\lambda}, \qquad DZ_1 = f_0 \frac{dZ_1}{d\tau} + h_0 \frac{dZ_1}{d\lambda}.$$

Nous aurons d'ailleurs évidemment

$$(19) \qquad Z_1 = Dz_1, \qquad DZ_1 = D^2 z_1.$$

Multiplions donc les deux équations (17) par f_0 et h_0 et ajoutons-les entre elles et à l'équation (18), il viendra

$$(20) \qquad \frac{1}{2}(z_1 DZ_1 - Z_1 Dz_1) + \frac{1}{2}(\Phi z_1^2 + Z_1^2) = G_2 + f_0 \xi_2 + h_0 \zeta_2.$$

Mais l'équation (8) devient ici

$$-d(G_0 + G_2 + \ldots) = f_0\, d(\xi_0 + \xi_2 + \ldots) + (h_0 + h_2 + \ldots)\, d(\zeta_2 + \zeta_4 + \ldots),$$

d'où, en égalant les termes d'ordre 2,

$$-dG_2 = f_0\, d\xi_2 + h_0\, d\zeta_2$$

et

$$-\frac{dG_2}{d\gamma} = f_0 \frac{d\xi_2}{d\gamma} + h_0 \frac{d\zeta_2}{d\gamma}.$$

Comme G_2, ξ_2 et η_2 sont homogènes d'ordre 2 par rapport à γ, on en déduit

$$-G_2 = f_0 \xi_2 + h_0 \zeta_2,$$

de sorte que le second membre de l'équation (20) est nul. Le premier membre se réduit si l'on tient compte des relations (19), de sorte que l'équation (20) ainsi réduite s'écrit

$$\frac{1}{2}(z_1 D^2 z_1 + \Phi z_1^2) = 0$$

ou

$$(21) \qquad D^2 z_1 + \Phi z_1 = 0.$$

On retombe ainsi sur l'équation linéaire du second ordre bien connue, à laquelle satisfait la fonction z_1 et que l'on peut obtenir par des procédés beaucoup plus simples.

12. Les fonctions z_1 et Z_1 étant ainsi connues, on calculera ζ_2 par la seconde équation (17). On calculera ξ_2 par un procédé tout à fait pareil à celui du paragraphe 6, qui conduira à l'équation

$$\xi_2 + \frac{dh_0}{df_0}\zeta_2 = 0.$$

Nous trouvons ensuite

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left(x_2\frac{dX_0}{d\tau} - X_2\frac{dx_0}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}\left(Z_1\frac{dz_1}{d\tau} - z_1\frac{dZ_1}{d\tau}\right) + \xi_2, \\ &\sum\left(x_2\frac{dX_0}{df_0} - X_2\frac{dx_0}{df_0}\right) = \frac{1}{2}\left(Z_1\frac{dz_1}{df_0} - z_1\frac{dZ_1}{df_0}\right). \end{aligned}\right.$$

La première de ces équations n'est autre chose que la première des équations (17) et la seconde s'obtiendrait de la même manière.

Les seconds membres des équations (22) sont entièrement connus. On a d'ailleurs

$$X_2 = Dx_2 - n'y_2, \qquad Y_2 = Dy_2 + n'x_2.$$

Les équations (22) sont donc de même forme que les équations (12) et elles s'intégreraient de la même manière

13. Nous trouvons ensuite

$$\Sigma(x_4\,dX_0 - X_4\,dx_0) + \Sigma x_2\,dX_2 + z_3\,dZ_1 + z_1\,dZ_3 - \xi_4\,d\tau - \zeta_4\,d\lambda = dS'_4,$$

d'où

$$\frac{dS'_4}{d\gamma} = z_3\frac{dZ_1}{d\gamma} + z_1\frac{dZ_3}{d\gamma} + \sum x_2\frac{dX_2}{d\gamma}.$$

Comme Z_1, X_2, Z_3 et S'_4 sont homogènes en γ d'ordre 1, 2, 3 et 4 j'en déduis

$$(23)\qquad 4S'_4 = z_3Z_1 + 3z_1Z_3 + 2x_2X_2.$$

Nous pourrions former l'équation différentielle à laquelle z_3 satisfait par le procédé du paragraphe 11. Mais il est plus simple de la former directement, ainsi que je l'ai déjà fait remarquer; elle est de la forme

$$D^2z_3 + \Phi_1z_3 = P - 2h_2D\frac{dz_1}{d\lambda},$$

où P est une fonction connue, périodique et impaire de τ et de λ.

On en déduira z_3, après avoir choisi la constante h_2 de telle sorte que la valeur de z_3 soit périodique.

Nous pouvons donc regarder désormais z_3 et Z_3 comme connus; il en sera de même :

1° De S'_4 en vertu de la relation (23);

2° De ζ_4 en vertu de la relation

$$\sum x_2 \frac{dX_2}{d\lambda} + z_3 \frac{dZ_1}{d\lambda} + z_1 \frac{dZ_3}{d\lambda} - \zeta_4 = \frac{dS'_4}{d\lambda};$$

3° De ξ_4 par le procédé du paragraphe 6.

Nous pouvons alors poser

$$\sum\left(x_4 \frac{dX_0}{d\tau} - X_4 \frac{dx_0}{d\tau}\right) = P,$$

$$\sum\left(x_4 \frac{dX_0}{df_0} - X_4 \frac{dx_0}{df_0}\right) = Q,$$

P et Q étant des fonctions connues.

Si nous posons

$$X'_4 = Dx_4 - n'y_4, \qquad Y'_4 = Dy_4 + n'x_4,$$

nous aurons

$$X_4 = X'_4 + h_2 \frac{dx_2}{d\lambda}, \qquad Y_4 = Y'_4 + h_2 \frac{dy_2}{d\lambda},$$

et nous trouvons les équations

$$(24) \qquad \begin{cases} \sum\left(x_4 \dfrac{dX_0}{d\tau} - X'_4 \dfrac{dx_0}{d\tau}\right) = P + h_2 \sum \dfrac{dx_0}{d\tau}\,\dfrac{dx_2}{d\lambda}, \\ \sum\left(x_4 \dfrac{dX_0}{df_0} - X'_4 \dfrac{dx_0}{df_0}\right) = Q - h_2 \sum \dfrac{dx_0}{df_0}\,\dfrac{dx_2}{d\lambda}, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont connus et qui s'intègrent comme les équations (12) et (22).

En résumé, je m'en tiens aux procédés usuels en ce qui concerne la latitude, tandis que pour les termes de la longitude qui dépendent de l'inclinaison, j'ai recours à un procédé analogue à celui des paragraphes 4 à 9.

14. Supposons maintenant $e = e' = \gamma = 0$ et développons suivant les puissances de α. Nous emploierons toujours nos mêmes notations pour nos développements, bien qu'ils procèdent suivant les puissances d'une autre variable; nous définirons S'_i de la même manière; enfin nous pourrons toujours supposer

$$L = 0, \qquad F = T - V_1.$$

Nous aurons $z = Z = 0$, parce que γ est nul.

Supposons que l'on ait calculé x_0, y_0, x_1, y_1, ... jusqu'à x_{i-1}, y_{i-1} et qu'on se propose de calculer x_i et y_i. J'observe que nos x_i ne dépendent que d'un seul argument, à savoir de τ. On a donc

$$X_i = f_0 \frac{dx_i}{d\tau} - n' y_i = D x_i - n' y_i, \qquad Y_i = D y_i + n' x_i.$$

Nous pourrons écrire, en considérant les termes d'ordre i,

$$\Sigma(x_i\, dX_0 - X_i\, dx_0) + \Sigma u\, dv - \xi_i\, d\tau = dS'_i,$$

les u et les v étant des fonctions antérieurement calculées. On en déduit

$$(25)\qquad \begin{cases} \sum\left(x_i \dfrac{dX_0}{d\tau} - X_i \dfrac{dx_0}{d\tau}\right) + \sum u \dfrac{dv}{d\tau} - \xi_i = \dfrac{dS'_i}{d\tau}, \\ \sum\left(x_i \dfrac{dX_0}{df_0} - X_i \dfrac{dx_0}{df_0}\right) + \sum u \dfrac{dv}{df_0} \qquad = \dfrac{dS'_i}{df_0}. \end{cases}$$

Nous remarquerons ensuite que, e' étant nul, on doit avoir

$$F = T - V_1 = G$$

et, par conséquent, $F_i = G_i$; or on trouve

$$F_i = \sum\left(x_i \frac{dF_0}{dx_0} + X_i \frac{dF_0}{dX_0}\right) + P,$$

P dépendant des fonctions antérieurement calculées. Si l'on observe que

$$(26)\qquad \sum\left(x_i \frac{dF_0}{dx_0} + X_i \frac{dF_0}{dX_0}\right) = -f_0 \sum\left(x_i \frac{dX_0}{d\tau} - X_i \frac{dx_0}{d\tau}\right),$$

on conclura

$$(27)\qquad P + f_0 \sum u \frac{dv}{d\tau} = f_0 \frac{dS'_i}{d\tau} + G_i + f_0 \xi_i.$$

Le premier membre est connu, c'est une série trigonométrique en τ; comme S'_i est périodique, la dérivée $\frac{dS'_i}{d\tau}$ ne devra pas contenir de terme constant. Nous prendrons donc $G_i + f_0 \xi_i$ égal au terme constant du premier membre. De cette façon, $G_i + f_0 \xi_i$ est déterminé en fonction de f_0 et $\frac{dS'_i}{d\tau}$ en fonction de f_0 et τ. Donc S'_i est déterminé à une constante près qui ne dépend que de f_0.

L'équation (8) me donne ensuite

$$-dG_i = f_0\, d\xi_i,$$

ce qui peut s'écrire

$$(28)\qquad \xi_i = \frac{d(G_i + f_0 \xi_i)}{df_0}.$$

Comme $G_i + f_0 \xi_i$ est déterminé, cette équation détermine ξ_i et par conséquent G_i.

J'ai dit plus haut que S'_i était déterminé *à une constante près*, mais comme S'_i doit être une fonction impaire de τ, on voit tout de suite que cette constante doit être nulle. Alors S'_i, ξ_i, u et v étant connues, les équations (25) sont de même forme que les équations (12) et (22) et s'intègrent de la même manière.

15. Nous allons enfin supposer $e=\alpha=\gamma=0$ et développer suivant les puissances de e'; nous n'avons plus alors

$$L=0, \qquad F=T-V,$$

mais nous aurons toujours

$$z=Z=0.$$

Nous supposerons que l'on connaisse déjà x_0, y_0, x_1, y_1 jusqu'à x_{i-1}, y_{i-1} et que l'on se propose de calculer x_i et y_i, à l'aide de la relation

$$\Sigma(x_i\,dX_0 - X_i\,dx_0) + \Sigma u\,dv - \xi_i\,d\tau - H_i\,dl' = dS'_i,$$

où H_i représente l'ensemble des termes d'ordre i de $\dfrac{T-V_1-G}{n'}$.

Nous retrouverons d'abord les équations (25) avec cette différence que l'indice i s'applique aux termes d'ordre i par rapport à e' et non plus aux termes d'ordre i par rapport à α.

Il vient ensuite

$$\sum u\frac{dv}{dl'} - H_i = \frac{dS'_i}{dl'}. \tag{29}$$

Or

$$H_i = \frac{1}{n'}\left[\sum\left(\frac{dF_0}{dx_0}x_i + \frac{dF_0}{dX_0}X_i\right) + P - G_i\right],$$

P ne dépendant que des fonctions déjà calculées.

Si nous muliplions la première équation (25) par f_0 et (29) par n', puis que nous ajoutions en tenant compte de la relation (26), nous aurons

$$\sum u\left(f_0\frac{dv}{d\tau} - n'\frac{dv}{dl'}\right) + P = G_i + f_0\xi_i + f_0\frac{dS'_i}{d\tau} - n'\frac{dS'_i}{dl'}.$$

Le premier membre est connu et cette équation se traitera comme l'équation (27). Nous égalerons $G_i + f_0\xi_i$ au terme constant du premier membre; alors

$$f_0\frac{dS'}{d\tau} - n'\frac{dS'}{dl'}$$

sera déterminé; donc S'_i sera déterminé à une constante près; comme S'_i doit être une fonction impaire, cette constante doit être nulle et S'_i peut être regardé comme entièrement connu.

On déterminera ensuite ξ_i par l'équation (29) qui reste vraie et l'on n'aura plus qu'à intégrer les équations (25), toujours par le même procédé.

16. Chaque terme de nos développements contient, en facteur, un monome de la forme

$$\mu = \alpha^{k_1} e^{k_2} \gamma^{k_3} e'^{k_4}.$$

C'est ce monome μ que M. Brown appelle la *caractéristique* du terme.

Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que des termes dont la caractéristique est une puissance d'une seule des quantités α, e, γ, e'; mais il est aisé de concevoir que la combinaison de ces divers procédés permette de traiter le cas général.

Nous désignerons dans la suite par

$$x_\mu, \quad y_\mu, \quad X_\mu, \quad Y_\mu, \quad S_\mu, \quad S'_\mu, \quad \xi_\mu, \quad \eta_\mu, \quad \zeta_\mu, \quad G_\mu, \quad H_\mu$$

l'ensemble des termes des développements de

$$x, \quad y, \quad X, \quad Y, \quad S, \quad S' = S - x_0 X - y_0 Y,$$

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad G, \quad \frac{T - V_1 - G}{n'},$$

dont la caractéristique est μ.

Nous désignerons par

$$z_\mu, \quad Z_\mu, \quad g_\mu, \quad h_\mu$$

l'ensemble des termes des développements de

$$z, \quad Z, \quad c_2, \quad c_3$$

qui admettent respectivement pour caractéristiques

$$\frac{\mu}{\gamma}, \quad \frac{\mu}{\gamma}, \quad \frac{\mu}{e}, \quad \frac{\mu}{\gamma^{\varkappa}}.$$

De cette façon nous désignons par le même indice, non pas toujours les termes qui ont la même caractéristique, mais ceux que l'on détermine dans la même approximation.

Je suppose alors que l'on ait calculé les termes dont l'indice est un monome diviseur de μ, et que l'on se propose de calculer les termes dont l'indice est égal à μ.

17. Trois cas sont à distinguer; le premier est celui où μ ne contient en facteur ni γ, ni e.

On trouve alors

$$\Sigma(x_\mu\, dX_0 - X_\mu\, dx_0) + \Sigma u\, dv - \xi_\mu\, d\tau - H_\mu\, dl' = dS'_\mu,$$

$$H_\mu = \frac{1}{n'}\left[\sum\left(\frac{dF_0}{dx_0}x_\mu + \frac{dF_0}{dX_0}X_\mu\right) + P - G_\mu\right],$$

où u, v et P ne dépendent que des fonctions antérieurement déterminées.

Ces équations se traiteront absolument comme celles du paragraphe 15; il n'y a absolument rien à changer à l'analyse de ce paragraphe.

18. Le second cas est celui où μ contient en facteur γ, mais pas e. On a alors

$$\begin{aligned}\Sigma(x_\mu\, dX_0 - X_\mu\, dx_0) &+ (z_\mu\, dZ_1 + z_1\, dZ_\mu)\\ &+ \Sigma u\, dv - \xi_\mu\, d\tau - \zeta_\mu\, d\lambda - H_\mu\, dl' = dS'_\mu.\end{aligned}$$

Dans cette relation u et v sont des fonctions préalablement déterminées; z_1 et Z_1 sont des termes de caractéristique γ (comme au paragraphe 11).

Nous pourrions déterminer z_μ et Z_μ par le procédé du paragraphe 11, mais il est préférable d'avoir recours aux procédés ordinaires qui conduisent comme celui du paragraphe 11 à une équation de la forme

$$D^2 z_\mu + \Phi z_\mu = P - 2h_\mu D\frac{dz_1}{d\lambda},$$

où P est une fonction connue, périodique et impaire.

Cette équation est de même forme que celle que nous avons rencontrée au paragraphe 13; elle permet de déterminer z_μ; on détermine en même temps h_μ, en choisissant cette constante de façon à faire disparaître les termes non périodiques dans z_μ.

Nous avons ensuite

$$z_\mu\frac{dZ_1}{d\gamma} + z_1\frac{dZ_\mu}{d\gamma} + \sum u\frac{dv}{d\gamma} = \frac{dS'_\mu}{d\gamma}.$$

Mais S'_μ, Z_1, Z_μ, v sont des fonctions homogènes en γ dont l'ordre est respectivement k, 1, $k-1$, k'; cet ordre est d'ailleurs connu. On en déduit

$$kS'_\mu = z_\mu Z_1 + (k-1)z_1 Z_\mu + \Sigma k' uv,$$

ce qui détermine S'_μ.

On a ensuite

$$z_\mu \frac{dz_1}{d\lambda} + z_1 \frac{dZ_\mu}{d\lambda} + \sum u \frac{dv}{d\lambda} - \frac{dS'_\mu}{d\lambda} = \zeta_\mu,$$

$$z_\mu \frac{dZ_1}{dl'} + z_1 \frac{dZ_\mu}{dl'} + \sum u \frac{dv}{dl'} - \frac{dS'_\mu}{dl'} = H_\mu,$$

ce qui détermine ζ_μ et H_μ.

L'équation (8) nous donne ensuite

$$-dG_\mu = f_0\, d\xi_\mu + h_0\, d\zeta_\mu + \Sigma\varepsilon\, d\varepsilon',$$

où ε et ε' représentent divers termes déjà connus du développement de c_3 et de A_3.

On tire de là par le procédé du paragraphe 6

$$-\frac{dG_\mu}{d\gamma} = f_0 \frac{d\xi_\mu}{d\gamma} + h_0 \frac{d\zeta_\mu}{d\gamma} + \sum \varepsilon \frac{d\varepsilon'}{d\gamma},$$

d'où

$$-G_\mu = f_0 \xi_\mu + h_0 \zeta_\mu + \sum \frac{k'}{k} \varepsilon\varepsilon',$$

où k et k' sont des degrés d'homogénéité de G_μ (le même que pour ξ_μ et ζ_μ), et de e' par rapport à γ.

On tire de là

$$\xi_\mu + \frac{dh_0}{df_0} \zeta_\mu + \sum \left(\frac{k'}{k} \varepsilon' \frac{d\varepsilon}{df_0} + \frac{k'-k}{k} \varepsilon \frac{d\varepsilon'}{df_0} \right) = 0,$$

ce qui détermine ξ_μ.

Nous arrivons enfin aux équations

$$\sum \left(x_\mu \frac{dX_0}{d\tau} - X_\mu \frac{dx_0}{d\tau} \right) = \frac{dS'_\mu}{d\tau} - z_\mu \frac{dZ_1}{d\tau} - z_1 \frac{dZ_\mu}{d\tau} - \sum u \frac{dv}{d\tau} + \xi_\mu = Q,$$

dont le second membre est une fonction connue, et à une équation analogue

$$\sum \left(x_\mu \frac{dX_0}{df_0} - X_\mu \frac{dx_0}{df_0} \right) = R,$$

dont le second membre est également une fonction connue.

Observons maintenant que si l'on pose

$$X'_\mu = D x_\mu - n' y_\mu, \qquad Y'_\mu = D y_\mu + n' x_\mu,$$

on aura

$$X_\mu - X'_\mu = \sum h_\varepsilon \frac{dx_\omega}{d\lambda},$$

où ε et ω sont deux caractéristiques telles que $\varepsilon\omega = \mu\gamma^2$ [1]. Comme tous les x_ω où ω est un diviseur de μ sont connus, ainsi que tous les h_ε où ε est un diviseur de μ, et que h_μ lui-même, la différence $X_\mu - X'_\mu$, est connue et il en est de même de la différence $Y_\mu - Y'_\mu$.

Nos équations peuvent donc s'écrire

$$\sum \left(x_\mu \frac{dX_0}{d\tau} - X'_\mu \frac{dx_0}{d\tau} \right) = Q',$$

$$\sum \left(x_\mu \frac{dX_0}{df_0} - X'_\mu \frac{dx_0}{df_0} \right) = R',$$

où Q' et R' sont deux fonctions connues. Elles sont tout à fait de même forme que les équations (24) et s'intègrent de la même manière.

19. Le troisième cas est celui où μ contient e en facteur. On a alors

$$\begin{aligned} &\Sigma(x_\mu\, dX_0 - X_\mu\, dx_0) + (z_\mu\, dZ_1 + z_1\, dZ_\mu) \\ &\quad + \Sigma\, u\, dv - \xi_\mu\, d\tau - \eta_\mu\, dl - \zeta_\mu\, d\lambda - H_\mu\, dl' = dS_\mu, \end{aligned}$$

u et v étant des fonctions antérieurement déterminées.

On en tire

$$z_1 \frac{dZ_\mu}{de} + \sum u \frac{dv}{de} = \frac{dS'_\mu}{de},$$

d'où

$$z_1 Z_\mu + \sum \frac{k'}{k} uv = S'_\mu, \tag{30}$$

où k et k' désignent les degrés d'homogénéité de S'_μ (le même que celui de Z_μ) et de v par rapport à e.

La fonction $S'_\mu - z_1 Z_\mu$ est alors déterminée.

Nous trouvons ensuite

$$z_\mu \frac{dZ_1}{d\gamma} + \bar{z}_1 \frac{dZ_\mu}{d\gamma} + \sum u \frac{dv}{d\gamma} = \frac{dS'_\mu}{d\gamma},$$

d'où l'on tire

$$z_\mu Z_1 + (p-1) z_1 Z_\mu + \Sigma p' uv = p S'_\mu, \tag{31}$$

---

[1] Les cas $\varepsilon = \gamma^2$, $\omega = \mu$ et $\varepsilon = \mu\gamma^2$, $\omega = 1$ sont naturellement exclus; le premier parce que le terme $h_0 \dfrac{dx_\mu}{d\lambda}$ figure dans Dx_μ et que pour $\varepsilon = \gamma^2$, h_ε n'est autre chose que h_0; le second parce que pour $\omega = 1$, x_ω se réduit à x_0 et que $\dfrac{dx_0}{d\lambda}$ est nul.

où 1, $p-1$, p' et p sont les degrés d'homogénéité de Z_1, Z_μ et S'_μ par rapport à γ. La comparaison de ces deux équations nous donne

$$z_\mu Z_1 - z_1 Z_\mu = \sum \frac{pk' - p'k}{k} uv. \tag{32}$$

Cette équation (32) va nous permettre de déterminer z_μ et Z_μ. Nous aurons, en effet,

$$Z_\mu = D z_\mu + \sum g_\varepsilon \frac{dz_\omega}{dl} + \sum h_\varepsilon \frac{dz_\omega}{d\lambda}.$$

Dans les termes $g_\varepsilon \frac{dz_\omega}{dl}$, ε et ω représentent deux caractéristiques telles que

$$\varepsilon\omega = e\mu.$$

D'ailleurs ε doit être divisible par e, sans quoi g_ω serait nul, puisque le développement de c_2 ne doit pas contenir de puissance négative de e. De plus, ω doit être divisible par e, sans quoi $\frac{dz_\omega}{dl}$ serait nul.

Donc ε et ω sont des diviseurs de μ. Le cas $\varepsilon = e$, $\omega = \mu$ doit être exclu parce que g_ε se réduit alors à g_0 et que le terme $g_0 \frac{dz_\mu}{dl}$ est compris dans $D z_\mu$. Le cas $\varepsilon = \mu$, $\omega = e$ doit être exclu également parce que pour $\omega = e$, z_ω est nul.

La conclusion est que les indices ε et ω étant des diviseurs de μ plus petits que μ, tous les termes en question sont connus.

Dans les termes $h_\varepsilon \frac{dz_\omega}{d\lambda}$, ε et ω représentent deux caractéristiques telles que

$$\varepsilon\omega = \gamma^2\mu.$$

L'indice ε doit être divisible par γ^2, sans quoi h_ε serait nul, puisque le développement de c_3 ne doit pas contenir de puissance négative de γ. De plus, ω doit être divisible par γ^2, sans quoi $\frac{dz_\omega}{d\lambda}$ serait nul.

Donc ε et ω sont des diviseurs de μ. Le cas $\varepsilon = \gamma^2$, $\omega = \mu$ est exclu parce que h_ε se réduit alors à h_0 et que le terme $h_0 \frac{dz_\mu}{d\lambda}$ est compris dans $D z_\mu$. Le cas $\varepsilon = \mu$, $\omega = \gamma^2$ n'est pas exclu. Alors z_ω se réduit à z_1, z_1 ayant même signification qu'au paragraphe 11.

La conclusion est que tous ces termes sont connus à l'exception du terme $h_\mu \frac{dz_1}{d\lambda}$.

L'équation (32) prend donc la forme

$$z_\mu Z_1 - z_1 D z_\mu = P + h_\mu z_1 \frac{dz_1}{d\lambda}, \tag{33}$$

où P est une fonction entièrement connue.

La fonction z_μ dépend donc ici d'une équation linéaire du premier ordre et non plus du second. Cette même équation (33) déterminerait en même temps la constante h_μ par la condition que z_μ soit périodique.

On trouve ensuite

$$z_\mu \frac{dZ_1}{d\lambda} + z_1 \frac{dZ_\mu}{d\lambda} + \sum u \frac{dv}{d\lambda} - \zeta_\mu = \frac{dS'_\mu}{d\lambda},$$

$$z_1 \frac{dZ_\mu}{dl} + \sum u \frac{dv}{dl} - \eta_\mu = \frac{dS'_\mu}{dl},$$

$$z_1 \frac{dZ_\mu}{dl'} + \sum u \frac{dv}{dl'} - H_\mu = \frac{dS'_\mu}{dl'},$$

car x_0 et X_0 ne dépendent pas de λ, l et l'; ni Z_1 de l et l'.

En tenant compte de (30), ces équations deviennent

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} z_\mu \frac{dZ_1}{d\lambda} - Z_\mu \frac{dz_1}{d\lambda} &= \zeta_\mu - \sum\left(\frac{k-k'}{k} u \frac{dv}{d\lambda} - \frac{k'}{k} v \frac{du}{d\lambda}\right), \\ \sum\left(\frac{k-k'}{k} u \frac{dv}{dl} - \frac{k'}{k} v \frac{du}{dl}\right) &= \eta_\mu, \\ \sum\left(\frac{k-k'}{k} u \frac{dv}{dl'} - \frac{k'}{k} v \frac{du}{dl'}\right) &= H_\mu, \end{aligned}\right.$$

ce qui détermine ζ_μ, η_μ et H_μ.

On détermine ensuite ξ_μ par le procédé du paragraphe 6. L'équation (8) nous donne

$$-dG_\mu = f_0\, d\xi_\mu + g_0\, d\eta_\mu + h_0\, d\zeta_\mu + \Sigma g_\varepsilon\, d\eta_\omega + \Sigma h_\varepsilon\, d\zeta_\omega.$$

Dans les termes $g_\varepsilon\, d\eta_\omega$, on doit avoir

$$\varepsilon\omega = e\mu.$$

D'ailleurs ε doit être divisible par e et il en est de même de ω, puisque A_2 est divisible par e^2. Donc ε et ω divisent μ. On ne peut avoir $\omega = \mu$, d'où $\varepsilon = e$, $g_\varepsilon = g_0$, puisque le terme $g_0\, d\eta_\mu$ figure déjà explicitement. On ne peut avoir $\varepsilon = \mu$, d'où $\omega = e$, car alors η_ω serait nul, puisque A_2 est divisible par e_2.

Tous ces termes sont donc connus.

Dans les termes $k_\varepsilon\, d\zeta_\omega$, on doit avoir

$$\varepsilon\omega = \gamma^2\mu.$$

L'indice ε doit être divisible par γ^2, et il en est de même de ω, puisque A_3 est divisible par γ^2. Donc ε et ω divisent μ. On ne peut avoir $\omega = \mu$, d'où $\varepsilon = \gamma^2$, $h_\varepsilon = h_0$, puisque le terme $h_0\, d\zeta_\mu$ figure déjà explicitement. On pourrait avoir $\varepsilon = \mu$, $\omega = \gamma^2$, mais h_μ a déjà été calculé. Tous ces termes sont donc connus.

On tire de là

$$-\frac{dG_\mu}{de}=f_0\frac{d\xi_\mu}{de}+g_0\frac{d\eta_\mu}{de}+h_0\frac{d\zeta_\mu}{de}+\sum g_\varepsilon\frac{d\eta_\omega}{de}+\sum h_\varepsilon\frac{d\zeta_\omega}{de}$$

ou

$$-G_\mu=f_0\xi_\mu+g_0\eta_\mu+h_0\zeta_\mu+\sum\frac{k'}{k}(g_\varepsilon\eta_\omega+h_\varepsilon\zeta_\omega),$$

k et k' étant le degré d'homogénéité de G_μ et de η_ω (ou de ζ_ω) en e.

On en tire enfin

$$\begin{aligned}o=\xi_\mu+\frac{dg_0}{df_0}\eta_\mu+\frac{dh_0}{df_0}\zeta_\mu+\sum\frac{k'}{k}\left(\frac{dg_\varepsilon}{df_0}\eta_\omega+\frac{dh_\varepsilon}{df_0}\zeta_\omega\right)\\+\sum\frac{k'-k}{k}\left(g_\varepsilon\frac{d\eta_\omega}{df_0}+h_\varepsilon\frac{d\zeta_\omega}{df_0}\right).\end{aligned}$$

Cette équation détermine ξ_μ, car η_μ et ζ_μ sont connus.

On trouverait ensuite, toujours par le même procédé, des équations de la forme

$$\sum\left(x_\mu\frac{dX_0}{d\tau}-X_\mu\frac{dx_0}{d\tau}\right)=Q,$$

$$\sum\left(x_\mu\frac{dX_0}{df_0}-X_\mu\frac{dx_0}{df_0}\right)=R,$$

où Q et R sont connus, et l'on en déduirait, toujours de la même manière, d'autres équations de la forme

$$\sum\left(x_\mu\frac{dX_0}{d\tau}-X'_\mu\frac{dx_0}{d\tau}\right)=Q_1+g_\mu\sum\frac{dx_1}{dl}\frac{dx_0}{d\tau},$$

$$\sum\left(x_\mu\frac{dX_0}{df_0}-X'_\mu\frac{dx_0}{df_0}\right)=R_1+g_\mu\sum\frac{dx_1}{dl}\frac{dx_0}{df_0}.$$

Ces équations, intégrées toujours par le même procédé, nous donneraient x_μ et y_μ et elles nous feraient en même temps connaître g_μ que l'on déterminerait par la condition que x_μ et y_μ soient périodiques.

20. Malheureusement, l'équation du premier ordre (33) n'est pas aussi facile à manier qu'on pourrait le croire. Elle donne en effet en appelant P_1 le second membre

$$z_\mu=z_1\int\frac{P_1\,d\tau}{z_1^2}$$

et la présence de z_1^2 au dénominateur est gênante parce que z_1 est susceptible de s'annuler.

On pourrait songer à réserver l'équation (33) comme un moyen de vérification et à revenir pour le calcul de z_μ à l'équation ordinairement employée. Voici comment cette équation pourrait se déduire de (33) :

Différentions cette équation (33), il viendra (en nous souvenant que $Z_1 = D z_1$)

$$z_\mu D^2 z_1 - z_1 D^2 z_\mu = DP + h_\mu D\left(z_1 \frac{dz_1}{d\lambda}\right).$$

Or

$$D^2 z_1 + \Phi z_1 = 0;$$

il reste donc

$$-z_1(D^2 z_\mu + \Phi z_\mu) = DP + 2 h_\mu z_1 D \frac{dz_1}{d\lambda} + h_\mu \left(\frac{dz_1}{d\lambda} D z_1 - z_1 D \frac{dz_1}{d\lambda}\right).$$

On doit se souvenir que

$$\frac{dz_1}{d\lambda} D z_1 - z_1 D \frac{dz_1}{d\lambda} = \text{const.}$$

Alors on doit pouvoir choisir la constante h_μ de telle façon que

$$DP + h_\mu \left(\frac{dz_1}{d\lambda} D z_1 - z_1 D \frac{dz_1}{d\lambda}\right)$$

soit divisible par z_1. La possibilité d'un pareil choix est un moyen de vérification. Il doit arriver ensuite que h_μ étant ainsi choisi, on trouve pour z_μ une fonction périodique. C'est une seconde vérification.

Mais il y a mieux à faire. Rapprochons l'équation (32) de la première équation (34). Ces deux équations peuvent s'écrire

$$z_\mu Z_1 - Z_\mu z_1 = Q, \qquad z_\mu \frac{dZ_1}{d\lambda} - Z_\mu \frac{dz_1}{d\lambda} = R + \zeta_\mu,$$

Q et R étant connus.

On tirera z_μ et Z_μ *sans intégration* de ces deux équations du premier degré. Comme, ainsi que nous venons de le voir, le déterminant de ces équations

$$Z_1 \frac{dz_1}{d\lambda} - z_1 \frac{dZ_1}{d\lambda}$$

se réduit à une constante, on pourra achever cette opération sans avoir à faire une division dans laquelle on pourrait craindre que le diviseur ne devînt nul.

On devra pouvoir choisir h_μ de telle façon que les valeurs de z_μ et Z_μ ainsi trouvées satisfassent à la condition trouvée plus haut

$$Z_\mu = D z_\mu + \sum g_\varepsilon \frac{dz_\omega}{dl} + \sum h_\varepsilon \frac{dz_\omega}{d\lambda}.$$

C'est une vérification et cela détermine en même temps la constante h_μ.

On remarquera que la constante ζ_μ est restée arbitraire. Cette nouvelle constante arbitraire remplace la constante d'intégration de l'équation (33).

Nous n'avons rien à changer d'ailleurs au calcul de η_μ, H_μ, g_μ, x_μ et y_μ.

21. Dans les calculs qui précèdent, nous avons souvent différentié par rapport à la constante que nous appelons f_0. Si l'on veut pouvoir comparer avec les formules usuelles, il faut poser

$$f_0 = \frac{n'}{m},$$

d'où

$$f_0 \frac{dx}{df_0} = -m \frac{dx}{dm}.$$

Mais pour que la comparaison soit possible avec les formules données par Delaunay et d'autres auteurs, il faut faire plusieurs remarques.

En premier lieu, ce que j'appelle ici m, c'est ce que Delaunay appelle $\frac{m}{1-m}$. M. Brown appelle cette même quantité m; mais il y a d'autres différences; j'ai supposé mes coordonnées, x par exemple, exprimées en fonction de n', α, f_0 et, en outre, de e, γ, τ, l, λ, e', l'. La quantité α, d'où dépendent les termes parallactiques, était égale à

$$\alpha = \frac{a_0}{a'},$$

a_0 étant une longueur constante et a' le demi-grand axe de l'orbite solaire. M. Brown exprime tout en fonction de a, α' et m et, en outre, de e, γ, τ, l, λ, e', l'. La longueur a est le coefficient du terme principal du développement de $x_0 + \sqrt{-1}\, y_0$; c'est une fonction de n' et de m, c'est-à-dire de n' et de f_0. Quant à α' (qu'il appelle α) c'est le rapport

$$\alpha' = \frac{a}{a'}.$$

La longueur a reste constante dans le mouvement de la Lune, mais ce n'est pas une constante absolue au point de vue qui nous occupe, puisqu'elle dépend de f_0. A la fin du calcul, toutefois, et après toutes les différentiations, on pourra supposer $a = a_0$, d'où $\alpha = \alpha'$.

A cause de l'homogénéité spéciale des équations, les coordonnées x, y, z sont de la forme suivante :

$$x = a\varphi(\alpha', m),$$

et l'on aura ailleurs

$$a = n'^{-\frac{2}{3}}\psi(m);$$

la fonction $\varphi(\alpha', m)$ dépendant, en outre, de e, γ, τ, l, λ, e', l'.

On trouve alors

$$f_0 \frac{dx}{df_0} = -m\varphi\frac{da}{dm} - ma\frac{d\varphi}{d\alpha'}\frac{d\alpha'}{dm} - ma\frac{d\varphi}{dm}.$$

Or

$$\alpha' = \alpha\frac{a}{a_0}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{d\alpha'}{\alpha'} = \frac{da}{a} = \frac{dm}{a}\frac{da}{dm},$$

d'où

$$f_0 \frac{dx}{df_0} = -m\varphi\frac{da}{dm} - m\alpha'\frac{d\varphi}{d\alpha'}\frac{da}{dm} - ma\frac{d\varphi}{dm}.$$

Cette formule rend les comparaisons possibles.

Observons maintenant que l'analyse précédente, exigeant des différentiations par rapport à m, conviendrait plus particulièrement aux cas où l'on veut obtenir le développement *littéral* des coordonnées, comme le faisait Delaunay. Ce n'est pas qu'elle ne puisse être appliquée à la recherche d'un développement numérique analogue à celui de Brown. Il faudrait alors calculer d'avance, non seulement x_0 et y_0, mais un certain nombre de leurs dérivées successives par rapport à m, ce qui d'ailleurs se ferait sans difficulté.

22. Cherchons ce que devient, dans les nouvelles approximations, le paradoxe signalé au paragraphe **10**. Voyons donc dans quelle mesure nous avons eu affaire aux équations différentielles qu'il s'agissait d'intégrer. Nous verrons que nous nous sommes servi de ces équations aux paragraphes **11**, **14**, **15**, **17**; que nous n'y avons fait nullement appel aux paragraphes **12**, **19** et **20**; et qu'enfin aux paragraphes **13** et **18** nous nous sommes servi de ces équations pour le calcul de z, mais que nous n'en avons plus eu besoin pour le calcul de x et de y.

En résumé, après avoir déterminé, à l'aide des équations qu'il s'agit d'intégrer, les termes de x et de y qui sont indépendants de e et de γ, et ceux de z qui sont indépendants de e, nous pourrons, sans faire intervenir de nouveau ces équations, calculer les termes de x et de y qui dépendent de γ ou de e, ceux de z qui dépendent de e.

Le résultat conserve son apparence paradoxale, mais le paradoxe s'explique comme au paragraphe **10**.