NOWY RACHUNEK
FUNKCYI GRANICZNYCH
I JEGO ZASTOSOWANIE.

Baraniecki

NOWY RACHUNEK

FUNKCYI GRANICZNYCH

I JEGO ZASTOSOWANIE.

PRZEZ

WŁADYSŁAWA WITKOWSKIEGO,

Inżeniera Zarządu Kommunikacyi w Królestwie Polskiem.

z I tablicą figur.

WARSZAWA.

NAKŁADEM AUTORA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI H. NATANSONA.

Krakowskie Przedmieście, N. 17.

1865.

Wolno drukować, pod warunkiem złożenia w Komitecie Cenzury, po wydrukowaniu, prawem przepisanéj liczby egzemplarzy.

w Warszawie, dnia 9 (21) Marca 1865 roku.

p. o. Cenzora, **F. Bartels.**

---

w Drukarni Gazety Polskiéj.

SPIS PRZEDMIOTÓW.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

TEORYA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW.

CZĘŚĆ DRUGA.

RACHUNEK FUNKCYI GRANICZNYCH.

CZĘŚĆ TRZECIA.

TEORYA ROZWIJALNOŚCI FUNKCYI.

Strona.

PRZEDMOWA.

I.

Oddając na widok publiczny nowe badania w nauce rachunku wyższego, uważam za potrzebne zastanowić się tutaj nad stanem obecnym téj części matematyki, która ma związek z niniejszą pracą.

Wszystkie badania, tak matematyczne, jak fizyko-matematyczne, w ostatnim swym wypadku prowadzą do równań różniczkowych, które należy zcałkować. Całkowanie równań różniczkowych, w ogóle jest niepodobném do wykonania i może być uważaném jako wyjątkowe; a zatém, w ogóle równania tego rodzaju rodzą nowe funkcye, za których orzeczenie powinny być uważane; jak np. funkcya wykładnicza e^x i t. p.

Gdy więc te równania nie mogą być rozwiązane; musimy szukać innych dróg, aby poznać własności funkcyi przez też równania wyrażonych z samych tych równań bez ich rozwiązania. Tu zaraz nastręczają się dwie drogi: albo rozwijamy równanie na szereg nieskończonéj liczby wyrazów zapomocą znanego wzoru Taylora, lub téż dochodzimy własności funkcyi z samego równania.

Rozwijanie funkcyi na szereg nie ma znaczenia jak tylko o tyle, o ile ten szereg zostaje zbieżnym. Aby więc to postępowanie miało rzeczywiste znaczenie, a nie ułudne; musimy znać najprzód pewne własności téj funkcyi dowodzące nam, że ona jest zdolną rozwinąć się na szereg zbieżny, a następnie oznaczyć granice, między któremi szereg może wyrażać funkcyą.

Wszystkie prace obecnie skierowane są do poszukiwania własności funkcyi pozwalających rozwijać je na szereg, a najważniejsze i ostatnim wyrazem nauki są znakomite prace Cauchego.

Opowiemy wkrótce wypadki przez niego otrzymane, które stanowią nową teoryę funkcyi, opartą wyłącznie na ilościach urojonych.

Znakomity ten geometra badając co się dzieje z funkcyą, gdy rozwinięcie na szereg Taylora wpada w błąd; odkrył pewne własności funkcyi, które dają się sprowadzić do czterech głównych, a mianowicie: funkcye mogą być *skończone*, *ciągłe*, *monogeniczne* i *monodromiczne*. Wszystkie te własności mogą istnieć oddzielnie lub razem w pewnéj części funkcyi, lub w jéj całéj rozciągłości. Gdy one istnieją razem połączone w pewnéj części lub w całéj jéj rozciągłości, funkcyą nazywa *synektyczną* w téj części lub w całéj jéj rozciągłości. Po odkryciu tych prawd, Cauchy dowiódł: że gdy funkcya w części swéj posiada te wszystkie własności, może być w téj części rozwiniętą na szereg zawsze zbieżny.

Tym sposobem oznaczone zostały warunki uzdalniające funkcyą do przedstawienia części przynajmniéj jéj biegu przez szereg; lecz te własności nieodłączone od funkcyi nie dają nam granic rozwinięcia i chcąc je znaleźć potrzeba się udawać do innego prawa Cauchego, do prawa *modułów*, które wyraża się tak: iż funkcya daje się rozwinąć na szereg zbieżny uszykowany według potęg rosnących zmiennéj, dopóki ta zmienna zostaje stale w *kole zbieżności*, zakreśloném promieniem równym najmniejszemu modułowi.

Z tego prawa następny wynika sposób znalezienia granic w jakich funkcya może być przedstawioną przez szereg: w daną funkcyą za zmienną kładzie się jéj wartość urojona, rozbiera się na dwie części; równając do zera osobno część rzeczywistą, osobno urojoną i rugując z nich *argument* ilości urojonéj; otrzymamy ztąd równanie jedno, dające nam wartości modułu, z którego potrzeba otrzymać wartość najmniejszą dodatną; a ta da nam granice zbieżności szeregu i zarazem granice, w któréj funkcya wyraża się przez szereg.

Otrzymanie to granic jest jeszcze możliwe, chociaż połączone z wielkiemi trudnościami, gdyż wymaga rugowania i rozwiązania równań; dla równań i funkcyi skończonych, to jest wyrażonych przez zawiązki między ilościami skończonemi. Lecz gdy w skład równań i funkcyi wchodzą ilości nieskończenie małe, czyli raczéj gdy one wyrażone są przez równania różniczkowe; potrzebaby dla znalezienia granic, po podstawieniu za zmienną wartości urojonej, rozwiązać czyli scałkować toż równanie, co właśnie nie jest możliwém i wtedy to ta teorya sprowadza się tylko do szukania, czy funkcya posiada własności wyżéj wskazane.

W ogóle więc prace te nie zdają się zadość czynić rozwiązaniu zupełnemu zadania, co do rozwinięcia funkcyi na szereg; mimo to są one bardzo ważne na drodze poszukiwania własności funkcyi z samych wyrażeń jéj różniczkowych i tu to właśnie leży znakomita zasługa Cauchego.

Taki jest obecny stan matematyki w ostatnich jéj krańcach, i ta to jéj część jest przedmiotem pracy naszéj. Wyszliśmy z punktu na którym stanął Cauchy, lecz udaliśmy się zupełnie inną drogą.

Jakoż celem niniejszéj pracy jest, aby z danéj funkcyi lub równania wyrażonych w ilościach skończonych lub nieskończenie małych, bez rozwijania funkcyi lub równania na szereg, oznaczyć nową funkcyą, którąby zawierała w sobie wszystkie własności konieczne dla jéj rozwinięcia na szereg; czyli inaczéj, któraby dawała: z jednéj strony granice zbieżności szeregu, z drugiéj granice rozwijalności funkcyi na odpowiedni jéj szereg. Nie idzie więc już tutaj o same własności funkcyi, lecz o wydzielenie z niéj tych własności, które ją usposobiają do rozwijania się na szereg.

Tak postawione zadanie potrzebowało nowych dróg do jego rozwiązania, które udało nam się odkryć.

II.

Pracę tę podzieliliśmy na trzy ściśle z sobą połączone a jednak oddzielne części.

Ponieważ rozwijanie funkcyi na szereg jest równaniem, zachodzącém między funkcyą i szeregiem czyli między funkcyą o skończonéj liczbie związków i inną funkcyą o nieskończonéj ich liczbie; przeto aby takie równanie mogło być możliwem, potrzeba było poznać najprzód własności szeregów, które mają przedstawiać funkcyą. Otóż przedewszystkiem więc badania nasze były skierowane do poznania własności szeregów, a mianowicie praw ich zbieżności, to jest poznania warunków, pod jakiemi szeregi mogą przedstawiać funkcyą. Jest to i powinno być podstawą poszukiwań w tym przedmiocie. Dlatego też w części pierwszéj zamknęliśmy badania nasze nad *Teoryą zbieżności szeregów.*

Sześć rozdziałów składających tę część przedstawiają w nowém świetle tę teoryę, dotąd nadzwyczaj niedostatecznie rozwiniętą, co właśnie było przyczyną małych rezultatów, otrzymanych w tym kierunku. Cała teorya składa się dotąd z kilku twierdzeń podanych przez Cauchego, Gaussa, Kummera, Bertranda i Pauckera, nie zupełnie rozwiniętych lub też odnoszących się do szczególnych rodzai funkcyi.

W rozdziale pierwszym dowiedliśmy nowego prawa zbieżności szeregów, w formie podobnéj do prawa maximów i minimów, lub szukania wartości nieoznaczonych; wyrażonego za pomocą pochodnych stosunku wyrazów poprzedniego do następnego, branych co do odwrotności ilości n, oznaczającéj miejsce wyrazów.

Prawo to nowe nadzwyczaj proste składa się z dwóch części i daje się tak wysłowić:

1) Szeregi są w ogóle zbieżne lub rozbieżne, według tego jak stosunek wyrazów poprzedniego do następnego staje się większy lub mniejszy od jedności w granicy, gdy $n = \infty$

2) Gdy ten stosunek staje się w granicy jednością, to rozwijając go na szereg według odwrotności z n; szeregi będą zbieżne, gdy pierwszy ze współczynników rozwinięcia, który nie staje się jednością lub zero, według tego jak szeregi są o znakach jednakowych lub naprzemian idących, jest większy od jedności lub zera. W przeciwnym razie są zawsze rozbieżne.

Prawo to jest podstawą całéj téj części i zarazem podstawą wszystkich naszych badań. Pokazuje ono, że zbieżność szeregów nie tylko zależy od granicy stosunku wyrazów, lecz od wszystkich jego pochodnych aż do nieskończoności.

W rozdziale drugim podaliśmy uogólnienie tego prawa i rozmaite własności z niego wynikające. Tu to podaliśmy kilka innych form tegoż prawa, dowiedliśmy, że znane warunki zbieżności jak Cauchego i Kummera są tylko pierwszemi dwoma warunkami, składającemi nasze prawo, a które ciągnie się, jak już wiemy, do nieskończoności; tak że po za warunkami oznaczonymi przez te dwa warunki, szeregi są jeszcze zbieżne; a nakoniec wykazaliśmy, iż istnieją dla szeregów o znakach jednakowych *szeregi graniczne*, stojące na granicy między rozbieżnemi i zbieżnemi i że między temi szeregami granicznemi istnieją *szeregi graniczne główne*, które dopełniają wszystkich warunków do nieskończoności, i że między innemi, takim szeregiem granicznym dla funkcyi algebraicznych jest szereg znany rozbieżny:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

szeregi zaś o znakach naprzemian idących mają jeden tylko szereg graniczny, a ten jest:

$$a-a+a-a+a-\ldots$$

którego wyrazy stają się też same. Wszystkie te szeregi graniczne są rozbieżne.

Dotąd jak wiadomo domyślano się, iż szeregi graniczne są urojone; otoż one są rzeczywiste i rozmaite, według postaci funkcyi z któréj pochodzą.

Prawo ogólne, dowiedzione w rozdziale pierwszym, musi modyfikować się stosownie do rodzaju funkcyi; w rozdziale przeto 3, 4 i 5 przedstawiamy zastosowanie prawa ogólnego.

W rozdziale trzecim stosujemy je do szeregów algebraicznych i logarytmowych i wyprowadzamy szczególne formy warunków nadzwyczaj proste i symetryczne. Tu to dowiedliśmy i rozwinęliśmy między innemi warunki podane przez Gaussa dla funkcyi, których stosunek jest funkcyą algebraiczną ułomkową.

Gauss dowiódł, że, gdy stosunek wyrazów dąży do jedności, aby szeregi były zbieżne, potrzeba aby współczynnik pierwszego wyrazu licznika był większy od pierwszego wyrazu mianownika; a gdy one są równe, potrzeba aby współczynnik drugiego wyrazu, zmniejszony współczynnikiem pierwszego był większy od współczynnika drugiego wyrazu mianownika; gdy zaś jest od niego mniejszy lub równy, szeregi są rozbieżne. Tymczasem w granicy gdy ta różnica jest równą współczynnikowi drugiego wyrazu mianownika, szeregi mogą być jeszcze zbieżne; a błąd dowodu Gaussa stanowi właśnie przejście przez szereg graniczny. Prawo zaś właściwe jest, że gdy stosunek wyrazów zbiega do jedności, szeregi są zbieżne, gdy pierwsza różnica współczynników dwóch wyrazów licznika, która nie staje się równa współczynnikowi takiegoż samego wyrazu mianownika jest od niego większa; w przeciwnym razie rozbieżne. Warunki więc ciągną się do nieskończoności, a gdy wszystkie są wypełnione, otrzymujemy szereg graniczny główny rozbieżny.

W tym rozdziale trzecim dowiedliśmy również, że warunki podane przez Bertranda i Pauckera, są szczególnemi warunkami służącemi dla szeregów logarytmowych i to w zawiłéj formie przedstawionemi.

W rozdziale czwartym stosujemy prawo zbieżności do szeregów wykładniczych, peryodycznych i urojonych. Prawo to dla szeregów wykładniczych przybiera szczególną formę niezależną od innych współczynników, jak tylko od stopnia i współczynnika pierwszego wyrazu funkcyi stanowiących wykładnik i podstawę funkcyi wykładniczéj. Godném jest uwagi, że funkcye te nie mają szeregów granicznych, lecz odrazu przechodzą ze zbieżnych w rozbieżne.

Szeregi peryodyczne sprowadzają się do tychże samych praw, jak wszystkie powyższe, a zbieżność szeregów urojonych do zbieżności rzeczywistych; a zatem do warunków niezależnych od modułów wyrażeń urojonych. Wykazaliśmy tam nadto, co zresztą znane było, że warunki szeregu modułów nie są dostateczne do oznaczenia zbieżności szeregów urojonych, i gdy szereg modułów przestaje być zbieżnym, szeregi mogą jeszcze być zbieżne i tylko w niedostatku praw ogólnych zbieżności, musiały one dotąd zastępować prawo ogólne.

W rozdziale piątym stosujemy to prawo do oznaczenia warunków zbieżności iloczynu nieskończonéj liczby czynników, a w rozdziale szóstym i ostatnim rozwiązujemy zadanie oznaczenia liczby wyrazów jaką trzeba obliczyć na dane przybliżenie i podajemy nową formę reszty szeregu.

Przyczynę główną, iż tak mało rozwinięta została ta część rachunku, upatrujemy szczególniej w tém, iż dotąd warunki zbieżności geometrowie starali się przedstawiać nie w postaci stosunku wyrazu poprzedniego do następnego, lecz odwrotnie następnego do poprzedniego; a jak to dowiedliśmy w rozdziale drugim, warunki te nie dają się przez tę formę odwrotną stosunku przedstawić lub bardzo zawile i nie symetrycznie.

Część ta, lubo nie jest nową zupełnie, przedstawia jednak nowe rozwinięcie; jak to można już osądzić z powyższego pobieżnego przedstawienia rzeczy i porównania z dotąd znanemi prawami.

III.

We wspomnionym już wyżéj rozdziale drugim części pierwszéj, jako prosty wniosek podaliśmy prawo, iż granice zbieżności szeregu powstałego z rozwinięcia funkcyi według potęg rosnących saméj zmiennéj lub jéj przyrostu, oznaczają się przez wartość stosunku pochodnéj rzędu $n-1$ do pochodnéj rzędu n wziętego n razy dla wartości $n=\infty$, to jest dla szeregu Taylora pod postacią:

$$h = \pm \left(\frac{nf^{n-1}(x)}{f^{n}(x)}\right)_\infty$$

dla szeregu Maclaurina:

$$x = \pm \left(\frac{nf^{n-1}(0)}{f^{n}(0)}\right)_\infty$$

Tento prosty wniosek jest podstawą *nowego rachunku funkcyi granicznych*, rozwiniętego w części drugiéj.

Stosunek pochodnych po sobie idących wzięty n razy dla $n=\infty$, ukazuje się pod postacią nieoznaczoną; lecz w każdym razie ma wartość skończoną, a że pochodne są funkcyami ilości zmiennych i n; przeto dla $n=\infty$ wartości ich muszą być w ogóle pewnemi funkcyami ilości zmiennych. Te to nowego rodzaju funkcye nazwaliśmy *funkcyami granicznemi*, jako stojącemi na granicy wszystkich funkcyi pochodnych i całkowych i oznaczamy je przez nowy znak (początkową literę wyrazu granica) G, tak że funkcya graniczna i wszystkie jéj prawa zawarte są w równaniu:

$$\mathrm{G}\, f(x)\,(x) = \left(\frac{nf^{n-1}(x)}{f^n(x)}\right)_\infty \tag{1}$$

to równanie jest zarazem definicyą funkcyi granicznéj.

Sposób znany dla oznaczenia wartości wyrażeń ukazujących się pod postacią nieoznaczoną, nie daje się stosować do wyprowadzenia funkcyi granicznéj z wyrażenia (1); albowiem biorąc pochodne co do n osobno z licznika, osobno z mianownika drugiéj jego strony, otrzymujemy podobne wyrażenia, które znowu są nieoznaczone; potrzeba więc było szukać nowych dróg do oznaczenia téj funkcyi.

Jakoż drogi te znaleźliśmy w samym wzorze (1), i cała część druga, obejmująca cztery rozdziały, podaje prawa otrzymania granicznych danych funkcyi o jednéj zmiennéj, równań i funkcyi o wielu zmiennych, nakoniec równań różniczkowych.

Ostatecznem prawem tego rachunku jest: że *każda funkcya lub równanie może mieć jedną lub kilka granicznych funkcyi i wszystkie są albo nieskończone, lub też są stosunkiem pewnéj funkcyi w skład funkcyi danéj lub równania wchodzącéj do jéj pochodnéj pierwszéj.*

Z tego prawa wynikają ważne wnioski:

Że graniczna nie może być ani skończoną, ani zero, dopóki zmienna ma wartości dowolne.

Że wszystkie pochodne i całki z funkcyi danéj mają za graniczną też samą funkcyą, ztąd to funkcye te nazwaliśmy funkcyami granicznemi, jako stojącemi na granicy funkcyi całkowych i pochodnych.

Że graniczne funkcyi algebraiczno-całkowitych, wykładniczych, wstaw i dostaw łuku wielokrotnego i t. p. są nieskończone.

Że graniczne funkcyi algebraicznych innych jak całkowite, logarytmowych i t. p. są stosunkiem pewnéj funkcyi w skład tych funkcyi wchodzących do jéj pochodnéj; i t. p.

Takie są ważniejsze prawdy dowiedzione w téj drugiéj części, które pozwalają z łatwością wyciągnąć z danéj funkcyi lub równania graniczną żądaną.

Na tę część, jako zupełnie nową, zwracamy szczególną uwagę czytelnika, a mianowicie na prostotę praw rachunku nowego, a przechodzimy do części ostatniéj, to jest do zastosowania tego rachunku do rozwijania funkcyi na szeregi.

IV.

Wiemy, że podstawą *teoryi rozwijania funkcyi na szeregi* jest szereg Taylora, czyli raczéj wzór według którego dopełnia się rozwijanie; wiemy także, że w wielu przypadkach wzór ten nie służy co nazywamy, iż *wpada w błąd;* widocznie więc brak mu ogólności, jaką mieć winna prawda, tak rozległe mająca zastosowanie; dlatego przedewszystkiem wypadało z kolei rzeczy podać nowy wzór rozwijania funkcyi na szeregi zbieżne, co rozwiniętém zostało w rozdziale pierwszym Części trzeciéj.

Wzór nasz ma formę podobną do wzoru Taylora, lecz jest zupełnie ogólny; różni się tém, iż składa się z dwóch części: *z szeregu i równania zbieżności.* Szereg ma postać ogólną, przez wprowadzenie doń ilości dowolnéj; tak, że od nas zależy zrobić go w każdym przypadku zbieżnym, nadając stosowne wartości téj ilości dowolnéj.

Równanie znowu zbieżności daje nam granice w jakich ta dowolna powinna być wziętą, aby szereg był zbieżnym; zatem zbieżność szeregu leży w równaniu i dlatego nazwaliśmy go równaniem zbieżności.

Równanie to ma formę:

$$h = a \pm \mathrm{G}f(x)\,(x)_{x+a}$$

i wyraża się jak widzimy przez funkcyą graniczną wziętą co do x z funkcyi danéj, dla wartości $x+a$; jestto równanie między dwiema ilościami danemi x i h i ilością dowolną a.

Widoczna z saméj postaci tego równania, że granice dla h mogą się zmieniać stosownie jak a się zmienia, gdy zakładamy x stałe; zatem widocznie zbieżność możemy zmieniać, rozszerzać i ścieśniać granice dowolnie, nadając dla a stosowne wartości.

Ztąd rozległość w jakiéj funkcya daje się rozwinąć na szereg może się zmieniać, i tę rozległość zowiemy *rozciągiem zbieżności.* Wyraża się on wprost przez samą graniczną w postaci:

$$\mathrm{g} = 2\,\mathrm{G}f(x)\,(x)_{x+a}$$

i równa się podwójnéj wartości tejże granicznéj.

Ponieważ rozciąg zbieżności zmienia się, więc można szukać jego maximum; to jest szukać warunków największéj rozległości granic i zadanie powiększenia granic zbieżności daje się w zupełności, jak widzimy, rozwiązać.

Wypada z tego, że każdy wzór rozwinięcia winien koniecznie składać się z dwóch części i równanie zbieżności powinno zastąpić dodawanie reszty szeregu, która nie ma żadnego znaczenia.

Po podaniu nowego wzoru z porządku rzeczy należało do każdego wzoru dodać odpowiednią i jemu właściwą formę równania zbieżności i ocenić jego ważność; dla tego w rozdziale drugim z wzoru ogólnego wyprowadziliśmy kilka szczególnych, wprowadzając pewne warunki; i tu pokazało się, że znane wzory Taylora, Maclaurina, Bernoullego i t. p., są tylko szczególnemi przypadkami naszego wzoru; a przypadki gdzie te wzory wpadają wbłąd, są to przypadki nie objęte równaniem zbieżności, są więc niewłaściwém tylko ich zastosowaniem po za granicami one warunkującemi.

W tymże rozdziale dowiedliśmy, iż wzór na rozwijanie funkcyi według potęg z wielokrotności zmiennéj nie daje się zastosować jak tylko do funkcyi, których graniczna jest nieskończoną, to jest: do algebraiczno-całkowitych, co objęte jest znanym wzorem Abela; do funkcyi wykładniczych, wstaw i dostaw łuków wielokrotnych i innych; a dla wszystkich innych nie ma żadnego znaczenia i nie powinien być uważanym za ogólny; nakoniec dowiedliśmy, że szeregi Stirlinga i Boolego, mają za równanie zbieżności zero, czyli, że nie wyrażają żadnéj części funkcyi i nie mają żadnego znaczenia, a zatem powinny być wyrzucone z rachunku.

W rozdziale trzecim podaliśmy nowy wzór podobny podanemu w rozdziale pierwszym, lecz dający rozwinięcie funkcyi na szereg według potęg odjemnych saméj zmiennej lub jéj przyrostu; dowiedliśmy, że granice tego nowego wzoru obejmują nieskończoność, tak jak granice pierwszego obejmują zero; a zatem, że granice te zupełnie są inne; tak że wzór ten służy właśnie w tych przypadkach, gdy tamten ustaje i oba mogą tylko przedstawiać funkcyą, w całéj obszerności; dla tego można go nazwać *dopełniającym;* wskazaliśmy warunki, kiedy funkcya w części swéj rozciągłości może zarówno dobrze rozwinąć się na oba szeregi i w téj części jest zdolną, rozwinąć się na summę obu szeregów; i nakoniec dowiedliśmy, że szeregi podane przez Cauchego i Laurenta niczém inném nie są, jak tylko szeregiem Taylora, przedstawionym w zawiłéj formie.

Rozdział czwarty poświęciliśmy zastosowaniu teoryi do przykładów, gdzie pokazaliśmy, jak granice zbieżności zmieniają się ze zmianą ilości dowolnéj; dowiedliśmy, że rozwinięcia na szereg funkcyi: x dot x i $\frac{x}{e^{x-1}}$ według potęg rosnących z x niemają żadnego znaczenia, a liczne z nich powyprowadzane wzory, we wszystkich działach rachunku wyższego, potrzebują przejrzenia, sprawdzenia i wyrzucenia niepotrzebnych z nauki. Tu więc nasza teorya przedstawiła się jako wyborna kontrolla, aby naprożno nie gmatwać nauki wzorami bez znaczenia lub téż błędnemi.

W rozdziale piątym rozwiązaliśmy dwa zadania powiększenia granic rozwijalności funkcyi i powiększenia zbieżności szeregów, dotąd nie znanych z przyczyny, że szeregi Taylora i Maclaurina nie zawierają ilości, którą możnaby było rozporządzać i że nie znaliśmy związku, to jest równania zbieżności łączącego ilości, wchodzące do rozwinięcia funkcyi, które tylko może dać rozwiązanie tych zadań.

Tu daléj wytłumaczonym został paradoks znany, że szeregi rozbieżne przez pewne przekształcenia stają się zbieżnemi i odwrotnie; że zatem szereg rozbieżny można uczynić zbieżnym, czyli co na jedno wychodzi, że szeregi rozbieżne mogą wyrażać funkcyą. Paradoks ten nic innego nie jest tylko wnioskiem prostym z téj własności funkcyi, iż można rozszerzyć granice zbieżności szeregu zmieniając wartość ilości dowolnéj, co w pewnym względzie rzeczywiście zmienia szeregi rozbieżne na zbieżne; a raczéj daje nowe szeregi, gdy tamte ustają; lecz to właśnie dowodzi, że szeregi rozbieżne, nie mają żadnego znaczenia i mogą być zastąpione innemi szeregami, gdy ilości dowolnéj nadamy inne wartości, rozszerzające granice zbieżności szeregu.

W rozdziale szóstym zastosowaliśmy naszą teoryą do równań i funkcyi o wielu zmiennych. Podaliśmy równanie zbieżności dla szeregów Lagrange'a, Laplace'a i Burmanna. Dowiedliśmy sposobem prostym i uogólniliśmy twierdzenie Laplace'a, że potęgi całkowite wstawy i dostawy łuków wielokrotnych funkcyi jakiejkolwiek rozwijają się na szeregi zbieżne, w tychże samych granicach, co i sama funkcya, i dopełniliśmy go drugą częścią co do potęg odjemnych, ułomkowych i logarytmów danéj funkcyi.

W rozdziale siódmym między przykładami podaliśmy granice rozwinięcia równania ruchu planet według potęg rosnących mimośrodu, i dowiedliśmy, że szeregi, które wyrażają pierwiastki ruchu planet, uszykowane według potęg rosnących mimośrodu są zbieżne dla wszystkich wartości tegoż mimośrodu mniejszych od $^1/_2$; gdy Laplace i Cauchy podali te granice na 0, 66195 czyli $^7/_{10}$, to jest, że pierwiastki ruchu planet dają się obliczać przez szeregi, uszykowane według potęg rosnących mimośrodu dla planet, których drogi są niezbyt spłaszczone i zbliżają się do koła.

Nakoniec w rozdziale ósmym i ostatnim porównaliśmy naszą teoryą, z teoryą funkcyi Cauchego, a z twierdzeń tamże podanych wynika, że nasze funkcye graniczne obejmują w sobie wszystkie własności usposobiające funkcyą daną do rozwinięcia na szereg zbieżny w danych granicach; czyli inaczéj że one zawierają w sobie wszystkie własności, a zatem są rzeczywiście temi własnościami funkcyi z niéj wydobytemi, tak, że w twierdzeniach Cauchego zamiast funkcyi synektycznej, dość jest podstawić jéj funkcyą graniczną, a będziemy mieli twierdzenia do jakich prowadzi nasza teorya.

Nasza więc teorya zupełnie jest zgodną z teoryą Cauchego, jednakże wychodzi z nowego początku, nie wikła się w ilościach urojonych i prowadzi drogą prostą do celu wytkniętego przez Cauchego.

Dla zmniejszenia objętości dzieła nie obciążaliśmy go rzeczami dobrze znanemi, przyjmując je jako wiadome i odsyłając czytelnika do dzieł, które cytujemy we właściwych miejscach.

V.

Przedstawiwszy pobieżnie odkryte przez nas nowe prawa rachunku, stosunek i związek ich z ostatnimi postepami nauki, niech nam wolno będzie przedstawić jeszcze stosunek ich do całości nauki.

Wiemy, że zasady rachunku infinitesimalnego (to jest różniczkowego i całkowego) opierają się na ilościach nieskończenie małych (Leibnitz, Newton), które nikną przy ilościach skończonych lub nieskończenie małych rzędów niższych; lub też na uważaniu tych ilości jako stających się zero (Euler); lub nakoniec uważając je za granice wartości, gdy zmienna dąży do zera (Maclaurin, D'Alembert), który to ostatni sposób uważania rzeczy przyjęty został dziś powszechnie.

Lagrange (*) dowiódł, że wszystkie te pojęcia są niezgodne z duchem nauk matematycznych; jakoż ilości nieskończenie małe są obce nauce i zaczerpnięte ze świata materyalnego; tak, że na nich oparta nauka rachunku przedstawia się jako nauka odrębna bez związku z elementarnemi podstawami nauki. Sprowadzenie tych ilości do zera tém bardziéj utrudnia pojęcie, sprowadzając ich stosunki do postaci nieoznaczonych. Ostatnie zaś pojęcie, jako granic, gdy zmienna dąży do zera, jest nie ścisłe; albowiem zero nie jest nigdy granicą wartości ilości; prawdziwą granicą może być tylko nieskończoność, i tak też granice były pojmowane przez starożytnych geometrów; u nich granice są to ilości, których przejść nie można, do których jednak zbliżyć się można tak jak chcemy; *np:* assymptota jako styczna w nieskończoności do linii krzywéj i t. p.

Zasadzając się na tém, Lagrange bierze za podstawę rachunków wyższych rozwinięcie funkcyi na szereg, dowo-

---

(*) Lagrange. Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806 nouv. edit. lèçon 1.

dzi jaką powinna być postać tego rozwinięcia i wprost współczynniki potęg zmiennéj w rozwinięciu zowie pochodnemi funkcyi danéj; tym sposobem bez żadnych hypotez co do powstawania pochodnych, opierając się na zasadach algebry, sprowadza te rachunki do początku czysto algebraicznego i zgodnie z duchem nauk matematycznych.

Teorya funkcyi analitycznych i rachunek funkcyi w których rozwinął powyższe zasady, są znakomite jego dzieła, uderzające nas swą jasnością, prostotą i symetryą wzorów, któremito przymiotami odznaczają się wszystkie pisma tego wielkiego geometry.

Gdy jednak w tém uważaniu rzeczy nastręczały się nowe trudności, a mianowicie, że samo rozwinięcie nie miało znaczenia jak tylko o tyle, o ile szereg jest zbieżny; zatem znowu podstawa obrana przez Lagrange'a okazała się nie ścisłą; uczeni jednak, zamiast starać się przełamać te trudności, poszli inną drogą, przyjmując za podstawę rachunków teoryę granic.

Brakowało więc rzeczywiście dziełom Lagrange'a stałości podstawy i dlatego stoją one dotychczas na uboczu, jakby odrębne, niezgodne z duchem nauki tegoczesnéj, lecz zawsze jaśnieją swą wielką i uderzającą myślą i są źródłem niewyczerpaném nauki i będą zawsze dziełami klassycznemi.

Teorya nasza i tu rozwięzuje trudności, a nadając stałość podstawie obranej przez Lagrange'a, pozwala sprowadzić rachunki do początku czysto algebraicznego.

Jakoż teorya funkcyi analitycznych i rachunek funkcyi są doskonałym wykładem rachunków różniczkowego i intergralnego, sprowadzonych do prostych zasad algebry i przedstawiających się jako dwa odwrotne działania: brania pochodnych z funkcyi pierwotnych i otrzymania pierwotnych z pochodnych danych; odpowiednie mnożeniu i dzieleniu, podnoszeniu do potęg i wyciąganiu pierwiastków. Część pierwszą naszéj pracy można uważać za wstęp do powyższych dzieł; albowiem podaje ona granice każdego szeregu wyrażone w postaci stosunku dwóch wyrazów, zbiegającego się do jedności w granicy dla $n = \infty$; to jest postaci

$$\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)_\infty = \pm 1$$

i ta to granica ściśle odpowiada pojęciu granic starożytnych geometrów.

Dodawszy te granice, dowód wzoru rozwijania na szeregi podany przez Lagrange'a staje się doskonałym i ścisłym, gdy po założeniu, że zmienna x zostaje dowolną, jak to uczynił Lagrange, dodamy do tego rozwinięcia granice powyższe zastosowane do formy rozwinięcia, to jest jak to otrzymaliśmy w części pierwszéj i zgodnie z przyjętém przez niego znakowaniem funkcyi pochodnych

$$h = \pm \left(\frac{ny^{n-1}}{y^n}\right).$$

gdzie druga strona jest funkcyą x, a że x jest dowolne, daje więc granice zawsze możliwe do otrzymania i pokazuje, że wzór ten nie wpada w błąd nigdy, albowiem tu x zastępuje naszą ilość dowolną a.

Tak więc można i potrzebaby w wykładach rachunku wyższego iść drogą wskazaną przez Lagrange'a i połączyć rachunki te z całością nauki, a tym sposobem pochodne będą to pewne funkcye otrzymane według pewnego prawa z funkcyi danéj, a na odwrót z pochodnych otrzymane funkcye pierwotne nic innego nie będą, jak tylko całki, i dwa rachunki różniczkowy i całkowy, sprowadzą się do początku czysto algebraicznego i złożą dwie części czyli dwa rachunki odwrotne sobie: *rachunek funkcyi pochodnych* i *rachunek funkcyi pierwotnych (całkowych.)*

Nasze funkcye graniczne jako łączące w sobie własności pochodnych i całek, składają część trzecią i rzeczywiście stanowią trzeci *rachunek funkcyi granicznych*, dla tego nazwaliśmy go nowym rachunkiem.

W stosunku więc do całości nauki, rachunek funkcyi granicznych powinien być uważany jako trzeci rachunek dopełniający dwa rachunki funkcyi pochodnych (różniczkowy) i pierwotnych (całkowy) i składający z niemi doskonałą całość.

Warszawa, dnia 1 Marca 1865 r.

W. Witkowski.

DEFINICYE, WYRAZY I ZNAKI NOWE, LUB STALE UŻYTE W TÉM DZIELE.

1. *Iloczyn czynników* rożniących się wartością jednéj z ilości w skład czynników wchodzących, która przybiera wartości kolejne liczb porządkowych od 1 do n oznaczamy stale przez znak ! kładąc go przy ostatnim czynniku, np.

$$(a+b)\ (2\,a+b)\ (3a+b) \ldots (na+b) = (an+b)\,!$$

(Część 1, rozd. 1, § 9 i t. d.)

2. *Iloczyn czynników*, w których jedna ilość przyjmuje wartości porządkowe od m do n oznaczamy przez znak ? kładąc go między dwoma skrajnemi czynnikami, np.

$$(am+b) \ldots (an+b) = (am+b)?\,(an+b)$$

(Część 1, roz. 1, § 9 i t. d.)

3. *Dwumiany* $x+a$, w których jeden wyraz jest ilością tążsamą a drugi zmienia się, oznaczamy dla skrócenia przez wyraz zmieniający się objęty w nawiasy [ ] np.

$$(x+a)\ (x+b) \ldots = [a]\,[b] \ldots$$

(Część 3, roz. 5, § 185 i t. d.)

4. *Znak podstawienia pojedynczego.* Gdy w wyrażeniu ilość zmienna przybiera wartość szczególną, wyrażenie to zmienia także wartość i otrzymujemy ją podstawiając za tę ilość jéj wartość. Lecz gdy chcemy tylko wskazać to podstawienie, zamykamy dane wyrażenie lub ilość w nawias; kładąc

u spodu nawiasu jéj wartość i ten znak zowie się znakiem podstawienia pojedynczego, np.

$$(F(x))_a = F(a), \quad (S_n)_\infty = S_\infty$$

$$\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)_a = F'(a)$$

(Część 1, roz. 1, § 4 i t. d. Część 2, roz. 1, § 82 i t. d.)

5. *Znak podstawienia podwójnego.* Gdy w wyrażeniu ilość zmienna przyjmuje dwie wartości szczególne, i gdy chcemy wyrazić różnice jego wartości, używamy znaku /, pisząc te wartości u dołu i u góry np.

$$\Big|_a^b F(x) = F(b) - F(a) \,.$$

(Część 3, rozd. 2, § 143, i t. d.)

6. *Ilość urojoną* stale wyrażamy przez ilość rzeczywistą mnożoną przez znak urojoności *i*, który wyraża pierwiastek z -1 np. $i = \sqrt{-1}$, podobnie $a + bi = a + b\sqrt{-1}$. Ilość urojoną wyrażamy jeszcze przez

$$a + bi = r\,(\mathrm{dos}\, t + i \,\mathrm{wst}\, t)$$

wtedy r zowie się ***modułem*** a t ***argumentem*** ilości urojonéj.

(Część 1, rozd. 4, § 62 i t. d).

7. *Wartością początkową rozwinięcia* funkcyi na szereg zowiemy wartość początkową zmienéj, od której zaczyna się rozwinięcie, czyli dla której bierzemy wszystkie pochodne.

(Część 3, roz. 1, § 124 i t. d.)

8. *Ilością porządkującą* zowiemy ilość, według potęg któréj następuje rozwinięcie; może nią być sama zmienna, lub jéj przyrost, albo taż zmienna lub przyrost zmniejszony lub powiększony wartością początkową.

(Część 3, roz. 1, § 124 i t. d.)

9. *Stosunkiem szeregu* zowiemy stale stosunek któregokolwiek jego wyrazu do tuż następującego, jest on funkcyą liczby oznaczającéj miejsce wyrazów i oznacza się przez

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}\,.$$

(Część 1, roz. 1, § 8 i t. d.)

10. *Szereg graniczny* jest to szereg stojący na granicy między zbieżnemi i rozbieżnemi szeregami; a jego stosunek wyraża się przez warunki zbieżności.

(Część 1, roz. 2, § 21, i t. d.)

11. *Szereg graniczny główny* jest to szereg graniczny między wszystkiemi szeregami granicznemi, a stsóunek jego dopełnia wszystkich do nieskończoności ciągnących się warunków zbieżności.

(Część 1, roz. 2, § 21 i t. d.)

12. *Szeregiem głównym* zowiemy szereg uszykowany według potęg rosnących ilości porządkującéj.

(Część 3, roz. 1, § 124.)

13. *Szeregiem dopełniającym* zowiemy szereg uszykowany według potęg ubywających ilości porządkującéj.

(Część 3, roz. 3, § 151.)

14. *Szeregiem normalnym* zowiemy szereg, którego każdy wyraz następny daje w wartości szeregu wyrażonéj w liczbach dziesiętnych, nową cyfrę dziesiętną i takim jest postęp ilorazowy, którego stosunek jest 10.

(Część 1, roz. 5, § 79 i t. d.)

15. *Granice zbieżności szeregu* są to wartości szczególne ilości porządkującéj, między któremi szereg zostaje zbieżnym.

(Część 3, roz 1, § 132.)

16. *Granice rozwijalności funkcyi* są to szczególne wartości ilości porządkującej, które niekiedy zowiemy *wartościami krytycznemi*, między któremi mogą zmieniać się granice zbieżności szeregu, na który rozwija się funkcya.

(Część 3, roz. 1, § 132).

17. *Funkcyą graniczną* nazywamy wartość oznaczoną stosunku dwóch pochodnych tuż po sobie idących, wziętego n razy, dla $n = \infty$ i oznaczamy ją przez G np.

$$\mathrm{G}\, y(x) = \mathrm{G}\, F(x)(x) = \left(\frac{ny^{n-1}}{y^n}\right)_\infty .$$

(Część 2, roz. 1, § 82 i t. d.)

18. *Równaniem zbieżności* zowiemy równanie, dające granice zbieżności szeregu; otrzymujemy je równając ilość porządkującą z funkcyą graniczną danéj funkcyi, wziętą dla wartości początkowéj rozwinięcia.

(Część 3, roz. 1, § 125 i t. d.)

19. *Rozciągiem zbieżności* zowiemy rozciągłość, w jakiéj funkcya dana daje się przedstawić przez szereg, czyli różnicę wartości granicznych ilości porządkującéj; oznaczamy go przez g i jest on równy podwójnéj funkcyi granicznéj, to jest:

$$\mathrm{g} = 2\,\mathrm{G}\, F(x)(x) .$$

(Część 3, roz. 1, § 126 i t. d.)

20. *Rachunkiem funkcyi granicznej* zowiemy rachunek, za pomocą którego z danéj funkcyi otrzymujemy jéj funkcyą graniczną.

(Część 2, roz. 1, § 82 i t. d.)

NOWY RACHUNEK

FUNKCYI GRANICZNYCH

I JEGO ZASTOSOWANIE.

WSTĘP.

1. Nazywamy w ogóle funkcyą jednéj lub wielu ilości, każde wyrażenie, w którém te ilości wchodzą z sobą połączone w jakikolwiek, lecz oznaczony sposób, za pomocą znaków przyjętych w rachunku.

Wyrażenie takie może być połączeniem ilości stałych i zmiennych.

Jeżeli wyrażenie składa się z nieskończonéj liczby wyrazów, utworzonych według pewnego prawa, nazywa się szeregiem, a oznaczając ilości stałe przez $a \ldots$ zmienne przez $x \ldots$, wyraz jakikolwiek u_n będzie funkcyą z ilości $a \ldots, \; x \ldots$ i liczby n

$$u_n = f(a \ldots, x \ldots, n)$$

a szereg sam można ogólnie wyrazić przez

$$\mathrm{S}\,(a \ldots, x \ldots,)$$

Gdy potrafimy wyrazić tę ilość nieskończonéj liczby wyrazów przez pewien związek tychże ilości w skończonéj ich liczbie, i gdy oznaczymy ten nowy związek tychże ilości przez:

$$F\,(a\ldots,\, x\ldots,)$$

otrzymamy równanie:

$$F\,(a\ldots,\, x\ldots,) = S\,(a\ldots,\, x\ldots,) \qquad (1)$$

Gdy ilości $x\ldots$ zmieniają się, zmienia się wartość obu stron tego równania. Pierwsza będąc ograniczoną czyli oznaczoną liczbą związków ilości, będzie nabywać w ogóle pewne wartości skończone i oznaczone, i dla szczególnych tylko wartości zmiennéj, może stawać się nieskończoną.

Przeciwnie, druga strona zawierając nieskończoną liczbę wyrazów, w ogóle będzie się zmieniać jak i pierwsza, lecz może mieć wartości ciągle nieskończone, i wtedy wyrażenie to nie ma żadnego znaczenia.

Równanie więc (1) o tyle będzie mieć znaczenie, o ile summa nieskończonéj liczby wyrazów, zawarta w drugiéj stronie, nabywa wartości skończonych, gdy ilości zmieniają się, i wtedy tylko może wyrażać ściśle stronę pierwszą.

Z natury szeregu wypływa, że ponieważ każdy wyraz składa się z tych samych ilości, przeto gdy one zmieniają się, szereg będzie zmieniał się i od pewnych wartości zaczynając, może już mieć wartości ciągle nieskończone, gdy druga strona może mieć wartości skończone w ogóle dla wartości zmiennych, wziętych w pewnych granicach; w tych więc tylko granicach, równość (1) może mieć miejsce. Ztąd wypada, że równanie (1) nie może być doskonale identyczném, lecz musi być uwarunkowione pewnemi warunkami, dającemi granice, w których ono ma miejsce. Znalezienie tych warunków, stanowi konieczność niezbędną równania (1) bez których wyrażenie to jest zwodniczém, i nie ma żadnego znaczenia.

2. Ponieważ równanie (1) składa się z dwóch części osobnych: z funkcyi i szeregu, przeto aby szereg wyrażać mógł funkcyą, musi zachowywać wartości oznaczone w pewnych granicach, czyli być zbieżnym; funkcya znowu, aby mogła być równą szeregowi, powinna być zdolną wyrazić się przez szereg przynajmniéj w pewnych granicach, czyli być rozwijalną na szereg.

Ztąd więc wypływają oddzielne dwie teorye:

1. *Teorya zbieżności szeregów*, dająca nam granice, w których szeregi zostają stale zbieżne, czyli mają wartości oznaczone, bez względu na rodzaj funkcyi z któréj powstały.

2. *Teorya rozwijalności funkcyi*, dająca nam granice, w których każda funkcya zdolną jest rozwinąć się na szereg nieskończonéj liczby wyrazów, bez względu, w jaki sposób to rozwinięcie następuje.

A że szereg musi powstać z funkcyi którą ma wyrażać, lub funkcya musi wydać ten szereg, a więc warunki te muszą być temiż samemi warunkami, doskonale identycznemi.

Znając więc prawa zbieżności szeregów, powinniśmy z nich otrzymać prawa rozwijalności funkcyi na szereg.

Otóż rzeczywiście teorya zbieżności szeregów, daje podstawę nowemu rachunkowi, który nazywamy:

3. *Rachunkiem funkcyi granicznych*, którego znowu prostém zastosowaniem jest teorya rozwijalności funkcyi.

Trzy te teorye składają więc zupełną całość i są przedmiotem trzech części niniejszego wykładu.

CZĘŚĆ PIERWSZA.

TEORYA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW.

Nie mamy dotąd ogólnego prawa dla poznania, czy szereg jest zbieżnym lub rozbieżnym, albowiem podawane dotąd prawidła, służą tylko dla szczególnych postaci szeregów, a uważanie reszty szeregu, często prowadzi do rachunków trudnych i niemożliwych do wykonania; a jednakże zadanie to jest bardzo ważném w badaniach matematycznych, zwłaszcza tam, gdzie w ostatecznych wypadkach przychodzimy do szeregów, które mają wtedy tylko znaczenie, gdy są zbieżne.

Zadanie to stanowi dotąd w rachunku jedno z pytań, nierozwiązanych w całéj ogólności.

W téj części będziemy się starali rozwiązać to zadanie i podać ogólne prawa zbieżności szeregów.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

PRAWA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW.

3. *Szeregiem w ogóle nazywamy nieskończoną liczbę wyrazów, utworzonych podług pewnego, oznaczonego prawa i połączonych z sobą znakami więcéj lub mniéj.*

Prawo więc tworzenia się wyrazów, musi być dane: albo w postaci związku między wyrazami, albo téż w postaci wyrazu n go, który będzie funkcyą liczby n oznaczającéj miejsce wyrazu.

Gdy mamy dany związek między wyrazami, łatwo z tego związku oznaczymy wyraz ogólny n ty, a tak w każdym razie mamy dany wyraz ogólny szeregu.

Pod względem formy szeregi mogą być trojakie: albo zacząwszy od pewnego wyrazu, wszystkie następne mają *znaki jednakowe*, albo *naprzemian idące*, albo téż tworzą *gruppy mające też same znaki.*

Pod względem wartości bezwzględnéj, zacząwszy od pewnego wyrazu, one mogą *jednostajnie* lub *peryodycznie zmieniać się*.

Wszystkie powyższych rodzai szeregi, mogą być pod względem znaczenia swego *zbieżne* lub *rozbieżne*, to jest, *których summa wyrazów ma wartość skończoną i oznaczoną, albo téż nieskończenie wielką.*

4. W ogóle jeżeli wyrazy szeregu oznaczymy przez $u_0\ u_1 \ldots$ a jego summę przez S będzie:

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

i S będzie to summa wszystkich wyrazów przedłużonych do nieskończoności. Wyraz ogólny tego szeregu oznaczamy przez u_n. Jeżeli bierzemy summę n pierwszych wyrazów i. oznaczymy ją przez S_n a resztę wyrazów po n tym przez R_n będzie:

$$S = S_n + R_n \qquad \text{(a)}$$

Wniosek 1. Gdy szereg jest zbieżny, czyli gdy ma wartość skończoną i oznaczoną, to summa S_n zbierając w niéj coraz więcéj wyrazów, coraz więcéj zbliża się do wartości S, tak, iż gdy zawiera wszystkie wyrazy, czyli gdy n jest ∞, summa S_n będzie równa summie S, tak że można napisać:

$$(S_n)_\infty = S, \qquad \text{czyli } S_\infty = S.$$

Wniosek 2. Gdy w wyrażeniu (a) n rośnie i staje się równe nieskończoności, a szereg jest zbieżnym, będzie:

$$S = (S_n)_\infty + (R_n)_\infty$$

a że: $$(S_n)_\infty = S, \qquad \text{przeto } (R_n)_\infty = 0$$

to jest: w szeregu zbieżnym reszta szeregu po n wyrazach, musi dążyć z n do zera, czyli mieć za granicę zero.

Zatém koniecznym wnioskiem z definicyi szeregu zbieżnego jest: że *reszta szeregu musi dążyć z n do zera, jak tylko szereg ma wartość oznaczoną i skończoną, czyli gdy jest zbieżnym.*

Wniosek 3. Gdy w wyrażeniu (a) położymy $n-1$ za n będzie:

$$S = S_{n-1} + R_{n-1}$$

a odejmując od (a) otrzymamy:

$$u_n + R_n - R_{n-1} = 0$$

a gdy szereg jest zbieżny, wiemy że reszty dążą do zera, a zatém gdy n dąży w tém wyrażeniu do ∞, R_n i R_{n-1} dążą do zera, więc

$$(u_n)_\infty = 0.$$

to jest. że gdy *szereg jest zbieżny*, *wyraz n ty dąży z n do zera*, *czyli ma za granicę zero.*

Uwaga. Wszystkie te prawdy nie mogą być odwrócone, i gdy one mają miejsce, szereg może nie być zbieżny. Wiele podobnych wniosków można wyciągnąć z samego orzeczenia zbieżności szeregów, które jako nieużyteczne w dalszym ciągu opuszczamy (*).

5. Z orzeczenia szeregów wypada, że nie możemy dowolnie przemieniać miejsca wyrazom, albowiem każdy wyraz będąc funkcyą liczby oznaczającéj miejsce ze zmianą téjże i swego miejsca, powinien zmienić i wielkość. I tak niech będzie szereg (**).

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

wyraz $n$ty szeregu wyraża się przez

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Wartość ku której dąży S_n, gdy n rośnie do nieskończoności, jest summą szeregu i oznaczamy przez S.

Jeżeli napiszemy szereg ten pod postacią:

$$S' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \ldots$$

(*) Patrz: Catalan „Traité élémentaire des séries:“ Rozdział 2. tw. 1, 2, 3 i t. d.

(**) Patrz: Bertrand: „Traité de calcul différentiel.“ Paris 1864 pag. 250.

widocznie ten szereg musi mieć i inną wartość, i nie jest równy powyższemu, chociaż się składa z tych samych wyrazów; albowiem przedłużając go do nieskończoności, wyrazy dodatne w dwa razy większéj liczbie wchodzą jak odjemne, a wyraz ogólny jest teraz:

$$u_n = \frac{4}{\left(5\operatorname{dos}^2 \frac{n\pi}{2} + \operatorname{wst}\frac{n\pi}{2} - 1\right)(n+1)}$$

Uważając że mamy:

$$S = \sum \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

$$S' = \sum \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

a że można napisać jeszcze

$$S = \sum \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4}\right)$$

Zatém

$$S' - S = \sum \left(\frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+4} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2} S$$

a zatém znając summę S, mamy:

$$S' = {}^3/_2\, S$$

tak, że możemy napisać:

$$\sum \left\{\frac{4}{\left(5\operatorname{dos}^2 \frac{n\pi}{2} + \operatorname{wst}\frac{n\pi}{2} - 1\right)(n+1)}\right\} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

6. W ogóle gdy szeregi składają się z wyrazów dodatnych i odjemnych, i gdy są rozbieżne, mogą okazywać się pod postacią nieoznaczoną ($\infty - \infty$); lecz zawsze mają wartość stałą, nieskończenie wielką, a nigdy nie są nieoznaczone w ścisłém znaczeniu tego wyrazu, gdyż nie mogą przybierać dowolnych wartości.

Jakoż niech będzie:

$$S_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 \ldots.$$

możemy napisać:

$$S_n = u_0 \left(1 + \frac{u_2}{u_0} + \ldots.\right)$$

$$- u_1 \left(1 + \frac{u_3}{u_1} + \ldots.\right)$$

lub téż

$$S_n = u_0 - u_1 \left(1 + \frac{u_3}{u_1} + \ldots.\right)$$

$$+ u_2 \left(1 + \frac{u_4}{u_2} + \ldots.\right)$$

i gdy wyrazy szeregu rosną, szeregi w nawiasach dążą z liczbą wyrazów do nieskończoności, a że $u_0 < u_1$ przeto pierwsze wyrażenie daje $-\infty$; a że $u_1 < u_2$ przeto drugie wyrażenie daje $+\infty$. Gdy wyrazy szeregu ubywają do granicy ε, to szeregi w nawiasach dążą jeszcze z liczbą wyrazów do nieskończoności, albowiem są summą nieskończonéj liczby ułamków, mających wartość zawartą między 1 i $\frac{\varepsilon}{u_0}$ lub 1 i $\frac{\varepsilon}{u_1}$ przeto mają wartość $\pm\infty$. Szeregi więc rozbieżne z wyrazami dodatnemi i odjemnemi, zawsze mają między swemi wartościami $\pm\infty$, tak że odróżnienie tego rodzaju szeregów i nazwanie *nieoznaczonemi*, jest zupełnie niewłaściwém (*).

(*) Catalan: „Traité élément. des séries." Paris 1860 pag. 2.

Gdy zaś wyrazy stają się zupełnie równe, wtedy tylko szereg sam z siebie niknie i nie przedstawia nic więcéj, chociaż można sprowadzić jego wartość do trzech postaci 0 lub $\pm\ u_0$ albowiem można napisać:

$$S_n = (u_0 - u_0) + (u_0 - u_0) + \ldots$$

$$S_n = u_0 - (u_0 - u_0) - (u_0 - u_0) + \ldots$$

$$S_n = -u_0 + (u_0 - u_0) + (u_0 - u_0) + \ldots$$

Szereg więc możnaby powiedziéć, że ma trzy wartości różne, lecz nigdy nie jest nieoznaczony, w ścisłém znaczeniu tego wyrazu.

Ponieważ tylko szeregi zbieżne mają znaczenie w rachunku, przeto konieczną jest rzeczą poznanie praw ogólnych zbieżności szeregów; dla tego zajmiemy się pokolei trzema rodzajami szeregów, wyżéj podanemi w § 3, jakie przedstawia ich forma.

a. Szeregi mające wyrazy z jednakowemi znakami.

7. W szeregach mających wyrazy ze znakami jednakowemi, zacząwszy od pewnego wyrazu dostatecznie wielkiego, wartość tychże wyrazów może jednostajnie lub peryodycznie zmieniać się, to jest powiększać lub zmniejszać, dążąc do pewnéj granicy. Gdy wartość wyrazów peryodycznie zmienia się, zbierając wyrazy w gruppy obejmujące jeden peryod i nazywając je przez $g_1\, g_2 \ldots$ będziemy mieli szereg złożony z nowych wyrazów, których wartość będzie stale powiększać się lub zmniejszać.

W obu więc przypadkach można uważać wyrazy szeregu, jako zmieniające się jednostajnie i dążące do pewnéj granicy.

A z wniosku 3, § 4 wypada, że gdy szeregi są zbieżne, to będzie:

$$(u_n)_\infty = 0, \quad \text{lub} \quad (g_n)_\infty = 0$$

to jest: że koniecznie wyraz lub gruppy wyrazów, muszą mieć za granicę zero. Zatem szeregi, których wyrazy rosną lub ubywają do granicy większéj od zera, są rozbieżne.

8. Warunek powyższy wyrzuca z pod badania szeregi, których wyrazy rosną lub ubywają do pewnéj granicy różnéj od zera. Weźmiemy więc pod uwagę już tylko szeregi, których wyrazy zacząwszy od pewnego wyrazu, zmniejszają się i dążą do zera; stosunek wyrazu jakiegokolwiek, do tuż następującego, będzie funkcyą z liczby n, oznaczającéj miejsce wyrazu, i wyrazimy go przez:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = f(n)$$

a ponieważ jak się przekonamy daléj, prawa zbieżności prościéj się wyrażają przez tę postać stosunku niż przez jéj formę odwrotną:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

przeto stale powyższą formę stosunku będziemy daléj uważali, i będziemy go dla skrócenia wprost nazywać *stosunkiem wyrazów.*

Załóżmy, że zacząwszy od wyrazu n dostatecznie odległego, stosunek ten stale wciąż rośnie lub ubywa, lub téż ma wartość stałą.

1. Gdy stosunek wyrazów rośnie zaczynając od wartości α do granicy ε to $\alpha < \varepsilon$ i będziemy mieli szereg nierówności:

$$\alpha = \frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} < \ldots < \varepsilon \qquad \text{(a)}$$

a ztąd także:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\alpha} u_n \quad , \quad u_{n+2} < \frac{1}{\alpha} u_{n+1} \ldots$$

$$u_{n+1} > \frac{1}{\varepsilon} u_n \quad , \quad u_{n+2} > \frac{1}{\varepsilon} u_{n+1} \ldots$$

a summując te wyrażenia, będzie:

$$S_n < u_n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \ldots\right)$$

$$S_n > u_n \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots\right)$$

ponieważ $\alpha < \varepsilon$, więc $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\varepsilon}$; a gdy $\varepsilon \leqslant 1$, to i $\alpha < 1$, wyrażenia w nawiasach po drugiéj stronie są nieskończone, i szereg będzie zawsze rozbieżnym; gdy $\varepsilon > 1$, to zawsze można zacząć od wyrazu, którego stosunek α będzie większy od 1, lecz mniejszy od ε i oba wyrażenia po drugiéj stronie będą skończone, a szereg będzie zawsze zbieżnym, gdyż wartość jego będzie zawarta między skończonemi wartościami:

$$S_n < \frac{u_n}{\alpha - 1} \text{ i } S_n > \frac{u_n}{\varepsilon - 1}$$

Zatém gdy stosunek n tych wyrazów rośnie, i gdy dla $n = \infty$ staje się większy od jedności, szeregi są zbieżne, gdy zaś równy lub mniejszy od jedności, rozbieżne, i wartość stosunku dla $n = \infty$ równa jedności, jest granicą zbieżności, i w téj granicy szeregi są rozbieżne i można napisać:

$$gr\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right) = \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = 1. \text{ (wyłącznie)}$$

2. Gdy stosunek wyrazów ma wartość stałą ε będzie szereg równości:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} = \ldots = \varepsilon$$

i jeszcze:

$$S_n = u_n \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots\right)$$

gdzie aby szereg był zbieżnym, potrzeba aby $\varepsilon > 1$. Gdy zaś $\varepsilon < 1$, wyrażenie po drugiéj stronie jest nieskończone i szereg będzie rozbieżny.

Zatém gdy stosunek wyrazów ma wartość stałą, granicą zbieżności jest jeszcze jedność i można napisać:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = 1 \text{ (wyłącznie)}$$

3. Gdy nakoniec stosunek wyrazów ubywa od α do granicy ε, będziemy mieli szereg nierówności

$$\alpha = \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} > \ldots > \varepsilon$$

a ztąd:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\alpha} u_n, \quad u_{n+2} > \frac{1}{\alpha} u_{n+1}, \ldots$$

$$u_{n+1} < \frac{1}{\varepsilon} u_n, \quad u_{n+2} < \frac{1}{\varepsilon} u_{n+1}, \ldots$$

a zbierając te wyrażenia, będzie:

$$S_n > u_n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \ldots\right)$$

$$S_n < u_n \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots\right)$$

gdzie ponieważ $\alpha > \varepsilon$ więc gdy $\alpha \leqq 1$ i $\varepsilon < 1$, wyrażenia po drugiéj stronie będą nieskończone, i szereg będzie rozbieżnym; gdy zaś $\varepsilon = 1$, a $\alpha > 1$, pierwsze wyrażenie po drugiéj stronie, staje się skończone, drugie nieskończone, i szereg wacha się między skończoną a nieskończoną wartością. Gdy $\varepsilon > 1, \alpha > 1$ wyrażenia po drugiéj stronie są skończone, a szereg zbieżny. Zatém $\varepsilon = 1$, znowu jest granicą zbieżności szeregów, lecz w téj granicy szeregi mogą być zbieżne, gdy stosunek wyrazów ubywa, a więc jeszcze można napisać:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_{\infty} = 1. \text{ (wątpliwo)}$$

Zbierając to wszystko, otrzymamy następne prawo znane dla zbieżności szeregów.

Szeregi, których wyrazy mają znaki jednakowe, są zbieżne, gdy stosunek n tych wyrazów dla $n = \infty$ *jest większy od jedności; rozbieżne, gdy ten stosunek staje się w ogóle mniejszy lub równy jedności i granicą zbieżności jest wyrażenie:*

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_{\infty} = 1$$

wyjąwszy przypadek, dla którego i w téj granicy szeregi mogą być zbieżne, gdy stosunek wyrazów ubywa.

Powyższy dowód ma tę dogodność, że nam wskazuje doskonale granice, w jakich to prawo znane daje się zastosować.

9. Jako przykład weźmy szereg, którego wyraz ogólny jest:

$$u_n = \frac{n\,!}{(an+b)!}\,, \tag{a}$$

będący iloczynem czynników od 1 do n postaci $\frac{1}{a+b}$, $\frac{2}{2a+b}$ i t. d. (*), stosunek wyrazów jest:

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{an+b}{n} = a + \frac{b}{n}$$

(*) Dla skrócenia iloczyn czynników złożonych z n, w których n przybiera wartości od 1. do n porządkiem liczb naturalnych. będziemy oznaczać przez ostatni czynnik ze znakiem ! np. $1 \,.\, 2 \ldots\ldots n = n!$ a takiż iloczyn czynników, w których n zmienia się porządkiem liczb naturalnych od n do $n+\nu$ będziemy oznaczać dwoma czynnikami, kładąc między niemi znak ? np. $(n+b) \ldots (n+\nu+b) = (n+b) \,?\, (n+\nu+b)$.

i gdy n nieskończenie wielkie, ten stosunek staje się równy a i gdy $a > 1$, szereg będzie zbieżny; gdy $a < 1$, rozbieżny; a nakoniec gdy $a = 1$, stosunek staje się równy jedności, a że jeszcze ubywa, gdy n rośnie; przeto może być zbieżnym i rozbieżnym.

Gdy $a = 1$ otrzymamy szereg, którego wyraz n ty jest:

$$u_n = \frac{n!}{(n+b)!}$$

i którego łatwo znaleźć summę; jakoż każdy wyraz można rozebrać na dwa:

$$\frac{n!}{(n+b)!} = \frac{n!}{(b-1)(n-1+b)!}\left(1 - \frac{n+1}{n+b}\right)$$

tak, że summę n wyrazów otrzymamy, uważając że wyrazy nikną prócz ostatniego,

$$S_n = \frac{1}{b-1}\left(1 - \frac{n+1}{n+b}!\right) = \frac{1}{b-1}\left(1 - \frac{n}{n+b}!\,(n+1)\right)$$

a summa wyrazów od n do $n+\nu$ będzie:

$$S_n + \nu = \frac{n!}{(b-1)(b+1)\,?\,(n+b-1)}\left\{1 - \frac{(n+1)\,?\,(n+\nu+1)}{(n+b)\,?\,(n+\nu+b)}\right\}$$

Teraz łatwo widzimy, że gdy b jest większe od jedności, drugi wyraz w nawiasie, gdy ν rośnie, ubywa, gdyż jest iloczynem ułamkow właściwych, a gdy $b = 1$, lub < 1, ten wyraz staje się bardzo wielkim, tak, że gdy ν staje się nieskończoném, summa ta staje się resztą szeregu po n tym wyrazie i będzie dla $b > 1$:

$$R_n = \frac{n!}{(b-1)\,(b+1)\,?\,(n+b-1)}$$

to wyrażenie znowu, gdy b jest większe od jedności, jest iloczynem ułamków właściwych, i gdy n dąży do nieskończoności, dąży do zera, gdy zaś $b < 1$, staje się nieskończoném, szereg więc jest zbieżnym dla $b > 1$, i ma wartość:

$$S = \frac{1}{b-1}$$

Ztąd szereg wyrazów:

$$S = \frac{1}{n+a} + \frac{n+1}{(n+a)(n+a+1)} + \frac{(n+1)(n+2)}{(n+a)(n+a+1)(n+a+2)} + \dots \quad \text{(b)}$$

będzie mieć za summę R_n podzielone przez iloczyn z czynników aż do $\frac{n}{n+a+1}$, zatém będzie:

$$S = \frac{1}{a-1}. \qquad \text{(c)}$$

b. Szeregi mające wyrazy ze znakami naprzemian.

10. W szeregach ze znakami naprzemian, wyrazy mogą, zaczynając od pewnego wyrazu dostatecznie wielkiego, rosnąć lub ubywać; a według wniosku 3, § 4, gdy szereg zbieżny, musi być:

$$(u_n)_\infty = 0 \qquad \text{(a)}$$

i to prawo nie może być odwrócone; i chociaż u_n ma za granicę zero, szeregi mogą być rozbieżne.

I tak np., szereg w którym $a < b$

$$S_n = \frac{a}{1} - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \dots + \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$$

jego wyrazy dążą do zera, gdy n dąży do nieskończoności; jednakże szereg ten nie jest zbieżnym, jak się później przekonamy w § 36.

Prawo więc to w ogóle nie jest prawdziwém, chociaż dotąd za takie jest podawaném we wszystkich wykładach. Z tego jednak wypada, że gdy *n* ty wyraz ma granicę większą lub mniejszą od zera, szeregi są rozbieżne (*).

11. Warunek (a) wyrzuca z pod badania szeregi, których wyrazy rosną lub ubywają, do pewnéj stałéj granicy innéj jak zero. Weźmiemy więc pod uwagę już tylko szeregi, których wyrazy zmniejszają się i dążą stale do zera z liczbą wyrazów; stosunek wyrazu jakiegokolwiek do tuż następującego, będzie funkcyą z liczby n, i może, zacząwszy od pewnego wyrazu dostatecznie odległego, wciąż rosnąć, ubywać lub mieć stałą wartość.

1. Gdy stosunek wyrazów, zaczynając od n go, rośnie od α do granicy ε; to $\alpha < \varepsilon$ i mamy szereg nierówności:

$$\alpha = \frac{u_n}{u_{n+1}} < \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} < \ldots < \varepsilon \qquad \text{(a)}$$

Z drugiéj strony szereg dany można napisać tak:

$$S_n = u_n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + u_{n+2}\left(1 - \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}}\right) + \ldots \qquad \text{(b)}$$

a kładąc za stosunki raz $\frac{1}{\alpha}$, drugi raz $\frac{1}{\varepsilon}$, będzie:

$$S_n > \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(u_n + u_{n+2} + u_{n+4} + \ldots)$$

$$S_n < \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)(u_n + u_{n+2} + u_{n+4} + \ldots)$$

Stosunki (a) dają nierówności:

$$u_{n+2} < \frac{1}{\alpha^2}\,u_n\ ,\quad u_{n+4} < \frac{1}{\alpha^2}\,u_{n+2}, \ldots$$

$$u_{n+2} > \frac{1}{\varepsilon^2}\,u_n\ ,\quad u_{n+4} > \frac{1}{\varepsilon^2}\,u_{n+2}, \ldots$$

Ztąd wyrażenia powyższe zamienią się na:

$$S_n > \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)u_n\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} + \ldots\right)$$

(*) Porównaj: Bernard, Traité de calcul différentiel § 246 i następne.

$$S_n < \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) u_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4} + \dots\right)$$

gdzie widzimy, że gdy $\varepsilon \leqslant 1$, to i $\alpha < 1$, i oba po drugiéj stronie szeregi mają wartość nieskończoną, przeto i summy są nieskończone, a szereg dany rozbieżny; gdy $\varepsilon > 1$. zawsze można zacząć od wyrazu n, którego stosunek α będzie większym od jedności, lecz mniejszym od ε i wyrażenia po drugiéj stronie będą zbieżne, gdyż będzie:

$$S_n > \frac{\alpha}{1+\alpha} u_n \quad \text{i} \quad S_n < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u_n$$

a ztąd i szereg dany będzie zbieżnym, a więc $\varepsilon = 1$. jest granicą zbieżności szeregów; lecz w téj granicy szeregi są rozbieżne, zatém napiszemy:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = 1. \text{ (wyłącznie)}$$

2. Gdy stosunek wyrazów jest stały i równy ε będzie:

$$S_n = u_n \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} - \dots\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) u_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4} + \dots\right)$$

gdzie widzimy że gdy $\varepsilon \leqslant 1$, szeregi są rozbieżne, gdy zaś $\varepsilon > 1$, szeregi zbieżne i mają wartość:

$$S_n = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} u_n$$

więc granicą zbieżności jest znowu wartość stosunku równa jedności, lecz w téj granicy szeregi są rozbieżne, zatém:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = 1. \text{ (wyłącznie)}$$

3. Gdy stosunek wyrazów ubywa od α do granicy ε, to $\alpha > \varepsilon$ i mamy:

$$\alpha = \frac{u_n}{u_{n+1}} > \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} > \dots > \varepsilon \qquad \text{(c)}$$

kładąc za te stosunki raz α, drugi raz ε, w wyrażeniu (b) będzie:

$$S_n < \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(u_n + u_{n+2} + \dots)$$

$$S_n > \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)(u_n + u_{n+2} + \dots)$$

Wyrażenia (c) dają:

$$u_{n+2} < \frac{1}{\varepsilon^2} u_n \quad , \quad u_{n+4} < \frac{1}{\varepsilon^2} u_{n+2}, \dots$$

$$u_{n+2} > \frac{1}{\alpha^2} u_n \quad , \quad u_{n+4} > \frac{1}{\alpha^2} u_{n+2}, \dots$$

a ztąd jeszcze:

$$S_n < \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) u_n \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4} \dots\right)$$

$$S_n > \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) u_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^4} \dots\right)$$

ponieważ $\alpha > \varepsilon$, to gdy $\alpha \leqq 1$, i $\varepsilon < 1$, i szeregi będą rozbieżne; gdy $\alpha > 1$, i $\varepsilon < 1$, szeregi są jeszcze rozbieżne, albowiem można zawsze zacząć od wyrazu dostatecznie wielkiego, dla którego stosunek α będzie przynajmniéj równy jedności, i szereg będzie rozbieżny; gdy $\alpha > 1$, $\varepsilon = 1$, i gdy wszystkie stosunki wyrazów są większe od jedności, a tylko w granicy równe jedności, to wartości powyższe są skończone i szereg będzie zbieżnym; a gdy $\alpha > 1$ i $\varepsilon > 1$, tém bardziéj szereg będzie zbieżnym. Zatém gdy stosunki wyrazów ubywają, szeregi są zawsze zbieżne, gdy ten stosunek w granicy dla $n = \infty$ staje się większy lub równy jedności, tak, że można napisać:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = 1. \text{ (włącznie)}$$

Zbierając to razem, mamy następujące prawo dla szeregów ze znakami naprzemian:

Szeregi które zacząwszy od pewnego wyrazu mają znaki naprzemian są zbieżne, gdy stosunek wyrazów dla $n = \infty$ *jest większy od jedności, a granicą zbieżności jest wyrażenie*:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = 1,$$

w której nawet szeregi są zbieżne, gdy stosunek wyrazów ubywa; rozbieżne, gdy ten stosunek rośnie lub ma stałą wartość.

Prawo więc to jest zupełnie takież samo, jak dla szeregów ze znakami jednakowemi, z tą różnicą, że gdy tamte w granicy gdy stosunek ubywa są zbieżne lub rozbieżne, te są zawsze zbieżne.

c. Szeregi mające wyrazy ze znakami peryodycznie zmiennemi.

12. Jeżeli szereg składa się z wyrazów dodatnych i odjemnych peryodycznie powtarzających się, prawo zbieżności szeregów daje się sprowadzić do powyższych dwóch praw. Jakoż, wyrazy szeregu, mające znaki peryodycznie powtarzające się, mogą co do swéj wartości zmieniać się jednostajnie, lub także peryodycznie; gdy się zmieniają jednostajnie, to możemy zebrać je w gruppy, obejmujące znaki też same lub naprzemian, i sprowadzić do jednego z powyższych przypadków. Gdy wyrazy szeregu zmieniają się peryodycznie, peryod zmian wyrazów i peryod znaków, mogą sobie odpowiadać lub nie; gdy sobie odpowiadają zbierając je w gruppy, według peryodu zmian wielkości, otrzymamy szereg mający znaki naprzemian; gdy zaś nie odpowiadają sobie, zbierając je według peryodu zmian wartości, otrzymamy szereg mający wyrazy z jednakowemi znakami. Jakie więc kolwiek będziemy mieli szeregi tego rodzaju, zawsze sprowadzimy je do jednego z dwóch powyżéj uważanych rodzai szeregów, tak, że prawa tam dowiedzione są ogólnemi.

13. Zbierając je więc razem, otrzymamy prawo pierwsze następne:

Szeregi ze znakami jednakowemi, lub naprzemian są zbieżne, gdy stosunek wyrazów dla $n = \infty$ jest większy od jedności; rozbieżne, gdy jest mniejszy od jedności, i granicą zbieżności jest wyrażenie:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = 1, \tag{1}$$

w któréj to granicy gdy stosunek ubywa, szeregi są jeszcze zbieżne, gdy mają znaki naprzemian; mogą być zbieżne, gdy mają znaki jednakowe; gdy zaś stosunek rośnie lub ma stałą wartość, szeregi obu rodzai są rozbieżne.

Część tego prawa co do szeregów ze znakami jednakowemi jest znaną, lecz część druga nie była dotąd podaną w téj formie, a prawo aby wyrazy dążyły do zera, dla obu rodzai szeregów nie jest dostateczne.

Prawo to zupełne, gdy stosunek wyrazów jest większy lub mniejszy od jedności; gdy zaś stosunek staje się równym jedności, zbieżność lub rozbieżność szeregów jak widzimy zależy od tego, czy ten stosunek ubywa lub rośnie; dalsze więc prawa muszą zasadzać się na poznaniu, kiedy stosunek wyrazów ubywa lub rośnie.

11. Pozostaje więc podać nowe prawo dla przypadku, gdy stosunek wyrazów staje się równy jedności, aby uniknąć szukania zmian tego stosunku, i rozwiązać przypadek wątpliwy dla szeregów ze znakami jednakowemi.

W tym celu uważmy naprzód szereg ze znakami jednakowemi, stosunek jego wyrazów:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = f(n)$$

stając się jednością dla $n = \infty$ i gdy wyrazy ubywają, musi dać się wyrazić w postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{f_1(n)}{\varphi(n)}$$

gdzie $f_1(n)$ ma wartość stałą, a $\varphi(n)$ wartość nieskończoną gdy $n = \infty$, a w szczególnym przypadku może się dać wyrazić w postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{f_1(n)}{n}$$

którą teraz zajmiemy się.

Wyciągając wartość na $f_{\text{I}}(n)$, otrzymamy:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=f_{\text{I}}(n)$$

oznaczmy wartość tego wyrażenia, czyli wartość $f_{\text{I}}(n)=\alpha_{\text{I}}$, a gdy $n=\infty$ niech ta wartość będzie ε_1 i rozbieżmy znowu trzy przypadki jak wyżéj.

1. Gdy to wyrażenie rośnie od α_1 do ε_1 będzie $\alpha_1<\varepsilon_1$ i mamy:

$$\alpha_1=n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)<(n+1)\left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}}-1\right)<\dots\varepsilon_1$$

i także:

$$u_{n+1}=\frac{n}{n+\alpha_1}u_n\quad,\quad u_{n+2}<\frac{n+1}{n+1+\alpha_1}u_{n+1}\dots$$

$$u_{n+1}>\frac{n}{n+\varepsilon_1}u_n\quad,\quad u_{n+2}>\frac{n+1}{n+1+\varepsilon_1}u_{n+1}\dots$$

i summując te wyrażenia, zaczynając od $(n+1)$ go wyrazu, będzie:

$$S_n<nu_n\left(\frac{1}{n+\alpha_1}+\frac{n+1}{(n+\alpha_1)(n+1+\alpha_1)}+\dots\right)$$

$$S_n>nu_n\left(\frac{1}{n+\varepsilon_1}+\frac{n+1}{(n+\varepsilon_1)(n+1+\varepsilon_1)}+\dots\right)$$

a że na mocy § 9, wyrażenia w nawiasach będą zbieżne lub rozbieżne gdy α_1 i ε_1 będzie większe od jedności, przeto gdy $\varepsilon_{\text{I}}\leqslant 1$, będzie i $\alpha_{\text{I}}<1$, i wyrażenia w nawiasach będą nieskończone, a wartość tych szeregów będzie nieskończoną; gdy zaś $\varepsilon_{\text{I}}>1$, zawsze zacząć szereg można od wyrazu takiego, gdzie $\alpha_{\text{I}}>1$, lecz $\alpha_1<\varepsilon_{\text{I}}$ a oba wyrażenia i szeregi będą zbieżne, i na mocy § 9, summa szeregu będzie zawartą między:

$$S_n<\frac{nu_n}{\alpha_1-1}\quad\text{i}\quad S_n>\frac{un_n}{\varepsilon_1-1}$$

Zatém gdy stosunek wyrazów ubywa i staje się jednością dla $n=\infty$ szeregi są jeszcze zbieżne, gdy wyrażenie:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1$$

i granicą téj zbieżności znowu jest:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)_\infty = 1 \text{ (wyłącznie)}$$

2. Podobnie rzecz się ma, gdy te wyrażenia mają stałą wartość równą ε_1 wtedy szeregi będą zbieżne, gdy ta ilość większa od jedności, a rozbieżne, gdy $\varepsilon_1 \leqslant 1$, i w granicy będzie:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = 1 \text{ (wyłącznie).}$$

3. Gdy nakoniec wyrażenia powyższe ubywają od α_1 do ε_1 to $\alpha_1 > \varepsilon_1$ i

$$\alpha_1 = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > (n+1)\left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} - 1\right) > \ldots \varepsilon_1$$

a ztąd:

$$u_{n+1} = \frac{n}{n+\alpha_1} u_n\,, \qquad u_{n+2} > \frac{n+1}{n+1+\alpha_1} u_{n+1}, \ldots$$

$$u_{n+1} < \frac{n}{n+\varepsilon_1} u_n\,, \qquad u_{n+2} < \frac{n+1}{n+1+\varepsilon_1} u_{n+1}, \ldots$$

a zbierając wyrazy, zaczynając od n go, będzie:

$$S_n > nu_n \left\{\frac{n}{n+\alpha_1} + \frac{(n+1)}{(n+\alpha_1)(n+1+\alpha_1)} + \ldots\right\}$$

$$S_n < nu_n \left\{\frac{n}{n+\varepsilon_1} + \frac{(n+1)}{(n+\varepsilon_1)(n+1+\varepsilon_1)} + \ldots\right\}$$

i podobnie jak wyżéj gdy $\alpha_1 \leqslant 1$, to i $\varepsilon_1 < 1$, wyrażenia w nawiasach są nieskończone i szereg będzie rozbieżny; gdy zaś $\varepsilon_1 = 1$, to $\alpha_1 > 1$, jedno wyrażenie jest skończoném, a drugie nieskończoném, i szeregi mogą być jeszcze zbieżne lub rozbieżne, nakoniec gdy $\varepsilon_1 > 1$, i $\alpha_1 > 1$, wyrażenia w nawiasach są skończone i szereg zbieżny, a summa jest zawarta między:

$$S_n > \frac{nu_n}{\alpha_1 - 1} \quad \text{i} \quad S_n < \frac{nu_n}{\varepsilon_1 - 1}$$

Zatém gdy stosunek wyrazów ubywa i staje się jednością dla $n = \infty$ szeregi będą zbieżne, gdy wyrażenie

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)_\infty > 1.$$

i granicą téj zbieżności jest:

$$u\left(\frac{u_n}{u_n} - 1\right)_\infty = 1 \text{ (wątpliwo)}$$

to jest, że w téj granicy jeszcze szeregi mogą być zbieżne lub rozbieżne:

Jeżeli szeregi mają znaki naprzemian, to gdy stosunek ich ubywa i w granicy staje się równy jedności, szeregi są zbieżne w téj granicy, a zatém w wyrażeniu stosunku

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{f_1(n)}{n}$$

jakiekolwiek będzie $f_1(n)$ byle dodatne, to stosunek będzie ubywał i w granicy dla $n = \infty$ będzie równy jedności, i szeregi zawsze zbieżne, lecz gdy $f_1(n) = 0$, to stosunek wyrazów staje się stałym, i wtedy szereg przestaje być jak wiemy zbieżnym, zatém $f_1(n)$ musi być koniecznie większą od zera, czyli:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)_\infty = 0$$

jest granicą zbieżności, w któréj szeregi są rozbieżne.

Zbierając to razem, prawo mamy nowe.

Szeregi mające wyrazy z jednakowemi znakami, których stosunek dąży do jedności, są zbieżne, gdy wyrażenie:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \tag{2}$$

jest w granicy dla $n = \infty$ większe od jedności; a gdy mają znaki naprzemian, gdy ten stosunek jest większy od zera; w tych zaś granicach, gdy ten stosunek ubywa, szeregi mogą być jeszcze zbieżne.

Prawo więc to znowu nie rozwiązuje przypadku, gdy wyrażenie (2) ubywa i staje się jednością lub zero.

Wniosek. Ponieważ gdy szeregi są zbieżne, summa wyrazów po n tym wyrazie, czyli reszta jest zawarta między:

$$R_n > \frac{un_n}{\alpha_1 - 1}, \quad R_n < \frac{nu_n}{\varepsilon_1 - 1}$$

przeto na mocy § 4, gdy n rośnie do nieskończoności, reszta musi dążyć do zera, zatém:

$$(nu_n)_\infty = 0$$

lecz odwrotnie to miejsca nie ma, i gdy $(nu_n)_\infty = 0$, szeregi mogą nie być zbieżne.

15. Z powyższego dowodu wypada bezpośrednio następujące twierdzenie: *utworzywszy z szeregu o jednakowych znakach, którego wyraz ogólny jest* u_n , *nowy szereg postaci:*

$$v_n = \frac{u_n\,!}{(n-1)\,!\,(u_{n-1} - u_n)\,!} \tag{a}$$

to, gdy ten szereg jest zbieżnym, będzie zbieżnym i to koniecznie szereg dany.

Jakoż stosunek wyrazów tego szeregu jest:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{n\,(u_n - u_{n+1})}{u_{n+1}}$$

Ponieważ ten szereg jest zbieżnym, więc ten stosunek jest większy od jedności, a ztąd wyrażenie:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$$

przeto i szereg dany jest zbieżnym; co było do okazania.

16. Na mocy tego twierdzenia, łatwo stosując to prawo do dalszych postaci stosunku, otrzymamy prawo ogólne:

Gdy szereg v_n uważamy teraz za dany, aby on był zbieżnym potrzeba, aby nowy szereg utworzony z jego wyrazów, postaci:

$$w_n = \frac{v_n\,!}{(n-1)\,!\,(\,v_{n-1} - v_n\,)\,!} \tag{b}$$

był zbieżnym. Gdy zaś ten szereg jest zbieżnym, musi być:

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) > 1$$

a ztąd kładąc za $\dfrac{v_n}{v_{n+1}}$ jego wartość, musi być:

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = n\left\{ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right\} > 1$$

Zatém aby szereg o znakach jednakowych był zbieżnym, potrzeba, aby wyrażenie:

$$n\left\{ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right\}$$

było większe od jedności, a granicą zbieżności jest wyrażenie:

$$n\left\{ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right\} = 1. \tag{3}$$

Tak dalej postępując, otrzymamy następujące drugie prawo dla szeregów o znakach jednakowych:

Gdy stosunek wyrazów staje się równy jedności, to szeregi o znakach jednakowych będą zbieżne, gdy pierwsze z wyrażeń objętych postacią:

$$n\left\{ n\ \ldots\ \left(n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\ldots 1\right) - 1\right\} = 1. \tag{4}$$

które otrzymujemy odejmując wciąż jedność i mnożąc przez n, a które nie staje się jednością, jest większe od jedności.

Dla szeregów znowu ze znakami naprzemian, ponieważ wszystkie szeregi, mające za granicę stosunku dla $n = \infty$ jedność, są zbieżne, byle ten stosunek malał, i gdy znowu stosunek jest stały, szeregi są rozbieżne; przeto w ogóle stosunek musi być postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{a_v}{n^v}$$

gdzie a_v musi być dodatne, aby stosunek malał, a gdy $a_v = 0$, stosunek zmienia się na stały, i szereg staje się rozbieżnym, przeto granicą będzie:

$$n^v \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)_\infty = 0 \qquad (5)$$

Zatém: *szeregi o znakach naprzemian będą zbieżne, gdy pierwsza z potęg kolejnych n pomnożona przez stosunek wyrazów, zmniejszony jednością, która nie staje się zero, jest większa od zera.*

Prawo podobne jak dla szeregów o znakach jednakowych.

17. Warunki (4) i (5), oznaczając drugie ich strony przez a_0 a_1 a_2 i t. d., dają się wyrazić, wyciągając wartości na stosunek wyrazów przez:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots \qquad (6)$$

gdzie dla szeregów ze znakami jednakowemi kolejno muszą być te spółczynniki równe jedności, a dla szeregów ze znakami na przemian, równe zero; a gdy z drugiéj strony to wyrażenie jest rozwinięciem stosunku na szereg według odwrotności z n, przeto ogóne prawo zbieżności szeregów daje się jeszcze tak wysłowić:

1. *Szeregi w ogóle są zbieżne lub rozbieżne, według tego, jak stosunek wyrazów w granicy, gdy* $n = \infty$, *jest większy lub mniejszy od jedności.*

2. *Gdy ten stosunek staje się równy jedności, to rozwijając go na szereg według odwrotności z n; szeregi będą zbieżne, gdy pierwszy ze spółczynników który nie staje się jednością lub zero, według tego jak szereg jest o znakach jednakowych lub naprzemian idących, jest większy od jedności lub zera; w przeciwnym razie szeregi są rozbieżne.*

Takie jest ogólne prawo dla poznania, czy szereg jest zbieżny lub rozbieżny.

Uwaga. Warunki zbieżności wyrażone przez równania (1 do 5) stanowią granicę, tak że dla zbieżności pierwsza strona jest większa, a dla rozbieżności mniejsza od 1 lub zera, według jak szeregi są o znakach jednakowych lub na przemian; a zatém stron tych równań przenosić dowolnie nie można, gdyż zatracilibyśmy prawo zbieżności, albowiem ze zmianą stron, widocznie się ono zmienia. W dalszym więc ciągu zawsze warunki wyrażone równaniem, będą znaczyć, że pierwsza strona musi być większa od drugiéj, gdy szeregi mają być zbieżne; mniejsza od niéj, gdy szeregi mają być rozbieżne.

ROZDZIAŁ DRUGI.

UOGÓLNIENIE PRAWA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW I WŁASNOŚCI Z TEGO PRAWA WYNIKAJĄCE.

18. Prawo powyżéj dowiedzione, potrzebuje uogólnienia, albowiem ono zakłada, że wyrażenie stosunku wyrazów daje się rozwinąć na szereg według odwrotności z n.

Jakoż gdy stosunek wyrazów staje się w granicy równy jedności, powiedzieliśmy w § 14, iż zawsze można wyrazić w postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{f_1(n)}{\varphi(n)}$$

gdzie $f_1(n)$ staje się skończoném, $\varphi(n)$ nieskończoném dla $n = \infty$; gdy więc $\frac{f_1(n)}{\varphi(n)}$ nie da się rozwinąć według odwrotności z n, to zawsze można przyprowadzić do postaci powyższéj, czyniąc $\varphi(n) = n$ i uważając stosunek jako funkcyą z $\varphi(n)$, prawo powyższe da się zastosować w zupełności, i potrzeba aby wyrażenie:

$$\varphi(n) \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = f_1(n)$$

było większe od jedności lub zera. Gdy zaś $f_1(n)$ czyli to wyrażenie będzie równe jedności lub zero, stosownie do rodzaju szeregu, to znowu $f_1(n)$ da się wyrazić w podobnéj postaci:

$$f_1(n) = 1 + \frac{f_2(n)}{\varphi_1(n)}$$

gdzie $f_2(n)$ będzie musiało mieć wartość skończoną, a $\varphi_1(n)$ nieskończoną dla $n = \infty$ i na mocy powyższego potrzeba, aby $f_2(n)$ było większe od jedności lub zera, czyli wyrażenie:

$$\varphi_1\left(\varphi\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right) > 1, \text{ lub } 0$$

i tym podobnie, a ztąd stosunek wyrazów daje się wyrazić:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = a + \frac{b}{\varphi} + \frac{c}{\varphi\varphi_1} + \frac{d}{\varphi\varphi_1\varphi_2} + \dots \qquad (7)$$

Ztąd jeszcze prawo zbieżności szeregów, daje się wysłowić najogólniéj tak:

1. *Jeżeli stosunek wyrazów w granicy jest większy od jedności, szeregi są zawsze zbieżne, gdy zaś mniejszy od jedności, zawsze rozbieżne:*

2. *Jeżeli stosunek wyrazów staje się dla $n = \infty$ równy jedności i gdy ten stosunek rozwiniemy na szereg według odwrotności funkcyi w skład stosunku tego wchodzących, a które dla $n = \infty$ stają się nieskończone; to szeregi będą zbieżne, gdy pierwszy ze spółczynników, który nie staje się jednością lub zero, według jak szereg ma znaki jednakowe lub na przemian idące, jest większy od jedności lub zera; w przeciwnym razie są rozbieżne.*

Prawo to wymaga rozwinięcia stosunku na szereg według odwrotności z pewnych funkcyi w skład stosunku wchodzących, co zależy ściśle od postaci stosunku, czyli od postaci wyrazu n go, a zatém prawo to musi się zmieniać według rodzaju funkcyi, pod jaką stosunek wyrazów przedstawia się i to należy do zastosowania tego prawa. To nam tłumaczy, dla czego dotąd tak było trudném znalezienie ogólnego prawa.

19. Nim jednak zastosujemy to prawo do szczególnych rodzai funkcyi, podamy wnioski, do jakich prawo powyższe prowadzi; jakoż wyrażenie (7) § 18, oznaczając stosunek przez $f(n)$ daje:

$$f(n) = a + \frac{b}{\varphi} + \frac{c}{\varphi\varphi_1} + \frac{d}{\varphi\varphi_1\varphi_2} + \dots \qquad \text{(a)}$$

a biorąc pochodną co do odwrotności z φ uważając φ_1 φ_2 . . . za stałe będzie:

$$\frac{df}{d\frac{1}{\varphi}} = b + \frac{c}{\varphi_1} + \frac{d}{\varphi_1 \varphi_2} + \ldots \qquad \text{(b)}$$

a czyniąc $n = \infty$, będzie:

$$b = \left(\frac{df}{d\frac{1}{\varphi}}\right)_\infty$$

wyrażenie (b) różniczkując co do z odwrotności φ_1 uważając φ_2 . . za stałe; otrzymamy:

$$\frac{d^2 f}{d\frac{1}{\varphi}\, d\frac{1}{\varphi_1}} = c + \frac{d}{\varphi_2} + \ldots$$

a ztąd:

$$c = \left(\frac{d^2 f}{d\frac{1}{\varphi}\, d\frac{1}{\varphi_1}}\right)_\infty$$

i tak następnie. Zatém spółczynniki rozwinięcia stosunku, są to wartości pochodnych coraz wyższego rzędu, branych co do odwrotności z pewnych funkcyi z n, stających się nieskończonemi, uważając inne funkcye z n za stałe, wzięte dla $n = \infty$; tak że wyrażenie (a), jest rozwinięciem szczególnego rodzaju.

20. Ponieważ dotąd wyrażaliśmy zawsze szereg przez stosunek wyrazów, dla tego ważném jest oznaczyć z danego stosunku wyrazów, wyraz n ty szeregu.

Jakoż niech będzie stosunek:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = f(n)$$

to

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{f(n)}$$

a ztąd:

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{f(n+1)}$$

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2}}{f(n+2)} \quad . \; . \; ,$$

A ztąd ogólnie:

$$u_{n+\nu} = \frac{u_{n+\nu-1}}{f(n+\nu-1)}$$

mnożąc przez siebie te wyrażenia, będzie:

$$u_{n+\nu} = \frac{u_n}{f(n) \, ? \, f(n+\nu-1)}$$

a czyniąc $n = 0$, a $\nu = n$, będzie:

$$u_n = \frac{u_0}{f(0) \, ? \, f(n-1)}$$

gdyby $f(0)$ stawało się nieskończoném, to czyniąc $n = 1$, a $\nu = n - 1$ będzie:

$$u_n = \frac{u_1}{f(1) \, ? \, f(n-1)}$$

gdzie u_0 i u_1 są ilości stałe, które można położyć równe jedności, i będzie jeszcze:

$$u_n = \frac{1}{f(0) \, ? \, f(n-1)}$$

lub:

$$u_n = \frac{1}{f(1) \, ? \, f(n-1)}$$

Mając więc stosunek wyrazów, zawsze mamy wyraz n ty szeregu, i widzimy że wyraz n ty i stosunek są funkcyami tegoż samego rodzaju, czyli składają się z tychże samych funkcyi.

21. Gdy stosunek wyrazów daje się rozwinąć według odwrotności z n postaci:

$$f(n) = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \dots \qquad \text{(a)}$$

to aby szereg dany był zbieżny, potrzeba aby $a_0 > 1$, więc gdy a_0 zmienia się, otrzymujemy mnóstwo szeregów rozbieżnych i zbieżnych, między któremi szereg, dla którego $a_0 = 1$, będzie granicznym; gdy w rozwinięciu nie ma dalszych wyrazów, naturalnie spółczynnik a_1 jest zero i szereg ten graniczny będzie rozbieżnym.

Gdy zaś znajduje się wyraz następny, szereg ten przestaje być granicznym, bo gdy $a_0 = 1$, jeszcze mamy mnóstwo szeregów zbieżnych i rozbieżnych, powstałych z różnych wartości a_1 i gdy nie ma w rozwinięciu dalszych wyrazów, między temi szeregami będzie jeden, dla którego $a_1 = 1$, który będzie można uważać za graniczny, a że $a_2 = 0$, więc będzie rozbieżny.

Tak daléj postępując, dowiedziemy, że:

1. Między szeregami mającemi wyrazy ze znakami jednakowemi, znajduje się mnóstwo *szeregów granicznych*, które wszystkie są rozbieżne, a ich stosunki wyrazów są:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1, \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \text{ i t. d.}$$

czyli ogólnie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^v + n^{v-1} + \ldots + 1}{n^v}$$

czyli summując wyrazy w liczniku, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^{v+1} - 1}{(n-1)\, n^v} \tag{b}$$

2. Porównywając to wyrażenie z warunkami zbieżności szeregów wypada, że te szeregi mają za stosunki wyrazów warunki zbieżności; że te graniczne szeregi mają za graniczny ogólny, szereg, którego stosunek będzie, gdy przedłużymy rozwinięcie do nieskończoności:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

czyli w powyższém wyrażeniu czyniąc $v = \infty$:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n}{n-1} \tag{c}$$

szereg ten będzie *szeregiem granicznym głównym* i rozbieżnym, postaci:

$$u_n = \frac{1}{n}$$

to jest.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

Rzecz godna uwagi, że szereg ten graniczny jest tenże sam co drugi graniczny, czyniąc $v=1$.

3. Ze stosunków tych łatwo otrzymamy wyrazy ogólne tych szeregów, wyciągając wartość na u_{n+1}, tworząc wyrazy nowe, i ztąd wyprowadzając wyraz ogólny, otrzymamy tym sposobem:

$$u_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^v\,!}{(n^v-1)!} \tag{d}$$

gdzie czyniąc $v=1, 2, 3, \dots$ otrzymamy wyrazy ogólne szeregów granicznych:

$$u_n = 1 \quad , \quad \frac{n^2\,!}{n\,(n^2-1)\,!} \quad , \quad \frac{n^3\,!}{n\,(n^3-1)\,!} \dots \frac{1}{n}$$

i wszystkie rozbieżne, czyli jeszcze redukując:

$$u_n = 1 \quad , \quad \frac{1}{n}\, , \quad \frac{n^2\,(n-1)^2\,!}{(n^2+n+1)\,!}, \dots \frac{1}{n}$$

22. Szeregi mające wyrazy ze znakami naprzemian, aby były zbieżne, w wyrażeniu (a § 21), a_0 musi być większe od jedności; gdy więc a_0 zmienia się, otrzymujemy wiele szeregów jużto zbieżnych, już rozbieżnych; między temi, gdy stosunek wyrazów nie ma dalszych wyrazów w rozwinięciu, granicznym szeregiem jest szereg, dla którego $a_0 = 1$, a że wszystkie następne wyrazy równe 0, przeto szereg ten będzie rozbieżnym. Gdy znajduje się wyraz a_1 wtedy szereg ten nie będzie granicznym, bo gdy $a_0 = 1$, a_1 może zmieniać się i otrzymujemy nieskończenie wiele szeregów już zbieżnych, już rozbieżnych, według jak $a_1 > 0$, lub < 0, a granicznym będzie teraz szereg, dla którego $a_1 = 0$; lecz gdy $a_1 = 0$, wracamy znowu do szeregu pierwszego, i tak następnie.

Zatém szeregi mające wyrazy ze znakami na przemian, mają szeregi graniczne wszystkie jednakie i sprowadzają się do pierwszego, którego stosunek jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$$

a którego wyraz ogólny $u_n = a$, czyli:

$$a - a + a - a + a - a \dots$$

i jest to zarazem *szereg graniczny główny*, dla tego rodzaju szeregów.

23. Gdy stosunek wyrazów rozwija się na szereg (7), mamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = a + \frac{b}{\varphi} + \frac{c}{\varphi\varphi_1} + \frac{d}{\varphi\varphi_1\varphi_2} + \dots$$

i jeżeli ten szereg kończy się na wyrazie pierwszym a, to gdy $a > 1$ jest zbieżny, gdy $a \leqslant 1$ rozbieżny, przeto szereg dla którego:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$$

jest granicznym między rozbieżnemi i zbieżnemi, i sam jest rozbieżny; jest to szereg jak widzimy, którego wyrazy są jednakowe i ma postać:

$$u_0 + u_0 + u_0 + u_0 + \dots$$

$$u_0 - u_0 + u_0 - u_0 + \dots$$

według jak powstaje z szeregów o znakach jednakowych, lub naprzemian idących.

Daléj, gdy stosunek wyrazów, stając się równym jedności dla $n = \infty$, wyraża się przez dwa wyrazy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{b}{\varphi}.$$

to znowu jak wiemy ten stosunek będzie należał do szeregów rozmaitych rozbieżnych i zbieżnych, między któremi graniczne będą, gdy założymy $b = 1$ i $b = 0$, co daje dla szeregów o znakach jednakowych:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi + 1}{\varphi}$$

a ztąd wyraz n ty szeregu granicznego, będzie miał postać:

$$u_n = \frac{\varphi(1) \,?\, \varphi(n)}{(\varphi(1)+1) \,?\, (\varphi(n)+1)}$$

dla szeregów o znakach naprzemian, $b=0$ daje jeszcze szereg powyższy:

$$u_0 - u_0 + u_0 - u_0 + \dots$$

Pozostawiając trzeci wyraz, otrzymamy nowy szereg graniczny, i tak daléj, tak że wszystkie te szeregi graniczne, mają za graniczny szereg główny, którego stosunek wyrazów będzie wyrażał się przez rozwinięcie powyższe, w którym wszystkie spółczynniki są jednościami, a który dla szczególnych rodzai funkcyi ma szczególną postać; a dla szeregów o znakach na przemian, szereg graniczny jest zawsze jeden, i ma postać jak wyżéj oznaczono. Wszystkie te szeregi są rozbieżne, a ztąd mamy następujące twierdzenie:

Znajdują się między szeregami zbieżnemi i rozbieżnemi o znakach jednakowych, szeregi graniczne, które mają postać szczególną, zależącą od postaci wyrazu ogólnego szeregu, a między temi szeregami granicznemi są jeszcze szeregi główne graniczne; między szeregami zaś o znakach na przemian jest jeden graniczny, którego wyrazy stają się równe zupełnie, i wszystkie te szeregi graniczne są rozbieżne.

24. Gdy szereg jest rozwinięciem funkcyi według wzoru Taylora i jego wyraz n ty, ma postać:

$$u_n = \frac{h^n}{n!} f^n(x)$$

to stosunek wyrazów daje:

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{1}{h}\left(\frac{nf^{n-1}(x)}{f^n(x)}\right)$$

i aby to rozwinięcie było szeregiem zbieżnym, potrzeba aby ten stosunek był większy od jedności dla $n=\infty$; zatém granicą zbieżności dla szeregów o znakach jednakowych, będzie:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{nf^{n-1}(x)}{f^n(x)}\right)_\infty = 1$$

a że szeregi mające znaki jednakowe zmieniają się na szeregi mające znaki na przemian i odwrotnie, gdy h zmienia znak; przeto dla drugiego rodzaju szeregów, będzie:

$$\frac{1}{h}\left(\frac{nf^{n-1}(x)}{f^n(x)}\right)_\infty = -1$$

A zbierając razem, otrzymamy:

$$h = \pm\left(\frac{nf^{n-1}(x)}{f^n(x)}\right)_\infty \tag{8}$$

Oto są granice zbieżności szeregu rozwinięcia funkcyi na szereg Taylora, wyrażone jako związek między ilością h i x. Zatém: *granice między któremi szereg Taylora jest ciągle zbieżnym, są dwie, jedna dodatna, druga odjemna i wyrażają się przez stosunek pochodnéj $n-1$, do pochodnéj n téj, i wziętéj n razy, dla wartości $n = \infty$.*

25. Gdy szereg jest rozwinięciem według wzoru Maclaurina, którego n ty wyraz jest:

$$u_n = \frac{x^n}{n!} f^n(0)$$

to będzie:

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{1}{x}\left(\frac{nf^{n-1}(0)}{f^n(0)}\right)$$

a ztąd aby szereg był zbieżnym, musi być:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{nf^{n-1}(0)}{f^n(0)}\right)_\infty = \pm 1$$

czyli:

$$x = \pm\left(\frac{nf^{n-1}(0)}{f^n(0)}\right)_\infty \tag{9}$$

to jest: *że szereg Maclaurina ma dwie granice, jedna dodatna, druga odjemna, sobie równe i równe stosunkowi n tych pochodnych, wziętemu n razy dla $n = \infty$.*

Dotąd nie umiemy oznaczyć stosunku n tych pochodnych dla $n = \infty$, a oznaczenie go wymaga nowych praw rachunku które rozwiniemy w części drugiéj.

26. Podamy tu jeszcze kilka postaci warunków zbieżności szeregów. Gdy stosunek wyrazów daje się rozwinąć według odwrotności z n, warunki zbieżności wyrażają się, zakładając, że dopiero spółczynnik v staje się większy od jedności, dla szeregów ze znakami jednakowemi, przez:

$$n\left\{n\left(\ldots . n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) \ldots .\right)-1\right\}=a_v$$

czyli rozwijając i uważając że:

$$1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^{v-1}}=\frac{n^v-1}{(n-1)\, n^{v-1}}$$

otrzymamy:

$$n^v \frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{n\,(n^v-1)}{n-1}=a_v \tag{10}$$

a wyłączając n^v, będzie jeszcze:

$$n^v\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-\frac{(n^v-1)}{(n-1)\, n^{v-1}}\right\}=a_v$$

i czyniąc w drugiéj części $n=\infty$, będzie.

$$n^v\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)_\infty=a_v$$

a czyniąc $\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\mathrm{A}$, będzie prościéj:

$$(n^v \mathrm{A})_\infty=a_v \tag{10'}$$

a dla szeregów ze znakami naprzemian jest:

$$n^v\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)_\infty=a_v$$

czyli także:

$$(n^v \mathrm{A})_\infty=a_v$$

to jest: *że szeregi dla których stosunek wyrazów staje się jednością, są zbieżne, gdy pierwsza z potęg n pomnożona przez ten stosunek zmniejszony jednością, która nie staje się jednością lub zero dla $n=\infty$, według tego jak szeregi są o znakach jednakowych lub naprzemian, jest większa od jedności lub zera, w przeciwnym razie rozbieżne.*

Jest to szczególna postać warunków zbieżności szeregów godna uwagi.

27. Powyższe warunki dają się odwrócić i wyrazić przez stosunek odwrotny wyrazów, jakoż dla szeregów ze znakami jednakowemi, mamy dla $n = \infty$:

$$u^v \frac{u_n}{u_{n+1}} - \frac{n(n^v - 1)}{n-1} > 1$$

a ztąd:

$$\frac{n^{v+1} - 1}{(n-1)n^v} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \tag{11}$$

gdy przeniesiemy jedność na drugą stronę, będzie:

$$\left(\frac{n^{v+1} - 1}{n-1}\right) \frac{u_{n+1}}{u_n} - n^v < 0$$

i tak, gdy założymy $v = 0, 1, 2, 3$, i t. d., będą warunki:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{lub} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$$

$$\frac{(n+1)\,u_{n+1}}{nu_n} < 1 \quad \text{lub} \quad \frac{(n+1)\,u_{n+1}}{u_n} - n < 0, \text{ i t. d.}$$

Gdy szeregi mają znaki na przemian, to ponieważ mamy jedno ostateczne prawo:

$$n^v \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqq 0$$

które odwracając, otrzymamy pierwszy warunek odwrócony:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 0$$

Zatém widzimy, że prawo dla szeregów o znakach na przemian, nie daje się odwracać, a odwrócone ginie, wracając warunek pierwszy.

To dowodzi, jak trudno się wyrażają warunki zbieżności przez odwrotność ze stosunku wyrazów.

28. Gdy stosunek wyrazów daje się rozwinąć według pewnych funkcyi z n, stających się nieskończonemi dla $n = \infty$, i gdy założymy, że spółczynnik n téj funkcyi staje się większy od jedności lub zera, będzie:

$$\varphi_v \left\{ \varphi_{v-1} \cdots \left(\varphi\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \cdots - 1 \right\} = a_v$$

gdzie dla szeregów ze znakami jednakowemi musi być $a_v > 1$, a dla szeregów ze znakami naprzemian $a_v > 0$. Rozwijając, będzie:

$$\varphi ? \varphi_v \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_v \left\{ \varphi_{v-1} \left(\ldots \varphi_1(\varphi + 1) \ \ldots \right) + 1 \right\} = a_v \quad (12)$$

a że gdy φ staje się nieskończone, w drugim wyrazie pierwszéj strony można jedności opuścić jako niknące przy wartościach nieskończonych; przeto będzie:

$$\varphi ? \varphi_v \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = a_v$$

a czyniąc jak wyżéj $\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = A$, będzie:

$$(\varphi ? \varphi_v A)_\infty = a_v \qquad (12')$$

to jest: *że szeregi dla których stosunek wyrazów staje się jednością, są zbieżne, gdy pierwszy iloczyn z funkcyi stających się nieskończonemi, na które rozwija się stosunek wyrazów pomnożony przez stosunek wyrazów zmniejszony jednością dla $n = \infty$, który nie staje się jednością lub zero według tego, jak szereg ma znaki jednakowe lub na przemian jest większy od jedności lub zera, w przeciwnym razie rozbieżne.*

Postać szczególna i również godna uwagi.

29. Warunki ogólne we wzorze (12) zawarte, można odwrócić i wyrazić przez stosunek odwrotny wyrazów.

Jakoż dla szeregów ze znakami jednakowemi, warunek ten daje:

$$\varphi ? \varphi_v \frac{u_n}{u_{n+1}} - \varphi_v \left\{ \varphi_{v-1} \left(\ldots \varphi_1(\varphi + 1) \ldots \right) + 1 \right\} > 1$$

czyli rozwiązując tę nierówność, otrzymamy:

$$\left[\varphi_v \left\{ \varphi_{v-1} \left(\cdots \varphi_1(\varphi + 1) \ldots \right) + 1 \right\} + 1 \right] \frac{u_{n+1}}{u_n} - \varphi ? \varphi_v < 0 \qquad (13)$$

i to wyrażenie nie daje się już uprościć.

Gdy założymy *np.*, że te funkcye są: n, ln, lln $llln$ i t. d. otrzymamy z tego wyrażenia po kolei, następne warunki:

$$(n + 1) \frac{u_{n+1}}{u_n} - n < 0$$

$$\left(ln(n+1)+1\right)\frac{u_{n+1}}{u_n} - nln < 0 \qquad (13')$$

$$\left\{ lln \left(ln(n+1)+1\right)+1\right\}\frac{u_{n+1}}{u_n} - n\,l\,n\,ll\,n < 0, \text{ i t. d.}$$

takie są warunki dla podobnego rodzaju szeregów.

Dla szeregów ze znakami na przemian, podobnie jak w § 27, nie można odwracać warunków objętych wyrażeniem:

$$\varphi ? \varphi_v\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 0$$

gdyż otrzymamy z niego warunek pierwszy odwrócony:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

zatém w odwróceniu te warunki giną.

W ogóle więc możemy powiedzieć, że warunki zbieżności szeregów nie dają się tak prosto wyrazić przez odwrotność stosunku wyrazów; dla tego téż warunki podawane dotychczas, nie mogły być zupełne.

30. W § 14 dowiedliśmy, że gdy stosunek wyrazów ma za granicę jedność i gdy

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = a_1$$

ma za granicę ε_1 większe od jedności, to gdy szeregi zbieżne, musi być:

$$(nu_n)_\infty = 0$$

Gdy zaś a_1 ma za granicę jedność, według § 15, szereg jeszcze jest zbieżny, gdy:

$$n\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) - 1\right\} = a_2$$

ma za granicę ε_2 większe od jedności; w tym przypadku mamy:

$$u_{n+1} = \frac{n^2}{n^2+n+a_2}\,u_n$$

a ztąd wyprowadzając dalsze wyrazy i summując tak jak w § 14, otrzymamy:

$$S_n > n^2 u_n \left\{ \frac{1}{n^2 + n + a_2} + \ldots \right\}$$

$$S_n > n^2 u_n \left\{ \frac{1}{n^2 + n + \varepsilon_2} + \ldots \right\}$$

szeregi w nawiasach według powyższego prawa zbieżności, dają summę skończoną i oznaczoną, którą oznaczając dla pierwszego przez A, dla drugiego przez E, będzie:

$$S_n < \frac{n^2 u_n}{A}, \quad > \frac{n^2 u_n}{E}$$

a na mocy wniosku 3, § 4, musi być:

$$(n^2 u_n)_\infty = 0$$

podobnie dowiedziemy w ogóle, że gdy w rozwinięciu pierwszy spółczynnik, który nie znika, jest a_v i większy od jedności, to musi być zawsze:

$$(n^v u_n)_\infty = 0 \tag{14}$$

to jest: *gdy szeregi są zbieżne, i gdy spółczynniki rozwinięcia stosunku są wszystkie aż do a_v równe jedności, to koniecznie wszystkie iloczyny wyrazu n go przez kolejne potęgi z n aż do v téj włącznie, muszą mieć za granicę zero. Lecz odwrotnie to miejsca nie ma i szeregi przy tych warunkach mogą być rozbieżne.*

Podobnie dowieść można, że gdy stosunek szeregu wyraża się przez:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\varphi} + \ldots + \frac{a_v}{\varphi \cdots \varphi_v}$$

i gdy $a_v > 1$ będzie:

$$(\varphi \cdots \varphi_v u_n)_\infty = 0 \tag{15}$$

to jest: *że gdy stosunek rozwija się według pewnych funkcyi, stających się dla $n = \infty$ nieskończonemi, i gdy wszystkie współczynniki rozwinięcia stają się równe jedności prócz a_v, to wyraz n ty pomnożony przez iloczyn tych funkcyi, będący mianownikiem tego spółczynnika a_v, musi mieć za granicę zero.*

I tak, gdy te funkcye przybierają *np.* postać n, ln, ll_n . . . otrzymamy dla tego rodzaju funkcyi warunek:

$$(n\, ln\, lln \ldots u_n)_\infty = 0 \tag{16}$$

Prawo zawarte w tym wzorze, podawane jest jako obejmujące ogólne warunki zbieżności szeregów, konieczne, lecz niedostateczne; tu widzimy zaś, że one są tylko szczególnym przypadkiem i służą dla szczególnych funkcyi, mianowicie logarytmowych (*).

31. Wszystkie te postacie warunków zbieżności nie były dotąd znane, niektóre z nich tylko są znane i to w innéj formie, w formie odwrotności ze stosunku, co zdaje się utrudniało wiele znalezienie prawa całkowitego. I tak, pierwszy Cauchy podał pierwszą część tego prawa w formie: iż odwrotność ze stosunku wyrazów, powinna być mniejsza od jedności dla szeregów o znakach jednakowych, to jest:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$$

dla szeregów zaś ze znakami na przemian, odpowiednie prawo nie było dotąd podane, a warunek iż dostateczna, aby wyrazy ubywały i dążyły do zera, jest niedostateczny, jak to wskazaliśmy w § 10.

Olivier w dzienniku Crellego (T. 2, p. 34), podał prawo, że:

$$(nu_n)_\infty = 0$$

lecz jak wyżéj dowiedliśmy (§ 14, wniosek), to prawo nie jest dostateczne, i szeregi mogą być rozbieżne, chociaż ten warunek ma miejsce.

32. Kummer w tymże dzienniku (T. 20, z r. 1835) podał prawo, że szeregi których wyrazy zacząwszy od pewnego, mają znaki jednakowe, i który ma własność, że stosunek wyrazów $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ daje się rozwinąć według potęg odjemnych z n, jest zbieżnym, gdy wyrażenie:

$$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - n - 1 > 0$$

dla $n = \infty$, gdy zaś to wyrażenie równe 0, lub mniejsze od zera, szeregi rozbieżne. A że to wyrażenie jest to samo co:

(*) Patrz: Catalan „Traité élémentaire des séries:" page 17.

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1$$

przeto warunek ten jest ściśle warunkiem drugim przez nas podanego prawa, a prawo Kummera niedostateczne w tém, że gdy to wyrażenie równe zero, szeregi mogą być jeszcze zbieżne.

W témże piśmie podał jeszcze Kummer inne twierdzenie ogólniejsze następne: gdy funkcya $\varphi(n)$ jest taka, że $\varphi(n)\, u_n$ dąży do zera dla $n = \infty$, to gdy:

$$\frac{\varphi(n)u_n}{a}-\frac{\varphi(n+1)}{a}\,u_{n+1}-u_{n+1}>0$$

szereg jest zbieżny.

To wyrażenie wychodzi na to:

$$\varphi(n)\,\frac{u_n}{u_{n+1}}-\varphi(n+1)>a$$

gdzie $a>0$, i daje się jeszcze napisać:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{\varphi(n+1)+a}{\varphi(n)}$$

Ponieważ ten stosunek musi dać się rozwinąć według $\varphi(n)$ przeto będzie inaczéj:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{a}{\varphi(n)}+\frac{\psi(n)}{\varphi(n)}$$

a ztąd naodwrót:

$$\varphi(n)\left\{\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right\}>a+\psi(n)$$

jest to więc niedokładny warunek nasz drugi, gdyż nawet gdy $a=1$, szeregi mogą być zbieżne, gdy $\psi(n)$ ma wartość skończoną i dodatną.

33. Inne warunki podawane dotychczas za ogólne, są dane przez Bertranda i Pauckera (*), dają się wysłowić tak: Szeregi mające wyrazy ze znakami jednakowemi, są zbieżne lub rozbieżne, według jak pierwsza z ilości:

$$(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}-n$$

(*) Catalan: „Traite élément. des séries" page 21 i dalsze.

$$(n+1)\,l\,(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n} - nln \tag{a}$$

$$(n+1)\,l(n+1)\,ll(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n} - nln\,lln, \quad \text{i t. d.}$$

która nie jest zero, jest odjemną lub dodatną.

Przedewszystkiém z saméj formy tych szeregów widzimy, że one mogą być tylko zastosowane do szeregów, których stosunek wyraża się przez logarytmy z n. Daléj porównywając z warunkami takiemiż (§ 29) widzimy, że drugie wyrazy są też same, spółczynniki pierwszego wyrazu czyli stosunku wyrazów są różne, o ile zaś ta różnica wpływa na same warunki, to łatwo przekonywamy się, odwracając też warunki, jakoż otrzymamy:

$$n\,\frac{u_n}{u_{n+1}} - n > 1$$

$$nln\,\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\,l\,(n+1) > 0 \tag{b}$$

$$nln\,lln\,\frac{u_n}{u_{n+1}} - (n+1)\,l\,(n+1)\,ll\,(n+1) > 0, \quad \text{i t. d.}$$

a wyrażenia (13′) dają w tym przypadku:

$$n\,\frac{u_n}{u_{n+1}} - n > 1$$

$$nln\,\frac{u_n}{u_{n+1}} - ln\,(n+1) > 1$$

$$n\,l\,n\,lln\,\frac{u_n}{u_{n+1}} - lln\,(ln(n+1)+1) > 1, \quad \text{i t. d.}$$

aby te wyrażenia porównać, rozwińmy drugie wyrazy w (b). Jakoż wiemy że:

$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$$l\,(n+1) = l\left\{ n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\} = ln + l\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

zatém:

$$l\,(n+1) = ln + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots = ln + \mathrm{N}$$

podobnie:

$$ll(n+1) = l(ln+\mathrm{N}) = l\left\{ln\left(1+\frac{\mathrm{N}}{ln}\right)\right\} = lln + l\left(1+\frac{\mathrm{N}}{ln}\right)$$

zatém:

$$ll(n+1) = lln + \frac{1}{nln} - \frac{1}{2n^2 ln}\left(1+\frac{1}{ln}\right) + \ldots,$$

a ztąd już warunki (b) przedstawią się:

$$n\frac{u_n}{u_{n+1}} - n > 1$$

$$nln\frac{u_n}{u_{n+1}} - ln(n+1) > 1 + \frac{1}{2n} - \ldots, \text{ i t. p.}$$

a dla $n = \infty$ te warunki schodzą się z warunkami naszemi (13′), lecz mają formę nadzwyczaj zawikłaną, i służą tylko dla funkcyi logarytmowych, i są szczególnym przypadkiem prawa ogólnego.

ROZDZIAŁ TRZECI.

ZASTOSOWANIE PRAWA ZBIEŻNOŚCI DO SZEREGÓW WYRAŻONYCH PRZEZ FUNKCYE ALGEBRAICZNE LUB LOGARYTMOWE.

a. Szeregi algebraiczne.

34. Gdy wyraz ogólny szeregu jest funkcyą algebraiczną, stosunek wyrazów będzie także funkcyą algebraiczną, i daje się przedstawić w postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = f(n)$$

gdzie $f(n)$ jest funkcyą algebraiczną, kładąc za n, $\frac{1}{\nu}$ i znosząc mianowniki, otrzymamy:

$$f(n) = P(\nu) f(\nu)$$

gdzie $f(\nu)$ będzie to funkcya odwrotności z n, a $P(\nu)$ będzie to czynnik zawierający potęgi z n, a rozwijając $f(\nu)$ na szereg Maclaurina i przywracając n, otrzymamy:

$$f(n) = P\left(\frac{1}{n}\right)\left\{ f(0) + \frac{1}{n} f'(0) + \frac{1}{n^2}\frac{f''(0)}{2\,!} + \dots \right\}$$

a ztąd prawidło ogólne daje się dla funkcyi algebraicznych tak wyrazić:

1. *W szeregach, których stosunek wyrazów jest algebraiczną funkcyą z n, jeżeli rozwiniemy ten stosunek na szereg według odwrotności z n, i gdy czynnik* $P\left(\frac{1}{n}\right)$ *jest potęgą dodatną, szeregi są zbieżne, gdy potęgą odjemną są rozbieżne, gdy nakoniec ten*

czynnik znika, to szeregi są zbieżne, gdy funkcya dla $n = \infty$ ma wartość większą od jedności, rozbieżne, gdy jest mniejszą od jedności.

2. *Gdy ta funkcya jest równa jedności, to szeregi będą zbieżne, gdy pierwsza z pochodnych tego stosunku, co do odwrotności z n, podzielona przez odpowiedni jéj iloczyn z liczb porządkowych, która nie staje się jednością dla szeregów ze znakami jednakowemi, lub zero dla szeregów ze znakami na przemian, jest większa od jedności lub zero; rozbieżne w przypadku odwrotnym.*

Gdy wszystkie pochodne stają się jednością lub zero, mamy szeregi graniczne dla tego rodzaju szeregów; jakoż summując, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^{v+1} - 1}{(n-1)n^v}$$

i obejmuje wszystkie szeregi graniczne szczególne, a gdy położymy $v = \infty$, otrzymamy szereg graniczny główny, którego stosunek jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n}{n-1}$$

zgodnie z § 21.

35. Podamy teraz kilka przykładów.

1. Niech będzie szereg wyrażony przez:

$$u_n = \frac{1}{n!}$$

mamy:

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = n$$

dla $n = \infty$ ma wartość nieskończoną, więc jest zbieżny.

2. Szereg z wyrazem ogólnym:

$$u_n = \frac{1}{n^3}$$

daje:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3$$

a rozwijając, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}$$

a że drugi wyraz ma wartość więcéj 3, przeto szereg jest zbieżnym, czy ma znaki jednakowe, czy na przemian idące.

3. Szereg z wyrazem ogólnym:

$$u_n = \frac{m ? (m - n + 1)}{n\,!} a^m$$

będący rozwinięciem dwumianu $(1+a)^m$, daje:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n+1}{m-n} \cdot \frac{1}{a}$$

a rozwijając, otrzymamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left\{ 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m(m+1)}{n^2} \dots \right\} \frac{1}{a}$$

a zatém szeregi będą zbieżne, tak ze znakami dodatnemi, jak na przemian, gdy $a < 1$, czyli gdy a zawarte między $+1$ i -1; a gdy $a = +1$, szeregi będą zbieżne, gdy m dodatne i większe od zera; gdy $m = 0$, szeregi są rozbieżne; dla $a = -1$, szeregi są zbieżne, gdy m większe od -1; a gdy $m = -1$, szeregi są rozbieżne, bo wszystkie spółczynniki rozwinięcia są zero; zatém, dla $a = \pm 1$, szeregi są zbieżne, gdy m dodatne; a dla $a = -1$, gdy m zawarte między 0 i -1.

36. Szereg podany w § 10.

$$S_n = \frac{a}{1} - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} \dots + \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} \dots$$

którego wyrazy dążą do zera dla $n = \infty$, i mają znaki na przemian, daje:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{a(n+1)}{b\,n}$$

$$= \frac{a}{b}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

zatém będzie zbieżny, gdy $\frac{a}{b} > 1$, czyli gdy $a > b$, gdy zaś $a < b$ jest rozbieżnym, chociaż wyrazy jego dążą do zera; gdy

$a = b$ szereg jest zbieżny, gdyż spółczynnik następnego wyrazu jest jedność.

Gdybyśmy uważali ten szereg za peryodyczny, to zbierając po dwa wyrazy, będzie:

$$g_n = \frac{(a-b)\,n+a}{n\,(n+1)}$$

a ztąd stosunek będzie:

$$\frac{g_n}{g_{n+1}} = \frac{(a-b)\,n+a}{(a-b)(n+1)+a} \cdot \frac{n+2}{n}$$

a rozwijając, wypada:

$$\frac{g_n}{g_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{b}{(a-b)\,n^2} + \frac{(2\,a-b)\,b}{(a-b)^2\,n^3} + \ldots$$

a zatem, aby szereg był zbieżnym, potrzeba aby $a > b$, gdyż inaczéj wyraz trzeci byłby odjemnym, daléj $b > \frac{a}{2}$, zatém b musi być zawarte między a i $\frac{a}{2}$; gdy b równa się granicy a, szereg jest zbieżny, gdyż trzeci wyraz nieskończony; gdy zaś drugiéj granicy $\frac{a}{2}$, to ponieważ spółczynnik czwartego wyrazu staje się 3, przeto w drugiéj granicy zbieżny. A zatém nic nie usprawiedliwia twierdzenia dobrze znanego, aby szeregi o znakach na przemian, były zbieżne, gdy wyrazy dążą z n do zera.

37. Szeregi, których stosunek jest funkcyą całkowitą algebraiczną z n, są zawsze zbieżne, albowiem te funkcye dla $n = \infty$, stają się nieskończone. Stosunek szeregu wyraża się przez:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = (n^v + a_1\, n^{v-1} + \ldots) = A_v\,(n)$$

a ich wyraz ogólny ma postać:

$$u_n = \frac{1}{A_v(1)\,A_v\,(2)\ldots A_v\,(n)}.$$

Gdy stosunek wyraża się przez funkcyą ułamkową, to gdy stopień licznika jest większy od stopnia mianownika, szeregi są zawsze zbieżne, w przeciwnym razie zawsze rozbieżne; gdy zaś stopnie ich są równe, stosunek dąży do jedności z n i ma postać:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{b_0 n^v + b_1 n^{v-1} + \ldots}{a_0 n^v + a_1 n^{v-1} + \ldots} \tag{a}$$

co można napisać w postaci, dzieląc przez n^v :

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{b_0 + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + \ldots}{a_0 + a_1 n^{-1} + a_2 n^{-2} + \ldots}$$

i rozwijając na szereg co do n^{-1}, lub też przez wyrażenia ogólne, odejmując jedność, mnożąc przez n i czyniąc kolejno $n = \infty$, co w tym przypadku jest łatwiéj; otrzymamy następne warunki dla szeregów ze znakami jednakowemi:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_0 + a_1 \\ &\ldots\ldots \\ b_\mu &= a_0 + a_1 + \ldots + a_\mu \end{aligned}$$

czyli:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 \\ b_1 - b_0 &= a_1 \\ b_2 - b_1 &= a_2 \\ &\ldots\ldots \\ b_\mu - b_{\mu-1} &= a_\mu \end{aligned} \tag{b}$$

Zatém: *szeregi, których stosunek wyrazów jest funkcyą algebraiczną ułamkową, stopnia zero, będą zbieżne, gdy spółczynnik pierwszego wyrazu licznika jest większy od spółczynnika takiegoż wyrazu w mianowniku; a gdy te spółczynniki równe, będą jeszcze zbieżne, gdy pierwsza różnica spółczynników dwóch wyrazów tychże samych, licznika i mianownika, która nie jest równa spółczynnikowi poprzedniego wyrazu w liczniku, jest od niego większa.*

Gauss w „Comment soc. Gotting" T. 2, p. 23, podał część tego prawa, a mianowicie, że powinno być $b_0 > a_0$ i $b_1 - a_1 > a_0$ a gdy $b_1 - a_1 = a_0$, szeregi mają być rozbieżne; tymczasem tu dowiedliśmy, że szeregi są jeszcze zbieżne i dla tego warunku (*).

(*) Patrz: Bertrand: „Traité de calcul différentiel" pag. 243, gdzie koniec dowodu jest błędny; opiera się na porównaniu dwóch szeregów

Kładąc za a_0, a_1 . . . w wyrażeniu stosunku ich wartości, otrzymamy szereg graniczny postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{b_0 n^v + b_1 n^{v-1} + b_2 n^{v-2} + \ldots}{b_0 n^v + (b_1 - b_0) n^{v-1} + (b_2 - b_1) n^{v-2} + \ldots}$$

Zatém: szereg graniczny ma tę szczególną postać, że spółczynniki mianownika, są to odpowiednie spółczynnika licznika, zmniejszone spółczynnikami wyrazów poprzednich w liczniku, a pierwsze wyrazy też same.

Gdy szeregi mają znaki na przemian, warunki zbieżności otrzymują się podobnie, i są prostsze:

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 = a_1$$
$$. \quad . \quad . \quad .$$
$$b_\mu = a_\mu$$

to jest: *że szeregi są zbieżne, gdy spółczynnik pierwszego wyrazu licznika, większy od spółczynnika pierwszego wyrazu mianownika; a gdy jest mu równy, to szeregi są jeszcze zbieżne, gdy pierwszy ze spółczynników licznika, który nie staje się równy odpowiedniemu spółczynnikowi mianownika, jest od niego większy i odwrotnie.*

Uwaga. Powtórzyć tu musimy uwagę § 17, iż w warunkach (b), ponieważ pierwsza strona ma być zawsze większa od drugiéj, gdy szereg jest zbieżny; przeto zmieniać strony w tych równaniach i wszystkich następnych nie można, gdyż wprowadzimy zamieszanie; a chcąc przenosić je, potrzeba wprowadzić znaki większości lub mniejszości.

---

związanych warunkiem:

$$v_n = u_n\,(n-h) \tag{a}$$

gdzie h dostatecznie wielkie; a w założeniu $A + 1 - a = 0$, wpada w szeregi graniczne, i w tym przechodzie jeden szereg staje się rozbieżnym, gdy drugi jeszcze pozostaje zbieżnym; jakoż gdy $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$, szereg pierwszy rozbieżny. Stosunek wyrazów drugiego szeregu otrzymamy z (a) odwracając będzie: $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{h}{n^2}$ a zatém szereg jest zbieżnym, gdy $h > 1$, założenie zaś zakładało właśnie, że h dodatne i dostatecznie wielkie, zatém ten szereg jest zbieżny, gdy pierwszy rozbieżny i błąd stanowi przejście przez granicę.

38. Szeregi, których stosunek jest potęgą funkcyi całkowitéj postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = (n^\nu + a_1 n^{\nu-1} + \ldots)^m$$

daje się wyrazić tak:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = n^{m\nu}\left(1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots\right)^m$$

a ztąd wypada, że gdy wykładniki ν i m oba są dodatne, lub oba odjemne, szeregi są zbieżne; gdy zaś różnych znaków, szeregi są rozbieżne; gdy zaś $\nu = 0$, czynnik $n^{m\nu}$ niknie i pozostaje:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots\right)^m$$

a rozwijając potęgę m tą, otrzymamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{m}{n}\,a_1 + \left(m\,a_2 + \frac{m\,(m-1)}{1.2}\,a_1^2\right)\frac{1}{n^2} + \ldots$$

równając spółczynniki raz do jedności, drugi raz do zera; otrzymamy warunki żądane dla obu rodzai szeregów.

Jakoż będzie dla szeregów ze znakami jednakowemi po rozwiązaniu:

$$a_1 = \frac{1}{m}$$

$$a_2 = \frac{m+1}{1.2\,m^2}$$

$$a_3 = \frac{(m+1)\,(2m+1)}{3!\,m^3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_\mu = \frac{(m+1)\,?\,((\mu-1)\,m+1)}{\mu\,!\,m^\mu}.$$

Godne uwagi są proste warunki objęte temi wyrażeniami; pierwszy warunek wskazuje, że szereg będzie zbieżnym, gdy spółczynnik drugiego wyrazu jest większy od odwrotności z wykładnika, a gdy jest mu równy, to szeregi jeszcze będą zbieżne, gdy następny spółczynnik jest większy od $\frac{m+1}{2m^2}$.

Kładąc te wyrażenia za $a_1\ a_2 \ldots$ w wyrażenie stosunku otrzymamy szereg graniczny rozbieżny, mający za stosunek:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left\{ 1 + \frac{1}{mn} + \frac{m+1}{2m^2n^2} + \frac{(m+1)(2m+1)}{3!\, m^3\, n^3} + \ldots \right\}^m$$

Gdy szereg ma wyrazy ze znakami naprzemian, spółczynniki rozwinięcia zrównane do zera, dadzą:

$$a_1 = 0$$
$$a_2 = 0$$
$$a_3 = 0 \qquad \text{i t. d.}$$

warunki różne od poprzedzających.

Gdy wykładnik m jest ułamkowy i równy $\frac{1}{m}$ wyrażenia powyższe dla szeregów o znakach jednakowych przyjmują prostszą postać:

$$a_1 = m$$
$$a_2 = \frac{m\,(m+1)}{1.\,2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$a_\mu = \frac{m\,?\,(m+\mu-1)}{\mu\,!}$$

a gdy $m = 2$, są liczbami porządkowemi; tak że mamy prawo:

Szeregi, których stosunek wyrazów jest pierwiastkiem kwadratowym z funkcyi algebraicznéj, i staje się jednością dla $n = \infty$; będą zbieżne, gdy spółczynniki téj funkcyi algebraicznéj, są kolejno większe od liczby oznaczającéj miejsce ich wyrazów lub zera, według, jak wyrazy mają znaki jednakowe lub naprzemian idące; w przeciwnym razie są rozbieżne.

39. Szeregi, których stosunek wyrazów ma postać złożoną z czynników:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(c_1\, n+d_1)\,(c_2\, n+d_2)\ldots\ldots}{(a_1\, n+b_1)\,(a_2\, n+b_2)\ldots\ldots}$$

biorąc po dwa czynniki i wykonywając działanie, otrzymamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{c_1c_2n^2+(c_1d_2+d_1c_2)n+d_1d_2}{a_1a_2n^2+(a_1b_2+b_1a_2)n+b_1b_2}$$

i według § 37, warunki zbieżności będą:

$$c_1c_2 = a_1a_2$$
$$c_1d_2+d_1c_2-a_1b_2-b_1a_2=c_1c_2$$
$$d_1d_2-b_1b_2=c_1d_2+d_1c_2.$$

Ogólny wyraz szeregu powyższego, jest postaci:

$$u_n = \left(\frac{a_1+b_1}{c_1+d_1}\right) ? \left(\frac{a_1n+b_1}{c_1n+d_1}\right)\left(\frac{a_2+b_2}{c_2+d_2}\right) ? \left(\frac{a_2n+b_2}{c_2n+d_2}\right)$$

Gdy $a_1 = c_1$ i $a_2 = c_2$ warunek pierwszy znika a inne dają:

$$a_1(d_2-b_2)+a_2(d_1-b_1)=a_1a_2$$
$$d_1d_2-b_1b_2=c_1d_2-d_1c_2$$

Gdy $b_1 = d_1$ i $b_2 = d_2$, warunki będą:

$$c_1c_2=a_1a_2$$
$$b_2(c_1-a_1)+b_1(c_2-a_2)=c_1c_2.$$

Zatém gdy iloczyn $c_1 c_2$ większy od $a_1 a_2$, szeregi będą zbieżne, gdy zaś te iloczyny będą równe, musi nie miéć miejsca drugi warunek, gdy zaś i ten warunek spełniony, szeregi są rozbieżne, gdyż w trzecim warunku pierwsza strona jest stale zero (*).

Gdy szereg ma znaki na przemian, warunki będą:

$$c_1 c_2=a_1 a_2$$
$$c_1d_2+d_1c_2=a_1b_2+b_1a_2$$
$$d_1d_2=b_1b_2$$

a gdy $a_1 = c_1$ i $a_2 = c_2$, będzie:

$$a_1(d_2-b_2)=a_2(b_1-d_1)$$
$$d_1d_2=b_1b_2$$

(*) Porównaj, Catalan: „Traité élément. des séries.“ pag. 27.

40. Gdy w powyższém zadaniu spółczynniki przy n stają się równe jedności, wyraz ogólny przyjmuje postać:

$$u_n = \frac{\alpha ? (\alpha+n)\, \beta ? (\beta+n)}{\gamma ? (\gamma+n)\, \delta ? (\delta+n)} \tag{a}$$

a stosunek wyrazów jest teraz:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(\gamma+n)(\delta+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

czyli:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n^2+(\gamma+\delta)\,n+\gamma\delta}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}$$

dla szeregów ze znakami jednakowemi, będą warunki:

$$\gamma + \delta - \alpha - \beta = 1$$

$$\gamma\,\delta - \alpha\,\beta = \gamma + \delta$$

to jest: *szeregi będą zbieżne, gdy summa ilości stałych w mianownikach wyrazów szeregu, zmniejszona summą takich ilości w licznikach jest większa od jedności; gdy zaś równa jedności, szeregi będą jeszcze zbieżne, gdy różnica ich iloczynów będzie większa od summy ilości stałych w mianownikach; gdy zaś i te ilości będą sobie równe, szeregi będą rozbieżne.*

Gdy założymy $\delta = 1$, mamy znany szereg:

$$1 + \frac{\alpha\,\beta}{1\,\gamma} + \frac{\alpha\,(\alpha+1)\,\beta\,(\beta+1)}{1.\,2\,\gamma\,(\gamma+1)} + \ldots \tag{b}$$

którego warunki zbieżności są:

$$\gamma = \alpha + \beta$$

$$-\,\alpha\,\beta = 1.$$

Gdy ilości α i β z założenia są dodatne, czyli szereg o wyrazach ze znakami jednakowemi, drugi warunek pokazuje, że gdy pierwszy jest dopełniony, szeregi będą zawsze rozbieżne.

Zatém: *szereg powyższy jest zbieżny, gdy ilość stała w mianowniku jest większa od summy ilości stałych w liczniku; gdy zaś mniejsza od niéj lub równa, rozbieżny.*

Dla szeregów (a) ze znakami na przemian idącemi, podobnie otrzymamy:

$$\gamma + \delta = \alpha + \beta$$

$$\gamma \delta = \alpha \beta$$

to jest: *szeregi powyższe ze znakami na przemian są zbieżne, gdy summa ilości stałych w mianowniku, jest większa od summy ilości stałych w liczniku; a gdy te summy są równe, to szeregi jeszcze będą zbieżne, gdy iloczyn tych ilości w mianowniku, będzie większy od iloczynu ilości w liczniku; a gdy i te iloczyny będą równe, szeregi będą już rozbieżne.*

Gdy $\delta = 1$, a szereg (b) ma znaki na przemian, to warunki stają się:

$$\gamma + 1 = \alpha + \beta$$

$$\gamma = \alpha \beta$$

a gdy warunek pierwszy dopełniony, to powinno być:

$$\alpha + \beta - 1 > \alpha \beta$$

$$\alpha \beta - \alpha - \beta < -1$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$$

Zatém: *szereg będzie zbieżnym, gdy ilość stała w mianowniku będzie większa od summy ilości stałych w liczniku zmniejszonéj jednością; a gdy te ilości równe sobie, to szereg będzie jeszcze zbieżnym, gdy iloczyn ilości stałych w liczniku zmniejszonych jednościami, jest mniejszy od zera; gdy zaś jeszcze jeden z warunków* $\alpha = 1$, *lub* $\beta = 1$ *będzie dopełniony, szeregi będą rozbieżne.*

Widzimy więc, z jaką łatwością rozwiązują się zadania tego rodzaju, za pomocą prawa przez nas podanego; z jaką zaś trudnością i z jaką niedostatecznością zadania powyższe są dotąd rozwiązywane, dosyć jest przejrzéć jedno z dzieł traktujących ten przedmiot, a mianowicie dzieło: „Traité élémentaire des séries“ par Catalan, Paris 1860, gdzie zebrane są prawie wszystkie dotąd znane w tym przedmiocie prawidła, a porozrzucane po pismach czasowych.

b. Szeregi logarytmowe.

41. Gdy wyraz ogólny szeregu, jest funkcyą logarytmową z n, stosunek wyrazów będzie także funkcyą logarytmową, i gdy w skład wyrazu ogólnego lub stosunku nie wchodzą inne funkcye z n, jak tylko n i ln stające się nieskończonemi dla $n = \infty$; to mogą zajść dwa przypadki:

1. albo tylko wchodzi sama funkcya ln,
2. albo wchodzi w połączeniu z n.

W pierwszym przypadku stosunek ma postać:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = f(ln)$$

gdzie f jest funkcya algebraiczna z ln, czyniąc $ln = m$, ten stosunek jak również wyraz ogólny, będą funkcyami algebraicznemi z m, i cała teorya podana w rozdziale poprzednim, ściśle może być zastosowaną; a szeregi graniczne, objęte będą teraz wyrażeniem:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{ln} + \frac{1}{ln^2} + \dots$$

czyli:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(ln)^{v+1} - 1}{(ln-1)(ln)^v}$$

a szereg graniczny główny otrzymamy, czyniąc $v = \infty$, to jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{ln}{ln-1}$$

którego wyraz ogólny będzie:

$$u_n = \frac{(l\,2-1)\,?\,(ln-1)}{l2\,?\,ln}$$

i jest różny od szeregu pierwszego, gdy uczynimy $v = 1$; i to jest jedna z właściwości, różniących te szeregi od algebraicznych, dla których one są też same (§ 34).

42. Gdy stosunek jest logarytmem z funkcyi algebraicznéj postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\,f(n)$$

to wyrażając $f(n)$ pod postacią $P(n) f\left(\frac{1}{n}\right)$, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\,P(n) + l\,f\left(\frac{1}{n}\right)$$

a rozwijając $l\,f\left(\frac{1}{n}\right)$ na szereg według $\frac{1}{n}$ dla $n = \infty$, i oznaczając pochodne przez $D\,l\,f(0)$, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\,P(n) + l\,f(0) + \frac{D\,l\,f(0)}{1\,n} + \frac{D^2\,l\,f(0)}{2\,!\,n^2} + \ldots$$

ztąd otrzymamy warunki dla szeregów ze znakami jednakowemi:

$$l\,P = 0$$

$$l\,f(0) = 1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{D^v\,l\,f(0)}{v\,!} = 1$$

dla szeregów ze znakami na przemian:

$$l\,P = 0$$

$$l\,f(0) = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$D^v\,l\,f(0) = 0$$

Zatém: *szeregi, których stosunek wyraża się przez logarytm z funkcyi algebraicznéj, są zbieżne, gdy funkcya algebraiczna jest stopnia dodatnego; rozbieżne, gdy odjemnego; gdy zaś jest stopnia zero, pierwszy wyraz niknie i szeregi będą jeszcze zbieżne, gdy sama funkcya odwrotności z n, lub pierwsza z jéj pochodnych, podzielona przez odpowiédni iloczyn z liczb naturalnych, która nie staje się jednością, dla szeregów o znakach jednakowych, lub zero dla szeregów o znakach na przemian, jest większa od jedności lub zera; i odwrotnie.*

Jako przykład, weźmy szereg ze stosunkiem:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\left(\frac{an+b}{n}\right)$$

to ponieważ jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = la + \frac{b}{an} - \frac{b^2}{2a^2n^2} + \dots$$

Przeto warunki zbieżności dla szeregów ze znakami jednakowemi, będą:

$$l\,a = 1 \qquad\qquad a = e$$

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \text{czyli:} \quad b = e$$

Zatém: szereg ten będzie zbieżnym, gdy a większe od e podstawy logarytmowéj; a gdy równe e, to jeszcze będzie zbieżny gdy b większe od e; a gdy i $b \leqslant e$, szereg będzie rozbieżny.

Dla szeregów o znakach na przemian, będzie:

$$l\,a = 1 \qquad\qquad a = e$$

$$\frac{b}{a} = 0 \quad \text{czyli:} \quad b = 0$$

to jest: szeregi będą zbieżne, gdy a większe od e; gdy $a = e$, będą zbieżne jeszcze, gdy b większe od zera; lecz gdy i $b = 0$ są rozbieżne, gdyż trzeci wyraz jest odjemny.

Nakoniec, kładąc te warunki, otrzymamy szeregi graniczne postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\left(\frac{n+1}{n}\right), \qquad \frac{u_n}{u_{n+1}} = 1$$

jak być powinno:

43. Weźmy jeszcze szereg, którego stosunek ma postać:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\left(\frac{b_0 n^\nu + b_1 n^{\nu-1} + \dots}{a_0 n^\mu + a_1 n^{\mu-1} + \dots}\right) \tag{a}$$

daje się wyrazić przez:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = (\nu - \mu)\, ln + l\left(\frac{b_0 + b_1 n^{-1} + \dots}{a_0 + a_1 n^{-1} + \dots}\right)$$

zatém: gdy $\nu - \mu > 0$, szeregi będą zbieżne; gdy $\nu - \mu < 0$, rozbieżne; a gdy $\nu - \mu = 0$, wyrażenie powyższe zamieni się na:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l \left(\frac{b_0 + b_1 n^{-1} + \ldots}{a_0 + a_1 n^{-1} + \ldots} \right) \tag{b}$$

i warunki zbieżności szeregu znajdujemy łatwo:

$$b_0 = a_0 e$$
$$b_1 = e\,(a_0 + a_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_\mu = e\,(a_0 + a_1 + \ldots + a_\mu)$$

czyli:

$$b_0 = a_0 e$$
$$b_1 - b_0 = a_1 e$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$b_\mu - b_{\mu-1} = a_\mu e$$

dla szeregów zaś ze znakami na przemian, będzie:

$$b_0 = a_0 e$$
$$b_1 = a_1 e$$
$$\ldots\ldots$$
$$b_\mu = a_\mu e$$

Warunki podobne jak dla funkcyi algebraicznéj, tylko mnożone przez e.

Zatém: *szeregi powyższéj postaci będą zbieżne, gdy spółczynnik pierwszego wyrazu w liczniku jest większy od spółczynnika takiegoż wyrazu w mianowniku, pomnożonego przez podstawę logarytmową; a gdy mu jest równy, wtedy szeregi o znakach jednakowych są jeszcze zbieżne, gdy pierwsza różnica dwóch spółczynników licznika, która nie jest równa odpowiedniemu spółczynnikowi mianownika, pomnożonemu przez podstawę logarytmów, jest od niego większa; a szeregi o znakach na przemian będą zbieżne, gdy pierwszy ze spółczynników licznika, który nie jest równy odpowiedniemu spółczynnikowi mianownika, pomnożonemu przez podstawę, jest od tego iloczynu większy; w przeciwnym razie szeregi są rozbieżne.*

44. Szereg, którego stosunek jest postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l \left(\frac{a_0 n^\nu + a_1 n^{\nu-1} + \ldots}{n^\nu} \right)^m$$

daje:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = ml\,(a_0 + a_1 n^{-1} + a_2 n^{-2} + \ldots)$$

a rozwijając, otrzymamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = mla_0 + \frac{ma_1}{a_0}\,n^{-1} + \frac{m\,(2a_0 a_2 - a_1^2)}{2a_0}\,n^{-2} + \ldots$$

Ztąd dla szeregów o znakach jednakowych, będzie:

$$mla_0 = 1 \qquad\qquad a_0 = e^{\frac{1}{m}}$$

$$ma_1 = a_0 \qquad \text{czyli} \qquad a_1 = \frac{e^{\frac{1}{m}}}{m}$$

$$m\,(2a_0 a_2 - a_1^2) = 2\,a_0 \qquad\qquad a_2 = \frac{2\,m + e^{\frac{1}{m}}}{2\,m^2} \quad \text{i t. d.}$$

Dla szeregów o znakach na przemian:

$$mla_0 = 1 \qquad\qquad a_0 = e^{\frac{1}{m}}$$

$$a_1 = 0 \qquad \text{czyli} \qquad a_1 = 0$$

$$2\,a_0 a_2 - a_1^2 = 0 \qquad\qquad a_2 = 0 \quad \text{i t. d.}$$

Zatém szeregi powyższego kształtu, aby były zbieżne, potrzeba, aby pierwsze strony warunków powyższych, które zależą od podstawy logarytmów i wykładnika m, kolejno były większe od stron drugich.

I tak, gdy mamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\left(\frac{a_0 n + a_1}{n}\right)^m$$

to szereg będzie zbieżny, gdy a_0 będzie większe od $e^{\frac{1}{m}}$; gdy $a_0 = e^{\frac{1}{m}}$ będzie zbieżny jeszcze, gdy a_1 będzie większe od $\frac{e^{\frac{1}{m}}}{m}$; a szereg graniczny rozbieżny, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\left\{ e\left(\frac{n+\frac{1}{m}}{n}\right)^m \right\}$$

45. Gdy stosunek wyrazów ma postać:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{l(f(n))}{l(\varphi(n))}$$

gdzie $f(n)$ i $\varphi(n)$ są funkcye algebraiczne całkowite z n; oznaczmy stopień funkcyi f przez β, a φ przez α, będzie:

$$f(n) = n^\beta f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\varphi(n) = n^\alpha \varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

a ztąd:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\beta\, ln + l f\left(\frac{1}{n}\right)}{\alpha\, ln + l\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}$$

a że (§ 42):

$$lf\left(\frac{1}{n}\right) = lf(0) + \frac{\mathrm{D}\, lf(0)}{1\, n} + \frac{\mathrm{D}^2\, lf(0)}{2!\, n^2} + \dots$$

przeto:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\beta + \frac{lf(0)}{ln} + \frac{\mathrm{D}\, lf(0)}{nln} + \dots}{\alpha + \frac{l\varphi(0)}{ln} + \frac{\mathrm{D}\, l\varphi(0)}{nln} + \dots}$$

wyrażenie to jest rozwinięte co do dwóch funkcyi ln i n, i ma postać funkcyi ułamkowéj, któréj warunki zbieżności oznaczone zostały w § 37; zatém: kładąc tamże za spółczynniki a i b odpowiednie im spółczynniki wyrażenia powyższego, otrzymamy dla szeregów o znakach jednakowych:

$$\beta = \alpha$$

$$lf(0) - \beta = l\varphi(0)$$

$$\mathrm{D}\, lf(0) - lf(0) = \mathrm{D}\, l\varphi(0)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\mathrm{D}^v\, lf(0) - v\, \mathrm{D}^{v-1}\, lf(0) = \mathrm{D}^v\, l\varphi(0)$$

Dla szeregów ze znakami na przemian:

$$\beta = \alpha$$
$$l f(0) = l \varphi(0)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$D^v\, l f(0) = D^v\, l \varphi(0)$$

Warunki bardzo proste, i nie potrzebujące żadnego tłumaczenia.

I tak, gdy mamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{l f(n)}{l(n)}$$

to $a = 1$, i wszystkie pochodne mianownika stają się zero; a warunki zmieniają się na:

dla szeregów o znakach jednakowych: $\left\{\begin{array}{l} \beta = 1 \\ l f(0) = 1 \\ D\, l f(0) = 1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D^v\, l f(0) = v! \end{array}\right.$ dla szeregów o znakach na przemian: $\left\{\begin{array}{l} \beta = 1 \\ l f(0) = 0 \\ D\, l f(0) = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ D^v\, l f(0) = 0 \end{array}\right.$

to jest: *aby szereg był zbieżnym, potrzeba aby stopień funkcyi pod logarytmem był większy od jedności; a gdy równy jedności szereg będzie zbieżnym, gdy pierwsza z pochodnych téj funkcyi co do odwrotności z n, która nie staje się równa iloczynowi liczb porządkowych jéj odpowiedniemu, dla szeregów o znakach jednakowych; lub zero dla szeregów o znakach na przemian, jest od nich większa; w przeciwnym razie szeregi są rozbieżne.*

Kładąc te wartości w wyrażenie stosunku, otrzymamy szereg graniczny postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{ln} + \frac{1}{nln} + \ldots$$

wyrażenie to daje się zsummować, i będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\left\{(n-1)\,ln + n\right\} n^v - 1}{(n-1)\, n^v\, ln}$$

gdy $v = 0$, otrzymamy piérwszy szereg graniczny:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{ln+1}{ln}$$

gdy $v = \infty$, będzie szereg graniczny główny:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{ln+1}{ln}$$

oba też same, tak jak dla funkcyi algebraicznych.

46. Weźmy jeszcze stosunek wyrazów:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{l\,f(n)}{ln}\right)^m$$

a oznaczając przez β stopień funkcyi algebraicznéj $f(n)$, można go przedstawić pod postacią:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \beta^m \left\{ 1 + \frac{l\,f(0)}{\beta ln} + \frac{D\,l\,f(0)}{\beta\, nln} + \ldots \right\}^m$$

gdzie widzimy: że szeregi są zbieżne, gdy β^m większe od jedności dla obu rodzai szeregów; a rozbieżne, gdy mniejsze od jedności, bez względu na znak.

Gdy zaś β^m staje się równe jedności, co inaczéj być nie może, tylko gdy $\beta = 1$, to szeregi jeszcze będą zbieżne; a wtedy to rozwinięcie będzie mieć postać taką, jak w § 38; przeto kładąc odpowiednie ilości w tamte warunki, otrzymamy:

$$l\,f(0) = \frac{1}{m}$$

$$D\,l\,f(0) = \frac{m+1}{2\,m^2}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$D^v\,l\,f(0) = \frac{(m+1)\,?\,(v\,m+1)}{(v+1)\,m^{v+1}}$$

Dla szeregów ze znakami na przemian idącemi, w założeniu zawsze $\beta = 1$, będzie:

$$l\,f(0) = 0$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$D^v\,l\,f(0) = 0.$$

Gdy wykładnik m jest ułamkowy, wyrażenia powyższe dla szeregów o znakach jednakowych, przyjmują prostszą postać:

$$l\,f(0) = m$$

$$D\,l f(0) = \frac{m(m+1)}{2}$$

. . . .

$$D^v\ l f(0) = \frac{m\,?\,(m+v)}{v+1}$$

a gdy $m = 2$, będzie:

$$D^v\ l f(0) = v\,!\,(v+2)$$

Ostatnie prawo daje się łatwo tak wysłowić: *Szeregi, których stosunek wyrazów jest pierwiastkiem kwadratowym z funkcyi logarytmowéj i staje się jednością dla* $n = \infty$, *będą zbieżne, gdy pierwsza z pochodnych branych co do* $\frac{1}{n}$, *która nie jest równa iloczynowi odpowiedniemu z liczb porządkowych, pomnożonemu przez liczbę o 2 większą dla szeregów ze znakami jednakowemi; lub zero, dla szeregów ze znakami na przemian, jest od tychże wartości większa; w przeciwnym razie szeregi są rozbieżne.*

47. Niech będzie jeszcze:

1. Szereg mający za stosunek wyrazów.

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{la\,(n+1)}{ln}\right)^m$$

ten stosunek wyrazimy tak:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left\{1+\frac{la}{ln}+\frac{l\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ln}\right\}^m$$

a rozwijając, otrzymamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1+\frac{mla}{ln}\left(1+\ldots\right)+\frac{1}{n}\left(1+\frac{mla}{ln}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{n^2}\left(\frac{m}{2ln}+\ldots\right)-\frac{1}{n^3}\left(\frac{m}{3ln}+\ldots\right)+\ldots$$

a zatém, warunki zbieżności dla szeregów ze znakami jednakowemi, będą:

$$\begin{array}{ccc} mla = 1 & & a = e^{\frac{1}{m}} \\ & \text{czyli:} & \\ m = 2 & & m = 2 \end{array}$$

to jest: *że szereg będzie zbieżnym, gdy a jest większe od pierwiastku m go stopnia z podstawy logarytmów, a gdy* $a = e^{\frac{1}{m}}$, *to musi być wykładnik m większy od 2; gdy zaś i* $m = 2$, *szereg jest rozbieżny; lecz może być szereg zbieżny jeszcze dla szczególnéj wartości* $a = 1$, *wtedy giną wszystkie wyrazy mające a i będzie zbieżnym jeszcze, gdy m większe od 2; w przeciwnym razie rozbieżny.*

2. Szereg, którego wyraz ogólny ma postać:

$$u_n = \left\{ \frac{l\,(n+1)}{ln} - 1 \right\} = \frac{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{ln}$$

daje na stosunek wyrazów:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left\{1 + \frac{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{l\,n}\right\}}{l\left(1 + \frac{2}{n}\right) - l\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

a rozwijając, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \ldots + \frac{1}{nln} - \frac{1}{n^2 ln} + \ldots}{1 - \frac{3}{2n} + \frac{7}{3n^2} - \ldots}$$

a stosując do tego prawo § 16, będzie:

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \frac{1 + \frac{1}{ln} - \frac{2}{n} - \frac{1}{nln} + \ldots}{1 - \frac{3}{2n} - \ldots}$$

a że dla $n = \infty$, to wyrażenie jest równe 1, przeto idąc daléj, będzie:

$$n\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}=\frac{1+\frac{ln}{n}-\frac{1}{n}+\ldots}{1-\frac{3}{n}+\ldots}$$

a czyniąc $n=\infty$, jeszcze to wyrażenie jest równe jedności, i mnożąc przez $\frac{n}{ln}$, będzie:

$$\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2ln}+\ldots}{1-\frac{3}{n}+\ldots}$$

które dla $n=\infty$ daje $-\frac{1}{2}$, zatém szereg jest rozbieżny.

3. Szereg, którego wyraz ogólny jest:

$$u_n=\left(\frac{ll\,(n+1)}{lln}\right)^{1+\alpha}$$

ma za stosunek:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\left\{\frac{ll\,(n+1)}{lln}\cdot\frac{l\,\frac{l\,(n+1)}{ln}}{l\,\frac{l\,(n+2)}{l\,(n+1)}}\right\}^{1+\alpha}$$

a rozwijając to wyrażenie, otrzymamy:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{\alpha+1}{n}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2n^2}+\ldots+\frac{\alpha+1}{nlnlln}+\frac{(\alpha+1)(4\alpha+1)}{2n^2lnlln}+\ldots$$

to jest: aby szereg był zbieżnym, powinno być α większe od zera, a gdy $\alpha=0$, trzeci wyraz staje się zero, i szereg rozbieżny.

Zatém szereg powyższy jest zbieżny; gdy α jest dodatne; rozbieżny, gdy α odjemne lub zero (*)

(*) Porównaj: „Catalan, Traité élément. des séries“ page 19 i 20.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

ZASTOSOWANIE PRAWA ZBIEŻNOŚCI DO SZEREGÓW WYRAŻONYCH PRZEZ FUNKCYE WYKŁADNICZE, PERYODYCZNE I UROJONE

c. Szeregi wykładnicze.

48. Gdy stosunek wyrazów szeregu ma szczególną postać, lub złożoną z pewnéj liczby czynników, dogodniéj jest często wprowadzić następujące przekształcenie w ogólném prawie zbieżności szeregów.

Załóżmy, że stosunek wyrazów można przyprowadzić do postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \mathrm{P} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

gdzie P jest czynnik z n, a biorąc logarytmy i rozwijając drugą stronę, będzie:

$$l\frac{u_n}{u_{n+1}} = l\,\mathrm{P} + l f(0) + \frac{\mathrm{D}\, l f(0)}{n} + \frac{\mathrm{D}^2\, l f(0)}{2\,!\, n^2} + \ldots$$

rozwijając zaś samą funkcyą $f\left(\frac{1}{n}\right)$, byłoby:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \mathrm{P}\left\{f(0) + \frac{\mathrm{D} f(0)}{n} + \frac{\mathrm{D}^2 f(0)}{2\,!\, n^2} + \ldots\right\}$$

a warunki zbieżności dla szeregów o znakach jednakowych, byłyby:

$$P = 1 \quad \text{i} \quad f(0) = 1$$
$$Df(0) = 1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\frac{D^v f(0)}{v\,!} = 1.$$

Porównywając je z rozwinięciem pierwszém, otrzymamy warunki potrzebne, wyrażone przez logarytm stosunku; jakoż warunek pierwszy $P = 1$, znaczy to samo co $l\,P = 0$; zatém $l\,P$ powinno znikać.

Drugi warunek $f(0) = 1$, odpowiada $l\,f(0) = 0$. A że mamy daléj:

$$D\,l\,f(x) = \frac{D f(x)}{f(x)}$$

więc czyniąc $x = 0$ i uważając na warunki powyższe, będzie trzeci warunek:

$$D\,l\,f(0) = 1.$$

Następny warunek otrzymamy, wiedząc że:

$$D^2\,l\,f(x) = \frac{f(x)\,D^2 f(x) - (D f(x))^2}{(f(x))^2}$$

a czyniąc $x = 0$, otrzymamy:

$$\frac{D^2\,l\,f(0)}{2\,!} = \frac{1}{2}$$

podobnie:

$$\frac{D^3\,l\,f(0)}{3\,!} = \frac{1}{3}$$

i w ogóle:

$$\frac{D^v\,l\,f(0)}{v\,!} = \frac{1}{v}$$

a ztąd zbierając razem, otrzymamy warunki:

$$l\,P = 0 \qquad l\,f(0) = 0$$
$$D\,l\,f(0) = 1$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\frac{D^v\,l\,f(0)}{v\,!} = \frac{1}{v}.$$

Dla szeregów znowu ze znakami na przemian, będzie:

$$\begin{array}{lcl} f(0) = 1 & & l\,f(0) = 0 \\ \mathrm{D}\,f(0) = 0 & & \mathrm{D}\,l\,f(0) = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \text{co daje:} & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \mathrm{D}^v\,f(0) = 0 & & \mathrm{D}^v\,l\,f(0) = 0. \end{array}$$

Ztąd mamy nowe prawo, które się daje tak wysłowić:

1. *Szeregi będą zbieżne, gdy rozwijając logarytm stosunku wyrazów na szereg według odwrotności z n, wykładnik czynnika przed rozwinięciem jest mniejszy od zera, a gdy wykładnik niknie i staje się zero, szeregi będą zbieżne, gdy pierwszy wyraz rozwinięcia jest większy od zera, a rozbieżne, gdy wykładnik większy od zera, lub pierwszy wyraz jest mniejszy od zera.*

2. *Gdy pierwszy wyraz jest równy zero, to szeregi będą zbieżne, gdy pierwsza pochodna, podzielona przez odpowiedni iloczyn z liczb porządkowych, która nie staje się równa odwrotności z liczby jéj rzędem będącéj; dla szeregów o znakach jednakowych lub zero, dla szeregów o znakach na przemian jest większa od téj odwrotności lub zera; w przeciwnym razie są rozbieżne.*

To prawo tak przerobione, daje się z łatwością stosować do szeregów, których wyraz ogólny, jest funkcyą wykładniczą z n.

49. Warunki powyżéj otrzymane, wprowadzając do rozwinięcia, otrzymamy:

$$l\,\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \ldots \qquad \text{(a)}$$

a ztąd warunki dla tego rodzaju szeregów, przedstawią się w następnéj formule, oznaczając przez v spółczynnik któregokolwiek wyrazu, dla szeregów ze znakami jednakowemi:

$$n\left\{n\ldots n\left(nl\,\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)\ldots\,\frac{1}{v}\right\} = \frac{1}{v+1}$$

a dla szeregów o znakach na przemian:

$$n^v\, l\,\frac{u_n}{u_{n+1}} = 0.$$

Gdy stosunek wyrazów dopełnia jednego lub kilku z tych warunków, szereg staje się granicznym. Jakoż powyższy szereg daje:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\frac{1}{n}}\; e^{\frac{1}{2n^2}}\; e^{\frac{1}{3n^3}} \ldots$$

ztąd szczególne postacie stosunku szeregów, będą:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\frac{1}{n}},\; e^{\frac{2n+1}{2n^2}}, \quad \text{i t. d.}$$

a wyrazy ich ogólne są:

$$u_n = \frac{1}{e \; ? \; e^{\frac{1}{n}}},\; \frac{1}{e^{\frac{1}{2}} \; ? \; e^{\frac{2n+1}{2n^2}}} \quad \text{i t. d.}$$

Przedłużając wyrażenie (a) do nieskończoności, otrzymamy szereg graniczny główny, a że druga strona staje się wtedy równa:

$$-\,l\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

przeto stosunek tego szeregu mającego znaki jednakowe, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{n}{n-1};$$

warunki zaś zbieżności dla szeregów o znakach na przemian, dają:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1;$$

są to stosunki szeregów granicznych głównych, dla obu rodzai szeregów takież same, jak dla funkcyi algebraicznych.

50. Zastosujmy to prawo do szczególnych postaci stosunku wyrazów; i tak, gdy

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{f(n)}$$

mamy:

$$l\,\frac{u_n}{u_{n+1}} = f(n)$$

a gdy $f(n)$ jest funkcyą algebraiczną stopnia α, będzie rozwijając:

$$l\,\frac{u_n}{u_{n+1}} = n^\alpha \left\{ f(0) + \frac{f'(0)}{1!\,n} + \dots \right\}$$

Warunki zbieżności są:

$$\text{dla znaków jednakowych:} \begin{cases} n^\alpha f(0) = 0 \\ n^\alpha f'(0) = 1 \\ n^\alpha f''(0) = 1 \\ \dots\dots \end{cases} \qquad \text{dla znaków na przemian:} \begin{cases} n^\alpha f(0) = 0 \\ n^\alpha f'(0) = 0 \\ n^\alpha f''(0) = 0 \\ \dots\dots \end{cases}$$

Ponieważ α jest stopień funkcyi $f(0)$, przeto jakiekolwiek jest α, $f(0)$ nie może być zerem, gdyż α nie byłoby stopniem funkcyi; zatém gdy α jest większe od zera, wyraz pierwszy staje się nieskończonym, a szeregi będą zbieżne lub rozbieżne, według tego jak $f(0)$ dodatne lub odjemne. Gdy α jest równe zero, to jeszcze szeregi będą zbieżne lub rozbieżne, według tego jak $f(0)$ dodatne lub odjemne; gdy nakoniec α jest mniejsze od zera, wszystkie warunki stają się zero, i szeregi są rozbieżne.

Dla szeregów o znakach na przemian, gdy $\alpha > 0$, szeregi będą dla powyższéj przyczyny zbieżne lub rozbieżne, według tego jak $f(0)$ jest dodatne lub odjemne; gdy $\alpha = 0$, będą jeszcze zbieżne, gdy $f(0)$, dodatne; nakoniec gdy $\alpha < 0$, będą rozbieżne.

A zbierając to razem i uważając na znak funkcyi wykładnika, powiemy:

Szeregi tak ze znakami jednakowemi jak na przemian, których stosunek wyraża się przez podstawę logarytmów, mającą za wykładnik funkcyą algebraiczną; będą zbieżne, gdy stopień funkcyi jest równy lub większy od zera, a wykładnik dodatny; rozbieżne, gdy wykładnik odjemny; gdy zaś stopień funkcyi odjemny, szeregi są zawsze rozbieżne.

51. Niech będzie szereg, którego stosunek wyrazów jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = e^{\frac{b_0 n^\nu + b_1 n^{\nu-1} + \dots}{a_0 n^\mu + a_1 n^{\mu-1} + \dots}}$$

na mocy powyższego prawa będzie zbieżnym, gdy $\nu - \mu \geqslant 0$, i $\frac{b_0}{a_0} > 0$; to jest gdy oba spółczynnika a_0 i b_0 dodatne lub odjemne; gdy zaś oba znaków różnych, lub gdy $\nu - \mu < 0$, jest rozbieżnym.

Zatém prawo zbieżności dla funkcyi wykładniczéj, któréj wykładnik jest funkcyą algebraiczną ułamkową, jest prostsze od prawa dla samych funkcyi algebraicznych lub logarytmowych, i zależy tylko od stopnia i spółczynników pierwszych wyrazów funkcyi, a zupełnie nie zależne od innych spółczynników.

Godném także uwagi, że tego rodzaju szeregi nie mają szeregów granicznych, lecz odrazu przechodzą ze zbieżnych w rozbieżne.

52. Gdy stosunek wyrazów ma postać:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = f(n)^{\varphi(n)}$$

będzie:

$$l\frac{u_n}{u_{n+1}} = \varphi(n)\, l f(n)$$

oznaczając przez α i β stopnie funkcyi algebraicznych $\varphi(n)$ i $f(n)$, i wyłączając czynniki z n, będzie:

$$l\frac{u_n}{u_{n+1}} = n^\alpha \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\left\{\beta\, ln + l f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

a rozwijając, otrzymamy:

$$l\frac{u_n}{u_{n+1}} = n^\alpha\, ln \left\{\begin{array}{l} \beta\varphi(0) + \frac{\beta\varphi'(0)}{n} + \frac{\beta\varphi''(0)}{2!\,n^2} + \ldots \\ \qquad + \frac{\varphi(0)}{n\, l n} + \frac{\varphi'(0)}{n^2\, ln} + \ldots \\ \qquad - \frac{\varphi(0)}{2n^2\, ln} - \frac{\varphi'(0)}{2n^3\, ln} - \ldots \end{array}\right\}$$

przeto warunki będą:

$$n^\alpha\, l n\, \beta\, \varphi(0) = 0$$

$$n^\alpha\, ln\, \beta\, \varphi'(0) = 1 \qquad \text{i t. d.}$$

Tu trzeba rozróżnić dwa przypadki: albo β i φ (0) mają znaki też same, lub różne.

1. Gdy β i φ (0) mają znaki też same, to wyrażenie pierwsze jest zawsze dodatne, i gdy $\alpha > 0$, staje się dla $n = \infty$ nieskończone, a szeregi zbieżne; gdy $\alpha < 0$, szeregi będą rozbieżne; gdy $\alpha = 0$, to φ (0) nie może być zerem, albowiem α nie byłoby stopniem funkcyi $\varphi(n)$; przeto jest dodatne lub odjemne, a zatém jakiekolwiek będzie β, szeregi będą zbieżne; a gdy $\beta = 0$, to gdy φ (0) dodatne, szeregi zbieżne, gdy odjemne, szeregi rózbieżne.

2. Gdy β i φ (0) mają znaki różne, to wyrażenia powyższe są ciągle odjemne, i szeregi rozbieżne.

A zbierając to razem i uważając na znak funkcyi wykładnika, otrzymamy prawo:

Szeregi tak ze znakami jednakowemi, jak na przemian, których stosunek wyrazów jest funkcyą wykładniczą, mającą za podstawę i wykładnik funkcye algebraiczne; są zbieżne, gdy stopień podstawy i wykładnik są jednakowych znaków, a stopień wykładnika większy od zera; gdy stopień wykładnika równy zero, są jeszcze zbieżne, gdy wykładnik dodatny; w każdym innym razie rozbieżne.

53. Niech będzie szereg, którego stosunek wyrazów jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = (an+b)^{(cn+d)}$$

to mamy $\beta = 1$, $\alpha = 1$ i $\varphi(0) = c$; przeto gdy c dodatne, szeregi są zbieżne; gdy c odjemne, szeregi są rozbieżne; gdy zaś $c = 0$, to i $\alpha = 0$, zatém gdy d dodatne, szeregi są zbieżne, gdy d odjemne, szeregi rozbieżne; a gdy $d = 0$, szereg rozbieżny, gdyż stosunek staje się stale jednością.

Podobnie szereg mający za stosunek:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{an+b}{n}\right)^{\left(\frac{cn+d}{n}\right)}$$

gdzie $\beta = 0$, i $\alpha = 0$, będzie zbieżnym, gdy c dodatne; rozbieżnym, gdy odjemne; a gdy $c = 0$, będzie zbieżnym, gdy d dodatne, rozbieżnym gdy $d \leqslant 0$.

54. Szereg, którego stosunek wyrazów jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{f\,(n+1)^{\varphi(n+1)}}{f\,(n)^{\varphi(n)}}$$

gdzie oznaczając stopnie funkcyi f i φ przez β i α, a wyłączając n i oznaczając przez φ_1 i φ_2, f_1 i f_2; funkcye $\varphi\,(n)$ i $\varphi\,(n+1)$, $f\,(n)$ i $f\,(n+1)$ po wyrzuceniu czynnika z n; i biorąc logarytmy, otrzymamy:

$$l\,\frac{u_n}{u_{n+1}} = n^\alpha \left\{ \beta ln(\varphi_2 - \varphi_1) + \varphi_2\, lf_2 - \varphi_1\, lf_1 \right\}$$

oznaczmy daléj:

$$\varphi\,(n) = a_0\, n^\alpha + a_1\, n^{\alpha-1} + \ldots$$

to będzie:

$$\varphi_1 = a_0 + a_1\, n^{-1} + a_2\, n^{-2} + \ldots$$

$$\varphi_2 = a_0 + (\alpha\, a_0 + a_1)\, n^{-1} + $$

$$+ \left\{ \alpha(a-1)a_0 + 2(\alpha-1)a_1 + 2a_2 \right\} \frac{n^{-2}}{2!} + \ldots$$

podobnie gdy:

$$f\,(n) = b_0\, n^\beta + b_1\, n^{\beta-1} + \ldots$$

$$f_1 = b_0 + b_1\, n^{-1} + b_2\, n^{-2} + \ldots$$

$$f_2 = b_0 + (\beta b_0 + b_1)\, n^{-1} + \ldots$$

biorąc logarytmy, będzie:

$$l f_1 = l\, b_0 + \frac{b_1}{b_0 n} + \frac{2b_0 b_2 - b_1^2}{2b_0^2 n^2} + \frac{D^3 lf_1}{3n^3} + \ldots$$

$$lf_2 = lb_0 + \frac{(\beta b_0 + b_1)}{b_0 n} + \frac{2b_0(b_2 - b_1) + b_1^2 - \beta b_0^2}{2b_0^2 n^2} + \frac{D^3 lf_2}{3n^3} + \ldots$$

a ztąd wyrażenie stosunku zamieni się na:

$$l\,\frac{u_n}{u_{n+1}} = n^{\alpha-1} \left\{ \beta ln\alpha a_0 + \alpha(\beta + alb_0) + \ldots \right\}$$

ztąd warunki będą:

$$n^{\alpha-1}\, ln\, \beta\, \alpha\, a_0 = 0$$

$$n^{\alpha-1}\, \alpha\, (\beta + a\, l\, b_0) = 1.$$

. . . .

z których widzimy, że dopóki $\alpha > 1$, szeregi są zbieżne, byleby β i α_0 były tych samych znaków, gdy znaków przeciwnych są rozbieżne,; są jeszcze zbieżne, gdy $\alpha = 1$, a nawet gdy $\beta = 0$, byleby a_0 było dodatne, gdy zaś $a_0 = 0$, wyrażenie $\varphi(n)$ przestaje być stopnia α i ma inną postać, do której można znowu stosować to prawo.

Wyrażenie powyższe stosunku, odpowiada wyrazowi n mu postaci:

$$u_n = \frac{1}{f(n)^{\varphi(n)}}$$

a zatém: *szeregi których wyraz ogólny jest odwrotnością, z funkcyi wykładniczéj, mającéj za podstawę i wykładnik funkcye algebraiczne, są zbieżne, gdy stopień podstawy i wykładnik mają też same znaki i gdy stopień wykładnika większy od jedności; są jeszcze zbieżne, gdy ten stopień równy jedności, jakikolwiek jest stopień podstawy; a nawet zbieżne, gdy ten stopień jest zero, byleby wykładnik był dodatny.*

I tak, szereg, który za wyraz ogólny ma: (*)

$$u_n = \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$$

daje:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)^{\frac{n+2}{n+1}}}{n^{\frac{n+1}{n}}}$$

to mamy $\alpha = 0$, $\beta = 1$, i $a_0 = 1$; zatém stopień podstawy i wykładnika, mają też same znaki, stopień wykładnika równy zero, i wykładnik dodatny, przeto szereg jest zbieżny.

d. Szeregi peryodyczne.

55. Funkcye trygonometryczne, elliptyczne, i t. p., w ogóle funkcye peryodyczne, to jest zmieniające się stale, w pewnych granicach, podlegają tymże samym prawom.

(*) Patrz Catalan, „Traité élémentaire des séries“ str. 19. Szereg powyższy podany jako rozbieżny.

Jakoż oznaczmy w ogóle przez $t\,f\,(n)$ funkcyą peryodyczną t, z jakiéjkolwiek funkcyi nieperyodycznéj $f\,(n)$; to ponieważ mamy:

$$f\,(n) = \mathrm{P}\,(n)\left(\frac{1}{n}\right)$$

gdzie $\mathrm{P}\,(n)$ zawiera wszystkie czynniki z n, stające się nieskończonemi lub zero, a $f\left(\frac{1}{n}\right)$ ma wartości nieskończone dla $n = \infty$ przeto będzie:

$$t\,f\,(n) = t\left\{\mathrm{P}\,(n)\,f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

tu mogą zajść trzy przypadki: albo $\mathrm{P}\,(n)$ staje się z n nieskończoném, lub zero, lub też niknie.

Gdy $\mathrm{P}\,(n)$ rośnie i staje się nieskończone, funkcya t może być peryodyczną lub nie; gdy $\mathrm{P}\,(n)$ ubywa stale do zera, gdy $n = \infty$, funkcya t zmniejszająca się zrazu peryodycznie lub nie, kończy się zawsze po przejściu ostatniego peryodu nieperyodycznie i dąży do granicy oznaczonéj wartością t (0); nakoniec, gdy $\mathrm{P}\,(n)$ znika, to $f\left(\frac{1}{n}\right)$, gdy n dąży do nieskończoności, dąży do granicy oznaczonéj wartością stałą f (0), a funkcya t znowu zrazu zmniejszająca się peryodycznie lub nie, będzie w końu nieperyodyczną i zdążać będzie do granicy oznaczonéj wartością $t\,f$ (0).

W dwóch więc przypadkach, gdy $\mathrm{P}\,(n)$ staje się zero lub znika, funkcya peryodyczna t kończy się nieperyodycznie i dąży do pewnéj granicy; otóż w tych dwóch przypadkach, prawa zbieżności wyżéj podane ściśle się dadzą zastosować, zacząwszy od wartości, dla któréj funkcya przestaje być peryodyczną, i zdąża do pewnéj granicy.

A zatém mamy twierdzenie: *szeregi których stosunek wyrazów wyraża się przez funkcye peryodyczne, z pewnych funkcyi, które dla $n = \infty$ dążą do zera lub ilości stałéj, są zbieżne lub rozbieżne, według tychże samych praw, jak funkcye nieperyodyczne.*

56. I tak: niech będzie szereg, którego wyraz ogólny jest postaci:

$$u_n = \frac{1}{(1+\operatorname{sty} a)\,?\left(1+\operatorname{sty}\dfrac{a}{n-1}\right)}$$

stosunek wyrazów jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \operatorname{sty}\left(\frac{a}{n}\right)$$

gdy $n = \infty$, stosunek ten dąży do jedności, gdyż funkcya sty $\frac{a}{n}$ dąży do zera.

Ponieważ funkya ta jest peryodyczną od $\frac{1}{2}\pi$ do $-\frac{1}{2}\pi$, więc peryod stanowi π, zatém możne położyć:

$$a = k\pi + \varphi$$

gdzie φ zawarte w granicach od $\frac{1}{2}\pi$ do $-\frac{1}{2}\pi$.

Funkcya:

$$\operatorname{sty}\frac{a}{n} = \operatorname{sty}\frac{k\pi+\varphi}{n}$$

dla $n = 1$ staje się równa sty φ, gdy n rośnie, zamienia się, lecz jest pewna wartość n, która czyni stosunek $\frac{a}{n}$ mniejszym od $\frac{1}{2}\pi$ oznaczając ją przez n_1, to będzie:

$$n_1 = \frac{2k\pi + 2\varphi}{\pi} = 2k + \frac{2\varphi}{\pi}$$

a że $2\varphi < \pi$, przeto ta wartość będzie:

$$n_1 = 2k + 1.$$

zatém od $n = 1$, do $n_1 = 2k + 1$, funkcya będzie peryodyczną; a zacząwszy od $2k + 1$ do nieskończoności, funkcya będzie stale ubywać i dążyć do zera.

Jakoż w téj granicy rozwijając sty $\frac{a}{n}$ na szereg, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} - \frac{a}{n^2} + \ldots$$

dla $n = \infty$ stosunek ten jest jednością, daléj gdy $a > 1$, szereg mający znaki jednakowe, będzie zbieżnym; gdy zaś $a \leqslant 1$, będzie rozbieżny, albowiem następny wyraz odjemny; gdy szereg ma znaki na przemian, będzie zbieżnym gdy $a > 0$, rozbieżnym gdy $a \leqslant 1$.

57. Pozostaje rozstrząsnąć ostatni przypadek, gdy funkcya pod funkcyą peryodyczną będąca, rośnie z n i dąży do nieskończoności; tu mamy znowu dwa przypadki: albo funkcya dla różnych wartości n rosnących, ma wartości peryodyczne; lub téż zmienia się nieperyodycznie, lecz zawsze w granicach peryodu.

Gdy funkcya zmienia się peryodycznie, to zbierając wyrazy stanowiące peryod w gruppy, i oznaczając przez g_n wyraz n ty gruppy, wartości tych grupp będą z n dążyć do pewnéj wartości, będącéj summą wartości funkcyi w peryodzie, która musi być oznaczoną, i do tak utworzonego szeregu, można już stosować prawa wyżéj podane.

58. Prawo powyższe wymaga poznania warunków, jakim podlegać winna funkcya $t\,f\,(n)$, aby miała wartości peryodyczne. Z założenia funkcya $f\,(n)$ nie jest peryodyczną; załóżmy, że funkcya $t\,(x)$ jest peryodyczną dla wartości:

$$x = 0,\ \varepsilon,\ 2\,\varepsilon,\ 3\,\varepsilon\ \ldots$$

tak, że mamy:

$$t\,(k\varepsilon + a) = t\,(a).$$

Gdy funkcya $f\,(n)$ jest algebraiczną, to aby:

$$t\,(a_0\,n^v + a_1\,n^{v-1} + \ldots)$$

było peryodyczném, musi być $a_0 = \dfrac{k\,\varepsilon}{\mu}$ gdzie k i μ są liczby całe, a wyrażenie powyższe będzie miało μ wartości różnych, albowiem:

$$t\left(\frac{k\,\varepsilon}{\mu}\,n^v + a_1\,n^{v-1} + \ldots\right) = t\left(\frac{k\,\varepsilon}{\mu} + a_1\,n^{v-1} + \ldots\right)$$

z których jednak każda będzie miała nieskończoną ilość wartości różnych, zmieniając n, znajdujące się w dalszych wyrazach. Aby więc i te wartości były peryodyczne, potrzeba aby znowu:

$$a_1 = \frac{k_1 \varepsilon}{\mu_1} \text{ i t. d.}$$

Ztąd wypada: że *aby funkcya peryodyczna miała wartości peryodyczne, wszystkie spółczynniki n w funkcyi f (n) powinny być współmierne z peryodem ε.*

Aby funkcya miała wszystkie wartości równe, potrzeba aby ilości stałe μ, μ_1, i t. d. były równe jedności, wtedy każdy spółczynnik będzie wielokrotny z peryodem, jakoż:

$$t\,(k\,\varepsilon\, n^v + a_1\, n^{v-1} + \ldots) = t\,(a_1\, n^{v-1} + \ldots)$$

i nakoniec:

$$t\,(k_{v-1}\,\varepsilon\, n + a_v\,) = t\,(\,a_v\,)$$

i wszystkie wartości funkcyi będą równe $t\,(\,a_v\,)$, i będą miały znaki jednakowe.

Aby funkcya miała wartości ze znakami na przemian, potrzeba aby w granicach peryodu, przechodziła z dodatnéj na odjemną, i aby jeden ze spółczynników był równy:

$$a_m = \frac{k\,\varepsilon}{2}$$

gdy wszystkie inne wielokrotne względem ε; albowiem wtedy wszystkie wyrazy nikną, i pozostanie:

$$t\left\{\frac{k\,\varepsilon}{2}\,(\,2\,n\,)^m + a_v\right\} = t_1\,(\,a_v\,)$$

$$t\left\{\frac{k\,\varepsilon}{2}\,(2n+1)^m + a_v\right\} = t_2\,(\,a_v\,)$$

Kombinując te warunki z sobą, otrzymamy rozmaite kombinacye zmian znaków i wartości wyrazów szeregu.

59. Nakoniec gdy funkcya pod funkcyą peryodyczną będąca, rośnie z n i dąży do nieskończoności, a funkcya peryodyczna zmieniając swą wartość, nie ma wartości peryodycznych, to zawsze muszą one zawierać się w granicach oznaczonych peryodu.

Załóżmy więc, że wartości graniczne funkcyi, między któremi może się zmieniać, są ε_1 i ε_2, z których ε_1 jest granicą niższą, a ε_2 wyższą; i że stosunek wyrazów szeregu wyraża się przez funkcyą postaci:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = t \left\{ \mathrm{P}(n) f\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

to wartości tego stosunku będą się zmieniać, lecz zawsze będą zawarte między:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \varepsilon_1 \quad \text{i} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} < \varepsilon_2$$

Ztąd zbierając wyrazy po n tym, będzie:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S}_n &> u_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_1^2} + \ldots\right) \\ \mathrm{S}_n &< u_n \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_2^2} + \ldots\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

gdy więc szereg ma znaki jednakowe, i gdy granica niższa ε_1 będzie większa od jedności, $\varepsilon_2 > 1$, i szeregi będą zbieżne; gdy $\varepsilon_1 = 1$, wyrażenie pierwsze w nawiasie jest nieskończoném; drugie skończone, i szereg może być zbieżny; gdy zaś $\varepsilon_1 < 1$, wyrażenie pierwsze staje się nieskończoném, i wszystko zależy teraz od granicy wyższéj, Gdy $\varepsilon_2 > 1$. szeregi mogą być zbieżne, gdyż drugie wyrażenie w nawiasie, ma wartość skończoną: gdy $\varepsilon_2 \leqslant 1$, aż do $\varepsilon_2 > -1$, gdy $\varepsilon_1 > -1$, szeregi są rozbieżne; lecz gdy przy tych wartościach ε_2, $\varepsilon_1 < -1$, szeregi znowu mogą być zbieżne; nakoniec gdy $\varepsilon_2 < -1$ i ε_1 musi być < -1, i szeregi są wciąż zbieżne.

Gdy granica $\varepsilon_1 = 1$ lub $\varepsilon_2 = -1$, rozwińmy wyrażenie powyższe na szereg co do $\frac{1}{n}$, uważając P (n) za stały czynnik, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = t\,\mathrm{P} f(0) + \frac{t'\,\mathrm{P} f(0)}{n} + \ldots$$

ponieważ dla $n = \infty$ jedna z granic wartości funkcyi t jest jednością, więc dla téj granicy staje się $t\,\mathrm{P} f(0) = 1$, i dla téj wartości funkcyi, można już zastosować prawo zbieżności szeregów, i będzie dla szeregów mających znaki jednakowe:

$$t' \, \mathrm{P} f(0) = 1$$
$$t'' \, \mathrm{P} f(0) = 2$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$t^v \, \mathrm{P} f(0) = v!$$

Zatém: *gdy stosunek wyrazów szeregu wyraża się przez funkcyą peryodyczną, i gdy wyrazy mają znaki jednakowe, oraz gdy ta funkcya nie dąży z n do stałéj granicy, lecz zmienia się w stałych granicach, szereg będzie zbieżnym, gdy granica niższa peryodu, będzie większa od jedności, lub granica wyższa mniejsza od —1; a gdy te granice równe odpowiedniéj jedności, będą jeszcze zbieżne, gdy pierwsza z pochodnych téj funkcyi wzięta co do odwrotności z n, która nie staje się równa odpowiedniemu sobie iloczynowi liczb porządkowych, jest od niego większa; gdy granice obie zawarte między ± 1, szeregi są wciąż rozbieżne; a w innych przypadkach mogą być rozbieżne lub zbieżne.*

60. Zbierając więc przypadki tu otrzymane, będzie:

gdy ε_2 jakiekolwiek		$\varepsilon_1 \geqq 1$ . . .	szeregi zbieżne
$\varepsilon_2 > 1$	. . .	$\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1 < 1\\ \varepsilon_1 > -1\end{matrix}\right.$ . . .	szeregi wątpliwe
$\left.\begin{matrix}\varepsilon_2 \leqq 1\\ \varepsilon_2 > -1\end{matrix}\right\}$	. . .	$\left\{\begin{matrix}\varepsilon_1 < 1\\ \varepsilon_1 > -1\end{matrix}\right.$ . . .	szeregi rozbieżne
$\left.\begin{matrix}\varepsilon_2 \leqq 1\\ \varepsilon_2 > -1\end{matrix}\right\}$	. . .	$\varepsilon_1 < -1$ . . .	szeregi wątpliwe
$\varepsilon_2 \leqq -1$	. . .	ε_1 jakiekolwiek	szeregi zbieżne.

Przypadki więc wątpliwe są, gdy $\varepsilon_2 > 1$ a ε_1 zawarte w granicach ± 1, i gdy $\varepsilon_1 < -1$, a ε_2 zawarte w tychże granicach, gdyż w obu razach jedno z powyższych wyrażeń (a), jest nieskończone, drugie skończone. Dla tych to przypadków, prawo zbieżności szeregów nie daje się zastosować, gdyż zmiany wartości wyrazów zupełnie odbywają się nieprawidłowo lecz to już są przypadki wyjątkowe i nieliczne. Powtórzyć tu wypada (§ 4), że, gdy wyrazy szeregu dążą nie do zera, lecz do pewnéj skończonéj granicy różnéj od zera, stałéj lub peryodycznie zmiennéj, szeregi są zawsze rozbieżne.

61. Niech będzie szereg, którego stosunek wyrazów jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1 + k \operatorname{dos}^2 (n+1) \varphi}{k \operatorname{wst}^2 (n+1) \varphi}$$

gdy n rośnie, stosunek ten zmienia się między granicami $\frac{1}{k}$ i ∞, granica niższa odpowiada wartości kąta $(n+1) \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Gdy $k < 1$ i > 0, szereg ten jest zbieżnym; gdy zaś $k > 1$ i < 0, szereg jest rozbieżnym, gdyż granica stosunku $\frac{1}{k}$ staje się mniejsza od jedności lub odjemna. Gdy $k = 1$, będzie:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1 + \operatorname{dos}^2 n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \varphi}{\operatorname{wst}^2 n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \varphi}$$

a biorąc pochodną tego wyrażenia co do $\frac{1}{n}$ i czyniąc naprzód $(n+1) \varphi = \frac{\pi}{2}$ odpowiadające granicy niższéj, a następnie $n = \infty$, otrzymamy wartość odjemną, a zatém szereg jest w téj granicy rozbieżny.

Zatém szereg powyższy jest zbieżny dla jakiéjkolwiek wartości kąta φ, byleby k było zawarte między 0 i 1 (*), w których to jednak granicach jest rozbieżny.

Lecz szereg, którego stosunek wyrazów jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1 + k \operatorname{dos}^2 \frac{n+1}{n} \varphi}{k \operatorname{wst}^2 \frac{n+1}{n} \varphi}$$

jest zbieżny w obszerniejszych granicach, jakoż granice między któremi zamienia się wartość stosunku, są też same co wyżéj $\frac{1}{k}$ i ∞, i granica niższa odpowiada wartości $\frac{n+1}{n} \varphi = \frac{\pi}{2}$; tak że, gdy $k < 1$ i $k > 0$ szereg jest zbieżny; lecz gdy $k = 1$, biorąc pochodne tego wyrażenia co do $\frac{1}{n}$, wprowadzając wartości dla φ dające gra-

(*) Patrz: Catalan „Traité élémentaire des séries:“ page 9.

nicę niższą, otrzymamy na wartość téj pochodnéj 4 φ^2, zatém warunek pierwszy daje 4 $\varphi^2 = 1$, czyli $\varphi = \frac{1}{2}$; ztąd gdy $k = 1$, szeregi będą jeszcze zbieżne, gdy kąt φ jest stale większy od $\frac{1}{2}$ promienia, czyli zawarty między $\frac{90}{\pi}$ i 2π; a rozbieżny, gdy φ zawarte między 0 i $\frac{90}{\pi}$.

c. Szeregi urojone.

62. Wiemy że każde wyrażenie urojone dajc się sprowadzić do summy algebraicznéj dwóch wyrażeń rzeczywistych, z których jedno ma za współczynnik wartość urojoną jedności, którą będziemy oznaczać przez i.

Zatém wyraz ogólny szeregu, mającego wyrazy urojone, daje się przedstawić pod postacią:

$$u_n = f(n) + i\,\varphi(n) \qquad \text{(a)}$$

a szereg sam daje się rozebrać na summę dwóch szeregów rzeczywistych, z których jeden ma za spółczynnik i a których wyrazy ogólne są:

$$v_n = f(n) \quad \text{i} \quad w_n = \varphi(n)$$

Aby więc szereg taki mógł być zbieżny czyli mieć wartość urojoną skończoną, dosyć jest aby oba szeregi rzeczywiste były zbieżne.

Ztąd mamy następujące znane twierdzenie:

Zbieżność szeregów urojonych sprowadza się do zbieżności szeregów rzeczywistych.

A że według powyższych zasad umiemy oznaczyć stosunki zbieżności szeregów rzeczywistych, nie udając się do modułów wyrażeń urojonych; przeto i zbieżność szeregów urojonych sprowadza się do tychże samych warunków niezależnie od modułów wyrażeń urojonych.

63. Wyraz ogólny (a) daje się wyrazić pod postacią:

$$u_n = r_n\,(\operatorname{dos}\alpha_n + i \operatorname{wst}\alpha_n)$$

gdzie r_n jest moduł wyrazu ogólnego i równa się:

$$r_n = \sqrt{f^2(n) + \varphi^2(n)}$$

a szereg da się rozebrać na dwa szeregi rzeczywiste mające za wyrazy ogólne:

$$v_n = r_n \operatorname{dos} \alpha_n \qquad w_n = r_n \operatorname{wst} \alpha_n$$

Zatém aby był zbieżnym, dosyć jest aby te dwa szeregi były zbieżne.

Zbieżność tych dwóch szeregów sprowadzić można do zbieżności jednego szeregu. Albowiem gdy szereg modułów r_n jest zbieżnym, widoczna jest że i szeregi dwa powyższe będą zbieżne a ztąd i szereg dany.

Lecz to twierdzenie nie daje się odwrócić i szeregi oba mogą być zbieżne, chociaż szereg modułów nie będzie zbieżnym. Jakoż dwa szeregi powyższe w ogóle są peryodyczne co do znaków, szereg zaś modułów ma znaki jednakowe, a że wyżéj dowiedliśmy, że takie szeregi mają zawsze warunki zbieżności zupełnie inne, a mianowicie szeregi ze znakami na przemian mają granice zbieżności obszerniejsze; przeto szereg modułów może być rozbieżnym, a jednak szeregi pierwsze będą zbieżne.

Niech będzie szereg mający za wyraz ogólny:

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\operatorname{dos}\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{wst}\frac{n\pi}{2}\right)$$

daje się rozłożyć na dwa szeregi mające za wyrazy ogólne:

$$v_n = \frac{1}{4n} - \frac{1}{4n+2}$$

$$w_n = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}$$

i oba są zbieżne, więc szereg dany jest zbieżnym; gdy tymczasem, szereg modułów których wyraz ogólny jest:

$$u_n = \frac{1}{n}$$

jest rozbieżnym.

Zatém: *warunki zbieżności otrzymane z szeregu modułów, nie są właściwe do oznaczenia zbieżności szeregów urojonych.*

Wniosek. Ztąd wypada, że tylko wtedy zbieżność szeregu modułów może odpowiadać zbieżności szeregów urojonych, kiedy one mają wyrazy z jednakowemi znakami.

64. Gdy warunki zbieżności szeregu modułów nie są właści we do oznaczenia zbieżności szeregów urojonych; tém bardziej przeto nie można ich stosować do szeregów rzeczywistych. Cała więc teorya sprowadzająca poznanie zbieżności jakichkolwiek szeregów do zbieżności szeregu modułów, nie może dawać prawdziwych i właściwych warunków i musi prowadzić do wypadków błędnych, jak to niżéj zobaczymy na przykładach.

A że w § 62 dowiedliśmy, że zbieżność szeregów urojonych zależna jest od zbieżności szeregów rzeczywistych; przeto mamy twierdzenie:

Zbieżność szeregów tak urojonych, jak rzeczywistych, poznaje się tylko z warunków służących dla szeregów rzeczywistych.

Tym sposobem cała teorya zbieżności szeregów sprowadzoną została na właściwą drogę, a nie wikłając się w ilościach urojonych, czyni je właśnie, zgodnie z początkowemi zasadami algebry zależnemi od ilości rzeczywistych (*).

(*) Porównaj: Schlömilch. „Compendium der höheren analysis" Braunschweig 1862 edit 2, T. 1, kar. 183, § 40 o szeregach peryodycznych.
Catalan: „Traité élémentarie des séries." Paris 1860, page 30. O szeregach urojonych i peryodycznych razem, § 44 do 52, i t. p.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

ZASTOSOWANIE PRAWA ZBIEŻNOŚCI DO ILOCZYNÓW NIESKOŃCZONÉJ LICZBY CZYNNIKÓW.

65. Jako zastosowanie prawa zbieżności, podamy jeszcze prawo dla iloczynu nieskończonéj liczby czynników.

Jakoż niech będzie iloczyn czynników zaczynając od wyrazu n go:

$$P_n = u_n \; u_{n+1} \; u_{n+2} \dots \tag{a}$$

Zawsze można przyjąć, że czynniki są dodatne; albowiem gdy byłyby odjemne, iloczyn ich byłby co do wartości ten sam, lecz byłby dodatny lub odjemny, według jak ich liczba byłaby parzysta lub nieparzysta.

Biorąc logarytmy otrzymamy:

$$l P_n = l u_n + l u_{n+1} + \dots \tag{b}$$

gdzie mamy między P_n i $l P_n$ taką zależność, gdy:

$$\begin{array}{ll} P_n = \infty & l P_n = \infty \\ P_n = 1 & l P_n = 0 \\ P_n = 0 & l P_n = -\infty . \end{array}$$

Zatém: iloczyn nieskończonéj liczby czynników będzie rozbieżnym, gdy logarytm jego jest dodatnie nieskończonym, w każdym innym razie jest zbieżnym, a gdy logarytm jego staje się równy $-\infty$ jego wartość jest jeszcze skończoną i równa zero.

Że zaś logarytmy czynników iloczynu (a) są zawsze dodatne; przeto iloczyn czynników będzie w tychże samych warunkach zbieżnym co i szereg logarytmów z jego wyrazów złożony o znakach jednakowych, i prawa zbieżności szeregów wyżéj podane, ściśle tu zastosować się dają, a ztąd warunki będą:

$$\left(\frac{lu_n}{lu_{n+1}}\right)_\infty = 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \text{(c)}$$

$$n\left\{\ldots n\left(\frac{lu_n}{lu_{n+1}} - 1\right)\ldots - 1\right\}_\infty = 1$$

Pierwszy wychodzi na:

$$\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = 1$$

a zatém iloczyny są zbieżne, gdy stosnnek n tych czynników jest większy od jedności.

Rozwijając wyrażenie (c) będzie:

$$\frac{lu_n}{lu_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{a_v}{n^v}$$

i można powiedzieć, że *iloczyny nieskończonéj liczby czynników będą zbieżne; gdy, rozwijając stosunek logarytmów n tych czynników według odwrotności z n, pierwszy spółczynnik rozwinięcia, który nie staje się jednością, jest większy od jedności.*

66. Jako przykład weźmy wyrażenie:

$$\frac{\pi}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \ldots \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2$$

n ty czynnik:

$$u_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2}$$

$$u_{n+1} = \left\{\frac{1 + \frac{2}{2n}}{1 + \frac{3}{2n}}\right\}^2$$

a ztąd stosunek ich logarytmów:

$$\frac{lu_n}{lu_{n+1}} = \frac{1 - \frac{1}{2}(2n)^{-1} + \ldots}{1 - \frac{5}{2}(2n)^{-1} + \ldots}$$

jest funkcyą algebraiczną; i podług § 37, ponieważ pierwsze wyrazy są sobie równe, więc następny spółczynnik licznika zmniejszony pierwszym, powinien być większym od drugiego spółczynnika mianownika, to jest:

$$-\frac{1}{2} - 1 > -\frac{5}{2}, \qquad -1\frac{1}{2} > -2\frac{5}{2},$$

a zatém warunek dopełniony; iloczyn ten czynników jest zbieżny, i jest prawdziwém wyrażeniem połowy stosunku okręgu koła do średnicy.

67. Gdy iloczyn czynników ma postać następną:

$$P_n = (u_0 + v_0)(u_1 + v_1) \ldots (u_n + v_n) \qquad \text{(a)}$$

gdzie $u_0\, u_1 \ldots v_0\, v_1 \ldots$ są funkcyami z n, to zawsze można temu wyrażeniu, dzieląc przez ilości większe, nadać postać:

$$P_n = u_0\, u_1\, u_2 \ldots u_n \left(1 + \frac{v_0}{u_0}\right)\left(1 + \frac{v_1}{u_1}\right) \ldots \left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right) \qquad \text{(b)}$$

a biorąc logarytmy wypada:

$$l\,P_n = l\,u_0 + l\,u_1 + \ldots + l\,u_n + $$
$$+ \, l\left(1 + \frac{v_0}{u_0}\right) + \ldots + l\left(1 + \frac{v_n}{u_n}\right)$$

a zatém, aby powyższy iloczyn był zbieżnym, potrzeba i dostateczna, aby był zbieżnym każdy z dwóch iloczynów z osobna; jeden zaczynający się od u_0, drugi zaczynający się od $\left(1 + \frac{v_0}{v_0}\right)$. Zatém: *poszukiwanie zbieżności jakiekolwiek iloczynu można zawsze sprowadzić do poszukiwania zbieżności dwóch iloczynów: jednego, którego każdy czynnik składa się z jednego wyrazu, i drugiego, którego każdy czynnik jest dwumianem mającym za pierwszy wyraz jedność, a za drugi funkcyą dającą się rozwinąć według odwrotności z n.*

68. Według § 65 umiemy oznaczyć zbieżność iloczynu czynników złożonych z jednego wyrazu, pozostaje podać prawo zbieżności dla iloczynu czynników dwumianowych postaci:

$$P_n = (1+v_0)\ldots(1+v_n) \tag{c}$$

gdzie v_n daje się rozwinąć na szereg:

$$v_n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots$$

a ztąd:

$$v_{n+1} = a_0 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2 - a_1}{n^2} + \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{n^3} + \ldots$$

Zatém biorąc stosunek logarytmów n tych czynników otrzymamy:

$$\frac{l(1+v_n)}{l(1+v_{n+1})} = \frac{l\left(1+a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\ldots\right)}{l\left(1+a_0+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2-a_1}{n^2}+\ldots\right)}$$

druga strona daje się tak wyrazić:

$$\frac{l(1+v_n)}{l(1+v_{n+1})} = \frac{l(1+a_0)+l\left\{1+\frac{a_1}{(1+a_0)n}+\frac{a_2}{(1+a_0)n^2}+\ldots\right\}}{l(1+a_0)+l\left\{1+\frac{a_1}{(1+a_0)n}+\frac{a_2-a_1}{(1+a_0)n^2}+\ldots\right\}}$$

Zaczynając od wyrazu dostatecznie wielkiego, drugie wyrazy mogą być rozwinięte na szereg i otrzymamy jeszcze:

$$\frac{l(1+v_n}{l(1+v_{n+1})} = \frac{l(1+a_0)+\frac{a_1}{(1+a_0)n}+\ldots}{l(1+a_0)+\frac{a_1}{(1+a_0)n}+\ldots} \tag{d}$$

A stosując do tego prawo Gaussa, rozciągnięte do wszystkich spółczynników rozwinięcia § 37; ponieważ pierwsze wyrazy drugiéj strony są równe, a następne dają:

$$\frac{a_1}{1+a_0} - l(1+a_0) = \frac{a_1}{1+a_0}$$

przeto:

$$-l(1+a_0) = 0$$

jest granicą zbieżności i potrzeba aby logarytm odjemny był większy od zera, zatém $1 + a_0$ musi być ułomkiem, to jest:

$$1 + a_0 < 1 \qquad a_0 < 0$$

czyli:

$$1 + a_0 > 0 \qquad a_0 > -1$$

zatém iloczyn powyższéj postaci będzie zbieżnym, gdy wyrazy v_n dążą dla $n = \infty$ do granicy zawartéj między 0 i — 1; to jest gdy w granicy stają się odjemnym ułomkiem a dwumiany dążą również do granicy mniejszéj od jedności, a większéj od zera.

Daléj, gdy granica ta jest — 1 szeregi w téj granicy stają się zbieżne, albowiem jest $-l(0) = +\infty > 0$; w drugiéj granicy, gdy v_n staje się zero, powyższy warunek będzie dopełniony i szeregi mogą być zbieżne; jakoż aby znaleźć dalsze warunki, wprowadźmy w (d) $a_0 = 0$ a otrzymamy po uproszczeniu:

$$\frac{l(1+v_n)}{l(1+v_{n+1})} = \frac{a_1 + \frac{2a_2 - a_1^2}{2n} + \frac{3a_3 - 3a_1a_2 + a_1^3}{3n^2} + \ldots}{a_1 + \frac{2a_2 - 2a_1 - a_1^2}{2n} + \frac{3a_3 - 6a_2 + 3a_1 - 3a_1a_2 + 3a_1^2 + a_1^3}{3n^2} + \ldots} \qquad (e)$$

które rozwijając według odwrotności z n, pierwszy spółczynnik który nie jest jednością, powinien być większy od jedności, aby szereg był zbieżny. Albo stosując prawo Gaussa (§ 37); otrzymamy uważając, że pierwsze wyrazy są też same, drugie także sprawdzają warunek, drugi albowiem:

$$\frac{2a_2 - a_1^2}{2} - a_1 = \frac{2a_2 - 2a_1 - a_1^2}{2}$$

następne spółczynniki dają dopiero po uproszczeniu:

$$\begin{aligned} 2a_2 &= a_1^2 + 2a_1 \\ 12a_3 &= 6a_2(2a_1 + 3) - a_1(4a_1^2 + 9a_1 + 6) \end{aligned} \qquad (f)$$

Zatém a_1 może być jakiekolwiek, ale potrzeba aby a_2 a następnie a_3 dopełniały warunków (f).

Gdy $a_1 = 0$ musi być

$$a_2 = 0$$
$$2a_3 = 3a_2 \quad \text{i t. p.}$$

zatém musi być $a_2 > 0$ a gdy $a_2 = 0$ musi być $a_3 > 0$ i t. p.

Gdy więc $a_1 = 0$, warunki bardzo prosto wyrażają się, to jest, aby iloczyn był zbieżny, pierwszy spółczynnik rozwinięcia drugiego wyrazu dwumianu, który nie staje się zero, powinien być różny od zera.

Podobnie znajdziemy, gdy drugie wyrazy dwumianów są odjemne, następne warunki:

$$2a_2 = a_1 (2 - a_1)$$
$$12a_3 = 6a_2 (3-2a_1) - a_1 (6-9 a_1 + 4a_1^2)$$

a gdy $a_1 = 0$ warunki są:

$$a_2 = 0$$
$$2a_3 = 3a_2 \quad \text{i t p.}$$

tak jak wyżéj.

Zbierając to razem, mamy prawo ogólne:

1. *Iloczyny złożone z dwumianów, których pierwsze wyrazy są jednością, a drugie jakiekolwiek będą zbieżne, gdy drugie wyrazy dwumianów, zbiegają się do granicy zawartéj między 0 i — 1 czyli mają za granicę ułomek odjemny; a nawet są zbieżne zawsze w granicy — 1.*

2. *Gdy zaś wyrazy drugie dwumianów, zbiegają się do granicy zero, iloczyny będą zbieżne, gdy pierwszy z spółczynników rozwinięcia stosunku logarytmów dwóch czynnikow na szereg według odwrotności z n, który nie staje się jednością, jest większy od jedności.*

Takie jest ogólne prawo dla tego rodzaju iloczynów nieskończonéj liczby czynników.

69. Obecnie znane prawo wyraża się, że dosyć aby drugie wyrazy tych czynników:

$$v_0, v_1, v_2, \ldots$$

składały szereg zbieżny (*).

A zatém wyrażenia:

(*) Bertrand: „Traité de calcul différentiel" pag. 409 i następne. Briot et Bouquet: „Théorie des fonctions doublement périodiques" Paris. 1859, pag. 135 i następne.

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} \text{ i } \frac{l(1+v_n)}{l(1+v_{n+1})} = \frac{v_n - \frac{1}{2}v_n^2 + \dots}{v_{n+1} - \frac{1}{2}v_{n+1}^2 + \dots}$$

powinny być identycznie też same, aby dawały też same warunki, co widocznie być nie może.

Jakoż rozwijając te wyrażenia otrzymamy:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \frac{a_1 + a_2 n^{-1} + a_3 n^{-2} + \dots}{a_1 + (a_2 - a_1)n^{-1} + (a_3 - 2a_2 + a_1)n^{-2} + \dots}$$

$$\frac{l(1+v_n)}{l(1+v_{n+1})} =$$

$$\frac{a_1 + \frac{1}{2}(2a_2 - a_1^2)n^{-2} + \frac{1}{3}(a_3 - 3a_1a_2 + a_1^3)n^{-2} + \dots}{a_1 + \frac{1}{2}(2a_2 - 2a_1 - a_1^2)n^{-1} + \frac{1}{3}(3a_3 - 6a_2 + 3a_1 - 3a_1a_2 + 3a_1^2 + a_1^3)n^{-2} + \dots}$$

do których stosując prawo Gaussa, dwa warunki pierwsze są identyczne dla obu iloczynów, a trzeci warunek daje:

dla pierwszego $\qquad a_2 = a_1$
dla drugiego $\qquad 2a_2 = a_1^2 + 2a_1$

Zatém widzimy tu, że dopiero w trzecim warunku się różnią; pierwszy warunek jest obszerniejszy jak drugi, tak że iloczyny, dla których

$$a_2 > a_1, \quad a_2 < \frac{a_1^2 + 2a_1}{2}$$

są rozbieżne rzeczywiście; chociaż dzisiejsza teorya uważa je jako zbieżne:

70. W wyrażeniach wstawy i dostawy przez iloczyn czynników:

$$\text{wst } x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\text{dos } x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\dots\left(1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)$$

każdy z czynników składa się z dwóch wyrazów, pierwszy jest jednością, drugi odjemny, i daje się rozwinąć według odwrotności z n, jakoż dla pierwszego jest:

$$v_n = \frac{x^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

zatém $a_0 = 0$ $a_1 = 0$ i $a_2 = \frac{x^2}{\pi^2}$; przeto rozwinięcie to zbieżne dla wszystkich wartości, dla których jest:

$$\frac{x^2}{\pi^2} > 0$$

to jest: zbieżne dla wszystkich wartości rzeczywistych, a rozbieżne dla wartości urojonych x.

Drugie wyrażenie daje:

$$v_n = \frac{4x^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$$

czyli:

$$v_n = \frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{3}{4n^4} - \ldots\right)$$

a zatém także zawsze zbieżne dla wszystkich wartości rzeczywistych, a rozbieżne dla wartości urojonych x.

Nie można więc wyrażeń powyższych stosować do wartości x urojonych, gdyż one stają się rozbieżne i nic nie wyrażają, a w podobny sposób stosowane, mogą prowadzić do wypadków błędnych (*).

(*) Patrz: Bertrand. „Traité de calcul di érentiel“ pag. 416 i 418; gdzie w końcu § 404 powiedziano, że te wyrażenia służą dla wszystkich wartości rzeczywistych i urojonych x; a w § 408 z tych wyrażeń wyprowadzone inne, po wprowadzeniu w nie wartości urojonéj dla x.

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

OZNACZENIE LICZBY WYRAZÓW, JAKĄ TRZEBA OBLICZYĆ NA DANE PRZYBLIŻENIE. — RESZTY SZEREGÓW.

71. Gdy znamy prawo, według którego w każdym przypadku poznać możemy czy szereg jest zbieżny, pozostaje podać przybliżoną jego wartość, obliczając pewną liczbę wyrazów; co otrzymamy, wykonywając wskazane działania.

Dla skrócenia rachunków zwykle mozolnych, ważném jest, naprzód oznaczenie liczby wyrazów, jaką potrzeba obliczyć na dane przybliżenie; a następnie w ilu cyfrach dziesiętnych potrzeba obliczyć każdy wyraz, aby summa ich wydała dane przybliżenie. Zadanie więc powyższe rozpada się na dwa.

1. Oznaczyć z danego przybliżenia liczbę wyrazów szeregu, odpowiednią temu przybliżeniu, lub odwrotnie; i

2. Oznaczyć ilość cyfr dziesiętnych, do jakiéj każdy wyraz powinien być obliczonym, aby summa ich wydała dane przybliżenie.

Oba te zadania będziemy się starali rozwiązać ogólnie opierając się na teoryi zbieżności szeregów.

72. Jeżeli mamy obliczony szereg w liczbach dzieisętnych, pewna liczba tych cyfr dziesiętnych wzięta od początku, stanowi jego przybliżoną wartość; przyjętém jest, że gdy po cyfrze ostatniéj, którą zostawiamy, następna jest równa lub większa od 5, dodaje się jedność do ostatniéj; przeto biorąc z obliczonéj wartości szeregu μ cyfr tak poprawionych mówi się, że to jest przybliżona wartość w μ cyfrach, a te μ cyfr nazywają się *dobremi*.

Ztąd już wypada, że obliczając każdą wartość, aby mieć μ cyfr dobrych, potrzeba obliczyć $\mu + 1$ cyfr, dla wprowadzenia potrzebnéj poprawki.

Oznaczając więc zupełnie ścisłą wartość szeregu lub funkcyi przez S, wartość w $\mu + 1$ cyfrach dziesiętnych przez $S_{\mu+1}$, a resztę cyfr przez $A_{\mu+1}$, będzie:

$$S = S_{\mu+1} + A_{\mu+1} \qquad \text{(a)}$$

Ponieważ $S_{\mu+1}$ ma $\mu + 1$ cyfr dziesiętnych, więc $A_{\mu+1}$ musi mieć przed pierwszą cyfrą $\mu + 1$ zer; jakakolwiek jest ta cyfra, byle mniejsza od 10.

Aże wyrażenie $10^{-(\mu+1)}$ obejmuje μ zer przed jednością, czyli ma $\mu + 1$ zer, a pierwsza cyfra jest 10; wypada ztąd, że:

$$A_{\mu+1} < 10^{-(\mu+1)}$$

ztąd będzie jeszcze:

$$S < S_{\mu+1} + 10^{-(\mu+1)} \qquad \text{(b)}$$

Z drugiéj strony, biorąc n wyrazów szeregu danego i nazywając summę ich przez $\Sigma\, u_n$, a resztę szeregu po n tym przez R_n; będzie:

$$S = \Sigma\, u_n + R_n \qquad \text{(c)}$$

na mocy więc powyższego, gdy wyraz $\Sigma\, u_n$ będzie ściśle obliczony, aby mieć przybliżoną wartość w μ cyfrach dobrych, dostateczna i konieczna, aby reszta R_n miała μ zer przed pierwszą cyfrą, która powinna być jednością, czyli powinno być:

$$R_n < 10^{-(\mu+1)} \qquad \text{(d)}$$

Wyrażenie to zawiera związek szukany między przybliżeniem μ i liczbą wyrazów n szeregu, odpowiednią temu przybliżeniu. Ponieważ zawsze wyrażenie (d) musi być rozwiązane w liczbach całych, zatém można go zamienić na równanie i będzie:

$$R_n = 10^{-(\mu+1)}$$

biorąc logarytmy dziesiętnego systemu, które oznaczymy przez L, otrzymamy:

$$\mu = -(L\, R_n + 1) \qquad (1)$$

to jest: *w obliczonéj wartości szeregu o znakach jednakowych z n* *wyrazów, liczba cyfr dobrych jest równą bezwzględnéj wartości logarytmu reszty szeregu zwiększonéj jednością.*

To równanie rozwiązuje nam zadanie pierwsze lub odwrotne, dla szeregów o znakach jednakowych.

73. Pierwszy wyraz drugiéj strony wyrażenia (c) zawiera summę n wyrazów, ponieważ możemy każdy wyraz obliczać w bardzo wielkiéj liczbie wyrazów; aby więc nie odbywać działań niepotrzebnych, potrzeba oznacyć liczbę cyfr, do jakiéj dostateczna będzie posuwać działanie odpowiednie danemu przybliżeniu.

W tym celu każdy wyraz u obliczmy znowu w m cyfrach dziesiętnych i resztę cyfr oznaczmy przez B_m będzie znowu jak wyżéj:

$$u = u_m + B_m$$

i także na mocy powyższego:

$$B_m < 10^{-m}$$

a ztąd:

$$u < u_m + 10^{-m}$$

a obliczając tak wszystkie wyrazy i dodając będzie:

$$\Sigma\, u_n < \Sigma\, u_{n,\,m} + n\, 10^{-m}$$

a ztąd wyrażenie (c) zamieni się na:

$$S < \Sigma\, u_{n,\,m} + n\, 10^{-m} + 10^{-(\mu+1)}$$

aby to wyrażenie było zgodne z (b) potrzeba, aby $n\ 10^{-m}$ było mniejsze, a przynajmniéj równe $10^{-(\mu+1)}$, gdyż w wartości pozostaje jeszcze $\mu + 1$ cyfr dobrych, a zatém otrzymamy równanie:

$$n\, 10^{-m} = 10^{-(\mu+1)}$$

czyli:

$$n = 10^{m-\mu-1}$$

albo biorąc logarytmy zwyczajne, będzie:

$$m - \mu = \mathrm{L}\, n + 1 \qquad (2)$$

Równania te rozwiązują zupełnie drugie zadanie dla szeregów o znakach jednakowych, są niezależne od postaci szeregu, i od reszty szeregu, i zawierają następujące ogólne twierdzenie:

W szeregu o znakach jednakowych, przewyżka cyfr w jakich trzeba obliczać każdy wyraz nad dane przybliżenie, jest niezależna *od postaci szeregu i jego reszty, i zawsze jest równa logarytmowi dziesiętnemu z liczby wyrazów, powiększonemu jednością.*

74. Dla rozwiązania zadań powyższych mamy więc dwa równania:

$$\mu = -\mathrm{L}\,\mathrm{R}_n - 1$$
$$m = \mu + \mathrm{L}\,n + 1 \qquad (3)$$

Pierwsze daje ilość wyrazów n, gdy mamy dane przybliżenie μ wyrażone w funkcyi reszty szeregu po n wyrazach. Drugie daje znowu liczbę cyfr, w jakich obliczać powinniśmy każdy wyraz, wyrażoną przez dane przybliżenie i logarytm z liczby wyrazów; a zatém gdy na dane przybliżenie μ potrzeba obliczać 10, 100,... wyrazów, to każdy wyraz potrzeba nad dane przybliżenie obliczać w 2, 3, . . . cyfrach więcéj, co jak widzimy jest bardzo mało.

Rugując μ z tych równań, otrzymamy:

$$m = \mathrm{L}\left(\frac{n}{\mathrm{R}_n}\right) \qquad (4)$$

to jest związek między liczbą wyrazów i liczbą cyfr każdego wyrazu, w jakich odpowiednio do liczby wyrazów, powinniśmy obliczać każdy wyraz bez względu na przybliżenie, aby nie posuwać działań bezpożytecznie.

W ogóle rozwiązanie zadań sprowadza się ostatecznie do oznaczenia dla każdego szeregu reszty po n wyrazach, i gdy mamy daną liczbę wyrazów, przybliżenie jakie one wyrażają i liczba cyfr w jakich potrzeba obliczać każdy wyraz, zależą od równania pierwszego stopnia i dają się łatwo oznaczyć; lecz z danego przybliżenia, oznaczenie liczby wyrazów, prowadzi do rozwiązania równań wyższych stopni, gdyż n wchodzi w postacie reszty szeregu.

Też same prawa służą i dla szeregów ze znakami na przemian, jakož szereg o wyrazach ze znakami na przemian, uważać można jako szereg ze znakami jednakowemi, zbierając każde dwa wyrazy w jeden, w którym n wyrazów zawierać będzie $2n$ szeregu pierwszego, a więc stosując równania powyższe do drugiego szeregu, otrzymamy liczbę wyrazów, którą potrzeba podwoić.

75. Pozostaje oznaczyć wyrażenie reszty szeregu w funkcyi n.

Jakoż w rozdziale I dowiedliśmy, że zbieżność szeregów zależy ściśle od stosunku wyrazów, i szeregi zbieżne są czterech postaci:

1. Gdy stosunk rośnie i dąży z n do granicy większéj od jedności:

2. Gdy stosunek jest stały i większy od jedności,

3. Gdy stosunek ubywa i dąży z n do granicy większéj od jedności.

4. Gdy stosunek ubywa i dąży z n do granicy równéj jedności.

W tymże rozdziale w § 8 dowiedliśmy, że gdy szereg jest zbieżny, reszta, zaczynając od n wyrazu, zawarta jest dla szeregów pierwszego rodzaju między:

$$R_n < \frac{u_n}{\alpha - 1} \quad \text{i} \quad R_n > \frac{u_n}{\varepsilon - 1}$$

gdzie α i ε, są wartości, pierwsza stosunku n wyrazów $\alpha = \frac{u_n}{u_{n+1}}$, druga jest wartością tego stosunku dla $n = \infty$; a podstawiając za α i ε wartości, otrzymamy:

$$R < \frac{u_n}{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1}, \qquad R > \frac{u_n}{\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty - 1}$$

Ponieważ ta reszta wyraża się tu przez wyraz n ty, lub stosunek tych wyrazów, które są zawsze znane; przeto granice reszty są zupełnie znane, i mamy nowe wyrażenie na tęż resztę.

Ponieważ według równania (d) powinno być:

$$R_n < 10^{-(\mu+1)}$$

zatém gdy granica wyższa będzie mniejsza od $10^{-(\mu+1)}$ to i granica niższa będzie téż mniejsza od téj ilości, i R_n musi być także mniejsze, a zatém dla rozwiązania naszych zadań trzeba położyć:

$$R_n = \frac{u_n}{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1}$$

można jeszcze opuścić jedność w mianowniku, co tém bardziéj zadość uczyni równaniu (d) i będzie ostatecznie:

$$R_n = u_{n+1} \qquad (a)$$

Dla szeregów drugiego rodzaju, gdy stosunek wyrazów jest stały i równy α, mamy według § 8 ściśle:

$$R_n = \frac{u_n}{\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1}$$

a opuszczając dla téj saméj przyczyny jedność w mianowniku, będzie:

$$R_n = u_{n+1}$$

Dla szeregów trzeciego rodzaju, dla których stosunek wyrazów ubywa do granicy większéj od jedności mamy (§ 8), podobnie:

$$R_n > \frac{u_n}{\alpha - 1} \quad \text{i} \quad R_n < \frac{u_n}{\varepsilon - 1}$$

i dla tegoż celu biorąc dla R_n granicę wyższą położymy:

$$R_n = \frac{u_n}{\varepsilon - 1}$$

czyli:

$$R_n = \frac{1}{\varepsilon} u_n$$

Dla szeregu nakoniec czwartego rodzaju, gdy stosunek staje się równy jedności, mamy (§ 14):

$$R_n > \frac{u_n}{\alpha_1 - 1} \qquad \text{i} \qquad R_n < \frac{u_n}{\varepsilon_1 - 1}$$

gdzie $\alpha_1 = n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$, a ε_1 jest wartość tego stosunku dla $n = \infty$; w tym przypadku biorąc dla R_n granicę niższą, można położyć:

$$R_n = \frac{nu_n}{\varepsilon_1}$$

A gdy ε_1 równe jedności, trzeba wziąć wartości następne, tak że ogólnie położymy:

$$R_n = \frac{u^v\, u_n}{\varepsilon_v}$$

A zbierając to razem, będzie:

1. Dla szeregów, których stosunek rośnie lub jest stały:

$$R_n = u_{n+1} \tag{5}$$

2. Dla szeregow których stosunek ubywa, będzie w ogóle:

$$R_n = \frac{n^v\, u_n}{\varepsilon_v} \tag{6}$$

gdzie ε_v jest wartość, pierwszego ze spółczynników rozwinięcia stosunku, większego od jedności, oznaczonego przez v.

Takie są wyrażenia reszt, które potrzeba podstawić w wyrażenie (3) dla rozwiązania zadań powyższych.

Podstawjając te wartości w równanie (3) otrzymamy:

1. Dla szeregów o znakach jednakowych, których stosunek rośnie lub jest stały:

$$\left.\begin{aligned} \mu + 1 &= -\,\mathrm{L}\, u_{n+1} \\ m - \mu &= \mathrm{L}\, n + 1 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

2. Dla szeregów o znakach jednakowych których stosunek ubywa, będzie:

$$\left.\begin{aligned} \mu + 1 &= -\,\mathrm{L}\left(\frac{n^v\, u_n}{\varepsilon_v}\right) \\ m - \mu &= \mathrm{L}\, n + 1 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dla szeregów o znakach na przemian zbierzemy po dwa wyrazy, oznaczymy liczbę wyrazów za pomocą równań (7) lub (8) i tę liczbę podwoimy.

76. Jako przykład weźmy szereg postaci.

1.
$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots \tag{a}$$

będący postępem ilorazowym; ponieważ stosunek jego jest stały, przeto równania (7) dadzą:

$$\mu + 1 = (n+1)\,\mathrm{L}\, a$$
$$m - \mu = \mathrm{L}\, n + 1.$$

a ztąd łatwo otrzymamy w przybliżeniu:

$$n = \frac{\mu + 1}{\mathrm{L}a} - 1$$

$$m = \mu + \mathrm{L}\,\mu - \mathrm{L}\,\mathrm{L}\, a + 1$$

to znaczy: *że, w postępach ilorazowych liczba wyrazów, jaką trzeba brać na dane przybliżenie, jest równa stosunkowi danego przy-*

bliżenia, powiększonego jednością, do logarytmu dziesiętnego stosunku postępu, zmniejszonemu jednością; liczba zaś cyfr, do jakich trzebaby obliczać każdy wyraz, jest równa summie przybliżenia danego i jego logarytmu dziesiętnego, zmniejszonéj logarytmem podwójnym ze stosunku postępu i powiększonéj jednością.

I tak, gdy $a = 10$ będzie:

$$n = \mu, \quad m = \mu + l\,\mu + 1$$

jak być powinno; albowiem każdy wyraz postępu takiego daje nową cyfrę dziesiętną, a więc trzeba μ wyrazów, aby mieć μ cyfr przybliżenia.

2. Szereg wyrażający podstawę logarytmów naturalnych:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \tag{b}$$

ma wyraz ogólny:

$$u_n = \frac{1}{n!}$$

stosunek wyrazów:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = n$$

przeto stosunek rośnie do nieskończoności; z resztą szereg jest zbieżny, i zastosujemy warunki (7) które będą:

$$\mu + 1 = \mathrm{L}\,\{(n+1)!\}$$
$$m - \mu = \mathrm{L}\,n + 1$$

a że według wzoru przybliżonego Stirlinga:

$$n\,! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

gdzie e podstawa logarytmów; przeto podstawiając i obliczając, otrzymamy:

$\mu = 1$	6	18	32	64	157
$n = 5$	10	20	30	50	100
$m = 3$	8	21	35	67	160

Ztąd widzimy: że zrazu więcéj trzeba brać wyrazów jak cyfr w daném przybliżeniu, aż do 27 cyfr, a daléj przeciwnie, mniéj wyrazów i w coraz mniejszym stosunku.

77. Weźmy jeszcze szereg wyrażający π:

$$\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots \qquad \text{(c)}$$

a zbierając po dwa wyrazy, otrzymamy:

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots$$

a wyraz n ty będzie:

$$u_n = \frac{1}{(4n+3)(4n+1)}$$

stosunek wyrazów:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{2}{n} + \ldots$$

przeto szereg jest zbieżny i ubywający, i $\varepsilon_1 = 2$, a stosując wzór (8), i czyniąc $v = 1$, będzie:

$$\mu + 1 = -\mathrm{L}\left\{\frac{n}{2(4n+3)(4n+1)}\right\} \qquad \text{(d)}$$

czyli:

$$2\,(4n+3)\,(4n+1) = n\;10^{\mu+1}$$

równanie drugiego stopnia, łatwe do rozwiązania, a opuszczając jedność, otrzymamy:

$$n = \frac{10^{\mu+1} - 24}{32}$$

i tak, aby mieć przybliżenie w cyfrach dobrych	3	—	5
potrzeba obliczyć wyrazów	312	—	31246
a dla szeregu pierwszego	624	—	62490

Poncelet w „Mémoire sur l'application de la méthode de moyennes“ (dziennik Crellego T. 13) podał, że dla 5 cyfr dobrych, trzeba obliczyć około 50,000 wyrazów; widzimy więc, że o 12,500 więcéj.

78. Inny szereg bardzo zbieżny, podany przez Machina, według którego obliczają zwykle stosunek okręgu koła do średnicy, jest:

$$\frac{1}{4}\pi = 4\left\{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \ldots\right\} - \frac{1}{239} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3 - \ldots \qquad \text{(e)}$$

aby oznaczyć liczbę wyrazów na dane przybliżenie tego szeregu; uważamy w ogóle szereg:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{a}\right)^5 - \ldots$$

który ma za wyraz ogólny, zbierając po dwa wyrazy:

$$u_n = \frac{(4n+3)a^2-(4n+1)}{(4n+1)(4n+3)a^{4n+3}} \tag{f}$$

a stosunek wyrazów jest:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = a^4 (1 + \ldots)$$

Zatém wszystkie powyższe szeregi są zbieżne i ubywające do stałéj granicy a^4 większéj od jedności, zatém $\varepsilon_0 = a^4$ i zastosujemy równanie (8), czyniąc $v = 0$; jakoż będzie:

$$\mu + 1 = \mathrm{L} \left\{ \frac{(4n+1)(4n+3)a^{4n+7}}{(4n+3)a^2-(4n+1)} \right\}$$

a gdy a jest dosyć wielkie, można opuścić $4n + 1$ w mianowniku, i będzie:

$$\mu + 1 = \mathrm{L} \{(4n+1)a^{4n+5}\}$$

albo jeszcze prościéj;

$$\mu = (4n+5)\,\mathrm{L}a$$

czyli:

$$n = \frac{\mu - 5\,\mathrm{L}\,a}{4\,\mathrm{L}\,a} \tag{g}$$

Zatém: aby z szeregu powyższego obliczyć π w przybliżeniu 20 cyfr (*), potrzeba wziąć 14 wyrazów szeregu pierwszego, i 4 wyrazy szeregu drugiego, a każdy wyraz pierwszego szeregu potrzeba obliczyć w 22 cyfrach, a drugiego szeregu w 21 cyfrach.

Babinet w „Calculs pratiques" podaje ten rachunek, lecz nie podaje naprzód ilości wyrazów potrzebnych, i jak widzimy, niepotrzebnie posuwa obliczanie wyrazów w drugim szeregu do 22 cyfr, kiedy jest dostateczna tylko miéć 21 cyfr.

Lagny obliczył π w 128 cyfrach, a Richter aż w 333, do obliczenia tego ostatniego przybliżenia potrzeba obliczyć około 236 wyrazów pierwszego szeregu, a 68 drugiego.

79. Mówimy, że szereg jest mało zbieżny lub bardzo zbieżny; podobne wyrażenia nieokreślone, w matematyce nie mają

(*) Patrz. Babinet. „Calculs pratiques appliqués aux sciences d'observation" Paris 1857, str. 117.

żadnego znaczenia, aby poznać czy szereg jest bardzo lub mało zbieżnym, potrzeba go porównać z innym szeregiem.

Otóż do tego porównania może służyć wyżéj podany postęp ilorazowy (§ 76), mający za stosunek 10, albowiem dla tego tylko szeregu liczba wyrazów jest zawsze równa liczbie cyfr danego przybliżenia i możemy go nazwać *szeregiem normalnym.*

Większa lub mniejsza zbieżność szeregu, wyrazi się wtedy przez stosunek liczby cyfr przybliżenia, do liczby wyrazów, potrzebnych do obliczenia na dane przybliżenie; i tak, oznaczając zbieżność szeregu przez λ, będzie:

$$\lambda = \frac{\mu}{n}$$

zatém *zbieżność szeregu jest to wartość stosunku ilości cyfr przybliżenia, do ilości wyrazów, które dają toż przybliżenie.*

Postęp ilorazowy o stosunku 10 będzie miał zbieżność równą jedności; wszystkie szeregi, których zbieżność większa od jedności są bardo zbieżne, których zbieżność mniejsza od jedności są mało zbieżne.

80. Szereg (b) (§ 76), dający wartość dla e, ma zbieżność:

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}\{(n+1)!\}-1}{n}$$

Z samego wyrażenia tego widzimy, że szereg ten z początku jest mało zbieżnym, a jego zbieżność będzie równa jedności, gdy n będzie równe około 27, a dla wartości n większych nad 27, szereg ten jest bardzo zbieżnym.

Podobnie szereg (c) (§ 77), daje na wyrażenie zbieżności, upraszczając wyrażenie (d) i dzieląc przez 2 n:

$$\lambda = \frac{\mathrm{L}(4n+3)}{2n}$$

wyrażenie zawsze będące ułomkiem, przeto szereg mało bardzo zbieżny.

Nakoniec szereg (e) (§ 78), składa się z dwóch szeregów: pierwszego zbieżność otrzymamy, pamiętając, że liczbę wyrazów potrzeba podwoić, z wyrażenia (g) dzieląc przez $2n$:

$$\lambda = \left(2 + \frac{5}{2n}\right)\mathrm{L}\ 5$$

i gdy bierzemy jeden wyraz, zbieżność wyraża się przez 3,2. gdy liczbę wyrazów zwiększymy, zbieżność jego zmniejsza się i w granicy równa 1, 4 zatém jego zbieżność zawarta między 3,2 i 1,4 t. j. z początku 3 $\frac{1}{5}$ razy zbieżniejszy od szeregu normalnego.

Drugi szereg ma zbieżność:

$$\lambda' = \left(2 + \frac{5}{2n}\right) L\, 239$$

i dla $n = 1$, $\lambda' = 10{,}8$; a gdy $n = \infty$, $\lambda' = 4{,}8$; przeto zbieżność tego szeregu zawarta jest w granicach 10,8 i 4,8 i podobnie maleje z liczbą branych wyrazów, zatém jest 10 $\frac{1}{2}$ do 4 $\frac{1}{2}$ razy zbieżniejszy od szeregu normalnego, przeto szereg ten jest bardzo zbieżnym.

Za zbieżność szeregu (*e*) złożonego z obu, można brać połowę ich summy: zatém jego zbieżność będzie zawartą między 7 i 3; t. j. będzie z początku 7 razy zbieżniejszy od normalnego, a w końcu jeszcze 3 razy zbieżniejszy, przeto jest bardzo zbieżnym, i może służyć do obliczenia stosunku okręgu koła do średnicy.

CZĘŚĆ DRUGA.

RACHUNEK FUNKCYI GRANICZNYCH.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

ZASADY RACHUNKU FUNKCYI GRANICZNYCH.

81. Umiemy łatwo z każdéj funkcyi f (x), różniczkując kolejno, wyprowadzić pochodne coraz wyższego rzędu, a różniczkując n razy, otrzymujemy n tę pochodną, którą oznaczamy przez $f^n(x)$; pochodna ta jest pewną funkcyą z ilości w skład funkcyi pierwotnéj f (x) wchodzących, i jeszcze funkcyą liczby n.

Jeżeli teraz każdą z tych funkcyi pochodnych podzielimy przez iloczyn z czynników od 1 do n otrzymamy szereg wyrazów postaci:

$$\frac{f^n(x)}{n!}, \quad \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}, \quad \text{i t. p.}$$

gdy n powiększa się, a ilości w skład f (x) wchodzące nie zmieniają się, i nie mają szczególnych wartości; wyrażenia te z n razem muszą dążyć wszystkie w ogóle do zera lub nieskończoności, gdy n przeważa w liczniku lub w mianowniku, a w szczególnym przypadku do ilości stałéj, gdy te wyrażenia są stopnia zero co do n.

Gdy więc pochodna funkcyi jakiéjkolwiek, podzielona przez iloczyn czynników dąży do zera lub nieskończoności, bez względu na ilości, które w skład funkcyi wchodzą, gdy rzęd pochodnéj powiększa się i dąży do nieskończoności; stosunek takich dwóch wyrażeń w granicy, przybiera postać nieoznaczoną; jakoż mamy:

$$gr\!: \left(\frac{\mathrm{f}^{n-1}}{(n-1)!} : \frac{\mathrm{f}^{n}}{n!}\right) = \frac{n\,\mathrm{f}^{n-1}}{\mathrm{f}^{n}} = \frac{0}{0} \text{ lub } \frac{\infty}{\infty}$$

a że wiemy, że takie wyrażenie musi mieć wartość w ogóle skończoną, ztąd wypada następujące twierdzenie:

Stosunek n tych pochodnych tuż po sobie następujących, wzięty n razy w granicy, gdy n rosnąc staje się nieskończone, ukazuje się pod postacią nieoznaczoną, i ma wartość w ogóle oznaczoną, niezależną od n, a tylko od ilości w skład funkcyi wchodzących; czyli, że w téj granicy jest pewną funkcyą szczególną z ilości w skład funkcyi danéj wchodzących, niezależną zupełnie od n.

82. Otoż funkcyę tę, jeszcze nam nieznaną dotąd, jako stojącą na granicy funkcyi pochodnych, nazwiemy *funkcyą graniczną* funkcyi danéj, lub prosto *graniczną;* dla oznaczenia téj funkcyi przyjąć musimy nowy znak G (pierwszą literą wyrazu granica), tak, że mając:

$$y = \mathrm{f}\,(x)$$

funkcyą graniczną oznaczymy przez:

$$\mathrm{G}\,y\,(x) = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x)$$

i będzie to funkcya graniczna f (x) wzięta co do x.

Podobnie:

$$\mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x, y)\,(x), \quad \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x, y)\,(y)$$

będą funkcye graniczne f (x, y) wzięte co do x lub y.

Nakoniec, gdy funkcya graniczna przybiera dla zmiennéj x wartość stałą a, oznaczymy ją przez:

$$\mathrm{G}\,y\,(x)_a$$

Znak G będzie zarazem oznaczać działanie, jakie wykonać należy, aby otrzymać graniczną żądanéj funkcyi. Sposób jéj otrzymania, i prawa, jakim podlega ta nowa funkcya, będą objęte nowym rachunkiem, który nazwiemy *rachunkiem funkcyi granicznych.*

Twierdzenie więc wyżéj dowiedzione można napisać:

$$\mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x) = \left(\frac{n\,\mathrm{f}^{n-1}\,(x)}{\mathrm{f}^{n}\,(x)}\right)_{\infty} \qquad (1)$$

to jest: że *stosunek* n *tych pochodnych, wzięty* n *razy, dla* $n = \infty$ *ma wartość oznaczoną, i jest równy funkcyi granicznéj danéj funkcyi.*

To twierdzenie jest podstawą nowego rachunku, i jest całéj ogólności jak tylko żądać można.

83. Wiemy, że gdy wyrażenie dla pewnéj wartości zmiennéj x ukazuje się pod postacią nieoznaczoną, funkcya ma wartość stałą, którą oznaczamy biorąc osobno pochodne wyrazów które razem nikną, lub stają się nieskończone. Sposób ten nie może być zastosowany do wyrażenia (1) dla znalezienia granicznéj fuukcyi danéj, albowiem biorąc pochodne osobno z licznika i osobno z mianownika co do n, otrzymamy:

$$\frac{n \dfrac{d\,\mathrm{f}^{n-1}}{dn} + \mathrm{f}^{n-1}}{\dfrac{d\,\mathrm{f}^{n}}{dn}}$$

wyrażenie podobne do (1), stające się nieoznaczoném dla $n = \infty$, i jeszcze zawikłane pochodnemi co do n; sposób więc oznaczenia wartości wyrażeń, ukazujących się pod postacią nieoznaczoną, tu nie służy, i musimy szukać nowych sposobów, dla znalezienia granicznych funkcyi.

84. Pierwsze zasady rachunku funkcyi granicznych, otrzymamy wprost z wzoru (1), jakoż gdy funkcya ma postać,

$$z = y + a$$

gdzie a, jest ilość stała, a y funkcya z x; ponieważ biorąc pochodne, mamy:

$$z^n = y^n$$

przeto:

$$\frac{n\,z^{n-1}}{z^n} = \frac{n\,y^{n-1}}{y^n}$$

a ztąd:

$$\mathrm{G}\,(y + a)\,(x) = \mathrm{G}\,y\,(x) \tag{2}$$

t. j. *wyraz stały w funkcyi danéj, niknie w funkcyi granicznéj.*

Gdy funkcya ma postać:

$$z = a\,y$$

gdzie a jest czynnik stały a y funkcya z x: ponieważ:

$$z^n = a\,y^n$$

przeto:

$$\frac{n\, z^{n-1}}{z^n} = \frac{n\, y^{n-1}}{y^n}$$

zatém:

$$\mathrm{G}\, a\, y\,(x) = \mathrm{G}\, y\,(x) \tag{3}$$

t. j. *czynnik stały w funkcyi danéj, niknie w funkcyi granicznéj.*

85. Ponieważ biorąc pochodne funkcyi danéj:

$$y = \mathrm{f}\,(x)$$

otrzymujemy:

$$y' = \mathrm{f}'$$
$$y'' = \mathrm{f}''$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y^{n-1} = \mathrm{f}^{n-1}$$
$$y^n = \mathrm{f}^n$$

tak, że stosunek:

$$\frac{n\, y^{n-1}}{y^n} = \frac{n\, \mathrm{f}^{n-1}}{\mathrm{f}^n}$$

dla $n = \infty$ jest funkcyą graniczną nietylko danéj $\mathrm{f}\,(x)$, lecz jeszcze każdéj z pochodnych następnych, zatém będzie:

$$\mathrm{Gf}(x)(x) = \mathrm{Gf}'(x)(x) = \mathrm{Gf}''(x)(x) \ldots = \mathrm{G\, f}^n\,(x)(x) \tag{4}$$

Jeżeli z danéj funkcyi wyprowadzimy całki coraz wyższego rzędu, będzie podobnież:

$$\int \mathrm{f}\,(x)\, dx, \quad \int^2 \mathrm{f}\,(x)\, dx^2 \;\ldots\; \int^n \mathrm{f}\,(x)\, dx^n$$

wszystkie te całki mają za stosunek n tych pochodnych:

$$\frac{n\, \mathrm{f}^n\,(x)}{\mathrm{f}^n\,(x)}$$

zatém będzie:

$$\mathrm{G} \int \mathrm{f}(x) dx(x) = \mathrm{G} \int^2 \mathrm{f}(x) dx^2(x) \ldots = \mathrm{G\, f}\,(x)(x) \tag{5}$$

Wyrażenia (4) i (5) zawierają następujące twierdzenie:

Wszystkie funkcye pochodne i całkowe coraz wyższych rzędów, mając za pochodną daną funkcyą, mają jednę i tęż samą graniczną, która jest graniczną funkcyi danéj.

Ztąd na odwrót wniesiemy, że mając daną funkcyą graniczną, ona będzie graniczną nieskończonéj liczby funkcyi, które jednak mają między sobą ten związek, że otrzymują się przez różniczkowanie, lub całkowanie jednéj z funkcyi, których dana jest graniczną.

86. Gdy funkcya jest summą funkcyi algebraicznéj całkowitéj m go stopnia, i innéj funkcyi, postaci:

$$y = \mathrm{A}_m(x) + \mathrm{f}(x)$$

to ponieważ biorąc pochodną wyższą od stopnia m funkcyi algebraicznéj, będzie:

$$y^n = \mathrm{f}^n(x)$$

gdzie funkcya algebraiczna całkowita znika, a ponieważ:

$$\frac{n\,y^{n-1}}{y^n} = \frac{n\,\mathrm{f}^{n-1}}{\mathrm{f}^n}$$

przeto przechodząc do granic, będzie:

$$\mathrm{G}\,\{\mathrm{A}_m(x)+\mathrm{f}(x)\}\,(x) = \mathrm{G}\,\mathrm{f}(x)\,(x) \tag{6}$$

t. j. *że wszystkie funkcye algebraiczno-całkowite, wchodzące do składu funkcyi jako oddzielne wyrazy, znikają w granicznéj.*

87. Gdy funkcya jest summą lub różnicą dwóch funkcyi, to mamy:

$$v = z \pm y$$
$$v^n = z^n \pm y^n$$

przeto pochodne téj funkcyi, stale są summą lub różnicą pochodnych tych funkcyi, można więc rozdzielić osobno każdą z tych funkcyi składowych, i oznaczyć graniczną każdéj oddzielnie, tak że funkcya dana, będzie miała dwie graniczne. Zatém napiszemy:

$$\mathrm{G}\,(z \pm y)\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,z\,(x) \\ = \mathrm{G}\,y\,(x) \end{cases} \tag{7}$$

Podobnie gdy:

$$u = y + z + v$$

będzie:

$$\mathrm{G}\,u\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,y\,(x) \\ = \mathrm{G}\,z\,(x) \\ = \mathrm{G}\,v\,(x) \end{cases}$$

t. j. *gdy funkcya będzie summą lub różnicą kilku funkcyi, ponieważ wszystkie pochodne są stale summą lub różnicą pochodnych, każdéj z osobna funkcyi; przeto funkcya, będąca summą lub ró-*

żnicą kilku funkcyi, będzie miała tyle funkcyi granicznych, z ilu składa się wyrazów.

To twierdzenie możnaby jeszcze tak dowieść:

Ponieważ:

$$v^n = y^n \pm z^n$$

przeto:

$$\frac{n\, v^{n-1}}{v^n} = \frac{n\,(y^{n-1} \pm z^{n-1})}{y^n \pm z^n}$$

co można napisać pod dwiema postaciami:

$$\frac{n\, v^{n-1}}{v^n} = \frac{n\, y^{n-1}}{y^n}\left(\frac{1 \pm \dfrac{z^{n-1}}{y^{n-1}}}{1 \pm \dfrac{z^n}{y^n}}\right) = \frac{n\, z^{n-1}}{z^n}\left(\frac{1 \pm \dfrac{y^{n-1}}{z^{n-1}}}{1 \pm \dfrac{y^n}{z^n}}\right)$$

a gdy przejdziemy do granicy dla $n = \infty$, to wyrażenia $\dfrac{z^{n-1}}{y^{n-1}}$, $\dfrac{z^n}{y^n}$ muszą zbiegać do téjże saméj wartości, która będzie granicą tych stosunków; przeto wyrażenia w nawiasach będą równe, a że pierwsze zamieniają się na graniczne, przeto będzie:

$$G\, v\,(x) \begin{cases} = G\, y\,(x) \\ = G\, z\,(x) \end{cases}$$

88. Gdy funkcya jest iloczynem dwóch funkcyi, będących funkcyami z x.

$$v = y\, z$$

to ponieważ mamy:

$$v' = y\, z' + y'\, z$$

przeto na mocy powyższego będzie:

$$G\,(y\, z)\,(x) \begin{cases} = G\,(y' z)\,(x) \\ = G\,(y z')\,(x) \end{cases}$$

a ztąd jeszcze będzie:

$$G\,(y\, z)\,(x) \begin{cases} = G\,(y\, z'')\,(x) \\ = G\,(y''\, z)\,(x) \quad \text{i t. d.} \end{cases}$$

tak że nakoniec można napisać:

$$G\,(y\, z)\,(x) \begin{cases} = G\,(y\, z^n\,)\,(x) \\ = G\,(z\, y^n\,)\,(x) \end{cases}$$

a że:

$$G\,(\,y z^n\,)\,(x) = \left(\frac{n\, y\, z^{n-1}}{y\, z^n}\right)_\infty = \left(\frac{n\, z^{n-1}}{n\, z^n}\right)_\infty = G\, z\,(x)$$

przeto będzie ostatecznie:

$$\mathrm{G}\,(y\,z)\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,(y)\,(x) \\ = \mathrm{G}\,(z)\,(x) \end{cases} \qquad (8)$$

to jest: *funkcya będąca iloczynem dwóch lub kilku funkcyi, ma tyle granicznych, z ilu składa się czynników, i te graniczne są równe granicznym każdego po szczególe czynnika.*

Powyższe prawo daje się jeszcze dowieść wprost, biorąc pochodne, jakoż:

$$v' = y\,z' + z\,y'$$

$$v'' = y\,z'' + 2\,y'\,z' + z\,y''$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$v^n = y\,z^n + n\,y'\,z^{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,y''\,z^{n-2} + \ldots + y^n\,z$$

to jest: pochodne mają postać rozwinięcia binomialnego, gdzie zamiast potęg, wchodzą pochodne odpowiednich rzędów.

Wyrażenie to dla v^n, można dwojako przedstawić:

$$v^n = z^n \left(y + n\,y'\,\frac{z^{n-1}}{z^n} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,y''\,\frac{z^{n-2}}{z^n} + \ldots \right)$$

$$v^n = y^n \left(z + n\,z'\,\frac{y^{n-1}}{y^n} + \frac{n\,(n-1)}{1.2}\,z''\,\frac{y^{n-2}}{y^n} + \ldots \right)$$

a ztąd:

$$\frac{n\,v^{n-1}}{v^n} = \frac{n\,z^{n-1}\left(y + (n-1)\,y'\,\frac{z^{n-2}}{z^{n-1}} + \ldots \right)}{z^n \left(y + n\,y'\,\frac{z^{n-1}}{z^n} + \ldots \right)}$$

A że wyrażenia w nawiasach dla $n = \infty$ stają się równe, przeto będzie:

$$\mathrm{G}\,v\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,z\,(x) \\ = \mathrm{G}\,y\,(x) \end{cases} \quad \text{jak wyżéj.}$$

89. Gdy dana funkcya jest funkcyą z funkcyi, to jest:

$$v = \mathrm{f}\,(z) \qquad z = \varphi\,(x)$$

czyli:

$$v = \mathrm{f}\,(\varphi\,(x))$$

można brać graniczne dwojako, raz uważając z za zmienną niezależną, drugi raz za zmienną zależną od x.

W pierwszym przypadku będzie na mocy powyższych praw:

$$G\,v\,(z) = G\,f\,(z)\,(z)$$

W drugim przypadkn biorąc pochodne, będzie:

$$v' = f'\,(z)\,\varphi'\,(x)$$

przeto na mocy praw powyższych, funkcya v' czyli v, będzie miała dwie graniczne:

$$G\,v\,(x) \begin{cases} = G\,\varphi'\,(x)\,(x) = G\,\varphi\,(x)(x) \\ = G\,f'\,(z)\,(x) \end{cases}$$

pierwsza jest równa granicznéj funkcyi φ, druga jest graniczną $f'\,(z)$ co do x. Oznaczając znowu $f'\,(z) = v_1$, będzie:

$$v'_1 = f''\,(z)\,\varphi'\,(x)$$

i znowu graniczna będzie:

$$G\,v\,(x) = G\,f''\,(z)\,(x)$$

postępując tak daléj, otrzymamy:

$$G\,v\,(x) = G\,f^{n-1}\,(z)\,(x)$$

czyli oznaczając $f^{n-1}\,(z)$ przez v_n , będzie:

$$v_n{}' = f^n\,(z)\,\varphi'\,(x)$$

ztąd:

$$\frac{n\,v_n}{v'_n} = \frac{n\,f^{n-1}\,(z)}{\varphi'(x)f^n\,(z)}$$

zatém:

$$G\,v\,(x) = \frac{G\,f\,(z)\,(z)}{\varphi'(x)}$$

Zbierając razem, otrzymamy:

$$G\,f\,(\varphi)\,(x) \begin{cases} = G\,\varphi\,(x) \\ = \dfrac{G\,f\,(\varphi)\,(\varphi)}{\varphi'} \end{cases} \tag{9}$$

to jest: *funkcya będąca funkcyą z funkcyi x, ma dwie graniczne, jedna jest graniczną funkcyi, pod znakiem funkcyi będącéj, druga jest stosunkiem granicznéj funkcyi pierwszéj, uważając drugą funkcyą za zmienną niezależną i wziętéj co do téj funkcyi, do pochodnéj pierwszéj téjże funkcyi, wziętéj co do zmiennej x.*

Prawo to najważniejsze, jak zobaczymy daléj, można jeszcze dowieść wprost, biorąc stosunek n tych pochodnych.

Jakoż mamy:

$$v' = f' \varphi'$$
$$v'' = f' \varphi'' + f'' \varphi'^2$$
$$v''' = f' \varphi''' + 3 f'' \varphi' \varphi'' + f''' \varphi'^3$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$v^n = f' \varphi^n + f'' [\varphi] + f''' [\varphi] + \ldots + f^n \varphi'^n$$

gdzie wyrażenia $[\varphi]$ są zależnie tylko od pochodnych φ.

Ztąd możemy napisać:

$$\frac{n\, v^{n-1}}{v^n} = \frac{n\, \varphi^{n-1} (f' + f'' [\varphi] + \ldots)}{\varphi^n (f' + f'' [\varphi] + \ldots)}$$

$$\frac{n\, v^{n-1}}{v^n} = \frac{n\, f^{n-1} \varphi'^{n-1} \left\{ 1 + \frac{f^{n-2}}{f^{n-1}} [\varphi] + \ldots \right\}}{f^n \varphi'^n \left\{ 1 + \frac{f^{n-1}}{f^n} [\varphi] + \ldots \right\}}$$

a przechodząc do granicy gdy $n = \infty$, wyrażenia w nawiasach stają się równe, i będzie:

$$\left(\frac{n\, v^{n-1}}{v^n}\right)_\infty = \left(\frac{n\, \varphi^{n-1}}{\varphi^n}\right)_\infty$$

i

$$\left(\frac{n\, v^{n-1}}{v^n}\right)_\infty = \frac{1}{\varphi'} \left(\frac{n\, f^{n-1}}{f^n}\right)_\infty$$

gdyż φ' nie zawiera n, co wyraża się przez:

$$G\, v\,(x) \begin{cases} = G\, \varphi\,(x) \\ = \dfrac{G\, f\,(\varphi)}{\varphi'} \end{cases} \text{jak wyżéj.}$$

90. Gdy dana funkcya jest postaci:

$$v = f\,(z) \qquad z = \varphi\,(y) \qquad y = \psi\,(x)$$

otrzymamy na mocy powyższego:

$$G\, v\,(x) \begin{cases} = G\, \psi\,(x) \\ = \dfrac{G\, f \varphi\,(\psi)}{\psi'} \end{cases}$$

a że:

$$G\, f \varphi\,(\psi) \begin{cases} = G\, \varphi\,(\psi) \\ = \dfrac{G\, f\,(\varphi)}{\varphi'} \end{cases}$$

przeto podstawiając te wartości, otrzymamy:

$$
\mathrm{G\,f}\,\{\varphi(\psi(x))\}\,(x)\begin{cases} = \mathrm{G}\,\psi\,(x) \\ = \dfrac{\mathrm{G}\,\varphi\,(\psi)}{\psi'} \\ = \dfrac{\mathrm{G\,f}\,(\varphi)}{\psi'\varphi'} \end{cases} \tag{9'}
$$

to jest: *graniczne potrójnéj funkcyi z funkcyi są trzy: jedna jest równa granicznéj funkcyi trzeciéj; druga jest równa granicznéj funkcyi drugiéj, wziętéj co do trzeciéj a podzielonéj przez jéj pochodną; trzecia jest równa granicznéj funkcyi pierwszéj, branéj co do drugiéj, a podzielonéj przez iloczyn pochodnych z drugiéj i trzeciéj.*

Podobnie otrzymamy prawo tworzenia się granicznych, gdy jest dana funkcya z funkcyi wielokrotnéj.

91. Zbierając to razem, otrzymamy następujące prawo: *Każda funkcya złożona z innych funkcyi, ma za graniczne, graniczne funkcyi w skład jéj wchodzących, lub téż jest stosunkiem granicznéj jednéj z funkcyi, będącéj funkcyą z funkcyi, wziętéj co do funkcyi pod nią stojącéj do pochodnéj z tejże funkcyi.*

To prawo ogólne, obejmujące wszystkie inne, jest główną podstawą rachuku funkcyi granicznych.

ROZDZIAŁ DRUGI.

OZNACZENIE GRANICZNYCH FUNKCYI O JEDNÉJ ZMIENNÉJ.

92. Na mocy praw powyższych, znając graniczne funkcyi prostych, potrafimy oznaczyć graniczne funkcyi jakiéjkolwiek.

Niech będzie najprzód funkcya algebraiczna najprostsza:

$$y = x^m$$

tu odróżnić trzeba dwa przypadki: gdy m dodatne i całkowite razem, mamy stale biorąc pochodną rzędu $n > m$:

$$y^n = 0$$

przeto:

$$\frac{n\ y^{n-1}}{y^n} = n$$

a w granicy dla $n = \infty$, będzie:

$$\mathrm{G}\ x^m\ (x) = \infty \qquad (10)$$

to jest: *funkcya graniczna potęgi całkowitéj i dodatnéj ze zmiennéj, ma wartość stale nieskończenie wielką.*

Gdy m jest jakiekolwiek, wyjąwszy całkowite i dodatne, mamy:

$$y^n = m\ ?\ (m - n + 1)\ x^{m-n}$$

ztąd:

$$\frac{y\ n^{n-1}}{y^n} = \frac{n}{m - n + 1}\ x = -\frac{1}{1 - \frac{m+1}{n}}\ x$$

a przechodząc do granicy, będzie:

$$\mathrm{G}\ x^m\ (x) = x \qquad (10')$$

nie mając względu na znak ilości x; zatém: *graniczna potęgi ja-*

kiejkolwiek ze zmiennéj, wyjąwszy dodatnéj i całkowitéj, jest równa saméj zmiennéj.

93. Gdy mamy:

$$y = A_m(x)$$

funkcyą algebraiczną całkowitą stopnia m tego, to na mocy powyższego, i ponieważ pochodne wyższe od m nikną, czyli stają się zero, przeto:

$$G\,A_m(x) = \infty$$

co jeszcze zgadza się, uważając że graniczna funkcyi A_m, jako złożonéj z różnych wyrazów, których po szczególe graniczne są nieskończone, musi być także nieskończoną.

Łącząc to z prawem § 86, mamy twierdzenie: *funkcya algebraiczna i całkowita, w skład innéj funkcyi jako osobny wyraz wchodząca, niknie w granicznéj, sama zaś ma graniczną nieskończoną.*

Ile razy między granicznemi otrzymujemy niektóre nieskończone, te powinny być opuszczone z pod uwagi, jako powstające z funkcyi całkowitych, szczególniéj przy granicznych, mających wartości skończone.

94. Niech będzie funkcya postaci:

$$y = (f(x))^m$$

czyniąc $f(x) = z$, będzie $y = z^m$ i na mocy § 89, będzie:

$$G\,y(x) \begin{cases} = G\,f(x)(x) \\ = \dfrac{G\,z^m(z)}{z'} \end{cases}$$

Gdy więc m całkowite i dodatne, mamy:

$$G\,z^m(z) = \infty$$

i jakiekolwiek będzie $f(x)$, otrzymamy:

$$G\,(f\,x)^m(x) \begin{cases} = G\,f(x)(x) \\ = \infty \end{cases} \tag{11}$$

Gdy zaś m nie całkowite i dodatne razem, to:

$$G\,z^m(z) = z$$

i będzie:

$$G\,(f\,(x)^m\,(x)\begin{cases}= G\,f\,(x)\,(x)\\ = \dfrac{f\,(x)}{f'\,(x)}\end{cases}\qquad(11')$$

to jest: *graniczne potęgi całkowitéj i dodatnéj z jakiéjkolwiek funkcyi, są dwie: jedna nieskończona, druga jest równa granicznéj saméj funkcyi; graniczne zaś potęgi, nie całkowitéj i dodatnéj razem z jakiéjkolwiek funkcyi, są także dwie: jedna równa granicznéj saméj funkcyi, druga równa stosunkowi funkcyi, do jéj pochodnéj.*

I tak niech będzie:

$$y = (a\,x + b)^{-1}$$

$$G\,y\,(x) = \frac{a\,x + b}{a}$$

druga ma wartość nieskończoną.

95. Gdy funkcya ma postać ułamkową:

$$y = \frac{1}{\varphi\,(x)}$$

ponieważ można napisać:

$$y = (\varphi\,x)^{-1}$$

przeto będzie na mocy powyższego:

$$G\,\frac{1}{\varphi\,(x)}\,(x)\begin{cases}= G\,\varphi\,(x)\,(x)\\ = \dfrac{\varphi\,(x)}{\varphi'\,(x)}\end{cases}\qquad(12)$$

Gdy mamy:

$$y = \frac{f\,(x)}{\varphi\,(x)}$$

to będzie:

$$G\,\frac{f\,(x)}{\varphi\,(x)}\,(x)\begin{cases}= G\,f\,(x)\,(x)\\ = G\varphi\,(x)\,(x)\\ = \dfrac{\varphi\,(x)}{\varphi'(x)}\end{cases}\qquad(12')$$

to jest: *graniczne funkcyi ułamkowéj, są w ogóle trzy: jedna jest równa granicznéj licznika, druga granicznéj mianownika, a trzecia jest stosunkiem mianownika, do jego pochodnéj.*

I tak niech będzie:

$$y = \frac{1 + x - x^2}{1 + x - x^3}$$

będzie:

$$G\,y\,(x) = \frac{1 + x - x^3}{1 - 3\,x^2}$$

dwie drugie nieskończone.

96. Przejdziemy teraz do funkcyi logarytmowych:

$$y = \log x$$

pochodna pierwsza jest:

$$y' = x^{-1}$$

a więc na mocy § 85 i 92, graniczna téj funkcyi będzie:

$$G \log x\,(x) = x \tag{13}$$

to jest: *graniczna logarytmu ze zmiennéj, jest równa saméj zmiennéj.*

Dla funkcyi:

$$y = \log\,(f\,(x)\,)$$

czyniąc $z = f\,(x)$ będzie:

$$G \log\,(f\,(x)\,)\,(x) \begin{cases} = \dfrac{f\,(x)}{f'(x)} \\ = G\,f\,(x)(x) \end{cases}$$

to jest: *graniczne logarytmu z pewnéj funkcyi, są dwie: jedna równa granicznéj funkcyi, druga jest stosunkiem téj funkcyi, do jéj pochodnéj.*

Niech jeszcze będzie:

$$y = f\,(\log x)$$

czyniąc $z = \log x$. będzie:

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

zatém:

$$G\,f\,(\log x)\,(x) \begin{cases} = G \log x\,(x) = x \\ = x\,G\,f\,(z)(z) \end{cases} \tag{13'}$$

to jest: *graniczne funkcyi z logarytmu x są dwie: jedna jest samą ilością x, druga jest równa granicznéj funkcyi, wziętéj co do logarytmu, pomnożonéj przez x.*

I tak niech będzie:

$$y = \log\,(a\,x + b)$$

$$G\,y\,(x) = \frac{a\,x + b}{a}$$

druga jest nieskończona.

97. Niech będzie funkcya wykładnicza:

$$y = e^x$$

mamy:

$$y^n = e^x$$

ztąd:

$$\frac{n\,y^{n-1}}{y^n} = n$$

a przechodząc do granic dla $n = \infty$, będzie:

$$\mathrm{G}\, e^x\,(x) = \infty \qquad (14)$$

Podobnie gdy:

$$y = e^{-x}$$

$$y^{n-1} = \pm\, e^{-x}$$

$$y^n = \mp\, e^{-x}$$

$$\frac{n\,y^{n-1}}{y^n} = -\,n$$

przeto:

$$\mathrm{G}\, e^{-x} = \infty$$

nie mając względu na znak.

Zatém: *graniczna funkcyi wykładniczéj, jest niezależna od x, i ma wartość stałą, równą nieskończoności.*

Weźmy jeszcze wyrażenie:

$$y = a^x$$

$$y^n = a^x \log^n a$$

$$\frac{n\,y^{n-1}}{y^n} = \frac{n}{\log a}$$

a w granicy będzie:

$$\mathrm{G}\, a^x\,(x) = \infty \qquad (14')$$

Zatém: *graniczna funkcyi wykładniczéj, dla jakiéjkolwiek podstawy, jest nieskończoną.*

Niech jeszcze będzie:

$$y = a^{\mathrm{f}\,(x)}$$

na mocy § 89 będzie, kładąc $\mathrm{f}\,(x) = z$:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x) \\ = \dfrac{\mathrm{G}\, a^{\mathrm{f}(x)}\,(\mathrm{f}(x))}{\mathrm{f}'\,(x)} = \infty \end{cases} \qquad (14'')$$

ponieważ $\mathrm{G}\;\, a^{\mathrm{f}(x)}\,(\mathrm{f}(x)) = \infty$; zatém, *graniczne funkcyi wykładni-*

czéj, któréj wykładnik jest pewną funkcyą, są dwie: jedna nieskończona, druga jest równa granicznéj funkcyi saméj.

98. Niech jeszcze będzie:

$$y = (\mathrm{F}\,(x))^{\mathrm{f}(x)}$$

ponieważ można napisać:

$$y = e^{\mathrm{f}\,(x)\log \mathrm{F}\,(x)}$$

zatém graniczne będą:

$$\mathrm{G}\,y\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,(\mathrm{f}\,(x)\log \mathrm{F}\,(x))\,(x) \\ = \infty \end{cases}$$

Z tych pierwsze wyrażenie, jako iloczyn dwóch funkcyi, ma za graniczne:

$$\mathrm{G}\,y\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x) \\ = \mathrm{G}\,\log \mathrm{F}\,(x)\,(x) \end{cases}$$

ostatnie znowu wyrażenie, daje według powyższego:

$$\mathrm{G}\,y\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,\mathrm{F}\,(x)\,(x) \\ = \dfrac{\mathrm{F}\,(x)}{\mathrm{F}'(x)} \end{cases}$$

Zbierając razem, otrzymamy cztery funkcye:

$$\mathrm{G}\,y\,(x) \begin{cases} = \infty \\ = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x) \\ = \mathrm{G}\,\mathrm{F}\,(x)\,(x) \\ = \dfrac{\mathrm{F}\,(x)}{\mathrm{F}'(x)} \end{cases} \tag{15}$$

to jest: *funkcya wykładnicza, mająca za podstawę i wykładnik pewne funkcye z x, ma cztery graniczne: jedna nieskończona, dwie inne są graniczne funkcyi podstawy i wykładnika, a czwarta jest stosunkiem funkcyi podstawy, do jéj pochodnéj.*

I tak, niech będzie:

$$y = (a\,x + b)^{x^{-2}}$$

daje:

$$\mathrm{G}\,y\,(x) \begin{cases} = \infty \\ = x \\ = \dfrac{ax + b}{a} \end{cases}$$

99. Niech będą funkcye trygonometryczne:

$$y = \mathrm{wst}\,x \quad , \quad y = \mathrm{dos}\,x$$

mamy:

$$y^{n-1} = \pm \text{ wst } x \qquad y^{n-1} = \pm \text{ dos } x$$
$$y^{n} = \pm \text{ dos } x \qquad y^{n} = \pm \text{ wst } x$$

zatém:

$$\frac{n\, y^{n-1}}{y^n} = \frac{n \text{ wst } x}{\text{dos } x} = \frac{n \text{ dos } x}{\text{wst } x}$$

przechodząc do granic będzie:

$$\begin{aligned} &\text{G wst } x\,(x) = \infty \\ &\text{G dos } x\,(x) = \infty \end{aligned} \tag{16}$$

t, j. *graniczne wstawy i dostawy, są niezależne od x, i mają wartość nieskończoną.*

Podobnie:

$$y = \text{sty } x \quad , \quad y = \text{dot } x$$

przedstawia się pod postacią:

$$y = \frac{\text{wst } x}{\text{dos } x}, \qquad y = \frac{\text{dos } x}{\text{wst } x}$$

zatém graniczne będą:

$$\text{G sty } x\,(x) \left\{ \begin{aligned} &= \text{G wst } x\,(x) \\ &= \text{G dos } x\,(x) \\ &= \frac{\text{dos } x}{\text{wst } x} \end{aligned} \right.$$

Opuszczając graniczne mające wartość nieskończoną, będzie:

$$\begin{aligned} &\text{G sty } x\,(x) = \text{dot } x \\ &\text{G dot } x\,(x) = \text{sty } x \end{aligned} \tag{16'}$$

t. j. *graniczne stycznéj i dotycznéj, są na odwrót te same funkcye.*

Podobnież:

$$y = \text{sie } x, \qquad y = \text{dosie } x$$

Ponieważ:

$$y = \frac{1}{\text{dos } x}, \qquad y = \frac{1}{\text{wst } x}$$

przeto graniczne będą:

$$\begin{aligned} &\text{G sie } x\,(x) = \text{dot } x \\ &\text{G dosie } x\,(x) = \text{sty } x \end{aligned} \tag{16''}$$

t. j. *graniczne siecznéj i dosiecznéj są dotyczna i styczna tegoż łuku.*

Uważmy jeszcze:

$$y = \text{wst od } x, \qquad y = \text{dos od } x$$

ponieważ:

$$\text{wst od } x = 1 - \text{dos } x$$
$$\text{dos od } x = 1 - \text{wst } x$$

więc będzie na mocy powyższego:

$$\text{G wst od } x\,(x) = \infty$$
$$\text{G dos od } x\,(x) = \infty$$

t. j. *graniczne wstawy i dostawy odwrotnéj tegoż łuku, są nieskończone.*

100. Wszystkie funkcye łukowe, czyli odwrotne trygonometrycznym, jako mające pochodne algebraiczne, mają za graniczne funkcye algebraiczne.

Niech będzie:

$$y = \text{łuk wst } x$$
$$y = \text{łuk dos } x$$
$$y = \text{łuk sty } x$$

ich pochodne, jak wiemy są:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

a ztąd ich graniczne będą:

$$\text{G łuk wst } x\,(x) = \frac{1-x^2}{2\,x}$$

$$\text{G łuk dos } x\,(x) = \frac{1-x^2}{2\,x}$$

$$\text{G łuk sty } x\,(x) = \frac{1+x^2}{2x}$$

biorąc zaś graniczne co do x^2 będzie:

$$\text{G łuk wst } x\,(x^2) = 1 - x^2$$
$$\text{G łuk dost } x\,(x^2) = 1 - x^2 \qquad (17)$$
$$\text{G łuk sty } x\,(x^2) = 1 + x^2$$

to jest: *graniczne funkcyi kołowych są algebraiczne, tak jak wszystkie ich pochodne.*

101. Weźmy jeszcze funkcye elliptyczne, oznaczone przez całki:

$$E(c, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$F(c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2 \varphi}}$$

$$\Pi(a, c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + a\,\mathrm{wst}^2 \varphi)\sqrt{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2 \varphi}}$$

pochodne ich co do φ są algebraiczne, przeto graniczne co do φ, będą:

$$\mathrm{G}\,E(c, \varphi)(\varphi) = \frac{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2 \varphi}{2\, c^2 \,\mathrm{wst}\, \varphi \,\mathrm{dos}\, \varphi}$$

$$\mathrm{G}\,F(c, \varphi)(\varphi) = \frac{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2 \varphi}{2\, c^2 \,\mathrm{wst}\, \varphi \,\mathrm{dos}\, \varphi}$$

Funkcya zaś Π ma dwie graniczne:

$$\mathrm{G}\,\Pi(a, c, \varphi)(\varphi) \begin{cases} = \dfrac{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2 \varphi}{2\, c^2 \,\mathrm{wst}\, \varphi \,\mathrm{dos}\, \varphi} \\[2ex] = \dfrac{1 + a \,\mathrm{wst}^2 \varphi}{2\, a \,\mathrm{wst}\, \varphi \,\mathrm{dos}\, \varphi} \end{cases}$$

Biorąc pochodne co do $\mathrm{wst}^2 \varphi$, wyrażenia tych granicznych zmienią się na:

$$\mathrm{G}\,E(c, \varphi)(\mathrm{wst}^2 \varphi) = \frac{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2 \varphi}{c^2}$$

podobnie i dla innych funkcyi. Takie są różne wyrażenia granicznych funkcyi elliptycznych, stosownie względem jakich zmiennych bierzemy graniczne.

102. Z powyższego szczegółowego rozbioru, wypadają następujące prawa ogólne:

1. Funkcye algebraiczne całkowite mają za graniczne nieskończoność; połączone z innemi funkcyami, jako oddzielne wyrazy, nikną w granicznych.

2. Funkcye algebraiczne niecałkowite i algebraiczno-przestępne, mające pochodne algebraiczne, jak funkcye logarytmowe,

kołowe i t. p. mają za graniczne funkcye algebraiczne, które wyrażają się przez stosunek pewnych funkcyi w skład funkcyi wchodzących, do ich pochodnych.

3. Funkcye właściwe przestępne, t. j. odwrotne algebraiczno-przestępnym, jak funkcye wykładnicze, trygonometryczne i t. p. mają za graniczne funkcye przestępne, które wyrażają się przez stosunek pewnych funkcyi do swych pochodnych w skład funkcyi danych wchodzących, lub téż są nieskończone.

Z tego więc wypada ogólne twierdzenie następne:

Funkcya jakakolwiek ma za graniczną albo nieskończoność, lub téż jest stosunkiem funkcyi pewnéj do jéj pochodnéj, w skład funkcyi danéj wchodzącéj.

Twierdzenie to powiada, że graniczne danych funkcyi nie zależą od innych pochodnych, jak tylko od saméj funkcyi, i jéj pierwszéj pochodnéj. Nowe to i ogólne prawo powinno zwrócić szczególniéj naszą uwagę, gdyż z niego jako proste wnioski wyprowadzimy prawa, do jakich doszedł Cauchy, używając ilości urojonych.

103. Gdy daną jest funkcya graniczna $\varphi(x)$ i chcemy znaleźć szereg funkcyi, które mają tę funkcyę za graniczną, oznaczmy jedną z nich przez y, mamy związek:

$$\frac{y}{y'} = -\varphi(x)$$

a zatém będzie:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\varphi(x)}$$

czyli:

$$y = e^{-\int \frac{dx}{\varphi(x)}} \qquad (18),$$

t. j. *że funkcya mająca daną funkcyę za graniczną jest równa wykładniczéj, któréj wykładnik jest całką z odwrotności granicznéj i wszystkie funkcye pochodne i całkowe z téj funkcyi mają jeszcze tę funkcyę za graniczną.*

Gdy $\varphi(x)$ jest ilością stałą lub zero, będzie:

$$y = e^{-ax}$$

a że wiemy, że ta funkcya ma za graniczną nieskończoność, a więc

φ nie może być ani stałe, ani zero, zatém *nie ma funkcyi, któraby miała zero lub ilość stałą za graniczną.*

Ztąd odwrotnie, gdy graniczna ukazuje się jako stała lub zero, musi wypadać z funkcyi wykładniczych, których graniczne właściwie są nieskończone.

Niech będzie:

$$\varphi = a x + b$$

$$\int \frac{dx}{a x + b} = \frac{1}{a} \log (ax + b) = \log (ax + b)^{\frac{1}{a}}$$

zatém funkcya będzie postaci:

$$y = (ax + b)^{-\frac{1}{a}}$$

104. Kończąc ten rozdział podamy wyrażenie funkcyi granicznych dla funkcyi, których zmienna ma wartość urojoną.

Niech więc będzie:

$$y = \mathrm{f}\,(x)$$

gdzie x ma wartość:

$$x = r\,(\operatorname{dos} t + i \operatorname{wst} t)$$

można więc uważać x jako funkcyą nową z r i t, lecz jak r i t są niezależne, więc możemy raz uważać r, drugi raz t za stałe, i brać graniczne co do r lub t, przeto na mocy prawa granicznéj fnnkcyi z funkcyi, otrzymamy biorąc graniczne co do r.

$$\mathrm{G\,f}\,(x)\,(r) = \frac{\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)}{x'_r}$$

a że $\dfrac{dx}{dr} = \operatorname{dos} t + i \operatorname{wst} t$; przeto:

$$\mathrm{G\,f}\,(x)\,(r) = \frac{\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)}{\operatorname{dos} t + i \operatorname{wst} t}$$

a mnożąc przez $\operatorname{dos} t - i \operatorname{wst} t$, i rozkładając summę granicznych na szczególne, będzie:

$$\mathrm{G\,f}\,(x)\,(r) \begin{cases} = \operatorname{dos} t\, \mathrm{G\,f}\,(x)\,(x) \\ = \operatorname{wst} t\, \mathrm{G\,f}\,(x)\,(x) \end{cases} \tag{19}$$

to jest: że *graniczne funkcyi zmiennéj urojonéj, wzięte co do jéj modulu, są równe granicznym funkcyi zmiennéj rzeczywistéj, pomnożonéj przez dostawę i wstawę argumentu ilości urojonéj.*

Biorąc znowu graniczne co do t otrzymamy:

$$\mathrm{G\,f}(x)(t) = \frac{\mathrm{G\,f}(x)(x)}{x'_t}$$

a że $x'_t = \frac{dx}{dt} = -r\,(\mathrm{wst}\,t - i\,\mathrm{dos}\,t)$, przeto:

$$\mathrm{G\,f}(x)(t) = \frac{\mathrm{G\,f}(x)(x)}{r\,(\mathrm{wst}\,t - i\,\mathrm{dos}\,t)}$$

a mnożąc przez wst $t + i$ dos t, i rozdzielając, będzie:

$$\mathrm{G\,f}(x)(t) \begin{cases} = \dfrac{\mathrm{dos}\,t\;\mathrm{G\,f}(x)(x)}{r} \\ = \dfrac{\mathrm{wst}\,t\;\mathrm{G\,f}(x)(x)}{r} \end{cases} \tag{20}$$

to jest: *graniczne funkcyi zmiennej urojonéj, wzięte co do jéj argumentu, są równe granicznej funkcyi zmiennéj rzeczywistéj, pomnożonéj przez dostawę lub wstawę argumentu, i podzielonéj przez moduł.*

W obu więc razach, graniczne funkcyi zmiennéj urojonéj, są co do wartości mniejsze od granicznych funkcyi téjże, gdy zmienna jest rzeczywista; albowiem są mnożone przez dostawy i wstawy pewnego kąta, których wartości są zawsze mniejsze od jedności.

Ztąd wypada, że wszystkie twierdzenia, służące funkcyom zmiennych urojonych, nie mogą być stosowane do funkcyi zmiennych rzeczywistych, albowiem dadzą wypadki za małe lub za wielkie.

ROZDZIAŁ TRZECI.

FUNKCYE GRANICZNE RÓWNAŃ I FUNKCYI WIELU ZMIENNYCH.

105. Niech będzie dane równanie nierozwiązalne między zmiennemi x i y:

$$\mathrm{f}(x, y) = 0$$

nie mamy wartości y w funkcyi x, lecz biorąc pochodne, otrzymamy wyrażenie:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dx}\right)}{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dy}\right)}$$

a że graniczna funkcyi y, jest ta sama co graniczna y' brana co do x, zatém w wartości na y' trzeba położyć za y wartość w x, uczynić redukcye i dopiero wyprowadzić graniczną; możemy założyć że te podstawienia są wykonane, i funkcyą tę przedstawić w postaci:

$$y' = -\left\{\frac{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dy}\right)}{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dx}\right)}\right\}^{-1}$$

a ztąd dędzie:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \frac{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dy}\right)}{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dx}\right)} : \left\{\frac{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dy}\right)}{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dx}\right)}\right\}'$$

a że:

$$\left[\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dx}\right)}\right]' = \frac{\frac{df}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dxdy}+\frac{d^2 f}{dy^2}\frac{dy}{dx}\right)-\frac{df}{dy}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}+\frac{d^2 f}{dydx}\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{df}{dx}\frac{d^2 f}{dxdy}-\frac{df}{dy}\frac{d^2 f}{dx^2}+\left(\frac{df}{dx}\frac{d^2 f}{dy^2}-\frac{df}{dy}\frac{d^2 f}{dxdy}\right)\frac{dy}{dx}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

a podstawiając za $\frac{dy}{dx}$ wartość, otrzymamy jeszcze:

$$\left[\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)}{\left(\frac{df}{dx}\right)}\right]' = \frac{2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2 f}{dxdy}-\left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2 f}{dy^2}-\left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2 f}{dx^2}}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{df}{dy}}$$

a ztąd ostatecznie:

$$G\,y\,(x)=\frac{\frac{df}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)^2}{2\frac{df}{dx}\frac{df}{dy}\frac{d^2 f}{dxdy}-\left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2 f}{dy^2}-\left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2 f}{dx^2}} \qquad (21)$$

takie jest wyrażenie na funkcyą graniczną, równania danego.

106. Gdy równanie ma szczególną postać taką, że jedna z pochodnych cząstkowych drugiego rzędu znika np. $\frac{d^2 f}{dx^2}=0$, to wyrażenie granicznéj upraszcza się, i będzie:

$$G\,y\,(x)=\frac{\left(\frac{df}{dy}\right)^2}{2\frac{df}{dy}\frac{d^2 f}{dydx}-\frac{df}{dx}\frac{d^2 f}{dy^2}}$$

a wtedy równanie dane musi mieć postać, w któréj x wchodzi w stopniu pierwszym, to jest:

$$\varphi\,(y)+x\,\psi\,(y)=c$$

gdzie c jest ilość stała.

Gdy pochodna $\frac{d^2 f}{dy^2}=0$, będzie:

$$G\,y\,(x) = \frac{\frac{df}{dx} \cdot \frac{df}{dy}}{2\,\frac{df}{dx}\,\frac{d^2 f}{dxdy} - \frac{df}{dy}\,\frac{d^2 f}{dx^2}}$$

a równanie będzie miało postać:

$$\varphi\,(x) + y\,\psi\,(x) = c$$

rozwiązalną co do y, gdzie c jest ilość stała.

Gdy pochodna $\frac{d^2 f}{dxdy} = 0$ będzie:

$$G\,y\,(x) = \frac{\frac{df}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)^2}{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 \frac{d^2 f}{dx^2}}$$

Gdy jedna z pochodnych $\frac{d^2 f}{dx^2}$ lub $\frac{d^2 f}{dy^2}$ razem z pochodną $\frac{d^2 f}{dxdy}$ stają się zero, wyrażenia te jeszcze się upraszczają, i otrzymamy, gdy $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ i $\frac{d^2 f}{dxdy} = 0$.

$$G\,y\,(x) = \frac{\left(\frac{df}{dy}\right)^2}{\frac{d^2 f}{dy^2}}$$

a równanie dane musi mieć postać, w któréj x musi być w stopniu pierwszym, i jeszcze pochodna pierwsza co do y nie zawiera x; przeto będzie:

$$\varphi\,(y) + x = c$$

równanie nierozwiązalne co do y, a rozwiązalne co do x, przedstawiające pierwiastki równań algebraicznych i przestępnych.

Gdy $\frac{d^2 f}{dy^2}$ i $\frac{d^2 f}{dxdy} = 0$ to graniczna będzie.

$$G\,y\,(x) = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{d^2 f}{dx^2}}$$

Zatém równanie musi miéć y w stopniu pierwszym, i będzie postaci:

$$y + \psi(x) = c$$

jakoż i graniczna równa jest stosunkowi pochodnych następnych, jak być powinno.

Gdy jeszcze $\frac{d^2 f}{dy^2}$ i $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$, otrzymamy:

$$G\, y(x) = \frac{\frac{df}{dy}}{2\,\frac{d^2 f}{dydx}}$$

zatém równanie musi miéć postać:

$$a\,x\,y + c = 0$$

gdzie a i c są stałe dowolne.

Nakoniec gdy wszystkie trzy pochodne drugiego rzędu są zero, graniczna staje się:

$$G\, y(x) = \infty$$

i powstaje z równania:

$$a\,y + b\,x = c$$

jak być powinno, gdyż ono jest rozwiązalne co do y i x, i wyraża się przez funkcyą algebraiczną całkowitą, któréj jak wiemy graniczna jest nieskończona.

107. Rozbierzmy bliżéj te przypadki, jakoż gdy równanie ma postać:

$$\varphi(y) + x\,\psi(y) = c$$

biorąc pochodną i podstawiając we wzór (21) otrzymamy:

$$G\, y(x) = \frac{(\varphi' + x\,\psi')^2}{2\,(\varphi' + x\,\psi')\,\psi' - \psi\,(\varphi'' + x\,\psi'')} \tag{22}$$

a dla wartości szczególnych $x = 0$ i $y = y_0$ będzie:

$$G\, y(x)_0 = \left(\frac{\varphi'}{2\,\varphi'\,\psi' - \psi\,\varphi''}\right)_{y_0} \tag{a}$$

Równanie powyższe przybiera szczególną postać, gdy $\varphi(y) = y$ kształtu

$$y + x\,\psi(y) = c$$

które daje kładąc za $\varphi(y)$ i jego pochodną ich wartości w powyższém:

$$G\,y\,(x) = \frac{(1+x\psi')^2}{2\,(1+x\psi')\,\psi' - x\,\psi\psi''}$$

czyli:

$$G\,y\,(x) = \frac{(1+x\psi')^2}{2\,\psi' + x\,(2\psi'^2 - \psi\psi'')}$$

a dla wartości $x = 0$ i $y = c$ będzie:

$$G\,y\,(x) = \frac{1}{(2\,\psi')_0} \qquad \text{(b)}$$

I tak, weźmy następne wyrażenie:

1° $$y - x \text{ wst } y = c$$

gdzie c jest ilość stała; będzie na mocy powyższego:

$$G\,y\,(x) = \frac{(1 - x \text{ dos } y)^2}{-2 \text{ dos } y + x(1 + \text{dos } y^2)}$$

a dla $x = 0$ i $y = c$ będzie:

$$G\,y\,(x)_0 = \frac{-1}{2 \text{ dos } c}.$$

2° $$\log y + x \text{ wst } y = c$$

stosując do niego wyrażenie (a i a') i upraszczając, otrzymamy:

$$G\,y\,(x) = \frac{(1 + x\,y \text{ dos } y)^2}{\text{wst } y + 2\,y \text{ dos } y + x\,y^2\,(1 + \text{dos}^2\,y)}$$

a dla $x = 0$ i $y = e^c$ będzie:

$$G\,y\,(x)_0 = \left(\frac{1}{\text{wst } y + 2\,y \text{ dos } y}\right)_{(e^c)}.$$

Gdy równanie ma postać:

$$\varphi\,(x) + y\,\psi\,(x) = c$$

biorąc pochodne i podstawiając otrzymamy:

$$G\,y\,(x) = \frac{\psi\,(\varphi' + y\,\psi')}{2\,(\varphi' + y\,\psi')\,\psi' - \psi\,(\varphi'' + y\,\psi'')}$$

lecz uważając, że to równanie jest rozwiązalne co do y; jakoż:

$$y = \frac{c - \varphi\,(x)}{\psi\,(x)}$$

graniczna co do y prostsze ma wyrażenie, i rozpada się na dwie:

$$G\, y\, (x) \begin{cases} = G\, \varphi\, (x)\, (x) \\ = -\dfrac{\psi\, (x)}{\psi'\, (x)} \end{cases}$$

więc powyższe wyrażenie jako więcéj złożone można odrzucić, i samo równanie zawsze sprowadzić do postaci rozwiązalnéj, powyższego kształtu.

Gdy równanie ma postać:

$$\varphi\, (y) + x = c$$

które jest nierozwiązalne co do y a rozwiązalne co do x, daje po uproszczeniu:

$$G\, y\, (x) = -\frac{\varphi'^2}{\varphi''} \qquad \text{(c)}$$

a że równanie powyższe przedstawia pierwiastki równań jakichkolwiek, zatém graniczne takich pierwiastków, są równe stosunkowi z kwadratu pochodnéj pierwszéj, do pochodnéj drugiéj równania danego.

To wyrażenie granicznéj możemy otrzymać wprost sposobem następnym: rozwiążmy równanie dane co do y i oznaczmy:

$$y = \psi\, (x)$$

będzie:

$$G\, y\, (x) = G\, \psi\, (x)\, (x) = G\, \psi'\, (x)\, (x)$$

a że mamy:

$$\psi'\, (x) = \frac{1}{\varphi'\, (y)}$$

przeto:

$$G\, y\, (x) = G\, \varphi'^{-1}\, (y)\, (x)$$

a że:

$$G\, \varphi'^{-1}\, (y)\, (x) = \frac{\varphi'\, (y)}{\dfrac{d\, \varphi'\, (y)}{d\, x}}$$

i jeszcze mamy:

$$\frac{d\varphi'(y)}{dx} = \varphi''(y)\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi'' y}{\varphi' y}$$

podstawiając otrzymamy:

$$G\, y\, (x) = \frac{\varphi'^2\, (y)}{\varphi''\, (y)} \quad \text{jak wyżéj.}$$

I tak, niech będzie:

1⁰ $$e^y + x = c$$

będzie:

$$G\, y\, (x) = -e^y = -(c - x)$$

jak być powinno.

2⁰ Dla $\log y + x = c$ będzie:

uważając że:

$$\varphi' = y^{-1}, \qquad \varphi'' = -y^{-2}$$

zatém:

$$G\, y\, (x) = 1$$

to jest graniczna równa ilości stałéj i skończonéj, co jak wiemy z § 103 znaczy, że graniczna jest nieskończoną.

Jakoż równanie dane można napisać pod postacią:

$$y = e^{c-x}$$

które ma graniczną nieskończoną.

108. Gdy mamy daną funkcyą zmiennéj y, która z inną zmienną jest związana przez równanie, to zachodzić mogą trzy przypadki:

Niech będzie:

$$z = F\, (y)$$

x i y mogą być związane z sobą przez wyrażenia:

$$y = \varphi\, (x)$$
$$x = \psi\, (y)$$
$$f\, (x, y) = 0$$

t. j. może być związek między x i y rozwiązalny co do x lub y, lub nierozwiązalny.

Pierwszy przypadek przedstawia funkcyą z funkcyi, którego graniczną otrzymaliśmy w § 89; pozostają tylko dwa ostatnie przypadki.

Gdy więc dany jest związek między x i y postaci:

$$x = \psi\, (y)$$

załóżmy, że równanie to zostało rozwiązane i mamy:

$$y = \varphi\, (x)$$

to na mocy § 89 otrzymamy dwie graniczne funkcyi z funkcyi:

$$\mathrm{G}\, z\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\, \varphi\,(x)\,(x) \\ = \dfrac{\mathrm{G\,F}\,(y)\,(y)}{\varphi'\,(x)} \end{cases}$$

a że mamy:

$$\varphi'\,(x) = \frac{1}{\psi'\,(y)}$$

i pamiętając że:

$$\mathrm{G}\, \varphi\,(x)\,(x) = \mathrm{G}\, \varphi'\,(x)\,(x)$$

zatém:

$$\mathrm{G}\, z\,(x) = \mathrm{G}\, \psi'^{-1}\,(y)\,(x)$$

a że:

$$\mathrm{G}\, \psi'^{-1}\,(y)\,(x) = \frac{\mathrm{G}\psi'^{-1}\,(y)(y)}{\varphi'\,(x)}$$

i

$$\mathrm{G}\, \psi'^{-1}\,(y)(y) = \frac{\psi'}{\psi''}$$

zatém, kładąc za $\varphi'\,(x)$ wartość, otrzymamy:

$$\mathrm{G}\, z\,(x) \begin{cases} = \dfrac{\psi'^2}{\psi''} \\ = \psi'\, \mathrm{G\,F}\,(y)(y) \end{cases}$$

to są dwie graniczne, które otrzymujemy w tym przypadku.

Powyższe wyrażenie, kładąc za x wartość pod znak granicznéj, zmienia się na:

$$\mathrm{G\,F}\,(y)\,(\psi(y)) \begin{cases} = \dfrac{\psi'^2}{\psi''} \\ = \psi'\, \mathrm{G\,F}\,(y)\,(y) \end{cases} \tag{23}$$

to jest: że *graniczne funkcyi jakiéjkolwiek, wziętéj co do innéj funkcyi téjże samej zmiennéj są dwie: jedna niezależna od funkcyi danéj, a tylko od funkcyi co do której bierzemy graniczne, i jest stosunkiem kwadratu pierwszéj pochodnéj do drugiéj pochodnéj tejże funkcyi; druga jest iloczynem z pochodnéj funkcyi co do któréj bierzemy graniczne, przez graniczną funkcyi danéj co do saméj zmiennéj.*

Wniosek. Gdy fukcya dana F (y) ma graniczną nieskończoną (jakiemi są: y^n, e^y, wst my, dos my, i t. p., gdzie n całkowite i dodatne a m jakiekolwiek); to druga graniczna jest zawsze nieskończona, a odrzucając ją, otrzymamy tylko pierwszą; ztąd mamy twierdzenie:

Graniczna potęgi całkowitéj i dodatnéj, funkcyi wykładniczéj, wstawy i dostawy łuku wielokrotnego z pierwiastku równania:

$$\psi(y) = x$$

jest taka sama jak i samego pierwiastku.

109. Przejdźmy teraz do przypadku trzeciego:

Niech będzie dana funkcya:

$$z = \mathrm{F}(y)$$

zmiennéj y związanéj z drugą x równaniem nierozwiązalném:

$$\mathrm{f}(x, y) = 0$$

jéj graniczne znajdziemy uważając, że pochodna z z będzie:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{d\mathrm{F}}{dy}\frac{dy}{dx}$$

a kładąc za $\frac{dy}{dx}$ wartość otrzymaną z równania drugiego, będzie:

$$z' = -\frac{d\mathrm{F}}{dy} \cdot \frac{\frac{d\mathrm{f}}{dx}}{\frac{d\mathrm{f}}{dy}} = -\frac{d\mathrm{F}}{dy}\left[\frac{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dy}\right)}{\left(\frac{d\mathrm{f}}{dx}\right)}\right]^{-1}$$

Funkcya graniczna z' będzie taż sama co z, zatém będzie jedna:

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \mathrm{G}\frac{d\mathrm{F}}{dy}(x) = \mathrm{G\,F}\,(y)\,(x)$$

czyli:

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \frac{\mathrm{G\,F}\,(y)\,(y)}{y'}$$

a kładąc za y' wartość otrzymaną z równania drugiego i uważając że druga graniczna będzie taka sama jak w § 105, otrzymamy:

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \frac{\frac{d\mathrm{f}}{dy}\,\mathrm{G\,F}\,(y)\,(y)}{\frac{d\mathrm{f}}{dx}} \qquad (24)$$

$$G\,z\,(x) = \frac{\frac{df}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)^2}{2\,\frac{df}{dx}\,\frac{df}{dy}\,\frac{d^2 f}{dxdy} - \left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2}}$$

Zatém graniczne funkcyi zmiennéj związanéj z drugą równaniem nierozwiązalnem są dwie: jedna niezależna od funkcyi danéj, jest graniczną równania danego; druga jest równa stosunkowi granicznéj funkcyi danéj do pochodnéj otrzymanéj z równania danego.

Wniosek. Gdy funkcya dana ma graniczną nieskończoną to jest: gdy jest potęgą całkowitą i dodatną y^n, funkcyą wykładniczą e^y, lub wstawą i dostawą łuku wielokrotnego ze zmiennéj dos my, wst my, to graniczna takiéj funkcyi zmiennéj, związanéj z drugą równaniem nierozwiązalném jest równa granicznéj saméj zmiennéj.

110. Gdy mamy funkcyą o dwóch zmiennych

$$z = F\,(x, y)$$

któréj zmienne są związane nierozwiązalnie równaniem

$$f\,(x, y) = 0$$

uważając x za zmienną niezależną i biorąc graniczne co do x otrzymamy:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dx}$$

Graniczne więc z' czyli z będą:

$$G\,z\,(x)\begin{cases} = G\,\dfrac{dF}{dy}\,(x) \\ = G\,\dfrac{dF}{dx}\,(x) \\ = G\,\dfrac{dy}{dx}\,(x) \end{cases}$$

ostatnia jest graniczną równania danego i otrzymuje się jak w § 105. Pierwsza będzie:

$$G\,\frac{dF}{dy}\,(x) = \frac{G\,\frac{dF}{dy}\,(y)}{y'}$$

druga pozostanie w swéj wartości; zatém otrzymamy podstawiając za y' wartość:

$$\mathrm{G}\, z\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\, \dfrac{d\mathrm{F}}{dx}\,(x) \\ = \dfrac{\dfrac{d\mathrm{f}}{dy}\,\mathrm{G}\,\dfrac{d\mathrm{F}}{dy}\,(y)}{\dfrac{d\mathrm{f}}{dx}} \\ = \mathrm{G}\,\dfrac{dy}{dx}\,(x) \qquad \text{jak w § 105.} \end{cases} \tag{25}$$

Zatém *graniczne funkcyi o dwóch zmiennych, związanych z sobą równaniem nierozwiązalném są trzy: jedna jest niezależna od funkcyi i jest graniczną równania danego; druga jest graniczną pochodnéj funkcyi danéj, wziętéj co do x; trzecia jest stosunkiem granicznéj pochodnéj funkcyi danéj, wziętéj co do y, do pochodnéj samego y, wyciągniętéj z danego równania.*

111. Niech będzie dana funkcya o dwóch zmiennych niezależnych:

$$z = \mathrm{f}\,(x, y)$$

uważając raz x drugi raz y za stałe, otrzymamy pochodne:

co do y $\quad \mathrm{D}_y\,(z) = \mathrm{f}'_y$ $\qquad$ co do x $\quad \mathrm{D}_x\,(z) = \mathrm{f}'_x$

$$\mathrm{D}^2_y\,(z) = \mathrm{f}''_y \qquad \mathrm{D}^2_x\,(z) = \mathrm{f}''_x$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\mathrm{D}^n_y\,(z) = \mathrm{f}^n_y \qquad \mathrm{D}^n_x\,(z) = \mathrm{f}^n_x$$

Zatém funkcye graniczne będą wyrażone:

$$\mathrm{G}\,z\,(y) = \left(\frac{n\mathrm{f}^{n-1}_y}{\mathrm{f}^n_y}\right)_\infty = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x, y)\,(y)$$

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \left(\frac{n\mathrm{f}^{n-1}_x}{\mathrm{f}^n_x}\right)_\infty = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x, y)\,(x)$$

Zatém *graniczne funkcyi o dwóch zmiennych niezależnych są dwie, i równe granicznym funkcyi co do każdéj zmiennéj, uważając z kolei drugą za stałą.*

Powyższe prawo daje się rozciągnąć bez trudności do funkcyi o kilku zmiennych; zatém: *funkcya kilku zmiennych niezależnych ma granicznych tyle, ile jest zmiennych niezależnych w skład jéj wchodzących.*

I tak, niech będzie funkcya:

$$z = \frac{\log y}{x}$$

jéj graniczne będą:

$$G\, z\, (x) = x$$

$$G\, z\, (y) = y.$$

w ich bezwzględnéj wartości.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

FUNKCYE GRANICZNE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH.

a. Równania różniczkowe o jednéj zmiennéj niezależnéj.

112. Ogólna postać równań różniczkowych o dwóch zmiennych, z których jedna jest funkcyą drugiéj, wyraża się przez:

$$\mathrm{f}\,(x, y, y', y'', \ldots, y^m) = 0 \tag{a}$$

i jest wyrażeniem różniczkowém pewnéj funkcyi z x, postaci:

$$y = \mathrm{F}\,(x)$$

a że według § 85, funkcya sama y i wszystkie jéj pochodne mają tę samą graniczną, przeto rozwiązując równanie (a) co do najwyższéj pochodnéj y^m otrzymamy:

$$y^m = \varphi\,(x, y' \ldots)$$

a graniczna tego wyrażenia będzie graniczną saméj funkcyi y przeto:

$$\mathrm{G}\,y\,(x) = \mathrm{G}\,y^m\,(x)$$

czyli:

$$\mathrm{G}\,y\,(x) = \mathrm{G}\,\varphi\,(x) \tag{26}$$

to jest: że *każde równanie różniczkowe daje bez całkowania i bez poznania funkcyi y, graniczną téj funkcyi nieznanéj, któréj ono jest wyrażeniem różniczkowém, biorąc graniczną najwyższéj pochodnéj znajdującéj się w równaniu daném.* Graniczne te nazwiemy *granicznémi równań różniczkowych*, czyli funkcyi, które one wyrażają.

Graniczną tę można jeszcze otrzymać bez rozwiązania równania (a); jakoż biorąc pochodną równania powyższego i oznaczając cząstkowe pochodne przez f'_x, f'_y, $f'_{y'}$ i t. d. brane co do x, y, y' i t. d. otrzymamy równanie:

$$f'_x + f'_y\, y' + f'_{y'}\, y'' + f'_{y''}\, y''' + \ldots + f'_{y^m}\, y^{m+1} = 0 \qquad (b)$$

równanie zawierające pochodną y^{m+1} w pierwszym stopniu, rozwiązując co do y^{m+1}, otrzymamy wyrażenie:

$$y^{(m+1)} = -\frac{M}{f'_{y^m}}$$

oznaczając przez M wszystkie wyrazy prócz ostatniego w wyrażeniu (b). Ztąd biorąc graniczne y^{m+1} otrzymamy graniczną y

$$G\,y\,(x) \begin{cases} = G\,M\,(x) \\ = G\,f'_{y^m}\,(x) \\ = \dfrac{f'_{y^m}}{(f'_{y^m})'} \end{cases} \qquad (27)$$

gdzie pochodna:

$$(f'_{y^m})' = \frac{df'_{y^m}}{dx} + \frac{df'_{y^m}}{dy}\,y' + \frac{df'_{y^m}}{dy'}\,y'' + \ldots$$

Otrzymaliśmy więc tym sposobem trzy graniczne, które powinny być zawarte w wyrażeniu (26) wyżéj otrzymaném.

Takie jest ogólne rozwiązanie co do oznaczenia granicznych równań różniczkowych.

Przejdziemy teraz do szczególnych rodzai.

113. Weźmy najprostsze równanie różniczkowe pierwszego rzędu i pierwszego stopnia między dwoma zmiennemi, rozwiązując co do y', ono może mieć trojaką postać:

$$y' = \varphi\,(x) \qquad (a)$$
$$y' = \psi\,(y) \qquad (b)$$
$$y' = f\,(x, y) \qquad (c)$$

Pierwsza postać równania wyraża pochodną w funkcyi x i cała powyższa teorya daje rozwiązanie na ten przypadek, jakoż ponieważ graniczna y' jest taż sama co y, przeto:

$$G\,y\,(x) = G\,\varphi\,(x)\,(x)$$

Drugie równanie jest odwrotną funkcyą pierwszéj; i graniczna jego będzie:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \mathrm{G}\, \psi\,(y)\,(x)$$

A że drugą stronę można uważać za graniczną funkcyi z funkcyi, przeto według § 89 będzie:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \frac{\mathrm{G}\, \psi\,(y)\,(y)}{y'} = \frac{\mathrm{G}\, \psi\,(y)\,(y)}{\psi\,(y)} \tag{28}$$

to jest *graniczna równania różniczkowego pierwszego rzędu i pierwszego stopnia postaci* $y' = \psi\,(y)$ *jest stosunkiem granicznéj pochodnéj* y' *wziętéj co do* y, *do téjże saméj pochodnéj.*

Nakoniec, gdy równanie ma postać (c) biorąc pochodną drugą będzie:

$$y'' = \mathrm{f}'_x + \mathrm{f}'_y\, y' \tag{d}$$

a że:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \mathrm{G}\, y''\,(x)$$

przeto:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\, \mathrm{f}'_x\,(x) \\ = \mathrm{G}\, \mathrm{f}'_y\,(x) \\ = \mathrm{G}\, y'\,(x) \end{cases} \tag{29}$$

Ostatnie wyrażenie jest tożsamością, dwa zaś pierwsze wyrażają graniczne funkcyi f'_x i f'_y wziętych co do x, a że te funkcye zawierają zmienne x i y połączone z sobą równanien (c), więc ten przypadek sprowadza się do przypadku objętego § 110; gdzie znaleźliśmy graniczne funkcyi F (x, y) dwóch zmiennych połączonych z sobą równaniem (c).

114. Jako przykład i razem rozwinięcie téj teoryi weźmy pod uwagę wyrażenie (28), dające graniczną równania:

$$\frac{dy}{dx} = \psi\,(y)$$

Gdy $\psi\,(y)$ jest funkcyą algebraiczną całkowitą, wykładniczą e^y, lub téż wstawy albo dostawy łuku wielokrotnego z y, wtedy graniczna ψ jest nieskończona, i równanie (28) daje graniczną nieskończoną, przeto w szczególności będzie:

1° dla $\dfrac{dy}{dx} = y$

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \infty$$

2^0 dla $$\frac{dy}{dx} = A_m(y)$$

$$G\, y(x) = \infty$$

3^0 dla $$\frac{dy}{dx} = e^y$$

$$G\, y(x) = \infty \quad \text{i t. p.}$$

Gdy funkcya $\psi(y)$ jest funkcyą z funkcyi postaci:

$$\frac{dy}{dx} = \overset{m}{A_k}(y)$$

gdzie A_k jest funkcya algebraiczna całkowita stopnia k z samego y, a m wykładnik niecałkowity i dodatny razem; to biorąc pochodną drugą będzie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\, \overset{m-1}{A_k}(y)\, A'_k(y)\, \frac{dy}{dx}$$

a podstawiając wartość za $\frac{dy}{dx}$ będzie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\, \overset{2m-1}{A_k}(y)\, A'_k(y)$$

Znajdziemy łatwo graniczną funkcyi y, jednakże w jednym przypadku otrzymujemy proste wyrażenie na tęż graniczną, gdy wykładnik m dopełnia warunku $2m - 1 = 0$ czyli gdy $m = \frac{1}{2}$ wtedy mamy:

$$\frac{dy}{dx} = \overset{\frac{1}{2}}{A_k}(y)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\, A'_k(y)$$

Zatém: *gdy pochodna pierwsza wyraża się przez funkcyą algebraiczną będącą pod pierwiastkiem stopnia drugiego, to pochodna druga jest zawsze algebraiczną; a że graniczne ich są równe, i równe samėj funkcyi y, przeto graniczna takiego równania będzie nieskończoną.*

Z tego twierdzenia wypada:

1. Równanie różniczkowe postaci:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$$

wyrażającc wst x i dos x, ma graniczną nieskończoną, co już wyżéj dowiedliśmy.

2. Równanie:

$$\frac{dy}{dx} = g\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

ma graniczną nieskończoną; a że to wyrażenie jest funkcyą odwrotno-elliptyczną, oznaczoną przez:

$$y = \lambda(x)$$

przeto funkcya ta ma graniczną nieskończoną (*)

3. Wogóle każde wyrażenie:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\mathrm{A}_m(y)}$$

będąc funkcyą przestępną odwrotną pewnéj funkcyi, ma graniczną nieskończoną.

115. Jako drugi przykład oznaczymy graniczne innych dwóch funkcyi elliptycznych, oznaczonych przez równania skończone z funkcyi $\lambda(x)$, postaci:

$$\mu(x) = \sqrt{1-\lambda^2 x}$$

$$\nu(x) = \sqrt{1-k^2\lambda^2 x}$$

obie można uważać za funkcye z funkcyi, przeto na mocy § 89, będzie:

$$\mathrm{G}\,\mu(x)(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,\lambda(x)(x) \\ = -\dfrac{1-\lambda^2(x)}{2\lambda(x)\lambda'(x)} \end{cases}$$

Zatém mamy dwie graniczne, a że jedna $\mathrm{G}\lambda(x)(x)$ jest nieskończona, przeto można ją opuścić; a druga daje kładąc za $\lambda(x)$ wartość y, i upraszczając:

$$\mathrm{G}\,\mu(x)(x) = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{2y\sqrt{1-k^2y^2}}$$

podobnie:

(*) Patrz: „Théorie des fonctions doublement périodiques par Briot et Bouquet: Paris 1859." — kar. 95 i następne.

$$G\,\nu(x)(x) = -\frac{\sqrt{1-k^2y^2}}{2k^2y\sqrt{1-y^2}}$$

Nakoniec, trzecia funkcya oznaczona przez

$$\tilde{\omega}(x) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}$$

jako będąca ułamkiem, którego licznik ma graniczną nieskończoną, będzie miała za graniczną:

$$G\,\tilde{\omega}(x)(x) = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-k^2y^2}}$$

Ztąd wypada, że funkcya elliptyczna $\lambda(x)$ ma graniczną nieskończoną, funkcye zaś $\mu(x)$, $\nu(x)$ i $\tilde{\omega}(x)$ mają graniczne skończone.

116. Szczególne prawo dowiedzione w § 114 można łatwo uogólnić; jakóż gdy mamy równanie:

$$y' = A_k^{m}(y) \qquad \text{(a)}$$

gdzie A_k jest funkcyą algebraiczną całkowitą stopnia k z y, a wykładnik m nie jest razem całkowity i dodatny, to biorąc pochodną drugą otrzymamy:

$$y'' = m\,A_k^{2m-1}\,A'_k$$

biorąc pochodną trzecią będzie:

$$y''' = m\,\{(2m-1)\,A_k^{2m-2}\,A_k'^{2} + A_k^{2m-1}\,A_k''\}\,y'$$

czyli upraszczając będzie:

$$y''' = m\,A_k^{3m-2}\,\{(2m-1)\,A_k'^{2} + A_k\,A_k''\}$$

wyrażenie, w którém część w nawiasie jest funkcyą algebraiczną i całkowitą, oznaczając ją przez B będzie:

$$y''' = m\,A_k^{3m-2}\,B$$

a biorąc znowu pochodną otrzymamy:

$$y^{\text{IV}} = m\,\{(3m-2)\,A_k^{3m-3}\,A_k'\,B + A_k^{3m-2}\,B'\}\,y'$$

czyli upraszczając:

$$y^{\text{IV}} = m\,A_k^{4m-3}\,\{(3m-2)\,A'_k\,B + A\,B'\}$$

a oznaczając wyrażenie w nawiasie jako funkcyą algebraiczną całkowitą przez C, będzie:

$$y^{\text{IV}} = m\, \mathrm{A}_k^{4m-3}\, \mathrm{C}$$

a zatém w ogóle pochodna n ta wyrazi się przez:

$$y^n = m\, \mathrm{A}_k^{(nm-n+1)}\, \mathrm{N}$$

gdzie N jest pewna funkcya algebraiczna i całkowita. W szeregu tych funkcyi pochodnych, gdy wykładnik m dopełnia warunku:

$$n\,m - n + 1 = 0$$

czyli:

$$m = \frac{n-1}{n}$$

to jest: gdy jest zawarty w szeregu liczb $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots$ it. p. to jedna z pochodnych takiego wyrażenia i wszystkie następne są funkcyami algebraicznemi i całkowitemi, a graniczna téj funkcyi będzie jeszcze nieskończoną.

Ztąd mamy następujące godne uwagi twierdzenie: *graniczna równania różniczkowego pierwszego rzędu, w którym pochodna wyraża się przez potęgę ułamkową, któréj mianownik o jedną jedność jest większy od licznika, z funkcyi algebraicznéj całkowitéj saméj zmiennéj y, jest nieskończoną.*

b. Równania różniczkowe o dwóch i więcéj zmiennych niezależnych.

117. Równania różniczkowe o dwóch zmiennych są albo całkowite, albo cząstkowe.

Weźmy pod uwagę naprzód równanie różniczkowe pierwszego rzędu całkowite, postaci:

$$dz = \mathrm{X}\, dx + \mathrm{Y}\, dy \tag{a}$$

gdzie X i Y są funkcye z x i y, ponieważ to równanie jest pochodną całkowitą równania:

$$z = \mathrm{f}\,(x, y)$$

mającego według § 111 dwie graniczne, które otrzymamy, uważając raz x drugi raz y za niezmienne, tak, że graniczne są:

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x, y)\,(x)$$

$$\mathrm{G}\,z\,(y) = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x, y)\,(y)$$

a że znowu mamy:

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \mathrm{G}\,\frac{dz}{dx}\,(x) = \mathrm{G}\,\frac{d^2z}{dx^2}\,(x) \quad \text{i t. d.}$$

przeto wyrażenie (a) uważając w niém raz x, drugi raz y za stałe, czyli raz $dx = 0$, drugi raz $dy = 0$, daje:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{G}\,z\,(x) = \mathrm{G}\,\mathrm{X}\,(x) \\ \mathrm{G}\,z\,(y) = \mathrm{G}\,\mathrm{Y}\,(y) \end{array}\right. \qquad (30)$$

Zatém *graniczne równań różniczkowych całkowitych o dwóch zmiennych niezależnych są dwie, równe granicznym pochodnych cząstkowych, uważając raz x drugi raz y za stałe.*

118. Równania różniczkowe cząstkowe, wyrażają się, oznaczając przez p, q, pochodne cząstkowe pierwszego rzędu, przez r, s, t, pochodne cząstkowe drugiego rzędu i t. d., ogólnie pod postacią:

$$\mathrm{F}\,(x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots) = 0$$

równanie to czyniąc raz x drugi raz y stałe, czyli czyniąc raz wszystkie pochodne cząstkowe co do x równe zero, drugi raz co do y równe zero, wyda dwa równania postaci:

$$\mathrm{F}\,(x, z, z'_x\; z''_x\; \ldots\, z^m_x) = 0$$

$$\mathrm{F}\,(y, z, z'_y\; z''_y\; \ldots\, z^m_y) = 0$$

które na mocy § 117, dadzą nam dwie graniczne, jedną wziętą co do x, drugą co do y.

119. Podobnym sposobem otrzymamy graniczne równań różniczkowych, o wielu zmiennych niezależnych, co w każdym razie jest łatwe i nie przedstawia żadnych trudności.

Na tém kończąc rachunek funkcyi granicznych, widzimy, że w każdym razie znajdujemy bardzo łatwo graniczne jakiéjkolwiek funkcyi wyrażonéj w ilościach skończonych, lub téż przez równanie różniczkowe, i z całego ciągu wypada to ogólne prawo, iż:

Każda funkcya ma pewną graniczną będącą albo nieskończonością, lub téż stosunkiem pewnéj funkcyi w skład funkcyi danéj wchodzącéj, do jéj pochodnych, a nigdy nie jest zero lub ilością stałą, dopóki ilości zmienne nie mają szczególnych wartości.

CZĘŚĆ TRZECIA.

TEORYA ROZWIJALNOŚCI FUNKCYI.

120. Zasadzając się na rachunku funkcyi granicznych i na teoryi zbieżności szeregów wyłożonych w dwóch pierwszych częściach, możemy teraz zająć się rozwiązaniem ogólnego zadania rozwijania funkcyi na szeregi.

Teorya rozwijania funkcyi na szeregi, jest jedną z najważniejszych podstaw rachunku wyższego, opierając się na niéj dochodzimy mnóstwa prawd, lub do niéj sprowadzamy ostatecznie rozwiązanie prawie wszystkich zadań tego rachunku, a jednakże ta teorya obecnie przedstawia wiele wątpliwości i niedostateczności; takiemi są między innemi: niepewność co do zbieżności szeregów w samych granicach, czyli jak nazywamy w *punktach* czyli *wartościach krytycznych;* zależność zbieżności, nie od saméj funkcyi, lecz od reszty szeregu, która powinna dążyć do zera z liczbą danych wyrazów, i t. p. Jakkolwiek na tém polu wiele niedostateczności wyjaśniła teorya Cauchego, jednakże wpadła w drugą ostateczność, gdyż wprowadzając w ich rozwiązanie ilości urojone, uczyniła wypadki zależne od tych ilości, przez co trudne a często niepodobne do otrzymania.

Otóż te niedostateczności, nietylko zupełnie usuwa rachunek funkcyi granicznych, zastosowany do rozwijania funkcyi na szeregi; lecz jeszcze wyjaśnia wiele miejsc wątpliwych i odkrywa nam nowe prawa rachunku.

A że to zastosowanie daje nam prawa ogólne, według jakich funkcya zdolną jest nietylko rozwinąć się na szeregi zbieżne, uszykowane według potęg rosnących zmiennéj, ale i na inne ich rodzaje; dla tego one stanowią: *Ogólną teoryą rozwijalności funkcyi*, któréj częścią rozwijaniem na szeregi zbieżne, tu szczególnie się zajmiemy.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

NOWA POSTAĆ WZORU ROZWIJANIA FUNKCYI NA SZEREGI ZBIEŻNE, USZYKOWANE WEDŁUG POTĘG DODATNYCH PRZYROSTU ZMIENNÉJ.

121. Gdy uważamy funkcyą w związku z szeregiem jéj odpowiednim, warunki zbieżności szeregu są zarazem warunkami, pod jakiemi funkcya daje się rozwinąć na szereg, to jest dają dwie wartości graniczne zmiennéj, między któremi szereg zostaje ciągle zbieżnym, a funkcya w tych granicach daje się ściśle przedstawić przez tenże szereg, czyli jest zdolną rozwinąć się na szereg.

Rozwijalność więc funkcyi jest to jéj własność, że w pewnych granicach daje się wyrazić przez szereg zbieżny; a granice zbieżności szeregu otrzymują się, jak wiemy z § 24, ze stosunku n tych wyrazów, równając go z ± 1; dla otrzymania więc tych granic potrzeba znać prawo tworzenia się wyrazów szeregu, czyli postać wyrazu ogólnego. Granice rozwinięcia funkcyi powinniśmy otrzymać z saméj funkcyi nie przechodząc do jéj pochodnych, i tak otrzymane granice powinny być też same jak i szeregu. Otrzymanie granic rozwinięcia funkcyi z saméj funkcyi jest bardzo ważném w rachunku, albowiem daje możność wprost oznaczenia granic zbieżności szeregu, bez jego otrzymania i bez oznaczenia prawa tworzenia się wyrazów, które w ogóle jest trudném do oznaczenia, zwłaszcza dla funkcyi więcéj zawikłanych.

122. Granice rozwinięcia funkcyi bardzo łatwo się otrzymują przez zastosowanie rachunku funkcyi granicznych. Jakož gdy mamy daną funkcyą i jéj odpowiedni szereg uszykowany według potęg rosnących zmiennéj, to granice zbieżności szeregu, jak wiemy wyrażają się, równając stosunek n tych wyrazów szeregu, tuż po sobie idących dla $n = \infty$ z ± 1; a że stosunek ten wyraża się jeszcze przez funkcyą graniczną, zatém oznaczając graniczną funkcyi danéj za pomocą rachunku funkcyi granicznych, i równając ją ze zmienną porządkującą, otrzymamy żądane granice zbieżności szeregu, wyciągnięte wprost z funkcyi, nie znając wcale wyrazów szeregu.

Takie jest proste rozwiązanie zadania oznaczenia granic zbieżności szeregu, i razem rozwinięcia funkcyi.

Pozostaje tylko zastosować to rozwiązanie do szczególnych postaci szeregów, na które rozwijać się może funkcya.

123. Teorya rozwijania funkcyi na szeregi, zawartą jest w znanym wzorze Taylora, który przedstawia to rozwinięcie funkcyi danéj według przyrostu ilości zmiennéj.

Dowód twierdzenia zawartego we wzorze Taylora, jest trojaki: w pierwszym bez zakładania żadnych warunków dochodzimy kolejno jego postaci, dopełniając ją resztą; drugi sposób podany przez Lagrange'a, w którym dowodzimy naprzód, jaką powinno mieć formę rozwinięcie, i następnie do oznaczenia jego spółczynników używamy metody spółczynników nieoznaczonych; lecz ten dowód potrzebuje założenia warunku, iż zmienna x zostaje dowolną i nie ma szczególnych wartości; trzeci nakoniec podany przez Cauchy jest: oznaczenie naprzód warunków, pod jakiemi funkcya daje się rozwinąć na szereg zbieżny, a następnie otrzymanie rozwinięcia przez zastosowanie metody spółczynników nieoznaczonych. W dzisiejszém stanowisku nauk matematycznych, dowód Cauchego jest najściślejszym.

Dopełnienie szeregu resztą nic nie znaczy, albowiem gdy szereg zbieżny, reszta niepotrzebna; gdy szereg jest rozbieżny, sam nic nie znaczy a reszta również niepotrzebna; a gdy nie wiemy czy szereg jest zbieżny czy rozbieżny, reszta dodana nic nas nie uczy, i nie zapewni nas o zbieżności szeregu; dopiero gdy ją obliczymy dla danych wartości zmiennéj, dowiemy się że szereg jest rozbieżnym lub nie, lecz ona nie daje nam granic, między któremi szereg powinien być zawsze zbieżnym. Trzeci dowód Cauchego wypełnia właśnie ten niedostatek ogólnéj teoryi, i naprzód dowodzi, pod jakiemi warunkami funkcya może być rozwiniętą na szereg. W teoryi Cauchego rozwinięcie na szereg jest niejako rzeczą podrzędną, jest wnioskiem pewnych praw z własności funkcyi wypadających, pozbawione przeto swéj ogólności bezwzględnéj.

A jednakże prawda ta jest niezależna od postaci funkcyi, jest ogólną, a tylko granice są zależne od niéj; dla tego téż wielka myśl Lagrange'a użycia jéj za podstawę teoryi funkcyi, nie jest pozbawiona prawdy, lecz tylko brakuje jéj stałéj podstawy. Dowód Lagrange'a grzeszy tém tylko, iż naprzód zakłada, że zmienna x nie może mieć szczególnych wartości, i tym sposobem odrazu ścieśnia ogólność prawa rozwinięcia.

Takie jest obecnie stanowisko téj prawdy w nauce.

124. Zaczniemy więc teoryą rozwijania funkcyi na szereg od podania nowéj postaci tego wzoru.

Niech będzie dana funkcya $f(x)$ zmiennéj x, któréj wartość jest jakakolwiek, i oznaczmy przez h przyrost téj zmiennéj x; potrzeba rozwinąć nową wartość funkcyi $f(x+h)$ na szereg, według rosnących potęg przyrostu h.

Ponieważ sama zmienna x, jak i nowa wartość $x+h$ powinny zostawać jakiekolwiek; przeto konieczném jest, aby nie wprowadzać żadnych warunków, i nie ścieśniać ogólności rozumowania, wprowadzenie ilości dowolnéj, która zostając dowolną, powinna być zależną od własności funkcyi; niech więc będzie nowa dowolna wartość zmiennéj x, którą oznaczymy przez $x+a$ gdzie a jest to przyrost skończony téj ilości, zresztą jakikolwiek, tak że gdy x będzie miało szczególną jaką wartość, $x+a$ zostaje zawsze zupełnie dowolne; gdy h będzie miało szczególną wartość, $h-a$ będzie miało znowu wartość zupełnie dowolną.

Tak więc wprowadzając ilość dowolną a, funkcya $f(x+h)$ daje się rozwinąć na szereg według potęg rosnących z ilości dowolnéj $h - a$ i mających spółczynniki zależne od dowolnéj ilości $x+a$ postaci: (*)

$$f(x+h) = A + B(h-a) + C(h-a)^2 + D(h-a)^3 + \ldots \quad (a)$$

gdzie ilość $h - a$ według któréj rozwija się funkcya na szereg, możemy nazwać *ilością porządkującą* a $(x+a)$ *wartością początkową zmiennéj.*

Stosując do téj postaci znany dowód Lagrange'a łatwo dowiedziemy bez żadnych ścieśnień, że forma tego szeregu nie może zawierać ani potęg odjemnych ani ułamkowych i koniecznie musi być powyższéj postaci.

Załóżmy naprzód, że $h = a$ wszystkie wyrazy nikną i będzie:

$$A = f(x + a)$$

pierwszy więc wyraz jest samą funkcyą, gdy w niéj położymy a za h. Daléj szereg ten nie może miéć potęg ułamkowych, albowiem każda potęga ułamkowa ma tyle wartości różnych, ile jedności w jéj mianowniku; a że pierwszy wyraz rozwinięcia jest też sama funkcya, gdy za h położymy a ilość dowolną; przeto ten wyraz musi zachować te wszystkie różne wartości, a kombinując je z wartościami różnemi wyrazu mającego potęgę ułamkową, szereg dawałby wartości różnych daleko więcéj niż posiada sama funkcya, co być nie może; a zatém nie może być potęg ułamkowych.

Nie może być potęg odjemnych, albowiem czyniąc $h=a$ niektóre wyrazy stawałyby się nieskończonemi, i szereg miałby wartości nieskończone, gdy pierwsza strona przez położenie $h = a$ zostaje dowolną zupełnie. Zatém nie mogąc zawierać potęg ani ułamkowych ani odjemnych, musi miéć tylko postać (a).

Ponieważ tylko ta forma szeregu jest konieczną, zatém dla znalezienia spółczynników rozwinięcia, różniczkując kolejno co do h otrzymamy:

(*) Patrz. Lagrange: „Leçons sur le calcul des fonction. Paris, 1806." Leçon seconde, page 8, i następne.

$$\frac{d\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh} = \mathrm{B}+2\,\mathrm{C}\,(h-a)+3\,\mathrm{D}\,(h-a)^2+\ldots$$

$$\frac{d^2\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh^2} = 2\,\mathrm{C}+2\cdot 3\,\mathrm{D}\,(h-a)+\ldots$$

. . . .

$$\frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh^n} = n\,!\,\mathrm{N}+\ldots$$

a ponieważ a zostaje dowolne, zatém zakładając $h=a$, wszystkie wyrazy nikną, prócz pierwszych, które pozostają zależne od ilości dowolnéj a, i otrzymamy:

$$\mathrm{A} = \mathrm{f}\,(x+a)$$

$$\mathrm{B} = \left(\frac{d\mathrm{f}\,(x+h)}{dh}\right)_a$$

$$\mathrm{C} = \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2\mathrm{f}(x+h)}{dh^2}\right)_a$$

. . . .

$$\mathrm{N} = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh^n}\right)_a$$

A że mamy:

$$\left(\frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh^n}\right)_a = \left(\frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x)}{dx^n}\right)_{x+a} = \mathrm{f}^n\,(x+a)$$

przeto jeszcze:

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{f}^n\,(x+a)}{n!}$$

a podstawiając te wartości, otrzymamy wzór:

$$\mathrm{f}\,(x+h) = \mathrm{f}\,(x+a)+\frac{(h-a)}{1}\,\mathrm{f}'(x+a)+\frac{(h-a)^2}{2\,!}\,\mathrm{f}''\,(x+a)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(h-a)^n}{n\,!}\,\mathrm{f}^n\,(x+a)+\ldots \qquad (1)$$

Taka jest postać rozwinięcia funkcyi na szereg, który nazwiemy *głównym;* pozostaje jeszcze oznaczyć stałą dowolną a wprowadzoną jako początkowy przyrost zmiennéj.

125. Ponieważ szereg może być zbieżny i rozbieżny, przeto dowód powyższy potrzeba jeszcze uzupełnić, dodając granice, między któremi szereg będzie zbieżnym.

Ponieważ szereg (1) ma być zbieżnym, przeto stosunek n tych wyrazów musi koniecznie w granicy gdy $n = \infty$ być równy jedności, gdy szereg ma znaki jednakowe; — 1, gdy znaki naprzemian, jak to dowiedliśmy w części 1 § 24; zatém aby powyższy szereg był zbieżnym, musi być:

$$\left\{ \frac{n\, \mathrm{f}^{n-1}\, (x+a)}{(h-a)\, \mathrm{f}^{n}\, (x+a)} \right\}_{\infty} = \pm 1.$$

czyli wyłączając $h - a$ będzie:

$$h - a = \pm \left\{ \frac{n\, \mathrm{f}^{n-1}\, (x+a)}{\mathrm{f}^{n}\, (x+a)} \right\}_{\infty}$$

to jest $h - a$ musi być mniejsze od tych granic, czyli zawarte między temi granicami w przechodzie przez zero.

A że druga strona jest ściśle graniczną danéj funkcyi dla wartości $x + a$, którą umiemy zawsze znaleźć za pomocą rachunku funkcyi granicznych, przeto otrzymamy jeszcze:

$$h = a \pm \mathrm{G}\, \mathrm{f}\, (x)\, (x)_{x+a} \qquad (2)$$

i to są granice dla h między któremi szereg nasz zostaje zbieżnym, a że ilość a jest dowolną, przeto możemy zawsze brać taką, aby dopełniała warunku (2). Równanie warunkowe (2) nazywać będziemy *równaniem zbieżności szeregu*, i widzimy że rozwijanie funkcyi na szereg składa się z dwóch części, z szeregu samego i równania zbieżności, które razem wzięte składają prawo rozwinięcia funkcyi na szereg w najogólniejszém znaczeniu, a które daje się tak wysłowić:

Każdą funkcyą można rozwinąć na szereg, uszykowany według potęg rosnących przyrostu zmiennéj, według dowolnéj początkowéj wartości tego przyrostu w postaci (1) i między granicami tego przyrostu, oznaczonemi summą i różnicą początkowéj dowolnéj wartości tego przyrostu i funkcyi granicznéj danéj funkcyi dla początkowéj wartości zmiennéj, i objętemi równaniem zbieżności (2).

Tak dopełniony wzór (1) nie przestaje być zupełnie ogólnym, albowiem wzór (1) daje prawo rozwinięcia, a równanie (2) daje wartość ilości dowolnéj a, warunek więc (2) uzupełnia dowodzenie, znosząc dowolność ilości a.

Gdy h i x dowolne, równanie (2) daje związek między temi ilościami, lecz gdy x i h dane z równania (2), otrzymamy wartości dla a szczególne, zadość czyniące warunkom zbieżności szeregów.

126. Równanie powyższe (2) daje dwie wartości dla h, oznaczając je przez h_1 i h_2, będzie:

$$h_2 = a + \mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)_{x+a}$$
$$h_1 = a - \mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)_{x+a}$$

biorąc różnicę tych ilości, otrzymamy:

$$h_2 - h_1 = 2\,\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)_{x+a}$$

Ponieważ rozciągłość, w jakiéj funkcya daje się rozwinąć na szereg zbieżny, mierzy się różnicą wartości h_2 i h_1, tak że od h_2 do h_1 szeregi są zbieżne, oznaczając więc tę różnicę przez g, będzie:

$$\mathrm{g} = 2\,\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)_{x+a} \tag{3}$$

to wyrażenie będziemy nazywali *rozciągiem zbieżności szeregu* lub *rozwinięcia funkcyi* na szereg i powiemy że:

Rozciąg rozwinięcia funkcyi, jest równy podwojonéj funkcyi granicznéj wziętéj co do zmiennéj dla wartości początkowéj rozwinięcia.

127. W rachunku funkcyi granicznych widzieliśmy, że funkcya dana może miéć kilka granicznych, stosownie do postaci funkcyi w skład danéj funkcyi wchodzących. Każda z tych granicznych da osobne granice rozwinięcia, a granicami funkcyi danéj będą te z nich, które dają rozciąg najmniejszy objętych granicami innych funkcyi. Albowiem biorąc wartości większe od tych najmniejszych granic, jedna przynajmniéj z funkcyi w skład danéj funkcyi wchodzących da szereg rozbieżny, przeto szereg już nie może wyrażać funkcyi.

Z tego twierdzenia wypada, że graniczne dające granice nieskończone, przy innych dających granice skończone, muszą być odrzucone.

I tak, niech będzie funkcya:

$$y = \frac{(ax+b)^{\frac{1}{2}}}{(cx+d)(mx+n)^{\frac{1}{2}}}$$

ta funkcya ma za graniczne § 97.

$$G\,y\,(x) = -\frac{ax+b}{a}$$

$$G\,y\,(x) = -\frac{cx+d}{c}$$

$$G\,y\,(x) = -\frac{mx+n}{m}$$

Ztąd rozwijając y na szereg według wzoru (9) dla początkowéj wartości $x = 0$, potrzeba wybrać między wartościami dla x:

$$x = \pm\frac{b}{a}$$

$$x = \pm\frac{d}{c}$$

$$x = \pm\frac{n}{m}$$

najmniejsze za granice, albowiem one będą objęte wszystkiemi innemi.

128. W rachunku funkcyi granicznych (§ 119) dowiedliśmy, że graniczna funkcyi wyraża się przez stosunek pewnéj funkcyi, w skład danéj funkcyi wchodzącéj, do swéj pochodnéj pierwszéj, lub téż jest nieskończoną. Gdy graniczna jest nieskończoną, granice są $\pm\infty$, a zatém szereg w całéj rozciągłości jest zbieżnym. W drugim przypadku, oznaczając w ogóle przez $\varphi\,(x)$ tę z funkcyi, która daje najmniejsze granice, równanie granic można napisać:

$$h = a \pm \frac{\varphi\,(x+a)}{\varphi'\,(x+a)}$$

Równanie to obejmuje następujące twierdzenie:

Granice rozwinięcia funkcyi na szereg, wyrażają się w ogóle przez summę lub różnicę początkowéj wartości przyrostu *i stosunku jednéj z funkcyi w skład danéj funkcyi wchodzącéj, która daje rozciąg zbieżności najmniejszy, objęty rozciągiem innych funkcyi, do jéj pochodnéj dla wartości początkowéj zmiennéj, lub w szczególnym przypadku mogą być obie nieskończenie wielkie, gdy graniczna ma wartość nieskończoną.*

Z tego twierdzenia wypada następujący wniosek:

Rozwinięcie funkcyi na szereg, w ogóle zależy tylko od stosunku pewnéj funkcyi do jéj pochodnéj, a wcale nie zależy od dalszych pochodnych. Ważne to prawo czyni rozwijanie funkcyi zależném tylko od stosunku funkcyi do jéj pochodnéj.

129. Jakiekolwiek będą miały wartości x i h, a jeszcze może być dowolne, lecz musi być zawarte w granicach objętych równaniem (3). Aże a jest dowolném, więc zmieniając a w tych granicach, otrzymamy różne rozwinięcia; można więc a brać takie, aby rozciąg rozwinięcia był maximum, co otrzymamy równając jego pochodną do zera, to jest będzie:

$$\frac{d\,\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)_{x+a}}{da} = 0$$

czyli:

$$\left\{\frac{d\,\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)}{dx}\right\}_{x+a} = 0$$

Aże z rachunku funkcyi granicznych wiemy, że graniczna albo jest nieskończona, albo jest stosunkiem pewnéj funkcyi w skład funkcyi danéj wchodzącéj do swéj pochodnéj, zatém:

1. Gdy graniczna jest nieskończona, rozciąg jest nieskończony i szereg jest zbieżny w całéj rozciągłości od $+\infty$ do $-\infty$.

2. Gdy graniczna jest stosunkiem pewnéj funkcyi do jéj pochodnéj, oznaczając ją przez $\varphi\,(x)$ będzie:

$$\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x) = \frac{\varphi}{\varphi'}$$

a biorąc pochodną co do x i kładąc za x, $x+a$ otrzymamy:

$$\varphi'^2 - \varphi\,\varphi'' = 0$$

czyli:

$$\frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\varphi'}{\varphi''}$$

ztąd w tym razie granice maximum będą:

$$h = a \pm \left(\frac{\varphi'}{\varphi''}\right)_{x+a}$$

a rozciąg:

$$g = 2\left(\frac{\varphi'}{\varphi''}\right)_{x+a}$$

Tak więc ilość dowolna a wprowadzona do wzoru rozwinięcia, rozwiązuje zarazem zadanie dotąd niepodobne do rozwiązania w rachunku, powiększenia granic zbieżności szeregu.

Ilość a jeszcze rozwiązuje drugie zadanie powiększenia saméj zbieżności szeregów, albowiem a zostając dowolném w granicach rozwijalności, możemy jéj nadać taką wartość, aby szereg był najzbieżniejszym; ta wartość jest dla tego szeregu $a = h$, lecz wtedy szereg zamienia się na tożsamość, zatém możemy brać a tak blizkie h, o ile chcemy.

130. Jeżeli ilości x, h i a dopełniają warunków zawartych w równaniu zbieżności i gdy a jest stałe, jedna ze zmiennych x i h lub obie razem, mogą zmieniać się w granicach wyrażonych przez toż równanie, i szereg będzie zawsze zbieżnym; lecz może być pytanie, czy szereg jest zbieżnym dla tych wartości granicznych?

Otóż w tych przypadkach czyli dla tych wartości, które niekiedy nazywamy *krytycznemi*, x, h i a mają szczególne wartości, a szeregi zamieniają się na szczególne, któremi zajmowaliśmy się w Części pierwszéj. Aże te wartości dopełniają jeszcze równania zbieżności, przeto stosunek wyrazów, dąży do granicy równéj jedności, gdy n dąży do nieskończoności, a w tych przypadkach teorya zbieżności szeregów wyłożona w Części pierwszéj rozwiązuje zupełnie zadanie, i nie zostawia nic wątpliwego.

Zatém w każdym razie, teorya nasza podaje łatwe sposoby poznania zbieżności szeregów nawet w granicy.

131. Weźmy pod uwagę wzór główny (1) mający granice i rozciąg:

$$h = a \pm \mathrm{G\,f}(x)\,(x)_{x+a}$$
$$\mathrm{g} = 2\,\mathrm{G\,f}(x)\,(x)_{x+a}$$

w pierwszém wyrażeniu uważając x za stałe, a h i a za zmienne, a w drugiém g i a za zmienne, widzimy że to są równania rozwiązalne co do h i g, a nierozwiązalne co do a; dopóki a dowolne, wyrażają pewne linie krzywe paraboliczne lub hyperboliczne, mające a za odcięte, a h lub g za rzędne, krzywe te są zupełnie podobne, albowiem mamy:

$$h = a \pm \frac{1}{2}\,\mathrm{g} \quad \text{czyli} \quad h \pm \frac{1}{2}\,\mathrm{g} = a$$

Jeżeli więc $0x$ i $0y$ będą dwie osie współrzędne (fig. 1) i na $0x$ liczymy a, zacząwszy od $0\mathrm{A} = x$, a na $0y$ h; to prowadząc przez punkt A linią równoległą od linii, dzielącéj kąt między osiami na dwie równe części, linia ta będzie miéć za równanie:

$$h = a$$

a biorąc na rzędnych odpowiednich odciętym części $\mathrm{MN} = \mathrm{MN'} = \mathrm{Gf}(x)\,(x)_{x+a}$ punkta N i N′ będą należeć do krzywych dających granice h, albowiem będzie:

$$\mathrm{PN} = a + \mathrm{G\,f}(x)\,(x)_{x+a} = h$$
$$\mathrm{PN'} = a - \mathrm{G\,f}(x)\,(x)_{x+a} = h$$

tak że gdy jedna wartość h daje linią krzywą NQR, druga linią krzywą N′QR′ i obie będą takie że linia prosta MM′ będzie średnicą dla obu, t. j. dzielić będzie cięciwy równolegle od osi y na dwie równe części.

Rozciąg zaś g będzie wtedy przedstawiony przez cięciwy zawarte między temi krzywemi, i równolegle od osi rzędnych, albowiem $\mathrm{NN'} = \mathrm{PN} - \mathrm{PN'} = 2\,\mathrm{G\,f}(x)(x)_{x+a} = \mathrm{g}$.

Krzywe te można nazwać *granicznemi*. Punkta krzywych granicznych, dla których $\mathrm{g} = 0$, schodzą się w jednym punkcie na linii MM′ jako na ich średnicy. Odciętéj tego punktu odpowiada punkt na linii krzywéj danéj, który biorąc za początek rozwinięcia, rozwinięcie to nie służy, i zawsze daje szeregi rozbieżne, i to dla jakiéjkolwiek wartości ilości h.

Gdy rozciąg ma wartość N N′ odpowiadającą odciętéj AP $= c$, przenosząc NN′ na oś odciętych, tak aby punkt M padł na P, końce linii N N′ odetną na osi x dwa punkta p, p' przez które prowadząc równolegle od osi y, linie te obejmą część krzywéj danéj, która dla początkowéj wartości OP da się rozwinąć na szereg zbieżny.

Gdy ta początkowa wartość zmienia sie, zmieniają się i wartości granic, i coraz inne części krzywéj, objęte zostaną granicami zbieżności. Zatém dla każdéj początkowéj wartości przyrostu zmiennéj są dwie granice odpowiednie: jedna zawsze dodatna, druga odjemna, i obejmujące części krzywéj objęte szeregiem zbieżnym. A zmieniając tę początkową wartość, szereg zbieżny będzie przedstawiał coraz inne części krzywéj, tak że cała krzywa jest objęta szeregiem (1).

132. Nazywając $h - a = k$, a początkową wartość rozwinięcia $x + a = \xi$, do rozwinięcia będzie funkcya $\mathrm{f}(\xi + k)$, granice jéj będą:

$$k = \pm \mathrm{G\,f}(\xi)(\xi)$$

a rozciąg:

$$g = \pm 2\,\mathrm{G\,f}(\xi)(\xi)$$

Zatém każde rozwinięcie zależy od postaci i szczególnych wartości funkcyi granicznéj $\mathrm{f}(\xi)$ czyli $\mathrm{f}(x)$.

Gdy więc ilości k, ξ i g będziemy uważać za zmienne i dowolnie zmieniać, rozwinięcie które przedstawi się pod postacią:

$$\mathrm{f}(\xi + k) = \mathrm{f}(\xi) + \sum \frac{k^n}{n!}\,\mathrm{f}^n(\xi)$$

będzie doświadczać zmian w granicach rozwijalności.

Z równania dającego granice wypada, że szereg zostaje zawsze zbieżnym, gdy k przybiera wartości zawarte między granicami wyznaczonemi przez to równanie; a że te granice są sobie równe, i ze znakami przeciwnemi, więc ilość k ma za środkową wartość zero, i tak téż być powinno, albowiem szereg bez względu na wartość ξ dla $k = 0$ sprowadza się do wyrazu pierwszego, i nabywa wartości gdy k rośnie dodatnie lub odjemnie. Zbieżność więc zależy tylko od postaci funkcyi granicznéj. Gdy więc funkcya graniczna dla wartości szczególnych ξ_0 staje się zero, to i rozciąg jest zero, więc:

$$G\, f(\xi)\,(\xi)_{\xi_0} = 0$$

granice stają się zero i zbiegają się obie do wartości $k = 0$, dla któréj jak wiemy szereg znika i przestaje być zbieżnym, jakąbykolwiek wartość miało k dla tych szczególnych wartości ξ_0, następuje więc przerwanie zbieżności szeregu, krzywe graniczne schodzą się w jeden punkt, i na krzywéj danéj wskazują szczególne punkta.

Gdy ξ począwszy od téj szczególnéj wartości ξ_0 zmienia się dodatnie lub odjemnie, funkcya graniczna i rozciąg nabywają skończonych wartości, i jedna z granic będzie dodatna, druga odjemna, tak że wartości zmiennéj niezależnéj k między któremi funkcya będzie rozwijalną na szereg, będą $\xi + k$ i $\xi - k$ i wartość $\xi - k$ gdy ξ rośnie musi być większa od téj wartości ξ_0, albo $\xi + k$ gdy ξ ubywa musi być mniejsza od ξ_0; albowiem gdyby to nie miało miejsca, i te szczególne wartości przeszły wartość ξ_0 wtedy od wartości ξ_0 do $\xi - k$ lub $\xi + k$ szeregi byłyby zbieżne, co być nie może, bo dla ξ_0 szereg już znika i daléj jak wiemy jest zawsze rozbieżnym.

Granice więc zbieżności odpowiadające danym wartościom ilości k nie mogą przechodzić wartości dla ξ która czyni też granice zero. Krzywe graniczne rozchodzą się symetrycznie, i szereg będzie zbieżnym, dla pewnéj części linii krzywéj danéj, zawartéj między dwoma rzędnemi odpowiedniemi odciętym dającym te granice, a gdy odcięta początkowa zmienia się, te granice zmieniają się, i coraz inne części krzywéj obejmują, zawsze nie przekraczając punktu, którego odcięta ξ_0 czyni rozciąg zero. Gdy ξ rośnie, może rozciąg rość do nieskończoności, lub też dojść do maximum, i znowu ubywać do następnéj wartości, która znowu czyni rozciąg zero.

Gdy rozciąg rośnie z ξ do nieskończoności, granica jedna nie może przejść wartości ogólnéj ξ_0 gdyż szereg przestaje być zbieżnym; druga rośnie wraz z ξ i musi się stawać także nieskończoną. Wartość ta ξ daje dla funkcyi pewną wartość, do któréj dosięga granica druga, i któréj znowu nie może przejść, gdyż szereg staje się rozbieżnym. Między temi wartościami, część funkcyi daje się rozwinąć na szereg zbieżny.

Gdy rozciąg z ξ rośnie dochodzi maximum, i zmniejsza się następnie, zawsze granica jedna nie może przejść wartości ξ_0, dla któréj rozciag znika, druga granica zbliża się do następnéj wartości szczególnéj ξ która czyni tenże rozciąg znowu zero, i nie może jéj przejść dla téjże saméj przyczyny, tak że dla każdéj wartości początkowéj ξ mamy dwie granice dla k, które nie mogą przejść pewnych granic głównych, które dają $k = 0$ lub $k = \infty$ i rozciąg zero lub nieskończony. Granice te których granice odpowiednie danéj początkowéj wartości zmiennéj przejść nie mogą, nazwiemy *granicami rozwijalności funkcyi*, lub téż *granicami rozwijalności;* nazywając tamte *granicami rozwinięcia funkcyi lub zbieżności szeregu.*

Granice więc rozwijalności są to szczególne wartości granic, między któremi funkcya daje się rozwinąć zawsze na szereg zbieżny, biorąc dla ilości porządkującéj wartości zawarte między granicami zbieżności szeregu.

Zatém dla danéj wartości początkowéj otrzymujemy dwie granice dla ilości porządkującéj, których ta ilość przejść nie może; zmieniając wartość początkową zmiennéj, granice dla ilości porządkującéj zmieniać się będą między granicami rozwijalności funkcyi.

Granice rozwijalności otrzymamy, czyniąc rozciąg równy zero lub nieskończoności, to jest:

$$\mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(\xi)\,(\xi) = 0$$

$$\mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(\xi)\,(\xi) = \infty$$

te dwa równania zawierają wszystkie granice rozwijalności, i razem dają wszystkie wartości szczególne dla początkowéj wartości zmiennéj. Wartości więc te sprawiają przerwanie rozwijalności funkcyi, gdyż za temi granicami funkcya nie daje się rozwinąć przez dany szereg, i dla danéj początkowéj wartości zmiennéj.

133. Ponieważ rachunek funkcyi granicznych uczy nas że graniczna danéj funkcyi wyraża się w ogóle albo przez nieskończoność albo przez:

$$G\,f\,(x)\,(x) = \frac{\varphi\,(x)}{\varphi'(x)}$$

gdzie $\varphi\,(x)$ jest jedną z funkcyi w skład danéj funkcyi wchodzącą, przeto wartości dla x sprawiające przerwanie rozwijalności, otrzymamy z dwóch systematów równań, jednego dającego rozciąg zero:

$$\varphi\,(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad \varphi'\,(x) = \infty$$

drugiego dającego rozciąg nieskończony:

$$\varphi\,(x) = \infty \qquad \text{i} \qquad \varphi'\,(x) = 0$$

Biorąc pod uwagę pierwsze równanie i rozwiązując, otrzymamy dla x wartości, które mogą dać dla $\varphi'\,(x)$ rozmaite wartości. Gdy $\varphi'\,(x)$ dla téj wartości x będzie skończone, wtedy rozciąg będzie zero, i wartość ta daje przerwanie rozwijalności. Gdy $\varphi'\,(x)$ będzie nieskończone, wtedy rozciąg jest zero, i wartość x daje znowu przerwanie rozwijalności. Gdy nakoniec $\varphi'\,(x) = 0$ wtedy rozciąg będzie nieoznaczony a biorąc pochodne obu wyrazów osobno, rozciąg przedstawi się pod postacią:

$$g = 2\,\frac{\varphi'\,(x)}{\varphi''\,(x)}$$

i gdy $\varphi''\,(x)$ nie jest zero, wtedy rozciąg jest zero, i wartości te dla x dają jeszcze przerwanie rozwijalności. Lecz gdy $\varphi''\,(x) = 0$ znowu rozciąg nieoznaczony, i trzeba przejść do następnych pochodnych, i tak daléj.

W ogóle więc wszystkie wartości otrzymane z wyrażenia $\varphi\,(x) = 0$ dają przerwanie rozwijalności funkcyi bez względu jakakolwiek będzie wartość pochodnych.

Drugi warunek $\varphi\,(x) = \infty$ daje zawsze przerwanie rozwijalności funkcyi jakiekolwiek będzie $\varphi'(x)$ nawet gdy $\varphi'(x) = \infty$, albowiem wtedy rozciąg mieć będzie postać nieoznaczoną, a biorąc pochodne obu wyrazów będzie:

$$g = 2\,\frac{\varphi'\,(x)}{\varphi''\,(x)}$$

i podobnie jak wyżéj rozciąg będzie zawsze nieskończonym, aby tylko wszystkie pochodne nie stawały się nieskończone.

Nakoniec gdy $\varphi(x)$ ma wartość skończoną dla wartości szczególnych x a funkcya pochodna $\varphi'(x) = \infty$, rozciąg jest zero i następuje przerwanie rozwijalności. Gdy zaś pochodna $\varphi'(x) = 0$ rozciąg jest nieskończony, i jeszcze następuje przerwanie rozwijalności.

Przeto: *przerwanie rozwijalności następuje wtedy, gdy funkcya lub jéj pochodna, które wyznaczają granice rozwijalności funkcyi danéj, stają się zero lub nieskończone.*

134. Funkcya $f(x)$ doświadcza przerwania ciągłości, gdy dla szczególnych wartości x staje się nieskończoną lub urojoną.

Gdy funkcya $f(x)$ dla nieskończonéj wartości x staje się nieskończoną, jakiekolwiek będą wartości pochodnych zawsze dla téj wartości x funkcya doświadcza przerwania ciągłości, a że graniczna téj funkcyi $G f(x)(x)$ staje się także nieskończoną, więc przerwanie ciągłości sprowadza przerwanie rozwijalności.

Gdy funkcya dla skończonéj wartości x staje się nieskończoną, musi mieć postać:

$$f(x) = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$$

gdzie dla téj wartości, $\psi(x)$ musi być skończone, a $\varphi(x) = 0$; pochodna tego wyrażenia:

$$f'(x) = \frac{\varphi\,\psi' - \psi\,\varphi'}{\varphi^2}$$

również staje się nieskończoną.

Graniczne tego wyrażenia są:

$$G f(x)(x) \begin{cases} = G\,\psi(x)(x) \\ = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} \end{cases}$$

z których pierwsza ma wartość skończoną, gdyż $\psi(x)$ jest skończone, druga daje przerwanie rozwijalności, więc warunek $\varphi(x) = 0$ sprowadza w funkcyi danéj przerwanie ciągłości i zarazem przerwanie rozwijalności.

Gdy funkcya dla skończonéj wartości x przechodzi z rzeczywistéj wartości na urojoną, musi mieć postać:

$$f(x) = \psi\,\varphi^{\frac{1}{2n}}$$

gdzie ψ jest skończoną, φ staje się zero dla téj wartości x.

Pochodna tego wyrażenia jest:

$$\mathrm{f}'(x) = \psi' \varphi^{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n} \frac{\psi \varphi'}{\varphi^{\frac{2n-1}{2n}}}$$

która dla $\varphi = 0$ staje się nieskończoną.

Biorąc graniczne, będzie:

$$\mathrm{G\,f}(x)(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\,\psi\,(x)\,(x) \\ = \dfrac{\varphi\,(x)}{\varphi'(x)} \end{cases}$$

które dla $\varphi = 0$ mają: pierwsza wartość skończoną, druga jest zero, więc warunek $\varphi = 0$ sprowadza razem przerwanie ciągłości i rozwijalności funkcyi.

Zatém warunki $\varphi = 0$ i $\varphi = \infty$, wyrażając przerwanie rozwijalności funkcyi, są razem warunkami przerwania jéj ciągłości; podobnie waruki $\varphi' = 0$ i $\varphi' = \infty$ dają także przerwanie rozwijalności i ciągłości funkcyi.

Ztąd wypada następujące twierdzenie:

Rozwijalność funkcyi na szeregi, zależy ściśle od ciągłości funkcyi, i jéj pierwszéj pochodnéj, a nie zależy zupełnie od pochodnych następnych.

135. Prawo wyżéj dowiedzione sprowadza rozwijalność funkcyi, do ciągłości saméj funkcyi i jéj pochodnéj, i pozwala prawo rozwijalności funkcyi jeszcze tak wyrazić:

Funkcya zmiennéj x da się rozwinąć na szereg zbieżny uszykowany według potęg rosnących ilości porządkującéj, dopóki ta ilość nie przechodzi wartości zawartych między granicami, dla których jedna z funkcyi w skład funkcyi danéj wchodząca, a dająca granice najmniejsze objęte granicami innych, i jéj pierwsza pochodna, przestają być ciągłe i skończone.

Twierdzenie to jest podobném do sławnego twierdzenia Cauchego, którego dowiódł inną drogą, używając ilości urojonych, a które tak daje się wysłowić: (*)

Funkcya jakakolwiek rzeczywista lub urojona zmiennéj rzeczywistéj lub urojonéj x, da się rozwinąć na szereg zbieżny, uszykowany według potęg rosnących z x, dopóki moduł z x zachowa wartość niższą od najmniejszego z modułów, dla których funkcya lub jéj pochodna pierwsza przestają być skończone i ciągłe.

Oznaczenie najmniejszego modułu, które jest w ogóle trudne do znalezienia, i zależne od ilości urojonych, zamienia się w naszéj teoryi na szukanie funkcyi granicznych przez rachunek tych funkcyi i jest zawsze działaniem na ilościach rzeczywistych, w tém to teorya nasza ma widoczną wyższość nad teoryą Cauchego, i sprowadza, że tak powiedzieć można poszukiwania tego rodzaju na właściwą drogę.

136. Gdy daną funkcyą $y = \mathrm{f}(x)$ mamy rozwinąć na szereg zbieżny dla wartości urojonych x, to kładąc:

$$x = r\,(\mathrm{dos}\, t + i\, \mathrm{wst}\, t)$$

wiemy z § 105, że graniczne równają się:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \mathrm{dos}\, t\; \mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(r)\,(r)$$

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \mathrm{wst}\, t\; \mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(r)\,(r)$$

zatém granice dla r między któremi szereg będzie zbieżny, dla początkowéj wartości $r = a$ będą:

$$r = a \pm \mathrm{wst}\, t\; \mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(r)\,(r)_a$$

a rozciąg

$$g = 2\, \mathrm{wst}\, t\; \mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(r)\,(r)_a$$

gdy zaś x jest rzeczywiste i równe r, byłoby jak wiemy:

$$r = a \pm \mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(r)\,(r)_a$$

a rozciąg:

$$g = 2\, \mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(r)\,(r)_a$$

(*) Patrz: L'abbé Moigno „Leçons de calcul differentiel et integral Paris 1840." Lekcya 17, § 85.

Zatém gdy zmienna x jest rzeczywista, granice zbieżności funkcyi są widocznie obszerniejsze, jak gdy x urojone, i rozciąg zbieżności większy; a ztąd wniesiemy, że oznaczenie granic rozwinięcia funkcyi rzeczywistych, za pomocą ilości urojonych jest nieścisłém, jako dające niewłaściwe granice, i teorya Cauchego jako oparta na ilościach urojonych, prowadzić musi do wypadków zamałych lub zawielkich, tam gdzie się oznacza granice rozwinięcia funkcyi rzeczywistych, za pomocą ilości urojonych, jak to niżéj (§ 170, 204) na przykładach zobaczymy. (*)

(*) Patrz: L'abbé Moigno „Leçons de calcul differentiel et integral. Paris 1840". Nota druga.

ROZDZIAŁ DRUGI.

SZCZEGÓLNE POSTACIE WZORU OGÓLNEGO ROZWIJANIA FUNKCYI NA SZEREGI ZBIEŻNE. — SZEREGI TAYLORA, MACLAURINA, ABELA I BERNOULLEGO, ORAZ STIRLINGA I BOOLEGO.

---

137. We wzorze ogólnym (1), równanie zbieżności zawiera w sobie trzy ilości x, h i a; lecz tak, że one czyniąc $h - a = k$ i $x + a = \xi$, dają się sprowadzić do trzech równań następnych.

$$\begin{aligned} h - a &= k \\ x + a &= \xi \\ k &= \pm \mathrm{G}\, \mathrm{f}(\xi)(\xi) \end{aligned} \qquad \text{(a)}$$

gdzie widzimy, że dopóki k i ξ zostają dowolne, związek ostatni nie traci ogólności, ażeby zaś k i ξ zostały dowolne, związek między ilościami x, h i a nowy, nie może być dany w formach:

$$\left.\begin{array}{lcl} \mathrm{f}(h - a) = 0 & , & \mathrm{f}(x + a) = 0 \\ h - a = \mathrm{f}(x + a) & , & \mathrm{f}(a) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{(b)}$$

a gdy h i x mają wartości oznaczone, nie może być między niemi a ilością a żadnego związku, albowiem związek ten dawałby oznaczoną wartość dla a, a ztąd k i ξ miałyby oznaczone wartości przez dwa pierwsze równania, które w ogóle nie dopełniałyby równania trzeciego, i szereg przestałby być zbieżnym.

Ztąd widzimy, że dwa są rodzaje związków, jakie możemy wprowadzić do wzorów (1 i 2), jedne nie psujące ogólności szeregów, drugie zatracające tę ogólność, zawarte w następujących dwóch twierdzeniach:

1. *We wzorze głównym* (1) *można między ilościami x, h* i *a, założyć jakikolwiek związek, byleby nie formy (b); a wzór nowy ztąd otrzymany nie straci ogólności wzoru* (1).

2. *W każdym innym razie, wzór nowy traci ogólność, i może się zdarzyć, że przestaje być zbieżnym, gdy dla wartości danych równanie zbieżności nie ma miejsca.*

Według tych zasad postępując, podamy naprzód wzory, które nie tracą swéj ogólności.

138. Najprostsze z takich warunków są:

$$x = 0, \quad h = 0 \quad \text{lub} \quad h = x$$

Jakoż czyniąc w (1) $x = 0$ i h zamieniając na x, otrzymamy nową ogólną postać:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= \mathrm{f}(a) + \frac{x-a}{1}\mathrm{f}'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\mathrm{f}''(a)\ldots \\ &\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}\mathrm{f}^n(a) + \ldots \\ x &= a \pm \mathrm{G}\,\mathrm{f}(x)\,(x)_a \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Wzór dający rozwinięcie saméj funkcyi zmiennéj, i równie ogólny zawierający następujące twierdzenie:

Każda funkcya daje się rozwinąć na szereg, według dowolnéj początkowéj wartości zmiennéj, uszykowany według potęg rosnących różnicy zmiennéj od jéj początkowéj wartości, między granicami téj zmiennéj, objętemi równaniem zbieżności.

Biorąc więc wartości dla x i a zawarte w granicach wyznaczonych równaniem zbieżności (4), otrzymamy szereg zawsze zbieżny, a rozciąg zbieżności wyrazi się przez:

$$\mathrm{g} = 2\,\mathrm{G}\,\mathrm{f}(x)\,(x)_a$$

biorąc dla a wartości dające maximum rozciągu, otrzymamy granice rozwijalności funkcyi, w jakich ta funkcya daje się rozwinąć dla danéj wartości x.

139. Jeżeli założymy $h = 0$, a a zamienimy na $-a$, otrzymamy rozwinięcie funkcyi $\mathrm{f}(x)$ według dowolnéj ilości a dla początkowéj wartości $(x - a)$ postaci:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = f(x-a) + \frac{a}{1} f'(x-a) + \frac{a^2}{2!} f''(x-a) + \dots \\ \quad \dots + \frac{a^n}{n!} f^n (x-a) + \dots \\ \quad a = \pm G f(x) (x)_{x-a} \end{array}\right\} \quad (5)$$

Wyrażenie godne uwagi, dające rozwinięcie funkcyi x, według potęg rosnących dowolnéj ilości dla początkowéj znanéj wartości $(x - a)$, byle a sprawdzało równanie zbieżności.

140. Nakoniec, gdy położymy $h = x$, otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l} f(2x) = f(x+a) + \frac{(x-a)}{1} f'(x+a) + \dots \\ \quad \dots \frac{(x-a)^n}{n!} f^n (x+a) + \dots \\ \quad x = a \pm G f(x) (x)_{x+a} \end{array}\right\} \quad (6)$$

Wyrażenie podobne do (5), dające rozwinięcie funkcyi f $(2x)$ dla początkowéj wartości dowolnéj $x + a$, i według potęg dodatnych ilości $x - a$.

Przeglądając te wzory uważamy, że pomiędzy nimi nic ma dotąd znanych, a ztąd wypada ten wniosek, że wzory znane muszą należéć do szeregów powstających z uszczególnień drugiego rodzaju, to jest które niszczą ogólność szeregu (1).

141. Przejdziemy teraz do drugiego rodzaju warunków, które niszczą ogólność wzorów.

Najprzód załóżmy $a = 0$ otrzymamy z (1):

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots \\ \quad \dots + \frac{h^n}{n!} f^n (x) + \dots \\ \quad h = \pm G f(x) (x) \end{array}\right\} \quad (7)$$

Wzór ten przestaje widocznie służyć, gdy wartości x i h są szczególne i nie dopełniają równania zbieżności, albowiem rozciąg zbieżności jest:

$$g = 2\,G\,f(x)(x)$$

i zależy od ilości x, zatém może się zdarzyć, że wartości x czynią tę funkcyą zero, i szereg przestaje być zbieżnym; jest więc szczególnym przypadkiem (1). Zatém w ogóle a nie może być zero, jak tylko w szczególnych przypadkach, w których h i x są dowolne, i zawarte w granicach oznaczonych równaniem zbieżności; lub gdy są oznaczone, lecz dopełniają warunku tém równaniem objętego, wtedy funkcya da się na ten szereg rozwinąć.

Szereg ten jak widzimy jest szeregiem Taylora, lecz z tą różnicą, że resztę szeregu zastępuje tu równanie zbieżności. Szereg więc Taylora, jest szczególnym przypadkiem naszego wzoru.

142. Powyższe wzory otrzymane zostały zakładając jeden tylko warunek, teraz wprowadzimy we wzór (1) dwa warunki: $x = 0$ i $a = 0$ lub też we wzór (4) sam warunek $a = 0$ otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \ldots \\ x &= \pm\, G\,f(x)(x)_0 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Pierwsza część tego wzoru jest szeregiem Maclaurina, w którym resztę zastępuje tu równanie dające granice szeregu. Wzór ten więc w téj postaci nie wpada w błąd, albowiem równanie granic pokaże nam niemożność założenia $a = 0$. Jego rozciąg jest:

$$g = 2\,G\,f(x)(x)_0$$

i gdy $x = 0$ czyni ten rozciąg czyli graniczną zero, granice są zero i szereg nie służy; trzeba więc wrócić do szeregu (4).

143. Nakoniec czyniąc $x = 0$ i $h = 0$ otrzymamy z (1).

$$f(0) = f(a) - \frac{a}{1} f'(a) + \frac{a^2}{2!} f''(a) - \ldots$$

$$a = \pm\, G\,f(x)(x)_a$$

Wzór ten można jeszcze tak wyrazić, przyjmując znakowanie granic Sarrus'a: (*)

$$\left.\begin{array}{c} \Big/_{0}^{x} \mathrm{f}(x) = x\,\mathrm{f}'(x) - \dfrac{x^2}{2!}\,\mathrm{f}''(x) + \ldots \\ x = \pm\, \mathrm{G}\,\mathrm{f}(x)(x) \end{array}\right\} \quad (9)$$

i wyraża rozwinięcie funkcyi lub całek oznaczonych; co dowodzi tego twierdzenia, że gdy zmienna x dopełnia warunku zawartego w równaniu zbieżności, różnica wartości funkcyi, gdy x zmienia się od 0 do x, daje się rozwinąć według potęg dodatnych x, i pochodnych co do x.

Jest to wzór Bernoullego, i widzimy że także bardzo uszczególniony, i służy dla przypadków objętych równaniem zbieżności.

144. Każdą funkcyą $\mathrm{f}(x)$, gdy x powiększa się o przyrost h, można jeszcze rozwinąć pod inną postacią, nie mniéj ważną, zawsze wprowadzając ilość dowolną a, według potęg rosnących różnicy $h - a$ i ilości wielokrotnie wchodzącéj b postaci:

$$\begin{array}{c} \mathrm{f}(x+h) = \mathrm{A} + (h-a)\,\mathrm{B} + (h-a)(h-a-2\,b)\,\mathrm{C} + \ldots \\ \ldots + (h-a)(h-a-nb)^{n-1}\,\mathrm{N} + \ldots \end{array} \quad (b)$$

że ta forma jest możliwa łatwo dowieść, naprzód iż ona dopóki a i b dowolne, nie może zawierać ani potęg odjemnych ani ułamkowych, a czyniąc ilość dowolną $b = 0$ zamienia się na formę (a) wzoru głównego (§ 124), a rozwijając każdy czynnik zawierający b przejdziemy jeszcze do postaci (a); tylko spółczynniki A, B, C, i t. d. muszą miéć inną postać.

Wzór ten więc jest możliwy pod względem formy, a że zawiera po drugiéj stronie ilość dowolną a, przeto dopóki a dowolne, rozwinięcie może miéć miejsce, a pochodne biorąc co do h otrzymamy:

(*) Znak $\Big/$ jest znakiem podstawienia podwójnego, a różnica wartości funkcyi dla dwóch wartości granicznych zmiennéj x oznacza się przez $\Big/_{a}^{b} \mathrm{f}(x)$, to jest: $\Big/_{a}^{b} \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)$.

$$\frac{d\mathrm{f}(x+h)}{dh}=\mathrm{B}+2(h-a-b)\mathrm{C}+\ldots+n(b-a-b)(h-a-nb)^{n-2}\,\mathrm{N}+\ldots$$

$$\frac{d^2\mathrm{f}(x+h)}{dh^2}=2\,\mathrm{C}+\ldots+n(n-1)(h-a-2b)(h-a-nb)^{n-3}\,\mathrm{N}+\ldots$$

. . . .

$$\frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh^n}=n\,!\,\mathrm{N}+\ldots$$

A czyniąc w daném rozwinięciu $h=a$, a w następnych pochodnych kolejno $h=a+b$, $h=a+2b$. . . otrzymamy wartości spółczynników:

$$\mathrm{A}=\mathrm{f}\,(x+a)$$

$$\mathrm{B}=\left\{\frac{d\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh}\right\}_{a+b}=\mathrm{f}'\,(x+a+b)$$

$$\mathrm{C}=\frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh^2}\right\}_{a+2b}=\frac{1}{2!}\,\mathrm{f}''\,(x+a+2\,b)$$

. . . .

$$\mathrm{N}=\frac{1}{n!}\left\{\frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x+h)}{dh^n}\right\}_{a+nb}=\frac{1}{n!}\,\mathrm{f}^n\,(x+a+n\,b)$$

mając postać n go wyrazu, łatwo znajdziemy granice tego szeregu; jakoż biorąc stosunek $n-1$ do n go wyrazu dla $n=\infty$ otrzymamy:

$$\left\{\frac{(h-a-(n-1)b)^{n-2}}{(h-a-nb)^{n-1}}\cdot\frac{n\,\mathrm{f}^{n-1}\,(x+a+(n-1)b)}{\mathrm{f}^n\,(x+a+nb)}\right\}_{\infty}=\pm\,1.$$

a gdy $n=\infty$, z tego stosunku otrzymamy:

$$h=\left\{(a+nb)\pm\mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x)_{(x+a+nb)}\right\}_{\infty}$$

na granice wartości żądane, tak że wzór ten rozwinięcia będzie miał postać:

$$f(x+h) =$$

$$f(x+a)+\frac{(h-a)}{1}f'(x+a+b)+\frac{(h-a)(h-a-2b)}{2!}f''(x+a+2b)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(h-a)(h-a-nb)^{n-1}}{n!}f^{n}(x+a+nb) \qquad (10)$$

$$h = \{(a+nb) \pm G\, f(x)\, (x)_{(x+a+nb)}\}_{\infty}$$

Taka jest forma ogólna wzoru podobnego rozwinięcia; pozostaje tylko zastanowić się nad postacią granic.

145. Granice dla h wyrażają się przez nb, za które potrzeba położyć wartość dla $n = \infty$; gdy więc ilość b nie jest zero, wartość nb jest nieskończoną; a ztąd nieskończonemi są $a + nb$ i $x + a + nb$; gdy zaś $b = 0$ szereg zmienia formę, przyjmuje postać wzoru (1), a granice stają się nieoznaczone, lecz one zmieniają się także i przyjmują postać (2). Gdy więc b nie jest zero, forma granic właściwie będzie:

$$h = \infty \pm G\, f(x)\, (x)_{\infty} \qquad (10')$$

i widzimy że, jest niezależna ani od x, ani od a, ani od b, i powinna dawać też same granice jak wzór (1) to jest:

$$h = a \pm G\, f'(x)\, (x)_{x+a}$$

co widocznie nie może być, jak tylko dla szczególnych postaci funkcyi.

A że dowiedliśmy, że tylko funkcye algebraiczne całkowite wykładnicze, a z trygonometrycznych wstawa i dostawa i t. p. mają graniczne niezależne od x i nieskończone; przeto wzór (10) służy dla tego rodzaju funkcyi, a nie służy dla żadnych innych. Ztąd mamy twierdzenie następujące:

Funkcye, mające graniczną jedną i nieskończoną, dają się rozwinąć na szereg (1) *według potęg rosnących przyrostu* *zmniejszonego ilością dowolną, wielokrotnie w skład potęg i pochodnych wchodzącą.*

146. Ponieważ graniczne są niezależne od a, przeto można położyć $a = 0$ i otrzymamy wzór prostszy, zamieniając b na a:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x+a) + \frac{h(h-2a)}{2!} f''(x+2a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{h(h-na)^{n-1}}{n!} f^n(x+na) + \ldots \qquad (11)$$

$$h = \pm \infty$$

i służy tylko dla funkcyi, których graniczne są nieskończone. Jest to wzór podany przez Bertranda (*) bez żadnego zastrzeżenia jako ogólny; tymczasem jak widzimy, służy tylko dla funkcyi algebraiczno-całkowitych, wykładniczych, wstaw, dostaw i t. p.

Czyniąc $f(x+h) = (x+a)^m$ otrzymamy wzór Abela.

$$(x+a)^m = x^m + ma(x+b)^{m-1} +$$

$$\frac{m(m-1)}{2!} a(a-2b)(x+2b)^{m-2} + \ldots \qquad (12)$$

$$m = \text{całkowite i dodatne.}$$

gdzie równanie granic można zastąpić już warunkiem ograniczającym wykładnik.

Widzimy więc, że wzory te są bardzo w zastosowaniu ograniczone, a z dowodu samego wzoru wynika, że powiększając liczbę dowolnych, możemy otrzymać nowe szeregi, jakie np. podał

(*) Bertrand: „Traité de calcul différentiel Paris, 1864.“ Page 323 i 324.

Burg (*) wprowadzając n dowolnych, lecz ponieważ te ilości nie wpływają na granice, albowiem równanie zbieżności jest od nich niezależném, zatém podobne rozwinięcia są nieużyteczne, a wprowadzenie tylu dowolnych zbyteczne. Takie jest prawdziwie znaczenie wzoru (10) i jemu podobnych.

147. Szukajmy jeszcze warunków zbieżności dla szeregu Stirlinga mającego formę: (**)

$$\mathrm{f}(x+h)-\mathrm{f}(x)=h\,\mathrm{f}'(x)+\mathrm{A}_1 h\,\{\mathrm{f}'(x+h)-\mathrm{f}'(x)\}+\ldots$$

$$\ldots+\mathrm{A}_n\,h^n\,\{\mathrm{f}^n(x+h)-\mathrm{f}^n(x)\}+\ldots$$

gdzie spółczynniki rozwinięcia otrzymamy, uważając, że one są niezależne od postaci funkcyi $\mathrm{f}(x)$; jakoż czyniąc $\mathrm{f}(x)=e^x$, i zmieniając h na x, będzie:

$$\frac{x}{(e^x-1)}=1-\mathrm{A}_1x-\mathrm{A}_2x^2-\mathrm{A}_3x^3-\ldots$$

zatém:

$$\mathrm{A}_n=-\frac{\left(\mathrm{D}^n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right)_0}{n!}$$

a ztąd wyraz n ty ma formę:

$$u_n=-\frac{\{\mathrm{f}^n(x+h)-\mathrm{f}^n(x)\}\,h^n}{n!}\left(\mathrm{D}^n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right)_0$$

czyli że szereg dany składa sie z dwóch szeregów, które maią za wyrazy ogólne:

$$v_n=\frac{h^n\,\mathrm{f}^n(x+h)}{n!}\cdot\left(\mathrm{D}^n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right)_0$$

$$w_n=\frac{h^n\,\mathrm{f}^n(x)}{n!}\cdot\left(\mathrm{D}^n\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\right)_0$$

i potrzeba, aby oba te szeregi były zbieżne; jakoż stosunek wyrazów pierwszego daje się wyrazić po uproszczeniu przez:

(*) Burg w „Journal für Mathematik“ T. I. r. 1826, str. 367 — 368.

(**) Bertrand: „Traité de calcul différentiel“ § 333.

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} = \frac{n}{h} \cdot \frac{f^{n-1}(x+h)}{f^n(x+h)} \cdot \left(\frac{D^{n-1}}{D^n}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right)_0$$

$$\frac{w_{n-1}}{w_n} = \frac{n}{h} \cdot \frac{f^{n-1}(x+h)}{f^n(x+h)} \cdot \left(\frac{D^{n-1}}{D^n}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right)_0$$

a mnożąc i dzieląc przez n i wyrażając przez funkcye graniczne w granicy gdy $n = \infty$, pamiętając że stosunek staje się równy ± 1, będzie:

$$h = \pm \frac{G\, f(x)\,(x)_{x+h}\, G\, \frac{x}{e^x-1}\,(x)_0}{\infty}$$

$$h = \pm \frac{G\, f(x)(x)_{x+h}\, G\, \frac{x}{e^x-1}\,(x)_0}{\infty}$$

Oba więc szeregi mają te same granice, i wyrażają się przez iloczyn dwóch granicznych.

Jakakolwiek będzie graniczna saméj funkcyi f (x), mamy graniczną drugiéj:

$$G\left(\frac{x}{e^x-1}\right)(x) \begin{cases} = G\, x\,(x) = \infty \\ = \dfrac{e^x-1}{e^x} \end{cases}$$

z tych druga graniczna dla $x = 0$ ma wartość zero.

Zatém jakakolwiek będzie graniczna funkcyi f (x) zawsze te granice są zero, i szereg ten przestaje istnieć, czyli nie ma żadnego znaczenia.

Gdy funkcya f (x) ma graniczną nieskończoną, wartość licznika ukazuje się pod postacią nieoznaczoną, lecz mianownik będąc nieskończonym, jakikolwiek będzie licznik, zawsze ta wartość granic będzie zero. Dopiero w szczególnym bardzo przypadku, gdy nieoznaczona wartość licznika jeszcze jest nieskończoną, granice ukazują się jeszcze pod postacią nieoznaczoną, i tylko dla tego szczególnego przypadku funkcyi, szereg może służyć.

Widzimy więc, że szereg Stirlinga w ogóle nic nie znaczy, i nie powinien być używanym.

Szereg powyższy nawet nie jest zbieżnym dla funkcyi e^x, jakoż stosunek wyrazów daje:

$$\frac{u_{n-1}}{u_n} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{n\,D^{n-1}}{D^n}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)_0$$

dla $n = \infty$ jest:

$$h = \pm\, G\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)_0 \quad \text{czyli} \quad h = 0$$

granice więc są zero i szereg nic nie wyraża.

148. Szukajmy jeszcze warunków zbieżności dla szeregu Boolego (*) mającego formę podobną do powyższego:

$$f(x+h) - f(x) = A_1 h\,(f'(x+h) + f'(x)) + \ldots$$
$$\ldots A_n\, h^n\,(f^n(x+h) + f^n(x)) + \ldots$$

gdzie znowu, ponieważ spółczynniki są niezależne od postaci funkcyi f (x), przeto czyniąc f $(x) = e^x$ i zmieniając h na x, otrzymamy:

$$\frac{e^x - 1}{x(e^x + 1)} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

zatém:

$$A_n = \frac{\left\{D^n \dfrac{e^x - 1}{x(e^x + 1)}\right\}_0}{n!}$$

a ztąd wyraz n ty będzie:

$$u_n = \frac{h^n}{n!}\left\{D^n \frac{e^x - 1}{x(e^x + 1)}\right\}_0 \{f^n(x+h) + f^n(x)\}$$

rozłożymy go na dwa wyrazy, uważając je jako wyrazy ogólne dwóch szeregów, a biorąc stosunek wyrazów otrzymamy:

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} = \frac{n}{h}\,\frac{f^{n-1}(x+h)}{f^n(x+h)}\,\frac{D^{n-1}}{D^n}\left(\frac{e^x - 1}{x(e^x + 1)}\right)_0$$

a przechodząc do granic dla $n = \infty$, otrzymamy:

$$h = \pm \frac{G\, f(x)\,(x)_{x+h}\, G\left(\dfrac{e^x - 1}{x(e^x + 1)}\right)(x)_0}{\infty}$$

podobnie dla drugiego szeregu.

(*) Bertrand: „Traité de calcul différentiel. § 334.

A że:

$$G\,\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}(x)\left\{\begin{array}{l}=G\,e^x\,(x)=\infty\\ =G\,x^-\,(x)=x\\ =G\,(e^x+1)\,(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x}\end{array}\right.$$

które dla $x=0$ dają wartości:

$$\infty,\quad 0,\quad 2$$

przeto najmniejsze granice są zero, i znowu szereg przestaje wyrażać funkcyą zupełnie, dla téjże saméj przyczyny jak wyżéj.

I tak, gdy funkcya $f(x)=e^x$ będzie:

$$\frac{v_{n-1}}{v_n}=\frac{1}{h}\,\frac{e^{x+h}}{e^{x+h}}\,\frac{n\,D^{n-1}}{D^n}\left(\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}\right)_0$$

czyli:

$$h=\pm G\left(\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}\right)_0=0$$

zatém nawet dla funkcyi e^x mającéj graniczne nieskończone, ten szereg nie służy. Oba zatém szeregi Stirlinga i Boolego nic nie znaczą, i powinny być zupełnie wyrzucone z rachunku.

149. Jeżeli funkcyą $f(x)$, w któréj powiększamy x o ilość urojoną yi rozwiniemy na szereg według wzoru Taylora, otrzymamy:

$$f(x+yi)=f(x)-\frac{y^2}{2!}f''(x)+\frac{y^4}{4!}f^{iv}(x)-\dots$$
$$+\,y\,i\left\{f'(x)-\frac{y^2}{3!}f'''(x)+\frac{y^4}{5!}f^{v}(x)-\dots\right\}$$

a równanie zbieżności:

$$y\,i=\pm G\,f(x)(x)$$

czyli:

$$y=\pm i\,G\,f(x)(x)$$

Jeżeli oznaczymy część rzeczywistą tego rozwinięcia przez X a część urojoną przez Y będzie:

$$u = \mathrm{f}\,(x + y\,i) = \mathrm{X} + i\,\mathrm{Y} \qquad \text{(a)}$$

naprzód funkcye X i Y są zależne od siebie, chociaż x i y zostają niezależne; jakoż biorąc pochodną X co do x, mnożąc przez dy i całkując, otrzymamy:

$$\int \frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dy = y\,\mathrm{f}'(x) - \frac{y^3}{3!}\,\mathrm{f}'''(x) + \frac{y^5}{5!}\,\mathrm{f}^v(x) - \ldots$$

podobnie dla Y, przeto wyrażenie (a) można dwojako napisać.

$$u = \mathrm{X} + i\int \frac{d\mathrm{X}}{dx}\,dy$$

$$u = \int \frac{d\mathrm{Y}}{dy}\,dx + i\,\mathrm{Y}$$

Ztąd więc wypada, że granice obu szeregów zależą od X i $\frac{d\mathrm{X}}{dx}$ lub Y i $\frac{d\mathrm{Y}}{dy}$, a że te granice zależą od ich funkcyi granicznych, a znowu wiemy, że graniczne funkcyi i ich pochodnych są też same; przeto granice obu szeregów X i Y są też same.

Pozostaje więc oznaczyć granice szeregu X lub Y.

Używając sposobu wyżéj podanego w § 122, wyraz ogólny szeregu X jest:

$$u_{2n} = \frac{y^{2n}}{2n!}\,\mathrm{f}^{2n}\,(x)$$

$$u_{2n+2} = \frac{y^{2n+2}}{(2n+2)!}\,\mathrm{f}^{2n+2}\,(x)$$

przeto ich stosunek jest:

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n+2}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{y^2} \cdot \frac{\mathrm{f}^{2n}\,(x)}{\mathrm{f}^{2n+2}\,(x)}$$

co można napisać mnożąc i dzieląc przez f^{2n+1}:

$$\frac{u_{2n}}{u_{2n+2}} = \frac{1}{y^2}\,\frac{(2n+1)\mathrm{f}^{2n}}{\mathrm{f}^{2n+1}} \cdot \frac{(2n+2)\,\mathrm{f}^{2n+1}}{\mathrm{f}^{2n+2}}$$

a przechodząc do granic będzie:

$$y^2 = \pm \{G\, f(x)(x)\}^2$$

takie są granice funkcyi X i Y rzeczywistych; czyli jeszcze:

$$y = \pm (G\, f(x)(x)$$

dla szeregów rzeczywistych, a dla urojonych:

$$y = \pm\, i\, G\, f(x)(x)$$

Ztąd wypada następujące twierdzenie:

Rozwijając na szereg funkcyą, w któréj zmienna przyjmuje wartości urojone, według potęg rosnących części urojonéj, granice zbieżności tego szeregu są urojone, i wyrażają się przez wartości rzeczywiste funkcyi granicznéj, pomnożone przez ilość urojoną i.

Wniosek. Zatém nie potrzeba szeregów urojonych rozbierać na dwa szeregi rzeczywiste, i dochodzić ich zbieżności osobno, jeżeli one pochodzą z funkcyi, w któréj zmienna przyjmuje wartość urojoną. Gdy zaś szereg urojony powstaje z połączenia dwóch lub kilku szeregów różnego początku, wtedy dopiero potrzeba dochodzić każdego z osobna, tak jak to i dla funkcyi rzeczywistych ma miejsce.

To twierdzenie i ten wniosek sprowadzają wbrew przeciwnie dzisiejszemu postępowaniu zbieżność szeregów urojonych do rzeczywistych, i usuwają całą naukę modułów, a zastępują ją prawami służącemi dla funkcyi rzeczywistych.

150. Zbierając to wszystko cośmy dotąd powiedzieli wypada: że wprowadzenie ilości dowolnéj a w rozwinięcie jest konieczném, gdyż przywraca téj teoryi całą ogólność, dozwala rozszerzyć granice rozwinięcia funkcyi, i powiększyć zbieżność szeregu, a ztąd wynikło że wszystkie szeregi dotąd znane, jak Taylora, Maclaurina i t. p., są tylko szczególnemi przypadkami naszego wzoru, i jeszcze niezupełnemi w swéj formie, i że *nie wpadają w błąd*, lecz przyczyna tego leży w tém, że niewłaściwie ich stosujemy do przypadków, dla których nie służą; tak że nasza teorya tłumaczy dobrze i ten przypadek dotąd nie jasny.

Każdy z tych znanych wzorów otrzymał nową formę przez odrzucenie reszty szeregu, mało przydatnéj do głównego celu rozwinięcia funkcyi na szereg zbieżny, a zamienienia jéj na równanie zbieżności, które powinno być dodane do każdego wzoru, a które otrzymujemy za pomocą rachunku funkcyi granicznych.

Nakoniec teorya nasza daje nam najwłaściwszy sposób ocenienia zbieżności każdego szeregu i kierowania się w badaniach podobnego rodzaju, a wyrzucając szeregi nie mające znaczenia, oczyszcza rachunek z mnóstwa błędów, które wcisnęły się do niego w braku dostatecznéj kontrolli.

ROZDZIAŁ TRZECI.

WZÓR ROZWIJANIA FUNKCYI NA SZEREGI ZBIEŻNE, WEDŁUG POTĘG ODJEMNYCH PRZYROSTU ZMIENNÉJ.— SZEREGI CAUCHEGO I LAURENTA.

151. Wzór (1) posiada, gdy a dowolne zupełną ogólność i wyraża funkcyą w całéj jéj rozciągłości; jednakże gdy wprowadzamy między a, x, i h pewne warunki, wzór uszczególnia się, przestaje być ogólnym, i służy tylko w granicach objętych równaniem zbieżności, tak że część tylko funkcyi zostaje przez te wzory uszczególnione wyrażoną, inne zaś części nie dają się przez nie wyrazić. Z téj przyczyny podamy tu inną jeszcze postać wzoru, (1) która w tych razach może być bardzo użyteczną.

Niech więc będzie funkcya f (x), gdzie znowu x zmienia się o przyrost h, a funkcya nabywa wartości f $(x+h)$ i weźmy początkową wartość funkcyi f $(x+a)$, gdzie a jest dowolne zupełnie; funkcya f $(x+h)$ da się rozwinąć na szereg według potęg rosnących z ilości dowolnéj $h^{-1}-a^{-1}$ postaci:

$$\mathrm{f}\,(x+h)=\mathrm{A}+\mathrm{B}\,(h^{-1}-a^{-1})+\mathrm{C}\,(h^{-1}-a^{-1})^2+\ldots \qquad (c)$$

gdzie A, B, C . . . są spółczynniki zależne od postaci funkcyi danéj.

Aby dowieść możliwości téj drugiéj postaci rozwinięcia, dosyć jest dowieść, że szereg ten nie może zawierać ani potęg odjemnych ani ułamkowych, i że dla wartości h bardzo wielkich może zawsze być zbieżnym, a rozbieżnym dla wartości h bardzo małych, zupełnie przeciwnie jak postać (a) wzoru głównego (§ 124)

Założmy naprzód, że $h = a$, wszystkie wyrazy nikną i musi być:

$$A = f(x+a)$$

spółczynnik więc pierwszy jest to sama funkcya, gdy w niéj położymy a za h.

Wzór ten nie może miéć potęg ułamkowych, albowiem każda potęga ułamkowa ma tyle wartości różnych, ile jedności w mianowniku ułamku; a że pierwszy wyraz rozwinięcia jest to taż sama funkcya, gdy za h położymy ilość dowolną a, przeto ten wyraz musi zachować te wszystkie wartości, a kombinując je z wartościami różnemi wyrazu mającego potęgę ułamkową, szereg dawałby wartości różnych daleko więcéj, niż posiada sama funkcya, co być nie może, a zatém nie może miéć potęg ułamkowych.

Nie może miéć potęg odjemnych, albowiem czyniąc $h = a$, wyrazy niektóre stawałyby się nieskończone, i szereg miałby wartość nieskończoną, gdy pierwsza strona jest dowolną.

Zatém nie mogąc zawierać potęg ułamkowych ani odjemnych, musi miéć postać (c), ponieważ ta forma jest możliwą; przeto dla znalezienia spółczynników biorąc pochodne co do h^{-1} czyli $\frac{1}{h}$, to jest co do odwrotności z h, otrzymamy:

$$\frac{d\,f(x+h)}{d\left(\frac{1}{h}\right)} = B + 2\,C\,(h^{-1} - a^{-1}) + \ldots$$

$$\frac{d^2\,f(x+h)}{d\left(\frac{1}{h}\right)^2} = 2\,!\,C + \ldots$$

. . . .

$$\frac{d^n\,f(x+h)}{d\left(\frac{1}{h}\right)^n} = n\,!\,N + \ldots$$

a czyniąc $h = a$ wszystkie wyrazy nikną i otrzymamy:

$$A = f(x+a)$$

$$B = \left\{ \frac{d\,\mathrm{f}\,(x+h)}{d\left(\frac{1}{h}\right)^2} \right\}_a$$

$$C = \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2\,\mathrm{f}\,(x+h)}{d\left(\frac{1}{h}\right)^2} \right\}_a$$

. . . .

$$N = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x+h)}{d\left(\frac{1}{h}\right)^n} \right\}_a$$

Oznaczając pochodne brane co do odwrotności przez znak u dołu, tak że:

$$\frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x)}{d\left(\frac{1}{x}\right)^n} = \mathrm{f}_n\,(x)$$

i uważając że:

$$\frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x+h)}{d\left(\frac{1}{h}\right)^n} = \left\{ \frac{d^n\,\mathrm{f}\,(x)}{d\left(\frac{1}{x}\right)^n} \right\}_{x+h} = \mathrm{f}_n\,(x+h)$$

przeto będzie:

$$N = \frac{1}{n!}\,\mathrm{f}_n\,(x+a)$$

i podstawiając te wartości otrzymamy wzór nowy:

$$\mathrm{f}(x+h) = \mathrm{f}(x+a) + \frac{(h^{-1}-a^{-1})}{1}\mathrm{f}_1(x+a) + \frac{(h^{-1}-a^{-1})^2}{2!}\mathrm{f}_2(x+a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(h^{-1}-a^{-1})^n}{n!}\,\mathrm{f}_n\,(x+a) \tag{13}$$

Taki jest szereg dopełniający (1), pozostaje jeszcze oznaczyć jego równanie zbieżności.

152. Równanie zbieżności tego szeregu, oznaczymy na zasadzie prawa § 122 o zbieżności szeregów z wyrazu n go:

Jakoż:

$$u_n = \frac{(h^{-1} - a^{-1})^n}{n!}\,\mathrm{f}_n\,(x+a)$$

a że stosunek wyrazów, aby szeregi były zbieżne musi być równy ± 1 dla $n = \infty$; przeto będzie:

$$\left\{ \frac{n\,\mathrm{f}_{n-1}(x+a)}{(h^{-1} - a^{-1})\,\mathrm{f}_n(x+a)} \right\}_\infty = \pm 1$$

gdzie pierwsza strona powinna być większa ciągle od ± 1, gdy szereg ma być zbieżnym.

A ztąd:

$$h^{-1} = a^{-1} \pm \left\{ \frac{n\,\mathrm{f}_{n-1}(x+a)}{\mathrm{f}_n(x+a)} \right\}_\infty$$

i pierwsza strona teraz według uwagi § 17, musi być mniejsza od strony drugiéj, czyli zawarta między granicami temi w przechodzie przez wartość a^{-1}

A że drugi wyraz drugiéj strony jest stosunkiem pochodnych branych co do $\frac{1}{x}$ przeto ściśle równy granicznéj funkcyi f wziętéj co do odwrotności z x dla $x + a$, i równanie zbieżności będzie:

$$h^{-1} = a^{-1} \pm \mathrm{G\,f}(x) \left(\frac{1}{x}\right)_{x+a}$$

a odwracając to wyrażenie i pamiętając na uwagę § 17, otrzymamy jeszcze:

$$h = \frac{a}{1 \pm a\,\mathrm{G\,f}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{x+a}} \tag{13'}$$

gdzie h jest teraz większe od tych granic, a zatém zawarte między temi granicami w przechodzie przez nieskończoność, to jest szereg powyższy jest zbieżnym dla wszystkich wartości od:

$$\frac{a}{1 + a\,\mathrm{G\,f}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{x+a}} \text{ do } + \infty$$

$$\frac{a}{1 - a\,\mathrm{G\,f}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{x+a}} \text{ do } - \infty$$

i jest zawsze zbieżnym dla $h = \pm \infty$

Zatém szereg ten ma granice różne, i odwrotne granicom szeregu głównego (§ 124) i można go nazwać dla tego *szeregiem dopełniającym*.

Jego rozciąg zbieżności wyrazi się przez:

$$g = \frac{2\,a^2\,G\,f\,(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{x+a}}{1 - a^2\left(G\,f\,(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{x+a}\right)^2}$$

A że granice teraz zawierają między sobą nieskończoność, zatém gdy granice stają się obszerniejsze, rozciąg ten musi być coraz mniejszym, zupełnie odwrotnie jak dla szeregu głównego.

153. Wiemy, że graniczna albo jest nieskończoną, albo stosunkiem funkcyi w skład funkcyi danéj wchodzącéj do jéj pochodnéj.

1. Gdy więc graniczna jest nieskończoną, rozciąg jest ściśle zero, zatém granice stają się także zero, i szereg jest zbieżny dla wszystkich wartości zmiennéj od zera do $\pm\infty$

2. Gdy graniczna jest stosunkiem funkcyi do jéj pochodnéj, oznaczając ją przez $\varphi\,(x)$ będzie:

$$G\,f\,(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{x+a} = \frac{\varphi\,(x+a)}{\varphi'(x+a)}$$

a ztąd:

$$h = \frac{a\,\varphi'}{\varphi' \pm a\,\varphi}$$

$$g = \frac{2\,a^2\,\varphi\,\varphi'}{\varphi'^2 - a^2\varphi^2}$$

to jest, że granice zbieżności znowu wyrażają się tylko przez pewną funkcyą i jéj pochodną, a nie zależą od pochodnych dalszych.

154. Jakiekolwiek będą wartości x i h, a będzie dowolne, lecz zawarte w granicach objętych równaniem zbieżności. Między temi to granicami można zawsze zmieniać a a ztąd szukać takich wartości dla a, któreby czyniły rozciąg po za granicami zbieżności minimum, gdyż wtedy rozciągłość zbieżności będzie maximum. Zatém:

1. Gdy graniczna jest nieskończoną, rozciąg jest zero i szereg jest zbieżny w całéj rozciągłości od $+\infty$ do $-\infty$.

2. Gdy graniczna jest stosunkiem pewnéj funkcyi do swéj pochodnéj, to maximum znajdziemy, równając do zera pochodną co do a rozciągu i otrzymamy równanie:

$$a\,(\varphi_a'^{1} - \varphi_a\,\varphi_a'')\,(\varphi_a'^{2} + a^2\varphi_a^{2}) + 2\,\varphi_a\,\varphi_a'^{3} = 0$$

które da wartość dla dowolnéj a, dającą minimum rozciągu czyli najobszerniejsze granice.

155. Nie wchodząc w dalszy rozbiór tego wzoru, który zupełnie byłby podobny jak dla szeregu (1) (§ 131—135) przejdziemy do szczególnych jego postaci godnych uwagi w zastosowaniach. Jakoż we wzorze powyższym nie można kłaść ani a ani h równe zero, gdyż wyrazy jego stają się nieskończone, lecz przeciwnie trzeba kłaść równe nieskończoności; jakoż kładąc $a = \infty$ otrzymamy:

$$\mathrm{f}(x+h) = \mathrm{f}(\infty) + \frac{h^{-1}}{1}\,\mathrm{f}_1(\infty) + \frac{h^{-2}}{2!}\,\mathrm{f}_2(\infty) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{-n}}{n!}\,\mathrm{f}_n(\infty) + \ldots \qquad (14)$$

$$h = \pm \frac{1}{\mathrm{G\,f}(x)\left(\dfrac{1}{x}\right)_\infty}$$

Wzór rozwinięcia funkcyi, według potęg ubywających przyrostu dla wartości h zawartych między granicami wyrażonemi przez odwrotności z wartości funkcyi granicznéj wziętéj co do $\frac{1}{x}$ i dla $x = \infty$

Wzór ten nie służy dla funkcyi, których graniczna co do $\frac{1}{x}$ staje się zero, gdy $x = \infty$, dla funkcyi zaś dla których graniczna jest nieskończoną, on jest zbieżny dla wszystkich wartości h jak być powinno.

156. Porównywając ten wzór ze wzoremTaylora (7. § 141), widzimy, że granice dla h zupełnie są różne; przeto może zdarzyć się, że te granice zachodzą na siebie, w tym więc przypadku dla wartości h zawartych między temi granicami, funkcya da się rozwinąć na szereg zbieżny według potęg rosnących i ubywających h. Jakoż w téj rozciągłości oba szeregi są zbieżne, i dodając je otrzymamy wzór:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{f}(x+h) = \frac{1}{2}\left\{ \sum \frac{h^n}{n!} \mathrm{f}^n(x) + \sum \frac{h^{-n}}{n!} \mathrm{f}_n(\infty) \right\} \\ h = \pm \, \mathrm{G}\,\mathrm{f}(x)(x) \quad \text{do} \quad h = \pm \frac{1}{\mathrm{Gf}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_\infty} \end{array}\right\} \quad (15)$$

dający szeregi zbieżne dla wartości h zawartych między granicami obu szeregów, lecz rozbieżny dla wartości blizkich zera i nieskończoności.

157. Powyższe wzory odejmując, używając znakowania Sarrusa dla oznaczenia różnicy wartości funkcyi dla dwóch wartości zmiennéj, i kładąc $h = a$, otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l} \Big|_x^\infty \mathrm{f}(x) = \sum \frac{a^n}{n!} \mathrm{f}^n(x) - \sum \frac{a^{-n}}{n!} \mathrm{f}_n(\infty) \\ a = \pm \, \mathrm{G}\,\mathrm{f}(x)(x) \text{ do } a = \pm \frac{1}{\mathrm{Gf}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_\infty} \end{array}\right\} \quad (16)$$

Wzór dający rozwinięcie funkcyi, lub całek oznaczonych według potęg rosnących i ubywających ilości dowolnéj a.

158. We wzorze (14) kładąc zamiast $+\infty$, $-\infty$ i odejmując, otrzymamy jeszcze zamieniając h na a.

$$\left.\begin{array}{l} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}(x) = \sum \frac{a^{-n}}{n!} \Big(\mathrm{f}_n(-\infty) - \mathrm{f}_n(\infty)\Big) \\ h = \pm \frac{1}{\mathrm{Gf}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{-\infty}} \quad \text{do} \quad h = \pm \frac{1}{\mathrm{Gf}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_\infty} \end{array}\right\} \quad (17)$$

Wyrażenie godne uwagi dające rozwinięcie różnicy dwóch wartości funkcyi dla $x = \pm \infty$ według potęg odjemnych ilości dowolnéj a dla wszystkich funkcyi, dla których żadna z granicznych nie staje się zero dla $x = \pm \infty$.

Wzór ten może bardzo dobrze służyć do oznaczenia wartości całek oznaczonych w granicach od $+\infty$ do $-\infty$.

159. Jeżeli we wzorze (13) uczynimy $h = \infty$ a a zamienimy na $-a$ będzie:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{f}(\infty) &= \mathrm{f}(x-a) + \frac{a^{-1}}{1}\mathrm{f}_1(x-a) + \frac{a^{-2}}{2!}\mathrm{f}_2(x-a) + \ldots \\ &\ldots + \frac{a^{-n}}{n!}\mathrm{f}_n(x-a) \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

$$a = \pm \frac{1}{\mathrm{G\,f}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{x-a}}$$

jest to rozwinięcie według potęg odjemnych ilości dowolnéj a. A porównywając go z podobnym wzorem (5), gdy granice ich będą zachodzić na siebie, to dla téj części funkcyi można te wyrażenia odjąć od siebie i będzie:

$$\int_x^\infty \mathrm{f}(x) = \sum \frac{a^{-n}\,\mathrm{f}_n(x-a)}{n!} - \sum \frac{a^n\ \mathrm{f}^n\ (x-a)}{n!}$$

$$a = \pm\, \mathrm{G\,f}(x)(x)_{x-a} \quad \text{do} \quad a = \pm \frac{1}{\mathrm{G\,f}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{x-a}}$$

a czyniąc $x = a$ otrzymamy jeszcze wzór godny uwagi:

$$\left.\begin{aligned} \int_x^\infty \mathrm{f}(x) &= \sum \frac{x^{-n}\mathrm{f}_n(0)}{n!} - \sum \frac{x^n\ \mathrm{f}^n\ (0)}{n!} \\ x = \pm\, \mathrm{G\,f}(x)(x)_0 \quad &\text{do} \quad x = \pm \frac{1}{\mathrm{G\,f}(x)\left(\frac{1}{x}\right)_0} \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

mogący służyć do oznaczenia jak powyższy całek oznaczonych w granicach od x do ∞

160. A gdy położymy jeszcze $x = 0$, i zamienimy a na $-a$ otrzymamy:

$$f(\infty) = f(a) - \frac{a^{-1}}{1} f_1(a) + \frac{a^{-2}}{2!} f_2(a) - \dots$$

$$a = \pm \frac{1}{G f(x) \left(\frac{1}{x}\right)_a}$$

$$f(0) = f(a) - \frac{a}{1} f'(a) + \frac{a^2}{2!} f''(a) - \dots$$

$$a = \pm G f(x)(x)_a$$

i gdy granice tych szeregów zachodzą na siebie, część funkcyi w tych granicach da się rozwinąć na oba szeregi zarówno, i odejmując je otrzymamy:

$$\int_0^\infty f(x) = \sum (-1)^n \frac{a^{-n} f_n(a)}{n!} - \sum \frac{(-1)^n a^n f^n(a)}{n!}$$

$$a = \pm G f(x)(x)_a \quad \text{do} \quad a \pm \frac{1}{Gf(x)\left(\frac{1}{x}\right)_a} \tag{20}$$

Wzór dający znowu rozwinięcie różnicy wartości funkcyi dla wartości x, zero i nieskończonéj, według potęg rosnących i ubywających ilości dowolnéj, a, i dający się dobrze stosować do oznaczenia całek oznaczonych w granicach 0 i ∞

161. Gdy we wzorze (13) położymy $x = 0$, a h zamienimy na x będzie:

$$f(x) = f(\infty) + \frac{x^{-1}}{1} f_1(\infty) + \frac{x^{-2}}{2!} f_2(\infty) \dots$$

$$\dots + \frac{x^{-n}}{n!} f_n(\infty) \tag{21}$$

$$x = \pm \frac{1}{Gf(x)\left(\frac{1}{x}\right)_\infty}$$

Wzór podobny do szeregu Maclaurina, a gdy ich granice zachodzą na siebie, dodając otrzymamy:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{\sum \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \sum \frac{x^{-n}}{n!} f_n(\infty)\right\}$$

$$x = \pm G f(x)(x)_0 \quad \text{do} \quad x = \pm \frac{1}{Gf(x)\left(\frac{1}{x}\right)_\infty} \tag{22}$$

Zatém funkcya daje się rozwinąć według potęg zmiennéj, gdy na to granice pozwalają, trojako według potęg dodatnych, odjemnych, i obu razem.

162. Gdy te szeregi odejmiemy od siebie, otrzymamy jeszcze:

$$\Big|_0^\infty f(x) = \sum \frac{x^n}{n!} f^n(0) - \sum \frac{x^{-n}}{n!} f_n(\infty)$$

$$x = \pm G f(x)(x)_0 \quad \text{do} \quad x = \pm \frac{1}{Gf(x)\left(\frac{1}{x}\right)_\infty} \tag{23}$$

wzór dla rozwinięcia wartości funkcyi, wziętéj w granicach 0 i ∞. A z wzoru (21) zmieniając ∞ na $-\infty$ i odejmując od tegoż, będzie:

$$\Big|_{-\infty}^\infty f(x) = \sum \frac{x^{-n}}{n!}\left\{f(-\infty) - f(\infty)\right\}$$

$$x = \pm \frac{1}{Gf(x)\left(\frac{1}{x}\right)_\infty} \quad \text{do} \quad x = \pm \frac{1}{Gf(x)\left(\frac{1}{x}\right)_{-\infty}} \tag{24}$$

dający takąż wartość funkcyi, wziętéj w granicach $\pm\infty$

Wzory powyższe (16, 20 i 23) napisane wsposób:

$$\sum \frac{x^n}{n!} f^n(0) = \sum \frac{x^{-n}}{n!} f_n(\infty)$$

$$x = \pm G f(x)(x)_0 \quad \text{do} \quad x = \pm \frac{1}{Gf(x)\left(\frac{1}{x}\right)_\infty} \tag{25}$$

wyrażają własność funkcyi, zawierającą następujące twierdzenie:

Summa potęg dodatnych zmiennéj funkcyi, rozmnożonych przez odpowiednie spółczynniki z pochodnych téj funkcyi dla wartości $x = 0$, jest równa summie potęg odjemnych téjże zmiennéj, pomnożonych przez spółczynniki z pochodnych, branych co do odwrotności ze zmiennéj w granicach téj zmiennéj, wyznaczonych przez wartości funkcyi granicznych, jednéj wziętéj co do téj zmiennéj, dla jéj wartości zero, drugiéj wziętéj co do odwrotności zmiennéj, dla jéj wartości nieskończonéj.

Można wyprowadzić wiele podobnych wzorów, wprowadzając warunki nowe między ilościami x, h i a, które dla łatwości ich otrzymania, opuszczamy.

163. Z tego cośmy tu dowiedli wypada, że funkcye dają się rozwinąć na szeregi w trojaki sposób, to jest według potęg dodatnych lub odjemnych, albo téż dodatnych i odjemnych razem, ilości porządkującéj (t. j. przyrostu zmiennéj lub téż saméj zmiennéj,) pod warunkiem zawsze, że ilość porządkująca sprawdza równanie zbieżności, to jest nie przechodzi granic tém równaniem wyznaczonych. Z pomiędzy tego rodzaju wzorów, znany jest tylko wzór kapitana Laurent, który jest uogólnieniem wzoru Cauchego, dającego rozwinięcie wyrażone przez całki oznaczone, postaci:

$$\mathrm{f}\,(z+h) = \sum \frac{h^n}{2\,\pi\, r^n} \int_0^{2\pi} \mathrm{f}\,(z+r\, e^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta$$

gdzie r jest moduł zmiennéj urojonéj, mniejszy od modułu granicznego R, w granicach którego funkcya f (z) daje się rozwinąć na szereg zbieżny, (czyli jest synektyczną); θ argument ilości urojonéj.

Porównywając ten szereg z szeregiem Taylora, mamy:

$$\mathrm{f}^n\,(z) = \frac{n!}{2\,\pi\, r^n} \int_0^{2\pi} \mathrm{f}\,(z+re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta$$

a biorąc stosunek funkcyi pochodnych, otrzymamy:

$$\frac{n\,\mathrm{f}^{n-1}}{\mathrm{f}^n} = r\,\frac{\int_0^{2\pi} \mathrm{f}\,(z+re^{\theta i})\, e^{-(n-1)\theta i}\, d\theta}{\int_0^{2\pi} \mathrm{f}\,(z+re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta}$$

przechodząc do granicy dla $n = \infty$, pierwsza strona jest graniczną, a rozwijając $\mathrm{f}(z + re^{\theta i})$ według potęg ilości $re^{\theta i}$ (§ 149) i całkując otrzymamy:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{f}(z+re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta = \frac{2\,\pi\, r^n\, \mathrm{f}^n(z)}{n!}$$

zatém druga strona jest identycznie równa pierwszéj, to jest że wzór Cauchego, ma za równanie graniczne:

$$h = \pm\, \mathrm{G}\, \mathrm{f}(z)\,(z)$$

bez względu jakie jest r, gdyż ta ilość rzeczywiście niknie z szeregu, tak że ten szereg nic więcéj nie wyraża, jak szereg Taylora, tylko w zawikłanéj formie przedstawiony.

164. Laurent uogólnił szereg Cauchego, zastosował do przypadku, gdy funkcya daje się rozwinąć według potęg odjemnych i dodatnych razem, i podał w postaci:

$$\mathrm{f}(z) = \sum \frac{z^n}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \mathrm{f}(re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta + \sum \frac{r^n}{2\pi z^n} \int_0^{2\pi} \mathrm{f}(re^{\theta i})\, e^{n\theta i}\, d\theta$$

gdzie r jest wzięte między dwoma modułami R i R′, między któremi szereg zostaje zbieżnym.

Rozwijając $\mathrm{f}(re^{\theta i})$, będące w pierwszéj całce, przez wzór Maclaurina według potęg z $re^{\theta i}$; a też samą funkcyą, będącą pod drugą całką, przez wzór (21), otrzymamy identycznie szereg (22). Wzór więc ten równie jak powyższy, z którego powstał, mają te niedogodności, iż w zawikłanéj formie przedstawiają rozwinięcie i nie dają granic właściwych, gdyż ilość r do nich wprowadzona nie ma, jak widzieliśmy, żadnego związku z granicami szeregu, które są od niéj niezależne.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

PRZYKŁADY OZNACZENIA GRANIC ZBIEŻNOŚCI I ROZWIJALNOŚCI FUNKCYI O JEDNÉJ ZMIENNÉJ.

165. Wiemy, że wszystkie powyższe wzory rozwijania funkcyi na szeregi, łatwo stosują się do wszelkiego rodzaju funkcyi, o jednéj zmiennéj niezależnéj. Z drugiéj strony umiemy znaleźć graniczną każdéj z tych funkcyi, a zatém otrzymamy zawsze granice zbieżności szeregu, i rozwijalności funkcyi na szereg. W tym więc rozdziale zajmiemy się tylko oznaczeniem granic rozwijalności funkcyi na szereg, które, jak wiemy zależąc od ciągłości funkcyi, muszą się ściśle łączyć z własnościami saméjże funkcyi; dla tego oznaczenie granic ma swe zastosowanie w roztrząsaniu funkcyi pod względem jéj własności, i w wielu razach może rozstrzygnąć zachodzące tu wątpliwości.

Niech będzie dana funkcya:

$$y = \sqrt{2\,p\,x + q^2}$$

która, uważając x i y za spółrzędne, wyraża parabolę (fig. 2), mającą początek w punkcie A na osi x, którego odcięta $\mathrm{OA} = \frac{q^2}{2p}$ a rzędna w początku $\mathrm{OB} = q$; parametr téj paraboli jest p, i znajdziemy go, od punktu A promieniem OB odcinając na OB punkt b i prowadząc przez punkta A i b koło mające środek na osi x, to promień tego koła jest parametrem, a $\mathrm{AA'} = 2p$. Rzędna paraboli y dla początkowéj wartości odciętéj $x = a$ daje się rozwinąć na szereg (4. § 138) według potęg rosnących z $x - a$ między granicami:

$$x = a \pm \mathrm{G}\, y\, (x)_a$$

aże:

$$\mathrm{G}\, y\, (x) = \frac{2\, p\, x + q^2}{2\, p}$$

zatém granice te są:

$$x = a \pm \frac{2\, p\, a + q^2}{2\, p}$$

czyli od:

$$x = -\frac{q^2}{2p} \quad \text{do} \quad x = 2\, a + \frac{q^2}{2p}$$

a rozciąg zbieżności jest:

$$\mathrm{g} = 2\, a + \frac{q^2}{p}$$

Granice rozwijalności funkcyi otrzymamy z warunków:

$$\mathrm{g} = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{g} = \infty$$

czyli:

$$a = -\frac{q^2}{2p} \quad \text{i} \quad a = \infty$$

Z tego widzimy, że ponieważ granica niższa jest niezależna od ilości dowolnéj a, przeto ta funkcya czyli krzywa daje się stale rozwinąć na szereg zbieżny, zaczynając od wierzchołka paraboli t. j. od punktu A; biorąc te granice dla x za rzędne, a a za odciętą, to pierwsza daje linią prostą MN równoległą od osi x w odległości AM $= -\dfrac{q^2}{2p}$ poprowadzoną, druga granica daje linią prostą MN′ przechodzącą przez punkt tenże M i przez środek linii AO. Części rzędnych QQ′ zawarte między temi dwiema liniami dają rozciąg zbieżności, a przenosząc te rzędne na oś x tak, aby punkt Q padł w A, punkt przecięcia R rzędnéj z osią x padnie zawsze w początek spółrzędnych, a punkt Q′ odetnie na osi x odległość OR′ i prowadząc przez punkt R′ równoległą od osi y, linia ta odetnie części krzywéj ABC i AB′C′ dające się rozwinąć na szereg zbieżny, według tego jak bierzemy wartość y dodatną lub odjemną; części za linią CC′ położone aż do nieskończoności, nie mogą rozwinąć się na szereg według potęg rosnących. Gdy teraz weźmiemy jedną wartość dodatną y pod uwagę, to szereg wyraża tylko część krzywéj AB′C′ i gdy a zmniejsza się aż do zera, rozciąg zmniejsza się, i dla $a = 0$ staje się równy bb' i obie granice są równe, a część krzywéj AB′C′ będzie objęta szeregiem; gdy a staje się odjemne, rozciąg się jeszcze zmniejsza i dla $a = -\frac{q^2}{2p}$ staje się zero; jest to punkt krytyczny, szereg niknie i nie wyraża krzywéj, a zatém wierzchołek paraboli należy do punktów przerywających ciągłość i rozwijalność funkcyi, i tak téż rzeczywiście jest, albowiem gdy a daléj zmniejsza się, rzędna staje się urojoną, i szereg jeszcze wyraża parabolę urojoną stykającą się z daną wierzchołkiem.

Gdy a znowu rośnie dodatnie, granica druga rozszerza się ciągle i dla $a = \infty$ szereg wyraża całą część AB′C′ do nieskończoności krzywéj, a zatém granice zbieżności szeregu, są zależne od a i zmieniają się; lecz granice rozwijalności funkcyi są niezależne od a, i oznaczone tu dwoma punktami, wierzchołkiem paraboli i ostatnim jéj punktem w nieskończoności, które to punkta rozwiązują ciągłość funkcyi, pierwszy przez urojoność, drugi przez nieskończoność. Gdy więc a zostaje dowolném, widzimy, że zmieniając dowolnie a, cała parabola daje się wyrazić przez szereg zbieżny.

166. Jeżeli chcemy otrzymać szereg, dosyć uważać, że:

$$y' = \frac{p}{y}$$

$$y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^n\,(2n-3)!\,\frac{p^n}{y^{2n-1}}$$

a ztąd szereg żądany będzie:

$$y = y_a + \sum_1 (-1)^n\,\frac{2n-3}{n}\,!\,\frac{p^n\,(x-a)^n}{y_a^{2n-1}}$$

gdzie $y_a = (2pa+q)^{\frac{1}{2}}$, a granice jak wyżéj.

Gdy $a = 0$ otrzymamy:

$$y = q^{\frac{1}{2}} + \sum (-1)^n \frac{2n-3}{n} ! \frac{p^n x^n}{q^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$x = \pm \frac{q^2}{2p}$$

zatém część tylko funkcyi zawarta między wierzchołkiem paraboli i pionową w odległości $x = \frac{q^2}{2p}$ poprowadzoną, daje się rozwinąć na szereg zbieżny, według potęg dodatnych z x, a reszta krzywéj nie może być wyrażoną przez powyższy szereg. W tym więc razie potrzeba rozwinąć na szereg według potęg odjemnych, jakoż można napisać:

$$y = \sqrt{x} \cdot \sqrt{2p + q^2 \left(\frac{1}{x}\right)}$$

a uważając $\sqrt{x}$ za stałe i rozwijając tylko drugi czynnik, granice będą teraz:

$$x^{-1} = a^{-1} \pm \mathrm{G}\, y \left(\frac{1}{x}\right)_a$$

aże:

$$\mathrm{G}\, y \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2p + q^2 \frac{1}{x}}{q^2}$$

przeto granice rozwinięcia co do odwrotności z x, gdy $a = \infty$, będą:

$$x^{-1} = \pm \frac{2p}{q^2}$$

i szereg będzie zbieżnym dla wartości x zawartych między $\frac{q^2}{2p}$ i $+\infty$, i między $-\frac{q^2}{2p}$ i $-\infty$; a zatém w granicach właśnie nieobjętych granicami szeregu pierwszego, i wyrażać będzie ściśle drugie części paraboli aż do nieskończoności, i część urojoną za wierzchołkiem będącą.

167. Weźmy jeszcze równanie ellipsy: (fig. 3)

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$$

czyli:

$$y=\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

równanie to daje się rozwinąć na szereg zbieżny, uszykowany według potęg rosnących ilości porządkującéj $x-\varepsilon$, dla początkowéj wartości $x=\varepsilon$ między granicami, które otrzymamy, wiedząc iż:

$$\mathrm{G}\,(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,(x)=-\frac{a^2-x^2}{2x}$$

zatém:

$$x=\varepsilon\pm\frac{a^2-\varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

czyli:

$$x_2=\frac{\varepsilon^2+a^2}{2\varepsilon},\qquad x_1=\frac{3\varepsilon^2-a^2}{2\varepsilon},$$

a rozciąg rozwijalności jest:

$$\mathrm{g}=\frac{a^2-\varepsilon^2}{\varepsilon}=\frac{a^2}{\varepsilon}-\varepsilon$$

granice i rozciąg są drugiego stopnia względem ε i wyrażają hyperbolę. Pierwsza granica x_2 daje dwie gałęzie QM i Q′M′ assymptotyczne do osi y i przechodzące przez punkta M i M′, dla których OA=AM, gdyż kładąc $\varepsilon=a$, $x_2=a$; druga granica daje podobnie dwie gałęzie drugiéj hyperboli NM i N′M′, przechodzące także przez punkta M i M′ i assymptotyczne do osi y; a rozciąg g dają cięciwy zawarte między temi krzywemi równoległe od osi y. Prowadząc liniją OM, ona dzieli kąt między osiami na dwie równe części, a granice x_1 i x_2, między któremi rozwinięcie ma miejsce, są zawsze jedna mniejsza od cd druga większa od cd, a przenosząc cba na oś odciętych tak, aby punkt c padł zawsze w O, to d padnie w c, a granice padną, jedna przed A, druga za punkt A i obejmą część krzywéj rzeczywistą od A ku O i część urojoną od A ku x dodatnemu. Gdy $\varepsilon=+a$ mamy punkta M i M′, rozciąg jest zero, a rozwinięcie nie służy, czyli że krzywa nie daje się rozwinąć na szereg według potęg rosnących zmiennéj. Gdy ε od wartości $+a$ rośnie dodatnie lub odjemnie, rozciąg a' b' rośnie, i obejmie tylko część urojoną po za punktami A i A', albowiem krzywe QM i Q'M są styczne do linii poziomych przez punkta M i M' przechodzących, a granica niższa x_2 zawsze większa od a, gdyż mamy:

$$x_2 - a = \frac{(\varepsilon - a)^2}{2\varepsilon}$$

wyrażenie zawsze dodatne, gdy $\varepsilon > a$ i równe zero, gdy $\varepsilon = a$; więc punkt b' odpowiadający granicy niższéj po położeniu linii $c'b'a'$ na OAc' pada zawsze za punkt A.

Gdy ε ubywa od wartości $\varepsilon = a$, rozciąg b a rośnie, a gdy $\varepsilon = 0$ staje się nieskończonym, i obejmuje część rzeczywistą ellipsy od A ku O i część urojoną od A ku x dodatnemu, tak że gdy $3\varepsilon^2 = a^2$, czyli $\varepsilon = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$, to jest gdy punkt b pada w P, gdzie gałęź NM przecina oś x, granice są $x_2 = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$, $x_1 = 0$ i połowa ellipsy objęta jest szeregiem, a gdy $\varepsilon = \frac{1}{3}a$, granice są: $x_2 = \frac{5}{3}a$, $x_1 = -a$ i cała ellipsa objęta zostaje szeregiem, i część hyperboli urojonéj w odległości $\frac{2}{3}a$ od punktu A. Dopóki więc ilość dowolna nie znika z rozwinięcia, rozwinięcie to wyrażać zawsze może całą ellipsę, i nawet hyperbolę urojoną, a jéj granice wyznaczają się przez hyperbole assymptotyczne do osi y.

Czyniąc rozciag zero lub nieskończony, granice są:

$$\varepsilon = \pm a \qquad \text{dla} \qquad g = 0$$

$$\varepsilon = 0 \text{ i } \varepsilon = \infty \qquad \text{dla} \qquad g = \infty$$

wartości te wyznaczają punkta A,A', B,B' i punkta w nieskończoności, są to granice rozwijalności téj funkcyi i zarazem punkta przerwania ciągłości ellipsy, pierwsze cztery przez urojoność, a punkta w nieskończoności należą do hyperboli urojonéj.

168. Równanie powyższe ellipsy, można jeszcze rozwinąć według potęg rosnących ilości x^2, gdyż ta funkcya jest parzystą, jakoż biorąc graniczną co do x^2 będzie:

$$G\, y\, (x^2) = -(a^2 - x^2)$$

ztąd:

$$x^2 = \varepsilon^2 \pm (a^2 - \varepsilon^2)$$

czyli:

$$x_1^2 = a^2 \qquad x_2^2 = 2\,\varepsilon^2 - a^2$$

$$x_1 = \pm\, a \qquad x_2 = \pm \sqrt{2\,\varepsilon^2 - a^2}$$

a rozciąg:

$$g = 2\,(a^2 - \varepsilon^2)$$

W tém rozwinięciu granica jedna x_1 jest stałą, i równa $\pm\, a$, daje więc dwie linie proste DD' i EE' (fig. 4) równoległe od osi x w odległości a poprowadzone.

Druga granica wyraża hyperbolę DCE i D'C'E' przechodzącą przez punkta D,D' i E,E', których współrzędne są (a, a), i mającą wierzchołki w odległości OC $= \frac{1}{2}\, a \sqrt{2}$; rozciąg wyraża się znowu przez części rzędnych, zawarte między liniami prostemi DD' i EE' i hyperbolą; i tak gdy $\varepsilon =$ Oc granice są cb i ca a rozciąg ba.

Gdy $\varepsilon = \pm\, a$ rozciąg staje się zero, obie granice mają też samą wartość a i dla punktów początkowych A i A' rozwinięcie miejsca nie ma; jakoż w tych punktach krzywa doświadcza przerwania ciągłości przez urojoność. Gdy ε, poczynając od $\varepsilon = \pm\, a$, rośnie, granice są rzeczywiste i zawarte między liniami DD i CD lub C'D', lub między EE' i krzywą CE lub C'E' i rosną razem z ε; aże granica niższa zawsze jest stała a, przeto rozciąg zbieżności obejmie krzywą urojoną od punktu A ku x dodatném lub od A' ku x odjemném, a zatém gdy $\varepsilon > a$ rozwinięcie nie wyraża ellipsy. Gdy zaś ε zaczynając od $\varepsilon = \pm\, a$ ubywa, rozciąg znowu rośnie, i granice zbieżności obejmują część ellipsy między punktami A,A' i początkiem współrzędnych, a nie obejmują części urojonych, gdyż granica wyższa przypada stale na punkt A.

Gdy $\varepsilon = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$, granice stają się:

$$x_1 = \pm a, \qquad x_2 = 0$$

a rozciąg g $= a$ i cała ellipsa objęta jest szeregiem. Gdy ε ma wartości mniejsze od $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$, granica druga staje się urojoną, i zawsze część krzywéj od 0 do a daje się wyrazić przez toż rozwinięcie.

Wartości dla ε, które dają rozciąg zero lub nieskończony, są: $\varepsilon = \pm a$ dają g $= 0$, są to punkta A i A′ wierzchołki osi wielkiéj ellipsy i granice rozwijalności funkcyi; $\varepsilon = \pm \infty$ dają g $= \infty$, są to punkta należące do hyperboli urojonéj.

Ztąd następne można wyprowadzić twierdzenie:

Rozwijając na szereg rzędną ellipsy, odniesionej do środka i osi, według potęg parzystych rosnących odciętéj, szereg ztąd otrzymany będzie zbieżnym, dla wszystkich wartości odciętéj x ellipsy, gdy rozwinięcie dopełnione jest według początkowéj wartości x, zawartéj między 0 i $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$; to jest według wartości mniejszéj od $0{,}7071a$ czyli $^7/_{10}$ osi wielkiéj ellipsy.

169. Weźmy jeszcze równanie hyperboli (fig. 5).

$$y = \frac{a}{m\,x + n}$$

Granice zbieżności szeregu, na który rozwinie się ta funkcya, znajdziemy uważając że:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \frac{m\,x + n}{m}$$

zatém:

$$x = a \pm \frac{m\,a + n}{m}$$

czyli:

$$x_2 = \frac{2\,m\,a + n}{m}, \qquad x_1 = -\frac{n}{m}$$

$$\mathrm{g} = 2\,\frac{m\,a + n}{m}$$

Granica niższa x_1 jest stałą i niezależną od a, zatém biorąc a za odciętą a x_1 za rzędną, x_1 będzie wyznaczone przez linią prostą DM, równoległą od osi x, w odległości CD $= -\frac{n}{m}$ poprowadzoną. Druga granica wyznacza się także przez linią prostą DM', przechodzącą przez punkt D i w odległości $Oa' = Oa$, przecinającą oś rzędnych, rozciąg wyraża się przez części rzędnych, zawartą między temi liniami. Zatém część krzywéj zawarta między assymptotą LL', i punktem oznaczonym w odległości równéj rozciągowi QQ' wziętemu na osi odciętych od punktu C ku A, będzie objętą szeregiem zbieżnym.

Gdy $a = 0$ granice są:

$$x_2 = \frac{n}{m}, \qquad x = -\frac{n}{m}$$

i część tylko gałęzi BA, mianowicie część zawarta między assymptotą LL' i rzędną QQ', poprowadzoną w odległości OP $=$ OC, da się wyrazić przez szereg zbieżny, uszykowany według potęg rosnących zmiennéj.

Granice rozwijalności funkcyi są:

$$a = -\frac{n}{m} \quad \text{i} \quad a = \infty$$

które dają rozciąg zero i nieskończony, i odpowiadają przerwaniu ciągłości w obu razach przez nieskończoność.

170. Niech będzie równanie:

$$y = \frac{1 + x - x^2}{1 + x - x^3}$$

które mamy rozwinąć według potęg rosnących zmiennéj x

Granice tego rozwinięcia oznaczymy pamiętając że:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \frac{1 + x - x^3}{1 - 3\,x^2}$$

zatém:

$$x = \pm\, \mathrm{G}\, y\,(x)_0 = \pm \left(\frac{1 + x - x^3}{1 - 3x^2}\right)_0$$

czyli:

$$x = \pm 1.$$

Dochodząc granic za pomocą metody Cauchego, to jest szukając najmniejszego pierwiastku dodatnego równania, które daje moduły pierwiastków równania $x^3 - x - 1 = 0$, musimy rozwiązać równanie stopnia trzeciego.

Jakoż kładąc za x wyrażenie:

$$x = \varrho\,(\text{dos}\ \alpha + i\ \text{wst}\ \alpha)$$

otrzymamy po rozdzieleniu części rzeczywistych od urojonych:

$$1 + \varrho\ \text{dos}\ \alpha - \varrho^3\ \text{dos}\ 3\,\alpha = 0$$
$$\varrho\ \text{wst}\ \alpha - \varrho^3\ \text{wst}\ 3\,\alpha = 0$$

co po wyrugowaniu α prowadzi do równania:

$$\varrho^6 + \varrho^4 - 1 = 0$$

a które daje za granice $x = \pm\ 0{,}869$; a zatém granice nasze są obszerniejsze, i szereg jeszcze wyraża funkcyą dla wartości od $\pm\ 0{,}869$ do $\pm\ 1$ (*); a szukanie samo jest połączone z wielą trudnościami, wymagając elliminacyi między dwoma równaniami, i rozwiązania równania stopni wyższych, jak w obecnym przykładzie.

171. Równanie logarytmiki (fig. 6)

$$y = \log\,(c+x)$$

assymptotycznéj do linii AB, poprowadzonéj w odległości AO $= -c$ i przecinającéj oś rzędnych w odległości OD $= \log\ c$; rozwinie się na szereg uszykowany według potęg rosnących dla wartości początkowéj $x = a$, w granicach wyrażonych przez:

$$x = a \pm (c+a)$$

czyli:

$$x_2 = 2\,a+c, \qquad x_1 = -\,c$$
$$g = 2\,(c+a)$$

granice i rozciąg są pierwszego stopnia względem a, przeto wyrażają się przez linie proste; granica niższa jako niezależna od

(*) Patrz: Catalan „Traité élément. des séries“ pag. 76, § 129.

a daje prostą LM, poprowadzoną w odległości AL $= - c$. Druga daje linią prostą LM', a rozciąg wyraża się przez części rzędnych między temi liniami zawarte. Część więc krzywéj zawarta między assymptotą AB, i rzędną poprowadzoną w odległości od punktu A ku x dodatnemu, równéj rozciągowi QQ' wyrazi się przez szereg zbieżny.

Gdy $a = 0$ granice są:

$$x_2 = c \qquad x_1 = - c$$

i szereg obejmuje tylko część krzywéj zawartéj między assymptotą a rzędną poprowadzoną od początku w odległości $= c$. Dla $a = - c$ rozciąg jest zero, granice równe i szereg nic nie wyraża, i tutaj téż jest przerwanie ciągłości przez nieskończoność. Gdy a będąc większe od c rośnie, coraz większa część krzywéj daje się wyrazić przez szereg, tak że $a = \infty$ jest granicą znowu, dla któréj rozciąg staje się nieskończony, i odpowiada przerwaniu cięgłości funkcyi przez nieskończoność.

172. Równania wykładnicze, lub wstawy i dostawy zmiennéj x:

$$y = e^x\,, \quad y = \text{wst}\,x\,, \quad y = \text{dos}\,x$$

dają się rozwinąć na szereg uszykowany według potęg rosnących zmiennéj, dla początkowéj wartości jakiejkolwiek; gdyż granice ich są:

$$x = a \pm \infty = \pm \infty$$

ponieważ:

$$\text{G}\,y\,(x) = \infty$$

Zatém funkcye te w całéj rozciągłości dają się wyrazić przez szereg zbieżny, czyli że szeregi te stanowią zarazem orzeczenie tych funkcyi.

173. Równanie:

$$y = x\,\text{dot}\,x$$

daje się rozwinąć na szereg zbieżny, dla początkowéj wartości $x = a$ w granicach, które oznaczymy wiedząc że:

$$\text{G}\,y\,(x) = \text{sty}\,x$$

a zatém:

$$x = a \pm \text{sty}\,a$$

a rozciąg:

$$g = 2 \text{ sty } a$$

lecz gdy założymy $a = 0$ lub $a = \pi k$ granice szeregu stają się równe; i rozciąg zero, ztąd wypada to twierdzenie:

Funkcya x dot x nie daje się rozwinąć na szereg zbieżny według potęg rosnących saméj zmiennéj dla początkowéj wartości téj zmiennéj zero, ani według potęg wyrażenia $(x - k\pi)$ dla początkowéj wartości $x = k\pi$.

A zatém rozwinięcie postaci:

$$x \text{ dot } x = 1 - \frac{2^2 B_1}{2!} x^2 - \frac{2^4 B_2}{4!} x^4 - \ldots \qquad \text{(a)}$$

gdzie $B_1, B_2 \ldots$ są liczby zwane Bernoullego, nie ma żadnego znaczenia, i dla jakichkolwiek wartości x zawsze jest rozbieżne.

Wartość ta $x = 0$ wskazuje, iż następuje w funkcyi przerwanie ciągłości w tym punkcie, jakoż biorąc pochodne mamy:

$$y = \frac{x \text{ dos } x}{\text{wst } x}$$

$$y' = \frac{\text{dos } x}{\text{wst } x} - \frac{x}{\text{wst}^2 x}$$

$$y'' = -2 \frac{\text{wst } x - x \text{ dos } x}{\text{wst } x^3}$$

a dla $x = 0$ jest:

$$y = \frac{0}{0}, \quad y' = \infty, \quad y'' = \frac{0}{0}$$

a zatém pierwsza pochodna staje się nieskończoną, następuje więc rzeczywiście przerwanie ciągłości i wzór (a) jest nieprawdziwy.

Wyraz $n$ty jest:

$$u_n = \frac{2^{2n} B_n}{(2n-1)!(2n)!} x^{2n}$$

a ztąd stosunek wyrazów:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(2n+1)}{2} \frac{B_n}{B_{n+1}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

i ten stosunek powinien być dla jakichkolwiek wartości x mniejszy od jedności w granicy gdy $n = \infty$; a zatém powinno być:

$$\frac{(2n+1)(n+1)}{2} \cdot \frac{B_n}{B_{n+1}} = \frac{\alpha}{n+1}$$

gdzie α jest ilość skończona, a ztąd:

$$B_{n+1} = \frac{(2n+1)(n+1)^2}{2\alpha} B_n$$

a ztąd otrzymamy jeszcze:

$$B_n = \frac{n^2!\,(2n+1)!}{2^n\,\alpha^n}$$

takiéj postaci powinno być wyrażenie liczb Bernoullego, aby szereg powyższy był rozbieżny.

Wyrażenie zaś przybliżone dla liczb Bernoullego (*) postaci:

$$B_n = \frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{2n-1}\,\pi^{2n}} \tag{b}$$

daje na wyraz ogólny:

$$u_n = 2\,\frac{x^{2n}}{\pi^{2n}}$$

a stosunek wyrazów:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{\pi^2}{x^2}$$

a zatém szereg ten byłby zbieżnym dla wartości x mniejszych od π, gdy tymczasem widzimy, że on jest zawsze rozbieżnym; przeto wyrażenie przybliżone liczb Bernoullego (b) jest niezgodne z wypadkami tu otrzymanemi.

174. Podobnież wyrażenie:

$$y = \frac{x}{e^x - 1}$$

daje się rozwinąć na szereg według potęg rosnących z $x - a$ dla początkowéj wartości $x = a$, a granice otrzymamy pamiętając że:

$$G\,y(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

(*) Patrz: Bertrand „Traité de calcul différentiel.“ § 412.

$$x = a \pm \left(\frac{e^a - 1}{e^a}\right)$$

$$g = 2 \left(\frac{e^a - 1}{e^a}\right)$$

i gdy $a = 0$ rozciąg jest zero. Ztąd mamy twierdzenie następujące:

Funkcya $\frac{x}{e^x - 1}$ *nie daje się rozwinąć na szereg zbieżny według potęg rosnących zmiennéj; dla początkowéj wartości* $x = 0$.

Zatém szereg podawany we wszystkich dziełach rachunku wyższego:

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1\, x^2}{2!} - \frac{B_2\, x^4}{4!} + \ldots \qquad \text{(c)}$$

gdzie $B_1\, B_2 \ldots$ są liczby Bernoullego, nie ma żadnego znaczenia.

Dla téj wartości $x = 0$ następuje w funkcyi przerwanie ciągłości, co funkcya sama lub jéj pochodna powinny wskazywać, jakoż mamy:

$$y = \frac{x}{e^x - 1}$$

$$y' = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{(e^x - 1)^3}\, e^x$$

a dla $x = 0$ mamy:

$$y = \frac{0}{0}, \qquad y' = \infty, \qquad y'' = \frac{0}{0}$$

Zatém pochodna pierwsza ma wartość nieskończoną, następuje więc rzeczywiście przerwanie ciągłości, i wzór (c) jest nieprawdziwy.

Wyraz n ty szeregu (c), przyjmując dla B_n wartość przybliżoną,

$$B_n = \frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{n-1}\pi^{2n}}$$

wyrazi się przez:

$$u_n = \frac{x^{2n}}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$$

ztąd:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \left(\frac{2\pi}{x}\right)^2$$

a zatém szereg powyższy powinien być zbieżnym dla wartości x mniejszych od 2π, co jest nieprawdą.

Wyrażenie więc dla liczb Bernoullego nie jest ścisłe, i nie powinno być używane jako dające wypadki nieprawdziwe.

Dwa twierdzenia dopiero co dowiedzione, godne są ze wszech miar uwagi, i rzucają wątpliwość co do wszystkich wypadków otrzymanych przy pomocy wzorów (a) i (c), które okazały się jako nie mające żadnego znaczenia, jak nie mniéj że wzór przybliżony (b) dla liczb Bernoullego, jest nieprawdziwy, jako prowadzący do wypadków fałszywych. Zresztą możemy tu jeszcze dodać, że właśnie dla tego, że funkcye te nie dają się rozwinąć według potęg rosnących z x, rozwijają się dla téj wartości na ułamki współmierne, co ściśle zależy od tego, że graniczne ich są zero. Nasza więc teorya odkrywa tu wiele wątpliwości, i daje stałą podstawę tego rodzaju poszukiwaniom, które mnożą się bez żadnéj dotychczas kontrolli (*)

175. Niech będzie:

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x)$$

gdzie m jest wykładnik całkowity i dodatny, $\varphi(x)$ ma wartość skończoną dla $x = a$, potrzeba rozwinąć $f(a + h)$ według wzoru Taylora.

Ponieważ:

$$G\, f(x)(x) = G\, \varphi(x)(x)$$

(*) Bertrand: „Traité de calcul différentiel“ §§ 304, 305, 306, 326, 333, 334, 387, 388, 411, 412, 413 i t. p., gdzie z wzorów (a) i (c) wiele innych wyprowadzonych zostało.

przeto:

$$h = \pm G\, \varphi(x)\,(x)_a$$

Zatém funkcya dana daje się rozwinąć na szereg Taylora, w granicach objętych tém równaniem. Rozwinięcie otrzymamy znanym sposobem, biorąc pochodne funkcyi f (x), lecz prościéj kładąc $x = a + h$ będzie:

$$f(a+h) = h^m\, \varphi(a+h)$$

i rozwijając tylko funkcyą $\varphi(a + h)$ któréj graniczna jest taż sama jak wyżéj uważając h^m za stałe.

176. W powyższéj funkcyi założmy, że m jest ilość całkowita i odjemna, to mamy:

$$G\, f(x)\,(x) \left\{\begin{array}{l} = G\, \varphi(x)\,(x) \\ = x - a \end{array}\right.$$

a czyniąc $x = a$ druga graniczna zero i granice stają się zero; przeto funkcya nie daje się rozwinąć na szereg dla wartości $x = a$. Jakoż sama funkcya staje się nieskończoną, i to jest jeden z przypadków, gdzie wzór Taylora nie daje się stosować, wtedy potrzeba się udać do wzoru głównego (1. § 124).

W tym razie jednak funkcya daje się rozwinąć na szereg według przyrostu h, tylko pod inną formą.

Jakoż czyniąc $x = a + h$ będzie:

$$f(a+h) = h^m\, \varphi(a+h)$$

i uważając h^m za stałe, rozwiniemy funkcyą $\varphi(a + h)$ w granicach:

$$h = \pm G\, \varphi(x)_a$$

rozwinięcie to jak widzimy, będzie miało potęgi odjemne z h.

W tym przypadku następuje przerwanie ciągłości funkcyi przez nieskończoność, gdyż sama funkcya staje się dla $x = a$ nieskończoną.

177. Założmy jeszcze, że w powyższéj funkcyi m jest ułamkowe, to mamy:

$$\mathrm{G\,f}(x)\,(x)\begin{cases} = \mathrm{G}\,\varphi\,(x)_a \\ = x - a \end{cases}$$

i znowu graniczna staje się zero dla $x = a$; przeto wzór Taylora rozwijając tę funkcyą według przyrostu h dla początkowéj wartości $\mathrm{f}\,(a)$ nie służy, gdyż granice jego stają się zero, i trzeba udać się do szeregu głównego. W tym razie jednak można jeszcze otrzymać rozwinięcie w innéj formie, jakoż czyniąc $x = a + h$ otrzymamy:

$$\mathrm{f}\,(a+h) = h^m\,\varphi\,(a+h)$$

i uważając h^m za stałe, a rozwijając φ w granicach:

$$h = \pm\,\mathrm{G}\,\varphi\,(x)_a$$

otrzymamy rozwinięcie żądane, które będzie miało potęgi ułamkowe.

W tym przypadku funkcya ma wartość zero, a pochodna staje się nieskończoną dla $x = a$, i jest przerwanie ciągłości przez przejście z rzeczywistych wartości w urojone.

178. Niech jeszcze będzie:

$$\mathrm{f}\,(x) = \varphi\,(x) + e^{-\frac{1}{x}}$$

gdzie $\varphi\,(x)$ funkcya mająca skończone wartości dla $x = 0$, $e^{-\frac{1}{x}}$ zaś staje się wraz ze wszystkiemi pochodnemi zero dla $x = 0$; trzeba rozwinąć tę funkcyą na szereg Maclaurina.

A że (§ 98):

$$\mathrm{G\,f}\,(x)\begin{cases} = \mathrm{G}\,\varphi\,(x) \\ = \mathrm{G}\,\frac{1}{x}\,(x) = x \\ = \mathrm{G}\,e^{-\frac{1}{x}}\,(x) = \infty \end{cases}$$

przeto dla $x = 0$ jedna graniczna staje się zero i daje granice zero; przeto rozwinięcie nie ma miejsca, chociaż sama funkcya $\varphi\,(x)$ może być rozwiniętą w granicach.

$$x = \pm\,\mathrm{G}\,\varphi\,(x)_0$$

Wartość $x = 0$ czyni funkcyą $e^{-\frac{1}{x}}$ i jéj wszystkie pochodne zero, i dla téj wartości jak łatwo się przekonać, następuje przerwanie ciągłości przez urojoność, albowiem czyniąc:

$$y = e^{-\frac{1}{x}}$$

mamy:

$$x = -\frac{1}{\log y}$$

i gdy y ma wartości odjemne, x urojone i krzywa nie rozciąga się za punkt $x = 0$ i $y = 0$, i w tym punkcie przerywa się.

Widzimy więc, że we wszystkich przypadkach wyżéj podanych, równanie zbieżności wskazuje nam zawsze niemożność rozwinięcia według wzoru Taylora lub Maclaurina, z przyczyny, że szczególna wartość jednéj z ilości wychodzi po za granice wyznaczone równaniem zbieżności, jak być powinno.

Teorya więc nasza tłumaczy dobrze te przypadki i usuwa z rachunku wyrażenie niejasne, *szereg wpada w błąd;* dowodząc, że w przypadkach takich wzory Taylora i Maclaurina, już z samego założenia przy ich otrzymaniu, nie powinny być stosowane.

ROZDZIAŁ PIĄTY.

POWIĘKSZENIE GRANIC ZBIEŻNOŚCI I SAMÉJ ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW. — WZÓR EULERA. — RESZTY SZEREGÓW.

179. Powiedzieliśmy (§ 129), że wprowadzenie ilości dowolnéj do wzoru ogólnego dla rozwijania funkcyi na szeregi zbieżne, ma jeszcze tę korzyść, że pozwala rozwiązać dwa zadania dotąd nierozwiązane ogólnie, powiększenia granic zbieżności i saméj zbieżności szeregów.

Gdy funkcya jest rozwiniętą na szereg, część jéj w ogóle jest wyrażoną, czyli objętą przez szereg w granicach wskazanych równaniem zbieżności; ważną więc rzeczą jest poznać czy te granice mogą być powiększone. Zadanie to widocznie w dzisiejszym stanie nauki, nie daje się rozwiązać, albowiem szereg Taylora nie wskazuje nic takiego, i nie obejmuje ilości dowolnéj, któraby mogła dać to rozwiązanie. Nawet ilość dowolna wprowadzona do wzoru Taylora, w niczem go nie zmienia, dopiero dodanie równania zbieżności, daje zupełne rozwiązanie zadania, które jest przedmiotem tego rozdziału.

180. Weźmy pod uwagę rozwinięcie ogólne funkcyi $\mathrm{f}(x)$ według potęg rosnących ilości porządkującéj $h - a$, dla początkowéj wartości $x + a$ (§ 124).

$$\mathrm{f}\,(x+h) = \mathrm{f}\,(x+a) + \sum \frac{(h-a)^n}{n!}\,\mathrm{f}^n\,(x+a)$$

$$h = a \pm \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x)_{x+a}$$

Ponieważ ilość a jest dowolną, zatém zmieniając ją otrzymamy rozmaite wartości dla granic, a że dowiedliśmy w § 129, że aby te granice były największe, potrzeba aby rozciąg zbieżności:

$$g = 2\,\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)_{x+a}$$

był maximum, zatém tę wartość znajdziemy, równając jego pochodną do zera, co daje:

$$\frac{dg}{da} = 0 \quad \text{czyli} \quad \left\{\frac{d\,\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)}{dx}\right\}_{x+a} = 0$$

A że wiemy, że graniczna jest nieskończona, lub jest stosunkiem pewnéj funkcyi danéj do jéj pochodnéj, zatém:

1. Gdy graniczna nieskończona, rozciąg jest nieskończonym, i daje już największe granice, bo rozciągające się do nieskończoności, i szereg wyraża w całéj rozciągłości funkcyą.

2. Gdy graniczna jest skończoną, i pewną funkcą z x w skład funkcyi danéj wchodzącą, oznaczając ją przez $\varphi\,(x)$ będzie:

$$\mathrm{G\,f}\,(x)(x) = \frac{\varphi}{\varphi'}$$

a ztąd:

$$\frac{d\,\mathrm{G\,f}\,(x)\,(x)}{dx} = \frac{\varphi'^2 - \varphi\,\varphi''}{\varphi'^2}$$

zatém rozciąg maximum, otrzymany z warunku:

$$\varphi'^2 - \varphi\,\varphi'' = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\varphi'}{\varphi''}$$

Ztąd wypada następujące twierdzenie:

Granice zbieżności są największe, gdy graniczna ma wartość nieskończoną, lub gdy za jéj wartość skończoną bierzemy stosunek pochodnéj pierwszéj do pochodnéj drugiéj funkcyi, która wyznacza tę graniczną, i są to granice rozwijalności funkcyi.

Granice więc rozwijalności funkcyi, są właściwie wartościami maximum granic zbieżności szeregu, na który rozwija się funkcya.

W tym przypadku oznaczając tę wartość dla a przez a_m granice będą:

$$h = a_m \pm \frac{\varphi' (x + a_m)}{\varphi'' (x + a_m)}$$

Takie jest ogólne rozwiązanie tego zadania, którego zastosowanie nie przedstawia żadnéj trudności.

181. Z powyższéj własności szeregów wypada, że zmieniając a zmieniają się granice tak, że z dwóch szeregów w których zmieniamy a, dla pewnych wartości jeden może być zbieżnym, drugi rozbieżnym; i w tém tylko znaczeniu, trzeba uważać zadanie uczynienia szeregów rozbieżnych zbieżnemi.

Zatém zmieniając ilość dowolną a, można zawsze szereg rozbieżny dla pewnych wartości zmienić na zbieżny; lecz nie idzie za tém, aby rozbieżne miały znaczenie i można je używać. Przyczyna tego polega na tém, że granice zbieżności, jak widzieliśmy, mogą zmieniać się i dążyć do granic rozwijalności, których dopiero przekroczyć nie mogą.

Zatém możemy wyprowadzić następujący godny uwagi wniosek.

Szeregi rozbieżne można przez zmianę ilości dowolnéj a, zamienić na zbieżne, w granicach rozwijalności funkcyi.

Widzimy więc, że nie błądzą ci geometrowie (*), którzy mówią o uczynieniu szeregów rozbieżnych zbieżnemi; albowiem to jest możebne w granicach rozwijalności funkcyi, i do tego służy nam ilość dowolna a.

182. Równanie zbieżności daje nam dwie wartości graniczne, za które nie może przejść zmienna porządkująca, i między któremi zmieniając się, daje szeregi więcéj lub mniéj zbieżne, jakoż dla wzoru ogólnego jest:

$$h = a + \mathrm{G\,f}\,(x)(x)_{x+a}$$

$$h = a - \mathrm{G\,f}\,(x)(x)_{x+a}$$

(*)Porównaj: Catalan „Traité élémentaire des séries“ page 121, nota.

im więcéj h zbliża się do granic, tém szeregi są mniéj zbieżne, zatém najzbieżniejsze powinny być dla środkowéj wartości; jakoż ta wartość jest:

$$h = a$$

i ta wartość daje rzeczywiście szeregi najzbieżniejsze, gdyż wszystkie wyrazy nikną, i wartość szeregu sprowadza się do pierwszego wyrazu.

Zatém zadanie powiększenia zbieżności szeregu jest nieoznaczoném i zasadza się na tém, aby dla a nadawać wartości bardzo blizkie h. Zadanie więc to może być bardzo rozmaicie rozwiązane, według warunków znoszących jego nieoznaczoność, a które już zależą od postaci funkcyi, dla tego to prawidła stałe nie mogą być dane, albowiem one muszą się zmieniać z postacią funkcyi.

Zadanie wyżéj rozwiązane powiększenia granic zbieżności, rozwiązuje część tego zadania, albowiem czyni zbieżnemi szeregi dla wartości, dla których pierwotnie nie były zbieżne.

Inne rozwiązania mogą zależeć:

1. Albo na przekształceniu szeregu na inny przez zmianę ilości a,

2. Albo na przekształceniu szeregu na inny, przy tychże samych wartościach a,

3. Albo na obu razem przekształceniach.

Pierwszy rodzaj przekształcenia szeregów już poznaliśmy.

183. Najważniejsze z drugiego rodzaju przekształceń jest następne. We wzorze głównym (§ 124) czyniąc $h - a = k$ będzie $h = k + a$ i można napisać:

$$\mathrm{f}\,(x+k+a) = \mathrm{f}\,(x+a) + \sum \frac{k^n}{n!}\, \mathrm{f}^n\,(x+a)$$

$$k = \pm\, \mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(x)\,(x)_{x+a}$$

a zamieniając k na $-k$ granice się nie zmieniają, i otrzymamy:

$$\mathrm{f}\,(x+a-k) = \mathrm{f}\,(x+a) + \sum (-1)^n \frac{k^n}{n!}\, \mathrm{f}^n\,(x+a)$$

a że granice są niezmienne, przeto te szeregi można dodać i odjąć od siebie i będzie:

$$\left.\begin{array}{l} \Big|_{x+a-k}^{x+a+k} f(x) = 2\sum \dfrac{k^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{2n-1}(x+a) \\ \Big|_{x+a}^{x+k+a} f(x) + \Big|_{x+a}^{x+a-k} f(x) = 2\sum \dfrac{k^{2n}}{(2n)!} f^{2n}(x+a) \\ k = \pm G f(x)(x)_{x+a} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Szeregi wyrażone tylko przez potęgi parzyste lub nieparzyste przyrostu.

Kładąc $x = 0$ i czyniąc $k = x$ otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l} \Big|_{a-x}^{a+x} f(x) = 2\sum \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{2n-1}(a) \\ \Big|_{a}^{a+x} f(x) + \Big|_{a}^{a-x} f(x) = 2\sum \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} f^{2n}(a) \\ x = \pm G f(x)(x)_a \end{array}\right\} \quad (2)$$

Gdy jeszcze można położyć $a = 0$ otrzymamy:

$$\left.\begin{array}{l} \Big|_{-x}^{x} f(x) = 2\sum \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{2n-1}(0) \\ \Big|_{0}^{x} f(x) + \Big|_{0}^{-x} f(x) = 2\sum \dfrac{f^{2n}}{(2n)!} f^{2n}(0) \\ x = \pm G f(x)(x)_0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Można jeszcze daléj posunąć zbieżność szeregów przez podobne przekształcenia, biorąc na k i x wartości urojone; lecz aby te przekształcenia były użyteczne, potrzeba aby funkcya sama mogła dać wartości rzeczywiste, co już ściśle zależy od postaci funkcyi.

184. Jeżeli teraz do przekształceń powyższych, dodamy zmianę ilości dowolnéj lub zmiennych, otrzymamy przekształcenia trzeciego rodzaju.

Zmiana ilości w szeregach powyższych może być dowolną, w granicach oznaczonych równaniem zbieżności; tę dowolność ograniczają jeszcze własności saméj funkcyi, od których właśnie zależy wprowadzenie przy powiększeniu zbieżności tego a nie innego przekształcenia w pierwszą stronę tych szeregów czyli w samą funkcyą.

Między innemi przekształceniami podajemy te, które otrzymamy z wzoru (2) § 183, gdy położymy za x

$$x = \frac{y-z}{y+z}$$

Jakoż otrzymamy z pierwszego szeregu:

$$\Bigg|_{\frac{(a-1)y+(a+1)z}{y+z}}^{\frac{(a+1)y+(a-1)z}{y+z}} \mathrm{f}\,(x) = 2 \sum \left(\frac{y-z}{y+z}\right)^{2n-1} \frac{\mathrm{f}^{2n-1}\,(a)}{(2n-1)!} \tag{4}$$

$$\frac{y-z}{y+z} = \pm \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x)_a$$

Jeżeli jeszcze położymy $y-z=b$, będzie $y+z=2\,y-b$ lub $y+z=2\,z+b$; a ztąd:

$$\Bigg|_{\frac{2ay-b(a+1)}{2y+b}}^{\frac{2ay-b(a-1)}{2y+b}} \mathrm{f}\,(x) = 2 \sum \left(\frac{b}{2y-b}\right)^{2n-1} \frac{\mathrm{f}^{2n-1}\,(a)}{(2n-1)!} \tag{5}$$

$$2\,y-b = \pm \frac{b}{\mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x)_a}$$

$$\Bigg|_{\frac{2az+b(a-1)}{2z+b}}^{\frac{2az+b(a+1)}{2z+b}} \mathrm{f}\,(x) = 2 \sum \left(\frac{b}{2z+b}\right)^{2n-1} \frac{\mathrm{f}^{2n-1}\,(a)}{(2n-1)!} \tag{5'}$$

$$2\,z+b = \pm \frac{b}{\mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x)_a}$$

a gdy jeszcze równanie zbieżności dozwoli położyć $a=0$, będzie:

$$\Bigg|_{-\frac{b}{2z+b}}^{\frac{b}{2z+b}} \mathrm{f}\,(x) = 2 \sum \left(\frac{b}{2z+b}\right)^{2n-1} \frac{\mathrm{f}^{2n-1}\,(0)}{(2n-1)!} \tag{6}$$

$$2\,z+b = \pm \frac{b}{\mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x)_0}$$

We wzorach (5 i 6) granice y i z będą się rozciągać od tych wartości, do nieskończoności.

185. Równanie powyższe zastosujemy do funkcyi logarytmowych, dla dania przykładu tego rodzaju przekształceń.

Jakoż biorąc f $(x) = \log x$ i kładąc $a = 1$ wzór (4) zamieni się na:

$$l\,\frac{y}{z} = 2\sum\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^{2n-1}\frac{\mathrm{f}^{2n-1}(1)}{(2n-1)!}$$

który ma postać:

$$l\,\frac{y}{z} = 2\left\{\frac{y-z}{y+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{y-z}{y+z}\right)^3 + \ldots\right\}$$

dla uproszczenia w pisaniu, oznaczymy go nadal znając formę szeregu przez:

$$l\,\frac{y}{z} = 2\sum\left(\frac{y-z}{y+z}\right)$$

$$\frac{y-z}{y+z} = \pm 1 \tag{7}$$

Ponieważ z własności funkcyi logarytmowych wypada, że logarytm iloczynów równa się summie logarytmów każdego czynnika, przeto położymy:

$$y = (x+a)(x+b)(x+c)\ldots$$
$$z = (x+a')(x+b')(x+c')\ldots$$

co dla uproszczenia oznaczymy przez:

$$y = [a]\,[b]\,[c]\ldots$$
$$z = [a']\,[b']\,[c']\ldots$$

gdzie $[a]$, $[b]$, $[c]$ . . . są to dwumiany mające wspólny wyraz x a drugie dodatne a, b, c . . i t. d.

W niczém nie naruszymy ogólności, czyniąc jeden z czynników $x+a'=x$, który zmieni się teraz na [0] i będzie:

$$y = [a-a']\,[b-a']\,[c-a']\ldots$$
$$z = [0]\,[b'-a']\,[c'-a']\ldots$$

Jeszcze nie naruszymy ogólności, czyniąc $x' = (a-a')\,x''$, jakoż będzie:

$$y = [1]\left[\frac{b-a'}{a-a'}\right]\left[\frac{c-a'}{a-a'}\right]\ldots$$

$$z = [0]\left[\frac{b'-a'}{a-a'}\right]\left[\frac{c'-a'}{a-a'}\right]\ldots$$

Zatém bez zepsucia ogólności tych wzorów, można wyrażenia y i z sprowadzić do prostszéj postaci, w których pierwsze czynniki są x i $x+1$. A zatém można położyć:

$$y = [1]\,[a]\,[b]\ldots$$

$$z = [0]\,[m]\,[n]\ldots$$

Oczywistą jest rzeczą, że wzór (7) będzie najzbieżniejszym, gdy $y - z$ będzie ilością stałą, a więc powyższe wyrażenia powinny dopełniać tego warunku, a rozwijając je, wszystkie spółczynniki powinny być sobie równe prócz ostatnich; zatém:

$$y - z = abc\ldots - mnp\ldots = \mathrm{A} \tag{a}$$

a ztąd:

$$y + z = 2\,z + abc\ldots - mnp\ldots = 2\,z + \mathrm{A}$$

lub:

$$y + z = 2\,y - abc\ldots + mnp\ldots = 2\,y - \mathrm{A}$$

wzór (7) zamieni się na:

$$\begin{aligned} l\,\frac{[1]\,[a]\,[b]\ldots}{[0]\,[m]\,[n]\ldots} &= 2\sum\left(\frac{\mathrm{A}}{2\,[0]\,[m]\,[n]\ldots + \mathrm{A}}\right) \\ &= 2\sum\left(\frac{\mathrm{A}}{2\,[1]\,[a]\,[b]\ldots - \mathrm{A}}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

których granice oznaczymy uważając że:

$$\frac{\mathrm{A}}{y+z} = \pm 1$$

czyli:

$$\mathrm{A} = \pm\,(y+z)$$

to jest: ilość stała A powinna być zawarta między $(y+z)$ i $-(y+z)$; a zatém naodwrót $y+z$ powinno być większe tak odjemnie, jak dodatnie od A, czyli:

$$y+z=\pm A \text{ do } \pm\infty$$

czyli:

$$2z=-A\pm A \text{ do } \pm\infty$$

lub:

$$2y=A\pm A \text{ do } \pm\infty$$

Takie są wzory ogólne najzbieżniejsze dla logarytmów, i dające szeregi zbieżne od pewnych wartości aż do $\pm\infty$.

Pozostaje tylko oznaczyć postacie y i z aby dopełniały warunku (a).

186. Z powyżéj podanych wzorów ogólnych łatwo jest otrzymać szczegółowe, dla rozwijania logarytmów na szeregi zbieżne.

1. Jakoż gdy wyrażenia y i z są pierwszego stopnia, będzie wzór prosty:

$$l\frac{[1]}{[0]}=2\sum\left(\frac{1}{2[0]+1}\right) \tag{9}$$

$$2[0]=-1\pm 1 \text{ do } \pm\infty$$

co łatwo przemienić na właściwą formę:

$$l\frac{x+1}{x}=2\sum\left(\frac{1}{2x+1}\right)^{2n-1}\frac{1}{2n-1} \tag{9'}$$

$$x=\begin{cases}0 \text{ do } +\infty\\ -1 \text{ do } -\infty\end{cases}$$

szereg przestaje być zbieżnym dla wartości od 0 do -1, zresztą zbieżny dla wszystkich wartości dodatnych i odjemnych aż do nieskończoności, i jest najzbieżniejszym ze wszystkich szeregów dających logarytm liczby, z danego jednego logarytmu.

2. Gdy y i z są drugiego stopnia i składają się z dwóch czynników, to jest:

$$y=[1]\,[a]$$

$$z=[0]\,[m]$$

a i m muszą dopełniać warunku:

$$1+a=m$$

i dają formę:

$$l\,\frac{[1]\,[a]}{[0]\,[a+1]} = 2\sum\left(\frac{a}{2\,[0]\,[a+1]+a}\right) \tag{10}$$

która jest ogólna dla tego rodzaju wyrażeń.

Szereg po drugiéj stronie będzie tém zbieżniejszym, im a mniejsze; a że a nie można uczynić zero, więc czyniąc równe 1, otrzymamy szeregi najzbieżniejsze postaci:

$$l\,\frac{[1]^2}{[0]\,[2]} = 2\sum\left(\frac{1}{2\,[0]\,[2]+1}\right) \tag{11}$$

jakoż czyniąc $x = 1, 2, \ldots$ otrzymamy:

$$l\left(\frac{2.\,2}{1.\,3}\right) = 2\sum\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$l\left(\frac{4.\,4}{3.\,5}\right) = 2\sum\left(\frac{1}{31}\right) \quad \text{i t. d.}$$

Wzór (10) daje logarytm liczby z danych trzech logarytmów, wzór zaś (11) z danych dwóch logarytmów; zatém daje z dwóch logarytmów szeregi zbieżniejsze, jak powyższy z trzech.

187. 3. Gdy y i z są trzeciego stopnia i składają się z trzech czynników, warunki są:

$$a+b+1 = m+n$$

$$ab+a+b = mn$$

które potrzeba rozwiązać w liczbach całych, co łatwo dopełnić i otrzymamy:

$$a = tt' \qquad\qquad m = tt' - t + 1.$$

$$b = (t'-1)(t'-1), \qquad n = tt - t' + 1$$

Ztąd otrzymamy formę rozwinięcia:

$$l\,\frac{[1][tt'][(t-1)(t'-1)]}{[0][t(t'-1)+1][t'(t-1)+1]} =$$

$$2\sum\left(\frac{tt'(t-1)(t-1)}{2[0][t(t'-1)+1][t'(t-1)+1]+tt'(t-1)(t'-1)}\right) \tag{12}$$

Wzór najogólniejszy dający związek między sześciu logarytmami.

Szukając minimum licznika ilości porządkującéj szeregu, otrzymamy $t = t' = 2$; zatém najzbieżniejsze tego rodzaju szeregi są postaci:

$$l\,\frac{[1]^2[4]}{[0][3]^2} = 2\sum\left(\frac{2}{[0][3]^2+2}\right) \tag{13}$$

a że:

$$x\,(x+3)^2 + 2 = x^3+6x^2+9x+2$$
$$= (x+2)((x+2)^2-3)$$

przeto daje się jeszcze napisać tak:

$$l\,\frac{[1]^2[4]}{[0][3]^2} = 2\sum\left(\frac{2}{[2]\{[2]^2-3\}}\right) \tag{13'}$$

a czyniąc $x + 2 = y$ będzie:

$$l\,\frac{[-1]^2[2]}{[-2][1]^2} = 2\sum\left(\frac{2}{[0]\{[0]^2-3\}}\right)$$

w téj postaci jest podany przez Borda; to jest:

$$l\,\frac{(x-1)^2\,(x+2)}{(x-2)\,(x+1)^2} = 2\sum\left(\frac{2}{x(x^2-3)}\right)$$

np. czyniąc $x = 3.\ 4.\ 5.\ .\ .\ .$ otrzymamy:

$$l\,\frac{2^2.5}{1.2^2} = 2\sum\left(\frac{1}{9}\right) = l\,5$$

$$l\,\frac{3^2.6}{2.5^2} = 2\sum\left(\frac{1}{26}\right) = l\,\frac{3^3}{5^2}$$

$$l\,\frac{4^2.7}{3.6^2} = 2\sum\left(\frac{1}{55}\right) = l\,\frac{4.7}{3^3} \quad \text{i t p.}$$

Wzór (13) ma tę jeszcze własność, że wyrażenie pod znakiem summy daje się przez 2 podzielić i daje z trzech logarytmów czwarty. Nadając dla t i t' inne wartości otrzymamy szeregi mniéj zbieżne, jak łatwo się przekonać.

188. 4. Nakoniec gdy y i z są czwartego stopnia i składają się z czterech czynników:

$$\begin{aligned} y &= [1][a][b][c] \\ z &= [0][m][n][p] \end{aligned} \qquad (a)$$

y i z muszą dopełniać następnych warunków:

$$\begin{aligned} a+b+c+1 &= m+n+p \\ ab+(a+b)c+a+b+c &= mn+(m+n)p \\ abc+ab+(a+b)c &= mnp \end{aligned} \qquad (b)$$

które potrzeba rozwiązać w liczbach całych, co wykonywając otrzymamy następne kształty dla tych ilości:

$$\begin{aligned} a &= \beta\, t\, (2\,\beta-1) & m &= \beta\, (t\, (\beta-1)+1) \\ b &= \beta\, (t\, (\beta-1)-1)+1 & n &= \beta\, (\beta\, t-1)+1 \\ c &= \beta\, (\beta\, t+1) & p &= \beta\, t\, (2\,\beta-1)+1 \end{aligned} \qquad (c)$$

$$abc = \beta^2\, t\, (2\,\beta-1)(\beta\, t+1)\,\{\beta\, (t\, (\beta-1)-1)+1\}$$

Szukając wartości minimum dla iloczynu $a\,b\,c$, uważając β i t za dowolne, otrzymamy $\beta = 2$ i $t = 1$; jakoż czyniąc naprzód $\beta = 2$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} a &= 6\, t & m &= 2\, (t+1) \\ b &= 2\, t - 1 & n &= 4\, t-1 \\ c &= 2\, (2\, t+1) & p &= 6\, t+1 \end{aligned}$$

$$abc = 12\, t\, (4\, t^2-1)$$

i najzbieżniejsze szeregi:

$$l\,\frac{[1][2t-1][4t+2][6t]}{[0][2t+2][4t-1][6t+1]} =$$

$$2\sum\left(\frac{6\,t\,(4\,t^2-1)}{[0][2t+2][4t-1][6t+1]+\,6\,t(4t^2-1)}\right) \qquad (14)$$

a czyniąc jeszcze $t = 1$, otrzymamy wzór najzbieżniejszy tego rodzaju:

$$l\,\frac{[1]^2[6]^2}{[0][3][4][7]} = 2\sum\left(\frac{18}{[0][3][4][7]+18}\right)$$

lub prościej:

$$l\,\frac{[1]^2[6]^2}{[0][3][4][7]} = 2\sum\left(\frac{18}{[1]^2[6]^2-18}\right) \qquad (15)$$

wzór najzbieżniejszy dający z pięciu logarytmów szósty dotąd nieznany.

Czyniąc $\beta = -1$, otrzymamy wzory mniéj zbieżne; jakoż forma ogólna jest:

$$l\,\frac{[1][t-1][2t+2][3t]}{[0][t+2][2t-1][3t+1]} =$$

$$2\sum\left(\frac{3\,t\,(t^2-1)}{[0][t+2][2t-1][3t+1]+3t(t^2-1)}\right) \tag{16}$$

gdzie czyniąc $t = 2$, mamy formę (15); a czyniąc $t = 3$, będzie:

$$l\,\frac{[1][2][8][9]}{[0][5]^2[10]} = 2\sum\left(\frac{72}{[0][5]^2[10]+72}\right) \tag{17}$$

gdzie czyniąc $x + 5 = p$ i odwracając, otrzymamy szereg podany przez Haros, dający z sześciu logarytmów siódmy, gdy (15) jest zbieżniejszy znacznie i daje z pięciu logarytmów szósty.

Rozszerzyliśmy się tutaj nieco więcéj nad potrzebę dla tego głównie, aby pokazać jak stosować się winien sposób szukania szeregów najzbieżniejszych, i widzimy, że musi się zmieniać stosownie do postaci funkcyi danéj.

189. Jeżeli w szeregu danym:

$$S = \Sigma\, u_n\, x^n \tag{18}$$

$$x = \pm\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)_\infty$$

uszykowanym podług potęg rosnących z x i początkowéj wartości a uczynimy:

$$x = \frac{y}{1+y} \tag{a}$$

szereg zmieni się na:

$$S = \Sigma\, u_n\left(\frac{y}{1+y}\right)^n$$

$$\frac{y}{1+y} = \pm\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}\right)_\infty$$

a rozwijając potęgi z $\frac{y}{1+y}$ i zbierając razem spółczynniki tych samych potęg z y, łatwo zamienimy go uważając, że summy tych spółczynników są kolejnemi różnicami, które oznaczymy przez $\Delta^1 u_1$ $\Delta^2 u_1$ i t. d., na:

$$S = \Sigma\, \Delta^{n-1} u_1\, y^n \tag{19}$$

a równanie zbieżności znowu zmieni się na:

$$y = \pm \left(\frac{\Delta^{n-1} u_1}{\Delta^n u_1} \right)_\infty$$

gdzie widzimy, że naraz i forma wzoru i granice jego zostały przekształcone.

Gdy granice pozwalają położyć $x = 1$ wtedy $y = \frac{1}{2}$, według (a) i będzie:

$$S = \Sigma\, u_n \tag{20}$$

$$\left(\frac{u_{n-1}}{u_n} \right)_\infty = \pm 1$$

szereg który zamieni się na:

$$S = \sum \frac{\Delta^{n-1} u_1}{2^n} \tag{21}$$

$$\left(\frac{\Delta^{n-1} u_1}{\Delta^n u_1} \right)_\infty = \pm \frac{1}{2}.$$

Ostatnie to przekształcenie jest znaném przekształceniem Eulera; dodaliśmy tu granice i widzimy, że ono prowadzi do zmiany naraz formy szeregu i granic.

Gdy szereg dany jest rozbieżny, zdarza się, że szereg Eulera jest zbieżny; ztąd powstaje znany paradox, że szeregi rozbieżne można uczynić zbieżnemi i naodwrót: paradox ten dopiero tłumaczą nam dobrze dodane granice i pokazują, że to zależy od zmiany ilości dowolnéj, która pociąga za sobą zmianę i powiększenie granic zbieżności.

Gdy wolno jest położyć $x = 1$, czyli gdy x zawarte jest w granicach objętych obu równaniami zbieżności, wtedy i tylko wtedy można przekształcenia Eulera używać do takiego szeregu w założeniu $x = 1$.

190. Powyższe przekształcenie zastosujemy do szeregu:

$$S = \frac{1}{1-x} = 1 + \Sigma\, x^n$$

$$x = \pm 1$$

ponieważ:

$$\Delta^n u_1 = (1-x)^n$$

przeto według wzoru (18), będzie:

$$2\,S = \sum \left(\frac{1-x}{2}\right)^n = \sum (1-)^n \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1-x}{2} = \pm 1 \quad \text{czyli} \quad x = 1 \pm 2$$

Stosując to samo przekształcenie do szeregu ostatniego, otrzymamy nowy:

$$4\,S = 1 \pm \sum \left(\frac{x-3}{4}\right)^n$$

$$x = 3 \pm 4, \qquad \text{i t. d.}$$

Wszystkie te przekształcenia można otrzymać wprost kładąc:

$$x = \frac{y-a}{a+1}$$

jakoż będzie:

$$S = (a+1)\,\frac{1}{1-y} = 1 + \sum \left(\frac{y-a}{a+1}\right)^n$$

$$y = a \pm (a+1)$$

gdzie czyniąc $a = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots$ otrzymamy przekształcenia wyżéj otrzymane, i wiele innych nie objętych powyższemi przekształceniami (*), których granice zawarte są między granicami rozwijalności téj funkcyi.

191. Niech jeszcze będzie:

$$S = 2\,x + \frac{2^2 x^2}{2} + \frac{2^3 x^3}{3} + \ldots + \frac{2^n\,x^n}{n} + \ldots$$

szereg zbieżny w granicach $\pm\frac{1}{2}$, stosując wzór przekształcenia Eulera, czyli kładąc $x = \frac{y}{1+y}$ znajdziemy szereg:

$$S = 2\,y + \frac{2}{3}\,y^3 + \ldots + \frac{2}{2n+1}\,y^{2n+1} + \ldots$$

(*) Patrz: Catalan, „Traité élément. des séries." Pag. 125.

gdzie granice są:

$$y^2 = \pm 1$$

czyli:

$$y = \pm 1 \quad \text{lub} \quad y = \pm i$$

zatém szereg drugi zbieżny w granicach obszerniejszych.

Bertrand zakłada dla obu $x = -1$ i $y = -\frac{1}{2}$, i przychodzi do szeregów: (*)

$$2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \ldots$$

$$1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots$$

pierwszego rozbieżnego a drugiego zbieżnego; a że drugi wyraża ściśle $l\,3$, przeto powiedziéć można, że i pierwszy wyraża $l\,3$; i wnosi ztąd, że przekształcenie Eulera, prowadzi do wypadków paradoxalnych, że szereg rozbieżny może przedstawiać funkcyą. Jest to tak rzeczywiście, dopóki nie mamy względu na równanie zbieżnosci, lecz jak tylko do szeregu dodamy równanie zbieżności, widzimy, że wartość $x = -1$ nie można wprowadzać do szeregu pierwszego, jako niedopełniającą równania zbieżności, jakkolwiek ona dopełnia równanie zbieżności drugiego szeregu. Przekształcenie więc Eulera, nie prowadzi do wypadków paradoxalnych, jak tylko uważamy na równanie zbieżności szeregów.

I tak, czyniąc $y = -\frac{1}{a}$ i $x = \frac{1}{a-1}$ otrzymamy, gdy a jest liczbą całkowitą większą od 3, oba szeregi zbieżne, które będą wyrażać teraz tęż samą funkcyą i tak będzie:

$$S = \left(\frac{2}{a-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{a-1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{a-1}\right)^3 - \ldots$$

$$S = 2\left(\frac{1}{a}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \frac{2}{4}\left(\frac{1}{a}\right)^5 + \ldots$$

(*) Bertrand: „Traité de calcul différentiel“ pag. 255.

a że drugi szereg wyraża ściśle jak wiemy $l\left(\frac{a+1}{a-1}\right)$, przeto i pierwszy wyraża tę samą wartość, jest rzeczywiście przekształcony na drugi, i paradox znika zupełnie.

192. Jakkolwiek umiemy powiększyć granice zbieżności, i powiększyć samą zbieżność szeregu, wiemy jednakże, że szereg każdy dla szczególnych wartości zmiennéj zawartéj między granicami zbieżności, daje szeregi szczególne mniéj lub więcéj zbieżne, według tego jak wartość szczególna zmiennéj, zbliża się lub oddala od granic zbieżności.

W praktyczném znaczeniu te z tych szeregów zasługują na uwagę, które są bardzo zbieżne, czyli których zbieżność jest większa od zbieżności szeregu normalnego (§ 79). Między więc granicami zbieżności, zawarte są inne granice szczuplejsze dla każdego szeregu, które dają szeregi bardzo zbieżne, a które można nazwać *granicami zbieżności normalnéj*

Dla uzupełnienia téj teoryi, pozostaje zatém podać rozwiązanie następującego zadania.

Mając dany szereg, oznaczyć granice zbieżności normalnéj dla ilości porządkującéj, między któremi szereg dla każdéj wartości ilości porządkującéj, zostaje ciągle bardzo zbieżnym.

W § 79 powiedzieliśmy, że zbieżność szeregów mierzy się stosunkiem liczby przybliżenia do ilości wyrazów dającéj toż przybliżenie, i ten stosunek dla szeregu normalnego jest jednością, dla wszystkich zaś innych jest zmienny, i rośnie lub ubywa z liczbą branych wyrazów, zaczynając od pewnéj liczby wyrazów dla których jest jednością.

Stosunek ten równy jedności dla pewnéj liczby wyrazów, będzie odpowiadał coraz innéj liczbie wyrazów, w miarę jak ilość porządkująca będzie zmieniać swą wartość, a w miarę jak ilość porządkująca będzie oddalać się od granic zbieżności, stosunek ten równy jedności, będzie odpowiadać coraz mniejszéj liczbie wyrazów, czyli będzie zbliżać się do wyrazu pierwszego szeregu. Szereg więc będąc zbieżnym w pewnych granicach, będzie tém więcéj zbliżać się do normalnego, im stosunek ten równy jedności ze zmianą wartości ilości porządkującéj, będzie odpowiadać coraz mniejszéj liczbie wyrazów, tak że gdy ten stosunek od początku zaraz szeregu staje się jednością, to szereg najwięcéj będzie się zbliżać do normalnego i da nam żądane granice.

Dla otrzymania więc granic zbieżności normalnéj, musi być (§ 79):

$$\lambda = \frac{\mu}{n} = 1 \tag{a}$$

a gdy znowu dla każdéj wartości zawartéj między granicami zbieżności, stosunek szeregu zawsze rośnie; aże dla szeregów których stosunek rośnie, według wzoru 5 § 75, mamy:

$$\mu = -(\mathrm{L}\, u_{n+1} + 1)$$

zatém, uważając na warunek (a), będzie:

$$u_{n+1} = 10^{-(n+1)}$$

Aże znowu zbieżność normalna, musi zaczynać się od wyrazu pierwszego, aby szeregi były zbieżniejsze od normalnego; przeto trzeba położyć $n = 0$, i będzie:

$$u_1 = \pm \frac{1}{10} \tag{b}$$

co da nam granice zbieżności normalnéj.

Jakoż stosując to do szeregu głównego, ponieważ:

$$u_1 = \frac{h-a}{1} \, \mathrm{f}'(x+a)$$

zatém:

$$h = a \pm \frac{1}{10\, \mathrm{f}'(x+a)} \tag{22}$$

dla szeregu dopełniającego, ponieważ:

$$u_1 = \frac{h^{-1} - a^{-1}}{1} \, \mathrm{f}_1(x+a)$$

zatém:

$$h^{-1} = a^{-1} \pm \frac{1}{10\, \mathrm{f}_1(x+a)} \tag{23}$$

Ztąd dla szeregu Taylora będzie:

$$h = \pm \frac{1}{10\, \mathrm{f}'(x)} \tag{24}$$

dla szeregu Maclaurina:

$$x = \pm \frac{1}{10\,f'(0)} \tag{25}$$

np. szereg:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

jest zbieżnym jak wiemy dla wszystkich wartości x, lecz bardzo zbieżnym w granicach:

$$x = \pm\, 0{,}1$$

które są granicami zbieżności normalnéj.

Szereg znowu:

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2!\,x^2} + \ldots$$

jest równie zbieżnym dla wszystkich wartości x, lecz bardzo zbieżnym w granicach zbieżności normalnéj:

$$x = \pm\, 10$$

w przechodzie przez nieskończoność.

193. Widzieliśmy w Części pierwszéj (§ 8), że reszta szeregu, kończąc go na wyrazie n tym, zawarta jest zawsze między:

$$A = \frac{u_n}{\alpha - 1} \quad \text{i} \quad B = \frac{u_n}{\varepsilon - 1}$$

a stosując to do wzoru głównego (§ 124), gdzie:

$$u_n = \frac{(h-a)^n}{n!}\, f^n\,(x+a)$$

i uważając że:

$$\alpha = \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)\, f^n\,(x+a)}{(h-a)\, f^{n+1}\,(x+a)}$$

a:

$$\varepsilon = \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)_\infty = \frac{1}{h-a}\, G\, f\,(x)\,(x)_{x+a}$$

to reszta będzie zawarta między:

$$A = \frac{1}{\dfrac{(n+1)\, f^n\,(x+a)}{f^{n+1}\,(x+a)} - (h-a)} \cdot \frac{(h-a)^{n+1} f^n\,(x+a)}{n!}$$

i

$$B = \frac{1}{G\,f\,(x)(x)_{x+a} - (h-a)} \cdot \frac{(h-a)^{n+1} f^n\,(x+a)}{n!}$$

a oznaczając przez:

$$k_n = \frac{(n+1)\,f^n\,(x+a)}{f^{n+1}\,(x+a)} - (h-a)$$

$$k_\infty = G\,f\,(x)\,(x)_{x+a} - (h-a)$$

to resztę można wyrazić przez:

$$R_n = \frac{(k_n - k_\infty)\,\theta + k_\infty}{k_n\,k_\infty} \cdot \frac{(h-a)^{n+1}\,f^n\,(x+a)}{n!} \qquad (26)$$

gdzie θ jest to liczba zawarta między 0 i 1.

Takie jest nowe wyrażenie reszty szeregu, przydatném być może do oznaczenia przybliżenia, gdy obliczamy n wyrazów.

Wprowadzając warunki uszczególniające ilości x, h i a otrzymamy podobne formy reszty dla innych wzorów.

ROZDZIAŁ SZÓSTY.

ROZWIJANIE NA SZEREGI ZBIEŻNE RÓWNAŃ I FUNKCYI O WIELU ZMIENNYCH. — SZEREGI LAGRANGE'A, LAPLACE'A I BURMANNA.

194. Pod jakąkolwiek postacią będzie dany związek między dwiema ilościami, z których jedna jest niezależną, zawsze on musi być wyrażony przez równanie między temi zmiennemi rozwiązalne lub nie co do jednéj z nich.

Gdy równanie jest rozwiązalne co do jednéj, to rozwiązując otrzymamy wyrażenie funkcyi o jednéj zmiennéj, i to cośmy wyżéj powiedzieli, tu się w całości stosuje.

Gdy równanie jest nierozwiązalném, może zawierać nietylko same ilości, lecz ich pochodne; w każdym razie rozwijanie na szereg, łatwo może być dopełnioném.

Niech więc w ogóle będzie dane równanie:

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

w którém y potrzeba rozwinąć według zmiennéj x. Równanie to oznaczając pewną dowolną wartość dla x przez α, da nam wartość dla $y = \beta$ i możemy rozwijać funkcyą według potęg rosnących z $x - \alpha$ dla wartości początkowych $y = \beta$ i $x = \alpha$.

Jakoż biorąc pochodne będzie:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy}$$

a ztego otrzymamy wszystkie dalsze pochodne, które potrzeba włożyć za f (a), f$'$ (a), f$''$ (a) i t. d. we wzór (4. § 138), biorąc je dla wartości $x = \alpha$ i $y = \beta$, przeto rozwinięcie łatwo oznaczyć, a równanie zbieżności będzie:

$$x = \alpha \pm \mathrm{G}\, y\, (x)_\alpha$$

a że jak wiemy:

$$\mathrm{G}\, y\, (x) = \mathrm{G}\, y'\, (x)$$

przeto na mocy § 105, otrzymamy:

$$x = \alpha \pm \left\{ \frac{\frac{df}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)^2}{2\frac{df}{dy}\,\frac{df}{dx}\,\frac{d^2 f}{dxdy} - \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} - \left(\frac{df}{dy}\right)^2 \frac{d^2 f}{dx^2}} \right\}_{(\alpha,\beta)} \quad (2)$$

a rozciąg g będzie równy podwojonéj ilości zawartéj w nawiasie.

To są granice zbieżności, dla równań tego rodzaju.

Granice rozwijalności znajdziemy, szukając wartości czyniących rozciąg zero lub nieskończony; jakoż one będą zawarte dla g $= 0$ w równaniach:

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0$$

lub:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = \infty, \quad \frac{d^2 f}{dy^2} = \infty, \quad \frac{d^2 f}{dxdy} = \infty,$$

dla g $= \infty$ w równaniach:

$$\frac{df}{dx} = \infty, \quad \frac{df}{dy} = \infty$$

lub:

$$2\frac{d^2 f}{dxdy}\,\frac{df}{dx}\,\frac{df}{dy} - \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \frac{d^2 f}{dy^2} - \left(\frac{df}{dy}\right)^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

Warunki te rozwiązane dadzą wszytkie wartości równania, jakie przerywają rozwijalność jego na szereg zbieżny.

Gdy mamy $\frac{df}{dx} = 0$ dla $x = \alpha$ i $y = \beta$, a $\frac{df}{dy}$ skończone, lub odwrotnie; to jakiekolwiek będą wartości pochodnych cząstkowych drugiego rzędu, rozciąg będzie zawsze zero. Albowiem gdy one mają wartości skończone, mianownik w wyrażeniu (2) będzie skończonym, a wartość rozciągu zero. Gdy $\frac{d^2 f}{dx^2}$ nie jest zero, dwa drugie wyrazy są zero, mianownik jeszcze skończony, i rozciąg zero; nakoniec gdy $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ rozciąg staje się nieoznaczonym, lecz biorąc pochodne co do x będzie:

$$g = 2 \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}}{\frac{d^3 f}{dx^3}}$$

wyrażenie, które będzie zero, dopóki $\frac{df^3}{dx^3}$ nie stanie się zero, co gdy nastąpi, znowu rozciąg nieoznaczony, i udamy się do następnych pochodnych; zatém rozciąg jest zawsze zero, dopóki wszystkie pochodne razem nie są zero.

Gdy przy $\frac{df}{dx} = 0$ pochodne cząstkowe drugiego rzędu $\frac{d^2 f}{dxdy}$ lub $\frac{d^2 f}{dy^2}$ stają się nieskończone, dwa pierwsze wyrazy mianownika ukazują sią pod postacią nieoznaczoną, lecz są w ogóle skończone, i jeszcze rozciąg zero. Gdy przy $\frac{df}{dx} = 0$ jeszcze $\frac{df}{dy} = 0$, podobnie dowodząc jak wyżéj znajdziemy, że zawsze rozciąg jest zero. Gdy pochodna $\frac{df}{dx}$ lub $\frac{df}{dy}$ staje się nieskończoną, rozciąg staje się nieskończonym.

A zatém, jakiekolwiek będą wartości pochodnych drugiego rzędu i następnych, granice rozwijalności równania na szereg otrzymujemy, gdy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu zrównamy z zerem lub nieskończonością. Podobnie rozbierając dowiedziemy, że granice rozwijalności równania otrzymamy, gdy pochodne cząstkowe drugiego rzędu zrównamy z zerem lub nieskończonością.

We wszystkich tych przypadkach, jak to okazaliśmy dla funkcyi o jednéj zmiennéj (§ 134), wypada, że pochodna pierwsza lub druga doświadczają przerwania ciągłości, przez nieskończoność lub urojoność; zatém granice rozwijalności odpowiadają przerwaniu ciągłości pochodnéj pierwszéj lub drugiéj tychże równań.

Ztąd mamy następujące twierdzenie.

Jedna z dwóch zmiennych związanych równaniem nierozwiązalném, daje się rozwinąć na szereg uszykowany według potęg rosnących drugiéj zmiennéj, dopóki ilość porządkująca zachowuje wartości zawarte między granicami, dla których pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu nie stają się zero lub nieskończone.

Prawo proste i dające w każdym razie za pomocą rachunku funkcyi granicznych, wartości żądane granic.

Wysłowienie tego twierdzenia, można zmienić na następne: jedna ze zmiennych daje się rozwinąć na szereg zbieżny według potęg drugiéj, dopóki wartości ilości porządkującéj nie przechodzą granic oznaczonych ciągłością pochodnych pierwszego i drugiego rzędu. Twierdzenie to tak wysłowione, odpowiada znanemu twierdzeniu Cauchego, co do rozwijalności funkcyi saméj w granicach ciągłości funkcyi, i jéj pochodnéj pierwszéj; jakoż tu funkcyą i jéj pochodną zastępują pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu.

195. Równanie (1) daje się zawsze przedstawić w postaci:

$$y = a + x\,\varphi\,(y, x)$$

i gdy $\varphi\,(x, y)$ nie zawiera x, czyli gdy równanie ma postać szczególną:

$$y = a + x\,\varphi\,(y) \tag{3}$$

y daje się bardzo symetrycznie rozwinąć na szereg według potęg rosnących x za pomocą znanego wzóru Lagrange'a dla wartości początkowych zmiennych $x = 0$ i $y = a$.

Lecz trzeba uważać, że równanie (3) jest rozwiązalne co do x:

$$x = \frac{y - a}{\varphi\,(y)}$$

a rozwijając x co do y, rozwinięcie Lagrange'a wychodzi na odwrócenie szeregu danego, i dla tego téż może służyć na ten przypadek.

Granice zbieżności tego szeregu znajdziemy, biorąc pochodne cząstkowe równania (3) które są:

$$\frac{df}{dy} = 1 - x\,\varphi' \;, \quad \frac{df}{dx} = -\,\varphi$$

$$\frac{d^2f}{dy^2} = -\,x\,\varphi'' \;, \quad \frac{d^2\,f}{dydx} = -\,\varphi' \;, \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 0$$

a podstawiając w równanie granic (2) dla wartości dowolnych α i β będzie:

$$x = \alpha \pm \left\{ \frac{1 - x\,\varphi'}{2\,\varphi' - x\,(2\,\varphi'^2 - \varphi\,\varphi'')} \right\}_{(\alpha,\beta)}$$

takie są granice, gdy wartości, x i y są dowolne.

Dla wzoru Lagrange'a, który jest rozwinięciem dla wartości początkowych $x = 0$ i $y = a$; trzeba położyć $\alpha = 0$, $\beta = a$ i będzie:

$$x = \pm \frac{1}{2\,\varphi'(a)} \tag{4}$$

Wyrażenie to granic bardzo proste i godne uwagi, jest odwrotnością z pochodnéj funkcyi φ wziętéj dla wartości $y = a$; lecz zarazem dowodzi, że ten szereg jest uszczególnionym i nie służy, gdy x wychodzi z granic objętych tém wyrażeniem.

196. Gdy mamy rozwinąć za pomocą wzoru Lagrange'a funkcyą:

$$z = \mathrm{F}\,(y) \tag{5}$$

zmiennéj y, związanéj z drugą równaniem (3), to granice zbieżności szeregu otrzymamy, uważając że graniczne (§ 109) są:

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \frac{1}{y'}\;\mathrm{G\,F}\,(y)\,(y)$$

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \frac{\frac{df}{dx}\left(\frac{df}{dy}\right)^2}{2\,\frac{df}{dx}\,\frac{df}{dy}\,\frac{d^2\,f}{dxdy} - \left(\frac{df}{dx}\right)^2\frac{d^2f}{dy^2} - \left(\frac{df}{dy}\right)^2\frac{d^2f}{dx^2}}$$

zatém dla otrzymania granic zbieżności, potrzeba wziąść tę z powyższych wartości granicznych dla $x = 0$ i $y = a$, która daje wartości mniejsze; zatém granice będą:

$$x = \pm \frac{1}{\varphi(a)} \mathrm{G\,F}(y)\,(y)_a$$

$$x = \pm \frac{1}{2\,\varphi'(a)} \tag{6}$$

i z tych weźmiemy najmniejsze.

Zatém funkcya ilości zmiennéj związanéj z drugą równaniem (3) da się rozwinąć na szereg Lagrange'a uszykowany według potęg rosnących zmiennéj, dopóki ta ilość zachowa wartości zawarte między mniejszemi z wartości granic wyznaczonych przez równania powyższe (6).

Wniosek. Gdy funkcya ma graniczną nieskończoną, to ją odrzucimy i mamy twierdzenie:

Wszystkie funkcye zmiennéj y związanéj z drugą równaniem nierozwiązalném, których graniczne są nieskończone, jako to: każda potęga całkowita i dodatna, funkcya wykładnicza, wstawa i dostawa łuku wielokrotnego zmiennéj i t. p. dają się rozwinąć na szereg zbieżny uszykowany według potęg rosnących zmiennéj niezależnéj x w tych samych granicach, w jakich się rozwija samo y z równania danego.

197. Rozwinięcie y na szereg zbieżny przez wzór Lagrange'a związanéj ze zmienną x równaniem jest właściwie rozwinięciem jednego z pierwiastków tego równania dla danéj wartości x; ważną więc jest rzeczą poznać, który z pierwiastków jest objęty tém rozwinięciem.

Otóż granice zbieżności rozwiązują zupełnie to pytanie.

Jakoż, ponieważ te granice są zawarte między $\pm \frac{1}{2\,\varphi'(a)}$ czyli między 0 i $+ \frac{1}{2\,\varphi'(a)}$ i $0 - \frac{1}{2\,\varphi'(a)}$ przeto stosownie jak x jest dodatne lub odjemne, jest to pierwiastek sąsiedni pierwiastkowi odpowiedniemu $x = 0$, dodatny lub odjemny, według tego jak x, bierzemy dodatne lub odjemne.

Tu widzimy, że rozwinięcie Lagrange'a daje jeden z dwóch pierwiastków blizkich pierwiastkowi $x = 0$, i innych wcale nie daje; chcąc je znaleźć, trzeba się udać do ogólniejszego rozwinięcia podanego w § 194.

198. Laplace zastosował szereg Lagrange'a do ogólniejszéj postaci funkcyi, lecz zawsze w granicach tych samych, oznaczonych dla szeregu pierwszego. Jakoż wzór Laplace'a rozwija dowolną funkcyą:

$$u = \mathrm{F}\,(y) \tag{7}$$

zmiennéj y związanéj z drugą x, równaniem:

$$y = \mathrm{f}\,(a + x\,\varphi\,(y)) \tag{8}$$

dla wartości $x = 0$ i $y = \mathrm{f}\,(a) = b$. A oznaczając:

$$z = a + x\,\varphi\,(y) \tag{a}$$

mamy:

$$u = \mathrm{F}\,(\mathrm{f}\,(z)) \tag{b}$$

to jest: mamy rozwinąć funkcyą F (f) zmiennéj z, związanéj z x równaniem (8). Graniczne téj funkcyi są teraz:

$$\mathrm{G}\,u\,(x) \begin{cases} = \dfrac{1}{y'_x}\,\mathrm{G\,F}\,(y)\,(y) \\ = \dfrac{1}{z'_x}\,\mathrm{G\,f}\,(z)\,(z) \\ = \mathrm{G}\,z\,(x) \end{cases}$$

zatém granice tego szeregu będą, podstawiając wartości za y'_x i z'_x dla $x = 0$ i $y = b$, wyciągnięte z równań (8) i (a):

$$\begin{aligned} x &= \pm\,\frac{\mathrm{G\,F}\,(y)\,(y)_a}{\mathrm{f}'\,(a)\,\varphi\,(b)} \\ x &= \pm\,\frac{\mathrm{G\,f}\,(z)\,(z)_a}{\varphi\,(b)} \qquad (9) \\ x &= \pm\,\frac{1}{2\,\varphi'\,(b)} \end{aligned}$$

z których potrzeba wziąść najmniejsze; granice te są takież same jak dla szeregu Lagrange'a, tylko przybywa trzecia zależąca od postaci funkcyi f.

199. Nakoniec Burmann podał rozwinięcie funkcyi na szereg według potęg rosnących innéj funkcyi téjże zmiennéj, wywodząc go z szeregu Lagrange'a; jakoż rozwijając według wzoru tego funkcyą F (y), gdzie y związane z x równaniem:

$$y = a + x\,\varphi(y)$$

według potęg x, to rozwinięcie można uważać jako dopełnione według potęg:

$$x = \frac{y-a}{\varphi(y)} = \mathrm{f}(y)$$

f (y); gdzie funkcya ta musi mieć postać:

$$\mathrm{f}(y) = \frac{y-a}{\varphi(y)}$$

Granice zbieżności tego rozwinięcia, wyrażają się przez funkcyą graniczną:

$$\mathrm{G\,F}(y)\,(\mathrm{f}(y))$$

która na mocy § 108 daje:

$$\mathrm{G\,f}(y)\,(\mathrm{f}(y)) \begin{cases} = \dfrac{\mathrm{f}'^2}{\mathrm{f}''} \\ = \mathrm{f}'\,\mathrm{G\,F}(y)\,(y) \end{cases}$$

a że $\mathrm{f}(y) = \dfrac{y-a}{\varphi(y)}$, zatém kładąc wartość za f′ i f″ dla wartości $x = 0$ i $y = a$ otrzymamy:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm \frac{1}{2\varphi'(a)} \\ x &= \pm \frac{\mathrm{GF}(y)(y)_a}{\varphi(a)} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

z których weźmiemy te, które są mniejsze.

Wszystkie więc te wzory rozwinięcia są szczególne a nie ogólne, i zależne ściśle od wartości początkowéj a, otrzymanéj z równania danego dla $x = 0$; przeto nie służą, gdy wartość x wychodzi za granice wyżéj wskazane (*).

200. Gdy mamy rozwinąć na szereg funkcyą o dwóch zmiennych:

(*) Porównaj: Schlömilch. „Compedium der höheren analysis.“ Braunschweig. T. 2. 1865, kar. 96. O szeregach Burmanna i Lagrange'a.

$$z = \mathrm{F}(x, y) \tag{a}$$

związanych z sobą równaniem nierozwiązalném:

$$\mathrm{f}(x, y) = 0 \tag{b}$$

dla początkowych wartości dowolnych $x = a$ i $y = b$, sprawdzających równanie (b), według potęg rosnących któréjkolwiek z ilości wziętéj za porządkującą $x - a$ lub $y - b$, granice zbieżności otrzymamy, równając tę porządkującą z funkcyą graniczną, dającą wartości najmniejsze dla tych zmiennych. A że w tym przypadku graniczne według § 111 są trzy, a mianowicie:

$$\mathrm{G}\, z\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\, \dfrac{d\mathrm{F}}{dx}(x) \\ = \mathrm{G}\, \dfrac{d\mathrm{F}}{dy}(x) \\ = \mathrm{G}\, \dfrac{dy}{dx}(x) \end{cases}$$

zatém otrzymamy równania zbieżności:

$$\begin{aligned} x &= a \pm \left\{\mathrm{G}\, \frac{d\mathrm{F}}{dx}(x)\right\}_{(a,\ b)} \\ x &= a \pm \left\{\mathrm{G}\, \frac{d\mathrm{F}}{dy}(x)\right\}_{(a,\ b)} \\ x &= a \pm \left\{\mathrm{G}\, \frac{dy}{dx}(x)\right\}_{(a,\ b)} \end{aligned} \tag{c}$$

z których potrzeba wziąść dla granic wartości najmniejsze.

Przeto otrzymamy następujące twierdzenie:

Funkcya o dwóch zmiennych związanych z sobą równaniem, daje się rozwinąć na szereg zbieżny, uszykowany według potęg rosnących jednéj z ilości wziętéj za porządkującą dla wszystkich wartości téj zmiennéj, zawartych między granicami oznaczonemi przez wartości najmniejsze, jakie dają równania zbieżności.

201. Gdy mamy rozwinąć na szereg funkcyą o jednéj zmiennéj wyrażoną pod postacią całki:

$$\int \mathrm{f}(x)\, dx$$

rozwiniemy funkcyą f (x) na szereg według potęg ilości $(x - a)$ dla początkowéj wartości funkcyi f (a), postaci:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \ldots$$

a mnożąc przez dx i całkując, otrzymamy:

$$\int f(x)\,dx = C + \frac{(x-a)}{1} f(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f'(a) \ldots \qquad (a)$$

potrzeba tylko podać jego równanie zbieżności.

Jakoż równanie zbieżności zawsze wyrazi się przez graniczną danéj funkcyi, to jest:

$$x = a \pm G \int f(x)\,(x)_a \qquad (b)$$

a że według § 85, graniczna całki jest taż sama co pochodnéj, zatém równanie zbieżności będzie:

$$x = a \pm G\, f(x)\,(x)_a$$

202. Podobnym sposobem łatwo rozwinąć na szereg według potęg rosnących, każde równanie różniczkowe rzędu i stopnia jakiegokolwiek.

Jakoż gdy równanie jest rozwiązalne co do najwyższego rzędu pochodnéj postaci:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots) \qquad (a)$$

z tego wyrażenia różniczkując, łatwo otrzymamy wszystkie następne pochodne, i oznaczając je dla wartości $x = a$ przez y_a, y'_a . . ., otrzymamy rozwinięcie:

$$y = y_a + \frac{x-a}{1} y'_a + \frac{(x-a)^2}{2!} y_a'' + \cdots \qquad (b)$$

wyrażone w funkcyi wartości spółczynników początkowych y_a, y'_a . . . $y_a^{(n-1)}$, które zostają dowolne.

Równanie zbieżności tego rozwinięcia jest:

$$x = a \pm G\, y\,(x)_a$$

a że według § 85, graniczna funkcyi y i wszystkich pochodnych jest taż sama, przeto otrzymamy:

$$x = a \pm \mathrm{G}\, y^{(n)}\, (x)_a \tag{c}$$

Podobnie według § 113, znajdziemy równanie zbieżności dla rozwinięcia równania różniczkowego, nierozwiązalnego dla pochodnéj najwyższego rzędu, albowiem biorąc następną pochodną równania danego, otrzymamy równanie rozwiązalne co do téj następnéj pochodnéj, i zastosujemy do niéj rozwinięcie powyższe.

203. Gdy rozwijamy nakoniec na szereg funkcyą o dwóch zmiennych niezależnych:

$$z = \mathrm{F}\,(x, y)$$

według rosnących potęg obu zmiennych, dla początkujących wartości a i b jakichkolwiek, otrzymamy na granice uważając x za stałe, wyrażenie:

$$y = b \pm \mathrm{G\,F}\,(x, y)\,(y)_{(a,\,b)}$$

a uważając y za stałe, wyrażenie:

$$x = a \pm \mathrm{G\,F}\,(x, y)\,(x)_{(a,\,b)}$$

i łącząc oba te warunki, będziemy mieli wartości graniczne dla x i y, między któremi, gdy one będą zawarte, szereg będzie zbieżnym.

Podobnież łatwo rozciągnąć powyższe prawo do funkcyi o wielu zmiennych, tak skończonych jak całkowych, lub różniczkowych.

ROZDZIAŁ SIÓDMY.

PRZYKŁADY OZNACZENIA GRANIC ZBIEŻNOŚCI RÓWNAŃ I FUNKCYI O WIELU ZMIENNYCH.

204. Podamy tu kilka przykładów, a najprzód weźmiemy pod rozbiór zadanie przedstawione równaniem:

$$y + x \text{ wst } y = b$$

które wyraża ruch elliptyczny planet, gdzie y jest anomalia excentryczna, b anomalia średnia, x stosunek mimośrodu do osi wielkiéj orbity.

Z równania tego potrzeba y rozwinąć na szereg dla początkowych wartości $x = 0$ i $y = b$, uszykowany według potęg rosnących ilości x; zatém na mocy § 194 będzie:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \frac{-(1-x \operatorname{dos} y)^2}{2 \operatorname{dos} y + x\,(1-3 \operatorname{dos}^2 y)}$$

a dla $x = 0$ i $y = b$, będzie:

$$\mathrm{G}\, y\,(x)_{(0,\,b)} = -\frac{1}{2 \operatorname{dos} b}$$

Zatém granice zbieżności tego szeregu będą:

$$x = \pm \frac{1}{2 \operatorname{dos} b}$$

a rozciąg:

$$\mathrm{g} = \frac{1}{\operatorname{dos} b}$$

Gdy b będzie miało wartości zawarte od 0 do $\frac{\pi}{2}$, to granice dla x będą zmieniać się od $\pm\frac{1}{2}$ do $\pm\infty$. Ztąd naodwrót wypada, że dla jakiéjkolwiek wartości ilości b, szeregi będą zawsze zbieżne, gdy x będzie mniejsze od $\frac{1}{2}$ czyli 0,5.

To wyraża więc twierdzenie: że *szeregi które wyrażają pierwiastki ruchu planet, uszykowane według potęg rosnących mimośrodu, są zbieżne dla wszystkich wartości tegoż mniejszych od* $\frac{1}{2}$.

Oznaczając połowy osi ellipsy przez a i b, mimośród przez c, będzie (fig. 7):

$$x = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{.a} = \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OA}}$$

zatém:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{2}, \text{ daje } \frac{\mathrm{OE}}{\mathrm{OA}} = \frac{1}{2} \text{ czyli } \mathrm{OE} = \frac{1}{2}\mathrm{OA}$$

Jest to ellipsa, któréj ogniska przypadają w środku pół osi wielkiéj. A że gdy $c = 0$ ellipsa zmienia się na koło, zatém wszystkie ellipsy mające za granice koło i ellipsę, mającą ogniska w środku osi wielkiéj, mają tę własność, że ich części składowe dają się rozwinąć na szeregi zbieżne, uszykowane według potęg rosnących mimośrodu dla wszystkich wartości tych części składowych.

Inne zaś ellipsy mające większe spłaszczenie, czyli większy mimośród nie mają téj własności, i w tym przypadku tylko części krzywéj CAC′ i DA′D′ będą objęte szeregiem zbieżnym, dla części zaś DC i D′C′, szeregi będą rozbieżne.

Laplace pierwszy tę granicę oznaczył na 0,66195 przez porównanie tego szeregu z innemi, których granice wprost można oznaczyć, lecz porównanie takie nie daje prawdziwéj wartości. Cauchy przyszedł do téj saméj granicy jak Laplace, używając ilości urojonych do dowodu, co jak wiemy (§ 64 i 104) nie prowadzi również do wypadków ścisłych. Granica ta jak widzimy jest za wielka, i szeregi od 0,5 do 0,66195 nie są rzeczywiście zbieżne (*).

Rozwiązanie powyższe wypadające z naszéj teoryi, godne uwagi przez swą prostotę dowodu i wypadku.

205. Gdy w równaniu powyższém chcemy rozwinąć na szereg nie y, a jedną z funkcyi y, postaci:

$$y^n\ ,\ e^y\ ,\ \text{wst}\, my,\ \text{dos}\, my,$$

gdzie n całkowite i dodatne, m jakiekolwiek; to na zasadzie wniosku § 196, ponieważ te funkcye mają graniczne nieskończone, przeto będą miały granice takież same, jak sama funkcya y.

Lecz nie tak jest, gdy mamy rozwinąć na szereg potęgę odjemną, lub ułamkową, albo logarytm z y; funkcye te nie dają się w tych samych granicach rozwinąć na szereg, albowiem mamy teraz dwie graniczne:

$$\text{G f}\,(y)\,(x)\begin{cases} = y \\ = \dfrac{1}{2\,\text{dos}\, y}\end{cases}$$

a dla wartości $y = b$ granice stają się:

$$x_1 = \pm\, b$$

$$x_2 = \pm\, \frac{1}{2\,\text{dos}\, b}$$

gdy b zmienia się, granice te rozmacicie się zmieniają, jakoż będzie:

$$b = 0\ \ldots\ \frac{\pi}{2}\ \ldots\ \pi\ \ldots\ \frac{3}{2}\pi\ \ldots$$

$$x_1 = 0\ \ldots\ \frac{\pi}{2}\ \ldots\ \pi\ \ldots\ \frac{3}{2}\pi\ \ldots$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\ \ldots\ \infty\ \ldots\ \frac{1}{2}\ \ldots\ \infty\ \ldots\ \text{i t. d.}$$

granice pierwsze rosną ciągle, gdy drugie peryodycznie się zmie-

(*) Patrz. Cauchy, „Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique:" Paris 1840, tome I, page 280 i następne.

niają. Dla wartości b od 0 do $\frac{\pi}{2}$, x_1 ma wartości zawsze mniejsze od x_2, a dla wartości b od $\frac{\pi}{2}$ do ∞, x_2 ma za granicę minimum $\frac{1}{2}$.

Zatém szeregi rozwinięcia potęg odjemnych, ułamkowych, logarytmów z y, dla b zawartego między 0 i $\frac{\pi}{2}$, są zbieżne, gdy x mniejsze od b; dla wartości zaś $b > \frac{\pi}{2}$, są zawsze zbieżne, gdy x nie przechodzi 0,5.

Pierwsza część tego twierdzenia t. j. dla potęgi całkowitéj i dodatnéj, funkcyi wykładniczéj, lub wstawy i dostawy łuku wielokrotnego z y, dowiedzioną została po szczególe dla każdéj funkcyi przez Laplace'a. Cauchy dowiódł ogólnie téj własności zawsze dla wartości mimośrodu od 0 do 0,66195. Druga zaś część tego twierdzenia dla potęg odjemnych, pierwiastków i logarytmów z y nie była dotąd dowiedziona; podajemy ją więc jako dopełnienie twierdzenia Laplace'a.

206. Równanie:

$$y - \frac{1}{2} x (y^2 - 1) = b \qquad \text{(a)}$$

powstające z równania:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2bx + x^2}}$$

daje się rozwinąć na szereg dla wartości początkowych $x = 0$ i $y = b$ według potęg rosnących x za pomocą wzoru Lagrange'a, a granice zbieżności będą, uważając że:

$$G\,y\,(x) = \frac{(1 - xy)^2}{2y\left(1 - \frac{xy}{2}\right) - x}$$

a ztąd dla $x = 0$ i $y = b$ będzie:

$$x = \pm \frac{1}{2b}$$

Zatém gdy $b = 0$ i gdy równanie zamieni się na:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

y rozwija się na szereg zawsze zbieżny dla jakiéjkolwiek wartości, gdyż granice stają się nieskończone. Gdy b powiększa się, granice się zmniejszają; a gdy $b = \infty$, granice stają się zero.

Gdy mamy daną funkcyą o dwóch zmiennych:

$$z = \frac{1}{1-xy} \tag{b}$$

związanych powyższém równaniem (a), to toż samo znaczy, jak łatwo się przekonać co:

$$z = \frac{1}{\sqrt{1-2\,b\,x+x^2}} \tag{c}$$

albowiem równanie (a) daje:

$$xy = 1 \pm \sqrt{1-2\,b\,x+x^2}$$

Granice zbieżności funkcyi z będą w liczbie trzy:

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \mathrm{G}\,\frac{dz}{dx}\,(x) = \frac{1-xy}{y}$$

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \mathrm{G}\,\frac{dz}{dy}\,(y) = \frac{1-xy}{x}$$

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \mathrm{G}\,\frac{dy}{dx}\,(x) = \frac{(1-xy)^2}{2\,y\left(1-\frac{1}{2}\,xy\right)-x}$$

a dla $x = 0$ i $y = b$ będzie:

$$x = \pm\,\frac{1}{b},\quad x = \pm\,\infty,\quad x = \pm\,\frac{1}{2b}.$$

Z tych najmniejsze granice są ostatnie, i te służyć będą dla funkcyi, zatém ta funkcya rozwija się na szereg w tych samych granicach, co i samo y.

Biorąc wprost granice wyrażenia (c), będzie:

$$\mathrm{G}\,z\,(x) = \frac{1-2\,b\,x+x^2}{2\,(b-x)}$$

a dla $x = 0$ i $y = b$ będzie:

$$x = \pm \frac{1}{2b}$$

granice takież same jak wyżéj.

207. Weźmy jeszcze równanie:

$$y - x \log y = b$$

dla początkowych wartości $x = 0$ i $y = b$, y daje się rozwinąć na szereg w granicach, które otrzymamy z wyrażenia:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \frac{(y - x)^2}{2\,(y - x) - x \log y}$$

ztąd:

$$x = \pm \frac{1}{2}\, b$$

zatém gdy x będzie mniejsze od $\frac{1}{2}\, b$, szeregi będą zawsze zbieżne.

Gdy mamy:

$$y - x\, e^y = b$$

dla tychże samych wartości początkowych:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \frac{(1 - xe^y\,)^2}{e^y\,(2 - xe^y\,)}$$

ztąd:

$$x = \pm \frac{1}{2\, e^b}$$

Gdy b jest dodatne, i gdy rośnie od 0 do nieskończoności, granice dla x ubywają od $\pm \frac{1}{2}$ do zera, i szeregi będą zawsze zbieżne w granicach zależnych od b, a dla $b = \infty$ stają się rozbieżne. Gdy zaś b jest odjemne, i gdy rośnie od zera do ∞, granice x rosną od $\frac{1}{2}$ do nieskończoności; i szeregi będą zawsze zbieżne dla wartości x mniejszych od $\frac{1}{2}$.

208. Wzór Lagrange'a szczególniéj daje się zastosować do rozwiązania równań algebraicznych, jakoż każde równanie stopnia n go:

$$\varphi_n\,(x) = 0 \tag{1}$$

można napisać tak:

$$x\,\varphi_{n-1}\,(x) = a_0 \tag{2}$$

gdzie φ_{n-1} oznaczą wielomian stopnia $n-1$, a a_0 wyraz stały równania, i można zawsze rozwinąć x na szereg zbieżny, ułożony według rosnących potęg spółczynnika a_0 dla wartości początkowych $a_0 = 0$ i $x = 0$ i rozwinięcie będzie miało postać:

$$x_1 = \sum \frac{a_0^n}{n!} \left\{ \frac{d^n \left(\frac{1}{\varphi_{n-1}}\right)^n}{dx^n} \right\}_0$$

co ogólnie oznaczymy przez skrócenie:

$$x_1 = \Sigma\, a_0\, \varphi_{n-1}\,(0)$$

a granice zbieżności będą:

$$a_0 = \pm \left(\frac{\varphi^2{}_{n-1}}{2\varphi'{}_{n-1}}\right)_0 = \pm \frac{a_1^2}{2a_2} \tag{a}$$

A zatém szereg będzie wyrażać jeden z pierwiastków danego równania, gdy a_0 będzie zawarte między granicami powyższemi; a że gdy $a_0 = 0$ mamy $x = 0$, i gdy a_0 rośnie ku jednéj z granic, x także rośnie i szereg przedstawia tę wartość x aż dopóki a_0 nie dojdzie do wartości $\frac{a_1^2}{2a_2}$; przeto pierwiastek zawarty jest między zero i pewną wartością; jest więc to pierwiastek blizki zera, i dodatny lub odjemny według tego, jaki ma znak wyraz stały a_0 przeniesiony na stronę drugą, czyli znaku przeciwnego z ostatnim wyrazem.

Istnienie tego pierwiastku zależy od wartości a_0 i gdy $a_0 > \frac{a_1^2}{2a_2}$ pierwiastek ten przestaje istnieć, gdyż go szereg przestaje wyrażać, a granicą tego istnienia jest warunek:

$$2\,a_0\,a_2 = a_1^2$$

Równanie (2) będzie dopełnioném, gdy dla $a_0 = 0$ weźmiemy dla x jeden z pierwiastków równania $\varphi_{n-1}(x) = 0$ a oznaczając go przez α_1 można dopełnić rozwinięcie x według potęg a_0 dla wartości początkowéj α_1 byleby a_0 zawarte było w granicach dających ten szereg zbieżnym.

Pozostaje tylko znaleźć pierwiastek równania $\varphi_{n-1}(x) = 0$, które można napisać:

$$x\,\varphi_{n-2}(x) = a_1 \tag{3}$$

i według powyższego znajdziemy jeden z jego pierwiastków przez rozwinięcie:

$$\alpha_1 = \Sigma\, a_1\, \varphi_{n-2}(0)$$

w granicach:

$$a_1 = \pm \frac{a_2^2}{2a_3} \tag{b}$$

gdy więc a_1 dopełnia warunku (b) szereg dający α_1 będzie zbieżnym, a zatém aby rozwinięcie drugiego pierwiastku miało miejsce, koniecznym jest warunek:

$$2\, a_1\, a_3 < a_2^2$$

Tak daléj postępując dowiedziemy łatwo, że aby wszystkie pierwiastki mogły być rozwinięte na szeregi, spółczynniki równania powinny dopełniać warunków następnych:

$$\left.\begin{array}{c} 2\, a_0\, a_2 < a_1^2 \\ 2\, a_1\, a_3 < a_2^2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 2\, a_{n-2}\, a_n < a_{n-1}^2 \end{array}\right. \tag{c}$$

lecz odwrotnie nie ma miejsca, a uważając że każdy warunek niedopełniony, sprowadzać musi dwa pierwiastki urojone; zatém odwracając te warunki, otrzymamy twierdzenie:

Ile kwadratów ze współczynników jest mniejszych od podwójnych iloczynów z sąsiednich spółczynników pierwszym, taka jest podwójna ilość pierwiastków urojonych w równaniu.

I tak, w równaniu:

1° $\qquad (x^2-2x+3)^2 = x^4-4x^3+10x^2-12x+9=0$

mamy:

$$16 < 20$$
$$100 > 96$$
$$144 < 180$$

przeto wszystkie cztery pierwiastki są urojone.

2^0 $(x^2-2x+3)(x^2-2x-3)=x^4-4x^3+4x^2+0x+9=0$

daje:

$$16 > 8$$
$$16 > 0$$
$$0 < 72$$

przeto dwa pierwiastki są urojone w tém równaniu.

209. Niech daną będzie funkcya elliptyczna (§ 101)

$$\mathrm{E}\,(c, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2\, \varphi}\; d\,\varphi$$

rozwijając funkcyą pod znakiem całkowym według wzoru (1, § 200) w założeniu $a = 0$, otrzymamy:

$$\mathrm{E}\,(e, \varphi) = \varphi - \frac{1}{2}\, c^2 \int_0^\varphi \mathrm{wst}^2\, \varphi\, d\,\varphi - \frac{1}{2}\, c^4 \int^\varphi \mathrm{wst}^4 \varphi\, d\,\varphi - \ldots$$

a ponieważ rozwinięcie następuje według $\mathrm{wst}^2\,\varphi$ i graniczna (§ 101):

$$\mathrm{G} \sqrt{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2\, \varphi}\; (\mathrm{wst}^2\, \varphi) = \frac{1 - c^2 \,\mathrm{wst}^2\, \varphi}{c^2}$$

dla $\varphi = 0$ ma wartość $\frac{1}{c^2}$; przeto równanie zbieżności jest:

$$\mathrm{wst}^2\, \varphi = \pm \frac{1}{c^2} \quad \text{czyli} \quad \mathrm{wst}\, \varphi = \pm \frac{1}{c}$$

Zatém szereg powyższy jest zbieżnym dla wartości wst φ, zawartych między $\frac{1}{c}$ i $-\frac{1}{c}$. A że c jest excentrycznością ellipsy, i jest zawsze ułamkiem; przeto $\frac{1}{c}$ jest liczbą większą od jedności, to jest granice dla wstawy są większe od jedności, a zatém szereg powyższy jest zbieżnym dla wszystkich wartości φ, jakakolwiek będzie wartość c.

ROZDZIAŁ ÓSMY.

PORÓWNANIE TEORYI FUNKCYI GRANICZNYCH Z TEORYĄ FUNKCYI CAUCHEGO.

---

212. Po ukończeniu zastosowania rachunku funkcyi granicznych, do rozwijania funkcyi na szeregi zbieżne, podamy tu kilka twierdzeń, które wynikają z porównania naszéj teoryi funkcyi granicznych z teoryą funkcyi Cauchego.

Wiemy, że funkcya ilości zmiennéj x jest *skończoną*, gdy dla wszystkich wartości x rzeczywistych i skończonych nie staje się nieskończenie wielką.

Twierdzenie 1. *Funkcya graniczna funkcyi danéj jest zawsze skończoną.*

Albowiem w rachunku funkcyi granicznych dowiedliśmy, że graniczna jest stosunkiem pewnéj funkcyi, w skład funkcyi danéj wchodzącéj do swéj pochodnéj, a dla szczególnych postaci funkcyi, jest nieskończoną.

Gdy więc funkcya dana $\mathrm{F}(x)$ staje się nieskończoną dla skończonéj wartości zmiennéj $x = a$, musi koniecznie mieć postać:

$$u = \mathrm{F}(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{\varphi(x-a)}$$

w któréj $\mathrm{f}(x)$ ma wartość skończoną dla $x = a$, a $\varphi(x-a)$ staje się zero dla tejże wartości.

A że graniczne funkcyi takiéj są.

210. Równanie różniczkowe pierwszego rzędu nazwane Riccatego:

$$y' + ay^2 = bx^m$$

można rozwinąć na szereg (b, § 202) w założeniu $x = 0$ i $y = y_0$; jakoż biorąc pochodne mamy:

$$y' = - a\, y_0^2$$

$$y'' = 2!\, a^2\, y_0^3$$

$$y''' = - 3!\, a^3\, y_0^4$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$y^{(n)} = \pm\, n!\, a^n\, y_0^{n+1}$$

zatém będzie:

$$y = y_0 \{1 - a\, y_0\, x + a^2\, y_0^2\, x^2 - a^3\, y_0^3\, x^3 + \ldots\}$$

gdzie wyraz n ty ma formę bardzo prostą.

$$u_n = a^n\, y_0^{n+1}\, x^n$$

Równanie zbieżności tego szeregu znajdziemy, uważając że:

$$\mathrm{G}\, y\,(x) = \frac{y}{y'} = \frac{y}{-ay^2 + bx^m}$$

dla $x = 0$ i $y = y_0$ daje:

$$\mathrm{G}\, y\,(x)_0 = - \frac{1}{ay_0}$$

zatém:

$$x = \pm \frac{1}{ay_0}$$

co téż otrzymujemy ze stosunku wyrazów n tych, jakoż:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{a\, y_0\, x}$$

równając z ± 1 dla $n = \infty$, daje tęż samą co wyżéj wartość, jak być powinno.

211. W § 116 dowiedliśmy ogólnéj własności, że funkcye wyrażone przez równania różniczkowe postaci:

$$y' = \{\mathrm{A}(y)\}^{\frac{v-1}{v}}$$

gdzie $\mathrm{A}\,(y)$ jest funkcyą algebraiczną z y, do których należą wstawa, dostawa, funkcya elliptyczna λ (x), i t. p., mają graniczne nieskończone; przeto te funkcye dają się rozwinąć na szeregi zbieżne dla wszystkich wartości x, i te szeregi mogą być wzięte za ich definicye.

Zatém, *nietylko funkcye całkowite, wykładnicze, wstawy i dostawy łuków wielokrotnych, lecz jeszcze elliptyczna i jéj podobne, których pochodne są pierwiastkiem stopnia* $\frac{v-1}{v}$ *z funkcyi algebraicznéj całkowitéj saméj funkcyi, mają ogólną własność, że ich graniczne są nieskończone, i rozwijają się na szeregi dla wszystkich wartości zmiennéj* x, *czyli że te szeregi są definicyami tych funkcyi.*

Ważne i godne uwagi to twierdzenie, odkrywa nam własności całego szeregu funkcyi, które mogą być wzięte za podstawę ich teoryi; tak jak funkcya λ (x) służy za podstawę teoryi funkcyi elliptycznych (*).

(*) Patrz: Briot et Bouquet. „Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques.“ Paris 1859.

$$\mathrm{G}\,u\,(x)\left\{\begin{array}{l} = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x) \\ = \mathrm{G}\,\varphi\,(x-a)^{-1}\,(x) = \dfrac{\varphi\,(x-a)}{\varphi'\,(x-a)} \end{array}\right.$$

Pierwsza jest graniczną funkcyi f (x) która ma wartości skończone dla $x = a$, druga jest graniczną funkcyi $\varphi\,(x)$ i jest skończoną dla $x = a$, a mianowicie równa zero, dopóki φ' nie zero, gdy zaś $\varphi' = 0$ graniczna staje się nieoznaczoną, lecz biorąc pochodne, będzie:

$$\mathrm{G}\,\varphi\,(x-a)^{-1}\,(x) = \frac{\varphi'}{\varphi''}$$

i znowu ma wartość zero dla $x = a$, dopóki φ'' nie jest zero. Tak daléj postępując dowiedziemy, że funkcya ta nigdy nie może stać się nieskończoną, a zatém jest zawsze skończoną.

213. Mówimy że funkcya jest *ciągłą*, gdy dla wszystkich wartości skończonych x, nie nabywa wartości urojonych.

Twierdzenie 2. *Funkcya graniczna funkcyi danéj jest zawsze funkcyą ciągłą.*

Albowiem, gdy funkcya dana przestaje być ciągłą dla wartości skończonéj $x = a$, to musi miéć postać:

$$u = \mathrm{F}\,(x) = \mathrm{f}\,(x)\,\{\varphi\,(x-a)\}^m$$

gdzie f (x) zostaje ciągłą dla $x = a$; a $\varphi\,(x - a)$ jest funkcyą, która zmienia znak, gdy x przechodzi przez wartość $x = a$; a m wykładnik ułamkowy.

A że graniczne téj funkcyi są:

$$\mathrm{G}\,u\,(x)\left\{\begin{array}{l} = \mathrm{G}\,\mathrm{f}\,(x)\,(x) \\ = \mathrm{G}\,\{\varphi\,(x-a)\}^m\,(x) = \dfrac{\varphi\,(x-a)}{\varphi'\,(x-a)} \end{array}\right.$$

z których pierwsza jest graniczną funkcyi f (x), która jest ciągłą dla wartości $x = a$, druga jest graniczną funkcyi φ i jest skończoną dla jakichkolwiek wartości x, a w przechodzie gdy $x = a$ staje się zero, jakiekolwiek będzie φ, jak to dowiedliśmy wyżéj; przeto graniczna ma zawsze wartość skończoną dla wartości

$x = a$ przerywającéj ciągłość funkcyi danéj, przeto graniczna funkcyi danéj, jest zawsze *ciągłą*.

214. Cauchy nazywa funkcyą *monogeniczną* (monogène) każdą funkcyą, któréj pochodna pierwsza ma wartość jedną, i oznaczoną dla wartości szczególnych zmiennéj.

Twierdzenie 3 *Funkcya graniczna danéj funkcyi jest zawsze funkcyą monogeniczną.*

Albowiem dowiedliśmy (§ 104), że graniczne jakiejkolwiek funkcyi urojonéj są rzeczywiste, a że funkcya rzeczywista:

$$u = F(z)$$

jest zawsze funkcyą monogeniczną, albowiem ma zawsze jedną oznaczoną wartość dla pochodnéj, a tą jest:

$$\frac{du}{dz} = F'(z)$$

jakoż czyniąc:

$$z = x + y\,i$$

będzie:

$$dz = dx + i\,dy$$

a że:

$$du = D_z\, F(z)\,(dx + i\,dy)$$

przeto:

$$\frac{du}{dz} = D_z\, F(z) = F'(z)$$

zatém graniczna jest zawsze *monogeniczną*.

215. Funkcya zaczynając od wartości $x = a$ może nabywać wiele wartości, czyli może zmieniać się począwszy od $x = a$ w kilku kierunkach, tak że idąc po którymkolwiek z nich, możemy znowu dojść do wartości innéj $x = b$, dla któréj kilka z tych kierunków schodzą się z sobą. Cauchy część funkcyi zawartą między temi wartościami zmiennéj, doświadczającą zmian w pewnym oznaczonym kierunku nazywa *monodromiczną*, (monodrome), w téj części jéj rozciągłości.

Twierdzenie 4. *Funkcya graniczna jest zawsze funkcyą monodromiczną.*

Funkcya dana F (x), aby mogła mieć dla wartości oznaczonéj x wartości różne, musi być pewną funkcyą z funkcyi współmiernéj, oznaczmy ją przez:

$$u = \mathrm{F}(x) = \Phi(\mathrm{f}(x))$$

gdzie f (x) jest funkcya współmierna czyli monodromiczna, a Φ funkcya z funkcyi f nie mająca téj własności. A że według § 89, graniczne funkcyi z funkcyi są:

$$\mathrm{G}\, u\,(x) \begin{cases} = \mathrm{G}\, \mathrm{f}\,(x)\,(x) \\ = \dfrac{\mathrm{G}\, \Phi\, \mathrm{f}\,(x)\,(\mathrm{f}\,(x))}{\mathrm{f}'\,(x)} \end{cases}$$

z których pierwsza ma dla wartości x jedną i oznaczoną wartość, bo taką ma i sama funkcya f (x), druga sprowadza się do granicznéj saméj funkcyi Φ (y), co do y branéj, która nie posiada téj własności. Gdy więc funkcya Φ (y) ma wiele wartości, to koniecznie w przechodzie wartości, gdy x zmieniając się ciągle przechodzi przez $x = a$, w funkcyi muszą znikać wyrazy dające wiele wartości, i poczynając od téj wartości pewne wyrazy, dające wiele wartości i znikające dla $x = a$, w funkcyi nabywają wartości; oznaczając te wyrazy przez φ (y), a inne przez ψ (y), będzie:

$$\Phi\,(y) = \psi\,(y) + \varphi\,(y)$$

a że graniczne takiego wyrażenia są:

$$\mathrm{G}\,\Phi\,(y) \begin{cases} = \mathrm{G}\,\psi\,(y) \\ = \mathrm{G}\,\varphi\,(y) \end{cases}$$

przeto znowu graniczna wyraża się przez funkcyą szczególną φ oddzielnie uważaną.

Funkcya więc ta φ nie posiada już żadnych innych wyrażeń, jak tylko te, które nabywają wiele wartości dla oznaczonéj wartości y. A że wiemy, że graniczna jest nieskończoną, lub stosunkiem funkcyi do jéj pochodnéj, przeto:

$$G\,\varphi(y) = \infty \text{ lub } \frac{\varphi}{\varphi'}$$

gdzie w obu razach graniczna ma już wartość oznaczoną, i jedną, a zatém jest monodromiczną.

216. Cauchy nazywa funkcye które są skończone, ciągłe monogeniczne i monodromiczne, funkcyami *synektycznemi* (synectique) a zatém z powyższych twierdzeń wypada:

Twierdzenie 5. *Każda funkcya graniczna danéj funkcyi, jest skończoną, ciągłą, monogeniczną, i monodromiczną, czyli jest funkcyą synektyczną w całéj swéj rozciągłości.*

A że funkcye graniczne otrzymują się z funkcyi danéj według pewnych prawideł rachunku funkcyi granicznych, zatém niczem innem nie są, tylko pewnemi funkcyami w skład funkcyi danéj wchodzącemi, a że są zawsze synektyczne, chociaż dana może nie być synektyczną; przeto muszą zawierać w sobie wszyskie własności synektyczności w funkcyi danéj zawarte. Tym sposobem własności synektyczności funkcyi, potrafiliśmy za pomocą rachunku funkcyi granicznych wyciągnąć z funkcyi.

Teorya więc Cauchego, tak dalece zgodną jest z naszą, że w twierdzeniach Cauchego, dosyć jest podstawić zamiast funkcyi synektycznéj w części płaszczyzny, jéj funkcyą graniczną. Dwie więc te teorye schodzą się z sobą, chociaż wyprowadzone są z innych początków.

Zamiast dochodzić wszystkich tych własności funkcyi, dosyć jest według naszéj teoryi, wyciągnąć z funkcyi danéj funkcyą graniczną, a ta już w sobie zawierać musi wszystkie te własności.

217. Powyższe orzeczenia stanowią podstawy teoryi Cauchego, a twierdzenia powyższe dowodzą, że wszystkie te własności funkcyi, zastępują się w naszéj teoryi jedném orzeczeniem funkcyi granicznéj.

Opierając się na tych orzeczeniach, Cauchy dowiódł wiele pięknych twierdzeń, które są prostemi wnioskami z naszéj teoryi; niektóre z nich tu podamy:

Twierdzenie 6. *Gdy funkcya jest synektyczną w pewnéj części płaszczyzny, wszystkie jéj pochodne są także funkcyami synektycznemi w téjże saméj rozciągłości.*

Twierdzenie odpowiednie: *Funkcya i wszystkie jéj pochodne jako téż i całki, mają jedną i tąż samą graniczną.*

Obacz § 85 rachunku funkcyi granicznych.

Twierdzenie 7. *Funkcya synektyczna nie może być stałą w pewnéj części płaszczyzny tak małéj jak chcemy.*

Twierdzenie odpowiednie: *Graniczna nie może mieć wartości stałéj lub zero, jak tylko dla szczególnéj wartości zmiennéj, i jest zawsze pewną funkcyą zmiennéj, lub ma wartość nieskończoną.*

Obacz § 103, rachunku funkcyi granicznych.

Twierdzenie 8. *Funkcye algebraiczne całkowite, wykładnicze, wstawy i dostawy łuku wielokrotnego ze zmiennéj, są funkcyami synektycznemi w całéj rozciągłości płaszczyzny.*

Twierdzenie odpowiednie: *Funkcye wyżéj wyszczególnione mają graniczną nieskończoną.*

Obacz § 93, 97 i 99 rachunku funkcyi granicznych.

Twierdzenie 9. *Gdy funkcya jest synektyczną w całéj rozciągłości płaszczyzny, daje się rozwinąć na szereg zbieżny, dla wszystkich wartości zmiennéj.*

Twierdzenie odpowiednie: *Gdy funkcya ma graniczną nieskończoną, daje się rozwinąć na szereg zbieżny, dla wszystkich wartości zmiennéj.*

Obacz § 172 Części trzeciéj.

Twierdzenie 10. *Gdy funkcya jest synektyczną w części płaszczyzny, daje się rozwinąć na szereg zbieżny, w téj części płaszczyzny.*

Twierdzenie odpowiednie: *Każda funkcya nie mająca granicznéj nieskończonéj, daje się rozwinąć na szereg zbieżny, w granicach wyznaczonych przez odpowiednią wartość funkcyi granicznéj.*

Obacz § 125 Części trzeciéj.

218. Z porównania tych teoryi, tu w głównych swych rysach zestawionych wypada, że rozwijanie funkcyi na szereg zbieżny w teoryi Cauchego, jest zawisłe naraz od wszystkich własności funkcyi, które trzeba poszukiwać dla każdéj wartości z osobna, gdyż ta teorya nie daje wprost granic; dla tego téż rozwijanie funkcyi na szereg, pomimo swych pięknych twierdzeń, Cauchy uczynił zawisłém od poszukiwania modułów, gdy zmiennéj nadamy wartość urojoną, zawartego w twierdzeniu następującym.

Twierdzenie 11. *Każda funkcya daje się rozwinąć na szereg zbieżny, według potęg rosnących zmiennéj, gdy ta zmienna zachowuje wartości zawarte w kole zbieżności, zakreśloném, promieniem równym najmniejszemu modułowi téj zmiennéj, czyniąc ją urojoną.*

Twierdzenie odpowiednie: *Każda funkcya daje się rozwinąć na szereg zbieżny, według potęg rosnących zmiennéj, dla wartości téj zmiennéj zawartych w równaniu zbieżności, które otrzymujemy równając tę zmienną z wartością funkcyi granicznéj dla* $x = 0$.

Twierdzenie Cauchego każe szukać modułu najmniejszego, co wymaga: zmiany zmiennéj na urojoną, rozdzielenia równania na dwa, elliminacyi i oznaczenia najmniejszego dodatnego pierwiastku równań stopni wyższych zwykle lub przestępnych. Nasze twierdzenie daje wprost granice zbieżności, i to zawsze przez równanie stopnia pierwszego, i zarazem daje granice rozwijalności funkcyi, to jest wartości w których funkcya doświadcza zmian w swym biegu.

Zresztą co do znaczenia samego wzoru podanego przez Cauchego dla rozwijania funkcyi na szeregi, to podaném już zostało w § 163.

219. Lecz najważniejszém twierdzeniem Cauchego jest to, w którém dowiódł że *zbieżność funkcyi zależy od ciągłości funkcyi saméj i jéj pochodnéj pierwszéj, bez względu jakie mają wartości inne pochodne.*

Piękne to twierdzenie, jest wnioskiem z własności funkcyi granicznych, jak to dowiedliśmy w § 134, lecz potrzebuje być dopełnioném. Jakoż w części pierwszéj dowiedliśmy, że dla samych wartości granicznych, to jest dla punktów zwanych krytycznemi, zbieżność zależy od wszystkich pochodnych aż do nieskończoności, a ztąd łącząc to prawo z powyższém, otrzymamy nowe twierdzenie:

Twierdzenie 12. *Zbieżność funkcyi gdy zmienna zawarta jest między granicami objętemi równaniem zbieżności, zależy tylko od ciągłości saméj funkcyi i jéj pochodnéj pierwszéj; zbieżność zaś dla samych wartości granicznych, jest zależną naraz od wszystkich pochodnych, aż do nieskończoności.*

To twierdzenie jest ostatecznym wypadkiem naszéj teoryi, i wyjaśnia nam bardzo dobrze tę szczególność, dotąd niewytłumaczoną, zawartą w twierdzeniu Cauchego; dla czego zbieżność funkcyi niezależną jest od wyższych pochodnych nad pierwszą; albowiem dowodzi, że ta niezależność rozciąga się tylko do wartości między granicami, a dla samych granic nie ma miejsca.

220. Na zakończenie, nie od rzeczy będzie zwrócić uwagę na całość przedmiotu i rzucić kilka ogólnych uwag.

Widzimy, że nasza teorya zupełnie jest zgodną z teoryą Cauchego, chociaż wychodzi z nowego początku, a dąży nie wikłając się ilościami urojonemi do tegoż samego celu. Owszem jak widzieliśmy, poszukiwania nadzwyczaj upraszczają się, prawa przybierają formy symetryczne, i wiele wątpliwości i niepewności znika z rachunku, a w badaniach otrzymujemy wyborną kontrollę, i można dodać, nauka zwraca się do właściwego źródła.

Część pierwsza niniejszéj pracy, jest częścią czysto algebraiczną, i jako dopełnienie nauki o szeregach, powinna wejść do wykładów wyższéj algebry. Dwie drugie części stanowią część rachunku wyższego, i powinny być uważane za nową jego gałąź, za dopełnienie rachunków różniczkowego i całkowego, a odkrywając nam nowe funkcye, które są też same dla całego szeregu funkcyi całkowych i różniczkowych, rozciągniętych w obie strony do nieskończoności, stanowią rzeczywiście trzeci rachunek, składający z niemi doskonałą całość. Z odkryciem jego otwiera się nowe pole poszukiwań, a mianowicie:

1. Przejrzenie wszystkich prawd wyprowadzonych w rachunku a opartych na rozwijaniu funkcyi na szeregi, o ile one zgadzają się z prawami rozwijalności funkcyi na szeregi i zbieżności szeregów, i usunięcie z nauki niezgodnych z temi prawami, z których kilka wykazaliśmy w ciągu tego dzieła.

2. Zastosowanie tych praw do rozwinięcia funkcyi na szeregi peryodyczne, na ułamki ciągłe i na iloczyny nieskończonéj liczby czynników.

3. Nakoniec zastosowanie funkcyi granicznych do poszukiwania własności ogólnych funkcyi wyrażonych przez równanie różniczkowe, a ztąd do oznaczenia postaci, jaką funkcya pierwotna przyjąć powinna, czyli do oznaczenia całek równań różniczkowych.

Pierwsze próby w tym ostatnim przedmiocie oparte na teoryi Cauchego, rozwinięte zostały sposobem ubocznym dla szczególnych postaci równań różniczkowych, w dziele Briota i Bouqueta „Théorie des fonctions doublement péryodiques" Paris 1859 livre VI (o całkowaniu równań różniczkowych za pomocą funkcyi eliptycznych). Nasza teorya prowadzi wprost do rozwiązania tego ważnego zadania, albowiem, ponieważ graniczne funkcyi jakiejkolwiek, jak również wszystkich jéj pochodnych są też same; przeto graniczne równań różniczkowych, które umiemy bardzo łatwo otrzymać, dają nam graniczne funkcyi pierwotnych, sprawdzających równanie różniczkowe, i zarazem niektóre z funkcyi w skład funkcyi pierwotnéj wchodzące; i tak: gdy ta graniczna jest nieskończoną, funkcya pierwotna musi być algebraiczną, wykładniczą, lub też inną z tego rodzaju; gdy zaś jest pewną funkcyą, ta funkcya jest sama funkcyą, w skład funkcyi pierwotnéj wchodzącą.

W obu razach wskazuje nam własności funkcyi pierwotnéj, i zarazem prowadzi do postaci, jaką funkcya pierwotna przyjąć powinna.

Zadanie więc oznaczenia własności i postaci funkcyi wyrażonych przez równanie różniczkowe, do rozwiązania którego sprowadzają się obecnie wszystkie usiłowania geometrów, zdolne jest do zupełnego rozwiązania za pomocą funkcyi granicznych, a rachunek funkcyi granicznych, prowadząc wprost do rozwiązania tego zadania, otwiera nowe drogi ku dalszym poszukiwaniom, i postępom rachunku wyższego.

KONIEC.

SPROSTOWANIE OMYŁEK.

Str.	*wiersz.*	*zamiast:*	*czytaj:*
IV	13	rozwijalności	rozwinięcia
XIV	26	rozwijalności	rozwinięcia
8	ostatni	$\Sigma(\ldots) = \Sigma(\ldots)$	$\Sigma(\ldots) = \frac{3}{2}\Sigma(\ldots)$
11	18	*stosunkiem wyrazów*	*stosunkiem szeregu*
17	w przypisku	Bernard	Bertrand
32	2	w liczniku po drugiéj stronie wzoru: $u_{n} + \nu - 1$	$u_{n+\nu-1}$
60	19	$l\left(\frac{n+1}{n}\right)$	$l\,\frac{e\,(n+1)}{n}$
71	9	mniejszy od zera	większy od zera
—	11	większy od zera	mniejszy od zera
76	13	$\alpha\,(a-1)\,a_0 + \ldots$	$\alpha\,(\alpha-1)\,a_0 + \ldots$
—	22	$\alpha\,(\beta + a\,l\,b_0) + \ldots$	$a_0\,(\beta + \alpha\,l\,b_0) + \ldots$
—	25	$n^{\alpha-1}\,\alpha\,(\beta + a\,l\,b_0) = 1$	$n^{\alpha-1}\,a_0\,(\beta + \alpha\,l\,b_0) = 1$
77	2	α_0	a_0
78	4	$f(n) = \mathrm{F}(n)\left(\frac{1}{n}\right)$	$f(n) = \mathrm{P}(n)\,f\left(\frac{1}{n}\right)$
—	6	nieskończone dla $n = \infty$	skończone dla $n = \infty$;
—	18	w końu	w końcu
79	7	możne	można
82	8	$\mathrm{S}_n > u_n\ (\ldots)$	$\mathrm{S}_n < u_n\ (\ldots)$
—	9	$\mathrm{S}_n < u_n\ (\ldots)$	$\mathrm{S}_n > u_n\ (\ldots)$
90	20	$\left(1 + \frac{v_0}{v_0}\right)$	$1 + \frac{v_0}{u_0}$
98	7	wyrazów	cyfr

Str.	*wiersz.*	*zamiast:*	*czytaj:*
111	23	$\frac{n\, f^n(x)}{f^n(x)}$	$\frac{n\, f^{n-1}(x)}{f^n(x)}$
—	28	mając	mające
130	16	dędzie	będzie
143	1	(a)	(a)
150	8	*pochodnych*	*pochodnéj pierwszéj*
161	13	(3)	(2)
204	7	$\varepsilon > a$ i	$\varepsilon > a$; i
207	7	zawartą	zawarte
223	25	$x + a' = x$	$x + a' = x'$
252	16	$G\,\frac{dz}{dy}(y) = \frac{1-xy}{x}$	$\frac{G\,\frac{dz}{dy}(y)}{y'} = \frac{y^2-1}{2x}$
256	15	$E\,(e, \varphi)$	$E\,(c, \varphi)$

NOWY RACHUNEK FUNKCYI GRANICZNYCH *przez* **W. Witkowskiego.**

Fig. 1.

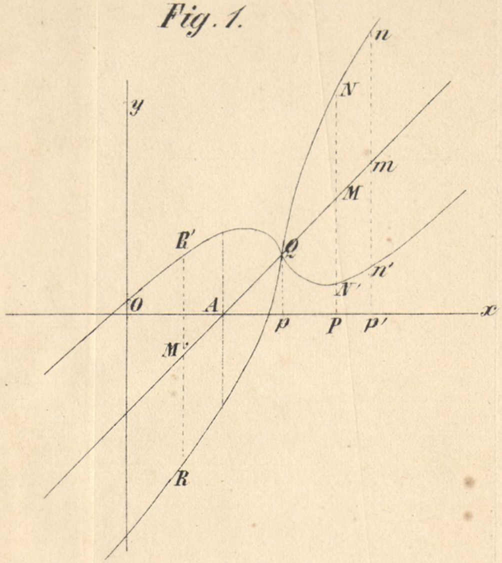


Fig. 2.

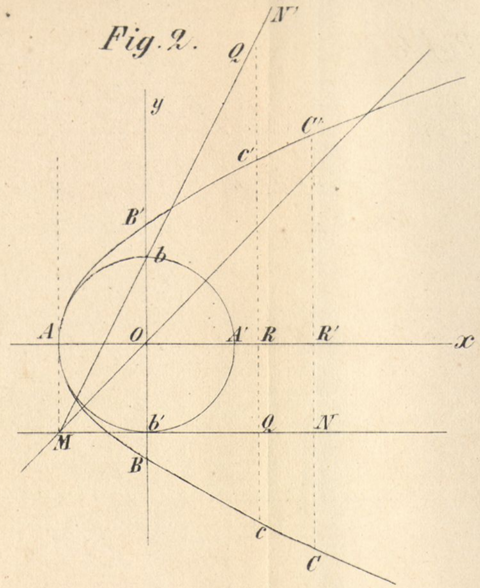


Fig. 4.

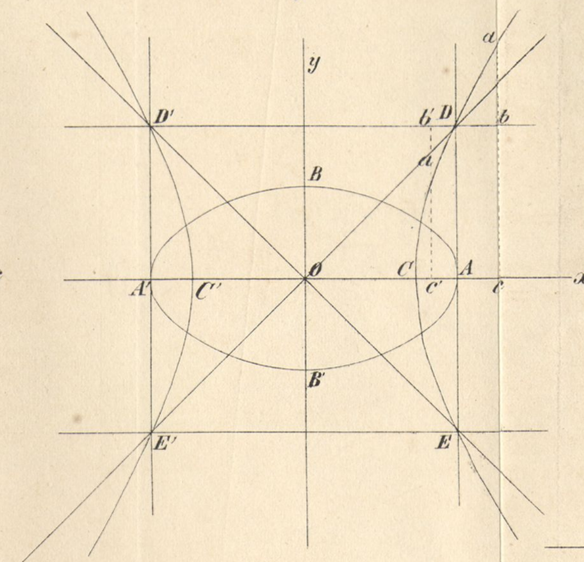


Fig. 3.

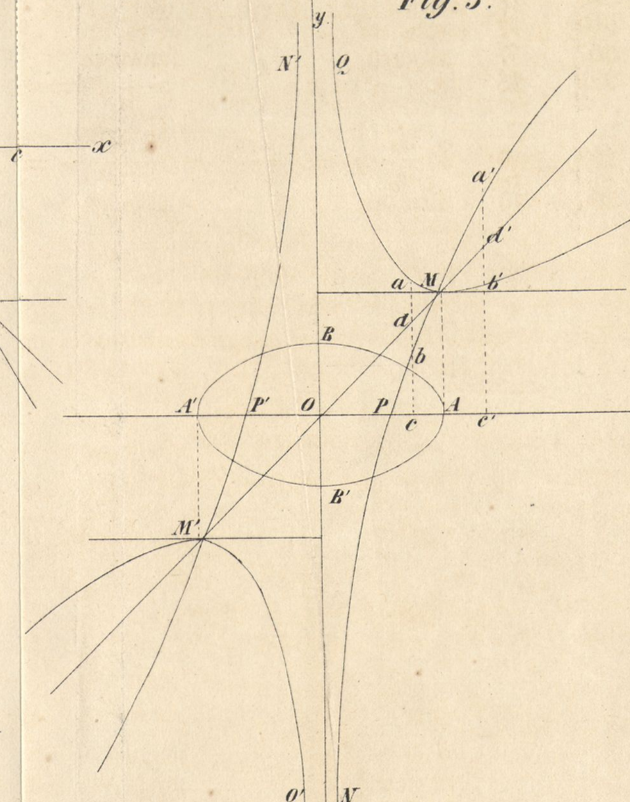


Fig. 5.

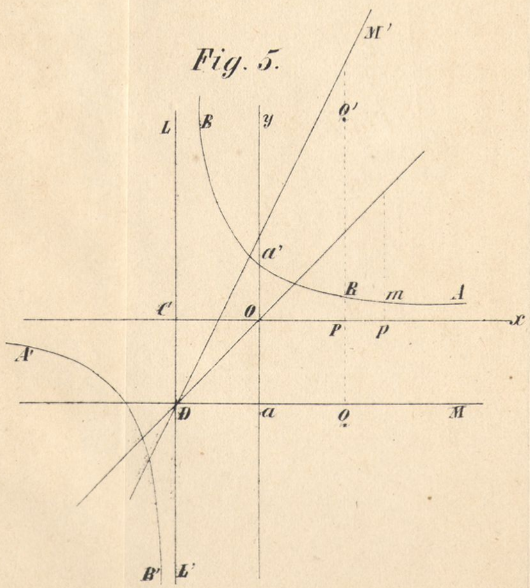


Fig. 6.

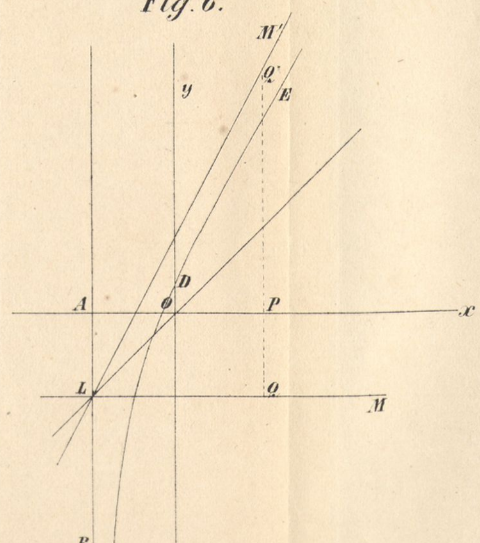
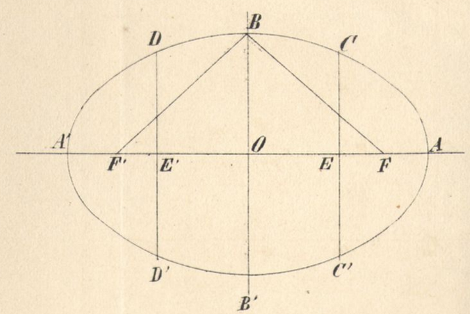


Fig. 7.



w Lit. L. Herknera.

Witkowski