XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa
Konferencja Automatyki
Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFCZYK
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ, OBSERWOWALNOŚĆ

STEROWALNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIEM OD STANU I STEROWANIA †

Wojciech TRZASKO*, Rafał KOCISZEWSKI**

* Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail:wtrzasko@pb.bialystok.pl

** Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail:rafko@pb.bialystok.pl

Streszczenie: W pracy rozpatrzono dyskretne dodatnie układy liniowe stacjonarne z opóźnieniem od stanu i wejścia. Podano warunki, jakie musi spełniać dyskretny układ z opóźnieniem, aby był on układem dodatnim. Sformułowane zostały warunki sterowalności dla przypadku, gdy opóźnienie od stanu i wyjścia jest równe jedności. Rozważania zilustrowano przykładem.

Słowa kluczowe: układy liniowe, układy dodatnie, układy dyskretne, sterowalność, opóźnienie.

1. WSTĘP

W układach dodatnich składowe wektorów wymuszeń, warunków początkowych, stanu i wyjścia przyjmują tylko wartości nieujemne. Przykłady dodatnich układów liniowych są podane w monografii [5] oraz cytowanej tam literaturze.

W teorii układów dodatnich zamiast przestrzeni liniowych korzystamy z teorii stożków. Teoria układów dodatnich jest więc dziedziną znacznie trudniejszą i mniej zaawansowaną od klasycznej teorii układów liniowych. Problem analizy i syntezy dodatnich układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniem od stanu jest tematem wielu publikacji w ostatnich kilku latach, np. [3, 4]. W pracy [6] rozpatrzono problem osiągalności i sterowalności dodatnich układów dyskretnych oddzielnie dla przypadku opóźnienia od sterowania oraz od stanu.

W niniejszej pracy rozpatrzymy problem sterowalności dyskretnych dodatnich układów liniowych stacjonarnych z jednym opóźnieniem od stanu i wejścia. Wykorzystując rezultaty prac [3, 4, 5] podane zostaną warunki, jakie musi spełniać dyskretny układ z opóźnieniem, aby był on układem dodatnim oraz sformułowane zostaną warunki sterowalności.

2. WPROWADZENIE

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich będziemy oznaczać przez Z_+.

Weźmy pod uwagę dyskretny układ liniowy z opóźnieniem od stanu i sterowania, opisany równaniem stanu i wyjścia

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{i-1} + \boldsymbol{B}_0\boldsymbol{u}_i + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_{i-1}, \quad i\in Z_+, \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}_i, \tag{1b}$$

gdzie $\boldsymbol{x}_i\in\Re^n$, $\boldsymbol{u}_i\in\Re^m$, $\boldsymbol{y}_i\in\Re^p$, $\boldsymbol{A}_0\in\Re^{n\times n}$, $\boldsymbol{A}_1\in\Re^{n\times n}$, $\boldsymbol{B}_0\in\Re^{n\times m}$, $\boldsymbol{B}_1\in\Re^{n\times m}$, $\boldsymbol{C}\in\Re^{p\times n}$, $\boldsymbol{D}\in\Re^{p\times m}$,

przy warunkach początkowych

$$\boldsymbol{x}_{-i} = \boldsymbol{x}(-i)\in\Re^n, \quad i=0,1, \tag{2a}$$

$$\boldsymbol{u}_{-1} = \boldsymbol{u}(-1)\in\Re^m. \tag{2b}$$

Rozwiązanie równania stanu (1a) z warunkami początkowymi (2) ma postać [2]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i &= \Phi(i)\boldsymbol{x}_0 + \Phi(i-1)\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_{-1} + \Phi(i-1)\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_{-1}\\ &+\sum_{j=0}^{i-1}(\Phi(i-1-j)\boldsymbol{B}_0 + \Phi(i-2-j)\boldsymbol{B}_1)\boldsymbol{u}_j,\end{aligned} \tag{3}$$

gdzie

$$\Phi(i) = Z^{-1}\{(z\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}_0 - \boldsymbol{A}_1 z^{-1})^{-1}z\} \tag{4}$$

jest macierzą podstawową (tranzycyjną).

†Pracę wykonano w ramach pracy własnej G/WE/1/04 finansowanej przez Komitet Badań Naukowych.

Spełnia ona równanie

$$\Phi(i+1) = A_0\Phi(i) + A_1\Phi(i-1) \ (= \Phi(i)A_0 + \Phi(i-1)A_1) \qquad (5)$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi(0) = I_n, \quad \Phi(i) = 0 \text{ dla } i < 0. \qquad (6)$$

W układzie (1) dodatnim (wewnętrznie) dla każdego nieujemnego ciągu sterującego $u_i \in \Re_+^m$, $i \in Z_+$ oraz dla dowolnych nieujemnych warunków początkowych $x_{-i} \in \Re_+^n$, $i = 0,1$, $u_{-1} \in \Re_+^m$, zachodzi $x_i \in \Re_+^n$ i $y_i \in \Re_+^p$ dla wszystkich $i \in Z_+$.

Twierdzenie 1. Układ dyskretny (1) jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} &A_k \in \Re_+^{n\times n} (k = 0,1), \\ &B_j \in \Re_+^{n\times m} (j = 0,1), \\ &C \in \Re_+^{p\times n}, D \in \Re_+^{p\times m}. \end{aligned} \qquad (7)$$

Dowód. Pełny dowód podany jest w pracy [4]. Wynika z poniższego zapisu:

$$\tilde{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{\tilde{n}}, \quad \tilde{u}_i = \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{\tilde{m}}, \qquad (8)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I_n & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_0 & B_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (9a)$$

$$\tilde{C} = [C \quad 0], \quad \tilde{D} = [D \quad 0]. \qquad (9b)$$

W tym przypadku równania (1) możemy napisać w postaci

$$\tilde{x}_{i+1} = A\tilde{x}_i + \tilde{B}\tilde{u}_i, \quad i \in Z_+, \qquad (10a)$$

$$y_i = \tilde{C}\tilde{x}_i + \tilde{D}\tilde{u}_i, \qquad (10b)$$

gdzie $\tilde{n} = 2n$, $\tilde{m} = 2m$ i

$$\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{\tilde{n}}, \quad \tilde{u}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_{-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{\tilde{m}}. \qquad \square(11)$$

W dalszych rozważaniach będziemy przyjmować, że rozpatrywany układ jest asymptotycznie stabilny i osiągalny.

Układ (1) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie miejsca zerowe wielomianu charakterystycznego

$$\begin{aligned} &\det(zI_{\tilde{n}} - A) = \det(z^2 I_n - A_0 z - A_1) = \\ &= z^{2n} + a_{2n-1}z^{2n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \end{aligned} \qquad (12)$$

leżą w otwartym kole jednostkowym na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

Układ (1) nazywamy osiągalnym, jeżeli dla każdego stanu $x_f \in \Re_+^n$ istnieje taka liczba naturalna N i ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$ dla $i = 0,1,2,...N-1$, który przeprowadza układ (1) z zerowego stanu początkowego (2) ($x_{-1} = x_0 = 0$, $u_{-1} = 0$) do zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$.

W pracy [4] podano następujący warunek dostateczny osiągalności.

Twierdzenie 2. Układ dodatni (1) jest osiągalny, jeżeli istnieje taka liczba naturalna $N \in Z_+$, że rząd macierzy R_N o postaci

$$R_N = [\Psi(N-1), \Psi(N-2), \cdots, \Psi(1), \Psi(0)] \qquad (13)$$

jest równy n, gdzie

$$\Psi(i) = \Phi(i)B_0 + \Phi(i-1)B_1 \qquad (14)$$

oraz

$$R_N^T [R_N R_N^T]^{-1} \in \Re_+^{Nm\times n}. \qquad (15)$$

3. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Załóżmy, że układ (1a) jest dodatni, tj. $A_1 \in \Re^{n\times n}$, $B_0 \in \Re^{n\times m}$, $B_1 \in \Re^{n\times m}$ oraz warunki początkowe (2) są nieujemne, tj. $x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n$ i $u_{-1} \in \Re_+^m$.

W oparciu o prace [5, 6] możemy sformułować następujące definicje sterowalności.

Definicja 1. Układ dodatni (1) nazywamy sterowalnym do zera, jeżeli dla dowolnego niezerowego stanu początkowego $x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n$ i sterowania początkowego $u_{-1} \in \Re_+^m$ oraz stanu końcowego $x_f = 0$, istnieją: liczba naturalna $N \in Z_+$ i ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,...,N-1$, takie, że układ (1) jest sterowalny do zera w N krokach.

Definicja 2. Układ dodatni (1) nazywamy sterowalnym, jeżeli dla dowolnego niezerowego stanu początkowego $x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n$ i sterowania początkowego $u_{-1} \in \Re_+^m$ oraz dowolnego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$, istnieją: liczba naturalna $N \in Z_+$ i ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,...,N-1$, takie, że układ (1) jest sterowalny w N krokach.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków koniecznych i wystarczających sterowalności układu dodatniego (1).

4. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Dla zerowego stanu końcowego $x_f = x_N = 0$ rozwiązanie równania stanu (3) można napisać w postaci

$$0 = \Phi(N)x_0 + \Phi(N-1)A_1x_{-1} + \Phi(N-1)B_1u_{-1} + R_N u_0^N, \tag{16}$$

gdzie R_N ma postać (13) z $\Psi(i)$ dane wzorem (14) i

$$u_0^N = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{Nm}. \tag{17}$$

Dla $u_0^N = 0$ i $R_N \in \Re_+^{n\times Nm}$ oraz dowolnych niezerowych warunków początkowych (2) równość

$$-\Phi(N)x_0 - \Phi(N-1)A_1x_{-1} - \Phi(N-1)B_1u_{-1} = R_N u_0^N, \tag{18}$$

może być spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy lewa strona równania (18) będzie równa zero, tzn. zachodzą zależności

$$\Phi(N) = 0,\ \Phi(N-1)A_1 = 0,\ \Phi(N-1)B_1 = 0. \tag{19}$$

Zgodnie z twierdzeniem Caleya-Hamiltona macierz A (9a) spełnia swoje równanie charakterystyczne (12). Wobec tego

$$A^{2n} = -a_{2n-1}A^{2n-1} - \ldots - a_1A - a_0I. \tag{20}$$

W pracy [3] wykazano, że macierz stanu układu (10a) można zapisać w postaci

$$A = \begin{bmatrix} \Phi(1) & \Phi(0)A_1 \\ \Phi(0) & 0 \end{bmatrix},\ A^i = \begin{bmatrix} \Phi(i) & \Phi(i-1)A_1 \\ \Phi(i-1) & \Phi(i-2)A_1 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

gdzie $\Phi(i)$ ma postać (5).
Ponadto zachodzą zależności:

$$\Phi(2n) = -a_{2n-1}\Phi(2n-1) - \ldots - a_1\Phi(1) - a_0\Phi(0), \tag{22a}$$

$$\Phi(2n-1) = -a_{2n-1}\Phi(2n-2) - \ldots - a_1\Phi(0), \tag{22b}$$

gdzie a_i $(i = 0,1,\ldots,2n-1)$ są to współczynniki wielomianu charakterystycznego (12).
Z powyższego wynika, że zależności (19) będą równe zero, jeżeli współczynniki wielomianu charakterystycznego (12) są równe zero, tzn. $a_i = 0$ $(i = 0,1,\ldots,2n-1)$ i $A^{2n} = 0$.

Z właściwości macierzy nilpotentnej wynika, że $A^\mu = 0$, gdzie μ jest indeksem nilpotentności i w ogólnym przypadku $\mu \le 2n$.

Z powyższego wynikają następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3. Układ dodatni (1) jest sterowalny do zera w:

a) $N = 2n$ krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A (9a) ma tylko zerowe wartości własne.

b) $N = \mu$ krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A (9a) jest nilpotentna z indeksem nilpotentności μ.

Twierdzenie 4. Dodatni układ (1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on osiągalny i macierz A (9a) jest nilpotentna.

Dowód. Przeprowadzenie układu (1a) z dowolnego stanu początkowego $x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n$ i $u_{-1} \in \Re_+^m$ do dowolnego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$ można rozbić na dwa następujące zadania:

1. sprowadzenie układu ze stanu początkowego (2) do zera – spełnione warunki twierdzenia 3,
2. przeprowadzenie układu z zerowego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$.
   - spełnione warunki twierdzenia 2. □

Jeżeli jest spełniony warunek (15), to ciąg wymuszeń $u(i) \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, który przeprowadza układ (1a) z dowolnego stanu początkowego (2) do zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$, można wyznaczyć ze wzoru [3, 4]

$$u_0^N = R_N^T[R_N R_N^T]^{-1} x_f, \tag{23}$$

gdzie wektor u_0^N ma postać podaną wzorem (17).

Powyższe rozważania można łatwo uogólnić na przypadek dodatniego układu dyskretnego z wieloma opóźnieniami od stanu i sterowania.

5. PRZYKŁAD

Wyznaczyć ciąg sterowań przeprowadzających dodatni układ z opóźnieniem od stanu i wyjścia, opisany równaniem stanu (1a), o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

z zadanych warunków początkowych

$$x_0 = [1\,2\,3]^T,\ x_{-1} = [2 1 2]^T,\ u_{-1} = 1, \tag{25}$$

do niezerowego stanu końcowego $x_f = [4\,5\,6]^T$.

Najpierw zbadamy osiągalność tego układu przy zerowych warunkach początkowych.

Obliczając ze wzoru (14) macierz (13) przy $N = 4$ otrzymamy

$$R_4 = [\Psi(3), \Psi(2), \Psi(1), \Psi(0)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Rząd macierzy (26) jest równy $n = 3$, a więc warunek konieczny osiągalności rozpatrywanego układu w $N = 4$ jest spełniony. Łatwo sprawdzić, że warunek (15) jest też spełniony. Układ (1a) o macierzach (24) jest więc osiągalny w 4 krokach.

Następnie należy zbadać sterowalność tego układu do zera. Macierz $A \in \Re_+^6$ rozpatrywanego układu o postaci

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

jest nilpotentna. Łatwo sprawdzić, że indeks nilpotentności jest równy $\mu = 5$, tj. $A^i = 0$ dla $i \geq \mu = 5$.

Zauważmy, że wielomian charakterystyczny (12) macierzy (27) ma postać

$$\det(zI_{\tilde{n}} - A) = z^6. \quad (28)$$

Z warunków twierdzenia 3 wynika, że układ (1a) o macierzach (24) jest sterowalny do zera w $N = \mu \leq 2n = 5$ krokach.

Oznacza to, że rozpatrywany układ jest sterowalny w 5 krokach i dla $N = 5$ ciąg sterowań u_0^5 nie zależy od warunków początkowych i można go wyznaczyć ze wzoru (23).

Obliczając u_0^5 ze wzoru (23) (przy $N = 5$) otrzymamy

$$u_0^5 = R_5^T [R_5 R_5^T]^{-1} x_f = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \\ 2.5 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

W celu sprawdzenia otrzymanych wyników wyznaczymy rozwiązanie równania (1a) o macierzach (24) przy warunkach początkowych (25) oraz ciągu wymuszeń $u_0 = 2.5,\ u_1 = 6,\ u_2 = 0,\ u_3 = 4,\ u_4 = 2.5$.

Ze wzoru (1a) dla $i = 0,1,\ldots,4$, odpowiednio otrzymamy

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5.5 \\ 2 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2.5 \end{bmatrix},\ x_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

W celu pokazania, że ciąg sterowań nie zależy od warunków początkowych, wyznaczymy rozwiązanie równania (1a) przy następujących warunkach początkowych. $x_0 = [110]^T$, $x_{-1} = [210]^T$, $u_{-1} = 5$ i ciągu wymuszeń u_0^5 wyznaczonego ze wzoru (29).

Ze wzoru (1a) dla $i = 0,1,\ldots,4$, odpowiednio otrzymamy

$$x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2.5 \\ 2 \end{bmatrix},\ x_2 = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix},\ x_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},\ x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 2.5 \end{bmatrix},\ x_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że wyznaczony ciąg wymuszeń przeprowadza rozpatrywany układ z dowolnego nieujemnego stanu początkowego do zadanego stanu końcowego, przy czym pośrednie stany będą w ogólnym przypadku różne.

CONTROLLABILITY OF POSITIVE DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS WITH DELAY IN STATE AND CONTROL

Abstract: In the paper the positive discrete-time linear systems with delay in state and control is considered. Necessary and sufficient conditions for positivity are given. Conditions for controllability are established in case of delay in state and control is equal to one The considerations are illustrated by an example.

Literatura

[1] Busłowicz M. (1981) Controllability of linear discrete-delay systems. *Proc. Int. Conf. Functional-Differential Systems and Related, Zielona Góra-Błażejewko*, Topics II, 47-51.

[2] Busłowicz M. (1983). O pewnych właściwościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami. *Zesz. Nauk. Polit. Białostockiej, Elektrotechnika*, Białystok, nr 1, 17-29.

[3] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Osiągalność dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. *Mat. XIV Krajowej Konf. Automatyzacji Procesów Dyskretnych*, Gliwice-Zakopane.

[4] Busłowicz M., Kaczorek T. (2005) Reachability and minimum energy control of positive discrete-time linear systems with multiple delays in state and control. *Zgłoszone na IFAC 2005.*

[5] Kaczorek T. (2000) Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe. *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej,* Warszawa.

[6] Xie G. and Wang L.(2003) Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays. In: Positive Systems *(Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.),* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg,. 377-384.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2