XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK Stanisław KACZANOWSKI Tadeusz KACZOREK Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI Tadeusz PUCHAŁKA Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

IDENTYFIKACJA I ROZPOZNAWANIE

CZYNNIKI INFORMACJI I RYZYKA W IDENTYFIKACJI POSTACI MODELU MATEMATYCZNEGO

Mirosław BEREZIŃSKI

Instytut Badań Systemowych PAN, ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
e-mail:Miroslaw.Berezinski@ibspan.waw.pl

Streszczenie: Wychodząc z założenia, że postać modelu matematycznego zależy od treści zadania systemowego i od ilościowo-jakościowych własności zbioru danych, w oparciu o które estymuje się wartości parametrów modelu Zwrócono uwagę na to, że wyborowi postaci modelu zawsze towarzyszy ryzyko popełnienia błędu. Podano formuły na szacowanie wartości ryzyka wyboru złego modelu w przypadku, gdy nieznane wielkości występujące w modelu mają charakter probabilistyczno-statystyczny. Zwrócono uwagę na związek między informatywnością zbioru danych i wielkością ryzyka. Pokazano, że wbrew wnioskom wynikającym z klasycznej teorii informacji, informatywność zbioru danych nie musi rosnąć ze wzrostem jego liczebności, a warunkiem maksymalnej informatywności zbioru nie musi być równość prawdopodobieństw jego elementów.

Słowa kluczowe: Modelowanie matematyczne, nieokreśloność, informacja, ryzyko, infrastruktura transportu,

1. WSTĘP

Powszechnie stosowanym środkiem wspomagania procesów decyzyjnych jest model matematyczny tej części zadania decyzyjnego, którą z określonych powodów warto lub trzeba zmatematyzować. Jeden i ten sam fakt może być opisany za pomocą różnych modeli, stąd problem wyboru postaci modelu. Wiadomo [2], [3], [4], [5], że postać modelu i dokładność przybliżenia nim rzeczywistości zależą w istotny sposób od zadania decyzyjnego, do którego rozwiązywania będzie on wykorzystywany, a także od struktury i własności zbioru danych, w oparciu o który będą szacowane nieznane wartości parametrów modelu. Wybór postaci modelu jest sam w sobie zadaniem decyzyjnym. Od poprawności jego rozwiązania silnie zależy poprawność rozwiązania głównego zadania decyzyjnego. Bez względu na treść tego zadania i jego kontekst informacyjny zawsze może zdarzyć się, że dana postać modelu zostanie uznana za właściwą i przyjęta, lub uznana za niewłaściwą i odrzucona. Decyzja co do postaci modelu jest słuszna tylko wtedy, gdy postać ta jest poprawna i zostaje zaakceptowana, lub też jest niepoprawna i zostaje odrzucona. Może się jednak zdarzyć, że postać modelu jest poprawna, ale osoba dokonująca wyboru uznaje ją za niewłaściwą i odrzuca. Może też być tak, że postać modelu jest niepoprawna, ale zostaje uznana za właściwą i przyjęta. W tych dwóch ostatnich przypadkach decyzje, co do postaci modelu, który ma być użyty jako narzędzie wspomagające zasadniczy proces decyzyjny, są fałszywe. Wyborowi postaci modelu zawsze więc towarzyszy ryzyko popełnienia omyłki, która może być bardzo brzemienna w rozmaite skutki [1]. Przykładów tego dostarcza, między innymi, praktyka projektowania inwestycji infrastrukturalnych w transporcie. W światowej literaturze przedmiotu podaje się liczne przykłady zrealizowanych punktowych (lotniska, węzły drogowe, stacje kolejowe itp.) i liniowych (odcinki autostrad, miejskie i pozamiejskie odcinki dróg szybkiego ruchu, odcinki linii kolejowych itp.) niezwykle kosztownych inwestycji infrastrukturalnych, których eksploatacja musiała być wstrzymana nieraz na długie lata, z uwagi na ich negatywne skutki społeczne, gospodarcze i ekologiczne. W każdym przypadku błędność decyzji wdrożeniowych wynikała z metodologicznej niepoprawności modeli wspomagających proces decyzyjny, dotyczący wyboru i lokalizacji inwestycji. U źródeł tej niepoprawności leżało zazwyczaj zbytnie uproszczenie sformułowania zadania, złe rozumienie roli modelu matematycznego oraz niewłaściwości w wykorzystaniu posiadanych zbiorów danych.

Chociaż z podobnymi problemami borykają się również inne dziedziny zastosowań, to jednak dla ustalenia uwagi w dalszych rozważaniach będziemy się odwoływać do kwestii związanych z kształtowaniem infrastruktury transportu. Głównym celem artykułu jest krytyczna, ale konstruktywna analiza wpływu stopnia informatywności zbioru danych na wybór matematycznej postaci modelu, jako środka wspomagania pracy nadrzędnego w stosunku do niego systemu o celowym działaniu.

2. ANALIZA ZBIORÓW DANYCH

2.1. Zbiory statystyczne i niestatystyczne

Procesy decyzyjne dotyczące kształtowania infrastruktury transportu mają charakter interdyscyplinarny i ielokryterialny. Typowy proces wyboru i oceny lokalizacji inwestycji infrastrukturalnej składa się z dużej liczby wzajemnie ze sobą powiązanych elementów, które łącznie wzięte tworzą złożony wieloaspektowy system dynamiczny o licznych sprzężeniach zwrotnych. Jego podstawowymi elementami są historia, stan obecny i dalekosiężne potrzeby w zakresie infrastruktury transportu, prognozy struktury i dynamiki procesów demograficznych, prognozy rozmieszczenia ośrodków produkcji oraz struktury i dynamiki jej rozwoju, prognozy struktury i wielkości zapotrzebowania na przewozy pasażerów i ładunków, prognozy rozwoju techniki transportowej i technologii przewozowych, rachunek kosztów budowy, utrzymania i eksploatacji oraz zewnętrznych kosztów infrastruktury itd. Zazwyczaj tę mnogość elementów całościowego procesu decyzyjnego agreguje się i przedstawia w formie układu złożonego z trzech wzajemnie ze sobą współdziałających sektorów: sektora analizy oraz prognozowania zapotrzebowania i popytu na urządzenia infrastrukturalne, sektora analizy i prognozowania podaży infrastruktury i sektora kształtowania polityki rozwoju infrastruktury transportu.

Wieloaspektowość, systemowa złożoność i dalekosiężność procesów decyzyjnych w zakresie kształtowania infrastruktury transportu sprawiają, że zbiory danych wykorzystywanych w tych procesach mają skomplikowaną strukturę ilościowo-jakościową. Dane są z reguły liczbami, których podstawowymi cechami są niedokładność pomiarowa (błędy systematyczne i przypadkowe) oraz niepewność. Z uwagi na prognostyczny charakter procesu wyboru i oceny lokalizacji inwestycji infrastrukturalnych zdecydowana większość danych jest obciążona również nieokreślonością, związaną z niepełną przewidywalnością przyszłości. Ponadto zbiory danych są z reguły niekompletne, często są nadmiernie rozbudowanymi konglomeratami danych pierwotnych i wtórnych. Nierzadko zawierają elementy mało istotne dla procesu decyzyjnego, przy równoczesnym braku danych o charakterze zasadniczym. Kłopoty z organizacją baz danych dla potrzeb transportu są powszechnie znane i trapią zarówno kraje o wysokim standardzie rozwoju infrastruktury, jak i kraje opóźnione w tym zakresie. Brak dobrych teoretycznych koncepcji baz danych dla potrzeb transportu - w tym dla kształtowania jego infrastruktury - utrudnia ich informatyzację.

Powszechnie popełnianym błędem jest uważanie zbiorów danych o transporcie za zbiorowości statystyczne. Z góry zakłada się, że elementy tych zbiorów są empirycznymi realizacjami skalarnych lub wektorowych zmiennych losowych rozumianych w sensie, jaki temu pojęciu nadaje klasyczny rachunek prawdopodobieństwa, a następnie wykorzystuje się cały aparat narzędziowy statystyki matematycznej do wnioskowania o takich czy innych własnościach rozpatrywanego zjawiska, którego model ma pomóc w podjęciu konkretnej decyzji infrastrukturalnej. Tak zbudowany model jest jednak z gruntu fałszywy i tylko przez przypadek może prowadzić do pozytywnych rezultatów. Różnorodność i charakter danych związanych z kształtowaniem infrastruktury sprawiają, że ich zbiory rzadko kiedy spełniają warunki uprawniające do uważania ich za zbiorowości statystyczne. Zbiory te są z reguły silnie niejednorodne, bowiem przeplatają się w nich dane dotyczące różnych obiektów i zdarzeń, co do których nie jest spełniony ani warunek systemowej niezmienności, ani warunek stałości otoczenia, ani też warunek niezależnej powtarzalności obserwacji. Podstawową czynnością poprzedzającą wybór postaci modelu matematycznego, który ma wspomagać podejmowanie decyzji związanych z kształtowaniem infrastruktury transportu, powinno więc być rozbicie zbioru danych na podzbiór danych statystycznych i podzbiór danych niestatystycznych. Następnie powinno się sprawdzić jednorodność każdego ze zbiorów statystycznych i - w razie stwierdzenia niejednorodności - rozbić go na podzbiory jednorodne. Tylko zbiory jednorodne można poddawać bezpośredniej analizie statystycznej.

2.2. Ocena informatywności zbioru danych

Duży wpływ na wybór postaci modelu ma oszacowanie ilości informacji, której nośnikiem jest zbiór danych. Wedle teorii informacji Shannona [8], jeżeli przyjmiemy, że elementy zbioru danych są realizacjami skończonej dyskretnej zmiennej losowej X o rozkładzie prawdopodobieństwa $\{p_1, p_2,..., p_n\}$, to ilość informacji związanej z obserwacją d_i wynosi $-\log p_i$, $i = 1,2,...,n$, natomiast wartość oczekiwana ilości informacji dostarczanej przez cały zbiór, czyli jego entropia informacyjna, wynosi $H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$. Jeżeli w zbiorze danych istnieje taka obserwacja, której pojawienie się jest zdarzeniem pewnym, to wtedy informatywność zbioru jest najmniejsza $(H(X) = 0)$, jeżeli zaś wszystkie obserwacje są jednakowo prawdopodobne, to jest ona największa $(H(X) = \log n)$. Z klasycznej teorii informacji wynika więc, że tym bardziej należy cenić informację, im większy chaos panuje w zbiorze danych. Innymi słowy, wartość informacji rośnie w miarę wyrównywania się wartości prawdopodobieństw poszczególnych danych [7].

Te wnioski są zgodne z intuicją i są od dawna przyjmowane w analizach informatywności zbiorów danych jako niepodważalne prawdy. Spójrzmy jednak na kwestię informatywności zbioru danych z punktu widzenia nadrzędnego systemu decyzyjnego, który z niego korzysta. Każda błędna decyzja naraża ten system na ryzyko poniesienia strat, których wielkość zależy do tej decyzji i od warunków otoczenia. Niech α będzie zmienną decyzyjną, natomiast β zmienną losową charakteryzującą oddziaływanie otoczenia. Oznaczmy dziedziny tych zmiennych odpowiednio przez A i B. Niech $F(\beta)$ będzie dystrybuantą zmiennej losowej β. Może się zdarzyć, że w chwili podejmowania decyzji odnośnie wartości zmiennej α decydent zna jedynie dystrybuantę zmiennej β, ale może być i tak, że zna dokładną wartość tej zmiennej. Niech $s : A \times B \to K$ będzie funkcją, która każdej parze wartości α, β przyporządkowuje liczbę $k \in K$, gdzie K jest zbiorem możliwych wartości funkcji s. Miarą wartości informacji dla decydenta może więc być różnica między wielkością straty jaką poniesie w przypadku nieznajomości dokładnej wartości zmiennej β i wielkością straty ponoszonej wtedy, gdy wartość ta jest mu znana. W ogólnym przypadku wielkość strat spodziewanych przez decydenta można wyrazić za pomocą całki $\int s(\alpha,\beta)dF(\beta)$. Niech α^* będzie wartością zmiennej decyzyjnej α, maksymalizującą wartość tej całki wtedy, gdy decydent zna jedynie dystrybuantę zmiennej β. Niech α^*_β będzie wartością zmiennej α maksymalizującą wartość tej całki, gdy wartość β jest znana. Jeżeli pominąć koszty zdobycia informacji, to miarą wartości informacji dla decydenta jest różnica

$$\int [s(\alpha^*_\beta,\beta)-s(\alpha,\beta)]dF(\beta), \qquad (1)$$

przy czym musi ona być nieujemna. Będzie ona równa zero, gdy decydent będzie z góry znał wartość zmiennej β, bo wtedy $s(\alpha,\beta)=s(\alpha^*_\beta,\beta)$.

Powstaje pytanie, jaki wpływ na wartość informacji mają zmiany rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej β. Załóżmy, że jest to zmienna dyskretna, mogąca przyjmować skończoną liczbę wartości $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ z prawdopodobieństwami $p_1,p_2,...,p_n$. Załóżmy ponadto, że zmienna decyzyjna α jest wektorem m-wymiarowym, tzn. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$. Dla każdej konkretnej realizacji zmiennej losowej β strata zależy tylko od zmiennej α. Wprowadźmy dla uproszczenia zapisów oznaczenie $g_i(\alpha)=s(\alpha,\beta_i)$ i załóżmy, że funkcje $g_i(\alpha)$ są wklęsłe. Jeżeli przez α^* oznaczymy tę wartość zmiennej α, której odpowiada najmniejsza strata, to warunkiem koniecznym i dostatecznym maksimum jest

$$\left.\frac{\partial g_i(\alpha)}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=\alpha^*}=0, \qquad (j=1,2,...,m) \qquad (2)$$

Wartość oczekiwana straty, której może spodziewać się decydent, wyraża się za pomocą sumy $\sum_{i=1}^{n} p_i g_i(\alpha)$. Ponieważ $p_i \geq 0$ $(i=1,2,...,n)$, więc suma ta też jest funkcją wklęsłą i wobec tego warunkiem koniecznym i dostatecznym osiągania przez nią maksimum jest

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial g_i(\alpha)}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=\alpha^*}=0, \qquad (j=1,2,...,m) \qquad (3)$$

A zatem, aby znaleźć wartości prawdopodobieństw, przy których ilość informacji jest maksymalna, trzeba rozwiązać zadanie

$$\max_{p_1,p_2,...,p_n} \sum_{i=1}^{n} p_i \left.\frac{\partial g_i(\alpha)}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=\alpha^*}=0 \qquad (4)$$

przy ograniczeniach

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad p_i \geq 0, \qquad (i=1,2,...,n) \qquad (5)$$

Warunki Kuhna-Tuckera dla tego zadania przyjmują postać

$$g_k(\alpha_k^*)-g_k(\alpha^*)-\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial g_i(\alpha)}{\partial \alpha_j}\right)\frac{\partial \alpha_j}{\partial p_i}=\lambda+\mu_k$$

Tu λ jest mnożnikiem pierwszego z ograniczeń, a μ_i $(i=1,2,...,n)$ mnożnikami pozostałych, przy czym $k=1,2,...,n$. Z uwagi na (5) równoważną postacią tych warunków jest

$$g_k(\alpha_k^*)-g_k(\alpha^*)=\lambda+\mu_k, \qquad (k=1,2,...,n) \qquad (6)$$

gdzie $\mu_k=0$ dla $p_k>0$. Z ostatniej równości wynika, że dla tych wszystkich k i l, dla których prawdopodobieństwa p_k i p_l są dodatnie, w punkcie odpowiadającym maksimum jest spełniony warunek

$$g_k(\alpha_k^*)-g_k(\alpha^*)=g_l(\alpha_l^*)-g_l(\alpha^*) \qquad (7)$$

Ponieważ różnice stojące po obu stronach tej równości określają ilości informacji odpowiadające tym wartościom β_k i β_l zmiennej losowej β, których prawdopodobieństwa są dodatnie, więc wnioskujemy, że jeżeli wartość oczekiwana ilości informacji osiąga maksimum, to jest ona taka sama dla każdej realizacji β, której prawdopodobieństwo zajścia jest dodatnie. Ale to znaczy, że wbrew postulatom teorii informacji Shannona, ilość informacji nie musi rosnąć ze wzrostem liczby elementów zbioru danych oraz że maksymalna ilość informacji nie musi być osiągana tylko wtedy, gdy wszystkie dane są jednakowo prawdopodobne. Wartość informacji zawartej w zbiorze danych nie musi więc wynikać z modelu shannonowskiego [8].

3. WZAJEMNA RELACJA KONIECZNOŚCI I PRZYPADKOWOŚCI

W teorii informacji Shannona [8] ma się do czynienia z przypadkowością probabilistyczno-statystyczną. Nie jest to jednak jedyny rodzaj przypadkowości i fakt ten musi być brany pod uwagę przy wyborze postaci modelu. Model matematyczny jest wyidealizowanym opisem rzeczywistego obiektu, wyrażonym w kategoriach pojęć matematycznych. Na ogół opis ten ma postać zależności, wiążących efekty działania rozważanego obiektu z wielkościami wejściowymi oraz z czynnikami ubocznymi, które na niego oddziałują. Najprostsza sytuacja ma miejsce wtedy, gdy można przyjąć, że wszystkie te wielkości i czynniki są pewne i dokładnie znane, zaś kolejne stany obiektu są ze sobą powiązane za pomocą koniecznych związków przyczynowo-skutkowych. W zdecydowanej większości zastosowań byłoby to założenie utopijne. Realistyczne modelowanie obiektów rzeczywistych wymaga podejścia niedeterministycznego, którego istotą jest uznanie, że stosunki między przyczyną i skutkiem mogą występować zarówno w formie konieczności, jak i przypadkowości. Przykładem może być modelowanie procesu przyporządkowywania potoków ruchu drogom transportowym. Chociaż procesem tym rządzi czynnik wielorakiej konieczności (przewozy muszą odbywać się w ściśle określonych relacjach, a często i po ściśle określonych drogach), to jednak jest on ustawicznie zakłócany przez czynniki losowe (uszkodzenia urządzeń infrastrukturalnych, ekstremalne warunku pogodowe itp.).

Pojęcie przypadkowości nie zawsze jest poprawnie rozumiane. Często słyszy się, że przypadkowość zdarzenia nie oznacza nic więcej, jak tylko brak dostatecznej wiedzy na jego temat. Z metodologicznego punktu widzenia jest to stanowisko niepoprawne, bo prowadzi do utożsamiania konieczności z przypadkowością. Jest prawdą, że nie ma zjawisk bez przyczyny, ale jest też prawdą, że nie wszystko co, powstaje w sposób konieczny. Mają również miejsce zjawiska przypadkowe, tj. takie, które w danych okolicznościach mogą, ale nie muszą zaistnieć, ale jeżeli zaistnieją, to może to nastąpić w taki lub inny sposób. Zjawiska przypadkowe też są przyczynowo uwarunkowane. Nie należy jednak przeciwstawiać konieczności i przypadkowości, bowiem nie jest prawdą, że zjawiska mogą być albo tylko konieczne, albo tylko przypadkowe. Oba czynniki współwystępują ze sobą, przy czym przypadkowość jest formą przejawiania się i dopełnieniem konieczności. Przypadki wpływają na tok koniecznego rozwoju zdarzeń, mogą go przyśpieszać lub hamować. Co więcej, przypadkowość może z biegiem czasu przerodzić się w konieczność, zaś to co konieczne z jednego punktu widzenia, może być przypadkowym w innym kontekście. Istotą postępowania identyfikacyjnego jest przenikanie poprzez związki przypadkowe w związki konieczne, rządzące modelowanym fragmentem rzeczywistości.

4. RYZYKO BŁĘDNEGO WYBORU MODELU

Załóżmy, że jest dany skończony zbiór $\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$ modeli, spośród których trzeba wybrać najlepszy z punktu widzenia potrzeb nadrzędnego systemu decyzyjnego. Można to zrobić porównując modele parami. Aby rozstrzygnąć, który z dwóch modeli m_i, m_j jest lepszy, trzeba dysponować z góry zadanym i w miarę obiektywnym kryterium porównawczym. Rolę takiego kryterium może pełnić funkcja $s: M \times M^* \to D$, której dziedziną jest iloczyn kartezjański zbioru modeli i zbioru podjętych decyzji, a przeciwdziedziną zbiór możliwych wartości strat, jakie poniesie system nadrzędny, jeżeli będzie się w nim podejmowało decyzje zgodnie z modelem m_j, podczas gdy faktycznie należało korzystać z modelu m_i. Funkcję s będziemy nazywać funkcją straty. Postać tej funkcji musi każdorazowo wynikać z zadania decyzyjnego rozwiązywanego przez system nadrzędny. Symbol $s(m_i, m_j)$ będzie oznaczał liczbową wartość straty związanej z parą modeli m_i, m_j. Wygodną formą przedstawienia funkcji straty jest macierz kwadratowa c o wymiarach $l \times l$, której elementami są wielkości $s(m_i, m_j)$ dla $i, j = 1,2,\ldots,l$.

W każdym jednostkowym przypadku wielkość straty zależy od modelu, który był proponowany i od modelu, który został wybrany. Tymczasem kryterium jakości reguły wyboru modelu powinno mieć charakter ogólny. Aby je otrzymać, trzeba za pomocą odpowiedniej operacj uwalniania wyeliminować zależność wartości funkcji straty od modeli występujących jako jej argumenty. Operacja ta zależy od dwóch czynników: charakteru nieznanych wielkości występujących w systemie i kryterium jakości działania systemu nadrzędnego, który będzie korzystał z modelu. W przypadku, gdy wielkości te mają charakter probabilistyczno-statystyczny, to operatorem uwalniania może być operator uśredniania straty po wszystkich możliwych parach modeli proponowanych i modeli wybranych. Tę uśrednioną wartość straty nazywa się ryzykiem. Jeżeli oznaczymy ją przez $\bar{r}$, to

$$\bar{r} = \underset{M \times M^*}{E} s(\hat{M}, \hat{M}^*) \tag{8}$$

gdzie $\hat{M}, \hat{M}^*$ są zmiennymi losowymi reprezentującymi odpowiednio model proponowany i model wybrany, zaś $\underset{M \times M^*}{E}$ jest operatorem uśredniania po zbiorze wszystkich możliwych par modeli proponowanych i modeli wybranych.

Ponieważ mamy do czynienia z dyskretnym zbiorem alternatywnych modeli a decyzje mają charakter punktowy, więc

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{l} s(m_i, m_j) p(m_i, m_j) \tag{9}$$

gdzie $p(m_i, m_j)$ jest łącznym prawdopodobieństwem rozpatrywania modelu m_i i wybrania modelu m_j. Jeżeli w opinii decydenta każdy błąd w wyborze postaci modelu jest jednakowo niekorzystny, to stratę można określić następująco

$$s(m_i, m_j) = \begin{cases} C & \text{gdy } i \neq j \\ 0 & \text{gdy } i = j \end{cases} \tag{10}$$

gdzie C – stała dodatnia. Nietrudno przekonać się, że w tym przypadku

$$\bar{r} = C[1 - \sum_{k=1}^{l} p(m_k, m_k)] \tag{11}$$

gdzie $p(m_k, m_k)$ jest łącznym prawdopodobieństwem zaproponowania modelu m_k i jego zaakceptowania.

5. PRZESŁANKI WYBORU MODELU

Przykład dotyczy wyboru modelu trajektorii rozwoju technicznej infrastruktury transportu. Określa się ją jako układ stworzonych przez człowieka, trwale zlokalizowanych, punktowych i liniowych obiektów transportowych użytku publicznego, które - z uwagi na ich funkcje przemieszczania osób i ładunków - są jednym z głównych czynników kształtowania w ładu społecznego, gospodarczego, ekologicznego i przestrzennego [6]. Systemowymi elementami tego układu są infrastruktury techniczne poszczególnych rodzajów transportu (kolejowego, drogowego, lotniczego itd.). Z chwilą urynkowienia gospodarki zaczął się niezwykle burzliwy rozwój motoryzacji. W konkurencji z transportem samochodowym kolej utraciła na jego rzecz zajmowaną dawniej pozycję głównego przewoźnika. Okazało się jednak, że istniejący układ dróg nie jest na tyle wydolny, by mógł sprawnie obsłużyć lawinowo rosnące zapotrzebowanie na jego wykorzystanie. Zamiast być czynnikiem rozwoju, stał się jego hamulcem. Podjęto więc prace studialne, projektowe i wdrożeniowe nad restrukturyzacją, modernizacją i rozwojem infrastruktury transportu drogowego. Opracowano długofalowy program rozwoju sieci autostrad i dróg szybkiego ruchu. Znane są kłopoty z jego realizacją. Mniej znane są ich przyczyny, ale niewątpliwie jedną z ważniejszych jest brak odpowiednio rozwiniętego zaplecza naukowego w dziedzinie kształtowania technicznej infrastruktury transportu. Bezkrytyczne korzystanie z metod stosowanych w krajach o najwyższym poziomie rozwoju transportu drogowego, podparte argumentacją, że skoro są to metody sprawdzone w praktyce, to i w polskich warunkach nie powinny zawieść, jest błędne metodologicznie. Już ćwierć wieku temu zwrócił na to uwagę jeden z najwybitniejszych wówczas światowych autorytetów z dziedziny drogownictwa, prof. R. Stearns, który po zwizytowaniu polskich instytucji odpowiedzialnych za kształtowanie sieci drogowej kraju, stwierdził: „Moim podstawowym wnioskiem i zaleceniem jest, aby polscy planiści i projektanci układów komunikacyjnych ustalili swoje własne modele (być może poprzez modyfikację istniejących), które odzwierciedlą dynamiczny rozwój zachowań i wzorów podróży w Polsce i które będą podatne na zmiany warunków społeczno-gospodarczych zachodzących obecnie i spodziewanych w najbliższych latach. Polscy specjaliści nie mogą poprzestać na stosowaniu obcych, a szczególnie amerykańskich procedur i modeli, które są oparte na odmiennym rozwoju historycznym i odmiennych warunkach społeczno-gospodarczych i środowiskowych". Ta opinia jest obecnie jeszcze bardziej aktualna niż wtedy, kiedy została wyrażona. W jej tle leży bowiem uznanie roli modelowania matematycznego w podejmowaniu strategicznych decyzji dotyczących kształtowania infrastruktury transportu drogowego oraz podkreślenie potrzeby rozwijania rodzimego nurtu badań w tej dziedzinie. Potrzeba ta nabrała jeszcze większego znaczenia po przystąpieniu Polski do Unii Europejskiej, co pociągnęło za sobą konieczność zharmonizowania krajowej polityki transportowej z polityką transportową Unii.

W ostatnim dwudziestoleciu wielokrotnie podejmowano próby zbudowania modelu trajektorii rozwoju technicznej infrastruktury transportu. Prace były prowadzone zarówno przez ośrodki krajowe, jak i przez zagraniczne firmy konsultingowe. W oparciu o raporty z tych prac wybrano siedem modeli trajektorii, z czego trzy były oparte na idei ekstrapolacji trendu, a cztery pozostałe były modelami ekonometrycznymi i wiązały kształt trajektorii z kilkoma podstawowymi zmiennymi makroekonomicznymi. Modele te oceniono pod kątem spełnienia trzech podstawowych własności: (a) sprawdzenia stochastyczności zbioru danych, (b) weryfikacji jednorodności tego zbioru, (c) założenia ciągłości trajektorii i (d) oszacowania ryzyka wybrania niewłaściwego modelu. Wyniki są podane w tabeli 1. Symbol T oznacza wystąpienie danej własności, symbol N – jej brak.

Tabela 1. Wyniki oceny modeli

Nr modelu	Własności			
	a	b	c	d
1	T	N	T	N
2	T	N	T	N
3	T	N	T	N
4	T	N	T	N
5	T	N	T	N
6	T	N	T	N
7	T	N	T	N

Trzeba zwrócić uwagę, że z punktu widzenia tych cech wszystkie analizowane modele są ułomne. Wskazuje to na konieczność zrewidowania zasad modelowania rozwoju infrastruktury i oparcia modelowania na nowych postulatach. Wśród nich muszą znaleźć się postulaty omówione w treści artykułu, a także postulat dotyczący struktury trajektorii rozwoju infrastruktury. Przyjmowanie w długim okresie czasu ciągłego modelu trajektorii rozwoju jest sprzeczne z prawami rozwoju systemów o celowym działaniu. Trajektoria takich systemów jest sekwencją na przemian po sobie następujących krzywych monotonicznych, odpowiadających stosunkowo długim okresom normalnego funkcjonowania systemów w warunkach ich stabilnej równowagi, oraz znacznie od nich krótszych okresów przejściowych, w których w systemach dominuje czynnik niestabilności spowodowany, między innymi, przeprowadzaniem w systemie istotnych zmian strukturalnych. Aproksymacja takiego procesu, na przykład za pomocą metod wyrównywania trendu, daje wprawdzie wyniki eleganckie matematycznie, ale nieprzydatne w praktyce. W toku opracowywania jest model, który zakłada ciągłe monitorowanie stanu systemu infrastruktury w celu identyfikacji symptomów zbliżania się okresów przejściowych. W okresach monotonicznego rozwoju zachowanie się systemu jest opisywane za pomocą jednej z krzywych wzrostu. Wybór postaci krzywej jest wspomagany wnikliwą analizą zbioru danych, uwzględniającą wszystkie sformułowane wyżej postulaty. W okresach przejściowych zachowanie się systemu jest opisane za pomocą modelu katastrofy ostrzowej. Okres ten jest traktowany jako czas, w którym w systemie infrastruktury dokonuje się istotnych zmian strukturalnych, przygotowując warunki początkowe do nowej fazy rozwoju monotonicznego.

Z uwagi na to, że duża część danych nie ma charakteru probabilistyczno-statystycznego, trwają również prace nad skonstruowaniem innych modeli, opartych na koncepcjach zmiennej rozmytej i zmiennej nieokreślonej. Wstępne wyniki potwierdzają zasadność takiego podejścia, bowiem w rzeczywistości w procesie rozwoju infrastruktury przeplatają się czynniki konieczności i przypadkowości, obiektywizmu i subiektywizmu, determinizmu i rozmaitych form niedeterminizmu. Niedeterminizm probabilistyczno-statystyczny jest jedną z tych form i to wcale niedominującą.

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Celem artykułu było syntetyczne przedstawienie wyników teoretycznych badań nad sprzężeniem teorii modelowania matematycznego z elementami teorii informacji i teorii podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. Bezpośrednim impulsem do podjęcia tej tematyki były badania nad matematycznym modelowaniem rozwoju technicznej infrastruktury transportu. Pokazały one, że w dziedzinie tej dominuje niemal mechaniczne traktowanie zbiorów danych jak populacji probabilistyczno-statystycznych. Tymczasem z logiki procesów rozwoju infrastruktury, które z reguły rozpatruje się w horyzoncie, co najmniej kilkunastoletnim, wynika ich systemowa unikatowość. Jest ona właściwością także innych systemów o celowym działaniu. W artykule spojrzano na proces wyboru modelu, jako na proces decyzyjny, któremu nieodłącznie towarzyszy ryzyko. Zwrócono uwagę na potrzebę analizy zbiorów danych pod kątem ich jednorodności i zawartości informacyjnej. Pokazano, że posługiwanie się pojęciem entropii informacyjnej w sensie nadanym mu przez Shannona nie zawsze prowadzi do dobrej oceny ilości i wartości informacji, których nośnikiem jest zbiór danych. Pokazano też, że ilość i wartość informacji nie muszą rosnąć ze wzrostem liczności zbioru danych oraz że maksymalna wartość ilości informacji może być osiągnięta nie tylko wtedy, gdy wszystkie realizacje zmiennej losowej reprezentującej zbiór danych są jednakowo prawdopodobne.

RISK AND INFORMATION IN MATHEMATICAL MODEL SELECTION

Abstract: The paper focuses on the role of information and risk as a basis for mathematical model selection. A methodology is outlined for determining the value of information in a context of model selection. The methodology shows how information relating to probabilistic events can be valued. Some remarks concerning stochasticity and nonstochasticity of data sets are presented. A conceptual framework which can be used for the description of some of the most significant features of the model selection process is given. Information, entropy and risk are regarded to be the basic factors of the process. It is established that the value of information can reach its maximal value even in the case of non-uniform probability distribution of data.

Literatura

[1] Bartoszyński R., Niewiadomska-Bugaj M. (1998) *Probability and Statistical Inference*. John Wiley, New York.

[2] Bubnicki Z. (1974) *Identyfikacja procesów sterowania*. PWN, Warszawa.

[3] Burnham K.P., Anderson D.R. (1998) *Model Selection and Multimodel Inference. A practical information-theoretic approach*. Springer Verlag, New York.

[4] Gutenbaum J. (2003) *Modelowanie matematyczne systemów*. Akademicka Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa.

[5] Kacprzyński B. (1974) *Planowanie eksperymentów. Podstawy matematyczne*. WNT, Warszawa.

[6] Piskozub A. (1977) Funkcja przemieszczania jako cecha wspólna infrastruktury. *Ekonomika Transportu*, **2**, 1+12.

[7] Seidler J. (1983) *Nauka o informacji*. Tom I. Podstawy, modele źródeł i wstępne przetwarzanie informacji. WNT, Warszawa.

[8] Shannon C.E., Weaver W. (1949) *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press, Urbana

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2