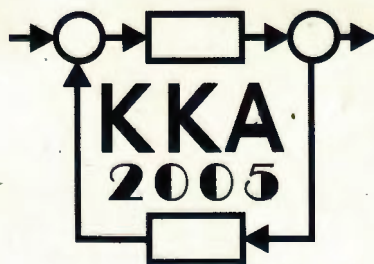


# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

# IDENTYFIKACJA I ROZPOZNAWANIE

## IDENTYFIKACJA NIECAŁKOWITEGO RZĘDU POCHODNEJ RÓWNIANIA BAGLEY'A-TORVIKA

**Piotr OSTALCZYK, Radosław CISZ**

Politechnika Łódzka, Wydział Elektrotechniki i Elektroniki, Instytut Automatyki  
ul. B. Stefanowskiego 18/22, 90-537 Łódź,  
e-mail: postalcz@p.lodz.pl; ciszr@ncts-centrum.mofnet.gov.pl

**Streszczenie:** WW pracy zaproponowana została metoda identyfikacji niecałkowitego rzędu równania różniczkowego Bagley'a-Torvika. Równanie to opisuje ruch drgający elastomerów.

**Słowa kluczowe:** Różniczka niecałkowitego rzędu, układy liniowe.

### 1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach coraz powszechniej wykorzystuje się pojęcie różniczki niecałkowitego rzędu rzeczywistego w zagadnieniach modelowania zjawisk fizycznych [7,8,12,13] oraz projektowania układów odpornych [9,10,11] Różniczkę tę, zwaną również różniczką Grunwalda-Letnikowa definiuje wzór

$${}_{t_0} D_t^n y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_{t_0}^t (t-x)^{-\nu} y(x) dx \quad (1)$$

gdzie  $0 < n \leq 1$  jest rzędem różniczki funkcji  $y(t)$  a  $t_0, t$  ( $t_0 \leq t$ ) oznaczają odpowiednio dolną i górną granicę różniczkowania. Wykorzystując wzór (1) ogólnie rozważa się liniowe, stacjonarne równanie różniczkowe postaci

$$\sum_{i=1}^l a_i [{}_{t_0} D_t^{n_i} y(t)] = u(t) \quad (2)$$

gdzie  $n_l > n_{l-1} > \dots > n_1 > 0$  są dowolnymi rzędami pochodnych. Różniczkę tę oblicza się numerycznie jako [4,13]

$${}_{t_0} D_t^n y(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \begin{bmatrix} a_0^{(n)} & \dots & a_k^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t-h) \\ \vdots \\ y(t-nh) \end{bmatrix} \quad (3)$$

gdzie  $h$  jest krokiem obliczeń, a współczynniki  $a_i^{(n)}$  zdefiniowane są następująco

$$a_i^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 0 \\ (-1)^i \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!} & \text{dla } i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Należy nadmienić, że wartości rzędów mogą być dodatnie lub ujemne. W przypadku tych ostatnich można mówić o całkach niecałkowitych rzędów. Dokonując jednostronnego przekształcenia Laplace'a równania (2), przy zerowych warunkach początkowych otrzymuje się [12,13]

$$Y(s) = \frac{U(s)}{\sum_{i=1}^l a_i s^{n_i}} \quad (5)$$

Dopuszczenie niecałkowitych rzędów w opisie dynamiki układu prowadzi do konieczności identyfikacji nie tylko współczynników równania lecz również niecałkowitych rzędów. Współczynniki mogą być identyfikowane przy wykorzystaniu znanych metod identyfikacji. Identyfikacja rzędów, szczególnie w przypadku, gdy dane pomiarowe obciążone są szumem pomiarowym, jest zagadnieniem trudniejszym.

W pracy zaproponowano metodę identyfikacji jednego niecałkowitego rzędu w równaniu Bagley'a-Torvika opisującego drgania materiałów elastyczno-sprężystych [14,15]

### 2. RÓWNIANIE BAGLEY'A-TORVIKA

Liniowe, stacjonarne równanie różniczkowe Bagley'a-Torvika [1,2,3] ma następującą postać

$$a_2 {}_{t_0} D_t^{n_2} y(t) + a_1 {}_{t_0} D_t^{n_1} y(t) + a_0 y(t) = u(t) \quad (6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ n_2 &= 2 \\ n_1 &= 1.5 \\ a_2 &= 1 \\ a_1, a_0 &\in \mathbf{R} \end{aligned}$$



Zakładając zerowe warunki początkowe, rozwiązanie tego równania można wyrazić następująco

$$y(t) = \int_0^t G(t-\tau)u(\tau)d\tau \quad (7)$$

gdzie

$$G(t) = \frac{1}{a_2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{a_0}{a_2}\right)^k t^{2k+1} E_{0.5, 2+1.5k}^{(k)}\left(-\frac{a_1}{a_2}\sqrt{t}\right) \quad (8)$$

$$E_{\lambda, \mu}^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! x^j}{j! \Gamma(\lambda j + \mu)}$$

a  $\Gamma(z)$  oznacza funkcję gamma. Przebieg jednego rozwiązania dla wymuszenia skokowego pokazany zostanie w poniższym przykładzie obliczeniowym.

### 2.1. Przykład

Rozważa się równanie (6), w którym przyjęto

$$n_2 = 2, \quad n_1 = 1.5 \\ a_2 = 1, \quad a_1 = 0.5, \quad a_0 = 0.5$$

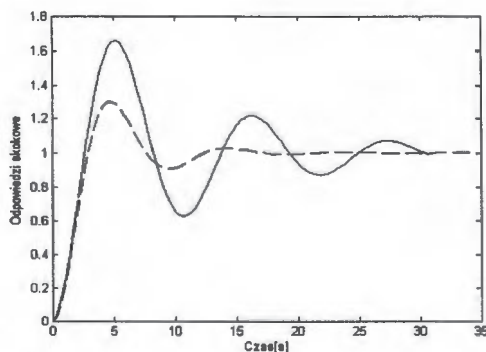
Funkcją wymuszającą jest funkcja skokowa

$$u(t) = 0.5I(t)$$

Numeryczne rozwiązanie równania (6), przy zerowych warunkach początkowych i kroku obliczeń  $h = 0.5$  pokazane zostało na rys. 1 (linia ciągła). Na tym samym rysunku pokazano (linia przerywana) odpowiedź elementu oscylacyjnego o tych samych współczynnikach.[5].

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \quad (10)$$

Daje się zauważyć zdecydowany wpływ rzędu równania na postać odpowiedzi skokowej. Wyższy rząd pochodnej drugiego od lewej składnika równania powoduje większe oscylacje w odpowiedzi



Rys. 1. Rozwiązania równań (6) (linia ciągła) i (10) (linia przerywana)

### 3. IDENTYFIKACJA RZĘDU RÓWNIANIA BA- GLEY'A-TORVIKA

Zaproponowana metoda określenia niecałkowitego rzędu zakłada aproksymację pochodnych za pomocą różnic wstecznych [4]

$$\left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t=hk} = \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{h^2} \quad (11)$$

$${}_0 D_t^{n_1} y(t) = \frac{1}{h^{n_1}} \begin{bmatrix} a_0^{(n_1)} & \dots & a_k^{(n_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Podstawiając wzory (11) i (12) do równania (6), po elementarnych przekształceniach otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} a_0^{(n_1)} & \dots & a_k^{(n_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} = \quad (13)$$

$$= \frac{h^{n_1}}{a_1} \left( -\frac{1+a_0 h^2}{h^2} y_k + \frac{2}{h^2} y_{k-1} - \frac{1}{h^2} y_{k-2} + u_k \right)$$

Z założenia o zerowych warunkach początkowych wynika  $y_0 = y_1 = 0$ . Dalej wprowadza się oznaczenie

$$f_k = -\frac{1+a_0 h^2}{h^2} y_k + \frac{2}{h^2} y_{k-1} - \frac{1}{h^2} y_{k-2} + u_k \quad (14)$$

Równanie (13) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} a_0^{(n_1)} & \dots & a_k^{(n_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{h^{n_1}}{a_1} f_k \quad (15)$$

dla  $k = 2, 3, \dots$ . Biorąc pod uwagę poprzednią chwilę czasu  $k-1$  równanie (15) może być przedstawione jako

$$\begin{bmatrix} 0 & a_0^{(n_1)} & \dots & a_{k-1}^{(n_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{h^{n_1}}{a_1} f_{k-1} \quad (16)$$

Łącząc równania (15) i (16) eliminuje się człon  $h^{n_1}$

$$\begin{bmatrix} a_0^{(n_1)} & \dots & a_k^{(n_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} = \frac{f_k}{f_{k-1}} \begin{bmatrix} 0 & a_0^{(n_1)} & \dots & a_{k-1}^{(n_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Ostatecznie otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} a_0^{(n_1)} & a_1^{(n_1)} - \frac{f_k}{f_{k-1}} a_0^{(n_1)} & \dots & a_k^{(n_1)} - \frac{f_k}{f_{k-1}} a_{k-1}^{(n_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

Biorąc pod uwagę postać współczynników (4) równanie (18) dla  $k=3,4,\dots$  ma postać wielomianu stopnia  $k$  zmiennej  $n_1$ . Jednym z zer każdego wielomianu musi być liczba rzeczywista równa rzędowi równania, czyli wzór

$$n_1^k + c_{k-1}n_1^{k-1} + \dots + c_1n_1 + c_0 = 0 \quad (19)$$

Wszechobecne zakłócenia w wektorze danych pomiarowych

$$y_k = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k-1} \\ \vdots \\ y_0 \end{bmatrix}$$

oraz błędy obliczeń numerycznych spowodowane dużą czułością wartości zer wielomianu na jego współczynniki, wymagają specjalnych procedur numerycznych [6], a za wartość rzędu należy przyjąć wartość średnią z obliczonych wartości rzędów  $n_{1i}$

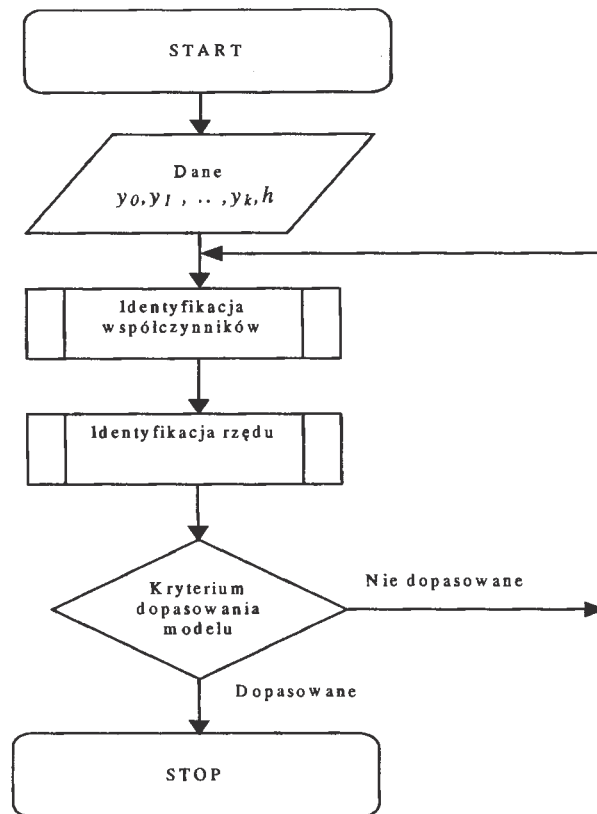
$$\bar{n}_1 = \frac{\sum_{i=1}^l n_{1i}}{l} \quad (20)$$

#### 4. IDENTYFIKACJA WSPÓŁCZYNNIKÓW I RZĘDU

Należy zauważyć, że w procesie identyfikacji rzędu założona była znajomość współczynników równania  $a_1, a_0 \in \mathbf{R}$ . Procedurę identyfikacji należy zacząć od identyfikacji tych współczynników, zakładając np. rząd  $n_1 = 1$ . Po określeniu współczynników oblicza się rząd a następnie ponownie współczynniki i td. Należy zauważyć, że nieznanne współczynniki równania wpływają liniowo na wartość rozwiązania. Można zatem zastosować dowolną metodę ich identyfikacji. Opisany cykl obliczeń przerywa odpowiednia wartość kryterium dopasowania pomierzonych odpowiedzi do wartości uzyskanych drogą symulacji.

Opisany cykl obliczeń przerywa odpowiednia wartość kryterium dopasowania pomierzonych odpowiedzi do wartości uzyskanych drogą symulacji.

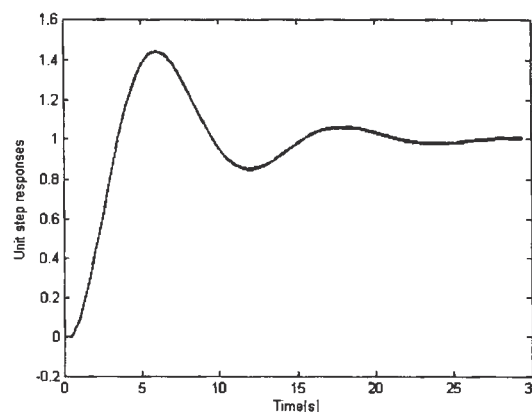
Schemat blokowy procesu identyfikacji przedstawiony jest na rys 2.



Rys. 2. Schemat blokowy identyfikacji rzędu i współczynników równania Bagley'a-Torvika

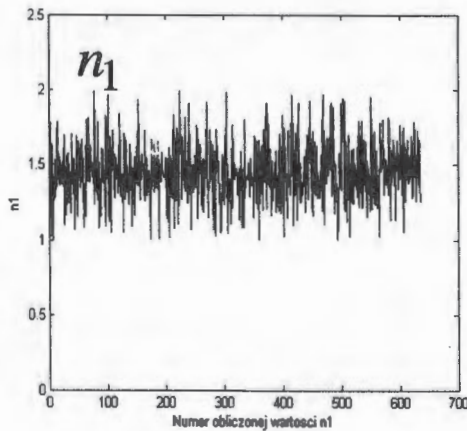
#### 4.1. Przykład obliczeniowy

Zakłada się, że zebrano dane pomiarowe ze  $p=100$  zakłóconych przebiegów odpowiedzi jednostkowej układu opisanego równaniem różniczkowym (6). Przebiegi pokazane zostały na rys. 3



Rys. 3. Przebiegi odpowiedzi jednostkowych układu opisanego równaniem różniczkowym Bagley'a-Torvika.

Po przyjęciu  $k_{\max} = 38$ , i odrzuceniu rozwiązań większych od 2 i mniejszych od 1 (układ byłby wtedy niestabilny) dla zakłóconych odpowiedzi skokowych otrzymuje się zbiór rozwiązań, pokazanych na rys. 4

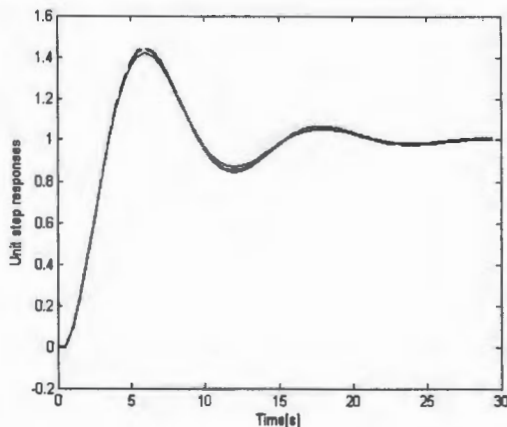


Rys.4. Wartości niecałkowitego rzędu równania różniczkowego Bagley'a-Torvika

Wartość średnia otrzymanych wartości wynosi

$$\bar{n}_1 = 1.4499$$

Tytułem porównania otrzymanego wyniku z danymi pomiarowymi, na rysunku 5 pokazano jeszcze raz zakłócone odpowiedzi oraz odpowiedź uzyskaną drogą symulacji, dla rzędu (21).



Rys. 5. Odpowiedzi zakłócone (linie przerywane) oraz odpowiedź symulowana dla rzędu  $\bar{n}_1 = 1.4499$ .

## 5. PODSUMOWANIE

Badania ostatnich dwudziestu lat wykazują, że coraz więcej zjawisk fizycznych lepiej opisywanych jest za pomocą równań różniczkowych niecałkowitych rzędów. Dlatego istotna jest identyfikacja nie tylko współczynników tych równań, ale również ich rzędów.

**Abstract:** In this paper an identification method of the fractional-order of the Bagley-Torvik differential equation is proposed. Assuming that the noised unit step responses data are given, a set of polynomials is created. Their one root is considered as an fractional order of the system.

## Literatura

- [1] Bagley R.L., Torvik P.J. (1979) A Generalised Derivative Model for an Elastomer Damper. *Shock and Vibration Bulletin*, **49**, 135-143.
- [2] Bagley R.L., Torvik P.J. (1983) Fractional Calculus – A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures. *AIAA Journal*, **21**, 741-748.
- [3] Bagley R.L., Torvik P.J. On the Fractional Calculus Model of Viscoelastic Behaviour. *Journal of Rheology*, **30**, 1, 133-155.
- [4] Ford N.J., Simpson A.C. The numerical solution of fractional differential equations: Speed versus accuracy. *Numerical Algorithms*, **26**, 333-346.
- [5] Kaczorek T. (1974) *Teoria układów regulacji automatycznej*. WNT, Warszawa.
- [6] The MathWorks, Inc., *MATLAB Reference Guide*. Natick, 1994.
- [7] Miller K.S., Ross B. (1993) *An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [8] Nishimoto K., Romero S.S. (2001) N-fractional calculus method to an almost heat flow (one dimensional) equation (I and II). *Journal of Fractional Calculus*, **19**, 1-8 and 9-15.
- [9] Ostalczyk P., Kacerka J. i in. (1997) Analiza i synteza odpornych układów regulacji z zastosowaniem regulatorów typu CRONE opisanych równaniami różniczkowymi niecałkowitego rzędu. *Raport z realizacji projektu badawczego KBN*.
- [10] Oustaloup A. (1991) *La commande CRONE*. Éditions Hermès, Paris.
- [11] Oustaloup A. (1994) *La robustesse*. Éditions Hermès, Paris.
- [12] Oustaloup A. (1995) *La dérivation non entière*. Éditions Hermès, Paris.
- [13] Podlubny I. (1999) *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego.
- [14] Sakakiba S. (2000) Relaxation Properties of Fractional Derivative Viscoelasticity Models. *Nonlinear Analysis*, **47**, 5449-5454.
- [15] Shimizu N., Zhang W., Nasuno H. (2004) Formulation and application of fractional FE damping matrix of viscoelastic body. *1<sup>st</sup> IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Bordeaux, 293-298.





**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2