XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:

Zdzisław Bubnicki

Roman Kulikowski

Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK Stanisław KACZANOWSKI Tadeusz KACZOREK Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI Tadeusz PUCHAŁKA Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STEROWANIE OPTYMALNE
I ADAPTACYJNE

STRUKTURA DYSKRETNYCH ALGORYTMÓW OPTYMALNYCH ZE WZGLĘDU NA NORMĘ $\mathcal{H}_\infty$

Piotr SUCHOMSKI

Politechnika Gdańska, Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
ul. G. Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk e-mail:piotrjs@poczta.onet.pl

Streszczenie: W referacie omówiono strukturalne własności algorytmów sterowania w czasie dyskretnym optymalnych ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$.

Słowa kluczowe: sterowanie w czasie dyskretnym, norma $\mathcal{H}_\infty$, łańcuchowe macierze rozproszenia.

1. MODELE

Dany jest uogólniony obiekt dynamiczny P opisany liniowym i przyczynowym operatorem czasu dyskretnego

$$P : \begin{bmatrix} W \\ U \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Z \\ Y \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie wejściowy sygnał w o wymiarze r odwzorowuje wpływ zewnętrznych zakłóceń, wejściowy sygnał u o wymiarze p jest sygnałem sterującym (zmienne aktualizujące), sygnał z o wymiarze m oznacza sterowane zmienne modelujące cel sterowania (zmienne kryterialne), zaś sygnał y o wymiarze q jest sygnałem wielkości mierzonych (zmienne obserwowane). Operatorowi P można przyporządkować macierz rozproszenia [2]

$$P(\zeta) = \begin{bmatrix} P_{zw}(\zeta) & P_{zu}(\zeta) \\ P_{yw}(\zeta) & P_{yu}(\zeta) \end{bmatrix} \tag{2}$$

o elementach będących macierzowymi wymiernymi funkcjami przenoszenia. Niech czwórka macierzy (A, B, C, D) o stosownych wymiarach (przyjmujemy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) oznacza pewną realizację funkcji $P(\zeta)$

$$P(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_w & B_u \\ \hline C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{array}\right]. \tag{3}$$

Założenie. Zakłada się, że P jest obiektem standardowym [5] spełniającym następujące warunki:

(a1) para (A, B_u) jest stabilizowalna, zaś para (A, C_y) jest wykrywalna,

(a2) D_{zu} ma pełny kolumnowy rząd, zaś D_{yw} ma pełny wierszowy rząd,

(a3') $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \bar{A}(\omega) & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix} = n + p, \forall\omega \geq 0,$

(a3") $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \bar{A}(\omega) & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix} = n + q, \forall\omega \geq 0,$ gdzie $\bar{A}(\omega) = A - \frac{e^{j\omega\Delta}-1}{\Delta} I_n,$

(a4) $D_{yu} = 0_{q\times p}$. □

Właściwości takiego uogólnionego obiektu P, dla którego $q = r$ oraz element $P_{yw}(\zeta)$ jego macierzy rozproszenia $P(\zeta)$ jest odwracalny, można opisać, rozważając następujące pary sygnałów wejściowych oraz wyjściowych

$$G : \begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} \tag{4}$$

gdzie

$$G(\zeta) = \begin{bmatrix} G_{zu}(\zeta) & G_{zy}(\zeta) \\ G_{wu}(\zeta) & G_{wy}(\zeta) \end{bmatrix} \tag{5}$$

oznacza *łańcuchową macierz rozproszenia*. Z kolei, dla takiego obiektu P, że $p = m$ oraz element $P_{zu}(\zeta)$ jego macierzy rozproszenia $P(\zeta)$ jest odwracalny, można podać opis oparty na następujących parach sygnałów wejściowych oraz wyjściowych

$$H : \begin{bmatrix} Z \\ W \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} \tag{6}$$

gdzie

$$H(\zeta) = \begin{bmatrix} H_{uz}(\zeta) & H_{uw}(\zeta) \\ H_{yz}(\zeta) & H_{yw}(\zeta) \end{bmatrix} \tag{7}$$

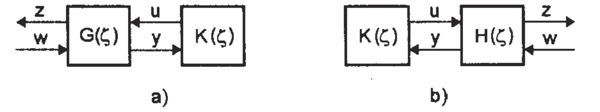
jest *dualną łańcuchową macierzą rozproszenia*.

Na rys. 1 pokazano przyjętą konwencję przedstawiania zamkniętych układów sterowania danym obiektem P opisanym łańcuchowymi modelami G oraz H, przy czym działanie regulatora $K : Y \to U$ modelowane jest funkcjami przenoszenia odpowiednio: $K \in \mathcal{R}_P^{p\times r}$ oraz $K \in \mathcal{R}_P^{m\times q}$. Wejściowo-wyjściowe cechy takich układów są wyznaczone przez stosowne funkcje przenoszenia: $HM(G, K) \in \mathcal{R}_P^{m\times r}$ oraz $DHM(H, K) \in \mathcal{R}_P^{m\times r}$, gdzie

$$\begin{aligned} HM(G, K) = (G_{zu}K + G_{zy}) \times \\ (G_{wu}K + G_{wy})^{-1} \end{aligned} \tag{8}$$

to operator *homograficznej transformacji*, zaś

$$\begin{aligned} DHM(H, K) = -(H_{uz} - KH_{yz})^{-1} \times \\ (H_{uw} - KH_{yw}) \end{aligned} \tag{9}$$



Rysunek 1. Schemat układu z obiektem opisanym: a) łańcuchową macierzą rozproszenia, b) dualną łańcuchową macierzą rozproszenia.

oznacza operator *dualnej homograficznej transformacji.*

Problem syntezy regulatora K optymalnego ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$ formułuje się jako żądanie, aby $\|HM(G,K)\|_\infty < \gamma$ lub odpowiednio $\|DHM(H,K)\|_\infty < \gamma$, gdzie $\gamma > 0$.

2. J-BEZSTRATNOŚĆ

Definicja 1. [9] Niech $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ oraz $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$.

(*1*) $G(\zeta)$ jest (J_{mr}, J_{pr})-*unitarną* funkcją, gdy $G^\sim(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot G(\zeta) = J_{pr}, \forall\zeta$.

(*2*) (J_{mr}, J_{pr})-unitarna funkcja $G(\zeta)$ jest (J_{mr}, J_{pr})-*bezstratną* funkcją, gdy $G^\star(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot G(\zeta) \leq J_{pr}$, $\forall\zeta \in -\mathcal{D}_\Delta$.

(*3*) $H(\zeta)$ jest *dualną* (J_{mq}, J_{mr})-*unitarną* funkcją, gdy $H(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot H^\sim(\zeta) = J_{mq}, \forall\zeta$.

(*4*) Dualna (J_{mq}, J_{mr})-unitarna funkcja $H(\zeta)$ jest *dualną* (J_{mq}, J_{mr})-*bezstratną* funkcją, gdy $H(\zeta) \cdot J_{mr} \cdot H^\star(\zeta) \geq J_{mq}, \forall\zeta \in -\mathcal{D}_\Delta$. □

Definicja 2. [9] Niech $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ oraz $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$.

(*1*) Jeżeli funkcja $G(\zeta)$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$, którego czynnik $\Theta(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ jest (J_{mr}, J_{pr})-bezstratny, zaś czynnik $\Pi(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p+r}$ jest unimodularny, wtedy o funkcji $G(\zeta)$ mówimy, że ma (J_{mr}, J_{pr})-*bezstratną faktoryzację*.

(*2*) jeżeli funkcja $H(\zeta)$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$, którego czynnik $\Omega(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$ jest unimodularny, zaś czynnik $\Psi(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ jest dualną (J_{mq}, J_{mr})-bezstratną funkcją, wtedy o funkcji $H(\zeta)$ mówimy, że ma *dualną* (J_{mq}, J_{mr})-*bezstratną faktoryzację*. □

2.1. J-bezstratne faktoryzacje

J-bezstratne faktoryzacje odgrywają istotną rolę w syntezie układów optymalnych ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$. Z kolei, uogólnione J-bezstratne faktoryzacje stanowią podstawę syntezy układów zamkniętych w przypadku obiektów, których modele mają zera należące do $\partial\mathcal{D}_\Delta$ [9], [10].

Definicja 3. [9] Niech $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ oraz $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$.

(*1*) Jeżeli funkcja $G(\zeta)$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$, którego czynnik $\Theta(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ jest (J_{mr}, J_{pr})-bezstratny, zaś czynnik $\Pi(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(p+r)\times(p+r)}$ nie ma zer należących do $-\bar{\mathcal{D}}_\Delta$, wtedy o iloczynie tym mówimy, że stanowi *uogólnioną* (J_{mr}, J_{pr})-*bezstratną faktoryzację* funkcji $G(\zeta)$.

(*2*) jeżeli funkcja $H(\zeta)$ może być przedstawiona w postaci iloczynu $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$, którego czynnik $\Omega(\zeta) \in \mathcal{RH}_\infty^{(m+q)\times(m+q)}$ nie ma zer należących do $-\bar{\mathcal{D}}_\Delta$, zaś czynnik $\Psi(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ jest dualną (J_{mq}, J_{mr})-bezstratną funkcją, wtedy o iloczynie tym mówimy, że stanowi *uogólnioną dualną* (J_{mq}, J_{mr})-*bezstratną faktoryzację* funkcji $H(\zeta)$. □

2.2. Synteza w oparciu o J-bezstratne faktoryzacje

Załóżmy, że dla łańcuchowej macierzy rozproszenia $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$ istnieje (J_{mr}, J_{pr})-bezstratna faktoryzacja $G(\zeta) = \Theta(\zeta) \cdot \Pi(\zeta)$. Elementy $K \in \mathcal{R}_P^{p\times r}$ zbioru wszystkich regulatorów, dla których $\|HM(G,K)\|_\infty < 1$, mają postać

$$K(\zeta) = HM(\Pi(\zeta)^{-1}, \Phi(\zeta)) \tag{10}$$

gdzie $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{p\times r}$ jest dowolną funkcją (parametrem). W tym przypadku $HM(G,K) = HM(\Theta,\Phi)$. Podobne rozumowanie dotyczy sytuacji, w której dla dualnej łańcuchowej macierzy rozproszenia $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$ istnieje dualna (J_{mq}, J_{mr})-bezstratna faktoryzacja $H(\zeta) = \Omega(\zeta) \cdot \Psi(\zeta)$. Elementy $K \in \mathcal{R}_P^{m\times q}$ zbioru wszystkich regulatorów, dla których $\|DHM(H,K)\|_\infty < 1$, mają postać

$$K(\zeta) = DHM(\Omega(\zeta)^{-1}, \Phi(\zeta)) \tag{11}$$

gdzie dowolna funkcja $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{m\times q}$ pełni rolę parametru. Zachodzi teraz $DHM(H,K) = DHM(\Psi,\Phi)$. Rozwiazania, w których zakłada się zerową wartość parametru projektu, odpowiednio $\Phi = 0_{p\times r}$ oraz $\Phi = 0_{m\times q}$, nazywane są rozwiązaniami *centralnymi*.

2.3. Równania Riccatiego

Poniższe dwa podstawowe twierdzenia odnoszą się do J—bezstratnych faktoryzacji modeli w dziedzinie operatora δ w oparciu o uogólnione zagadnienia własne związane z odpowiednimi dyskretnymi równanaimi Riccatiego [9], [10], [12].

W [8], [11] pokazano, że w typowych nieosobliwych przypadkach przy dostatecznie małym okresie próbkowania równania Riccatiego przyporządkowane standardowemu operatorowi przesunięcia q charakteryzują się istotnie gorszym uwarunkowaniem – a zatem większą wrażliwością na wpływ zaburzeń wejściowych danych – w porównaniu z analogicznymi równaniami sformułowanymi dla operatora δ.

Twierdzenie 1. [9] *Niech* $(A,\ B,\ C,\ D)$, *gdzie* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *będzie minimalną realizacją funkcji* $G(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+r)\times(p+r)}$. *Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer* *należących do* $\partial\mathcal{D}_\Delta$*.* (J_{mr}, J_{pr})*-bezstratna faktoryzacja* $G(\zeta) = \Theta(\zeta)\cdot\Pi(\zeta)$ *tej funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i) $(U_x, W_x) \in \mathrm{dom}\,(\delta Ric)$ *oraz* $X = \delta Ric(U_x, W_x) \geq 0$*, gdzie:*

$$\begin{aligned} P_x &= A - BS_x^{-1}D^TJ_{mr}C \\ Q_x &= C^TJ_{mr}(J_{mr} - DS_x^{-1}D^T)J_{mr}C \\ R_x &= BS_x^{-1}B^T \\ S_x &= D^TJ_{mr}D; \end{aligned}$$

(ii) $(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}}) \in \mathrm{dom}\,(\delta Ric)$ *oraz* $\bar{X} = \delta Ric(U_{\bar{x}}, W_{\bar{x}}) \geq 0$*, gdzie:*

$$P_{\bar{x}} = A^T,\quad Q_{\bar{x}} = 0_{n\times n},\quad R_{\bar{x}} = -C^TJ_{mr}C;$$

(iii) $\|X\bar{X}\|_2 < 1$*;*

(iv) istnieje taka nieosobliwa macierz $M_x \in \mathbb{R}^{(p+r)\times(p+r)}$*, że*

$$M_x^T(S_x + \Delta B^TXB)M_x = J_{pr}.$$

Unimodularny czynnik $\Pi(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p+r}$ *ma postać*

$$\Pi(\zeta) = N_{x\bar{x}}^{-1}\left[\begin{array}{c|c} A + H_{\bar{x}}C & -B_{\bar{x}} \\ \hline F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1} & I_{p+r} \end{array}\right]$$

gdzie:

$$\begin{aligned} F_x &= -(S_x + \Delta B^TXB)^{-1}(D^TJ_{mr}C + B^TX \times \\ &\quad (I_n + \Delta A)) \\ H_{\bar{x}} &= (I_n + \Delta A)\bar{X}(I_n + \Delta R_{\bar{x}}\bar{X})^{-1}C^TJ_{mr} \\ B_{\bar{x}} &= B + H_{\bar{x}}D \end{aligned}$$

zaś $N_{x\bar{x}} \in \mathbb{R}^{(p+r)\times(p+r)}$ *jest pewną nieosobliwą macierzą, spełniającą równanie*

$$\begin{gathered} N_{x\bar{x}}^T(D^T(J_{mr} - \Delta C\bar{X}C^T)^{-1}D + \\ \Delta B_{\bar{x}}^TX(I_n - \bar{X}X)^{-1}B_{\bar{x}})N_{x\bar{x}} = J_{pr}.\ \square \end{gathered}$$

Twierdzenie 2. [9] *Niech* (A, B, C, D)*, gdzie* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, będzie minimalną realizacją funkcji* $H(\zeta) \in \mathcal{RL}_\infty^{(m+q)\times(m+r)}$*. Zakłada się, że realizacja ta nie ma zer należących do* $\partial\mathcal{D}_\Delta$*. Dualna* (J_{mq}, J_{mr})*-bezstratna faktoryzacja* $H(\zeta) = \Omega(\zeta)\cdot\Psi(\zeta)$ *tej funkcji istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy:*

(i) $(U_y, W_y) \in \mathrm{dom}\,(\delta Ric)$ *oraz* $Y = \delta Ric(U_y, W_y) \geq 0$*, gdzie:*

$$\begin{aligned} P_y &= A^T - C^TS_y^{-1}DJ_{mr}B^T \\ Q_y &= -BJ_{mr}(J_{mr} - D^TS_y^{-1}D)J_{mr}B^T \\ R_y &= -C^TS_y^{-1}C \\ S_y &= DJ_{mr}D^T; \end{aligned}$$

(ii) $(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}}) \in \mathrm{dom}\,(\delta Ric)$ *oraz* $\bar{Y} = \delta Ric(U_{\bar{y}}, W_{\bar{y}}) \geq 0$*, gdzie:*

$$P_{\bar{y}} = A,\quad Q_{\bar{y}} = 0_{n\times n},\quad R_{\bar{y}} = BJ_{mr}B^T;$$

(iii) $\|Y\bar{Y}\|_2 < 1$*;*

(iv) istnieje taka nieosobliwa macierz $M_y \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+q)}$*, że*

$$M_y(S_y - \Delta CYC^T)M_y^T = J_{mq}.$$

Unimodularny czynnik $\Omega(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$ *ma postać*

$$\Omega(\zeta) = \left[\begin{array}{c|c} A + BF_{\bar{y}} & (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_y \\ \hline -C_{\bar{y}} & I_{m+q} \end{array}\right]N_{y\bar{y}}^{-1}$$

gdzie:

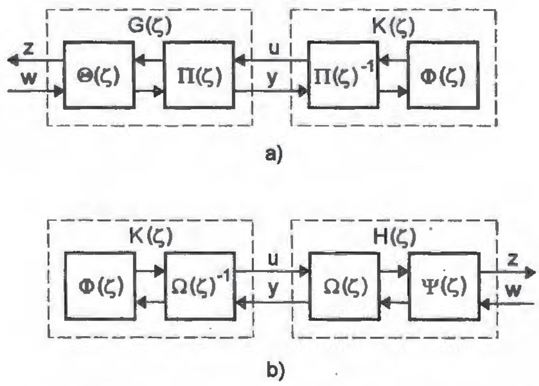
$$\begin{aligned} H_y &= -(BJ_{mr}D^T - (I_n + \Delta A)YC^T) \times \\ &\quad (S_y - \Delta CYC^T)^{-1} \\ F_{\bar{y}} &= -J_{mr}B^T(I_n + \Delta\bar{Y}R_{\bar{y}})^{-1}\bar{Y}(I_n + \Delta A) \\ C_{\bar{y}} &= C + DF_{\bar{y}} \end{aligned}$$

zaś $N_{y\bar{y}} \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+q)}$ *jest pewną nieosobliwą macierzą, spełniającą równanie*

$$\begin{gathered} N_{y\bar{y}}(D(J_{mr} + \Delta B^T\bar{Y}B)^{-1}D^T - \\ \Delta C_{\bar{y}}(I_n - Y\bar{Y})^{-1}YC_{\bar{y}}^T)N_{y\bar{y}}^T = J_{mq}.\ \square \end{gathered}$$

3. STRUKTURA ALGORYTMÓW

Ilustrację podstawowych strukturalnych cech układów sterowania obiektami opisanymi modelami łańcuchowymi dano na rys. 2.



Rysunek 2. Strukturalne cechy układu z obiektem opisanym: a) łańcuchową macierzą rozproszenia, b) dualną łańcuchową macierzą rozproszenia.

3.1. Podstawowe własności

Załóżmy, że istnieje optymalny regulator $K = HM(\Pi^{-1}, \Phi)$. Zgodnie z *twierdzeniem 1* zachodzi

$$\Pi(\zeta)^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A + H_{\bar{x}}C + B_{\bar{x}}F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1} & B_{\bar{x}} \\ \hline F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1} & I_{p+r} \end{array}\right]N_{x\bar{x}}$$

oraz $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{p\times r}$. Ponieważ

$$\begin{gathered} A + H_{\bar{x}}C + B_{\bar{x}}F_x(I_n - \bar{X}X)^{-1} = \\ (I_n - \bar{X}X)(A + BF_x)(I_n - \bar{X}X)^{-1} \end{gathered}$$

zatem funkcji $\Pi(\zeta)^{-1}$ można przypisać odpowiedni model podobny

$$\begin{aligned}\Pi(\zeta)^{-1} &= \left[\begin{array}{c|c} A+BF_x & (I_n-\bar{X}X)^{-1}B_{\bar{x}} \\ \hline F_x & I_{p+r}\end{array}\right] N_{x\bar{x}} \\ &= \Pi_x(\zeta)\cdot N_{x\bar{x}}\end{aligned}$$

potwierdzający jej unimodularność. Czynnik $\Pi_x(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{p+r}$ ma postać

$$\Pi_x(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A+BF_x & U_{\bar{x}x}B_{\bar{x}}^a & U_{\bar{x}x}B_{\bar{x}}^b \\ \hline F_x^u & I_p & 0_{p\times r} \\ F_x^y & 0_{r\times p} & I_r \end{array}\right] \qquad (12)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} U_{\bar{x}x} &= (I_n-\bar{X}X)^{-1} \\ B_{\bar{x}} &= \left[\begin{array}{cc} B_{\bar{x}}^a & B_{\bar{x}}^b \end{array}\right], \quad B_{\bar{x}}^a \in \mathbb{R}^{n\times p}, \quad B_{\bar{x}}^b \in \mathbb{R}^{n\times r} \\ F_x &= \left[\begin{array}{c} F_x^u \\ F_x^y \end{array}\right], \quad F_x^u \in \mathbb{R}^{p\times n}, \quad F_x^y \in \mathbb{R}^{r\times n}. \end{aligned}$$

Optymalnemu regulatorowi

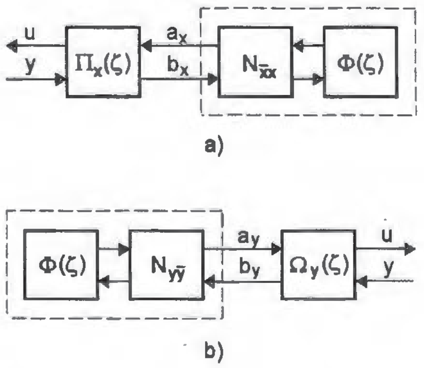
$$\begin{gathered} K(\zeta) = HM(\Pi_x(\zeta)\cdot N_{x\bar{x}}, \Phi(\zeta)) = \\ HM(\Pi_x(\zeta), HM(N_{x\bar{x}}, \Phi(\zeta))) \end{gathered}$$

przyporządkowujemy strukturalny schemat dany na rys. 3a, przy czym wyróżnione pomocnicze sygnały sygnały a_x oraz b_x, związane relacją

$$a_x(\zeta) = HM(N_{x\bar{x}}, \Phi)(\zeta) b_x(\zeta) \qquad (13)$$

mają wymiary odpowiednio p oraz r. Warto podkreślić, że w przypadku optymalnego regulatora czasu ciągłego relacja ta ma prostszą postać i nie zależy od rozwiązań X oraz $\bar{X}$ stosownych ciągłych równań Riccatiego. Poniższe formuły opisują algorytm rozważanego regulatora:

$$\begin{aligned} \delta\hat{x}(t) &= (A+BF_x)\hat{x}(t) + U_{\bar{x}x}(B_{\bar{x}}^a HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) + \\ &\quad B_{\bar{x}}^b) b_x(t) \\ b_x(t) &= -F_x^y \hat{x}(t) + y(t) \\ u(t) &= F_x^u \hat{x}(t) + HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) b_x(t). \end{aligned}$$



Rysunek 3. Struktura optymalnego regulatora: a) algorytm wyprowadzony dla łańcuchowej macierzy rozproszenia, b) algorytm wyprowadzony dla dualnej łańcuchowej macierzy rozproszenia.

Analogiczne wnioski obowiązują dla regulatora $K = DHM(\Omega^{-1}, \Phi)$ wyznaczonego w oparciu o metodę dualnej bezstratnej faktoryzacji. W tym przypadku, zgodnie z *twierdzeniem* 2, mamy

$$\begin{gathered} \Omega(\zeta)^{-1} = N_{y\bar{y}} \times \\ \left[\begin{array}{c|c} A+BF_{\bar{y}} + (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_yC_{\bar{y}} & (I_n-Y\bar{Y})^{-1}H_y \\ \hline C_{\bar{y}} & I_{m+q} \end{array}\right] \end{gathered}$$

oraz $\Phi(\zeta) \in \mathcal{BH}_\infty^{m\times q}$. Teraz

$$\begin{gathered} A+BF_{\bar{y}} + (I_n - Y\bar{Y})^{-1}H_yC_{\bar{y}} = \\ (I_n - Y\bar{Y})^{-1}(A+H_yC)(I_n - Y\bar{Y}) \end{gathered}$$

zatem funkcji $\Omega(\zeta)^{-1}$ odpowiada podobny model

$$\begin{aligned} \Omega(\zeta)^{-1} &= N_{y\bar{y}} \left[\begin{array}{c|c} A+H_yC & H_y \\ \hline C_{\bar{y}}(I_n - Y\bar{Y})^{-1} & I_{m+q} \end{array}\right] \\ &= N_{y\bar{y}} \cdot \Omega_y(\zeta) \end{aligned}$$

upewniający nas o jej unimodularności. Czynnik $\Omega_y(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^{m+q}$ ma postać

$$\Omega_y(\zeta) = \left[\begin{array}{c|cc} A+H_yC & H_y^u & H_y^y \\ \hline C_{\bar{y}}^a U_{y\bar{y}} & I_m & 0_{m\times q} \\ C_{\bar{y}}^b U_{y\bar{y}} & 0_{q\times m} & I_q \end{array}\right] \qquad (14)$$

w której:

$$\begin{aligned} U_{y\bar{y}} &= (I_n - Y\bar{Y})^{-1} \\ H_y &= \left[\begin{array}{cc} H_y^u & H_y^y \end{array}\right], \quad H_y^u \in \mathbb{R}^{n\times m}, \quad H_y^y \in \mathbb{R}^{n\times q} \\ C_{\bar{y}} &= \left[\begin{array}{c} C_{\bar{y}}^a \\ C_{\bar{y}}^b \end{array}\right], \quad C_{\bar{y}}^a \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad C_{\bar{y}}^b \in \mathbb{R}^{q\times n}. \end{aligned}$$

Regulatorowi

$$\begin{gathered} K(\zeta) = DHM(N_{y\bar{y}} \cdot \Omega_y(\zeta), \Phi(\zeta)) = \\ DHM(\Omega_y(\zeta), DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi(\zeta))) \end{gathered}$$

przyporządkowany jest strukturalny schemat pokazany na rys. 3b, przy czym sygnały a_y oraz b_y, powiązane relacją

$$a_y(\zeta) = DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi)(\zeta) b_y(\zeta) \qquad (15)$$

mają wymiary m oraz q, odpowiednio. Analogicznie jak poprzednio, w przypadku optymalnego regulatora czasu ciągłego relacja ta nie zależy od rozwiązań Y oraz $\bar{Y}$ stosownych ciągłych równań Riccatiego. Algorytm rozważanego regulatora ma postać:

$$\begin{aligned} \delta\hat{x}(t) &= (A+H_yC)\hat{x}(t) + H_y^u u(t) + H_y^y y(t) \\ b_y(t) &= C_{\bar{y}}^b U_{y\bar{y}} \hat{x}(t) + y(t) \\ u(t) &= -C_{\bar{y}}^a U_{y\bar{y}} \hat{x}(t) + DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi) b_y(t). \end{aligned}$$

3.2. Algorytmy o ściśle właściwych funkcjach

Sformułujmy warunki, przy których $K(\zeta)$ jest dogodną do implementacji ściśle właściwą funkcją (por. [3], [4], [6], [7]). Ponieważ $\Pi_x(\infty) = I_{p+r}$, zatem w przypadku regulatora

$$K = HM(\Pi_x, HM(N_{x\bar{x}}, \Phi)) \qquad (16)$$

wnioskujemy, że konieczny i wystarczający warunek, aby funkcja $K(\zeta)$ była funkcją ściśle właściwą ma postać równości

$$HM(N_{x\bar{x}}, \Phi)(\infty) = 0_{p\times r}\,. \tag{17}$$

Pożądany cząstkowy cel osiągniemy, kładąc

$$\Phi = HM(N_{x\bar{x}}^{-1}, 0_{p\times r}) \in \mathbb{R}^{p\times r}\,. \tag{18}$$

Uwzględniając podział $(p+r)\times(p+r)$ macierzy $N_{x\bar{x}}^{-1} \in \mathbb{R}^{(p+r)\times(p+r)}$

$$N_{x\bar{x}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{x11} & \bar{N}_{x12} \\ \bar{N}_{x21} & \bar{N}_{x22} \end{bmatrix} \tag{19}$$

stwierdzamy, że $\Phi = \bar{N}_{x12}\bar{N}_{x22}^{-1}$. Aby zatem spełnić wymaganie $\Phi \in \mathcal{BH}_\infty^{p\times r}$, na nieosobliwą macierz $N_{x\bar{x}}$ musimy nałożyć dodatkowe ograniczenie, mające postać nierówności

$$\|\bar{N}_{x12}\bar{N}_{x22}^{-1}\|_2 < 1\,.$$

Odpowiednie równanie z *twierdzenia 1* dogodnie jest zapisać w równoważnej postaci

$$N_{x\bar{x}}^{-T} J_{pr} N_{x\bar{x}}^{-1} = D^T(J_{mr} - \Delta C X C^T)^{-1} D + \Delta B_{\bar{x}}^T X U_{\bar{x}x} B_{\bar{x}}$$

w której odwrotność $N_{x\bar{x}}^{-1}$ pełni rolę niewiadomej. Zauważmy, iż zakładając dolną blokową trójkątną postać macierzy $N_{x\bar{x}}^{-1}$, to znaczy żądając, aby

$$\bar{N}_{x12} = 0_{p\times r} \tag{20}$$

uzyskujemy zerowy parametr $\Phi = 0_{p\times r}$, który oczywiście spełnia ograniczenie na jego normę.

W przypadku regulatora

$$K = DHM(\Omega_y, DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi)) \tag{21}$$

mamy $\Omega_y(\infty) = I_{m+q}$. Zatem przyjmując

$$\Phi = DHM(N_{y\bar{y}}^{-1}, 0_{m\times q}) \in \mathbb{R}^{m\times q} \tag{22}$$

zapewnimy temu regulatorowi żądaną ściśle właściwą postać. Następnie, biorąc pod uwagę podział $(m+q)\times(m+q)$ odwrotności $N_{y\bar{y}}^{-1} \in \mathbb{R}^{(m+q)\times(m+q)}$

$$N_{y\bar{y}}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{y11} & \bar{N}_{y12} \\ \bar{N}_{y21} & \bar{N}_{y22} \end{bmatrix} \tag{23}$$

otrzymujemy równość $\Phi = -\bar{N}_{y11}^{-1}\bar{N}_{y12}$, przy czym wymaga się ponadto, aby

$$\|\bar{N}_{y11}^{-1}\bar{N}_{y12}\|_2 < 1$$

(co wynika z warunku $\Phi \in \mathcal{BH}_\infty^{m\times q}$). Obowiązuje przy tym spostrzeżenie analogiczne do poczynionego wyżej, że istnienie nieosobliwego rozwiązania $N_{y\bar{y}}^{-1}$ o zerowej podmacierzy

$$\bar{N}_{y12} = 0_{m\times q} \tag{24}$$

spełniającego równanie

$$N_{y\bar{y}}^{-1} J_{mq} N_{y\bar{y}}^{-T} = D(J_{mr} + \Delta B^T Y B)^{-1} D^T - \Delta C_{\bar{y}} U_{y\bar{y}} Y C_{\bar{y}}^T$$

pozwala na skuteczne stosowanie zerowego parametru $\Phi = 0_{m\times q}$ (por. *twierdzenie 2*).

3.3. Rozwiązania centralne

Powyższe ustalenia prowadzą do pytania o właściwości *centralnych* regulatorów odpowiadających zerowym parametrom Φ. Rozważając regulator $K = HM(\Pi_x, HM(N_{x\bar{x}}, \Phi))$, załóżmy dodatkowo $\bar{N}_{x12} = 0_{p\times r}$. Na tej podstawie, biorąc pod uwagę, że

$$\Phi = HM(N_{x\bar{x}}^{-1}, HM(N_{x\bar{x}}, \Phi))$$

otrzymujemy równość

$$\Phi = \bar{N}_{x11} HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) \times (\bar{N}_{x21} HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) + \bar{N}_{x22})^{-1}\,.$$

Teraz kładąc $\Phi = 0_{p\times r}$ oraz uwzględniając fakt, że podmacierz $\bar{N}_{x11}$ jest nieosobliwa, uzyskujemy równość

$$HM(N_{x\bar{x}}, \Phi) = 0_{p\times r}\,. \tag{25}$$

Do tego samego wniosku łatwo dochodzi się po stwierdzeniu, że przy $\bar{N}_{x12} = 0_{p\times r}$ macierz $N_{x\bar{x}}$ jest macierzą dolną blokową trójkątną (por. [1]). Oznacza to, że uzyskany w ten sposób centralny regulator ma postać ściśle właściwej funkcji $K = HM(\Pi_x, 0_{p\times r})$, której odpowiada następujący prosty algorytm:

$$\begin{aligned} \delta\hat{x}(t) &= (A + BF_x - U_{\bar{x}x} B_{\bar{x}}^b F_{\bar{x}}^y)\hat{x}(t) + U_{\bar{x}x} B_{\bar{x}}^b y(t) \\ u(t) &= F_x^u \hat{x}(t)\,. \end{aligned}$$

W przypadku regulatora $K = DHM(\Omega_y, DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi))$ oraz nieosobliwej dolnej blokowej trójkątnej macierzy $N_{y\bar{y}}^{-1}$, dla której $\bar{N}_{y12} = 0_{m\times q}$, przyjmując $\Phi = 0_{m\times q}$, otrzymujemy równość

$$DHM(N_{y\bar{y}}, \Phi) = 0_{m\times q}\,. \tag{26}$$

Na tej podstawie wnioskujemy, że uzyskany w ten sposób centralny regulator opisany jest ściśle właściwą funkcją $K = DHM(\Omega_y, 0_{m\times q})$, której przyporządkowany jest poniższy prosty algorytm:

$$\begin{aligned} \delta\hat{x}(t) &= (A + H_y C - H_y^u C_{\bar{y}}^a U_{y\bar{y}})\hat{x}(t) + H_y^y y(t) \\ u(t) &= -C_{\bar{y}}^a U_{y\bar{y}} \hat{x}(t)\,. \end{aligned}$$

Lemat 1.

(*i*) *Załóżmy, że spełnione są założenia* twierdzenia 1. *Wystarczającym warunkiem tego, aby centralny regulator* $K = HM(\Pi_x, 0_{p\times r})$ *miał postać funkcji ściśle właściwej, jest istnienie dolnej blokowej* $(p+r)\times(p+r)$ *trójkątnej macierzy* $N_{x\bar{x}}$.

(*ii*) *Załóżmy, że spełnione są założenia* twierdzenia 2. *Wystarczającym warunkiem tego, aby centralny regulator* $K = DHM(\Omega_y, 0_{m\times q})$ *miał postać funkcji ściśle właściwej, jest istnienie dolnej blokowej* $(m+q)\times(m+q)$ *trójkątnej macierzy* $N_{y\bar{y}}$. □

W [12] pokazano, że centralnych rozwiązań nie można stosować w przypadku niestandardowych obiektów z zerami należącymi do $\partial\mathcal{D}_\Delta$.

4. PODSUMOWANIE

Pokazano, że podejście do projektowania dyskretnych układów sterowania optymalnych ze względu na normę $\mathcal{H}_\infty$, w którym stosuje się J-bezstratne faktoryzacje odpowiednich łańcuchowych macierzy rozproszenia sterowanych obiektów, pozwala na ujawnienie istotnych strukturalnych cech uzyskiwanych rozwiązań, a także ułatwia ich parametryzację (dobór czynnika Φ).

5. OZNACZENIA

Niech $q : l_2 \to l_2$ oznacza liniowe odwzorowanie ('operator') przesunięcia, określone jako $qg_k = g_{k+1}$, $\forall g = \{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+} \in l_2$. Dyskretnoczasowy *operator delta* $\delta : l_2 \to l_2$ definiuje się jako $\delta = (q-1)/\Delta$, gdzie $\Delta > 0 \in \mathbb{R}$ oznacza okres próbkowania. (q, z) oraz (δ, ζ) są parami odpowiadających sobie operatorów zdefiniowanych w dziedzinie czasu dyskretnego oraz w dziedzinie zespolonej: $z = e^{s\Delta}$ oraz $\zeta = (e^{s\Delta}-1)/\Delta$, gdzie $s \in \mathbb{C}$.

Otwarty zbiór $\mathcal{D}_\Delta = \{\zeta : |\zeta + 1/\Delta| < 1/\Delta\}$ jest wnętrzem okręgu o środku w punkcie $(-1/\Delta, 0)$ oraz promieniu $1/\Delta$. Domknięcie tego zbioru oznaczamy jako $\bar{\mathcal{D}}_\Delta$, zaś jego brzeg jako $\partial\mathcal{D}_\Delta$. *Koniugację* (sprzężenie względem okręgu $\partial\mathcal{D}_\Delta$) definiuje się jako $\mathbb{C} \ni \zeta \mapsto \zeta^\sim = -\zeta/(1+\Delta\zeta) \in \mathbb{C}$. $J_{mn} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$ oznacza sygnaturową macierz: $J_{mn} = I_m \oplus (-I_n)$.

$\mathcal{R}_P^{p\times r}$ jest przestrzenią funkcji macierzowych $(p \times r)$ o elementach będących właściwymi wymiernymi funkcjami o rzeczywistych współczynnikach zmiennej zespolonej $\zeta \in \mathbb{C}$. Podprzestrzeń $\mathcal{RL}_\infty^{p\times r} \subset \mathcal{R}_P^{p\times r}$ składa się z funkcji analitycznych na $\partial\mathcal{D}_\Delta$, z kolei podprzestrzeń $\mathcal{RH}_\infty^{p\times r} \subset \mathcal{RL}_\infty^{p\times r}$ obejmuje funkcje stabilne (analityczne na $-\bar{\mathcal{D}}_\Delta$). Przestrzeń $\mathcal{RH}_\infty^{p\times r}$ jest przestrzenią unormowaną, przy czym $\forall G \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times r}$

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega\in[0,\,2\pi/\Delta)} \left\| G\left(\frac{e^{j\omega\Delta}-1}{\Delta}\right)\right\|_2$$

Podzbiór $\mathcal{BH}_\infty^{p\times r} \subset \mathcal{RH}_\infty^{p\times r}$ tworzą funkcje o jednostkowo ograniczonej normie: $\mathcal{BH}_\infty^{p\times r} = \{G \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times r} : \|G\|_\infty < 1\}$. Podzbiór (grupę) stabilnie odwracalnych elementów przestrzeni $\mathcal{RH}_\infty^{p\times p}$ oznacza się jako $\mathcal{GH}_\infty^p = \{G \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times p} : G^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty^{p\times p}\}$. O funkcji $G(\zeta) \in \mathcal{GH}_\infty^p$ mówi się, że jest funkcją *unimodularną*.

Niech (U, W) oznacza następującą parę rzeczywistych macierzy $U, W \in \mathbb{R}^{(n+n)\times(n+n)}$ [9]

$$(U,W) = \left(\begin{bmatrix} P & -R \\ -Q & -P^T \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_n & \Delta R \\ 0_{n\times n} & I_n + \Delta P^T \end{bmatrix}\right).$$

Podprzestrzeń $\mathcal{X}_-(U,W)$ o wymiarze $n_- = \dim(\mathcal{X}_-(U,W)) \le n$ oznacza stabilną niezmienniczą podprzestrzeń pęku $U - \lambda W$. Załóżmy, że $\bar{X} = [\,X_1^T \;\; X_2^T\,]^T \in \mathbb{R}^{(n+n)\times n_-}$ jest macierzą, której kolumny tworzą bazę tej podprzestrzeni. Zachodzi zatem $\mathcal{X}_-(U,W) = \mathrm{Im}\bar{X}$ oraz $U\bar{X} = W\bar{X}\Lambda$, gdzie $\Lambda \in \mathbb{R}^{n_-\times n_-}$ jest pewną stabilną macierzą, $\lambda(\Lambda) \subset \mathcal{D}_\Delta$. Symbolem $\mathrm{dom}(\delta Ric)$ oznaczamy dziedzinę odpowiedniego operatora $\delta Ric : \mathbb{R}^{2n\times 2n} \times \mathbb{R}^{2n\times 2n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, będącą zbiorem tych wszystkich par (U, W), dla których $n_- = n$ oraz $X_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest macierzą nieosobliwą. Koniecznym warunkiem przynależności $(U, W) \in \mathrm{dom}(\delta Ric)$ jest, aby pęk $U - \lambda W$ nie miał wartości własnych należących do $\partial\mathcal{D}_\Delta$.

STRUCTURAL PROPERTIES OF DISCRETE-TIME $\mathcal{H}_\infty$ CONTROLLERS

Abstract: Structures of $\mathcal{H}_\infty$-optimal δ-operator controllers based on J-lossless approaches are studied. New conditions for the existence of strictly proper solutions are also given.

Literatura

[1] Ionescu V., Weiss M. (1993) Two-Riccati formulae for the discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control problem, Int. Journ. Control, 57 (1), 141-195.

[2] Kimura H. (1997) *Chain-scattering approach to $\mathcal{H}_\infty$ control*, Birkhaüser, Boston, Basel.

[3] Kimura H., Lu Y., Kawatani R. (1991) On the structure of $\mathcal{H}_\infty$ control systems and related extensions, *IEEE Trans. Automatic Control*, AC-36 (6), 653-667.

[4] Mirkin L. (1997) On discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ problem with a strictly proper controller, *Int. Journ. Control*, 66 (6), 747-765.

[5] Stoorvogel A. (1992) *The $\mathcal{H}_\infty$ control problem. A state space approach*, Prentice Hall, Inc., New York.

[6] Stoorvogel A. (1992) The discrete time $\mathcal{H}_\infty$ control problem with measurement feedback, *SIAM Journ. Control Optim.*, 30 (1), 182-202.

[7] A. Stoorvogel, A. Saberi, B.M. Chen: The discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ control problem with strictly proper measurement feedback, *IEEE Trans. Automatic Control*, 1994, 39 (9), 1936-1939.

[8] Suchomski P. (2001) Numerical conditioning of delta-domain Lyapunov and Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 148 (6), 497-501.

[9] Suchomski P. (2002) A J-lossless coprime factorisation approach to $\mathcal{H}_\infty$ control in delta domain, *Automatica*, 38 (10), 1807-1814.

[10] Suchomski P. (2003) J-lossless and extended J-lossless factorisations approach for δ-domain $\mathcal{H}_\infty$ control, *Int. Journ. Control*, 76 (8), 794-809.

[11] Suchomski P. (2003) Remarks about numerical conditioning of discrete-time Riccati equations, *IEE Proc., Control Theory Appl.*, 149 (5), 449-456.

[12] Suchomski P. (2003) Numerically robust synthesis of discrete-time $\mathcal{H}_\infty$ estimators based on J-lossless factorisations, *Control and Cybernetics*, 32 (4), 761-802.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2