

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

**STEROWANIE OPTYMALNE
I ADAPTACYJNE**

INWERSJE MACIERZY WIELOMIANOWYCH A STEROWANIE MINIMALNOWARIANCYJNE[†]

Krzysztof J. LATAWIEC^{*}, Wojciech P. HUNEK^{*}

^{*} Politechnika Opolska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki

ul. K. Sosnkowskiego 31, 45-272 Opole, e-mail: lata@po.opole.pl, whunek@po.opole.pl

Streszczenie: W referacie rozważono zagadnienie wyznaczania rozwiązania pewnego równania wektorowo-macierzowego, związanego z problemem sterowania minimalnowariancyjnego liniowymi stacjonarnymi dyskretnymi obiektami wielowymiarowymi. Wprowadzono nowe, ogólne klasy rozwiązań, stowarzyszone z tzw. T -inwersjami i τ -inwersjami macierzy wielomianowej $B(q^{-1})$ modelu ARMAX. Wskazano, że inwersje te generują zera sterownicze typu 1 i typu 2.

Słowa kluczowe: Optymalne rozwiązania, inwersje macierzy wielomianowych, sterowanie minimalnowariancyjne, zera sterownicze.

1. WSTĘP

Problem sterowania minimalnowariancyjnego (ang. *Minimum Variance Control – MVC*) został oryginalnie sformułowany i rozwiązany dla liniowych stacjonarnych obiektów dyskretnych, najpierw typu jedno wejście - jedno wyjście [1,2], a następnie wielowymiarowych obiektów kwadratowych (tj. o jednakowej liczbie wejść i wyjść) [3]. Potem przez długi czas problem MVC nie był intensywnie eksplorowany, głównie z powodu braku odporności tej strategii sterowania, a także jej niestabilności w przypadku obiektów nieminimalnofazowych. Tym niemniej, istotne znaczenie miało oryginalne zdefiniowanie dyskretnych obiektów nieminimalnofazowych jako tych, których zera transmitancji operatorowych leżą poza kołem jednostkowym, czyli obiektów „stabilnie odwracalnych”, czyli wreszcie tych, dla których MVC jest niestabilne. Zwróciło to uwagę na problem zer liniowych dyskretnych wielowymiarowych obiektów niekwadratowych (o różnej liczbie wejść i wyjść) [7,9], który to problem od lat wzbudzał dyskusje i kontrowersje. Okazało się, że rozwiązanie problemu MVC dla obiektów niekwadratowych jest zupełnie analogiczne do rozwiązania dla obiektów kwadratowych (w tym jedno wejście - jedno wyjście). W szczególności, problem zerowania (predyktora) wyjścia, generujący zera i problem MVC mają identyczne rozwiązanie [7,9,12,13]. Doprowadziło to do zdefiniowania nowego typu zer liniowych stacjonarnych dyskretnych obiektów wielowymiarowych, tzw. zer

sterowniczych [7,9], które są bezpośrednim rozszerzeniem zer obiektów typu jedno wejście - jedno wyjście. Zera sterownicze również nawiązują do „stabilnej odwracalności” obiektu, czyli do stabilności MVC. Definicja zer sterowniczych została wkrótce rozszerzona na wielowymiarowe objekty ciągłe [4,10]. Okazało się jednak, że rozwiązanie problemu MVC (lub zerowania wyjścia) dla obiektów niekwadratowych może być niejednoznaczne, nawet pomimo stosowania w tym rozwiązaniu jednoznacznych, minimalno-normowych lub minimalno-kwadratowych (odpowiednio, prawo- lub lewostronnych) inwersji macierzy wielomianowej $B(q^{-1})$ [11]. Doprowadziło to do zdefiniowania zer sterowniczych typu 2 [11] i przemianowania „klasycznych” zer sterowniczych (według [7,9]) na zera sterownicze typu 1. Okazało się wkrótce [8], że o ile zera sterownicze typu 1 są jednoznaczne, to istnieje wiele rodzajów zer sterowniczych typu 2 (w pozycji [11] wprowadzono tylko jeden rodzaj zer sterowniczych typu 2). Wynika to z faktu, iż ogólne rozwiązanie problemu MVC, nawet w przypadku wykorzystania jednoznacznych, minimalno-normowych lub minimalno-kwadratowych inwersji macierzy wielomianowej $B(q^{-1})$, nie jest jednoznaczne.

Niniejszy referat przedstawia nowe, ogólne rozwiązanie problemu MVC dla liniowych stacjonarnych obiektów niekwadratowych opisanych modelem typu wejście - wyjście. Ograniczono się tu do obiektów dyskretnych, jednakże rozwiązanie dla obiektów ciągłych jest zupełnie analogiczne [8]. Implikacje tego rozwiązania dla zdefiniowania zer sterowniczych typu 1 i w szczególności różnych rodzajów zer sterowniczych typu 2 są natychmiastowe, więc nie będą tu szczegółowo rozwijane.

2. REPREZENTACJA SYSTEMU

Rozważmy n_u -wejściowy n_y -wyjściowy liniowy stacjonarny układ dyskretny o wejściu $u(t)$ i wyjściu $y(t)$ opisany modelem ARMAX

$$\underline{A}(q^{-1})y(t) = q^{-d}\underline{B}(q^{-1})u(t) + \underline{C}(q^{-1})v(t) \quad (1)$$

gdzie $v(t)$ jest wektorem niekorelowanego zakłócenia o zerowej wartości oczekiwanej, d jest czasem opóźnie-

nia, a q^{-1} jest operatorem przesunięcia wstecz. Załóżmy, że macierze wielomianowe $\underline{A}(q^{-1}) = I_{n_y} + \underline{a}_1 q^{-1} + \dots + \underline{a}_n q^{-n}$ i $\underline{B}(q^{-1}) = \underline{b}_0 + \underline{b}_1 q^{-1} + \dots + \underline{b}_m q^{-m}$ oraz $\underline{A}(q^{-1})$ i $\underline{C}(q^{-1}) = \underline{c}_0 + \underline{c}_1 q^{-1} + \dots + \underline{c}_l q^{-l}$ są lewostronnie względnie pierwsze. Załóżmy również, że macierze wielomianowe $\underline{B}(q^{-1})$ oraz (stabilna) $\underline{C}(q^{-1})$ są pełnego normalnego rzędu n_y .

3. DYSKRETNE STEROWANIE MINIMALNOWARIANCYJNE

Rozważmy obiekt wielowymiarowy opisany modelem (1). Reguła sterowania minimalnowariancyjnego, minimalizującego wskaźnik jakości

$$E \left\{ \left\| y(t+d) - y_{ref}(t+d) \right\|^2 \right\} \quad (2)$$

gdzie $E\{\cdot\}$ jest operatorem wartości oczekiwanej, $y_{ref}(t+d)$ jest wartością zadaną/odniesienia, $y(t+d)$ jest predyktorem wyjścia obiektu na d kroków, ma postać [4,8,12]

$$u(t) = \underline{B}^R(q^{-1}) \underline{F}^{-1}(q^{-1}) [\underline{C}(q^{-1}) y_{ref}(t+d) - \underline{H}(q^{-1}) y(t)] \quad (3)$$

gdzie $\underline{B}^R(q^{-1})$ jest dowolną inwersją prawostronną $\underline{B}(q^{-1})$ i wielomiany macierzowe $\underline{F}(q^{-1}) = I_{n_y} + \underline{f}_1 q^{-1} + \dots + \underline{f}_{d-1} q^{-d+1}$, $\underline{F}^{-1}(q^{-1}) = I_{n_y} + \underline{f}_1 q^{-1} + \dots + \underline{f}_{d-1} q^{-d+1}$, $\underline{H}(q^{-1}) = \underline{h}_0 + \underline{h}_1 q^{-1} + \dots + \underline{h}_{n-1} q^{-n+1}$ i $\underline{H}(q^{-1}) = \underline{h}_0 + \underline{h}_1 q^{-1} + \dots + \underline{h}_{n-1} q^{-n+1}$ pełnego normalnego rzędu n_y o wymiarach $n_y \times n_y$ są wyznaczone z diofantycznej tożsamości wielomianowo-macierzowej

$$\underline{C}(q^{-1}) = \underline{F}(q^{-1}) \underline{A}(q^{-1}) + q^{-d} \underline{H}(q^{-1}) \quad (4)$$

oraz faktoryzacji $\underline{F} \underline{C} = \underline{C} \underline{F}$, gdzie $\underline{C}(q^{-1}) = \underline{c}_0 + \underline{c}_1 q^{-1} + \dots + \underline{c}_l q^{-l}$.

Jak wiadomo, sterowanie minimalnowariancyjne (3), dla macierzy wielomianowych $\underline{F}(q^{-1})$ i $\underline{H}(q^{-1})$ jak powyżej, jest asymptotycznie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy $\underline{B}(q^{-1})$ jest stabilnie (prawostronnie-) odwracalne [8].

4. MOTYWUJĄCY PRZYKŁAD

Rozpatrzmy dla przykładu prosty obiekt dyskretny o dwóch wejściach i jednym wyjściu, opisany modelem ARX [8,11]

$$y(t) + \underline{a}_1 y(t-1) + \underline{a}_2 y(t-2) = \underline{b}_0 u(t-1) + \underline{b}_1 u(t-2) + \underline{b}_2 u(t-3) + v(t) \quad (5)$$

gdzie $\underline{b}_0 + \underline{b}_1 q^{-1} + \underline{b}_2 q^{-2} = \underline{B}(q^{-1})$. Załóżmy, że macierz wielomianowa $\underline{B}(q^{-1})$ jest pełnego normalnego rzędu n_y , oraz $\underline{B}^R(q^{-1})$ oznacza jej (niejednoznaczny) prawostronny inwersję. Przyrównując teraz (deterministyczną część) 1-krokowego predyktora wyjścia do wartości zadanej/odniesienia otrzymamy

$$\underline{b}_0 u(t) + \underline{b}_1 u(t-1) + \underline{b}_2 u(t-2) - \underline{a}_1 y(t) - \underline{a}_2 y(t-1) = y_{ref}(t+1) \quad (6)$$

Równanie (6) można bezpośrednio sprowadzić do reguły sterowania minimalnowariancyjnego/perfekcyjnego

$$u(t) = (\underline{b}_0 + \underline{b}_1 q^{-1} + \underline{b}_2 q^{-2})^R [y_{ref}(t+1) + \underline{a}_1 y(t) + \underline{a}_2 y(t-1)] \quad (7)$$

reprezentującej rozwiązanie równania (6) dla $u(t)$.

Z drugiej jednak strony, przy założeniu, że \underline{b}_0 jest pełnego rzędu, równanie (6) można zapisać w następującej formie

$$u(t) = (\underline{b}_0)^R [y_{ref}(t+1) - \underline{b}_1 u(t-1) - \underline{b}_2 u(t-2) + \underline{a}_1 y(t) + \underline{a}_2 y(t-1)] \quad (8)$$

którą można przepisać do postaci

$$u(t) = [I + (\underline{b}_0)^R (\underline{b}_1 q^{-1} + \underline{b}_2 q^{-2})]^{-1} (\underline{b}_0)^R [y_{ref}(t+1) + \underline{a}_1 y(t) + \underline{a}_2 y(t-1)] \quad (9)$$

reprezentującej inne rozwiązanie równania (6) dla $u(t)$.

Jest interesujące, że reguły sterowania MVC (7) i (9) (dla $v(t)=0$ mamy sterowanie perfekcyjne), wyznaczone w oparciu o *ten sam* predyktor (6) [8,11], są różne. Fakt ten można tłumaczyć specyficznymi własnościami inwersji uogólnionej [4,5,6,7,8] dla wielomianów macierzowych, gdyż ogólnie zachodzi $\underline{B}^{R1}(q^{-1}) = (\underline{b}_0 + \underline{b}_1 q^{-1} + \underline{b}_2 q^{-2})^R \neq [I + (\underline{b}_0)^R (\underline{b}_1 q^{-1} + \underline{b}_2 q^{-2})]^{-1} (\underline{b}_0)^R = \underline{B}^{R2}(q^{-1})$. Oczywiście zarówno dla $\underline{B}^{R1}(q^{-1})$ i $\underline{B}^{R2}(q^{-1})$ mamy odpowiednio $\underline{B}(q^{-1}) \underline{B}^{R1}(q^{-1}) = I$ i $\underline{B}(q^{-1}) \underline{B}^{R2}(q^{-1}) = I$, co zapewnia (jedynie w przypadku obiektów minimalnofazowych) także stabilną regulację perfekcyjną, tj. dla $t \geq d=1$ mamy $y_{ss} = y_{ref}$, gdzie y_{ss} oznacza stan ustalony $y(t)$. Rozszerzmy teraz rezultaty zawarte w pozycji [11], wskazując na kolejny typ inwersji $\underline{B}(q^{-1})$. Przepisując równanie (6) do formy

$$u(t) = (\underline{b}_1 q^{-1})^R [q y_{ref}(t) - \underline{b}_0 u(t) - \underline{b}_2 q^{-2} u(t) + \underline{a}_1 y(t) + \underline{a}_2 q^{-1} y(t)] \quad (10)$$

a następnie do postaci

$$u(t) = [I + (\underline{b}_1 q^{-1})^R (\underline{b}_0 + \underline{b}_2 q^{-2})]^{-1} (\underline{b}_1 q^{-1})^R [q y_{ref}(t) + \underline{a}_1 y(t) + \underline{a}_2 q^{-1} y(t)] \quad (11)$$

otrzymamy kolejne rozwiązanie równania (6) dla $u(t)$, wprowadzając następną typ inwersji $\underline{B}(q^{-1})$, tj. $\underline{B}^{R3}(q^{-1}) = [I + (\underline{b}_1 q^{-1})^R (\underline{b}_0 + \underline{b}_2 q^{-2})]^{-1} (\underline{b}_1 q^{-1})^R$, którą można przepisać do postaci $\underline{B}^{R3}(q^{-1}) = [q^{-1} I + (\underline{b}_1)^R (\underline{b}_0 + \underline{b}_2 q^{-2})]^{-1} (\underline{b}_1)^R$. Analogiczne rozważania mogą posłużyć wprowadzeniu kolejnego, czwartego już typu inwersji $\underline{B}^{R4}(q^{-1}) = [q^{-2} I + (\underline{b}_2)^R (\underline{b}_0 + \underline{b}_1 q^{-1})]^{-1} (\underline{b}_2)^R$. Jednak to nie wszystko. Równanie (6), przedstawione w następującej formie

$$u(t) = (\underline{b}_0 + \underline{b}_1 q^{-1})^R [y_{ref}(t+1) - \underline{b}_2 q^{-2} u(t) + \underline{a}_1 y(t) + \underline{a}_2 q^{-1} y(t)] \quad (12)$$

i przepisane do postaci

$$u(t)=[I+(b_0+b_1q^{-1})^R b_2q^{-2}]^{-1}(b_0+b_1q^{-1})^R [y_{ref}(t+1)+a_1y(t)+a_2q^{-1}y(t)] \quad (13)$$

zawiera następną inwersję wielomianu macierzewego $\underline{B}(q^{-1})$, tj. $\underline{B}^{R5}(q^{-1})=[I+(b_0+b_1q^{-1})^R b_2q^{-2}]^{-1}(b_0+b_1q^{-1})^R$. Analogicznie, w ten sam sposób, można wprowadzić kolejne dwa typy inwersji $\underline{B}^{R6}(q^{-1})=[I+(b_0+b_2q^{-2})^R b_1q^{-1}]^{-1}(b_0+b_2q^{-2})^R$ i $\underline{B}^{R7}(q^{-1})=[I+(b_1q^{-1}+b_2q^{-2})^R b_0q^{-2}]^{-1}(b_1q^{-1}+b_2q^{-2})^R$. Jednak to jeszcze nie wszystkie inwersje, ponieważ trzy ostatnie $\underline{B}^{R5}(q^{-1})$, $\underline{B}^{R6}(q^{-1})$, $\underline{B}^{R7}(q^{-1})$ zawierają po dwie *subinwersje*. Zobrazujmy to szybko na przykładzie prawostronnej inwersji $(b_1q^{-1}+b_2q^{-2})^R$, dla której wyznaczenie dwóch wspomnianych subinwersji, równych $[q^{-1}I+(b_1)^R b_2q^{-2}]^{-1}(b_1)^R$ i $[q^{-2}I+(b_2)^R b_1q^{-1}]^{-1}(b_2)^R$, jest natychmiastowe.

Podsumowując, dla rozpatrywanego przykładu możemy podać 13 różnych typów prawostronnych inwersji, zawartych w 13 różnych rozwiązaniach równania (6) ze względu na $u(t)$. Poza tym każda z inwersji od $\underline{B}^{R1}(q^{-1})$ do $\underline{B}^{R13}(q^{-1})$ jest niejednoznaczna, co wynika z ogólnej niejednoznaczności prawostronnej inwersji.

5. ROZWIĄZANIA OPTIMALNE W DZIEDZINIE CZASU

Odnieśmy się najpierw do przykładu z punktu 4, w którym wyróżnić można 13 typów inwersji (od $\underline{B}^{R1}(q^{-1})$ do $\underline{B}^{R13}(q^{-1})$), związanych z 13 różnymi zbiorami rozwiązań (wielomianowo-macierzewego) równania dla $u(t)$, wszystkie zapewniające sterowanie minimalnowariancyjne obiektu (5). Jest interesujące, że inwersje te są stowarzyszone z dwoma klasami rozwiązań dla $u(t)$ w problemie sterowania minimalnowariancyjnego, odpowiednio dla równań $\underline{B}(q^{-1})u(t)=y(t)$ i $[I+[\beta_s(q^{-1})]^R[\underline{B}(q^{-1})-\beta(q^{-1})]]u(t)=[\beta_s(q^{-1})]^R y(t)$, przy czym $y(t)=qy_{ref}(t)+a_1y(t)+a_2q^{-1}y(t)$ (ogólne formy macierzy wielomianowych $\beta(q^{-1})$ i $\beta_s(q^{-1})$ zostały podane w punkcie 5.1, zaś te z analizowanego przykładu zostały zestawione poniżej). Drugie równanie wyłania 12 rozwiązań, wszystkie zawierające różne formy (wielomianowych) macierzy $\beta(q^{-1})$ i $\beta_s(q^{-1})$, zawarte w inwersjach od $\underline{B}^{R2}(q^{-1})$ do $\underline{B}^{R13}(q^{-1})$ (plus inwersja $\underline{B}^{R1}(q^{-1})$ stowarzyszona z równaniem $\underline{B}(q^{-1})u(t)=y(t)$). W celu odróżnienia między przypadkami, gdy $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$ i $\beta_s(q^{-1})\neq\beta(q^{-1})$, wprowadzono odpowiednio pojęcia rozwiązań 'głównych' i 'podrozwiązań' [8], przy czym te ostatnie zawierają wspomniane powyżej subinwersje.

1. $\beta(q^{-1})=b_0$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; rozwiązanie 'główne'; inwersja $\underline{B}^{R2}(q^{-1})$.
2. $\beta(q^{-1})=b_1q^{-1}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; rozwiązanie 'główne'; inwersja $\underline{B}^{R3}(q^{-1})$.
3. $\beta(q^{-1})=b_2q^{-2}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; rozwiązanie 'główne'; inwersja $\underline{B}^{R4}(q^{-1})$.
4. $\beta(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; rozwiązanie 'główne'; inwersja $\underline{B}^{R5}(q^{-1})$.
5. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_0$; 'podrozwiązanie'; inwersja $\underline{B}^{R8}(q^{-1})$.

6. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_1q^{-1}$; 'podrozwiązanie'; inwersja $\underline{B}^{R9}(q^{-1})$.

7. $\beta(q^{-1})=b_0+b_2q^{-2}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; rozwiązanie 'główne'; inwersja $\underline{B}^{R6}(q^{-1})$.

8. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_0$; 'podrozwiązanie'; inwersja $\underline{B}^{R10}(q^{-1})$.

9. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_2q^{-2}$; 'podrozwiązanie'; inwersja $\underline{B}^{R11}(q^{-1})$.

10. $\beta(q^{-1})=b_1q^{-1}+b_2q^{-2}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; rozwiązanie 'główne'; inwersja $\underline{B}^{R7}(q^{-1})$.

11. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_1q^{-1}$; 'podrozwiązanie'; inwersja $\underline{B}^{R12}(q^{-1})$.

12. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_2q^{-2}$; 'podrozwiązanie'; inwersja $\underline{B}^{R13}(q^{-1})$.

Pośród każdego z 13 typów rozwiązań (i inwersji) interesujące jest poszukiwanie *jednoznacznego* rozwiązania dla $u(t)$, np. związanego z prawostronnymi inwersjami o minimalnej normie wielomianów macierzewych $\underline{B}(q^{-1})$ lub $\beta_s(q^{-1})$. Ponieważ wszystkie 13 sterowań minimalnowariancyjnych (tak jak równania (7) i (9)) można rozważać jako równania czasowe, w inwersjach należy stosować transpozycje „zwykle”, a nie sprzężone, np. tzw. T -inwersję o minimalnej normie $\underline{B}_0^R(q^{-1})=\underline{B}^T(q^{-1})[\underline{B}(q^{-1})\underline{B}^T(q^{-1})]^{-1}$ (inwersje o minimalnej normie ogólnie zawierają transpozycje sprzężone) [4,11,12].

Przejdźmy teraz do bardziej ogólnego przypadku układów prawo- lub lewostronnie odwracalnych, a także rozważmy ogólny przypadek obiektów, dla których $\underline{B}(q^{-1})$ jest dowolna, także niepełnego normalnego rzędu. W ogólności, będziemy mówić o rozwiązaniach *klasy 1* i *klasy 2* problemu MVC względem $u(t)$, związanych odpowiednio z równaniami

$$\underline{B}(q^{-1})u(t)=y(t) \quad (14)$$

i

$$[I+[\beta_s(q^{-1})]^{inv}[\underline{B}(q^{-1})-\beta(q^{-1})]]u(t)=[\beta_s(q^{-1})]^{inv}y(t) \quad (15)$$

gdzie ogólne postaci wielomianów macierzewych $\beta(q^{-1})$ i $\beta_s(q^{-1})$ będą podane poniżej oraz $y(t)=\tilde{F}^{-1}(q^{-1})[\tilde{C}(q^{-1})y_{ref}(t+d)-\tilde{H}(q^{-1})y(t)]$ (zaś dla powyższego przykładu $y(t)=qy_{ref}(t)+a_1y(t)+a_2q^{-1}y(t)$) a inwersja $[\beta_s(q^{-1})]^{inv}$ jest odpowiednią inwersją uogólnioną, zależną od specyficznych właściwości $\beta_s(q^{-1})$, związanych z normalnym rzędem tej macierzy wielomianowej (przy czym np. $[\beta_s(q^{-1})]^{inv}=[\beta_s(q^{-1})]^R$ dla prawostronnie odwracalnej macierzy $\beta_s(q^{-1})$).

5.1. Wielomiany macierzewo $\beta(q^{-1})$ i $\beta_s(q^{-1})$ [8]

Zdefiniujmy teraz, w ogólności, $\beta(q^{-1})$ jako element zbioru $\{\beta(q^{-1})\}$ wszystkich l -składnikowych macierzy wielomianowych, gdzie $l=1, \dots, m$, taki, że

$$\beta(q^{-1}) = \underline{b}_{i1}q^{-i1} + \underline{b}_{i2}q^{-i2} + \dots + \underline{b}_{il}q^{-il}, \quad i1 < i2 < \dots < il$$

$$\begin{aligned} i1 &= 0, 1, \dots, m-l+1 \\ i2 &= 1, 2, \dots, m-l+2 \\ &\dots \\ il &= l-1, l, \dots, m \end{aligned} \quad (16)$$

i $\beta_s(q^{-1})$ jako element zbioru $\{\beta_s(q^{-1})\}$, taki, że

$$\beta_s(q^{-1}) = \underline{b}_{i1}q^{-i1} + \underline{b}_{i2}q^{-i2} + \dots + \underline{b}_{i(l-1)}q^{-i(l-1)}, \quad l = m, \dots, 1$$

$$\begin{aligned} i1 &< i2 < \dots < i(l-1) \\ i1 &= 0, 1, \dots, m-l+1 \\ i2 &= 1, 2, \dots, m-l+2 \\ &\dots \\ i(l-1) &= l-1, l, \dots, m \end{aligned} \quad (17)$$

5.2. Optymalne T -inwersje

Dwie nowe, ogólne, przedstawione poniżej definicje wprowadzają różne optymalne inwersje niekwadratowej macierzy wielomianowej $\underline{B}(q^{-1})$ rzędu m , otrzymane w wyniku wyznaczania rozwiązania $u(t)$ z równania $\underline{B}(q^{-1})u(t) = y(t)$. Optymalne, tzw. T -inwersje, zawierają „zwykłe” (a nie sprzężone) transpozycje $\underline{B}(q^{-1})$.

Definicja 5.1. Rozważmy macierz wielomianową $\underline{B}(q^{-1}) = \underline{b}_0 + \underline{b}_1q^{-1} + \dots + \underline{b}_mq^{-m}$ pełnego normalnego rzędu n_u (lub n_y). Prawostronną T -inwersję o minimalnej normie (lub lewostronną minimalnokwadratową) macierzy $\underline{B}(q^{-1})$ definiuje się jako $\underline{B}_0^{R1}(q^{-1}) = \underline{B}^T(q^{-1})[\underline{B}(q^{-1})\underline{B}^T(q^{-1})]^{-1}$ (lub $\underline{B}_0^{L1}(q^{-1}) = [\underline{B}^T(q^{-1})\underline{B}(q^{-1})]^{-1}\underline{B}^T(q^{-1})$).

Definicja 5.2. Rozważmy macierz wielomianową $\underline{B}(q^{-1}) = \underline{b}_0 + \underline{b}_1q^{-1} + \dots + \underline{b}_mq^{-m}$ niepełnego normalnego rzędu r . Przeprowadźmy szkieletową faktoryzację $\underline{B}(q^{-1}) = \underline{C}(q^{-1})\underline{D}(q^{-1})$, gdzie macierze wielomianowe $\underline{B}(q^{-1})$, $\underline{C}(q^{-1})$, $\underline{D}(q^{-1})$ są odpowiednio o wymiarach $n_y \times n_u$, $n_y \times r$, $r \times n_u$. T -inwersję Moore-Penrose'a macierzy $\underline{B}(q^{-1})$ definiuje się jako $\underline{B}_0^{R1}(q^{-1}) = \underline{D}_0^{R1}(q^{-1})\underline{C}_0^{L1}(q^{-1})$, gdzie $\underline{D}_0^{R1}(q^{-1}) = \underline{D}^T(q^{-1})[\underline{D}(q^{-1})\underline{D}^T(q^{-1})]^{-1}$ i $\underline{C}_0^{L1}(q^{-1}) = [\underline{C}^T(q^{-1})\underline{C}(q^{-1})]^{-1}\underline{C}^T(q^{-1})$.

5.3. Optymalne τ -inwersje

Dwie nowe, ogólne, przedstawione poniżej definicje wprowadzają różne typy optymalnych inwersji niekwadratowej macierzy wielomianowej $\underline{B}(q^{-1})$ rzędu m , otrzymane w wyniku wyznaczania rozwiązania $u(t)$ z równania $(I + [\beta_s(q^{-1})]^{inv})[\underline{B}(q^{-1}) - \beta(q^{-1})]u(t) = [\beta_s(q^{-1})]^{inv}y(t)$. Niektóre z optymalnych, tzw. τ -inwersji, zawierają „zwykłe” transpozycje (rzeczywistych) współczynników \underline{b}_i , $i=0, \dots, m$, zaś niektóre inwersje zawierają „zwykłe” transpozycje macierzy wielomianowych, wszystkie będące od dwu- do m -składnikowymi kombinacjami $(m+1)$ -składnikowej sumy $\underline{b}_0 + \underline{b}_1q^{-1} + \dots + \underline{b}_mq^{-m}$.

Definicja 5.3. Rozważmy dowolną macierz wielomianową $\underline{B}(q^{-1}) = \underline{b}_0 + \underline{b}_1q^{-1} + \dots + \underline{b}_mq^{-m}$ pełnego lub niepełnego normalnego rzędu, a także macierze wielomianowe $\beta(q^{-1})$ (16) i $\beta_s(q^{-1})$ (17) pełnego normalnego rzędu n_u (lub n_y). Prawostronną τ -inwersję o minimalnej normie (lub lewostronną minimalnokwadratową) macierzy $\underline{B}(q^{-1})$ definiuje się jako $\underline{B}_0^{R2}(q^{-1}) = (I + [\beta_s(q^{-1})]_0^R)[\underline{B}(q^{-1}) - \beta(q^{-1})]^{-1}[\beta_s(q^{-1})]_0^R$ (lub $\underline{B}_0^{L2}(q^{-1}) = (I + [\beta_s(q^{-1})]_0^L)[\underline{B}(q^{-1}) - \beta(q^{-1})]^{-1}[\beta_s(q^{-1})]_0^L$), gdzie indeks „0” prawostronnej (lub lewostronnej) inwersji macierzy $\beta_s(q^{-1})$ oznacza T -inwersję o minimalnej normie (lub minimalnokwadratową) wtedy, gdy $\beta_s(q^{-1})$ jest macierzą wielomianową (dla $1 < l \leq m$) lub inwersję o minimalnej normie (lub minimalnokwadratową) (rzeczywistego) współczynnika \underline{b}_i w przypadku, gdy $\beta_s(q^{-1}) = \underline{b}_iq^{-i}$, $i=0, \dots, m$ (dla $l=1$).

Definicja 5.4. Rozważmy dowolną macierz wielomianową $\underline{B}(q^{-1}) = \underline{b}_0 + \underline{b}_1q^{-1} + \dots + \underline{b}_mq^{-m}$ pełnego lub niepełnego normalnego rzędu, a także macierze wielomianowe $\beta(q^{-1})$ (16) i $\beta_s(q^{-1})$ (17) niepełnego normalnego rzędu r . Przeprowadźmy szkieletową faktoryzację $\beta_s(q^{-1}) = \underline{C}(q^{-1})\underline{D}(q^{-1})$, gdzie macierze wielomianowe $\beta(q^{-1})$, $\underline{C}(q^{-1})$, $\underline{D}(q^{-1})$ są odpowiednio o wymiarach $n_y \times n_u$, $n_y \times r$, $r \times n_u$. τ -inwersję Moore-Penrose'a macierzy $\underline{B}(q^{-1})$ definiuje się jako $\underline{B}_0^{R2}(q^{-1}) = (I + \underline{D}_0^R(q^{-1})\underline{C}_0^L(q^{-1}))[\underline{B}(q^{-1}) - \beta(q^{-1})]^{-1}\underline{D}_0^R(q^{-1})\underline{C}_0^L(q^{-1})$, gdzie indeks „0” prawostronnej (lub lewostronnej) inwersji oznacza T -inwersję o minimalnej normie (lub minimalnokwadratową) wtedy, gdy $\beta_s(q^{-1})$ jest macierzą wielomianową (dla $1 < l \leq m$) lub inwersję o minimalnej normie (lub minimalnokwadratową) w przypadku, gdy $\beta_s(q^{-1}) = \underline{b}_iq^{-i}$, $i=0, \dots, m$ (dla $l=1$).

5.4. Całkowita liczba wszystkich typów optymalnych T - i τ -inwersji

Na podstawie podanych powyżej definicji jest oczywiste, że istnieje jedna optymalna T -inwersja i znaczna liczba różnych typów τ -inwersji niekwadratowej macierzy wielomianowej $\underline{B}(q^{-1})$ rzędu m . Poniższe twierdzenie wyznacza całkowitą liczbę optymalnych inwersji, zawartych w rozwiązaniach klasy 1 i klasy 2 problemu MVC względem $u(t)$ (równą całkowitej liczbie wszystkich optymalnych rozwiązań równań (7) i (9)).

Twierdzenie 5.1. [8] Rozważmy dowolną niekwadratową macierz wielomianową $\underline{B}(q^{-1}) = \underline{b}_0 + \underline{b}_1q^{-1} + \dots + \underline{b}_mq^{-m}$. Całkowitą liczbę N_m optymalnych T - i τ -inwersji macierzy $\underline{B}(q^{-1})$ wyznacza się iteracyjnie z równania

$$N_i = 1 + (i+1) \sum_{j=1}^i \frac{1}{j(i-j+1)} N_{j-1} \quad i=1, \dots, m, \quad N_0 = 1 \quad (18)$$

T -inwersja macierzy $\underline{B}(q^{-1})$ generuje jeden zbiór zer sterowniczych typu 1, zaś τ -inwersje generują $(N_m - 1)$ zbiorów zer sterowniczych typu 2 [8].

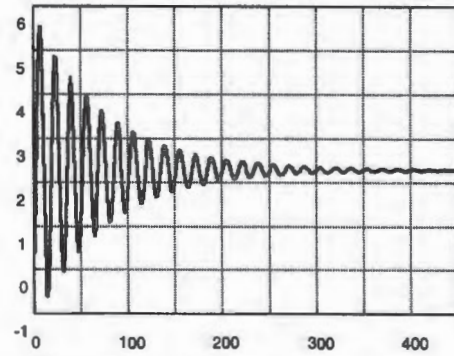
6. PRZYKŁADY SYMULACYJNE

Przykład 1.

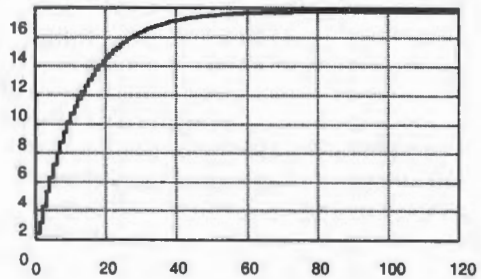
Rozpatrzmy, jak w punkcie 4, obiekt o dwóch wejściach i jednym wyjściu opisany przez (deterministyczny) model czasowy $y(t)+a_1y(t-1)+a_2y(t-2)=b_0u(t-1)+b_1u(t-2)+b_2u(t-3)$, gdzie macierz wielomianowa $B(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}+b_2q^{-2}$ jest pełnego normalnego rzędu 1 oraz $a_1=a_2=1$. Załóżmy, że $b_0=[2 \ 1]$, $b_1=[-1.5 \ -1.7]$ i $b_2=[0.01 \ 0.06]$. Zera sterownicze typu 1, wyznaczone w oparciu o T -inwersję, wynoszą $0.9167 \pm 0.3653i$, $0.0233 \pm 0.0147i$, podczas gdy 12 zbiorów zer sterowniczych typu 2 wraz z towarzyszącymi im macierzami wielomianowymi $\beta(q^{-1})$ i $\beta_i(q^{-1})$ zostało pokazanych poniżej. Weźmy dla przykładu zbiór zer sterowniczych typu 2 równych $0.0173, 0.9227$. Porównajmy ten zbiór ze wspomnianym zbiorem zer sterowniczych typu 1. Zarówno pierwszy, jak i drugi zbiór (stabilnych) zer sterowniczych wskazuje, że sterowania minimalnowariancyjne/perfekcyjne (7) i (9) są stabilne. Faktycznie, dla powyższego obiektu deterministycznego i przy stabilnych sterowaniach $u_1(t)$ i $u_2(t)$ wyjście obiektu osiąga wartość zadaną dla $t \geq d=1$. Jednakże sterowania otrzymane w oparciu o równanie (7) są silnie oscylujące, co przedstawiono np. dla sterowania $u_1(t)$ na rys. 1a, podczas gdy otrzymane w oparciu o równanie (9) są dobrze tłumione, co zostało pokazane dla sterowania $u_1(t)$ na rys. 1b. Te ostatnie własności wynikają bezpośrednio ze zbioru rzeczywistych zer sterowniczych typu 2. Reasumując, zera sterownicze typu 2 mogą okazywać się 'lepsze' w zadaniach projektowania odpornych metod sterowania MVC. Wniosek ten można również poprzeć na podstawie badań symulacyjnych przeprowadzonych w Przykładzie 2.

Przykład 2.

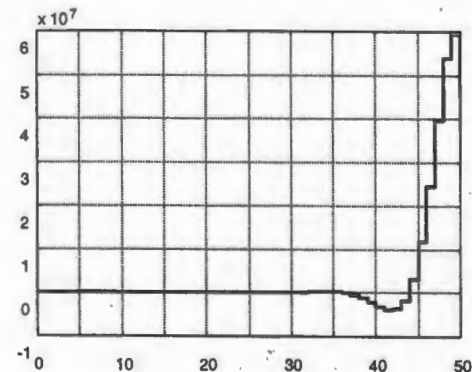
Zmodyfikujmy model z poprzedniego Przykładu 1 do postaci $b_0=[2 \ 1]$, $b_1=[-3.1 \ -1.4]$, $b_2=[0.6 \ 1.7]$, w którym dwa kanały są nieminimalnofazowe (co sugeruje, że cały system jest nieminimalnofazowy). Pierwsze dwa zespolone zera sterownicze typu 1 ($1.3088 \pm 0.5818i$, $0.2112 \pm 0.5218i$), leżące poza kołem jednostkowym, potwierdzają nieminimalnofazowe właściwości całego obiektu. Własność nieminimalnofazowości potwierdza również niestabilne sterowanie minimalnowariancyjne, wyznaczone w oparciu o równanie (7); rys. 2a dla $u_1(t)$. Jest interesujące, że jeden ze zbiorów zer sterowniczych typu 2 ($0.76 \pm 0.0490i$) wskazuje minimalnofazowe właściwości obiektu, co dodatkowo potwierdzają stabilne (nieoscylacyjne) sterowania $u_1(t)$ (rys. 2b) i $u_2(t)$, otrzymane w oparciu o równanie (9) (zapewniające $y(t)=y_{ref}(t)$ dla $t \geq d=1$). Tak jak w przykładzie poprzednim, wykorzystanie nowej τ -inwersji, generującej zera sterownicze typu 2, stwarza duże możliwości w zakresie projektowania odpornego sterowania MVC.



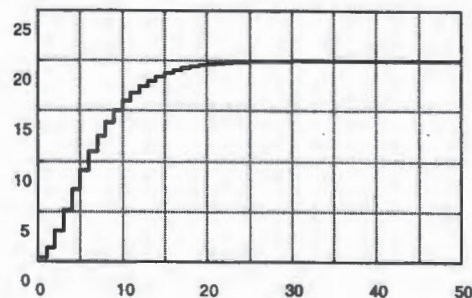
Rys. 1a. Sterowanie $u_1(t)$ otrzymane w oparciu o równanie 7, Przykład 1.



Rys. 1b. Sterowanie $u_1(t)$ otrzymane w oparciu o równanie 9, Przykład 1.



Rys. 2a. Sterowanie $u_1(t)$ otrzymane w oparciu o równanie 7, Przykład 2.



Rys. 2b. Sterowanie $u_1(t)$ otrzymane w oparciu o równanie 9, Przykład 2.

Poniżej przedstawiono zbiory sterowniczych typu 2 z Przykładu 1 wraz ze stowarzyszonymi macierzami wielomianowymi $\beta(q^{-1})$ i $\beta_i(q^{-1})$ oraz inwersjami $[\beta_i(q^{-1})]_b^R$. Zbiory te są generowane przez 12 rozwiązań

równania (15). Zera sterownicze typu 2 wyznaczono w oparciu o metodę podaną w pozycji [8].

1. $\beta(q^{-1})=b_0$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_0)_b^R$ (inwersja 'główna'); $z_1=0.9227$, $z_2=0.0173$;
2. $\beta(q^{-1})=b_1q^{-1}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_1)_b^R q$ (inwersja 'główna'); $z_1=1.0704$, $z_2=0.0233$;
3. $\beta(q^{-1})=b_2q^{-2}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_2)_b^R q^2$ (inwersja 'główna'); $z_1=1.4302$, $z_2=0.0323$;
4. $\beta(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_0+b_1q^{-1})_b^R$ (inwersja 'główna'); $z_1=0.0234$, $z_{2,3}=0.9283\pm 0.3726i$;
5. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_0$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_0)_b^R$ ('subinwersja'); $z_1=0.9400$, $z_2=0.9227$, $z_3=0.0173$;
6. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_1q^{-1}$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_1)_b^R q$ ('subinwersja'); $z_1=1.0936$, $z_2=1.0704$, $z_3=0.0233$;
7. $\beta(q^{-1})=b_0+b_2q^{-2}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_0+b_2q^{-2})_b^R$ (inwersja 'główna'); $z_1=0.9317$, $z_2=0.0318$, $z_{3,4}=-0.0117\pm 0.1577i$;
8. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_0$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_0)_b^R$ ('subinwersja'); $z_1=0.9227$, $z_2=0.0173$, $z_{3,4}=\pm 0.1265i$;
9. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_2q^{-2}$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_2)_b^R q^2$ ('subinwersja'); $z_1=1.4302$, $z_2=0.0323$, $z_{3,4}=\pm 0.2151i$;
10. $\beta(q^{-1})=b_1q^{-1}+b_2q^{-2}$; $\beta_s(q^{-1})=\beta(q^{-1})$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_1q^{-1}+b_2q^{-2})_b^R$ (inwersja 'główna'); $z_1=1.0646$, $z_{2,3}=0.0230\pm 0.0145i$;
11. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_1q^{-1}$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_1)_b^R q$ ('subinwersja'); $z_1=1.0704$, $z_2=0.0233$, $z_3=0.0228$;
12. $\beta(q^{-1})$ jak powyżej; $\beta_s(q^{-1})=b_2q^{-2}$; $[\beta_s(q^{-1})]_b^R=(b_2)_b^R q^2$ ('subinwersja'); $z_1=1.4302$, $z_2=0.0323$, $z_3=0.0316$;

Uwaga 6.1. Zauważmy, że niektóre powyższe zbiory zawierają niestabilne zera sterownicze typu 2 'potwierdzające' niestabilne sterowanie minimalnowariancyjne/perfekcyjne. Oczywiście zbiory te nie są brane pod uwagę przez projektanta sterowania MVC.

7. PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono oryginalne rezultaty związane z problemem sterowania minimalnowariancyjnego liniowymi stacjonarnymi dyskretnymi obiektami wielowymiarowymi. Wyznaczono nową klasę rozwiązań, stowarzyszoną z τ -inwersjami macierzy wielomianowej $B(q^{-1})$, w uzupełnieniu do klasy już istniejącej, opartej na T -inwersji. T -inwersja i τ -inwersje generują zera sterownicze odpowiednio typu 1 i typu 2. Badania symulacyjne potwierdziły możliwości wykorzystania nowej τ -inwersji w projektowaniu odpornych układów sterowania minimalnowariancyjnego.

INVERSES OF POLYNOMIAL MATRICES VERSUS MINIMUM VARIANCE CONTROL

Abstract: This paper deals with the problem of solution of a certain vector-matrix equation, related to the MVC problem for linear time-invariant multi-input/multi-output discrete-time systems. A new general class of solutions is introduced,

related to the so-called T -inverses and τ -inverses of a polynomial matrix $B(q^{-1})$ in the ARMAX model. The role of the new inverses in generation of control zeros is emphasized.

Literatura

- [1] Åström K.J., Wittenmark B. (1972) On the control of constant but unknown systems. *Proc. 5th IFAC World Congress*, Paris.
- [2] Åström K.J., Wittenmark B. (1973) On self-tuning regulators. *Automatica*, **9**, 185-190.
- [3] Borrisson U. (1975) *Self-Tuning Regulators – Industrial Application and Multivariable Theory*. Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, October, Report 7513.
- [4] Hunek W. (2003) *Zera sterownicze liniowych ciągłych stacjonarnych układów wielowymiarowych i ich zastosowanie w teorii obwodów i systemów*. Praca doktorska, Politechnika Opolska, Wydział Elektrotechniki i Automatyki.
- [5] Kaczorek T. (1998) *Wektory i macierze w automatyce i elektrotechnice*. WNT, wyd. II zm., Warszawa.
- [6] Kaczorek T. (1999) *Teoria sterowania i systemów*. PWN, Warszawa.
- [7] Latawiec K. (1998) *Contributions to Advanced Control and Estimation for Linear Discrete-time MIMO Systems*. Technical University of Opole Press.
- [8] Latawiec K. (2004) *The power of inverse systems in linear and nonlinear modeling and control*. Technical University of Opole Press, 2004.
- [9] Latawiec K., Bańka S., Tokarzewski J. Control zeros and nonminimum phase LTI MIMO systems. *Annual Reviews in Control (IFAC Journal)*, 2000, vol. 24, pp. 105-112; also in *Proc. IFAC World Congress, Beijing, P.R. China, 1999, D*, 397-404.
- [10] Latawiec K., Hunek W. (2002) Control zeros for continuous-time LTI MIMO systems. *Proc. 8th IEEE IC MMAR 2002, 2–5 September 2002*, Szczecin, Poland, 411-416.
- [11] Latawiec K., Hunek W., Łukaniszyn M. (2004) A new type of control zeros for LTI MIMO systems. *Proc. 10th IEEE IC MMAR 2004, 30 August – 2 September 2004*, Miedzyzdroje, Poland, 251-256.
- [12] Latawiec K., Hunek W., Stanisławski R., Łukaniszyn M. (2003) Control zeros versus transmission zeros intriguingly revisited. *Proc. 9th IEEE IC MMAR 2003, 25–28 August 2003*, Miedzyzdroje, Poland, 449-454.
- [13] Latawiec K., Tokarzewski J. (1999) Rola blokowania transmisji i zerowania wyjścia w kreowaniu zer dyskretnych obiektów wielowymiarowych. *XIII Krajowa Konferencja Automatyki (KKA 1999)*, 21-24 września 1999, Opole, 149-152.



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2