

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

**STEROWANIE OPTYMALNE
I ADAPTACYJNE**

ŚLIZGOWE STEROWANIE OBIEKTEM TRZECIEGO RZĘDU Z NIEOSTRYM OGRANICZENIEM SYGNAŁU WEJŚCIOWEGO*

Andrzej BARTOSZEWICZ, Aleksandra NOWACKA

Politechnika Łódzka, Wydział Elektrotechniki i Elektroniki, Instytut Automatyki
ul. Stefanowskiego 18/22, 90 – 924 Łódź, e-mail: andpbart@mail.p.lodz.pl

Streszczenie: W referacie przedstawiono zastosowanie ruchomej płaszczyzny przełączeń o stałym nachyleniu i stałej prędkości ruchu w układzie ślizgowego sterowania ciągłym obiektem dynamicznym trzeciego rzędu z nieostrym ograniczeniem sygnału sterującego. Rozważane ograniczenie nie polega na kategoriycznym wykluczeniu sygnałów większych, co do modułu, od wartości krytycznej, lecz na zastosowaniu funkcji kary silnie rosnącej po przekroczeniu tej wartości. Zaproponowane sterowanie zapewnia dobrą dynamikę układu, jego odporność na zakłócenia zewnętrzne i niedokładności modelu od samego początku procesu regulacji oraz monotoniczną zbieżność uchybu do zera.

Słowa kluczowe: Płaszczyzna przełączeń, ruch ślizgowy, sterowanie o zmiennej strukturze.

1. WSTĘP

W ostatnim czasie wiele prac z zakresu teorii sterowania poświęcono tworzeniu nieciągłego sprzężenia zwrotnego, które w zależności od aktualnego położenia punktu opisującego dynamikę obiektu w przestrzeni stanu, zmienia strukturę układu regulacji. Szczególne znaczenie mają układy o zmiennej strukturze z ruchem ślizgowym. Ich podstawową zaletą jest to, że pozwalają uzyskać niewrażliwość obiektu na niektóre niedokładności modelu jego dynamiki i zakłócenia zewnętrzne. Jednak przy zastosowaniu tradycyjnych, nieruchomych hiperpłaszczyzn przełączeń, niewrażliwość tę uzyskuje się dopiero po zakończeniu fazy dochodzenia do rozważanej hiperpłaszczyzny, a więc po upływie pewnego czasu od początku procesu regulacji. Z kolei przy określonej wartości nieciągłego składnika sterowania, im krótszy jest ten czas, tym wolniej zanika uchyb w ruchu ślizgowym. Aby temu przeciwdziałać, w literaturze proponowano zastosowanie niestacjonarnych hiperpłaszczyzn ślizgowych. W pracach [4, 5, 6] zaproponowano, zastosowanie do sterowania obiektem drugiego rzędu linii przełączeń, które skokowo zmieniają swoje położenie na płaszczyźnie fazowej. Z kolei w artykułach [1] i [2] wprowadzono linie przełączeń, które zmieniają swoje położenie płynnie, jednostajnym ruchem posuwistym lub obrotowym. Sterowanie zaproponowane

w tych artykułach przeznaczone jest dla obiektów drugiego rzędu i powoduje wyeliminowanie fazy osiągania ruchu ślizgowego oraz zapewnia szybką zbieżność uchybu regulacji do zera. Właściwości układów ślizgowego sterowania obiektem drugiego rzędu, w których zastosowano ruchome proste przełączeń analizowano także w pracy [10], gdzie zaproponowano zmodyfikowany tryb przemieszczania tych linii.

W tym referacie omówione zostanie zastosowanie ruchomej płaszczyzny przełączeń o stałym nachyleniu i stałej prędkości ruchu w układzie ślizgowego sterowania ciągłym obiektem dynamicznym trzeciego rzędu. Płaszczyzna przełączeń wybrana jest w taki sposób, aby punkt opisujący dynamikę obiektu znajdował się na niej w chwili początkowej i pozostawał tam przez cały czas trwania procesu regulacji. Zapewnia to wyeliminowanie fazy osiągania ruchu ślizgowego i tym samym gwarantuje niewrażliwość obiektu na zakłócenia zewnętrzne oraz niedokładności modelu, już od samego początku trwania procesu regulacji. Rozważana płaszczyzna przełączeń porusza się ruchem jednostajnym w przestrzeni stanu, do początku układu współrzędnych, a następnie zatrzymuje się i pozostaje nieruchoma. Istota omawianej w referacie metody polega na uwzględnieniu nieostrego ograniczenia sygnału sterującego. W tym celu w referacie wprowadzono kryterium uwzględniające nie tylko jakość regulacji, ale także nieostre ograniczenie sygnału sterującego i parametry płaszczyzny przełączeń zostały wybrane w taki sposób, aby zminimalizować to kryterium. Zaproponowana metoda zapewnia monotoniczną zbieżność uchybu regulacji do zera, dobrą dynamikę układu oraz niewrażliwość na zakłócenia i niedokładności modelu od samego początku procesu regulacji. W końcowej części pracy pokazano, że klasyczne ograniczenie, wyrażone nierównością [3] stanowi szczególnie (graniczny) przypadek rozważanego w referacie ograniczenia nieostrego.

W rozdziale 2 sformułowano zagadnienie rozważane w dalszej części pracy oraz pokazano, że zaproponowane sterowanie zapewnia niewrażliwość obiektu od samego początku procesu regulacji. Rozdział 3 zawiera szczegółowy opis prezentowanej metody wyboru para-

*Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2005 – 2007 jako projekt badawczy nr 3 T10A 037 28.

metrów płaszczyzny przełączeń. Przykład symulacyjny, ilustrujący rozważane zagadnienia przedstawiono w rozdziale 4, natomiast rozdział 5 zawiera wnioski i stanowi podsumowanie pracy.

2. UKŁAD Z RUCHOMĄ PŁASZCZYZNĄ PRZEŁĄCZEŃ

W referacie rozważamy ciągły, nieliniowy i niestacjonarny obiekt trzeciego rzędu, którego dynamika opisana jest następującymi równaniami

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= f(x, t) + \Delta f(x, t) + b(x, t)u + d(t) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie x_1, x_2, x_3 są składowymi wektora stanu $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$, t oznacza czas, u sygnał sterujący, b, f - znane a priori, ograniczone funkcje stanu obiektu i czasu, Δf i d - pewne funkcje reprezentujące odpowiednio niedokładność określenia modelu i zakłócenia zewnętrzne. Wartość bezwzględna funkcji $b(x, t)$ jest ograniczona z dołu dodatnią stałą δ , tzn. $0 < \delta = \inf\{|b(x, t)|\}$. Funkcje Δf i d nie są z góry znane, ale są ograniczone. Istnieje zatem taka stała μ , że dla każdej pary (x, t) spełniona jest zależność $|\Delta f(x, t) + d(t)| \leq \mu$. Oznaczmy warunki początkowe obiektu w chwili $t = t_0$ przez x_{10}, x_{20}, x_{30} , gdzie $x_{10} = x_1(t_0), x_{20} = x_2(t_0), x_{30} = x_3(t_0)$. Trajektoria zadana obiektu (1) określona jest wektorem $x_d(t) = [x_{1d}(t), x_{2d}(t), x_{3d}(t)]^T$, gdzie $x_{2d}(t) = \dot{x}_{1d}(t), x_{3d}(t) = \dot{x}_{2d}(t)$ oraz $x_{3d}(t)$ jest różniczkowalną funkcją czasu. Błąd śledzenia tej trajektorii jest określony następująco

$$e(t) = [e_1(t) \ e_2(t) \ e_3(t)]^T = x(t) - x_d(t) \quad (2)$$

Stąd wynika, że $e_1(t) = x_1(t) - x_{1d}(t), e_2(t) = x_2(t) - x_{2d}(t), e_3(t) = x_3(t) - x_{3d}(t)$.

Zakładamy, że w chwili początkowej $t = t_0$, błąd śledzenia trajektorii jest równy

$$e_1(t_0) = e_0, \ e_2(t_0) = 0, \ e_3(t_0) = 0 \quad (3)$$

gdzie e_0 jest dowolną liczbą rzeczywistą.

Proponujemy następującą postać zmodyfikowanego kryterium

$$J = \int_{t_0}^{\infty} |e_1(t)| dt + q \left\{ \frac{\max\{|u(t)|\}}{M} \right\}^n \quad (4)$$

gdzie $M > 0$ jest krytyczną wartością modułu sygnału sterującego $|u(t)|$, która powinna być możliwie jak najmniej przekraczana, $q > 0$ jest czynnikiem wagowym zaś $n \geq 1$ jest stałą określającą, jak silnie będą karane zbyt duże wartości sygnału sterującego. Dodatkowo kładąc $n \rightarrow \infty$ i wybierając M jako największą dopuszczalną wartość sygnału sterującego $|u(t)|$ oraz minimali-

zując kryterium (4) otrzymamy sterowanie zapewniające minimalną wartość całki z modułu uchybu bez przekraczania dopuszczalnej wartości sygnału sterującego, czyli układ z klasycznym ograniczeniem, wyrażonym w postaci nierówności.

Rozważamy ruchomą płaszczyznę przełączeń o stałym kącie nachylenia poruszającą się ruchem jednostajnym w przestrzeni stanu. Płaszczyzna ta zatrzymuje się w chwili t_f . Zatem dla $t \leq t_f$ jest ona opisana równaniem

$$s(e, t) = 0, \text{ gdzie} \\ s(e, t) = e_3(t) + c_2 e_2(t) + c_1 e_1(t) + A + Bt \quad (5)$$

W powyższej zależności c_1, c_2, A i B są pewnymi stałymi. Zagadnienie wyboru tych stałych będzie rozpatrywane w dalszej części referatu. W chwili t_f płaszczyzna przestaje się poruszać, a zatem dla $t \geq t_f$ będzie ona opisana zależnością

$$s(e, t) = 0, \text{ gdzie} \\ s(e, t) = e_3(t) + c_2 e_2(t) + c_1 e_1(t) \quad (6)$$

Stałe c_1, c_2, A i B wybrane zostaną tak, aby punkt opisujący dynamikę obiektu w chwili początkowej, czyli dla $t = t_0$ należał do płaszczyzny przełączeń, czyli aby spełniony był warunek

$$s(e(t_0), t_0) = e_3(t_0) + c_2 e_2(t_0) + c_1 e_1(t_0) + A + Bt_0 = 0 \quad (7)$$

Zauważmy, że jeżeli na obiekt (1) działać będzie sygnał sterujący

$$u = \frac{-f(x, t) - c_2 e_3(t) - c_1 e_2(t) + \dot{x}_{3d}(t) - B}{b(x, t)} + \frac{\gamma \operatorname{sgn}[s(e, t)]}{b(x, t)} \quad (8)$$

gdzie $\gamma = \eta + \mu$, przy czym η jest pewną dodatnią stałą, to ruch ślizgowy na płaszczyźnie (5) będzie stabilny. Wynika to stąd, że zmienna przełączająca $s(e, t)$ spełnia warunek $\dot{s} \leq -\eta|s|$. Aby to wykazać weźmy pod uwagę iloczyn

$$s(e, t)\dot{s}(e, t) = s(e, t)[\dot{e}_3(t) + c_2 \dot{e}_2(t) + c_1 \dot{e}_1(t) + B] \quad (9)$$

Podstawiając zależności (1), (2) i (8) do (9) otrzymamy

$$s(e, t)\dot{s}(e, t) = s(e, t)\{\Delta f(x, t) + d(t) - \gamma \operatorname{sgn}[s(e, t)]\} \leq -\eta|s(e, t)| \quad (10)$$

Dla czasu $t \in \langle 0, t_f \rangle$ dynamika obiektu jest opisana równaniem (5) z warunkami początkowymi (3).

Rozwiążemy teraz, przy uwzględnieniu powyższych warunków początkowych, równanie opisujące dynamikę uchybu w pierwszej fazie regulacji, a więc przed zatrzymaniem płaszczyzny przełączeń.

$$e_3(t) + c_2 e_2(t) + c_1 e_1(t) + A + Bt = 0 \quad (11)$$

W pierwszej kolejności rozwiązujemy równanie jednorodne

$$e_3(t) + c_2 e_2(t) + c_1 e_1(t) = 0 \quad (12)$$

Aby uniknąć przeregulowań wielomian charakterystyczny równania (12) powinien mieć jeden podwójny, pierwiastek rzeczywisty. Stąd wynika warunek

$$c_2 = 2\sqrt{c_1} \quad (13)$$

Zauważmy, że parametry c_1 i c_2 muszą być dodatnie aby obiekt (1), w ruchu ślizgowym, był stabilny. Rozwiązanie równania (11) przy uwzględnieniu warunku (13) i założeniu $t_0 = 0$ pozwala wyznaczyć przebieg uchybu i jego pochodnych, dla czasu $t \in (0, t_f)$. Przy przyjętych założeniach, z warunku (7), otrzymujemy

$$A = -c_1 e_0 \quad (14)$$

Uwzględnienie powyższego warunku prowadzi do wniosku, że uchyb i jego pochodne mają następującą postać

$$e_1(t) = \left(-\frac{2B\sqrt{c_1}}{c_1^2} - \frac{B}{c_1} t \right) e^{-\sqrt{c_1}t} + \frac{2B\sqrt{c_1}}{c_1^2} + e_0 - \frac{B}{c_1} t \quad (15)$$

$$e_2(t) = \frac{B}{c_1} (1 + \sqrt{c_1}t) e^{-\sqrt{c_1}t} - \frac{B}{c_1} \quad (16)$$

$$e_3(t) = -Bte^{-\sqrt{c_1}t} \quad (17)$$

Przeanalizujemy teraz zachowanie obiektu po zatrzymaniu płaszczyzny przełączeń, a więc wtedy, gdy pozostaje ona nieruchoma i zawiera początek układu współrzędnych przestrzeni fazowej. Ponieważ w chwili t_f płaszczyzna przełączeń przechodzi przez początek układu, więc prawdziwa jest zależność

$$A + Bt_f = 0 \quad (18)$$

Z zależności (14) i (18) otrzymujemy

$$t_f = \frac{e_0 c_1}{B} \quad (19)$$

Po zatrzymaniu płaszczyzna przełączeń opisana jest zależnością (6), czyli równaniem jednorodnym (12). Warunki początkowe, które pozwolą rozwiązać to równanie, można wyznaczyć podstawiając równanie (19) do zależności (15), (16) i (17). Rozwiązując równanie (12) z tak wyznaczonymi warunkami początkowymi i wprowadzając oznaczenie

$$k = \frac{c_1 \sqrt{c_1} e_0}{B} \quad (20)$$

otrzymujemy

$$e_1(t) = e^{-\sqrt{c_1}t} \left[-\frac{2B\sqrt{c_1}}{c_1^2} + \frac{2B\sqrt{c_1}}{c_1^2} e^k - e_0 e^k + \right. \quad (21)$$

$$\left. + \left(-\frac{B}{c_1} + \frac{B}{c_1} e^k \right) t \right]$$

$$e_2(t) = e^{-\sqrt{c_1}t} \left[\frac{B}{c_1} - \frac{B}{c_1} e^k - e_0 e^k \sqrt{c_1} + \right. \quad (22)$$

$$\left. - \left(-\frac{B}{\sqrt{c_1}} + \frac{B}{\sqrt{c_1}} e^k \right) t \right]$$

$$e_3(t) = e^{-\sqrt{c_1}t} \left[-e_0 e^k c_1 + B(e^k - 1) \right] \quad (23)$$

Powyższe trzy równania opisują przebieg uchybu i jego pochodnych dla $t \geq t_f$. Zauważmy, że parametr k opisany równaniem (20) zawsze ma dodatnią wartość.

3. WYBÓR PARAMETRÓW PŁASZCZYZNY PRZEŁĄCZEŃ

W dalszej części referatu zostanie zaproponowany sposób wyboru parametrów płaszczyzny przełączeń. Rozważać będziemy kryterium, określone wzorem (4). Ponieważ przebieg uchybu w rozważanym układzie jest aperiodyczny, więc kryterium (4) możemy zapisać w równoważnej postaci

$$J = \left| \int_0^{\infty} e_1(t) dt \right| + q \left\{ \frac{\max\{|u(t)|\}}{M} \right\}^n \quad (24)$$

Podstawiając zależności (15) i (21) do (24) i obliczając odpowiednie całki otrzymujemy

$$J = \frac{2|e_0|}{\sqrt{c_1}} + \frac{e_0^2 c_1}{2|B|} + q \left\{ \frac{\max\{|u(t)|\}}{M} \right\}^n \quad (25)$$

W celu wyznaczenia parametrów B i c_1 , kryterium (25) będzie minimalizowane. Niech u_{\max} oznacza krytyczną wartość sygnału wejściowego $u(t)$, która nie powinna być nadmiernie przekraczana. Załóżmy, że u_{\max} , spełnia następujący warunek

$$u_{\max} > \frac{|\dot{x}_{3d} - f(x, t)| + \gamma}{|b(x, t)|} \quad (26)$$

Wówczas kryterium (25) można zapisać następująco

$$J = \frac{2|e_0|}{\sqrt{c_1}} + \frac{e_0^2 c_1}{2|B|} + q \left\{ \frac{\max\{|u(t)|\}}{u_{\max}} \right\}^n \quad (27)$$

Zauważmy, że spełnienie warunku (26) pociąga za sobą istnienie takiej dodatniej stałej

$$U = u_{\max} - \max \left[\frac{|\dot{x}_{3d} - f(x, t)| + \gamma}{|b(x, t)|} \right] \quad (28)$$

że warunek $|u(t)| \leq u_{\max}$ jest spełniony, jeśli spełniona jest następująca nierówność

$$c_{2opt} = 2 \left\{ \frac{2}{|e_0|} \left[\frac{|e_0|^{4/3} (\delta U)^n}{2^{1/3} q n (e^{-2} + 1)^n} \right]^{3n+1} \right\}^{1/3} \quad (45)$$

$$A_{opt} = -e_0 \left\{ \frac{2}{|e_0|} \left[\frac{|e_0|^{4/3} (\delta U)^n}{2^{1/3} q n (e^{-2} + 1)^n} \right]^{3n+1} \right\}^{2/3} \quad (46)$$

Płaszczyzna przełączeń opisana powyższymi parametrami zatrzymuje się w chwili

$$t_{f opt} = 2^{2/3} |e_0|^{1/3} \left[\frac{2^{1/3} q n (e^{-2} + 1)^n}{|e_0|^{4/3} (\delta U)^n} \right]^{3n+1} \quad (47)$$

Rozważmy teraz sytuację przy $n \rightarrow \infty$. Wówczas wzory (43), (44), (45), (46) i (47) przyjmują postać

$$B_{opt} = \frac{\delta U}{(e^{-2} + 1)} \text{sgn}(e_0) \quad (48)$$

$$c_{1opt} = \left(\frac{2\delta U}{|e_0|(e^{-2} + 1)} \right)^{2/3} \quad (49)$$

$$c_{2opt} = 2 \left(\frac{2\delta U}{|e_0|(e^{-2} + 1)} \right)^{1/3} \quad (50)$$

$$A_{opt} = -e_0 \left[2\delta U / |e_0|(e^{-2} + 1) \right]^{2/3} \quad (51)$$

$$t_f = 2^{2/3} \left[|e_0|(e^{-2} + 1) / (\delta U) \right]^{1/3} \quad (52)$$

Zauważmy, że powyższe parametry płaszczyzny przełączeń są identyczne z tymi, które otrzymuje się w przypadku uwzględnienia klasycznego ograniczenia sygnału sterującego wyrażonego nierównością [3].

4. PRZYKŁAD SYMULACYJNY

Rozważamy następujący układ trzeciego rzędu

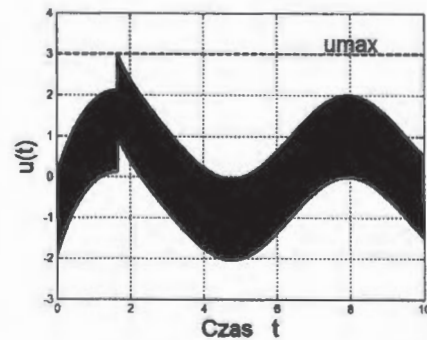
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \Delta f(x, t) + d(t) + u \end{aligned} \quad (53)$$

gdzie $\Delta f(x, t) = 0,39 \sin(x_1 x_2 + x_3 t^{1/2})$ i $d(t) = 0,6 \sin(10t)$. Uwzględniając podane zakłócenia i niedokładności modelu wybrano stałą $\gamma = 1$. Warunki początkowe układu wynoszą $x_{10} = 1,9964$; $x_{20} = 0,0851$ i $x_{30} = -0,9964$. Zadana trajektoria ma postać $x_{1d} = -\sin(t - 1,656)$. Rozważymy trzy sytuacje: $n \rightarrow \infty$, $q = 10$ i $n = 10$ oraz $q = 0,1$ i $n = 3$. Gdy $n \rightarrow \infty$ otrzymujemy następujące parametry płaszczyzny przełączeń $c_1 \approx 1,459$, $c_2 \approx 2,415$, $B = 0,881$, $A \approx -1,4586$. Dla tych parametrów płaszczyzna zatrzymuje się w chwili $t_f \approx 1,656$.

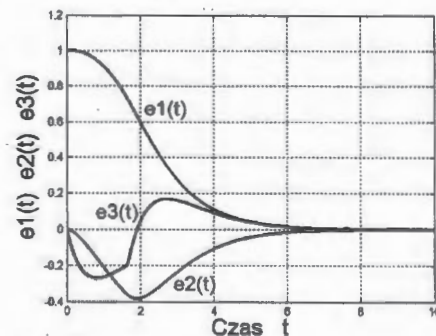
Rys. 1 pokazuje, że dla tych parametrów spełnione jest ograniczenie sygnału wejściowego w postaci nierówności $|u| \leq 3$. Następnie rozważamy przypadek $q = 10$ i $n = 10$. Wówczas $c_1 \approx 1,071$, $c_2 \approx 2,069$, $B \approx 0,554$, $A \approx -1,071$ i $t_f \approx 1,933$. W trzecim przypadku $q = 0,1$ i $n = 3$ mamy $c_1 \approx 1,787$, $c_2 \approx 2,673$, $B \approx 1,194$, $A \approx -1,787$ i $t_f \approx 1,497$. Rysunki 3 i 5 pokazują, jaki wpływ ma wybór stałych q i n na wartość sygnału sterującego. Wzrost q i n powoduje zmniejszenie maksymalnej wartości sygnału sterującego, natomiast zmniejszenie tych stałych skutkuje przekroczeniem wartości krytycznej sygnału sterującego $u = 3$. Ponadto na rys. 2, 4 i 6 widać, że we wszystkich trzech przypadkach uchyb sterowania zbiega monotonicznie do zera. Układ jest także niewrażliwy na zakłócenie zewnętrzne $d(t)$ i niedokładności określenia modelu $\Delta f(x, t)$ od samego początku trwania procesu regulacji.

5. PODSUMOWANIE

W referacie zaproponowano nową metodę ślizgowego sterowania obiektem dynamicznym trzeciego rzędu. Metoda ta wykorzystuje niestacjonarną płaszczyznę przełączeń, poruszającą się ze stałym nachyleniem i stałą prędkością do początku przestrzeni stanu. Parametry tej płaszczyzny wybrane są w taki sposób, aby kryterium stanowiące sumę całki z modułu uchybu regulacji i pewnej funkcji kary za przekroczenie krytycznej wartości sygnału sterującego miało jak najmniejszą wartość. Zaproponowane sterowanie zapewnia monotoniczną zbieżność uchybu regulacji do zera oraz niewrażliwość obiektu na niedokładności modelu i zakłócenia zewnętrzne już od samego początku procesu regulacji.



Rys. 1. Sygnał sterujący ($n \rightarrow \infty$).



Rys. 2. Uchyb i jego pochodne ($n \rightarrow \infty$).

$$|\dot{\epsilon}_3(t)| \leq |b(x,t)|U \quad (29)$$

Ponadto nierówność (29) jest zawsze prawdziwa, jeśli spełniony jest warunek

$$|\dot{\epsilon}_3(t)| \leq \delta U \quad (30)$$

Wówczas kryterium (27) możemy zapisać jako

$$J = \frac{2|e_0|}{\sqrt{c_1}} + \frac{e_0^2 c_1}{2|B|} + q \left\{ \frac{\max \|\dot{\epsilon}_3(t)\|}{\delta U} \right\}^n \quad (31)$$

W dalszej części referatu określimy największą wartość $|\dot{\epsilon}_3(t)|$. Dla $t \leq t_f$ największą wartością tego wyrażenia jest $|B|$. Natomiast dla $t \geq t_f$ przebieg uchybu, opisany równaniem (21), po trzykrotnym zróżniczkowaniu ma postać

$$\dot{\epsilon}_3(t) = -\sqrt{c_1} e^{-\sqrt{c_1} t} [-e_0 e^k c_1 + B(e^k - 1)t] + B(e^k - 1) e^{-\sqrt{c_1} t} \quad (32)$$

Dla czasu t_f otrzymujemy

$$\dot{\epsilon}_3(t_f) = c_1 \sqrt{c_1} e_0 e^{-k} + B(e^k - 1) e^{-k} = B[e^{-k}(k-1) + 1] \quad (33)$$

Moduł powyższego wyrażenia jest największą wartością sygnału $|\dot{\epsilon}_3(t)|$.

W dalszych rozważaniach będziemy analizować kryterium J , jako funkcję zmiennych k i B zamiast jak do tej pory, jako funkcję zmiennych c_1 i B . Wyznaczając c_1 z równania (20) otrzymamy

$$c_1 = (Bk/e_0)^{2/3} \quad (34)$$

Podstawiając równanie (34) do (31), kryterium J można przedstawić następująco

$$J = \frac{|e_0|^{4/3}}{|B|^{1/3}} \left(2k^{-1/3} + \frac{1}{2} k^{2/3} \right) + q \left\{ \frac{\max \|\dot{\epsilon}_3(t)\|}{\delta U} \right\}^n \quad (35)$$

Analizując dokładniej zadanie minimalizacji powyższego kryterium musimy rozważyć dwa przypadki: pierwszy, kiedy $k < 1$ i drugi dla $k \geq 1$. W pierwszym przypadku wzór (35) przyjmuje postać

$$J = \frac{|e_0|^{4/3}}{|B|^{1/3}} \left(2k^{-1/3} + \frac{1}{2} k^{2/3} \right) + q \left(\frac{|B|}{\delta U} \right)^n \quad (36)$$

Minimalizując to kryterium jako funkcję dwóch zmiennych dochodzimy do wniosku, że najmniejszą wartość przyjmuje ono, gdy $k \rightarrow 1$. Wówczas

$$|B_1| = \left[\frac{5|e_0|^{4/3} (\delta U)^n}{6qn} \right]^{3/3n+1} \quad (37)$$

W tym przypadku kryterium (36) ma wartość

$$J_1 = \frac{5|e_0|^{4/3} (6qn)^{1/3n+1}}{2 \left[5|e_0|^{4/3} (\delta U)^n \right]^{1/3n+1}} + \frac{q}{(\delta U)^n} \left[\frac{5|e_0|^{4/3} (\delta U)^n}{6qn} \right]^{3n/3n+1} \quad (38)$$

W drugim przypadku, kiedy $k \geq 1$, należy zminimalizować kryterium postaci

$$J_2 = \frac{|e_0|^{4/3}}{|B|^{1/3}} \left(2k^{-1/3} + \frac{1}{2} k^{2/3} \right) + q \left\{ \frac{|B| [e^{-k}(k-1) + 1]}{\delta U} \right\}^n \quad (39)$$

Ponownie jest to funkcja dwóch zmiennych. Osiąga ona swoje minimum w punkcie

$$k = 2 \quad (40)$$

$$B_2 = \text{sgn}(e_0) \left[\frac{|e_0|^{4/3} (\delta U)^n}{2^{1/3} qn (e^{-2} + 1)^n} \right]^{3/3n+1} \quad (41)$$

Wartość tego minimum wyrażona jest następująco

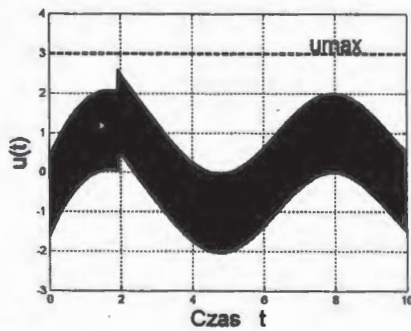
$$J_2 = \frac{3|e_0|^{4/3} \left[2^{1/3} qn (e^{-2} + 1)^n \right]^{1/3n+1}}{2^{1/3} \left[|e_0|^{4/3} (\delta U)^n \right]^{1/3n+1}} + \frac{q (e^{-2} + 1)^n \left[|e_0|^{4/3} (\delta U)^n \right]^{3n/3n+1}}{(\delta U)^n \left[2^{1/3} qn (e^{-2} + 1)^n \right]} \quad (42)$$

Zauważmy, że $J_1 > J_2$, co prowadzi do wniosku, że J_2 jest najmniejszą wartością rozważanego kryterium w obu przypadkach (tzn. zarówno dla $k < 1$ jak i dla $k \geq 1$). Wynika stąd, że parametry k i B_2 opisane równaniami (40) i (41) określają optymalny (w sensie kryterium (4)) wybór płaszczyzny przełączeń

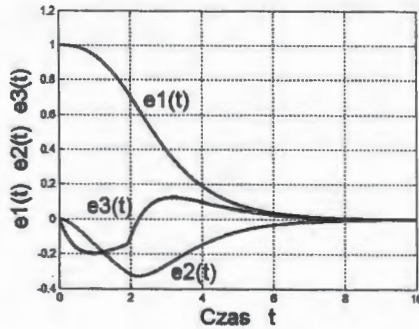
$$k_{opt} = 2; \quad B_{opt} = \text{sgn}(e_0) \left[\frac{|e_0|^{4/3} (\delta U)^n}{2^{1/3} qn (e^{-2} + 1)^n} \right]^{3/3n+1} \quad (43)$$

Pozostałe parametry tej płaszczyzny można wyznaczyć korzystając ze wzorów (34), (13) i (14)

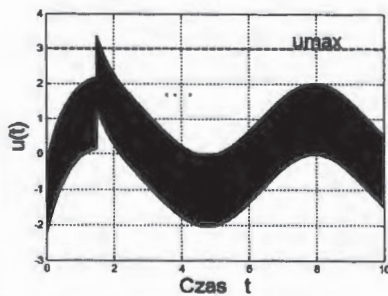
$$c_{1opt} = \left\{ \frac{2}{|e_0|} \left[\frac{|e_0|^{4/3} (\delta U)^n}{2^{1/3} qn (e^{-2} + 1)^n} \right]^{3/3n+1} \right\}^{2/3} \quad (44)$$



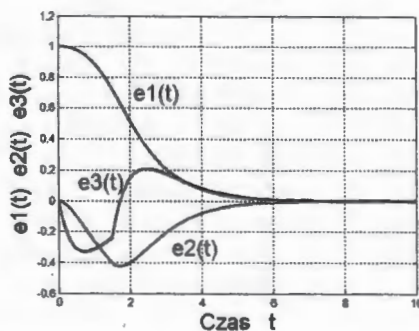
Rys.3. Sygnał sterujący ($n = 10; q = 10$).



Rys. 4. Uchyb i jego pochodne ($n = 10; q = 10$).



Rys. 5. Sygnał sterujący ($n = 3; q = 0,1$).



Rys. 6. Uchyb i jego pochodne ($n = 3; q = 0,1$).

Pokazano, że w przypadku granicznym przy $n \rightarrow \infty$ zaproponowana metoda gwarantuje spełnienie klasycznego ograniczenia sygnału sterującego wyrażonego nierównością.

SLIDING MODE CONTROL OF THE THIRD ORDER SYSTEM WITH THE ELASTIC INPUT CONSTRAINT

Abstract: In this paper a new sliding mode control algorithm for the third order nonlinear, time-varying, uncertain system subject to unknown disturbance is proposed. Since the conventional input constraints expressed by inequalities are often impractical, in this paper we consider the situation when the input signal is subject to elastic constraint. We assume that

the threshold value of the system input signal is known and exceeding this value is undesirable, however possible if justified by essential improvement of the system performance. The proposed algorithm employs a time-varying switching plane. At the initial time the plane passes through the point determined by the system initial conditions in the error state space and afterwards it moves with a constant velocity to the origin of the space. The plane is designed in such a way that fast error convergence is achieved using limited control input. By this means, the reaching phase is eliminated, insensitivity of the system to external disturbance is ensured from the very beginning of the control action and fast, monotonic error convergence to zero is achieved. Moreover, it is demonstrated that the conventional input constraint expressed by an inequality is a limit case of the elastic constraint considered in the paper.

Literatura

- [1] Bartoszewicz A. (1995) A comment on 'A time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems'. *Automatica*, 31, 12, 1893-1895.
- [2] Bartoszewicz A. (1996) Time-varying sliding modes for second-order systems, *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 143, 5, 455-462.
- [3] Bartoszewicz A., Nowacka A. (2004) A time-varying switching plane design for variable structure control of the third order system with input constraint, *Archives of Control Sciences*, 14, 2, 201-213.
- [4] Choi S.B., Cheong C.C., Park D.W. (1993) Moving switching surfaces for robust control of second-order variable structure systems. *International Journal of Control*, 58, 1, 229-245.
- [5] Choi S.B., Park D.W. (1994) Moving sliding surfaces for fast tracking control of second-order dynamic systems. *Transactions of the ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 116, 1, 154-158.
- [6] Choi S.B., Park D.W. and Jayasuriya S. (1994) A time-varying sliding surface for fast and robust tracking control of second-order uncertain systems. *Automatica*, 30, 7, 899-904.
- [7] DeCarlo, R.S. Žak S. and Mathews G. (1988) Variable structure control of nonlinear multivariable systems: a tutorial. *Proceedings of IEEE*, 76, 3, 212-232.
- [8] Hung J.Y., Gao W. and Hung J.C. (1993) Variable structure control: a survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 40, 1, 2-22.
- [9] Slotine J.J. and Li W. (1991) *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International Editions.
- [10] Tokat S., Eksin I., Güzelkaya M. (2002) A new design method for sliding mode controllers using a linear time-varying sliding surface. *IMEchE*, 216, 455-466.
- [11] Utkin V. (1977) Variable structure systems with sliding modes. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22, 2, 212-222.



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2