

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

**STEROWANIE OPTYMALNE
I ADAPTACYJNE**

OPTYMALNY SYGNAŁ TYPU BANG-BANG DO ESTYMACJI PARAMETRU W OBIEKCIE PIERWSZEGO RZĘDU

Zbigniew NAHORSKI*, Jarosław STAŃCZAK**

Instytut Badań Systemowych PAN, Newelska 6, 01-447 Warszawa

* e-mail: Zbigniew.Nahorski@ibspan.waw.pl

** e-mail: Jaroslaw.Stanczak@ibspan.waw.pl

Streszczenie: Rozważono wyznaczanie optymalnego sterowania minimalizującego błąd estymacji parametru w równaniu pierwszego rzędu z jednostkowym wzmocnieniem statycznym. Sterowania są odcinkami stałe, z obserwacjami w równoodległych chwilach czasu. Po sprowadzeniu do równania różnicowego pierwszego rzędu, wyprowadza się wzór dla jego (jednowymiarowej) macierzy informacyjnej oraz formuluje się zadanie jej maksymalizacji w postaci liniowo-kwadratowego zadania sterowania optymalnego z czasem dyskretnym. Następnie sprowadza się je do zadania optymalizacji statycznej. Rozwiązanie optymalne znalezione numerycznie ma postać fali prostokątnej. Podano wzór do wyznaczania optymalnego okresu fali prostokątnej, zależnego od stosunku kroku próbkowania do stałej czasowej obiektu.

Słowa kluczowe: obiekt pierwszego rzędu, planowanie eksperymentu, sygnały odcinkami stałe.

1. WPROWADZENIE

Estymując parametry modelu zależy nam na uzyskaniu jak największej dokładności. Można to uzyskać przez zwiększenie dokładności pomiarów albo ich liczby, ale też przez odpowiednie zaplanowanie eksperymentu przed identyfikacją. Planowanie eksperymentu dla identyfikacji obiektów statycznych ma długą tradycję. Już w latach 50-tych pojawiły się książki poświęcone tej tematyce. W planowaniu eksperymentu dla identyfikacji obiektu dynamicznego artykuł [6] rozpoczął jeden z wątków - planowanie kształtu sygnału wejściowego. W trakcie dalszego rozwoju doszedł do niego drugi wątek - planowanie chwil próbkowania ([1]). Dodatkowo rozważano także lokalizację przestrzenną punktów pomiarowych oraz wybór filtrów analogowych przetwarzających sygnały przed próbkowaniem ([5, 7, 3, 4, 17]).

W tej pracy zajmiemy się planowaniem eksperymentu dla modelu pierwszego rzędu o jednostkowym wzmocnieniu statycznym, a więc opisanym równaniem

$$T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u(t - t_d), \quad x(t_0) = 0 \quad (1)$$

gdzie $u(t)$ jest sygnałem wejściowym obiektu, $x(t)$ jego sygnałem wyjściowym, t_d opóźnieniem wejścia, a T poszukiwanym parametrem – stałą czasową obiektu. Rów-

nanie to może na przykład opisywać zbiornik ze stałym przepływem: wtedy t jest czasem, a T stosunkiem objętości zbiornika do przepływu. Może to też być model zbiornika ze zmiennym przepływem: wtedy t jest przepływem, a T objętością zbiornika [10, 2]. Załóżmy, że obserwacje sygnału $x(t)$ oraz zmiany wejść $u(t)$ odbywają się tylko w dyskretnych, równooddalonych wartościach zmiennej t . Między tymi wartościami sygnał wejściowy $u(t)$ jest stały i ograniczony. Zadanie to było rozpatrywane w [10], a później skrótowo przedstawione w [15]. W tej pracy podajemy pełne wyprowadzenie wyników uzupełnione o nowe rezultaty. Otrzymane rozwiązanie w postaci fali prostokątnej różni się od znanych z literatury. Przyczyną tego jest uwzględnienie zależności między parametrami modelu dyskretnego, pomijane dotąd w literaturze. Rozwiązanie to jest proste, na tyle że nie wymaga powtarzania optymalizacji dla każdego przypadku, oraz intuicyjnie zrozumiałe. Do tego fala prostokątna jest w rozpatrywanej klasie sterowań odpowiednikiem sterowania sinusoidalnego, które jest znanym optymalnym sterowaniem w klasie sterowań o ograniczonej energii.

2. POSTAWIENIE ZADANIA

W planowaniu eksperymentu minimalizuje się pewną funkcję skalaryzującą macierz $M^{-1}(p)$, gdzie $M(p)$ jest macierzą informacyjną Fishera zdefiniowaną następująco

$$M(p) = E_{Y|p} \left(\left(\frac{\partial \ln f(Y|p)}{\partial \hat{p}} \right) \left(\frac{\partial \ln f(Y|p)}{\partial \hat{p}} \right)^T \right) \quad (2)$$

przy czym $Y = \{y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)\}$ jest wielowymiarową zmienną losową zależną od zaplanowanych chwil pomiarowych, N jest planowaną liczbą pomiarów w eksperymencie, $f(Y|p)$ jest warunkową gęstością prawdopodobieństwa Y przy zadanym wektorze estymowanych parametrów p , a $E_{Y|p}$ jest warunkową wartością oczekiwaną. Pochodna skalarnej funkcji f względem wektora jest rozumiana jako wektor kolumnowy pochodnych względem kolejnych elementów wektora.

Ze względu na skalaryzację macierzy $M^{-1}(p)$ rozróżnia się kilka rodzajów planowania eksperymentu, ozna-

czanych tradycyjnie literami. Na przykład optymalizacja D polega na minimalizacji wyznacznika macierzy $M^{-1}(p)$. Przy estymacji jednego parametru większość rodzajów planowania eksperymentu pokrywa się. Sygnałem optymalnym przy D-optymalizacji, bez ograniczania kształtu, jest multisinusoida o najwyższej $l(l+1)/2$ częstotliwościach składowych, gdzie l jest wymiarowością wektora parametrów ([4]). W tej pracy ograniczymy natomiast zbiór dopuszczalnych sterowań do sygnałów odcinkami stałych. Obserwacje sygnału wyjściowego odbywają się ze stałym krokiem czasowym, to znaczy zachodzi $t_n - t_{n-1} = \Delta = \text{const.}$, $n = 1, 2, \dots, N$, przy czym zmiany sygnału sterującego odbywają się tylko w chwilach obserwacji, to znaczy

$$u(t) = u_n = \text{const.} \quad \text{dla} \quad t_n \leq t < t_{n+1} \quad (3)$$

Dodatkowo opóźnienie t_d jest wielokrotnością Δ ¹ a sterowania są ograniczone, to znaczy

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (4)$$

oraz

$$u(t) = 0 \quad \text{dla} \quad t < t_0 \quad (5)$$

3. MACIERZ INFORMACYJNA

Rozwiązanie równanie (1) ma postać

$$x(t) = Ce^{-\frac{t}{T}} + \frac{1}{T} \int_{t_0}^{tN} e^{-\frac{t-\tau}{T}} u(\tau - t_d) d\tau$$

gdzie $C = x(t_0) = 0$ jest warunkiem początkowym. Sterowanie $u(t)$ między punktami obserwacji jest stałe, więc powyższy wzór można przekształcić następująco

$$\begin{aligned} x(t_n) &= Ce^{-\frac{t_n - t_{n-1}}{T}} e^{-\frac{t_{n-1}}{T}} + \\ &+ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_n} e^{-\frac{t_n - t_{n-1}}{T}} e^{-\frac{t_{n-1} - \tau}{T}} u(\tau - t_d) d\tau = \\ &= e^{-\frac{t_n - t_{n-1}}{T}} x(t_{n-1}) + (1 - e^{-\frac{t_n - t_{n-1}}{T}}) u(t_{n-k}) \end{aligned}$$

gdzie $k = t_d/\Delta + 1$ ², co w rezultacie można zapisać w postaci równania różnicowego

$$x_n = ax_{n-1} + bu_{n-k}$$

przy oznaczeniach $x_n = x(t_n)$, $x_{n-1} = x(t_{n-1})$, $u_{n-k} = u(t_{n-k})$, $a = e^{-\frac{\Delta}{T}}$, $b = 1 - e^{-\frac{\Delta}{T}} = 1 - a$. Ze względu na założenie (5) istotne są tylko punkty obserwacji $x(t)$ dla $t_k, t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_N$, gdyż pozostałe wartości $x(t_i)$ dla $i < k$ są równe 0. W ten sposób właściwie mamy $N - k + 1$ punktów obserwacji.

Przyjmijmy, że wyjście obiektu jest mierzone z błędem

$$y_n = x_n + \varepsilon_n$$

skąd końcowe równanie ma postać

$$y_n = ay_{n-1} + bu_{n-k} + \varepsilon_n - a\varepsilon_{n-1}.$$

Jeżeli wprowadzimy operator opóźnienia z^{-1} , taki że $z^{-1}y_n = y_{n-1}$ i podobnie dla innych zmiennych, to równanie to można też zapisać w postaci operatorowej

$$y_n = \frac{1-a}{1-az^{-1}}u_{n-k} + \varepsilon_n.$$

Warunkowa gęstość prawdopodobieństwa $f(Y|p)$, gdzie p jest wektorem estymowanych parametrów, jest (przy zerowych warunkach początkowych) równa gęstości $f(E|p)$, gdzie $E = \{e_k, e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_N\}$, zaś e_n są resztami modelu. Jeżeli w modelu zamiast prawdziwej wartości parametru a przyjmijmy zmienny parametr α , to reszta będzie wynosiła

$$e_n = y_n - \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}}u_{n-k}$$

Oczywiście jeżeli $\alpha = a$, to $e_n = \varepsilon_n$. Zakładając, że $\{\varepsilon_n\}$ jest ciągiem niezależnych liczb losowych o jednokowym rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$, przy zerowych warunkach początkowych otrzymamy (patrz [8])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f(Y|\alpha)}{\partial \alpha} &= \\ &= -\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \alpha} \left(N - k + 1 - \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=k}^N e_n^2 \right) - \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=k}^N e_n \frac{\partial e_n}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_e^2 = E(e_n^2)$ jest wariancją błędów modelu oraz

$$\frac{\partial e_n}{\partial \alpha} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 2\alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2}} u_{n-k} \quad (6)$$

Macierz informacyjna (jednowymiarowa) (2) jest równa

$$\begin{aligned} M(a) = E_{Y|\alpha} \left(\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2} \frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \alpha} (N - k + 1 - \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=k}^N e_n^2) - \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=k}^N e_n \frac{\partial e_n}{\partial \alpha} \right]^2 \right) \end{aligned}$$

Zachodzi jednak $E_{Y|\alpha}(e_n) = E(\varepsilon_n) = 0$, $E_{Y|\alpha}(e_n e_m) = E(\varepsilon_n \varepsilon_m) = \sigma^2$ gdy $n = m$ i $E_{Y|\alpha}(e_n e_m) = 0$ gdy $n \neq m$. Z kolei $\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \alpha}$ oraz $\frac{\partial e_n}{\partial \alpha}$ nie są wartościami losowymi, gdyż pierwsze wyrażenie jest już uśrednione, a w drugim pochodna wartości losowej y_n jest równa zero (u_n nie jest losowe). Biorąc pod uwagę, że dla rozkładu normalnego zachodzi $E(\varepsilon_n^3) = 0$ i $E(\varepsilon_n^4) = 3\sigma^4$, widać, że podwojony iloczyn w rozwinięciu kwadratu w wyrażeniu powyżej jest równy zero, gdyż występują w nim tylko pierwsze i trzecie potęgi e_n . W kwadracie drugiego wyrażenia niezerowe będą tylko te składniki, w których występuje e_n^2 . Natomiast wartość oczekiwaną kwadratu losowego wyrażenia w pierwszym składniku oznaczmy przez

$$E_{Y|\alpha} (N - k + 1 - \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=k}^N e_n^2)^2 = B$$

¹To założenie znacznie upraszcza zapis i analizę. Ze względu na całkowitoliczbowy charakter rozwiązańi odstępstwo od tego założenia może doprowadzić do (raczej lokalnej) zmiany rozwiązania.

²Taka definicja k powoduje, że $x(t_n)$ zależy od u_{n-k} . Oznaczenie $k = t_d/\Delta$ spowodowałoby, że $x(t_n)$ zależałoby od u_{n-k+1} .

Jak wspomniano wcześniej, $\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \alpha}$ oraz $\frac{\partial e_n}{\partial \alpha}$ nie są wartościami losowymi, trzeba w nich więc tylko zastąpić α przez a , co zapiszemy w uproszczony sposób jako $\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial a}$ oraz $\frac{\partial e_n}{\partial a}$. W rezultacie otrzymujemy

$$M(a) = \frac{B}{2\sigma^4} \left(\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial a} \right)^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=k}^N \left(\frac{\partial e_n}{\partial a} \right)^2$$

Jednak $\sigma_e^2 = E(e_n^2) = E(y_n - \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} u_{n-k})^2$, więc

$$\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial \alpha} = -2E \left[\left(y_n - \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} u_{n-k} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} u_{n-k} \right) \right]$$

i dalej

$$\frac{\partial \sigma_e^2}{\partial a} = -2E \left[\varepsilon_n \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1-a}{1-az^{-1}} u_{n-k} \right) \right] = 0$$

W rezultacie

$$M(a) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=k}^N \left(\frac{\partial e_n}{\partial a} \right)^2$$

Wprowadzając oznaczenia $v = \frac{\partial e_n}{\partial a}$ oraz $F(a) = M(a)\sigma^2$ doprowadzamy do zadania maksymalizacji względem u_{n-k} , $n = k, k+1, k+2, \dots, N$

$$\max F(a) = \max \sum_{n=k}^N v_n^2 \quad (7)$$

przy ograniczeniu (6) z $\alpha = a$, czyli

$$v_n = 2av_{n-1} - a^2 v_{n-2} + u_{n-k} - u_{n-k-1} \quad (8)$$

oraz ograniczeniach na sterowania przeniesionych z (4)

$$u_{\min} \leq u_n \leq u_{\max}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-k \quad (9)$$

Jest to liniowo-kwadratowe zadanie sterowania optymalnego z czasem dyskretnym. W odróżnieniu od typowych zadań tego typu, funkcja jakości w (7) jest wypukła.

4. KSZTAŁT SYGNAŁU STERUJĄCEGO

Równanie (8) można sprowadzić do równania wektorowego wprowadzając zmienne stanu $\begin{bmatrix} x_n^1 & x_n^2 \end{bmatrix} = x_n$ zdefiniowane na przykład następująco

$$x_n^1 = v_{n-1} + a^{-2} u_{n-k}$$

$$x_n^2 = v_n = -a^2 (v_{n-2} - a^{-2} u_{n-k-1}) + 2av_{n-1} + u_{n-k}$$

otrzymując

$$x_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2a \end{bmatrix} x_{n-1} + \begin{bmatrix} a^{-2} \\ 1 \end{bmatrix} u_{n-k}$$

lub przy oczywistych oznaczeniach

$$x_n = Fx_{n-1} + Gu_{n-k}$$

Funkcja celu przyjmie, przy $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, postać

$$M(a) = \sum_{n=k}^N x_n^T A x_n$$

Zauważmy, że optymalne sterowania muszą znajdować się na ograniczeniach. W kroku $N-k$ podejmuje się decyzję o sterowaniu u_{N-k} wpływającym na x_N . Wybór tego sterowania nie wpływa na żadną wcześniejszą wartość stanu. Należy więc zmaksymalizować przez wybór u_{N-k} wartość $x_N^T A x_N$, czyli

$$\begin{aligned} & (Fx_{N-1} + Gu_{N-k})^T A (Fx_{N-1} + Gu_{N-k}) = \\ & = x_{N-1}^T F^T A F x_{N-1} + 2G^T A F x_{N-1} u_{N-k} + G^T A G u_{N-k}^2 \end{aligned}$$

Współczynnik stojący przy u_{N-k}^2 jest równy $G^T A G = 1$. Wyrażenie powyżej jest więc funkcją kwadratową z dodatnim współczynnikiem przy potęgze kwadratowej i wobec tego wartość ją maksymalizująca u_{N-k}^0 znajduje się na jednym z ograniczeń

$$u_{N-k}^0 = \begin{cases} u_{\max} & \text{gdy } 2G^T A F x_{N-1} \leq \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} \\ u_{\min} & \text{w odwrotnym przypadku} \end{cases}$$

Rozumując podobnie dla $n = N-k-1$ i dla kolejnych kroków wstecz widzimy, że wszystkie optymalne sterowania muszą znajdować się na ograniczeniach.

Można też sprowadzić wyznaczenie rozwiązania do zadania (statycznej) optymalizacji nieliniowej rozwiązując równanie różnicowe (8). Łatwo sprawdzić przez podstawienie, że rozwiązanie to ma dla $n \geq k$ postać

$$v_n = a^n \sum_{l=k}^n a^{-l} [1 + (n-l)(1-a^{-1})] u_{l-k} \quad (10)$$

Wstawiając (10) do (7) sprowadzamy zadanie do maksymalizacji względem u_0, \dots, u_{N-k} wskaźnika

$$J_N = \sum_{n=k}^N \left(a^n \sum_{l=k}^n a^{-l} [1 + (n-l)(1-a^{-1})] u_{l-k} \right)^2 \quad (11)$$

przy ograniczeniach (9). Ponieważ rozwiązanie znajduje się na ograniczeniach, powyższe zadanie można teoretycznie rozwiązać sprawdzając wszystkie 2^{N-k+1} możliwości. Jednak już dla wartości $N-k+1$ rzędu kilkunastu czasy obliczeń stają się zbyt długie. Dlatego do tego celu użyto algorytmu ewolucyjnego. Założono, że $u_{\min} = 0$, a $u_{\max} = 1$, nie ograniczając w żaden sposób ogólności rozważań. Opis algorytmu przedstawiono w dodatku C. Przeprowadzone obliczenia wskazują, że optymalny sygnał sterujący ma kształt fali prostokątnej składającej się naprzemianlegle z okresu samych jedynek i samych zer. Długość fali zależy od stosunku Δ/T . Im jest on mniejszy, tym większa jest długość fali.

W celu wyznaczenia długości fali oznaczmy przez m liczbę jedynek w fali. Wartość m dla $m \geq 2$ wyznaczmy jako najmniejszą wartość spełniającą warunek

$$\begin{aligned} P(a) = & \sum_{n=k}^{k+m-1} \left(\sum_{l=k}^n a^{n-l} [1 + (n-l)(1-a^{-1})] \right)^2 - \\ & - \sum_{n=k}^{k+m-2} \left(\sum_{l=k}^n a^{n-l} [1 + (n-l)(1-a^{-1})] \right)^2 - \end{aligned}$$

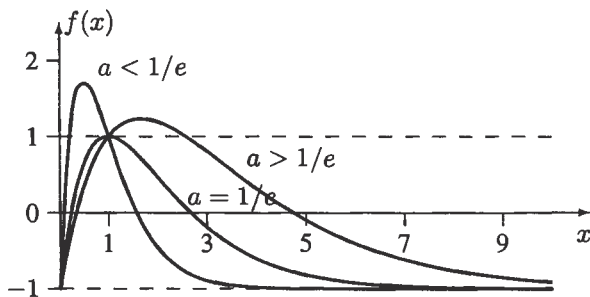
$$\begin{aligned}
& - \left(\sum_{l=k}^{k+m-2} a^{k+m-l-1} [1 + (k+m-l-1)(1-a^{-1})] \right)^2 = \\
& = \left(\sum_{l=k}^{k+m-1} a^{m-l} [1 + (k+m-l-1)(1-a^{-1})] \right)^2 - \\
& - \left(\sum_{l=k}^{k+m-2} a^{k+m-l-1} [1 + (k+m-l-1)(1-a^{-1})] \right)^2 > 0
\end{aligned}$$

Szukamy więc najmniejszego m , dla którego wartość wskaźnika jakości przy wszystkich sterowaniach jednostkowych jest większa od wartości wskaźnika jakości przy $m-1$ sterowaniach jednostkowych i ostatnim sterowaniu zerowym. Stąd stosowalność wzoru od $m = 2$.

Korzystając z wyprowadzonego w dodatku B wzoru na sumę współczynników w wyrażeniach tego typu, jakie występują powyżej pod sumami, otrzymujemy

$$P(a) = (ma^{m-1})^2 - (ma^{m-1} - 1)^2 = 2ma^{m-1} - 1 > 0$$

Dla $m = 1$ mamy $P(a) = 1$, a dla $m \rightarrow \infty$ zachodzi $P(a) \rightarrow -1$. Wobec tego najmniejsza wartość m spełniająca powyższą nierówność istnieje i jest skończona.



Rysunek 1. Wykresy funkcji $f(x)$ przy różnych wartościach a .

Tablica 1. Wartości m , a , oraz Δ/T

m	a	Δ/T	m	a	Δ/T
2	0.2500	1.3863	17	0.8022	0.2204
3	0.4082	0.8959	20	0.8235	0.1942
4	0.5000	0.6931	25	0.8496	0.1630
5	0.5623	0.5756	30	0.8683	0.1412
6	0.6084	0.4970	40	0.8937	0.1124
7	0.6441	0.4398	50	0.9103	0.0940
8	0.6730	0.3961	60	0.9221	0.0811
9	0.6968	0.3613	70	0.9309	0.0716
10	0.7169	0.3329	80	0.9378	0.0642
11	0.7341	0.3091	90	0.9433	0.0583
12	0.7491	0.2889	100	0.9479	0.0535
13	0.7622	0.2715	150	0.9624	0.0383
14	0.7739	0.2563	200	0.9703	0.0301
15	0.7843	0.2429	300	0.9788	0.0214

Rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = 2xa^{x-1} - 1 \quad (12)$$

Tablica 2. Wartości Δ/T , a , m oraz \hat{m}

Δ/T	a	m	\hat{m}	Δ/T	a	m	\hat{m}
0.02	0.98	324	157	1.0	0.37	2	3
0.1	0.90	46	32	1.1	0.33	2	2
0.2	0.82	19	16	1.2	0.30	2	2
0.3	0.74	11	11	1.3	0.27	2	2
0.4	0.67	7	8	1.4	0.25	2	2
0.5	0.61	6	6	1.5	0.22	1	2
0.6	0.55	4	5	1.6	0.20	1	1
0.7	0.50	4	4	1.7	0.18	1	1
0.8	0.45	3	4	1.8	0.17	1	1
0.9	0.41	3	3	2.0	0.14	1	1

która sprowadza się do $P(a)$ po podstawieniu $x = m$. Wykres funkcji f przedstawiono na rys. 1. Jak widać, istnieją dwie wartości x zerujące funkcję f . Ze względu na ograniczenie $m \geq 2$ funkcja ta ma sens tylko dla $x \geq 2$. Dla ustalonego a w tym zakresie rozwiązanie jest najwyżej jedno i wtedy zadanie ma rozwiązanie jednoznaczne. Przy ustalonym a (lub Δ/T) i można wyznaczyć numerycznie x i wtedy m jest największą liczbą całkowitą spełniającą nierówność $m \leq x$. Łatwo można jednak stabilizować graniczne wartości a , przy których następuje zmiana m , korzystając ze wzoru

$$a = \frac{1}{m^{-1}\sqrt{2m}} \quad (13)$$

Przykładowe wartości przedstawiono w tabl. 1. Wartości m rosną przy $a \rightarrow 1$. W tabl. 2 przedstawiono natomiast wartości \hat{m} uzyskane z optymalizacji za pomocą algorytmu ewolucyjnego dla kilku wartości Δ/T przy $k = 1$, w zestawieniu z wartościami m wynikającymi ze wzoru (13). Zachodzi duża zgodność obu wartości, choć w pobliżu granic zmian występują czasami rozbieżności. Spore różnice wystąpiły dla dużych a . Przyczyna tego nie jest do końca jasna. Przepuszczalnie jest to związane z błędami numerycznymi.

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozważono dobór kształtu sygnału sterującego, odcinkami stałego, dla estymacji parametru obiektu opisanego modelem pierwszego rzędu z jednostkowym wzmocnieniem. Sprowadzenie początkowego równania różniczkowego do równoważnego równania różnicowego i uwzględnienie zależności między parametrami pozwoliło na efektywne wyznaczenie kształtu optymalnego sygnału sterującego. Pomimo, jak by się wydawało, prostego zadania z jednym estymowanym parametrem, obliczenia okazały się dosyć skomplikowane i wymagały rozwiązań numerycznych. Jednak końcowe rozwiązanie jest proste, w postaci fali prostokątnej.

Ze względu na ograniczenie liczby stron nie rozważono tu innego elementu planowania eksperymentu, a mianowicie wyboru optymalnego okresu próbkowania. Będzie to omówione w innej pracy.

A OBLICZENIE SUMY WSPÓŁCZYNNIKÓW

Rozważmy wyrażenie w nawiasie sześciennym w (11) sumowane do m , $k \leq m \leq n$, przy wszystkich występujących w nim wartościach sterowań $u_{l-k} = 1$, czyli

$$\sum_{l=k}^m a^{n-l} [1 + (n-l)(1-a^{-1})]$$

Aby skorzystać z zależności (0.113) w tablicach [12] dokonamy następujących podstawień

$$i = l - k, \quad q = a^{-1}$$

otrzymując

$$q^{-(n-k)} \sum_{i=0}^{m-k} q^i [1 + (n-k)(1-q) - (1-q)i]$$

Stosując teraz powyżej wspomniany wzór (0.113) dla postępu arytmetyczno-geometrycznego przekształcamy powyższą sumę (bez czynnika przed sumą) następująco

$$\begin{aligned} & \frac{1 + (n-k)(1-q)}{1-q} \\ & \frac{[1 + (n-k)(1-q) - (m-k)(1-q)]q^{m-k+1}}{1-q} - \\ & \frac{(1-q)q(1-q^{m-k})}{(1-q)^2} = \\ & = \frac{1 + (n-k)(1-q)}{1-q} \\ & \frac{[1 + (1-q)(n-m)]q^{m-k+1} - q(1-q^{m-k})}{1-q} = \\ & = (n-k+1) - (n-m)q^{m-k+1} \end{aligned}$$

a po pomnożeniu przez $q^{-(n-k)}$

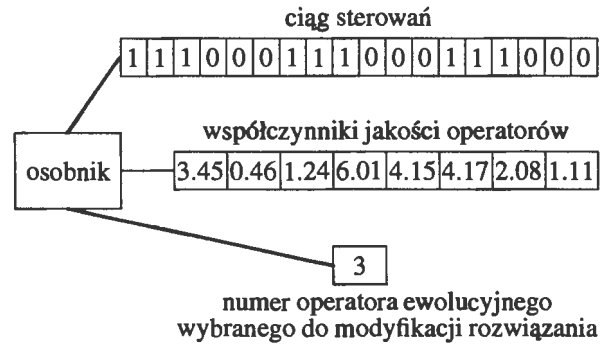
$$\begin{aligned} & q^{-(n-k)} [(n-k+1) - (n-m)q^{m-k+1}] = \\ & = a^n [(n-k+1)a^{-k} - (n-m)a^{-m-1}] \end{aligned}$$

B ALGORYTM EWOLUCYJNY

Kodowanie rozwiązania. Osobnik populacji jest wektorem binarnym o długości $N - k + 1$ (liczba sterowań). Dodatkowo zawiera elementy wymagane przez algorytm ewolucyjny użyty do rozwiązania problemu: (1) wektor liczb rzeczywistych o długości równej liczbie zastosowanych operatorów genetycznych ze współczynnikami jakości operatorów potrzebnymi do wyboru operatora; (2) liczbę całkowitą – numer aktualnie wybranego operatora genetycznego do modyfikacji rozwiązania.

Funkcja dopasowania osobnika. Funkcja dopasowania osobnika oparta jest na kryterium jakości zadania (11). Jest ona przeskalowywana w każdym pokoleniu, tak aby zawierała się w przedziale $[0, 1]$.

Operatory ewolucyjne. Efektywność algorytmów ewolucyjnych zależy w dużej mierze od stworzenia operatorów dopasowanych do specyfiki rozwiązywanego



Rysunek 2. Schemat osobnika populacji rozwiązania

zadania. Tu zastosowano następujące operatory: (1) *mutacja* (pojedyncza i wielokrotna) – polega na zastąpieniu w wylosowanym fragmencie rozwiązania zera jedynką lub jedynki zerem; (2) *przestawienie* (pojedyncze i wielokrotne) – wymiana fragmentów o wylosowanej długości rozwiązania na wybranych losowo pozycjach; (3) *"inteligentne" przestawienie* – jest wykonywane tylko w przypadku poprawy wartości funkcji celu zadania; (4) *inwersja* – odwrócenie kolejności w wybranym fragmencie wektora sterowań; (5) *operacja "2- optymalna"* – przestawianie parami elementów wektora rozwiązań, tylko przestawienia poprawiające rozwiązanie są akceptowane, operator oparty jest na znanej metodzie zachłannej o takiej właśnie nazwie [16]; (6) *operacja wyszukiwania cyklu* – wyszukuje cykle istniejące w osobniku i z prawdopodobieństwem proporcjonalnym do liczby wystąpień danego cyklu tworzy nowe rozwiązanie o wylosowanej długości cyklu.

Adaptacyjna ocena operatorów. Zastosowano nową metodę ustalenia prawdopodobieństw użycia operatorów genetycznych, opisaną w pracach [9, 13, 14]. Im bardziej dany operator polepsza funkcję celu danego osobnika, tym większe ustala się prawdopodobieństwo jego występowania, zgodnie ze wzorem (14)

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}(t)}{\sum_{i=1}^{L(t)} q_{ij}(t)} \quad (14)$$

gdzie $q_{ij}(t)$ - współczynnik jakości i -tej operacji w chwili t dla j -tego osobnika populacji, ustalany według wzoru (15), $p_{ij}(t)$ - prawdopodobieństwo wystąpienia i -tej operacji w chwili t dla j -tego osobnika, $L(t)$ - liczba operacji genetycznych (może ona zależeć od czasu). Każdy osobnik populacji ma swój własny ranking operatorów, używany do losowania operatora modyfikującego go w bieżącej iteracji. Jednak operatory słabsze również mogą wystąpić, gdyż zawsze utrzymywana jest dla nich pewna minimalna wartość współczynnika jakości $q_{oij}(t)$ we wzorze (15). Na danego osobnika działa w jednej iteracji tylko jeden operator, można więc mu jednoznacznie przypisać zasługi modyfikacji osobnika:

$$q_{ij}(t+1) = \begin{cases} q_{oij}(t) + \frac{x_{ij}(t)}{\bar{x}(t)} + \alpha_{ij}(t)q_{ij}(t) & \text{dla } i = l \\ q_{ij}(t) & \text{dla } i \neq l \end{cases} \quad (15)$$

gdzie $q_{ij}(t)$ - wartości współczynnika jakości operacji i osobnika j w iteracjach t , $q_{0ij}(t)$ - niewielka wartość stała (kredyt), $x_{lj}(t)$ - poprawa funkcji celu:

$$x_{lj}(t) = \begin{cases} Q_{lj}(t) - Q(t) & \text{dla } Q_{lj}(t) - Q(t) > 0 \\ 0 & \text{dla } Q_{lj}(t) - Q(t) \leq 0 \end{cases}$$

$Q(t)$ - najlepsze rozwiązanie znalezione dotychczas, $Q_{lj}(t)$ - wartość funkcji celu bieżącego osobnika, $\bar{x}(t)$ - średnia wartość popraw funkcji celu uzyskana dotychczas, $a_{ij}(t)$ - współczynnik zapominania, l - indeks operatora wybranego w danej iteracji do modyfikacji rozwiązania. Drugi, ilorazowy człon górnego wiersza wzoru (15) jest znormalizowaną poprawą funkcji celu rozwiązwanego zadania. W przypadku braku poprawy jest on zerowany. Ostatni człon górnego wiersza wzoru (15) przechowuje informację o dawniejszych osiągnięciach operatora, przemnożonych przez współczynnik zapominania $\alpha(t)$, nieco mniejszy od jedności.

Selekcja mieszana, użyta w obliczeniach, składa się z dwóch składowych o różnych właściwościach: selekcji histogramowej (znacząco zwiększającej zróżnicowanie populacji) i deterministycznej ruletki (silnie promującej najlepszych osobników). Metody te są losowo wybierane i wykonywane w trakcie działania obliczeń ewolucyjnych. Prawdopodobieństwo wyboru i wykonania każdej z metod przedstawia wzór (16):

$$p_{his}(t+1) =$$

$$\begin{cases} p_{his}(t)(1-a) + a & \text{dla } R(t) < 0.5\sigma(J(t)) \\ p_{his}(t)(1-a) + 0.5a & \text{dla } 0.5\sigma(J(t)) \leq R(t) \leq 3\sigma(J(t)) \\ p_{his}(t)(1-a) & \text{dla } R(t) > 3\sigma(J(t)) \end{cases}$$

$$R(t) = \max\{J_{av}(t) - J_{\min}(t), J_{\max}(t) - J_{av}(t)\} \quad (16)$$

$$p_{det}(t+1) = 1 - p_{his}(t+1)$$

gdzie $p_{his}(t)$ - prawdopodobieństwo użycia selekcji histogramowej, $p_{det}(t)$ - prawdopodobieństwo użycia selekcji metodą deterministycznej ruletki, $J_{av}(t)$, $J_{\min}(t)$, $J_{\max}(t)$ - średnia, minimalna i maksymalna wartość funkcji dopasowania w populacji, $\sigma(J(t))$ - odchylenie standardowe funkcji dopasowania w populacji. Jeżeli populacja osobników ma zbyt małe odchylenie standardowe $\sigma(J(t))$ w stosunku do rozpiętości funkcji dopasowania ($\max\{J_{av}(t) - J_{\min}(t), J_{\max}(t) - J_{av}(t)\}$), wtedy następuje zwiększenie prawdopodobieństwa wystąpienia selekcji histogramowej (trzecia część wzoru (16)). W przeciwnym wypadku zwiększane jest prawdopodobieństwo wystąpienia selekcji metodą deterministycznej ruletki (pierwsza część wzoru (16)). Jeśli parametry populacji zawarte są w przedziale uznanym za korzystny, to prawdopodobieństwa wystąpienia obu metod selekcji są prawie równe (druga część wzoru (16)). Ponieważ $p_{his}(t) + p_{det}(t) = 1$, więc któraś z metod zawsze musi wystąpić.

OPTIMAL BANG-BANG TYPE SIGNAL FOR ESTIMATION OF THE FIRST ORDER SYSTEM PARAMETER

Abstract: The paper deals with planning of experiment for the first order system with the unit static gain. The problem considered is restricted to the step-wise controls and constant sampling rates. It is proved that the optimal solution lies on the control boundaries. Numerical results show that it is in the form of a rectangular wave. A formula for determining its length is derived.

Literatura

- [1] Åström K.J. (1969) On the choice of sampling rates in parameter identification of time series. *Information Science*, 1, 273-287.
- [2] Bogdan L., Łomotowski J., Nahorski Z., Studziński J., Szetela R. (2000) Mathematical and neural modelling of a wastewater treatment plant. *Archives of Control Engineering*, 10(1-2), 89-118.
- [3] Goodwin G.C., Payne R.L. (1976) Choice of sampling intervals. W: Mehra R.K., Lainiotis D.G. (Eds.) *System Identification: Advances and Case Studies*. Academic Press, New York.
- [4] Goodwin G.C., Payne R.L. (1977) *Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis*. Academic Press, New York.
- [5] Goodwin G.C., Zarrop M.B., Payne R.L. (1974) Coupled design of test signals, sampling interval and filters for system identification. *IEEE Trans. Automatic Contr.*, AC-19, 748-752.
- [6] Levadi V. S. (1966) Design of input signals for parameter estimation. *IEEE Trans. Automatic Contr.*, AC-11 (2), 205-211.
- [7] Mehra R.K. (1974) Optimal inputs for linear system identification. *IEEE Trans. Automatic Contr.*, AC-19, 192-200.
- [8] Mańczak K., Nahorski Z. (1983) *Komputerowa identyfikacja układów dynamicznych*. PWN, Warszawa.
- [9] Mulawka J., Stańczak J. (1999) Genetic algorithms with adaptive probabilities of operators selection. *Proceedings of ICCIMA '99*, New Delhi, India, 464-468.
- [10] Nahorski Z. (1994) Planowanie eksperymentu dla identyfikacji modeli elementów hydraulicznych w oczyszczalni ścieków w Rzeszowie. Raport 19/9/S-10/96. IBS PAN, Warszawa.
- [11] Ng T.S., Goodwin G.C. (1976) On optimal choice of sampling strategies for linear system identification. *Int. J. Control*, 23, 459-475.
- [12] Ryżyk I.M., Gradsztejn I.S. (1964) *Tablice całek, sum, szeregów i iloczynów*. PWN, Warszawa.
- [13] Stańczak J. (1999) Rozwój koncepcji i algorytmów dla samodoskonających się systemów ewolucyjnych. Praca doktorska. Politechnika Warszawska, 1999.
- [14] Stańczak J. (2003) Biologically inspired methods for control of evolutionary algorithms. *Control and Cybernetics*, 32, 2003.
- [15] Studziński J. (2004) *Identyfikacja, symulacja i sterowanie oczyszczalniami ścieków*. IBS PAN, Warszawa.
- [16] Sysło M.M., Deo N., Kowalik J. S. (1995) *Algorytmy optymalizacji dyskretnej*. PWN, Warszawa.
- [17] Zarrop M.B. (1979) *Optimal Experiment Design for Dynamic System Identification*. Springer, Berlin.



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2