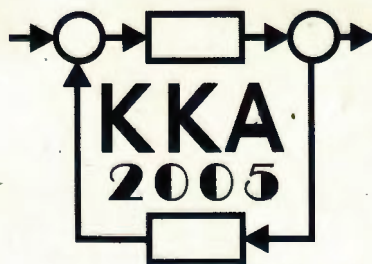


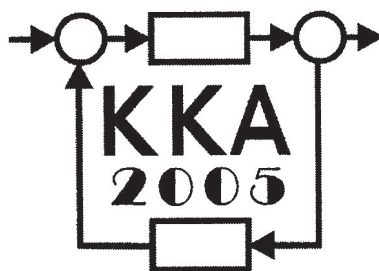
# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

**STEROWANIE OPTYMALNE  
I ADAPTACYJNE**

# OPTIMALIZACJA WYPUKŁA W ZASTOSOWANIU DO SYNTEZY ADAPTACYJNEGO REGULATORA PREDYKCYJNEGO Z NIEJAWNYM UKŁADEM ANTI-WINDUP

Dariusz HORLA

Politechnika Poznańska, Instytut Automatyki i Inżynierii Informatycznej, Zakład Automatyki i Robotyki  
ul. Piotrowo 3A, 60-965 Poznań, e-mail: Dariusz.Horla@put.poznan.pl

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono nowy algorytm adaptacyjnego sterowania predykcyjnego w obecności ograniczeń, wykorzystujący techniki optymalizacji wypukłej. Zbadano jego działanie w układzie nieadaptacyjnym i adaptacyjnym oraz dla różnych sposobów nakładania ograniczeń na sygnał sterujący.

**Słowa kluczowe:** optymalizacja wypukła, kompensator anti-windup, sterowanie optymalne, funkcja kary.

## 1. WPROWADZENIE

Układy sterowania podlegają takim ograniczeniom, jak ograniczenia amplitudy, czy przyrostu sterowania lub nałożonym na sygnał wyjściowy. Istnieją dwa podejścia do projektowania regulatora z ograniczeniami [1, 3]: jawne uwzględnienie ograniczeń w procesie syntezy oraz zaprojektowanie regulatora liniowego, do którego następnie dokłada się kompensator braku spójności pomiędzy wewnętrznymi stanami regulatora, a sterowaniem zadanym na obiekt (tzw. zjawisko windup).

Zastosowanie kompensatora zjawiska windup (AWC, ang. *anti-windup compensator*) prowadzi do sterowania nieoptymalnego, tj. zmieniają się warunki, dla których została przeprowadzona synteza regulatora, nawet jeżeli ten został zaprojektowany tak, aby minimalizować w przypadku liniowym pewien wskaźnik jakości.

Podejście zaprezentowane w artykule ma na celu wykorzystanie metod optymalizacji wypukłej do syntezy regulatora, przez sformułowanie minimalizowanego wskaźnika za pomocą kombinacji funkcji wypukłych.

W artykule, dla nowego sformułowania problemu śledzenia przez formalizm sterowania predykcyjnego, wyróżniono dwa sposoby nakładania ograniczeń: ograniczenia miękkie (skończona amplituda lub przyrost sygnału powodują skończony wzrost wskaźnika) i sztywne (wyjście poza domenę funkcji wypukłej, do domeny rozszerzonej, powoduje nieskończony wzrost wskaźnika).

Podejście drugie można traktować jako zaprojektowanie niejawnego kompensatora anti-windup, który w przypadku nieadaptacyjnym oraz zgodności modelu obiektu z obiektem, będzie skutkowało otrzymaniem optymalnego, w sensie obranego wskaźnika, prawa sterowania przy nałożonych ograniczeniach.

Jakość śledzenia według nowego prawa sterowania zo-

stanie sprawdzona dla przypadku nieadaptacyjnego i adaptacyjnego oraz dla zastosowania ograniczeń miękkich i sztywnych, wraz z modyfikacją wskaźnika przez wypukłe funkcje kary.

## 2. MODEL OBIEKTU

Metoda sterowania została wyprowadzona dla obiektu ARMA

$$A(q^{-1})y_t = B(q^{-1})u_{t-d}, \quad (1)$$

gdzie  $d > 0$  jest opóźnieniem, a względnie pierwsze wielomiany z równania (1)

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_naq^{-nA}, \quad (2)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_nBq^{-nB}. \quad (3)$$

## 3. PRAWO STEROWANIA

Po podstawieniu w przypadku adaptacyjnym, zgodnie z zasadą równoważności, w miejsce odpowiednich współczynników wielomianów  $A(q^{-1})$ ,  $B(q^{-1})$  ich estymat, potrzebnych do generacji prawa sterowania adaptacyjnego (by zachować przejrzystość, w artykule pominięto symbol estymaty) przeprowadza się procedurę, którą jest poszukiwanie optymalnego ciągu sterującego

$$\underline{u}_{t+1}^* : J_t(\underline{u}_{t+1}^*) = \inf_{\underline{u}_{t+1} \in D(J_t)} \{J_t(\underline{u}_{t+1})\}, \quad (4)$$

gdzie  $D(J_t)$  jest zbiorem wszystkich realizowalnych wektorów  $\underline{u}_{t+1}$ .

Regulator działa na zasadzie repetycyjnej, tj. w każdej chwili  $t$  jest zadawany jedynie pierwszy element wektora  $\underline{u}_{t+1}$ , a następnie ma miejsce wyznaczenie go od nowa dla zaktualizowanych próbek odpowiednich sygnałów. W przypadku adaptacyjnym takie postępowanie umożliwia wyznaczenie sterowania dla zaktualizowanych estymat parametrów modelu obiektu.

## 4. REGULATOR Z OGRANICZENIAMI MIĘKKIMI

Regulator ma za zadanie śledzić zadany sygnał referencyjny  $r_t$  przez sygnał  $y_t$  zgodnie z

$$\min_{\underline{u}_{t+1}} J_t, \quad (5)$$



gdzie

$$J_t = \frac{\delta'_1}{N_u - 1} \sum_{i=d}^{d+N_u-1} (r_{t+i} - y_{t+i})^2 + \frac{\delta'_2}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} u_{t+i}^2 + \frac{\delta'_3}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} (u_{t+i} - u_{t+i-1})^2 \quad (6)$$

lub

$$J_t = \delta_1 \sum_{i=d}^{d+N_u-1} (r_{t+i} - y_{t+i})^2 + \delta_2 \sum_{i=1}^{N_u} u_{t+i}^2 + \delta_3 \sum_{i=1}^{N_u} (u_{t+i} - u_{t+i-1})^2 \quad (7)$$

dla  $\delta_1 = \frac{\delta'_1}{N_u - 1} > 0$ ,  $\delta_2 = \frac{\delta'_2}{N_u} > 0$ ,  $\delta_3 = \frac{\delta'_3}{N_u} > 0$  oraz pewnych stałych  $\delta'_1, \delta'_2, \delta'_3 > 0$ . W innej postaci wskaźnik (7) można przedstawić jako

$$J_t = \delta_1 \|\underline{r}_{t+d} - \hat{\underline{y}}_{t+d} - \hat{\underline{y}}_{t+d}\|_2^2 + \delta_2 \|\Delta [\underline{u}_t \underline{u}_{t+1}^T]^T\|_2^2 + \delta_3 \|\underline{u}_{t+1}\|_2^2, \quad (8)$$

gdzie bidiagonalna macierz Toeplitza

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix}_{N_u \times (N_u+1)} \quad (9)$$

Regulator w każdej chwili dokonuje minimalizacji (5), poszukując ciągu sterującego  $\{u_{t+1}, u_{t+2}, \dots, u_{t+N_u}\}$  w horyzoncie  $N_u > 1$ .

Elementy wektora sygnału referencyjnego

$$\underline{r}_{t+d} = \begin{bmatrix} r_{t+d+1} \\ r_{t+d+2} \\ \vdots \\ r_{t+d+N_u} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

są znane na  $d + N_u$  kroków do przodu, wektor predykcji odpowiedzi obiektu na wymuszenie poszukiwanym ciągiem sterującym (przy założeniu zerowych warunków początkowych w chwili  $t$ ) jest dany jako

$$\hat{\underline{y}}_{t+d} = \begin{bmatrix} y_{t+d} \\ y_{t+d+1} \\ \vdots \\ y_{t+d+N_u-1} \end{bmatrix} = G \underline{u}_{t+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N_u-2} & g_{N_u-1} & \dots & g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{t+1} \\ \vdots \\ u_{t+N_u} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

a  $g_0, g_1, \dots$  oznaczają kolejne próbki odpowiedzi impulsowej  $\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}$ . Na podstawie zasady superpozycji, wektor będący zanikającą odpowiedzią obiektu przy pobudzeniu  $u_{t-i}$  ( $i \geq 0$ )

$$\hat{\underline{y}}_{t+d} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{t+d} \\ \hat{y}_{t+d+1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+d+nB} \\ \hat{y}_{t+d+nB+1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{t+d+N_u-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (1-A(q^{-1}))\hat{y}_{t+d} + B(q^{-1})u_t \\ (1-A(q^{-1}))\hat{y}_{t+d+1} + q(B(q^{-1})-b_0)u_t \\ \vdots \\ (1-A(q^{-1}))\hat{y}_{t+d+nB} + b_{nB}u_t \\ (1-A(q^{-1}))\hat{y}_{t+d+nB+1} \\ \vdots \\ (1-A(q^{-1}))\hat{y}_{t+d+N_u-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

gdzie dla  $i \geq 0$ ,  $\hat{y}_{t-i} = y_{t-i}$ , natomiast dla  $0 < i < d$  zachodzi  $\hat{y}_{t+i} = (1-A(q^{-1}))\hat{y}_{t+i} + B(q^{-1})u_{t-d+i}$ .

Algorytm ma więc znaleźć taki wektor  $\underline{u}_{t+1}$ , aby osiągnąć minimum rozpatrywanego wskaźnika. W każdym kroku regulator iteracyjnie (dla zmierzonych  $y_t, \dots, y_{t-nA}$  oraz  $u_t, \dots, u_{t-nB}$ ) wyznacza elementy wektora  $\hat{\underline{y}}_{t+d}$ , więc jedynym stopniem swobody jest  $N_u$  elementów wektora  $\underline{u}_{t+1}$ .

## 5. NORMY A FUNKCJE KARY

Sztywne ograniczenie  $\alpha$  amplitudy sygnału sterującego, czy  $\beta$  jego przyrostu, można zrealizować przez wprowadzenie funkcji  $\phi(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  zamiast norm typu  $\|\cdot\|_p$  w (8). Rozważmy funkcję w postaci

$$|e_1|^p + \dots + |e_m|^p, \quad (13)$$

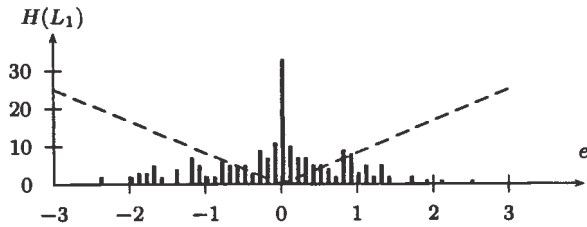
odpowiadającą wyrażeniu podpierwiastkowemu normy  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ), która zależy od  $m$  elementów wektora residuów i którą można zastąpić przez [2]

$$\phi(e_1) + \dots + \phi(e_m). \quad (14)$$

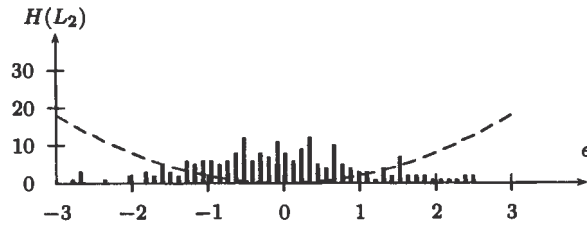
W celu oceny stopnia w jakim rozrzut wartości residuów wpływa na wartość normy czy funkcji kary (oraz porównania zastosowania  $\|\cdot\|_p$  oraz  $\phi(\cdot)$ ) zamieszczono następujący przykład – dla losowo wybranej macierzy  $F \in \mathcal{R}^{200 \times 30}$  oraz wektora  $\underline{g} \in \mathcal{R}^{200}$  jest poszukiwane rozwiązanie  $\underline{x} \in \mathcal{R}^{30}$  minimalizujące wartość wyrażenia  $\underline{e} = F\underline{x} - \underline{g}$  ( $m = 200$ ) w sensie obranej normy lub funkcji kary.

Funkcja  $\phi(\cdot)$  nakłada karę za każdy element wektora residuów  $\underline{e}$ , w zależności od swojego przebiegu. Rozważone zostaną symetryczne, nieujemne funkcje, dla których  $\phi(0) = 0$ .

Na rysunkach 1–4 przedstawiono histogram residuów wraz z przeskalowaną funkcją celu (linia przerywana). Zastosowanie normy  $L_1$  skutkuje powstaniem wielu residuów o małej amplitudzie i niewielu o dużej. W przypadku normy  $L_2$  małą karę daje się za residua o małej amplitudzie, a znaczną dla amplitud dużych.



Rys. 1. Histogram residuów dla normy  $L_1$



Rys. 2. Histogram residuów dla normy  $L_2$

Alternatywą dla rozważanych norm jest zastosowanie funkcji kary ze strefą martwą (rys. 3) opisanej jako

$$\phi_{sm}(x, a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \leq a \\ |x| - a & \text{dla } |x| > a \end{cases}, \quad (15)$$

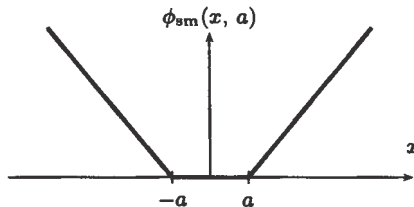
funkcji Hubera (rys. 4) opisanej jako

$$\phi_{hb}(x, a) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } |x| \leq a \\ a(2|x| - a) & \text{dla } |x| > a \end{cases}, \quad (16)$$

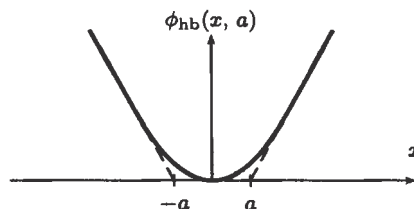
oraz logarytmicznej funkcji barierowej (rys. 5) opisanej jako

$$\phi_{ln}(x, \gamma, \delta, P) = \begin{cases} P \frac{\ln(1 - (\frac{x}{\delta})^2)}{\ln(1 - \delta^2)} & \text{dla } |x| < \delta \\ \infty & \text{dla } |x| \geq \delta \end{cases}, \quad (17)$$

dla  $0 < \delta < 1$ .

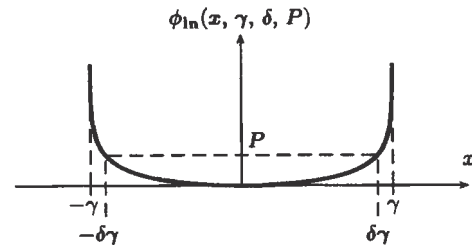


Rys. 3. Strefa martwa

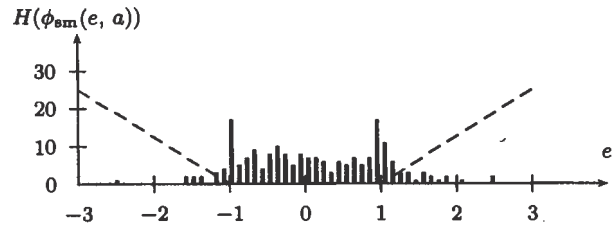


Rys. 4. Funkcja Hubera

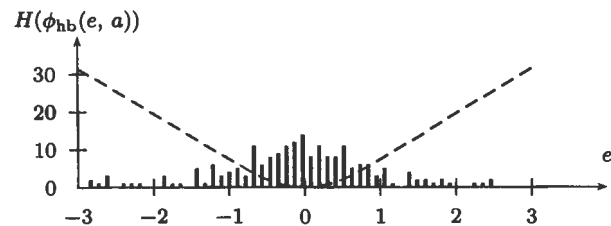
Histogramy dla omawianych funkcji kary zamieszczono na rysunkach 6–8. W przypadku strefy martwej największa waga jest położona na residua leżące na odcinku  $(-a, a)$ , najmniejsza na residua o znacznych amplitudach. Funkcja Hubera nakłada karę zgodną z algorytmem najmniejszych kwadratów na małe residua, a liniowo-proporcjonalną dla większych. W przypadku funkcji barierowej nie ma residuów o amplitudzie większej od  $\gamma$ , a w przedziale  $(-\gamma, \gamma)$  histogram wygląda podobnie jak dla normy  $L_2$ .



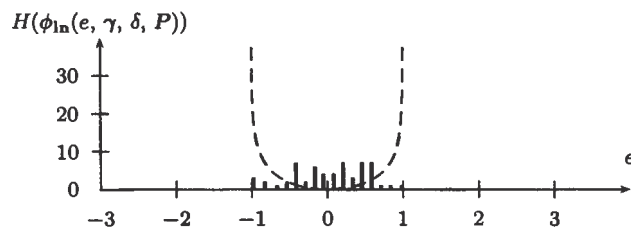
Rys. 5. Bariera logarytmiczna



Rys. 6. Histogram residuów dla strefy martwej,  $a = 1$



Rys. 7. Histogram residuów dla funkcji Hubera,  $a = 0.75$



Rys. 8. Histogram residuów dla bariery logarytmicznej,  $\gamma = 1, \delta = 0.9, P = 0.1$

## 6. REGULATOR Z OGRANICZENIAMI SZTYWNYMI (I NIEJAWNYM UKŁADEM ANTI-WINDUP)

Zastosowanie funkcji wypukłych do wyrażenia ograniczeń nałożonych na sygnał sterujący wykorzystuje następujące właściwości: każda norma może być potraktowana jako funkcja wypukła o domenie  $\mathcal{R}^n$ , ważona suma (o wagach nieujemnych) funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą, funkcja funkcji wypukłej jest wypukła, epigrafiki rozważanych funkcji są zbiorami wypukłymi, stąd jeżeli domeny rozważanych funkcji są zbiorami niepustymi, istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu minimalizacji wskaźnika

$$J_t = \delta_1 \left( f \left( \underline{x}_{t+d} - \hat{\underline{y}}_{t+d} - \hat{\underline{y}}_{t+d} \right) \right)^2 + \delta_2 \left( g \left( \Delta [\underline{u}_t \underline{u}_{t+1}^T]^T \right) \right)^2 + \delta_3 \left( h \left( \underline{u}_{t+1} \right) \right)^2, \quad (18)$$

jeżeli funkcje  $f, g, h$  spełniają wyżej w/w właściwości [2].

Ponieważ, jak wspomniano wcześniej, suma funkcji wypukłych jest funkcją wypukłą, kara liczona za pomocą funkcji  $\phi(\cdot)$  jest sumą kar za poszczególne residua, czyli jest również funkcją wypukłą. W celu uproszczenia no-

tacji zapis  $\phi(\cdot)$  będzie odnosił się zarówno do argumentów skalarnych (wtedy  $\phi(\cdot): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ) oraz wektorowych (wtedy  $\phi(\cdot): \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$  to suma kar za poszczególne elementy danego wektora, zgodnie z zapisem (14) i  $m = n$ ).

Nałożenie ograniczeń sztywnych na sterowanie odpowiada zastąpieniu  $g$  lub  $h$  przez logarytmiczną funkcję barierową. Zakłada się, że  $f$  ma postać  $\|\cdot\|_p$ ,  $\phi_{sm}$  lub  $\phi_{hb}$ . W powyższy sposób regulator nie wygeneruje sterowania wykraczającego poza obszar dopuszczalny, więc każdy element ciągu sterowań minimalizujący (18) będzie zawsze realizowalny.

Ponieważ dla powyższego przypadku nie wystąpi niespójność pomiędzy zadany sygnałem sterującym a wewnętrznymi stanami regulatora, zapobiega się w ten sposób powstawaniu zjawiska windup. Stąd, jeżeli  $g$  lub  $h$  jest funkcją barierową, można powiedzieć, że regulator zawiera niejawną układ anti-windup.

Rozważana postać funkcji barierowej umożliwia ciągłą, w przedziale  $(-\gamma, \gamma)$ , aproksymację nieciągłej funkcji typu odcięcie

$$\phi_{cut-off}(x, \gamma) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \leq \gamma \\ \infty & \text{dla } |x| > \gamma \end{cases} \quad (19)$$

jeżeli  $\delta$  jest bliskie jedności, a  $P$  bliskie zeru, a wartość  $\phi_{in}(x, \gamma, \delta, P)$  dla  $|x| < \gamma$  jest pomijalnie mała w (8).

## 7. PROCEDURA OPTIMALIZACJI

Optimalizacja przebiega według metody quasi-Newtonowskiej, wykorzystującej algorytm BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) do aproksymacji hesjanu, jako warunek początkowy przyjęto  $\underline{u}_1^{(0)} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ .

## 8. SYMULACJE

Symulacje przeprowadzono dla sygnału referencyjnego typu fala prostokątna o amplitudzie 3, dla obiektów:

- stabilnego minimalnofazowego (S)

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.8q^{-1} + 0.9q^{-2}, \quad (20)$$

- niestabilnego minimalnofazowego (NS)

$$A(q^{-1}) = 1 + 1.8q^{-1} - 0.9q^{-2}, \quad (21)$$

z  $B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$ . W przypadku adaptacyjnym estymacja parametrów modelu obiektu przebiega według metody RLS z  $\lambda = 1$ ,  $P_0 = 10I$  oraz warunkiem początkowym  $\hat{\theta}_0 = 0.5\theta$ ,  $\varphi_0 = 0.1 \cdot \mathbf{1}^{1 \times 4}$ .

Symulacje podzielono na dwa bloki: z ograniczeniami miękkimi (również dla zmiennej wartości  $d$ ) oraz z ograniczeniami twardymi (w tym dla układu adaptacyjnego).

W celu umożliwienia porównania jakości regulacji wprowadzono wskaźniki jakości

$$I_1 = \frac{1}{t_h + 1} \sum_{t=0}^{t_h} (r_t - y_t)^2, \quad (22)$$

$$I_2 = \frac{1}{t_h + 1} \sum_{t=0}^{t_h} u_t^2, \quad (23)$$

$$I_3 = \frac{1}{t_h} \sum_{t=1}^{t_h} (u_t - u_{t-1})^2, \quad (24)$$

odpowiadające: średniokwadratowemu błędowi śledzenia, średniokwadratowej wartości sterowania oraz średniokwadratowej wartości jego przyrostu, przy czym  $t_h$  to horyzont symulacji.

### 8.1. Ograniczenia miękkie

W celu sprawdzenia wpływu ograniczeń miękkich nałożonych na układ regulacji z obiektem stabilnym, przeprowadzono kilkietapową symulację dla opóźnienia  $d = 1$ . W pierwszej kolejności zbadano wpływ odpowiedniej normy lub funkcji kary na jakość śledzenia bez uwzględniania kosztów sterowania (tab. 1, rys. 9), która jest najlepsza dla norm  $L_1/L_2$ . Z przyczyn wymienionych w sekcji 5, optymalnym rozwiązaniem jest nakładanie kary za uchyb regulacji według normy  $L_2$ .

|       | $L_1$   | $L_2$   | sm0.05  | 0.10    | 0.15    | hb0.05  | 0.10    | 0.15    |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $I_1$ | 0.1192  | 0.1192  | 0.1199  | 0.1229  | 0.1289  | 0.1195  | 0.1193  | 0.1197  |
| $I_2$ | 6.6542  | 6.6542  | 6.6310  | 6.6551  | 6.7136  | 6.6450  | 6.5334  | 6.4276  |
| $I_3$ | 23.5480 | 23.5480 | 23.4799 | 23.6193 | 23.8843 | 23.5016 | 23.0729 | 22.6586 |

Tabela 1.  $\delta_1 = 1, \delta_2 = \delta_3 = 0, d = 1, N_u = 2, S$

W celu znalezienia optymalnego kompromisu pomiędzy karą za uchyb a karą za sterowanie, przeprowadzono badania dla obiektu stabilnego dla różnych postaci wskaźnika (8). Karę za uchyb liczono wg norm  $L_1, L_2$  oraz funkcji Hubera, a karę za sterowanie dodatkowo wg funkcji strefy martwej (tab. 2).

| $I_1$ | $L_1$   | $L_2$   | sm0.5   | 1.0     | 2.0     | hb0.25  | 0.50    | 1.00   |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $L_1$ | 0.1457  | 0.1365  | 0.1337  | 0.1311  | 0.1271  | 0.1205  | 0.1352  | 0.2476 |
| $L_2$ | 0.1568  | 0.1568  | 0.1512  | 0.1462  | 0.1377  | 0.1225  | 0.1538  | 0.3231 |
| hb0.1 | 1.9771  | 1.9542  | 1.1970  | 0.8656  | 0.5219  | 0.3925  | 1.5205  | 1.6612 |
| $I_2$ | $L_1$   | $L_2$   | sm0.5   | 1.0     | 2.0     | hb0.25  | 0.50    | 1.00   |
| $L_1$ | 4.0402  | 4.4445  | 4.6006  | 4.7647  | 5.0808  | 5.9677  | 4.5218  | 2.2216 |
| $L_2$ | 3.7550  | 3.7550  | 3.9423  | 4.1167  | 4.5067  | 5.6195  | 3.8580  | 1.8185 |
| hb0.1 | 1.9771  | 0.6711  | 0.6736  | 0.7777  | 0.9406  | 1.2550  | 0.6468  | 0.2829 |
| $I_3$ | $L_1$   | $L_2$   | sm0.5   | 1.0     | 2.0     | hb0.25  | 0.50    | 1.00   |
| $L_1$ | 13.5160 | 15.1648 | 15.7721 | 16.4099 | 17.6115 | 20.9260 | 15.4652 | 7.0961 |
| $L_2$ | 12.2226 | 12.2226 | 12.9455 | 13.6388 | 15.1807 | 19.4716 | 12.6119 | 4.9742 |
| hb0.1 | 0.8336  | 0.8469  | 1.1763  | 1.6158  | 2.4824  | 3.6038  | 0.9673  | 0.4034 |

Tabela 2.  $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \delta_3 = 0, d = 1, N_u = 2, S$

Ponieważ głównym celem rozpatrywanego zadania regulacji z ograniczeniami miękkimi jest zapewnienie śledzenia sygnału referencyjnego, jako najlepszą kombinację wybrano normę  $L_2$  dla uchybu i funkcję Hubera dla sterowania. Podobnie sytuacja przedstawia się dla uwzględnienia jakości śledzenia i kary za przyrost sterowania (tab. 3).

| $I_1$ | $L_1$   | $L_2$   | sm0.5   | 1.0     | 2.0     | hb0.25  | 0.50    | 1.00   |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| $L_1$ | 0.1317  | 0.1316  | 0.1306  | 0.1297  | 0.1282  | 0.1227  | 0.1566  | 0.2195 |
| $L_2$ | 0.1548  | 0.1548  | 0.1516  | 0.1488  | 0.1438  | 0.1299  | 0.2196  | 0.3776 |
| hb0.5 | 0.1814  | 0.1822  | 0.1633  | 0.1580  | 0.1545  | 0.1403  | 0.1679  | 0.2942 |
| $I_2$ | $L_1$   | $L_2$   | sm0.5   | 1.0     | 2.0     | hb0.25  | 0.50    | 1.00   |
| $L_1$ | 4.8282  | 4.8262  | 4.9069  | 4.9893  | 5.1584  | 5.6095  | 3.8328  | 2.7641 |
| $L_2$ | 4.4124  | 4.4100  | 4.4949  | 4.5844  | 4.7657  | 5.2360  | 3.6070  | 2.9605 |
| hb0.5 | 4.2144  | 3.9660  | 3.9285  | 3.9429  | 4.0913  | 4.6555  | 3.8593  | 2.5364 |
| $I_3$ | $L_1$   | $L_2$   | sm0.5   | 1.0     | 2.0     | hb0.25  | 0.50    | 1.00   |
| $L_1$ | 16.3632 | 16.3576 | 16.6713 | 16.9902 | 17.6441 | 19.4271 | 12.4907 | 8.4073 |
| $L_2$ | 14.3328 | 14.3242 | 14.6714 | 15.0337 | 15.7615 | 17.7463 | 10.8897 | 7.9271 |
| hb0.5 | 13.5420 | 12.7338 | 12.6381 | 12.7260 | 13.3280 | 15.5434 | 12.3746 | 7.1368 |

Tabela 3.  $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0.05, d = 1, S$



Dla tak dobranej pary norma–funkcja kary przeprowadzono badanie wpływu horyzontu  $N_u$  na jakość regulacji (tab. 4a, rys. 10), z czego widać, że wydłużenie horyzontu sterowania powoduje obniżenie zarówno średniokwadratowego przyrostu i wartości sterowania przy zachowaniu jakości śledzenia na podobnym poziomie.

Podobną symulację przeprowadzono dla układu regulacji z obiektem niestabilnym, w przypadku którego (tab. 4b, rys. 11) wydłużenie horyzontu  $N_u$  powoduje spadek jakości regulacji przez redukcję  $I_1$  oraz  $I_2$ , tj. odwrotnie niż dla obiektu stabilnego. Natomiast zmiana wartości  $N_u$  przy uwzględnieniu jedynie kary za uchyb (wartości wskaźników nie zamieszczono) nie ma wpływu na wartość wskaźników jakości, która pozostaje taka sama dla wszystkich  $N_u > 1$ , dla obu obiektów.

Wprowadzenie opóźnienia  $d = 3$  (wartości wskaźników nie zamieszczono) skutkuje opóźnieniem dwóch próbek w pierwszych dwóch chwilach procesu śledzenia, który dalej przebiega tak samo jak dla  $d = 1$ , a wnioski wyciągnięte co do pierwszego, obowiązują dla  $d = 3$ .

## 8.2. Ograniczenia sztywne

W celu sprawdzenia jakości regulacji wg omawianego algorytmu sterowania w obecności ograniczeń podobnych do nasycenia, nałożono barierę logarytmiczną na sygnał sterujący i jego przyrost.

Dla funkcji  $f$  w postaci  $L_2$  oraz  $g$  w postaci bariery logarytmicznej zbadano jakość sterowania dla różnych ograniczeń  $\alpha$ , zmieniając horyzont  $N_u$  (tab. 5a). Zwiększając powyższy redukuje się uchyb kosztem średniokwadratowej wartości przyrostu sterowania, odwrotnie niż dla obiektu niestabilnego (tab. 5b), dla którego przy niskich wartościach  $N_u$  nie udało się znaleźć warunku początkowego, dla którego możliwe by było śledzenie.

Dla obiektu stabilnego (tab. 6) zbadano wpływ wartości  $N_u$  na jakość regulacji przy różnych poziomach ograniczenia  $\beta$ .

Jak widać, zwiększanie wartości  $N_u$  powoduje zarówno zmniejszenie uchybu, jak i kosztów sterowania.

## 8.3. Łączne ograniczenie amplitudy i przyrostu, układ adaptacyjny

Dla dwóch różnych ograniczeń amplitudy i przyrostu oraz pięciu wartości horyzontu  $N_u$  sprawdzono wpływ w/w na jakość regulacji (tab. 7, rys. 12). W obu przypadkach wydłużenie horyzontu sterowania umożliwia uzyskanie mniejszej wartości uchybu, co odbywa się kosztem sterowania. Ponieważ zastosowanie wag ustalonych dla obiektu S skutkowało uzyskaniem niestabilnego układu zamkniętego dla obiektu NS, pominięto taką analizę.

Dla układu adaptacyjnego (tab. 8, rys. 13), obowiązują podobne zależności jak w przypadku nieadaptacyjnym. Resztę uwag zamieszczono we wnioskach.

## 9. WNIOSKI

W artykule przedstawiono nowy algorytm sterowania predykcyjnego wykorzystujący mechanizmy optymalizacji wypukłej, badając jego właściwości, z których wiele pokrywa się z właściwościami algorytmu GPC [3]. Przed-

|       | $N_u = 2$ | 3       | 4       | 5       | 6       |
|-------|-----------|---------|---------|---------|---------|
| a)    |           |         |         |         |         |
| $I_1$ | 0.3367    | 0.3583  | 0.3319  | 0.3492  | 0.3587  |
| $I_2$ | 2.1442    | 0.3479  | 0.4043  | 0.3354  | 0.3127  |
| $I_3$ | 5.7720    | 0.6677  | 0.7914  | 0.6257  | 0.5816  |
| b)    |           |         |         |         |         |
| $I_1$ | 0.1313    | 0.1775  | 0.1701  | 0.2347  | 0.2546  |
| $I_2$ | 17.4287   | 15.7713 | 16.2721 | 14.6482 | 14.1857 |
| $I_3$ | 11.4026   | 9.5835  | 7.0681  | 5.1593  | 4.3500  |

Tabela 4.  $\delta_1 = 1, \delta_3 = 0.05, d = 1, f:L_2, a) \delta_2 = 0.1, g, h:hb 0.5, S, b) \delta_2 = 0.05, g, h:hb 0.2, NS$

| $\alpha = 1$ | $N_u = 2$ | 3      | 4       | 5       | 6       |
|--------------|-----------|--------|---------|---------|---------|
| a)           |           |        |         |         |         |
| $I_1$        | 1.8786    | 0.6296 | 0.6420  | 0.5056  | 0.4859  |
| $I_2$        | 0.2512    | 0.2139 | 0.1843  | 0.1990  | 0.2403  |
| $I_3$        | 0.3685    | 0.3520 | 0.2957  | 0.3761  | 0.4296  |
| $\alpha = 2$ | $N_u = 2$ | 3      | 4       | 5       | 6       |
| $I_1$        | 1.2968    | 0.3377 | 0.3465  | 0.3346  | 0.3229  |
| $I_2$        | 0.8401    | 0.5376 | 0.4646  | 0.6045  | 0.6218  |
| $I_3$        | 1.6358    | 1.1823 | 1.0572  | 1.3431  | 1.4545  |
| $\alpha = 6$ | $N_u = 2$ | 3      | 4       | 5       | 6       |
| $I_1$        | *         | *      | 0.5587  | 0.7603  | 0.7528  |
| $I_2$        | *         | *      | 15.3336 | 13.9486 | 13.9359 |
| $I_3$        | *         | *      | 7.1076  | 4.8387  | 5.2358  |
| b)           | $N_u = 2$ | 3      | 4       | 5       | 6       |
| $I_1$        | *         | 0.2277 | 0.7568  | 0.3366  | 0.3213  |
| $I_2$        | *         | 8.6868 | 17.1282 | 15.9298 | 16.0999 |
| $I_3$        | *         | 5.9332 | 10.8545 | 7.5622  | 8.0318  |

Tabela 5.  $\delta_1 = \delta_2 = 1, \delta_3 = 0, f:L_2, g:\log, d = 1, \delta = 0.999, P = 0.1$  a) S, b) NS, \* – układ zamknięty niestabilny na skutek źle dobranych wag

| $\beta = 3$ | $N_u = 2$ | 3       | 4      | 5      | 6      |
|-------------|-----------|---------|--------|--------|--------|
| $I_1$       | 5.5038    | 0.3947  | 0.3740 | 0.3334 | 0.3840 |
| $I_2$       | 2.4072    | 0.4367  | 0.5160 | 0.6410 | 0.4586 |
| $I_3$       | 4.0040    | 0.9050  | 1.1452 | 1.3624 | 1.0031 |
| $\beta = 5$ | $N_u = 2$ | 3       | 4      | 5      | 6      |
| $I_1$       | 3.0268    | 0.2277  | 0.2457 | 0.2406 | 0.2678 |
| $I_2$       | 2.2861    | 16.6868 | 1.0693 | 1.1931 | 1.0224 |
| $I_3$       | 4.7786    | 8.9332  | 2.9674 | 3.1482 | 2.7683 |

Tabela 6.  $\delta_1 = \delta_3 = 1, \delta_2 = 0, f:L_2, h:\log, d = 1, S, \delta = 0.999, P = 0.1$

| $\alpha = 1, \beta = 2$ | $N_u = 2$ | 3      | 4      | 5      | 6      |
|-------------------------|-----------|--------|--------|--------|--------|
| $I_1$                   | 1.9222    | 0.7009 | 0.6186 | 0.5490 | 0.4060 |
| $I_2$                   | 0.2680    | 0.1954 | 0.1755 | 0.1673 | 0.2278 |
| $I_3$                   | 0.4326    | 0.3248 | 0.3042 | 0.3091 | 0.5110 |
| $\alpha = 2, \beta = 3$ | $N_u = 2$ | 3      | 4      | 5      | 6      |
| $I_1$                   | 1.5357    | 0.3661 | 0.4504 | 0.3628 | 0.3676 |
| $I_2$                   | 0.7107    | 0.4185 | 0.3821 | 0.5731 | 0.5089 |
| $I_3$                   | 1.2829    | 0.8577 | 0.8721 | 1.2250 | 1.0786 |

Tabela 7.  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1, f:L_2, g, h:\log, d = 1, S, \delta = 0.999, P = 0.1$

| $\alpha = 2, \beta = 3$ | $N_u = 2$ | 3      | 4      | 5      | 6      |
|-------------------------|-----------|--------|--------|--------|--------|
| $I_1$                   | 2.2019    | 0.4590 | 0.4370 | 0.6293 | 0.4209 |
| $I_2$                   | 0.9991    | 0.4389 | 0.3962 | 0.5948 | 0.4917 |
| $I_3$                   | 1.6871    | 0.9084 | 0.9287 | 1.2403 | 1.0704 |

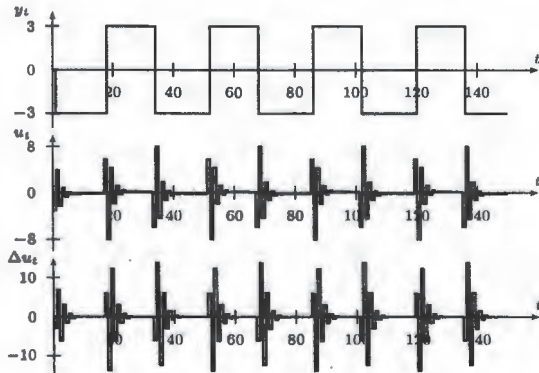
Tabela 8.  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1, f:L_2, g, h:\log, d = 1, S, \delta = 0.999, P = 0.1$

stawiono rozszerzenie powyższego o analizę kosztów sterowania przy ograniczeniach miękkich i sposób modyfikacji wagi jaką przykładą regulator do amplitudy czy przyrostu sterowania, co stanowi zaletę algorytmu, która wiąże się jednak ze wzrostem kosztów obliczeniowych.

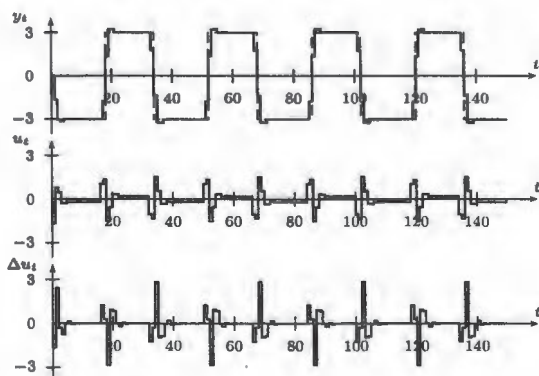
W drugiej części artykułu, przedstawiono wyniki zastosowania aproksymacji funkcji typu odcięcie za pomocą bariery logarytmicznej, co ma wpływ przede wszystkim na szybkość obliczeń optymalizacyjnych (jednoznaczne minimum w obszarze, na którym jest ona określona).

Poprzez zastosowanie funkcji barierowej (jak np. w sterowaniu CRHPC z [3]) jest możliwe uniknięcie zjawiska windup, co można interpretować jako regulator z niejawnym układem anti-windup, niedopuszczający do pozostania (przyrostu) sterowania na ograniczeniu. Nabiera to szczególnego znaczenia w przypadku sterowania adaptacyjnego, gdzie obowiązuje wymóg ustawiczności pobudzenia, co jest zapewnione przez odpychanie przez funkcję barierową (przyrostu) sterowania od ograniczeń.

W artykule pominięto analizę stabilności układu zamkniętego, co stanie się przedmiotem dalszych badań. Przeprowadzone symulacje pokazują, że badany algorytm umożliwia sterowanie zarówno obiektami stabilnymi oraz w pewnym zakresie niestabilnymi i nieminimalnofazowymi, dla różnych czasów opóźnienia, w zależności od wyboru  $N_u$  oraz parametrów  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ .



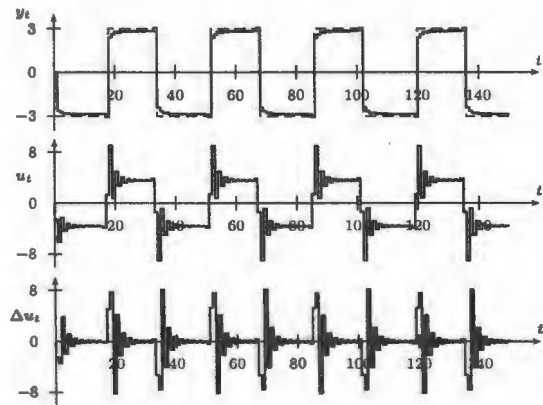
Rys. 9.  $\delta_1 = 1, \delta_2 = \delta_3 = 0, N_u = 2$ , ograniczenia miękkie, S,  $d = 1, L_2$



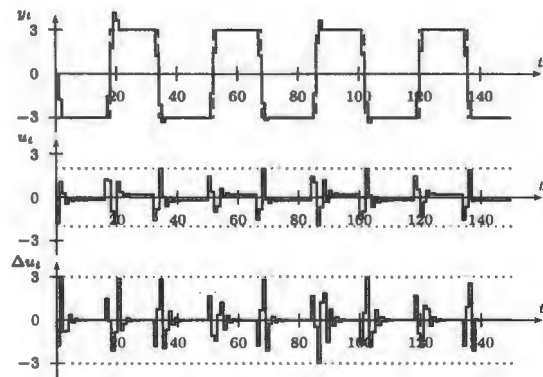
Rys. 10.  $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \delta_3 = 0.05, N_u = 3$ , ograniczenia miękkie, uchyb  $-L_2$ , sterowanie i przyrost  $-hb$  0.5, S,  $d=1$

#### CONVEX OPTIMISATION APPLIED TO THE SYNTHESIS OF A PREDICTIVE CONTROLLER WITH IMPLICIT ANTI-WINDUP COMPENSATOR

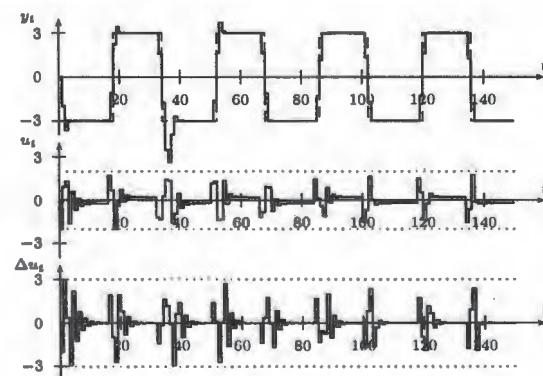
**Abstract:** A new adaptive predictive constrained control algorithm has been presented, utilising convex optimisation techni-



Rys. 11.  $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.05, \delta_3 = 0.05, N_u = 3$ , ograniczenia miękkie, uchyb  $-L_2$ , sterowanie i przyrost  $-hb$  0.2, NS,  $d = 1$



Rys. 12.  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1, N_u = 3$ , ograniczenia sztywne,  $f:L_2, g, h:\log, \alpha = 2, \beta = 3, S, d = 1$



Rys. 13. Sterowanie adaptacyjne,  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1, N_u = 3$ , ograniczenia sztywne,  $f:L_2, g, h:\log, \alpha = 2, \beta = 3, S, d = 1$

ques. Performance of the algorithm has been verified in a non-adaptive and adaptive system for various constrains imposed on the control signal.

#### Literatura

- [1] Boyd S., Barratt S., *Linear Controller Design: Limits of Performance*, Prentice-Hall, 1990.
- [2] Boyd S., Vandenberghe L., *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] Królikowski A., *Sterowanie adaptacyjne z ograniczeniami sygnału sterującego*, WPP, Poznań 2004.





**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

**ISBN 83-89475-02-2**