

# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

**STEROWANIE OPTYMALNE  
I ADAPTACYJNE**

# OD OPTYMALIZACJI PARAMETRYCZNEJ DO OPTYMALIZACJI DYNAMICZNEJ, CZYLI OD USTALONEJ STRUKTURY REGULATORA DO ODKRYCIA JEGO NIEZNANEJ STRUKTURY

Henryk GÓRECKI

Akademia Górniczo-Hutnicza im. St. Staszica, Katedra Automatyki  
ul. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: head@ia.agh.edu.pl

*Motto*

*„Optymalizacja, jest to proces ustalania najkorzystniejszych ograniczeń”*

## 1. WSTĘP

Reasumując te początki trzeba stwierdzić, że inżynierowie zaproponowali na drodze intuicyjnej dwie podstawowe struktury regulatorów a mianowicie regulatory typu P-I-D, oraz regulatory dwupozycyjne. Struktury te znalazły swe matematyczne uzasadnienie w teorii optymalnego sterowania przy przyjęciu odpowiednio kryteriów całki z kwadratu błędu i sterowania, oraz minimum czasu. Dalszy rozwój umożliwiły z jednej strony badania teoretyczne a z drugiej strony możliwości realizacji skomplikowanych algorytmów sterowania przy pomocy współczesnych komputerów.

## 2. GŁÓWNE REZULTATY NA TLE ROZWOJU TEORII OPTYMALIZACJI

Przyjmując umownie, że pod pojęciem systemu będziemy rozumieli trójkę:

- a) Dynamikę procesu;
- b) Kryterium działania inaczej cel działania systemu;
- c) Ograniczenia, w których system funkcjonuje możemy prześledzić rozwój teorii optymalizacji poprzez uwzględnienie coraz bardziej ogólnych modeli matematycznych dotyczących tych trzech składowych systemu.

Ad. a)

Model dynamiki procesu reprezentowany był kolejno przez równania różniczkowe skalarne, następnie wektorowo-macierzowe. Kolejnym uogólnieniem były równania funkcyjne uwzględniające opóźnienia w sterowaniu oraz w stanie, a następnie równania różniczkowe cząstkowe oraz hybrydowe różniczkowo-różnicowe a na koniec przy pomocy inkluzji różniczkowych.

Ad. b)

Kryterium działania systemu początkowo ograniczało się do pewnych wybranych lokalnych cech systemu takich jak czas trwania procesu przejściowego, przeregulowania, aby następnie przejść do pewnych kryteriów globalnych takich jak minimum zużycia energii, paliwa, czasu, entropii informacji czy też działania. Na koniec uwzględnienia wielu niewspółmiernych kryteriów jak na przykład czas i koszt i przejście do polioptymalizacji.

Ad. c)

Ograniczenia początkowo reprezentowane były równaniami liniowymi, następnie nieliniowymi oraz w postaci nierówności. Ostatnio wzrosły zainteresowania ograniczeniami nie holonomicznymi o więzach nie całkownych. Na tle tych kierunków rozwoju przedstawię krótko główne moim zdaniem osiągnięte rezultaty oraz ewentualne problemy czekające na rozwiązanie.

### 2.1. Optymalizacja parametryczna

Rozważmy system, którego równania dynamiki błędu mają postać następującą:

$$a_0 \frac{d^n \varepsilon}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \varepsilon}{dt^{n-1}} + \dots + a_n \varepsilon = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon^{(i)}(0) \neq 0 \quad \text{dla } i = 0, 1, \dots, n-1$$

Kryterium jakości jest

$$J_1 = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt \quad (2)$$

Przy tak określonym kryterium błąd dynamiczny musi być funkcją zachowującą stały znak.

Transformatę błędu określa związek.

$$E(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{a_0 s^n + \dots + a_{n-1} s + a_n} = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (3)$$

Oznaczmy zera transformaty E(s) przez

$$L(s) = (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_{n-1}) \quad (4)$$

$$z_i < 0 \quad i = 1, \dots, n-1$$

Natomiast bieguny przez

$$M(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

$$z_i < 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (5)$$

Warunki ograniczające stosowalność kryterium  $J_1$  są następujące:

- 1°. Zera i bieguny są rzeczywiste i ujemne  
 $s_i < 0 \quad z_j < 0 \quad i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$
- 2°.  $s_1 \succ z_1 \succ s_2 \succ z_2 \dots s_{n-1} \succ z_{n-1} \succ s_n$  (6)

czyli zera i bieguny powinny się wzajemnie przeplatać, przy czym najbliższym osi urojonych jest biegun  $s_1$ .

**Twierdzenie**

Niech  $L(s) = \prod_{i=1}^{n-1} (s - z_i)$  (7)

oraz

$$M(s) = \prod_{i=1}^n (s - s_i) \quad (8)$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby pierwiastki wielomianów  $L(s)$  i  $M(s)$  przedzielały się i były wszystkie rzeczywiste jest, aby wszystkie pierwiastki wielomianu

$$N(s) = M(s) + i L(s) \quad (9)$$

leżały po lewej stronie osi urojonych.

Do wielomianu  $N(s)$  można zastosować kryterium Schura aby zapewnić sobie przedzielenie się pierwiastków.

Wartość  $J_1$  można wyliczyć ze wzoru

$$J_1 = \frac{a_0 \varepsilon^{(n-1)}(0) + a_1 \varepsilon^{(n-2)}(0) + \dots + a_{n-1} \varepsilon(0)}{a_n} \quad (10)$$

Parametry obiektu i regulatora tkwią we współczynnikach  $a_0 \dots a_n$  i proces optymalizacji polega na szukaniu minimum  $J_1$  ze względu na parametry regulatora.

Ograniczenia stosowalności kryterium  $J_1$  związane ze stałością znaku błędu dynamicznego jest wysoce krępujące. Tego ograniczenia nie ma kryterium całki z kwadratu błędu przejściowego

$$J_2 = \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt \quad (11)$$

Obliczanie całki  $J_2$  dla układów skończenie wymiarowych było tematem wielu prac, m.in. James Phillips Nichols 1947, Feldbaum 1948, Krasowskij 1949, Jarominek 1961. Otrzymano wzory analityczne, które pozwoliły na optymalny dobór parametrów regulatora.

Dla układów opisywanych równaniem (1) całka  $J_2$  jest równa

$$J_2 = (-1)^{n-1} \frac{G}{a_0 H_n} \quad (12)$$

gdzie

$$H_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (13)$$

jest wyznacznikiem Hurwitza, a

$$G = \begin{vmatrix} g_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ g_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \\ g_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$g_r = b_1 b_{2r-1} - b_2 b_{2r-2} + \dots + (-1)^r b_{r-1} b_{r+1} + (-1)^{r+1} \frac{b_r^2}{2}$$

$$r = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

We wielu zagadnieniach przemysłowych kryteria całkowite mają charakter asymetryczny, a w miejsce drugiej potęgi błędu pojawia się wielomian od błędu, będący funkcją dodatnią. Znalazienie wzorów analitycznych wymagało uogólnienia kryterium  $J_2$  do postaci:

$$J_w = \int_0^\infty W[\varepsilon(t)] dt \quad (16)$$

gdzie  $W(\varepsilon(t)) = \varepsilon^k + c_1 \varepsilon^{k-1} + \dots + c_k \varepsilon$  (17)

Uogólnienie to zostało przedstawione w pracach [24,25],[28] i w efekcie uzyskuje się znacznie lepsze przebiegi błędu  $\varepsilon(t)$  oraz szersze możliwości doboru parametrów.

**Przykład [1]**

Rozważmy układ zamknięty, którego transformata błędu jest równa

$$E(s) = \frac{s^2 + 3s + 4}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2 + K} \varepsilon(0)$$

Odpowiednio otrzymujemy stosując metodę przedstawioną w [1]

$$J_2 + \int_0^\infty \varepsilon^2(t) dt = \frac{5K + 58}{(K = 2)(-K + 10)} \frac{\varepsilon^2(0)}{2}$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} \varepsilon^3(t) dt = \frac{6K^3 + 136K^2 + 2152K + 9440}{(K+2)(27K^2 + 1300)} \frac{\varepsilon^3(0)}{3}$$

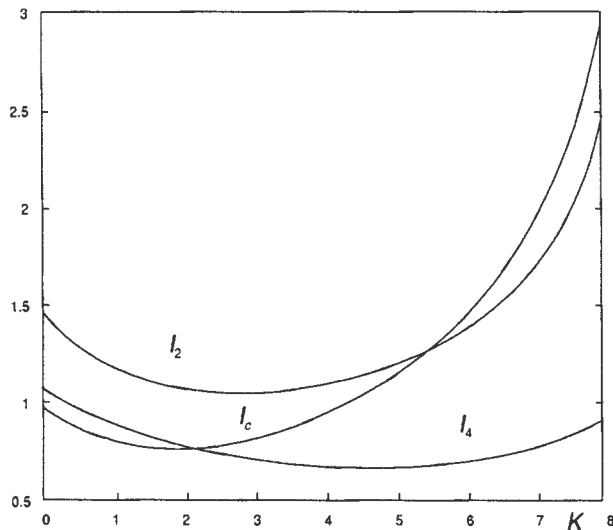
$$J_4 = \int_0^{\infty} \varepsilon^4(t) dt = \frac{-1373K^4 - 2345K^3 + 192100K^2 + 1870522K + 4937480}{(K+2)(-K+10)(K+68)(343K^2 + 1840K + 8500)} \frac{\varepsilon^4(0)}{4}$$

Przyjmując sumaryczne kryterium w postaci

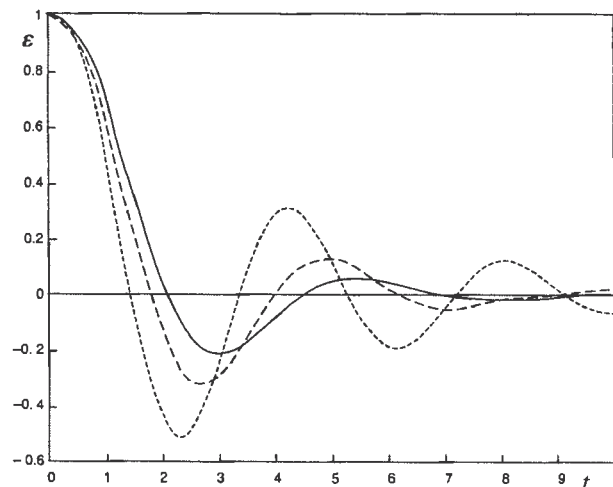
$$J_c = J_2 - 1,5J_3 + 1,25J_4$$

otrzymujemy optymalne wzmocnienie  $K = 1,826$  dla  $\varepsilon(0) = 1$ .

Na rys. 1 przedstawiono zależności kryteriów  $J_2, J_3, J_4$  od wzmocnienia  $K$ . Natomiast na rys. 2 przedstawiono przebiegi przejściowe błędów w zależności od czasu przy rozmaitych kryteriach. Widać, że przebieg przy kryterium sumarycznym  $J_c$  jest najlepszy, gdyż wykazuje małe oscylacje i szybko się ustala.



Rys. 1.



Rys. 2

Następnym poważnym krokiem było uogólnienie całki  $J_2$  na układy reprezentowane przez równania różniczkowe z opóźnionym argumentem, oraz na układy opi-

sywane równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Zatem w miejsce równań (1) i (3) rozważane były równania

$$\sum_{i=0}^n a_{oi} \varepsilon^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^m a_{1j} \varepsilon^{(j)}(t - \tau) = 0 \quad (18)$$

lub w postaci operatorowej

$$E(s) = \frac{B_0(s) + B_1(s)e^{-s\tau_1} + \dots + B_n e^{-s\tau_n}}{A_0(s) + A_1(s)e^{-s\tau_1} + \dots + A_n(s)e^{-s\tau_n}} \quad (19)$$

gdzie  $B_0, \dots, B_n$  i  $A_0, \dots, A_n$  są to wielomiany operatora  $s$ , a  $\tau_1, \dots, \tau_n > 0$  liczby rzeczywiste.

Następnie równania typu

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - a \frac{\partial^4 \varepsilon}{\partial t^2 \partial x^2} - b \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = 0 \quad (20)$$

z określonymi warunkami brzegowymi dla  $t=0, x=0$  oraz  $t=T$  i  $x=l$  lub w postaci operatorowej

$$E(s) = \frac{B_0(s) + B_1(s)e^{-\eta l(s)} + \dots + B_n(s)e^{-\eta n l(s)}}{A_0(s) + A_1(s)e^{-\eta l(s)} + \dots + A_n(s)e^{-\eta n l(s)}} \quad (21)$$

gdzie  $n = 1, 2, \dots$

Otrzymane wzory analityczne wraz z ich wyprowadzeniem można znaleźć w [12, 14, 17, 18, 19].

Tu przykładowo podaję dla transformaty błędu układu z opóźnieniem

$$E(s) = \frac{1}{s + K e^{-s\tau}} \quad (22)$$

Wartość całki z kwadratu błędu jest równa

$$J_2 = \frac{1}{2} \frac{\cos K\tau}{K(1 - \cos K\tau)} \quad (23)$$

a optymalna wartość wzmocnienia otrzymana z równania wynosi

$$\left. \begin{aligned} \frac{dJ_2}{dK} = 0 &\rightarrow \cos K\tau - K\tau = 0 \\ K\text{opt}\tau &= 0,739 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

podczas, gdy wzmocnienie krytyczne ze względu na stabilność jest równe

$$0 < K_{kv}\tau < \frac{\pi}{2} \quad (25)$$

Podobnie dla układu opisywanego równaniem różniczkowym cząstkowym o transformacji

$$E(s) = \frac{1}{s + K e^{-as\sqrt{s^2 + b^2}}} \quad (26)$$

wartość  $J_2$  jest równa

$$J = \frac{1}{4K} \frac{\cos \left[ aK\sqrt{b^2 - K^2} \right]}{1 - \sin \left[ aK\sqrt{b^2 - K^2} \right]} \quad (27)$$

Z wyrażenia (27) łatwo otrzymać optymalną oraz krytyczną wartość wzmocnienia K.

## 2.2. Optymalizacja dynamiczna – sterowanie optymalne

Rozważmy trzy zasadnicze kryteria

- 1) Kryterium całki z sumy kwadratów błędu i sterowania;
- 2) Kryterium minimalno-czasowe;
- 3) Kryterium najmniejszego działania.

Ad. 1.

Kryterium

$$J_2 = \int_0^T [\varepsilon^T(t)Q\varepsilon(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (28)$$

Jest najczęściej używanym i dla układów opisywanych równaniem (1) lub jego wersję wektorowo-macierzową prowadzi do regulatorów proporcjonalnych do składowych błęd. W szczególności dla układów stacjonarnych przy horyzoncie optymalizacji  $T \rightarrow \infty$  ma bardzo ciekawą interpretację.

Zauważamy, że dla układu (1) zapisanego w postaci

$$\dot{\varepsilon}(t) = A\varepsilon(t) + Bu(t) \quad (29)$$

gdzie macierz A jest macierzą Frobeniusa optymalne sterowanie jest równe

$$u_o(t) = -R^{-1}B^T P \varepsilon(t) \quad (30)$$

przy czym macierz P spełnia równanie Riccatiego

$$0 = Q - PB^{R^{-1}}B^T P + PA + A^T P \quad (31)$$

Rozwiązanie równania (31) jest bardzo uciążliwe, gdyż trzeba znaleźć elementy macierzy P z układu równań algebraicznych drugiego stopnia powiązanych wzajemnie. Alternatywą jest skorzystanie z równania Kalmana (1964). Równanie to dla układów wielowymiarowych uogólnił MacFarlane, a dla układów z opóźnieniem Shimemura. W celu pokazania ciekawych własności równania Kalmana rozważmy przypadek skalarny, gdy równanie obiektu ma postać (1). Transmittancja obiektu będzie równa

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} \quad (32)$$

Przyjmijmy, że  $Q=R=1$  w kryterium (28).

Równanie Kalmana ma postać następującą

$$(-1)^{n-p} L(s)L(-s) + M(s)M(s) + 0 \quad (33)$$

lub

$$(-1)^{n-p} \prod_{i=1}^p (s - z_i)(s + z_i) + \prod_{i=1}^n (s - p_i)(s + p_i) = 0 \quad (34)$$

gdzie  $z_i$  są zerami, a  $p_i$  biegunami transmittancji (32). Interpretując równanie (33) jako kwadraty modułów licznika i mianownika widzimy, że równanie (33) przedstawia znaną zależność Pitagorasa, jeśli na jednej

osi odłożymy jako przyprostokątne moduły licznika a na drugiej moduły mianownika. Wtedy przeciwprostokątna reprezentuje moduł mianownika optymalnego układu zamkniętego. Ta interpretacja zachowuje swą ważność także w przypadku równań funkcyjnych, na przykład dla układów z opóźnieniem – gdzie zamiast wielomianów mamy kwasiwielomiany, a biegunów może być nieskończenie wiele. Znając pierwiastki równania charakterystycznego zamkniętego układu optymalnego, możemy ze wzorów Vieta wyznaczyć optymalne wzmocnienia. Zastosowanie tej metody do wyznaczenia optymalnych wzmocnień w układach łańcuchowych przedstawione jest w pracy [34].

### Przykład

Niech transmittancja obiektu jest równa

$$G_o = \frac{b_o}{s + a_o}$$

Transformata stanu układu zamkniętego

$$X(s) = \frac{b_o}{s + a_o + k_o} x(0)$$

$$U(s) = \frac{k_o}{s + a_o + k_o} x(0) \text{ - Transformata sterowania}$$

Funkcjonał

$$J = \frac{b_o^2}{2(a_o + k_o)} x^2(0) + \frac{k_o^2}{2(a_o + k_o)} x^2(0) =$$

$$= \frac{b_o^2 + k_o^2}{2(a_o + k_o)} x^2(0)$$

$$\frac{dJ}{dk_o} = \frac{2k_o(a_o + k_o) - (b_o^2 + k_o^2)}{2(k_o + a_o)} x^2(0) =$$

$$= \frac{k_o^2 + 2a_o k_o - b_o^2}{2(k_o + a_o)^2} x^2(0)$$

$$\frac{dJ}{dk_o} = 0 \Rightarrow k_o^2 + 1a_o k_o - b_o^2 = 0 \text{ - równanie Riccatiego}$$

Równanie Kalmana

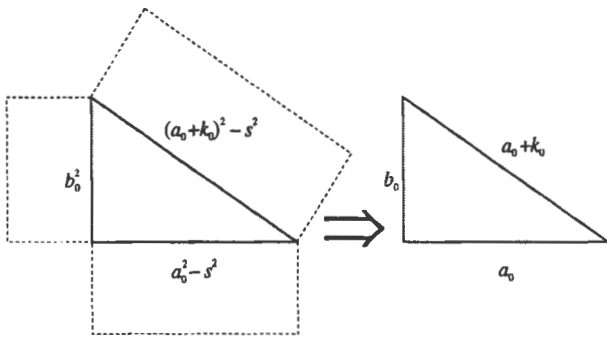
$$(s + a_o)(-s + a_o) + b_o^2 = (s + a_o + k_o)(-s + a_o + k_o)$$

czyli

$$a_o^2 - s^2 + b_o^2 = (a_o + k_o)^2 - s^2 \Rightarrow a_o^2 - s^2 + b_o^2 = a_o^2 + 2k_o a_o + k_o^2 - s^2$$

ostatecznie otrzymujemy równanie Riccatiego  $k_o^2 + 2a_o k_o - b_o^2 = 0 \Rightarrow$  przez porównanie współczynników przy tych samych potęgach operatora „s”





Ad. 2.

W przypadku układów minimalno-czasowych przy ograniczeniu sterowania do zbioru w kształcie kostki, sterowanie optymalne znajduje się na ograniczeniach. Fakt ten pozwala sprowadzić problem sterowania optymalnego do wyznaczenia optymalnych czasów przełączeń, a więc do optymalizacji parametrycznej. Takie podejście pozwala na uzyskanie ogólnych rezultatów analitycznych, bowiem minimalny czas jest funkcją tylko czasów przełączeń, a regulator staje się typu przełącznikowego [4,5,6,7,10].

Ad. 3

W przypadku kryterium opartego o zasadę minimum działania mamy funkcjonal

$$J_3 = \int_0^T (E - V) dt$$

gdzie  $E$  – reprezentuje energię kinetyczną, a  $V$  energię potencjalną układu. W oparciu o tą zasadę działa wiele układów technicznych, na przykład grzejnik przepływowy. Natomiast w układach biologicznych występują dwie strategie:

- 1o. Maksimum działania – energii kinetycznej przy minimalnym czasie  $T$  – drapieżcę na przykład Lampart.
- 2o. Minimum działania przy maksymalnym czasie  $T$  – roślinożercy na przykład leniwiec lub miś Koala.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na to, że uogólnienie idące w kierunku układów nieliniowych wymaga na zasadzie dualności uogólnienia kryterium jakości. Przykład zastosowanie metod geometrii różniczkowej do tego celu znajduje się w [37].

#### Przykład

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x + b u \quad , \quad x(0) = x_0$$

$$J + \int_0^{\infty} \{ f[x(t)] + \lambda u^2(t) \} dt$$

Równanie Bellmana

$$\frac{d}{du} \left\{ f(x) + \lambda u^2 + \frac{d}{dx} [S(x)(a_1 x + b u)] \right\} = 0$$

$$U_{op} = - \frac{b}{2\lambda} \frac{dS}{dx}$$

$$f(x) + a_1 x \frac{dS}{dx} - \frac{b^2}{4\lambda} \left( \frac{dS}{dx} \right)^2 = 0$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{2\lambda a_1}{b^2} x + \sqrt{\left( \frac{2\lambda a_1}{b^2} x \right)^2 + \frac{4\lambda}{b^2} f(x)}$$

Przyjmujemy

$$f(x) = \frac{b^2}{4\lambda} \left[ (\gamma_0 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_2)^2 - \left( \frac{2\lambda a_1}{b^2} x \right)^2 \right]$$

$$U_{op} = - \frac{b^2}{2\lambda} \left[ \frac{2\lambda a_1}{b^2} x_{op} + \gamma_0 x_{op}^2 + \gamma_1 x_{op} + \gamma_2 \right]$$

#### Dualność

Niech

$$\frac{dx(t)}{dt} = q[x(t)] + b u(t)$$

$$J_2 + \int_0^{\infty} [x^2(t) + \lambda u^2(t)] dt$$

Kładziemy

$$v = q(x) + b u$$

Mamy równanie

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t)$$

$$J_2 + \int_0^{\infty} \left\{ x^2(t) + \frac{\lambda}{b} [v(t) - q[x(t)]]^2 \right\} dt$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{2\lambda}{b} q(x) + \sqrt{\left[ \frac{2\lambda}{b} q(x) \right]^2 + x^2}$$

$$V_{op} = - \frac{b}{2\lambda} \sqrt{\left[ \frac{2\lambda}{b} q(x) \right]^2 + x^2}$$

#### Literatura

- [1] Górecki H., Turowicz A. (1960) Optimum transient problem in linear automatic control systems. *Automatic and Remote Control. Proc. Of the 1st International Congress of the IFAC, Moscow, Butterworths*, 3.
- [2] Nowacji P., Szklarski L., Górecki H. (1962) Podstawy teorii układów regulacji automatycznej. *Zagadnienia specjalne układów liniowych. Układy nieliniowe, T. II*. PWN Warszawa, 476, (monografia książkowa).
- [3] Górecki H., Turowicz A. (1968) Opriedielenije zavimosti maksimalnogo otklonienija regulirujemoj wieliciny i vriemieni otklonienija ot paramietrov v linejnych sistemach upravlenija. AN SSSR, Moskwa. *Avtomatika i Tielemechanika*. 6, 3.
- [4] Górecki H., Turowicz A. (1968) On switching instants in minimum-time control problem. I. One-

- dimensional case. Different eigen-values. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sci.Math. Astr. et Phys.* XVI, 2, 6.
- [5] Górecki H., Turowicz A. (1968) On switching instants in minimum-time control problem. II. One-dimensional case n-tuple eigen-value. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sci.Math. Astr. et Phys.* XVI, 2, 8.
- [6] Górecki H., Turowicz A. (1968) On switching instants in minimum-time control problem. I. Multidimensional case. Different eigen-values. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sci.Math. Astr. et Phys.* XVI, 8, 7.
- [7] Górecki H., Turowicz A. (1968) On switching instants in minimum-time control problem. II. Multidimensional case n-tuple eigen-value. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sci. Math. Astr. Et Phys.* XVI, 8, 8.
- [8] Górecki H., Turowicz A. (1970) *Sterowanie optymalne (Przegląd metod matematycznych)*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa, Wrocław.
- [9] Górecki H., Turowicz A. (1973) Analysis of an electric network chain with feedback. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sci. Techn.* XXI, 1, 8.
- [10] Górecki H., Turowicz A. (1975) The transient process and the switching moments for the system with distributed parameters and feedback. *Preprints of VIth World Congress IFAC*, Boston USA 1975, Part IA – Distributed Parameter System, Differential Games, ps. 4.
- [11] Górecki H. i in. (1978) Optimal control of the systems with distributed parameters (a survey). *7th Triennial World Congress*, 4 – Plenary Invited Lectures and Late Papres. IFAC, Pergamon Press, Helsinki, Finlandia, 23.
- [12] Górecki H., Popok L. (1982) Control of the systems with time delay. *Proc. of 3rd Symposium: Control of Distributed Parameter System*, France.
- [13] Górecki H. i in. (1983) *Sterowanie optymalne w systemach liniowych z kwadratowym wskaźnikiem jakości*. PWN, Warszawa, 511.
- [14] Górecki H., Popok L. (1984) Parametric optimization problem for control systems with time-delay. *9th World Congress IFAC Budapest Węgry*.
- [15] Górecki H. (1988) The theorem concerning performance index for dynamic control systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Techn. Sci.*, 36, 3-4.
- [16] Górecki H., Fuksa S., Grabowski P., Korytowski P. (1989) *Analysis and synthesis of time delay*. J. Wiley and Sons Ltd., Chichester, 369.
- [17] Górecki H., Popok L. (1991) Integral square error (ISE) criterion for the systems with time-delay. *Archiwum Automatyki I Telemekhaniki*, XXXVI, 3-4.
- [18] Górecki H., Popok L. (1991) Calculation of the integral squared error for large dynamic systems with many commensurate delays. *Control and Cybernetics*, 20, 2.
- [19] Marshall J.E., Górecki H., Walton K., Korytowski A. (1992) *Time Delay Systems: Stability and Performance Criteria*. Ellis-Horwood, New York, London, 244.
- [20] Górecki H., Korytowski A. (1993) *Advances in optimization and stability analysis of dynamical systems*. AGH, Kraków, 246.
- [21] Górecki H. (1993) *Optymalizacja systemów dynamicznych*. PWN, Warszawa, 588.
- [22] Górecki H. (?) Integral square error in control systems with transcendental transfer functions. *Archives of Control Sciences*, 3 (XXXIX), 1-2, 15-34.
- [23] Górecki H. (1994) Parameter optimization of infinite-dimensional dynamic systems. *Mat. of Ist Intern. Symposium on Mathematical Models in Automation and Robotics, Międzyzdroje 1994*. Technical University, Szczecin Press.
- [24] Górecki H. (1994) A new method for calculation of the generalized integral criterion  $\int_0^{\infty} \varepsilon^{2k}(t) dt, k=1,2,\dots$ . *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Techn. Sci.*, 42, 4.
- [25] Górecki H. (1995) Generalization of Parseval's theorem and its application. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Techn. Sci. (Electronics and Electrotechnics)*, 43, 2.
- [26] Górecki H. (1995) Uogólnienia całkowego kryterium jakości układów sterowania. *Elektrotechnika*, 14, 3.
- [27] Górecki H., Miller J. (1995) Calculation of the integral square error for systems with noncommensurate delays. *Archives of Control Sciences*, 4 (XL), 3-4, 203-222.
- [28] Górecki H., Szymkat M., Zaczyk M. (1996) A generalization of the Orlando formula – symbolic manipulation approach. *International Series Numerical Mathematics*, 121, Birkhauser Verlag, Basel, 33-42.
- [29] Górecki H. (1996) Overshoots in linear control systems. *Archives for Control Sciences*, 5(XLI), 3-4, 217-243.
- [30] Górecki H. (1998) Optymalizacja parametryczna stabilizacji pętyka na dłoni człowieka. *Problemy Automatyki i Informatyki PAN*, O/Wrocław, Wyd. Zakł. im. Ossolińskich, 261-268.
- [31] Górecki H. (1999) Optymalizacja nieskończonego wymiarowych systemów dynamicznych. *Analiza Systemowa i Zarządzanie*. IBS PAN, Warszawa, druk: AGRAF – Agencja Poligraficzna Wydawnicza, 83-95.
- [32] Górecki H. (1999) *Zastosowanie całek konturowych do optymalizacji systemów dynamicznych*. AGH, 100.
- [33] Górecki H. (2000) An electric network chain with feedbacks. *Control and Cybernetics*, 29 1.

- [34] Górecki H. (2001) Optimal control of electric network chain. *Biuletyn PAN*, **49**, 1.
- [35] Górecki H. (2001) Metody obliczania całki z kwadratu błędu przejściowego: układu skończenie wymiarowe. *Zesz. Naukowe AGH. Elektronika i Elektrotechnika*, **20**, 1, 22-30.
- [36] Górecki H. (2001) Metody obliczania całki z kwadratu błędu przejściowego i układy nieskończenie wymiarowe. *Zesz. Naukowe AGH. Elektronika I Elektrotechnika*, **20**, 1, 31-38.
- [37] Górecki H. (2002) Optimal control of stationary linear systems with polynomial performance index. *American Control Conference, Anchorage, Alaska*, 471-475 (całość na CD-ROM), Abstract w Book of Abstract, 39].
- [38] Górecki H. (2004) A new method for analytic determination of the transients in linear systems. *Control and Cybernetics*, **33**, 2, 275-295.
- [39] Korytowski A. (1995) *Analityczne rozwiązania liniowo-kwadratowego problemu sterowania optymalnego z opóźnieniami*. AGH, Kraków.
- [40] Langmann H. (1998) Optymalizacja parametryczna w zastosowaniu do problemu liniowo-kwadratowego dla systemów wielowymiarowych. *Zeszyty naukowe AGH, Automatyka*, **43**, Kraków.
- [41] Langmann H. (1998) Różniczkowe równanie Riccatiego, *Zeszyty naukowe AGH, Automatyka*, **2**, 2.
- [42] Mitkowski W. (1974) Sterowanie optymalne w sieciach przestrzennych, *Archiwum Elektrotechniki*, **XXIII**, 2.





**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

**ISBN 83-89475-02-2**