XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ, OBSERWOWALNOŚĆ

STEROWALNOŚĆ DODATNICH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z JEDNYM OPÓŹNIENIEM ZMIENNYCH STANU†

Rafał KOCISZEWSKI

Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail: rafko@pb.bialystok.pl

Streszczenie: W pracy podano łatwe do sprawdzenia kryteria sterowalności dodatnich układów dyskretnych z opóźnieniem zmiennych stanu równym jedności. Sformułowano proste zależności pozwalające na wyznaczenie ciągów sterujących, przeprowadzających rozpatrywane układy z niezerowych nieujemnych warunków początkowych do zera oraz z niezerowych nieujemnych warunków początkowych do dowolnego zadanego nieujemnego stanu końcowego. Rozważania zilustrowano przykładami.

Słowa kluczowe: Układ dodatni, układ dyskretny, opóźnienie, sterowalność, osiagalność.

1. WSTĘP

Sterowalność układów dynamicznych odgrywa znaczącą rolę w nowoczesnej teorii sterowania. Problematyka sterowalności występuje między innymi przy strukturalnej dekompozycji układów, przy przesuwaniu biegunów czy też przy syntezie sterowania o kwadratowych wskaźnikach jakości regulacji [6].

Problem sterowalności układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych, lecz bez opóźnień, jest tematem wielu publikacji (np. monografie [6, 8, 9] i cytowana tam literatura). Sterowalność układów dyskretnych z opóźnieniem była rozpatrywana np. w pracy [1], natomiast sterowalność układów dodatnich bez opóźnień np. w monografiach [6, 7]. Problem sterowalności układów dodatnich z opóźnieniami był rozpatrywany w pracach [10] (układy ciągłe) i [11] (układy dyskretne). W pracy [11] sformułowano tylko kryteria sterowalności układów dodatnich dyskretnych bez podania metod na wyznaczanie właściwych ciągów sterujących.

W niniejszej pracy zostaną podane proste i łatwe do sprawdzenia kryteria sterowalności układów dodatnich dyskretnych z opóźnieniami oraz wzory pozwalające na wyznaczenie ciągów sterujących, przeprowadzających rozpatrywane układy (sterowalne) z zerowych i niezerowych nieujemnych warunków początkowych do zadanych nieujemnych stanów końcowych.

†Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Niech $\Re^{n\times m}$ będzie zbiorem macierzy o wymiarach $n\times m$ o rzeczywistych elementach oraz $\Re^n = \Re^{n\times 1}$. Zbiór macierzy o wymiarach $n\times m$, których elementami są liczby rzeczywiste nieujemne będziemy oznaczać przez $\Re_+^{n\times m}$, przy czym $\Re_+^n = \Re_+^{n\times 1}$. Zbiór liczb całkowitych dodatnich będziemy oznaczać przez Z_+.

Weźmy pod uwagę dodatni dyskretny układ liniowy z opóźnieniem, opisany równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_0 x_i + A_1 x_{i-1} + Bu_i, \tag{1}$$

z warunkiem początkowym

$$x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n, \tag{2}$$

gdzie $x_i \in \Re^n$, $u_i \in \Re^m$ oraz

$$A_0 \in \Re_+^{n\times n},\quad A_1 \in \Re_+^{n\times n},\quad B \in \Re_+^{n\times m}. \tag{3}$$

Przy spełnieniu warunku (3) rozwiązanie równania stanu (1) jest nieujemne ($x_i \in \Re_+^n$) dla każdego $i \in Z_+$ [3, 4]. Rozwiązanie równania stanu (1) z warunkiem początkowym (2) ma postać [1, 2]

$$x_i = \Phi(i)x_0 + \Phi(i-1)A_1 x_{-1} + \sum_{k=0}^{i-1} \Phi(i-1-k)Bu_k, \tag{4}$$

gdzie

$$\Phi(i) = Z^{-1}\{(zI - A_0 - A_1 z^{-1})^{-1} z\}, \tag{5}$$

jest macierzą podstawową (tranzycyjną), natomiast Z^{-1} oznacza odwrotne przekształcenie Z.

Macierz podstawowa $\Phi(i)$ spełnia równanie

$$\Phi(i+1) = A_0\Phi(i) + A_1\Phi(i-1), \tag{6}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi(0) = I_n, \quad \Phi(i) = 0 \text{ dla } i < 0. \tag{7}$$

Będziemy przyjmować do dalszych rozważań, że układ dodatni (1) jest osiągalny (warunek konieczny sterowalności).

Definicja 1. Dodatni układ (1) nazywamy osiągalnym, jeżeli dla każdego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$ istnieje liczba $N \in Z_+$ i ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$ dla $i = 0,1,2,\dots,N-1$, który przeprowadza układ (1) z zerowego stanu początkowego (2) ($x_{-1} = x_0 = 0$) do zadanego stanu końcowego $x_N = x_f \in \Re_+^n$.

Definicja 2. Układ dodatni (1) nazywamy sterowalnym, jeżeli dla dowolnych niezerowych warunków początkowych $x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n$ i dowolnego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$ istnieje liczba $N \in Z_+$ i ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\dots,N-1$, który przeprowadza stan tego układu z niezerowego warunku początkowego do stanu końcowego $x_N = x_f$.

Definicja 3. Układ dodatni (1) nazywamy sterowalnym do zera, jeżeli dla dowolnego niezerowego warunku początkowego $x_{-1}, x_0 \in \Re_+^n$ i dowolnego zadanego stanu końcowego $x_f = 0$, istnieje liczba $N \in Z_+$ i ciąg wymuszeń $u_i \in \Re_+^m$, $i = 0,1,\dots,N-1$, takie że $x_N = 0$.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków sterowalności układu (1) oraz prostych zależności pozwalających na wyznaczenie ciągów sterujących, przeprowadzających rozpatrywany układ z niezerowych warunków początkowych (2) do zera oraz do zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re_+^n$.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Rozwiązanie równania stanu (1) ma postać (4). Dla $i = N > 0$ możemy napisać

$$x_N = P_N \tilde{x}_0 + R_N u_0^N, \tag{8}$$

gdzie

$$P_N = [\Phi(N), \Phi(N-1)A_1], \tag{9}$$

$$R_N = [\Phi(N-1)B, \Phi(N-2)B, \dots, \Phi(1)B, B], \tag{10}$$

$$\tilde{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_{-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{2n}, \quad u_0^N = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \in \Re_+^{Nm}. \tag{11}$$

Przyjmując $x_N = 0$ w (8) otrzymamy

$$0 = P_N \tilde{x}_0 + R_N u_0^N, \tag{12}$$

Ponieważ $R_N \in \Re_+^{n \times Nm}$, $u_0^N \in \Re_+^{Nm}$ oraz $P_N \in \Re_+^{n \times 2n}$, wówczas równość

$$-P_N \tilde{x}_0 = R_N u_0^N, \tag{12a}$$

może być spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $P_N \tilde{x}_0 = 0$ dla każdego $\tilde{x}_0 \in \Re_+^{2n}$. Wtedy $u_0^N = 0$.
Warunek

$$P_N \tilde{x}_0 = [\Phi(N), \Phi(N-1)A_1]\tilde{x}_0 = 0, \tag{13}$$

jest spełniony dla każdego $\tilde{x}_0 \in \Re_+^{2n}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Phi(N) = 0 \text{ i } \Phi(N-1)A_1 = 0. \tag{14}$$

W pracy [4] pokazano, że

$$\Phi(2n) = -a_{2n-1}\Phi(2n-1) - \dots - a_1\Phi(1) - a_0\Phi(0), \tag{15}$$

$$\Phi(2n-1)A_1 = \{-a_{2n-1}\Phi(2n-2) - \dots - a_1\Phi(0)\}A_1, \tag{16}$$

gdzie a_i $(i = 0,1,\dots,2n-1)$ są to współczynniki wielomianu charakterystycznego

$$\begin{aligned} w(z) &= \det(z^2 I - A_0 z - A_1) = \\ &= z^{2n} + a_{2n-1}z^{2n-1} + \dots + a_1 z + a_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Z powyższego wynika, że warunek (13) jest spełniony dla $N = 2n$ wtedy i tylko wtedy, gdy są zerowe współczynniki wielomianu charakterystycznego (17).
Ponadto

$$\begin{aligned} w(z) &= \det(zI - F) = \\ &= z^{2n} + a_{2n-1}z^{2n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \end{aligned} \tag{18}$$

gdzie

$$F = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

przy czym

$$F^{2n} = -a_{2n-1}F^{2n-1} - \dots - a_1 F - a_0 I. \tag{20}$$

Zatem, jeżeli są zerowe współczynniki wielomianu charakterystycznego (17), to $F^{2n} = 0$.

Z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. Układ dodatni (1) jest sterowalny do zera w $N = 2n$ krokach wtedy i tylko wtedy, gdy macierz F o postaci (19) ma tylko zerowe wartości własne.
■

Zauważmy, że jeżeli macierz F ma tylko zerowe wartości własne, to $u_0^N = 0$.

Poniżej wykażemy, że podana w Twierdzeniu 1 liczba kroków może być mniejsza niż $2n$.
Oznaczmy przez μ indeks nilpotentności macierzy F, tzn. $F^{\mu}=0$, ale $F^{\mu-1}\neq 0$, przy czym $\mu\leq 2n$.
Ponieważ [4]

$$F^{i}=\begin{bmatrix} \Phi(i) & \Phi(i-1)A_1 \\ \Phi(i-1) & \Phi(i-2)A_1 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

podstawiając $i=\mu$ otrzymamy

$$F^{\mu}=\begin{bmatrix} \Phi(\mu) & \Phi(\mu-1)A_1 \\ \Phi(\mu-1) & \Phi(\mu-2)A_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Zatem $\Phi(\mu)=0$, $\Phi(\mu-1)=0$ oraz $\Phi(\mu-2)A_1=0$.
W tej sytuacji warunek (13) jest spełniony dla $N=\mu-1$, tj.

$$\Phi(N)=0 \text{ i } \Phi(N-1)A_1=0. \tag{23}$$

Z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Jeżeli macierz F jest nilpotentna z indeksem nilpotentności μ, to układ dodatni (1) jest sterowalny do zera w $N=\mu-1$ krokach.

Przykład 1. Weźmy pod uwagę dyskretny dodatni układ liniowy z opóźnieniem, opisany równaniem stanu (1) o macierzach

$$A_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Łatwo sprawdzić, że macierz $F\in\Re_+^6$ o postaci (19) jest nilpotentna, przy czym indeks nilpotentności $\mu=5$, tj. $F^i=0$ dla $i\geq\mu=5$, przy czym $\Phi(4)=\Phi(5)=0$ i $\Phi(3)A_1=0$.

Zatem z Twierdzenia 2 wynika, że rozpatrywany układ dodatni jest sterowalny do zera w $N=\mu-1=4$ krokach. ■

Rozważmy obecnie przypadek, w którym zadany stan końcowy $x_f\in\Re_+^n$ jest różny od zera.
Przyjmując $x_N=x_f$ wzór (8) napiszemy w postaci

$$x_f-P_N\tilde{x}_0=R_N u_0^N. \tag{25}$$

Ponieważ układ dodatni (1) jest osiągalny z założenia, to istnieje taka liczba naturalna N, dla której macierz $R_N\in\Re_+^{n\times Nm}$ ma pełny rząd wierszowy. Warunek (25) musi być spełniony dla dowolnych $x_f\in\Re_+^n$ i $\tilde{x}_0\in\Re_+^{2n}$ przy $u_0^N\in\Re_+^{Nm}$. Jest to możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy $(x_f-P_N\tilde{x}_0)\in\Re_+^n$ dla dowolnych $x_f\in\Re_+^n$ i $\tilde{x}_0\in\Re_+^{2n}$, czyli gdy $P_N\tilde{x}_0=0$ dla dowolnego $\tilde{x}_0\in\Re_+^{2n}$. Powyższy warunek jest spełniony, gdy macierz F jest nilpotentna. Jeżeli natomiast macierz F nie jest nilpotentna, to nie można zagwarantować, że sterowanie u_0^N w (25) jest nieujemne dla dowolnych $x_f\in\Re_+^n$ i $\tilde{x}_0\in\Re_+^{2n}$.
Zgodnie z powyższymi rozważaniami $P_N\tilde{x}_0=0$ dla $N\geq\mu$-1. Wtedy dla $N\geq\mu$-1 zanika drugi składnik lewej strony wzoru (25) i problem sterowalności sprowadza się do problemu osiągalności. Uwzględniając założenie, że układ jest osiągalny (warunek konieczny sterowalności) otrzymamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Dodatni układ (1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on osiągalny i macierz F jest nilpotentna. ■

Jeżeli są spełnione warunki Twierdzenia 3 oraz macierz $R_N^{\mathrm{T}}[R_N R_N^{\mathrm{T}}]^{-1}$ jest macierzą o nieujemnych elementach, to ciąg sterowań można wyznaczać ze wzoru

$$\begin{aligned} u_0^N &= R_N^{\mathrm{T}}[R_N R_N^{\mathrm{T}}]^{-1}(x_f-P_N\tilde{x}_0)= \\ &= R_N^{\mathrm{T}}[R_N R_N^{\mathrm{T}}]^{-1}x_f. \end{aligned} \tag{26}$$

Przykład 2. Wyznaczyć ciąg sterowań przeprowadzających dodatni układ z opóźnieniem, opisany równaniem stanu (1) o macierzach

$$A_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{27}$$

z zadanego zupełnego stanu początkowego $x_0=[1\ 2\ 3]^{\mathrm{T}}$, $x_{-1}=[2\ 1\ 2]^T$ do stanu końcowego $x_f=[4\ 5\ 6]^T$.
Najpierw zbadamy osiągalność tego układu, przyjmując $N=4$ [3]. Macierz osiągalności (10) ma postać

$$\begin{aligned} R_N &= R_4=[\Phi(3)B,\Phi(2)B,\Phi(1)B,B] \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

Rząd macierzy (28) jest równy $n=3$, a więc rozpatrywany układ jest osiągalny w $N=4$ krokach (warunek konieczny sterowalności jest spełniony).
Łatwo sprawdzić, że macierz $F\in\Re_+^6$ o postaci (19) jest nilpotentna, przy czym $\mu=5$, tj. $F^i=0$ dla $i\geq\mu=5$, przy czym $\Phi(4)=\Phi(5)=0$ i $\Phi(3)A_1=0$.
Zatem

$$P_4 = [\Phi(4), \Phi(3)A_1] = 0. \quad (29)$$

Wobec tego wyznaczane sterowanie nie zależy od warunków początkowych, tzn.

$$u_0^4 = R_4^{\mathrm{T}}[R_4 R_4^{\mathrm{T}}]^{-1} x_f. \quad (30)$$

Obliczając z powyższego wzoru ciąg sterowań, otrzymamy

$$u_0^4 = R_4^{\mathrm{T}}[R_4 R_4^{\mathrm{T}}]^{-1} x_f = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

W celu sprawdzenia otrzymanych wyników wyznaczymy rozwiązanie równania (1) o macierzach (27) przy zadanych warunkach początkowych oraz $u_0 = 5$, $u_1 = 6$, $u_2 = 0$, $u_3 = 4$.

Ze wzoru (1) dla $i = 0,\dots,3$, otrzymamy odpowiednio:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \; x_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy rozpatrzono problem sterowalności dodatniego układu dyskretnego z jednym opóźnieniem zmiennych stanu równym jedności. Podano proste zależności pozwalające na wyznaczenie ciągów sterujących, przeprowadzających rozpatrywane układy z zerowych oraz niezerowych warunków początkowych do zera oraz do zadanego stanu końcowego. Podane rozwiązanie problemu nie było dotąd rozpatrywane w pracach z zakresu układów dodatnich, jedynie w pracy [11] sformułowano kryteria sterowalności układów dodatnich dyskretnych bez podania metod na wyznaczanie ciągów sterujących. W rozważaniach w sposób istotny wykorzystano postać rozwiązania równania stanu (1), podaną w pracy [2].

CONTROLLABILITY OF POSITIVE DISCRETE-TIME LINEAR SYSTEMS WITH UNIT DELAY IN STATE

Abstract: The paper presents a necessary and sufficient condition for controllability of positive discrete-time linear systems with one unit delay. The methods for computing the control sequence, which transfers the systems from any nonnegative initial conditions to zero and the desired nonnegative final state are given. Considerations are illustrated by examples.

Literatura

[1] Busłowicz M. (1981) Controllability of linear discrete-delay systems. *Proc. Int. Conf. Functional-Differential Systems and Related Topics II*, 47-51. Zielona Góra-Błażejewko.

[2] Busłowicz M. (1982) Explicit solution of discrete-delay equations. *Foundations of Control Engineering*, 7, 2, 67-71.

[3] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Osiągalność dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. W: R. Gessing, T. Szkodny (red.) *Automatyzacja procesów dyskretnych - część 1, Optymalizacja dyskretna, robotyka i sterowniki programowalne*, 9-16. WNT, Warszawa-Gliwice.

[4] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay. *Proc. 12th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Kasadasi, Izmir, Turkey (CD-ROM).

[5] Farina L., Rinaldi S. (2000) *Positive Linear Systems: Theory and Aplications*. Wiley, New York

[6] Kaczorek T. (1996) *Teoria sterowania i systemów*. PWN, Warszawa.

[7] Kaczorek T. (2000) *Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa.

[8] Klamka J. (1990) *Sterowalność układów dynamicznych*. PWN, Warszawa-Wrocław.

[9] Klamka J. (1991) *Controllability of Dynamical Systems*. Kluwer Academic Publ., Dordrecht.

[10] Sikora B. (2003) On controllability and minimum energy control of linear positive systems with delays. *Archives of Control Sciences*, **13**, 4, 431-444.

[11] Xie G., Wang L. (2003) Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays. In: *Positive Systems (Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.))*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 377-384.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2