XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom I

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ
Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFCZYK
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK Stanisław KACZANOWSKI Tadeusz KACZOREK Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI Tadeusz PUCHAŁKA Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-00-6

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ, OBSERWOWALNOŚĆ

OSIĄGALNOŚĆ I STEROWALNOŚĆ LINIOWYCH UKŁADÓW DYSKRETNYCH Z OPÓŹNIENIAMI ZMIENNYCH STANU*

Mikołaj BUSŁOWICZ

Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny
ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail:busmiko@pb.bialystok.pl

Streszczenie: W pracy sformułowano łatwe do sprawdzenia kryteria osiągalności i sterowalności dyskretnych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami. Podano proste zależności pozwalające na wyznaczenie ciągów sterujących, które przeprowadzają układy osiągalne (sterowalne) z zerowych (niezerowych) warunków początkowych do zadanego stanu końcowego. Rozważania zilustrowano przykładem.

Słowa kluczowe: Układ dyskretny, opóźnienia, osiągalność, sterowalność.

1. WSTĘP

Pojęcie sterowalności układów dynamicznych, wprowadzone w pracy [9], odgrywa bardzo ważną rolę w nowoczesnej teorii sterowania. Zagadnienie sterowalności występuje między innymi przy strukturalnej dekompozycji układów dynamicznych, przy przesuwaniu biegunów czy też przy syntezie sterowania o kwadratowych wskaźnikach jakości (np. [5, 6]).
Problem osiągalności i sterowalności układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych, ale bez opóźnień, był tematem wielu publikacji, patrz np. monografie [5, 6, 10, 11] oraz cytowaną tam literaturę. Osiągalność i sterowalność układów z opóźnieniami była rozpatrywana np. w pracach [12, 14] oraz w cytowanej tam literaturze. Podane w tych pracach warunki osiągalności i sterowalności najczęściej nie są łatwe do sprawdzenia. Z tego powodu w niniejszej pracy zostaną podane nie tylko proste i łatwe do sprawdzenia kryteria osiągalności i sterowalności układów dyskretnych z opóźnieniami, ale zostaną też podane proste wzory pozwalające na wyznaczenie ciągów sterujących, przeprowadzających rozpatrywane układy osiągalne i sterowalne z zerowych lub niezerowych warunków początkowych do zadanych stanów końcowych. Niniejsza praca istotnie rozszerza rezultaty podane w pracy [1]. Rezultaty pracy mogą być wykorzystane przy formułowaniu warunków sterowalności i syntezie odpowiedniego sterowania dodatnich układów dyskretnych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami. Takie układy są ostatnio tematem wielu publikacji, np. [3, 4, 7, 8, 13].

*Praca naukowa finansowana ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2004-2007 jako projekt badawczy.

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Dany jest dyskretny układ liniowy stacjonarny z opóźnieniami, opisany równaniem stanu

$$x_{i+1} = A_0 x_i + \sum_{k=1}^{h} A_k x_{i-k} + Bu_i, \quad i \in Z_+, \tag{1}$$

gdzie h jest liczbą opóźnień, Z_+ jest zbiorem liczb całkowitych nieujemnych, $x_i \in \Re^n$, $u_i \in \Re^m$, z warunkiem początkowym

$$x_{-i}, \quad i = 0,1,\dots,h. \tag{2}$$

Rozwiązanie równania stanu (1) z warunkiem początkowym (2) ma postać [2]

$$\begin{aligned} x_i = \Phi(i)x_0 &+ \sum_{j=-h}^{-1} \sum_{k=1}^{h+j+1} \Phi(i-k)A_{k-1-j}x_j \\ &+ \sum_{j=0}^{i-1} \Phi(i-1-j), \end{aligned} \tag{3}$$

gdzie

$$\Phi(i) = Z^{-1}\{(zI_n - \sum_{k=0}^{h} A_k z^{-k})^{-1} z\} \tag{4}$$

jest macierzą tranzycyjną zaś Z^{-1} oznacza odwrotne przekształcenie Z.

Macierz tranzycyjna $\Phi(i)$ spełnia równanie

$$\Phi(i+1) = A_0\Phi(i) + A_1\Phi(i-1) + \dots + A_h\Phi(i-h) \tag{5}$$

z warunkiem początkowym

$$\Phi(0) = I_n, \quad \Phi(i) = 0 \text{ dla } i < 0. \tag{6}$$

Definicja 1. Układ (1) nazywany osiągalnym w N krokach, jeżeli dla każdego stanu końcowego $x_f \in \Re^n$ istnieje ciąg wymuszeń $u_i \in \Re^m$, $i = 0,1,\dots,N-1$, który przeprowadza układ (1) z zerowych warunków początkowych (2) do zadanego stanu końcowego $x_N = x_f$.

Definicja 2. Układ (1) nazywamy osiągalnym, jeżeli dla każdego $x_f \in \Re^n$ (i zerowych warunków początkowych) istnieje liczba $N \in Z_+$ i ciąg sterowań $u_i \in \Re^m$, $i = 0,1,\dots,N-1$, takie że $x_N = x_f$.

Definicja 3. Układ (1) nazywamy sterowalnym w N krokach, jeżeli dla dowolnych niezerowych warunków początkowych (2) i dowolnego stanu końcowego $x_f \in \Re^n$ istnieje ciąg sterowań $u_i \in \Re^m$, $i = 0,1,\dots,$ $N-1$, który przeprowadza stan tego układu z niezerowego warunku początkowego do stanu końcowego x_f.

Definicja 4. Układ (1) nazywamy sterowalnym, jeżeli dla dowolnego niezerowego warunku początkowego (2) i dowolnego zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re^n$ istnieje liczba naturalna N i ciąg wymuszeń $u_i \in \Re^m$, $i = 0,1,\dots,N-1$, takie że $x_N = x_f$.

Celem niniejszej pracy jest podanie warunków osiągalności i sterowalności układu (1) oraz prostych zależności pozwalających na wyznaczenie ciągów sterujących, przeprowadzających osiągalny (sterowalny) układ (1) z zerowych (niezerowych) warunków początkowych do zadanego stanu końcowego. Zostanie ponadto wykazane, że wyznaczone sterowanie przeprowadzające układ z zerowych warunków początkowych do zadanego stanu końcowego jest sterowaniem z minimalną energią.

3. ROZWIĄZANIE PROBLEMU

Rozwiązanie równania stanu (1) ma postać (3). Dla $i = N > 0$ możemy napisać

$$x_N = S_N + R_N u_0^N, \tag{7}$$

gdzie

$$S_N = \Phi(N)x_0 + \sum_{j=-h}^{-1} \sum_{k=1}^{h+j+1} \Phi(N-k)A_{k-1-j}x_j \tag{8}$$

jest składnikiem zależnym od warunków początkowych, zaś składnik $R_N u_0^N$ zależy od wymuszenia, przy czym

$$R_N = [\Phi(N-1)B, \Phi(N-2)B, \cdots, \Phi(1)B, B] \tag{9}$$

jest macierzą osiągalności (sterowalności), zaś

$$u_0^N = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix} \in \Re^{Nm}. \tag{10}$$

3.1. Osiągalność

Przy zerowych warunkach początkowych rozwiązanie równania (1) dla $i = N > 0$ można napisać w postaci

$$x_N = R_N u_0^N, \tag{11}$$

gdzie R_N i u_0^N są dane wzorami (9) i (10).

Twierdzenie 1. Układ (1) jest osiągalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna N, dla której rząd $R_N = n$. Ciąg sterowań, który przeprowadza układ (1) z zerowego stanu początkowego (2) do zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re^n$ można wyznaczyć ze wzoru

$$u_0^N = R_N^{\mathrm{T}}[R_N R_N^{\mathrm{T}}]^{-1} x_f. \tag{12}$$

Dowód. Jeżeli istnieje takie N, że rząd $R_N = n$, to wtedy macierz $R_N R_N^{\mathrm{T}}$ jest nieosobliwa. Podstawiając (12) do (11) otrzymamy

$$x_N = R_N u_0^N = R_N R_N^{\mathrm{T}}[R_N R_N^{\mathrm{T}}]^{-1} x_f = x_f,$$

co kończy dowód twierdzenia. ■

Z powyższego twierdzenia wynika bezpośrednio następujący wniosek.

Wniosek 1. Jeżeli układ (1) jest osiągalny w N krokach to jest on osiągalny w $N+1$ krokach.

Poniżej udowodnimy dwa lematy, sformułowane w nieco odmiennej postaci (uwzględniającej specyfikę układów dodatnich) w pracy [4] w przypadku dodatnich układów z jednym opóźnieniem.

Lemat 1. Jeżeli macierz $[A_0, A_1, \dots, A_h, B]$ nie ma n liniowo niezależnych kolumn, to nie istnieje liczba naturalna N taka, że układ z opóźnieniem (1) jest osiągalny.
Dowód. Jeżeli układ (1) jest osiągalny, to macierz R_N o postaci (9) ma n liniowo niezależnych kolumn. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy macierz $[A_0, A_1, \dots, A_h, B]$ ma n liniowo niezależnych kolumn. ■

Lemat 2. Jeżeli układ (1) jest osiągalny, to jest on osiągalny w N krokach, gdzie $N \geq \mathrm{E}[n/q]$, przy czym $\mathrm{E}[n/q]$ oznacza najmniejszą liczbę całkowitą większą lub równą n/q, gdzie q jest liczbą liniowo niezależnych kolumn macierzy B.
Dowód. Każda macierz $\Phi(k)B$ ($k = 0,1,\dots,N-1$) macierzy osiągalności R_N może mieć maksymalnie q liniowo niezależnych kolumn. Oznacza to, że jeżeli układ (1) jest osiągalny, to $Nq = n$. ■

Twierdzenie 2. Ciąg sterowań (12), który przeprowadza rozpatrywany układ z zerowego warunku początkowego (2) do zadanego stanu końcowego $x_f \in \Re^n$ minimalizuje kwadratowy wskaźnik jakości

$$I(u) = \sum_{i=0}^{N-1} u_i^{\mathrm{T}} u_i, \tag{13}$$

przy czym optymalną wartość tego wskaźnika oblicza się ze wzoru

$$I(u) = x_f^{\mathrm{T}} W^{-1} x_f, \tag{14}$$

gdzie $W = R_N R_N^{\mathrm{T}} \in \Re^{n \times n}$.

Dowód. Niech $\bar{u}_0, \bar{u}_1, ..., \bar{u}_{N-1}$ będzie dowolnym ciągiem sterującym, który przeprowadza układ z zerowego stanu początkowego do stanu x_f. Pokażemy, że ciąg sterujący $u_0, u_1, ..., u_{N-1}$, wyznaczony ze wzoru (12), minimalizuje wskaźnik jakości (13).

Ponieważ $x_f = R_N \bar{u}_0^N = R_N u_0^N$, możemy napisać

$$R_N (u_0^N - \bar{u}_0^N) = 0. \tag{15}$$

Transponując (15) otrzymamy $(u_0^N - \bar{u}_0^N)^{\mathrm{T}} R_N^{\mathrm{T}} = 0$, a po prawostronnym pomnożeniu tej równości przez $W^{-1} x_f$, gdzie $W = R_N R_N^{\mathrm{T}} \in \Re^{n \times n}$, dostaniemy

$$(u_0^N - \bar{u}_0^N)^{\mathrm{T}} R_N^{\mathrm{T}} W^{-1} x_f = 0. \tag{16}$$

Uwzględniając (12) otrzymamy

$$(u_0^N - \bar{u}_0^N)^{\mathrm{T}} u_0^N = 0. \tag{17}$$

Korzystając z (17) łatwo sprawdzić, że

$$(\bar{u}_0^N)^{\mathrm{T}} \bar{u}_0^N = (u_0^N)^{\mathrm{T}} u_0^N + (\bar{u}_0^N - u_0^N)^{\mathrm{T}} (\bar{u}_0^N - u_0^N). \tag{18}$$

Z (18) wynika natychmiast nierówność $I(u) \le I(\bar{u})$, gdyż $(\bar{u}_0^N - u_0^N)^{\mathrm{T}} (\bar{u}_0^N - u_0^N) \ge 0$.
Aby wyznaczyć minimalną wartość wskaźnika jakości, podstawiamy (12) do (13). Otrzymamy wówczas

$$I(u) = (u_0^N)^{\mathrm{T}} u_0^N = (R_N^{\mathrm{T}} W^{-1} x_f)^{\mathrm{T}} (R_N^{\mathrm{T}} W^{-1} x_f)$$
$$= x_f^{\mathrm{T}} W^{-1} R_N R_N^{\mathrm{T}} W^{-1} x_f = x_f^{\mathrm{T}} W^{-1} x_f,$$

gdyż $W^{-1} R_N R_N^{\mathrm{T}} = I$, co kończy dowód twierdzenia. ■

3.2. Sterowalność

Przy niezerowych znanych warunkach początkowych (2) rozwiązanie równania stanu (1) dla $i = N > 0$ ma postać (7), gdzie stan końcowy $x_N = x_f \in \Re^n$ jest zadany. Wzór (7) można napisać w postaci

$$x_N - S_N = R_N u_0^N, \tag{19}$$

gdzie R_N i u_0^N są dane wzorami (9) i (10).

Twierdzenie 3. Układ (1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba naturalna N, dla której rząd $R_N = n$. Ciąg sterowań, który przeprowadza rozpatrywany układ z dowolnego niezerowego warunku początkowego (2) do zadanego stanu końcowego $x_N = x_f$ można wyznaczyć ze wzoru

$$u_0^N = R_N^{\mathrm{T}} [R_N R_N^{\mathrm{T}}]^{-1} (x_N - S_N). \tag{20}$$

Dowód. Jest podobny do dowodu twierdzenia 1. ■

Z twierdzeń 1 i 3 wynika następujący ważny wniosek.

Wniosek 2. Układ (1) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest on osiągalny.

4. PRZYKŁAD

Weźmy pod uwagę układ dyskretny (1) z dwoma opóźnieniami ($h = 2$), opisany równaniem stanu (1) o macierzach

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Zbadamy najpierw osiągalność rozpatrywanego układu oraz wyznaczymy ciąg sterujący przeprowadzający ten układ z zerowych warunków początkowych (2) do stanu końcowego $x_f = [2\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$.

Macierz $[A_0, A_1, A_2, B]$ ma $n = 3$ liniowo niezależne kolumny. Z lematu 1 wynika zatem, że warunek konieczny osiągalności jest spełniony.

Aby określić liczbę kroków N, zastosujemy lemat 2. Zgodnie z tym lematem mamy $N \ge \mathrm{E}[3/2] = 2$. Oznacza to, że rozpatrywany układ może być osiągalnym w $N \ge 2$ krokach. Łatwo sprawdzić, że macierz (9) przy $N = 2$ nie ma pełnego rzędu wierszowego. Ma ona natomiast pełny rząd wierszowy przy $N = 3$. Zatem rozpatrywany układ jest osiągalny (i też sterowalny, zgodnie z wnioskiem 2) w $N = 3$ krokach zaś macierz osiągalności na postać $R_3 = [\Phi(2)B, \Phi(1)B, B]$, przy czym macierze $\Phi(1)$ i $\Phi(2)$ oblicza się ze wzoru rekurencyjnego (5). Obliczając ze wzoru (12) ciąg sterujący przeprowadzający układ z zerowych warunków początkowych (2) do stanu końcowego $x_f = [2\ 2\ 2]^{\mathrm{T}}$, otrzymamy

$$u_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Sterowanie (22) minimalizuje wskaźnik jakości (13), przy czym minimalna wartość tego wskaźnika $I(u) = 4$. Zgodnie z twierdzeniem 2, jest ona wartością najmniejszą spośród wszystkich sterowań przeprowadzających rozpatrywany układ z zerowego stanu początkowego do stanu końcowego $x_f = [2\ 2\ 2]^T$.

Wyznaczymy teraz ciąg sterujący przeprowadzający rozpatrywany układ w $N = 3$ krokach ze stanu początkowego określonego przez warunki początkowe

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ x_{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ x_{-2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (23)$$

do stanu końcowego $x_f = [2\ 2\ 2]^T$.

Dla $N = 3$ ze wzoru (8) mamy

$$S_3 = \Phi(3)x_0 + (\Phi(2)A_1 + \Phi(1)A_2)x_{-1} + \Phi(2)A_2x_{-2}.$$

Obliczając najpierw S_3 z powyższego wzoru, a następnie ciąg sterujący ze wzoru (20) przy $N = 3$, otrzymamy

$$u_0 = \begin{bmatrix} -1.25 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.25 \end{bmatrix}. \qquad (24)$$

5. UWAGI KOŃCOWE

W pracy sformułowano łatwe do sprawdzenia kryteria osiągalności i sterowalności dyskretnych układów liniowych stacjonarnych z opóźnieniami. Podano proste zależności pozwalające na wyznaczenie ciągów sterujących, przeprowadzających rozpatrywane układy osiągalne (sterowalne) z zerowych (niezerowych) warunków początkowych do zadanego stanu końcowego. Pokazano, że sterowanie wyznaczone ze wzoru (12) jest sterowaniem z minimalną energią.
Rozważania mogą być uogólnione na dyskretne układy z opóźnieniami zmiennych stanu i sterowania, w tym na układy dodatnie.

REACHABILITY AND CONTROLLABILITY OF LINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS WITH DELAYS IN STATE VARIABLES

Abstract: The problem of reachability and controllability of linear discrete-time systems with delays in state variables is considered. Conditions for reachability and controllability are derived. Simple methods for computing the sequences of inputs, which steers the reachable (controllable) system from zero (non-zero) initial conditions to the desired final state are given. Moreover, it is shown that control computed from (12) is the minimal energy control. The methods proposed can be generalised to the positive discrete-time systems with delays.

Literatura

[1] Busłowicz M. (1981) Controllability of linear discrete-delay systems. *Proc. Int. Conf. Functional-Differential Systems and Related Topics II, Zielona Góra-Błażejewko,* 47-51.

[2] Busłowicz M. (1983) O pewnych właściwościach rozwiązania równania stanu dyskretnego układu z opóźnieniami. *Zesz. Nauk. Polit. Biał., Elektrotechnika,* 1, 17-29.

[3] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Osiągalność dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem. W: R. Gessing, T. Szkodny (red.) *Automatyzacja procesów dyskretnych - część 1, Optymalizacja dyskretna, robotyka i sterowniki programowalne,* 9-16. WNT, Warszawa-Gliwice.

[4] Busłowicz M., Kaczorek T. (2004) Reachability and minimum energy control of positive linear discrete-time systems with one delay. *Proc. 12th Mediterranean Conference on Control and Automation,* Kasadasi, Izmir, Turkey (CD-ROM).

[5] Kaczorek T. (1995) *Teoria sterowania i systemów.* PWN, Warszawa.

[6] Kaczorek T. (2004) *Zastosowanie macierzy wielomianowych i wymiernych w teorii układów dynamicznych.* Wyd. Pol. Białostockiej, Białystok.

[7] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Sterowanie z minimalną energią dodatnich układów dyskretnych z jednym opóźnieniem, w: R. Gessing, T. Szkodny (red.) *Automatyzacja procesów dyskretnych - część 1, Optymalizacja dyskretna, robotyka i sterowniki programowalne,* 83-90. WNT, Warszawa-Gliwice.

[8] Kaczorek T., Busłowicz M. (2004) Recent developments in theory of positive discrete-time linear systems with delays - reachability, minimum energy control and realization problem, *Pomiary Automatyka Kontrola,* 10, 12-15.

[9] Kalman R.E. (1960) On the general theory of control systems, *Proc. First IFAC Congress, Moscov,* 1, 481-492.

[10] Klamka J. (1990) *Sterowalność układów dynamicznych.* PWN, Warszawa-Wrocław.

[11] Klamka J. (1991) *Controllability of Dynamical Systems.* Kluwer Academic Publ., Dordrecht.

[12] Phat. V.N. (1989) Controllability of discrete-time systems with multiple delays in control and states. *Int. J. Control,* 49, 1645-1645.

[13] Xie G., Wang L. (2003) Reachability and controllability of positive linear discrete-time systems with time-delays. In: *Positive Systems* (Benvenuti, De Santis and Farina (Eds.)), 377-384. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

[14] Watanabe K. (1984) Further study of spectral controllability of systems with multiple commensurate delays in state variables. *Int. J. Control,* 39,497-505.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-02-2