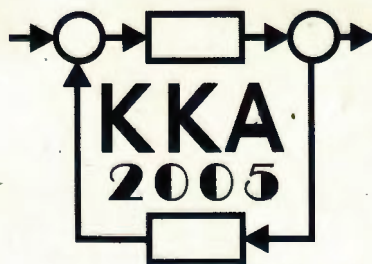


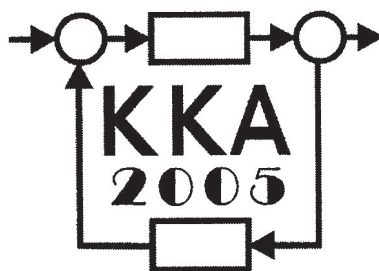
# **XV Krajowa Konferencja Automatyki**

## **Tom I**



**Redaktorzy:  
Zdzisław Bubnicki  
Roman Kulikowski  
Janusz Kacprzyk**

# XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:  
Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK

**ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

**WSPÓŁORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **ORGANIZATOR**

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk  
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

## **WSPÓLORGANIZATORZY**

Politechnika Warszawska  
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów  
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

## **KOMITET PROGRAMOWY**

Przewodniczący  
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI  
Roman KULIKOWSKI

## **CZŁONKOWIE**

Stanisław BAŃKA  
Mikołaj BUSŁOWICZ  
Ryszard GESSING  
Jakub GUTENBAUM  
Stanisław KACZANOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Józef KORBICZ  
Krzysztof KOZŁOWSKI  
Krzysztof KUŹMIŃSKI  
Krzysztof MALINOWSKI  
Antoni NIEDERLIŃSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Stanisław SKOCZOWSKI  
Jerzy ŚWIĄTEK  
Ryszard TADEUSIEWICZ  
Krzysztof TCHOŃ  
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO  
Władysław FINDEISEN  
Henryk GÓRECKI  
Jerzy JÓZEFczyk  
Tadeusz KACZOREK  
Jerzy KLAMKA  
Zbigniew KOWALSKI  
Juliusz L. KULIKOWSKI  
Kazimierz MALANOWSKI  
Wojciech MITKOWSKI  
Władysław PEŁCZEWSKI  
Leszek RUTKOWSKI  
Roman SŁOWIŃSKI  
Andrzej ŚWIERNIAK  
Piotr TATJIEWSKI  
Leszek TRYBUS  
Andrzej P. WIERZBICKI

## **KOMITET ORGANIZACYJNY**

Przewodniczący  
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI  
Janusz KACPRZYK  
Stanisław KACZANOWSKI  
Tadeusz KACZOREK  
Krzysztof MALINOWSKI  
Roman OSTROWSKI  
Tadeusz PUCHAŁKA  
Dariusz WAGNER  
Jan STUDZIŃSKI  
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

**ISBN 83-89475-00-6**

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk  
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

STABILNOŚĆ, STEROWALNOŚĆ,  
OBSERWOWALNOŚĆ

# OBSZARY STABILNOŚCI W PRZESTRZENI PARAMETRÓW UKŁADÓW REGULACJI Z OBIEKTEM WIELOINERCYJNYM Z OPÓŹNIENIEM<sup>†</sup>

Andrzej RUSZEWSKI

Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny  
 Ul. Wiejska 45D, 15-351 Białystok, e-mail: andrusz@pb.bialystok.pl

**Streszczenie:** W pracy rozpatrzono problem stabilności układu regulacji automatycznej z regulatorem typu PI oraz PID i liniowym obiektem wieloinercyjnym z opóźnieniem. Podano komputerowe metody wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności na płaszczyznach parametrów rozpatrywanych regulatorów oraz obiektu. Proponowane metody oparte są na klasycznej metodzie podziału D przestrzeni współczynników quasi-wielomianów charakterystycznych.

**Słowa kluczowe:** Asymptotyczna stabilność, układ z opóźnieniem, regulator PID.

## 1. WSTĘP

Podstawowym wymaganiem, które powinien spełniać układ regulacji jest jego asymptotyczna stabilność. Problem wyznaczania obszarów stabilności w przestrzeni parametrów regulatora i obiektu pierwszego rzędu z opóźnieniem rozpatrywany był w wielu pracach (np. [3-7]). W pracach [4, 6, 7] wykorzystano uogólnione twierdzenie Hermite-Biehlera do wyznaczenia analitycznych warunków asymptotycznej stabilności. W monografii [5], w oparciu o kryterium Czebotariewa i Mejmana, podano analityczne warunki asymptotycznej stabilności oraz nomogramy do wyznaczania obszarów stabilności na płaszczyźnie parametrów obiektu pierwszego rzędu z opóźnieniem i różnych typów regulatorów. Inne podejście do problemu wyznaczania obszarów stabilności zaprezentowano w pracy [3], w której na bazie metody podziału D podano prostą komputerową metodę pozwalającą na bezpośrednie wyznaczenie obszaru asymptotycznej stabilności w przestrzeni parametrów układów regulacji z obiektem inercyjnym i całującym z opóźnieniem. Zagadnienie wyznaczania obszarów stabilności zostało także poruszone w przekrojowej pracy [1], poświęconej regulacji PID.

Model obiektu regulacji jest także przedstawiany za pomocą modeli wyższych rzędów (np. inercyjności n-tego rzędu z jedną stałą czasową oraz opóźnieniem czasowym). Model ten jest wykorzystywany do doboru nastaw regulatorów. Problem strojenia regulatora dla rozpatrywanego obiektu przedstawiony jest m.in. w pracach [5, 8]. W monografii [5] podano zależności analityczne do wyznaczania wartości optymalnych

parametrów regulatora w sensie kryterium optymalnego modułu transmitancji. Natomiast w pracy [8] zaprezentowano metodę doboru nastaw regulatora opartą o określone zapasy stabilności. W niniejszej pracy wykorzystując podejście zastosowane w pracy [3] zostaną podane komputerowe metody, która pozwalają na wyznaczenie obszaru asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji na płaszczyźnie parametrów regulatora PID oraz PI i obiektu wieloinercyjnego z opóźnieniem.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Weźmy pod uwagę układ regulacji automatycznej złożony z liniowego obiektu o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{Ke^{-sh}}{(1+sT)^n}, \quad h \geq 0, K > 0, n \geq 2 \quad (1)$$

i szeregowego regulatora typu PID o transmitancji

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (2)$$

Rozpatrywany układ zamknięty jest asymptotycznie stabilny, jeżeli wszystkie zera quasi-wielomianu charakterystycznego

$$w(s, \exp(-sh)) = (k_d s^2 + k_p s + k_i) K \exp(-sh) + s(1+sT)^n \quad (3)$$

mają ujemne części rzeczywiste.

Quasi-wielomian ma nieskończenie wiele zer i nie istnieją ogólne metody analityczne służące do badania jego asymptotycznej stabilności, takie jak kryterium Hurwita czy Routha do badania stabilności wielomianów charakterystycznych. Analityczne kryteria są spotykane tylko w pewnych przypadkach szczególnych (np. [3, 4, 5]). Badanie stabilności quasi-wielomianów zazwyczaj jest dokonywane metodami graficznymi, np. kryterium Michajłowa. Stabilność asymptotyczna quasi-wielomianu (3) zależy od wartości zmiennych parametrów regulatora. W przestrzeni parametrów regulatora i obiektu (1) można wyznaczyć taki obszar, że dla każdego punktu z tego obszaru quasi-wielomian (3) ma zera o ujemnej części rzeczywistej.

<sup>†</sup>Pracę wykonano w ramach pracy własnej finansowanej przez Komitet Badań Naukowych.



Wykorzystując metodę podziału D w pracy zostaną podane komputerowe metody wyznaczenia obszarów asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji na płaszczyźnie parametrów regulatora PID oraz PI i obiektu (1).

### 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Mnożąc quasi-wielomian (3) przez  $\exp(sh)$  otrzymamy nowy quasi-wielomian o postaci

$$w(s, \exp(sh)) = (k_d s^2 + k_p s + k_i)K + s(1 + sT)^n \exp(sh), \quad (4)$$

który ma te same zera co quasi-wielomian (3). Stosując w quasi-wielomianie (4) podstawienie  $z = sh$  po przekształceniach otrzymamy quasi-wielomian

$$w(z, \exp(z)) = Xz + Y + Az^2 + z(1 + pz)^n \exp(z), \quad (5)$$

gdzie  $X = Kk_p$ ,  $Y = Kk_i h$ ,  $A = Kk_d / h$ ,  $p = T / h$ .

Zastosujemy metodę podziału D do wyznaczenia obszaru asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu (quasi-wielomian (5)) w przestrzeni parametrów  $(X, Y, A)$ , traktując  $p = T / h$  jako parametr. Granice podziału D dzielą przestrzeń  $(X, Y, A)$ , na obszary  $D(k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Dowolny punkt w  $D(k)$  odpowiada takim wartościom  $X, Y, A$  dla których quasi-wielomian (5) ma dokładnie  $k$  zer o dodatniej części rzeczywistej. Obszar  $D(0)$ , dla którego liczba zer o dodatniej części rzeczywistej jest równa zero, jest obszarem asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5). W celu sprawdzenia, czy dany obszar jest obszarem stabilności należy zbadać asymptotyczną stabilność quasi-wielomianu (5) dla jednego punktu z tego obszaru, stosując np. kryterium Michajłowa [2]. Jeżeli obszar  $D(0)$  istnieje (nie jest pusty), to jest on obszarem asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej. W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do podania metody wyznaczania obszaru asymptotycznej stabilności. Pominiemy etap wykazywania, że wyznaczony obszar jest obszarem asymptotycznej stabilności.

Dowolnemu punktowi na granicy podziału D odpowiada quasi-wielomian (5), który ma zero  $z = 0$  (granica zer rzeczywistych) lub zera urojone sprzężone (granica zer zespolonych) [2]. Łatwo zauważyć, że granicą zer rzeczywistych quasi-wielomianu (5) jest linia prosta  $Y = 0$ . Granicę zer zespolonych wyznacza się rozwiązując równanie  $w(j\omega, \exp(j\omega)) = 0$ . Otrzymuje się je przyrównując do zera quasi-wielomian (5) przy  $z = j\omega$ . Równanie zespolone  $w(j\omega, \exp(j\omega)) = 0$  jest spełnione, gdy część rzeczywista i urojona są jednocześnie równe zero

$$Y - A\omega^2 - \omega \left( \sqrt{1 + \omega^2 p^2} \right)^n \sin(n \operatorname{atan}(p\omega) + \omega) = 0, \quad (6)$$

$$X + \left( \sqrt{1 + \omega^2 p^2} \right)^n \cos(n \operatorname{atan}(p\omega) + \omega) = 0. \quad (6a)$$

Zależności (6) i (6a) określają granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (5) w przestrzeni  $(X, Y, A)$ . Dalsze rozważania zostaną przeprowadzone dla układu z regulatorem PI oraz PID.

#### 3.1. Regulator PI

Transmitancja operatorowa regulatora PI ma postać

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}. \quad (7)$$

Przyjmując  $A = 0$  we wzorach (5), (6) otrzymamy zależności odpowiadające układowi regulacji z obiektem (1) i regulatorem PI. Quasi-wielomian charakterystyczny w rozpatrywanym przypadku ma postać

$$w(z, \exp(z)) = Xz + Y + z(1 + pz)^n \exp(z). \quad (8)$$

Wyznaczając z równań (6) przy  $A = 0$  parametry  $X$  i  $Y$  otrzymamy

$$X = - \left( \sqrt{1 + \omega^2 p^2} \right)^n \cos(n \operatorname{atan}(p\omega) + \omega), \quad (9)$$

$$Y = \omega \left( \sqrt{1 + \omega^2 p^2} \right)^n \sin(n \operatorname{atan}(p\omega) + \omega). \quad (9a)$$

Linia krzywa o opisie parametrycznym (9), (9a) przy zadanej wartości parametru  $p$  wyznacza na płaszczyźnie  $(X, Y)$  granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (8). Linia prosta  $Y = 0$  oraz linie krzywe (9) i (9a) wykreślone w funkcji parametru  $\omega \geq 0$  dzielą płaszczyznę  $(X, Y)$  na obszary  $D(k)$ . Interesujący nas obszar  $D(0)$  jeśli istnieje (nie jest pusty) jest obszarem asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej.

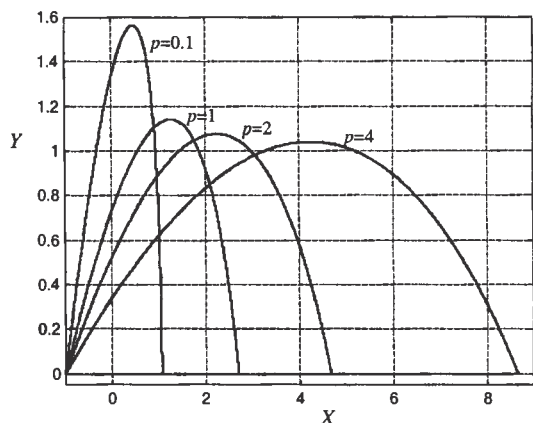
Obszary asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu regulacji automatycznej z obiektem (1) i regulatorem PI wyznaczone dla kilku wartości parametru  $p$  przy  $n = 2$  i  $n = 3$  są pokazane na rys. 1 i 2, odpowiednio. Obszar  $D(0)$  leży pomiędzy granicą zer zespolonych i granicą zer rzeczywistych. Z rysunków wynika, że przy określonej wartości  $p$ , wzrost  $n$  powoduje mniejsze zakresy  $X$  i  $Y$  (tj.  $k_p, k_i$ ), dla których rozpatrywany układ regulacji jest asymptotycznie stabilny.

#### 3.2. Regulator PID

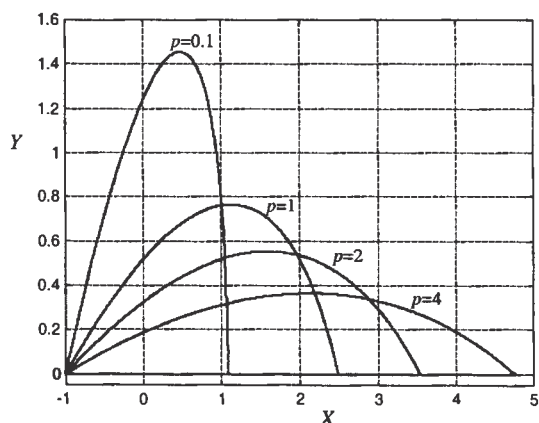
W przypadku stosowania regulatora PID rozwiązując równania (6) i (6a) względem dwóch wybranych parametrów  $X$  i  $Y$  odpowiednio otrzymamy

$$X = - \left( \sqrt{1 + \omega^2 p^2} \right)^n \cos(n \operatorname{atan}(p\omega) + \omega), \quad (10)$$

$$Y = A\omega^2 + \omega \left( \sqrt{1 + \omega^2 p^2} \right)^n \sin(n \operatorname{atan}(p\omega) + \omega). \quad (10a)$$



Rys. 1. Granice obszarów stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (8) ( $n=2$ ) wyznaczone dla kilku wartości parametru  $p = T/h$ .

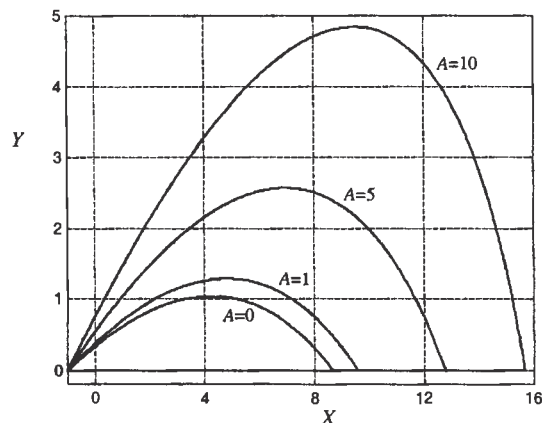


Rys. 2. Granice obszarów stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (8) ( $n=3$ ) wyznaczone dla kilku wartości parametru  $p = T/h$ .

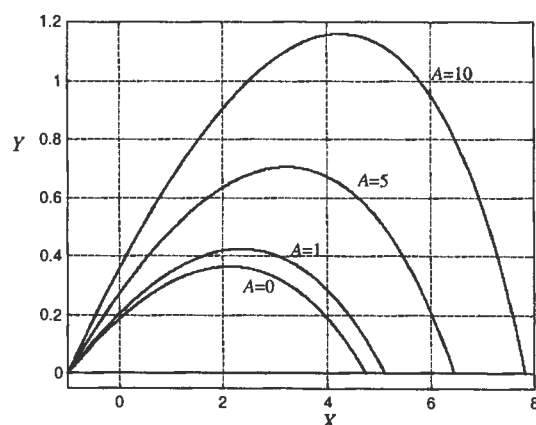
Dwa równania (10) i (10a) zawierają trzy poszukiwane niewiadome. Możemy wyznaczyć granice zer zespolonych w funkcji parametru  $\omega \geq 0$  na płaszczyźnie dwóch parametrów przyjmując trzeci jako stały. Na przykład, linia krzywa o opisie parametrycznym (10), (10a) przy zadanych wartościach parametrów  $p$  oraz  $A$  wyznacza na płaszczyźnie  $(X, Y)$  granicę zer zespolonych quasi-wielomianu (5).

Granice obszarów asymptotycznej stabilności quasi-wielomianu (5) (rozpatrywanego układu regulacji automatycznej z obiektem (1) i regulatorem PID) wyznaczone dla kilku wartości parametru  $A$  przy  $p=4$  oraz  $n=2$  i  $n=3$  są pokazane na rys. 3 i 4, odpowiednio.

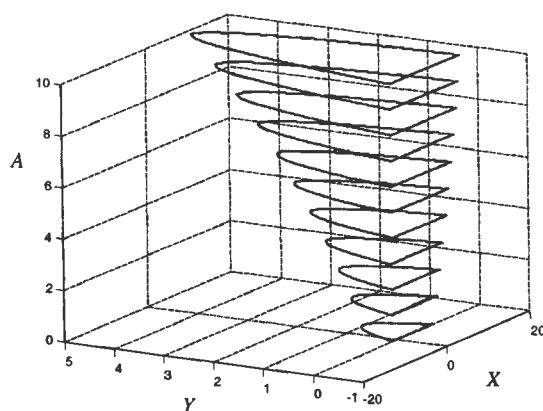
Z otrzymanych rysunków wynika, iż dodanie części różniczkującej regulatora zwiększa zakresy parametrów  $X$  i  $Y$  (tj.  $k_p, k_i$ ), dla których rozpatrywany układ regulacji jest asymptotycznie stabilny. Na rys. 5 i 6 pokazano granice obszarów stabilności wyznaczone w przestrzeni trójwymiarowej  $(X, Y, A)$  dla  $A$  zmieniającego się od 0 do 10 z krokiem 1.



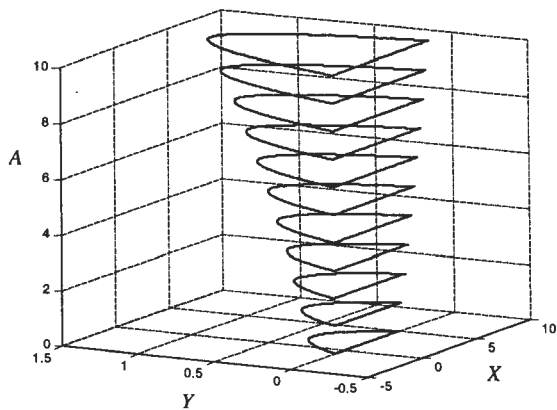
Rys. 3. Granice obszarów stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (5) ( $n=2$ ) wyznaczone dla  $p = T/h = 4$  oraz kilku wartości parametru  $A$  (przypadek  $A=0$  odpowiada regulatorowi PI).



Rys. 4. Granice obszarów stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (5) ( $n=3$ ) wyznaczone dla  $p = T/h = 4$  oraz kilku wartości parametru  $A$  (przypadek  $A=0$  odpowiada regulatorowi PI).



Rys. 5. Granice obszarów stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (5) ( $n=2$ ) wyznaczone w przestrzeni  $(X, Y, A)$  dla  $p = T/h = 4$ .

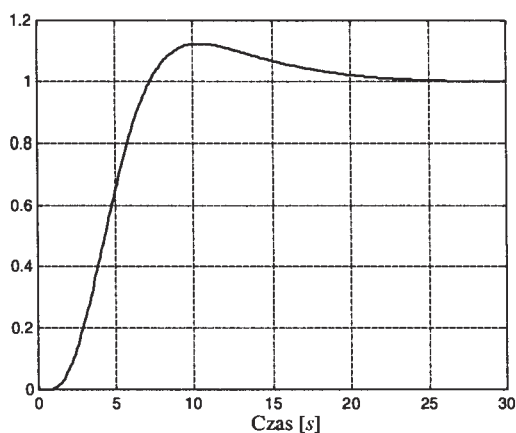


Rys. 6. Granice obszarów stabilności asymptotycznej quasi-wielomianu (5) ( $n = 3$ ) wyznaczone w przestrzeni ( $X, Y, A$ ) dla  $p = T/h = 4$ .

#### 4. PRZYKŁAD

Należy wyznaczyć wartości parametrów regulatora PID, dla których rozpatrywany układ regulacji automatycznej z obiektem (1) przy  $K = 1$ ,  $h = 0.5$ ,  $T = 2$ ,  $n = 3$  jest asymptotycznie stabilny.

W rozpatrywanym układzie  $p = T/h = 4$ . Granice obszarów asymptotycznej stabilności rozpatrywanego układu są pokazane na rys. 4 i 6. Zakładamy wartość parametru  $A$ , np.  $A = Kk_d/h = 5$ . Na rys. 4 obszar asymptotycznej stabilności ograniczony jest odcinkiem linii prostej  $Y = 0$  oraz linią krzywej odpowiadającą  $A = 5$ . Wybierając dowolny punkt leżący wewnątrz tego obszaru, np. o współrzędnych  $X = 1.5$ ,  $Y = 0.15$ , otrzymamy  $Kk_p = 1.5$ ,  $Kk_i/h = 0.15$ . Obliczając z powyższych zależności wartości parametrów regulatora PID otrzymamy  $k_p = 1.5$ ,  $k_i = 0.3$ ,  $k_d = 2.5$ . Na rys. 7 pokazano odpowiedź skokową układu regulacji używaną dla wyznaczonych nastaw regulatora.



Rys. 7. Odpowiedź skokowa układu regulacji rozpatrywanego w przykładzie.

#### 5. UWAGI KOŃCOWE

Praca jest poświęcona problemowi stabilności układu regulacji automatycznej z regulatorem typu PI oraz PID i liniowym obiektem wieloinercyjnym z opóźnieniem. Wykorzystując metodę podziału D podano komputerowe metody wyznaczania obszarów asymptotycznej stabilności na płaszczyznach parametrów rozpatrywanych regulatorów oraz obiektu. Znając obszary stabilności możemy wyznaczyć parametry regulatora zapewniające stabilność układu. Do wyznaczenia obszarów asymptotycznej stabilności rozpatrywanych układów regulacji automatycznej wykorzystano programy komputerowe opracowane w środowisku systemu MATLAB i MATHCAD.

#### STABILITY REGIONS OF CONTROL SYSTEMS WITH MULTI-INERTIAL PLANT WITH DELAY IN THE PARAMETER SPACE

**Abstract:** The stability problem of control systems with multi-inertial plants with time delay and PI or PID controllers is analyzed. Simple methods for determining the asymptotic stability regions in the parameter space are given. The methods proposed are based on the D-decomposition method.

#### Literatura

- [1] Åström K. J., Hägglund T. (2001) The future of PID Control. *Control Engineering Practice*, 9, 1163-1175.
- [2] Busłowicz M. (2000) *Odporna stabilność układów dynamicznych liniowych stacjonarnych z opóźnieniami*. Seria: Mon. Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, Tom 1, Dział Wydawnictw i Poligrafii Politechniki Białostockiej, Warszawa-Białystok.
- [3] Busłowicz M., Ruszewski A. (2002). Stabilizacja za pomocą regulatorów PI liniowych układów pierwszego rzędu z opóźnieniem. *Materiały konferencyjne XIV KKA, Zielona Góra*, 1, 89-94.
- [4] Datta A., Ho M.T., Bhattacharyya S.P. (2000) *Structure and Synthesis of PID Controllers*. Springer-Verlag, Londyn.
- [5] Górecki H. (1971) *Analiza i synteza układów regulacji z opóźnieniem*. WNT, Warszawa.
- [6] Guillermo J.S., Datta A., Bhattacharyya S.P. (2001) Stabilization of first-order systems with time delay using PID controllers. *Proc. American Control Conference, Arlington*, 4650-4655.
- [7] Guillermo J.S., Datta A., Bhattacharyya S.P. (2001) PI stabilization of first-order systems with time delay. *Automatica*, 37, 2025-2031.
- [8] Skoczowski S., Tarasiejski L. (1996) Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications using Strejc's process model with time delay. *Proc. Third In. Symp. MMAR, Międzyzdroje*, 765-770.





**Instytut Badań Systemowych  
Polskiej Akademii Nauk**

**ISBN 83-89475-02-2**