

XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom I



**Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk**

XV Krajowa Konferencja Automatyki Tom I



Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska

Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów

Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓLORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący
Zastępca Przewodniczącego

Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA
Mikołaj BUSŁOWICZ
Ryszard GESSING
Jakub GUTENBAUM
Stanisław KACZANOWSKI
Janusz KACPRZYK
Józef KORBICZ
Krzysztof KOZŁOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI
Krzysztof MALINOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Stanisław SKOCZOWSKI
Jerzy ŚWIĄTEK
Ryszard TADEUSIEWICZ
Krzysztof TCHOŃ
Jan WĘGLARZ

Michał BIAŁKO
Władysław FINDEISEN
Henryk GÓRECKI
Jerzy JÓZEFczyk
Tadeusz KACZOREK
Jerzy KLAMKA
Zbigniew KOWALSKI
Juliusz L. KULIKOWSKI
Kazimierz MALANOWSKI
Wojciech MITKOWSKI
Władysław PEŁCZEWSKI
Leszek RUTKOWSKI
Roman SŁOWIŃSKI
Andrzej ŚWIERNIAK
Piotr TATJIEWSKI
Leszek TRYBUS
Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący
Zastępcy Przewodniczącego

Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK
Stanisław KACZANOWSKI
Tadeusz KACZOREK
Krzysztof MALINOWSKI
Roman OSTROWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA
Dariusz WAGNER
Jan STUDZIŃSKI
Jan W. OWSIŃSKI

Członkowie

Sekretarze naukowci

ISBN 83-89475-00-6

Copyright © Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
All rights reserved

Druk: ARGRAF, Warszawa

TEORIA STEROWANIA
– TEORIA SYSTEMÓW

REGULACJA W UKŁADZIE O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY DLA OBIEKTÓW Z OPÓŹNIENIEM[†]

Rafał GRYGIEL, Marian BŁACHUTA

Politechnika Śląska, Wydział Automatyki Elektroniki i Informatyki
ul. Akademicka 16, 44-100 Gliwice,
e-mail: rafal.grygiel@polsl.pl; blachuta@polsl.pl

Streszczenie: W artykule przedstawiono strukturę układu regulacji *feedback - feed-forward* zapewniającą nadążanie zgodne z modelem odniesienia, przy jednoczesnym tłumieniu wpływu zakłóceń stochastycznych gdy w obiekcie występuje opóźnienie sterowania. Zaprezentowano także formuły pozwalające wyznaczyć: odchylenia standardowe sygnału regulowanego oraz sterującego - w chwilach próbkowania i średnie za okres, oraz średnią wartość wskaźnika jakości. Badania przeprowadzono przy niezgodności obiektu i jego modelu.

Słowa kluczowe: regulacja liniowo-kwadratowa, opóźnienie, wariancja, niezgodność modelu.

1. WSTĘP

Celem pracy jest synteza oraz analiza dyskretnego układu regulacji sterowania zgodnego z modelem odniesienia, który zapewnia pożądane własności dynamiczne i statyczne zamkniętego układu regulacji, przy jednoczesnym tłumieniu wpływu zakłóceń stochastycznych gdy w obiekcie występuje opóźnienie sterowania (jego wielkość może być dowolną wartością w stosunku do okresu próbkowania). Synteza układu regulacji dla obiektu z opóźnieniem wymaga bardziej skomplikowanego aparatu matematycznego. W artykule rozważa się przypadek ogólny, w którym użyty do syntezy regulatora model obiektu różni się od rzeczywistego obiektu regulacji. Przedmiotem badań jest także struktura, która umożliwia niezależne traktowanie dwóch powyższych zadań. Ponadto, w artykule przedstawiono sposób wyznaczania (przy niezgodności modelu obiektu) teoretycznych wartości: odchylenia standardowych sygnału wyjściowego z obiektu i sygnału sterującego w chwilach próbkowania, średniej za okres wskaźnika jakości oraz średniej za okres wariancji sygnału wyjściowego z obiektu. Praca stanowi uzupełnienie oraz rozszerzenie prac [5, 6, 7].

2. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Założono, że obiektem regulacji jest ciągły, liniowy układ SISO. Składa się on z toru sterowania, którego wyjście

zakłócanie jest kolorowym procesem stochastycznym modelowanym przez ciągły biały szum $\xi(t)$ o jednostkowej wariancji $\text{var}\{\xi(t)\} = \delta(t)$ pobudzający dynamiczny układ nazywany torem zakłócenia. Zagregowany opis obiektu można przedstawić w postaci układu równań:

$$\dot{x}^o(t) = A^o x^o(t) + b^o u(t - \tau^o) + c^o \xi(t), \quad (1)$$

$$y^o(t) = d^{o'} x^o(t), \quad (2)$$

gdzie: $x^o(t)$ jest p -wymiarowym wektorem stanu obiektu a $u(t - \tau^o)$ jest opóźnionym sygnałem sterującym w którym: $\tau^o = d^o h - h + \theta^o$, ($0 < \theta^o \leq h$). Podczas syntezy regulatora korzysta się natomiast z modelu obiektu danego *a priori* w postaci:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t - \tau) + c\xi(t), \quad (3)$$

$$y(t) = d'x(t), \quad (4)$$

gdzie: $x(t)$ jest n -wymiarowym wektorem stanu. Sygnał sterujący otrzymywany jest z ekstrapolatora zerowego rzędu (ZOH) z okresem próbkowania h :

$$u(t) = u_i, \quad \text{dla } t \in (ih, ih + h], i = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

którego wejściem jest dyskretny sygnał wyjściowy regulatora u_i . Jego wartości zmieniają się w dyskretnych chwilach czasu $t_i = ih, i = 1, 0, \dots$. Wyjście obiektu $y^o(t)$ jest także próbkowane z okresem h . Dostępny pomiarowo sygnał z_i wyrażony jest przez następujące równanie pomiaru:

$$z_i = d^{o'} x_i^o + n_i^o, \quad (6)$$

gdzie n_i^o jest dyskretnym w czasie gaussowskim białym szumem, reprezentującym błędy pomiarowe, o parametrach rozkładu: $E\{n_i^o\} = 0$, $E\{n_i^{o2}\} = \rho^{o2}$.

Ponadto zakłada się znajomość ciągłego modelu odniesienia generującego wartości sygnału odniesienia $y^r(t)$:

$$\dot{x}^r(t) = A^r x^r(t) + b^r u(t - \tau), \quad (7)$$

$$y^r(t) = d^{r'} x^r(t), \quad (8)$$

gdzie $x^r(t)$ jest l -wymiarowym wektorem stanu, w którym opóźnienie wejścia $r(t)$ jest identyczne jak w modelu obiektu (1)-(2). Dodatkowo zakłada się skokową zmianę $r(t)$ w chwili $t_r = N_r h$ tj. $r(t) = r\mathbb{1}(t - t_r)$.

[†]Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2005/2006 jako projekt badawczy nr 3 T11A 027 28

Celem regulacji jest nadążanie sygnału $y(t)$ za $y^r(t)$ oraz tłumienie wpływu zakłóceń stochastycznych gdy w dyskretnych chwilach czasu dostępny jest sygnał pomiarowy (5). Osiągnięcie zamierzonego celu ma zapewnić prawo sterowania będące wynikiem minimalizacji kwadratowego wskaźnika jakości:

$$J^c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(N_r + T)h} E \int_0^{(N_r + T)h} \{e^2(t + \tau) + \lambda u^2(t)\} dt, \quad (9)$$

gdzie: $e(t) = y(t) - y^r(t)$.

Postawione zadanie regulacji zostanie przededefiniowane do klasycznego, dyskretnego zadania regulacji LQG. W tym celu wprowadza się zgodnie z [2] predykcję stanu:

$$\underline{x}_p(t) = \underline{x}(t + \tau) \quad (10)$$

Wykorzystując powyższe podstawienie oraz dokonując agregacji modelu obiektu (3)-(4) oraz modelu odniesienia (7)-(8) zadanie regulacji opisuje równanie:

$$\dot{\underline{x}}_p(t) = \underline{A}\underline{x}_p(t) + \underline{b}u(t) + \underline{\beta}r(t) + \underline{c}\dot{\xi}(t + \tau), \quad (11)$$

gdzie: $\underline{A} = \text{diag}\{A, A^r\}$, $\underline{b} = [b', 0']$, $\underline{\beta} = [0', b^r']$, $\underline{c} = [c', 0']$, $\underline{d} = [d', 0']$, a także wskaźnik jakości:

$$J^c = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(N_r + T)h} E \int_0^{(N_r + T)h} \{\underline{x}'_p(t) M \underline{x}_p(t) + \lambda u^2(t)\} dt \quad (12)$$

w którym uchyb wyrażony jest w postaci:

$$e(t + \tau) = \begin{bmatrix} d' & -d^r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_p(t) \\ \underline{x}'_p(t) \end{bmatrix} = l' \underline{x}_p(t), \quad (13)$$

oraz $M = ll'$. W ten sposób sformułowany problem regulacji sprowadzony został do zadania regulacji przedstawionego w [4].

3. DYSKRETNY PROBLEM REGULACJI LQG

W punkcie tym zaprezentowany zostanie układ sterowania o dwóch stopniach swobody (*feedback - feed-forward*) jako wynik przekształcenia optymalnego prawa sterowania przedstawionego w [7]. W tym celu wprowadza się następującą dekompozycję sygnałów:

$$\hat{\underline{x}}_{p,i|i} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{p,i|i} \\ \hat{x}'_{p,i|i} \end{bmatrix}, \quad \hat{x}_{p,i|i} = \bar{x}_{p,i} + \delta \hat{x}_{p,i|i}, \quad z_i = \bar{y}_i + \delta z_i \quad (14)$$

gdzie: $\bar{x}_i = E\{x_i\} = E\{\hat{x}_{i|i}\}$ oraz $\bar{y}_i = E\{y_i\}$. Zapis ten odzwierciedla deterministyczny charakter wartości zadanej i stochastyczny charakter zakłóceń.

Twierdzenie 1 *Optymalne, dyskretne prawo sterowania dla problemu zdefiniowanego poprzez równanie pomiaru (6), równanie układu (11) oraz wskaźnik jakości (12) składa się z deterministycznej, nominalnej części feed-forward, $\bar{u}_i = E\{u_i\}$, odpowiedzialnej za wartość zadaną i części sprzężenia zwrotnego (feedback), δu_i , odpowiedzialnej za tłumienie zakłóceń stochastycznych:*

$$u_i = \bar{u}_i + \delta u_i \quad (15)$$

Składnik *feed-forward* określa formuła afiniczna:

$$u_i = -k_x^c \bar{x}_{p,i} - k_x^r x_{p,i}^r + k_r r_i + u_i^a \quad (16)$$

gdzie: $k_x = \begin{bmatrix} k_x^c \\ k_x^r \end{bmatrix}$ i $\bar{x}_{p,i} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{p,i} \\ x_{p,i}^r \end{bmatrix}$ oraz

$$\bar{x}_{p,i+1} = F \bar{x}_{p,i} + g \bar{u}_i \quad (17)$$

$$\bar{y}_i = d' \bar{x}(ih - \tau) \quad (18)$$

Elementy w (16):

$$k_x = \frac{q_{12} + F' K g}{q_2 + g' K g}, \quad k_r = -\frac{q_{32} + g' K h}{q_2 + g' K g}, \quad (19)$$

$$u_i^a = -\frac{g p_{i+1}}{q_2 + g' K g}$$

zależą od rozwiązania K równania Riccatiego:

$$K = Q_1 + F' K F - \frac{(q_{12} + F' K g)(q_{12} + F' K g)'}{q_2 + g' K g} \quad (20)$$

oraz p_i obliczanego z zależności:

$$p_i = \begin{cases} p_\infty & i \geq N_r \\ (F' - k_x g') p_{i+1}, & i = N_r - 1, \dots, 0 \end{cases} \quad (21)$$

w której:

$$p_\infty = (I - F' + k_x g')^{-1} \times (q_{13} + F' K h - k_x (q_{32} + h' K g)) \tau, \quad (22)$$

składnik sprzężenia zwrotnego ma postać:

$$\delta u_i = -k_x^c \delta \hat{x}_{p,i|i} \quad (23)$$

gdzie:

$$\delta \hat{x}_{i|i} = \delta \hat{x}_{i|i-1} + k_i^f (\delta z_i - d' \delta \hat{x}_{i|i-1})$$

$$\delta \hat{x}_{i|i-1} = F \delta \hat{x}_{i-1|i-1} + g(h - \theta) \delta u_{i-d} + F(h - \theta) g(\theta) \delta u_{i-d-1} \quad (24)$$

$$k_i^f = \frac{\Sigma_i d}{\rho^2 + d' \Sigma_i d} \quad (25)$$

$$\Sigma_{i+1} = W + F \left(\Sigma_i - \frac{\Sigma_i d d' \Sigma_i}{\rho^2 + d' \Sigma_i d} \right) F', \quad \Sigma_i = Q_0.$$

Macierze wag określone są formami kwadratowymi:

$$Q_1 = \int_0^h F'(s) M F(s) ds, \quad q_{12} = \int_0^h F'(s) M g(s) ds,$$

$$q_2 = \int_0^h g'(s) M g(s) ds + \lambda h, \quad q_{13} = \int_0^h F'(s) M h(s) ds,$$

$$q_3 = \int_0^h h'(s) M h(s) ds, \quad q_{32} = \int_0^h h'(s) M g(s) ds, \quad (26)$$

$$F(\sigma) = e^{A\sigma}, \quad g(\sigma) = \int_0^\sigma e^{A\nu} b d\nu, \quad h'(\sigma) = \int_0^\sigma e^{A\nu} \beta d\nu, \quad (27)$$

oraz: $F = F(h)$, $g = g(h)$, $h = h(h)$.

Uwaga 1. Wyznaczenie sterowania wymaga znajomości w zależnościach (16) i (17)-(18) stanów predykowanych o czas τ ($\bar{x}_{p,i}, \delta \hat{x}_{p,i|i}, x_{p,i}^r$), które wyrażone są zależnościami [2]:

$$\bar{x}_{p,i} = F_p \begin{bmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{u}_{i-d} \\ \vdots \\ \bar{u}_{i-1} \end{bmatrix}, \delta \hat{x}_{p,i|i} = F_p \begin{bmatrix} \delta \hat{x}_{i|i} \\ \delta u_{i-d} \\ \vdots \\ \delta u_{i-1} \end{bmatrix},$$

$$x_{p,i}^r = F_p^r \begin{bmatrix} x_i^r \\ \tau_{i-d} \\ \vdots \\ \tau_{i-1} \end{bmatrix}$$

w których:

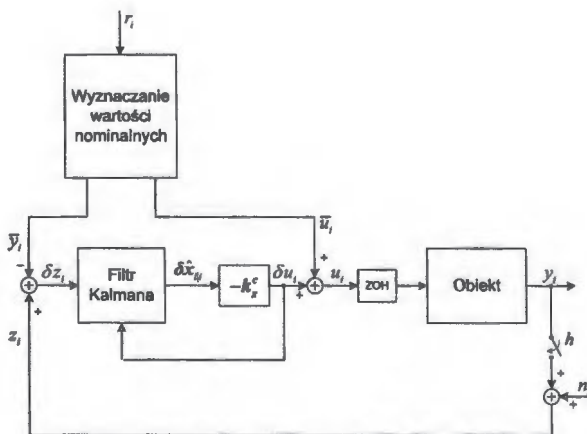
$$F_p = [F(\tau), F(\tau - \theta)g(\theta), F(dh - 2h)g, \dots, Fg, g]$$

$$F_p^r = [F^r(\tau), F^r(\tau - \theta)g^r(\theta), F^r(dh - 2h)g^r, \dots, F^r g^r, g^r]$$

oraz dla modelu obiektu: $\tau = (d - 1)h + \theta$ ($0 < \theta \leq h$).
Uwaga 2. Zgodnie z [1] zastosowano filtr Kalmana (24) ze stałym wektorem wzmocnienia k^f obliczonym z algebraicznego wariantu równania Riccatiego (25). Filtr ten zapisany został dla następującego dyskretnego opisu modelu:

$$x_{i+1} = Fx_i + g_0 u_{i-(d-1)} + g_1 u_{i-d} + w_i \quad (28)$$

gdzie: $g_0 = g(h - \theta)$, $g_1 = F(h - \theta)g(\theta)$.



Rysunek 1. Schemat blokowy układu o dwóch stopniach swobody.

Idea regulacji o dwóch stopniach swobody polega na kształtowaniu pożądanej dynamiki układu regulacji z jednoczesnym tłumieniem zakłóceń stochastycznych. Wiąże się to z prawidłowym parametryzowaniem układu regulacji, zbudowanego z pętli sprzężenia zwrotnego oraz sprzężenia w przód. W powyższym zadaniu występuje kolizja nastaw wielkości λ . Regulacja nadążna wymaga nastawy $\lambda = \lambda_r = 0$, aby jak najdokładniej przybliżyć

się do pożądanej trajektorii generowanej przez model odniesienia. W regulacji tłumienia zakłóceń, aby sterowania posiadały akceptowalne amplitudy oraz zagwarantować stabilność zamkniętego układu regulacji, należy natomiast przyjąć niezerową wartość $\lambda = \lambda_d$ ($\lambda_d > 0$). Taka nastawa zapewnia zmniejszenie wariancji sterowania przy jednoczesnym nieznacznym obniżeniu jakości regulacji. Proponowane podejście zakłada, posługiwanie się dwoma wskaźnikami jakości. Pierwszy z nich to funkcja (12) z nastawą $\lambda = \lambda_r = 0$, z której to minimalizacji otrzymuje się prawo sterowania (16) oraz drugi:

$$J_d = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{Th} E \int_0^{Th} \{y^2(t + \tau) + \lambda_d u^2(t)\} dt, \quad (29)$$

który zapewnia otrzymanie sprzężenia zwrotnego (23). Rozwiązanie to pozwala rozpatrywać postawiony cel regulacyjny jako złożony z dwóch niezależnych zadań.

4. WARIANCJA SYGNAŁÓW ORAZ WARTOŚĆ WSKAŹNIKA JAKOŚCI

Jednym z głównych celów pracy jest zaprezentowanie zależności algebraicznych pozwalających wyznaczyć: wariancję sygnałów w chwilach próbkowania ih oraz średnie w okresie próbkowania, a także średnią w okresie wartość wskaźnika jakości, w przypadku rozbieżności modelu obiektu.

Na wykresach, przy analizie ilościowej, zaprezentowane zostanie odchylenie standardowe gdyż wielkość ta lepiej charakteryzuje wartość amplitud sygnałów. Odchylenie standardowe wyjścia oraz sterowania w chwilach próbkowania wyznacza się obliczając pierwiastek kwadratowy z wariancji odpowiednich sygnałów. Podobnie, na potrzeby niniejszej pracy, odchyleniem standardowym w okresie nazwano wartość pierwiastka kwadratowego ze średniej za okres wariancji wyjścia obiektu. Poszukiwane wariancje wyprowadzono koncentrując się tylko na regulacji tłumienia zakłóceń określonej formułą (29). Wynikające z niej prawo sterowania (23), uproszczono do postaci¹: $u_i = k_x^c \hat{x}_{p,i|i}$.

4.1. Wariancja sygnałów

Poszukiwane wariancje: wyjścia z obiektu y_i^o oraz sterowania u_i w chwilach próbkowania mają postać:

$$\sigma_{y_i^o}^2 = \text{var}(y_i^o) = d_e^{o'} E \{x_{e,i}^o x_{e,i}^{o'}\} d_e^o \quad (30)$$

$$\sigma_{u_i}^2 = \text{var}(u_i) = k_x^c F_e E \{ \hat{x}_{e,i|i}^o \hat{x}_{e,i|i}^{o'} \} F_e' k_x^c, \quad (31)$$

natomiast wariancje średnie za okres obliczane są z zależności:

$$\sigma_{y(t)}^2 = \frac{1}{h} E \int_{ih}^{(i+1)h} \{y^{o2}(t + \tau^o)\} dt =$$

$$= \text{tr} \left\{ Q_1^o P_{x_p^o} + 2q_{12}^o k_x^c P_{\hat{x}_p x_p^o} + q_2^o k_x^c k_x^c P_{\hat{x}_p} + q_w \right\}$$

$$\sigma_{u(t)}^2 = \frac{1}{h} E \int_{ih}^{(i+1)h} \{u^2(t)\} dt = k_x^c k_x^c P_{\hat{x}_p} \quad (32)$$

¹Zaniechano oznaczenia „ δ ” i wciągnięto znak minus do k_x^c .

gdzie:

$$\begin{aligned} P_{x_p} &= E \{x_{p,i}^o, x_{p,i}^{o'}\} = E \{F_p^o x_{e,i}^o, x_{e,i}^{o'} F_p^{o'} + W_{\tau^o}\} \\ P_{\hat{x}_p x_p} &= E \{\hat{x}_{p,i|i}, x_{p,i}^{o'}\} = E \{F_p \hat{x}_{e,i|i} x_{e,i}^{o'} F_p^{o'}\} \\ P_{\hat{x}_p} &= E \{\hat{x}_{p,i|i}, \hat{x}_{p,i|i}'\} = E \{F_p \hat{x}_{e,i|i} \hat{x}_{e,i|i}' F_p'\} \end{aligned} \quad (33)$$

oraz²:

$$x_{p,i}^o = F_p^o x_{e,i}^o + w(ih, \tau^o), \hat{x}_{p,i|i} = F_p \hat{x}_{e,i|i} \quad (34)$$

$$E \{w(ih, \tau^o) w'(ih, \tau^o)\} = W_{\tau^o} \quad (35)$$

Wariancja sterowania w chwilach próbkowania oraz średnia za okres są równoważne gdyż wartość sterowania zgodnie z (5) jest stała w całym okresie próbkowania.

Obliczenie macierzy kowariancji zawartych w definicjach (33) wymaga obliczenia macierzy kowariancji $V_i = E \{x_i^{o,f}, x_i^{o,f'}\}$ zagregowanego dyskretnego wektora stanu $x_i^{o,f} = [x_{e,i}^{o,f}, \hat{x}_{e,i|i}^{o,f}]'$. W skład tych wektorów wchodzi:

- $(x_{e,i}^o = [x_i^{o,f}, u_{i-d^o}, \dots, u_{i-2}, u_{i-1}]')$ - stan obiektu x_i^o rozszerzony o opóźnione sterowania obiektu
- $(\hat{x}_{e,i|i}^o = [\hat{x}_{i|i}^o, u_{i-d}, \dots, u_{i-2}, u_{i-1}]')$ - stan filtru Kalmana $\hat{x}_{i|i}$ dla modelu obiektu rozszerzony sterowaniami o modelowanym opóźnieniu.

Macierz kowariancji V_i jest natomiast rozwiązaniem następującego dyskretnego równania Lapunowa:

$$V_i = H V_{i-1} H' + L W^o L' + M M' \rho^{o2}, \quad (36)$$

$$V_i = \begin{bmatrix} E \{x_{e,i}^o, x_{e,i}^{o'}\} & E \{x_{e,i}^o, \hat{x}_{e,i|i}^{o'}\} \\ E \{\hat{x}_{e,i|i}^o, x_{e,i}^{o'}\} & E \{\hat{x}_{e,i|i}^o, \hat{x}_{e,i|i}^{o'}\} \end{bmatrix}$$

w którym:

$$H = \begin{bmatrix} F_e^o & g_e^o k_x^c F_p \\ k_e^f d_e^{o'} F_e^o & E \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} I_e^o \\ k_e^f d_e^{o'} I_e^o \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 0_e^o \\ k_e^f \end{bmatrix}, E = F_e + (g_e + k_e^f d_e^{o'} g_e^o) k_x^c F_p \quad (37)$$

Elementy: F_e, g_e, k_e^f :

$$F_e = \begin{bmatrix} A & B & C & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, g_e = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]'$$

$$k_e^f = [k^f \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]'$$

(38)

są składowymi przekształconego filtru Kalmana (o strukturze przedstawionej w [1]), powstałego z zagregowanego równania filtracji:

$$\hat{x}_{i+1|i+1} = A \hat{x}_{i|i} + B u_{i-d-1} + C u_{i-d} + k^f z_i, \quad (39)$$

w którym:

$$\begin{aligned} A &= F - k^f d' F; & B &= g_1 - k^f d' g_1; \\ C &= g_0 - k^f d' g_0, \end{aligned} \quad (40)$$

²Wykorzystano zależności na predykowany stan obiektu oraz stan filtru Kalmana zawarty w opracowaniu [2].

przez dopisanie do wektora $\hat{x}_{i+1|i+1}$ poprzednich sterowań $[u_{i-d-1}, u_{i-d-2}, \dots, u_i]'$.

Macierze $F_e^o, g_e^o, d_e^o, I_e^o$, stanowią natomiast części składowe dyskretnego zagregowanego, jak w [1], opisu obiektu analogicznego jak dla modelu (28) oraz:

$$F_p^o = [F^o(\tau), F^o(\tau^o - \theta^o) g^o(\theta^o), F^o(d^o h - 2h) g^o, \dots, F^o g^o, g^o]$$

4.2. Wartość wskaźnika jakości

W pracy wyprowadzono także zależności pozwalające wyznaczyć wartość średnią w okresie wskaźnika jakości

$$I_h^c = \frac{1}{h} E \int_{ih}^{(i+1)h} \{y^{o2}(t + \tau^o) + \lambda_d u^2(t)\} dt, \quad (41)$$

Wielkość tą oblicza się korzystając ze śladu macierzowego:

$$J_{d,h} = \text{tr} \{Q_1^o P_{x_p} + 2q_{12}^o k_x^c P_{\hat{x}_p x_p} + q_2^o k_x^c k_x^c P_{\hat{x}_p} + q_w\} \quad (42)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} q_w &= \frac{1}{h} \text{tr} \{M^o P_w\}; \\ P_w &= \int_0^h (h-s) F^o(s) R_c^o F^{o'}(s) ds \end{aligned} \quad (43)$$

oraz $R_c^o = c^o c^{o'}$, $M^o = d^o d^{o'}$, $F^o = e^{A^o h}$. Numeryczny sposób obliczania (43) przedstawiono w [3].

5. PRZYKŁADY

Synteza układu regulacji opiera się na reprezentacji modelu obiektu w przestrzeni stanów. Podejście to nie wyklucza stosowania opisu transmitancyjnego do zadawania odpowiedniej dynamiki, a następnie przejścia na opis w postaci równań stanu.

Zakłada się zatem, iż obiekt regulacji składa się z toru sterowania $K^c(s)$ oraz sprowadzonego na jego wyjście toru zakłócenia $K^d(s)$:

$$K^c(s) = \frac{1}{(1+s)^2} e^{-1s}, \quad (44)$$

$$K^d(s) = \frac{k^d}{T^o s^2 + 2\xi T^o s + 1} \quad (45)$$

gdzie: $\xi = 0,5$; $T^o = 3$; $\text{var} \{y^d(t)\} = 1$. Powyższe kanały składowe zagregowane są według zależności $y(t) = y^c(t) + y^d(t)$ do pełnego opisu obiektu (1)-(2). Do analizy jakościowej wykorzystano odchylenia standardowe w okresie gdyż pełniej oddają one ciągły charakter obiektu, a jednocześnie niewiele różnią się od odchyień standardowych w chwilach próbkowania.

5.1. Tłumienie zakłóceń

Generalnie, badania można przeprowadzać w dwojaki sposób:

I - prawo sterowania, wyznaczone na podstawie bazowego modelu obiektu, wykorzystywane jest do sterowania obiektami różniącymi się od modelu (stały model - zmienne objekty),

II - do regulacji bazowego obiektu regulacji wykorzystywane są regulatory opracowane w oparciu o niedokładny model obiektu (stały obiekt - zmienne modele).

Przeprowadzono liczne badania charakterystyk układu dla niedokładności: czasu opóźnienia τ , stałej czasowej toru zakłócenia T oraz wzmocnienia toru sterowania k . Poniżej zaprezentowano najciekawsze z nich. Parametry symulacji³ ustawiono następująco: $h = 0,2$; waga $\lambda = 0,05$; wariancja szumu pomiarowego $\rho^2 = \rho^2 = 0,0001$.

Pionową przerywaną linią zaznaczono przypadek, w którym obiekt i model są identyczne (przypadek idealny).

W przypadku rozbieżności modelu obiektu wykorzystanego do syntezy regulatora rys.2.b) i 4.b) (przypadek II) wskaźnik jakości osiąga minimum w sytuacji idealnej - gdy obiekt i jego model są identyczne.

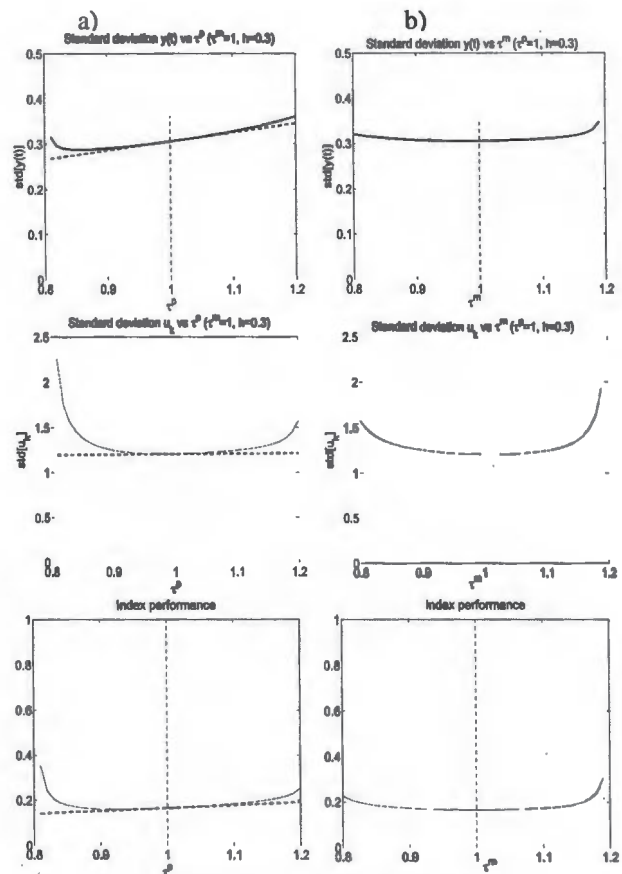
W sytuacji I a więc na rys.2.a) i 4.a) minimum wskaźnika jakości nie wypada w punkcie zgodności⁴ parametrów obiektu i jego modelu. Zatem jeżeli prawo sterowania, określone na podstawie bazowego modelu obiektu zastosujemy do innego obiektu regulacji to może się zdarzyć tak, iż wartość wskaźnika jakości oraz odchylenie standardowe wyjścia będą miały mniejsze wartości. Nie osiągną one jednak granicznych wartości jakie można by uzyskać w takim układzie stosując adekwatny do danego obiektu model - ilustruje to na rysunkach rys.2.a) linia przerywana gruba.

Z analiz wynika także, iż zastosowanie regulatora z modelem toru zakłócenia o pewnej stałej czasowej T do obiektu z szybszym torem zakłócenia $T^o < T$ może spowodować znaczny wzrost amplitud sygnału regulowanego $y(t)$ oraz sterującego u_i (rys.3). Z drugiej jednak strony zastosowanie tego regulatora do obiektu z wolniejszymi zakłóceniami $T^o > T$ może nieznacznie poprawić regulację.

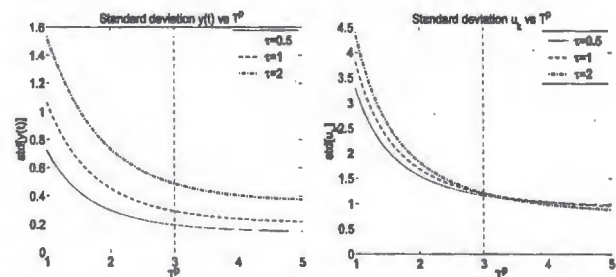
W układzie z regulatorem LQG istnieją pewne marginesy błędów nawet dla tak ważnych parametrów jakimi są: opóźnienie, stała czasowa zakłócenia czy wzmocnienie w torze głównym obiektu, dla których układ jest stabilny i nie traci wiele ze swojej „optymalności”. W takich przypadkach stosowanie wyrafinowanych algorytmów adaptacji wydaje się być zbędne. Jeżeli niedokładność parametryczna jest znaczna wówczas układ można zdestabilizować i w takich przypadkach należy dokonać korekty parametrów.

³W przypadku innych ustawień zaznaczono to na rysunkach.

⁴przerywana linia pionowa



Rysunek 2. Wpływ niedokładności opóźnienia: a) τ^o w obiekcie (przypadek I); b) τ w modelu obiektu (przypadek II)



Rysunek 3. Wpływ rozbieżności stałej czasowej T^o toru zakłócenia obiektu (przypadek I)

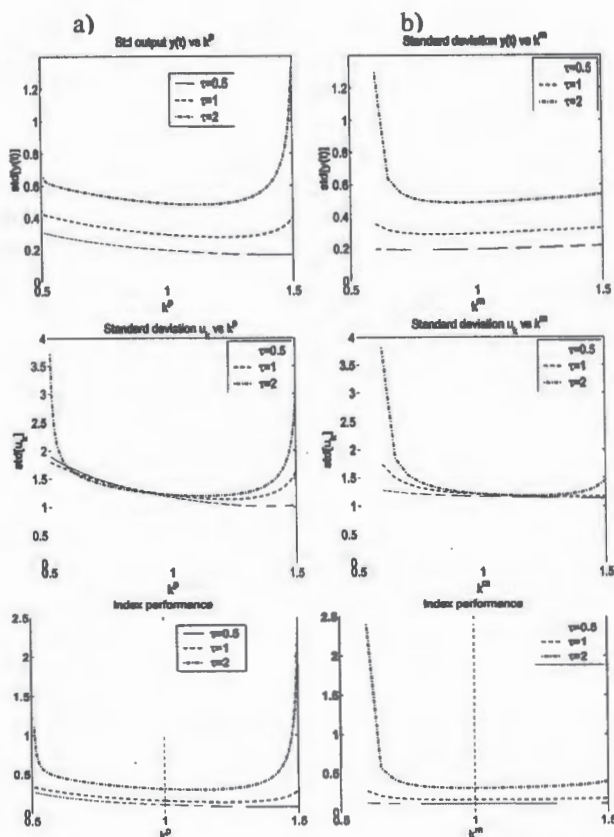
5.2. Nadążanie za modelem odniesienia

Obiekt zdefiniowano jak w (44)-(45), natomiast model obiektu przyjęto w postaci:

$$K^{m,c}(s) = \frac{1,2}{(1+s)^2} e^{-1,12s}, K^{m,d}(s) = K^d(s) \quad (46)$$

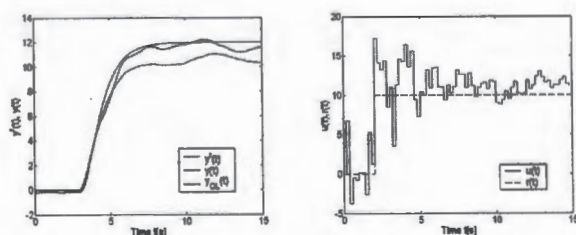
Zakłada się więc, iż przy identyfikacji obiektu popełniono błąd co do wielkości wzmocnienia oraz czasu opóźnienia. Pożądaną dynamikę układu określa model odniesienia:

$$K^r(s) = \frac{1,2}{(1+0,5s)(1+s)} e^{-1,12s} \quad (47)$$



Rysunek 4. Wpływ niedokładności wzmocnienia: a) k^o toru sterownia obiektu (przyp. I); b) k^m toru sterownia modelu obiektu (przyp. II)

Celem układu regulacji jest więc przyspieszenie działania układu⁵. Na przykładowej realizacji (rys.5) widać, iż część deterministyczna sterowania, $u_{OL}(t)$, zapewnia realizację dynamiki modelu odniesienia natomiast stochastyczne sprzężenie zwrotne, $\delta u(t)$, stara się eliminować niedokładność modelu obiektu oraz tłumić zakłócenia.



Rysunek 5. Przykładowa realizacja z efektywnie występującymi zakłóceniami stochastycznymi ($\tau = 0$, $d = 0,05$, $h = 0,2$)

6. PODSUMOWANIE

W pracy przeprowadzona została synteza oraz analiza dyskretnego regulatora LQG dla przypadku, gdy model obiektu różni się od rzeczywistego obiektu z opóźnieniem sterowania. Zaproponowana dekompozycja prawa sterowania na dwie rozłączne części umożliwia niez-

ależne traktowanie zadań nadążania i tłumienia zakłóceń, co prowadzi do niezależnych projektów części *feedback* i *feed-forward*. Istotnym osiągnięciem powyższych badań jest wyprowadzenie zależności pozwalających obliczać wariancję sygnałów oraz wartość wskaźnika jakości. Przeprowadzona analiza wykazała, iż układ ten jest mało wrażliwy na rozbieżności pomiędzy modelem a obiektem, co stawia pod znakiem zapytania konieczność stosowania układów adaptacyjnych. Otrzymana struktura regulacyjna będzie przedmiotem dalszych badań min. porównawczych z innymi metodami regulacji.

2 DOF SAMPLED-DATA CONTROL FOR TIME-DELAY PLANTS

Abstract: In this paper design rules for a 2DOF sampled-data controller for time-delayed plants, which simultaneously tracks set-point produced by a reference model and minimizes the influence of stochastic disturbance, are given and its properties with regard to possible plant-model mismatch are discussed. Formulas to compute both output variance at sampling instants, and mean intersample variance as well as value of continuous-time performance index are presented.

Literatura

- [1] K. Åström, and B. Wittenmark, *Computer-Controlled Systems*, Prentice-Hall, 1997.
- [2] B. Lennartson, Sampled-data control for time delayed-plants, *Int. J. Control*, vol. 49, no. 5, pp. 1601-1614, 1989.
- [3] B. Lennartson, T. Söderström, and Sun Zeg-Qi, Inter-sample behaviour as measured by continuous-time quadratic criteria, *Int. J. Control*, vol. 49, no. 6, pp. 2077-2083, 1989.
- [4] M. Błachuta, and R. Grygiel, Sampled-data program control via model-reference LQG, *Proc. of the 2002 American Control Conference*, pp.2973-8 vol.4 Danvers, MA, USA, 2002.
- [5] R. T. Grygiel and M. J. Błachuta: On suitability of the lag-delay approximation for performance prediction of sampled-data LQG control systems, *Proc. of the 9th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, MMAR 2003*, pp. 417-422, Międzyzdroje, Poland, 2003.
- [6] R. Grygiel and M. J. Błachuta: Design and properties of feedback-feedforward sampled-data model-reference LQG control, *Proc. of the 2004 American Control Conference*, June 30-July 2, Boston, USA, CD-ROM, 2004.
- [7] R. Grygiel: Regulacja LQG z modelem odniesienia w układzie z opóźnieniem, *Materiały V OWD*, str. 248-253 z.4, Istebna-Zaolzie, 2003.

⁵Zakłada się brak zakłóceń pomiarowych ($\tau_i^o = \tau_i = 0$).



**Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk**

ISBN 83-89475-02-2